



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Jandson Fahel Oliveira de Freitas

O problema dos anéis em buscas aleatórias em duas dimensões

Recife

2024

Jandson Fabel Oliveira de Freitas

O problema dos anéis em buscas aleatórias em duas dimensões

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional.

Orientador: Dr. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.

Recife

2024

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

F866p Freitas, Jandson Fahel Oliveira de
O problema dos anéis em buscas aleatórias em duas dimensões / Jandson
Fahel Oliveira de Freitas. – 2024.
97 f.: il., fig.

Orientador: Ernesto Carneiro Pessoa Raposo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Física, Recife, 2024.
Inclui referências e anexos.

1. Física teórica e computacional. 2. Problema dos anéis. 3. Buscas
aleatórias. 4. Caminhante de Lévy. 5. Lei de potências. I. Raposo, Ernesto
Carneiro Pessoa (orientador). II. Título.

530.1 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2024 - 52

JANDSON FAHEL OLIVEIRA DE FREITAS

O PROBLEMA DOS ANÉIS EM BUSCAS ALEATÓRIAS EM DUAS DIMENSÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 20/02/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Maurício Domingues Coutinho Filho
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcos Gomes Eleuterio da Luz
Examinador Externo
Universidade Federal do Paraná

Dedico este trabalho à minha mãe, Jaidê, que me apoiou e guiou em todos os momentos desta jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha mãe, Jaidê, por me apoiar e me guiar sempre para as melhores direções.

Agradeço ao meu orientador, Ernesto, pela sua excelente orientação e tempo dedicado para que este trabalho se tornasse possível.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Física da UFPE, por uma formação excelente em todos os cursos ofertados.

Agradeço a todos os colegas da Física pelo companheirismo durante o curso. Obrigado pela ajuda de todos vocês.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos resultados analíticos e numéricos de um caminhante aleatório no espaço bidimensional (2D) sujeito a condições de contorno absorventes na forma de dois anéis concêntricos que interrompem a caminhada uma vez que são tocados. O problema dos anéis representa uma espécie de abordagem de campo médio ao problema das buscas aleatórias em 2D, no sentido de que passos com tamanho superior ao diâmetro do anel externo não são permitidos. No problema dos anéis, um caminhante que busca encontrar um dos anéis inicia sua caminhada na posição inicial x_0 entre os dois anéis concêntricos, sendo o anel interno de raio a e o externo de raio R . Ao longo da sua trajetória, o buscador move-se até encontrar um dos anéis, com os tamanhos ℓ dos passos sorteados de acordo com uma distribuição $p(\ell)$ do tipo lei de potência com expoente $\alpha + 1$, a qual corresponde à aproximação para $\ell \gg 1$ da distribuição α -estável de Lévy. O problema dos anéis mostrou-se ser importante para o estudo das buscas aleatórias em 2D quando o objetivo é estudar a relação de encontro entre o alvo mais próximo e todos os outros que estão mais distantes da posição inicial do buscador. Para o problema dos anéis, apresentamos resultados numéricos para o estudo de como a eficiência de busca η no limite destrutivo, o tempo médio de primeira passagem $\langle t \rangle$ do buscador para encontrar um dos anéis e as probabilidades de encontrar os anéis interno e externo, respectivamente P_{int} e P_{ext} , são influenciados pelos parâmetros do sistema. Também apresentamos resultados analíticos para o limite destrutivo e revisitamos o problema dos anéis para o limite não-destrutivo. No regime não-destrutivo, obtemos que a maximização da eficiência é alcançada para $\alpha \rightarrow 1$, enquanto que para o regime destrutivo mostramos que a eficiência é maximizada no limite balístico $\alpha \rightarrow 0$. Foi mostrado também que, para α fixo, $P_{ext} > P_{int}$ antes do cruzamento das probabilidades e que $P_{ext} < P_{int}$ após o cruzamento. Por outro lado, para o estudo de P_{int} e P_{ext} em função de x_0 e R , encontramos que $P_{ext} < P_{int}$ antes do cruzamento e $P_{ext} > P_{int}$ após o cruzamento. Observamos ainda que, para x_0/R fixo, $\langle t \rangle$ aumenta com o aumento de α , enquanto que, quando fixamos α , observamos que $\langle t \rangle$ aumenta à medida que x_0 se afasta do anel interno. O problema dos anéis se mostrou, portanto, uma alternativa aproximada interessante de abordagem do problema das buscas aleatórias no espaço 2D livre (isto é, sem o anel externo limitante), as quais são bem mais difíceis de se investigar analiticamente.

Palavras-chave: problema dos anéis; buscas aleatórias; caminhante de Lévy; lei de potências.

ABSTRACT

In this dissertation we present analytical and numerical results of a random walker in a two-dimensional (2D) space subject to absorbing boundary conditions in the form of two concentric rings that cease the random walk once they are touched. The annulus (or ring) problem represents a kind of mean-field approach to the problem of 2D random searches, in the sense that steps larger than the diameter of the outer ring are not allowed. In the ring problem, a walker seeking to find one of the rings starts the walk at the initial position x_0 between the two concentric rings, with the inner ring having radius a and the outer ring having radius R . Along the trajectory, the searcher moves until it finds one of the rings, with the step sizes ℓ drawn according to a power law distribution $p(\ell)$ with exponent $\alpha + 1$, which corresponds to the approximation in the $\ell \gg 1$ regime of the Lévy α -stable distribution. The ring problem proved to be important for the study of random searches in 2D when the objective is to investigate the encounter relationship between the closest target and all others that are further away from the searcher's initial position. For the ring problem, we present numerical results on how the search efficiency η in the destructive limit, the mean first passage time $\langle t \rangle$ of the searcher to find one of the rings, and the probabilities of finding the inner and outer rings, respectively P_{int} and P_{ext} , are influenced by the system parameters. We also present analytical results for the destructive limit and revisit the ring problem for the non-destructive limit. In the non-destructive regime, we obtain that efficiency maximization is achieved for $\alpha \rightarrow 1$, while for the destructive regime we show that efficiency is maximized in the ballistic limit $\alpha \rightarrow 0$. It was also shown that, for fixed α , $P_{ext} > P_{int}$ before the crossing of probabilities, and that $P_{ext} < P_{int}$ after the crossing. On the other hand, for the study of P_{int} and P_{ext} as a function of x_0 and R , we found that $P_{ext} < P_{int}$ before crossing and $P_{ext} > P_{int}$ after crossing. We also observe that, for fixed x_0/R , $\langle t \rangle$ increases with the increase in α , while, when we fix α , we observe that $\langle t \rangle$ increases with as x_0 moves away from the inner ring. The ring problem proved, therefore, to be an interesting approximate alternative for approaching the problem of random searches in free 2D space (that is, without the limiting external ring), which are much more difficult to investigate analytically.

Keywords: annulus problem; random searches; Lévy walk; power-law.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Caminhadas aleatórias em 2D iniciadas em $(x, y) = (0, 0)$ usando a *power-law* (1.1) como distribuição para o tamanho do passo. Em todas as caminhadas mostradas abaixo, temos 10^4 passos. É importante observar a diferença entre as escalas para os três exemplos mostrados. Note que em (a) temos um comportamento balístico com passos enormes. Em (b) observamos um comportamento super-difusivo, com passos pequenos em algumas regiões seguido de voos de Lévy e, em (c), temos um comportamento do tipo browniano. 26
- Figura 2 – Caminhadas aleatórias em 2D usando a *power-law* (1.1) como distribuição para o tamanho do passo. Podemos observar em (a), a Figura(1)(b) e a Figura(1)(c) na mesma escala. Em (b) temos a área limitada pelo quadrado vermelho em (a) e, em (c), temos a área limitada pelo quadrado preto em (a). 27
- Figura 3 – Histograma lançamento de moedas através de uma modelagem numérica. No eixo das abscissas temos a variável x , com média e variância finita, definida como sendo a soma do lançamento de $N = 100$ moedas. Foi definido que se o lançamento resultar em coroa, contabilizamos 1 unidade à x e, se for cara, não contabilizamos. Após medir x , $K = 10^5$ vezes, isto é, lançar 100 moedas 10^5 vezes e calcular a soma de cada resultado, observamos a distribuição $p(x)$ da variável x . Note que o melhor ajuste do histograma é obtido através de uma curva gaussiana, concordando com Teorema Central do Limite. 31
- Figura 4 – Plotagem gráfica da gaussiana bidimensional dada pela equação (2.43) para um valor t fixo, obtida através da solução da equação de difusão em duas dimensões descrita pela equação (2.29). 38
- Figura 5 – Difusão em duas dimensões. Onde temos $K = 10^4$ caminhadas aleatórias, cada uma com $N = 10^3$ passos de tamanho unitário $\ell = 1$. Todos os caminhantes iniciaram a caminhada na posição inicial $(x, y) = (0, 0)$. Antes de executar cada passo, o caminhante escolhe uma direção aleatória entre 0 e 2π 39

Figura 6 – Histograma bidimensional das posições finais na difusão em duas dimensões. Esta figura foi formada através dos dados das posições finais de cada caminhada aleatória mostrada na Figura 5. Ao lado do histograma podemos ver uma escala de cores mostrando uma maior frequência próximo a região do ponto inicial de partida, uma característica do movimento browniano. Note também que este histograma é semelhante à visualização $2D$ da Figura 4.	39
Figura 7 – Histograma das posições x e y finais no processo difusivo em duas dimensões. Esta figura foi formada através dos dados das posições x e y finais de cada caminhada aleatória mostrada na Figura 5. Note que ambas as variáveis, x e y obedecem a mesma distribuição gaussiana, como foi previsto pela equação (2.43).	40
Figura 8 – Variância versus o número de passos no processo de difusão. Nesta figura, calculamos a variância $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 + \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$, onde, x e y representa a N -ésima posição de cada caminhada. A medida foi realizada após $K = 10^4$ caminhadas aleatórias para diferentes números de passos, representados por N	41
Figura 9 – Exemplos de funções α -estáveis. Nesta figura observamos alguns gráficos da distribuição α -estável (2.51). Temos os casos $\alpha = 0.5$ representando a distribuição de Lévy, $\alpha = 1.0$ representando a distribuição de Cauchy, $\alpha = 1.5$ e a distribuição gaussiana para o caso especial $\alpha = 2.0$	43
Figura 10 – Exemplos de funções α -estáveis. Nesta figura mostramos alguns gráficos da distribuição de probabilidades α -estável obtida através da função característica (2.48). Neste caso, temos três curvas para valores fixos de α , σ e μ , variando apenas o parâmetro de simetria β	44
Figura 11 – Busca livre no espaço bidimensional. Nesta figura podemos observar vários alvos dispersos em uma região bidimensional. Temos também um buscador representado pelo ponto azul que realiza uma busca aleatória até encontrar um alvo, finalizando sua jornada quando realiza o objetivo. Na figura está destacado alguns alvos, um alvo que estava próximo da posição de partida, e o alvo encontrado, mais afastado. Esta relação entre alvo mais próximo e alvo mais afastado do ponto de partida elucida a importância de estudar o problema dos anéis.	47

- Figura 12 – Buscas aleatórias no problema dos anéis. Nesta figura podemos observar três exemplos de buscas aleatórias no problema dos anéis. Em todos os casos, o caminhante iniciou a busca do mesmo ponto. O que diferencia as imagens apresentadas é apenas o valor do parâmetro α da *power-law* que aproxima a distribuição de Lévy. Note que em (a), o caminhante realiza um movimento balístico. Em (b) um regime super-difusivo e em (c) um comportamento browniano. Observe que, para $\alpha = 0.1$ e $\alpha = 2.0$, ambos os casos encontraram o anel externo. Enquanto que para $\alpha = 1.0$, o anel interno foi encontrado. Outro fator importante é que a medida que o valor de α aumentou, o número de passos até encontrar um dos anéis também aumentou. 48
- Figura 13 – Limite balístico caso $\alpha \rightarrow 0$. O caminhante executa, tipicamente, apenas um passo de tamanho ℓ , da posição inicial x_0 destacada pelo ponto vermelho, até encontrar um dos alvos. 49
- Figura 14 – Limite balístico caso $\alpha \rightarrow 0$. O caminhante executa apenas um passo de tamanho $D(\theta)$, da posição inicial x_0 destacada pelo ponto vermelho, até encontrar o alvo externo no primeiro quadrante. Usando a lei dos cossenos, é possível encontrar a relação entre R, x_0 e $D(\theta)$ 50
- Figura 15 – Caso destrutivo. Nesta figura, podemos ver que o caminhante inicia sua busca em uma posição x_0 equidistante de ambos os anéis. 52
- Figura 16 – Truncamento do passo. Para garantir que o caminhante finalizou sua caminhada exatamente ao encontrar um dos anéis é necessário encontrar um parâmetro $t \in [0, 1]$ que caracteriza a fração do último passo ℓ sorteado que será contabilizada e pode ser encontrado através das equações (4.1) e (4.2). Em (a) utilizamos $D = \ell t$ onde $t = 1$ devido ao fato do último passo pertencer ao espaço de busca \mathcal{S} . Em (b) notamos um cruzamento com o anel externo, portanto contabilizamos $D = \ell t$ com $t < 1$. Em (c) e (d) temos dois e três cruzamentos respectivamente, neste caso encontramos dois e três valores para $t < 1$, respectivamente. Utilizamos sempre o menor valor de t para truncar o passo. 65

- Figura 17 – Algoritmo de busca entre os anéis. A rotina é a seguinte: o buscador inicia a caminhada, sorteia um passo ℓ aleatório de comprimento dado pela *power-law*, logo após ele verifica se encontrou um dos anéis calculando t_1, t_2, t_3 e t_4 . Caso ele encontre um ou mais valores de $t \in (0, 1)$, ele escolhe o menor valor para truncar o passo, pois o menor valor de t representa a menor distância de encontro com um dos anéis como vimos na Figura 16. Caso ele não encontre $t < 1$, ele sorteia outro passo ℓ e repete tudo mais uma vez, mantendo a rotina até que a condição para finalizar a busca seja encontrada e assim, encerre sua caminhada. 66
- Figura 18 – Na imagem abaixo podemos observar $N = 10^4$ buscas aleatórias realizadas entre dois anéis concêntricos utilizando a *power-law* com $\alpha = 1.0$ para sortear os passos. Todas as buscas iniciaram da mesma posição x_0 e caminharam aleatoriamente até que encontrassem um dos anéis. Todas as caminhadas são independentes uma da outra. Uma observação importante é que todo espaço de busca \mathcal{S} foi preenchido, garantindo a aleatoriedade da simulação computacional. 67
- Figura 19 – Função que gera números aleatórios da distribuição de Lévy escrita na linguagem Python. 69
- Figura 20 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a distribuição de Lévy para o comprimento de passos. Quanto menor for o valor de δ , mais próximo do anel interno será o ponto de partida do buscador, caracterizando o regime não-destrutivo. Nesta imagem mostramos que conseguimos obter resultados obtido anteriormente para o problema dos anéis. Note que a eficiência tende a ser máxima em $\alpha = 1$ quando $\delta \rightarrow 0$. Perceba que os pontos obtidos na simulação tendem a concordar com o resultado exato para o limite balístico dado por $\eta_0 = R/\langle|\ell|\rangle$, onde $\langle|\ell|\rangle$ é dado pela equação (3.8). Para produzir estes resultados foi definido $\sigma = 0.01$, $a = 1$, $R = 1/\rho$ com $\rho = 5.2 \times 10^{-2}$ e limitamos D_{max} em 10^6 de unidades. 70

- Figura 21 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a *power-law*. Para produzir estes resultados foi definido $\ell_0 = \sigma = 0.01$, $a = 1$, $R = 1/\rho$ com $\rho = 5.2 \times 10^{-2}$ e limitamos D_{max} em 10^6 de unidades. Perceba que obtemos um comportamento muito semelhante ao resultado utilizando a Lévy, a eficiência aumenta a medida que δ diminui e também observamos que a maximização tende a ser encontrada em $\alpha = 1.0$, quando $\delta \rightarrow 0$. Entretanto, a eficiência de busca normalizada η_0 é maior utilizando a Lévy. Perceba também que, novamente, os pontos obtidos na simulação tendem a concordar com o resultado exato para o limite balístico dado por $\eta_0 = R/\langle|\ell|\rangle$, onde $\langle|\ell|\rangle$ é dado pela equação (3.8). 71
- Figura 22 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a *power-law* variando o parâmetro ℓ_0 . Para esta simulação fixamos $R = 100$, $\delta = 0.01$ e $D_{max} = 10^7$. Na imagem, notamos que a maximização de η tende a ser encontrada em $\alpha = 1$, como esperado para o regime não-destrutivo. Notamos também que a eficiência é maximizada a medida que ℓ_0 diminui. Como a eficiência para $\alpha \rightarrow 0$ não depende do parâmetro ℓ_0 as três curvas devem convergir para o mesmo ponto a medida que α se aproxima de 0. 72
- Figura 23 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a *power-law*. Para este caso, utilizamos os parâmetros: $R = 100$, $\ell_0 = 0.001$ e D_{max} limitada em um milhão de unidades. Também foi mantido $x_0 = a(\delta + 1)$. Note que a maximização de η , neste caso, também tende a ser encontrada em $\alpha = 1$ a medida que a posição inicial do caminhante se aproxima do anel interno, como esperado. Perceba também que os pontos obtidos na simulação tendem a concordar com o resultado exato para o limite balístico dado por $\eta = 1/\langle|\ell|\rangle$, onde $\langle|\ell|\rangle$ é dado pela equação (3.8). 73
- Figura 24 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a *power-law* variando o raio R do anel externo. Neste caso foi mantido fixo $x_0 = a(\delta + 1)$ com $\delta = 0.01$, $D_{max} = 10^6$, e $\ell_0 = 0.001$. Como podemos observar, quanto menor for o raio do anel externo, maior será a eficiência. Podemos observar que o aumento da eficiência acontece em todos os valores do parâmetro α , o motivo está relacionado ao fato da eficiência ser inversamente proporcional a distância total percorrida. Pois, com o aumento de R , consequentemente a distância total percorrida até encontrar um dos anéis será maior. 74

Figura 25 – Resultados numéricos e analíticos para o caso destrutivo usando a *power-law*. Para este estudo, foi realizado uma simulação computacional que modelava a busca entre os anéis utilizando $R = 5000$, $a = 1$, $x_0 = R/2$ com $D_{max} = 10^9$ para $\alpha \in [0.1, 0.5]$, $D_{max} = 10^8$ para $\alpha \in [0.6, 0.8]$ e $D_{max} = 10^7$ para $\alpha \in [0.9, 1.4]$. Na imagem, temos resultados da simulação escrita em Python representada por quadrados na cor azul, temos também a aproximação obtida de forma analítica no capítulo anterior, dada pela equação (3.44) representada pela curva vermelha. O resultado exato para o limite balístico em que o caminhante realiza a busca em apenas um único passo está apresentado por um ponto verde. Para a curva analítica (3.44) utilizamos $x_0 = bR$ e a melhor aproximação com os dados numéricos foi encontrada em $b = 0.625$ 75

Figura 26 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *seacher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro α da *power-law*. Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de α entre 0.1 e 1.4, mantendo x_0 , $a = 1$, $R = 100$ e $l_0 = 0.001$ fixos. Podemos observar que, para $x_0/R = 0.011$, a igualdade $P_{int} = P_{ext} = 1/2$ ocorre em $\alpha \approx 0.3$. Para $x_0/R = 0.022$, a igualdade ocorre em $\alpha \approx 1.2$. Note também que, para ambos os casos $P_{int} < P_{ext}$ antes do cruzamento das probabilidades, isto é, $P_{int} < P_{ext}$ para $\alpha < 0.3$ quando $x_0/R = 0.011$ e $P_{int} < P_{ext}$ para $\alpha < 1.2$ quando $x_0/R = 0.022$ 76

Figura 27 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *seacher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro α da *power-law*. Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de α entre 0.1 e 1.4, mantendo x_0 , $a = 1$, $R = 100$ e $l_0 = 0.001$ fixos. A medida que a posição inicial se afasta do anel interno, notamos que o cruzamento das probabilidades ocorre para maiores valores de α , de modo que, chegará um momento que não haverá o cruzamento de P_{int} e P_{ext} , como podemos ver na imagem abaixo. No também que $P_{ext} > P_{int}$ antes do cruzamentos da probabilidade e que $P_{ext} < P_{int}$ após o cruzamento. 77

Figura 28 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *seacher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro x_0 . Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de x_0/R entre 0 e o ponto de cruzamento das probabilidades, mantendo $a = 1$, $R = 100$, $l_0 = 0.001$ e α fixos. Podemos observar que $P_{int} > P_{ext}$ para todos os valores de α 78

Figura 29 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *seacher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro x_0 . Nesta imagem podemos observar de forma mais detalhada o comportamento de P_{int} e P_{ext} para os casos $\alpha = 0.1$ e $\alpha = 0.2$. Veja que as curvas possuem o mesmo comportamento para todos os valores de α 79

Figura 30 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *seacher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro $x_0/R \in (0, 1)$ e $\alpha = 0.4$. Aqui, podemos ver que os cruzamentos das probabilidades P_{int} e P_{ext} observados ocorrem apenas no limite não-destrutivo, quando a posição inicial da busca é muito próxima do anel interno. Note que imediatamente após o cruzamento, o buscador encontra apenas o anel externo. 80

Figura 31 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. Tempo Médio de Primeira Passagem em função de α . A imagem abaixo mostra resultados numéricos de $\langle t \rangle$ em função do parâmetro α para alguns diferentes valores de x_0 , visto que R foi mantido fixo em $R = 100$ para todos os casos apresentados. Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de α entre 0.1 e 1.4, mantendo x_0 fixo. Em (a), temos $\langle t \rangle$ em função de α entre 0.1 e 1.4. Em (b), temos $\langle t \rangle$ em função de α entre 0.1 e 1.0. Enquanto que, em (c), temos $\langle t \rangle$ em função de α entre 0.1 e 0.5. Perceba que para $\alpha \in [0.1, 0.2]$ o número médio do passos dados não muda, isto ocorre devido ao fato que, neste intervalo para o parâmetro α , o caminhante consegue realizar grandes saltos com mais frequência. Para valores de α entre 0.3 e 1.4 observamos para todos os casos que o número médio de passos até encontrar um dos anéis aumenta à medida que o valor de α aumenta. Também podemos ver que à medida que x_0 se afasta do anel interno, o número médio de passos dados também aumenta. 81

LISTA DE SÍMBOLOS

η	Eficiência de busca
R	Raio do anel externo
a	Raio do anel interno
α	Parâmetro de estabilidade da Lévy
x_0	Posição inicial da busca
D_{max}	Distância máxima percorrida pelo buscador
N	Número de alvos encontrados
ℓ_0	Menor passo sorteado pela <i>power-law</i>
ℓ	Tamanho do passo
$p_\alpha(\ell)$	Distribuição <i>power-law</i>
$p(\theta)$	Distribuição uniforme para a escolha da direção do passo
$\langle \ell \rangle$	Comprimento de passo médio
θ	Ângulo teta
$D(\theta)$	Distância balística até uma das bordas
$\langle L \rangle$	Distância média total percorrida da posição inicial até encontrar um do alvos
\mathcal{S}	Espaço bidimensional de busca
$\langle n \rangle$	Número médio de passos dados
$\langle t \rangle$	Tempo médio de primeira passagem
P_{int}	Probabilidade de encontrar o anel interno
P_{ext}	Probabilidade de encontrar o anel externo
$P_n^{surv}(\vec{r}_0)$	Probabilidade de sobrevivência

$P_n(\vec{r}_0)$	Probabilidade de que um dos anéis seja encontrado após n passos
$\langle L_n \rangle(\vec{r}_0)$	Comprimento médio das caminhadas iniciadas em \vec{r}_0 que encontraram um dos anéis após n passos
$\langle f(x) \rangle$	Valor médio da função $f(x)$
$\Gamma(x)$	Função gama
${}_2F_1(a, b, c, z)$	Função hipergeométrica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	BUSCAS ALEATÓRIAS E O PROBLEMA DO FORRAGEAMENTO	20
1.1.1	Apresentação da dissertação	23
1.2	O PROBLEMA DA BUSCA E AS CAMINHADAS ALEATÓRIAS	24
2	FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PROBABILIDADES E MECÂNICA ESTATÍSTICA	28
2.1	DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES CONTÍNUAS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	28
2.1.1	Momentos de uma distribuição	30
2.1.2	Valor esperado de uma função	30
2.2	TEOREMA CENTRAL DO LIMITE	30
2.3	DIFUSÃO GAUSSIANA EM DUAS DIMENSÕES	33
2.4	TEOREMA CENTRAL DO LIMITE GENERALIZADO	41
2.4.1	Distribuições estáveis de Lévy	41
2.4.2	Aproximação da distribuição de Lévy para uma lei de potência	44
3	O PROBLEMA DOS ANÉIS	47
3.1	SOLUÇÃO EXATA PARA O LIMITE BALÍSTICO	49
3.2	SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O LIMITE DESTRUTIVO PARA A EFICIÊNCIA	52
3.2.1	Aplicação para a lei de potência $p_\alpha(\ell)$	57
3.3	REVISITANDO O LIMITE NÃO-DESTRUTIVO	61
4	PROBLEMA DOS ANÉIS: RESULTADOS NUMÉRICOS	64
4.1	ALGORITMO DE BUSCA ENTRE OS ANÉIS	64
4.2	ESTUDO DA EFICIÊNCIA DE BUSCA	68
4.2.1	Regime não-destrutivo	68
4.2.2	Regime destrutivo	72
4.3	PROBABILIDADES DE ABSORÇÃO	76
4.4	TEMPO MÉDIO DE PRIMEIRA PASSAGEM	80
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	83
	REFERÊNCIAS	86

ANEXO A – PROGRAMA UTILIZADO PARA CALCULAR A EFI- CIÊNCIA NUMÉRICA NO PROBLEMA DOS ANÉIS	90
ANEXO B – PROGRAMA UTILIZADO PARA CALCULAR O TEMPO MÉDIO DE PRIMEIRA PASSAGEM NO PROBLEMA DOS ANÉIS	93
ANEXO C – PROGRAMA UTILIZADO PARA SIMULAR DIFU- SÃO EM DUAS DIMENSÕES	96

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos uma breve passagem pela história, citando trabalhos e cientistas que contribuíram para que novos conhecimentos em problemas de buscas aleatórias fossem descobertos. Desde a ideia mais simples de caminhadas aleatórias à estratégias de otimização de busca. Mostraremos alguns exemplos de caminhadas aleatórias e, introduziremos objetivo deste trabalho, apresentando o problema dos anéis em buscas aleatórias.

1.1 BUSCAS ALEATÓRIAS E O PROBLEMA DO FORRAGEAMENTO

A completa falta de conhecimento da localização de um objeto induz um determinado buscador a realizar uma caminhada aleatória até que ele encontre o objeto desejado, caracterizando o fenômeno de buscas aleatórias (LUZ et al., 2009). Temos diversos problemas que são caracterizados como buscas aleatórias, por exemplo, a busca por alimento entre animais em ambientes escassos colocando a espécie no limiar entre a sobrevivência e a extinção, ou, até mesmo ao procurar as chaves perdidas quando se está apressado (VISWANATHAN et al., 2011). Temos buscas aleatórias em diversas escalas, por exemplo, a nível molecular, observamos neurotransmissores como dopamina ou serotonina em busca de locais de ligação em proteínas transmembrana (SHLESINGER, 2009).

O movimento de um animal está relacionado ao efeitos combinados pelo ambiente em que ele vive e suas condições físicas de navegação (BARTUMEUS; LEVIN, 2008), como a capacidade de memorizar locais visitados anteriormente, por exemplo (RIOTTE-LAMBERT; BENHAMOU; CHAMAILLÉ-JAMMES, 2016). Eventos como mudanças climáticas, escassez (ou abundância) de alimentos, influenciam diretamente no número de elementos de todas as espécies de animais (DARWIN, 1859). Se por acaso um animal não conseguir encontrar comida, seja qual for o motivo, ele morre. Visto isso, com o passar dos anos, podemos supor que a seleção natural favoreceu apenas aqueles animais que são ótimos buscadores de alimento, pois, para garantir a sobrevivência é necessário manter sempre um saldo positivo de calorias e nutrientes (VISWANATHAN et al., 2000). O problema da busca por alimento, ou, como é conhecido na literatura, o problema do forrageamento (*foraging problem*) é extremamente útil e, resultados importantes foram encontrados a partir do ano de 1990 (VISWANATHAN et al., 2011).

O problema de buscas aleatórias é, basicamente, a detecção de alvos realizadas por um

caminhante aleatório. Destacaremos três modelos de caminhadas aleatórias neste texto. O primeiro, formulado inicialmente por Pearson em 1905 (PEARSON, 1905), o caminhante não possui uma direção favorita para cada passo dado e, o passo futuro depende apenas do último passo realizado. Podemos caracterizar esta caminhada sem viés de direção como processo markoviano (SALINAS, 2018). No segundo modelo, o caminhante possui um viés entre cada passo dado, podendo ter uma direção favorável de ser escolhida (PATLAK, 1953), que pode ser definida pelo instinto do animal no forrageamento, por exemplo. Por último, temos as caminhadas aleatórias intermitentes, caracterizadas pelo fato de apresentar dois tipos de comportamentos, num dado momento realiza um comportamento Browniano, em outro instante, realiza alguns saltos balísticos (LOMHOLT et al., 2008).

A primeira estratégia para obter otimização máxima em buscas aleatórias foi apresentada para a comunidade científica no final do século XX, ao investigar qual seria a distribuição de comprimento de passos ideal para maximizar a eficiência de busca para o limite não-destrutivo ¹ e destrutivo ² (VISWANATHAN et al., 1999). Uma forma de definir a eficiência η de busca é através da razão do número de alvos N encontrados pela distância total percorrida pelo buscador D_{total} , isto é, $\eta = N/D_{total}$ (COLAÇO et al., 2022). Também podemos relacionar a eficiência em problemas de buscas aleatórias com o tempo de primeira passagem (SHLESINGER, 2009).

Ainda em 1999 foi proposto que distribuições do tipo Lévy para o comprimento de passos é uma excelente estratégia de busca (VISWANATHAN et al., 1999). A distribuição de Lévy pode ser aproximada, para passos $|\ell|$ largos, podendo ser representada de forma aproximada por uma função do tipo lei de potências $p(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ (RAPOSO; GOMES, 2015) e maximiza a eficiência de busca, em qualquer dimensão, no limite não-destrutivo quando $\mu = 2$ e, para o limite destrutivo, a otimização é alcançada quando $\mu \rightarrow 1$ (VISWANATHAN et al., 1999).

Ao longo dos anos, também surgiram trabalhos que questionaram os resultados apresentados em 1999, afirmando, em 2020, que o inverso quadrado da *power-law* que aproxima a distribuição de Lévy maximiza a busca apenas para os casos unidimensionais. Para os casos em que a dimensão é maior ou igual a dois, a eficiência de busca não é maximizada quando $\mu = 2$ (LEVERNIER et al., 2020). Entretanto, havia um pequeno erro no trabalho apresentado em 2020, que levou a conclusões precipitadas acerca de buscas em duas ou mais dimensões

¹ Quando o *seacher* inicia a busca próximo ao alvo. Isto é, no processo biológico da busca por alimento, o animal encontra-se em uma região abundante em alimentos.

² Quando o *seacher* inicia a busca distante do alvo. Isto é, no processo biológico da busca por alimento, o animal encontra-se em uma região escassa em alimentos.

(BULDYREV et al., 2021).

Diversos resultados numéricos encontrados a partir de simulações que modelavam um caminhante em busca de alvos fixos espalhados aleatoriamente confirmaram a hipótese proposta em 1999. Uma modelagem numérica no espaço euclidiano contínuo em duas dimensões publicado em 2004 confirmou que para o limite não-destrutivo a eficiência é máxima quando o movimento do caminhante aleatório é super-difusivo ³ e, para o limite destrutivo o *walk* encontra mais alvos quando realiza movimentos balísticos (SANTOS et al., 2004).

Através de simulações computacionais em redes quadradas e triangulares realizadas em 2005, mostrou-se que a eficiência de busca no espaço discreto em duas dimensões depende da densidade de alvos. Para baixa densidade de alvos, a busca é maximizada utilizando o inverso quadrado da lei de potência como estratégia para escolha do tamanho do passo (SANTOS et al., 2005). Ao comparar caminhadas aleatórias de Lévy com outros tipos de caminhadas, foi observado que *Lévy flights* são mais eficientes em estratégias de navegação realizadas em redes complexas (GUO et al., 2016) (RIASCOS; MATEOS, 2012). Estudos numéricos de ambientes fragmentados também mostraram que a maximização da eficiência de busca é alcançada quando $\mu = 2$ (WOSNIACK et al., 2015).

Análise de dados obtidas a partir do monitoramento de animais enquanto buscavam por alimento foi muito importante para entender quais estratégias são utilizadas por eles durante o forrageamento. Movimentos do tipo voo de Lévy (*Lévy flight*) foram detectados em diversas espécies de animais que vivem em nosso planeta, sendo uma estratégia mais eficiente na busca por alimento. Por exemplo, dados de predadores marinhos durante o forrageamento mostraram que tubarões, tartarugas, atum-papudo e bacalhau-do-atlântico movem-se com distribuição de passos dada pelo inverso quadrado da lei de potência durante o processo biológico da busca por comida (SIMS et al., 2008).

No ambiente em que se busca por alimento, um animal deve adaptar seu comportamento para maximizar sua busca. Na natureza, observamos diversos animais que realizam caminhadas de Lévy durante o forrageamento (BENHAMOU, 2007). Em 2012, foi observado que albatrozes conseguem exceder suas necessidades diárias, capturando mais presas, enquanto realizam caminhadas de Lévy (HUMPHRIES et al., 2012). Este comportamento também foi observado entre macacos-aranha da Península de Yucatã em 2003 (RAMOS-FERNÁNDEZ et al., 2003), em humanos durante uma busca aleatória simulada em ambiente virtual (GARG; KELLO, 2021) e, também, em microrganismos enquanto buscavam por comida (BARTUMEUS et al., 2003).

³ Quando o parâmetro $\mu \in (1, 3)$.

Caminhadas de Lévy também podem descrever e explicar o comportamento de mexilhões (REYNOLDS, 2014), cupins (MIRAMONTES et al., 2014) e pulgões, uma praga que se alimenta de vegetais (PETROVSKII; MASHANOVA; JANSEN, 2011). Entretanto, em alguns casos, esta estratégia não é a mais eficiente, como é o caso das formigas do deserto australiano (SCHULTHEISS; CHENG, 2011). Um outro fator interessante é que movimentos do tipo Lévy é um mecanismo importante na adaptação de espécies em ambientes escassos, evitando uma superexploração que pode levar a extinção das presas procuradas (DANNEMANN; BOYER; MIRAMONTES, 2018).

A estatística de Lévy despertou o interesse de muitos pesquisadores por estar presente em diversos fenômenos físicos estudados em centros de pesquisa. São inúmeras aplicações. Encontramos caminhadas de Lévy em diversas áreas da ciência. Podemos encontrar diversos trabalhos que interpretam a distribuição de Lévy de alguma forma, por exemplo, na Fotônica, ao estudar emissão de luz em lasers aleatórios produzidos em fibra óptica (GOMES et al., 2023) e, em sistemas ordenados utilizando lasers convencionais (ROCHA et al., 2020). Em Física Atômica, observamos comportamentos do tipo Lévy na propagação da luz em vapor atômico ressonante (CARVALHO et al., 2015).

De forma mais geral, na Biologia a estatística de Lévy é importante pelo fato de caracterizar o movimento de inúmeras formas de vida presente no planeta. Na Física encontramos Lévy *walks* em sistemas hamiltonianos de partículas, fenômenos de transporte, caminhadas de fótons e na ótica de átomos frios. Também encontramos aplicações de caminhadas de Lévy em aprendizagem de robôs (ZABURDAEV; DENISOV; KLAFTER, 2015).

1.1.1 Apresentação da dissertação

Neste trabalho, modelamos numericamente um caminhante aleatório em duas dimensões sujeito a duas condições de contorno absorventes, que serão interpretadas como alvos a serem encontrados. Trata-se de um *walker* que inicia sua busca entre dois anéis concêntricos e, de forma estocástica, escolhe uma direção aleatória entre 0 e 2π com tamanho do passo definido pela distribuição *power-law*, definida para valores de α entre 0 e 2, onde $\alpha = \mu - 1$, caracterizando apenas caminhadas de Lévy.

A eficiência de busca para problemas de duas barreiras absorventes foi estudada nas três dimensões do espaço de Euclides. Para o limite não-destrutivo, foi mostrado que a maximização é alcançada quando a distribuição do tamanho dos passos se aproxima do inverso quadrado da *power-law* para uma dimensão (COLAÇO et al., 2022), em duas dimensões, quando o problema

dos anéis concêntricos foi estudado e teve o algoritmo de busca apresentado à comunidade científica pela primeira vez, e, em três dimensões com o problema das esferas concêntricas, uma generalização do problema no espaço bidimensional (CARAMÊS et al., 2022).

Além da eficiência de busca que foi mencionada anteriormente, também podemos estudar o tempo médio de primeira passagem que o caminhante leva para encontrar um dos dois alvos ou barreiras absorventes, bem como a probabilidade de encontro para os dois alvos enquanto variáveis do sistema são alteradas, como foi feito em uma dimensão para os limites destrutivo e não-destrutivo em 2021 (NICOLAU et al., 2021) e em 2022 (COLAÇO et al., 2022).

Para o problema do anéis, apresentamos, neste trabalho, pela primeira vez, resultados numéricos para a eficiência de busca no limite destrutivo, tempo médio de primeira passagem que o *walk* realiza para encontrar um dos anéis e como as probabilidades de encontrar os alvos são influenciadas através de mudanças sobre os parâmetros do sistema. Também apresentamos resultados analíticos inéditos para o limite destrutivo e revisitamos o problema dos anéis para o limite não-destrutivo.

Em nossos resultados, também foi observado que a eficiência no limite destrutivo é maximizada quando o *walker* realiza movimentos balísticos. Para o tempo médio de primeira passagem encontramos o mesmo comportamento encontrado em uma dimensão (NICOLAU et al., 2021), entretanto, com grandeza distinta. Também encontramos cruzamento entre as probabilidades de absorção, como foi encontrado no modelo estudado em 2022, onde um caminhante com um raio de visão finito buscava de forma aleatória alvos localizados em um plano bidimensional (COLAÇO et al., 2022).

1.2 O PROBLEMA DA BUSCA E AS CAMINHADAS ALEATÓRIAS

Para encontrar um alvo que se localiza em uma posição desconhecida, um certo buscador é induzido a realizar uma caminhada aleatória até que possa encontrá-lo. Podemos dividir as caminhadas aleatórias em duas classes em relação ao tamanho dos passos dados. No primeiro caso, a média do tamanho dos passos dados é finita e, no segundo, a média do tamanho dos passos não é finita ou definida. Nesta seção será apresentado alguns exemplos de movimentos aleatórios e suas principais características em buscas aleatórias.

Podemos observar aplicações de caminhadas aleatórias desde a mecânica quântica até a econometria (ZABURDAEV; DENISOV; KLAFTER, 2015). O movimento aleatório foi observado inicialmente pelo botânico Robert Brown, em 1826, após observar grãos de pólen em meio

aquoso utilizando apenas um simples microscópio (V.P.L.S., 1828). Anos após, este tipo de movimento ficou conhecido como movimento Browniano (REICHL, 2004). Em 1905, Einstein investigou a natureza deste movimento, supondo que o movimento irregular de partículas suspensas em determinado líquido era causado pelo movimento das partículas que compõem o meio (EINSTEIN, 1926). Isto foi muito importante para o estudo da estrutura atômica na época (SALINAS, 2018).

No estudo das caminhadas aleatórias, também podemos classificar os movimentos a partir da forma em que o caminhante escolhe a direção em que realizará o passo. O modelo mais simples, SRW, ⁴ consiste em escolher aleatoriamente a direção do passo, a próxima posição que o caminhante ocupará depende apenas da posição imediatamente anterior, ou seja, um processo markoviano. Temos também as caminhadas aleatórias correlacionadas (CRWs)⁵ que envolve uma relação entre cada passos dado, produzindo um viés entre os passos realizados. Diversos animais tendem a utilizar CRWs (CODLING; PLANK; BENHAMOU, 2008).

Temos também as caminhadas intermitentes, que foram brevemente apresentadas na seção anterior, onde estão inseridas as caminhadas aleatórias de Lévy, um caso especial das caminhadas aleatórias idealizadas inicialmente por Rayleigh e Pearson em 1905 (PEARSON, 1905). Utilizando a estratégia de busca através das caminhadas intermitentes, o tempo de busca é minimizado (BÉNICHOU et al., 2005). Este tipo de movimento é caracterizado pelo fato do caminhante sortear passos curtos por um determinado tempo e, volta e meia, realizar passos longos, habitualmente chamados de voos de Lévy (REICHL, 2004).

Podemos entender de forma clara, como uma caminhada intermitente é caracterizada através da busca de uma chave perdida. Quando tentamos encontrar a chave perdida, alternamos nossa atenção de duas formas. A primeira, vasculhamos completamente um local de forma reativa lenta e, na segunda forma, fazemos uma realocação rápida e vamos vasculhar um outro local até que a chave seja finalmente encontrada (BÉNICHOU et al., 2011).

Neste trabalho, todas as simulações foram realizadas utilizando a lei de potências como distribuição de passos, dada por:

$$p_{\alpha}(\ell) = \frac{\alpha \ell_0^{\alpha}}{\ell^{\alpha+1}}, \ell \geq \ell_0, \quad (1.1)$$

onde, ℓ_0 representa o comprimento do menor passo realizado pelo caminhante e, $0 < \alpha \leq 2$. Temos a relação entre α e μ : $\mu = \alpha + 1$. Esta representação introduz o parâmetro α , de

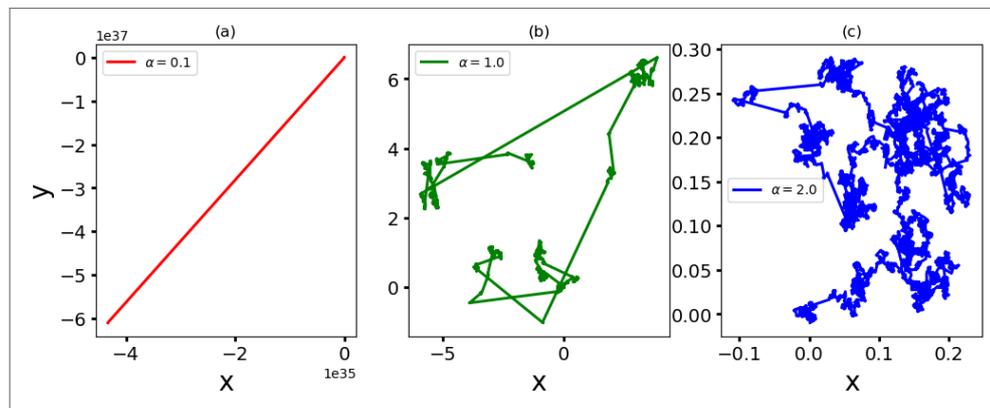
⁴ SRW - *Simple Random Walk*.

⁵ CRWs - *Correlated Random Walks*.

modo que, podemos ter diversas distribuições para o comprimento do passo do caminhante (VISWANATHAN et al., 1999).

A power-law (Pareto) é uma forma aproximada da distribuição de Lévy, com dinâmica de busca do tipo browniano ou difusivo quando $\alpha = 2$, de acordo com teorema central do limite, comportamento super-difusivo ou de Lévy no intervalo $0 < \alpha < 2$ e, também executa movimentos balísticos no limite $\alpha \rightarrow 0$ (COLAÇO et al., 2022).

Figura 1 – Caminhadas aleatórias em 2D iniciadas em $(x, y) = (0, 0)$ usando a *power-law* (1.1) como distribuição para o tamanho do passo. Em todas as caminhadas mostradas abaixo, temos 10^4 passos. É importante observar a diferença entre as escalas para os três exemplos mostrados. Note que em (a) temos um comportamento balístico com passos enormes. Em (b) observamos um comportamento super-difusivo, com passos pequenos em algumas regiões seguido de voos de Lévy e, em (c), temos um comportamento do tipo browniano.



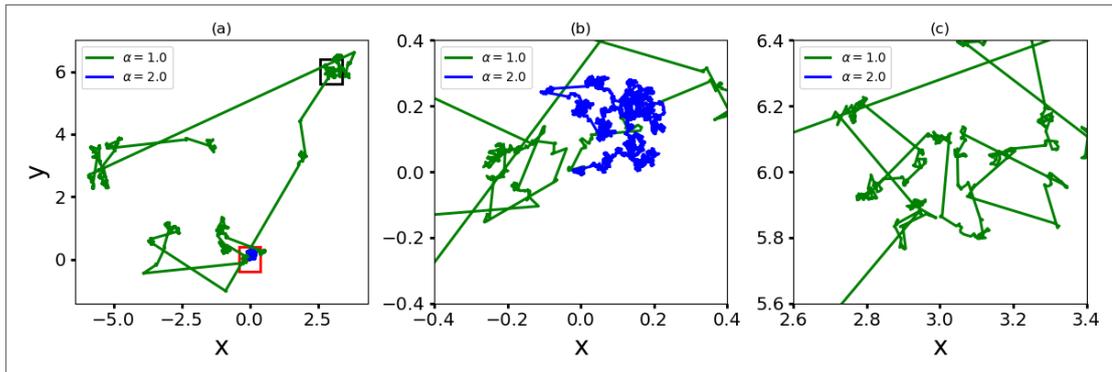
Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Podemos diferenciar o movimento browniano das caminhadas de Lévy de forma simples. No movimento browniano, o comprimento do passo dado pelo caminhante segue uma escala característica, com média e variância bem definidas. Nas caminhadas de Lévy, os passos não possuem uma escala característica, com média e variância não definidas (VISWANATHAN et al., 2000). Em buscas aleatórias, caminhadas de Lévy são mais eficientes devido ao fato de retornarem a sítios visitados com menos frequência que caminhantes que realizam o movimento browniano (VISWANATHAN et al., 1999). Entretanto, é possível que um caminhante de Lévy se aproxime de um alvo sem identificá-lo (COLAÇO et al., 2022).

Na Figura 1 podemos observar três caminhadas com 10^4 passos determinados através da distribuição dada pela lei de potência definida pela Equação (1.1) para três valores distintos do parâmetro α . Todas as caminhadas foram iniciadas em $(x, y) = (0, 0)$. Para $\alpha \rightarrow 0$ é esperado maior probabilidade de realizar passos longos, caracterizando o comportamento balístico neste regime do parâmetro α , como está mostrado na Figura (1)(a). Na Figura (1)(b) podemos observar uma sequência de passos pequenos seguidos de saltos longos ou voos de

Lévy com tamanhos variados, diferente do que vemos na Figura (1)(c), uma caminhada com passos que possuem uma escala característica bem definida, performando um comportamento do tipo browniano.

Figura 2 – Caminhadas aleatórias em 2D usando a *power-law* (1.1) como distribuição para o tamanho do passo. Podemos observar em (a), a Figura(1)(b) e a Figura(1)(c) na mesma escala. Em (b) temos a área limitada pelo quadrado vermelho em (a) e, em (c), temos a área limitada pelo quadrado preto em (a).



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Na Figura 2(a) podemos observar a Figura1(b) e a Figura1(c), mostrando a diferença da escala entre as duas caminhadas. A área visitada pelo caminhante é bem maior quando $\alpha = 1$, enquanto que, para $\alpha = 2$ o caminhante retorna mais vezes em um mesmo local visitado antes. A Figura 2(b) mostra a área limitada pelo quadrado vermelho na Figura 2(a) mostrando que a caminhada browniana se afasta muito pouco do local onde foi iniciada e, na Figura 2(c) temos a área limitada pelo quadrado preto na Figura 2(a), mostrando que nas regiões onde o caminhante realizou pequenos passos comparados com os voos de Lévy também não seguem uma escala bem definida, com caráter super-difusivo.

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PROBABILIDADES E MECÂNICA ESTATÍSTICA

Neste capítulo, apresentaremos elementos básicos de Teoria de Probabilidades e da Mecânica Estatística. Iniciaremos abordando variáveis aleatórias, distribuições de probabilidades e seus momentos. Aqui, veremos como surgiu a distribuição de lei de potências para distribuição de passos que foi apresentada no capítulo anterior. Também apresentaremos dois teoremas importantes para entender o comportamento de variáveis aleatórias, o Teorema Central do Limite (TCL) e o Teorema Central do Limite Generalizado.

2.1 DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES CONTÍNUAS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Podemos, de forma simples, dizer que probabilidade é a quantização da expectativa esperada do resultado de um determinado experimento realizado e, variáveis estocásticas são determinadas pelo resultado de medidas feitas em um experimento, o máximo que podemos saber acerca das variáveis aleatórias é a quantidade de vezes que ela foi medida (REICHL, 2004) (KARDAR, 2007). No estudo de teoria de probabilidades, é necessário se atentar a três fundamentos: (i) a lógica formal de construção, (ii) a intuição e, (iii) aplicações (FELLER, 1968).

Suponha que x é uma variável aleatória contínua que pode ser medida no intervalo $[a, b]$, de modo que:

$$Prob(a \leq x \leq b) = \int_a^b dx P(x), \quad (2.1)$$

representa a probabilidade de medir o valor de x que está entre a e b .

Na equação (2.1), $P(x)$ é a Função Densidade de Probabilidade (PDF) para a variável aleatória x . Sabemos que o mínimo de informação que podemos ter sobre um evento aleatório é 0% e o máximo é 100%, logo, é necessário que a função densidade de probabilidade satisfaça as seguintes condições: (i) ser sempre positiva $P(x) \geq 0$ e, (ii) a condição de normalização, ou seja, $\int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x) = 1$.

Também podemos definir probabilidade sendo um espaço amostral Ω que forma um conjunto com todas as possibilidades possíveis de serem medidas em um determinado sistema. Assim, podemos definir da seguinte forma: Ω é denominado de espaço amostral se, para cada evento $\Sigma \subset \Omega$ exista um número que satisfaça as condições: (i) $P(\Sigma) \geq 0$,

(ii) $P(\Omega) = 1$ e, (iii) se Σ_1 e Σ_2 são eventos independentes, temos a regra da soma $P(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = P(\Sigma_1) + P(\Sigma_2)$, que é a probabilidade de medir Σ_1 ou Σ_2 e, temos também a regra da multiplicação $P(\Sigma_1 \& \Sigma_2) = P(\Sigma_1) \times P(\Sigma_2)$, que é a probabilidade de acontecer os eventos Σ_1 e Σ_2 simultaneamente (HASSANI, 2009).

Vamos citar um exemplo clássico para o entendimento dos conceitos de teoria de probabilidades apresentados anteriormente. Suponha que temos um dado não viciado, isto é, todas as faces têm probabilidades iguais de serem sorteadas a cada lançamento. O espaço amostral de todas as possibilidades é dado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A probabilidade $P(1)$ que a face 1 seja sorteadada é igual a $1/6$, de modo que, $P(N) = 1/6$ para todas $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ faces, logo, $P(\Omega) = \sum_{N=1}^6 P(N) = 1$, a soma de todas as probabilidades possíveis é igual a 100%.

Agora, podemos definir a função de probabilidade cumulativa $F(x)$ dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dx P(x), \quad (2.2)$$

ou seja, é a probabilidade de encontrar a variável x no intervalo $\{-\infty \leq x\}$ e, deve satisfazer as condições: (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e, (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Conhecendo a função densidade de probabilidade, podemos utilizar a função distribuição cumulativa para encontrar variáveis aleatória da função densidade de probabilidade conhecida, utilizando o método da inversão da distribuição cumulativa.

Antes de introduzir o conceito de momentos, vamos definir a função característica $f(k)$ de uma variável estocástica x . A função característica é o gerador de momentos da distribuição e é dada através da transformada de Fourier da PDF (KARDAR, 2007), isto é:

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} P(x). \quad (2.3)$$

Quando se é conhecida a função característica, podemos obter a função densidade de probabilidade através da transformada inversa de Fourier:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} f(k). \quad (2.4)$$

Na próxima subseção falaremos dos momentos de uma distribuição e como eles podem ser obtidos.

2.1.1 Momentos de uma distribuição

Quando conhecemos uma distribuição de probabilidade para uma variável aleatória x , podemos obter toda informação sobre ela, entretanto, quando não conseguimos determinar a PDF, podemos, em casos específicos, obter informações sobre os momentos da variável x (REICHL, 2004). O n -ésimo momento de uma variável x é definido da seguinte forma:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n P(x). \quad (2.5)$$

Neste trabalho, nos atentaremos apenas aos dois primeiros momentos $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$. O primeiro momento $\langle x \rangle$ é chamado de valor médio da variável x e seu valor informa a posição em que a distribuição de probabilidade está centrada. A combinação $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ define a variância de x , o desvio padrão de x , σ_x , é definido através da raiz da variância, isto é, $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. O desvio padrão nos diz o quanto a variável x dispersou da média $\langle x \rangle$ (REICHL, 2004).

A importância sobre os momentos ficará mais clara em 2.2, onde mostraremos como estas medidas estão relacionadas com o Teorema Central do Limite, visto que a gaussiana é uma distribuição com os primeiros momentos bem definidos. Em 2.4 veremos que para o caso $\alpha = 2$ na distribuição de lei de potências também temos os primeiros momentos definidos.

2.1.2 Valor esperado de uma função

O valor esperado ou valor médio de uma função $h(x)$ é obtido da mesma forma que calculamos os momentos, ou seja,

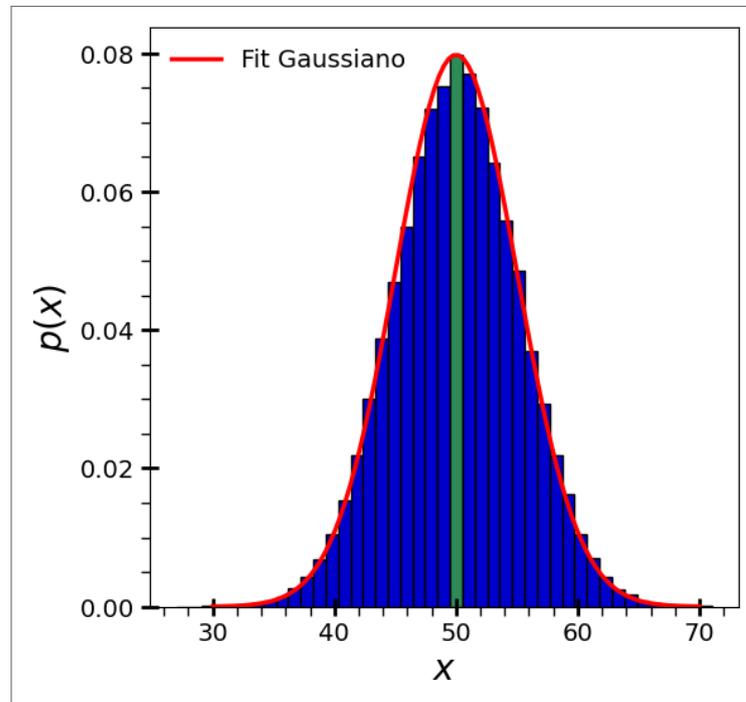
$$\langle h(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx h(x) P(x). \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é essencial quando temos uma função no sistema que depende de uma variável aleatória que obedece uma distribuição de probabilidade conhecida.

2.2 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Para apresentar o Teorema Central do Limite (TCL), iremos abordar inicialmente um exemplo que permite falar com pouca formalidade matemática e de fácil intuição, como é o caso do lançamento de moedas, onde podemos medir apenas dois resultados, cara ou coroa.

Figura 3 – Histograma lançamento de moedas através de uma modelagem numérica. No eixo das abscissas temos a variável x , com média e variância finita, definida como sendo a soma do lançamento de $N = 100$ moedas. Foi definido que se o lançamento resultar em coroa, contabilizamos 1 unidade à x e, se for cara, não contabilizamos. Após medir x , $K = 10^5$ vezes, isto é, lançar 100 moedas 10^5 vezes e calcular a soma de cada resultado, observamos a distribuição $p(x)$ da variável x . Note que o melhor ajuste do histograma é obtido através de uma curva gaussiana, concordando com Teorema Central do Limite.



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Agora, consideremos uma amostra formada por N moedas não viciadas, isto é, ao lançar uma moeda qualquer deste conjunto, podemos obter cara ou coroa com mesma probabilidade $p = q = 1/2$. Onde p é a probabilidade de obter cara e q é a probabilidade de obter coroa. Para que seja possível quantificar o resultado das medidas, vamos considerar a variável $x = \sum_i^N x_i$, onde $x_i = 0$ representa encontrar cara após o lançamento e $x_i = 1$, coroa.

Perceba que a variável x_i possui apenas duas possibilidades de medida, logo, para uma quantidade N de moedas é esperado que o valor médio $\langle x \rangle$ que representa a soma de todos os lançamentos seja $\langle x \rangle = pN$, ou seja, ao lançarmos 100 moedas, por exemplo, é esperado que metade das jogadas o resultado será cara e a outra, coroa, obviamente. Portanto, o resultado da soma dos 100 lançamentos utilizando a quantificação definida anteriormente será, em média, 50.

É importante observar que para obter uma medida $x = 100$ ou $x = 0$ é necessário que todas as moedas caiam do mesmo lado após todos os lançamentos. Ou seja, estas medidas são extremamente raras de serem obtidas, de modo que, é esperado que a distribuição de

probabilidades da variável x , $p(x)$ seja uma função centrada na média com limites assintóticos, $p(x) = 0$ quando $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow 100$.

Na Figura 3 podemos observar um histograma da variável x após a modelagem numérica de 100 mil lançamentos de $N = 100$ moedas. Note que a distribuição da variável x pode ser modelada por uma função contínua, conhecida como distribuição gaussiana ou distribuição normal. Também é possível observar que a distribuição está centrada na média da variável x e, as medidas $x = 0$ e $x = 100$ não foram obtidas após o N -ésimo lançamento.

Após observar o exemplo anterior, podemos enunciar o TCL. **Enunciado: Teorema Central do Limite.** Considere uma variável aleatória x com os primeiros momentos $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ finitos de modo que $x = \sum_i^N x_i$, onde cada x_i é uma variável aleatória independente. A distribuição de probabilidade que descreve o comportamento de x , $p(x)$, converge para uma gaussiana no limite $N \rightarrow \infty$, ou seja, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}$.

PROVA: Tome variáveis aleatórias x_i com $\langle x_i \rangle$ e $\langle x_i^2 \rangle$ finitos, de modo que

$$x = \sum_i^N \frac{1}{N} (x_i - \langle x \rangle), \quad (2.7)$$

ou seja, estamos observando o desvio na média. A função característica da variável estocástica x dada pela equação (2.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_N e^{ik \sum_i^N \frac{1}{N} (x_i - \langle x \rangle)} P(x_1) \dots P(x_N), \quad (2.8)$$

devido ao fato do sistema possuir N variáveis aleatórias x_i independentes. Na equação anterior notamos o produto de N integrais, isto é, podemos escrever a função característica sendo como

$$f(k) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\frac{ik}{N} (x - \langle x \rangle)} P(x) \right]^N \quad (2.9)$$

Comparando a equação anterior com a equação (2.6) notamos que $f(k)$ é o valor médio função exponencial do integrando, ou seja,

$$f(k) = \left[\langle e^{\frac{ik}{N} (x - \langle x \rangle)} \rangle \right]^N. \quad (2.10)$$

Agora, expandindo a exponencial em séries de Maclaurin, obtemos,

$$\langle e^{\frac{ik}{N} (x - \langle x \rangle)} \rangle = \left\langle 1 + \frac{ik}{N} (x - \langle x \rangle) - \frac{k^2}{2N^2} (x - \langle x \rangle)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right) \right\rangle, \quad (2.11)$$

onde os termos de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ podem ser desconsiderados devido ao fato de estarmos considerando o caso especial em que temos o limite $N \rightarrow \infty$, logo,

$$\begin{aligned}
f(k) &= \left[1 + \frac{ik}{N}(\langle x \rangle - \langle x \rangle) - \frac{k^2}{2N^2}(\langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2)\right]^N \\
&= \left[1 - \frac{k^2}{2N^2}(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)\right]^N \\
&= \left[1 + \frac{1}{N}\left(-\frac{k^2\sigma^2}{2}\right)\right]^N,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $\sigma^2 = (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)/N$. Agora, lembrando que $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + x/N)^N = e^x$, encontramos, finalmente,

$$f(k) = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}, \tag{2.13}$$

quando $N \rightarrow \infty$.

Podemos agora, finalmente, encontrar a função distribuição de probabilidade da variável x a partir da transformada inversa de Fourier da equação (2.13), ou seja,

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}. \tag{2.14}$$

Vamos utilizar a seguinte identidade na equação anterior,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-k^2 a^2 + ikx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}, \tag{2.15}$$

com isso, obtemos

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.16}$$

onde fizemos $x \rightarrow x - \langle x \rangle$. Com isso, provamos o Teorema Central do Limite.

2.3 DIFUSÃO GAUSSIANA EM DUAS DIMENSÕES

Na seção 2.2 vimos distribuições de variáveis aleatórias que possuem os primeiros dois momentos finitos convergem para uma distribuição gaussiana. No Capítulo 1 vimos que no movimento browniano, a dinâmica da caminhada aleatória é constituída de passos com escala bem definida. Nesta seção, apresentaremos com detalhes a dinâmica do movimento browniano que, devido a sua relação com a distribuição gaussiana, também é conhecido como difusão gaussiana.

Primeiramente, iremos estudar a dinâmica de um caminhante aleatório em uma dimensão. A generalização para duas dimensões é direta. Primeiro, considere um caminhante aleatório sobre uma reta, iniciando sua jornada na origem do sistema. O caminhante tem probabilidade p de dar um passo de comprimento ℓ para a direita e, probabilidade $q = 1 - p$ de realizar um passo ℓ para a esquerda. Nosso problema aqui é encontrar a probabilidade de encontrar o caminhante na posição $x = m\ell$ após realizar um total de N passos. Com $m \in [-N, N]$. (SALINAS, 2018)

Visto que o caminhante realiza apenas passos para a direita ou esquerda, vamos dividir em duas partes. O número total de passos N será escrito em termo soma dos passos dados a direita N_1 com os passos escolhidos a esquerda N_2 , ou seja, $N = N_1 + N_2$. Podemos ter $\frac{N!}{N_1!N_2!}$ combinações de passos realizados pelo *walker*. A probabilidade da escolha dos passos é escrita através da distribuição binomial:

$$W_N(N_1, N_2) = \frac{N!}{N_1!N_2!} p^{N_1} q^{N_2}, \quad (2.17)$$

onde p^{N_1} representa o número de sucessos de realizar um passo a direita e, q^{N_2} representa o número de sucessos de realizar um passo a esquerda.

Escrevendo $m = N_1 - N_2$ e utilizando o fato de $N = N_1 + N_2$, é possível escrever $N_1 = (N + m)/2$ e, $N_2 = (N - m)/2$. Com isso, podemos escrever a probabilidade $P_N(m)$ de medir a variável de interesse m através da equação:

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)!\left(\frac{N-m}{2}\right)!} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}}. \quad (2.18)$$

Agora, note que

$$P_{N+1}(m) = \frac{(N+1)!}{\left(\frac{N+1+m}{2}\right)!\left(\frac{N+1-m}{2}\right)!} p^{\frac{N+1+m}{2}} q^{\frac{N+1-m}{2}}, \quad (2.19)$$

e, perceba também que

$$P_N(m-1) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m-1}{2}\right)!\left(\frac{N-m+1}{2}\right)!} p^{\frac{N+m-1}{2}} q^{\frac{N-m+1}{2}}. \quad (2.20)$$

Utilizando o fato de que $\left(\frac{N+m+1}{2}\right)! = \left(\frac{N+m-1}{2}\right)!\left(\frac{N+m+1}{2}\right)$ podemos mostrar que,

$$pP_N(m-1) = \frac{(N+m+1)}{2(N+1)} P_{N+1}(m). \quad (2.21)$$

De forma análoga, também obtemos,

$$qP_N(m+1) = \frac{(N-m+1)}{2(N+1)}P_{N+1}(m), \quad (2.22)$$

com isso, obtemos a equação de recorrência:

$$P_{N+1}(m) = pP_N(m-1) + qP_N(m+1), \quad (2.23)$$

que mostra que a probabilidade no "tempo" $N+1$ depende apenas do "tempo" imediatamente anterior N , ou seja, é um processo markoviano (SALINAS, 2018). Para o caso $q = p = 1/2$, temos a seguinte relação:

$$P_{N+1}(m) = \frac{1}{2}P_N(m-1) + \frac{1}{2}P_N(m+1). \quad (2.24)$$

Tratando as variáveis discretas da equação anterior como variáveis contínuas, isto é, $m+1 \rightarrow m\ell + \ell = x + dx$ e $N+1 \rightarrow n\tau + \tau = t + \Delta t$, obtemos, mantendo t fixo e variando x ,

$$\frac{P(m\ell - \ell, t) + P(m\ell + \ell, t) - 2P(m\ell, t)}{\ell^2} = \frac{P(x - \Delta x, t) + P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t)}{\Delta x^2} \quad (2.25)$$

rearranjando os termos do lado direito da equação e levando em conta o limite $\Delta x \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{P(x - \Delta x, t) + P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t)}{\Delta x^2} \approx \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (2.26)$$

agora, mantendo x fixo e variando o tempo, temos

$$\frac{P_{N+1}(x, t + \Delta t) - \frac{P_N(x, t)}{2} - \frac{P_N(x, t)}{2}}{t} \approx \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (2.27)$$

com isso, a equação (2.24) torna-se,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (2.28)$$

onde, $D = \ell^2/2\tau$ é a contante de difusão. A equação anterior é conhecida como equação de difusão, que é um caso simples da equação de Fokker-Planck, que caracteriza a evolução das distribuições de probabilidades no tempo (SALINAS, 2018).

A generalização da equação (2.28) para duas dimensões é feita de forma direta e é representada por:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (2.29)$$

agora, com $P = P(x, y, t)$. Com o intuito de facilitar a solução da equação acima e encontrar a probabilidade $P(x, y, t)$ de encontrar o caminhante na posição (x, y) no tempo t , vamos reduzir a ordem da equação diferencial parcial utilizando a transformada de Fourier

$$\tilde{P}(k_x, k_y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-i(k_x x + k_y y)} P(x, y, t), \quad (2.30)$$

isto é, vamos multiplicar todos os termos da equação (2.29) pela exponencial $e^{-i(k_x x + k_y y)}$ e, integrar em x e y , ou seja

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} e^{-i(k_x x + k_y y)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} e^{-i(k_x x + k_y y)} = \\ = \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{\partial P}{\partial t} e^{-i(k_x x + k_y y)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Primeiramente, vamos resolver a integral em x da primeira integral dupla da equação anterior pelo método de integração por partes, $\int u dv = uv - \int v du$. Tomando $u = e^{-i(k_x x + k_y y)}$ e $dv = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx$, temos $du = \frac{\partial}{\partial x} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx$ e $v = \frac{\partial P}{\partial x}$ respectivamente. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} e^{-i(k_x x + k_y y)} = \frac{\partial P}{\partial x} e^{-i(k_x x + k_y y)} \Big|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy (-ik_x) \frac{\partial P}{\partial x} e^{-i(k_x x + k_y y)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Queremos que $\frac{\partial^n P}{\partial x^n} \rightarrow 0$ quando $x, y \rightarrow \pm\infty$, logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} e^{-i(k_x x + k_y y)} = ik_x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{\partial P}{\partial x} e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad (2.33)$$

fazendo integral por partes mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} e^{-i(k_x x + k_y y)} = -k_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy P(x, y, t) e^{-i(k_x x + k_y y)} \\ = -k_x^2 \tilde{P}(k_x, k_y, t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

De maneira análoga, podemos obter

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} e^{-i(k_x x + k_y y)} = -k_y^2 \tilde{P}(k_x, k_y, t), \quad (2.35)$$

e, de forma mais direta temos também que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{\partial P}{\partial t} e^{-i(k_x x + k_y y)} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(k_x, k_y, t). \quad (2.36)$$

Temos então, a equação de difusão no espaço da transformada de Fourier, dada por:

$$(k_x^2 + k_y^2) \tilde{P}(k_x, k_y, t) + \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(k_x, k_y, t) = 0, \quad (2.37)$$

que possui solução dada por:

$$\tilde{P}(k_x, k_y, t) = C e^{-D(k_x^2 + k_y^2)t}, \quad (2.38)$$

onde C é uma constante de normalização. Obtemos $P(x, y, t)$ através da transformada inversa de Fourier:

$$\begin{aligned} P(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y e^{i(k_x x + k_y y)} \tilde{P}(k_x, k_y, t) \\ &= C \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x e^{i(k_x x - Dt k_x^2)} \right\} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y e^{i(k_y y - Dt k_y^2)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

que, ao utilizar a identidade (2.15), encontramos

$$P(x, y, t) = \frac{C}{4\pi Dt} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{4Dt}}, \quad (2.40)$$

ou seja, é uma distribuição gaussiana em duas dimensões centrada em $(x, y) = (0, 0)$, ou o produto de duas gaussianas, uma em x e a outra em y , com a primeira centrada em $x = 0$ e a segunda centrada em $y = 0$. Podemos encontrar C através da normalização:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy P(x, y, t) = 1, \quad (2.41)$$

ou seja, pode ser escrito como o produtos de duas integrais gaussianas, da seguinte forma:

$$\frac{C}{4\pi Dt} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \right\} = 1, \quad (2.42)$$

ou seja, como $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \sqrt{4\pi Dt}$, obtemos $C = 1$, portanto,

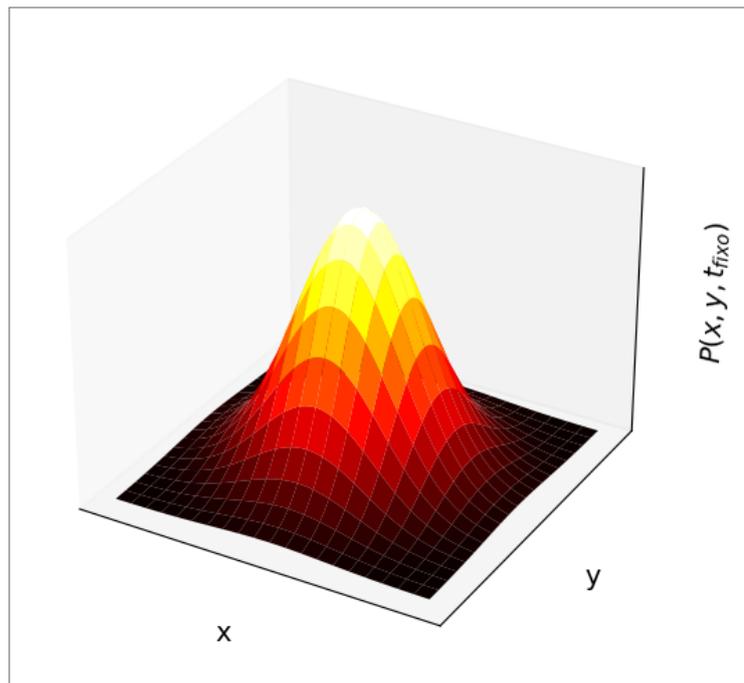
$$P(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{4Dt}}, \quad (2.43)$$

que em coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, escrevemos da seguinte forma:

$$P(r, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}, \quad (2.44)$$

com variância $\sigma^2 = 4Dt$, ou seja, linear com o tempo.

Figura 4 – Plotagem gráfica da gaussiana bidimensional dada pela equação (2.43) para um valor t fixo, obtida através da solução da equação de difusão em duas dimensões descrita pela equação (2.29).



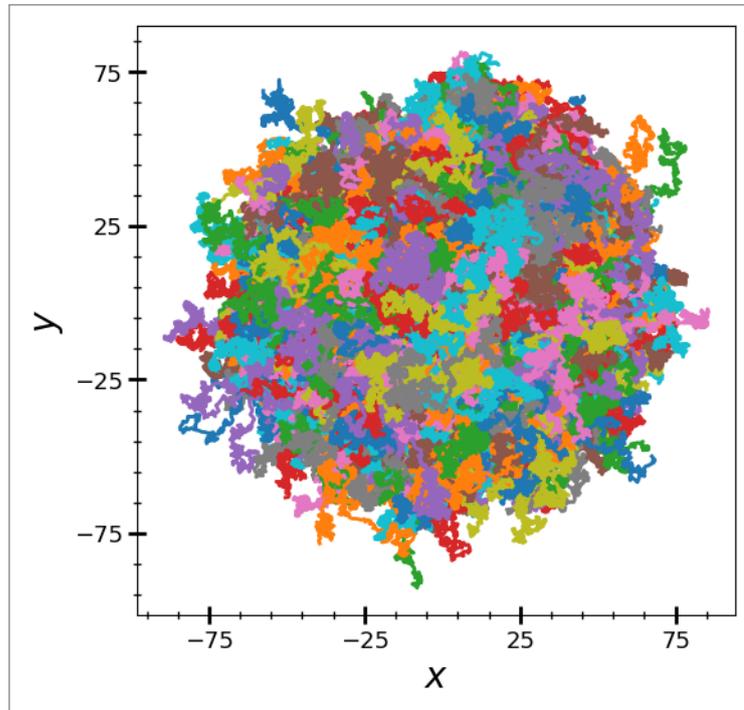
Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Na Figura 4 mostramos o gráfico da equação (2.43) para um determinado valor fixo de t . É importante lembrar que a medida que t aumenta, devemos observar a largura da gaussiana bidimensional aumentando, devido ao fato da variância estar relacionada diretamente com a largura da gaussiana (SALINAS, 2018).

Agora, vamos estudar de forma computacional, um caminhante que realiza movimentos aleatórios em duas dimensões com tamanho de passo fixo. O objetivo é mostrar a relação linear entre a variância e o número de passos (tempo) e recuperar a distribuição gaussiana para a posição do *walker*. Também mostraremos que as posições x e y obedecem a mesma distribuição de probabilidades.

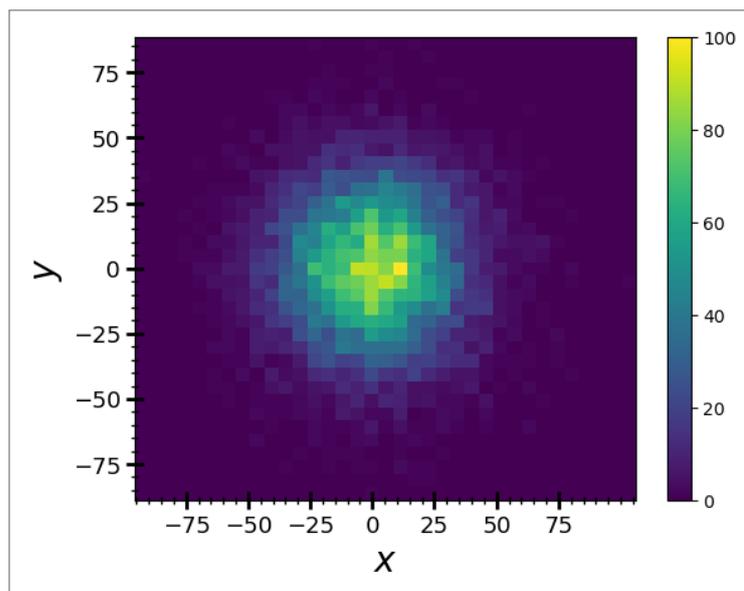
Primeiro, faremos a simulação de $K = 10^4$ caminhantes aleatórios em duas dimensões, todos saindo da origem do plano e realizando $N = 10^3$ passos de comprimento $\ell = 1$, como mostra a Figura 5. Ao realizar um histograma em duas dimensões com os dados das posições x e y finais de cada caminhante, observamos que a maioria deles encerram a caminhada próximos

Figura 5 – Difusão em duas dimensões. Onde temos $K = 10^4$ caminhadas aleatórias, cada uma com $N = 10^3$ passos de tamanho unitário $\ell = 1$. Todos os caminhantes iniciaram a caminhada na posição inicial $(x, y) = (0, 0)$. Antes de executar cada passo, o caminhante escolhe uma direção aleatória entre 0 e 2π .



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Figura 6 – Histograma bidimensional das posições finais na difusão em duas dimensões. Esta figura foi formada através dos dados das posições finais de cada caminhada aleatória mostrada na Figura 5. Ao lado do histograma podemos ver uma escala de cores mostrando uma maior frequência próximo a região do ponto inicial de partida, uma característica do movimento browniano. Note também que este histograma é semelhante à visualização 2D da Figura 4.

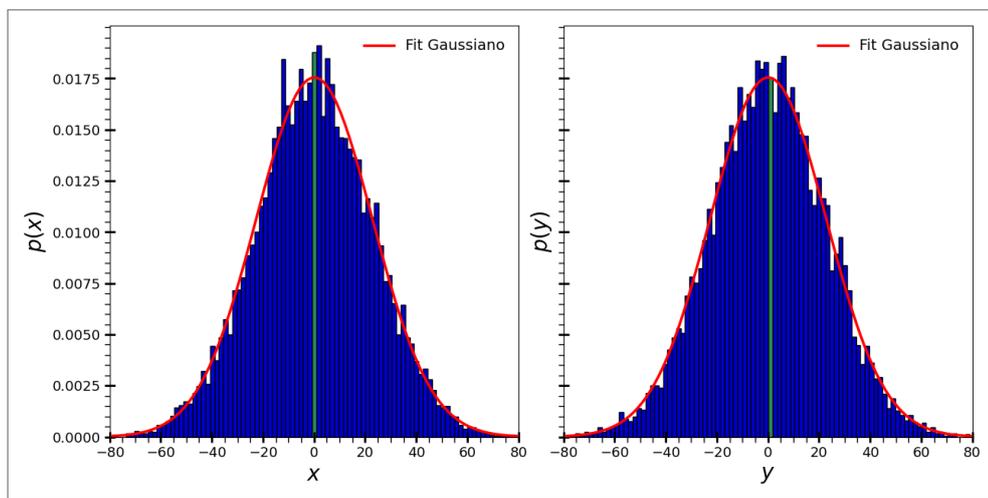


Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

da posição inicial, como está apresentado na Figura 6. Note que a Figura 6 pode ser vista como uma projeção bidimensional do gráfico que vimos na Figura 4.

Fazendo um histograma das posições finais x e y , notamos que ambas as variáveis obedecem uma mesma distribuição, a distribuição gaussiana, como encontramos na equação (2.43). Note que ambas estão centrada na origem e possuem a mesma variância, como está mostrado na Figura 7.

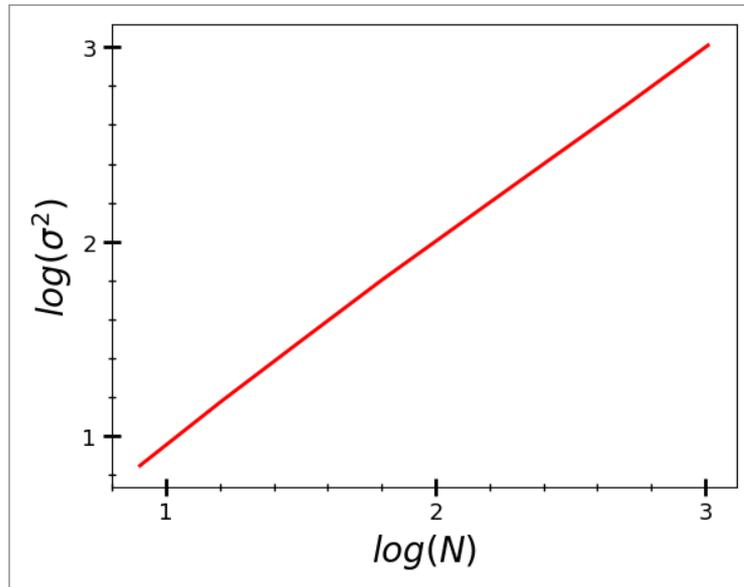
Figura 7 – Histograma das posições x e y finais no processo difusivo em duas dimensões. Esta figura foi formada através dos dados das posições x e y finais de cada caminhada aleatória mostrada na Figura 5. Note que ambas as variáveis, x e y obedecem a mesma distribuição gaussiana, como foi previsto pela equação (2.43).



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Agora, calculando a variância $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 + \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$, onde, x e y , neste tratamento computacional, representa a N -ésima posição de cada caminhada (GOULD; TOBOCHNIK; CHRISTIAN, 2006) mostrada na Figura 5. Fazendo um gráfico log-log da variância versus o número N de passos, obtemos uma curva linear com coeficiente angular igual a um e coeficiente linear nulo como podemos ver na Figura 8.

Figura 8 – Variância versus o número de passos no processo de difusão. Nesta figura, calculamos a variância $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 + \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$, onde, x e y representa a N -ésima posição de cada caminhada. A medida foi realizada após $K = 10^4$ caminhadas aleatórias para diferentes números de passos, representados por N .



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

2.4 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE GENERALIZADO

No Teorema Central do Limite apresentado na seção 2.2 foi imposto que os primeiros momentos da variável de interesse fossem finitos. Uma forma de generalizar este teorema é considerando os casos em que a média e a variância não estão bem definidas. Neste caso, a soma de N variáveis converge para a distribuição α -estável de Lévy (KARDAR, 2007).

2.4.1 Distribuições estáveis de Lévy

A teoria de distribuições de probabilidades de variáveis estáveis foi desenvolvida inicialmente por Paul Lévy e Aleksander Yakovlevich Khinchine. Distribuições estáveis aparecem em diversos fenômenos físicos. Podemos observar, por exemplo, em campo gravitacional de estrelas, preços no mercado de ações e distribuição de temperatura em um reator nuclear. Uma distribuição estável é caracterizada por quatro parâmetros. O parâmetro α para a estabilidade, parâmetro σ de escala, parâmetro de simetria β e o parâmetro de deslocamento μ (SAMORODNITSKY; TAQQU, 1994).

Definição 1: Uma variável aleatória x pertence a uma distribuição estável se, para qualquer número positivo A e B , existe um número positivo C e um número real D , de modo que

$$Ax_1 + Bx_2 \stackrel{d}{=} Cx + D, \quad (2.45)$$

onde x_1 e x_2 são cópias independentes de x . O sinal $\stackrel{d}{=}$ representa igualdade em termos de distribuição. Quando $D = 0$, dizemos que x é estritamente estável. A variável x é simétrica quando x e $-x$ possuem a mesma distribuição (SAMORODNITSKY; TAQQU, 1994). Agora, vamos apresentar um teorema que estabelece uma relação entre as constantes A , B e C da **Definição 1** através do parâmetro α , mas não vamos prová-lo.

Teorema: Para cada variável aleatória estável x , existe um $\alpha \in (0, 2]$ tal que C em (2.45) satisfaz a relação:

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha. \quad (2.46)$$

O parâmetro α é conhecido como índice de estabilidade ou expoente característico. Uma variável aleatória com índice α é chamada de α -estável. Podemos fazer uma definição ainda mais geral que a **Definição 1** para uma variável aleatória estável.

Definição 2: Uma variável x tem uma distribuição estável se, para todo $n \geq 2$, há um número positivo C_n e um número real D_n tal que,

$$\sum_n x_n \stackrel{d}{=} C_n x + D_n, \quad (2.47)$$

onde $x_1 \dots x_n$ são cópias independentes de x , isto é, $x_1 \dots x_n$ possuem uma distribuição independente da distribuição que caracteriza x . Temos também que $C_n = n^{-\alpha}$, com $0 < \alpha \leq 2$ (SAMORODNITSKY; TAQQU, 1994).

A função densidade de probabilidade $P_\alpha(x)$ da variável aleatória estável x é obtida através da transformada inversa de Fourier (2.4) da função característica:

$$\tilde{P}_\alpha(k) = \begin{cases} e^{-\sigma^\alpha |k| [1 - i\beta \text{sign}(k) \tan \frac{\pi\alpha}{2}] + i\mu k}; & \text{se } \alpha \neq 1; \\ e^{-\sigma |k| [1 - i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(k) \ln |k|] + i\mu k}; & \text{se } \alpha = 1; \end{cases} \quad (2.48)$$

onde,

$$\text{sign}(k) = \begin{cases} 1; & \text{se } k > 0; \\ 0; & \text{se } k = 0; \\ -1; & \text{se } k < 0; \end{cases} \quad (2.49)$$

com $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$ e $\mu \in R$ (SAMORODNITSKY; TAQQU, 1994).

Para o caso especial, em que $\sigma = 1$, $\beta = 0$ e $\mu = 0$, a equação (2.48) torna-se;

$$\tilde{P}_\alpha(k) = e^{-|k|^\alpha}, \quad (2.50)$$

de modo que, através da transformada inversa de Fourier (2.4), obtemos

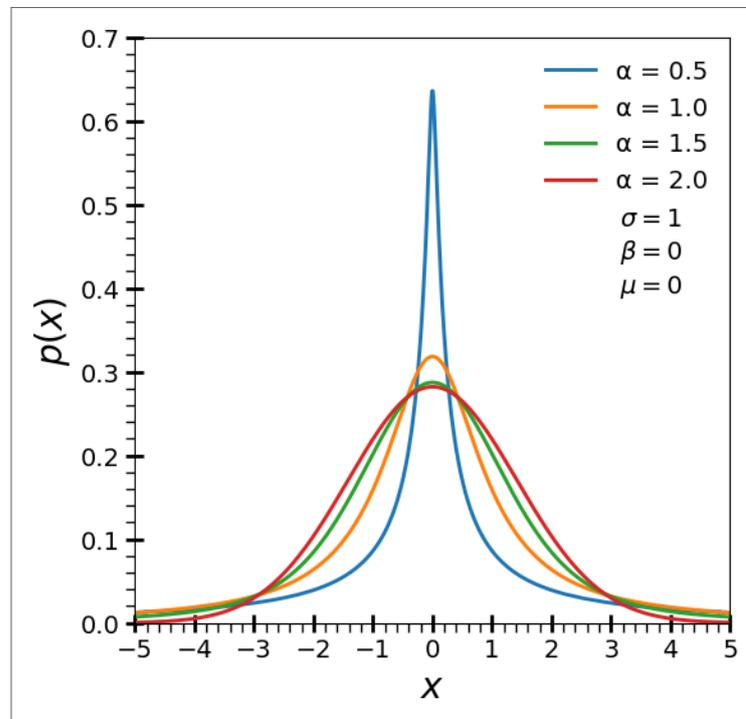
$$P_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-|k|^\alpha + ikx}. \quad (2.51)$$

A solução mais simples da equação (2.51) é obtida quando $\alpha = 2$, onde, utilizando a identidade (2.15), recuperamos a distribuição gaussiana

$$P_{\alpha=2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad (2.52)$$

centrada em $x = 0$ e variância $\sigma^2 = 2$.

Figura 9 – Exemplos de funções α -estáveis. Nesta figura observamos alguns gráficos da distribuição α -estável (2.51). Temos os casos $\alpha = 0.5$ representando a distribuição de Lévy, $\alpha = 1.0$ representando a distribuição de Cauchy, $\alpha = 1.5$ e a distribuição gaussiana para o caso especial $\alpha = 2.0$.



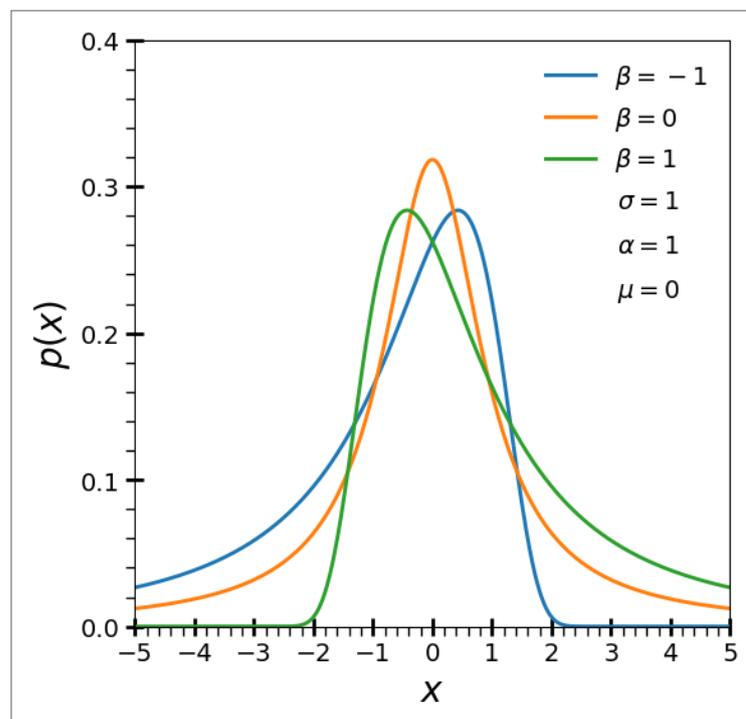
Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Para o caso especial, em que $\alpha = 1$ em (2.51), recuperamos a distribuição de Cauchy,

$$P_{\alpha=1}(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}, \quad (2.53)$$

uma forma simples de representação para distribuição de Lévy (KARDAR, 2007). Na Figura 9 podemos observar diversas distribuições de probabilidades para os casos em que $\sigma = 0$ e $\beta = \mu = 0$. As curvas apresentadas para os valores de $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ foram obtidas a partir da integração numérica da equação (2.51), enquanto que as curvas para $\alpha = 1.0$ e $\alpha = 2.0$ foram geradas a partir dos resultados analíticos exatos dados pelas equações (2.53) e (2.52), respectivamente. Na Figura 10 podemos observar como o parâmetro de simetria β altera a curva para a distribuição de probabilidade obtida através da transformada inversa de Fourier da função característica (2.48).

Figura 10 – Exemplos de funções α -estáveis. Nesta figura mostramos alguns gráficos da distribuição de probabilidades α -estável obtida através da função característica (2.48). Neste caso, temos três curvas para valores fixos de α , σ e μ , variando apenas o parâmetro de simetria β .



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

2.4.2 Aproximação da distribuição de Lévy para uma lei de potência

Como podemos ver, a forma (2.48) é muito complexa para trabalhar analiticamente. Visto isso, vamos deduzir uma forma que seja possível obter resultados analíticos para o problema dos anéis em buscas aleatórias. Nosso objetivo é obter uma distribuição $P_\alpha(\ell)$ que possa ser utilizada para definir o tamanho dos passos realizados por um caminhante em duas dimensões. É importante enfatizar que a aproximação que estamos buscando é válida apenas para valores

de $\alpha \in (0, 2)$. Para $\alpha = 2$, recuperamos a distribuição gaussiana, independente dos valores dos parâmetros β , σ ou μ .

Considerando o parâmetro de escala sendo uma constante de comprimento $\sigma = \ell_0$, onde ℓ_0 representa o comprimento de passo mínimo realizado pelo caminhante, $\beta = 0$ e $\mu = 0$, obtemos a função característica para $\alpha \neq 1$:

$$\tilde{P}_{\alpha \neq 1}(k) = e^{-\ell_0^\alpha |k|^\alpha}. \quad (2.54)$$

A distribuição $P_{\alpha \neq 1}(\ell)$ é obtida através da transformada inversa de Fourier (2.4) da função característica $\tilde{P}_{\alpha \neq 1}(k)$, isto é

$$\begin{aligned} P_{\alpha \neq 1}(\ell) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-\ell_0^\alpha |k|^\alpha + ik\ell} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-\ell_0^\alpha |k|^\alpha} [\cos k\ell + i \sin k\ell] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dk e^{-\ell_0^\alpha k^\alpha} \cos k\ell, \end{aligned} \quad (2.55)$$

resolvendo esta integral por partes, obtemos

$$P_{\alpha \neq 1}(\ell) = \frac{\ell_0^\alpha}{\pi \ell} \int_0^{+\infty} dk k^{\alpha-1} e^{-\ell_0^\alpha k^\alpha} \sin k\ell. \quad (2.56)$$

Fazendo a substituição $u = k\ell$, $du = \ell dk$, encontramos

$$P_{\alpha \neq 1}(\ell) = \frac{\ell_0^\alpha}{\pi \ell^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} du u^{\alpha-1} \sin u e^{-\frac{\ell_0^\alpha u^\alpha}{\ell^\alpha}}, \quad (2.57)$$

em que, no limite $\ell \rightarrow \infty$, obtemos

$$P_{\alpha \neq 1}(\ell) \approx \frac{\ell_0^\alpha}{\pi \ell^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} du u^{\alpha-1} \sin u, \quad (2.58)$$

ou seja, como $\int_0^{+\infty} du u^{\alpha-1} \sin u = \Gamma(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}$,

$$P_{\alpha \neq 1}(\ell) = \frac{\mathcal{A}}{\ell^{\alpha+1}}, \ell \geq \ell_0, \quad (2.59)$$

onde, $\mathcal{A} = \frac{\ell_0^\alpha \Gamma(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi}$. Para os casos em que $\ell < \ell_0$, $P_{\alpha \neq 1}(\ell) = 0$, visto que estamos interessados apenas em passos que são maiores que o passo mínimo pré-definido.

Agora, vamos obter uma expressão para \mathcal{A} , de modo que, $P_{\alpha \neq 1}(\ell)$ seja uma distribuição normalizada, isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\ell P_{\alpha \neq 1}(\ell) = \int_{\ell_0}^{+\infty} d\ell \frac{\mathcal{A}}{\ell^{\alpha+1}} = 1, \quad (2.60)$$

ou seja, é necessário que $\mathcal{A} = \alpha \ell_0^\alpha$. Logo, obtemos uma expressão aproximada na forma de uma lei de potência para a distribuição α -estável de Lévy no limite $|\ell| \rightarrow \infty$,

$$P_{\alpha \neq 1}(\ell) = \begin{cases} \frac{\alpha \ell_0^\alpha}{\ell^{\alpha+1}}; & \text{se } \ell \geq \ell_0; \\ 0; & \text{se } \ell \leq \ell_0. \end{cases} \quad (2.61)$$

A equação (2.62) foi utilizada neste trabalho como distribuição de passos para os caminhantes aleatórios entre dois anéis concêntricos. Perceba também que com esta forma da distribuição de Lévy, torna-se possível obter resultados analíticos que serão apresentados no próximo capítulo. Perceba também que, embora tenhamos utilizado a função característica para $\alpha \neq 1$, também recuperamos o mesmo resultado para o caso $\alpha = 1$, de forma que,

$$p_\alpha(\ell) = \begin{cases} \frac{\alpha \ell_0^\alpha}{\ell^{\alpha+1}}; & \text{se } \ell \geq \ell_0; \\ 0; & \text{se } \ell \leq \ell_0. \end{cases} \quad (2.62)$$

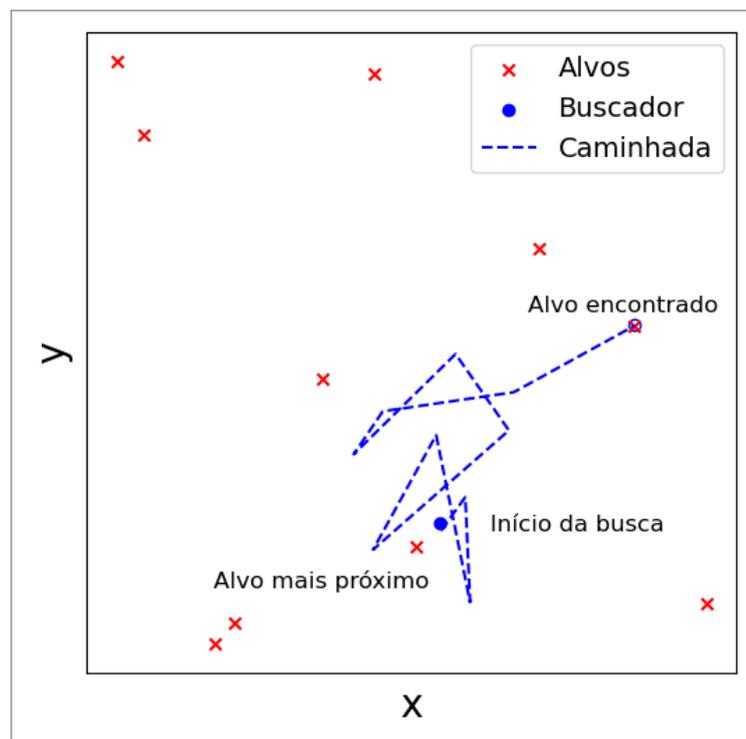
é a aproximação por lei de potência para a distribuição de Lévy ¹.

¹ Que foi apresentada brevemente no Capítulo 1

3 O PROBLEMA DOS ANÉIS

Neste capítulo, apresentaremos o sistema de buscas aleatórias estudada neste trabalho e faremos discussões analíticas do problema. Primeiro, vamos introduzir brevemente o que seria uma busca livre em duas dimensões. Considere um espaço bidimensional vazio, e logo após distribuir aleatoriamente alguns objetos nesta região. Vamos considerar estes objetos como alvos a serem encontrados por um buscador, que iniciou sua busca de um ponto escolhido, também, de forma totalmente aleatória. Perceba que para que esta busca seja de fato estocástica, é necessário que o buscador não tenha nenhuma informação da localização dos alvos.

Figura 11 – Busca livre no espaço bidimensional. Nesta figura podemos observar vários alvos dispersos em uma região bidimensional. Temos também um buscador representado pelo ponto azul que realiza uma busca aleatória até encontrar um alvo, finalizando sua jornada quando realiza o objetivo. Na figura está destacado alguns alvos, um alvo que estava próximo da posição de partida, e o alvo encontrado, mais afastado. Esta relação entre alvo mais próximo e alvo mais afastado do ponto de partida elucida a importância de estudar o problema dos anéis.

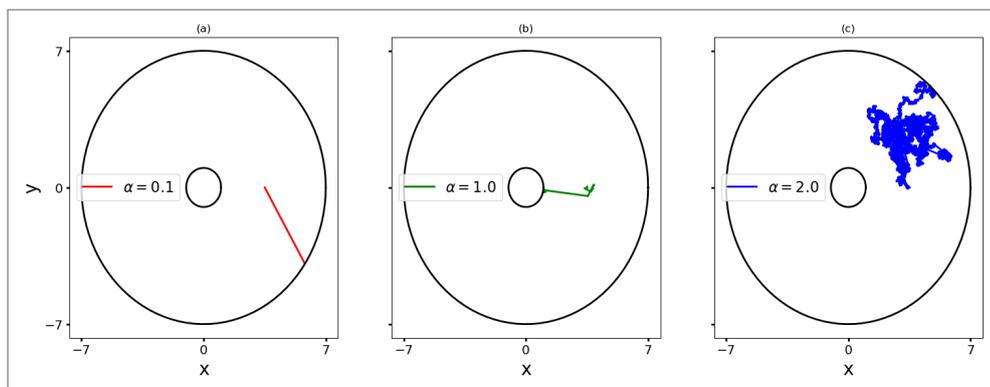


Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Na Figura 11 podemos observar um exemplo de busca aleatória em duas dimensões. O buscador sai de uma posição inicial, próxima de alvo, mas acaba encontrando um alvo mais distante após a busca realizada. Devido ao caráter aleatório do processo, esta é a dinâmica que motivou o problema dos anéis. No problema dos anéis, temos um caminhante que sai de uma posição inicial x_0 entre dois anéis concêntricos, onde, o anel interno possui raio a ,

que representa a distância entre a posição inicial do buscador e o alvo mais próximo. O anel externo, de raio R , representa a distância entre a posição inicial do buscador e qualquer outro alvo mais afastado. Ao longo de sua trajetória, o *seacher*, de forma aleatória caminha até encontrar um dos anéis. Ao encontrar um dos anéis, sua jornada finaliza (CARAMÊS et al., 2022).

Figura 12 – Buscas aleatórias no problema dos anéis. Nesta figura podemos observar três exemplos de buscas aleatórias no problema dos anéis. Em todos os casos, o caminhante iniciou a busca do mesmo ponto. O que diferencia as imagens apresentadas é apenas o valor do parâmetro α da *power-law* que aproxima a distribuição de Lévy. Note que em (a), o caminhante realiza um movimento balístico. Em (b) um regime super-difusivo e em (c) um comportamento browniano. Observe que, para $\alpha = 0.1$ e $\alpha = 2.0$, ambos os casos encontraram o anel externo. Enquanto que para $\alpha = 1.0$, o anel interno foi encontrado. Outro fator importante é que a medida que o valor de α aumentou, o número de passos até encontrar um dos anéis também aumentou.



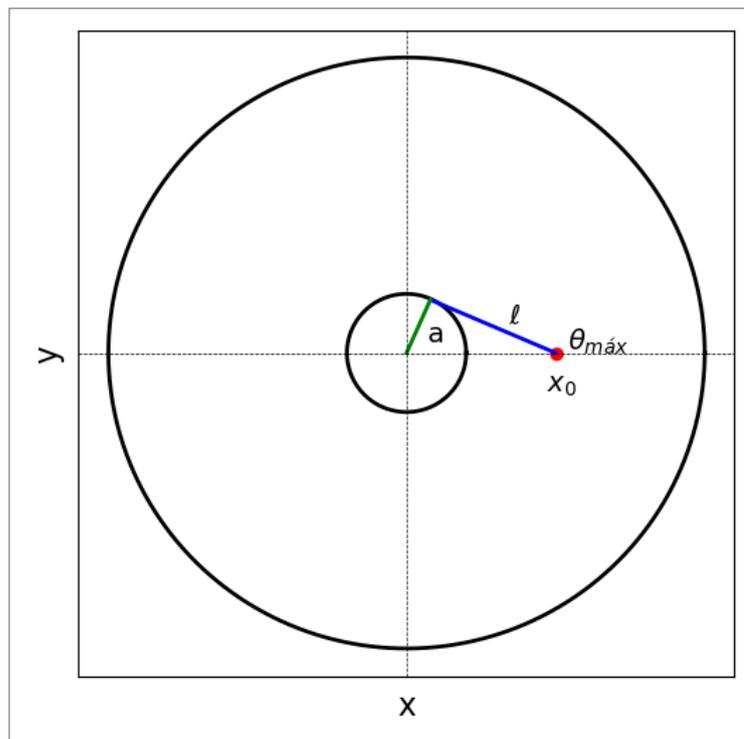
Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Na Figura 12, podemos ver três buscas aleatórias entre dois anéis, onde $a = 1$ e $R = 7$. Nos exemplos mostrados, os caminhantes saíram da posição inicial $x_0 = \frac{R}{2}$ e caminharam, utilizando a *power-law* dada pela equação (2.62) como distribuição para o tamanho do passo, até encontrar um dos anéis. A direção do passo não teve nenhum viés direcional, foi escolhida aleatoriamente entre 0 e 2π para cada passo realizado. Ao estudar o problema dos anéis, poderemos comparar os resultados obtidos com os resultados apresentados após o estudo de um modelo de buscas aleatórias em duas dimensões que seguia a estratégia que foi apresentada na Figura 11 (COLAÇO et al., 2022). Esta comparação será importante devido ao fato de não encontrarmos no mundo real buscas que assemelham-se com o problema dos anéis, entretanto o custo computacional e a facilidade em obter resultados analíticos, justificam a importância de estudar este problema.

3.1 SOLUÇÃO EXATA PARA O LIMITE BALÍSTICO

No limite em que $\alpha \rightarrow 0$, o caminhante executa, tipicamente, apenas um passo até encontrar um dos alvos. Na Figura 12(a) podemos observar que para $\alpha = 0.1$ o *walker* necessitou de apenas um salto, praticamente, para encontrar o anel externo. Este comportamento é descrito na literatura como limite balístico, como foi apresentado no Capítulo 1. Visto isso, notamos que é possível calcular a eficiência de busca $\eta = 1/\langle|\ell|\rangle$ de forma exata para este caso em específico, já que podemos calcular o comprimento de passo médio $\langle|\ell|\rangle$, pois, nesse caso, a única variável aleatória do sistema é a direção θ que o caminhante escolhe para realizar o salto.

Figura 13 – Limite balístico caso $\alpha \rightarrow 0$. O caminhante executa, tipicamente, apenas um passo de tamanho ℓ , da posição inicial x_0 destacada pelo ponto vermelho, até encontrar um dos alvos.

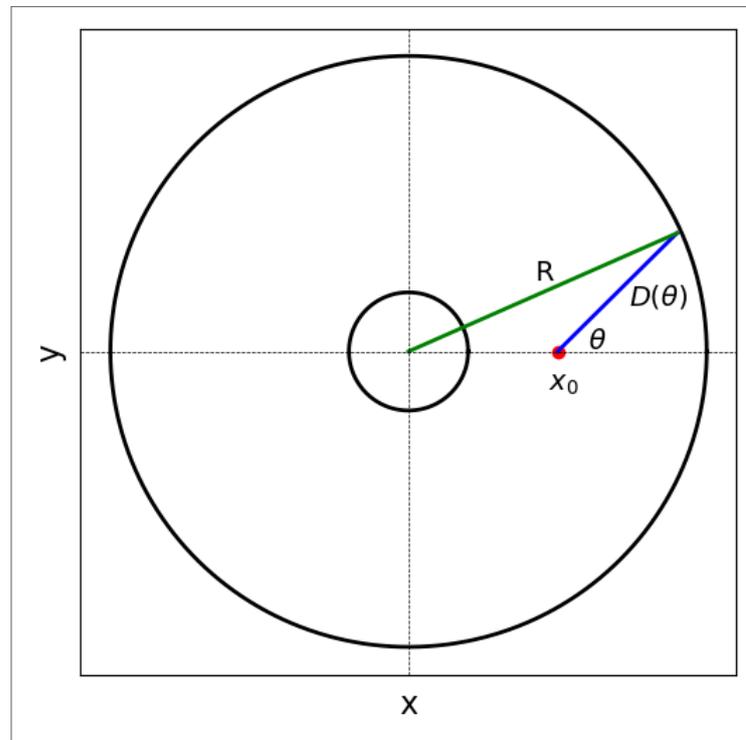


Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Na Figura 13 podemos observar a busca aleatória para o limite balístico, o caminhante inicia a busca na posição inicial x_0 e escolhe um ângulo $\theta_{m\acute{a}x}$ para direcionar o salto ou voo de Lévy. O ângulo $\theta_{m\acute{a}x}$ foi destacado devido ao fato de que, para qualquer ângulo θ entre 0 e $\theta_{m\acute{a}x}$, o caminhante encontrará o anel externo e, quando o ângulo θ está entre $\theta_{m\acute{a}x}$ e π , o buscador encontrará o anel interno.

A distância balística $D(\theta)$ até o encontro de uma das bordas absorventes mostrada na

Figura 14 – Limite balístico caso $\alpha \rightarrow 0$. O caminhante executa apenas um passo de tamanho $D(\theta)$, da posição inicial x_0 destacada pelo ponto vermelho, até encontrar o alvo externo no primeiro quadrante. Usando a lei dos cossenos, é possível encontrar a relação entre R, x_0 e $D(\theta)$.



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Figura 14 pode ser obtida utilizando a lei dos cossenos, e é dada por:

$$D(\theta) = x_0 \cos(\pi - \theta) + [x_0^2 \cos^2(\pi - \theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2}, \quad (3.1)$$

se $0 \leq \theta < \theta_{m\acute{a}x}$ e, também utilizando a lei dos cossenos, com auxílio da Figura 13, conseguimos mostrar que,

$$D(\theta) = x_0 \cos(\pi - \theta) - [x_0^2 \cos^2(\pi - \theta) + a^2 - x_0^2]^{1/2}, \quad (3.2)$$

para o caso em que $\theta_{m\acute{a}x} \leq \theta \leq \pi$ e, $\theta_{m\acute{a}x} = \pi - \arcsin \frac{a}{x_0}$.

Agora vamos considerar que θ seja um ângulo aleatório que pertence a distribuição uniforme $p(\theta)$ entre 0 e 2π , isto é:

$$\int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 1, \quad (3.3)$$

ou seja, $p(\theta) = 1/2\pi$.

Agora que temos a distância balística dependente apenas da variável θ e a distribuição que ela obedece, podemos calcular o comprimento de passo médio $\langle |\ell| \rangle$ seguindo o que foi definido

na equação (2.6), isto é, da seguinte forma:

$$\langle |\ell| \rangle = \int_0^{2\pi} D(\theta) p(\theta) d\theta. \quad (3.4)$$

Considerando que o intervalo $[0, \pi]$ é simétrico ao intervalo $[\pi, 2\pi]$, precisamos integrar apenas de 0 a π , com $p(\theta) = 1/\pi$ mantendo θ uniforme no intervalo $[0, \pi]$. Temos também que $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, visto isso e, substituindo as equações (3.1) e (3.2) na equação (3.4), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle &= \int_0^{\theta_{m\acute{a}x}} \frac{1}{\pi} [-x_0 \cos \theta + (x_0^2 \cos^2 \theta + R^2 - x_0^2)^{1/2}] d\theta \\ &+ \int_{\theta_{m\acute{a}x}}^{\pi} \frac{1}{\pi} [-x_0 \cos \theta - (x_0^2 \cos^2 \theta + a^2 - x_0^2)^{1/2}] d\theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Os dois primeiros termos de cada integral quando somados resulta em uma integral com um cosseno no integrando com intervalo de integração $[0, \pi]$, ou seja, o resultado é zero. Os termos dentro das raízes podem ser rearranjados utilizando a identidade $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. Com isso, chegamos a equação:

$$\begin{aligned} \langle |\ell| \rangle &= \frac{R}{\pi} \int_0^{\theta_{m\acute{a}x}} d\theta \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{R^2} \sin^2 \theta} \\ &- \frac{a}{\pi} \int_{\theta_{m\acute{a}x}}^{\pi} d\theta \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2} \sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

que pode ser escrita em termos integral elíptica incompleta de segunda ordem.

A integral elíptica descrita acima tem a forma:

$$E(\phi, k) = \int_0^{\phi} d\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.7)$$

com isso, obtemos, finalmente,

$$\langle |\ell| \rangle = \frac{1}{\pi} \left\{ R \left[E\left(\theta_{m\acute{a}x}, \frac{x_0}{R}\right) \right] + a \left[E\left(\theta_{m\acute{a}x}, \frac{x_0}{a}\right) - E\left(\pi, \frac{x_0}{a}\right) \right] \right\}. \quad (3.8)$$

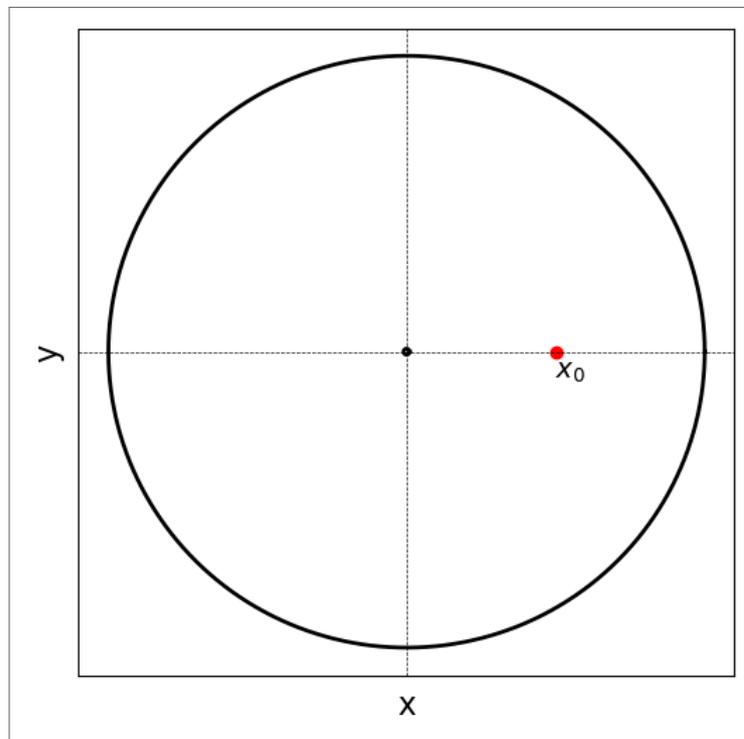
Este é um resultado bastante relevante no contexto do problema dos anéis, e também para o desenvolvimento que apresentaremos a seguir. Vale destacar que o resultado é válido para qualquer valor das variáveis a, R, x_0 ¹, sendo fundamental para validar resultados computacionais ou aproximações analíticas, visto que calcular a eficiência de forma exata para todos os valores de α não é uma tarefa simples.

¹ Desde que a relação $R > x_0 > a > 0$ seja obedecida.

3.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O LIMITE DESTRUTIVO PARA A EFICIÊNCIA

No final desta seção, apresentaremos um resultado analítico para a eficiência de busca no limite destrutivo no problema dos anéis. Definimos o limite destrutivo quando a posição inicial do buscador é equidistante dos dois anéis, ou seja, $x_0 \approx R/2$, onde R representa o comprimento do raio do anel externo, como mostra a Figura 15 para o caso em que R é apenas cem vezes maior que a . Neste regime, consideramos o caso $R \gg a$, onde a representa o comprimento do raio do anel interno.

Figura 15 – Caso destrutivo. Nesta figura, podemos ver que o caminhante inicia sua busca em uma posição x_0 equidistante de ambos os anéis.



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

O objetivo é calcular de forma analítica a eficiência de busca entre os anéis concêntricos definida pela equação:

$$\eta = \frac{1}{\langle L \rangle} \quad (3.9)$$

onde $\langle L \rangle$ é a distância média percorrida pelo caminhante da posição inicial \vec{r}_0 até encontrar um dos anéis.

Iniciaremos apresentando algumas definições. Seja \mathcal{S} o espaço bidimensional de busca entre os anéis formado pelos vetores de posição da caminhada realizada pelo *walker*, mas sem

incluir a borda dos anéis. Então, enquanto o buscador não encontra um dos anéis, o vetor \vec{r} que representa sua posição pertence ao espaço \mathcal{S} . A curva C unidimensional que contorna os anéis é dada por $C = C_a + C_R$, onde C_a e C_R representam os contornos do anel interno e externo, respectivamente.

Como podemos ver na Figura 15, o buscador inicia a caminhada na posição $\vec{r}_0 \in \mathcal{S}$. Logo, na equação (3.9), $\eta = \eta(\vec{r}_0)$ e $\langle L \rangle = \langle L \rangle(\vec{r}_0)$. Perceba que, como foi citado anteriormente nos capítulos anteriores, nas caminhadas aleatórias o *walker* sorteia um passo de cada vez, isto é, a média da distância total percorrida pelo buscador pode ser escrita da seguinte forma:

$$\langle L \rangle(\vec{r}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \langle L_n \rangle, \quad (3.10)$$

onde, $P_n(\vec{r}_0)$ é a probabilidade de que um dos anéis seja encontrado após n passos e $\langle L_n \rangle(\vec{r}_0)$ é o comprimento médio das caminhadas iniciadas em \vec{r}_0 que encontraram um dos anéis após n passos. Como a caminhada de busca sempre termina com o encontro de um dos dois anéis, então temos a condição de normalização,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1. \quad (3.11)$$

Agora, considere a densidade de probabilidade $p(\ell)$ do caminhante realizar um passo de comprimento ℓ ao longo da busca. Então, $p(\ell)d\ell$ é a probabilidade de que o *seacher* dê um salto de tamanho entre ℓ e $\ell + d\ell$. Iremos considerar que $p(\ell)$ não muda ao longo da busca, independentemente do número de saltos dados ou da posição atual do *walker*.

Também iremos considerar que a escolha do ângulo θ que indica a direção para realizar um novo passo é equiprovável no intervalo $[0, 2\pi]$. Portanto, a densidade de probabilidades $\omega(\theta)$ para esse ângulo é uma distribuição uniforme, independente do próprio ângulo, e também não muda ao longo da busca, ou seja, $\omega(\theta) = 1/2\pi$. Então, $\omega(\theta)d\theta$ representa a probabilidade do *walker* escolher um ângulo entre θ e $\theta + d\theta$ para a direção do novo passo.

Enquanto o buscador não encontra um dos anéis, seu vetor posição $\vec{r} \in \mathcal{S}$. Vamos então, definir a densidade de probabilidades de sobrevivência $\mathcal{P}_{n-1}^{surv}(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_0)$ de que o caminhante, com posição inicial \vec{r}_0 , não tenha encontrado nenhum dos dois anéis após $n - 1$ passos, ocupando atualmente a posição $\vec{r}_{n-1} \in \mathcal{S}$. Para calcular a probabilidade de sobrevivência $\mathcal{P}_{n-1}^{surv}(\vec{r}_0)$ do *walker* após $n - 1$ passos, devemos integrar $\mathcal{P}_{n-1}^{surv}(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_0)$ sobre todas as posições \vec{r}_{n-1} no espaço \mathcal{S} de busca em 2D, ou seja,

$$P_{n-1}^{surv}(\vec{r}_0) = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{P}_{n-1}^{surv}(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_0) d^2 \vec{r}_{n-1}. \quad (3.12)$$

Seja, agora, \vec{r} uma posição pertencente ao contorno de um dos anéis, isto é, $\vec{r} \in C$. Então, $p(\vec{r}, \vec{r}_{n-1}) = p(|\vec{r} - \vec{r}_{n-1}|)$ é a densidade de probabilidades do caminhante dar um salto de tamanho $\ell = |\vec{r} - \vec{r}_{n-1}|$, começando em \vec{r}_{n-1} e terminando na posição \vec{r} . Em outras palavras, nesse caso a probabilidade de que o caminhante realize um salto de tamanho entre ℓ e $\ell + d\ell$ é $p(\ell)d\ell = p(|\vec{r} - \vec{r}_{n-1}|)d|\vec{r} - \vec{r}_{n-1}|$, terminando numa posição entre \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$ em um dos anéis.

Perceba que todos os passos nessa mesma direção $\vec{r} - \vec{r}_{n-1}$ e com comprimento maior que $|\vec{r} - \vec{r}_{n-1}|$ terminarão truncados na posição \vec{r} . Assim, podemos escrever que

$$\bar{p}(\vec{r}, \vec{r}_{n-1}) = \int_{|\vec{r} - \vec{r}_{n-1}|}^{\infty} p(\ell) d\ell, \quad (3.13)$$

é a probabilidade do *walker* sair da posição \vec{r}_{n-1} e dar um passo para encontrar um dos anéis na posição entre \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$ do seu contorno C .

Combinando as definições dadas acima, denotamos por $\mathcal{P}_{n-1}^{surv}(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_0) \bar{p}(\vec{r}, \vec{r}_{n-1})$ a densidade de probabilidades do walker com posição inicial \vec{r}_0 não ter encontrado nenhum dos anéis após $n - 1$ passos, ocupando a posição \vec{r}_{n-1} , e no passo seguinte (n -ésimo passo) finalmente dar um salto de tamanho adequado para encontrar um dos anéis na posição entre \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$ do seu contorno C .

Integrando $\mathcal{P}_{n-1}^{surv}(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_0) \bar{p}(\vec{r}, \vec{r}_{n-1})$, finalmente obtemos a probabilidade $P_n(\vec{r}_0)$ de que um dos anéis seja encontrado após n passos, com o caminhante tendo iniciado na posição \vec{r}_0 , que é, portanto, dada por

$$P_n(\vec{r}_0) = \int_{\mathcal{S}} d^2 \vec{r}_{n-1} \int_C \frac{d\theta}{2\pi} \mathcal{P}_{n-1}^{surv}(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_0) \bar{p}(\vec{r}, \vec{r}_{n-1}). \quad (3.14)$$

A integral no ângulo θ considera o último (n -ésimo) passo iniciando em uma certa posição $\vec{r}_{n-1} \in \mathcal{S}$ e atingindo uma certa posição $\vec{r} \in C$ em um dos anéis. O vetor $\vec{r} - \vec{r}_{n-1}$, que está presente em $\bar{p}(\vec{r}, \vec{r}_{n-1})$ mas não em $\mathcal{P}_{n-1}^{surv}(\vec{r}_{n-1}, \vec{r}_0)$, e que liga os pontos \vec{r} e \vec{r}_{n-1} , faz um ângulo θ com o eixo x positivo, cuja densidade de probabilidades é uniforme, $\omega(\theta) = 1/(2\pi)$, conforme discutimos acima. Então, a integral em θ varre todos os possíveis encontros de um dos anéis a partir da posição \vec{r}_{n-1} . Em seguida, a integral em \vec{r}_{n-1} varre todas as possíveis posições de partida $\vec{r}_{n-1} \in \mathcal{S}$ para esse último passo. Essa expressão formal, equação 3.14, é, contudo, bastante complicada operacionalmente. Vamos precisar fazer algumas aproximações a

seguir para conseguir obter resultados analíticos que possam ser comparados com as simulações numéricas.

A partir de agora, vamos considerar a aproximação em que a probabilidade do *walker* em \vec{r}_{n-1} dar o n -ésimo passo e encontrar um dos anéis na posição \vec{r} não depende da numeração $n - 1$ do passo, nem da posição específica \vec{r}_{n-1} do buscador ao iniciar esse passo, ou seja, $\bar{p}(\vec{r}, \vec{r}_{n-1}) \approx \bar{p}(\vec{r})$. Nesta aproximação para o regime destrutivo, a equação (3.14 torna-se

$$P_n(\vec{r}_0) = P_{n-1}^{surv}(\vec{r}_0) p, \quad (3.15)$$

ou seja, a probabilidade de que um dos anéis seja encontrado após n passos, com o caminhante tendo iniciado na posição \vec{r}_0 , é aproximadamente igual à probabilidade de sobrevivência P_{n-1}^{surv} do buscador não ter encontrado nenhum anel após $n - 1$ passos multiplicada pela probabilidade p dele encontrar um dos dois anéis no próximo (n -ésimo) passo. Note que $P_{n-1}^{surv}(\vec{r}_0)$ é dado pela equação (3.12), e definiremos p sendo

$$p = \int_C \frac{d\theta}{2\pi} \bar{p}(\vec{r}), \quad (3.16)$$

que dá a probabilidade total de encontrar um dos anéis em qualquer posição $\vec{r} \in C$ a partir de um ponto típico a uma distância $\sim R/2$ dos anéis no limite destrutivo.

As condições de contornos impostas sobre o caminhante, influencia diretamente no comportamento da probabilidade de sobrevivência. Em uma dimensão, para um caminhante aleatório sujeito a duas barreiras absorventes, sabemos que a probabilidade de sobrevivência decai exponencialmente com o tempo (ARAÚJO; RAPOSO, 2016) (REDNER, 2001). Para o caso em duas dimensões, podemos seguir o mesmo raciocínio, a probabilidade de sobrevivência decai exponencialmente com o número de passos (MORI et al., 2020). Isto é

$$P_n^{surv} \sim e^{-\gamma n}. \quad (3.17)$$

Assim, temos que

$$P_n(\vec{r}_0) = p e^{-\gamma(n-1)}, \quad (3.18)$$

ou seja, para manter a normalização imposta na equação(3.11), a condição

$$\frac{e^\gamma}{e^\gamma - 1} p = 1 \quad (3.19)$$

precisa ser satisfeita, logo, obtemos

$$p = 1 - e^{-\gamma}. \quad (3.20)$$

Por outro lado, para uma caminhada que encontrou um dos anéis após n passos,

$$L_n = \sum_{j=1}^n |\ell_j|, \quad (3.21)$$

onde $|\ell_j|$ é o comprimento (em valor absoluto) do passo j . Então, tomando a média sobre todas as buscas realizadas, obtemos

$$\langle L_n \rangle = \sum_{j=1}^n \langle |\ell_j| \rangle. \quad (3.22)$$

Agora, consideremos que $\langle |\ell_j| \rangle \approx \langle |\ell| \rangle$, $\forall j$, de modo que, seguindo o mesmo raciocínio da equação(3.15), obtemos

$$\langle L_n \rangle \approx n \langle |\ell| \rangle. \quad (3.23)$$

Agora, iremos substituir as equações (3.23) e (3.18) na equação (3.10), para obter

$$\begin{aligned} \langle L \rangle(r_0) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} p e^{-\gamma(n-1)} n \langle |\ell| \rangle \\ &\approx p \langle |\ell| \rangle \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\gamma(n-1)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Usando o fato que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\gamma(n-1)} = \frac{e^{2\gamma}}{(e^{\gamma} - 1)^2}, \quad (3.25)$$

encontramos

$$\begin{aligned} \langle L \rangle(r_0) &\approx p \langle |\ell| \rangle \frac{e^{2\gamma}}{(e^{\gamma} - 1)^2} \\ &\approx p \langle |\ell| \rangle \frac{1}{(1 - e^{-\gamma})^2} \\ &\approx \frac{\langle |\ell| \rangle}{p}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde foi utilizado o resultado da equação (3.20). Então, utilizando a equação anterior e a definição mostrada na equação (3.9) podemos escrever

$$\eta \approx \frac{p}{\langle |\ell| \rangle}, \quad (3.27)$$

que pode ser utilizada para qualquer distribuição de probabilidade para definir o tamanho do passo dado pelo buscador. Neste trabalho, utilizaremos a distribuição *power-law* que aproxima a distribuição α -estável de Lévy dada pela equação (2.62), que foi desenvolvida no capítulo anterior. Agora, vamos em busca de uma melhor aproximação para p e $\langle |\ell| \rangle$ da equação (3.27).

3.2.1 Aplicação para a lei de potência $p_\alpha(\ell)$

Agora, iremos aplicar na equação (3.27) a distribuição *power-law* $p_\alpha(\ell)$ que aproxima a distribuição de Lévy para o limite em que $\ell \rightarrow \infty$ apresentada no capítulo anterior pela equação (2.62). Inicialmente, o buscador inicia a busca no regime destrutivo a partir de uma posição ao longo do eixo x positivo, sem perda de generalidade, a uma distância $x_0 = R/2$ do centro dos anéis (situado, também sem perda de generalidade, na origem do sistema de coordenadas x e y). Para o primeiro passo ele escolhe um ângulo inicial θ definido com o eixo x positivo, cuja distribuição $\omega(\theta)$ é uniforme no intervalo $\theta \in [0, \pi)$, ou seja, $\omega(\theta) = 1/\pi$ ².

Nós já calculamos anteriormente a distância balística $D(\theta)$ até o encontro de uma das bordas em um único passo, como podemos ver nas equações (3.1) e (3.2). Considerando $|\vec{r} - \vec{r}_{n-1}| \approx D(\theta)$ e utilizando a equação (2.62) como distribuição para tamanho de passos, podemos calcular a probabilidade do buscador sair da posição \vec{r}_{n-1} para uma posição \vec{r} em um dos anéis utilizando a equação (3.13), isto é

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \int_{D(\theta)}^{\infty} \frac{\alpha \ell_0^\alpha}{\ell^{\alpha+1}} d\ell \\ &= \left(\frac{\ell_0}{D(\theta)} \right)^\alpha. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Agora, podemos calcular finalmente a probabilidade de encontrar um dos anéis saindo de uma posição equidistante entre os dois anéis substituindo o resultado anterior na equação (3.16), ou seja

$$p \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\ell_0}{D(\theta)} \right)^\alpha d\theta. \quad (3.29)$$

² Notamos que o intervalo complementar $\theta \in [\pi, 2\pi)$ é simétrico em relação a esse primeiro intervalo.

Levando agora em conta que o encontro possivelmente se dá em algum passo posterior, na aproximação acima para a busca destrutiva, introduzimos o parâmetro efetivo $b \in [0.5, 1.0]$, de modo que efetivamente $x_0 = bR$ nas equações (3.1) e (3.2). Agora vamos solucionar a integral da equação (3.29). Primeiro vamos dividir a integral da seguinte forma:

$$p \approx \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\ell_0}{D(\theta)} \right)^\alpha d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_{m\acute{a}x}} \left(\frac{\ell_0}{D(\theta)} \right)^\alpha d\theta + \int_{\theta_{m\acute{a}x}}^{\pi} \left(\frac{\ell_0}{D(\theta)} \right)^\alpha d\theta \right\}, \quad (3.30)$$

e, em seguida, iremos substituir a equação (3.1) nas duas primeiras integrais e a equação (3.2) será utilizada na terceira integral. Feito isso, obtemos

$$\begin{aligned} p \approx & \frac{\ell_0^\alpha}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) + [x_0^2 \cos^2(\theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^\alpha d\theta \right. \\ & + \int_{\pi/2}^{\theta_{m\acute{a}x}} \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) + [x_0^2 \cos^2(\theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^\alpha d\theta \\ & \left. + \int_{\theta_{m\acute{a}x}}^{\pi} \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) - [x_0^2 \cos^2(\theta) + a^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^\alpha d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Agora, iremos dividir a segunda integral em duas outras novas integrais, da seguinte forma

$$\begin{aligned} p \approx & \frac{\ell_0^\alpha}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) + [x_0^2 \cos^2(\theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^\alpha d\theta \right. \\ & + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) + [x_0^2 \cos^2(\theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^\alpha d\theta \\ & - \int_{\theta_{m\acute{a}x}}^{\pi} \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) + [x_0^2 \cos^2(\theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^\alpha d\theta \\ & \left. + \int_{\theta_{m\acute{a}x}}^{\pi} \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) - [x_0^2 \cos^2(\theta) + a^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^\alpha d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para resolver as duas primeiras integrais, faremos a substituição $x = \cos \theta$, ou seja, $d\theta = -\frac{dx}{x^2 - x^2}$ quando $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e, usaremos $x = -\cos \theta$ com $d\theta = -\frac{dx}{x_0^2 - x^2}$ quando $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. Para as duas últimas integrais, é importante lembrar que estamos trabalhando no limite destrutivo, onde $x_0 \gg a$, com isso, podemos aproximar $-x_0 \cos(\theta) + [x_0^2 \cos^2(\theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2} \approx x_0 + R$ e $-x_0 \cos(\theta) - [x_0^2 \cos^2(\theta) + a^2 - x_0^2]^{1/2} \approx x_0 - a$, para $\theta_{m\acute{a}x} \leq \theta \leq \pi$. Feito todas as substituições e utilizando o fato que $\theta_{m\acute{a}x} = \pi - \arcsin \frac{a}{x_0}$, obtemos

$$\begin{aligned}
p &\approx \frac{\ell_0^\alpha}{\pi} \left\{ \int_0^{x_0} \left(\frac{1}{-x + [x^2 + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^\alpha \frac{dx}{x_0^2 - x^2} \right. \\
&\quad + \int_0^{x_0} \left(\frac{1}{x + [x^2 + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^\alpha \frac{dx}{x_0^2 - x^2} \\
&\quad \left. + \arcsin \left(\frac{a}{x_0} \right) [(x_0 - a)^{-\alpha} - (R + x_0)^{-\alpha}] \right\}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Com a ajuda da representação integral para a função hipergeométrica,

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b)}{\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \tag{3.34}$$

onde $\text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0$ e $|\arg(1-z)| < \pi$, chegamos ao seguinte resultado para a probabilidade p de encontrar um dos anéis:

$$\begin{aligned}
p &\approx \frac{\ell_0^\alpha}{\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{3\alpha+1} x_0^\alpha} \sin \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \left[\Gamma \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \Gamma \left(\frac{\alpha}{2} \right) {}_2F_1 \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; \alpha+1; -\frac{R^2 - x_0^2}{x_0^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 4^\alpha \Gamma \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \Gamma \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) \left(\frac{x_0^2}{R^2 - x_0^2} \right)^\alpha {}_2F_1 \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}; 1-\alpha; -\frac{R^2 - x_0^2}{x_0^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \arcsin \left(\frac{a}{x_0} \right) [(x_0 - a)^{-\alpha} - (R + x_0)^{-\alpha}] \right\}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Similarmente ao que fizemos para obter a equação (3.29), podemos escrever o valor médio dos passos $\langle |\ell| \rangle$ de uma caminhada da seguinte forma

$$\langle |\ell| \rangle \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \langle |\ell| \rangle(\theta) d\theta, \tag{3.36}$$

onde,

$$\langle |\ell| \rangle(\theta) \approx \int_{\ell_0}^{D(\theta)} \ell p_\alpha(\ell) d\ell + D(\theta) \int_{D(\theta)}^\infty p_\alpha(\ell) d\ell, \tag{3.37}$$

em que na primeira integral o *seacher* não encontra um dos anéis, enquanto que na segunda integral representa o encontro com uma das bordas. Substituindo a distribuição *power-law* $p_\alpha(\ell)$, apresentada na equação (2.62), na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle(\theta) &\approx \int_{\ell_0}^{D(\theta)} \frac{\alpha \ell_0^\alpha}{\ell^\alpha} d\ell + D(\theta) \int_{D(\theta)}^\infty \frac{\alpha \ell_0^\alpha}{\ell^{\alpha+1}} d\ell \\
&\approx \frac{\ell_0^\alpha}{[D(\theta)]^{\alpha-1}} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)} \{ \ell_0 - \ell_0^\alpha [D(\theta)]^{-\alpha+1} \} \\
&\approx \frac{\ell_0^\alpha}{(1-\alpha)[D(\theta)]^{\alpha-1}} + \frac{\alpha \ell_0}{\alpha-1}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Agora, podemos calcular $\langle |\ell| \rangle$,

$$\begin{aligned}\langle |\ell| \rangle &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\ell_0^\alpha}{(1-\alpha)[D(\theta)]^{\alpha-1}} + \frac{\alpha\ell_0}{\alpha-1} \right\} d\theta \\ &\approx \frac{\ell_0^\alpha}{\pi(1-\alpha)} \int_0^\pi \frac{d\theta}{[D(\theta)]^{\alpha-1}} + \frac{\alpha\ell_0}{\alpha-1},\end{aligned}\quad (3.39)$$

que, ao dividir o intervalo de integração, chegamos a

$$\langle |\ell| \rangle \approx \frac{\ell_0^\alpha}{\pi(1-\alpha)} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[D(\theta)]^{\alpha-1}} + \int_{\pi/2}^{\theta_{\text{máx}}} \frac{d\theta}{[D(\theta)]^{\alpha-1}} + \int_{\theta_{\text{máx}}}^\pi \frac{d\theta}{[D(\theta)]^{\alpha-1}} \right\} + \frac{\alpha\ell_0}{\alpha-1}, \quad (3.40)$$

e, utilizando as equações (3.1) e (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}\langle |\ell| \rangle &\approx \frac{\ell_0^\alpha}{\pi(1-\alpha)} \left\{ \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) + [x_0^2 \cos^2(\theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^{\alpha+1} d\theta \right. \\ &\quad + \int_{\pi/2}^\pi \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) + [x_0^2 \cos^2(\theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^{\alpha+1} d\theta \\ &\quad - \int_{\theta_{\text{máx}}}^\pi \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) + [x_0^2 \cos^2(\theta) + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^{\alpha+1} d\theta \\ &\quad \left. + \int_{\theta_{\text{máx}}}^\pi \left(\frac{1}{-x_0 \cos(\theta) - [x_0^2 \cos^2(\theta) + a^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^{\alpha+1} d\theta \right\} \\ &\quad + \frac{\alpha\ell_0}{\alpha-1}.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado para obter a equação (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}\langle |\ell| \rangle &\approx \frac{\ell_0^\alpha}{\pi(1-\alpha)} \left\{ \int_0^{x_0} \left(\frac{1}{-x + [x^2 + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^{\alpha-1} \frac{dx}{x_0^2 - x^2} \right. \\ &\quad + \int_0^{x_0} \left(\frac{1}{x + [x^2 + R^2 - x_0^2]^{1/2}} \right)^{\alpha-1} \frac{dx}{x_0^2 - x^2} \\ &\quad + \arcsin\left(\frac{a}{x_0}\right) \left[(x_0 - a)^{-\alpha+1} - (R + x_0)^{-\alpha+1} \right] \\ &\quad \left. + \frac{\alpha\ell_0}{\alpha-1}, \right\}\end{aligned}\quad (3.42)$$

logo, utilizando mais uma vez a hipergeométrica (3.34), chegamos, finalmente ao resultado

$$\begin{aligned}
\langle |\ell| \rangle \approx & \frac{\ell_0^\alpha}{\pi(1-\alpha)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{3\alpha-2} x_0^{\alpha-1}} \sin\left(\frac{\pi(\alpha-1)}{2}\right) \right. \\
& \times \left[\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\alpha-1}{2}; \alpha; -\frac{R^2-x_0^2}{x_0^2}\right) \right. \\
& - 4^{\alpha-1} \Gamma\left(-\frac{\alpha-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{x_0^2}{R^2-x_0^2}\right)^{\alpha-1} {}_2F_1\left(-\frac{\alpha-1}{2}, -\frac{\alpha-1}{2}; 2-\alpha; -\frac{R^2-x_0^2}{x_0^2}\right) \left. \right] \\
& + \arcsin\left(\frac{a}{x_0}\right) \left[(x_0-a)^{-\alpha+1} - (R+x_0)^{-\alpha+1} \right] \left. \right\} \\
& + \frac{\alpha \ell_0}{\alpha-1}. \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo as equações (3.35) e (3.43) na equação (3.27), obtemos final a eficiência de busca para o caso destrutivo no problemas dos anéis, dada por

$$\eta \approx \frac{(1-\alpha)I(\alpha)}{I(\alpha-1) - \pi\alpha\ell_0^{1-\alpha}}, \tag{3.44}$$

onde,

$$\begin{aligned}
I(\alpha) = & \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha+1} x_0^\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; \alpha+1; -\frac{R^2-x_0^2}{x_0^2}\right) \right. \\
& - 4^\alpha \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \left(\frac{x_0^2}{R^2-x_0^2}\right)^\alpha {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}; 1-\alpha; -\frac{R^2-x_0^2}{x_0^2}\right) \left. \right] \\
& + \arcsin\left(\frac{a}{x_0}\right) \left[(x_0-a)^{-\alpha} - (R+x_0)^{-\alpha} \right]. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

O resultado apresentado na equação (3.44) é um resultado analítico que, como veremos no próximo capítulo, explica o comportamento da curva que caracteriza a eficiência de busca no problema dos anéis para o regime destrutivo.

3.3 REVISITANDO O LIMITE NÃO-DESTRUTIVO

Nesta seção, revisitaremos o caso não-destrutivo no problema dos anéis em buscas aleatórias. Como vimos anteriormente, temos um caminhante sujeito a duas bordas absorventes. O *walker* inicia sua jornada em uma posição entre dois anéis e caminha aleatoriamente até o momento de encontro com uma das bordas. Temos um problema equivalente em uma dimensão, onde o caminhante inicia sua jornada entre duas barreiras, podendo escolher apenas duas direções para realizar o passo, direita e esquerda.

O problema unidimensional utilizando Lévy como distribuição para o comprimento de passos foi amplamente estudado, com expressões que caracterizam grandezas importantes para este tipo de problema, como tempo médio de primeira passagem, distância total percorrida até encontrar o alvo e números de voos de Lévy (BULDYREV et al., 2001a) (BULDYREV et al., 2001b) (NICOLAU et al., 2021). Para o caso em duas dimensões, temos o problemas do anéis. A eficiência pode ser obtida através de uma generalização do problema equivalente em uma dimensão, visto que esperamos o mesmo comportamento em ambos os casos (CARAMÊS et al., 2022). Neste caso a eficiência é dada por

$$\eta \approx \frac{1}{\langle n \rangle \langle |\ell| \rangle}, \quad (3.46)$$

onde $\langle n \rangle$ é o número médio de passos dados até encontrar um dos alvos e $\langle |\ell| \rangle$ é o tamanho médio dos passos sorteados.

No limite não-destrutivo o caminhante inicia sua jornada em uma posição x_0 muito próxima do anel interno de raio a . Vamos definir o parâmetro adimensional δ ,

$$\delta = \frac{x_0 - a}{a} \quad (3.47)$$

onde, no regime de interesse, $x_0 \rightarrow a \ll R$. Logo, no regime não-destrutivo temos o limite $\delta \rightarrow 0^+$.

Para uma dimensão temos a seguinte expressão para caracterizar o número de passos dados pelo buscador até encontrar a borda mais distante do ponto de partida

$$\langle n \rangle_{1D} = f_{1D}(\alpha) \left[\frac{x_0(\lambda - x_0)}{c^2} \right]^{\alpha/2}, \quad (3.48)$$

onde c é o parâmetro de escala da distribuição de Lévy³, ou, para o caso da *power-law* (2.62), $c = \ell_0$. Temos também que $f_{1D}(\alpha) = 1/\Gamma(\alpha + 1)$ no caso de Lévy.

No regime não-destrutivo, a probabilidade do *walker* encontrar a borda externa de raio R é muito pequena. Vamos considerar também que as caminhadas realizadas não se afastam muito do anel interno, ou seja, ficam sempre restritas a uma região $r < \gamma a$, em que γ não é um parâmetro $\gg 1$. Nesse caso, o número médio de passos realizado pelo buscador no problema dos anéis é semelhante ao resultado unidimensional, mas com $\lambda \rightarrow \gamma a$. Ou seja, para o regime não-destrutivo do problema dos anéis, temos

³ Representado anteriormente por σ na equação (2.48).

$$\langle n \rangle_{2D} \approx f_{2D}(\alpha) \left[\frac{\delta a(\gamma a - \delta a)}{c^2} \right]^{\alpha/2}. \quad (3.49)$$

Para calcular $\langle |\ell| \rangle$ também podemos utilizar os resultados obtidos no estudo unidimensional. Em uma dimensão temos que

$$\langle |\ell| \rangle_{1D} \approx c \left[\left(\frac{\delta a}{c} \right)^{1-\alpha} + v \right], \quad (3.50)$$

onde $v \approx 1$ (CARAMÊS et al., 2022). Para duas dimensões, temos

$$\langle |\ell| \rangle_{2D} \approx c \left[\left(\frac{\delta a}{c} \right)^{1-\alpha} g(n, \alpha) + h(\alpha) \right], \quad (3.51)$$

onde as funções $g(n, \alpha)$ e $h(\alpha)$ também não dependem de δ . Agora, calcularemos o produto $\langle n \rangle \langle |\ell| \rangle$, dado por

$$\langle n \rangle \langle |\ell| \rangle \approx f_{2D}(\alpha) \left[\frac{\delta a(\gamma a - \delta a)}{c^2} \right]^{\alpha/2} c \left[\left(\frac{\delta a}{c} \right)^{1-\alpha} g(n, \alpha) + h(\alpha) \right], \quad (3.52)$$

que, ao tomar o limite $\delta \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\langle n \rangle \langle |\ell| \rangle \approx \begin{cases} \delta^{\alpha/2}; & \text{se } \alpha < 1; \\ \delta^{\alpha/2+1-\alpha}; & \text{se } \alpha > 1. \end{cases} \quad (3.53)$$

Logo, substituindo o resultado anterior na equação (3.46), obtemos

$$\eta \approx \begin{cases} \delta^{-\alpha/2}; & \text{se } \alpha < 1; \\ \delta^{\alpha/2-1}; & \text{se } \alpha > 1, \end{cases} \quad (3.54)$$

que coincide com o resultados apresentados em 2021 para o limite $\delta \rightarrow 0^+$ com uma distribuição de sítios de Poisson com densidade $\rho \rightarrow 0$ (BULDYREV et al., 2021).

4 PROBLEMA DOS ANÉIS: RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, apresentaremos o algoritmo de busca entre os anéis concêntricos utilizado neste trabalho para realizar uma simulação computacional que modele o problema dos anéis nas buscas aleatórias. Após a apresentação do caminho que deve ser seguido para realizar a modelagem numérica, apresentaremos os diversos resultados obtidos após o estudo. Também faremos uma discussão detalhada entre os resultados numéricos e os resultados analíticos apresentados no capítulo anterior.

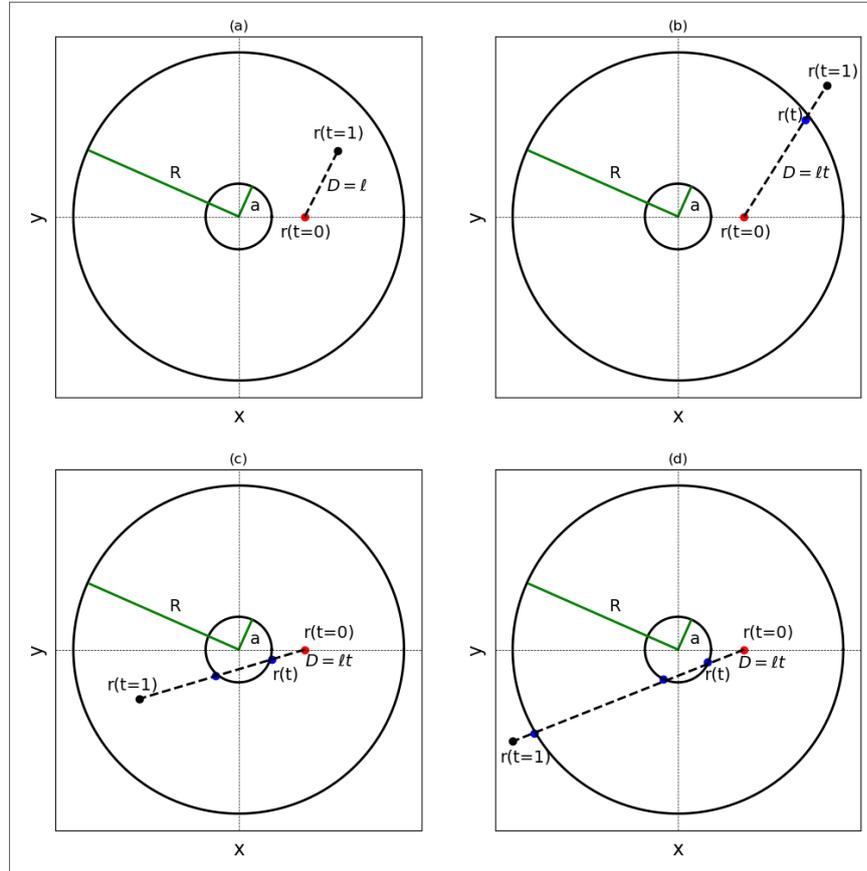
4.1 ALGORITMO DE BUSCA ENTRE OS ANÉIS

Como foi apresentado no capítulo anterior, o problema dos anéis possibilita que estudemos a relação entre o alvo mais próximo e outros que estão afastados da posição inicial de um buscador que deseja encontrar alvos espalhados em um plano bidimensional localizados em posições desconhecidas¹. Como foi mostrado na Figura 12, o caminhante inicia sua jornada entre dois anéis e caminha aleatoriamente, usando a distribuição *power-law* (2.62) para definir o comprimento do passo dado, até encontrar um dos anéis. A direção do passo é sorteada aleatoriamente com distribuição uniforme no intervalo de 0 a 2π . Ao encontrar um dos anéis, é importante que saibamos todas as informações da busca, como distância total percorrida, número de passos dados até o encontro e identificar qual dos dois anéis foi encontrado para que possamos estudar as grandezas desejadas, como eficiência de busca, tempo de primeira passagem e probabilidade de absorção.

Para que seja possível realizar a simulação, devemos fazer com que o caminhante trunque o passo exatamente na posição em que se encontre a borda de um dos anéis. Como podemos ver na Figura 16, temos algumas possibilidades de cruzamentos quando o caminhante sorteia uma posição fora do plano $2D$ entre os anéis, ou nenhum cruzamento, quando o caminhante tomou uma posição que pertence ao espaço de busca \mathcal{S} . Note que na Figura 16, temos a posição do caminhante dada através de um parâmetro t . O caminhante sai da posição $\vec{r}(t=0)$ e sorteia um passo que irá colocá-lo na posição $\vec{r}(t)$. Entretanto, quando há uma intersecção entre o passo sorteado e um dos anéis, truncamos o passo na posição $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{\ell}t$. Caso não ocorra o cruzamento, $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{\ell}t$. Onde $\vec{\ell} = \ell \cos \theta \hat{x} + \ell \sin \theta \hat{y}$, com θ sendo o ângulo sorteado entre 0 e 2π .

¹ Veja novamente a Figura 11

Figura 16 – Truncamento do passo. Para garantir que o caminhante finalizou sua caminhada exatamente ao encontrar um dos anéis é necessário encontrar um parâmetro $t \in [0, 1]$ que caracteriza a fração do último passo ℓ sorteado que será contabilizada e pode ser encontrado através das equações (4.1) e (4.2). Em (a) utilizamos $D = \ell t$ onde $t = 1$ devido ao fato do último passo pertencer ao espaço de busca \mathcal{S} . Em (b) notamos um cruzamento com o anel externo, portanto contabilizamos $D = \ell t$ com $t < 1$. Em (c) e (d) temos dois e três cruzamentos respectivamente, neste caso encontramos dois e três valores para $t < 1$, respectivamente. Utilizamos sempre o menor valor de t para truncar o passo.



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

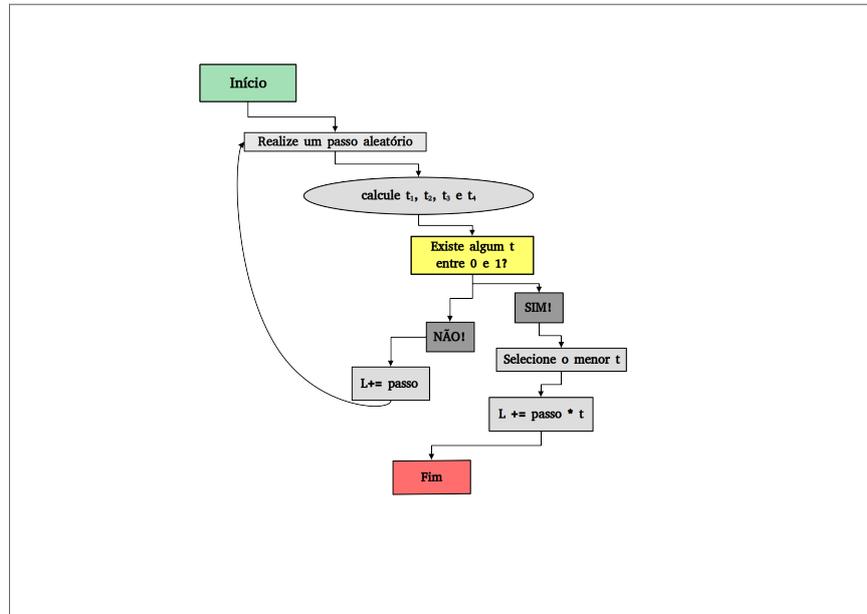
Claramente, observamos que t é um parâmetro que informa a fração do passo sorteado que será contabilizada na distância total percorrida durante a busca, ou seja, $t \in (0, 1]$, sendo que o cruzamento em um dos anéis é constatado quando $t \in (0, 1)$. As equações utilizadas para calcular t são dadas por:

$$t_{int} = t_{1,2} = \frac{1}{2A}[-B \pm \sqrt{B^2 - 4A(C - a^2)}], \quad (4.1)$$

que, ao encontrar t entre 0 e 1, significa que o anel interno foi interceptado. Temos também que

$$t_{ext} = t_{3,4} = \frac{1}{2A}[-B \pm \sqrt{B^2 - 4A(C - R^2)}], \quad (4.2)$$

Figura 17 – Algoritmo de busca entre os anéis. A rotina é a seguinte: o buscador inicia a caminhada, sorteia um passo ℓ aleatório de comprimento dado pela *power-law*, logo após ele verifica se encontrou um dos anéis calculando t_1, t_2, t_3 e t_4 . Caso ele encontre um ou mais valores de $t \in (0, 1)$, ele escolhe o menor valor para truncar o passo, pois o menor valor de t representa a menor distância de encontro com um dos anéis como vimos na Figura 16. Caso ele não encontre $t < 1$, ele sorteia outro passo ℓ e repete tudo mais uma vez, mantendo a rotina até que a condição para finalizar a busca seja encontrada e assim, encerre sua caminhada.



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

que, ao encontrar t entre 0 e 1, significa que o anel externo foi encontrado. Nas equações acima, temos $A = 2\ell^2$, $B = 2(x + y)\ell$ e $C = x^2 + y^2$ (CARAMÊS et al., 2022).

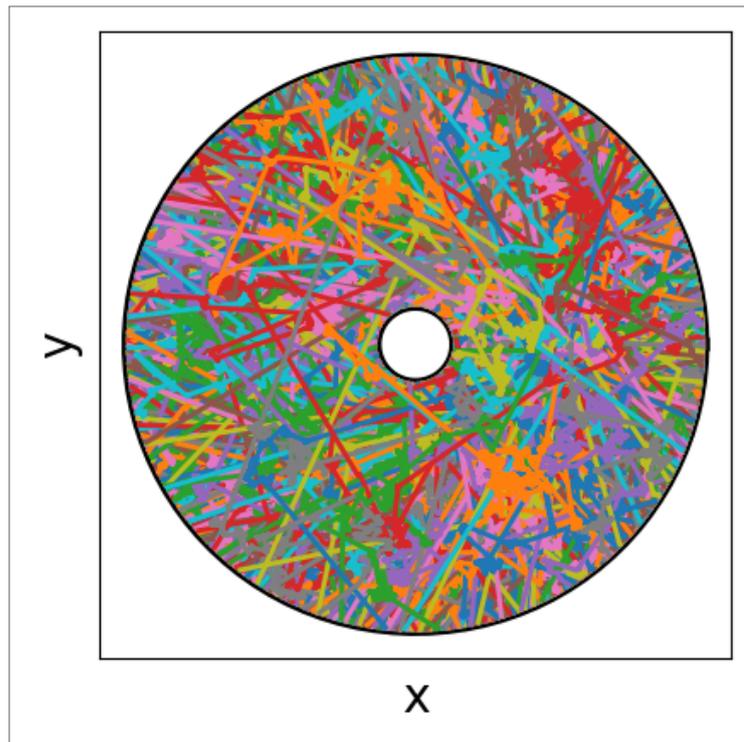
É importante lembrar que a verificação de intersecção deve ser feita a cada passo dado, de modo que o último passo dado será contabilizado apenas a fração $t\ell$, pois um alvo foi encontrado, podendo assim, finalizar a busca. Enquanto não for encontrado nenhum valor de t entre 0 e 1, o tamanho do passo sorteado será adicionado a distância total percorrida L . Na Figura 17 podemos ver o algoritmo de busca entre os anéis. A rotina é a seguinte: o buscador inicia a caminhada, sorteia um passo ℓ aleatório de comprimento dado pela *power-law* e verifica se encontrou um dos anéis calculando t_1, t_2, t_3 e t_4 . Caso ele encontre um ou mais valores de $t \in (0, 1)$, ele escolhe o menor valor para truncar o passo, pois o menor valor de t representa a menor distância de encontro com um dos anéis como vimos na Figura 16. Caso ele não encontre o valor desejado de t , é realizado o sorteio de um outro passo e repete tudo novamente, mantendo a rotina até que a condição para finalizar a busca seja satisfeita e assim, encerre a busca.

Para gerar números pseudo-aleatórios $rng_{power-law}$ da *power-law* (1.1), utilizamos a equação

$$rng_{power-law} = \ell_0(1 - U)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (4.3)$$

que foi obtida através do Método da Inversão, onde U é um número pseudo-aleatório uniforme $\in [0, 1)$. Todas as simulações foram escritas em Python, uma linguagem de alto nível que possibilita que o programa seja escrito de forma mais compacta, otimizando o tempo de desenvolvimento do projeto (IZAAC; WANG, 2018). Para gerar U , utilizamos o gerador `np.random.uniform(0, 1)` da biblioteca Numpy. Para observar os dados obtidos através das simulações, utilizamos as bibliotecas Matplotlib e Pandas. E, para otimizar o tempo de processamento, utilizamos a biblioteca Multiprocessing.

Figura 18 – Na imagem abaixo podemos observar $N = 10^4$ buscas aleatórias realizadas entre dois anéis concêntricos utilizando a *power-law* com $\alpha = 1.0$ para sortear os passos. Todas as buscas iniciaram da mesma posição x_0 e caminharam aleatoriamente até que encontrassem um dos anéis. Todas as caminhadas são independentes uma da outra. Uma observação importante é que todo espaço de busca \mathcal{S} foi preenchido, garantindo a aleatoriedade da simulação computacional.



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Para fazer uma análise estatística dos dados obtidos através da modelagem numérica do problema dos anéis é necessário obter um ensemble de amostras, para que possamos calcular médias e, assim, compreender como o sistema se comporta. Para o caso do problema dos anéis, podemos fazer isso de duas maneiras. A primeira, definir um número N de buscas independentes que serão realizadas, isto é, teremos dados de N caminhantes independentes que

realizaram a busca entre os anéis, como podemos ver na Figura 18. Note que é extremamente importante que todo o espaço de busca seja totalmente preenchido após as N walks. Na segunda maneira, definimos uma distância máxima permitida que o buscador poderá percorrer, neste caso o caminhante sai de uma posição inicial entre os anéis e caminha aleatoriamente até encontrar uma das bordas absorventes e, ao encontrá-las, retorna para a posição inicial novamente, repetindo este ciclo até que ele percorra a distância total máxima pré-definida. Veremos que estas duas formas serão úteis para estudar as grandezas desejadas.

4.2 ESTUDO DA EFICIÊNCIA DE BUSCA

Nesta seção, iremos apresentar os resultados numéricos relacionados a eficiência de busca η para os regimes destrutivo e não-destrutivo. A eficiência numérica foi definida da seguinte forma:

$$\eta = \frac{N}{D_{max}}, \quad (4.4)$$

onde, N é o número de alvos encontrados e D_{max} é a distância total percorrida pelo *seacher*. Para estudar esta grandeza, fixamos D_{max} , ou seja, o caminhante inicia sua busca em uma posição x_0 e, quando encontra um alvo, ele retorna novamente para posição inicial definida inicialmente, repetindo este processo até que a distância total percorrida alcance o valor fixado pré-estabelecido antes de rodar a simulação, como foi explicado anteriormente.

4.2.1 Regime não-destrutivo

Antes de apresentarmos resultados utilizando a distribuição *power-law*, vamos reproduzir um resultado já presente na literatura apresentados em 2022 (CARAMÊS et al., 2022). Iremos utilizar para o comprimento de passos a função apresentada na Figura 19 para gerar números pseudo-aleatórios da distribuição de Lévy (2.48).

Para reproduzir o resultados, realizamos uma simulação com os seguintes parâmetros:

$$\delta = \frac{x_0}{a} - 1, \sigma = \frac{rr}{a}, \rho = \frac{1}{aR}, \eta_0 = \eta R, \quad (4.5)$$

como foi definido no artigo publicado em 2022 por Caramês e outros colaboradores (CARAMÊS et al., 2022), iremos reproduzir a FIG 2(b) presente neste artigo. Após definir $\sigma = 0.01$,

Figura 19 – Função que gera números aleatórias da distribuição de Lévy escrita na linguagem Python.

```
def rng_levy48(alpha, rr):
    ee = phi = mu = mu1 = xmu1 = xmu = np.float64
    mu = alpha
    mu1 = mu - 1
    xmu = 1 / mu
    xmu1 = xmu - 1
    phi = (np.random.uniform(0, 1)-0.5) * np.pi
    ee = -np.log(np.random.uniform(0, 1))
    return (rr * np.sin(mu * phi) / np.power(np.cos(phi), xmu)) * np.power(np.cos(phi * mu1) / ee, xmu1)
```

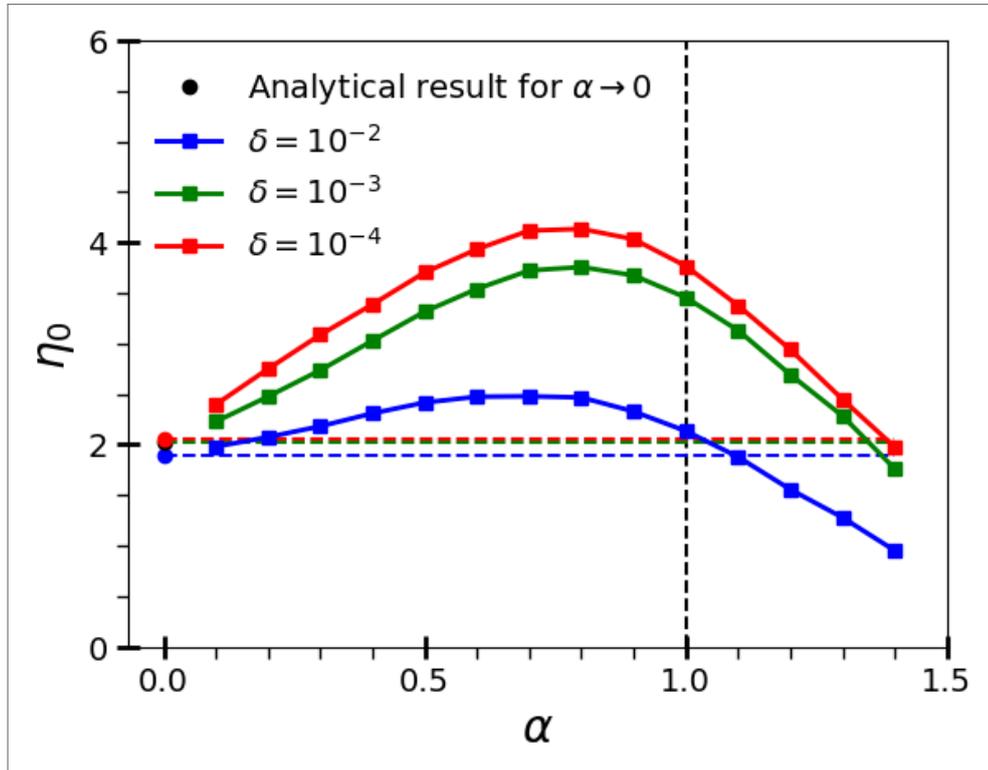
Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

$a = 1$, $\rho = 5.2 \times 10^{-2}$ e limitar D_{max} em um milhão de unidades, foi obtido os resultados apresentados na Figura 20. Como podemos observar, os resultados coincidem com os resultados encontrado no artigo que motivou este trabalho, mantendo o mesmo comportamento, note também que a eficiência tende a ser máxima em $\alpha = 1$ quando $\delta \rightarrow 0$. Quanto menor for o valor de δ , mais próximo do anel interno será o ponto de partida do buscador, caracterizando o regime não-destrutivo. Notamos, portanto, que os resultados para o regime não-destrutivo do problemas do anéis concorda com as hipóteses apresentadas em 1999, por Viswanathan e outros colaboradores (VISWANATHAN et al., 1999). Além disso, podemos verificar que os pontos obtidos na simulação tendem a concordar com o resultado exato para o limite balístico dado por $\eta_0 = R/\langle|\ell|\rangle$, onde $\langle|\ell|\rangle$ é dado pela equação (3.8).

Agorá será apresentado resultados obtidos a partir de uma simulação realizada com os mesmos parâmetros, com exceção apenas da distribuição de probabilidades para o comprimento de passo, ou seja, utilizamos o $rng_{power-law}$ que gera números aleatórios da *power-law* (2.62). Definimos $\ell_0 = \sigma = 0.01$. Os resultados estão apresentados na Figura 21. Perceba que obtemos um comportamento muito semelhante ao resultado utilizando a Lévy, a eficiência aumenta a medida que δ diminui e sua maximização tende a ser encontrada em $\alpha = 1.0$, quando $\delta \rightarrow 0$. Entretanto, a eficiência de busca normalizada η_0 é maior utilizando a Lévy. O motivo está relacionado ao fato do caminhante que utiliza a *power-law* está limitado a não realizar passos com comprimento menor que ℓ_0 , impedindo que o caminhante encontre alvos que estão nessa faixa de distância. Esta limitação não ocorre quando utilizamos a Lévy (COLAÇO et al., 2022).

Agora, faremos um estudo mais detalhado utilizando a distribuição *power-law* (2.62) para caracterizar o tamanho do passo do buscador no problemas dos anéis concêntricos. Iremos apresentar resultados obtidos através de simulações de Monte Carlo para os principais parâmetros do sistema, o raio do anel externo R , a posição inicial x_0 da busca e o parâmetro de escala ℓ_0 da *power-law* que determina o menor passo possível de ser realizado pelo caminhante. Para todos os casos, o raio do anel interno foi mantido fixo, $a = 1$. Neste caso, não iremos

Figura 20 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a distribuição de Lévy para o comprimento de passos. Quanto menor for o valor de δ , mais próximo do anel interno será o ponto de partida do buscador, caracterizando o regime não-destrutivo. Nesta imagem mostramos que conseguimos obter resultados obtido anteriormente para o problema dos anéis. Note que a eficiência tende a ser máxima em $\alpha = 1$ quando $\delta \rightarrow 0$. Perceba que os pontos obtidos na simulação tendem a concordar com o resultado exato para o limite balístico dado por $\eta_0 = R/\langle|\ell|\rangle$, onde $\langle|\ell|\rangle$ é dado pela equação (3.8). Para produzir estes resultados foi definido $\sigma = 0.01$, $a = 1$, $R = 1/\rho$ com $\rho = 5.2 \times 10^{-2}$ e limitamos D_{max} em 10^6 de unidades.



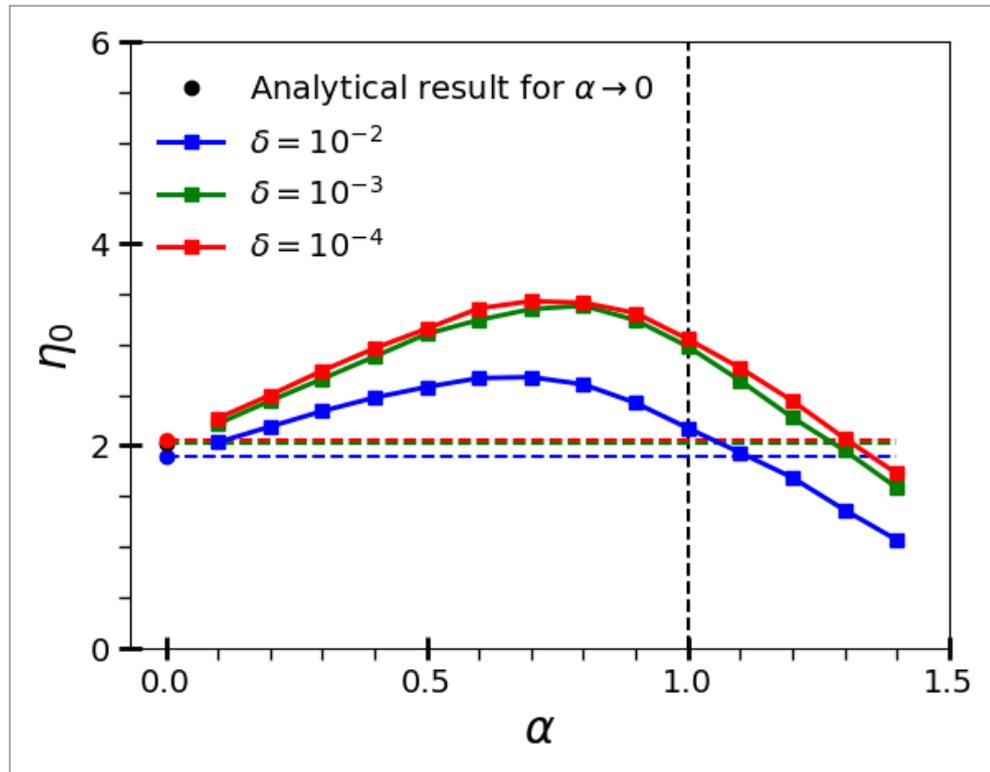
Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

normalizar a eficiência, faremos uma plotagem gráfica da eficiência η dada pela equação (4.4).

Para entender como o parâmetro ℓ_0 da *power-law* influencia a eficiência de busca, organizamos na Figura 22 os dados referentes a modelagem numérica do problema dos anéis para três valores distintos de ℓ_0 . Para esta simulação fixamos $R = 100$, $\delta = 0.01$ e $D_{max} = 10^7$. Na imagem, notamos que a maximização de η tende a ser encontrada em $\alpha = 1$, como esperado para o regime não-destrutivo. Notamos também que a eficiência é maximizada a medida que ℓ_0 diminui. O motivo está relacionado ao fato do caminhante poder realizar passos ainda menores, facilitando o encontro quando o alvo está próximo. Note que a eficiência para $\alpha \rightarrow 0$ não depende do parâmetro ℓ_0 como podemos observar na equação (3.8), portanto, as três curvas devem convergir para o mesmo ponto a medida que α se aproxima de 0.

Agora, vamos estudar uma outra vez como a eficiência é influenciada pela posição inicial do buscador, x_0 . Neste caso, utilizamos os parâmetros: $R = 100$, $\ell_0 = 0.001$ e D_{max} limitada

Figura 21 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a *power-law*. Para produzir estes resultados foi definido $\ell_0 = \sigma = 0.01$, $a = 1$, $R = 1/\rho$ com $\rho = 5.2 \times 10^{-2}$ e limitamos D_{max} em 10^6 de unidades. Perceba que obtemos um comportamento muito semelhante ao resultado utilizando a Lévy, a eficiência aumenta a medida que δ diminui e também observamos que a maximização tende a ser encontrada em $\alpha = 1.0$, quando $\delta \rightarrow 0$. Entretanto, a eficiência de busca normalizada η_0 é maior utilizando a Lévy. Perceba também que, novamente, os pontos obtidos na simulação tendem a concordar com o resultado exato para o limite balístico dado por $\eta_0 = R/\langle|\ell|\rangle$, onde $\langle|\ell|\rangle$ é dado pela equação (3.8).

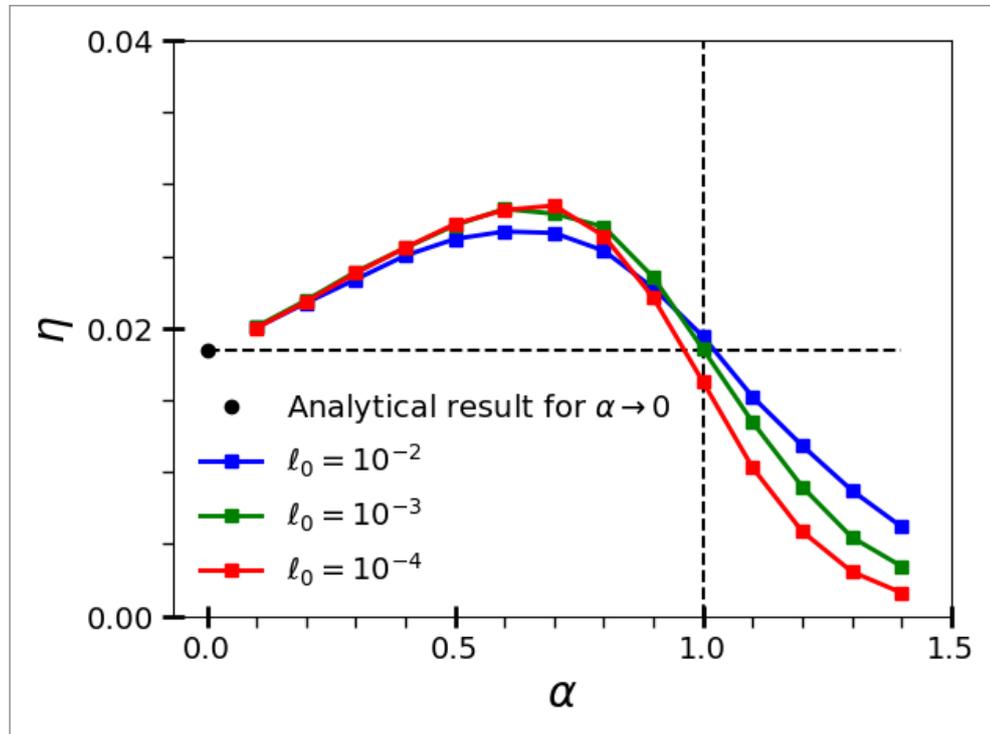


Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

em um milhão de unidades. Foi mantido $x_0 = a(\delta + 1)$. Na Figura 23 podemos ver três curvas para o regime não-destrutivo. Note que a maximização de η , neste caso, também tende a ser encontrada em $\alpha = 1$ a medida que a posição inicial do caminhante se aproxima do anel interno, um comportamento previsto na literatura desde 1999 para buscas aleatórias neste regime.

Por último veremos como o raio do anel externo R influencia na eficiência de busca. A simulação foi realizada para três valores distintos de R , mantendo fixo $x_0 = a(\delta + 1)$, $\delta = 0.01$, $D_{max} = 10^6$, e $\ell_0 = 0.001$. Os resultados estão apresentados na Figura 24. Como podemos observar, quanto menor for o raio do anel externo, maior será a eficiência. Podemos observar que o aumento da eficiência acontece em todos os valores do parâmetro α , o motivo está relacionado ao fato da eficiência ser inversamente proporcional a distância total percorrida. Com o aumento do raio do anel externo, o caminhante irá percorrer uma distância maior para

Figura 22 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a *power-law* variando o parâmetro ℓ_0 . Para esta simulação fixamos $R = 100$, $\delta = 0.01$ e $D_{max} = 10^7$. Na imagem, notamos que a maximização de η tende a ser encontrada em $\alpha = 1$, como esperado para o regime não-destrutivo. Notamos também que a eficiência é maximizada a medida que ℓ_0 diminui. Como a eficiência para $\alpha \rightarrow 0$ não depende do parâmetro ℓ_0 as três curvas devem convergir para o mesmo ponto a medida que α se aproxima de 0.



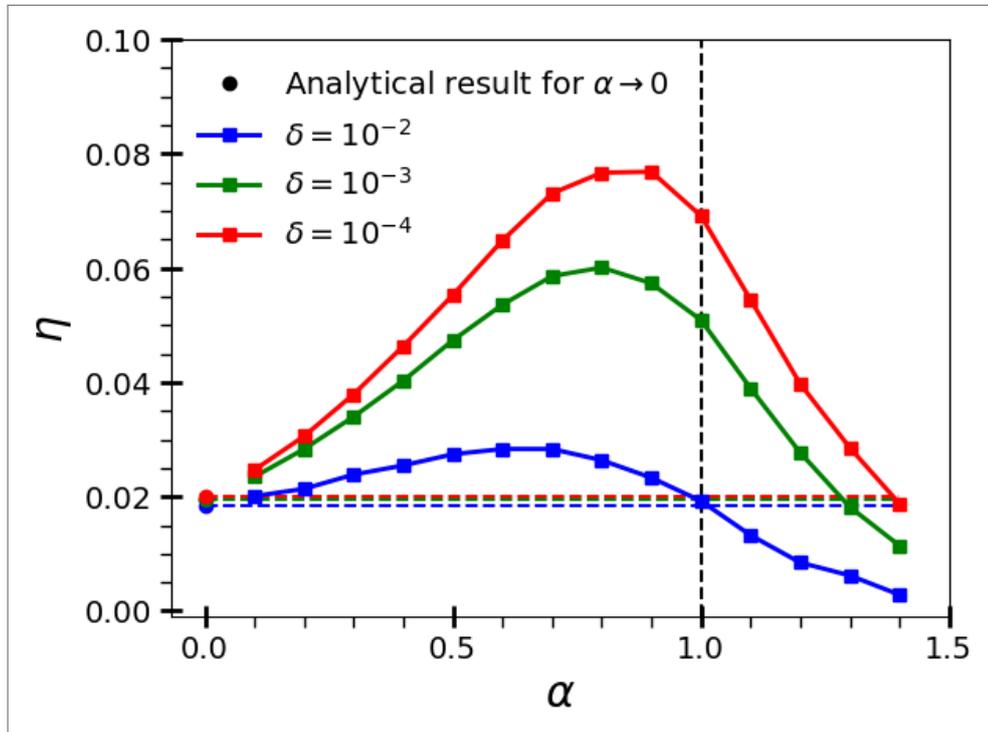
Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

encontrar um dos anéis, pois o caminhante poderá se afastar mais do anel interno antes de encontrá-lo ou precisará, obrigatoriamente caminhar mais para os casos em que ele encontrou o anel externo.

4.2.2 Regime destrutivo

Agora, vamos estudar de forma detalhada o regime destrutivo para o problema dos anéis. Como foi dito nos capítulos anteriores, o regime destrutivo é caracterizado pelo fato do caminhante iniciar a busca em uma posição $x_0 \approx R/2$ equidistante entre os anéis. Além disso, também devemos ter a relação $R \gg x_0 \gg a$ entre os parâmetros. Para conseguir resultados que melhor se aproximassem das condições impostas no cálculo analítico da Seção 3.2, foi realizado uma simulação computacional que modelava a busca entre os anéis utilizando $R = 5000$, $a = 1$, $x_0 = R/2$ com $D_{max} = 10^9$ para $\alpha \in [0.1, 0.5]$, $D_{max} = 10^8$ para $\alpha \in [0.6, 0.8]$ e $D_{max} = 10^7$ para $\alpha \in [0.9, 1.4]$. A distância máxima permitida foi definida dessa forma devido

Figura 23 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a *power-law*. Para este caso, utilizamos os parâmetros: $R = 100$, $\ell_0 = 0.001$ e D_{max} limitada em um milhão de unidades. Também foi mantido $x_0 = a(\delta + 1)$. Note que a maximização de η , neste caso, também tende a ser encontrada em $\alpha = 1$ a medida que a posição inicial do caminhante se aproxima do anel interno, como esperado. Perceba também que os pontos obtidos na simulação tendem a concordar com o resultado exato para o limite balístico dado por $\eta = 1/\langle|\ell|\rangle$, onde $\langle|\ell|\rangle$ é dado pela equação (3.8).

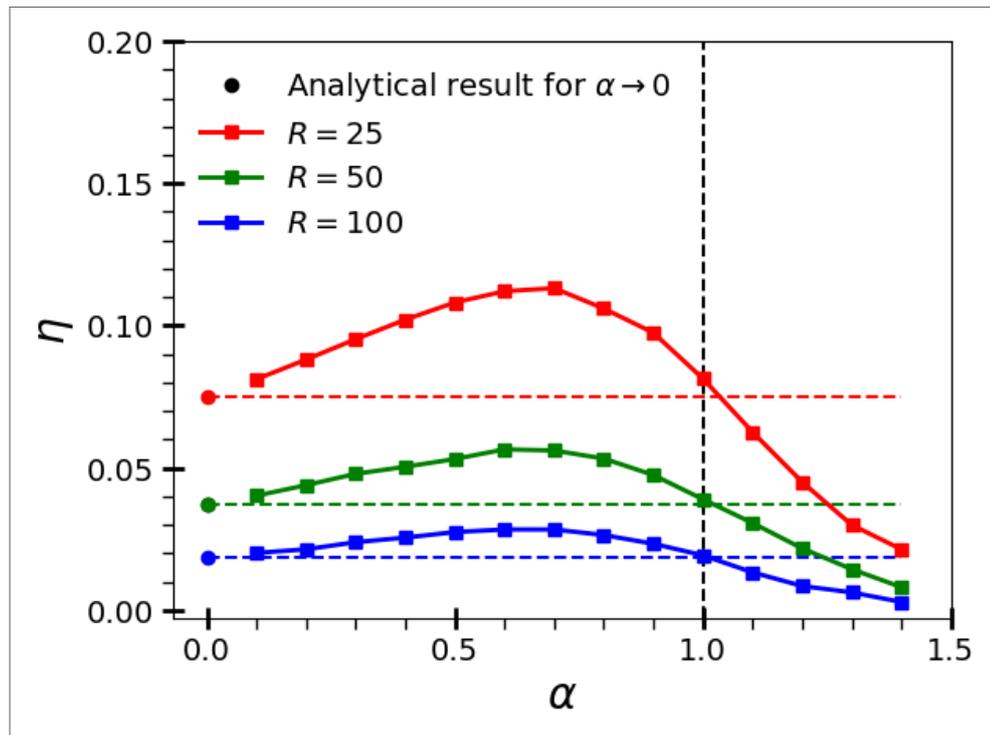


Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

ao custo computacional, pois, como veremos na Seção 4.4, o número de passos realizados até o encontro em uma das bordas aumenta a medida que o valor de α aumenta, conseqüentemente o número de operações aumenta, elevando o custo computacional.

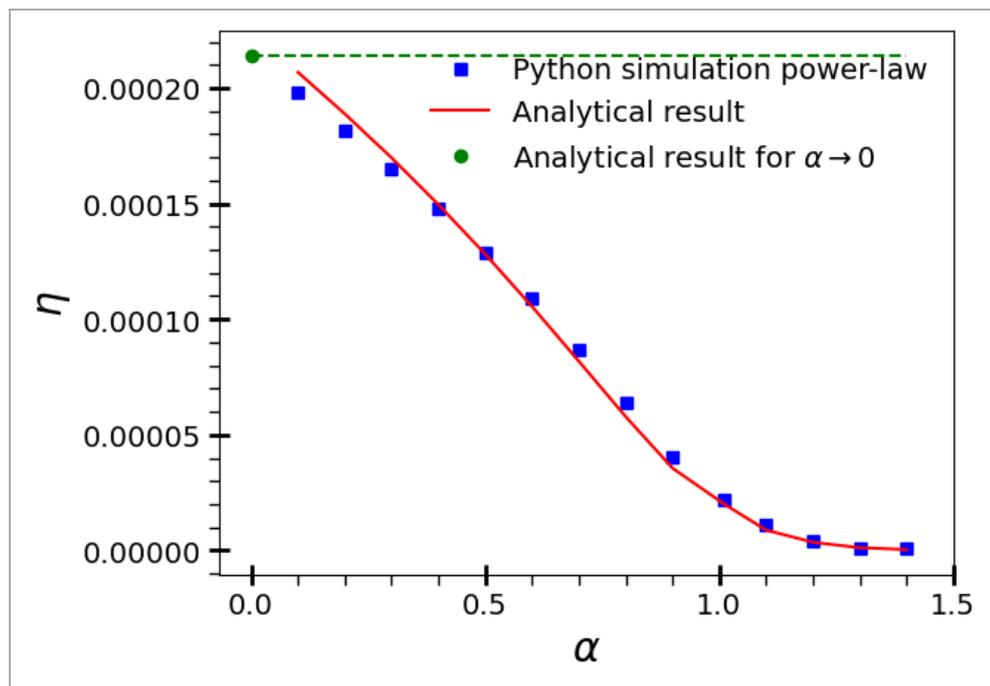
O resultado da simulação está apresentado na Figura 25. Na imagem, temos resultados da simulação escrita em Python representada por quadrados na cor azul, temos também a aproximação obtida de forma analítica no capítulo anterior, dada pela equação (3.44) representada pela curva em vermelho. O resultado exato para o limite balístico em que o caminhante realiza a busca em apenas um único passo está apresentado por um ponto verde. Para a curva analítica (3.44) utilizamos $x_0 = bR$ e a melhor aproximação com os dados numéricos foi encontrada em $b = 0.625$. Perceba que o resultado analítico para o regime destrutivo caracterizou bem os pontos obtidos na modelagem numérica. Neste regime, a maximização da eficiência é obtida no limite balístico, quando $\alpha \rightarrow 0$, também previsto na literatura. Note também que, tanto os resultados numéricos quanto a aproximação analítica para o regime destrutivo das buscas aleatórias, tendem para a concordar com o resultado exato para o caso em que $\alpha \rightarrow 0$.

Figura 24 – Resultados numéricos para o caso não-destrutivo usando a *power-law* variando o raio R do anel externo. Neste caso foi mantido fixo $x_0 = a(\delta + 1)$ com $\delta = 0.01$, $D_{max} = 10^6$, e $\ell_0 = 0.001$. Como podemos observar, quanto menor for o raio do anel externo, maior será a eficiência. Podemos observar que o aumento da eficiência acontece em todos os valores do parâmetro α , o motivo está relacionado ao fato da eficiência ser inversamente proporcional a distância total percorrida. Pois, com o aumento de R , consequentemente a distância total percorrida até encontrar um dos anéis será maior.



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Figura 25 – Resultados numéricos e analíticos para o caso destrutivo usando a *power-law*. Para este estudo, foi realizado uma simulação computacional que modelava a busca entre os anéis utilizando $R = 5000$, $a = 1$, $x_0 = R/2$ com $D_{max} = 10^9$ para $\alpha \in [0.1, 0.5]$, $D_{max} = 10^8$ para $\alpha \in [0.6, 0.8]$ e $D_{max} = 10^7$ para $\alpha \in [0.9, 1.4]$. Na imagem, temos resultados da simulação escrita em Python representada por quadrados na cor azul, temos também a aproximação obtida de forma analítica no capítulo anterior, dada pela equação (3.44) representada pela curva vermelha. O resultado exato para o limite balístico em que o caminhante realiza a busca em apenas um único passo está apresentado por um ponto verde. Para a curva analítica (3.44) utilizamos $x_0 = bR$ e a melhor aproximação com os dados numéricos foi encontrada em $b = 0.625$.

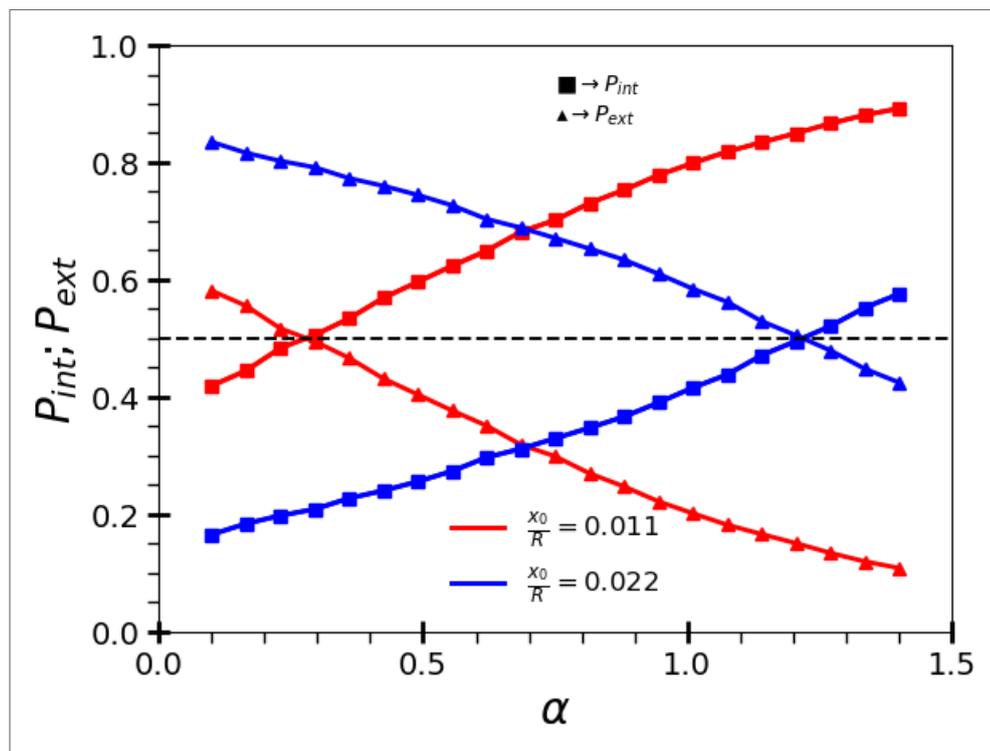


Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

4.3 PROBABILIDADES DE ABSORÇÃO

Nesta seção, estudamos as probabilidades *seacher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} . Estudar esta grandeza é extremamente importante pois nos permitir obter ainda mais informações do problema estudado neste trabalho. O objetivo é entender a relação entre os parâmetros α , x_0 , R , P_{int} e P_{ext} . Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de α entre 0.1 e 1.4, mantendo x_0 fixo. Também realizamos $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de x_0 entre 0.0 e 1.0, mantendo α fixo. Para ambos os casos, utilizou-se $a = 1$, $R = 100$ e $l_0 = 0.001$.

Figura 26 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *seacher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro α da *power-law*. Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de α entre 0.1 e 1.4, mantendo x_0 , $a = 1$, $R = 100$ e $l_0 = 0.001$ fixos. Podemos observar que, para $x_0/R = 0.011$, a igualdade $P_{int} = P_{ext} = 1/2$ ocorre em $\alpha \approx 0.3$. Para $x_0/R = 0.022$, a igualdade ocorre em $\alpha \approx 1.2$. Note também que, para ambos os casos $P_{int} < P_{ext}$ antes do cruzamento das probabilidades, isto é, $P_{int} < P_{ext}$ para $\alpha < 0.3$ quando $x_0/R = 0.011$ e $P_{int} < P_{ext}$ para $\alpha < 1.2$ quando $x_0/R = 0.022$.



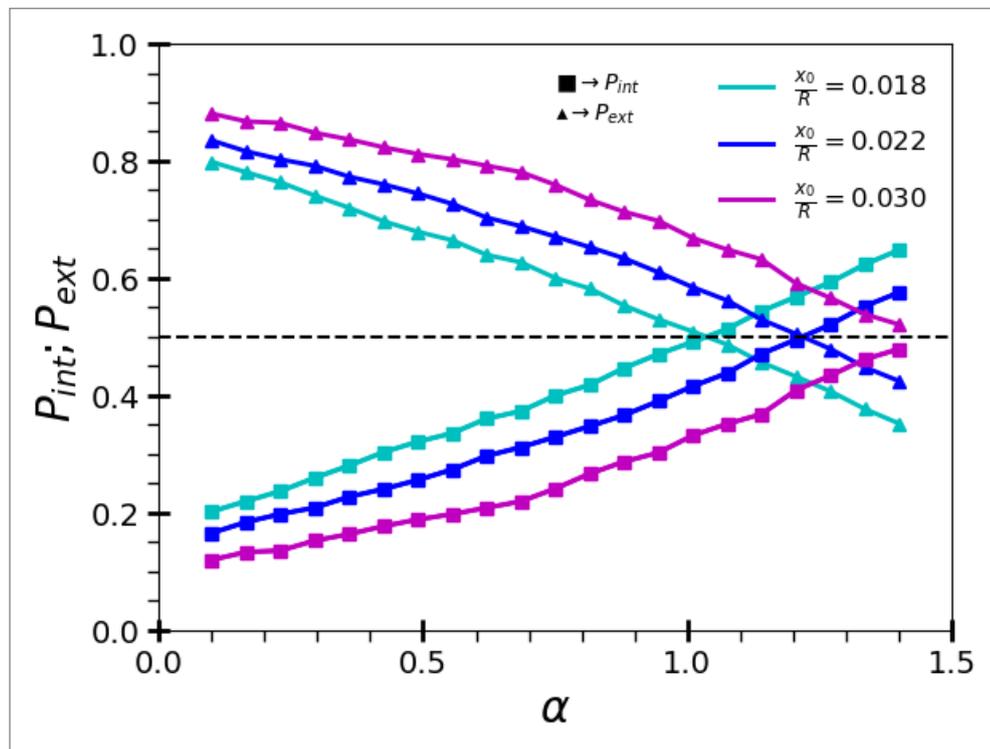
Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Iniciaremos a discussão, estudando as probabilidades de absorção P_{int} e P_{ext} em função de α . Na Figura 26, podemos observar que, para $x_0/R = 0.011$, a igualdade $P_{int} = P_{ext} = 1/2$ ocorre em $\alpha \approx 0.3$. Para $x_0/R = 0.022$, a igualdade ocorre em $\alpha \approx 1.2$. Note também que,

para ambos os casos $P_{int} < P_{ext}$ antes do cruzamento das probabilidades, isto é, $P_{int} < P_{ext}$ para $\alpha < 0.3$ quando $x_0/R = 0.011$ e $P_{int} < P_{ext}$ para $\alpha < 1.2$ quando $x_0/R = 0.022$.

Note que os valores de x_0/R escolhidos se aproximam de zero, ou seja, a posição inicial do *seacher* em cada busca se aproximava do anel interno de raio unitário. Temos também que a medida que variamos x_0 , o cruzamento das probabilidades P_{int} e P_{ext} ocorre em valores diferentes de α .

Figura 27 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *seacher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro α da *power-law*. Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de α entre 0.1 e 1.4, mantendo x_0 , $a = 1$, $R = 100$ e $l_0 = 0.001$ fixos. A medida que a posição inicial se afasta do anel interno, notamos que o cruzamento das probabilidades ocorre para maiores valores de α , de modo que, chegará um momento que não haverá o cruzamento de P_{int} e P_{ext} , como podemos ver na imagem abaixo. No também que $P_{ext} > P_{int}$ antes do cruzamentos da probabilidade e que $P_{ext} < P_{int}$ após o cruzamento.



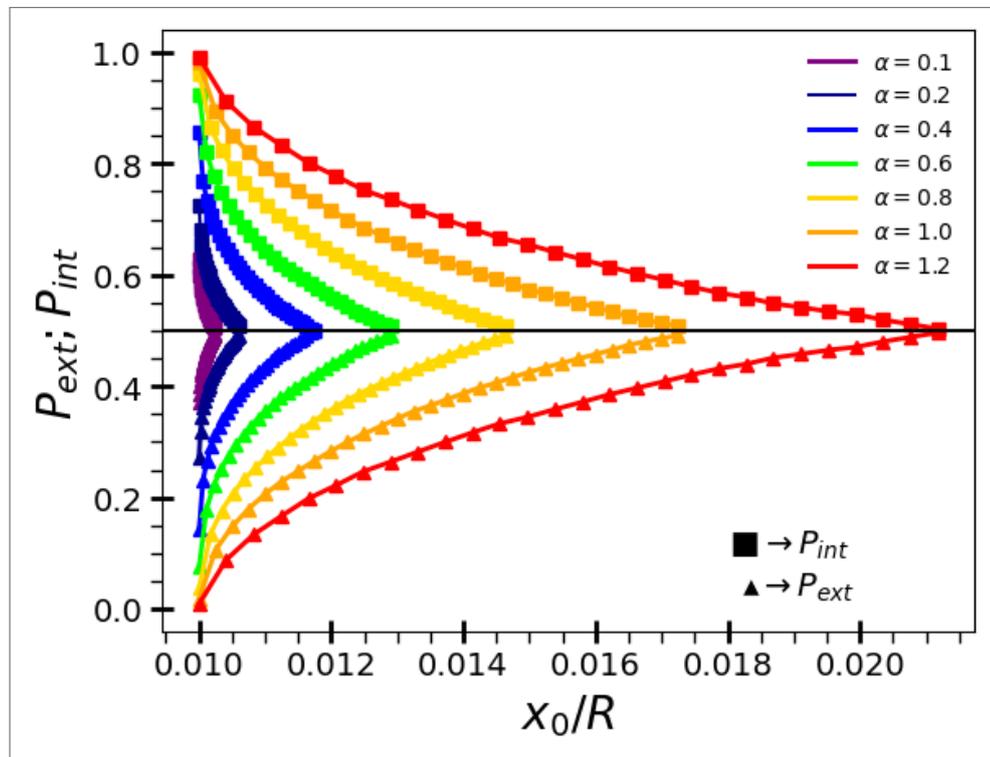
Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

De fato, as quantidades P_{int} e P_{ext} dependem explicitamente da posição inicial x_0 e do parâmetro α da *power-law* (2.62). Por exemplo, vamos imaginar como seria o problema para $\alpha \rightarrow 0$, onde o *walker* executa um movimento balístico (ou voo de Lévy), ou seja, ele encontra um dos anéis no primeiro passo dado. Sabendo dessa informação e considerando que ele não tenha preferência da direção que vai escolher para dar o passo, podemos concluir que as probabilidades P_{int} e P_{ext} serão iguais quando $\theta_{max} = \pi/2$. Como $\theta_{max} = \pi - \arcsin(a/x_0)$,

obtemos $\theta_{max} = \pi/2$ quando $x_0 = a$, que implica em $x_0/R = a/R$, logo, espera-se que o ponto de encontro das probabilidades no limite balístico aconteça em $x_0/R = 0.01$.

A medida que a posição inicial se afasta do anel interno, notamos que o cruzamento das probabilidades ocorre para maiores valores de α , de modo que, chegará um momento que não haverá o cruzamento entre P_{int} e P_{ext} , como podemos observar na Figura 27. Isto ocorre porque a probabilidade do caminhante encontrar um dos anéis em um único passo vai diminuindo a medida que α aumenta. Isto pode ser explicado devido ao fato do caminhante de Lévy, em duas dimensões, poder se aproximar do alvo sem detectá-lo. Também sabemos que a medida que α aumenta, se torna cada vez mais raro realizar um voo de Lévy, fazendo com que ele realize movimentos do tipo browniano, impedindo que ele se afaste do alvo mais próximo, facilitando o encontro com ele. Devido a isso, notamos que $P_{int} > P_{ext}$ após o cruzamento.

Figura 28 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *seacher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro x_0 . Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de x_0/R entre 0 e o ponto de cruzamento das probabilidades, mantendo $a = 1$, $R = 100$, $l_0 = 0.001$ e α fixos. Podemos observar que $P_{int} > P_{ext}$ para todos os valores de α .

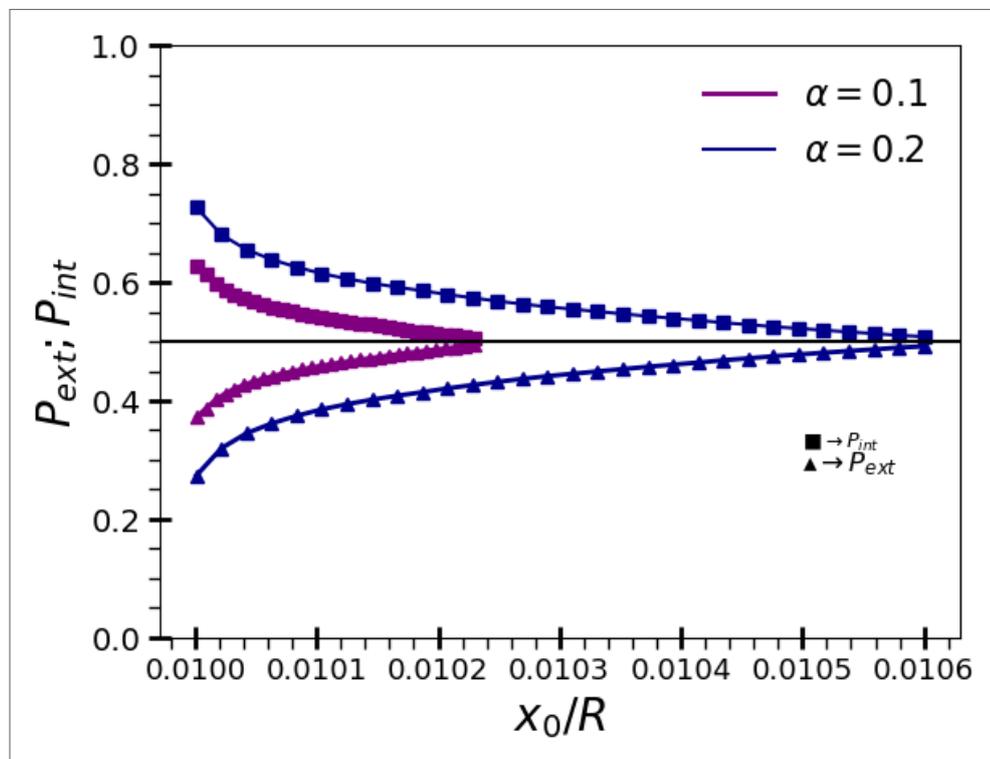


Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Outra forma de observar a relação entre P_{int} e P_{ext} e os parâmetros α e x_0 pode ser feita observando o comportamento de P_{int} e P_{ext} quando variamos x_0 , mantendo α fixo. Na Figura 28 podemos observar que $P_{int} > P_{ext}$ para todos os valores de α , diferente do

que ocorreu antes do cruzamento das probabilidades de encontro apresentado nas Figuras 26 e 27. A explicação é a mesma, para regimes em que o caminhante realiza saltos maiores, o caminhante tende a encontrar um anel em poucos passos, percebe-se que para $\alpha \rightarrow 0$, os cruzamentos ocorreram para valores de $x_0 \rightarrow a$. Na Figura 29 podemos observar de forma mais detalhada o comportamento de P_{int} e P_{ext} para os casos $\alpha = 0.1$ e $\alpha = 0.2$. Veja que as curvas possuem o mesmo comportamento para todos os valores de α , mostrando que P_{int} e P_{ext} podem ser caracterizados pelos parâmetros α , x_0 , a e R .

Figura 29 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *searcher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro x_0 . Nesta imagem podemos observar de forma mais detalhada o comportamento de P_{int} e P_{ext} para os casos $\alpha = 0.1$ e $\alpha = 0.2$. Veja que as curvas possuem o mesmo comportamento para todos os valores de α .

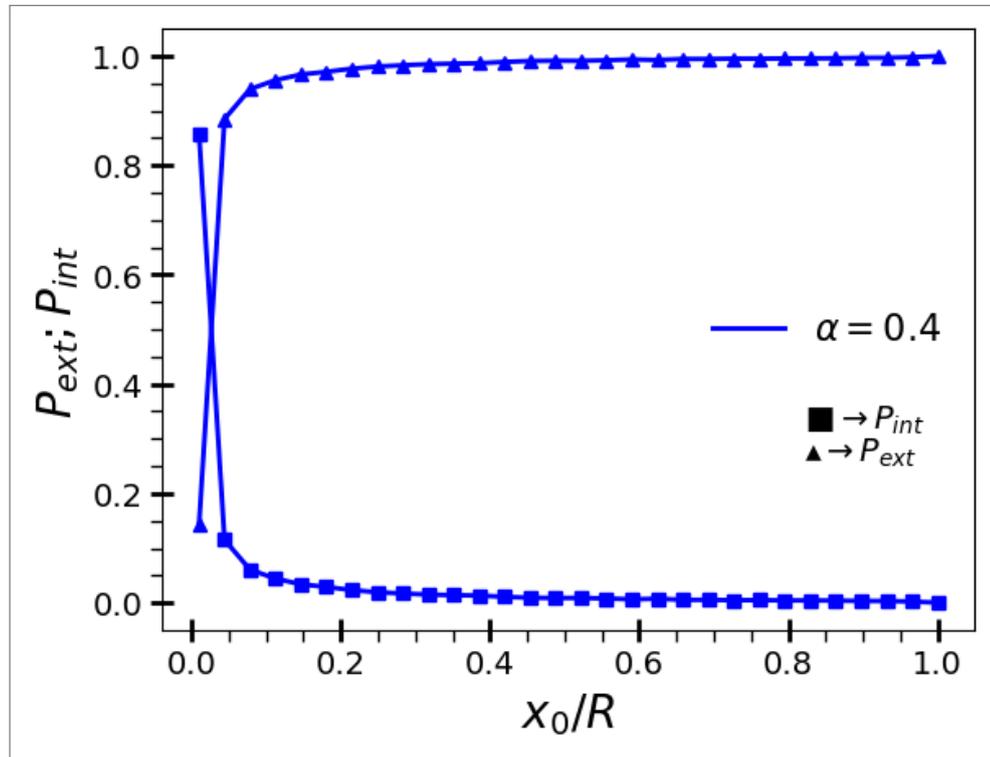


Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Para $\alpha = 1.2$, o cruzamento ocorre em x_0 maior devido ao fato do caminhante adotar um comportamento com passos cada vez menores, fazendo com que ele se movimente próximo do anel interno, com isso, para $x_0 \approx 0.1$, o caminhante encontra apenas o anel interno. Observe também que para $\alpha = 0.1$ o cruzamento das probabilidades ocorreu em $x_0/R \approx 0.01$ e que o cruzamento das probabilidades de absorção ocorrem para maiores valores de α a medida que x_0/R aumenta, como era esperado. Como foi dito anteriormente, na simulação mantemos $R = 100$, variando apenas x_0 .

Perceba que os cruzamentos das probabilidades P_{int} e P_{ext} observados ocorrem apenas no

Figura 30 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. A probabilidade do *searcher* encontrar o anel interno P_{int} e a probabilidade dele encontrar o anel externo P_{ext} em função do parâmetro $x_0/R \in (0,1)$ e $\alpha = 0.4$. Aqui, podemos ver que os cruzamentos da probabilidades P_{int} e P_{ext} observados ocorrem apenas no limite não-destrutivo, quando a posição inicial da busca é muito próxima do anel interno. Note que imediatamente após o cruzamento, o buscador encontra apenas o anel externo.



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

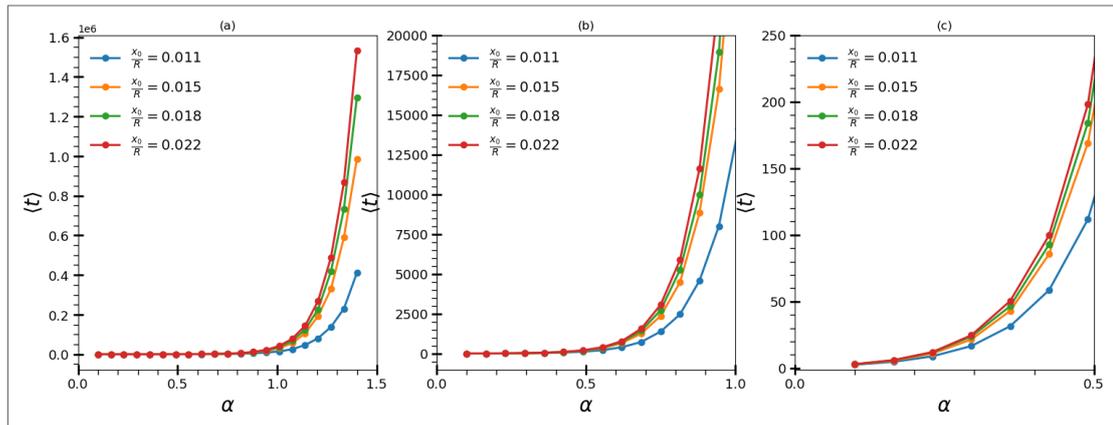
limite não-destrutivo, quando a posição inicial da busca é muito próxima do anel interno, na Figura 30 podemos ver P_{int} e P_{ext} em função de $x_0/R \in (0,1)$. Quando a posição inicial da busca aleatória se afasta do anel interno, temos dois problemas que são fáceis de imaginar. Imagine o caminhante iniciando a busca no regime destrutivo. No limite balístico quando $\alpha \rightarrow 0$ temos $\theta_{max} \rightarrow \pi$, com isso, a probabilidade do buscador encontrar o anel interno é praticamente nula. No regime browniano, quando $\alpha \rightarrow 2.0$, o *searcher* realiza uma difusão gaussiana semelhante ao que foi mostrado na Figura 5 e, como podemos ver, o buscador também encontrará o anel externo com muito mais frequência.

4.4 TEMPO MÉDIO DE PRIMEIRA PASSAGEM

Também estudamos o Tempo Médio de Primeira Passagem (MFPT) $\langle t \rangle$, isto é, supondo que o caminhante executa um único passo por unidade de tempo, podemos calcular a média do número de passos executados pelo *searcher* até ele encontrar um dos anéis. Ou seja, $\langle t \rangle$ é o

número médio de passos até o encontro de um anel. A imagem na Figura 31 mostra resultados numéricos de $\langle t \rangle$ em função do parâmetro α para alguns diferentes valores de x_0 , visto que R foi mantido fixo em $R = 100$ para todos os casos apresentados. Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de α entre 0.1 e 1.4.

Figura 31 – Buscas aleatórias: Problema dos anéis. Tempo Médio de Primeira Passagem em função de α . A imagem abaixo mostra resultados numéricos de $\langle t \rangle$ em função do parâmetro α para alguns diferentes valores de x_0 , visto que R foi mantido fixo em $R = 100$ para todos os casos apresentados. Para este estudo, foi realizado $N = 10^4$ buscas aleatórias entre os anéis para valores de α entre 0.1 e 1.4, mantendo x_0 fixo. Em (a), temos $\langle t \rangle$ em função de α entre 0.1 e 1.4. Em (b), temos $\langle t \rangle$ em função de α entre 0.1 e 1.0. Enquanto que, em (c), temos $\langle t \rangle$ em função de α entre 0.1 e 0.5. Perceba que para $\alpha \in [0.1, 0.2]$ o número médio do passos dados não muda, isto ocorre devido ao fato que, neste intervalo para o parâmetro α , o caminhante consegue realizar grandes saltos com mais frequência. Para valores de α entre 0.3 e 1.4 observamos para todos os casos que o número médio de passos até encontrar um dos anéis aumenta à medida que o valor de α aumenta. Também podemos ver que à medida que x_0 se afasta do anel interno, o número médio de passos dados também aumenta.



Fonte: Elaborada pelo Autor (2024)

Como podemos observar, os casos estudados se aproximam do regime não-destrutivo. Perceba que para $\alpha \in [0, 0.2]$ o número médio dos passos dados praticamente não mudou, isto ocorre devido ao fato que, neste intervalo para o parâmetro α , o caminhante consegue realizar grandes saltos com mais frequência, podendo encontrar um dos alvos após realizar um voo de Lévy. Para valores de α entre 0.3 e 1.4 observamos para todos os casos que o número médio de passos até encontrar um dos anéis aumenta à medida que o valor de α aumenta. Isto deve-se ao fato do caminhante realizar passos cada vez menores a medida que α vai aumentando. Também podemos ver que à medida que x_0 se afasta do anel interno, o número médio de passos dados também aumenta.

A Figura 31 nos ajuda a entender melhor como a eficiência η é influenciada pelos parâmetros α e x_0 . A medida que o *searcher* inicia sua caminhada mais afastado do anel interno, note que é necessário realizar mais passos para que o encontro com uma das bordas aconteça. Com

isso, conseguimos entender o motivo da eficiência ser praticamente nula quando a dinâmica escolhida se aproxima do movimento browniano, quando $\alpha \rightarrow 2$. O caminhante realiza um número enorme de passos no processo de difusão, fazendo com que a distância percorrida seja elevada, diminuindo drasticamente a eficiência de busca, que é inversamente proporcional à distância total percorrida.

Quando $\alpha \rightarrow 0$, percebemos que o tempo de primeira passagem é praticamente nulo pois o caminhante realiza apenas um único passo até encontrar um dos alvos, fazendo com que a eficiência de busca no regime destrutivo seja mais eficiente no regime balístico e vá diminuindo a medida que α esteja aumentando, pois os voos de Lévy ficarão cada vez mais raros de serem realizados.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho estudamos o problema dos anéis com o objetivo de investigar algumas grandezas em buscas aleatórias em duas dimensões. Utilizamos a distribuição *power-law* para o sortear o tamanho do passo do buscador. Devido ao fato do sistema está sujeito a duas condições de contorno absorventes, o problema dos anéis também pode ser interpretado como um fenômeno de primeira passagem. Aqui, apresentamos diversos resultados, calculamos a eficiência de busca η analiticamente e numericamente para o caso não-destrutivo e destrutivo, também calculamos numericamente as probabilidades de encontro entre os anéis interno e externo, P_{int} e P_{ext} , respectivamente. Uma outra grandeza estudada foi o tempo médio de primeira passagem $\langle t \rangle$ em uma das bordas.

Para o estudo no regime não-destrutivo em buscas aleatórias, caracterizado pelo limite $x_0 \rightarrow a$, mostramos que a maximização da eficiência é alcançada quando $\alpha \rightarrow 1$ para todos os casos estudados, mesmo comportamento apresentado em 2022 quando utilizou-se a distribuição de Lévy para sortear o tamanho dos passos (veja, (CARAMÊS et al., 2022)). Notamos que à medida que ℓ_0 diminui, ou quando ocorre uma maior aproximação entre a posição inicial x_0 do caminhante e o anel interno de raio a , ou simplesmente o fato diminuir o espaço de busca S alterando o raio do anel externo R , a dinâmica de busca torna-se mais eficiente.

Uma busca aleatória no regime destrutivo é mais eficiente quando a dinâmica do buscador é caracterizada pelo limite balístico, onde o tamanho do passo é determinado pela *power-law* para $\alpha \rightarrow 0$. Neste regime, torna-se mais eficiente para o buscador escolher uma direção e seguir em frente até o momento de encontro com um dos anéis. Para outros valores de α , a dinâmica de busca pode perder a eficiência devido ao fato do caminhante ter que realizar mais passos durante a busca, fazendo com que ele percorra uma distância ainda maior para que ele consiga obter sucesso.

Todos os resultados da eficiência de busca, para os regimes não-destrutivo e destrutivo, obtidos através de simulações de Monte Carlo que modelaram numericamente o problema dos anéis mostraram-se coerentes com o resultado exato da eficiência de busca obtido para o regime balístico, onde o caminhante executa apenas um único passo para concluir a busca. A curva obtida através da aproximação analítica para o regime destrutivo conseguiu caracterizar muito bem os resultados da simulação numérica para o caso em que o caminhante inicia a busca em uma posição equidistante entre os anéis $x_0 \approx R/2$ com $R \gg x_0 \gg a$.

No estudo das probabilidades de absorção ou de encontro entre os anéis, P_{int} e P_{ext} , em função do parâmetro α , notamos que o cruzamento das probabilidades ocorre apenas para valores de x_0 que se aproximem do raio do anel interno a . Mostramos que quanto mais próximo do anel interno a busca for iniciada, menor será o valor de α para que ocorra o cruzamento das probabilidades de absorção. À medida que x_0 se afasta de a , o cruzamento ocorre para valores de α cada vez mais altos, até que deixe de ocorrer o cruzamento.

Foi mostrado que $P_{ext} > P_{int}$ antes do cruzamento das probabilidades e que $P_{ext} < P_{int}$ após o cruzamento quando analisamos P_{int} e P_{ext} em função de α . Enquanto que, para o estudo de P_{int} e P_{ext} em função de x_0/R , vimos que $P_{ext} < P_{int}$ antes do cruzamento entre as probabilidades e $P_{ext} > P_{int}$ após o cruzamento. Foi apresentado também que P_{int} e P_{ext} dependem apenas dos principais parâmetros do sistema estudado, a , R , α e x_0 .

Também foi observado que o número de passos dados para encontrar um dos anéis depende diretamente dos parâmetros α e x_0 . Observamos que, para x_0/R fixo, o número de passos aumenta à medida que α também vai aumentando. Quando fixamos α , observamos que o número médio de passos dados até o encontro com uma das bordas aumenta à medida que x_0 se afasta do anel interno. Este comportamento também foi observado para o problema em uma dimensão sujeito a duas condições absorventes (veja, (NICOLAU et al., 2021)).

Após analisar todos os resultados obtidos neste trabalho, concluímos que o problema dos anéis é extremamente importante para o bom entendimento das buscas aleatórias em duas dimensões quando temos o objetivo de estudar a relação de encontro entre o alvo mais próximo e todos os outros que estão mais distante. Note que os resultados para a eficiência de busca e probabilidades de absorção, mostrados aqui, apresentaram os mesmos comportamentos obtidos no estudo de buscas aleatórias no plano bidimensional com alvos espalhados aleatoriamente (veja, (COLAÇO et al., 2022)).

A estatística de Lévy desempenha um papel extremamente importante para a comunidade científica, devido ao fato de possuir aplicações e interpretações em várias áreas do conhecimento humano. Temos aplicações em tecnologia, ótica, fotônica, em biologia e diversas outras áreas. Utilizando a distribuição *power-law* que aproxima a distribuição de Lévy, conseguimos apresentar algumas descobertas que esperamos que possam enriquecer o entendimento das buscas aleatórias em duas dimensões, além de incentivar novos avanços nesta área.

Dentre as nossas perspectivas de trabalhos futuros, pretendemos estudar, para o regime destrutivo, o problema das cascas esféricas concêntricas, uma generalização do problema dos anéis em três dimensões. Em busca aleatórias, podemos investigar diversos problemas, como

por exemplos, estudar a eficiência de busca para alvos que estão se movendo de forma aleatória ou até mesmo estudar buscas aleatórias e navegações em redes complexas devido ao vasto campo de aplicações da distribuição de Lévy.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, H. A.; RAPOSO, E. P. Lévy flights between absorbing boundaries: Revisiting the survival probability and the shift from the exponential to the sparre-andersen limit behavior. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 94, p. 032113, Sep 2016.
- BARTUMEUS, F.; LEVIN, S. A. Fractal reorientation clocks: Linking animal behavior to statistical patterns of search. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 105, n. 49, p. 19072–19077, 2008.
- BARTUMEUS, F.; PETERS, F.; PUEYO, S.; MARRASE, C.; CATALAN, J. Helical lévy walks: Adjusting searching statistics to resource availability in microzooplankton. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 100, n. 22, p. 12771–12775, 2003.
- BENHAMOU, S. How many animals really do the lévy walk? *Ecology*, Ecological Society of America, v. 88, n. 8, p. 1962–1969, 2007. ISSN 00129658, 19399170.
- BÉNICHOU, O.; COPPEY, M.; MOREAU, M.; SUET, P. H.; VOITURIEZ, R. A stochastic model for intermittent search strategies. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 17, n. 49, p. S4275, nov 2005.
- BÉNICHOU, O.; LOVERDO, C.; MOREAU, M.; VOITURIEZ, R. Intermittent search strategies. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 83, p. 81–129, Mar 2011.
- BULDYREV, S.; GITTERMAN, M.; HAVLIN, S.; KAZAKOV, A.; da Luz, M.; RAPOSO, E.; STANLEY, H.; VISWANATHAN, G. Properties of lévy flights on an interval with absorbing boundaries. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 302, n. 1, p. 148–161, 2001. ISSN 0378-4371. Proc. Int. Workshop on Frontiers in the Physics of Complex Systems.
- BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; KAZAKOV, A. Y.; LUZ, M. G. E. da; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E.; VISWANATHAN, G. M. Average time spent by lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 64, p. 041108, Sep 2001.
- BULDYREV, S. V.; RAPOSO, E. P.; BARTUMEUS, F.; HAVLIN, S.; RUSCH, F. R.; LUZ, M. G. E. da; VISWANATHAN, G. M. Comment on “inverse square lévy walks are not optimal search strategies for $d \geq 2$ ”. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 126, p. 048901, Jan 2021.
- CARAMÊS, L. G. P.; MATOS, Y. B.; BARTUMEUS, F.; BEZERRA, C. G.; MACRÌ, T.; LUZ, M. G. E. da; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M. Lévy walkers inside spherical shells with absorbing boundaries: Towards settling the optimal lévy walk strategy for random searches. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 106, p. 054147, Nov 2022.
- CARVALHO, J. C. d. A.; ORIÁ, M.; CHEVROLLIER, M.; CAVALCANTE, H. L. D. d. S.; SILANS, T. Passerat de. Redistribution of light frequency by multiple scattering in a resonant atomic vapor. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 91, p. 053846, May 2015.
- CODLING, E. A.; PLANK, M. J.; BENHAMOU, S. Random walk models in biology. *Journal of The Royal Society Interface*, v. 5, n. 25, p. 813–834, 2008.

- COLAÇO, J. R.; ARAÚJO, H. A.; LUZ, M. G. E. da; VISWANATHAN, G. M.; BARTUMEUS, F.; RAPOSO, E. P. Effect of the search space dimensionality for finding close and faraway targets in random searches. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 106, p. 034124, Sep 2022.
- DANNEMANN, T.; BOYER, D.; MIRAMONTES, O. Lévy flight movements prevent extinctions and maximize population abundances in fragile lotka–volterra systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 115, n. 15, p. 3794–3799, 2018.
- DARWIN, C. *On the origin of species*. [S.I.]: London: J. Murray, 1859. v. 1.
- EINSTEIN, A. Investigations on the theory of the brownian movement. *edited by Fürth R. and Cowper Tr. A. D.*, 1926.
- FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 3rd. ed. [S.I.]: John Wiley Sons, Inc., 1968.
- GARG, K.; KELLO, C. T. Efficient lévy walks in virtual human foraging. *Scientific Reports*, v. 11, 2021. ISSN 2045-2322.
- GOMES, A. S. L.; MOURA, A. L.; ARAÚJO, C. B. de; RAPOSO, E. P. *Lévy Statistics and Spin Glass Behavior in Random Lasers*. [S.I.]: Taylor Francis, New York, 2023.
- GOULD, H.; TOBOCHNIK, J.; CHRISTIAN, W. *An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems*. 3rd. ed. [S.I.]: Addison-Wesley, 2006.
- GUO, Q.; COZZO, E.; ZHENG, Z.; MORENO, Y. Lévy random walks on multiplex networks. *Scientific Reports*, v. 6, p. 1–11, 2016. ISSN 2045-2322.
- HASSANI, S. *Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields*. 2nd. ed. [S.I.]: Springer, 2009.
- HUMPHRIES, N. E.; WEIMERSKIRCH, H.; QUEIROZ, N.; SOUTHALL, E. J.; SIMS, D. W. Foraging success of biological lévy flights recorded in situ. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 109, n. 19, p. 7169–7174, 2012.
- IZAAC, J.; WANG, J. *Computational Quantum Mechanics*. [S.I.]: Springer, 2018.
- KARDAR, M. *Statistical Physics of Particles*. 1nd. ed. [S.I.]: Cambridge University Press, 2007.
- LEVERNIER, N.; TEXTOR, J.; BEÑICHOU, O.; VOITURIEZ, R. Inverse square lévy walks are not optimal search strategies for $d \geq 2$. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 124, p. 080601, Feb 2020.
- LOMHOLT, M. A.; TAL, K.; METZLER, R.; JOSEPH, K. Lévy strategies in intermittent search processes are advantageous. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 105, n. 32, p. 11055–11059, 2008.
- LUZ, M. G. E. da; GROSBERG, A.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M. The random search problem: trends and perspectives. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 43, p. 430301, oct 2009.

- MIRAMONTES, O.; DESOUZA, O.; PAIVA, L. R.; MARINS, A.; OROZCO, S. Lévy flights and self-similar exploratory behaviour of termite workers: Beyond model fitting. *PLOS ONE*, Public Library of Science, v. 9, n. 10, p. 1–9, 10 2014.
- MORI, F.; DOUSSAL, P. L.; MAJUMDAR, S. N.; SCHEHR, G. Universal survival probability for a d -dimensional run-and-tumble particle. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 124, p. 090603, Mar 2020.
- NICOLAU, N. S.; ARAÚJO, H. A.; VISWANATHAN, G. M.; LUZ, M. G. E. da; RAPOSO, E. P. Mean first passage time and absorption probabilities of a lévy flier on a finite interval: discrete space and continuous limit via fock space approach. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 54, n. 32, p. 325006, jul 2021.
- PATLAK, C. S. Random walk with persistence and external bias. *The bulletin of mathematical biophysics*, v. 15, p. 311–338, 1953.
- PEARSON, K. The problem of the random walk. *Nature*, v. 72, p. 342–342, 1905.
- PETROVSKII, S.; MASHANOVA, A.; JANSEN, V. A. A. Variation in individual walking behavior creates the impression of a lévy flight. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 108, n. 21, p. 8704–8707, 2011.
- RAMOS-FERNÁNDEZ, G.; MATEOS, J. L.; MIRAMONTES, O.; COCHO, G.; LARRALDE, H.; AYALA-OROZCO, B. Lévy walk patterns in the foraging movements of spider monkeys (*ateles geoffroyi*). *Behavioral Ecology and Sociobiology*, v. 55, p. 223–230, 2003.
- RAPOSO, E. P.; GOMES, A. S. L. Analytical solution for the lévy-like steady-state distribution of intensities in random lasers. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 91, p. 043827, Apr 2015.
- REDNER, S. *A Guide to First-Passage Processes*. [S.I.]: Cambridge University Press, 2001.
- REICHL, L. E. *A Modern Course in Statistical Physics*. 2nd. ed. [S.I.]: WILEY-VCH Verlag GmbH Co.KGaA, 2004.
- REYNOLDS, A. M. Mussels realize weierstrassian lévy walks as composite correlated random walks. *Scientific Reports*, v. 4, Mar 2014.
- RIASCOS, A. P.; MATEOS, J. L. Long-range navigation on complex networks using lévy random walks. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 86, p. 056110, Nov 2012.
- RIOTTE-LAMBERT, L.; BENHAMOU, S.; CHAMAILLÉ-JAMMES, S. From randomness to traplining: a framework for the study of routine movement behavior. *Behavioral Ecology*, v. 28, n. 1, p. 280–287, 10 2016. ISSN 1045-2249.
- ROCHA, E. G.; SANTOS, E. P.; SANTOS, B. J. dos; ALBUQUERQUE, S. S. de; PINCHEIRA, P. I. R.; ARGOLO, C.; MOURA, A. L. Lévy flights for light in ordered lasers. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 101, p. 023820, Feb 2020.
- SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. Reimpressão da 2 edição. [S.I.]: Editora da Universidade de São Paulo, 2018.
- SAMORODNITSKY, G.; TAQQU, M. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance (Stochastic Modeling Series)*. 1nd. ed. [S.I.]: Chapman and Hall/CRC, 1994.

- SANTOS, M.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G.; LUZ, M. Optimal random searches of revisitable targets: Crossover from superdiffusive to ballistic random walks. *Europhysics Letters*, v. 67, Sep 2004.
- SANTOS, M. C.; VISWANATHAN, G. M.; RAPOSO, E. P.; LUZ, M. G. E. da. Optimization of random searches on regular lattices. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 72, p. 046143, Oct 2005.
- SCHULTHEISS, P.; CHENG, K. Finding the nest: inbound searching behaviour in the australian desert ant, *melophorus bagoti*. *Animal Behaviour*, v. 81, n. 5, p. 1031–1038, 2011. ISSN 0003-3472.
- SHLESINGER, M. F. Random searching. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 43, p. 434001, oct 2009.
- SIMS, D. W.; SOUTHALL, E. J.; HUMPHRIES, N. E.; HAYS, G. C.; BRADSHAW, C. J. A.; PITCHFORD, J. W.; JAMES, A.; AHMED, M. Z.; BRIERLEY, A. S.; HINDELL, M. A.; MORRITT, D.; MUSYL, M. K.; RIGHTON, D.; SHEPARD, E. L. C.; WEARMOUTH, V. J.; WILSON, R. P.; WITT, M. J.; METCALFE, J. D. Scaling laws of marine predator search behaviour. *Nature*, v. 451, p. 1098–1102, 2008.
- VISWANATHAN, G.; AFANASYEV, V.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; LUZ, M. da; RAPOSO, E.; STANLEY, H. Lévy flights in random searches. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 282, n. 1, p. 1–12, 2000. ISSN 0378-4371.
- VISWANATHAN, G. M.; BULDYREV SERGEY V. AND DA LUZ, M. G. E.; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E. Optimizing the success of random searches. *Nature*, UK, v. 401, p. 911–914, 1999. ISSN 1476-4687.
- VISWANATHAN, G. M.; LUZ, M. G. E. D.; RAPOSO, E. P.; STANLEY, H. E. *THE PHYSICS OF FORAGING: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- V.P.L.S., R. B. F. H. M. . R. A. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The Philosophical Magazine*, Taylor Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828.
- WOSNIACK, M. E.; SANTOS, M. C.; RAPOSO, E. P.; VISWANATHAN, G. M.; LUZ, M. G. E. da. Robustness of optimal random searches in fragmented environments. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 91, p. 052119, May 2015.
- ZABURDAEV, V.; DENISOV, S.; KLAFTER, J. Lévy walks. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 87, p. 483–530, Jun 2015.

ANEXO A – PROGRAMA UTILIZADO PARA CALCULAR A EFICIÊNCIA NUMÉRICA NO PROBLEMA DOS ANÉIS

Simulação de Monte Carlo para o cálculo da eficiência no problemas do anéis

Jandson Fahel Oliveira de Freitas e Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import multiprocessing

##### GERADOR DE NÚMERO ALEATÓRIO DA POWER-LAW

def rng_powerlaw(l0, alpha):
    return l0 * (1 - np.random.uniform(0, 1))**(- 1 / alpha)

#função que faz:
#uma busca aleatória entre os dois anéis
#retorna distância percorrida até encontrar o alvo

def busca_ale(a, b, alpha, l0, x0, y0):
    x = x0
    y = y0
    T = np.ones(5)
    D = 0
    while ( np.min(T) == 1 ) :
        n = np.random.uniform(0, 1) #número aleatório uniforme entre 0 e 1
        l = rng_powerlaw(l0, alpha) #tamanho do passo usando power-law
        xnew = x + l * np.cos(2 * np.pi * n) #nova posição possível para x
        ynew = y + l * np.sin(2 * np.pi * n) #nova posição possível para y
        cx = xnew - x
        cy = ynew - y
        A = (cx * cx) + (cy * cy)
        B = (2 * cx * x) + (2 * cy * y)
        #variáveis que dependem do anel interno
        C_in = x**2 + y**2 - a**2
        D_in = B**2 - 4 * A * C_in
        #variáveis que dependem do anel externo
        C_out = x**2 + y**2 - b**2
        D_out = B**2 - 4 * A * C_out
        #verificando se encontrou o anel interno
        if (D_in >= 0):
            delta_in = np.sqrt(D_in)
            t1 = (-B + delta_in) / (2 * A)
            if (0 < t1 < 1):
                T[1] = t1
            else:
                T[1] = 1
            t2 = (-B - delta_in) / (2 * A)
            if (0 < t2 < 1):
                T[2] = t2
            else:
                T[2] = 1
        #verificando se encontrou o anel externo
        if (D_out >= 0):
            delta_out = np.sqrt(D_out)
            t3 = (-B + delta_out) / (2 * A)
            if (0 < t3 < 1):
                T[3] = t3
            else:
                T[3] = 1
            t4 = (-B - delta_out) / (2 * A)
            if (0 < t4 < 1):
                T[4] = t4
            else:
                T[4] = 1
        t = np.min(T)
        xn = (l * t) * np.cos(2 * np.pi * n)
        yn = (l * t) * np.sin(2 * np.pi * n)
        x += xn
        y += yn
        D += np.abs(t * l)
    return [D, T[1], T[2], T[3], T[4]]
```

```

#função que retorna número de alvos encontrados e identifica qual alvo encontrou
def buscas(distancia_max, a, b, alpha):
    alvo_a = 0
    alvo_b = 0
    distancia_percorrida = 0
    numero_alvos_encontrados = 0
    while (distancia_percorrida <= distancia_max):
        C = busca_ale(a, b, alpha, l0, x0, y0)
        distancia_percorrida += C[0]
        numero_alvos_encontrados += 1
        K = np.array([C[1], C[2], C[3], C[4]])
        if (np.min(K) == C[1] or np.min(K) == C[2]):
            alvo_a += 1
        if (np.min(K) == C[3] or np.min(K) == C[4]):
            alvo_b += 1
    return [numero_alvos_encontrados, alvo_a, alvo_b]

#### Função que calcula a eficiência

def calcular_eficiencia(alpha):
    todos_alvos = buscas(distancia_max, a, b, alpha)
    N_alvos_encontrados = todos_alvos[0]
    eficiencia = N_alvos_encontrados / distancia_max
    alvos = todos_alvos[1] + todos_alvos[2]
    alvo_a = todos_alvos[1]
    alvo_b = todos_alvos[2]
    porcentagem_interno = todos_alvos[1] / (alvo_a + alvo_b)
    porcentagem_externo = todos_alvos[2] / (alvo_a + alvo_b)
    return [eficiencia, alvos, alvo_a, alvo_b, porcentagem_interno, porcentagem_externo]

# Parâmetros busca aleatória em 2D
l0 = 0.001
#raio anel interno
a = 1
#raio anel externo
b = 100

#posição inicial do caminhante
delta = 0.0001
x0 = a * (delta + 1)
y0 = 0.0
#distancia maxima percorrida permitida
distancia_max = 10**6

if __name__ == '__main__':
    ALPHA = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0001, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4] # Lista de parâmetros

    # Cria um pool de processos com o número máximo de processos desejado
    pool = multiprocessing.Pool()

    # Mapeia os parâmetros para a função usando o pool de processos
    resultados = pool.map(calcular_eficiencia, ALPHA)

    # Fecha o pool de processos para liberar os recursos
    pool.close()
    pool.join()

    # Os resultados estarão na mesma ordem dos parâmetros na lista

#### resultados de todos os parâmetros do intervalo em ordem

eficiencia_todos = [] #número médio de passos dados
alvos_a = []
alvos_b = []
alvos_a_e_b = []
porcentagem_internos = []
porcentagem_externos = []

for j in range(len(ALPHA)):
    eficiencia_todos.append(resultados[j][0])
    alvos_a_e_b.append(resultados[j][1])
    alvos_a.append(resultados[j][2])
    alvos_b.append(resultados[j][3])

```

```
    percentagem_internos.append(resultados[j][4])
    percentagem_externos.append(resultados[j][5])

tabela = pd.DataFrame(
    data = zip(ALPHA, eficiencia_todos, alvos_a_e_b, alvos_a, alvos_b, percentagem_internos, percentagem_externos),
    columns = ["alpha", "eficiencia", "alvos", "interno", "externo", "percentagem_interno", "percentagem_externo"])

file_name1 = 'R=5_alpha=0.1-1.4_caso_não-destrutivo_power_law.xlsx'
tabela.to_excel(file_name1)
```

ANEXO B – PROGRAMA UTILIZADO PARA CALCULAR O TEMPO MÉDIO DE PRIMEIRA PASSAGEM NO PROBLEMA DOS ANÉIS

Simulação de Monte Carlo para o cálculo do tempo médio de primeira passagem no problemas do anéis

Jandson Fabel Oliveira de Freitas e Ernesto Carneiro Pessoa Raposo

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import multiprocessing

##### GERADOR DE NÚMERO ALEATÓRIO DA POWER-LAW

def rng_powerlaw(l0, alpha):
    return l0 * (1 - np.random.uniform(0, 1))**(- 1 / alpha)

#função que faz:
#uma busca aleatória entre os dois anéis
#retorna número de passos dados até encontrar o alvo

def busca_ale(a, b, alpha, l0, x0, y0):
    x = x0
    y = y0
    T = np.ones(5)
    numero_de_passos = 0
    while ( np.min(T) == 1 ) :
        n = np.random.uniform(0, 1) #número aleatório uniforme entre 0 e 1
        l = rng_powerlaw(l0, alpha) #tamanho do passo usando power-law
        xnew = x + l * np.cos(2 * np.pi * n) #nova posição possível para x
        ynew = y + l * np.sin(2 * np.pi * n) #nova posição possível para y
        cx = xnew - x
        cy = ynew - y
        A = (cx * cx) + (cy * cy)
        B = (2 * cx * x) + (2 * cy * y)
        #variáveis que dependem do anel interno
        C_in = x**2 + y**2 - a**2
        D_in = B**2 - 4 * A * C_in
        #variáveis que dependem do anel externo
        C_out = x**2 + y**2 - b**2
        D_out = B**2 - 4 * A * C_out
        #verificando se encontrou o anel interno
        if (D_in >= 0):
            delta_in = np.sqrt(D_in)
            t1 = (-B + delta_in) / (2 * A)
            if (0 < t1 < 1):
                T[1] = t1
            else:
                T[1] = 1
                t2 = (-B - delta_in) / (2 * A)
                if (0 < t2 < 1):
                    T[2] = t2
                else:
                    T[2] = 1
        #verificando se encontrou o anel externo
        if (D_out >= 0):
            delta_out = np.sqrt(D_out)
            t3 = (-B + delta_out) / (2 * A)
            if (0 < t3 < 1):
                T[3] = t3
            else:
                T[3] = 1
                t4 = (-B - delta_out) / (2 * A)
                if (0 < t4 < 1):
                    T[4] = t4
                else:
                    T[4] = 1
        t = np.min(T)
        xn = (l * t) * np.cos(2 * np.pi * n)
        yn = (l * t) * np.sin(2 * np.pi * n)
        x += xn
        y += yn
        numero_de_passos +=1
    return [numero_de_passos, T[1], T[2], T[3], T[4]]

#função que retorna número de passos até encontrar um alvo e, identifica qual alvo encontrou
def buscas(N, a, b, alpha, x0, y0, l0):
    alvo_a = 0
    alvo_b = 0
    Passos = []
    numero_alvos_encontrados = 0

```

```

numero_alvos_encontrados = 0
while (numero_alvos_encontrados <= N):
    C = busca_ale(a, b, alpha, l0, x0, y0)
    Passos.append(C[0])
    numero_alvos_encontrados += 1
    K = np.array([C[1], C[2], C[3], C[4]])
    if (np.min(K) == C[1] or np.min(K) == C[2]):
        alvo_a += 1
    if (np.min(K) == C[3] or np.min(K) == C[4]):
        alvo_b += 1
    numero_alvos_encontrados += 1
return [np.mean(Passos), alvo_a, alvo_b]

# Parâmetros busca aleatória em 2D
l0 = 0.001
#raio anel interno
a = 1
#raio anel externo
b = 100
#posição inicial do caminhante
x0 = 0.015 * b
y0 = 0.0
#numero total de alvos a ser encontrado
N = 10000

#função que calcula o tempo médio
def calcular_MFTP(alpha):
    todos_alvos = buscas(N, a, b, alpha, x0, y0, l0)
    tempo = todos_alvos[0]
    tempo_medio = tempo
    alvos = todos_alvos[1] + todos_alvos[2]
    alvo_a = todos_alvos[1]
    alvo_b = todos_alvos[2]
    porcentagem_interno = todos_alvos[1] / (alvo_a + alvo_b)
    porcentagem_externo = todos_alvos[2] / (alvo_a + alvo_b)
    return [tempo_medio, alvos, alvo_a, alvo_b, porcentagem_interno, porcentagem_externo]

if __name__ == '__main__':

    ALPHA = np.linspace(0.1, 1.4, 16) # Lista de parâmetros
    # Cria um pool de processos com o número máximo de processos desejado
    pool = multiprocessing.Pool()

    # Mapeia os parâmetros para a função usando o pool de processos
    resultados = pool.map(calcular_MFTP, ALPHA)

    # Fecha o pool de processos para liberar os recursos
    pool.close()
    pool.join()

    # Os resultados estarão na mesma ordem dos parâmetros na lista

##### resultados de todos os parâmetros do intervalo em ordem

tempo_medio_todos = [] #número médio de passos dados
alvos_a = []
alvos_b = []
alvos_a_e_b = []
porcentagem_internos = []
porcentagem_externos = []

for j in range(len(ALPHA)):
    tempo_medio_todos.append(resultados[j][0])
    alvos_a_e_b.append(resultados[j][1])
    alvos_a.append(resultados[j][2])
    alvos_b.append(resultados[j][3])
    porcentagem_internos.append(resultados[j][4])
    porcentagem_externos.append(resultados[j][5])

tabela = pd.DataFrame(
data = zip(ALPHA, tempo_medio_todos, alvos_a_e_b, alvos_a, alvos_b, porcentagem_internos, porcentagem_externos),
columns = ["alpha", "tempo_médio", "alvos", "interno", "externo", "porcentagem_interno", "porcentagem_externo"])

```

```
file_name1 = 'R=100_k=0.015_alpha=0.1-1.4_first_passage_power_law.xlsx'  
tabela.to_excel(file_name1)
```

ANEXO C – PROGRAMA UTILIZADO PARA SIMULAR DIFUSÃO EM DUAS DIMENSÕES

```
#Importando bibliotecas necessárias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 10**3 #número de passos
K1 = 10**4 # número de caminhadas

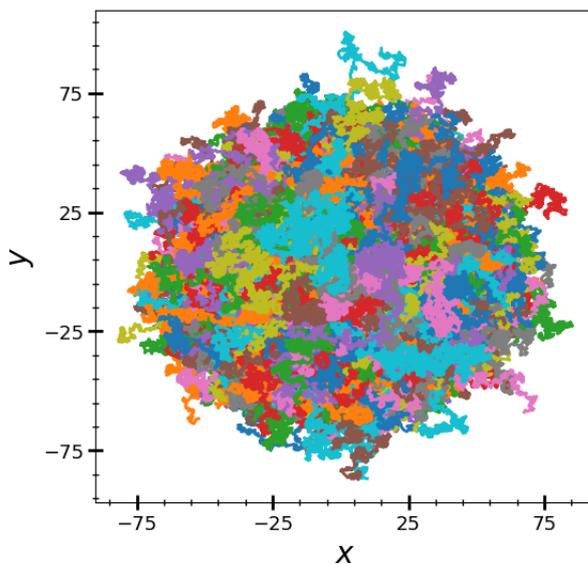
def caminhada2D(N):
    x = np.zeros(N)
    y = np.zeros(N)
    x[0] = 0
    y[0] = 0
    for i in range(1, N):
        n = np.random.uniform(0, 1)
        a = 1
        x[i] = x[i-1] + a * np.cos(2 * n * np.pi)
        y[i] = y[i-1] + a * np.sin(2 * n * np.pi)
    return [x, y]

def caminhadas2D(K, N):
    caminhadas = []
    for j in range(1, K + 1):
        c = caminhada2D(N)
        caminhadas.append(c)
    return caminhadas

C = caminhadas2D(K1, N)

plt.figure(figsize=(6, 6))

for i in range(0, K1):
    plt.plot(C[i][0], C[i][1], linewidth=2.1)
plt.xlabel(r'$x$', fontsize = 20)
plt.ylabel(r'$y$', fontsize = 20)
plt.xticks(np.arange(-75, 75 + 1, 50), fontsize=14)
plt.yticks(np.arange(-75, 75 + 1, 50), fontsize=14)
plt.minorticks_on()
plt.tick_params(which='major', length=10, width=2, labelsize=13, direction='inout',color='k')
plt.tick_params(which='minor', length=5, width=1, labelsize=13, direction='inout',color='k')
plt.show()
```



```

# função que calcula a variância para cada valor de N
n = [8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]

def Var(K, N):
    C = caminhadas2D(K, N)
    xN = []
    yN = []
    R = []
    for i in range(0, K):
        Xn = C[i][0]
        Yn = C[i][1]
        Xnn = Xn[N - 1]
        Ynn = Yn[N - 1]
        xN.append(Xnn)
        yN.append(Ynn)
        R.append(Xnn**2 + Ynn**2)
    R2 = np.var(xN) + np.var(yN)

    return R2

Var2 = []

for N in n:
    Var2.append(Var(K1, N))

plt.plot(np.log10(n), np.log10(Var2), 'r', linewidth=2.1)
plt.xlabel(r'$\log(N)$', fontsize = 20)
plt.ylabel(r'$\log(\sigma^2)$', fontsize = 20)
plt.xticks(np.arange(1, 3 + 1, 1), fontsize=14)
plt.yticks(np.arange(1, 3 + 1, 1), fontsize=14)
plt.minorticks_on()
plt.tick_params(which='major', length=10, width=2, labelsize=13, direction='inout',color='k')
plt.tick_params(which='minor', length=5, width=1, labelsize=13, direction='inout',color='k')

plt.show()

```

