



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ALEX FERREIRA LIMA

Análise dos modos quase-normais do buraco negro de Reissner-Nordström com a presença do parâmetro não-comutativo: método aproximativo para o campo espinorial

Recife

2024

ALEX FERREIRA LIMA

Análise dos modos quase-normais do buraco negro de Reissner-Nordström com a presença do parâmetro não-comutativo: método aproximativo para o campo espinorial

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Bruno Geraldo Carneiro da Cunha

Recife

2024

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

L732a Lima, Alex Ferreira
 Análise dos modos quase-normais do buraco negro de Reissner-Nordström com a presença do parâmetro não-comutativo: método aproximativo para o campo espinorial / Alex Ferreira Lima. – 2024.
 122 f.: il., fig., tab.

 Orientador: Bruno Geraldo Carneiro da Cunha.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife, 2024.
 Inclui referências e apêndices.

 1. Física teórica e computacional. 2. Buraco negro. 3. MQNs. 4. Perturbações. 5. Método isomonodrômico. I. Cunha, Bruno Geraldo Carneiro da (orientador). II. Título.

 530.1 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2024 - 30

ALEX FERREIRA LIMA

**ANÁLISE DOS MODOS QUASE-NORMAIS DO BURACO NEGRO DE REISSNER-
NORDSTRÖM COM A PRESENÇA DO PARÂMETRO NÃO-COMUTATIVO:
MÉTODO APROXIMATIVO PARA O CAMPO ESPINORIAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 30/01/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Andre Luiz Alves Lima
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Tajron Juric
Examinador Externo
Rudjer Boskovic Institute

À minha mãe, a quem tudo devo e sem a qual eu nada seria.

AGRADECIMENTOS

Agradecer é sempre um prazer e, ao mesmo tempo, um risco. Prazer, por poder reconhecer aqueles que foram importantes na nossa caminhada; risco, por haver a chance de sermos pegos pelo esquecimento. Tendo tal prazer e aceitando o risco, faço aqui meus agradecimentos, em especial:

À minha mãe, Maria Bethânia Ferreira Lima, símbolo maior de exemplo e caráter, sempre ao meu lado e apoiando-me em minhas decisões. A luz maior que sempre hei de seguir em toda minha vida para que jamais possa me perder. Te amo.

À minha irmã, Haline Ferreira, e minha vó materna, Maria José de Lima, que junto com minha mãe criaram-me e mostraram-me a força e beleza da figura feminina. Sempre as levarei em meu coração.

Ao meu orientador, prof. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha, que lecionou a mais bela disciplina da minha graduação, *Introdução à Relatividade Geral*, e demais disciplinas de forma autêntica, com invejável maestria e domínio do assunto; por sempre tirar minhas dúvidas de forma solícita, mesmo as mais banais. Um exímio pesquisador com afinco ao que faz que sempre irá ser motivo de estímulo e inspiração.

Aos meus amigos: Céfalos Habakuk, Rafael Marques e Allison Rodrigo. Caminhadas árduas têm suas boas lembranças, e vocês fazem parte delas.

A João Paulo Cavalcante, por seus conselhos e toda ajuda sempre de forma atenciosa e dedicada.

Ao prof. Tabosa, por mostrar que o esforço e dedicação, por vezes, pode superar o mais premiado físico ao ministrar uma disciplina, sendo *Mecânica Clássica I e II* provas da minha afirmação.

Ao prof. Santa Cruz, por ter contribuído com minha formação inicial na graduação, sempre com excelentes aulas, domínio do conteúdo, maestria na abordagem, referências bibliográficas e por ter oferecido o lema da minha formação acadêmica: "*vestir a camisa do curso*".

Aos funcionários da copa do DF, por sempre me receberem em seu recinto com a mais alta educação e fornecendo momentos lúdicos de descontração durante a pausa do almoço.

Ao CNPq pelo suporte financeiro que possibilitou a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Perturbações em buracos negros fazem com que eles respondam de modo que o comportamento pode ser transcrito por meio da fase denominada *ringdown*. Nesta fase de relaxamento para a configuração final estável, emite-se as chamadas ondas gravitacionais, predominantemente composta pelos *modos quase-normais* (*MQNs*). Tais modos são oscilações amortecidas, ou seja, de frequências complexas que independem da fonte, porém, dependem exclusivamente de características intrínsecas da existência do próprio buraco negro e que o define segundo o *Teorema da Calvície*: massa (M), momento angular (J) e carga (Q). A fase de *ringdown* é predominante composta por modos quase-normais e o estudo direcionado, em especial, para a sua análise se faz importante devido ao fato do seu estágio correspondente ser o dominante, a somar com isto, a informação que codificam acerca da estrutura subjacente do espaço-tempo, detecções astrofísicas e questões relacionadas à estabilidade. Neste trabalho, estudamos os modos quase-normais associados ao *buraco negro de Reissner-Nordström* acoplado a um campo espinorial sem massa, fazendo-se uso de uma abordagem aproximativa para incrementar em primeira ordem a presença de um *parâmetro não-comutativo*. Estes modos, por sua vez, possuem comportamentos definidos como *amortecidos* ou *subamortecidos*, caracterizados pelo fato de terem, no limite extremal, convergência da parte imaginária para um valor constante negativo ou a zero, respectivamente, a depender do valor do acoplamento do campo espinorial com o buraco negro, qQ . O valor crítico, qQ_c , separando o comportamento dos modos, foi obtido com cinco casas decimais de precisão. Por fim, ressalta-se que para obter os modos utilizou-se o método de deformações isomonodrômicas relacionado às equações diferenciais, no presente caso, tratando-se de uma equação diferencial de segunda ordem para a parte radial, constatando, por conseguinte, tratar de uma *equação confluyente de Heun*.

Palavras-chave: buraco negro; MQNs; perturbações; método isomonodrômico;

ABSTRACT

Perturbations in black holes cause them to respond in ways that can be transcribed through the phase called *ringdown*. At that stage of relaxation to the final stable configuration, there is the emission of the so-called gravitational waves, which are dominantly composed of *quasi-normal modes* (*QNMs*). Such modes are damped oscillations, that is, of complex frequencies that do not depend on the source or even on the way in which that disturbance occurs, however, they depend exclusively on intrinsic characteristics of the existence of the black hole itself and which defines it according to the No-hair Theorem: mass (M), angular momentum (J) and charge (Q). The *ringdown* phase is predominantly composed of quasi-normal modes and the study directed, in particular, to its analysis is important due to the fact that its corresponding stage is the dominant one, in addition to this, the information that encodes about the structure underlying spacetime, astrophysical detections, and stability issues. In this work, we study the quasi-normal modes associated with the *Reissner-Nordström black hole* coupled to a massless spinorial field, making use of an approximate approach to increment in first order the presence of a non commutative parameter, using an approximate approach to increase the presence of a *noncommutative parameter* in first order. These modes, in turn, have behaviors defined as *damped* or *non-damped*, characterized by the fact that they have, at the extremal limit, convergence from the imaginary part to a constant negative value or to zero, respectively, depending on the value of the coupling of the spinor field with the hole black, qQ . The critical value, qQ_c , which dictates the behavior of the modes, was obtained with five decimal places of precision. Finally, it is noteworthy that, to obtain the modes, we used the method of isomonodromic deformations related to the Fuchsian differential equations, in the present case, addressing a differential equation of the second order for the radial part, therefore confirming that it is a *confluent Heun equation*.

Keywords: black hole; QNMs; perturbations; isomonodromic method;

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Reprodução da colisão de dois buracos negros supermassivos gerando ondas gravitacionais	16
Figura 2 – Comportamento genérico dos potenciais para o buraco negro de Schwarzschild com $\ell > 0$	30
Figura 3 – Análise comportamental da barreira do potencial para o método WKB . . .	32
Figura 4 – Comportamento para as diferentes relações entre M , Q e P no buraco negro de Reissner-Nordström	60
Figura 5 – Curvas circulando pontos singulares para a monodromia global	84
Figura 6 – Comportamento dos MQN s variando Q/M para diferentes valores de acoplamento, qQ	95
Figura 7 – Comportamento dos MQN s variando ν para diferentes valores de acoplamento, qQ	97
Figura 8 – Ponto crítico da bifurcação dos MQN s	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Valores experimentais estimados para o parâmetro não-comutativo, a	. . .	80
Tabela 2	–	Confirmação dos MQN_s para $\{\ell, s, m\} = \{1, 0, 0\}$		94
Tabela 3	–	MQN_s do BN de Reissner-Nordström para $\{\ell, m, s\} = \{1/2, 1/2, -1/2\}$		96
Tabela 4	–	MQN_s amortecidos e subamortecidos para $\{\ell, m, s\} = \{1/2, 1/2, -1/2\}$	.	98

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BN	buraco negro
BN-RN	buraco negro de Reissner-Nordström
ECE	equação de campo de Einstein
ECH	equação confluyente de Heun
EDOs	equações diferenciais ordinárias
MNs	modos normais
MQNs	modos quase-normais
MRH	mapa de Riemann-Hilbert
MSW	mapa de Seiberg-Witten
PNC	parâmetro não-comutativo
RN	Reissner-Nordström
SMP	solução de Majumdar-Papapetrou

LISTA DE SÍMBOLOS

$g_{\mu\nu}^{(RN)}$	Métrica de Reissner-Nordström escrita em um sistema coordenado
$g_{\mu\nu}^{(Sc)}$	Métrica de Schwarzschild escrita em um sistema coordenado
$g_{\mu\nu}^{(S^2)}$	Métrica da <i>2-esfera</i> de raio unitário escrita em um sistema coordenado
η_{ab}	Métrica de Minkowski
$R_{abc}{}^d$	Tensor de curvatura de Riemann
G_{ab}	Tensor de Einstein
F_{ab}	Tensor de Fadaray
R_{ab}	Tensor de Ricci
A_a	Quadrivetor magnético
R	Escalar de Ricci
$\mathcal{K}$	Escalar de Kretschmann
$\Gamma^c{}_{ab}$	Símbolo de Christoffel em uma variedade <i>torção nula</i>
∇_a, ∇^a	Derivada co e contravariante agindo em determinada variedade $\mathcal{M}^n$
χ^a, g_{ab}	Quantidade geométrica independente de base coordenada: letras latinas
$x^\mu, (\chi^\nu)^a$	Componente da quantidade geométrica na base coordenada: letras gregas
$\mathbf{x}$	Campo vetorial escrito em determinada base coordenada
$\{\mathbf{x}\}$	Conjunto formado pelas componentes em determinado sistema coordenado
${}_sV_\ell(r)$	Potencial efetivo da teoria de perturbação de campo com <i>spin</i> s
${}_sh_\ell{}^m(r)$	Função de onda descrevendo a perturbação métrica do campo de <i>spin</i> s
$\omega = {}_s\omega_\ell{}^m$	Modo quase-normal associado ao campo perturbativo de <i>spin</i> s
$Y_\ell{}^m(\theta, \phi)$	Harmônico esférico
${}_sS_\ell{}^m(\theta, \phi)$	Harmônico esferoidal spin-ponderado

ℓ, m	Momento angular e número azimutal dos modos
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Matrizes quaisquer $M \times N$
$\mathbb{S}^2(\theta, \phi)$	Representação da 2-esfera de raio unitário
$A_\mu B^\mu$	Notação de soma de Einstein: índices co e contravariantes repetidos, somatório implícito
$A_{[a} B_{b]}$	Antissimetrização: $\frac{1}{2}(A_a B_b - A_b B_a)$
$A_{(a} B_{b)}$	Simetrização: $\frac{1}{2}(A_a B_b + A_b B_a)$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO HISTÓRICA: PERTURBAÇÕES E MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O PROBLEMA DOS MODOS QUASE-NORMAIS	15
1.1	PERTURBAÇÕES LINEARES	16
1.2	PERTURBAÇÕES ESCALARES, GRAVITACIONAIS E VETORIAIS NO ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD	22
1.2.1	Caso Gravitacional: $s = 2$	22
1.2.2	Caso Escalar: $s = 0$	28
1.2.3	Caso vetorial: $s = 1$	29
1.3	PRINCIPAIS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A OBTENÇÃO DOS MQNs	30
1.3.1	Método WKB	31
1.3.2	Método de Leaver-Fração Continuada	35
1.4	CASO REISSNER-NORDSTRÖM	38
1.5	OUTROS MÉTODOS PARA O CÁLCULO DOS MODOS QUASE-NORMAIS	40
2	SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM	43
2.1	DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO	44
2.2	EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL ACOPLADAS	47
2.3	DETERMINANDO OS TENSORES: FARADAY, ENERGIA-MOMENTO, CURVATURA DE RIEMANN E RICCI	49
2.4	DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL .	53
2.5	DETERMINAÇÃO DA MÉTRICA DE REISSNER-NORDSTRÖM	55
2.6	HORIZONTE DE EVENTOS E ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE M , Q E P	57
2.6.1	Caso 1: $M^2 > Q^2 + P^2$	60
2.6.2	Caso 2: $M^2 = Q^2 + P^2$	61
2.6.3	Caso 3: $M^2 < Q^2 + P^2$	64
3	EQUAÇÃO DE HEUN CONFLUENTE E ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO	66
3.1	ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO	67
3.1.1	Angular twist	67
3.1.2	Álgebra não-comutativa	68

3.1.3	Mapa de Seiberg-Witten	69
3.1.4	O problema para a perturbação espinorial, $s = 1/2$	70
3.2	APROXIMAÇÃO PARA O CASO ESPINORIAL	71
3.2.1	Correção para o caso espinorial, $s = 1/2$	71
3.2.2	Parâmetro não-comutativo, a : uma escolha numérica	78
3.3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	80
3.3.1	Equações diferenciais: classificação e forma normal	81
3.3.2	Monodromia	82
3.3.3	Isomonodromia	85
3.3.4	Obtendo os MQNs: Mapa de Riemann-Hilbert e a quinta função transcendente de Painlevé τ_V	87
4	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS MQNS	92
4.1	REESCREVENDO OS PARÂMETROS ACESSÓRIOS	93
4.1.1	MQNs: variando o limite extremal, Q/M	95
4.1.2	MQNs: variando o parâmetro ν	96
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	101
	REFERÊNCIAS	103
	APÊNDICE A – COMPONENTES DOS SÍMBOLOS DE CHRIS- TOFFEL, TENSOR DE RIEMANN, TENSOR E ESCALAR DE RICCI E TENSOR ENERGIA-MOMENTO	107
	APÊNDICE B – SOLUÇÃO MAJUMDAR-PAPAPETROU (SMP) .	110
	APÊNDICE C – FUNÇÃO PAINLEVÉ-V POR MEIO DO DETER- MINANTE DE FREDHOLM	112
	APÊNDICE D – ECH COM A PRESENÇA DO PARÂMETRO NÃO- COMUTATIVO PARA O CAMPO ESCALAR CAR- REGADO SEM MASSA: DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO	114
	APÊNDICE E – TEORIA DE PERTURBAÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO	117

1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA: PERTURBAÇÕES E MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O PROBLEMA DOS MODOS QUASE-NORMAIS

“Ao verme que primeiro roeu as frias carnes de meu cadáver dedico como saudosa lembrança estas memórias póstumas.”

Machado de Assis

Logo após a publicação da *Teoria da Relatividade Geral*, em 1915, pelo físico alemão Albert Einstein [1], fatos verdadeiramente surpreendentes surgiram dela e instigam tanto a curiosidade e fascínio dos profissionais e leigos, quanto o desenvolvimento da área de gravitação; dentre estes fatos, podemos citar o mais conhecido: buracos negros. Tais soluções correspondem, cada qual à sua maneira e com suas respectivas particularidades, a objetos astronômicos cujo campo gravitacional intenso faz com que corpos próximos a ele sejam atraídos e, rompendo a fronteira do horizonte de eventos, não consigam retornar à região externa mesmo que se movam à velocidade da luz, c .

Poucos meses depois da sua publicação, a primeira solução deste tipo aplicada ao vácuo, oriunda da chamada *equação de campo de Einstein*, governando a teoria acima citada, foi encontrada e publicada por K. Schwarzschild [2], em 1916, descrevendo um ponto do espaço-tempo esfericamente simétrico e estático. Posteriormente a esta solução teve-se início, a partir de 1957, o estudo da *teoria de perturbação* aplicada aos buracos negros com o intuito de descrever questões tais como: estabilidade, reflexão e transmissão de campos incidentes, etc. Esta solução particular é, sem dúvida, a mais estudada no que diz respeito à teoria dos buracos negros.

Outro fato de interesse físico decorrente da linearização do campo gravitacional são as chamadas *ondas gravitacionais*, previstas por Einstein [3], em 1916, e recentemente detectadas pelo experimento realizado no LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) [4], confirmando mais uma vez a rebustez da teoria no que tange à sua aplicabilidade e confirmação experimental. Neste capítulo introdutório, faremos um resumo histórico sobre o desenvolvimento da teoria de perturbações lineares e apresentaremos os principais métodos para o cálculo dos modos quase-normais (MQNs), tomando como referência o buraco negro de Schwarzschild.

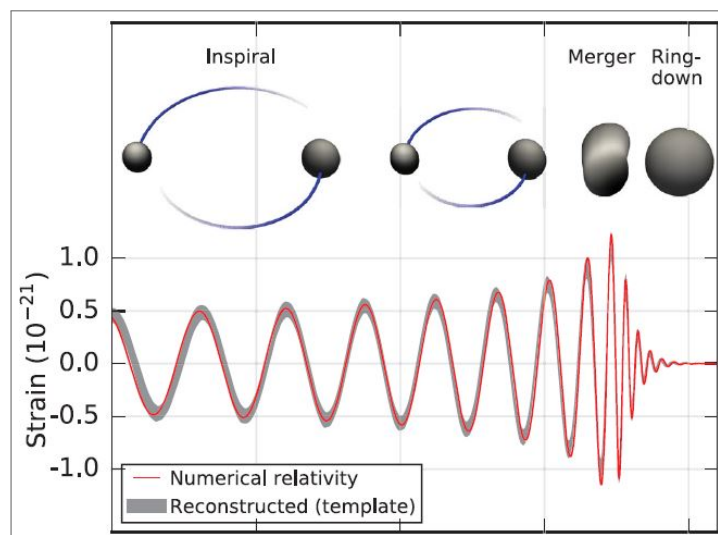
1.1 PERTURBAÇÕES LINEARES

A teoria de perturbações lineares tem início com os estudos referentes à estabilidade do buraco negro de Schwarzschild, iniciado pelo artigo pioneiro de Regge e Wheeler [5]. Tal estudo se faz fundamental porque serve como uma ferramenta para se entender como, a partir de certas condições de contorno adequadas que dão origem a um conjunto de modos discretos e com frequência complexa, denominados *modos quase-normais*, dominando e caracterizando as chamadas *ondas gravitacionais* pertencentes à fase *ringdown*, propagam-se pelo espaço-tempo e que dependem exclusivamente dos parâmetros caracterizantes do buraco negro.

Estes modos decorrem da solução de uma equação diferencial de segunda ordem tipo-Schrodinger para a componente radial que governa a perturbação no espaço-tempo do buraco negro. A parte real do modo corresponde à oscilação tal como os modos normais (MNs) vistos em cursos de *Mecânica Clássica*, porém, a parte imaginária é responsável pelo decaimento e estabilidade.

Um buraco negro pode ser perturbado de diversas formas como, por exemplo, campos que interagem com ele (escalares, espinoriais, vetoriais, gravitacionais, etc.) ou matéria que são atraídas para a sua singularidade. Um dos fenômenos possíveis acerca de como perturbá-los é a colisão e consequente coalescência entre dois buracos negros supermassivos, cuja fase de *ringdown* é tão intensa que possibilitou, há poucos anos (2016), a sua detecção [4], possibilitando a confirmação experimental das ondas gravitacionais. Para compreendermos melhor, consideremos a Fig. 1 a seguir:

Figura 1 – Reprodução da colisão de dois buracos negros supermassivos gerando ondas gravitacionais



Fonte: Abbott et al.[4] (2016)

A fase inicial do momento da colisão e início da coalescência (Merger) é o instante onde há uma enorme liberação de energia em uma fração de segundos, posteriormente seguido da fase de *ringdown* caracterizada pelo longo decaimento exponencial oscilatório e, por fim, o último estágio denominado *caudas tardias* para tempo suficientemente longos. Estamos preocupados em estudar a segunda fase, a que domina o processo e codifica informações sobre o buraco negro. Entender e quantificar esta fase pode não só servir para a detecção destes corpos pelo Universo, como também fornecer uma visão mais profunda sobre a relatividade geral e riquezas da teoria.

A relatividade geral é uma teoria que nos fornece a descrição de como a malha geométrica do espaço-tempo se deforma a partir da concentração e distribuição de matéria-energia, e esta informação está codificada na métrica. Logo, pode-se afirmar que se trata de uma teoria da métrica. Disto, decorre que há fundamentalmente dois caminhos para estudar a teoria de perturbação linear, são elas: via a linearização direta das equações de Einstein-Maxwell ou pelo formalismo de Newman-Penrose.

O método baseado na linearização está relacionado justamente em parametrizar as perturbações como uma variação dos coeficientes métricos, e então inserindo-as nas equações de campo de Einstein-Maxwell no espaço-tempo do buraco negro, ou seja, no espaço curvo.

No entanto, o método do formalismo de Newman-Penrose é baseado em um tratamento mais refinado e está relacionado em estudar as perturbações via os escalares de Weyl e Maxwell. Com este formalismo, pode-se projetar os campos físicos, isto é, campos escalares, spinoriais, etc., no espaço-tempo curvo do buraco negro e é especialmente bem aplicado ao caso de campos sem massa, tratando-se de um caso particular do *cálculo tetrad*. Com este formalismo, é possível desacoplar as equações em suas componentes radiais e angulares e igualmente, como no caso da linearização acima, necessita-se da métrica em particular sob análise. É de extrema importância salientar que ambas as teorias, apesar de terem tratamento muito distintos, conduzem aos mesmos resultados e se complementam, além de demonstrarem relações internas entre si que ficariam despercebidas por outros meios. Não iremos abordar este método no presente trabalho; interessados, podem consultar [6, 7].

Introduziremos a seguir uma breve abordagem e apresentação de resultados sobre os diferentes tipos de perturbações provocadas por campos classificados de acordo com o seu respectivo *spin*, s . Nossa descrição terá como base o *buraco negro de Schwarzschild* para fornecer um panorama histórico do início da teoria e o *insight* necessário para os resultados apresentados no final para o caso de *Reissner-Nordström*. Para isto, faz-se necessário a seguinte

definição para o espaço-tempo e que será a utilizada durante toda a presente dissertação:

Definição 1. *O espaço-tempo é uma variedade quadridimensional dotado de um tensor métrico, isto é, $(\mathcal{M}^4, g_{ab})$, e com assinatura $\{-1, 1, 1, 1\}$. Tal variedade espaço-temporal não se encontra imersa em nenhuma outra variedade de dimensão maior.*

Perturbações lineares gravitacionais ou *perturbações tensoriais*, com $s = 2$, dentro do referencial da teoria de gravitação, refere-se à perturbação do espaço-tempo em si e inicialmente utilizando-se das chamadas *variáveis gauge-invariantes* por Regge-Wheeler; para isto, consideremos um espaço-tempo qualquer. A perturbação métrica pode ser escrita como a variação dos coeficientes métricos em questão como

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu} + \mathcal{O}^2(\delta g_{\mu\nu}), \quad (1.1)$$

onde $g_{\mu\nu}^{(0)}$ é o espaço-tempo do buraco negro sem a deformação e solução exata da equação de campo de Einstein (ECE), enquanto $\delta g_{\mu\nu}$ é a perturbação em primeira ordem imposta nos coeficientes devido à interação com o campo em questão. Os termos de ordem superior, simbolizados por $\mathcal{O}^2(\delta g_{\mu\nu})$, não são levados em conta, uma vez que, em comparação com a primeira ordem, são desprezíveis.

A perturbação na métrica pode ser escrita, como afirmado acima, por meio da variação dos coeficientes métricos e expandida em termos de uma família de parâmetros, $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$, tal que

$$g_{ab} = g_{ab}(\{\lambda_i\}_{i=1}^N) \quad (1.2)$$

e por simplicidade tomamos, para efeito explicativo, um único parâmetro, isto é,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \lambda h_{\mu\nu} + \mathcal{O}^2(\lambda h_{\mu\nu}), \quad (1.3)$$

sendo o parâmetro perturbativo aquele que mede o tamanho da perturbação, de modo que

1. $g_{ab} = g_{ab}(\lambda)$ depende diferencialmente do parâmetro λ
2. $g_{ab}(0) = g_{ab}^{(0)}$

Disto, implica que $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}^{(0)}|$, isto é, os elementos da matriz perturbação $\delta g_{ab} := h_{ab}$ são muito inferiores que aqueles de $g_{ab}^{(0)}$ se, e somente se, em algum sistema de coordenadas inercial global de $g_{ab}^{(0)}$, tem-se $\lambda \ll 1$.

Impondo o fato (dependente do *sistema de coordenadas* usado)

$$|\delta g_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}^{(0)}|, \quad (1.4)$$

e considerando a ECE, no sistema de unidades geometrizadas tal que $c = G_N = 1$, dada por

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

sendo $G_{\mu\nu}$ o chamado *tensor de Einstein* e κ uma constante estritamente numérica; nota-se a ausência da *constante cosmológica* na expressão acima, e isto se deve ao fato da presente análise se tratar de questões locais como os buracos negros, e não referente à questões de caráter global, isto é, cosmológico. Tomando a solução no vácuo, $T_{\mu\nu} = 0$, e aplicando a separação de variáveis coletando apenas os termos perturbados, ou seja, em $\delta g_{\mu\nu}$, considerando $\delta g_{\mu\nu} = {}_s h_\ell^m(r_*)$, obtemos da Eq. (1.5) a equação para a componente radial

$$\frac{d^2 {}_s h_\ell^m(r_*)}{dr_*^2} + [\omega^2 - {}_s V_\ell(r_*)] {}_s h_\ell^m(r_*) = 0 \quad (1.6)$$

onde ω é a autofrequência advinda da derivada temporal, ${}_s V_\ell(r_*)$ é o *potencial efetivo* que depende das quantidades geométricas do buraco negro e r_* é uma coordenada adequada para expressar de forma mais compacta a equação e que será definida mais adiante.

Como nos mostra S. Chandrasekhar [7], o potencial efetivo, ${}_s V_\ell(r_*)$, possui comportamento assintótico nos infinitos de modo que decai de forma quadrática tanto no caso Schwarzschild quanto Reissner-Nordström, ou seja:

$${}_s V_\ell(r_*) \sim \begin{cases} 0 & , \quad r_* \rightarrow +\infty \\ 0 & , \quad r_* \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (1.7)$$

logo, podemos alocar a Eq. (1.6), nestes limites assintóticos, no formato *tipo-Schrödinger* conhecido da *Mecânica Quântica*:

$$\frac{d^2 {}_s h_\ell^m(r_*)}{dr_*^2} + \omega^2 {}_s h_\ell^m(r_*) = 0. \quad (1.8)$$

A solução desta equação diferencial de segunda ordem é dada pela combinação linear de exponenciais complexas, $e^{i\omega r_*}$ e $e^{-i\omega r_*}$ [8], e que descrevem, com o mesmo sentido advindo da *Mecânica Quântica*, ondas *saindo* e *entrando*, respectivamente, em relação à barreira de potencial. A depender da combinação das exponenciais e a natureza do modo, ω , as soluções possíveis podem ser resumidas da seguinte maneira para fins de estudo na física de buracos negros:

1. Comportamento dado por

$$h_\ell^m(r) \sim \begin{cases} e^{-\omega r_*} & , \quad r_* \rightarrow -\infty \\ e^{\omega r_*} & , \quad r_* \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.9)$$

obtém-se a *condição de contorno* para o campo que originará os MQNs caracterizados por serem complexos e que motiva o estudo deste trabalho. Pode-se analisar, a partir da parte imaginária da frequência, a estabilidade do buraco negro ao sofrer pequenas perturbações em sua esfericidade, concluindo-se que a parte imaginária deve ser negativa para garantir a estabilidade, de modo que a configuração de equilíbrio não irá crescer indefinidamente de forma exponencial, mas sim, oscilar em torno do ponto de equilíbrio [5].

2. Para o caso dado por

$${}_s h_\ell^m(r_*) \sim \begin{cases} \mathcal{T}e^{-ik_H r_*} + \mathcal{O}e^{ik_H r_*} & , \quad r_* \rightarrow -\infty \\ \mathcal{R}e^{ik_H r_*} + \mathcal{I}e^{-ik_H r_*} & , \quad r_* \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{I}$ são os *coeficientes de transmissão, reflexão e incidência*, respectivamente, no horizonte de eventos e com o termo $\mathcal{O}$ designando um *coeficiente* descrevendo um suposto fluxo de saída cruzando a superfície do horizonte. Por sua vez, $k_H^2 = {}_s V_\ell(r_* \rightarrow -\infty)^{\text{ef}}$ e $k_\infty^2 = {}_s V_\ell(r_* \rightarrow +\infty)^{\text{ef}}$ sendo ${}_s V_\ell(r_*)^{\text{ef}} := \omega^2 - {}_s V_\ell(r_*)$, admitindo-se que ${}_s V_\ell(r_*)^{\text{ef}}$ é constante nos contornos, com ω podendo ser complexo. Este caso é utilizado como ferramental para o estudo do fenômeno de *superradiância*, quando a *incidência* é inferior à *reflexão*, isto é, $|\mathcal{I}|^2 < |\mathcal{R}|^2$ [9].

3. Por fim, para o caso

$$h_\ell^m(r_*) \sim \begin{cases} A_{in}e^{-i\omega r_*} + B_{out}e^{i\omega r_*} & , \quad r_* \rightarrow -\infty \\ e^{i\omega r_*} & , \quad r_* \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.11)$$

com $B_{out} \neq 0$ e os índices *in* e *out* referindo-se às ondas *entrando* e *saindo* no horizonte, respectivamente. Aqui, trata-se de um caso usado para um conjunto de análises para o que denomina-se *objetos ultracompactos exóticos*, caracterizados pela ausência de horizontes de eventos ao redor da singularidade¹. Um exemplo deste caso, trata-se do estudo da possibilidade de excitação de graus de liberdade internos do objeto massivo exótico que podem ocorrer quando a frequência orbital de determinada partícula pontual de teste se aproxima da frequência característica do sistema, e a consequente possibilidade de que estas excitações apareçam nas ondas gravitacionais, revelando com isso, sua real existência bem como informações importantes acerca dele [10].

¹ No capítulo 2, comentaremos sobre a *conjectura da censura cósmica*. Esta afirma não existir singularidades tais como os buracos negros sem horizontes de eventos, isto é, singularidades nuas.

Outros casos, de igual importância de interesse na teoria de perturbação, serão apresentados de forma breve abaixo para um dado espaço-tempo arbitrário de acordo com a Def. 1. Isto é:

1. *Perturbações escalares*: são aquelas que independem do referencial adotado, isto é, são invariantes por quaisquer transformações de Lorentz, sendo regidas pela *equação de Klein-Gordon* para um campo com $s = 0$, ou seja,

$$(\nabla_a \nabla^a + \mu^2) \Phi(\{\mathbf{x}\}) = 0, \quad (1.12)$$

onde ∇_a é a derivada covariante no espaço curvo considerado e μ a respectiva massa do campo escalar. Fazendo-se uso do *operador de Laplace-Beltrami*, pode-se expressar tal equação de campo na forma

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\rho\sigma} \partial_\sigma) + \mu^2 \right] \Phi(\{\mathbf{x}\}) = 0. \quad (1.13)$$

No caso onde tal campo escalar possui carga elétrica q , realiza-se a chamada *substituição mínima* $\partial_a \rightarrow D_a = \partial_a - iqA_a$, onde A_a é o *quadrivetor potencial* associado ao campo interagente com o espaço-tempo do buraco negro expresso por g_{ab} .

2. *Perturbações vetoriais*: ditam as perturbações para campos com $s = 1$, no qual as *equações de Maxwell* regem o comportamento, sem massa, com a presença de um quadrivetor potencial, A_a , dada pelo conjunto de equações

$$\nabla^a F_{ab} = 0, \quad F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \quad (1.14)$$

onde F_{ab} é o *tensor de Faraday* completamente antissimétrico, isto é, $F_{ab} = F_{[ab]}$. Podendo ser também colocada, para espaços curvos, na seguinte forma

$$\partial_c [(\partial_a A_b - \partial_b A_a) g^{ad} g^{bc} \sqrt{-g}] = 0, \quad (1.15)$$

onde g é o determinante do tensor métrico, $g = \det(g_{ab})$.

Para o caso escalar, onde há apenas uma componente, a equação por si só já é desacoplada e completamente separável nas partes radial e angular, uma vez que a parte angular é dada pelos *harmônicos esféricos* e seu autovalor é bem definido sobre a 2-esfera de raio unitário, $\mathbb{S}^2(\theta, \phi)$. Porém, para os demais casos, a situação é substancialmente mais complicada uma vez que a equação governando as perturbações vetoriais, Eq. (1.15), possui um total de seis

componentes acopladas e o caso gravitacional, Eq. (1.5), dez. Disto, decorre a dificuldade de se encontrar as constantes de separação, pois, para estes casos mais complexos, a análise e determinação da parte angular só é possível por meios numéricos [11]. Portanto, um caminho pelo qual se trabalha para desacoplar as equações é utilizar-se da simetria inerente do espaço-tempo correspondente às variáveis *gauge-invariantes* na computação, e expressar a equação mestra em termos dela. Tal *equação mestra de Teukolsky* é responsável pela separação das variáveis que resultará em um conjunto de duas equações diferenciais, uma para a parte radial e outra para a angular, e as funções que resolvem este conjunto de equações são denominadas *funções de Teukolsky*.

1.2 PERTURBAÇÕES ESCALARES, GRAVITACIONAIS E VETORIAIS NO ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD

Agora, apresentaremos os resultados clássicos para o buraco negro de Schwarzschild, uma vez que este foi o primeiro a ser estudado e seu tratamento é particularmente mais simples, bem como as referências mais vastas, oferecendo um ideal caminho para se compreender as sutilezas do caso de Reissner-Nordström que será apresentado posteriormente como um caso mais geral, onde há a presença da carga elétrica total coulombiana, Q . Dito de outra forma: um buraco negro carregado.

1.2.1 Caso Gravitacional: $s = 2$

Como afirmado acima, perturbações gravitacionais, ou tensoriais, são aquelas em que se perturba o espaço-tempo em si por meio de uma variação em primeira ordem, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu} \quad , \quad |h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}^{(0)}| \quad (1.16)$$

onde desconsideramos os demais termos de ordem $\mathcal{O}^2(|h_{\mu\nu}|)$.

Para compreender melhor o uso das variáveis *gauge-invariantes* que são especialmente adequadas para este caso, uma vez que o tensor de Ricci é nulo e consequentemente sua perturbação é um *gauge-invariante*, iniciadas por Regge-Wheeler nas perturbações métricas, deve-se lembrar que o sistema de coordenadas adotado inicialmente para descrever o espaço-tempo foi fixado, de modo que a liberdade de coordenadas introduz um problema quando perturbações lineares são introduzidas. Disto, decorre ser impossível a distinção entre uma

perturbação de *efeito físico infinitesimal* de um efeito puramente *matemático* introduzido pela transformação infinitesimal de coordenadas (ou simplesmente *transformações de gauge*). Porém, tal dificuldade pode ser eliminada fixando um determinado *gauge*, ou introduzindo perturbações *gauge-invariantes* como aquelas realizadas em [5].

Mais especificamente, dado um campo vetorial x^a em um determinada variedade tal como aquela da Def. 1, isto é, $(\mathcal{M}^4, g_{ab})$, e sendo δx^a a perturbação infinitesimal em primeira ordem, uma dada transformação infinitesimal nas coordenadas, $\{x^\mu\}$, como $x'^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ com $|\xi^\mu| \ll 1$, terá como resultado um novo campo vetorial

$$\delta x^a \rightarrow \delta x'^a + \mathcal{L}_{\xi^b} x^a, \quad (1.17)$$

onde $\mathcal{L}_{\xi^b}$ é a *derivada de Lie* ao longo do campo ξ^b no tensor métrico g_{ab} . Portanto, trata-se de uma transformação *gauge-invariante* se, e somente se, $\mathcal{L}_{\xi^b} x^a = 0$.

Portanto, fica evidente que a possibilidade de se construir perturbações métricas *gauge-invariantes* depende, fundamentalmente, da existência de *isometrias* no espaço-tempo considerado expresso pelo tensor métrico g_{ab} . No caso em que se tenha um espaço-tempo genérico com simetria esférica, as perturbações podem ser separadas em seus respectivos *multipolos*. Disto, decorre que a vantagem de se usar as quantidades *gauge-invariantes* se assenta em sua natural relação com os observáveis escalares e a respectiva energia e momento das ondas gravitacionais. Além disso, esta escolha garante que as possíveis contribuições *gauge-invariantes* sejam excluídas por construção.

Novamente, ressalta-se que tal procedimento só é possível se, e apenas se, a métrica tem propriedades específicas de simetria sob transformações infinitesimais de coordenadas, de modo que a formulação da ECE para perturbações de um espaço-tempo genérico qualquer sem tais características em g_{ab} não é possível. No entanto, uma vez que qualquer espaço-tempo, $(\mathcal{M}^4, g_{ab})$, assintoticamente plano pode em geral ser relacionado à métrica de Minkowski em distâncias radiais suficientemente grandes, a formulação *gauge-invariante* pode ser uma efetiva ferramenta para que se extraia informação física sobre as ondas gravitacionais, isto é, os MQNs geradas em espaços-tempos assintoticamente planos.

O buraco negro de Schwarzschild representa uma variedade espaço-tempo quadridimensional, $(\mathcal{M}^4, g_{ab})$, cuja solução trata-se de um caso particular das equações de campo de Einstein no vácuo de um centro de massa, M , esfericamente simétrico e estático, cujo elemento de linha no sistema de coordenadas esféricas é dado por [12]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(Sc)} dx^\mu dx^\nu \quad (1.18)$$

$$\Rightarrow ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.19)$$

Tratando-se, pois, de um espaço-tempo assintoticamente plano, ou seja, recuperando-se a métrica de Minkowski² no infinito espacial, $r \rightarrow \infty$, e tendo um *horizonte de eventos* definido pela hipersuperfície tal que $r = 2M$. No capítulo 2, será abordado a questão referente ao horizonte de eventos, qual seja, como identificá-los.

Para a análise perturbativa em tela, é conveniente utilizarmos questões tais como a simetria do problema e suas respectivas variáveis *gauge-invariantes*. Devido ao fato da presente variedade possuir simetria esférica e ser estática, pode-se escrevê-la decomposta por meio do produto $\mathcal{M}^4 = \mathcal{M}^2(t, r) \times \mathbb{S}^2(\theta, \phi)$, onde $\mathcal{M}^2(t, r)$ é uma *variedade lorentziana* bidimensional expressa nas coordenadas $\{r, t\}$ e $\mathbb{S}^2(\theta, \phi)$ a 2-esfera unitária nas coordenadas $\{\theta, \phi\}$. Por ter tal decomposição, as perturbações podem ser separadas desde o início em duas partes: aquelas confinadas em $\mathcal{M}^2(t, r)$, e aquelas em $\mathbb{S}^2(\theta, \phi)$ com métrica dada por:

$$g_{\mu\nu}^{(\mathbb{S}^2)} = \text{diag}(1, \sin^2 \theta). \quad (1.20)$$

Fazendo-se uso disto, pode-se decompor as perturbações na métrica em *multipolos* designados por *paridade ímpar* e *paridade par* de acordo com suas respectivas propriedades sob transformações de paridade. Disto, denominamos *multipolos ímpares*, sob a transformação $(\theta, \phi) \rightarrow (\theta - \pi, \phi + \pi)$, aqueles que transformam-se como $(-1)^{\ell+1}$ e os *multipolos pares* com $(-1)^\ell$ para $\ell = 0, 1, 2 \dots$. Os multipolos ímpares governam as *perturbações axiais*, responsáveis por provocar rotação neste buraco negro inicialmente estático, enquanto os multipolos pares as *perturbações polares* [7].

Como resultado, as componentes do tensor perturbação, h_{ab} , podem ser expressas como perturbações métricas escritas de acordo com a seguinte expressão

$$(h_{\mu\nu})_\ell^m = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [(h_{\mu\nu}^i)_\ell^m + (h_{\mu\nu}^p)_\ell^m], \quad (1.21)$$

onde os índices i e p designam as identificações para *ímpar* e *par*, respectivamente. O passo seguinte envolve a separação de variáveis e para isto o uso dos *harmônicos esféricos vetoriais* e dos *harmônicos esféricos tensoriais* com a dependência angular [13]. Nota-se que a soma estende-se a partir do momento angular dos modos tal que $\ell \geq 2$, e isto se deve ao fato dos multipolos de ordem inferior, ou seja $\ell = \{0, 1\}$, não possuírem graus de liberdade radiativos. Vale observar que para perturbações no vácuo, a perturbação métrica para o qual $\ell = 0$

² A métrica de Minkowski, $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, \dots)$, trata-se da representação do espaço-tempo plano quadridimensional.

possui apenas a componente par e representa um deslocamento do parâmetro caracterizante desta solução: a massa M . Enquanto $\ell = 1$ representa um *gauge-puro* e, portanto, pode ser removido por uma transformação de *gauge* adequada. Já a perturbação referente à parte ímpar, a perturbação no vácuo com $\ell = 1$ representa um deslocamento no parâmetro do momento angular do buraco negro, isto é, rotação, como afirmado acima [14, 15].

Uma vez que o problema possui simetria esférica e que o resultado final será uma equação radial, podemos, sem perda de generalidade, escolher o valor particular de m , ou seja, da projeção no eixo z do modo de momento angular ℓ , tal que $m = 0$ e fazendo com que a dependência na variável ϕ desapareça, facilitando o tratamento matemático. Logo, com esta simplificação bem como a escolha do *invariante de gauge de Regge-Wheeler* [5], encontra-se que a perturbação de paridade ímpar pode ser posta no formato matricial

$$(h_{\mu\nu}^i)_\ell^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0(r) & h_1(r) & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) Y_\ell^0(\theta) e^{i\omega t}, \quad (1.22)$$

e a perturbação de paridade par em

$$(h_{\mu\nu}^p)_\ell^0 = \begin{bmatrix} H_0(r) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & H_1(r) & 0 & h_0(r) \\ 0 & H_2(r) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & h_1(r) \\ 0 & 0 & r^2 K(r) & 0 \\ 0 & h_1(r) & 0 & r^2 K(r) \sin^2\theta \end{bmatrix} Y_\ell^0(\theta) e^{i\omega t}, \quad (1.23)$$

onde $h_0(r)$, $h_1(r)$, $H_0(r)$, $H_1(r)$, $H_2(r)$ e $K(r)$ são coeficientes de parametrização da perturbação métrica como dependentes unicamente da coordenada radial, r . Posteriormente a introdução da perturbação métrica parametrizada na Eq. (1.5), obtém-se um total de dez equações diferenciais de segunda ordem acopladas que governam a perturbação gravitacional: três de paridade ímpar e sete, par. Porém, apenas três delas são não-triviais. Para se obter as equações desacopladas na qual resultará a equação radial para os MQNs, combinações específicas dos coeficientes de parametrização devem ser introduzidos, sendo uma tarefa desafiadora. No entanto, para a paridade ímpar, foi primeiramente encontrado em [5] com alguns erros e posteriormente corrigidos em [16]. Definindo a *coordenada tartaruga*, para deixar mais

conveniente o tratamento, como

$$\frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow r_* = r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad (1.25)$$

temos, portanto, que a equação radial para os MQNs no formato dado pela Eq. (1.6) pode ser obtida tanto para o caso axial (ímpar) quanto polar (par), sendo dada por meio da expressão

$$\frac{d^2(2h_\ell^m)^{i,p}}{dr_*^2} + [\omega^2 - {}_2V_\ell(r_*)](2h_\ell^m)^{i,p} = 0 \quad (1.26)$$

onde o potencial efetivo, ${}_2V_\ell(r_*)$, para o caso de perturbações ímpares, é dado por (com a dependência em r_* implícita em r):

$${}_2V_\ell^i(r_*) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right]. \quad (1.27)$$

A equação acima governando os MQNs para a paridade ímpar é chamada de *equação de Regge-Wheeler*.

Há também uma equação desacoplada para a paridade par, sendo dada por

$${}_2V_\ell^p(r_*) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2\lambda^2(\lambda+1)r^3 + 6\lambda^2Mr^2 + 18\lambda M^2r + 18M^3}{r^3(\lambda r + 3M)^2}, \quad (1.28)$$

com $\lambda = (\ell - 1)(\ell + 2)/2$. A equação acima governando os MQNs para a paridade par é chamada de *equação de Zerilli* [17], o primeiro a derivá-la com um sutil erro e posteriormente corrigida em [18].

O caso acima tratado refere-se a perturbações no vácuo, porém, caso se tenha configurações de matéria-energia menores do que a massa do buraco negro, no entanto, suficientes para perturbá-lo, neste presente caso, o tensor energia-momento pode ser igualmente decomposto nas partes correspondentes à paridade par e ímpar, isto é,

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [(T_{\mu\nu}^p)_\ell^m + (T_{\mu\nu}^i)_\ell^m], \quad (1.29)$$

onde, novamente, os índices p e i designam *par* e *ímpar*, respectivamente. Disto, resulta que a ECE, dada pela Eq. (1.5), pode ser escrita como

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.30)$$

sendo $T_{\mu\nu}$ dado pela expressão (1.29) e $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci construído a partir das perturbações métricas, $R_{\mu\nu}[\delta g_{\mu\nu}]$.

Porém, o fato da perturbação agora não mais ocorrer no vácuo irá provocar uma variação no formato da Eq. (1.6), governando os MQNs, de modo que se torna possível ser alocada, para as perturbações pares e ímpares, como

$$\frac{d^2 {}_s h_\ell^m(r_*)}{dr_*^2} + [\omega^2 - {}_s V_\ell(r_*)] {}_s h_\ell^m(r_*) = S_\ell^m(r_*), \quad (1.31)$$

sendo $S_\ell^m(r_*)$ a fonte responsável pela parte da perturbação de paridade par ou ímpar, decorrente do tensor energia-momento (1.29).

Nota-se que perturbações genéricas serão uma mistura de contribuições advindas das paridades par e ímpar, explorando a linearidade da abordagem para que se possa tratá-las separadamente e, assim, simplificar o tratamento matemático [13]. Portanto, pode-se realizar algumas afirmações acerca do buraco negro de Schwarzschild:

1. É linearmente estável contra perturbações;
2. O tempo de decaimento dos MQNs depende linearmente da massa do buraco negro, sendo mais curto para aqueles de modos superiores;
3. A excitação de um buraco negro pode ser compreendida como sendo seu *toque característico* e a dinâmica de tais perturbações (isto é, a *cauda do seu toque*) pode ser descrita como uma lei de potência representando o *pacote* dos vários MQNs em decomposição;
4. Os MQNs são *isoespectrais*, isto é, as perturbações de paridade par e ímpar possuem as mesmas frequências complexas próprias.

Posteriormente a estes marcos dos estudos iniciais, e de referência, um conjunto de pesquisas e métodos computativos foi desenvolvido para perturbações no buraco negro de Schwarzschild e, em seguida, estendido para demais espaços-tempos. Em particular, o interesse pela pesquisa de multipolos produziu a descoberta de uma propriedade significativa chamada *primeiro isospectral*, descoberta por Chandrasekhar, sugerindo que vários multipolos podem gerar o mesmo espectro característico, indicando ser suficiente estudar qualquer uma das situações para decorrente simplificação; interessados, consultar [19] ou Apêndice A de [20].

Por fim, comentamos o fato notável envolvendo os potenciais governando as perturbações axiais e polares que, a despeito de seus formatos aparentemente distintos, há uma simples relação interligando-os como observa Chandrasekhar [7]. Tal relação é posta no seguinte formato

$${}_s V_\ell^{i,p}(r_*) = \pm \beta + \frac{df}{dr_*} + (\beta f)^2 + kf, \quad (1.32)$$

com o sinal positivo para o potencial par e o negativo, ímpar. Os termos apresentados são dados por:

$$\begin{cases} \beta = 6M \\ k = \ell(\ell + 2)(\ell^2 - 1) \\ f = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r[(\ell + 2)(\ell - 1)r + 6M]} \end{cases} \quad (1.33)$$

onde deve-se notar que a função f se anula no horizonte ($2M$) e no infinito, cujo comportamento é dado por r^{-2} . Ainda segundo o autor, aparentemente não há nenhuma razão óbvia do porquê os potenciais se relacionam desta forma, no entanto, a origem desta descrição se assenta no já citado formalismo de Newman-Penrose .

1.2.2 Caso Escalar: $s = 0$

Tendo em vista que o elemento de linha para o caso de Schwarzschild é dado pela expressão (1.19), depreende-se que o tensor métrico é diagonal e pode ser escrito como

$$g_{\mu\nu}^{(Sc)} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Como mencionado anteriormente, este campo é inerentemente desacoplado e considerando expresso no sistema de coordenadas esféricas, $\{x^\mu\} = \{r, \theta, \phi\}$, projetando a Eq. (1.13) em (1.34), e utilizando-se da solução completa dada por

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u(r, t) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \quad , \quad u(r, t) \equiv {}_0h_{\ell}^m(r, t)/r \quad (1.35)$$

o problema torna-se, fundamentalmente, análogo ao problema de se resolver o átomo de Hidrogênio [21]. Utilizando-se da coordenada definida na expressão (1.24), obtém-se a equação:

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} - \frac{d^2}{dt^2} - {}_0V_{\ell}(r_*) \right] {}_0h_{\ell}^m(r_*, t) = 0. \quad (1.36)$$

Admitindo que a solução da equação que governa a perturbação acima possui uma dependência temporal tal como

$${}_0h_{\ell}^m(r_*, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} {}_0h_{\ell}^m(\omega, t) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.37)$$

correspondente à transformada de Fourier no procedimento padrão de análise dos modos [22], obtém-se a equação governando os MQNs:

$$\frac{d^2 {}_0h_\ell(\omega, r_*)}{dr_*^2} + [\omega^2 - {}_0V_\ell(r_*)] {}_0h_\ell(\omega, r_*) = 0. \quad (1.38)$$

O potencial ${}_0V_\ell(r_*)$, sendo agora dado por

$${}_0V_\ell(r_*) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right], \quad (1.39)$$

onde $\ell(\ell+1)$ é a constante de separação angular advinda da parte angular da equação diferencial, onde tem-se uma equação de autovalor bem determinada para o laplaciano em $\mathbb{S}^2(\theta, \phi)$, ou seja $\Delta_{\mathbb{S}^2}$, de modo que

$$g_{(\mathbb{S}^2)}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu Y_\ell^m(\theta, \phi) = -\ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (1.40)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] Y_\ell^m(\theta, \phi) = -\ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \phi). \quad (1.41)$$

Portanto, os MQNs são governados por uma equação diferencial de segunda ordem tipo-Schrödinger, cujo potencial efetivo é dado pela expressão (1.39). Vale observar que tal potencial é muito similar ao caso do potencial para as perturbações ímpares no caso tensorial dado pela expressão (1.27).

1.2.3 Caso vetorial: $s = 1$

Com o mesmo procedimento como no caso anterior, o campo de Maxwell, ou perturbações vetoriais, podem ser desacopladas considerando-se a Eq. (1.14) no espaço-tempo de Schwarzschild e utilizando-se dos harmônicos vetoriais, de modo que obtém-se uma equação tipo-Schrödinger para os MQNs

$$\frac{d^2 {}_1h_\ell^m(r_*)}{dr_*^2} + [\omega^2 - {}_1V_\ell(r_*)] {}_1h_\ell^m(r_*) = 0, \quad (1.42)$$

onde r_* é definida pela expressão (1.24) mapeando o intervalo $[2M, \infty)$ em $(-\infty, +\infty)$, com o potencial dado por:

$${}_1V_\ell(r_*) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \quad (1.43)$$

As perturbações tensoriais (ímpares), escalares e vetoriais são regidas por uma equação tipo-Schrödinger cujo potencial pode ser generalizado de acordo com o *spin* referente ao campo, sendo dado por

$${}_sV_\ell(r_*) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} (1 - s^2) \right], \quad (1.44)$$

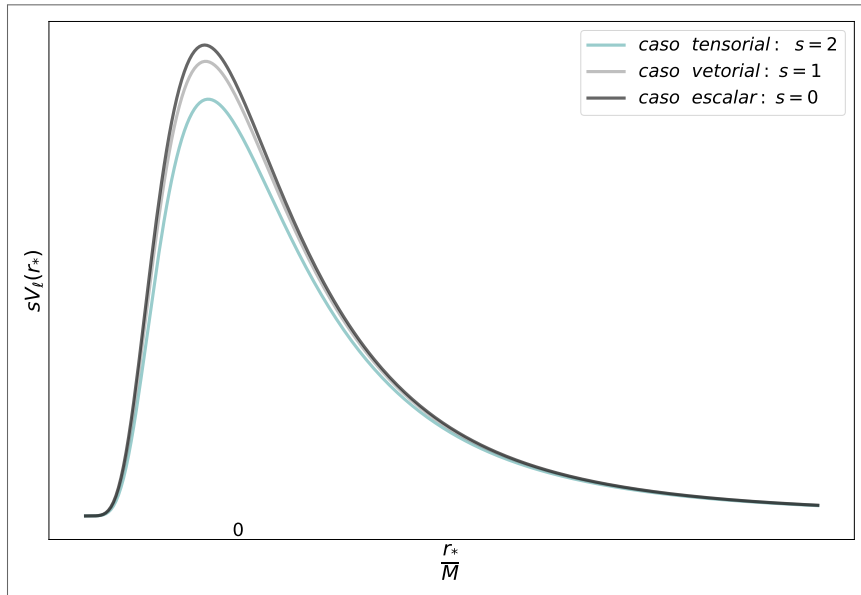
de modo que obtém-se o gráfico para cada tipo de perturbação na Fig. 2 na respectiva coordenada tartaruga, r_*/M .

Os MQNs são estabelecidos, cada qual ao seu caso perturbativo, resolvendo-se a respectiva equação tipo-Schrödinger nos limites assintóticos, tais que todas as equações se resumem à Eq. (1.8) quando a ela é imposta as condições de contorno que dão origem a tal conjunto de frequências discretizadas de carácter complexo, isto é, $\omega = \Re(\omega) + i\Im(\omega)$, primeiro imposto por Vishveshwara [23], e que independem de como se dá a perturbação, dependendo apenas de quantidades intrínsecas ao próprio buraco negro. Estas condições são traduzidas como ondas completamente entrando no horizonte de eventos e ondas completamente saindo no infinito espacial, em outras palavras

$${}_s h_\ell^m(r_*) \sim \begin{cases} e^{-i\omega r_*} & , \quad r_* \rightarrow -\infty \ (2M) \\ e^{i\omega r_*} & , \quad r_* \rightarrow +\infty \ (+\infty) \end{cases} \quad (1.45)$$

e exprimem a inabilidade por parte do buraco negro de possuir, ao redor deles, distribuições de matéria-energia estável.

Figura 2 – Comportamento genérico dos potenciais para o buraco negro de Schwarzschild com $\ell > 0$



Fonte: O autor (2024)

1.3 PRINCIPAIS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A OBTENÇÃO DOS MQNs

Na seção anterior, realizamos uma breve revisão dos principais métodos da teoria de perturbação linear relacionados aos buracos negros, e a correspondente equação diferencial de

segunda ordem tipo-Schrödinger em espaços curvos que governa os MQNs foi apresentada. Na presente seção, abordaremos de forma breve os dois principais métodos numéricos para se calcular estes modos: *aproximação WKB* e *método de Leaver*. No final, faremos uma listagem comentando os demais métodos usados para esta finalidade.

1.3.1 Método WKB

O método de aproximação WKB (ou JWKB) foi utilizado primeiramente na resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem por Jeffreys [24]. Posteriormente, foi desenvolvido a fim de se obter soluções numéricas para a equação de Schrödinger por Wentzel [25], Kramers [26] e Brillouin. Pelo fato das equações governando os MQNs serem do tipo-Schrödinger com comportamento assintótico para os potenciais indo a zero, obviamente a análise é estendida e pode-se utilizá-lo.

A equação para os MQNs é dada por

$$\epsilon^2 \frac{d^2 {}_s h_\ell^m(r_*)}{dr_*^2} + (\omega^2 - {}_s V_\ell(r_*)) {}_s h_\ell^m(r_*) = 0, \quad (1.46)$$

sendo ϵ um parâmetro infinitesimal para se ajustar à ordem de aproximação do método WKB; definindo $\epsilon = 1$, recupera-se a equação familiar para perturbações no buraco negro.

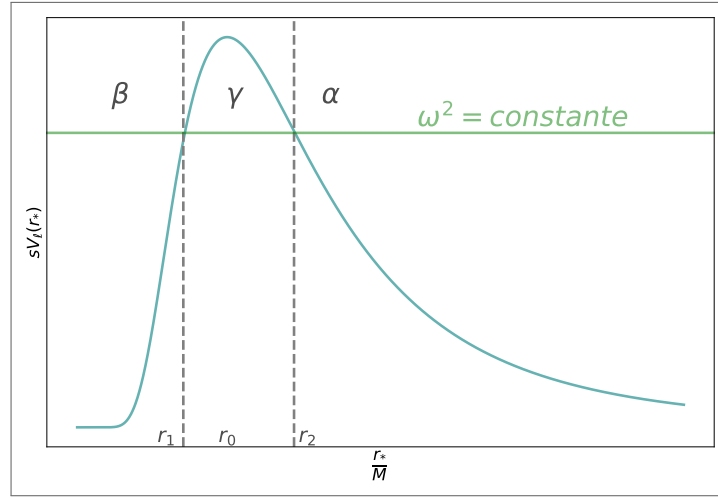
O método WKB possui precisão elevada apenas na região denominada *classicamente permitida*, ou seja, $\omega^2 - {}_s V_\ell(r_*) > 0$. Sendo ${}_s V_\ell(r_*)$ unimodal, tal diferença produz dois pontos de retorno, r_1 e r_2 , no qual divide toda a região sob análise em três, de acordo com a Fig. 3. Como o potencial tem comportamento assintótico indo a zero no limites espaciais, esquerda e direita, as regiões de interesse são estas e serão designada por β e α , respectivamente.

Nestas regiões específicas, a solução é assumida ser comportada como uma série assintótica dada por

$${}_s h_\ell^m(r_*) \sim \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} S_n(r_*) \epsilon^n \right], \quad (1.47)$$

e substituindo a expressão acima na Eq. (1.46), coletando os termos de igual ordem em ϵ , é possível deduzir a forma funcional para o parâmetro $S_n(r)$. Devido ao fato da solução fundamental comportar-se como ${}_s h_\ell^m(r_*) \sim e^{S_0}$ e com a condição para a existência dos MQNs dada por (1.45), conclui-se que $S_0(r) \sim \pm i\omega r$, ou seja, ${}_s h_\ell^m(r_*) \sim e^{\pm i\omega r_*}$.

Figura 3 – Análise comportamental da barreira do potencial para o método WKB



Fonte: O autor (2024)

Portanto, para cada região, α e β , há duas soluções designadas por $\pm$. Estas são dadas por

$$\begin{cases} {}_s h_{\ell m}^{\alpha,+}(r_*) \sim e^{i\omega r_*} & \text{saindo} \\ {}_s h_{\ell m}^{\alpha,-}(r_*) \sim e^{-i\omega r_*} & \text{entrando} \end{cases} \quad r_* \rightarrow +\infty \quad (1.48)$$

para a região α , e

$$\begin{cases} {}_s h_{\ell m}^{\beta,+}(r_*) \sim e^{i\omega r_*} & \text{entrando} \\ {}_s h_{\ell m}^{\beta,-}(r_*) \sim e^{-i\omega r_*} & \text{saindo} \end{cases} \quad r_* \rightarrow -\infty \quad (1.49)$$

para a região β . As palavras *entrando* (*ingoing*) e *saindo* (*outgoing*) designam ondas incidentes vindas da região α para a região intermediária, γ , e as ondas vindas da região β para a região α , respectivamente. Disto, obtemos as soluções para as regiões α e intermediária γ ,

$${}_s h_{\ell m} \sim \begin{cases} \mathcal{Z}_{in}^{\alpha} {}_s h_{\ell m}^{\alpha,-} + \mathcal{Z}_{out}^{\alpha} {}_s h_{\ell m}^{\alpha,+} \\ \mathcal{Z}_{in}^{\gamma} {}_s h_{\ell m}^{\alpha,+} + \mathcal{Z}_{out}^{\gamma} {}_s h_{\ell m}^{\gamma,-} \end{cases}, \quad (1.50)$$

e as amplitudes na região α estão associadas com aquelas da região β por meio da relação matricial [27]

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{out}^{\gamma} \\ \mathcal{Z}_{out}^{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{out}^{\alpha} \\ \mathcal{Z}_{in}^{\alpha} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

onde M_{11} , M_{12} , M_{21} , e M_{22} são coeficientes que devem ser determinados a partir da coincidência das soluções presentes em (1.50) nas regiões α e β com aquelas da região γ , respectivamente.

Para que haja a determinação completa dos coeficientes matriciais, M_{ij} , do sistema (1.51), faz-se necessário considerar a solução na correspondente região γ , realizando a aproximação por série de Taylor no correspondente pico r_0 , para $\omega^2 - {}_sV_\ell(r)$, ou seja

$$\omega^2 - {}_sV_\ell(r_*) \simeq (\omega^2 - {}_sV_\ell(r_0)) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr_*^2} {}_sV_\ell(r_*) \right]_{r_0} (r_* - r_0)^2 \quad (1.52)$$

onde a primeira derivada avaliada em r_0 corresponde ao ponto de equilíbrio, ou seja, o ponto máximo, sendo, portanto, identicamente nulo e os demais termos de ordem superior foram desconsiderados. Obviamente como há uma expansão em série de Taylor, surge a necessidade de identificar em qual intervalo é completamente definida. A expansão acima é válida assumindo que $|r - r_0|$ é um valor diminuto, ou de modo mais preciso, que este intervalo se encontra entorno do pico, de modo que se tenha [27]

$$|r_* - r_0| < \sqrt{-2 \frac{(\omega^2 - {}_sV_\ell(r_0))}{\left[\frac{d^2}{dr_*^2} {}_sV_\ell(r_*) \right]_{r_0}}} \quad (1.53)$$

$$\Rightarrow |r_* - r_0| \sim \sqrt{\epsilon} \quad (1.54)$$

para um determinado valor arbitrariamente pequeno de ϵ , de modo a fazer a aproximação consistente e válida.

A equação com a qual iniciamos a abordagem do método WKB, Eq. (1.46), pode ser alocada no formato de uma *equação diferencial parabólica cilíndrica* [28]

$$\frac{d^2 {}_s h_\ell(t)}{dt^2} + \nu {}_s h_\ell(t) + \frac{1}{2} {}_s h_\ell(t) - \frac{1}{4} t^2 {}_s h_\ell(t) = 0, \quad (1.55)$$

e com as escolhas expressas através das igualdades [27]

$$\begin{cases} t = (4k)^{1/4} e^{-i\pi/4} \text{sign}(x) \\ \nu = -\frac{1}{2} (1 + i\sqrt{k}) \\ k = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dr^2} {}_sV_\ell(r) \right]_{r_0} \end{cases} \quad (1.56)$$

com $\text{sign}(x)$ igual a

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{para } r_* - r_0 > 0 \\ -1 & , \quad \text{para } r_* - r_0 < 0 \end{cases} \quad (1.57)$$

Disto, decorre que a solução geral da Eq. (1.55) é dada por

$${}_s h_\ell(t) = AD_\nu(t) + BD_{-\nu-1}(it) \quad (1.58)$$

onde D_ν e $D_{-\nu-1}$ são as chamadas *funções parabólicas cilíndricas*, com A e B constantes. Utilizando-se da expansão assintótica das funções parabólicas cilíndricas, temos

$${}_s h_\ell(r_*) \sim B(4k)^{-(\nu+1)/4} e^{-3i\pi(\nu+1)/4} (r_* - r_0)^{-(\nu+1)} e^{i(r_*-r_0)^2 \sqrt{k}/2} \\ + \left(A + B \frac{(2\pi)^{1/2} e^{-i\nu\pi/2}}{\Gamma(\nu+1)} \right) \times e^{i\nu\pi/4} (4k)^{\nu/4} (r_* - r_0)^\nu e^{i(r_*-r_0)^2 \sqrt{k}/2} \quad (1.59)$$

para a região $r \gg r_2$. Para a região $r \ll r_1$

$${}_s h_\ell(r_*) \sim A(4k)^{\nu/4} e^{-3i\pi/4} (r_* - r_0)^\nu e^{-(r_*-r_0)^2 \sqrt{k}/2} + \left(\frac{B - iA(2\pi)^{1/2} e^{-i\nu\pi/2}}{\Gamma(-\nu)} \right) \\ \times e^{i\pi(\nu+1)/4} (4k)^{-(\nu+1)/4} (r_* - r_0)^{-(\nu+1)} e^{i(r_*-r_0)^2 \sqrt{k}/2}, \quad (1.60)$$

sendo r_2 e r_1 o maior e menor ponto de retorno do comportamento do potencial, respectivamente.

Após a determinação das soluções assintóticas para os infinitos espaciais, resta determiná-las próximas aos pontos de inflexão, isto é, r_2 e r_1 ; para isto, deve-se fazer a igualdade, no ponto de inflexão maior, r_2 , daqueles coeficientes de (1.59) com os de (1.50) na região α e γ e de forma similar, em r_1 , para aqueles de (1.60) na região β e γ .

Depois deste procedimento, no qual elimina-se os coeficientes constantes A e B , obtemos a relação matricial [27]

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{out}^\beta \\ \mathcal{Z}_{in}^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi\nu} & \frac{i(2\pi)^{1/2} e^{i\pi\nu} \mathcal{R}^2}{\Gamma(\nu+1)} \\ \frac{(2\pi)^{1/2} \mathcal{R}^{-2}}{\Gamma(-\nu)} & -e^{i\pi\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{out}^\alpha \\ \mathcal{Z}_{in}^\alpha \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

com $\mathcal{R}$ sendo dado por

$$\mathcal{R} = \left(\frac{1}{2} + \nu \right)^{(2\nu+1)/4} e^{-(2\nu+1)/4}. \quad (1.62)$$

Como sabemos, pelas condições de contorno dadas por (1.45), há obviamente uma limitação para os $\mathcal{Z}_{in}^{\alpha,\beta}$ de modo que devemos ter $\mathcal{Z}_{in}^\alpha = 0$ e sem ondas refletidas no horizonte, isto é, $\mathcal{Z}_i^\beta = 0$. Com isto incluído em (1.61), encontra-se

$$\Gamma(-\nu) \rightarrow \infty \quad (1.63)$$

sendo ν , portanto, um inteiro $n \in \mathbb{N}$ correspondente ao harmônico. Substituindo $\nu = n$ na segunda igualdade do sistema definido em (1.56), simplificando e tomando o limite $\epsilon \rightarrow 1$, encontramos os MQNs em primeira ordem por meio do método WKB:

$$\omega^2 = {}_s V_\ell(r_0) - \sqrt{2 \left[\frac{d^2 {}_s V_\ell(r_*)}{dr_*^2} \right]_{r_0}} \left(n + \frac{1}{2} \right) i. \quad (1.64)$$

Sendo ${}_sV_\ell(r_0)$ correspondente ao pico máximo do potencial efetivo, e o sinal de n denotando a parte real de ω como

$$n = \begin{cases} 0, 1, 2, 3 \dots & \Re(\omega) > 0 \\ -1, -2, -3 \dots & \Re(\omega) < 0 \end{cases}$$

portanto, conduzindo a um conjunto discreto de frequências complexas.

Ressalta-se que para o método WKB de ordem superior, até N , este procedimento continua a ser válido, conduzindo à mesma expressão matricial (1.61), porém a expressão encontrada para (1.62) será distinta, mas mantendo a dependência apenas em ν . A expansão de Taylor em ordem superior induzirá uma mudança nos termos definidos em (1.56), conduzindo à expressão modificada para os MQNs

$$\omega^2 = {}_sV_\ell(r_0) - \sqrt{2 \left[\frac{d^2 {}_sV_\ell(r_*)}{dr_*^2} \right]_{r_0}} \left(n + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^N \Theta_j \right) i, \quad (1.65)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

sendo Θ_j funções advindas do potencial e sua j -ésima derivada avaliada em r_0 , ou seja, no pico máximo do potencial.

1.3.2 Método de Leaver-Fração Continuada

Este método é um dos mais conhecidos e aplicados para se calcular os MQNs de um buraco negro nos dias atuais, fornecendo uma satisfatória precisão. Na abordagem que se iniciará, utilizaremos unidades tais que $G_N = c = 2M = 1$ como no artigo original do Leaver, sendo G_N a *constante de gravitação de Newton*, c a *velocidade da luz no vácuo* e M a massa do referido buraco negro.

O método foi largamente utilizado pelo autor para a análise e cálculo dos MQNs do *buraco negro de Kerr*, e em vez de se reduzir à Eq. (1.8), tratou-se da equação mestra de Teukolsky para as componentes radial e angular [6], utilizando-se da componente radial r no lugar da coordenada tartaruga, r_* . A equação mestra de Teukolsky pode ser separada tomando solução, $\psi(t, r, \theta, \phi)$, dada por

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sum_{\ell=|s|}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} {}_sS_\ell^m(\theta, \phi) R_\ell^m(r) e^{-i\omega t}, \quad (1.66)$$

de modo que pode ser posta, para a componente radial e angular, nos formatos

$$\left[\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{1+s} \frac{d}{dr} \right) + \frac{K(r)^2 - 2is(r-M)K(r)}{\Delta} + 4is\omega r - 2isqQ - {}_s\lambda_\ell \right] R = 0 \quad (1.67)$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + a^2 \omega^2 \cos^2\theta - 2a\omega s \cos\theta - \frac{(m + s \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + s + {}_sA_{\ell m} \right] S = 0 \quad (1.68)$$

com $R(r) = R_\ell^m(r)$, $S = {}_sS_\ell^m(\theta, \phi)$, $K(r) = (r^2 + a^2)\omega - am$ e $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, onde os parâmetros são dados por:

$$\begin{cases} {}_s\lambda_{\ell m} = {}_sA_{\ell m} + a^2\omega^2 - 2am\omega \\ a = J/M \end{cases} \quad (1.69)$$

sendo J o momento angular do buraco negro, ${}_sS_\ell^m(\theta, \phi)$ o *harmônico esferoidal spin-ponderado* e ${}_sA_{\ell m}$ o autovalor determinado pela parte angular da equação mestra, isto é, a Eq. (1.68).

Para este caso, as condições de contorno para os MQNs são

$${}_sR_\ell^m(r) \sim \begin{cases} (r - r_+)^{-s-i\sigma_+} & , \quad r \rightarrow r_+ \\ r^{-1-2s+i\omega} e^{i\omega r} & , \quad r \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.70)$$

$$\sigma_+ = \frac{\omega r_+ - am}{\sqrt{1 - 4a^2}}.$$

Pelo método de Leaver, assume-se uma expansão em série de Taylor para a correspondente função radial de Teukolsky [29]

$$R_\ell(r) = e^{i\omega r} (r - r_-)^{-1-s+i\omega+i\sigma_+} (r - r_+)^{-s-i\sigma_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^r \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^n, \quad (1.71)$$

com a consequente substituição desta expansão na equação radial (1.67), e realizando-se a correspondente igualdade entre os coeficientes a zero, encontra-se a seguinte relação de recursão de três termos que os coeficientes satisfazem

$$\begin{cases} \alpha_0^r a_1^r + \beta_0^r a_0^r = 0 \\ \alpha_n^r a_{n+1}^r + \beta_n^r a_n^r + \gamma_n^r a_{n-1}^r = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1.72)$$

onde α_n^r , β_n^r e γ_n^r são os coeficientes de recursão dependentes exclusivamente dos parâmetros $\{n, \omega, a, s, m, {}_sA_{\ell m}\}$. A segunda relação para os coeficientes presentes no sistema (1.72) conduz à fração continuada que fornece os MQNs [30]

$$R_n = -\frac{a_{n+1}^r}{a_n^r} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1}-} \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2}-} \frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3}-} \dots, \quad (1.73)$$

sendo esta notação definida como:

$$R_n = -\frac{a_{n+1}^r}{a_n^r} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1}-} \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2}-} \frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3}-} \dots \quad (1.74)$$

A fração continuada para R_n podendo ser considerada uma função do modo em particular, ω , para um dado conjunto de parâmetros que caracterizam o buraco negro de Kerr, isto é, $\{a, s, m, {}_sA_{\ell m}\}$, com condições de contornos tais que $n = 0$ e $n \rightarrow \infty$. A análise do comportamento dos coeficientes para o limite $n \rightarrow \infty$ é tal que [30]

$$-R_n = \frac{a_{n+1}^r}{a_n^r} \rightarrow 1 \pm i\sqrt{\frac{2i\omega}{n}} - \frac{8i\omega + 3}{4n} + \dots \rightarrow 1, \quad (1.75)$$

com a condição de contorno correspondente a $n = 0$ dada pela primeira relação em (1.72). Substituindo dentro da fração continuada para R_0 , obtém-se a equação para os MQNs

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_1-} \frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2-} \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3-} \dots \quad (1.76)$$

com um formalismo totalmente equivalente invertendo-se por um número n de vezes

$$\beta_{-n} - \frac{\alpha_{n-1}\gamma_n}{\beta_{n-1}-} \frac{\alpha_{n-2}\gamma_{n-1}}{\beta_{n-2}-} \dots - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_0-} = \frac{\alpha_n\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1}-} \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2}-} \frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3}-} \dots \quad (1.77)$$

Definindo um dado valor $n = N$ como sendo de *corte* onde se tem $R_N = 1$, devido à condição de limite expressa em (1.75), os MQNs podem ser determinados via às raízes da Eq. (1.76) ou da Eq. (1.77), podendo serem obtidas por meio de métodos numéricos bem estabelecidos e fornecidos por programas reconhecidos na comunidade científica (*Mathematica*, *Maple*, etc.).

Porém, a determinação da constante de separação, ${}_sA_{\ell m}$, pode ser um trabalho não-trivial, exigindo métodos numéricos para estimá-la [11]. Utilizando-se do mesmo tratamento, a parte angular da equação mestra de Teukolsky (1.68) pode ser resolvida supondo igualmente uma solução em série da forma [30]

$${}_sS_{\ell m}(u) = e^{a\omega u} (1+u)^{|m-s|/2} (1-u)^{|m+s|/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\theta} (1+u)^n, \quad (1.78)$$

com $u = \cos \theta$, de modo que se tem uma relação para os coeficientes de maneira similar à anterior

$$\begin{cases} \alpha_0^{\theta} a_1^{\theta} + \beta_0^{\theta} a_0^{\theta} = 0 \\ \alpha_n^{\theta} a_{n-1}^{\theta} + \beta_n^{\theta} a_n^{\theta} + \gamma_n a_{n-1}^{\theta} = 0 \end{cases} \quad (1.79)$$

onde α_n^{θ} , β_n^{θ} e γ_n^{θ} são os coeficientes da expansão dependentes apenas do conjunto de parâmetros $\{a, s, m, {}_sA_{\ell m}\}$.

Por fim, ressalta-se que à medida que o valor de determinado harmônico dos MQNs aumenta, o método da fração continuada tem a convergência prejudicada, levando a definir um valor de corte mais elevado para o cálculo de tais harmônicos exigindo-se, com isso, mais computação.

1.4 CASO REISSNER-NORDSTRÖM

O elemento de linha deste espaço-tempo, e que será detalhadamente deduzido no capítulo seguinte, é dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.80)$$

onde nota-se a semelhança com a expressão para o caso de Schwarzschild dada pela expressão (1.19), sendo distinta apenas pela presença da carga elétrica total coulombiana do buraco negro, Q . Portanto, sendo este caso uma generalização.

De forma análoga ao que foi feito para o caso Schwarzschild, as perturbações gravitacionais ($s = 2$) resultam da resolução da ECE, Eq. (1.5), com as correspondentes equações de Maxwell, Eq. (1.15), e que resultam em duas equações governando as perturbações e, consequentemente, os MQNs: perturbações ímpares (axiais) e pares (polares). A diferença reside no fato de, além de considerarmos os campos eletromagnéticos clássicos fazendo surgir a carga elétrica total, Q , as equações radiais reduzem-se a um par de equações diferenciais de segunda ordem unidimensionais tipo-Schrödinger para a parte axial e polar.

Deste procedimento chega-se, para perturbações ímpares e pares, a um par de equações acopladas, porém com o mesmo formato tipo-Schrödinger [7]

$$\frac{d^2 {}_s h_\ell^{i,p}(r_*)}{dr_*^2} + [\omega^2 - {}_s V_\ell(r_*)] {}_s h_\ell^{i,p}(r_*) = 0 \quad , \quad j = 1, 2 \quad (1.81)$$

com i e p para ímpares e pares, respectivamente, e com

$$\begin{cases} {}_s h_\ell^{i,p}(r_*)_1 = q_1 \mathcal{Z}^{i,p}(r_*)_1 + (-q_1 q_2)^{1/2} q_1 \mathcal{Z}^{i,p}(r_*)_2 \\ {}_s h_\ell^{i,p}(r_*)_2 = -(-q_1 q_2)^{1/2} \mathcal{Z}^{i,p}(r_*)_1 + q_1 \mathcal{Z}^{i,p}(r_*)_2 \end{cases} \quad (1.82)$$

onde $\{\mathcal{Z}^{i,p}(r_*)_\alpha\}_{\alpha=1}^2$ satisfazem a *equação tipo-Schrödinger* (1.81) para *perturbações pares*, isto é, com índice p , e as *perturbações ímpares*, com índice i ; por sua vez, $\{q_\alpha^{i,p}\}_{\alpha=1}^2$, são dados por

$$\begin{cases} q_1^{i,p} = 3M + \sqrt{9M^2 + 4Q^2(\ell+2)(\ell-1)} \\ q_2^{i,p} = 3M - \sqrt{9M^2 + 4Q^2(\ell+2)(\ell-1)} \end{cases} \quad (1.83)$$

como nos mostra Chandrasekhar, advindos da restrição para aos coeficientes q_i [7]

$$\begin{cases} q_1^{i,p} + q_2^{i,p} = 6M \\ q_1^{i,p} q_2^{i,p} = -4Q^2(\ell+2)(\ell-1) \end{cases} \quad (1.84)$$

cujo potencial ímpar é dado por:

$${}_sV_\ell^i(r_*)_j = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{q_j}{r^3} \left(1 + \frac{q_k}{(\ell+2)(\ell-1)r}\right) \right] \quad (1.85)$$

$$(j, k) = 1, 2 \quad , \quad j \neq k.$$

Nota-se que para $Q = 0$, tem-se $q_1 = 6M$ e $q_2 = 0$ e, conseqüentemente, ${}_sh_\ell(r_*)_2$ reduz-se à equação de Regge-Wheeler, Eq. (1.26), para $s = 2$ como era de se esperar.

De forma similar para o caso angular (paridade par), encontra-se a mesma equação dada pela expressão (1.81) com o mesmo formato para as funções de onda dadas em (1.82), e seus respectivos coeficientes em (1.83) advindos da restrição expressa por (1.84), no entanto, agora os potenciais são

$${}_sV_\ell^p(r_*)_{1,2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{U}{r^3} \pm \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \frac{W}{r^3} \right] \quad (1.86)$$

com o sinal positivo para o índice 1 e o negativo para o 2. Os termos U e W aparecendo na expressão acima possuem a forma

$$\begin{cases} U = [(\ell+2)(\ell-1) + 3M]W + 2 \left(M - \frac{Q^2}{r} \right) - \frac{(r^2 - 2Mr)(\ell+2)(\ell-1)}{3M + \frac{r}{2}(\ell+2)(\ell-1) - \frac{2Q^2}{r}} \\ W = \frac{(r-2M)((\ell+2)(\ell-1) + 3M)}{\left[\frac{(\ell+2)(\ell-1)}{2}r + 3M - \frac{2Q^2}{r} \right]^2} + \frac{(\ell+2)(\ell-1)r + 2M}{2 \left[\frac{(\ell+2)(\ell-1)}{2}r + 3M - \frac{2Q^2}{r} \right]} \end{cases} \quad (1.87)$$

e novamente verifica-se que, para $Q = 0$, a equação governando ${}_sh_\ell^p(r_*)_2$ se reduz a já conhecida equação de Zerilli.

Como era de se esperar também há uma relação para os potenciais, bem como para as respectivas funções de onda. Os potenciais podem ser expressos por meio da relação

$${}_sV_\ell^{i,p}(r_*)_j = \pm \beta_j \frac{df}{dr_*} + (\beta_j f_j)^2 + \kappa f_j \quad (1.88)$$

com

$$\begin{cases} \kappa = \ell(\ell+2)(\ell^2-1) \\ f_j = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r[(\ell+2)(\ell-1)r + q_k]} \\ \beta_j = q_k \end{cases} \quad (1.89)$$

onde, necessariamente, deve-se ter $(j, k) = 1, 2$ com $j \neq k$. Novamente, percebe-se que a função f_j se anula nos limites assintóticos espaciais. Já para as funções de onda, temos

$$\begin{aligned} & [\ell(\ell+2)(\ell^2-1) \pm 2i\omega q_k] {}_s h_\ell^{p,i}(r_*)_j = \\ & \left[\ell(\ell+2)(\ell-1) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2q_k^2}{r[(\ell+2)(\ell-1)r + q_k]} \right] {}_s h_\ell^{i,p}(r_*)_j \\ & \pm 2q_k \frac{d {}_s h_\ell^{i,p}(r_*)_j}{dr_*} \end{aligned} \quad (1.90)$$

onde deve-se notar a ordem dos índices i e p , bem como o sinal no último termo sendo $+$ para a função par e $-$ para a ímpar. Ressalta-se que é a existência desta relação que garante a igualdade dos *coeficientes de reflexão* e *transmissão* determinada pelas equações governando as funções ${}_s h_\ell^p(r_*)_j$ e ${}_s h_\ell^i(r_*)_j$.

Por fim, afirmamos que o comportamento dos potenciais para o caso Reissner-Nordström possui a mesma mesma forma esquemática dada na Fig. 2 para o caso tensorial, isto é, $s = 2$.

1.5 OUTROS MÉTODOS PARA O CÁLCULO DOS MODOS QUASE-NORMAIS

Abaixo, listamos outros métodos para o cálculo dos MQNs [31].

1. **Shooting method:** neste tipo de problema de autovalor, integra-se diretamente do horizonte até um limite alto de corte, igualando-se o coeficiente da onda saindo a zero.
2. **O método da amplitude-fase:** tenta-se ajustar, a partir de determinada curva integral no plano complexo, as singularidades que surgem com $r \rightarrow \infty$ e realizar a integração de forma numérica.
3. **Solução exata para potencial com forma funcional especial:** a partir da equação tipo-Schrödinger que governa os MQNs, aplicá-la para determinados tipos de potencial que possibilitem a solução de forma exata e estudar o comportamento dos harmônicos.
4. **Método de expansão pós-newtoniano:** baseado na expansão pós-newtoniana, e empregado no estudo das ondas gravitacionais e sua forma para sistemas binários de buracos negros.
5. **Método da interação assintótica:** tendo como base determinado teorema matemático, resulta em uma condição equivalente para as equações diferenciais de segunda

ordem tais como a que governam os MQNs. Tratando a equivalência acima aplicada à métodos numéricos, pode-se encontrar os modos de forma precisa.

6. **Método pseudo-espectral:** realiza-se uma substituição das variáveis contínuas, como a coordenada radial na equação diferencial de segunda ordem governando os MQNs, por um conjunto completamente discreto de pontos chamados *grade* e, portanto, as autofunções são aproximadas por meio de uma série de funções cardiais correspondentes à *grade*. Estes coeficientes, de cada ordem da autofunção em questão, podem ser expressos por meio de uma série expandida em termos de ω , resultando em um problema matricial de autovalor.
7. **Método MST:** soluções da equação mestra de Teukolsky para a componente radial, Eq. (1.67), são expandidas em série em termos da *função hipergeométrica* perto do horizonte de eventos e funções de Coulomb no infinito espacial. Disto, resulta uma relação de recorrência de três termos para seus respectivos coeficientes de expansão, tal como no método de Leaver. Porém, as relações de recorrência dos três termos da expansão são idênticos, tornando a solução analítica possível.
8. **Equação de Heun:** baseado no fato de se alocar a equação radial no formato da *equação de Heun*, em especial a *confluente*, e aplicar métodos para sua solução e consequente encontro dos MQNs. Um dos métodos para se resolver este problema é por meio do uso do *método isomonodrômico* e que será utilizado nesta dissertação.

No que segue, a apresentação do conteúdo desta dissertação se faz da seguinte forma:

- No capítulo 2, seguinte, apresentaremos uma solução detalhada da solução particular da ECE acoplada às equações de Maxwell para um buraco negro esfericamente simétrico e estático, tendo como quantidades intrínsecas caracterizantes do seu espaço-tempo a massa, M , a carga elétrica, Q , e o monopolo magnético, P (somente no capítulo 2 consideramos o caso mais geral onde a existência dos *monopolos magnéticos* é levanda em conta). Esta solução leva o nome de *buraco negro de Reissner-Nordström*.
- No capítulo 3, faremos uma rápida e panorâmica abordagem do *método isomonodrômico* para equações diferenciais de segunda ordem que será aplicado na *equação de Heun confluente* obtida, para determinar os MQNs do buraco negro de Reissner-Nordström com a presença de

um parâmetro não-comutativo na correspondente equação radial advindo do *twist operator*, $\mathcal{F}$.

- No capítulo 4, apresentaremos os resultados obtidos expressos em gráficos e tabelas, e analisamos os comportamentos dos modos denominados como *subamortecidos* e *amortecidos*. No primeiro caso, quando a parte imaginária dos MQNs tende à zero, tem-se que o tempo de decaimento é caracterizado por ser longo e possuem apenas o comportamento oscilatório típico dos MNs; já no segundo caso, os modos são amortecidos, e por terem parte imaginária constante negativa, conclui-se que o buraco negro é estável. Disto, conclui-se que a perturbação não interfere em sua estabilidade mesmo no espaço-tempo não-comutativo com o seu referente parâmetro em **primeira ordem**.

- No capítulo 5, a conclusão, condensamos os resultados obtidos e abordados no capítulo anterior e apresentamos uma motivação para estudos posteriores que podem ser realizados futuramente, motivados sobretudo, pela extremalização de efeitos quânticos próximos aos buracos negros na extremalidade de acordo com o artigo de *Horowitz et al* [32], tendo em vista o fato do parâmetro não-comutativo ter relação com efeitos quânticos oriundos da não-comutatividade do espaço-tempo.

2 SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM

“Que é o tempo? Um mistério - inessencial e onipotente. Uma condição do mundo dos fenômenos, um movimento, ligado e mesclado à existência dos corpos no espaço e a seu movimento. Mas, deixaria de haver tempo se não houvesse movimento? Não haveria movimento sem o tempo? Perguntas! O tempo é uma função do espaço? Ou vice-versa? Ou são ambos idênticos? Perguntas demais! O tempo é ativo, tem caráter verbal, ‘presentifica’.”

Thomas Mann

A solução denominada *buraco negro de Reissner-Nordström* representa uma singularidade no espaço-tempo esfericamente simétrica e estática com massa M e carga elétrica total Q , resultado da solução particular da ECE acoplada às equações de campo de Maxwell do eletromagnetismo clássico, obtida por H. Reissner [33], em 1916, e posteriormente por G. Nordström [34], em 1918; ambos de forma independente.

Do ponto de vista astrofísico, tal solução não possui interesse, pois sua existência real é dificultada pelo fato das interações elétricas serem da ordem 10^{40} mais fortes que a gravitacional [35], logo, a força gravitacional não possibilita a este corpo sua distribuição estável e consequente observação no Universo, além do fato que logo se tornaria neutro devido ao contato com as demais concentrações de matéria-energia ao seu redor [36]. No entanto, seu estudo torna-se relevante devido à sua riqueza analítica e consequente progresso acerca do entendimento da estrutura do espaço-tempo, além de importantes fatos que possam surgir em situações mais gerais.

Neste capítulo, realizaremos uma demonstração detalhada desta solução para o caso do buraco negro em $(3 + 1)$ -dimensões em acordo com a Def. 1 com constantes tais que $G_N = c = 1$, sendo G_N a constante de gravitação universal de Newton e c a velocidade no vácuo.

Veremos que, diferentemente do buraco negro de Schwarzschild que possui apenas um horizonte de eventos $r = 2M$, este possui dois: um interno (ou de Cauchy), r_- , e outro externo, r_+ .

Faremos também uma rápida abordagem acerca dos casos que, a depender do valor atribuído à massa do buraco negro e sua carga elétrica, temos: $M > Q$, $M < Q$ e $M = Q$. Este último conhecido como *limite extremal*, possuindo importância significativa no estudo dos MQNs e dos resultados obtidos que serão analisados no último capítulo.

2.1 DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

A métrica de Reissner-Nordström é simetricamente esférica e estática, ou seja, descreve o campo gravitacional exterior devido a uma singularidade de massa M e carga elétrica total Q . Para compreender melhor do que se trata *simetria esférica* bem como *estaticidade*, faz-se necessário defini-las.

Dizemos que o espaço-tempo é uma variedade, $(\mathcal{M}^4, g_{ab})$, estática se este possui um grupo de um parâmetro de *isometrias*, $\{\phi^t\}$, cujas trajetórias em $\mathcal{M}^4$ são curvas *tipo-tempo* e expressam a condição de *simetria de translação temporal*. Dito de outra forma, porém análoga, este espaço-tempo possui um *campo vetorial de Killing* não nulo, $\xi^a \neq 0$, que é tipo-tempo, isto é, sua norma é negativa:

$$g(\xi^a, \xi^a) < 0. \quad (2.1)$$

A métrica é *estática* se, além de estacionária, existe uma *hipersuperfície tipo-espaço*, Σ , ortogonal a todas as órbitas de isometrias¹. Uma forma de especificar a hipersuperfície é por meio de um única função constante ψ para Σ , de modo que podemos escrever para o campo vetorial de Killing

$$\xi^a = f(\mathbf{x}) \nabla^a \psi, \quad (2.2)$$

onde ∇^a é a respectiva derivada contravariante no espaço curvo e $f(\mathbf{x})$ é uma função das variáveis do campo vetorial. De forma equivalente, pode-se escrever a expressão acima como

$$\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0. \quad (2.3)$$

O inverso também é válido, isto é, qualquer campo vetorial satisfazendo esta igualdade é ortogonal à hipersuperfície de acordo com o *teorema de Frobenius*. Logo, sendo estacionária e satisfazendo a Eq. (2.3) para qualquer $\xi^a \in \Sigma \subset \mathcal{M}^4$ é estático.

Para a definição de esfericidade, dizemos que o espaço-tempo é esfericamente simétrico quando seu grupo de isometria possui um subgrupo isomórfico, isto é, um mapeamento bijetivo entre ambos, ao grupo $SO(3)$ e as órbitas deste subgrupo são 2-esferas, $\mathbb{S}^2(\theta, \phi)$. O $SO(3)$ é o grupo das rotações, logo, espaços-tempos com esta simetria específica são invariante por rotações, dito de outra forma, seu elemento de linha se mantém inalterado após a aplicação do $SO(3)$. A métrica deste espaço-tempo provoca uma indução à métrica bidimensional sobre cada órbita da 2-esfera. Portanto, por causa disto, deve-se manter a parte esférica inalterada,

¹ Hipersuperfícies são uma subvariedade (n-1)-dimensional imersa em uma variedade n-dimensional $\mathcal{M}^n$ qualquer.

a menos de fatores múltiplos. Ressalta-se que o campo vetorial de Killing, ξ^a , é ortogonal à 2-esfera advinda da simetria de rotações e, portanto, é invariante sob a ação de $SO(3)$ e consequentemente a projeção de ξ^a sobre $\mathbb{S}^2(\theta, \phi)$ é nula.

Do fato do espaço-tempo ser estático, conclui-se as componentes são independentes do parâmetro temporal, t , bem como dos termos cruzados tais como $(dt)_a(dx^\mu)_b$ devido à ortogonalidade de ξ^a com Σ , sendo $\{x^\mu\}$ um sistema de coordenadas no qual a métrica é expressa. Assim, conclui-se que a métrica não só possui simetria de translação temporal $t \rightarrow t' + C$, com C uma constante qualquer, como uma simetria de reflexão com $t \rightarrow t'$ e $t \rightarrow -t'$ tendo a mesma descrição física. Somando a isto, a simetria esférica impõe a restrição de se manter invariante a parte referente à 2-esfera, ou seja, o elemento de linha que a partir do tensor métrico dado por (1.20) nas coordenadas $\{\theta, \phi\}$, tem-se

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.4)$$

em $\mathbb{S}^2(\theta, \phi)$.

Portanto, conclui-se que a forma mais geral para o elemento de linha utilizando-se das coordenadas esféricas, é dado por

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + e^{2\gamma(r)}r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.5)$$

onde $\alpha(r)$, $\beta(r)$ e $\gamma(r)$ são coeficientes a serem determinados e dependentes exclusivamente da componente radial por tudo acima exposto. No entanto, pode-se deixar a expressão acima mais simplificada, para isto, realiza-se uma mudança de variáveis tais que

$$r' = e^{\gamma(r)}r \quad (2.6)$$

sendo r' uma função, ou seja, uma *0-forma*, a derivada exterior aplicada se resume a

$$dr' = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial r'}{\partial x^i} dx^i = e^{\gamma(r)}dr + re^{\gamma(r)}d\gamma = e^{\gamma(r)} \left[1 + r \frac{d\gamma(r)}{dr} \right] dr. \quad (2.7)$$

Substituindo a expressão acima em (2.5), obtemos

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + \left[1 + r \frac{d\gamma(r)}{dr} \right]^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.8)$$

e reescrevendo os termos de forma que

$$\begin{cases} r' := r \\ \left[1 + r \frac{d\gamma(r)}{dr} \right]^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} := e^{2\beta(r)} \end{cases} \quad (2.9)$$

alocamos a expressão (2.5) no formato

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.10)$$

sendo o mais geral e simples para o caso em análise. *A priori*, não se pode afirmar nada acerca da estrutura funcional dos coeficientes $\alpha(r)$ e $\beta(r)$, além do fato que dependem exclusivamente da variável r . Para determiná-los e, a partir daí, atribuir interpretação física bem como compreendermos a respectiva estrutura geométrica do buraco negro de Reissner-Nordström, faz-se necessário resolver a ECE dada a distribuição de matéria-energia da teoria de campos envolvida que, no caso em tela, advém exclusivamente de campos de longo alcance eletromagnéticos clássicos, ou seja, regidos pelas equações de Maxwell². Por campos eletromagnéticos clássicos afirma-se tratar de pequenas transferências de energia, e grande número médio de fótons virtuais ou reais [37].

Nesta demonstração consideraremos o caso mais geral possível, ou seja, sem a exclusão da existência dos monopolos magnéticos, uma vez que, não tendo encontrado-os na Natureza, não exclui a sua existência e apenas pode-se inferir que se trata de quantidades raras ou de baixíssima densidade no Universo como um todo.

Pela formato do elemento de linha expresso em (2.10), conclui-se que o tensor métrico covariante é diagonal e dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

e por ser estritamente diagonal, tem-se que o tensor métrico escrito na sua forma contravariante é apenas o inverso dos elementos diagonais, ou seja,

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{-2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

² Este fato específico, qual seja, que a fonte de campos de longo alcance não gravitacionais são eletromagnéticos, resulta na confirmação do *teorema da calvície* e, portanto, apenas um número reduzidos de parâmetros o define: massa M , carga Q e momento angular J . Em geral, tal teorema depende da teoria de campos escolhida.

Ambas as formas, covariante e contravariante, necessárias para os devidos cálculos a fim de se determinar a métrica de Reissner-Nordström.

2.2 EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL ACOPLADAS

Diferentemente do caso de Schwarzschild, onde a solução é tomada no vácuo, a solução de Reissner-Nordström possui como distribuição de matéria-energia ao seu redor configurações de campos eletromagnéticos clássicos, de modo que se faz necessário determinar o *tensor energia-momento* que nos fornece a informação de como se comporta estas distribuições neste espaço-tempo, sendo este escrito por meio do tensor de Faraday [12], tratando-se de um tensor de rank-2 antissimétrico, F_{ab} , ou seja,

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{de} F^{de} \right), \quad (2.13)$$

onde deve-se observar que possui a condição de *traço-nulo*, isto é,

$$g^{ab} T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{ab} F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g^{ab} g_{ab} F_{de} F^{de} \right) = 0, \quad (2.14)$$

uma vez que, por se tratar de um sistema físico quadridimensional, $g^{ab} g_{ab} = 4$. Tal condição expressa o fato da ação do campo eletromagnético ser invariante por transformações conformes, o que é esperado, uma vez que a teoria eletromagnética clássica é invariante por escala, e a invariância conforme é uma consequência da invariância de escala e de Poincaré [38].

Já o sistema que governa os efeitos eletromagnéticos clássicos são as *equações de campo de Maxwell*, e podem ser escritas de maneira compactada da seguinte maneira

$$\begin{cases} \nabla^a F_{ab} = 0 \\ \nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

onde, por sua vez, F_{ab} pode ser escrito por meio do *quadrivetor potencial*³

$$F_{ab} = 2 \nabla_{[a} A_{b]} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a. \quad (2.16)$$

Pela primeira equação no sistema (2.15), percebe-se que não há fontes de corrente elétrica, ou seja, $J_b = 0$. A razão pelo qual isto ocorre é devido à estaticidade do buraco negro de Reissner-Nordström, isto é, apesar de tal espaço-tempo possuir carga elétrica total Q , não

³ Devido ao fato do espaço-tempo de Reissner-Nordström, aqui considerado, ser uma variedade com *torção nula*, as derivadas covariantes atuando no quadrivetor potencial resultará em derivadas parciais devido ao fato dos símbolos de Christoffel serem simétricos nos índices inferiores.

há correntes superficiais induzidas, K_b , devido à ausência de rotação. Pelo fato de campos magnéticos serem gerados a partir de correntes, conclui-se, em adição, que não há fontes de correntes para sua origem, sendo oriundo apenas da presença do monopolo magnético, P . Disto, decorre que o quadrivetor potencial é expresso pela igualdade

$$A_b = (A_t, \mathbf{A})_b, \quad (2.17)$$

sendo a correspondente componente dada por

$$A_\mu = -\frac{Q}{r}\delta_\mu^t - P \cos \theta \delta_\mu^\phi, \quad (2.18)$$

com μ designando as componentes têmporo-espaciais, $\{t, r, \theta, \phi\}$, do respectivo quadrivetor potencial no sistema de coordenadas esféricas.

Pela ECE que nos fornece a curvatura da variedade espaço-temporal a partir de g_{ab} , temos

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa T_{ab}, \quad (2.19)$$

sendo κ uma constante estritamente numérica, $R_{ac} = R_{abc}{}^b$ o *tensor de Ricci* e $g^{ab}R_{ab} = R_a{}^a = R$ o *escalar de Ricci*. Pode-se deixar a equação acima em um formato mais agradável a fim do presente propósito. Para isto, toma-se o traço na equação acima

$$g^{ab}R_{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}g_{ab}R = \kappa g^{ab}T_{ab}, \quad (2.20)$$

e utilizando-se da definição do *escalar de Ricci*, o fato que $g^{ab}g_{ab} = 4$, bem como a condição de nulidade do traço no tensor energia-momento (2.14) é direto obter

$$R = 0, \quad (2.21)$$

de modo que a ECE pode ser alocada no formato

$$R_{ab} = \kappa T_{ab}. \quad (2.22)$$

Substituindo a expressão para o tensor energia-momento, (2.13), na equação obtida acima, encontramos a ECE em um formato mais cômodo:

$$R_{ab} = \kappa \left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{de}F^{de} \right). \quad (2.23)$$

Vale ressaltar que a equação acima obtida é exatamente idêntica à ECE, Eq. (2.19), para o caso especial em que o tensor energia-momento é dado por (2.13). A mudança é apenas

estética, imposta pela necessidade de simplificar para os decorrentes cálculos necessários a serem realizados para a determinação dos coeficientes $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ em (2.5).

Portanto, formalmente, a solução de Reissner-Nordström é dada pela solução das equações de Einstein-Maxwell acopladas com distribuição de matéria-energia dada pelo tensor (2.13). Isto é:

$$\begin{cases} R_{ab} = \kappa \left(F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{de} F^{de} \right) \\ \nabla^a F_{ab} = 0 \\ \nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

2.3 DETERMINANDO OS TENSORES: FARADAY, ENERGIA-MOMENTO, CURVATURA DE RIEMANN E RICCI

Uma vez que o problema possui simetria esférica, as únicas componentes não-nulas do tensor de Faraday é a tempo-radial, correspondente ao campo elétrico, $E(r)$, e a angular, correspondente ao campo magnético, $B(r)$, e ambos os campos independem das variáveis angulares θ e ϕ . De modo que pode-se escrever para a componente referente ao campo elétrico

$$E_r = F_{tr} = -F_{rt} = \chi(r). \quad (2.25)$$

No entanto, para o campo magnético, onde o tratamento deve ser mais cuidadoso, faz-se necessário introduzir inicialmente a *densidade tensorial*, $\tilde{\epsilon}_{abcd}$, de modo que

$$\tilde{\epsilon}_{abcd} = (dx^\mu)_a \wedge \cdots \wedge (dx^\nu)_d = \begin{cases} +1, & \text{se } abcd \text{ é uma permutação par} \\ -1, & \text{se } abcd \text{ é uma permutação ímpar} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.26)$$

ou, de forma análoga, considerando um sistema de coordenadas tal como $\{x^\mu, x^\nu, x^\rho, x^\sigma\} = \{t, r, \theta, \phi\}$ nesta ordem. Consequentemente, define-se o *tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita*, $\epsilon_{abcd} = \epsilon_{[abcd]}$, como

$$\epsilon_{abcd} = \sqrt{-g} \tilde{\epsilon}_{abcd} \quad (2.27)$$

onde g é o determinante do tensor métrico, isto é, $g = \det(g_{ab})$. A métrica levanta e abaixa apenas os índices do tensor de Levi-Civita, mas não da densidade tensorial. Com isto, pode-se analisar a forma funcional da componente do tensor de Faraday referente ao campo magnético,

ou seja,

$$\begin{aligned} B_r &= g_{r\nu} \epsilon^{\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = g_{rr} \epsilon^{tr\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{g_{rr}}{\sqrt{-g}} \tilde{\epsilon}^{tr\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \\ &= \frac{g_{rr}}{\sqrt{-g}} (\tilde{\epsilon}^{tr\theta\phi} F_{\theta\phi} + \tilde{\epsilon}^{tr\phi\theta} F_{\phi\theta}) = \frac{2g_{rr}}{\sqrt{-g}} F_{\theta\phi}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde utilizou-se o fato da antissimetria do tensor de Levi-Civita, advinda de (2.26). Por (2.11), obtém-se que $g_{rr} = e^{2\beta(r)}$ e $g = e^{2[\alpha(r)+\beta(r)]} r^4 \sin^2\theta \Rightarrow \sqrt{-g} = e^{[\alpha(r)+\beta(r)]} r^2 \sin\theta$, de modo que o resultado acima pode ser escrito como

$$B_r = 2 \frac{e^{[\beta(r)-\alpha(r)]}}{r^2 \sin\theta} F_{\theta\phi}. \quad (2.29)$$

Do afirmado acima, isto é, que o campo magnético oriundo do seu respectivo monopolo não possui dependência nas variáveis angulares, decorre que a expressão para a componente do tensor de Faraday, originando tal campo, é

$$F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = r^2 \zeta(r) \sin\theta. \quad (2.30)$$

onde $\zeta(r)$ é uma função da variável radial.

Portanto, o tensor de Faraday mais geral para o presente propósito nas coordenadas esféricas é escrito como:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \chi(r) & 0 & 0 \\ -\chi(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \zeta(r) \sin\theta \\ 0 & 0 & -r^2 \zeta(r) \sin\theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Observando a primeira equação do sistema que fornece a solução de Reissner-Nordström (RN), isto é, (2.24), a equação de Einstein respectivo ao caso em tela, percebe-se a imediata importância de obter-se todas as componentes do tensor de Ricci, bem como do tensor energia momento. Para esta presente finalidade, deve-se calcular os *símbolos de Christoffel* para o seguinte cálculo do *tensor de curvatura de Riemann* e, a partir dessa quantidade geométrica, encontrar as respectivas componentes do tensor de Ricci.

Os símbolos de Christoffel para o caso em que a métrica é compatível, ou seja,

$$\nabla^a g_{ab} = 0, \quad (2.32)$$

e a *conexão é torção nula*, o que implica que os índices inferiores são simétricos, $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$, é [12]

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}), \quad (2.33)$$

e o tensor de curvatura de Riemann⁴

$$R_{abc}{}^d = -2\partial_{[a}\Gamma^d{}_{b]c} + 2\Gamma^e{}_{c[a}\Gamma^d{}_{b]e} . \quad (2.34)$$

Utilizando-se da métrica escrita em sua forma covariante e contravariante em coordenadas esféricas (2.11) e (2.12), bem como a expressão (2.33), respectivamente, no sistema de coordenadas usadas, obtemos os símbolos de Christoffel⁵

$$\begin{aligned} \Gamma^t{}_{tt} &= \partial_t \alpha(r) & \Gamma^t{}_{tr} &= \partial_r \alpha(r) & \Gamma^t{}_{rr} &= e^{2[\beta(r)-\alpha(r)]} \partial_t \beta(r) \\ \Gamma^r{}_{tt} &= e^{2[\alpha(r)-\beta(r)]} \partial_r \alpha(r) & \Gamma^r{}_{tr} &= \partial_t \beta(r) & \Gamma^r{}_{rr} &= \partial_r \beta(r) \\ \Gamma^\theta{}_{r\theta} &= \frac{1}{r} & \Gamma^r{}_{\theta\theta} &= -re^{-2\beta(r)} & \Gamma^\phi{}_{r\phi} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^r{}_{\phi\phi} &= -re^{-2\beta(r)} \sin^2 \theta & \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} &= \cot \theta \end{aligned} \quad (2.35)$$

e pelo fato da métrica ser estritamente diagonal, todos os símbolos de Christoffel com os três índices distintos são identicamente nulos e não foram alocados acima. Fica evidente que $\Gamma^t{}_{tt}$, $\Gamma^t{}_{rr}$ e $\Gamma^r{}_{tr}$ também o são, pelo simples motivo dos coeficientes não possuírem dependência temporal.

Para a obtenção das componentes do tensor de curvatura de Riemann utiliza-se a expressão (2.34), de modo que estas são

$$\begin{aligned} R_{tr}{}^t &= e^{2[\beta(r)-\alpha(r)]} [\partial_r \alpha(r) \partial_r \beta(r) - \partial_r^2 \alpha(r) - (\partial_r \alpha(r))^2] \\ R_{t\theta}{}^t &= -re^{-2\beta(r)} \partial_r \alpha(r) \\ R_{\phi t}{}^t &= -re^{-2\beta(r)} \sin^2 \theta \partial_r \alpha(r) \\ R_{\theta r}{}^t &= -re^{2\alpha(r)} \partial_t \beta(r) \\ R_{\phi r}{}^t &= -re^{-2\alpha(r)} \sin^2 \theta \partial_t \beta(r) \\ R_{\theta r}{}^r &= re^{-2\beta(r)} \partial_r \beta(r) \\ R_{\phi r}{}^r &= re^{-2\beta(r)} \sin^2 \theta \partial_r \beta(r) \\ R_{\phi\theta}{}^\theta &= (1 - e^{-2\beta(r)}) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.36)$$

O *tensor de Ricci*, por sua vez, é obtido contraindo-se o índice superior com um inferior, isto é,

$$R_{abc}{}^b = g^{bd} R_{abcd} = R_{ac} = -2\partial_{[a}\Gamma^b{}_{b]c} + 2\Gamma^e{}_{c[a}\Gamma^b{}_{b]e} , \quad (2.37)$$

⁴ Para obter o desenvolvimento das expressões para o símbolo de Christoffel, tensor de curvatura de Riemann, tensor de Ricci e escalar de Ricci, consultar uma das referências [12, 36, 39].

⁵ Consultar Apêndice A para obter explicitamente as componentes dos símbolos de Christoffel, tensor de Riemann, tensor e escalar de Ricci e tensor energia-momento.

onde obtem-se as componentes

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2[\alpha(r)-\beta(r)]} \left[\partial_r^2 \alpha(r) + (\partial_r \alpha(r))^2 - \partial_r \alpha(r) \partial_r \beta(r) + \frac{2}{r} \partial_r \alpha(r) \right] \\
R_{rr} &= - \left[\partial_r^2 \alpha(r) + (\partial_r \alpha(r))^2 - \partial_r \alpha(r) \partial_r \beta(r) - \frac{2}{r} \partial_r \beta(r) \right] \\
R_{\theta\theta} &= 1 + e^{-2\beta(r)} [r(\partial_r \beta(r) - \partial_r \alpha(r)) - 1] \\
R_{\phi\phi} &= \{1 + e^{-2\beta(r)} [r(\partial_r \beta(r) - \partial_r \alpha(r)) - 1]\} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.38}$$

e as demais componentes, nulas, não foram inseridas acima, uma vez que não são relevantes para a solução de RN.

Pelo fato do tensor métrico ser diagonal, tem-se que o respectivo tensor energia-momento também o é. Para encontrar sua forma funcional no espaço-tempo de RN, utiliza-se da expressão para o tensor energia momento (2.13), bem como o tensor de Faraday encontrado, (2.16), de modo que

$$\begin{aligned}
T_{tt} &= \frac{1}{2} \chi(r)^2 e^{-2\beta(r)} + \frac{1}{2} \zeta(r)^2 e^{-2\alpha(r)} \\
T_{rr} &= -\frac{1}{2} \chi(r)^2 e^{-2\alpha(r)} - \frac{1}{2} \zeta(r)^2 e^{-2\beta(r)} \\
T_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} r^2 \zeta(r)^2 + \frac{1}{2} r^2 \chi(r)^2 e^{2[\alpha(r)+\beta(r)]} \\
T_{\phi\phi} &= \left\{ \frac{1}{2} r^2 \zeta(r)^2 + \frac{1}{2} r^2 e^{2[\alpha(r)+\beta(r)]} \right\} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.39}$$

onde $T_{\mu\nu} = 0, \forall \mu \neq \nu$, como afirmado acima.

Utilizando-se o fato dado pela relação de igualdade (2.25), obtém-se

$$\begin{aligned}
e^{2\alpha(r)} R_{rr} + e^{2\beta(r)} R_{tt} &= 0 \\
\Rightarrow \alpha(r) + \beta(r) &= C
\end{aligned} \tag{2.40}$$

sendo C uma constante advinda da integração necessária para resolver a consequente EDO⁶ que surge. No entanto, pode-se realizar uma redefinição na coordenada temporal dada em (2.10), de modo a fazer com que $e^C dt \rightarrow dt$. Estas mudanças podem ser realizadas sem preocupação, uma vez que a relatividade geral engloba determinado sistema de coordenadas escolhido para expressar o tensor métrico e não pode-se inferir, sem antes resolver por completo a ECE, no presente caso, acoplada às equações de Maxwell, qual o significado físico-geométrico dos coeficientes em questão.

Disto, decorre que

$$\alpha(r) = -\beta(r) \tag{2.41}$$

⁶ Equação diferencial ordinária.

e o elemento de linha, consequentemente, pode ser escrito como:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{-2\alpha(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.42)$$

O tensor métrico covariante é agora escrito como

$$g_{\mu\nu}^{(RN)} = \begin{bmatrix} e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\alpha(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

e o contravariante sendo a matriz inversa, isto é, o inverso dos elementos da diagonal.

2.4 DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Tendo se preocupado com o desenvolvimento da ECE acoplada ao tensor energia momento do campo eletromagnético clássico e obtido o respectivo elemento de linha em função de parâmetros reduzidos, passamos a desenvolver a resolução das equações de Maxwell, isto é, as duas últimas do sistema apresentado em (2.24).

Pela primeira equação no sistema das equações de Maxwell, (2.15), temos

$$\nabla^a F_{ab} = 0, \quad (2.44)$$

e para resolver tal equação e encontrar a componente $F_{tr} = \chi(r)$, faz-se necessário apresentar a identidade para o símbolo de Christoffel com dois índices iguais, um inferior e outro superior. Usando (2.33), é um exercício direto chegar a seguinte expressão

$$\Gamma^a_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_b (\sqrt{-g}). \quad (2.45)$$

Para um tensor de *rank*-2 sob a ação do operador derivada covariante, temos

$$\begin{aligned} \nabla_a F^{ab} &= \partial_a F^{ab} + \Gamma^a_{ac} F^{cb} + \Gamma^b_{ac} F^{ac} \\ &= \partial_a F^{ab} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_c (\sqrt{-g}) F^{cb} + \Gamma^b_{ac} F^{ac} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_c (\sqrt{-g} F^{cb}) + \Gamma^b_{ac} F^{ac} \end{aligned} \quad (2.46)$$

porém, como os símbolos de Christoffel em questão são *torção nula* e o tensor de Faraday é antissimétrico, o último termo acima é identicamente nulo. Logo:

$$\nabla_a F^{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_c (\sqrt{-g} F^{cb}). \quad (2.47)$$

Utilizando-se da expressão acima e o fato que $\sqrt{-g} = r^2 \sin\theta$, bem como a condição de compatibilidade métrica para *abaixar* e *levantar* os índices na Eq. (2.44), para o sistema de coordenado em uso, $\{x^\mu\}$, encontramos

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\mu (r^2 \sin^2\theta F^{\mu\nu}). \quad (2.48)$$

Considerando a componente radial, uma vez que a derivada temporal será nula, satisfazendo a equação, onde não há dependência temporal nos coeficientes do tensor de Faraday. Assim

$$\begin{aligned} \nabla_r F^{rt} &= \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_r (r^2 \sin^2\theta F^{rt}) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_r (r^2 \sin^2\theta g^{rr} g^{tt} F_{rt}) \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \chi(r)) = 0 \\ &\Rightarrow \partial_r (r^2 \chi(r)) = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde utilizou-se o fato que a métrica contravariante é dada pelo inverso dos elementos de (2.43), sendo assim $g^{rr} g^{tt} = 1$. Portanto, decorre do resultado acima que

$$F_{tr} = \chi(r) = \frac{C}{r^2}, \quad (2.50)$$

sendo C uma constante de integração.

Segue do *teorema de Gauss* da eletrostática que, utilizando-se do sistema de coordenadas esféricas, a constante de integração acima pode ser identificada como sendo a *carga total* do buraco negro de Reissner-Nordström, Q .

Para encontrar o outro termo que nos resta, $\zeta(r)$, aplicamos a segunda equação do sistema (2.15), ou seja

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0. \quad (2.51)$$

Realizando a antissimetrização por completo, chegamos a

$$\nabla_a F_{bc} + \nabla_c F_{ab} + \nabla_b F_{ca} = 0, \quad (2.52)$$

e considerando a aplicação do operador derivada covariante em um tensor de *rank-2*, obtemos as relações

$$\begin{cases} \nabla_a F_{bc} = \partial_a F_{bc} - \Gamma^d_{ba} F_{dc} - \Gamma^d_{ca} F_{bd} \\ \nabla_c F_{ab} = \partial_c F_{ab} - \Gamma^d_{ac} F_{db} - \Gamma^d_{bc} F_{ad} \\ \nabla_b F_{ca} = \partial_b F_{ca} - \Gamma^d_{cb} F_{ad} - \Gamma^d_{ab} F_{cd} \end{cases} \quad (2.53)$$

de modo que a soma dos termos acima cancela todos os símbolos de Christoffel, e pode-se alocar no seguinte formato

$$\nabla_{[a}F_{bc]} = \partial_a F_{bc} + \partial_c F_{ab} + \partial_b F_{ca} = 0 \quad (2.54)$$

$$\Rightarrow \partial_a F_{bc} + \partial_c F_{ab} + \partial_b F_{ca} = 0 \quad (2.55)$$

o que era esperado pela *segunda identidade de Bianchi*.

Considerando esta última expressão, e levando combinações tais que $\{\mu, \nu, \sigma\} = \{r, \theta, \phi\}$, encontra-se

$$\partial_r F_{\theta\phi} = \partial_r [r^2 \zeta(r) \sin\theta] = 0. \quad (2.56)$$

Portanto

$$F_{\theta\phi} = \zeta(r) = \frac{C}{r^2}, \quad (2.57)$$

e novamente pelo *teorema de Gauss* resulta que a constante C pode ser identificada como sendo a carga magnética total do buraco negro, P .

Portanto, substituindo na expressão para o tensor de Faraday, (2.31), os coeficientes $\chi(r)$ e $\zeta(r)$ encontrados, determina-se o tensor de Faraday:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q/r^2 & 0 \\ -Q/r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \sin\theta \\ 0 & 0 & -P \sin\theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

2.5 DETERMINAÇÃO DA MÉTRICA DE REISSNER-NORDSTRÖM

Para a completa determinação da métrica de Reissner-Nordström, resta-se apenas encontrar o coeficiente $\alpha(r)$. Para esta finalidade, deve-se, por fim, resolver

$$R_{\theta\theta} = \kappa T_{\theta\theta} \quad (2.59)$$

onde tanto a componente na variável angular polar do tensor de Ricci, $R_{\theta\theta}$, quanto a sua respectiva componente do tensor energia-momento, $T_{\theta\theta}$, foram apresentadas em (2.38) e (2.39), respectivamente. Isto é, deve-se resolver a consequente equação

$$1 + e^{-2\beta(r)} [r(\partial_r \beta(r) - \partial_r \alpha(r)) - 1] = \kappa \left\{ \frac{1}{2} r^2 \zeta(r)^2 + \frac{1}{2} r^2 e^{2[\alpha(r) + \beta(r)]} \right\}. \quad (2.60)$$

Levando-se em conta que, como obtido anteriormente, $\beta(r) = -\alpha(r)$, Eq. (2.41), $\chi(r) = Q/r^2$, $\zeta(r) = P/r^2$; chegamos a

$$1 - e^{2\alpha(r)}[2r\partial_r\alpha(r) + 1] = \frac{\kappa}{8\pi r^2}(Q^2 + P^2), \quad (2.61)$$

sendo $\kappa = 8\pi$ e simplificando

$$\partial_r(re^{2\alpha(r)}) = 1 - \frac{(Q^2 + P^2)}{r^2}. \quad (2.62)$$

Integrando de ambos os lados, obtém-se

$$e^{2\alpha(r)} = 1 + \frac{C}{r} + \frac{(Q^2 + P^2)}{r^2} \quad (2.63)$$

o que determina o coeficiente $\alpha(r)$ completamente com exceção do ponto singular $r = 0$, tratando-se da singularidade do buraco negro de RN.

Para determinar a constante de integração, C , aplica-se o fato deste espaço-tempo ser uma generalização da solução de Schwarzschild no vácuo, $T_{ab} = 0$. Ou seja, a solução formal para o caso de Schwarzschild decorre do sistema (2.24), sem fontes eletromagnéticas. Isto é, sua solução formal é dada, mais as condições de contorno, por:

$$R_{ab} = 0. \quad (2.64)$$

Tal generalização surge do fato de estarmos considerando não mais o vácuo, mas sim regiões com campos de longas distâncias eletromagnéticos, o que faz surgir a carga total, Q , bem como o monopolo magnético, P . Disto, decorre que os limites

$$Q \rightarrow 0, \quad P \rightarrow 0 \quad (2.65)$$

devem coincidir com o espaço-tempo schwarzschildiano, pois as fontes dos campos eletromagnéticos desaparecem completamente, uma vez que não estamos considerando correntes elétricas devido à estaticidade do caso RN.

Pela expressão (1.19), deve-se ter neste limite

$$\lim_{(Q,P) \rightarrow (0,0)} \left[1 + \frac{C}{r} + \frac{(Q^2 + P^2)}{r^2} \right] = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (2.66)$$

o que leva a definir a constante de integração como sendo igual ao *raio de Schwarzschild* negativo, ou seja

$$C = -2M. \quad (2.67)$$

Substituindo este valor para a constante na expressão (2.63), e posteriormente substituindo a exponencial resultante na Eq. (2.42), obtém-se, portanto, o elemento de linha característico do espaço-tempo exterior de Reissner-Nordström

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.68)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Logo, o tensor métrico covariante é

$$g_{\mu\nu}^{(RN)} = \begin{bmatrix} - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

e a sua forma contravariante sendo dada pelo inverso dos elementos da diagonal.

2.6 HORIZONTE DE EVENTOS E ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE M , Q E P

Buracos negros são definidos como sendo uma região do espaço-tempo formada por uma singularidade coberta por um (ou mais) horizontes de evento(s), onde o campo gravitacional é tão intenso que nenhuma partícula, ou mesmo a luz, ultrapassando a fronteira do horizonte de evento(s), consegue escapar. O caso aqui abordado trata-se do buraco negro de Reissner-Nordström, sendo este um *espaço-tempo assintoticamente plano*, isto é, no limite $r \rightarrow \infty$ recuperamos o espaço-tempo plano dado pela métrica de Minkowski, $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Estes objetos astronômicos são cercados por uma (ou mais) hipersuperfície denominada *horizonte de eventos* que acoberta a singularidade e, pela *conjectura da censura cósmica*, todos possuem. A conjectura da censura cósmica afirma que *todos os espaços-tempos fisicamente razoáveis são globalmente hiperbólicos, isto é, com exceção da possível singularidade inicial do Big Bang, nenhuma outra é visível para qualquer observador externo, seja qual for sua posição de observação* [12].

Como visto no início deste capítulo, a métrica de Reissner-Nordström é estacionária, no qual conclui-se que existe um campo vetorial de Killing, ξ^a , sendo assintoticamente tipo-tempo no infinto espacial. Ou seja,

$$\xi^a \xi_a \rightarrow -1, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.70)$$

com a métrica independente da coordenada temporal

$$\partial_t g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.71)$$

Em uma dada hipersuperfície tal que t seja uma constante, escolhe-se o sistema de coordenadas usual durante toda a presente abordagem, ou seja, $\{x^\mu\} = \{t, r, \theta, \phi\}$, onde tem-se, no infinito espacial, o comportamento tipo-Minkowski. O horizonte de eventos é uma hipersuperfície nula caracterizada por determinada posição radial, r_H , dividindo o comportamento do vetor de Killing ξ^a como tipo-tempo para $r > r_H$ e tipo-espaco para $r < r_H$, onde exatamente em $r = r_H$ o vetor torna-se nulo. Cruzando esta região, ou seja, $r < r_H$, os caminhos tornam-se geodésicas tipo-espaco e não há maneira causal para retornar à região externa $r > r_H$.

Em geral, a determinação para o qual a hipersuperfície torna-se nula, ou seja, do horizonte de eventos, depende fundamentalmente do sistema de coordenadas adotado. No entanto, para o caso aqui abordado é feito de forma mais simples, uma vez que $\partial_\mu r$ é normal à hipersuperfície, tem-se

$$(\partial_\mu r)(\partial^\mu r) = g^{rr}, \quad (2.72)$$

e como estamos preocupados em encontrar a posição radial, r_H , para o qual se tem a nulidade do vetor normal acima, encontra-se que esta condição é satisfeita impondo que

$$g^{rr}(r_H) = 0, \quad (2.73)$$

determinando com isso a localização do horizonte de eventos.

Utilizando-se da forma contravariante do tensor métrico $g_{\mu\nu}^{(RN)}$, (2.69), obtém-se

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2}\right) = 0, \quad (2.74)$$

sendo as soluções da consequente equação quadrática para a variável r dadas por

$$\begin{cases} r_+ = M + \sqrt{M^2 - (Q^2 + P^2)} \\ r_- = M - \sqrt{M^2 - (Q^2 + P^2)} \end{cases} \quad (2.75)$$

que podem ser postas no formato mais sintético

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - (Q^2 + P^2)}. \quad (2.76)$$

Estes são os dois horizontes de eventos do buraco negro de Reissner-Nordström, sendo r_- o chamado *horizonte de eventos interno, ou de Cauchy*, e r_+ o *horizonte de eventos externo*.

Observa-se que estes valores para os horizontes de eventos, junto com $r = 0$, substituindo no elemento de linha dado pela expressão (2.68), fazem com que ele fique indefinido. Assim, surge de impulso definir singularidades locais onde a métrica ou quantidades geométricas associadas, tais como o tensor de Riemann que mede a curvatura, não são definidos ou mesmo diferenciáveis. No entanto, tanto a métrica quanto o tensor de Riemann, $R_{abc}{}^d$, são expressos em determinado sistema de coordenadas, $\{x^\mu\}$, de modo que este comportamento nos pontos onde isto ocorre pode vir da escolha particular deste sistema específico, tratando, portanto, de um problema puramente matemático e não de uma *singularidade física verdadeira*. Pode-se pensar em definir determinados escalares como R e $R_{ab}R^{ab}$ e analisar seu comportamento, porém, o problema anterior continua a persistir. Portanto, para as finalidades desta dissertação, considera-se singularidades físicas aquelas para o qual no ponto singular

1. Ao menos uma curva geodésica (tipo-tempo ou tipo-luz) não está definida;
2. O escalar polinomialmente construído a partir do tensor de curvatura de Riemann, ou escalar de Kretschmann, $\mathcal{K}$, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= R_{abcd}R^{abcd} \\ \Rightarrow \mathcal{K} &= \frac{8}{r^8} [6M^2r^2 - 12Mr(Q^2 + P^2) + 7(Q^2 + P^2)^2] \end{aligned} \quad (2.77)$$

não possui comportamento bem definido, isto é, *explode*: $\mathcal{K} \rightarrow \pm\infty$.

Em relação ao primeiro ponto acima, não irá se apresentar um tratamento detalhado das curvas geodésicas, interessados consultar [7]; o ponto 2 trata-se de uma condição suficiente, mas não necessária.

Para o caso de Reissner-Nordström, o escalar de Kretschmann possui comportamento dado por

$$\mathcal{K} = \frac{1}{r^8} p(M, Q, P), \quad (2.78)$$

sendo $p(M, Q, P)$ o polinômio dado pelo numerador do escalar de Kretschmann acima apresentado. Disto, nota-se que $r_\pm$ atribui a $\mathcal{K}$ um comportamento bem definido, tratando-se de singularidades aparentes e que surgem da escolha particular em expressar o espaço-tempo em coordenadas esféricas, configurando os horizontes de eventos interno e externo. Porém, fica claro que $r = 0$ é uma singularidade problemática e, pelo exposto acima, de caráter verdadeiramente físico.

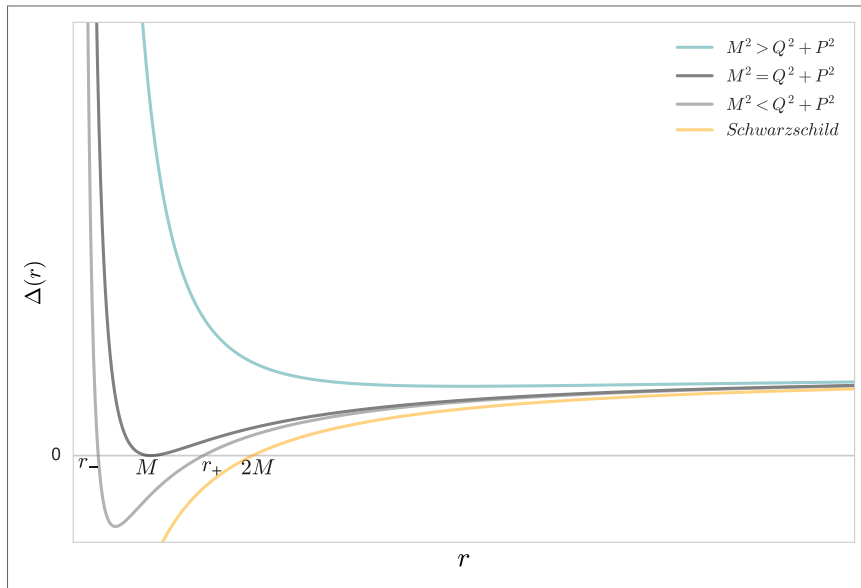
A partir desta conclusão, pode-se analisar determinadas relações entre os parâmetros que caracterizam o buraco negro e consequentemente seus respectivos horizontes de eventos, $r_\pm$,

e obter algumas informações elucidativas. Definindo

$$\Delta(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2}\right), \quad (2.79)$$

pode-se realizar o gráfico, Fig. 4, para três casos possíveis: $M^2 > Q^2 + P^2$, $M^2 = Q^2 + P^2$, e $M^2 < Q^2 + P^2$. Todos eles estão representados para valores arbitrários destas quantidades, respeitando-se apenas as respectivas relações, e onde nota-se também o caso no vácuo, ou seja, sem fontes eletromagnéticas correspondendo ao caso de Schwarzschild.

Figura 4 – Comportamento para as diferentes relações entre M , Q e P no buraco negro de Reissner-Nordström



Fonte: O autor (2024)

Portanto, pode-se ter três soluções, duas ou nenhuma.

2.6.1 Caso 1: $M^2 > Q^2 + P^2$

Neste caso, tem-se que a energia total do buraco negro (BN) é superior à energia oriunda dos campos eletromagnéticos, representando um colapso gravitacional relativístico. Nota-se que, por meio da Fig. 4, $\Delta(r)$ é positivo para valores da coordenada radial tais que $0 < r < r_-$ e $r_+ < r < \infty$, e negativo para a região determinada por $r_- < r < r_+$, com $r_{\pm}$ dado pela expressão (2.76). A métrica possui singularidades aparentes advindas do sistema de coordenadas em uso e que, portanto, podem ser removidas por meio de uma transformação.

As superfícies definidas por $r_{\pm}$ são ambas nulas e correspondem, como tratado acima, a horizontes de eventos. Já o ponto $r = 0$, além de tratar da real singularidade física, tem-se que é uma linha tipo-tempo, não uma superfície tipo-espaço (como ocorre para o caso

Schwarzschild). Se um observador, vindo do infinito, encontra-se caindo no buraco negro a coordenada r_+ é análoga ao caso $2M$ na métrica de Schwarzschild, pois, a partir dela, a coordenada troca seu comportamento descritivo passando de tipo-espaço para tipo-tempo e, necessariamente, move-se na direção que tende a decrescer r . Observadores que porventura estivessem fora do buraco negro testemunhariam o mesmo fenômeno acerca de um buraco negro descarregado, isto é, o observador em queda é visto de forma cada vez mais lenta e aumentando o *redshift*⁷.

Porém, a queda inevitável de r_+ para raios cada vez menores dura somente até atingir a superfície nula caracterizada por $r = r_-$, onde seu comportamento é novamente trocado, voltando a ser uma coordenada tipo-espaço e o consequente movimento na direção de decrescer r pode ser detido. Portanto, o observador não alcança a singularidade $r = 0$, uma vez que $r = 0$ é uma linha tipo-tempo e não necessariamente no futuro do observador. Disto, decorre que o observador pode escolher, ou continuar sobre $r = 0$, ou simplesmente mover-se na direção de aumentar r através da superfície $r = r_-$. Assim, segue que r irá comportar-se novamente como tipo-tempo, no entanto, com orientação reversa; o observador é forçado a mover-se na direção de aumento da coordenada radial e então será, eventualmente, jogado para fora, passando por r_+ , sendo equivalente a emergir de um *buraco branco* dentro do resto do universo. Neste ponto, cabe ao observador escolher se deseja voltar para dentro do buraco negro, porém diferente daquele no qual foi entrado inicialmente, e repetir a mesma *viagem* quantas vezes quiser [36].

2.6.2 Caso 2: $M^2 = Q^2 + P^2$

Este caso particular se faz importante devido aos resultados obtidos, e que serão analisados posteriormente, para os MQNs nas regiões próximas ou neste limite.

Conhecido como *caso extremal*, o buraco negro é conhecido como *solução extremal de Reissner-Nordström*, sendo um ferramental teórico rico para estudos direcionados ao campo da *relatividade geral*, no entanto, representando um caso de alta instabilidade física, pois é suficiente uma pequena quantidade de matéria para termos o **Caso 1** acima, o que é de se esperar, uma vez que a matéria em geral sempre está em interação com o buraco negro.

Fica claro, resolvendo-se a Eq. (2.74) para este caso, a existência de um único raio, $r = 2M$,

⁷ *Redshift* ou *desvio para o vermelho* é o efeito do aumento do comprimento de onda (ou diminuição da frequência) de uma onda eletromagnética quando sua respectiva fonte, ou seu refletor, afasta-se. Em relatividade, acontece devido a campos gravitacionais intensos.

representando o horizonte de eventos, mas nunca sendo tipo-tempo; torna-se nula em $r = 2M$, mas é tipo-espaço em ambos os lados, isto é, para $r < 2M$ e $r > 2M$; a singularidade, $r = 0$, é uma linha tipo-tempo. Então, para este caso particular de solução de Reissner-Nordström, o observador pode evitar a singularidade e continuar a se mover para o futuro para cópias extras da região assintoticamente plana, mas a singularidade é sempre à esquerda do observador.

Uma das propriedades mais fascinantes do BN extremal é o fato da massa ser balanceada pelas cargas elétricas e magnéticas. Mais especificamente, dois buracos negros extremais com os mesmos sinais de carga elétrica irão atrair-se, um ao outro, gravitacionalmente, mas repelir eletromagneticamente e o resultado é o cancelamento mútuo entre ambas as forças. Obviamente, pode-se procurar soluções exatas das equações de Einstein-Maxwell acopladas que representem determinado número de tais buracos negros em uma configuração estática [36].

Com esta finalidade, deve-se considerar $Q = M$ na expressão para o elemento de linha característico de Reissner-Nordström (2.68), onde consideramos, para efeito de simplicidade e não carregar demais as notações, $P = 0$. No entanto, o tratamento é estritamente análogo. Disto, obtém-se

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{M^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{M^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.80)$$

podendo ser simplificado

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r} \right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= - \left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r} \right)^{-2} \left[dr^2 + \left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 r^2 d\Omega^2 \right] \\ &= - \left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r} \right)^{-2} \left[dr^2 + (r - M)^2 r^2 d\Omega^2 \right], \end{aligned} \quad (2.81)$$

realizando a mudança de variável

$$r = \rho - M, \quad (2.82)$$

de modo que obtém-se

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{M}{r} \right) = \left(\frac{\rho}{\rho + M} \right) = \left(1 + \frac{M}{\rho} \right)^{-1}. \quad (2.83)$$

Substituindo esta igualdade no resultado simplificado dado pela expressão (2.81) acima

$$ds_\rho^2 = - \left(1 + \frac{M}{\rho} \right)^{-2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{\rho} \right)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (2.84)$$

sendo $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2$ o elemento de linha da métrica plana euclidiana. Conclui-se que esta é a métrica de Reissner-Nordström extremal em coordenadas isotrópicas, de modo que pode-se generalizá-la escrevendo

$$ds_{\mathbf{x}}^2 = -\psi(\{\mathbf{x}\})^{-2} dt^2 + \psi(\{\mathbf{x}\})^2 d\mathbf{x}^2 \quad (2.85)$$

com

$$\psi(\{\mathbf{x}\}) = \left(1 + \frac{M}{|\mathbf{x}|}\right), \quad (2.86)$$

e $\mathbf{x} = x^\mu (e_\mu)^a$ representando um campo vetorial tridimensional cartesiano.

Na coordenada original, r , o campo elétrico da solução extremal pode ser expresso por meio da componente do quadrivetor potencial, $(A_\mu)^a$, isto é,

$$E_r = F_{tr} = \partial_r A_t - \partial_t A_r, \quad (2.87)$$

uma vez que estamos no caso estático $\partial_t A_r = 0$, conclui-se que

$$E_r = \partial_r A_t = \frac{Q}{r^2} \Rightarrow A_t = -\frac{Q}{r}. \quad (2.88)$$

Inserindo a troca de variável dada pela expressão (2.82), bem como considerando $Q = M$ na expressão acima para o quadrivetor potencial, encontramos que

$$A_\mu = -\frac{M}{\rho + M} \delta_\mu^t, \quad (2.89)$$

ou considerando-se a expressão (2.86), pode-se escrever como

$$A_\mu = [\psi^{-1}(\{\mathbf{x}\}) - 1] \delta_\mu^t. \quad (2.90)$$

Com isto, pode-se usar a métrica no qual o elemento de linha (2.85) é expresso e projetar as equações de Einstein-Maxwell e resolvê-las, considerando para tal o quadrivetor potencial dado pela expressão acima e $\partial_t \psi(\{\mathbf{x}\}) = 0$; disto, chega-se à expressão que leva o nome de solução de Majumdar-Papapetrou (SMP) e que governa $\psi(\mathbf{x})$ ⁸

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi(\{\mathbf{x}\}) = \nabla^2 \psi(\{\mathbf{x}\}) = 0. \quad (2.91)$$

Esta é a *equação de Laplace*, cujas soluções são bem comportadas no infinito e dadas por

$$\psi(\{\mathbf{x}\}) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}, \quad (2.92)$$

para determinado conjunto de N pontos nas posições simbolizadas por $\mathbf{x}_i$. Tais pontos descrevem as posições dos N buracos negros de Reissner-Nordström extremais com massa M_i , e carga elétrica total Q_i , sendo $M_i = Q_i$. Este é um caso particular da *classe de soluções de Majumdar-Papapetrou*⁹, sendo caracterizada pela igualdade entre as densidades de matéria e

⁸ Consultar Apêndice B para demonstração.

⁹ Para uma leitura detalhada sobre a solução de *Majumdar-Papapetrou*, consultar o Capítulo 8 em [40].

energia.

Por fim, uma observação pertinente:

1. No espaço euclidiano, deveria se ter para o caso

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \rho = 0 \quad (2.93)$$

um único ponto, a origem, porém não é o caso. A forma isotrópica da métrica, sendo dada por (2.84), descreve somente a região externa ao buraco negro extremal, com a origem sendo dada por ρ . Também não há presença de singularidades na correspondente parte angular da métrica com $\rho \rightarrow 0$, sendo o raio da 2-esfera sendo igual a M .

2.6.3 Caso 3: $M^2 < Q^2 + P^2$

Neste último caso, tem-se que $\Delta(r)$ é sempre positivo e nunca nulo. Consequentemente, a métrica é completamente regular no sistema de coordenadas $\{x^\mu\} = \{t, r, \theta, \phi\}$. A coordenada temporal, t , é sempre tipo-tempo e a radial, r , tipo-espaço. Porém, ainda há uma singularidade de curvatura em $r = 0$, sendo agora uma linha tipo-tempo. A existência do horizonte de eventos deixa de existir, disto decorre que não há impecilhos para determinado observador ir até a singularidade e voltar, trazendo consigo determinada informação que, porventura, fora observada. Aqui, tem-se a chamada *singularidade nua*.

Neste espaço-tempo, acontece que a singularidade pode influenciar a *física do futuro* longe da singularidade, no entanto, como existe tal singularidade, implica que este futuro não pode ser previsto ou mesmo calculado porque as *leis físicas* quebram-se em $r = 0$.

Uma análise cuidadosa das geodésicas revela que a singularidade é *repulsiva*, isto é, geodésicas tipo-tempo nunca interceptam $r = 0$. Dito de outra forma, as geodésicas tipo-tempo se aproximam, mas depois afastam-se. Deve-se salientar, contudo, que as geodésicas tipo-luz e tipo-espaço podem alcançar o ponto singular. O comportamento para $r \rightarrow \infty$ descreve um espaço-tempo plano e a *estrutura causal* é normal em todos os lugares.

Percebe-se que nunca pode-se esperar um buraco negro nesta condição, $M^2 < Q^2 + P^2$, como colapso gravitacional, uma vez que ela afirma que a energia total do buraco negro é menor que a contribuição advinda apenas da energia dos campos eletromagnéticos, pois a massa de matéria que carregou e atribuiu carga elétrica deve ser negativa; por tudo isto, este caso é considerado *não-físico*.

Por fim, faz-se pertinente uma observação: se alguém tivesse interesse em modelar *partículas elementares*, tal como o elétron, como partículas pontuais com determinada massa e carga, teria satisfeito, para este caso com $P = 0$, $M^2 < Q^2$, pois a interação gravitacional é insignificante diante da repulsão elétrica coulombiana. Porém, não deve-se concluir disto que os elétrons devam ser modelados por singularidades nuas, pois estes se encontram no regime quântico e, portanto, fora do regime de validade/aplicabilidade da *teoria da relatividade geral clássica* e, conseqüentemente, fora destas observações [36, 41].

3 EQUAÇÃO DE HEUN CONFLUENTE E ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO

*"Sonhar o sonho impossível,
 Sofrer a angústia implacável,
 Pisar onde os bravos não ousam,
 Reparar o mal irreparável,
 Amar um amor casto à distância,
 Enfrentar o inimigo invencível,
 Tentar quando as forças se esvaem,
 Alcançar a estrela inatingível:
 Essa é a minha busca."
 Miguel de Cervantes*

Neste capítulo, iremos introduzir a apresentação de um parâmetro não-comutativo (PNC) sobre o espaço-tempo de Reissner-Nordström, decorrente da aplicação do *twist operator*, $\mathcal{F}$, e que será expresso a partir da escolha conveniente dos vetores de Killing para o caso RN, isto é, ξ_t e ξ_ϕ . Disto resulta que a parte responsável pela simetria esférica, isto é, a equação angular, é mantida inalterada com autovalor conhecido, modificando-se somente a parte correspondente à equação radial e que será a base para nossa análise. Para o caso em que serão analisados os MQNs, ou seja, proveniente da interação do buraco negro perturbado por um campo espinorial sem massa, realizamos uma abordagem aproximativa para incrementar a perturbação (parâmetro não-comutativo) em primeira ordem. Apresentamos também uma breve abordagem sobre o parâmetro não-comutativo.

Posteriormente, abordaremos o método utilizado para, a partir da equação diferencial radial, tratando-se de uma equação confluyente de Heun (ECH), obtermos os MQNs baseado no formalismo da *teoria da deformação*, em especial, o caso das *deformações isomonodrômicas* tendo como base seus respectivos *pontos singulares*. Esta resolução se baseia no conhecido *problema de Riemann-Hilbert*, isto é, obter os *dados de monodromia*, $\{\sigma, \eta\}$, a partir de determinados parâmetros que caracterizam a equação, $\{t, c_t\}$, e que também dependem do conjunto de parâmetros $\{\theta\}$, por meio do mapa de Riemann-Hilbert (MRH) dado pela *quinta função transcendente de Painlevé* τ_V , obtendo com isso, a equação transcendental que fornece os modos.

3.1 ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO

Para considerarmos a não-comutatividade no buraco negro de Reissner-Nordström (BN-RN) fazendo com que este seja o correspondente *buraco negro de Reissner-Nordström não-comutativo*, e como consequência, analisar os MQNs, faz-se necessário introduzir o tratamento no qual dará origem a deformação. O tratamento aqui empregado é o do *Drinfeld twist* que possui como consequência a deformação da *álgebra de Poincaré*¹, dando origem a respectiva *álgebra de Poincaré deformada*, fazendo com que as relações permaneçam as mesmas, porém modificando comultiplicações. Este é denominado *espaço-tempo κ -deformado não-comutativo*.

No presente tratamento, iremos considerar que a descrição é *semi-clássica*, isto é, a geometria do espaço-tempo do BN (campo gravitacional) não possui dinamicidade e, portanto, não é alterada pela aplicação do *twist*, contudo as funções interagentes com ele o são.

3.1.1 Angular twist

A aplicação do *Drinfeld twist* faz surgir uma álgebra não-comutativa e provoca modificações nas funções e, para facilitar a abordagem, utilizamos o mapa de Seiberg-Witten (MSW). O *Drinfeld twist* é dado por:

$$\mathcal{F} = \exp \left[-\frac{ia}{2} (\partial_t \otimes \partial_\phi - \partial_\phi \otimes \partial_t) \right]. \quad (3.1)$$

Podemos escrever esta expressão de maneira mais compacta, utilizando-se da notação de índices, ou seja

$$\mathcal{F} = \exp \left(-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \xi_\mu \otimes \xi_\nu \right), \quad (3.2)$$

sendo $\theta^{\mu\nu}$ as componentes do *tensor deformação*, cuja representação matricial possui entradas constantes e é dada por

$$\theta^{\mu\nu} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

no qual conclui-se que as únicas componentes diferentes de zero são $\theta^{t\phi} = -\theta^{\phi t} = a$ para o sistema de coordenadas $\{x^\mu\} = \{t, r, \theta, \phi\}$. O parâmetro constante a acima é o *parâmetro*

¹ A álgebra de Poincaré é aquela responsável pela origem das simetrias de Poincaré, dadas por: translação espacial e temporal; rotações e transformações de Lorentz. As duas últimas simetrias juntas (rotações e transformações de Lorentz) dão origem ao grupo de Lorentz. É importante notar também que a álgebra de Poincaré é a álgebra de Lie do grupo de Poincaré, e que tal grupo é a simetria completa de qualquer teoria relativística.

deformativo que caracteriza a escala não-comutativa e comumente sua escala de grandeza é associado àquela do *comprimento de Planck*², isto é, $a \sim \ell_P^3$.

Fica explícito a construção do *Drinfeld twist* a partir de dois dos quatro vetores de Killing que o espaço-tempo de RN admite: na direção temporal, ∂_t , e na angular-azimutal, ∂_ϕ . A construção de tal *twist* não é única, e há formas variadas de expressá-lo e esta escolha particular baseia-se no fato da métrica permanecer invariante sobre sua aplicação e por isso costuma-se chamá-lo de *Killing twist* ou *angular twist*, devido ao fato do campo vetorial $\partial_\phi = x\partial_y - y\partial_x$ ser o gerador de rotações ao redor do eixo z . Nota-se que os campos vetoriais ∂_t e ∂_ϕ comutam, isto é, $[\partial_t, \partial_\phi] = 0$.

3.1.2 Álgebra não-comutativa

A aplicação do *twist operator* expresso por (3.1) faz com que se defina, para dois campos de funções quaisquer e infinitamente diferenciáveis, ψ e χ , o $\star$ -produto da correspondente *álgebra não-comutativa*

$$\begin{aligned} \psi \star \chi &:= \mu \circ \mathcal{F}^{-1}(\psi \otimes \chi) = \mu \left\{ \exp \left[\frac{ia}{2} (\partial_t \otimes \partial_\phi - \partial_\phi \otimes \partial_t) \right] \psi \otimes \chi \right\} \\ &= \psi \chi + \frac{ia}{2} [(\partial_t \psi)(\partial_\phi \chi) - (\partial_t \chi)(\partial_\phi \psi)] + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde o mapa μ representa a multiplicação pontual usual, tornando evidente que no limite $a \rightarrow 0$ há a recuperação da multiplicação padrão. Observa-se que, pelo fato do tensor métrico não possuir dependência nas coordenadas $\{t, \phi\}$, pois como vimos no capítulo anterior o espaço-tempo de Reissner-Nordström é estático e esfericamente simétrico, conclui-se que $\partial_\mu^* \psi = \partial_\mu \psi$ para $\mu = \{t, \phi\}$ e, em adição a isto, a validade das igualdades: $g_{\mu\nu} \star \psi = g_{\mu\nu} \psi$ e $g_{\mu\nu} \star g_{\sigma\rho} = g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho}$. Obviamente tudo isto se dá devido ao conveniente uso das simetrias na composição do *twist*, expresso por meio dos *vetores de Killing*. No entanto, para espaços-tempos arbitrários sem tais simetrias, estas relações deixam de valer.

² Trata-se de uma unidade de comprimento que pode ser determinada a partir de três constantes fundamentais da Natureza no Sistema Internacional de Unidades (SI), são elas: velocidade da luz no vácuo, c ; constante de Planck reduzida, $\hbar$, e a constante gravitacional de Newton, G_N . Sendo

$$\ell_P = \sqrt{\hbar G_N / c^3} \simeq 1.616255(18) \times 10^{-35} \text{ m},$$

de acordo com o *National Institute of Standards and Technology* (NIST).

³ Adiante se abordará novamente esta escala ao se escolher o valor numérico para o parâmetro não-comutativo na implementação numérica.

As relações de comutação, em coordenadas esféricas, obedecem:

$$\begin{aligned} [t, e^{i\phi}]_\star &:= t \star e^{i\phi} - e^{i\phi} \star t = -ae^{i\phi} \\ [t, \psi(t, r, \theta, \phi)]_\star &= ia \partial_\phi \psi(t, r, \theta, \phi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Todas as demais comutam. Portanto, conclui-se que o *twist operator* dado por (3.1), gera uma tipo de álgebra de Lie não-comutativa.

3.1.3 Mapa de Seiberg-Witten

A presente abordagem para introduzirmos a perturbação no espaço-tempo fazendo com que se torne não-comutativo advém do fato de acoplarmos o campo não-comutativo ao buraco negro clássico de Reissner-Nordström, por sua vez acoplado a um campo de *gauge* $U(1)^4$ deformado chamado de $U(1)_\star$.

O MSW trata-se de uma determinada transformação de campo que permite-nos expressar a teoria de *gauge* no espaço não-comutativo como uma teoria de gauge sobre espaços comutativos, ou seja, quantidades das variáveis não-comutativas em função das variáveis comutativas. Disto, decorre que o problema da quantização da carga em $U(1)_\star$ não existe⁵. Tal mapa também nos garante que os graus de liberdade da teoria não-comutativa são os mesmos da correspondente teoria comutativa, isto é, não há introdução de novos graus de liberdade, além de ser expresso por meio da multiplicação pontual usual. Os campos agora são rotulados por chapéus, ou seja, $\hat{\Psi}$, $\hat{A}_a$, $\hat{F}_{ab} \dots$, e assim por diante.

Assumindo que o campo $\hat{\Psi}$ é complexo e possui carga q , porém sem massa, transformando-se de acordo com a representação da transformação de *gauge* $U(1)_\star$ não-comutativo, de modo que a derivada covariante atuando sobre ele é dada por:

$$D_\mu \hat{\Psi} = \partial_\mu \hat{\Psi} - iq \hat{A}_\mu \star \hat{\Psi}. \quad (3.6)$$

Portanto, utilizando-se do *Drinfeld twist* e expandindo até primeira ordem no parâmetro a , pode-se expressar os correspondentes campos não-comutativos $\hat{\Psi}$, $\hat{A}_\mu$ e $\hat{F}_{\mu\nu}$ por meio das

⁴ Grupo de *gauge* do eletromagnetismo.

⁵ Os campos aqui considerados pertencem ao grupo $U(1)$, de modo que tal abordagem não pode ser empregada para descrever as *interações fracas e fortes*, pois a dinâmica da *física de partículas* requer o uso do grupo $SU(N)$ para descrever tais interações. Além do mais, verifica-se que no caso $U(1)$ as *cargas são quantizadas*, portanto, sendo impossível descrever *quarks* [42].

suas respectivas funções comutativas

$$\begin{cases} \hat{\Psi} = \Psi - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}A_\rho[\partial_\sigma\Psi + (\partial_\sigma - iA_\sigma)\Psi] \\ \hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}A_\rho(\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}) \\ \hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - \theta^{\rho\sigma}A_\rho\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\sigma}F_{\rho\mu}F_{\sigma\nu} \end{cases} \quad (3.7)$$

sendo agora $F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}A_{\nu]}$ com $A_\mu \in U(1)$. Este ferramental apresentado de forma breve até aqui configura o essencial para abordar a questão referente ao campo espinorial interagente com o BN, com a presença da não-comutatividade.

3.1.4 O problema para a perturbação espinorial, $s = 1/2$

De acordo com o artigo [43], os autores afirmam haver uma equivalência entre dois métodos para o caso espinorial no tratamentonão-comutativo, são eles:

1. Abordagem formal: tratando por meio da ação não-comutativa para o campo espinorial, isto é, com os respectivos campos não-comutativos e o produto $\star$ -Moyal onde se utiliza o mapa de Seiberg-Witten;
2. Abordagem efetiva: partindo-se da *equação de Dirac* no espaço curvo, onde a não-comutatividade está codificada nas tetrádas.

Escolhendo-se partir do segundo caso, ou seja, *abordagem efetiva*, a equação para o campo espinorial, $s = 1/2$, sem massa e carregado no espaço curvo do BN-RN, é dado pela *equação de Dirac*

$$[i\gamma^a(\nabla_a - iqA_a)]\Psi(\{\mathbf{x}\}) = [i\gamma^a(e_a)^\mu(\nabla_\mu - iqA_\mu)]\Psi(\{\mathbf{x}\}) = 0, \quad (3.8)$$

onde γ^a são as matrizes de Pauli e $(e_a)^\mu$ é uma *vierbein* (tetráda) que atua no *operador de Dirac*, $\gamma^a\nabla_a$, em determinado sistema coordenado. O símbolo $\{\mathbf{x}\}$, por sua vez, designa o conjunto de termos $\{x^\mu\}$ referentes ao sistema de coordenadas adotado.

A equação de Dirac, nesta geometria em especial, é passível de separação de variáveis, de modo que se obtém a parte correspondente à componente angular, deixada imperturbada e, portanto, sua solução é determinada, bem como a sua correspondente constante de separação, e a componente radial. Como foi observado, a equação radial obtida para os MQNs após a transformação

$$f(z) = \exp\left[-\frac{i}{2}\frac{qQ}{(z+r_-)}am\right]y(z) \quad (3.9)$$

perde sua dependência no parâmetro não-comutativo, obtendo-se assim a mesma equação presente em [44], isto é,

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left[\frac{1 - \theta_-}{z} + \frac{1 - \theta_+}{z - t} \right] \frac{dy(z)}{dz} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\theta_*}{2z} + \frac{tc_t}{z(z - t)} \right] y(z) = 0, \quad (3.10)$$

com os parâmetros $\{\theta_-, \theta_+, \theta_*, tc_t\}$ idênticos. Disto, conclui-se que a análise devesse se estender ao fator de **segunda ordem** no PNC na expansão do gerador da álgebra não-comutativa dado pelo operador *Drinfeld twist*, (3.1), o que resultará na expansão do Moyal $\star$ -produto, (3.4), até a segunda ordem em a , porém, a incrementação deste fator em segunda ordem, cuja expressão pode ser encontrada em [45], culmina na realização de cálculos árduos e extensivamente trabalhosos, de modo que se fez necessário a implementação de uma aproximação baseado no caso perturbativo escalar, $s = 0$. Passaremos a tratá-la a seguir.

3.2 APROXIMAÇÃO PARA O CASO ESPINORIAL

Tendo em vista a complexidade para incrementar a perturbação em segunda ordem oriunda da aplicação do *twist operator*, resultando na origem do PNC do espaço-tempo κ -deformado, realizamos uma aproximação com a finalidade de observar o comportamento dos MQNs quando a perturbação se encontra presente no sistema físico sob análise, isto é, o BN-RN.

Para isto, tomamos como base o caso escalar e a respectiva correção que se tem origem nos *parâmetros de monodromia*⁶ (ou *parâmetros indiciais*) da equação diferencial radial, isto é, $\{\theta\} = \{\theta_+, \theta_-, \theta_*\}$, fundamentais para a determinação dos modos, pois ditam o comportamento das soluções próximas aos pontos singulares.

3.2.1 Correção para o caso espinorial, $s = 1/2$

A ação para o caso do campo escalar carregado sem massa com carga q , é dada por [46]:

$$S_*[\hat{\Psi}, \hat{A}] = \int d^4x \left(\sqrt{-g} \star g^{\mu\nu} \star D_\mu \hat{\Psi}^+ \star D_\nu \hat{\Psi} - \frac{1}{4q^2} \sqrt{-g} \star g^{\alpha\beta} \star g^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\alpha\mu} \star \hat{F}_{\beta\nu} \right). \quad (3.11)$$

Fazendo-se uso da definição do Moyal $\star$ -produto dado pela Eq. (3.4) e do MSW dado pelas expressões (3.7) e realizando-se a variação da ação, $\delta S_*[\hat{\Psi}, \hat{A}]$, com respeito a $\hat{\Psi}^{+7}$, obtém-se

⁶ Será abordado mais a frente questões referentes a *monodromia* e *isomonodromia* de equações diferenciais escalares, além de outros tópicos importantes para a aplicação do método para determinar os modos.

⁷ Tem-se que $\hat{\Psi}^+$ representa a *projeção auto-dual* de $\hat{\Psi}$.

a equação de movimento

$$g^{\mu\nu}[(\partial_\mu - iA_\mu) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}D_\lambda\Psi] - \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}[(\partial_\mu - iA_\mu)(F_{\alpha\beta}D_\nu\Psi) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}D_\lambda\Psi] \\ - 2(\partial_\mu - iA_\mu)(F_{\alpha\nu}D_\beta\Psi) + 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu}F_{\alpha\lambda}D_\beta\Psi - 2(\partial_\beta - iA_\beta)(F_{\alpha\mu}D_\nu\Psi)] = 0, \quad (3.12)$$

onde realizou-se a substituição $qA_\mu \rightarrow A_\mu$ e D_μ é a derivada covariante (3.6) com o produto pontual. Projetando-se esta expressão no espaço-tempo de Reissner-Nordström, cujo tensor métrico é (2.69), e considerando que a única componente diferente de zero do quadrivetor potencial é a temporal, pois trata-se de uma caso estático (coulombiano), bem como desconsiderando fontes de monopolos magnéticos, isto é,

$$A_\mu = -\frac{qQ}{r}\delta_\mu^t, \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \frac{qQ}{r^2}\delta_\mu^t\delta_\nu^r \quad (3.13)$$

e que $\theta^{t\phi} = -\theta^{\phi t} = a$, obtemos a correspondente equação radial

$$\left(\frac{1}{f}\partial_t^2 - \nabla^2 + (1-f)\partial_r^2 + \frac{2M}{r^2}\partial_r + \frac{2iqQ}{rf}\partial_t - \frac{q^2Q^2}{r^2f}\right)\Psi(\{\mathbf{x}\}) \\ + \frac{aqQ}{r^3}\left[\left(\frac{M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right)\partial_\phi + rf\partial_r\partial_\phi\right]\Psi(\{\mathbf{x}\}) = 0, \quad (3.14)$$

onde ∇^2 é o *operador laplaciano* usual em coordenadas esféricas e

$$f = f(r) = g_{tt} = g^{rr} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = \frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2}. \quad (3.15)$$

Esta equação é separável admitindo-se solução levando em conta sua simetria esférica, codificada nos *harmônicos esféricos*, e a comum dependência temporal comentada no Cap. 1 expressa pela exponencial complexa advinda da análise de Fourier dos modos, ou seja,

$$\Psi(\{\mathbf{x}\}) = \Psi(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-|\ell|}^{m=|\ell|} R_\ell^m(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (3.16)$$

Disto, obtém-se a equação de autovalor para a componente angular

$$g_{(\mathbb{S}^2)}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu Y_\ell^m(\theta, \phi) = -\ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (3.17)$$

e a correspondente equação para a parte radial

$$\frac{d^2 R_\ell^m}{dr^2} + \frac{2}{rf} \left(1 - \frac{M}{r}\right) \frac{dR_\ell^m}{dr} - \frac{1}{f} \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{1}{f} \left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2 \right] R_\ell^m \\ - ima \frac{qQ}{fr^3} \left[\left(\frac{M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right) R_\ell^m + rf \frac{dR_\ell^m}{dr} \right] = 0 \quad (3.18)$$

onde m é o *número azimutal* dos MQNs. É possível deixar esta equação em um formato muito similar aquele encontrado na ausência do PNC, e para esta finalidade, realiza-se uma transformação tal que⁸

$$R_\ell^m(r) = (r - r_+)^{-\theta_+/2} (r - r_-)^{-\theta_-/2} y(z) \quad , \quad z \in \mathbb{C} \quad (3.19)$$

com o intuito de eliminar os *polos duplos* e com isso definindo os *parâmetros indiciais* $\{\theta_\pm\}$, de modo que após sucessivas transformações (que dependem do *parâmetro não-comutativo* e estão implícitas na variável $y(z)$) a fim de deixar no formato equivalente ao da *equação confluyente de Heun*, pode-se alocá-la na seguinte expressão:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[\frac{1 - \theta_-}{z} + \frac{1 - \theta_+}{z - t} \right] \frac{dy}{dz} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\theta_\star}{2z} + \frac{tc_t}{z(z - t)} + 2a^2 \frac{\omega^2 m^2 q^2 Q^2}{(z + t_1)^4} \right] y = 0. \quad (3.20)$$

Os conjunto de parâmetros, $\{\theta\}$, dados por

$$\begin{cases} \theta_+ = i \frac{\left(-\frac{qQ}{r_-} + \omega \right)}{\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}} = \frac{i}{2\pi T_+} \left(\omega - \frac{qQ}{r_+} \right) \\ \theta_- = i \frac{\left(\frac{qQ}{r_-} - \omega \right)}{\frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}} = \frac{i}{2\pi T_-} \left(\omega - \frac{qQ}{r_-} \right) \\ \theta_\star = 2i[\omega(r_+ + r_-) - qQ] - 4\pi a \frac{mqQT_- \theta_-}{\omega(r_+ - r_-)} \end{cases} \quad (3.21)$$

onde percebe-se que a dependência no *parâmetro não-comutativo* encontra-se apenas em $\theta_\star$, sendo em **primeira ordem**, e tendo sido utilizado, para escrever o conjunto acima, a temperatura no respectivo horizonte de eventos

$$2\pi T_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2r_\pm^2}, \quad (3.22)$$

com o *parâmetro acessório*, tc_t , por sua vez, sem apresentar a dependência no *parâmetro não-comutativo*, tendo a forma

$$tc_t = \ell(\ell + 1) - (qQ - \omega r_-)(i + 4\omega r_-) + \omega(i + 2qQ)r_+ - 2\omega^2 r_+^2 \quad (3.23)$$

e os pontos singulares

$$\begin{cases} t := 2i\omega(r_+ - r_-) \\ t_1 := 2i\omega r_- \end{cases} \quad (3.24)$$

⁸ Consultar Apêndice D para conferir a dedução matemática.

Nota-se que a equação adquire um termo a mais devido à presença da não-comutatividade. Possuindo um valor diminuto, o termo que o acompanha pode ser encarado como um *potencial perturbativo*, de modo que se faz conveniente adotar a aplicação da *teoria de perturbação independente do tempo* tal como visto em *Mecânica Quântica*. Para esta finalidade, é necessário obter o *conjunto solução* da respectiva *equação não-perturbada*, isto é, sem o PNC; esta é dada por (3.42). Com este intuito, a deixamos no formato presente na literatura, cuja solução é posta no seguinte formato [47]

$$R_\ell^m(r) = \left(\frac{r - r_+}{r_+ - r_-} \right)^{(1-\theta_+)/2} \left(\frac{r - r_-}{r_+ - r_-} \right)^{(1-\theta_-)/2} H_C(\{k\}; r) e^{i\omega(r-r_-)}, \quad (3.25)$$

sendo $H_C(\{k\}; r)$ a *função de Heun confluyente* e $\{\kappa\} = \{t_0, -\theta_-, -\theta_+, \delta, \lambda\}$ seus respectivos parâmetros que a caracterizam de acordo com ECH, onde $\delta = \delta(\theta_\pm, T_\pm)$ e $\lambda = \lambda(\theta_-, T_-)$ além de dependerem de quantidades intrínsecas ao problema considerado como $\{qQ, \ell, \omega\}$. Disto, temos que uma solução particular da equação é dada por

$$\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\}) = \Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\}) e^{-i\omega t} = R_\ell^m(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (3.26)$$

isto é,

$$\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\}) = \left(\frac{r - r_+}{r_+ - r_-} \right)^{(1-\theta_+)/2} \left(\frac{r - r_-}{r_+ - r_-} \right)^{(1-\theta_-)/2} H_C(\{k\}; r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\omega(r-r_- - t)}, \quad (3.27)$$

cujo comportamento assintótico da função $H_C(\{k\}; r)$ nos pontos singulares para os MQNs, é

$$H_C(\{k\}; r) \sim \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(r) & , \quad r \rightarrow r_+ \\ \frac{1}{r} + \mathcal{O}^2\left(\frac{1}{r}\right) & , \quad r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.28)$$

Admitindo-se um conjunto completo formado pelas soluções correspondentes aos estados das funções de onda para cada estado de energia p , isto é, $\{\Psi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p\}_{p=0}^N$, para a equação não perturbada. Após as manipulações realizadas para deixar a equação radial no formato padrão na literatura, o termo referente ao potencial perturbativo é expresso como:

$$V(r) = a^2 \omega^2 m^2 q^2 Q^2 \frac{(r_+ - r_-)^2}{2 r^4}. \quad (3.29)$$

Sabendo que o produto interno da *função de onda relativística* é dado por [48]

$$\begin{aligned} (\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p, \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_q) &= -i \int_\Sigma d\Sigma \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p \overleftrightarrow{\partial}_t \bar{\Psi}_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p \\ &= -i \int_\Sigma d\Sigma [\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p \partial_t \bar{\Psi}_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p - \bar{\Psi}_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_q \partial_t \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p] \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $d\Sigma$ é o elemento de volume induzido nas *hipersuperfícies espaciais*, Σ , e a barra significa o complexo conjugado. Admitindo uma *hipersuperfície* tal que $t = \text{constante}$, obtém-se o elemento de volume

$$\epsilon_{abc} = \frac{r^2}{\sqrt{f(r)}} dr \wedge d\theta \wedge d\phi. \quad (3.31)$$

Assumindo a ortogonalidade do *conjunto solução*, $\{\Psi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p\}_{p=0}^N$, e fazendo uso do produto interno dado pela expressão (3.30) considerando que os MQNs são, por definição, complexos, pode-se escrevê-los na forma

$$\omega_p = \Re(\omega_p) + i\Im(\omega_p), \quad (3.32)$$

de modo que obtém-se pela teoria de perturbação, considerando-se as expansões tanto para $\Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})$ quanto para ω em termos do parâmetro perturbativo, válidas e dadas por

$$\begin{cases} \Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p = \Phi_p^{(0)} + a \Phi_p^{(1)} + a^2 \Phi_p^{(2)} + \dots \\ \omega_p = \omega_p^{(0)} + a \omega_p^{(1)} + a^2 \omega_p^{(2)} + \dots \end{cases} \quad (3.33)$$

e assumindo a ortogonalidade entre a função de onda não perturbada, $\Phi_p^{(0)}$, com a primeira correção, $\Phi_p^{(1)}$, é possível deixar a expressão para a *primeira correção no modo-quase normal* no seguinte formato esquemático ($\Gamma = [r_+, \infty[\cup [0, 2\pi[\cup [0, \pi]$):

$$\omega_n^{(1)} = - \int_{\Gamma} dr d\Omega r^2 \sqrt{f(r)} \Phi_n^{(0)}(\{\mathbf{x}\}) V(r) \overline{\Phi_p^{(0)}(\{\mathbf{x}\})}. \quad (3.34)$$

Como o potencial possui comportamento determinado por $V(r) \sim r^{-4}$, conclui-se que sua convergência é rapidamente atingida e como a expansão da solução em $r \rightarrow \infty$, dada pela expressão (3.28), decai polinomialmente em r , percebe-se que o comportamento da solução para $r \rightarrow \infty$ pode ser desconsiderada, pois a descrição física relevante se concentrará, prioritariamente, próximo à posição radial r_+ . Portanto, a primeira correção nos modos é

$$\omega_n^{(1)} = a^2 \frac{(\omega_n^0 m q Q)^2}{2} e^{-2\Im(\omega_n) r_+} \int_0^1 dx [(1-x)(1-\beta x)]^{3/2} e^{-2\gamma/x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.35)$$

onde

$$\begin{cases} \beta := \frac{r_-}{r_+} \in (0, 1] \\ \gamma := \Im(\omega_n^0) r_+ \in (0, \infty) \end{cases} \quad (3.36)$$

Pelo integrando da expressão da primeira correção, Eq. (3.35), vê-se tratar de uma função contínua e estritamente positiva no intervalo, de modo que atribuindo a interpretação de área

para a integral, conclui-se tratar-se de um valor numérico estritamente positivo. Disto, pode-se afirmar que, sem perda de generalidade, tem-se

$$\int_0^1 dx [(1-x)(1-\beta x)]^{3/2} e^{-2\gamma/x} = 2\Lambda^2, \quad \Lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.37)$$

Portanto, substituindo este resultado na equação integral (3.35), a primeira correção nos modos é dada por⁹ :

$$\omega_n^{(1)} = a^2 (\omega_n^0 q Q m \Lambda)^2 e^{-2\Im(\omega_n^0) r_+}. \quad (3.38)$$

Aqui, $\omega_n^{(0)} = \omega_n^0$ sendo o modo oriundo da equação radial sem a presença do PNC.

Percebe-se que a primeira correção é de segunda ordem no parâmetro não-comutativo, a . Este resultado era de se esperar, uma vez que o *número de soluções de funções de onda* com $E_n = \omega_n$ (pois $\hbar=1$) deve ser obtido somando sobre todos os estados, o que inclui a soma no número azimutal m perpassando todos os seus valores, isto é, $m = -|\ell|$ a $m = |\ell|$, de modo que tem-se

$$N_{\text{estados}}^{E_n} \sim \int_{-|\ell|}^{+|\ell|} dm \, m = 0. \quad (3.39)$$

Sendo a dependência no número azimutal de potência ímpar, tal soma anula-se. Isto acontece com demais quantidades físicas do sistema que necessitam computar o número de estados, tais como *entropia de Bekenstein-Hawking*, S_{BH} , e *energia livre de Helmholtz*, F , [49]. Como o *parâmetro não-comutativo* vem sempre acompanhado do *número azimutal*, m , na mesma potência (consequência da aplicação do *twist operator*), conclui-se que potências ímpares terão contribuição nula devido ao anulamento da respectiva integral para a computação da densidade de estados; talvez esteja aqui o cerne em implementar a *não-comutatividade* em primeira ordem. Por fim, percebe-se que, por se tratar de uma *teoria de perturbação*, o modo ω_p não possui paridade bem definida, uma vez que este é expandido em termos de frequências com paridade bem definida.

Tendo em vista esta dificuldade e, no entanto, querendo analisar o comportamento dos MQNs na presença do parâmetro não-comutativo em primeira ordem, partimos da equação de Dirac dada por (3.8), cujo tratamento é um pouco mais complexo tendo em vista a escolha das tetrádas, deixando a computação mais laboriosa, ou simplesmente da componente radial da equação mestra de Teukolsky, possuindo a vantagem de ter cálculos mais diretos. Escolhendo-se o segundo caminho, temos

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{1+s} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{K(r)^2 - 2is(r-M)K(r)}{\Delta} + 4is\omega r - 2isqQ - {}_s\lambda_\ell \right) R = 0 \quad (3.40)$$

⁹ Consultar Apêndice E para obter o desenvolvimento matemático da *teoria de perturbação independente do tempo* empregada e a consequente obtenção desta primeira correção nos MQNs.

onde $\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$, $R = {}_sR_\ell^m(r)$, $K(r) = \omega r^2 - qQr$, ${}_s\lambda_\ell = (\ell - s)(\ell + s + 1)$ sendo a constante de separação e $s = \pm 1/2$ (válida para ambas *helicidades*). Esta equação pode ser posta no formato da ECH realizando, de forma similar ao caso escalar, $s = 0$, a mudança de variável

$${}_sR_\ell^m(r) = (r - r_+)^{-(\theta_++s)/2}(r - r_-)^{-(\theta_-+s)/2}y(z) \quad (3.41)$$

obtendo novamente a equação

$$\frac{d^2y(z)}{dz^2} + \left[\frac{1 - \theta_-}{z} + \frac{1 - \theta_+}{z - t} \right] \frac{dy(z)}{dz} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\theta_\star}{2z} + \frac{tc_t}{z(z - t)} \right] y(z) = 0, \quad (3.42)$$

com o conjunto de parâmetros $\{\theta\}$ agora levemente distintos levando a presença do *spin* do campo em consideração e sendo o PNC, a , adicionado *ad hoc*, baseado no comportamento antes discutido e obtido para o caso escalar, motivando o estudo da análise em primeira ordem para o campo espinorial:

$$\begin{cases} \theta_+ = s + \frac{i}{2\pi T_+} \left(\omega - \frac{qQ}{r_+} \right) \\ \theta_- = s + \frac{i}{2\pi T_-} \left(\omega - \frac{qQ}{r_-} \right) \\ \theta_\star = -2s + 2i(2M\omega - qQ) - 4\pi a \frac{mqQT_- \theta_-}{\omega(r_+ - r_-)} \end{cases} \quad (3.43)$$

O parâmetro acessório, tc_t , sendo igual ao que foi obtido anteriormente e novamente com o PNC em **primeira ordem** presente apenas em $\theta_\star$. Os parâmetros $\{\theta\} = \{\theta_+, \theta_-, \theta_\star\}$, por sua vez, ditam o comportamento da solução nos pontos singulares onde são definidos e possuem as expansões

$$y(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{-(s+\theta_-)/2}(1 + \mathcal{O}(z)) & , \quad z_0 \rightarrow 0 \\ (z - z_0)^{-(s+\theta_+)/2}(1 + \mathcal{O}(z)) & , \quad z_0 \rightarrow t \\ z^{\theta_\star/2} e^{-z/2} (1 + \mathcal{O}(z^{-1})) & , \quad z \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.44)$$

Portanto, estes são os dados necessários e tomados como base do presente estudo. Dito isto, o problema está formalmente posto e passamos a apresentar na seção seguinte o método utilizado para resolver o problema de se encontrar os modos a partir da ECH acima, Eq. (3.42).

Por fim, apresentamos a equação de Teukolsky correspondente à parte angular

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{d{}_sS_\ell^m(\theta)}{d\theta} \right] + \left[s + {}_s\lambda_\ell - \frac{(m + s \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \right] {}_sS_\ell^m(\theta) = 0, \quad (3.45)$$

sendo ${}_s\lambda_\ell = (\ell - s)(\ell + s + 1)$ a constante de separação bem definida, pois é mantida sua simetria esférica como afirmado anteriormente. Seu comportamento nos pontos singulares é

regular, isto é,

$${}_sS_\ell^m(\theta) = \begin{cases} (\theta - \theta_0)^0(1 + \mathcal{O}(\theta)) & , \quad \theta_0 \rightarrow 0 \\ (\theta - \theta_0)^0(1 + \mathcal{O}(\theta - 1)) & , \quad \theta_0 \rightarrow t \end{cases} \quad (3.46)$$

A seguir, realizamos uma breve abordagem fenomenológica acerca do valor numérico do parâmetro não-comutativo que codifica a incerteza na medição das coordenadas do espaço-tempo e agrega o caráter não pontual na Teoria da Relatividade Geral, escolhendo um valor particular para os fins desejados de observação e análise.

3.2.2 Parâmetro não-comutativo, a : uma escolha numérica

A *Teoria da Relatividade Geral* é a correspondente *teoria de campo* do campo gravitacional, porém com o adicional que esta traz consigo a determinação de propriedades de caráter totalmente geométrico do espaço-tempo. Isto é, a gravidade é um efeito de caráter geométrico.

A abordagem não-comutativa para o espaço-tempo, ou seja, para a sua geometria inerente, foi inicialmente abordada por Snyder [50]. A proposta inicial foi para se resolver o problema da renormalização de propriedades de uma teoria de campos a curtas distâncias, ou até mesmo torná-las finitas devido à flutuações quânticas. Disto, atribui-se uma imagem essencialmente não-comutativa ao espaço-tempo, de modo que a descrição do campo gravitacional por meio de uma *geometria não-comutativa* codificaria determinado caráter *indeterminado* (ou *indefinido*) do espaço-tempo simbolizada, no sistema de coordenadas cartesianas, pela relação de comutação¹⁰

$$[\hat{\mathbf{x}}^\mu, \hat{\mathbf{x}}^\nu]_\star = i a \epsilon^{\mu\nu}, \quad (3.48)$$

sendo $\theta^{\mu\nu} = a \epsilon^{\mu\nu}$ ¹¹ o *tensor antissimétrico de deformação* como afirmado anteriormente e $\epsilon^{\mu\nu}$ o correspondente *tensor de Levi-Civita*. Tal tensor deformativo em sua representação matricial determina a *célula fundamental de discretização* do referido espaço-tempo não-comutativo,

¹⁰ O correspondente espaço-tempo é chamado de κ -deformado devido à relação de não-comutação das coordenadas, dadas por (3.48), podendo ser escrita em uma forma κ -deformada

$$[\hat{\mathbf{x}}^\mu, \hat{\mathbf{x}}^\nu]_\star = \frac{i}{\kappa} (u^\mu \hat{\mathbf{x}}^\nu - u^\nu \hat{\mathbf{x}}^\mu) \quad (3.47)$$

sendo κ o *parâmetro de deformação* e u^μ um *vetor constante arbitrário*. O mais famoso exemplo da relação acima é a chamada álgebra κ -Minkowski no qual tem-se $u^\mu = (-1, \mathbf{0})$ [51].

¹¹ Com $\{\mu, \nu\}$ podendo percorrer $\{0, 1, 2, 3\}$ designando, respectivamente, $\{t, x, y, z\}$. No presente caso adotado em coordenadas esféricas, $\epsilon^{\mu\nu} \neq 0$ se, e somente se, $\epsilon^{t\phi} = -\epsilon^{\phi t} = 1$. Tal escolha para a relação de comutação, isto é, para a teoria não-comutativa, viola a *invariância de Lorentz*. Porém, possui *simetria quântica* na *álgebra distorcida de Poincaré* [45].

sendo assim, resultando em uma geometria essencialmente não-pontual, pois a noção de ponto agora não agrega sentido nenhum devido à incerteza inerente

$$\Delta \hat{x}^\mu \Delta \hat{x}^\nu \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}|, \quad (3.49)$$

associado ao comportamento não-comutativo das coordenadas. Por sua vez, salienta-se que o caso relacionado à comutação fornecida pela Eq. (3.48), e adotada nesta dissertação, é um das possíveis variadas formas de se implementar deformações não locais em teorias de campo, tal como a Relatividade Geral; utilizamos Moyal $\star$ -produto, inspirado nos fundamentos da Mecânica Quântica de maneira a fornecer uma sistemática computação para descrever espaços não-comutativos e, conseqüentemente, estudar teorias de campos que interagem e se propagam nele. E em coordenadas esféricas, tais relações de comutação são dadas por (3.5).

Disto, percebe-se inerentemente a natural analogia com o caso da Mecânica Quântica usual, onde a *constante fundamental* que realiza o papel do PNC é a *constante de Planck reduzida*, e as relações de comutação são em termos de observáveis tais como posição, $\hat{X}$, e momento, $\hat{P}$. O fato de termos

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \mathbb{I}, \quad (3.50)$$

isto é, a não comutação, está intimamente relacionado com o *princípio da incerteza de Heisenberg*, sendo a constante $\hbar$ aquela que discretiza o *espaço de fase* e agrega a correspondente incerteza, atribuindo o caráter fundamentalmente probabilístico da Teoria Quântica.

O domínio de validade da teoria da Relatividade Geral é limitada pelo simples fato de não considerar efeitos quânticos, sendo estes esperados por volta da escala dada pelo comprimento de Planck, ℓ_P . Disto, decorre, juntamente com a analogia geometria não-comutativa-Mecânica Quântica abordada acima, que a incerteza na medição de posições oriundas da não-comutatividade seja dada pelo comprimento de Plack [52]. A dimensionalidade do *parâmetro não-comutativo*, por sua vez, em coordenadas cartesianas, é dada por¹²

$$[a] = L^2 = M^{-2} \quad (3.51)$$

sendo a igualdade $L = M^{-1}$ decorrente do uso de *unidades naturais*. Disto, conclui-se que $a \sim \ell_P^2$.

¹² Varia caso considerado em coordenadas esféricas, sendo dada por:

$$[a] = L = M^{-1}.$$

Isto decorre do fato de, em coordenadas esféricas, a variável angular ϕ ser adimensional.

Pelo lado experimental, o PNC foi delimitado em diversas áreas de pesquisas físicas, tentando-se estabelecer um limiar para seu valor. Na Tab. 1, encontram-se alguns valores e suas respectivas áreas¹³.

Tabela 1 – Valores experimentais estimados para o parâmetro não-comutativo, a

Limites do PNC	Nível Físico Avaliado	Referências
$a < (1 \text{ TeV})^{-2}$	Função de onda nuclear	[53]
$a < 10^{-8} \text{ GeV}^{-2}$	Correções no <i>Lamb shift</i>	[54]
$ a < 10^{-11} \text{ GeV}^{-1}$	Princípio da incerteza generalizado	[55]
$ a < 8.4 \times 10^{-38} \text{ GeV}^{-2}$	Sinal de Ondas Gravitacionais	[56]

Fonte: O autor (2024)

Decorre disto que o valor diminuto do PNC dificulta a análise dos seus efeitos, como era de se esperar. Portanto, desejando estudar seu efeito quando considerado em primeira ordem no espaço-tempo de Reissner-Nordström, escolhemos *ad hoc* seu valor numérico, respeitando para isto duas condições:

1. Ser pequeno o suficiente para justificar a adoção do *tratamento perturbativo*;
2. Ser tal que seja perceptível em uma análise baseada na construção gráfica do MQNs.

Portanto, o valor adotado é muito superior à sua escala original, mas tendo a finalidade de se estudar um modelo teórico, adotamos:

$$a = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m} . \quad (3.52)$$

3.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

É sabido que equações diferenciais ordinárias (EDOs) aparecem em todos os ramos da física, tais como *Mecânica Clássica*, *Mecânica Quântica*, *Eletrodinâmica* e demais campos, mostrando-se como um ferramental de enorme importância na resolução e entendimento do fenômeno físico sob análise. No que diz respeito a aplicabilidade de tais equações, seu uso se faz necessário desde a análise do clássico problema do *oscilador harmônico* em movimentos periódicos, até na tentativa de se obter os MQNs de um buraco negro (como será o caso

¹³ Deve-se notar que para o caso *Princípio da incerteza generalizado* o expoente da unidade está escrito de forma distinto dos demais, e isto se deve ao fato dos autores da referência citada ao lado terem utilizado as coordenadas esféricas, diferentemente dos demais que estão em cartesianas.

nesta presente dissertação). Apenas por meio de dois problemas totalmente distintos, nota-se a necessidade de se obter métodos de resolução para elas, seja no domínio dos *números reais*, $\mathbb{R}$, ou dos *números complexos*, $\mathbb{C}$. No que segue, apresentaremos determinadas propriedades das EDOs no domínio complexo necessárias para um panorama adequado do método para resolução e consequente encontro dos MQNs, relacionados ao buraco negro de Reissner-Nordström.

3.3.1 Equações diferenciais: classificação e forma normal

Em geral, as EDOs escalares são dadas por meio da seguinte expressão geral

$$\frac{d^N}{dz^N}y(z) + p_1(z)\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}y(z) + p_2(z)\frac{d^{N-2}}{dz^{N-2}}y(z) + \dots + p_n(z)y(z) = 0, \quad (3.53)$$

onde os coeficientes dados por $p_i(z) \forall i = 1, 2, 3, \dots$ são funções racionais holomórficas na variável $z \in \mathbb{C}$. A equação acima, representando determinada classe de equações diferenciais, pode ser classificada como *fuchsiana* ou não, de acordo com os pontos singulares presentes nos coeficientes $p_i(z)$, classificados como *pontos singulares regulares* ou *pontos singulares irregulares*. Para classificá-los como tal, seja z_i um polo de, ao menos, um dos coeficientes p_i , e seja k_i a respectiva ordem de tal polo. Chama-se um *ponto singular regular* se, e somente se,

$$k_i \leq i, \quad (3.54)$$

e um *ponto singular irregular* caso contrário. Equações fuchsianas são aquelas no qual a existência dos pontos singulares é dada apenas por pontos regulares.

A Eq. (3.53) pode ser posta no formato de um *sistema de equações diferenciais de primeira ordem*, podendo ser alocada no seguinte formato

$$\frac{d}{dz}\mathbf{Y}(z) = \mathbf{A}(z)\mathbf{Y}(z), \quad (3.55)$$

onde $\mathbf{Y}(z)$ é um N -vetor coluna composto por suas respectivas N -soluções e $\mathbf{A}(z)$ é uma matriz quadrada $N \times N$ cujas entradas são funções holomórficas de z , ou seja,

$$\mathbf{Y}(z) = \begin{pmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_N(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(z) = A_{ij}(z), \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (3.56)$$

Deve-se salientar que o sistema (3.55) é idêntico à Eq. (3.53) podendo recuperá-la e, para isto, bastando considerar $\mathbf{Y}(z) = (y^{(1)}(z), y^{(2)}(z), \dots, y^{(N)}(z))^T$ com $y^{(i)}(z)$ indicando a derivada de i -ésima ordem. A expressão para a matriz $\mathbf{A}(z)$ pode ser posta, considerando o *rank de Poincaré* dos respectivos polos finitos z_i , isto é, r_i , bem como dos polos infinitos, r_∞ , na forma [57]

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{r_i} \frac{\mathbf{A}_i^{(j)}}{(z - z_i)^{j+1}} + \sum_{j=1}^{r_\infty} \mathbf{A}_\infty^{(j)} z^{j-1} \quad (3.57)$$

onde $\mathbf{A}_i^{(j)}$ e $\mathbf{A}_\infty^{(j)}$ são matrizes quadradas $N \times N$ constantes. Reafirma-se que ambas as expressões dadas por (3.53) e (3.55) são matematicamente equivalentes e pode-se obter uma a partir da outra e vice-versa, sendo o sistema (3.55) denominado *forma normal* [58]. Pode-se também escolher uma tupla de N -soluções linearmente independentes em determinado ponto do espaço do domínio, onde tem-se uma base do espaço de soluções, $\mathcal{D}(z; \mathbb{C})$, de modo que

$$\mathbf{Y}(z) = [\mathbf{Y}_1(z), \mathbf{Y}_2(z), \dots, \mathbf{Y}_N(z)]_{N \times N}, \quad (3.58)$$

sendo este um *sistema fundamental de soluções* (ou *matriz fundamental de soluções*). Disto, conclui-se que tal sistema é dado por uma matriz quadrada $N \times N$, o que implica afirmar

$$\mathcal{W}(z) = \det \mathbf{Y}(z), \quad (3.59)$$

onde $\mathcal{W}(z)$ o correspondente Wronskiano.

Nota-se por fim que, afirmar a natureza holomórfica de $\mathbf{A}(z)$ em determinado domínio, $\mathcal{D}(z; \mathbb{C})$, é equivalente a afirmar que os coeficientes p_i também possuem a mesma natureza neste domínio.

3.3.2 Monodromia

Há dois tipos de monodromias: *local* e *global*. A *monodromia local* refere-se à informação codificada na variação do sistema fundamental de solução ao circular, por um caminho fechado, um ponto singular da *EDO* realizando-se sua continuação analítica; já a *monodromia global* nos fornece a mesma informação acerca do sistema fundamental de solução, porém, quando se é feita a continuação analítica ao redor de mais de um ponto singular, isto é, global.

Para a abordagem da monodromia, faz-se necessário considerar o domínio dado pela *esfera de Riemann*, $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, com exceção do conjunto de todos os pontos singulares, isto é, $\mathcal{D}(z; \mathbb{C}) = \mathbb{P} \setminus \{z_i\}$.

Seja γ um circuito- $(+1)$, isto é, $\gamma_i - (+1)$, onde começa-se no *ponto base* b e percorre o ponto singular no sentido anti-horário representado por uma curva fechada em $\mathcal{D}(z; \mathbb{C})$, onde se inicia a curva e um único ponto singular. A continuação analítica da matriz fundamental de solução ao longo da curva, $\mathbf{Y}(z_\gamma)$, com $z_\gamma = (z - b) + be^{2\pi i}$, $|b| > |z_i|$, possui uma matriz $\mathbf{M}_\gamma$ associada tal que

$$\mathbf{Y}(z_\gamma) = \mathbf{Y}(z)\mathbf{M}_\gamma, \quad (3.60)$$

onde $\mathbf{M}_\gamma \in GL(N, \mathbb{C})$ ¹⁴ é denominada *matriz de monodromia* relacionada com γ dependente da escolha particular da matriz fundamental de solução $\mathbf{Y}(z)$, mas cuja *classe de conjugação* não depende desta escolha, sendo a classe de conjugação a monodromia local em $z_i = z_0$ da equação diferencial (3.55). Pelo fato de $\mathbf{M}_\gamma$ ser unicamente determinada pela *classe de homotopia* de γ em $\mathcal{D}(z; \mathbb{C})$, obtém-se o mapa

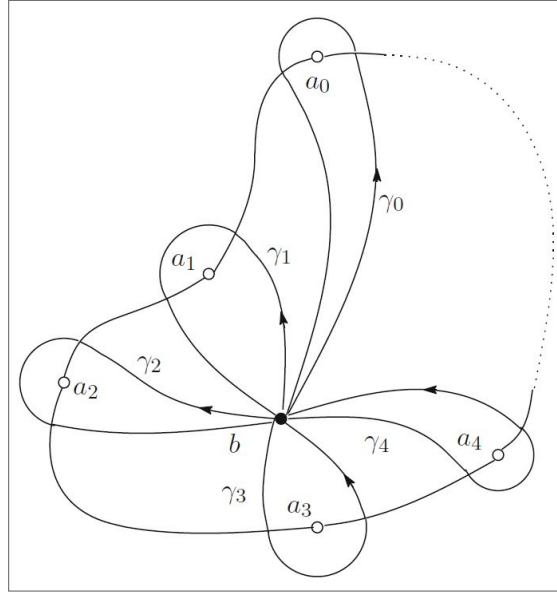
$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(\mathcal{D}(z; \mathbb{C}), b) &\longrightarrow GL(N, \mathbb{C}) \\ \gamma &\longmapsto \mathbf{M}_\gamma \end{aligned} \quad (3.61)$$

sendo a representação monodrômica, $\rho(\gamma)$, com respeito a $\mathbf{Y}(z)$, o produto em $\mathcal{D}(z; \mathbb{C})$ mapeando igualmente um produto em $GL(N, \mathbb{C})$. Portanto, tem-se que a imagem $\rho(\gamma) = \mathbf{M}_\gamma$ de $\gamma \in \pi_1(\mathcal{D}(z; \mathbb{C}), p)$ é a chamada *matriz de monodromia*.

O caso acima trata-se da monodromia para um ponto singular, ou seja, local. No entanto pode-se estender, de maneira semelhante, para um conjunto maior englobando todos os pontos singulares, de modo que tenhamos uma monodromia global. Considerando agora que o conjunto de pontos singulares é tal que $\{z_i\} = \{a_i\}$, bem como o ponto base sendo b e a curva fechada dada por uma união de curvas igualmente fechadas $\gamma_i - (+1)$, cada uma circulando um único ponto singular sem interceptar as demais curvas, isto é, $\gamma = \bigcup \gamma_i$ como mostra a Fig. 5.

¹⁴ O $GL(N, \mathbb{C})$ é um grupo linear formado por matrizes quadradas $N \times N$ inversíveis com operação produto entre seus elementos matriciais bem definido.

Figura 5 – Curvas circulando pontos singulares para a monodromia global



Fonte: Haraoka[58] (2015)

Disto, decorre que a continuação analítica da matriz de solução fundamental após circular todos os p pontos singulares, $\mathbf{Y}(z_\gamma)$, continua sendo

$$\mathbf{Y}(z_\gamma) = \mathbf{Y}(z) \mathbf{M}_\gamma, \quad (3.62)$$

no entanto, a matriz de monodromia é dada agora por

$$\mathbf{M}_\gamma = \mathbf{M}_{\gamma_0} \mathbf{M}_{\gamma_1} \dots \mathbf{M}_{\gamma_p} = \prod_{i=1}^p \mathbf{M}_{\gamma_i} \quad (3.63)$$

e a correspondente representação monodrômica

$$\rho(\gamma) = \rho(\gamma_0) \rho(\gamma_1) \dots \rho(\gamma_p) = \prod_{i=0}^p \rho(\gamma_i), \quad (3.64)$$

sendo esta unicamente determinada pela tupla de matrizes, $\{\mathbf{M}_{\gamma_i}\}$, de modo que tem-se obedecida a relação

$$\prod_{i=0}^p \mathbf{M}_{\gamma_i} = \mathbb{I} \quad (3.65)$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade, $\mathbb{I} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$. Para cada matriz de monodromia, $\mathbf{M}_{\gamma_i}$, denota-se a monodromia relacionada ao ponto singular, $z_i = a_i$, por $\mathcal{L}_i$, de modo que tem-se

$$\mathbf{M}_{\gamma_i} \in \mathcal{L}_i \quad (3.66)$$

cujos grupo fundamental, $\pi_1(\mathcal{D}(z; \mathbb{C}), b)$, tratando-se do domínio da representação monodrômica, possui a seguinte forma

$$\pi_1(\mathcal{D}(z; \mathbb{C}), b) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p | \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_p = 1 \rangle. \quad (3.67)$$

No presente caso de interesse desta dissertação, isto é, calcular os MQNs para o BN-RN com a presença de um parâmetro não-comutativo, a equação diferencial fundamental nesta análise é tal que $N = 2$, de modo que a Eq. (3.53) pode ser posta no formato

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + p_1(z) \frac{dy(z)}{dz} + p_2(z) = 0, \quad (3.68)$$

como pode ser notado pela equação radial antes apresentada, Eq. (3.42), com a sua respectiva forma normal:

$$\frac{d}{dz} \Phi(z) = \mathbf{A}(z) \Phi(z). \quad (3.69)$$

Uma análise detalhada da Eq. (3.68), dada por completo pela Eq. (3.42), confirma a existência de dois pontos singulares regulares, $z = 0$ e $z = z_0$, e um irregular, $z \rightarrow \infty$, sendo uma ECH e tendo seus respectivos pontos singulares finitos um rank de Poincaré tal que $r_i = 0$, bem como o irregular $r_\infty = 1$. Levando em consideração estes fatos e substituindo-os na expressão (3.57), obtém-se a expansão para a matriz $\mathbf{A}(z)$:

$$\mathbf{A}(z) = \frac{\mathbf{A}_0}{z} + \frac{\mathbf{A}_{z_0}}{z - z_0} + \mathbf{A}_\infty. \quad (3.70)$$

Sendo agora matrizes quadradas 2×2 e o conjunto $\{\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_{z_0}, \mathbf{A}_\infty\}$ composto por matrizes constantes.

De agora em diante, iremos sempre nos referir a este caso particular e que será mais detalhado a seguir.

3.3.3 Isomonodromia

Para o sistema (3.69) pode-se escrever, sem perda de generalidade, um dos polos em função do outro e estender com isso a dependência para os demais. Disto, tomamos $z_0 = t$, de modo que a respectiva forma normal torna-se

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) = \mathbf{A}(z, t) \Phi(z, t) \quad (3.71)$$

com a matriz $\mathbf{A}(z, t)$ agora sendo dada por

$$\mathbf{A}(z, t) = \frac{\mathbf{A}_0}{z} + \frac{\mathbf{A}_t}{z - t} + \mathbf{A}_\infty, \quad (3.72)$$

sendo o sistema formado pelas duas expressões acima denominado *sistema de Garnier*. Uma questão fundamental a ser comentada é o fato da isomonodromia depender da simetria das propriedades de monodromia do sistema matricial acima.

Para o nosso caso, ou seja, sistemas matriciais 2×2 , há uma infinidade de escolhas particulares que fornecem a mesma solução. Dito isto, pode-se escolher uma base tal que diagonalize $\mathbf{A}_\infty$, o que implica afirmar que a matriz de solução fundamental, $\Phi(z, t)$, é substituída por $\mathbf{C}_\infty \Phi(z, t)$ com $\mathbf{C}_\infty \Phi(z, t) \mathbf{C}_\infty^{-1}$ diagonal, sendo $\mathbf{C}_\infty$ uma matriz. Assim, uma *transformação s-homotópica* dada por

$$\Phi'(z, t) = z^{\alpha_0} (z - t)^{\alpha_t} e^{\alpha_\infty z} \Phi(z), \quad (3.73)$$

provoca apenas uma translação na matriz específica, isto é,

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i + \alpha_i \mathbb{I}. \quad (3.74)$$

Com isso, pode-se utilizar tais transformações a fim de aplicar determinadas restrições à matriz $\mathbf{A}_i$ específica. Primeiro podemos considerar que, sem perda de generalidade, $\mathbf{A}_\infty$ é diagonal e aplicando uma transformação s-homotópica pode-se tomar $\mathbf{A}_\infty$ sem traço, bem como $\mathbf{A}_0$ e $\mathbf{A}_t$ com determinante nulo. Em adição, pode-se escolher $\mathbf{A}_\infty$ com autovalores sendo $\pm 1/2$, a partir de um reescalonamento na variável complexa z . Portanto, pode-se alocar estas matrizes no formato

$$\mathbf{A}(z, t) = \frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{\mathbf{A}_0(t)}{z} + \frac{\mathbf{A}_t(t)}{z - t}, \quad (3.75)$$

com

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{A}_0) = \det(\mathbf{A}_t) = 0, \quad (3.76)$$

e podendo a matriz $\mathbf{A}(z, t)$ ser vista como um *potencial de gauge*. Salienta-se que é possível a existência de *transformações de gauge* no qual altera o valor do módulo conforme t . Após as transformações e restrições impostas, tem-se que a matriz resultante (3.75) mantém todas as propriedades de monodromia, isto é, sua representação monodrômica, desde que se tenha o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) = \mathbf{A}(z, t) \Phi(z, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) = \mathbf{B}(z, t) \Phi(z, t) \end{cases} \quad (3.77)$$

satisfeito e que, devido à condição de *curvatura nula*, dada por meio da equação

$$\partial_t \mathbf{A}(z, t) - \partial_z \mathbf{B}(z, t) + [\mathbf{A}(z, t), \mathbf{B}(z, t)] = 0, \quad (3.78)$$

a correspondente matriz $\mathbf{B}(z, t)$ quadrada 2×2 , seja dada por

$$\mathbf{B}(z, t) = -\frac{\mathbf{A}_t(t)}{z - t}. \quad (3.79)$$

Igualmente pela condição de curvatura nula tem-se um conjunto de equações induzidas, $\{\mathbf{A}(t)_i\}$, dadas por meio do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}_0(t) = -\frac{1}{t} [\mathbf{A}_0(t), \mathbf{A}_t(t)] \\ \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}_t(t) = \frac{1}{2} [\sigma_3, \mathbf{A}_t(t)] + \frac{1}{z} [\mathbf{A}_0(t), \mathbf{A}_t(t)] \end{cases} \quad (3.80)$$

chamado *equações de Schlesinger*.

3.3.4 Obtendo os MQNs: Mapa de Riemann-Hilbert e a quinta função transcendente de Painlevé τ_V

A equação radial motivo de interesse na análise dos MQNs pode ser posta, após uma transformação s-homotópica apresentada anteriormente, no formato genérico dado por

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left[\frac{1 - \theta_-}{z} + \frac{1 - \theta_+}{z - t} \right] \frac{dy(z)}{dz} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\theta_\star}{2z} + \frac{tc_t}{z(z - t)} \right] y(z) = 0, \quad (3.81)$$

no plano complexo $z \in \mathbb{C}$, tendo dois pontos singulares regulares, $\{0, t\}$, e um irregular, $\{\infty\}$. Chama-se c_t de *parâmetro acessório*, enquanto t o *módulo conforme* da equação acima, relacionado aos *dados de monodromia* $\{\sigma, \eta\}$ de suas soluções. A partir daqui consideraremos $\{\theta_-, \theta_+\} = \{\theta_0, \theta_t\}$, respectivamente, em acordo com a literatura.

O *problema de Riemann-Hilbert*, isto é, encontrar $\{\sigma, \eta\}$ a partir dos parâmetros que caracterizam a equação acima, $\{t, c_t, \theta_0, \theta_t\}$, é, fundamentalmente, a *espinha dorsal* do método aplicado para encontrar os MQNs e que utilizaremos nesta dissertação. Na Eq. (3.81), o conjunto $\{\theta\} = \{\theta_0, \theta_t, \theta_\star\}$, é composto por constantes dependentes das quantidades intrínsecas do BN-RN, tais como seus horizontes de eventos e a correspondente temperatura associada a cada um deles, além dos MQNs procurados, e é fornecido por (3.43). A sua correspondente forma normal é dada por

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) = \left[\frac{1}{2} \sigma_3 + \frac{\mathbf{A}_0(t)}{z} + \frac{\mathbf{A}_t(t)}{z - t} \right] \Phi(z, t), \quad (3.82)$$

com as propriedades monodrômicas da matriz de solução fundamental, $\Phi(z, t)$, traduzidas por meio das propriedades de *holonomia* de $\mathbf{A}(z, t)$.

As equações de Schlesinger, dadas pelo sistema (3.80), são análogas às *hamiltonianas* e garantem a condição de integrabilidade necessária para a existência da *função τ_V de Painlevé*

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \tau_V(\{\theta\}; \sigma, \eta; t) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_3 \mathbf{A}_t) + \frac{1}{t} \text{Tr}(\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_t), \quad (3.83)$$

permitindo ser possível a construção do *mapa de Riemann-Hilbert*, sendo este parametrizado pelos dados monodrômicos, $\{\sigma, \eta\}$, pois estes garantem sua existência sob transformações de $\mathbf{A}(z, t)$, mantendo-se a expansão em frações parciais dadas por (3.72). Vale observar que o cálculo dos dados de monodromia, $\{\sigma, \eta\}$, advindos do parâmetro acessório, c_t , bem como do módulo conforme, t , dependem da forma na qual expressa-se a equação diferencial (3.81) dentro do sistema de solução fundamental, definindo, com isso, o potencial de gauge de maneira única.

Em termos da função isomonodrômica τ_V , o MRH tal que $\{t, c_t\} \longrightarrow \{\sigma, \eta\}$ é dado de forma implícita pelas seguintes equações

$$\begin{cases} \tau_V(\{\theta\}; \sigma, \eta; t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \log \tau_V(\{\theta\}; \sigma - 1, \eta; t) = c_t + \frac{\theta_0(\theta_t - 1)}{2t} \end{cases} \quad (3.84)$$

onde, na segunda equação acima, tem-se um deslocamento nos valores do conjunto $\{\theta\}$, isto é, $\{\theta^-\} = \{\theta_0, \theta_t - 1, \theta_\star + 1\}$, definindo o parâmetro acessório, bem como a derivada logarítmica da função τ_V isomonodrômica. Ressalta-se que este sistema é a *solução formal* para o problema posto e seu uso torna-se prático devido a forma efetiva de se calcular τ_V , principalmente no que diz respeito à computação numérica.

Em [59], encontra-se a expansão assintótica da função τ_V ¹⁵ para t pequeno, em termos dos parâmetros de monodromia, $\{\sigma, \eta\}$, assumindo, sem perda de generalidade, $-1 < \Re(\sigma) < 1$, pois $\tau_V(\{\eta\}; \sigma + 2n, t) = f(\{\eta\}; \sigma, \eta) \tau_V(\{\theta\}; \sigma, \eta; t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com f uma função dada em termos dos dados monodrômicos e independente do *módulo conforme*, t , ou seja,

$$\begin{aligned} \tau_V(\{\theta\}; \sigma, \eta; t) = C_V(\{\theta\}; \sigma) t^{(\sigma^2 - \theta_0^2 - \theta_t^2)/4} e^{\theta_t t/2} \left[1 - \left(\frac{\theta_t}{2} - \frac{\theta_\star}{4} + \frac{\theta_\star(\theta_0^2 - \theta_t^2)}{4\sigma^2} \right) t \right. \\ \left. - \frac{(\theta_\star + \sigma)((\theta_t + \sigma)^2 - \theta_0^2)}{8\sigma^2(\sigma - 1)^2} \kappa_V^{-1} t^{1-\sigma} - \frac{(\theta_\star - \sigma)((\sigma - \theta_t)^2 - \theta_0^2)}{8\sigma^2(\sigma + 1)^2} \kappa_V t^{1+\sigma} + \mathcal{O}(t^2, |t|^{2 \pm 2\Re\sigma}) \right], \end{aligned} \quad (3.85)$$

sendo $C_V(\{\theta\}; \sigma)$ uma constante não-nula e

$$\kappa_V = e^{i\pi\eta} \frac{\Gamma(1 - \sigma)^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_\star + \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_t + \theta_0 + \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_t - \theta_0 + \sigma)\right)}{\Gamma(1 + \sigma)^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_\star - \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_t + \theta_0 - \sigma)\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_t + \theta_0 - \sigma)\right)}. \quad (3.86)$$

Para o presente caso, onde estamos interessados em encontrar os MQNs, deve-se impor as condições que os originam, isto é, (1.45). Para isto, é necessário utilizarmos a equação

¹⁵ A função τ_V pode ser expressa por meio do *determinante de Fredholm*, sendo a origem desta expansão em série. Consultar o apêndice C.

radial (3.10), base do presente método e suas respectivas soluções, sendo possível alocar tais condições de contorno em termos dos *dados de monodromia*, $\{\sigma, \eta\}$, de modo que uma *base de soluções* nos pontos singulares $\{t, \infty\}$, relacionados ao *horizonte de eventos externo* e o *infinito espacial*, respectivamente, é [60]

$$\begin{cases} y_{t,+}(z) = (z-t)^{\theta_t}(1 + \mathcal{O}(z-t)) \\ y_{t,-}(z) = (z-t)^0(1 + \mathcal{O}(z-t)) \end{cases}, \quad z \rightarrow t \quad (3.87)$$

e

$$\begin{cases} y_{\infty,+}(z) = e^z z^{-\theta_\infty/2}(1 + \mathcal{O}(z^{-1})) \\ y_{\infty,-}(z) = e^{-z} z^{\theta_\infty/2}(1 + \mathcal{O}(z^{-1})) \end{cases}, \quad z \rightarrow \infty \quad (3.88)$$

com $\{y_{t,+}(z), y_{t,-}(z)\}$ a respectiva base de soluções para $z \rightarrow t$ e $\{y_{\infty,+}(z), y_{\infty,-}(z)\}$ para $z \rightarrow \infty$. É possível mostrar que a *matriz de conexão*, $\mathbf{C}_t$, entre estas soluções locais, possui a seguinte forma dada em termos dos dados de monodromia

$$\begin{bmatrix} \rho_\infty y_{\infty,+}(z) \\ \tilde{\rho}_\infty y_{\infty,-}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_t \begin{bmatrix} \rho_{t_0} y_{t_0,+}(z) \\ \tilde{\rho}_{t_0} y_{t_0,-}(z) \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} \rho_\infty y_{\infty,+}(z) \\ \tilde{\rho}_\infty y_{\infty,-}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\pi}{2}\eta}\zeta'_t - e^{\frac{i\pi}{2}\eta}\zeta_t & -e^{-\frac{i\pi}{2}\eta}\zeta_\infty\zeta'_t + e^{-\frac{i\pi}{2}\eta}\zeta'_\infty\zeta_t \\ e^{-\frac{i\pi}{2}\eta} - e^{\frac{i\pi}{2}\eta} & e^{\frac{i\pi}{2}\eta}\zeta_\infty + e^{\frac{i\pi}{2}\eta}\zeta'_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{t_0} y_{t_0,+}(z) \\ \tilde{\rho}_{t_0} y_{t_0,-}(z) \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

onde

$$\begin{cases} \zeta_\infty = e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma} \sin \left[\frac{\pi}{2}(\theta_\star + \sigma) \right] \\ \zeta'_\infty = e^{\frac{i\pi}{2}\sigma} \sin \left[\frac{\pi}{2}(\theta_\star - \sigma) \right] \end{cases} \quad (3.91)$$

e

$$\begin{cases} \zeta_t = \sin \left[\frac{\pi}{2}(\theta_t + \theta_0 - \sigma) \right] \sin \left[\frac{\pi}{2}(\theta_t - \theta_0 - \sigma) \right] \\ \zeta'_t = \sin \left[\frac{\pi}{2}(\theta_t + \theta_0 + \sigma) \right] \sin \left[\frac{\pi}{2}(\theta_t - \theta_0 + \sigma) \right] \end{cases} \quad (3.92)$$

sendo $\{\rho_t, \tilde{\rho}_t, \rho_\infty, \tilde{\rho}_\infty\}$ constantes de normalização. As entradas da matriz $\mathbf{C}_t$ podem ser usadas para fazer a relação entre os *coeficientes de espalhamento* do buraco negro com os dados de monodromia, $\{\sigma, \eta\}$, uma vez havendo uma simetria conectando as soluções, onde há uma relação entre ρ_∞ e $\tilde{\rho}_\infty$ (em geral, reversão temporal). Assim, para os MQNs, a condição é

a inexistência de fluxo de energia para a região externa no horizonte de eventos externo do buraco negro e a inexistência de fluxo de energia vindo do infinito, isto é, ondas completamente entrando no horizonte externo e completamente saindo no infinito. Disto, implica que a matriz C_t seja *triangular inferior* e, portanto, requer que tenhamos a quantidade invariante definindo η :

$$e^{i\pi\eta} := \frac{\zeta_\infty \zeta'_t}{\zeta'_\infty \zeta_t}. \quad (3.93)$$

Portanto, substituindo as expressões (3.91) e (3.92) na igualdade acima, obtemos a condição dos MQNs expressa por:

$$e^{i\pi\eta} = e^{-i\pi\sigma} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\theta_\star + \sigma)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\theta_\star - \sigma)\right]} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\theta_t + \theta_0 + \sigma)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\theta_t + \theta_0 - \sigma)\right]} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\theta_t - \theta_0 + \sigma)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\theta_t - \theta_0 - \sigma)\right]}. \quad (3.94)$$

Tendo a definição da função τ_V , bem como sua expansão em série, o MRH pode ser utilizado para calcular os parâmetros de monodromia, dado os parâmetros da ECH fornecidos pela Eq. (3.81). A expressão (3.94) permite solução apenas para um conjunto de valores discretos para $\{t, c_t\}$. Formalmente, pode-se utilizar a expansão para τ_V , dada por (3.85), para que seja possível a resolução da primeira equação do MRH dado em (3.84), e consequentemente encontrar η em função do conjunto de parâmetros dados por $\{\sigma, t, c_t, \theta_0, \theta_t, \theta_\star\}$, isto é,

$$\eta = \eta(\sigma, t, c_t, \theta_0, \theta_t, \theta_\star). \quad (3.95)$$

Porém, para calcular σ faz-se necessário o parâmetro acessório tc_t . Esta expansão é dada por [61]

$$\begin{aligned} tc_t = & \frac{(\sigma - 1)^2 - (\theta_0 + \theta_t - 1)^2}{4} + \frac{\theta_\star(\sigma(\sigma - 2) + \theta_t^2 - \theta_0^2)}{4\sigma(\sigma - 2)}t \\ & + \left[\frac{1}{32} + \frac{\theta_\star^2(\theta_t^2 - \theta_0^2)^2}{64} \left(\frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{(\sigma - 2)^3} \right) + \frac{(1 - \theta_\star^2)(\theta_0^2 - \theta_t^2)^2 + 2\theta_\star^2(\theta_0^2 + \theta_t^2)}{32\sigma(\sigma - 2)} \right. \\ & \left. - \frac{(1 - \theta_\star^2)((\theta_0 - 1)^2 - \theta_t^2)((\theta_0 + 1)^2 - \theta_t^2)}{32(\sigma + 1)(\sigma - 3)} \right] t^2 + \mathcal{O}(t^3), \end{aligned} \quad (3.96)$$

no qual pode ser usada para encontrar uma expressão em função dos parâmetros $\{t, c_t, \theta_0, \theta_t, \theta_\star\}$ fornecidos novamente por (3.81), isto é,

$$\sigma = \sigma(t, c_t, \theta_0, \theta_t, \theta_\star). \quad (3.97)$$

Nota-se que a expressão da expansão para τ_V , (3.85), é *meromorfa*¹⁶ em $\kappa_V t^\sigma$, de modo que a primeira equação no MRH, $\tau_V(\{\theta\}; \sigma, \eta; t) = 0$, pode ser invertida para se obter uma

¹⁶ Uma função $f(z)$ é dita meromorfa quando definida em um aberto $U \in \mathbb{C}$ exceto em um conjunto discreto de pontos, S , formado por seus respectivos polos. Disto, seja $z_i \in S$, existe um inteiro m tal que $(z - z_i)^m f(z)$ é holomorfa em determinada vizinhança de z_i . Portanto, no domínio $D(z; \mathbb{C}) = U \setminus S$ a função pode ser expandida em série de Taylor que, localmente, equivale à função. Consultar [62].

série para $\kappa_V t^\sigma$ em função de t . Novamente assumindo a condição $-1 < \Re(\sigma) < 1$ para σ , obtém-se a expressão [44]

$$\Theta_V(\{\theta\}; \sigma) e^{i\pi\eta} t^{\sigma-1} = \chi_V(\{\theta\}, \sigma; t), \quad (3.98)$$

com

$$\Theta_V(\{\theta\}; \sigma) = \frac{\Gamma(2-\sigma)^2}{\Gamma(\sigma)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\theta_\star + \sigma)\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_\star - \sigma)\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_t + \sigma)\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_t - \sigma)\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\theta_0 - \theta_t + \sigma)\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta_t - \sigma)\right)}, \quad (3.99)$$

sendo $\chi_V(\{\theta\}; \sigma; t)$ uma função analítica, desde que t seja pequeno, com sua respectiva expansão tendo a forma¹⁷:

$$\begin{aligned} \chi_V(\{\theta\}; \sigma; t) = & 1 + (\sigma - 1) \frac{\theta_\star(\theta_t^2 - \theta_0^2)}{\sigma^2(\sigma - 2)^2} t + \left[\frac{\theta_\star^2(\theta_t^2 - \theta_0^2)^2}{64} \left(\frac{5}{\sigma^4} - \frac{1}{(\sigma - 2)^4} - \frac{2}{(\sigma - 2)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\sigma(\sigma - 2)} \right) - \frac{(\theta_t^2 - \theta_0^2)^2 + 2\theta_\star^2(\theta_0^2 + \theta_t^2)}{64} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{(\sigma - 2)^2} \right) + (1 - \theta_\star^2)(\theta_t^2 - (\theta_0 - 1)^2) \right. \\ & \left. \times \frac{(\theta_t^2 - (\theta_0 + 1)^2)}{128} \left(\frac{1}{(\sigma + 1)^2} - \frac{1}{(\sigma - 3)^2} \right) \right] t^2 + \mathcal{O}(t^3). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Vale ressaltar que para a expressão (3.98), também há uma expansão deste tipo, no entanto, com a mudança $\sigma \rightarrow -\sigma$ e $e^{i\pi\eta} \rightarrow e^{-i\pi\eta}$, assumindo que $\Re(\sigma) < 0$.

Por fim, utilizando-se da condição dos MQNs expressa por (3.94) e substituindo na Eq. (3.98), bem como a expressão para $\Theta_V(\{\theta\}; \sigma)$, (3.99), e a propriedade de reflexão da *função gamma*, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$, obtém-se

$$\Theta_V(\{\theta\}; \sigma) e^{i\pi\eta} = -e^{-i\pi\eta} \Theta_V(-\{\theta\}; \sigma), \quad (3.101)$$

quando η satisfaz (3.94). Substituindo esta relação novamente na Eq. (3.98), assumindo que $\Re(\sigma) > 0$ ¹⁸, encontra-se a expressão que fornece os MQNs:

$$-e^{-i\pi\sigma} \Theta_V(-\{\theta\}; \sigma) t^{\sigma-1} = \chi_V(\{\theta\}; \sigma; t). \quad (3.102)$$

Constatando-se tratar de uma *equação transcendental*

Portanto, o problema encontra-se resolvido cabendo agora apenas a aplicação numérica para consequente obtenção dos resultados.

¹⁷ Ressalta-se que assume-se que tal série converge, porém não há prova formal a este respeito.

¹⁸ Para $\Re(\sigma) < 0$, encontra-se a devida expressão correta, porém, com $\sigma \rightarrow -\sigma$.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS MQNS

“Vai com a minha bênção, e grava na memória estes preceitos: ‘Não dês língua aos teus próprios pensamentos, nem corpo aos que não forem convenientes.’
‘Sê lhano, mas evita abastardares-te.’
‘O amigo comprovado, prende-o firme no coração com vínculos de ferro, mas a mão não calejes com saudares a todo instante amigos novos.’
‘Foge de entrar em briga; mas, brigando, acaso, faz o competidor temer-te sempre.’
‘A todos, teu ouvido; a voz a poucos; ouve opiniões, mas forma juízo próprio.’
‘Conforme a bolsa, assim tenhas a roupa: sem fantasia; rica, mas discreta, que o traje às vezes o homem denuncia. Nisso, principalmente, são pichosas as pessoas de classe e prol na França.’
‘Não emprestes nem peças emprestado; que emprestar é perder dinheiro e amigo, e o oposto embota o fio à economia.’
‘Mas, sobretudo, sê a ti próprio fiel; segue-se disso, como o dia à noite, que a ninguém poderás jamais ser falso.’”
William Shakespeare

Neste último e conclusivo capítulo apresentamos os resultados numericamente obtidos para os MQNs e postos em gráficos, facilitando a identificação de seu comportamento ao variarmos o *limite extremal* e sua respectiva conveniente reparametrização, de modo a observar o comportamento dos modos próximo à extremalidade, isto é, $M = Q$. Aqui, consideramos a ausência de monopolos magnéticos, com isto o BN-RN *não-comutativo* possui apenas a carga elétrica total, Q .

Por fim, mostramos que a presença da não-comutatividade, em primeira ordem, não afeta a existência de um *ponto de bifurcação* responsável por, a depender do valor qQ , separar os MQNs em *amortecidos* e *subamortecidos* como aqueles obtidos em [44]. Determinamos o valor crítico do acoplamento, qQ_c , com cinco casas decimais de precisão, no qual separa os modos acima e percebemos uma ligeira variação quando comparado com o citado artigo.

4.1 REESCREVENDO OS PARÂMETROS ACESSÓRIOS

Para a implementação numérica, faz-se conveniente introduzir uma parametrização para a razão Q/M , dada por

$$\frac{Q}{M} = \cos \nu \quad , \quad \nu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4.1)$$

de modo que no limite extremal $Q \rightarrow M$, o que implica $r_+ \rightarrow r_-$, tem-se $\nu \rightarrow 0$. Consequentemente, os parâmetros acessórios dados pelo conjunto $\{\theta\} = \{\theta_-, \theta_+, \theta_\star\}$ e fornecidos pela ECH base da presente análise, dada pela Eq. (3.42), ou seja,

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left[\frac{1 - \theta_-}{z} + \frac{1 - \theta_+}{z - t} \right] \frac{dy(z)}{dz} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\theta_\star}{2z} + \frac{tc_t}{z(z - t)} \right] y(z) = 0 \quad (4.2)$$

são agora escritos como

$$\begin{cases} \theta_+ = s + \frac{i}{2\pi T_+} \left[\omega - \frac{qQ}{M(1 + \sin \nu)} \right] \\ \theta_- = s - \frac{i}{2\pi T_-} \left[\omega - \frac{qQ}{M(1 - \sin \nu)} \right] \\ \theta_\star = -2s + 2i(2M\omega - qQ) - iamqQ \left[\frac{(M\omega)(1 - \sin \nu) - qQ}{(M\omega)^2 \sin \nu (1 - \sin \nu)} \right] \end{cases} \quad (4.3)$$

onde redefinimos o parâmetro não-comutativo, de modo a termos $a/M \rightarrow a$ para ficar ajustado de maneira adequada na computação numérica, isto é, no código. Devido ao fato de M ser a massa do BN-RN e tomando esta como constante, não há influência alguma na dinâmica esta redefinição. Os horizontes de eventos, bem como a sua respectiva temperatura e o módulo conforme são agora escritos como

$$\begin{cases} r_\pm = M(1 \pm \sin \nu) \\ T_\pm = \pm \frac{\sin \nu}{2\pi M(1 \pm \sin \nu)^2} \\ t = 4iM\omega \sin \nu \end{cases} \quad (4.4)$$

e o parâmetro acessório

$$tc_t = {}_s\lambda_\ell + 2s - i(1 - 2s)qQ + 2[qQ + i(1 - 2s) + (qQ - is)\sin \nu](M\omega) - 2(1 + \sin \nu)^2(M\omega)^2 \quad (4.5)$$

com ${}_s\lambda_\ell = (\ell - s)(\ell + s + 1)$ decorrente do uso dos *harmônicos esferoidais spin-ponderados*, ${}_sS_\ell^m(\theta, \phi)$. Os valores numéricos dos MQNs foram obtidos resolvendo-se o MRH dado pelo sistema (3.84), usando para esta finalidade a implementação numérica das expansões da função

de Painlevé τ_V , (3.85), e do parâmetro acessório tc_t , (3.96), por meio do uso da *linguagem Julia*. Para encontrar as raízes da função τ_V , utilizou-se para isto o algoritmo do *método de Muller*, com o determinante de Fredholm, presente na expansão de τ_V , *truncado* no número de componentes de Fourier tal que $N_f = 56$ e o parâmetro tc_t , em $N_c = 128$.

Todos os resultados foram obtidos considerando-se o estado do modo ${}_s\omega_\ell^m$ sendo caracterizado pelo conjunto de *números quânticos* que o definem, isto é, $\{\ell, m, s\}$. Com o intuito de confirmar a veracidade do código, bem como sua precisão, inicialmente consideramos o parâmetro não-comutativo nulo, ou seja, $a = 0$, e o conjunto composto por $\{\ell, m, s\} = \{1, 0, 0\}$ caracterizando uma perturbação escalar. Disto, obtemos a Tab. 2 variando-se o acoplamento, qQ .

Tabela 2 – Confirmação dos $MQNs$ para $\{\ell, s, m\} = \{1, 0, 0\}$

$Q/M = 0.999999$		
qQ	$a = 0$	[44]
0.0	$0.3776416 - 0.0893845i$	$0.3776416 - 0.0893845i$
0.1	$0.4291343 - 0.0888385i$	$0.4291343 - 0.0888385i$
0.2	$0.4836193 - 0.0872035i$	$0.4836193 - 0.0872035i$
0.3	$0.5411167 - 0.0844886i$	$0.5411167 - 0.0844886i$
0.4	$0.6016610 - 0.0807101i$	$0.6016610 - 0.0807101i$
0.5	$0.6653021 - 0.0758925i$	$0.6653021 - 0.0758925i$
0.6	$0.7321070 - 0.0700711i$	$0.7321070 - 0.0700711i$
0.7	$0.8021625 - 0.0632953i$	$0.8021625 - 0.0632953i$
0.8	$0.8755790 - 0.0556340i$	$0.8755790 - 0.0556340i$
0.9	$0.9524949 - 0.0471845i$	$0.9524949 - 0.0471845i$
1.0	$1.0330846 - 0.0380869i$	$1.0330846 - 0.0380869i$

Fonte: O autor (2024)

Percebe-se uma excelente exatidão dos dados aqui obtidos com aqueles em [44], tendo sido feito o arredondamento na sétima casa decimal.

Com o intuito de analisar o comportamento dos MQNs quando neste sistema tem-se o parâmetro não-comutativo em primeira ordem, provocados por perturbações espinoriais sem massa, escolhemos $\ell = m = |s|$, mais especificamente,

$$\{\ell, m, s\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\} \quad (4.6)$$

onde o valor negativo para a helicidade do spin se deve ao fato de sua natureza *outgoing* dos campos. A partir deste conjunto, será obtido o comportamento dos modos.

A apresentação que se fará dos MQNs será acompanhada das partes *real* e *imaginária*, isto é,

$${}_s\omega_\ell^m = \Re({}_s\omega_\ell^m) + i\Im({}_s\omega_\ell^m), \quad (4.7)$$

em seus respectivos gráficos. Como sabido, a parte real é responsável pela oscilação tal como os MNs e apresenta pouca importância sobre sua estabilidade. Por outro lado, a parte imaginária, responsável pelo comportamento amortecido, é de fundamental importância neste quesito. Para que seja possível uma existência em seu estado de equilíbrio, a parte complexa dos modos deve possuir sinal negativo; além do mais, esta componente é de importância também no que diz respeito à comprovação dos buracos negros através da identificação das ondas gravitacionais, pois encontra-se intrinsecamente relacionado com o *tempo de decaimento* dos modos, τ . A relação entre o tempo de decaimento e a parte imaginária é dada por:

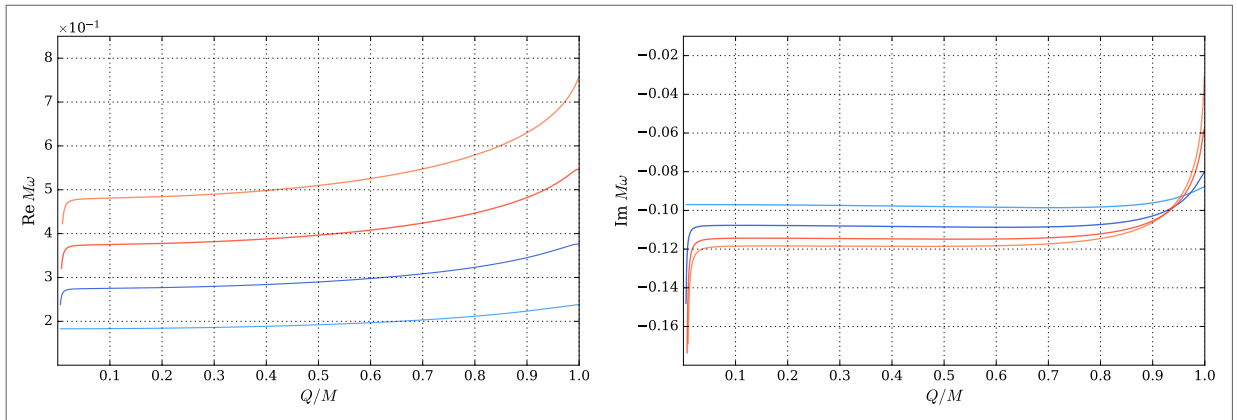
$$\tau \sim \frac{1}{|\Im({}_s\omega_\ell^m)|}. \quad (4.8)$$

Portanto, os MQNs que apresentam menor valor terão maior tempo de decaimento, o que implica em maior facilidade por parte do aparato experimental em identificá-los.

4.1.1 MQNs: variando o limite extremal, Q/M

Na Fig. 6 abaixo, apresentamos o gráfico comportamental dos MQNs variando-se o *limite extremal*, Q/M , no BN-RN:

Figura 6 – Comportamento dos MQNs variando Q/M para diferentes valores de acoplamento, qQ



Fonte: O autor (2024)

onde a cor azul anil configura o espaço-tempo comutativo, isto é, $a = 0$, e demais cores com a presença do PNC adotado:

$$a = 1.0 \times 10^{-4} m$$

Fica evidente que a presença do PNC faz com que haja uma divergência próximo à origem, ou seja, quando o buraco negro de Reissner-Nordström tende à solução de Schwarzschild, $Q = 0$. Na Tab. 3 a seguir, elencamos alguns valores dos modos acima¹.

Tabela 3 – $MQNs$ do BN de Reissner-Nordström para $\{\ell, m, s\} = \{1/2, 1/2, -1/2\}$

Q/M	$M_s \omega_\ell^m$			
	$qQ = 0.00$	$qQ = 0.25$	$qQ = 0.50$	$qQ = 0.75$
0.0	$0.1829 - 0.0969i$	$X + Yi$	$X + Yi$	$X + Yi$
0.1	$0.1832 - 0.0970i$	$0.2751 - 0.1077i$	$0.3750 - 0.1143i$	$0.4808 - 0.1184i$
0.2	$0.1843 - 0.0971i$	$0.2768 - 0.1078i$	$0.3775 - 0.1143i$	$0.4842 - 0.1183i$
0.3	$0.1860 - 0.0974i$	$0.2797 - 0.1080i$	$0.3817 - 0.1145i$	$0.4898 - 0.1184i$
0.4	$0.1886 - 0.0977i$	$0.2839 - 0.1083i$	$0.3878 - 0.1147i$	$0.4981 - 0.1185i$
0.5	$0.1921 - 0.0981i$	$0.2897 - 0.1085i$	$0.3963 - 0.1148i$	$0.5096 - 0.1185i$
0.6	$0.1968 - 0.0984i$	$0.2976 - 0.1087i$	$0.4080 - 0.1147i$	$0.5255 - 0.1182i$
0.7	$0.2030 - 0.0986i$	$0.3083 - 0.1085i$	$0.4240 - 0.1141i$	$0.5474 - 0.1173i$
0.8	$0.2115 - 0.0982i$	$0.3231 - 0.1073i$	$0.4468 - 0.1121i$	$0.5791 - 0.1145i$
0.9	$0.2233 - 0.0961i$	$0.3452 - 0.1028i$	$0.4822 - 0.1054i$	$0.6301 - 0.1061i$
1.0	$0.2380 - 0.0878i$	$0.3768 - 0.0802i$	$0.5451 - 0.0579i$	$0.7552 - 0.0312i$

Fonte: O autor (2024)

Diante do exposto, evidencia-se que no espaço-tempo não-comutativo há um efeito catastrófico próximo à origem quando varia-se a razão Q/M , isto é, o *parâmetro não-comutativo* em primeira ordem faz com que os MQNs divirjam no limite $Q/M \rightarrow 0$. Passamos a analisar a seguir se há um comportamento catastrófico no que diz respeito ao comportamento dos MQNs encontrados em [44] próximos da extremalidade, $Q/M \rightarrow 1$.

4.1.2 MQNs: variando o parâmetro ν

Fazendo-se uso da parametrização para o *limite extremal*, Eq. (4.1), de modo a variarmos o parâmetro angular ν , e ser possível analisar o comportamento para diferentes valores de acoplamento, qQ , próximos a $Q/M = 1$, obtém-se a Fig. 7.

¹ Os valores $X + Yi$ são tais que, neste limite $Q/M \rightarrow 0$, X tende à valores numéricos cada vez mais diminutos, enquanto Y à valores cada vez mais negativos, como pode ser notado pela Fig. 6.

Nota-se que, de fato, os MQNs possuem comportamentos distintos a depender do acoplamento. Disto, conclui-se que a presença do PNC, em primeira ordem, não afeta a natureza dos modos encontrados em [44] e, portanto, não há efeito catastrófico próximo da extremalidade. Realizando um estudo detalhado de variados valores para o acoplamento, encontra-se que seu valor crítico, isto é, que dita o comportamento dos MQNs como sendo, com cinco casas decimais, igual a

$$qQ_c(s = -1/2) \simeq 0.64271, \quad (4.9)$$

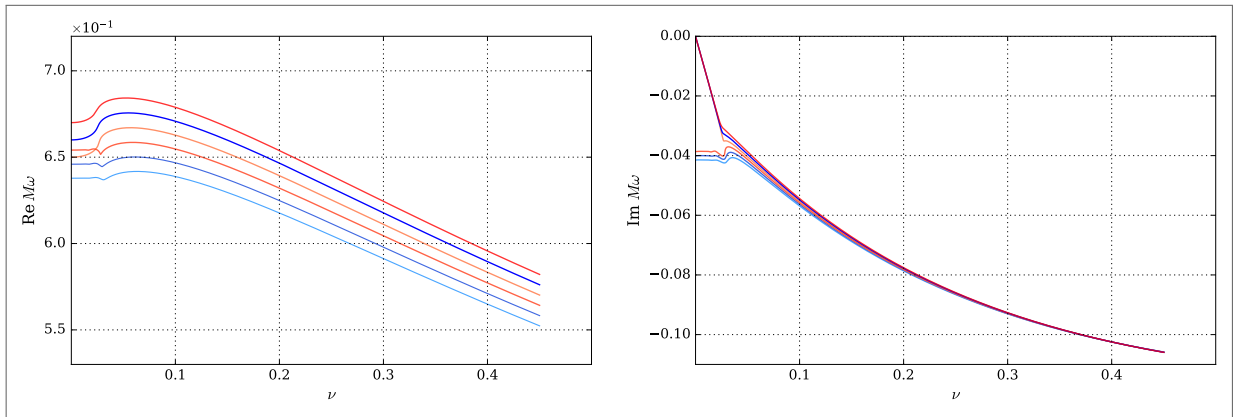
com aqueles indo a zero denominados *modos subamortecidos* e os que tendem a valores constantes negativos de *modos amortecidos*, sendo este valor extremamente sensível à variações, isto é, um valor ligeiramente acima, $qQ > qQ_c$, faz com que os modos comportem-se como *subamortecidos* e, ligeiramente abaixo, $qQ < qQ_c$, como *amortecidos*. Pela escolha particular da parametrização

$$\frac{Q}{M} = \cos \nu \quad \implies \quad \nu = \arccos\left(\frac{Q}{M}\right) \quad (4.10)$$

é possível identificar o *valor crítico* ν_c do gráfico abaixo, sendo seu valor aproximado igual a

$$\nu_c \simeq 0.02777. \quad (4.11)$$

Figura 7 – Comportamento dos MQNs variando ν para diferentes valores de acoplamento, qQ



Fonte: O autor (2024)

Disto, segue alguns valores para os MQNs e seus respectivos acoplamentos presente na Tab. 4.

Deve-se notar que os MQNs subamortecidos, próximos à extremalidade, $\nu \rightarrow 0$, tendem ao valor puramente real $M\omega \rightarrow qQ^2$. Isto se deve ao fato dos modos subamortecidos terem a

² Isto é, tornam-se MNs.

Tabela 4 – MQN_s amortecidos e subamortecidos para $\{\ell, m, s\} = \{1/2, 1/2, -1/2\}$

ν	$M_s \omega_\ell^m$			
	MQN_s Amortecidos		MQN_s Subamortecidos	
	$qQ = 0.63$	$qQ = 0.64$	$qQ = 0.65$	$qQ = 0.66$
0.45	$0.5582 - 0.1058i$	$0.5642 - 0.1058i$	$0.5701 - 0.1059i$	$0.5761 - 0.1059i$
0.40	$0.5710 - 0.1024i$	$0.5771 - 0.1024i$	$0.5833 - 0.1024i$	$0.5894 - 0.1024i$
0.35	$0.5842 - 0.0982i$	$0.5906 - 0.0982i$	$0.5969 - 0.0981i$	$0.6033 - 0.0981i$
0.30	$0.5978 - 0.0929i$	$0.6044 - 0.0929i$	$0.6110 - 0.0928i$	$0.6177 - 0.0927i$
0.25	$0.6115 - 0.0864i$	$0.6184 - 0.0863i$	$0.6253 - 0.0861i$	$0.6322 - 0.0860i$
0.20	$0.6247 - 0.0784i$	$0.6319 - 0.0782i$	$0.6392 - 0.0780i$	$0.6464 - 0.0778i$
0.15	$0.6370 - 0.0685i$	$0.6445 - 0.0682i$	$0.6521 - 0.0679i$	$0.6597 - 0.0676i$
0.10	$0.6467 - 0.0563i$	$0.6547 - 0.0558i$	$0.6627 - 0.0553i$	$0.6708 - 0.0548i$
0.05	$0.6496 - 0.0422i$	$0.6582 - 0.0412i$	$0.6669 - 0.0406i$	$0.6755 - 0.0394i$
0.00	$0.6459 - 0.0400i$	$0.6541 - 0.0386i$	$0.6500 - 0.0000i$	$0.6600 - 0.0000i$

Fonte: O autor (2024)

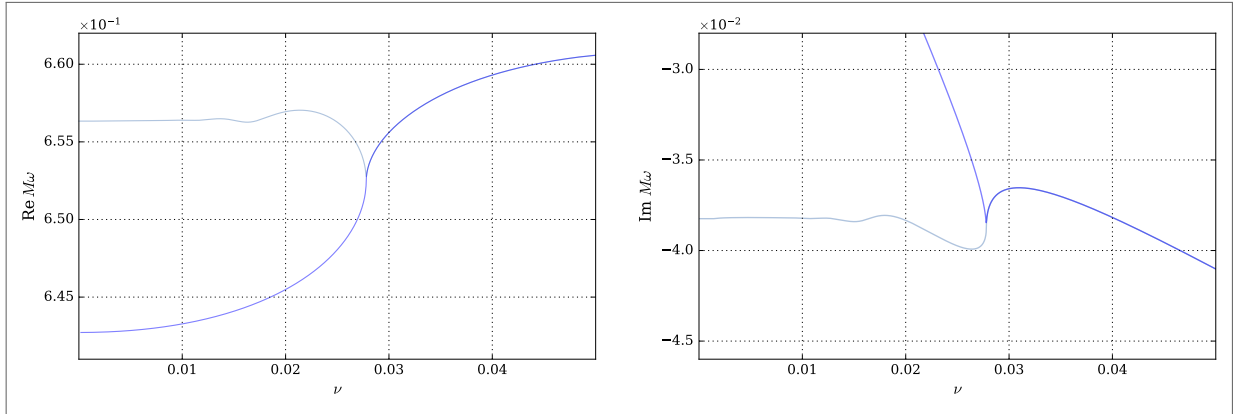
propriedade que os parâmetros associados à componente radial, isto é, a ECH dados por θ_+ e θ_- , terem limites finitos neste caso. Sabemos, pelo que foi exposto acima, que a expansão do parâmetro t é proporcional a $\sin \nu$, sendo igualmente pequeno neste limite, $\nu \rightarrow 0$, podendo resolver o MRH aproximando apenas para os primeiros termos das respectivas expansões envolvidas. Com isso, pode-se expandir c_t e $\chi_V(\{\theta\}, \sigma; t)$ em termos de ν . Disto, segue a expressão da expansão para os modos próximos da extremalidade [44]

$$M\omega = qQ + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \nu^n, \quad (4.12)$$

sendo β_n ³ os coeficientes que codificam correções não analíticas em ν . Os valores destes coeficientes, bem como do parâmetro de monodromia σ , podem ser encontrados de maneira recursiva pelas expansões (3.96) e (3.102), podendo ser encontrado o primeiro termo da expansão no acima citado artigo.

Ampliando o gráfico próximo ao ponto crítico, onde há a separação dos modos, obtém-se a Fig. 8.

³ Como no presente caso o parâmetro θ_* possui uma dependência no PNC, conclui-se que $\{\beta_i\}_{i=1}^N$ também apresentarão esta dependência.

Figura 8 – Ponto crítico da bifurcação dos MQN_s 

Fonte: O autor (2024)

É importante notar que este ponto comporta-se tal como um ponto crítico na descrição macroscópica da Termodinâmica, isto é, uma *transição de fase*. Sendo as *condições de contorno* que dão origem aos MQNs a afirmação que o *buraco negro* não admite concentrações de matéria-energia em sua forma estável ao seu redor, conclui-se que esta é a assinatura, codificada nos modos, da transição de fase que perpassa tais concentrações a depender do valor do acoplamento, qQ .

O presente interesse na análise dos modos para o conjunto $\{\ell, m, s\} = \{1/2, 1/2, -1/2\}$ deve-se a dois fatores:

1. Por se tratar de estados cuja energia é baixa, fundamental, resultando em valores diminutos para o módulo da parte imaginária dos modos e possibilitando assim a sua detecção, facilitada decorrente do longo tempo de decaimento, o que pode ser visto pela expressão (4.8), de modo que estes dominarão o sinal da perturbação. Modos com a parte imaginária maior, desaparecerão mais rapidamente.
2. Tal fenômeno acontecer para este conjunto de valores dos *números quânticos*, motivando a avaliação da análise levando em conta a presença do PNC em primeira ordem, isto é, em um espaço-tempo não-comutativo.

Deve-se chamar atenção para o fato da aplicação do *twist operator* dado pela Eq. (3.1), culminando na Eq. (3.14), resultar sempre na presença do PNC acompanhado do termo referente à *projeção do momento angular* (número azimutal), m , isto é, am . Portanto, conclui-se que no espaço-tempo não-comutativo a *degenerescência* é *quebrada*, fazendo surgir uma des-

crição física análoga ao *efeito Zeeman* dividindo os modos, ou seja, ${}_s\omega_\ell^m \neq {}_s\omega_\ell^{-m}$ para $m \neq 0$ [46].

Por fim, pelo que foi apresentado acerca dos MQNs por meio da análise gráfica, bem como das tabelas fornecidas com alguns valores, percebe-se que a parte imaginária é sempre negativa (ou tende a zero por valores negativos). Portanto, decorre disto que o buraco negro de Reissner-Nordström é linearmente estável quando perturbado por campos espinoriais, mesmo no espaço-tempo não-comutativo.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

*"Fiz de mim o que não soube
 E o que podia fazer de mim não o fiz.
 O dominó que vesti era errado.
 Conheceram-me logo por quem não era e não desmenti, e perdi-me.
 Quando quis tirar a máscara,
 Estava pegada à cara.
 Quando a tirei e me vi ao espelho,
 Já tinha envelhecido.
 Estava bêbado, já não sabia vestir o dominó que não tinha tirado.
 Deitei fora a máscara e dormi no vestiário
 Como um cão tolerado pela gerência
 Por ser inofensivo
 E vou escrever esta história para provar que sou sublime."
 Fernando Pessoa*

Nesta presente análise sobre a influência da não-comutatividade levando em conta a **primeira ordem** no buraco negro de Reissner-Nordström, isto é, seu respectivo espaço-tempo não-comutativo perturbado por campos espinoriais, realizou-se uma aproximação para sua implementação devido à ausência do PNC, nesta ordem, nas equações de campo. Tal aproximação foi baseada no comportamento da não-comutatividade para campos escalares, portanto, incrementando-o *ad hoc* apenas no *parâmetro* θ_* relacionada à ECH referente à parte radial, onde manteve-se a simetria esférica. O significado físico, por sua vez, de manter a não-comutatividade em θ_* deve-se ao fato deste parâmetro estar relacionado ao comportamento das soluções no infinito, de modo que os MQNs, sendo detectado por um observador localizado no *infinito espacial* ter real significância.

Foi observado que para os MQNs definido pelo *conjunto de números quânticos* tais que $\ell = m = |s|$, mais especificamente $\{\ell, m, s\} = \{1/2, 1/2, -1/2\}$, a não-comutatividade do espaço-tempo não interfere no comportamento físico descrito pelos modos e presente em [44]. Mais especificamente, foi notado que há uma divergência bastante acentuada e indo para valores negativos na parte *real* dos modos, próximo à origem quando varia-se o *limite extremal*, Q/M , isto é, quando tende-se a recuperar a solução shwarzschildiana, $Q \rightarrow 0$.

Tal divergência apresenta pouca importância, uma vez que esta componente diz respeito apenas ao comportamento oscilativo e como tende à valores negativos elevados, conclui-se que são altamente oscilantes, isto é, com curtos comprimentos de onda. No entanto, a correspondente parte imaginária quando próximo da extremalidade, $Q/M \rightarrow 1 \Rightarrow \nu \rightarrow 0$, fundamental na análise da estabilidade, pois diz respeito ao comportamento amortecivo, mantém seu comportamento, isto é, determinados MQNs tendem a zero por valores negativos enquanto outros a um valor constante negativo, sendo o primeiro caso denominado *modos subamortecidos*, e o segundo, *modos amortecidos*. O fator que determina qual será a natureza dos modos é o valor do acoplamento da carga do campo espinorial com a carga do BN-RN em relação a um valor crítico extremamente sensível, ou seja, qQ_c . Os modos oriundos de um acoplamento ligeiramente acima do valor crítico, $qQ > qQ_c$, possuem natureza *subamortecida*, enquanto aqueles com valor menor, $qQ < qQ_c$, *amortecidos*.

A determinação do valor crítico, qQ_c , foi feita a partir da análise numérica cuidadosa, onde foram consideradas cinco casas decimais e constatando ter valor $qQ_c(s = -1/2) \simeq 0.64271$. Também foi determinado o valor do parâmetro ν utilizado na parametrização para descrever o comportamento dos modos próximo ao limite extremal, $M = Q$, tendo este o valor aproximado $\nu_c \simeq 0.02777$, de modo que $Q/M \simeq 0.99960$. Este ponto de bifurcação dos modos comporta-se tal como um *ponto crítico*, separando a natureza e codificando a informação acerca das *transições de fase* da matéria-energia ao redor do buraco negro de Reissner-Nordström.

Portanto, conclui-se que no tratamento aproximativo utilizado para descrever perturbações espinoriais no espaço-tempo não-comutativo de Reissner-Nordström, não há variações significativas nos MQNs obtidos em [44]. Isto motiva, aliado ao interesse de estudar como a imprecisão de medições entre as coordenadas do espaço-tempo oriundo da geometria não-comutativa se encontra codificada em determinadas relações/quantidades físicas como os MQNs, a formular um estudo mais refinado e laborioso sobre a presença da não-comutatividade em ordem mais elevada, tais como a^2 ou $\mathcal{O}^2(a)$, e encontrar determinados traços de sua existência em buracos negros mais *realistas*, tal como o de *Kerr*, onde há a presença de rotação simbolizada pelo momento angular, J . A somar com isto, o fato de interesse relevante sobre *efeitos quânticos* serem amplificados próximos ao horizonte de eventos de buracos negros extremos, especialmente Kerr e Reissner-Nordström, codificados nas *dimensões de escala*, γ , como apontado por *Horowitz et al* em [32], por meio de uma *teoria de campo efetivo* para a gravidade, construída a partir da ação com o *tensor de Riemann* em ordens superiores.

REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, p. 844–847, 1915.
- 2 SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler flüssigkeit nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 424–434, 1916.
- 3 EINSTEIN, A. Näherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation. *sitzungsberichte der königlich preußischen akademie der wissenschaften (berlin)*. *Translated as "Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation," in Alfred Engel (translator) and Engelbert Schucking (consultant), The Collected Papers of Albert Einstein*, v. 6, p. 1914–1917, 1916.
- 4 ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- 5 REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a schwarzschild singularity. *Physical Review*, APS, v. 108, n. 4, p. 1063, 1957.
- 6 NEWMAN, E.; PENROSE, R. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 3, n. 3, p. 566–578, 1962.
- 7 CHANDRASEKHAR, S. *The mathematical theory of black holes*. [S.l.]: Oxford university press, 1998. v. 69.
- 8 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Elementary differential equations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017.
- 9 BRITO, R.; CARDOSO, V.; PANI, P. *Superradiance*. [S.l.]: Springer, 2020. v. 10.
- 10 CARDOSO, V.; RIO, A. del; KIMURA, M. Distinguishing black holes from horizonless objects through the excitation of resonances during inspiral (vol 100, 084046, 2019). *PHYSICAL REVIEW D*, AMER PHYSICAL SOC ONE PHYSICS ELLIPSE, COLLEGE PK, MD 20740-3844 USA, v. 101, n. 6, 2020.
- 11 BERTI, E.; CARDOSO, V.; CASALS, M. Eigenvalues and eigenfunctions of spin-weighted spheroidal harmonics in four and higher dimensions. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 2, p. 024013, 2006.
- 12 WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010.
- 13 NAGAR, A.; REZZOLLA, L. Gauge-invariant non-spherical metric perturbations of schwarzschild black-hole spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 22, n. 16, p. R167, 2005.
- 14 MARTEL, K.; POISSON, E. Gravitational perturbations of the schwarzschild spacetime: a practical covariant and gauge-invariant formalism. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 10, p. 104003, 2005.

- 15 ZERILLI, F. J. Gravitational field of a particle falling in a schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. *Physical Review D*, APS, v. 2, n. 10, p. 2141, 1970.
- 16 EDELSTEIN, L. A.; VISHVESHWARA, C. Differential equations for perturbations on the schwarzschild metric. *Physical Review D*, APS, v. 1, n. 12, p. 3514, 1970.
- 17 ZERILLI, F. J. Effective potential for even-parity regge-wheeler gravitational perturbation equations. *Physical Review Letters*, APS, v. 24, n. 13, p. 737, 1970.
- 18 SAGO, N.; NAKANO, H.; SASAKI, M. Gauge problem in the gravitational self-force: Harmonic gauge approach in the schwarzschild background. *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 10, p. 104017, 2003.
- 19 JARAMILLO, J. L.; MACEDO, R. P.; SHEIKH, L. A. Gravitational wave signatures of black hole quasinormal mode instability. *Physical Review Letters*, APS, v. 128, n. 21, p. 211102, 2022.
- 20 BERTI, E.; CARDOSO, V.; STARINETS, A. O. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 16, p. 163001, 2009.
- 21 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. Quantum mechanics, volume 1. *Quantum Mechanics*, v. 1, p. 898, 1986.
- 22 KOKKOTAS, K. D.; SCHMIDT, B. G. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 2, p. 1–72, 1999.
- 23 VISHVESHWARA, C. Scattering of gravitational radiation by a schwarzschild black-hole. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 227, n. 5261, p. 936–938, 1970.
- 24 JEFFREYS, H. On certain approximate solutions of lineae differential equations of the second order. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 428–436, 1925.
- 25 WENTZEL, G. Eine verallgemeinerung der quantenbedingungen für die zwecke der wellenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 38, n. 6-7, p. 518–529, 1926.
- 26 KRAMERS, H. A. Wellenmechanik und halbzahlige quantisierung. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 39, n. 10-11, p. 828–840, 1926.
- 27 IYER, S.; WILL, C. M. Black-hole normal modes: A wkb approach. i. foundations and application of a higher-order wkb analysis of potential-barrier scattering. *Physical Review D*, APS, v. 35, n. 12, p. 3621, 1987.
- 28 BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999. v. 1.
- 29 LEAVER, E. W. An analytic representation for the quasi-normal modes of kerr black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 402, n. 1823, p. 285–298, 1985.
- 30 GAUTSCHI, W. Computational aspects of three-term recurrence relations. *SIAM review*, SIAM, v. 9, n. 1, p. 24–82, 1967.

- 31 ZHAO, Y.; SUN, B.; MAI, Z.-F.; CAO, Z. Quasi normal modes of black holes and detection in ringdown process. *arXiv preprint arXiv:2212.00747*, 2022.
- 32 HOROWITZ, G. T.; KOLANOWSKI, M.; REMMEN, G. N.; SANTOS, J. E. Extremal kerr black holes as amplifiers of new physics. *arXiv preprint arXiv:2303.07358*, 2023.
- 33 REISSNER, H. Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 355, n. 9, p. 106–120, 1916.
- 34 NORDSTRÖM, G. On the energy of the gravitation field in einstein's theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, v. 20, p. 1238–1245, 1918.
- 35 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. *The large scale structure of space-time*. [S.l.]: Cambridge university press, 2023.
- 36 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- 37 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- 38 FRANCESCO, P.; MATHIEU, P.; SÉNÉCHAL, D. *Conformal field theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- 39 THORNE, K. S.; WHEELER, J. A.; MISNER, C. W. *Gravitation*. [S.l.]: Freeman San Francisco, CA, 2000.
- 40 ORTÍN, T. *Gravity and strings*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- 41 BLAU, M. *Lecture notes on general relativity*. [S.l.]: Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern, 2011.
- 42 HAYAKAWA, M. Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative qed on r_4 . *Physics Letters B*, Elsevier, v. 478, n. 1-3, p. 394–400, 2000.
- 43 ĆIRIĆ, M. D.; KONJIK, N.; SAMAROV, A. Propagation of spinors on a noncommutative spacetime: equivalence of the formal and the effective approach. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 83, n. 5, p. 387, 2023.
- 44 CAVALCANTE, J. P.; CUNHA, B. C. da. Scalar and dirac perturbations of the reissner-nordström black hole and painlevé transcendents. *Physical Review D*, APS, v. 104, n. 12, p. 124040, 2021.
- 45 ASCHIERI, P.; CASTELLANI, L. Noncommutative gravity coupled to fermions: second order expansion via seiberg-witten map. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2012, n. 7, p. 1–27, 2012.
- 46 ĆIRIĆ, M. D.; KONJIK, N.; SAMAROV, A. Noncommutative scalar quasinormal modes of the reissner–nordström black hole. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 35, n. 17, p. 175005, 2018.
- 47 SLAVIANOV, S.; LAY, W. *Special functions: a unified theory based on singularities*. Oxford Mathematical Monographs, 2000.

- 48 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. Quantum fields in curved space. Cambridge university press, 1984.
- 49 GUPTA, K.; JURIC, T.; SAMSAROV, A.; SMOLIC, I. Noncommutativity and logarithmic correction to the black hole entropy. arxiv 2022. *arXiv preprint arXiv:2209.07168*.
- 50 SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Physical Review*, APS, v. 71, n. 1, p. 38, 1947.
- 51 LUKIERSKI, J.; RUEGG, H. Quantum κ -poincaré in any dimension. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 329, n. 2-3, p. 189–194, 1994.
- 52 NICOLINI, P. Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 24, n. 07, p. 1229–1308, 2009.
- 53 CALMET, X. What are the bounds on space-time non-commutativity? *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, Springer, v. 41, p. 269–272, 2005.
- 54 CHAICHIAN, M.; SHEIKH-JABBARI, M.; TUREANU, A. Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in noncommutative qed. *Physical Review Letters*, APS, v. 86, n. 13, p. 2716, 2001.
- 55 KANAZAWA, T.; LAMBIASE, G.; VILASI, G.; YOSHIOKA, A. Noncommutative schwarzschild geometry and generalized uncertainty principle. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, n. 2, p. 95, 2019.
- 56 KOBAKHIDZE, A.; LAGGER, C.; MANNING, A. Constraining noncommutative spacetime from gw150914. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 6, p. 064033, 2016.
- 57 CONTE, R. *The Painlevé property: one century later*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- 58 HARAOKA, Y. Linear differential equations in the complex domain. *Suugaku Shobou, Tokyo*, Springer, 2015.
- 59 JIMBO, M. Monodromy problem and the boundary condition for some painlevé equations. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Research Institute for Mathematical Sciences, v. 18, n. 3, p. 1137–1161, 1982.
- 60 CUNHA, B. C. da; CAVALCANTE, J. P. Teukolsky master equation and painlevé transcendents: numerics and extremal limit. *Physical Review D*, APS, v. 104, n. 8, p. 084051, 2021.
- 61 LISOVYY, O.; NAIDIUK, A. Accessory parameters in confluent heun equations and classical irregular conformal blocks. *Letters in Mathematical Physics*, Springer, v. 111, n. 6, p. 137, 2021.
- 62 LANG, S. *Complex analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 103.

**APÊNDICE A – COMPONENTES DOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL,
TENSOR DE RIEMANN, TENSOR E ESCALAR DE RICCI E TENSOR
ENERGIA-MOMENTO**

Define-se $\Xi(r) := r^2 - 2Mr - (Q^2 + P^2)$ com Q e P sendo a carga elétrica e o monopolo magnético, respectivamente.

Fazendo-se uso da expressão para o cálculo do símbolo de Christoffel (2.33), isto é,

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}), \quad (\text{A.1})$$

para a particular métrica de Reissner-Nordström escrita no sistemas de coordenadas $\{x^\mu\} = \{t, r, \theta, \phi\}$, dada pelo tensor métrico (2.69), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tr} &= \frac{Mr - (Q^2 + P^2)}{\Xi r} & \Gamma^r_{tt} &= \frac{[Mr - (Q^2 + P^2)]\Xi}{r^5} & \Gamma^r_{rr} &= -\frac{Mr - (Q^2 + P^2)}{\Xi r} \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{\Xi}{r} & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{\Xi \sin^2\theta}{r} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\frac{\sin(2\theta)}{2} \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\theta_{\theta\phi} &= \cotg(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Utilizando a expressão (2.34)

$$R_{abc}{}^d = -2\partial_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^e_{c[a}\Gamma^d_{b]e}, \quad (\text{A.3})$$

para obter-se as respectivas componentes do tensor de Riemann, encontra-se:

$$\begin{aligned} R_{trt}{}^r &= \frac{2Mr - 3(Q^2 + P^2)}{\Xi r^2} & R_{t\theta t}{}^\theta &= -\frac{Mr - (Q^2 + P^2)}{r^2} \\ R_{t\phi t}{}^\phi &= -\frac{Mr - (Q^2 + P^2)}{r^2} \sin(\theta) & R_{rtr}{}^t &= -\frac{[2Mr - 3(Q^2 + P^2)]\Xi}{r^6} \\ R_{r\theta r}{}^\theta &= -\frac{Mr - (Q^2 + P^2)}{r^2} & R_{r\phi r}{}^\phi &= -\frac{[Mr - (Q^2 + P^2)]}{r^2} \sin^2(\theta) \\ R_{\theta t \theta}{}^t &= \frac{[Mr - (Q^2 + P^2)]\Xi}{r^6} & R_{\theta t \theta}{}^t &= -\frac{Mr - (Q^2 + P^2)}{\Xi r^2} \\ R_{\theta\phi\theta}{}^\phi &= \left(1 - \frac{\Xi}{r^2}\right) \sin^2(\theta) & R_{\phi t \phi}{}^t &= \frac{[Mr - (Q^2 + P^2)]\Xi}{r^6} \\ R_{\phi r \phi}{}^r &= -\frac{Mr - (Q^2 + P^2)}{\Xi r^2} & R_{\phi\theta\phi}{}^\theta &= \left(1 - \frac{\Xi}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Por sua vez, utilizando-se da expressão (2.37), isto é,

$$R_{abc}{}^b = g^{bd}R_{abcd} = R_{ac} = -2\partial_{[a}\Gamma^b_{b]c} + 2\Gamma^e_{c[a}\Gamma^b_{b]e}, \quad (\text{A.5})$$

obtém-se as componentes do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} g_{tt} & R_{rr} &= -\frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} g_{rr} \\ R_{\theta\theta} &= +\frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} g_{\theta\theta} & R_{\phi\phi} &= +\frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} g_{\phi\phi} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ou explicitamente

$$\begin{aligned}
 R_{tt} &= \frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} \right) \\
 R_{rr} &= -\frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} \right)^{-1} \\
 R_{\theta\theta} &= \frac{(Q^2 + P^2)}{r^2} \\
 R_{\phi\phi} &= \frac{(Q^2 + P^2)}{r^2} \sin^2\theta
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Deve-se observar que na condição $Q = P = 0$, recupera-se a equação que resulta no buraco negro de Schwarzschild como solução, pois

$$R_{ab} = 0, \tag{A.8}$$

sendo um resultado esperado, uma vez que sem a presença das quantidades físicas que dão origem ao campo eletromagnético clássico e na ausência de demais concentrações de matéria-energia, tem-se o vácuo. A equação (A.8) é exatamente a ECE para estas condições.

Salienta-se que, devido ao fato do *tensor energia-momento eletromagnético* possuir a condição de nulidade do traço

$$R_{ab} = \kappa T_{ab} \implies R := g^{ab} R_{ab} = g^{ab} T_{ab} = 0, \tag{A.9}$$

decorre que o escalar de Ricci também o é, ou seja:

$$R = 0. \tag{A.10}$$

Após a determinação das quantidades inerentemente geométricas decorrente da teoria de campo da relatividade geral, apresentamos as componentes do tensor energia-momento

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{de} F^{de} \right), \tag{A.11}$$

com F_{ab} dado pelo tensor (2.58). Utilizando-se do tensor métrico de Reissner-Nordström, (2.69), bem como o fato

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2 \frac{(Q^2 + P^2)}{r^4}, \tag{A.12}$$

obtemos as componentes

$$\begin{aligned}
 T_{tt} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} g_{tt} \quad , \quad T_{rr} = -\frac{1}{8\pi} \frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} g_{rr} \\
 T_{\theta\theta} &= +\frac{1}{8\pi} \frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} g_{\theta\theta} \quad , \quad T_{\phi\phi} = +\frac{1}{8\pi} \frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} g_{\phi\phi}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

ou explicitamente

$$\begin{aligned}
 T_{tt} &= +\frac{1}{8\pi} \frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} \right) \\
 T_{rr} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{(Q^2 + P^2)}{r^4} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2 + P^2}{r^2} \right)^{-1} \\
 T_{\theta\theta} &= +\frac{1}{8\pi} \frac{(Q^2 + P^2)}{r^2} \\
 T_{\phi\phi} &= +\frac{1}{8\pi} \frac{(Q^2 + P^2)}{r^2} \sin^2\theta
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Fica evidente a condição de traço nulo, isto é,

$$T^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0. \tag{A.15}$$

APÊNDICE B – SOLUÇÃO MAJUMDAR-PAPAPETROU (SMP)

A SMP apresentada no Cap. 2, possui elemento de linha dado por (2.85), isto é,

$$ds_{\mathbf{x}}^2 = -\psi(\{\mathbf{x}\})^{-2} dt^2 + \psi(\{\mathbf{x}\})^2 d\mathbf{x}^2, \quad (\text{B.1})$$

com

$$\psi(\{\mathbf{x}\}) = \left(1 + \frac{M}{|\mathbf{x}|}\right), \quad (\text{B.2})$$

e $\mathbf{x} = x^\mu (e_\mu)^a$ sendo um campo vetorial tridimensional cartesiano.

Tal espaço-tempo possui os seguintes símbolos de Christoffel diferentes de zero

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{it} &= -\psi^{-1}(\{\mathbf{x}\}) \partial_i \psi(\{\mathbf{x}\}) & \Gamma^i_{tt} &= -\psi^{-5}(\{\mathbf{x}\}) \partial_i \psi(\{\mathbf{x}\}) \\ \Gamma^i_{ij} &= \psi^{-1}(\{\mathbf{x}\}) \partial_j \psi(\{\mathbf{x}\}) & \Gamma^j_{ii} &= -\psi^{-1}(\{\mathbf{x}\}) \partial_j \psi(\{\mathbf{x}\}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

com os índices i e j representando as componentes espaciais, sendo $i \neq j$, e assumindo a estaticidade, ou seja, $\partial_t \psi(\{\mathbf{x}\}) = 0$.

Disto, resulta que as componentes não nulas, com $i \neq j$, do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \psi^{-6}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla \psi(\{\mathbf{x}\})|^2 \\ R_{ii} &= \psi^{-2}(\{\mathbf{x}\}) [|\nabla \psi(\{\mathbf{x}\})|^2 - 2\partial_i \psi(\{\mathbf{x}\})] \\ R_{ij} &= -2\psi(\{\mathbf{x}\})^{-2} \partial_i \psi(\{\mathbf{x}\}) \partial_j \psi(\{\mathbf{x}\}) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

A respectiva componente não nula do tensor de Faraday, novamente admitindo a estaticidade do quadripotencial magnético, A_a , é

$$F_{ti} = \partial_t A_i - \partial_i A_t = \psi^{-2}(\{\mathbf{x}\}) \partial_i \psi(\{\mathbf{x}\}), \quad (\text{B.5})$$

cujas contrações relevantes são dadas por

$$\begin{aligned} F_{t\rho} F_t{}^\rho &= \psi^{-6}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla \psi(\{\mathbf{x}\})|^2 & F_{i\rho} F^{i\rho} &= -2\psi^{-4}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla \psi(\{\mathbf{x}\})|^2 \\ F_{i\rho} F_i{}^\rho &= -\psi^{-2}(\{\mathbf{x}\}) [\partial_i \psi(\{\mathbf{x}\})]^2 & F_{t\rho} F_i{}^\rho &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

e as componentes do tensor energia-momento, T_{ab} , sendo

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \frac{1}{8\pi} \psi^{-6}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla \psi(\{\mathbf{x}\})|^2 \\ T_{ii} &= \frac{1}{8\pi} \psi^{-2}(\{\mathbf{x}\}) [|\nabla \psi(\{\mathbf{x}\})|^2 - 2\partial_i \psi(\{\mathbf{x}\})] \\ T_{ij} &= -\frac{1}{4\pi} \psi^{-2}(\{\mathbf{x}\}) \partial_i \psi(\{\mathbf{x}\}) \partial_j \psi(\{\mathbf{x}\}) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

com $i \neq j$. Deve-se notar que devido à condição de traço nulo do tensor energia-momento do campo eletromagnético clássico

$$T^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.8})$$

verifica-se estar de acordo com a ECE.

Com estas informações de origem geométrica, basta resolvermos uma das equações de Maxwell, qual seja, a que afirma o caráter de nulidade da divergência, isto é,

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Considerando a componente temporal, bem como a expansão da derivada covariante atuando em um tensor de rank-2

$$\partial_i F^{ti} + \Gamma^t{}_{it} F^{ti} + \Gamma^i{}_{ij} F^{tj} = 0 \quad (\text{B.10})$$

com

$$\begin{aligned} \partial_i F^{ti} &= 2\psi^{-3}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla\psi(\{\mathbf{x}\})|^2 - \psi^{-2}(\{\mathbf{x}\}) \nabla^2\psi(\{\mathbf{x}\}) \\ \Gamma^t{}_{it} F^{ti} &= \psi^{-3}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla\psi(\{\mathbf{x}\})|^2 \\ \Gamma^i{}_{ij} F^{tj} &= -3\psi^{-3}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla\psi(\{\mathbf{x}\})|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

e substituindo estas igualdades em (B.10), chega-se a

$$\begin{aligned} 2\psi^{-3}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla\psi(\{\mathbf{x}\})|^2 - \psi^{-2}(\{\mathbf{x}\}) \nabla^2\psi(\{\mathbf{x}\}) \\ + \psi^{-3}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla\psi(\{\mathbf{x}\})|^2 - 3\psi^{-3}(\{\mathbf{x}\}) |\nabla\psi(\{\mathbf{x}\})|^2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

de modo que

$$\Rightarrow \psi^{-2}(\{\mathbf{x}\}) \nabla^2\psi(\{\mathbf{x}\}) = 0. \quad (\text{B.13})$$

Portanto, como afirmado anteriormente, as equações de Einstein-Maxwell acopladas para o caso extremal, isto é, $M = Q$, resultam em uma equação de Laplace:

$$\nabla^2\psi(\{\mathbf{x}\}) = 0. \quad (\text{B.14})$$

APÊNDICE C – FUNÇÃO PAINLEVÉ-V POR MEIO DO DETERMINANTE DE FREDHOLM

A função τ_V de Painlevé possui uma expansão em série dada em termos dos parâmetros associados às monodromias locais das soluções, isto é, o conjunto $\{\theta\}$, do parâmetro de monodromia σ , bem como do *determinante de Fredholm*. Sendo dada pela expressão [44]

$$\tau_V(\{\theta\}; \sigma, \eta; t) = t^{(\sigma^2 - \theta_0^2 - \theta_t^2)/4} e^{\theta_t t/2} \det \left(\mathbb{I} - A \kappa_V^{\sigma_3/2} t^{\sigma \sigma_3/2} D_c(t) \kappa_V^{-\sigma_3/2} t^{-\sigma \sigma_3/2} \right), \quad (C.1)$$

onde A e D_c são dois operadores que agem em determinado par de funções analíticas definidas em um círculo γ cujo raio é $R_\gamma < 1$. Ou seja,

$$(Ag)(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz' A(z, z') g(z') \quad , \quad (D_c g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz' D_c(z, z') g(z') \quad (C.2)$$

sendo

$$g(z') = \begin{pmatrix} f_+(z') \\ f_-(z') \end{pmatrix}. \quad (C.3)$$

Os respectivos núcleos dados por

$$\begin{cases} A(z, z') = \frac{\Psi^{-1}(\sigma, \theta_t, \theta_0; z') \Psi(\sigma, \theta_t, \theta_0; z) - \mathbb{I}}{z - z'} \\ D_c(z, z') = \frac{\mathbb{I} - \Psi_c^{-1}(-\sigma, \theta_\star; t/z') \Psi_c(-\sigma, \theta_\star; t/z)}{z - z'} \end{cases} \quad \forall |t| < R_\gamma \quad (C.4)$$

onde Ψ e Ψ_c são matrizes quadradas 2×2 . Para $\Psi(\sigma, \theta_t, \theta_0; z)$, esta matriz possui a forma

$$\Psi(\sigma, \theta_t, \theta_0; z) = \begin{bmatrix} \varphi(\sigma, \theta_t, \theta_0; z) & \chi(-\sigma, \theta_t, \theta_0; z) \\ \chi(\sigma, \theta_t, \theta_0; z) & \varphi(-\sigma, \theta_t, \theta_0; z) \end{bmatrix}, \quad (C.5)$$

com φ e χ dadas em termos da *função hipergeométrica confluyente de Gauss*

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (C.6)$$

com o correspondente *símbolo de Pochhammer*

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ a(a+1) \dots (a+n-1) & , \quad \text{se } n > 0 \end{cases} \quad (C.7)$$

de modo que

$$\begin{cases} \varphi(\sigma, \theta_t, \theta_0; z) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\sigma - \theta_t + \theta_0), \frac{1}{2}(\sigma - \theta_t - \theta_0), \sigma; z\right) \\ \chi(\sigma, \theta_t, \theta_0; z) = \frac{\theta_0^2 - (\sigma - \theta_t)^2}{4\sigma(1 + \sigma)} z {}_2F_1\left(1 + \frac{1}{2}(\sigma - \theta_t + \theta_0), 1 + \frac{1}{2}(\sigma - \theta_t - \theta_0), 2 + \sigma; z\right) \end{cases} \quad (C.8)$$

Por sua vez, $\Psi_c(-\sigma, \theta_\star; t/z)$ possui a forma matricial dada por

$$\Psi_c(-\sigma, \theta_\star; t/z) = \begin{bmatrix} \varphi_c(-\sigma, \theta_\star; t/z) & \chi_c(-\sigma, \theta_\star; t/z) \\ \chi_c(\sigma, \theta_\star; t/z) & \varphi_c(\sigma, \theta_\star; t/z) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

com as funções φ_c e χ_c dadas agora em termos da *função hipergeométrica confluyente de Kummer*

$${}_1F_1(a, c; z) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b, c; b^{-1}z), \quad (\text{C.10})$$

isto é,

$$\begin{cases} \varphi_c(\pm\sigma, \theta_\star; \frac{t}{z}) = {}_1F_1(\frac{-\theta_\star \pm \sigma}{2}, \pm\sigma; -\frac{t}{z}) \\ \chi_c(\pm\sigma, \theta_\star; \frac{t}{z}) = \pm \frac{-\theta_\star \pm \sigma}{2\sigma(1 \pm \sigma)} \frac{t}{z} {}_1F_1(1 + \frac{-\theta_\star \pm \sigma}{2}, 2 \pm \sigma; -\frac{t}{z}) \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Por fim, o parâmetro κ_V é dado por (3.86).

**APÊNDICE D – ECH COM A PRESENÇA DO PARÂMETRO
NÃO-COMUTATIVO PARA O CAMPO ESCALAR CARREGADO SEM MASSA:
DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO**

Como visto no decorrer do Cap. 3, a equação para a componente radial do campo escalar carregado sem massa é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_\ell^m}{dr^2} + \frac{2}{rf} \left(1 - \frac{M}{r}\right) \frac{dR_\ell^m}{dr} - \frac{1}{f} \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{1}{f} \left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2 \right] R_\ell^m \\ - ima \frac{qQ}{fr^3} \left[\left(\frac{M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right) R_\ell^m + rf \frac{dR_\ell^m}{dr} \right] = 0, \end{aligned} \quad (D.1)$$

realizando-se uma transformação tal que

$$R_\ell^m(r) = (r - r_+)^{-\theta_+/2} (r - r_-)^{-\theta_-/2} w(r) \quad (D.2)$$

com o intuito de eliminar os *polos duplos* e com isso definir os *parâmetros indiciais* $\{\theta_\pm\}$, dados por

$$\begin{cases} \theta_+ = i \frac{\left(-\frac{qQ}{r_-} + \omega\right)}{\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}} = \frac{i}{2\pi T_+} \left(\omega - \frac{qQ}{r_+}\right) \\ \theta_- = i \frac{\left(\frac{qQ}{r_-} - \omega\right)}{\frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}} = \frac{i}{2\pi T_-} \left(\omega - \frac{qQ}{r_-}\right) \end{cases} \quad (D.3)$$

onde estes são os que possuem *natureza outgoing* (no infinito espacial) e *ingoing* (no horizonte de eventos externo), respectivamente, chega-se na equação

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \left(-\frac{iamqQ}{r^2} + \frac{1 - \theta_-}{r - r_-} + \frac{1 - \theta_+}{r - r_+} \right) \frac{dw(r)}{dr} \\ + \left[\omega^2 + \frac{\alpha_1}{r^3} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{\alpha_3}{r} + \frac{\alpha_4}{(r - r_-)} + \frac{\alpha_5}{(r - r_+)} \right] w(r) = 0, \end{aligned} \quad (D.4)$$

sendo $\{\alpha_i\}_{i=1}^5$ constantes dadas por:

$$\alpha_1 = \frac{iamqQ^3}{r_+ r_-} \quad (D.5)$$

$$\alpha_2 = \frac{amqQ}{2r_+ r_- (r_- - r_+)} [i(r_-^2 - r_+^2) - 2\omega r_+ r_-^2 - 2r_+ r_- (\omega r_+ - 2qQ)] \quad (D.6)$$

$$\alpha_3 = \frac{amqQ}{2r_+^2 r_-^2 (r_- - r_+)} [i(r_-^3 - r_+^3) + r_- r_+^2 (i + 2qQ) + r_-^2 r_+ (2qQ - i - 4\omega r_+)] \quad (D.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = \frac{1}{2r_-^2 (r_- - r_+)^3} [amqQ(r_+ - r_-)^2 (i(r_+ - r_-) + 2r_- (\omega r_- - qQ)) + 2r_-^2 (-r_-^2 (\ell^2 \\ + \ell + (qQ - \omega r_-)(i + 2\omega r_-)) + r_+ r_- (2\ell(\ell + 1) - i\omega r_- - 4(qQ - \omega r_-)^2) \\ - r_+^2 (\ell^2 + \ell + \omega r_- (2\omega r_- - i) - qQ(2\omega r_- + i)) - i\omega r_+^3] \end{aligned} \quad (D.8)$$

$$\begin{aligned} \alpha_5 = \frac{1}{2r_+^2 (r_+ - r_-)^3} [2r_+^2 (-r_-^2 (\ell^2 + \ell + i(qQ - \omega r_-)) + r_+ r_- (2\ell(\ell + 1) - i\omega r_- \\ + 2qQ(\omega r_- - 2qQ)) - r_+^2 (\ell^2 + \ell + \omega r_- (2\omega r_- - i) - qQ(8\omega r_- + i)) \\ - \omega r_+^3 (i + 2qQ + 4\omega r_-) + 2\omega^2 r_+^4) + amqQ(r_+ - r_-)^2 (i(r_- - r_+) \\ + 2r_+ (qQ - \omega r_+))] \end{aligned} \quad (D.9)$$

Aplicando-se a mudança de variável $r = u + r_-$, obtém-se a equação

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g(u)}{du^2} + \left[-\frac{iamqQ}{(u + r_-)^2} + \frac{1 - \theta_-}{u} + \frac{1 - \theta_+}{u + r_- - r_+} \right] \frac{dg(u)}{du} \\ + \left[\omega^2 + \frac{\alpha_1}{(u + r_-)^3} + \frac{\alpha_2}{(u + r_-)^2} + \frac{\alpha_3}{(u + r_-)} + \frac{\alpha_4}{u} + \frac{\alpha_5}{(u + r_- - r_+)} \right] g(u) = 0, \end{aligned} \quad (D.10)$$

com as constantes $\{\alpha_i\}_{i=1}^5$ idênticas àquelas apresentadas anteriormente.

Por sua vez, aplicando a *transformação exponencial* expressa por

$$g(u) = \exp \left[-\frac{i}{2} \frac{qQ}{(u + r_-)} am \right] y(u), \quad (D.11)$$

e realizando as simplificações, lembrando que para o *buraco negro de Reissner-Nordström* vale a relação $Q^2 = r_+ r_-$, chega-se a equação

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(u)}{du^2} + \left[\frac{1 - \theta_-}{u} + \frac{1 - \theta_+}{u + r_- - r_+} \right] \frac{dy(u)}{du} \\ + \left[\omega^2 + \frac{\beta_1}{u} + \frac{\beta_2}{(r_+ - r_- - u)} + \frac{a^2 m^2 q^2 Q^2}{2(u + r_-)^2} \right] y(u) = 0, \end{aligned} \quad (D.12)$$

sendo $\{\beta_i\}_{i=1}^2$ constantes iguais a:

$$\begin{aligned} \beta_1 = -\frac{1}{(r_- - r_+)^3} \left[r_-^2 (\ell^2 + \ell + (qQ - \omega r_-)(i + 2\omega r_-)) - r_+ r_- (2\ell(\ell + 1) - i\omega r_- \right. \\ \left. - 4(qQ - \omega r_-)^2) + r_+^2 (\ell^2 + \ell + \omega r_- (2\omega r_- - i) - qQ(2\omega r_- + i)) + i\omega r_+^3 \right] \end{aligned} \quad (D.13)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{(r_+ - r_-)^3} [r_-^2(\ell^2 + \ell + i(qQ - \omega r_-)) + r_+ r_-(-2\ell(\ell + 1) + i\omega r_- + 2qQ(qQ - \omega r_-)) + r_+^2(\ell^2 + \ell + \omega r_-(2\omega r_- - i) - qQ(8\omega r_- + i)) + \omega r_+^3(4\omega r_- + 2qQ + i) - 2\omega^2 r_+^4] \quad (D.14)$$

Aplicando a transformação de coordenadas

$$u = \frac{z}{2i\omega}, \quad (D.15)$$

e manipulando de forma conveniente a deixá-la no formato equivalente ao que se encontra na literatura [44], obtém-se a correspondente equação

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left[\frac{1 - \theta_-}{z} + \frac{1 - \theta_+}{z - t} \right] \frac{dy(z)}{dz} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\theta_*}{2z} + \frac{tc_t}{z(z - t)} + 2a^2 \frac{m^2 \omega^2 q^2 Q^2}{(z + t_1)^4} \right] y(z) = 0 \quad (D.16)$$

tratando-se da ECH com a presença do *parâmetro não-comutativo* apresentada. O conjunto completo dos *parâmetros indiciais*, $\{\theta_+, \theta_-, \theta_*\}$, dados por

$$\begin{cases} \theta_+ = i \frac{\left(-\frac{qQ}{r_-} + \omega \right)}{\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}} = \frac{i}{2\pi T_+} \left(\omega - \frac{qQ}{r_+} \right) \\ \theta_- = i \frac{\left(\frac{qQ}{r_-} - \omega \right)}{\frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}} = \frac{i}{2\pi T_-} \left(\omega - \frac{qQ}{r_-} \right) \\ \theta_* = 2i[\omega(r_+ + r_-) - qQ] - 4\pi a \frac{mqQT_- \theta_-}{\omega(r_+ - r_-)} \end{cases} \quad (D.17)$$

e o *parâmetro acessório*, tc_t , o *módulo conforme*, t , e o *ponto singular*, t_1 , por

$$\begin{cases} tc_t = \ell(\ell + 1) - (qQ - \omega r_-)(i + 4\omega r_-) + \omega(i + 2qQ)r_+ - 2\omega^2 r_+^2 \\ t := 2i\omega(r_+ - r_-) \\ t_1 := 2i\omega r_- \end{cases} \quad (D.18)$$

onde se utilizou a temperatura no respectivo *horizonte de eventos*

$$2\pi T_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}. \quad (D.19)$$

APÊNDICE E – TEORIA DE PERTURBAÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO

Como apresentado no texto dissertativo, a *equação radial* para o campo escalar carregado sem massa é dada por

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left[\frac{1 - \theta_-}{z} + \frac{1 - \theta_+}{z - t} \right] \frac{dy(z)}{dz} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\theta_\star}{2z} + \frac{t c_t}{z(z - t)} + 2a^2 \frac{\omega^2 m^2 q^2 Q^2}{(z + t_1)^4} \right] y(z) = 0 \quad (\text{E.1})$$

como sabido

$$\begin{cases} \theta_+ = i \frac{\left(-\frac{qQ}{r_-} + \omega \right)}{\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}} = \frac{i}{2\pi T_+} \left(\omega - \frac{qQ}{r_+} \right) \\ \theta_- = i \frac{\left(\frac{qQ}{r_-} - \omega \right)}{\frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}} = \frac{i}{2\pi T_-} \left(\omega - \frac{qQ}{r_-} \right) \\ \theta_\star = 2i[\omega(r_+ + r_-) - qQ] - 4\pi a \frac{mqQT_- \theta_-}{\omega(r_+ - r_-)} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

e

$$\begin{cases} t c_t = \ell(\ell + 1) - (qQ - \omega r_-)(i + 4\omega r_-) + \omega(i + 2qQ)r_+ - 2\omega^2 r_+^2 \\ t := 2i\omega(r_+ - r_-) \\ t_1 := 2i\omega r_- \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

utilizando-se da temperatura no respectivo *horizonte de eventos*

$$2\pi T_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2r_\pm^2}. \quad (\text{E.4})$$

No entanto, a *Equação Diferencial de Heun Confluyente* possui, escrita na forma padrão, três singularidades: $\{0, 1\}$ -regulares e $\{\infty\}$ -irregular. Como a Eq. (E.1) se trata de um caso particular da *equação confluyente de Heun* modificada pela presença do PNC com singularidades em $\{0, t\}$, realizamos uma *transformação homográfica* do tipo

$$u = x t \quad (\text{E.5})$$

e posteriormente, a fim de deixarmos a equação diferencial no formato comum na literatura para encontrarmos a solução da *equação diferencial não perturbada*, isto é, sem o PNC, aplicamos uma transformação exponencial

$$y(x) = \exp\left(\frac{t}{2}x\right) w(x), \quad (\text{E.6})$$

obtendo-se

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \left[t + \frac{1 - \theta_-}{x} + \frac{1 - \theta_+}{x - 1} \right] \frac{dw(x)}{dx} + \left[\frac{\psi}{x} + \frac{\phi}{x - 1} + V(x) \right] w(x) = 0, \quad (\text{E.7})$$

com o *potencial perturbativo* dado por

$$V(x) = -2a^2 \frac{\omega^2 m^2 q^2 Q^2}{t^2 (x + x_0)^4} \quad (\text{E.8})$$

e sendo:

$$\begin{cases} t = 2i\omega(r_+ - r_-) \\ \phi := \frac{1}{2}(t - 2tc_t - t\theta_+) \\ \psi := \frac{1}{2}(t + 2tc_t - t\theta_- - t\theta_*) \\ x_0 = \frac{t_1}{t} = \frac{r_-}{r_+ - r_-} \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

cuja solução, considerando $a = 0$, isto é, no espaço-tempo comutativo, é dada pela função [47]

$$w(x) = e^{tx/2} (x - 1)^{(1-\theta_+)/2} x^{(1-\theta_-)/2} H_C(\{k\}; x), \quad (\text{E.10})$$

sendo $H_C(\{\kappa\}; x)$ a *função de Heun Confluente* onde $\{\kappa\} = \{t, -\theta_-, -\theta_+, \delta, \lambda\}$ são parâmetros constantes e que caracterizam a equação ECH e $\delta = \delta(\theta_{\pm}, T_{\pm})$ e $\lambda = \lambda(\theta_-, T_-)$.

Utilizando o fato que

$$x = \frac{u}{t} = \frac{2i\omega z}{2i\omega(r_+ - r_-)} = \frac{z}{r_+ - r_-} = \frac{r - r_-}{r_+ - r_-}, \quad (\text{E.11})$$

lembrando que $u = 2i\omega z$ e $z = r - r_-$ (consultar Apêndice D para verificar os passos dados para se obter a ECH com a presença do parâmetro não-comutativo para o campo escalar carregado sem massa). Disto, conclui-se que a solução referente à ECH, da componente radial na coordenada r , é:

$$R_\ell^m(r) = \left(\frac{r - r_+}{r_+ - r_-} \right)^{(1-\theta_+)/2} \left(\frac{r - r_-}{r_+ - r_-} \right)^{(1-\theta_-)/2} H_C(\{\kappa\}; r) e^{i\omega(r-r_-)}. \quad (\text{E.12})$$

Assim, a solução particular

$$\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\}) = \Phi(\{\mathbf{x}\}) e^{-i\omega t} \quad (\text{E.13})$$

com

$$\Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\}) = R_\ell^m(r) Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (\text{E.14})$$

torna-se

$$\Rightarrow \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\}) = \left(\frac{r - r_+}{r_+ - r_-} \right)^{(1-\theta_+)/2} \left(\frac{r - r_-}{r_+ - r_-} \right)^{(1-\theta_-)/2} H_C(\{\kappa\}; r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\omega(r-r_- - t)}, \quad (\text{E.15})$$

cujo comportamento assintótico da função de Heun confluyente, nos pontos singulares para os MQNs, é

$$H_C(\{k\}; r) \sim \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(r) & , \quad r \rightarrow r_+ \\ \frac{1}{r} + \mathcal{O}^2\left(\frac{1}{r}\right) & , \quad r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{E.16})$$

Encontrada a solução para a ECH para o espaço-tempo comutativo, sem a presença do PNC, passamos para o *tratamento perturbativo* para encontrarmos a primeira correção nos MQNs.

Para o campo escalar carregado sem massa com o PNC nulo, isto é, no espaço-tempo comutativo, tem-se que sua dinâmica é governado pela *equação de Klein-Gordon*

$$\nabla^a \nabla_a \Psi(\{\mathbf{x}\}) = 0, \quad (\text{E.17})$$

de modo que no sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ adotado, pode-se utilizar o operador de Laplace-Beltrami

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \right] \Psi(\{\mathbf{x}\}) = 0 \quad (\text{E.18})$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{f(r)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f(r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right] \Psi(\{\mathbf{x}\}) = 0 \quad (\text{E.19})$$

onde $\hat{L}^2 = g_{(\mathbb{S}^2)}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ é o *operador momento angular*, cuja equação de autovalor na $\mathbb{S}^2(\theta, \phi)$ é bem determinada, ou seja,

$$\hat{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = -\ell(\ell + 1) Y_\ell^m(\theta, \phi). \quad (\text{E.20})$$

Na *teoria de perturbação*, assume-se que o problema posto pela Eq. (E.19) é resolvido, ou seja, temos soluções dadas por

$$\Psi(\{\mathbf{x}\}) = \Psi(t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-|\ell|}^{m=|\ell|} \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\}) \quad (\text{E.21})$$

com $\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})$ dada pela Eq. (E.13). No espaço curvo relativístico, sua normalização se dá por meio do produto [48]

$$\begin{aligned} (\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p, \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_q) &= -i \int_{\Sigma} d\Sigma \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p \overleftrightarrow{\partial}_t \bar{\Psi}_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p \\ &= -i \int_{\Sigma} d\Sigma [\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p \partial_t \bar{\Psi}_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p - \bar{\Psi}_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_q \partial_t \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p] \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

onde $d\Sigma$ o *elemento de volume* induzido nas superfícies espaciais e a barra é o *complexo conjugado*. Sendo

$$n^a = \frac{1}{\sqrt{f(r)}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \quad (\text{E.23})$$

tal que

$$g_{ab} n^a n^b = -1, \quad (\text{E.24})$$

isto é, o *vetor normalizado* na direção temporal. Por sua vez, o elemento de volume é dado por

$$\epsilon_{abcd} = r^2 dt \wedge d\theta \wedge d\phi \quad (\text{E.25})$$

de modo que

$$d\Sigma = \epsilon_{abcd} n^d = \frac{r^2}{\sqrt{f(r)}} dr \wedge d\theta \wedge d\phi. \quad (\text{E.26})$$

Assim o *produto interno* dado pela Eq. (E.22), utilizando-se a expansão da *função de Heun confluyente* para $r \rightarrow r_+$, pois a dinâmica concentra-se próxima a r_+ , é dado por

$$\begin{aligned} (\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p, \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_q) &= 2\Re(\omega_p) \int_\Sigma d\Sigma |\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p|^2 \delta_{p,q} \\ &= 2\Re(\omega_p) \int_\Sigma d\Sigma e^{-2\Im(\omega_p)(r-r_+-t)} \left(\frac{r-r_+}{r_+-r_-} \right) \left(\frac{r-r_-}{r_+-r_-} \right) Y_\ell^m(\theta, \phi) \overline{Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi)} \delta_{p,q} \\ &= \frac{2\Re(\omega_p)}{(r_+-r_-)^2} e^{2\Im(\omega_p)(r_++t)} \delta_{p,q} \int_{r_+}^\infty dr r^2 \frac{r(r-r_+)(r-r_-)}{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)}} e^{-2\Im(\omega_p)r} \\ &= \frac{2\Re(\omega_p)}{(r_+-r_-)^2} e^{2\Im(\omega_p)(r_++t)} \delta_{p,q} \int_{r_+}^\infty dr r^3 \sqrt{(r-r_+)(r-r_-)} e^{-2\Im(\omega_p)r} \\ &= \frac{2\Re(\omega_p)}{(r_+-r_-)^2} e^{2\Im(\omega_p)(r_++t)} \delta_{p,q} \underbrace{\int_{r_+}^\infty dr r^4 \sqrt{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)}}_{:=\zeta} e^{-2\Im(\omega_p)r} \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

e que converge $\forall \Im(\omega_n) > 0$; utilizou-se a condição de *ortogonalidade dos harmônicos esféricos*

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta d\theta Y_\ell^m(\theta, \phi) \overline{Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi)} = \delta_{\ell\ell'} \delta^{mm'}. \quad (\text{E.28})$$

Realizando a mudança de variável, na integral ζ , e definindo-se o novo intervalo de integração:

$$\begin{cases} x = \frac{r_+}{r} \Rightarrow dr = -\frac{r_+}{x^2} dx \\ r \rightarrow \infty \Rightarrow x = 0 \\ r = r_+ \Rightarrow x = 1 \end{cases} \quad (\text{E.29})$$

de modo que

$$\zeta = r_+^4 \int_0^1 dx \frac{\sqrt{(1-x)(1-\beta x)}}{x^6} e^{-2\Im(\omega_p) r_+/x}. \quad (\text{E.30})$$

Logo, substituindo este resultado em (E.27) e levando em consideração que estamos em uma *hipersuperfície* tal que $t = \text{constante}$ podemos considerar, sem perda de generalidade que $t = 0$, obtendo-se o resultado

$$(\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p, \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_q) = \frac{2\Re(\omega_p) r_+^4}{(r_+ - r_-)^2} e^{2\Im(\omega_p) r_+} \delta_{p,q} \int_0^1 dx \frac{\sqrt{(1-x)(1-\beta x)}}{x^6} e^{-2\gamma/x}, \quad (\text{E.31})$$

com:

$$\begin{cases} \beta = \frac{r_-}{r_+} \in (0, 1] \\ \gamma = \Im(\omega_n) r_+ > 0 \end{cases} \quad (\text{E.32})$$

demonstrando o valor finito da norma das *soluções* na ausência do PNC.

Para as *funções de onda estacionárias*, $\Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p$, tem-se satisfeita a equação

$$h^{ab} \nabla_a (h_b^c \nabla_c) \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p = \left[-\frac{1}{f(r)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 f(r) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right] \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p = 0, \quad (\text{E.33})$$

de modo que

$$h^{ab} \nabla_a (h_b^c \nabla_c) \Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 f(r) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right] \Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p = -\frac{\omega_p^2}{f(r)} \Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p \quad (\text{E.34})$$

$$\Rightarrow h^{ab} \nabla_a (h_b^c \nabla_c) \Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p = -\frac{\omega_p^2}{f(r)} \Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p \quad (\text{E.35})$$

onde $h^{ab} \nabla_a (h_b^c \nabla_c)$, com $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$, é o *laplaciano* em Σ e

$$f = f(r) = g_{tt} = g^{rr} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2}. \quad (\text{E.36})$$

Dado isto, passamos a considerar o *problema perturbado* onde a equação leva em conta o potencial perturbativo oriundo do PNC.

Como trata-se de *funções de onda estacionárias* a equação em Σ , é dada por

$$\left[-\frac{1}{f(r)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + h^{ab} \nabla_a (h_b^c \nabla_c) + V_\ell(r) \right] \Psi_\ell^m(\omega, \{\mathbf{x}\})_p = 0. \quad (\text{E.37})$$

Assumindo que as expansões

$$\begin{cases} \Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p = \Phi_p^{(0)} + a \Phi_p^{(1)} + a^2 \Phi_p^{(2)} + \dots \\ \omega_p = \omega_p^{(0)} + a \omega_p^{(1)} + a^2 \omega_p^{(2)} + \dots \end{cases} \quad (\text{E.38})$$

são válidas, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(r)} ((\omega_n^{(0)})^2 + 2a\omega_n^{(0)}\omega_n^{(2)} + \dots)(\Phi_n^{(0)} + a\Phi_n^{(1)} + \dots) + h^{bc} \nabla_b (h_c^d \nabla_d) \Phi_n^{(0)} \\ + a h^{bc} \nabla_b (h_c^d \nabla_d) \Phi_n^{(1)} + V(r) \Phi_n^{(0)} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.39})$$

Utilizando-se da igualdade dada pela Eq. (E.35) e supondo que $\Phi_n^{(0)}$ satisfaz a equação não perturbada, isto é, sem a presença do PNC, é possível deixá-la no formato:

$$\left[\frac{2\omega_n^{(0)}\omega_n^{(1)}}{f(r)} + V(r) \right] \Phi_n^{(0)} + \left[\frac{(\omega_n^{(0)})^2}{f(r)} + h^{ab} \nabla_a (h_b^c \nabla_c) \right] \Phi_n^{(1)} = 0. \quad (\text{E.40})$$

Multiplicando ambos os lados por $\sqrt{f(r)}$, realizando o *produto interno*, sendo necessário utilizar apenas a igualdade na primeira linha da Eq. (E.27), e assumindo que $\Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p^{(0)}$ e $\Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p^{(1)}$ são ortogonais, isto é,

$$(\Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_p^{(0)}, \Phi_\ell^m(\{\mathbf{x}\})_q^{(1)}) = 0, \quad (\text{E.41})$$

obtém-se a expressão para a primeira correção nos MQNs e que fora apresentada anteriormente ($\Gamma = [r_+, \infty[\cup [0, 2\pi[\cup [0, \pi]$):

$$\omega_n^{(1)} = - \int_{\Gamma} dr d\Omega r^2 \sqrt{f(r)} \Phi_n^{(0)}(\{\mathbf{x}\}) V(r) \overline{\Phi_p^{(0)}(\{\mathbf{x}\})}. \quad (\text{E.42})$$

O *potencial perturbativo* é dado por

$$V(x) = -2a^2 \frac{\omega^2 m^2 Q^2 q^2 t^2}{(2i\omega r_- + tx)^4} = -2a^2 \frac{\omega^2 m^2 Q^2 q^2}{t^2 \left[\frac{2i\omega r_-}{2i\omega(r_+ - r_-)} + \frac{r - r_-}{(r_+ - r_-)} \right]^4}, \quad (\text{E.43})$$

onde se utilizou da primeira constante das Eqs. (E.9) e a relação (E.11), de modo a possibilitar escrevê-lo no seguinte formato na coordenada radial

$$V(r) = a^2 \omega^2 m^2 q^2 Q^2 \frac{(r_+ - r_-)^2}{2r^4}. \quad (\text{E.44})$$

Substituindo na Eq. (E.42) o potencial acima, bem como a Eq. (E.15) e levando em conta que a expansão assintótica da função de Heun confluyente decai em ordem polinomial para $r \rightarrow \infty$, isto é, que a dinâmica concentra-se prioritariamente próximo ao *horizonte de eventos externo*, fazendo com que se utilize da expansão para $r \rightarrow r_+$ considerando apenas o primeiro termo desta e o comportamento do potencial descrito como r^{-4} justificando tal aproximação, obtém-se

$$\begin{aligned} \omega_n^{(1)} \approx \int_{r_+}^{\infty} dr r^2 \sqrt{\frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2}} \left(\frac{r - r_+}{r_+ - r_-} \right) a^2 (\omega_n^{(0)})^2 m^2 Q^2 q^2 \\ \times \frac{(r_+ - r_-)^2}{2r^4} \left(\frac{r - r_-}{r_+ - r_-} \right) e^{-2\Im(\omega_n^{(0)})(r - r_+ - t)}, \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

tendo sido aplicada a *condição de ortogonalidade dos harmônicos esféricos*, Eq. (E.28), e $\omega_n^{(0)} = \omega_n^0$, para efeito de simplicidade, sendo este o modo da equação não perturbada.

Novamente admitindo-se uma *hipersuperfície* tal que $t = 0$ e simplificando

$$\begin{aligned}\omega_n^{(1)} &\approx a^2 \frac{(\omega_n^0)^2 Q^2 m^2 q^2}{2} e^{-2\Im(\omega_n^0)r_+} \int_{r_+}^{\infty} dr \frac{[(r - r_+)(r - r_-)]^{3/2}}{r^3} e^{-2\Im(\omega_n^0)r} \\ &= a^2 \frac{(\omega_n^0)^2 Q^2 m^2 q^2}{2} e^{-2\Im(\omega_n^0)r_+} \int_{r_+}^{\infty} dr \left[\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) \right]^{3/2} e^{-2\Im(\omega_n^0)r} \\ &= a^2 \frac{(\omega_n^0)^2 Q^2 m^2 q^2}{2} e^{-2\Im(\omega_n^0)r_+} \int_0^1 dx [(1 - x)(1 - \beta x)]^{3/2} e^{-2\gamma/x},\end{aligned}$$

onde foi feita a mudança de variável (E.29) e as constantes β e γ dadas por (E.32).

Portanto:

$$\omega_n^{(1)} = a^2 \frac{(\omega_n^0 m q Q)^2}{2} e^{-2\Im(\omega_n^0)r_+} \int_0^1 dx [(1 - x)(1 - \beta x)]^{3/2} e^{-2\gamma/x}. \quad (\text{E.46})$$

Definindo

$$\varphi(x) = [(1 - x)(1 - \beta x)]^{3/2} e^{-2\gamma/x}, \quad (\text{E.47})$$

percebe-se que trata-se de uma função estritamente positiva no intervalo $I \in [0, 1]$, de modo que

$$\int_0^1 dx [(1 - x)(1 - \beta x)]^{3/2} e^{-2\gamma/x} > 0. \quad (\text{E.48})$$

Admitindo, sem perda de generalidade, que tal integral é igual a 2Λ , com $\Lambda \in \mathbb{R}^+$, e substituindo este valor na Eq. (E.46), chega-se na expressão para a primeira correção nos MQNs apresentada:

$$\omega_n^{(1)} = a^2 (\omega_n^0 q Q m \Lambda)^2 e^{-2\Im(\omega_n^0)r_+}. \quad (\text{E.49})$$