



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ADONIAS VICTOR MARQUES BARROS

Registrando tempo de chegada na mecânica quântica via acoplamento relógio-detector: uma estatística equivalente à de sucessivos colapsos no detector

Recife

2023

ADONIAS VICTOR MARQUES BARROS

Registrando tempo de chegada na mecânica quântica via acoplamento relógio-detector: uma estatística equivalente à de sucessivos colapsos no detector

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador (a): Prof. Eduardo Olímpio Ribeiro Dias

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

B277r Barros, Adonias Victor Marques
Registrando tempo de chegada na mecânica quântica via acoplamento relógio-detector: uma estatística equivalente à de sucessivos colapsos no detector / Adonias Victor Marques Barros. – 2023.
63 f.: il., fig.

Orientador: Eduardo Olímpio Ribeiro Dias.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife, 2023.
Inclui referências e apêndices.

1. Física teórica e computacional. 2. Fundamentos da mecânica quântica. 3. Tempo de chegada quântico. 4. Detector irreversível. 5. Relógio quântico. I. Dias, Eduardo Olímpio Ribeiro (orientador). II. Título.

530.1 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2024 - 012

ADONIAS VICTOR MARQUES BARROS

**REGISTRANDO TEMPO DE CHEGADA NA MECÂNICA QUÂNTICA VIA
ACOPLAMENTO RELÓGIO-DETECTOR: UMA ESTATÍSTICA EQUIVALENTE
À DE SUCESSIVOS COLAPSOS NO DETECTOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 31/05/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Olímpio Ribeiro Dias
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Nadja Kolb Bernardes
Examinadora Interna
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto
Examinador Externo
Universidade de São Paulo

Para minha esposa, meus pais, meus tios e ao meu orientador por toda paciência, dedicação e ensinamentos compartilhados.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha amada esposa, Jéssica, que esteve comigo em todos os momentos durante toda essa difícil jornada, me apoiando, incentivando e sendo minha fonte inesgotável de amor e carinho. Agradeço ao meu pai Aurides e à minha mãe Selma, por serem quem eu sempre precisei, e serem minha maior fonte de inspiração. Ao meu irmão Heitor, obrigado pela companhia e ajuda, você também é uma inspiração para mim. Eu não poderia pedir a Deus ninguém melhor que vocês.

Não posso esquecer de meus segundos pais, que me acolheram durante longos anos, meu tio Sérgio e minha tia Lila, que me trataram como filho e por isso residem para sempre no meu coração.

Aos meus amigos Ricardo Farias e Paulo Peixoto, por toda a ajuda durante a minha trajetória na física. Vocês são, além de amigos, profissionais que me inspiram. Aos amigos que fiz durante essa jornada, Messias, Ruben, Bruno, Manoel, PJ, Edgar (e muitos outros que aqui não cabem).

Agradeço a todos os professores que me moldaram para chegar até aqui. Em especial, ao meu orientador de mestrado, Eduardo, obrigado pela paciência, compreensão e dedicação. Que o meu desempenho seja lembrado pertencendo a todos que contribuíram para isso.

O tempo está para o relógio assim como a mente está para o cérebro. O relógio de alguma forma contém o tempo. E, no entanto, o tempo se recusa a ser engarrafado como um gênio enfiado em uma lâmpada. Quer flua como areia ou gire sobre rodas dentro de rodas, o tempo escapa irremediavelmente, enquanto assistimos. Mesmo quando os bulbos da ampulheta se quebram, quando a escuridão retém a sombra do relógio de sol, quando a mola mestra se desgasta tanto que os ponteiros do relógio ficam imóveis como a morte, o próprio tempo continua. O máximo que podemos esperar que um relógio faça é marcar esse progresso. E como o tempo define seu próprio ritmo, como uma batida do coração ou uma maré vazante, os relógios realmente não marcam o tempo. Eles apenas acompanham-o, se puderem. (SOBEL, 1947)

RESUMO

Investigamos o problema do tempo de chegada de uma partícula quântica. Revisamos dois modelos operacionais para o tempo de chegada: (i) o modelo de Yearsley-Halliwel (YEARSLEY et al., 2011), que consiste no acoplamento de um relógio quântico à partícula e (ii) o modelo de Halliwel (HALLIWELL, 1999), que consiste na interação de um detector com um grande ambiente para que registre de forma irreversível a chegada da partícula. Em seguida, propomos um meio de obter o tempo de chegada acoplando um relógio quântico ao detector de Halliwel. Verificamos que o nosso modelo apresenta a vantagem de poder usar relógios mais precisos quando comparado ao modelo de Yearsley e Halliwel. Além disso, verificamos também que o estado do nosso relógio é representado por uma mistura “imprópria” de todos os possíveis instantes em que a partícula pode ter sido detectada. Dessa forma, o relógio descreve uma estatística equivalente à de um ensemble de trajetórias quânticas do detector quando o mesmo é submetido a colapsos a cada intervalo de tempo igual à precisão do relógio

Palavras-chave: fundamentos da mecânica quântica; tempo de chegada quântico; detector irreversível; relógio quântico.

ABSTRACT

We investigate the problem of the arrival time of a quantum particle. First, we review two operational models for the time of arrival: (i) the Yearsley-Halliwel model (YEARSLEY et al., 2011), which consists of coupling a quantum clock to the particle, and (ii) the Halliwel model (HALLIWELL, 1999), which consists of the interaction of a detector with a large environment to record the arrival of the particle irreversibly. Next, we propose a measure of the arrival time by coupling a quantum clock to the Halliwel detector. We verified that our model has the advantage of using more accurate clocks than Yearsley and Halliwel's model. Furthermore, we show that the state of our clock is represented by an “improper” mixture of all possible instants at which the particle could have been detected. In this way, the clock describes a statistic equivalent to that of an ensemble of quantum trajectories of the detector when it is subjected to collapses at each time interval equal to the clock's precision.

Keywords: foundations of quantum mechanics; quantum arrival time; irreversible detector; quantum clock.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Ilustração do funcionamento do relógio. Como temos no Hamiltoniano de interação uma função de Heaviside, o relógio roda apenas quando a partícula estiver na região $x < 0$. Dessa forma o relógio se comporta como um cronômetro, registrando permanentemente com a variável θ o instante em que aconteceu a chegada da partícula. O pacote representa a partícula em movimento da esquerda para a direita. 22
- Figura 2 – O gráfico mostra que o grau de precisão do relógio cresce com $\mathcal{N}$, com a largura do pico inversamente proporcional ao número de estados ortogonais da base $\{|v_r\rangle\}$. Com isso, o pico vai ficando mais acentuado e estreito à medida que aumentamos $\mathcal{N}$ 27
- Figura 3 – O ensemble $\mathcal{A}$ no estado inicial $|\psi_0\rangle_S |1\rangle_D$. Com o passar do tempo, um subconjunto de detectores do ensemble detecta a chegada da partícula, enquanto os demais permanecem no estado de não detecção $|1\rangle_D$. Denotamos $\mathcal{A}_1^{(n\Delta t)}$ como o sub-ensemble composto apenas por detectores que ainda não detectaram a chegada da partícula após n medidas. O ponto está representando o sistema de interesse. 45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	TEMPO NA MECÂNICA QUÂNTICA E O TEMPO DE CHEGADA IDEAL	12
1.2	MODELOS OPERACIONAIS PARA O TEMPO DE CHEGADA	16
1.2.1	O Potencial Complexo de Allcock	16
1.2.2	Outros modelos operacionais	18
1.2.3	Nossa abordagem para detecção do tempo de chegada	19
1.3	O QUE VEM A SEGUIR?	19
2	ACOPLAMENTO RELÓGIO-PARTÍCULA NA OBTENÇÃO DO TEMPO DE CHEGADA	21
2.1	RELÓGIO QUÂNTICO COMO UM CRONÔMETRO	21
2.2	MEDINDO O TEMPO DE CHEGADA COM UM CRONÔMETRO QUÂNTICO	22
2.3	O RELÓGIO DE SALECKER-WIGNER	24
2.4	O RELÓGIO DE PERES	26
3	UMA BREVE REVISÃO DE MATRIZ DENSIDADE E SISTEMAS ABERTOS MARKOVIANOS	29
3.1	O FORMALISMO DA MATRIZ DENSIDADE	29
3.1.1	Introdução	29
3.1.2	Dinâmica de estados puros	30
3.1.3	Sistemas compostos	30
3.2	INTRODUÇÃO A SISTEMAS ABERTOS	31
3.2.1	Interagindo com o ambiente	31
3.2.2	Dinâmica de um sistema aberto Markoviano	32
3.2.3	Exemplo de um sistema simples interagindo com um ambiente	34
4	MEDINDO TEMPO DE CHEGADA USANDO UM DETECTOR IRREVERSÍVEL	36
4.1	DETECTOR IRREVERSÍVEL	36
5	INTERPRETANDO O MODELO DE HALLIWELL PARA A DISTRIBUIÇÃO TEMPORAL DO TEMPO DE CHEGADA	42
5.1	INTRODUÇÃO	42

5.2	ESTATÍSTICA DE UM ENSEMBLE DE TRAJETÓRIAS QUÂNTICAS DO DETECTOR	44
6	ACOPLAMENTO RELÓGIO-DETECTOR NA OBTENÇÃO DO TEMPO DE CHEGADA	48
6.1	DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE CHEGADA VIA INTERAÇÃO RELÓGIO- DETECTOR	48
6.2	ANALISANDO A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DO TEMPO DE CHEGADA	51
6.3	CALCULANDO $ \psi_{nd}(t)\rangle$ E ANALISANDO O PROBLEMA DA REFLEXÃO	54
7	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A – REPRESENTAÇÃO DA DELTA DE KRONECKER COMO UMA SOMA DISCRETA	62
	APÊNDICE B – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PRE- SENTE NOS CAPÍTULOS 4 E 6	63

1 INTRODUÇÃO

Definir tempo é uma tarefa árdua e complexa, e na física continua sendo uma questão em aberto. Se perguntado sobre o tempo, talvez você responda algo confuso, relacionado à entropia ou à mudança das coisas. Não será o objetivo do presente trabalho definir tempo de forma geral. Aqui restringiremos nossa atenção em algo mais específico, mas que também é de certa forma intrigante, que é a medição do tempo de chegada na mecânica quântica, e a sua interpretação física.

1.1 TEMPO NA MECÂNICA QUÂNTICA E O TEMPO DE CHEGADA IDEAL

Um problema intrínseco à construção da mecânica quântica é o papel desempenhado pelo tempo. À primeira vista poderíamos querer interpretar o tempo como uma variável dinâmica, possuindo o *status* de um observável, como posição, momento e energia. Porém, seguindo a construção canônica da teoria quântica (TQ), tal grandeza física aparece como um parâmetro na equação de Schrödinger,

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (1.1)$$

(Vamos considerar $\hbar = 1$ ao longo desta dissertação).

Esse parâmetro não se distingue daquela definição de tempo de Newton: “*absoluto, verdadeiro e matemático*”; algo que passa independente de tudo, que se pode escolher seu valor com uma precisão conveniente (arbitrária) para que se avalie o estado do sistema.

Apesar do tempo ser um parâmetro na equação de Schrödinger, ainda assim podemos nos perguntar se dado um sistema físico, poderíamos definir um operador tempo associado a algum evento desse sistema. A resposta para essa pergunta é profunda, e vem dos pilares da TQ. Começemos lembrando que observáveis são representados por operadores auto-adjuntos para que seus possíveis valores sejam sempre reais. Outra característica importante é que se um par de operadores auto-adjuntos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são canonicamente conjugados, $[\hat{A}, \hat{B}] = i$, eles satisfazem a relação de incerteza

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}, \quad (1.2)$$

onde $\Delta A(\Delta B)$ é o desvio quadrático médio das observações de $\hat{A}(\hat{B})$. O par posição-momento é canonicamente conjugado e, portanto, satisfaz essas condições. Além disso, em 1927 Hei-

senberg introduziu também a relação de incerteza

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2}, \quad (1.3)$$

associada às imprecisões da energia e do tempo, subentendendo a existência de um operador tempo $\hat{T}$ auto-adjunto satisfazendo $[\hat{H}, \hat{T}] = i$ e $\Delta t = \Delta T$.

O problema de definir esse operador $\hat{T}$ é que a aplicação do operador unitário $\exp(iE'\hat{T})$, caso $\hat{T}$ exista, promove um deslocamento $-E'$ na energia de qualquer sistema, ou seja,

$$e^{iE'\hat{T}} |E\rangle = |E - E'\rangle, \quad (1.4)$$

onde $|E\rangle$ e $|E - E'\rangle$ são auto-estados de $\hat{H}$ com autovalores E e $E - E'$, respectivamente. Portanto, uma vez existindo o operador tempo, conseguiríamos ajustar a energia do sistema para qualquer valor, independente do sistema físico, sem limites superiores ou inferiores. Sendo assim, a construção geral de $\hat{T}$ que satisfaça $[\hat{H}, \hat{T}] = i$ e seja auto-adjunto seria impossível fisicamente. Essa impossibilidade se dá pelo fato de que se um sistema não tiver limite inferior de energia, ele não possui um estado fundamental definido, o que faz com que o sistema possa irradiar energia indefinidamente. Esse problema ficou conhecido como a *Objeção de Pauli* (PAULI, 1933).

Por causa do argumento de Pauli, o entendimento de que a busca por um operador tempo não traria resultados promissores durou algumas décadas. Porém, nos últimos trinta anos, surgiu um interesse renovado por um observável associado a medições quânticas como tempo de meia vida, tempo de tunelamento, tempo de chegada, etc (AHARONOV; BOHM, 1961; LANDAUER; MARTIN, 1994; MUGA; BROUARD; MACIAS, 1995; HALLIWELL, 1999; LEÓN et al., 1999; LEÓN et al., 2000; DAMBORENEA et al., 2002; HEGERFELDT; SEIDEL; MUGA, 2003; LEAVENS, 2008; DIAS; PARISIO, 2017; XIMENES; PARISIO; DIAS, 2018; DAS; NÖTH, 2021; RONCALLO; SACHA; MACCONE, 2023). Para isso, a maioria desses modelos tiveram que abdicar ou da relação $[\hat{H}, \hat{T}] = i$ ou da hermiticidade de $\hat{T}$. Até certo ponto, esse interesse se deve ao recente progresso na óptica quântica, nano-tecnologia e experimentos com átomos em temperaturas muito baixas. Nesse contexto, vamos explorar nesta dissertação o tempo de chegada unidimensional na mecânica quântica.

O problema do tempo de chegada unidimensional *clássico* consiste em: “dada uma partícula de massa μ com posição inicial $x_0 < 0$ e momento $p_0 > 0$, em que instante de tempo a partícula cruza a origem?”. A resposta para esta pergunta é simples, e é dada por $\tau_c^{(\text{classico})} = -\mu x_0 / p_0$. Já a contrapartida quântica consiste em um dado pacote de onda inicial, $\psi(x, t_0)$, restrito

à uma região do espaço $x < 0$ viajando com momento médio $p_0 > 0$. O objetivo agora é encontrar a distribuição temporal de probabilidade da partícula chegar em $x = 0$.

Para prever o tempo de chegada na teoria quântica temos duas abordagens: dependente e independente dos dispositivos de medida. A abordagem dependente do dispositivo de medida também é chamada de abordagem operacional, e depende de parâmetros associados à modelagem do detector. Por outro lado, apesar de todo aparato de medida ter sua própria resolução, podemos nos perguntar se diferentes modelos operacionais tendem a algum modelo “ideal” em certos limites. Nesse contexto, “ideal” significa depender apenas do estado da partícula “livre” de medição, ou seja, sem nenhuma referência a algum detector em particular. Essa idealização configura as abordagens independentes do dispositivo de medida, que visam prever o que conhecemos como tempo de chegada ideal.

De certa forma, o caminho mais natural para descrever quanticamente o tempo de chegada ideal de uma partícula livre é definir um operador tempo de chegada, $\hat{\tau}_c$, quantizando sua expressão clássica, i.e.

$$\hat{\tau}_c \equiv -\mu \hat{x} \hat{p}^{-1}. \quad (1.5)$$

Note que $\hat{\tau}_c$ não é auto-adjunto. No entanto, na TQ a ordem que os operadores atuam faz diferença quando representam observáveis incompatíveis, que é o caso do par posição-momento. Nesse contexto Aharonov e Bohm (AHARONOV; BOHM, 1961), propuseram um operador tempo de chegada maximamente simétrico mas ainda não auto-adjunto dado por

$$\hat{\tau}_{AB} \equiv -\frac{\mu}{2} (\hat{x} \hat{p}^{-1} + \hat{p}^{-1} \hat{x}). \quad (1.6)$$

Vale a pena notar a dificuldade desse método quando potenciais estão presentes. Além disso, vemos que não se trata de uma abordagem puramente quântica já que foram utilizadas as soluções das leis de Newton para definir o operador tempo.

Mais tarde, vários autores definiram o tempo de chegada ideal médio usando a densidade de corrente de probabilidade. Nesse caso, para o tempo de chegada em $x = 0$, temos

$$\langle \tau_c \rangle_J = \frac{\int_0^\infty \Pi_J(t) t \, dt}{\int_0^\infty \Pi_J(t) \, dt}, \quad (1.7)$$

no qual

$$\begin{aligned}
 \Pi_J(t) &= J(0, t) \\
 &= -\frac{1}{2\mu} \langle \psi(t) | [\hat{p}\delta(\hat{x}) + \delta(\hat{x})\hat{p}] | \psi(t) \rangle \\
 &= \frac{i}{2\mu} \left(\psi^*(0, t) \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*(0, t)}{\partial x} \psi(0, t) \right) \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

é a densidade de corrente em $x = 0$ e também é a densidade de probabilidade temporal da partícula chegar a origem no instante de tempo t . Note que $\hat{p}$ é o operador momento e $\delta(\hat{x}) = |0\rangle\langle 0|$ é o operador projeção em $x = 0$. A ideia de $J(0, t)$ ser uma medida do tempo de chegada vem do seguinte raciocínio. Se a função de onda está inicialmente em $x < 0$ e com momento $p > 0$, então a probabilidade da partícula chegar na origem depois do tempo t é equivalente à probabilidade da partícula estar em $x < 0$ no tempo t , $\mathcal{P}_{(x<0)}(t) = \int_{-\infty}^0 dx |\psi(x, t)|^2$. Portanto, é natural pensar que a probabilidade da partícula chegar em $x = 0$ no intervalo de tempo $[t, t + dt]$, $\Pi_J(t)dt$, é dada pela probabilidade de chegar em $x = 0$ depois do instante t menos a probabilidade de chegar depois do instante $t + dt$:

$$\begin{aligned}
 \Pi_J(t)dt &= \mathcal{P}_{(x<0)}(t) - \mathcal{P}_{(x<0)}(t + dt) \\
 &= -(\mathcal{P}_{(x<0)}(t + dt) - \mathcal{P}_{(x<0)}(t)) \\
 &= -\int_{-\infty}^0 dx (|\psi(x, t + dt)|^2 - |\psi(x, t)|^2) \\
 &= \left(\int_0^{\infty} dx \frac{\partial |\psi(x, t)|^2}{\partial t} \right) dt. \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Usando a equação da continuidade,

$$\frac{\partial |\psi(x, t)|^2}{\partial t} = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x}, \quad (1.10)$$

temos

$$\Pi_J(t) = -\int_0^{\infty} dx \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = J(0, t). \quad (1.11)$$

Sabe-se que $J(t)$ pode ser negativo mesmo para estados que apresentam momento positivo. Esse efeito, que ficou conhecido como *Backflow Effect* (BRACKEN; MELLO, 1994; YEARSLEY; HALLIWELL, 2013; HALLIWELL et al., 2013), e nos diz que, em geral, $J(0, t)$ não pode ser usada como uma densidade de probabilidade de tempo de chegada. Sabendo disso, Kijowski na Ref.(KIJOWSKI, 1974) usou um operador de reordenação em $J(0, t)$, e impondo um conjunto de axiomas baseados em considerações clássicas, considerou que a distribuição de tempo de chegada deveria ser

$$\Pi_K(t) = \frac{1}{\mu} \langle \Psi(t) | |\hat{p}|^{1/2} \delta(\hat{x}) |\hat{p}|^{1/2} | \Psi(t) \rangle, \quad (1.12)$$

a qual é sempre positiva. Mais recentemente, $|\hat{p}|^{1/2}\delta(\hat{x})|\hat{p}|^{1/2}$ tem sido relacionado aos autoes-tados do operador tempo de chegada de Aharonov e Bohm (AHARONOV; BOHM, 1961; MUGA; LEAVENS, 2000; GIANNITRAPANI, 1997). A distribuição de Kijowski também foi generalizada para sistemas com potenciais de interação e sistemas de muitas partículas (MUGA; LEAVENS; PALAO, 1998; MUGA; PALAO; LEAVENS, 1999; BAUTE et al., 2000; BAUTE; EGUSQUIZA; MUGA, 2001; BAUTE; EGUSQUIZA; MUGA, 2002; XIMENES; PARISIO; DIAS, 2018). Vale ressaltar que o problema do tempo de chegada ideal ainda está em aberto (MUGA; MAYATO; EGUSQUIZA, 2007; MUGA; RUSCHHAUPT; CAMPO, 2009)

Dias e Parísio na Ref.(DIAS; PARISIO, 2017) propuseram uma solução diferente para o problema do tempo de chegada como um operador. Usando uma regra de quantização alter-nativa, eles definiram um espaço de Hilbert onde tempo se torna um operador auto-adjunto satisfazendo a relação canônica de comutação com um novo operador Hamiltoniano. Nesse formalismo, a posição deixa de ser um operador e passa a ser um parâmetro que podemos escolher qual o seu valor com precisão arbitrária para avaliar um novo estado do sistema, $|\phi(x)\rangle$. Nessa abordagem, temos um estado da partícula para cada posição do espaço. En-quanto na TQ usual interpretamos $|\langle x|\psi(t)\rangle|^2 \equiv |\psi(x, t)|^2$ como a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em x dado que a medida é feita no instante t , na Ref. (DIAS; PARISIO, 2017) $|\langle t|\phi(x)\rangle|^2 \equiv |\phi(t, x)|^2$ é interpretado como a densidade de probabilidade de detecção da partícula em t , dado que a medição acontece em x .

1.2 MODELOS OPERACIONAIS PARA O TEMPO DE CHEGADA

1.2.1 O Potencial Complexo de Allcock

Várias abordagens operacionais foram propostas para obter a distribuição de tempo de chegada, e um trabalho muito importante foi feito em 1969 por Allcock (ALLCOCK, 1969a; ALLCOCK, 1969b; ALLCOCK, 1969c). Allcock considerou que dispositivos de medida de tempo de chegada em $x = 0$ devem transferir qualquer probabilidade da partícula ser medida em $x \geq 0$ do estado de não detecção para estados ortogonais a ele (representando estados de detecção). Para isso, fenomenologicamente, ele modelou a detecção da partícula por meio de um potencial complexo absorvedor, adicionando à expressão do Hamiltoniano de uma partícula livre o operador

$$\hat{V}(\hat{x}) = -iV_0\Theta(\hat{x}), \quad (1.13)$$

onde $\Theta(\hat{x})$ representa a função de Heaviside. Esse Hamiltoniano efetivo ($\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{p}^2/2\mu + \hat{V}(\hat{x})$) é responsável pela evolução do estado de não detecção da partícula, $|\psi_{nd}(t)\rangle_S$. Vamos usar o índice S para denotar a partícula, o nosso sistema de interesse. Com isso, o módulo de $|\psi_{nd}(t)\rangle_S$ começa a diminuir quando a função de onda da partícula entra na região $x > 0$. Dizer que o módulo estado de não detecção está diminuindo é equivalente a dizer que a probabilidade de não detecção está sendo transferida para outro “canal” que desempenha o papel de qualquer estado de detecção. Então, a probabilidade de não detecção no instante de tempo t , $\mathcal{P}_{nd}(t)$, é definida como

$$\mathcal{P}_{nd}(t) = {}_S\langle\psi_{nd}(t)|\psi_{nd}(t)\rangle_S, \quad (1.14)$$

e, portanto, a probabilidade de detecção é dada por $\mathcal{P}_d(t) = 1 - \mathcal{P}_{nd}(t)$. Dessa forma, é natural pensar que a densidade de probabilidade de detectar a partícula no instante de tempo t (partícula chegar no instante t) é dada pela taxa de variação de $\mathcal{P}_d(t)$, ou seja

$$\Pi(t) = \frac{d\mathcal{P}_d(t)}{dt} = -\frac{d\mathcal{P}_{nd}(t)}{dt}. \quad (1.15)$$

De acordo com sua análise, Allcock concluiu que independentemente do “tamanho do degrau” V_0 da Eq. (1.13), esse modelo não é ajustável para se avaliar o tempo de chegada ideal da partícula. Se o degrau for muito grande, ou seja, se $V_0 \gg p_0^2/2\mu$, a onda incidente é refletida, fazendo com que a absorção do pacote incidente não aconteça, e portanto, a detecção seja impossível. Por outro lado, se for muito pequeno, ou seja, se $V_0 \ll p_0^2/2\mu$, a reflexão é desprezível, mas a precisão do aparato de medida é muito baixa por conta da necessidade da barreira ser muito larga para que se absorva todo o pacote incidente.

Apesar dessas conclusões, Allcock investigou mais afundo o limite de absorção fraca, $V_0 \ll p_0^2/2\mu$. Para contornar o problema do atraso na detecção da partícula, Allcock fez a suposição de que a distribuição de tempo de chegada $\Pi(t)$ da Eq. (1.15) é uma convolução de uma distribuição ideal, Π_{id} , e uma função do aparato de detecção $R(t) = 2V_0\Theta(t)e^{-2V_0t}$ (a distribuição da partícula em repouso sobreviver sob ação do potencial imaginário),

$$\Pi = \Pi_{\text{id}} * R. \quad (1.16)$$

Ele sugeriu como solução aproximada para o tempo de chegada ideal a até então desconhecida distribuição de Kijowski,

$$\Pi_{\text{id}}(t) = \Pi_K(t), \quad (1.17)$$

definida na Eq. (1.12). Além disso, no limite $V_0 \rightarrow 0$, Allcock obteve como solução exata a densidade de corrente como distribuição ideal, ou seja,

$$\Pi_{\text{id}}(t) \stackrel{V_0 \rightarrow 0}{=} \Pi_J(t), \quad (1.18)$$

com $\Pi_J(t)$ definida na Eq. (1.8). Como $\Pi_J(t)$ pode ser negativo, Allcock descartou definitivamente a possibilidade de existir um tempo de chegada ideal na mecânica quântica. Não vamos discutir aqui todos os argumentos do trabalho seminal de Allcock, mas podemos sintetizá-los em três pontos:

- Não existe operador auto-adjunto para o tempo de chegada.
- Reflexão é inevitável (em qualquer modelo operacional baseado em absorção).
- A densidade de corrente não pode ser tomada como distribuição ideal porque ela pode ser negativa.

1.2.2 Outros modelos operacionais

Surpreendentemente, essa visão pessimista que Allcock tinha sobre a definição de uma distribuição ideal de tempo de chegada na mecânica quântica sobreviveu por muitos anos. Muga *et al*, na Ref.(MUGA; BROUARD; MACIAS, 1995), argumentam que o modelo de Allcock é apenas um caso particular de potencial absorvedor, e propõem um potencial (não uniforme) perfeitamente absorvedor, evitando completamente o problema da reflexão. Com isso, eles concluíram que a densidade de corrente é uma distribuição válida em certos limites.

Posteriormente, Halliwell na Ref.(HALLIWELL, 1999) deriva o potencial complexo através de um modelo onde um detector sofre uma transição irreversível quando uma partícula entra em uma região do espaço. Esse modelo gera um potencial complexo para o estado de não detecção idêntico ao de Allcock.

Outros modelos operacionais envolvem o uso de um relógio quântico para medição do tempo de chegada. Por exemplo, Yearsley e Halliwell (YH) na Ref.(YEARSLEY *et al.*, 2011) acopla um relógio quântico à partícula de forma que o relógio “rode” apenas enquanto a partícula não chega em $x = 0$, fornecendo assim uma distribuição de tempo de chegada.

1.2.3 Nossa abordagem para detecção do tempo de chegada

Primeiramente, revisando o modelo de YH, veremos que como esse modelo acopla o relógio diretamente à partícula, há a necessidade de que a energia do relógio seja pequena quando comparada a energia da partícula. Isso evita reflexões da partícula devido à interação partícula-relógio, mas torna a medição do tempo de chegada muito imprecisa.

Por outro lado, veremos também que apesar do modelo de Halliwell prever uma densidade de probabilidade do tempo de chegada para um ensemble de sistemas identicamente preparados, o tempo de chegada para um sistema único é indefinido.

Para contornar esses problemas, medimos tempo de chegada acoplando um relógio ao detector de Halliwell (e não à partícula diretamente, como no modelo de YH), registrando o momento em que o detector mede a chegada da partícula. Comparamos os nossos resultados com o modelo de Halliwell e também com um ensemble de detectores de Halliwell sendo monitorados (colapsados) a cada intervalo de tempo suficientemente pequeno. Veremos também como nossas medições do tempo de chegada se comparam ao modelo de YH quando relógios mais precisos são considerados.

1.3 O QUE VEM A SEGUIR?

Vejamos o que é abordado nos próximos capítulos. Alertaremos o leitor quais são os resultados originais desta dissertação.

Capítulo 2:

- Seção 2.1: Introduzimos a ideia de relógio como um cronômetro.
- Seção 2.2: Revisamos o modelo de YH.
- Seção 2.3: Apresentamos o relógio de Peres como um modelo de relógio mais realista, chegando a um relógio ideal em um certo limite.

Capítulo 3: Como vamos discutir modelos operacionais do tempo de chegada que usam detectores acoplados a um grande ambiente, vamos revisar os seguintes tópicos:

- Seção 3.1: Revisamos o formalismo de matriz densidade.
- Seção 3.2: Fazemos uma introdução a sistemas abertos.

Capítulo 4: Revisamos o modelo de Halliwell para a detecção da chegada da partícula.

Capítulo 5: (Até onde sabemos, a discussão feita neste capítulo é original desta dissertação.)

- Seção 5.1: Interpretamos os resultados obtidos pelo modelo de Halliwell
- Seção 5.2: Aplicamos o método de *Quantum Jump* no modelo de Halliwell e obtemos a estatística de um ensemble de trajetórias quânticas do detector.

O **capítulo 6** apresenta contribuição original desta dissertação.

- Seção 6.1: Propomos um modelo de detecção do tempo de chegada que envolve o acoplamento do relógio ao detector do modelo de Halliwell.
- Seção 6.2: Analisamos a distribuição de probabilidade do tempo de chegada e comparamos com a estatística do ensemble de trajetórias quânticas da seção 5.2.
- Seção 6.3: Analisamos o problema da reflexão do pacote de onda incidente na medição do tempo de chegada do nosso modelo.

Capítulo 7: Concluimos nosso trabalho revisando os assuntos abordados em cada capítulo e discutindo perspectivas de trabalhos futuros.

2 ACOPLAMENTO RELÓGIO-PARTÍCULA NA OBTENÇÃO DO TEMPO DE CHEGADA

Várias abordagens para o problema de medição de tempo (como tempo de chegada) na TQ foram feitas usando modelos idealizados de relógios quânticos. Neste capítulo, iniciamos apresentando um modelo geral de relógio quântico acoplado à uma partícula para a obtenção da distribuição de probabilidade do tempo de chegada dessa partícula. Esse problema foi estudado por YH na Ref.(YEARSLEY et al., 2011). Também apresentamos um modelo específico de relógio, o relógio de Salecker-Wigner-Peres, e o aplicamos ao sistema da Ref.(YEARSLEY et al., 2011), obtendo a densidade de corrente como tempo de chegada ideal em um determinado limite.

2.1 RELÓGIO QUÂNTICO COMO UM CRONÔMETRO

Por definição, relógio é um dispositivo que mede tempo. Claro que para que obedeça a TQ, o relógio não deve ultrapassar as barreiras impostas pela teoria. Um relógio quântico pode ser entendido como um sistema dinâmico o qual passa por uma sucessão de estados ortogonais em intervalos de tempo fixos. Nossa ideia é introduzir um relógio e acoplá-lo a outro sistema, e com isso medir a duração de um processo físico, mantendo uma espécie de “registro permanente” desse intervalo de tempo. Dessa forma, nosso relógio desempenhará o papel de um cronômetro.

O relógio deve possuir uma variável dinâmica (a “posição” do ponteiro), que deve ter uma relação direta com o valor do tempo. Por exemplo, em um relógio clássico, a dependência temporal da posição do ponteiro é periódica e é dada pelo ângulo $\theta = \omega t$. Na mecânica quântica, a posição do ponteiro deve ser representada por um operador, o que implica que qualquer medição desse observável provoca um colapso do estado do ponteiro.

É importante notar que devido ao relógio interagir com outro sistema, haverá troca de energia entre eles, e por consequência, as evoluções temporais do relógio e do sistema serão afetadas. Assim, o tempo medido vai depender de como ocorre a interação. Se a interação for suficientemente fraca, teremos o mínimo de distorção na evolução do relógio e do sistema.

Considerando o acoplamento relógio-sistema, o Hamiltoniano, $\hat{H}$, é composto por um operador Hamiltoniano do *sistema de interesse*, $\hat{H}_S$, e outro que representa a interação *sistema-relógio*, $\hat{H}_{SR}$. Essa interação deve fazer com que o relógio evolua apenas durante algum

processo envolvendo $\mathcal{S}$. Dessa forma, o relógio pode registrar a duração desse processo.

2.2 MEDINDO O TEMPO DE CHEGADA COM UM CRONÔMETRO QUÂNTICO

Nesta seção, consideramos o acoplamento do relógio com uma partícula, que será o nosso sistema de interesse, para a obtenção da distribuição de probabilidade do tempo de chegada dessa partícula na origem. Esse modelo foi proposto na Ref.(YEARSLEY et al., 2011).

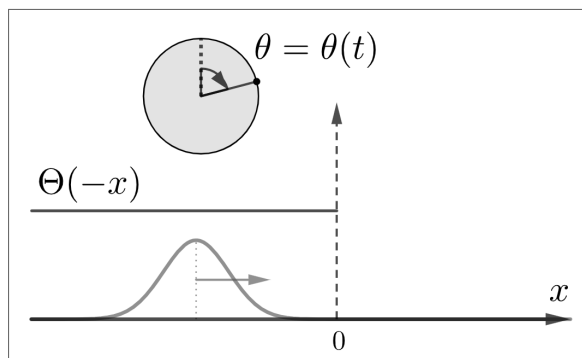
Adotamos as variáveis de posição e momento da partícula por (x, p) e as do relógio por (θ, L) . Considerando que o estado inicial da partícula (sistema $\mathcal{S}$) é $|\psi_0\rangle_{\mathcal{S}}$ e do relógio (sistema $\mathcal{R}$) $|\phi_0\rangle_{\mathcal{R}}$, o estado inicial do sistema é dado por $|\Psi_0\rangle = |\psi_0\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\phi_0\rangle_{\mathcal{R}} = |\psi_0\rangle_{\mathcal{R}} |\phi_0\rangle_{\mathcal{R}} = |\psi_0, \phi_0\rangle_{\mathcal{SR}}$.

O acoplamento partícula-relógio será dado pelo Hamiltoniano

$$\hat{H}_{\mathcal{SR}} = \lambda \Theta(-\hat{x}) \hat{H}_{\mathcal{R}}. \quad (2.1)$$

Aqui a escolha é feita para que o relógio “rode” enquanto a partícula não cruza a origem, ou seja, enquanto $x < 0$. Veja a Figura 1. Esse tipo de interação foi proposto por A. Peres na Ref.(PERES, 1980), e discutido em seu livro publicado treze anos mais tarde (PERES, 1993). Lunardi *et al* aplicaram o relógio de Peres de forma similar para o cálculo do tempo de permanência (*dwell time*) de uma partícula dentro de uma barreira de potencial (LUNARDI; MANZONI; NYSTROM, 2011).

Figura 1 – Ilustração do funcionamento do relógio. Como temos no Hamiltoniano de interação uma função de Heaviside, o relógio roda apenas quando a partícula estiver na região $x < 0$. Dessa forma o relógio se comporta como um cronômetro, registrando permanentemente com a variável θ o instante em que aconteceu a chegada da partícula. O pacote representa a partícula em movimento da esquerda para a direita.



Fonte: Barros (2023)

Tratamos nesta seção o Hamiltoniano do relógio, $\hat{H}_{\mathcal{R}}$, de uma forma geral, sem especificar a sua forma funcional. Sendo $\hat{H}_{\mathcal{R}}$ hermitiano, podemos usar a sua decomposição espectral,

$$\hat{H}_{\mathcal{R}} = \int d\epsilon \epsilon |\epsilon\rangle_{\mathcal{R}} \langle \epsilon|, \quad (2.2)$$

onde $\{|\epsilon\rangle_{\mathcal{R}}\}$ forma uma base ortonormal no espaço de Hilbert do relógio. Dessa forma, sendo o Hamiltoniano da partícula $\hat{H}_{\mathcal{S}}$, a evolução total do sistema é dada por

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \exp \left[-i \left(\hat{H}_{\mathcal{S}} + \lambda \Theta(-\hat{x}) \hat{H}_{\mathcal{R}} \right) t \right] |\psi_0, \phi_0\rangle_{\mathcal{SR}} \\ &= \int d\epsilon |\epsilon\rangle_{\mathcal{R}} \langle \epsilon| \phi_0\rangle_{\mathcal{R}} \exp \left[-i \left(\hat{H}_{\mathcal{S}} + \lambda \Theta(-\hat{x}) \epsilon \right) t \right] |\psi_0\rangle_{\mathcal{S}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

e se quisermos a função de onda, basta projetarmos na base das posições,

$$\Psi(x, \theta, t) = \langle x, \theta | \Psi(t) \rangle_{\mathcal{SR}} = \int d\epsilon \langle \theta | \epsilon \rangle_{\mathcal{R}} \langle \epsilon | \phi_0 \rangle_{\mathcal{R}} \langle x | \exp \left[-i \left(\hat{H}_{\mathcal{S}} + \lambda \Theta(-\hat{x}) \epsilon \right) t \right] |\psi_0\rangle_{\mathcal{S}}. \quad (2.4)$$

Primeiramente, a Ref.(YEARSLEY et al., 2011) considera que $\lambda\epsilon \ll E$, sendo E qualquer autovalor do Hamiltoniano da partícula e ϵ qualquer autovalor do Hamiltoniano do relógio. Ao impor que $\lambda\epsilon \ll E$, estamos considerando que o acoplamento é fraco (tendo em vista que a energia da partícula é bem maior que a energia de interação entre a partícula e o relógio), e por consequência, a medida de tempo feita pelo relógio sobre o sistema tende a ter pouca distorção, mas alta imprecisão. Nesse caso, como $\lambda\epsilon \ll E$, a reflexão da partícula é desprezível e, portanto, a partícula é sempre detectada.

A densidade de probabilidade de encontrar a posição do ponteiro em θ , dado que o mesmo é observado no instante de tempo t é dada por

$$\Pi(\theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x, \theta, t)|^2. \quad (2.5)$$

Para associar $\Pi(\theta, t)$ à chegada da partícula, devemos lembrar que o relógio pára de “rodar” no momento da medição. Dessa forma, para $\lambda\epsilon \ll E$ e t suficientemente grande (de modo que a partícula já tenha cruzado a origem), $\Pi(\theta, t)$ é a densidade de probabilidade da partícula chegar em $x = 0$ no instante θ , dado que observamos o relógio no instante t . No limite em que $t \rightarrow \infty$, YH obtiveram que

$$\Pi_{\text{YH}}(\theta) = \frac{i}{2\mu} \int_0^{\infty} dt |\phi(\theta, t)|^2 \left(\psi^*(0, t) \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*(0, t)}{\partial x} \psi(0, t) \right) = \int_0^{\infty} dt |\phi(\theta, t)|^2 J(0, t), \quad (2.6)$$

onde $J(0, t)$ é a densidade de corrente em $x = 0$,

$$\phi(\theta, t) = \langle \theta | e^{-i\hat{H}_{\mathcal{R}}t} | \phi_0 \rangle_{\mathcal{R}} = \int d\epsilon \langle \theta | \epsilon \rangle_{\mathcal{R}} \langle \epsilon | \phi_0 \rangle_{\mathcal{R}} e^{-i\lambda\epsilon t} \quad (2.7)$$

e

$$\psi(x, t) = \langle x | e^{-i\hat{H}_s t} | \psi_0 \rangle_s. \quad (2.8)$$

O resultado obtido para a distribuição de probabilidade do tempo de chegada não é a densidade de corrente, $J(0, t)$, propriamente dita, mas sua integral “modulada” pelo módulo quadrado da função de onda do relógio. Por outro lado, se $\lambda\epsilon \gg E$, a maior parte do pacote de onda é refletido em $x = 0$ e portanto a partícula é raramente detectada. Vale lembrar que em nosso modelo, vamos poder utilizar um relógio mais preciso sem gerar reflexões da partícula. Para isso, não vamos acoplar o relógio diretamente à partícula.

Até agora não especificamos o funcionamento do relógio, desenvolvemos o modelo de YH de uma forma geral. Nas próximas seções, revisaremos dois relógios quânticos e aplicaremos tanto no modelo de YH como no nosso modelo do Cap.6. Um deles é o relógio ideal de Salecker-Wigner, e o outro é mais realista, sendo uma adaptação do relógio ideal assumindo um espectro limitado de energias. Esse último ficou conhecido como relógio de Peres.

2.3 O RELÓGIO DE SALECKER-WIGNER

O primeiro trabalho histórico na construção de um relógio quântico — e também nosso ponto de partida — foi um paper escrito por Salecker e Wigner (SALECKER; WIGNER, 1958), onde propuseram o uso de um dispositivo para medir distâncias entre eventos espaço-temporais. Considere os operadores canonicamente conjugados $\hat{\theta}$ e $\hat{L}$, onde

$$\hat{\theta} |\theta\rangle = \theta |\theta\rangle, \quad (2.9)$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. O espaço de Hilbert na representação angular consiste de funções quadrado integráveis $f(\theta)$ que satisfazem $f(0) = f(2\pi)$. A base $\{|\theta\rangle\}$ é ortonormal e contínua, e satisfaz

$$\langle \theta | \theta' \rangle = \delta(\theta' - \theta). \quad (2.10)$$

O operador $\hat{L}$ por ser canonicamente conjugado ao operador $\hat{\theta}$, se apresenta na base das posições como

$$\langle \theta' | \hat{L} | \theta \rangle \equiv L_{\theta'\theta} = -i \delta(\theta - \theta') \frac{d}{d\theta}. \quad (2.11)$$

A base de seus autovetores, $\{|u_m\rangle\}$, é discreta e ortonormal, tendo a seguinte equação de autovalor:

$$\hat{L} |u_m\rangle = m |u_m\rangle. \quad (2.12)$$

As bases $\{|u_m\rangle\}$ e $\{|\theta\rangle\}$ são fundamentais para o entendimento do relógio. Portanto, devemos saber como elas se relacionam e suas evoluções temporais. Usando as relações já definidas acima, temos

$$\langle\theta|\hat{L}|u_m\rangle = m\langle\theta|u_m\rangle,$$

onde vamos definir a função de onda $u_m(\theta) \equiv \langle\theta|u_m\rangle$. Aplicando o operador identidade de forma conveniente, temos

$$\langle\theta|\hat{L}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta' |\theta'\rangle\langle\theta'|\right)}_{\mathbb{I}}|u_m\rangle = m\langle\theta|u_m\rangle.$$

Agora, utilizando (2.11), a equação acima resulta em

$$\frac{d}{d\theta}u_m(\theta) = im u_m(\theta). \quad (2.13)$$

A solução é trivial, e a constante de integração é escolhida para que se garanta a ortonormalidade da base. Portanto,

$$|u_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\theta e^{im\theta} |\theta\rangle, \quad (2.14)$$

e podemos observar que

$$\begin{aligned} \langle u_n|u_m\rangle &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta' u_n^*(\theta') \langle\theta'|\right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta'' u_m(\theta'') |\theta''\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\theta'' e^{i(m\theta'' - n\theta')} \delta(\theta'' - \theta') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' e^{i(m-n)\theta'} \\ &= \delta_{mn}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

como esperado. É importante notar que enquanto a base das posições é contínua, a dos momentos é discreta. Representando $|\theta\rangle$ na base dos momentos, temos

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} |u_m\rangle. \quad (2.16)$$

A dinâmica do relógio é governada por $\hat{H}_{\mathcal{R}} = \omega \hat{L}$, onde ω é uma constante e tem dimensão de frequência. Note que o efeito do operador unitário $\hat{U}(t) \equiv e^{-i\hat{H}_{\mathcal{R}}t}$ é gerar translações em θ ,

$$\begin{aligned} \hat{U}(t)|\theta\rangle &= e^{-i\hat{H}_{\mathcal{R}}t}|\theta\rangle \\ &= e^{-i\omega\hat{L}t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} |u_m\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im(\theta+\omega t)} |u_m\rangle \\ &= |\theta + \omega t\rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Vemos aqui o funcionamento do relógio: o operador de evolução temporal “avança o ponteiro” do relógio por uma sucessão de estados ortogonais a uma velocidade angular constante, ω . Podemos também verificar a relação de comutação entre $\hat{\theta}$ e $\hat{L}$:

$$\begin{aligned} [\hat{\theta}, \hat{L}] |\theta\rangle &= \hat{\theta} \hat{L} |\theta\rangle - \hat{L} \hat{\theta} |\theta\rangle \\ &= \hat{\theta} \left(\int_0^{2\pi} d\theta' |\theta'\rangle \langle \theta'| \right) \hat{L} |\theta\rangle - \theta \left(\int_0^{2\pi} d\theta' |\theta'\rangle \langle \theta'| \right) \hat{L} |\theta\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta' L_{\theta'\theta} (\theta' - \theta) |\theta'\rangle, \end{aligned}$$

onde usando (2.11), concluimos que

$$[\hat{\theta}, \hat{L}] = i, \quad (2.18)$$

como esperado. Por consequência, $\hat{\theta}$ e $\hat{L}$ obedecem a relação de incerteza $\Delta\theta \Delta L \geq 1/2$.

2.4 O RELÓGIO DE PERES

A seção anterior descreve um relógio ideal, onde seu funcionamento é impraticável, uma vez que para que ele esteja em um autoestado $|\theta\rangle$, deve-se ter uma precisão infinita em θ , $\Delta\theta = 0$. Dessa forma, o relógio precisaria de energia infinita (veja Eq. (2.16)) por causa do princípio da incerteza. Para contornar esse problema, Peres interpretou o relógio de uma forma mais realista, trazendo uma nova base, $\{|v_r\rangle\}$, e restringindo a soma em (2.16) para valores de m satisfazendo $-j \leq m \leq j$, sendo $2j + 1 = n$ o número de estados ortonormais da base:

$$|v_r\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=-j}^j e^{-2i\pi mr/n} |u_m\rangle, \quad (2.19)$$

onde $r = 0, 1, \dots, n - 1$ para que $|v_r\rangle$ seja normalizado. A atuação do operador de evolução temporal no intervalo de tempo específico $\tau \equiv 2\pi/n\omega$, nos leva a

$$\begin{aligned} \hat{U}(\tau) |v_r\rangle &= e^{-i\hat{H}_R\tau} |v_r\rangle \\ &= e^{-i\omega\hat{L}\tau} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=-j}^j e^{-2i\pi mr/n} |u_m\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=-j}^j e^{-2i\pi m(r+1)/n} |u_m\rangle \\ &= |v_{r+1}\rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\hat{U}(s\tau) |v_r\rangle \longrightarrow |v_{r+s}\rangle. \quad (2.20)$$

Nessa base, podemos dizer que a resolução do relógio é τ , uma vez que o mesmo no estado $|v_r\rangle$ aponta a “ r -ésima hora” com uma incerteza de $2\pi/n\omega$.

Note que essa base é ortonormal,

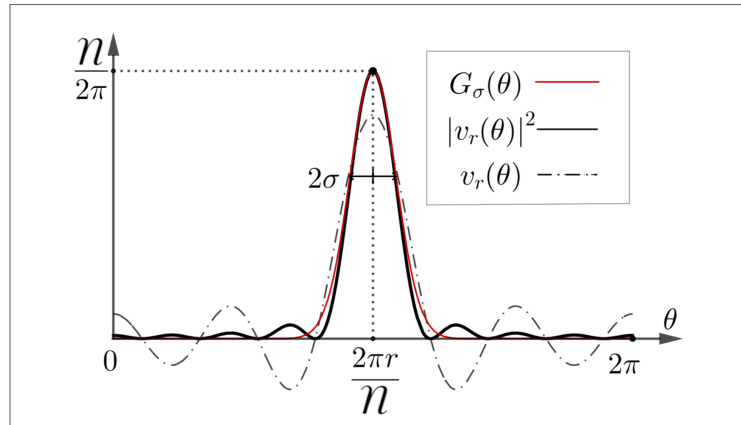
$$\begin{aligned}\langle v_s | v_r \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{m=-j}^j \sum_{n=-j}^j e^{2i\pi(ns-mr)/n} \langle u_n | u_m \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=-j}^j e^{2i\pi m(r-s)/n} \\ &= \delta_{rs},\end{aligned}\tag{2.21}$$

desde que r e s sejam inteiros (veja no Apêndice A). Outro ponto positivo é que a função de onda $v_r(\theta)$ é real,

$$v_r(\theta) = \langle \theta | v_r \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=-j}^j e^{im(\theta-\theta_r)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=-j}^j \cos[m(\theta - \theta_r)],\tag{2.22}$$

e tem pico em $\theta = \theta_r = 2\pi r/n$. Seu módulo ao quadrado se aproxima de uma gaussiana, $G_\sigma(\theta)$, nas fronteiras de θ_r , onde $\sigma = \sqrt{2\pi}/n$ é a largura da gaussiana que também está centrada em θ_r , como é mostrado na Figura 2. $|v_r(\theta)|^2$ pode ser interpretado como a densidade de probabilidade de encontrar o ponteiro em θ quando o relógio se encontra no estado $|v_r\rangle$. É importante perceber que fazendo $n \gg 1$, teremos picos cada vez mais acentuados, de forma que se $n \rightarrow \infty$ temos que $|v_r(\theta)|^2 \rightarrow \delta(\theta - \theta_r)$. Neste limite, temos uma “precisão infinita”, o que faz as bases $\{|v_r\rangle\}$ e $\{|\theta\rangle\}$ serem equivalentes.

Figura 2 – O gráfico mostra que o grau de precisão do relógio cresce com n , com a largura do pico inversamente proporcional ao número de estados ortogonais da base $\{|v_r\rangle\}$. Com isso, o pico vai ficando mais acentuado e estreito à medida que aumentamos n .



Fonte: Barros (2023)

Por conveniência, geralmente escolhemos como estado inicial do relógio $|v_0\rangle$. Assim, quando aplicamos o operador evolução temporal do relógio sobre esse estado, temos

$$e^{-i\hat{H}_R t} |v_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=-j}^j e^{-i\omega \hat{L} t} |u_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=-j}^j e^{-2\pi i m(t/\tau)/n} |u_m\rangle \equiv |v_{t/\tau}\rangle. \quad (2.23)$$

Note que $|v_{t/\tau}\rangle$ não faz parte da base ortonormal de Peres, já que t/τ não é necessariamente inteiro.

Finalmente, se usarmos então o relógio de Peres para a obtenção do tempo de chegada descrito na Sec. 2.1, e escolhermos o estado inicial do relógio como sendo $|\phi_0\rangle_{\mathcal{R}} = |v_0\rangle$, temos

$$\Pi_{YH}(\theta) = \int_0^\infty dt \left| \langle \theta | e^{-i\hat{H}_R t} | v_0 \rangle \right|^2 J(t) = \int_0^\infty dt \left| v_{t/\tau}(\theta) \right|^2 J(t). \quad (2.24)$$

Uma vez que queiramos aumentar a precisão do relógio, basta fazer com que n cresça, como já mencionado. Porém, note que não podemos tomar o limite $n \gg 1$ na Eq. (2.24) pois a mesma é válida para $\lambda\epsilon \ll E$ (nesse caso, $n\omega \ll p^2/2\mu$). Contudo, como exercício, vale a pena notar o que obtemos ao tomar esse limite em (2.24). Como nessa situação a função $|v_r(\theta)|^2$ tende a uma delta de Dirac, a densidade de probabilidade do tempo de chegada se torna a distribuição ideal dada pela densidade de corrente,

$$\Pi_{YH}(\theta) = \int_0^\infty dt \delta(\theta - \omega t) J(t) = \frac{1}{\omega} \Pi_J(\theta/\omega). \quad (2.25)$$

Veremos no Cap. 6 que nosso modelo permitirá tomar esse limite.

3 UMA BREVE REVISÃO DE MATRIZ DENSIDADE E SISTEMAS ABERTOS MARKOVIANOS

Neste capítulo vamos revisar o formalismo de matriz densidade e a dinâmica de sistemas abertos Markovianos. O motivo dessa revisão é que nos próximos capítulos vamos estudar medições do tempo de chegada envolvendo um detector que sofre uma transição irreversível quando uma partícula entra em uma região do espaço. Para que isso aconteça, precisamos considerar que o detector entra em contato com um ambiente, sendo assim necessário que o sistema partícula+detector seja tratado como um sistema aberto, usando o formalismo de matriz densidade.

3.1 O FORMALISMO DA MATRIZ DENSIDADE

3.1.1 Introdução

Neste formalismo, um estado quântico deixa de ser representado como apenas um “ket” $|\Psi\rangle$, que pertence a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e é promovido ao status de operador, denominado matriz densidade $\hat{\rho}$, que pertence ao espaço de Hilbert-Schmidt $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e atua em $\mathcal{H}$. Essa mudança se deve ao fato de que alguns estados quânticos não podem ser simplesmente expressos como um simples vetor de estado por possuir incertezas clássicas. Tais estados são conhecidos como estados mistos. Quando conseguimos descrever o estado como $|\psi\rangle$, dizemos que o estado é puro, e a matriz densidade equivalente é $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. De forma mais geral possível, o estado quântico pode ser uma soma ponderada de todos os constituintes de um ensemble,

$$\hat{\rho} \equiv \sum_{k=1}^{\nu} p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \quad (3.1)$$

onde o número de estados distintos ν não se relaciona com a dimensão do espaço de Hilbert D , e em geral, os estados $|\psi_k\rangle$ são não ortogonais. O valor p_k pode ser interpretado como a probabilidade do estado $|\psi_k\rangle$ “acontecer” no ensemble. Claro que os valores estão limitados a $0 < p_k < 1$, e que $\sum_{k=1}^{\nu} p_k = 1$. A dimensão do espaço onde atua $\hat{\rho}$ é D^2 , e uma vez escolhida a base ortonormal $\{|a_i\rangle\}$ pertencente a $\mathcal{H}$, podemos representar o operador como uma matriz de entradas $\rho_{ij} \equiv \langle a_i | \hat{\rho} | a_j \rangle$, onde os elementos com índices repetidos (pertencentes a diagonal principal da matriz, $i = j$) são chamados de populações, e os demais são chamados de coerências.

Apesar de não representar em si um observável, uma característica importante do operador densidade é que o mesmo é hermitiano, ou seja, $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$. Esse resultado é facilmente verificável pela definição (3.1). Outra propriedade bastante importante, também derivada da mesma definição, é que o seu traço é unitário,

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) \equiv \sum_a^D \langle a | \hat{\rho} | a \rangle = \sum_{k=1}^{\nu} p_k \langle \psi_k | \underbrace{\left(\sum_a^D |a\rangle\langle a| \right)}_{\hat{\mathbb{I}}} | \psi_k \rangle = \sum_{k=1}^{\nu} p_k = 1, \quad (3.2)$$

onde $\{|a\rangle\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Apesar de atuar no mesmo espaço que observáveis como posição, momento e energia (e de ter o mesmo status), não devemos olhar para o operador densidade como algo que atua no estado do sistema, pois ele é o próprio estado do sistema. Com isso, dado um observável $\hat{B}$ com autovalores $\{b\}$, a probabilidade de, após uma medição sobre o ensemble, encontrarmos um certo autovalor b (não degenerado) é dada por

$$\mathcal{P}(b) = \text{Tr}(|b\rangle\langle b| \hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{\rho} |b\rangle\langle b|). \quad (3.3)$$

3.1.2 Dinâmica de estados puros

Na mecânica quântica, conseguimos preparar o estado inicial do sistema fazendo, por exemplo, a medição de algum observável para que o sistema colapse para um de seus auto-estados. Dessa forma, considere que o estado inicial do sistema seja representado por $|\psi_0\rangle$. O estado inicial do sistema é puro, e seu operador densidade é $\hat{\rho}_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Como discutimos na introdução que podemos modelar $\hat{H}$ de forma que ele não seja auto-adjunto (é o caso do potencial complexo de Allcock, por exemplo), temos na representação de Schrödinger

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t} |\psi_0\rangle\langle\psi_0| e^{i\hat{H}^\dagger t}, \quad (3.4)$$

onde, por simplicidade, nos restringimos a Hamiltonianos independentes do tempo. Com isso

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i (\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}^\dagger). \quad (3.5)$$

No caso em que $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$, temos

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (3.6)$$

3.1.3 Sistemas compostos

Vamos supor que o sistema completo seja subdividido em dois subsistemas, o subsistema A com estado pertencente a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ e o subsistema B com estado pertencente a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$.

Então o estado do sistema conjunto é dado por

$$\hat{\rho} = \sum_{aba'b'} p_{aba'b'} |a, b\rangle\langle a', b'|, \quad (3.7)$$

onde $\hat{\rho}$ pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$. O ket $|a, b\rangle$ é a representação de $|a\rangle \otimes |b\rangle$, onde $\{|a\rangle\}$ e $\{|b\rangle\}$ são bases ortonormais de $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente. Note que podemos, por exemplo, estar interessados em estudar apenas o subsistema A , e o subsistema B representar o estado de um detector, ou até mesmo do ambiente (e vice-versa, já que a informação acessível pode estar guardada no aparato de medida, ou no ambiente). Nesse caso devemos tomar o traço parcial, que é definido como

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}) = \sum_b^{D_B} \langle b | \hat{\rho} | b \rangle \quad (3.8)$$

$$\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho}) = \sum_a^{D_A} \langle a | \hat{\rho} | a \rangle. \quad (3.9)$$

O mesmo raciocínio é usado para sistemas maiores, compostos por vários subsistemas. Sempre que quisermos “eliminar” um dos subsistemas, tomamos o traço parcial da matriz densidade total. Ao tomar o traço parcial e trabalhar com os subsistemas remanescentes, nem sempre é possível usar a equação mestra (3.6). Isso acontece pois nada garante que ao eliminar um dos subsistemas, os subsistemas de interesse mantenham a sua “pureza”.

3.2 INTRODUÇÃO A SISTEMAS ABERTOS

3.2.1 Interagindo com o ambiente

Para realizar uma medição realista devemos considerar que o sistema em questão esteja interagindo com outro sistema consideravelmente grande. Para isso, vamos considerar que o nosso sistema de interesse $\mathcal{S}$ está em contato com o ambiente $\mathcal{E}$.

Seja o estado inicial do ambiente $\hat{\rho}_{\mathcal{E}} = |\epsilon\rangle_{\mathcal{E}}\langle\epsilon|$ pertencente a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})$ e $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t=0) = \hat{\rho}_0$ o estado inicial do sistema pertencente a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$. Considerando a existência de um operador evolução unitário global, $\hat{U}$, temos que o estado do sistema é, no instante t , dado por

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{E}} \left[\hat{U} (\hat{\rho}_0 \otimes |\epsilon\rangle_{\mathcal{E}}\langle\epsilon|) \hat{U}^\dagger \right]. \quad (3.10)$$

Para representar o sistema sem menção explícita ao ambiente, devemos recorrer aos operadores de Kraus $\{\hat{K}_j\}$.

Seja $\{|e_j\rangle_\varepsilon\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}_\varepsilon$ e $\{|\phi_k\rangle_s\}$ a base espectral de $\hat{\rho}_0$. Definimos os operadores de Kraus que atuam em $\mathcal{H}_s$ da seguinte forma:

$$\hat{K}_j |\phi_k\rangle_s \equiv {}_\varepsilon\langle e_j | \hat{U} |\phi_k, \epsilon\rangle_{s\varepsilon}, \quad (3.11)$$

onde $|\phi_k, \epsilon\rangle_{s\varepsilon} = |\phi_k\rangle_s \otimes |\epsilon\rangle_\varepsilon$. Por outro lado, da Eq. (3.10), temos

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_\varepsilon [\hat{U} (\hat{\rho}_0 \otimes |\epsilon\rangle_\varepsilon \langle \epsilon|) \hat{U}^\dagger] = \sum_j {}_\varepsilon\langle e_j | \hat{U} (\hat{\rho}_0 \otimes |\epsilon\rangle_\varepsilon \langle \epsilon|) \hat{U}^\dagger |e_j\rangle_\varepsilon.$$

Representando $\hat{\rho}_0$ em sua decomposição espectral, $\hat{\rho}_0 = \sum_k p_k |\phi_k\rangle_s \langle \phi_k|$, temos

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_j \sum_k p_k {}_\varepsilon\langle e_j | \hat{U} |\phi_k, \epsilon\rangle_{s\varepsilon} \langle \phi_k, \epsilon | \hat{U}^\dagger |e_j\rangle_\varepsilon \\ &= \sum_j \sum_k p_k \hat{K}_j |\phi_k\rangle_s \langle \phi_k| \hat{K}_j^\dagger \\ &= \sum_j \hat{K}_j \hat{\rho}_0 \hat{K}_j^\dagger. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dessa forma, modelamos uma interação do sistema de interesse com o ambiente via operadores de Kraus, definindo o efeito do ambiente no sistema.

3.2.2 Dinâmica de um sistema aberto Markoviano

Ao descrever o sistema com o formalismo da matriz densidade, chegamos à equação mestra (3.6), que descreve a evolução temporal do sistema. Nosso objetivo é chegar a uma equação desse tipo para um sistema aberto.

Se considerarmos a evolução no intervalo de tempo δt , temos $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho} + \delta\hat{\rho}$ dado por

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho} + \delta\hat{\rho} = \sum_j \hat{K}_j \hat{\rho} \hat{K}_j^\dagger.$$

Vamos assumir que um dos operadores de Kraus, digamos $\hat{K}_0$, seja aproximadamente $\hat{\mathbb{I}}$, i.e.,

$$\hat{K}_0 = \hat{\mathbb{I}} + \hat{G}\delta t, \quad (3.13)$$

e que os demais termos da soma em j só contribuam para $\hat{\rho}$ em primeira ordem de δt , o que leva à

$$\hat{K}_j = \sqrt{\delta t} \hat{\mathcal{L}}_j, \quad j \neq 0. \quad (3.14)$$

É importante notar que se considerarmos (i) δt suficientemente pequeno, (ii) $\hat{G} \rightarrow -i\hat{H}$ e (iii) $\hat{\mathcal{L}}_j \rightarrow 0$, $\forall j$, a Eq. (3.12) retorna à (3.4), já que $\exp(-i\hat{H}\delta t) \approx \hat{\mathbb{I}} - i\hat{H}\delta t$. Para satisfazer

essa condição, devemos ter

$$\hat{K}_0 = \hat{\mathbb{I}} + (\hat{\mathcal{L}}_0 - i\hat{H}) \delta t. \quad (3.15)$$

Com isso, deixamos claro que para que voltemos à equação de um sistema fechado, basta que os operadores $\{\hat{\mathcal{L}}_j\}$ sejam todos nulos. Então, considerando que $\hat{\mathcal{L}}_0$ é hermitiano

$$\hat{\rho} + \delta\hat{\rho} = [\hat{\mathbb{I}} + (\hat{\mathcal{L}}_0 - i\hat{H}) \delta t] \hat{\rho} [\hat{\mathbb{I}} + (\hat{\mathcal{L}}_0 + i\hat{H}) \delta t] + \delta t \sum_{j \neq 0} \hat{\mathcal{L}}_j \hat{\rho} \hat{\mathcal{L}}_j^\dagger,$$

e dividindo ambos os membros por δt , temos

$$\frac{\delta\hat{\rho}}{\delta t} = \{\hat{\mathcal{L}}_0, \hat{\rho}\} - i [\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{j \neq 0} \hat{\mathcal{L}}_j \hat{\rho} \hat{\mathcal{L}}_j^\dagger. \quad (3.16)$$

Para δt suficientemente pequeno, podemos encarar o lado esquerdo da Eq. (3.16) como a derivada temporal de $\hat{\rho}$. Como o traço de uma matriz densidade precisa ser unitário e comuta com a derivada, temos

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}(\hat{\rho}) = \text{Tr} \left(\frac{d\hat{\rho}}{dt} \right) = 0,$$

e com isso, encontramos que

$$\hat{\mathcal{L}}_0 = -\frac{1}{2} \sum_{j \neq 0} \hat{\mathcal{L}}_j^\dagger \hat{\mathcal{L}}_j = \hat{\mathcal{L}}_0^\dagger.^1 \quad (3.17)$$

Finalmente, usando (3.17) em (3.16), obtemos (RIVAS; HUELGA, 2012)

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i [\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{j \neq 0} \left(\hat{\mathcal{L}}_j \hat{\rho} \hat{\mathcal{L}}_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{\mathcal{L}}_j^\dagger \hat{\mathcal{L}}_j, \hat{\rho} \} \right), \quad (3.18)$$

que é a equação de Lindblad. Os operadores $\hat{\mathcal{L}}_j$ são conhecidos como operadores de Lindblad, e têm dimensão de $(\text{tempo})^{-1/2}$.

Note pela Eq. (3.11) que, para que o formalismo usado seja válido, precisamos admitir que o estado inicial seja separável (não emaranhado) do subsistema do ambiente que interage com $\mathcal{S}$. Porém, como fizemos evoluções em intervalos de tempo δt , o que garante que após um desses intervalos de tempo o sistema continue separável para que evolua com a mesma equação? Caso o sistema evoluído de δt esteja emaranhado com o subsistema do ambiente que ele vai interagir no próximo passo de δt , a utilização da equação de Lindblad não se justifica. Para que se justifique, é preciso que δt seja muito menor que o tempo típico em que o sistema de interesse mude apreciavelmente, mas, ao mesmo tempo, seja muito maior que o tempo

¹ Este resultado é encontrado usando a propriedade de comutatividade do traço de uma matriz. Usando-a, percebemos que $\text{Tr} [\hat{A}, \hat{B}] = 0$ e $\text{Tr} \{ \hat{A}, \hat{B} \} = 2\text{Tr} (\hat{A}\hat{B})$.

em que o emaranhamento entre o sistema e o ambiente diminua pela própria dinâmica de interação ambiente. Em outras palavras, é necessário, por exemplo, que a cada intervalo de tempo δt o sistema interaja com um novo subsistema do ambiente que não está inicialmente correlacionado com o sistema $\mathcal{S}$. Isso é uma característica de uma dinâmica Markoviana, na qual a matriz densidade $\hat{\rho}(t + \delta t)$ só depende do estado atual $\hat{\rho}(t)$, e não da sequência de estados que o precedem.

3.2.3 Exemplo de um sistema simples interagindo com um ambiente

Seja $\mathcal{S}$ um sistema de dois níveis em contato com o ambiente $\mathcal{E}$. Uma base simples para representar esse sistema é $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Digamos que a interação com o ambiente seja de tal forma que apenas um operador de Lindblad seja não nulo, e seja dado por

$$\hat{\mathcal{L}} = \gamma^{1/2} |0\rangle\langle 1|. \quad (3.19)$$

Por simplicidade, vamos supor que o hamiltoniano do sistema seja nulo, ou seja, $\hat{H}_{\mathcal{S}} = 0$. Com isso, a equação de Lindblad para o sistema tem a forma

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{\mathcal{L}}\hat{\rho}\hat{\mathcal{L}}^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{\mathcal{L}}^\dagger \hat{\mathcal{L}}, \hat{\rho} \}. \quad (3.20)$$

Usando (3.19), temos

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \gamma \left(|0\rangle\langle 1| \hat{\rho} |1\rangle\langle 0| - \frac{1}{2} \hat{\rho} |1\rangle\langle 1| - \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1| \hat{\rho} \right), \quad (3.21)$$

ou, na forma matricial,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\rho_{11} & -\frac{\rho_{10}}{2} \\ -\frac{\rho_{01}}{2} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

A solução da Eq. (3.22) é dada por

$$\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0)e^{-\gamma t} \quad (3.23)$$

$$\rho_{10}(t) = \rho_{10}(0)e^{-\gamma t/2} \quad (3.24)$$

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)e^{-\gamma t/2} \quad (3.25)$$

$$\rho_{00}(t) = 1 - \rho_{11}(t) = 1 - \rho_{11}(0)e^{-\gamma t}, \quad (3.26)$$

o que significa que independente do estado inicial do sistema, tanto a população ρ_{11} quanto as coerências, ρ_{10} e ρ_{01} , tendem a 0 quando $t \rightarrow \infty$. Ou seja, este ambiente induz a transição

de qualquer estado $|\psi\rangle \rightarrow |0\rangle$. No caso em que o sistema se encontra inicialmente no estado $|0\rangle$, temos que $\rho_{11}(0) = 0$, e o ambiente não induz nenhuma mudança. É importante notar que o efeito do ambiente está diretamente ligado ao fator γ , e quanto maior o seu valor, mais rápido acontece a transição.

4 MEDINDO TEMPO DE CHEGADA USANDO UM DETECTOR IRREVERSÍVEL

Neste capítulo apresentamos um modelo que detecta, de forma irreversível, quando uma partícula chega na origem. O detector consiste de um sistema de dois níveis que sofre uma transição irreversível quando a partícula entra na região $x > 0$. Para isso, o detector deve entrar em contato com um grande ambiente quando a partícula entra nessa região. Esse modelo foi proposto por Halliwell (HALLIWELL, 1999) como uma forma de obtenção do potencial complexo de Allcock. O modelo de Halliwell fornece a probabilidade de encontrar o detector no seu estado de detecção (ou não detecção) da partícula em um certo instante t .

4.1 DETECTOR IRREVERSÍVEL

Seja o detector $\mathcal{D}$ um sistema de dois níveis, $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ e $|0\rangle_{\mathcal{D}}$, representando estados de não detecção e de detecção, respectivamente. Considerando o Hamiltoniano “livre” do detector

$$\hat{H}_{\mathcal{D}} = \frac{\Omega}{2} (|1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| - |0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 0|), \quad (4.1)$$

então $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ e $|0\rangle_{\mathcal{D}}$ são auto-estados do Hamiltoniano com autovalores $\frac{1}{2}\Omega$ e $-\frac{1}{2}\Omega$, respectivamente. Queremos acoplar o detector, que se encontra inicialmente em $|1\rangle_{\mathcal{D}}$, à uma partícula livre, de tal forma que o detector realize uma transição de $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ para $|0\rangle_{\mathcal{D}}$ se a partícula entrar na região $x > 0$, ou permaneça em $|1\rangle_{\mathcal{D}}$, caso contrário.

Uma das dificuldades da descrição quântica dos detectores é que eles são modelados por uma mecânica de operadores unitários, e com isso, existe a possibilidade de transição reversa. Por conta da mecânica quântica ser fundamentalmente reversível, o detector pode retornar ao estado de não detecção sob sua própria dinâmica, mesmo que a partícula tenha interagido com ele.

Isso pode ser resolvido acoplando o detector a um grande ambiente. Vamos considerar o ambiente sendo composto de osciladores harmônicos em seus estados fundamentais. Como queremos que o detector realize uma transição de estado quando a partícula entra na região $x > 0$, vamos considerar que o Hamiltoniano de interação detector-ambiente seja proporcional a $\Theta(x)$.

Um Hamiltoniano que descreve esse processo para um conjunto de três subsistemas ($\mathcal{S}$, a

partícula, $\mathcal{D}$, o detector e $\mathcal{E}$, o ambiente) é

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_{\mathcal{D}} + \hat{H}_{\mathcal{E}} + \Theta(\hat{x})\hat{H}_{\mathcal{D}\mathcal{E}}, \quad (4.2)$$

onde $\hat{H}_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$ é o Hamiltoniano de interação entre o detector e o ambiente. O Hamiltoniano do ambiente é dado por

$$\hat{H}_{\mathcal{E}} = \sum_n \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \quad (4.3)$$

onde $\hat{a}_n^\dagger$ e $\hat{a}_n$ são os operadores de criação e destruição do modo n . A interação detector-ambiente é dada por

$$\hat{H}_{\mathcal{D}\mathcal{E}} = \sum_n \left(\kappa_n^* |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| \hat{a}_n^\dagger + \kappa_n |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 0| \hat{a}_n \right). \quad (4.4)$$

Note que nessa interação, o ambiente provoca transições no detector conservando energia.

Nós estamos interessados na dinâmica reduzida apenas ao detector e à partícula, de modo que tomaremos o traço parcial do ambiente. Portanto, buscamos a equação mestra para a matriz densidade reduzida, $\hat{\rho}$, do detector e da partícula. De acordo com Halliwell (HALLIWELL, 1999), o tratamento do ambiente dado pelas Eqs.(4.2)-(4.4) é equivalente a usarmos a dinâmica de um sistema aberto com um único operador de Lindblad não nulo com a mesma forma da Eq. (3.19), mas limitado à região do espaço $x > 0$. Com isso,

$$\hat{\mathcal{L}} = \gamma^{1/2} \Theta(\hat{x}) |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1|, \quad (4.5)$$

onde γ é uma constante fenomenológica que depende da distribuição dos osciladores no ambiente e das constantes de acoplamento κ_n . Reescrevendo a Eq. (3.18) na forma

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i [\hat{H}_S + \hat{H}_{\mathcal{D}}, \hat{\rho}] + \hat{\mathcal{L}} \hat{\rho} \hat{\mathcal{L}}^\dagger - \frac{1}{2} \hat{\mathcal{L}}^\dagger \hat{\mathcal{L}} \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{\mathcal{L}}^\dagger \hat{\mathcal{L}}, \quad (4.6)$$

e substituindo (4.5) em (4.6), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & -i [\hat{H}_S + \hat{H}_{\mathcal{D}}, \hat{\rho}] \\ & + \frac{\gamma}{2} \left(2\Theta(\hat{x}) |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| \hat{\rho} |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 0| \Theta(\hat{x}) - \Theta^2(\hat{x}) |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| \hat{\rho} - \hat{\rho} |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| \Theta^2(\hat{x}) \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Essa equação é resolvida escrevendo

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{11} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| + \hat{\rho}_{10} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 0| + \hat{\rho}_{01} \otimes |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| + \hat{\rho}_{00} \otimes |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 0|. \quad (4.8)$$

Usando a equação (4.1) em $[\hat{H}_{\mathcal{D}}, \hat{\rho}]$, temos

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{\mathcal{D}}, \hat{\rho}] = & \frac{\Omega}{2} \left\{ \left(\hat{\rho}_{11} |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| + \hat{\rho}_{10} |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 0| - \hat{\rho}_{01} |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| - \hat{\rho}_{00} |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 0| \right) \right. \\ & \left. - \left(\hat{\rho}_{11} |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| - \hat{\rho}_{10} |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 0| + \hat{\rho}_{01} |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| - \hat{\rho}_{00} |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 0| \right) \right\} \\ = & \Omega \left(\hat{\rho}_{10} |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 0| - \hat{\rho}_{01} |0\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1| \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Considerando que $\Theta^2(\hat{x}) = \Theta(\hat{x})$, usando a Eq. (4.9) e separando em componentes a Eq. (4.7), temos quatro equações,

$$\frac{d\hat{\rho}_{11}}{dt} = -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{11}] - \frac{\gamma}{2} \{\hat{\rho}_{11}, \Theta(\hat{x})\}, \quad (4.10)$$

$$\frac{d\hat{\rho}_{10}}{dt} = -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{10}] - \frac{\gamma}{2} \Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{10} - i\Omega \hat{\rho}_{10}, \quad (4.11)$$

$$\frac{d\hat{\rho}_{01}}{dt} = -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{01}] - \frac{\gamma}{2} \hat{\rho}_{01} \Theta(\hat{x}) + i\Omega \hat{\rho}_{01} \quad \text{e} \quad (4.12)$$

$$\frac{d\hat{\rho}_{00}}{dt} = -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{00}] + \gamma \Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{11} \Theta(\hat{x}). \quad (4.13)$$

Note que os termos $-\gamma \Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{10}/2$ e $-\gamma \hat{\rho}_{01} \Theta(\hat{x})/2$ das Eqs. (4.11) e (4.12) são semelhantes aos termos que aparecem na Eq. (3.22), e induzem, nesse caso, que $\hat{\rho}_{10}$ e $\hat{\rho}_{01}$ decaiam com o passar do tempo. Também é importante notar uma grande diferença em relação ao exercício da Sec. 3.2.3. Nessa seção, tínhamos apenas componentes de uma matriz, onde, por exemplo, os termos da diagonal eram as próprias probabilidades de medir os estados $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ e $|0\rangle_{\mathcal{D}}$. Aqui, não temos mais probabilidades e sim operadores. Isso se dá pelo fato de que mesmo traçado o ambiente, ainda estamos trabalhando com dois subsistemas. Dessa forma, passamos a interpretar a componente $\hat{\rho}_{11}$ como o estado de não detecção da partícula (lembre-se que no início o detector está em $|1\rangle_{\mathcal{D}}$). Vemos também que “as coerências” continuam desacopladas, assim como acontece na Sec. 3.2.3. Reorganizando a Eq. (4.10), temos

$$\frac{d\hat{\rho}_{11}}{dt} = -i \left[\left(\hat{H}_S - \frac{i\gamma}{2} \Theta(\hat{x}) \right) \hat{\rho}_{11} - \hat{\rho}_{11} \left(\hat{H}_S + \frac{i\gamma}{2} \Theta(\hat{x}) \right) \right]. \quad (4.14)$$

Se definirmos o Hamiltoniano efetivo,

$$\hat{H}_{\text{eff}} \equiv \hat{H}_S - \frac{i\gamma}{2} \Theta(\hat{x}), \quad (4.15)$$

a Eq. (4.14) se torna

$$\frac{d\hat{\rho}_{11}}{dt} = -i \left(\hat{H}_{\text{eff}} \hat{\rho}_{11} - \hat{\rho}_{11} \hat{H}_{\text{eff}}^\dagger \right), \quad (4.16)$$

como introduzimos na Eq. (3.5). Note que o termo imaginário de $\hat{H}_{\text{eff}}$ faz com que o estado de não detecção diminua com o tempo. A solução de (4.16) é dada por

$$\hat{\rho}_{11}(t) = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t} \hat{\rho}_{11}(0) e^{i\hat{H}_{\text{eff}}^\dagger t}. \quad (4.17)$$

Considerando que o estado inicial do detector é $|1\rangle$, o estado inicial da partícula + detector é $|\psi_0\rangle_S \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}$ e a Eq. (4.17) pode ser escrita como

$$\hat{\rho}_{11}(t) = |\psi_{nd}(t)\rangle_S \langle \psi_{nd}(t)|, \quad (4.18)$$

onde $|\psi_{nd}(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t} |\psi_0\rangle_S$. Portanto, o estado de não detecção pode ser dado pelo *ket* $|\psi_{nd}(t)\rangle_S$, cuja evolução é dada pela equação de Schrödinger com o Hamiltoniano efetivo, i.e.,

$$i \frac{d}{dt} |\psi_{nd}(t)\rangle_S = \hat{H}_{\text{eff}} |\psi_{nd}(t)\rangle_S. \quad (4.19)$$

Note que fazendo $\gamma = 2V_0$ derivamos o potencial complexo de Allcock definido na Eq. (1.13) da introdução. A probabilidade de encontrar o detector no estado de não detecção, $\mathcal{P}_{nd}$, em um instante de tempo t é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{nd}(t) &= \text{Tr}(|1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \hat{\rho}) = \text{Tr}_S \left(\text{Tr}_{\mathcal{D}}(|1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \hat{\rho}) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x| \left(|1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \hat{\rho} |1\rangle_{\mathcal{D}} + |0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 0| \hat{\rho} |0\rangle_{\mathcal{D}} \right) |x\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x| \hat{\rho}_{11} |x\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_{nd}(x, t)|^2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $\psi_{nd}(x, t) = \langle x| \psi_{nd}(t) \rangle_S$.

Note que a probabilidade de não detecção inclui a integral em todo o espaço, e não apenas na região $x < 0$, pois, $|\psi_{nd}(x, t)|^2$ não é necessariamente nulo na região $x > 0$. Existe, portanto, a possibilidade da partícula entrar na região $x > 0$ e o detector não registrar a ocorrência desse evento no instante em que acontece. Isso pode ser interpretado como uma característica de um detector realista que leva um tempo para interagir com a partícula e sofrer a transição.

Voltando nossa atenção para o estado de detecção da partícula, $\hat{\rho}_{00}$, a solução da Eq. (4.13) é dada por

$$\hat{\rho}_{00}(t) = \gamma \int_0^t dt' e^{-i\hat{H}_s(t-t')} \Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{11}(t') \Theta(\hat{x}) e^{i\hat{H}_s(t-t')}, \quad (4.21)$$

como se pode ver no Apêndice B. Dessa equação, note que $\hat{\rho}_{00}(0) = 0$, como gostaríamos, já que inicialmente o detector está no estado $|1\rangle_{\mathcal{D}}$. Para obter a probabilidade de encontrar o detector no estado de detecção no instante t , tomamos o traço do operador densidade projetado em $|0\rangle_{\mathcal{D}}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_d(t) &= \text{Tr}(|0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 0| \hat{\rho}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x| \hat{\rho}_{00} |x\rangle \\ &= \gamma \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x| \left(e^{-i\hat{H}_s(t-t')} \Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{11}(t') \Theta(\hat{x}) e^{i\hat{H}_s(t-t')} \right) |x\rangle \\ &= \gamma \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\langle x| \left(e^{-i\hat{H}_s(t-t')} \Theta(\hat{x}) |\psi_{nd}(t')\rangle_S \langle \psi_{nd}(t')| \Theta(\hat{x}) e^{i\hat{H}_s(t-t')} \right) |x\rangle}_{I(x)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Como estamos considerando que a partícula é livre, temos que

$$\hat{H}_S |p\rangle = E(p) |p\rangle, \quad (4.23)$$

onde $E(p) = p^2/2\mu$ é a energia da partícula. Aplicando o operador identidade na base $\{|p\rangle\}$ convenientemente, o integrando $I(x)$ se escreve

$$I(x) = \langle x | e^{-i\hat{H}_S(t-t')} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| \right) \Theta(\hat{x}) |\psi_{nd}(t')\rangle_s \times \\ \times {}_s \langle \psi_{nd}(t') | \Theta(\hat{x}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp' |p'\rangle \langle p'| \right) e^{i\hat{H}_S(t-t')} |x\rangle. \quad (4.24)$$

Usando (4.23) e expandindo $|\psi_{nd}(t)\rangle$ na base das posições,

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp dp' \int_{-\infty}^{\infty} dx' dx'' \left[\Theta(x') \psi_{nd}(x', t') \psi_{nd}^*(x'', t') \Theta(x'') \times \right. \\ \left. \times e^{-i[E(p)-E(p')](t-t')} \langle x|p\rangle \langle p|x'\rangle \langle x''|p'\rangle \langle p'|x\rangle \right]. \quad (4.25)$$

Sabendo que

$$\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.26)$$

temos

$$I(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp dp' \int_0^{\infty} dx' dx'' \left[\psi_{nd}(x', t') \psi_{nd}^*(x'', t') \right. \\ \left. \times e^{-i[E(p)-E(p')](t-t')} e^{ix(p-p')} e^{i(p'x''-px')} \right]. \quad (4.27)$$

Substituindo (4.27) em (4.22),

$$\mathcal{P}_d(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dp dp' \int_0^{\infty} dx' dx'' \left[\psi_{nd}(x', t') \psi_{nd}^*(x'', t') e^{-i[E(p)-E(p')](t-t')} \times \right. \\ \left. \times e^{i(p'x''-px')} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(p-p')}}_{\delta(p-p')} \right], \quad (4.28)$$

e com isso, reduzimos o número de integrais, e um dos fatores exponenciais vai a 1 quando tomamos a integral em p' . Dessa forma,

$$\mathcal{P}_d(t) = \gamma \int_0^t dt' \int_0^{\infty} dx' dx'' \left[\psi_{nd}(x', t') \psi_{nd}^*(x'', t') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x''-x')}}_{\delta(x'-x'')} \right]. \quad (4.29)$$

Tomando a integral em x'' , temos, finalmente,

$$\mathcal{P}_d(t) = \gamma \int_0^t dt' \int_0^{\infty} dx |\psi_{nd}(x, t')|^2. \quad (4.30)$$

Note que diferente da expressão obtida para a probabilidade de não detecção (4.20), a expressão para probabilidade de detecção (4.30) envolve uma integral na região $x > 0$. Além disso, o resultado obtido é diretamente proporcional ao fator γ , como esperado, já que quanto maior o seu valor, mais rápida tende a acontecer a transição do estado do detector.

Assim, a distribuição temporal para o tempo de chegada do modelo de Halliwell é dada por

$$\Pi_H(t) = \frac{d\mathcal{P}_d(t)}{dt} = \gamma \int_0^\infty dx |\psi_{nd}(x, t)|^2, \quad (4.31)$$

onde $\int_0^\infty dx |\psi_{nd}(x, t)|^2$ é a probabilidade de encontrar a partícula na região $x > 0$ no instante t com o detector no estado de não detecção, $|1\rangle_{\mathcal{D}}$. Como $\mathcal{P}_{nd} + \mathcal{P}_d = 1$, então $d\mathcal{P}_d/dt = -d\mathcal{P}_{nd}/dt$, e portanto usando a Eq. (4.20), temos que $\Pi_H(t)$ também pode ser obtida por

$$\Pi_H(t) = -\frac{d\mathcal{P}_{nd}(t)}{dt} = -\int_{-\infty}^\infty dx \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{nd}(x, t)|^2. \quad (4.32)$$

Vale ressaltar que essas densidades de probabilidade são as mesmas do modelo fenomenológico de Allcock. Portanto, como discutido na introdução, fazendo uma deconvolução com a função $R(t) = \gamma\Theta(t)e^{-\gamma t}$, temos que $\Pi_H(t)$ se torna a densidade de corrente $J(0, t)$ no limite em que $\gamma \rightarrow 0$.

5 INTERPRETANDO O MODELO DE HALLIWELL PARA A DISTRIBUIÇÃO TEMPORAL DO TEMPO DE CHEGADA

5.1 INTRODUÇÃO

Para justificar o que vem a seguir, façamos uma análise mais cuidadosa do modelo de Halliwell. Até onde sabemos, a discussão desta seção é uma contribuição original desta dissertação.

A previsão desse modelo para a distribuição de probabilidade do tempo de chegada refere-se à medições em um ensemble de N sistemas abertos “partícula+detector” ($\mathcal{S} + \mathcal{D}$) identicamente preparados. Primeiramente, suponha que uma medição na base $\{|1\rangle_{\mathcal{D}}, |0\rangle_{\mathcal{D}}\}$ é feita no instante t e que $N_0(t)$ ($N_1(t)$) desses sistemas se encontram no estado de detecção (não detecção), $|0\rangle_{\mathcal{D}}$ ($|1\rangle_{\mathcal{D}}$). Portanto, a probabilidade de encontrar o sistema no estado de detecção no instante t , $\mathcal{P}_d(t)$, é dada por

$$\mathcal{P}_d(t) = \frac{N_0(t)}{N} = 1 - \frac{N_1(t)}{N} = 1 - \mathcal{P}_{nd}(t). \quad (5.1)$$

Nesse contexto, para descobrir a distribuição de probabilidade de chegada, devemos contar a quantidade de partículas que chegam entre t e $t + dt$. Esse valor é dado pelo número de partículas que chegam entre $[0, t + dt]$ menos o número de partículas que chegam entre $[0, t]$,

$$N_0(t + dt) - N_0(t) = -(N_1(t + dt) - N_1(t)). \quad (5.2)$$

Portanto, a taxa de chegada de partículas é dada por $dN_0/dt = -dN_1/dt$. Finalmente, para encontrar a distribuição de probabilidade de chegada basta dividir pelo número de sistemas no ensemble,

$$\Pi_H(t) = \frac{1}{N} \frac{dN_0}{dt} = \frac{d\mathcal{P}_d}{dt} = -\frac{1}{N} \frac{dN_1}{dt} = -\frac{d\mathcal{P}_{nd}}{dt}. \quad (5.3)$$

Dessa forma, a estatística fornecida pelo ensemble nos dá a distribuição de probabilidade de chegada prevista por $\Pi_H(t)$ (Eq. (4.31) ou (4.32)) através da taxa de decrescimento (crescimento) de N_1 (N_0).

Porém, vale a pena investigar as previsões acima analisando o comportamento de um *único* sistema ($\mathcal{S} + \mathcal{D} + \mathcal{E}$). Primeiramente, note que podemos escrever o estado global do sistema total como a superposição dos estados |partícula não detectada $\rangle_{\mathcal{SD}\mathcal{E}} \equiv |\Psi_{nd}(t)\rangle$ e |partícula detectada $\rangle_{\mathcal{SD}\mathcal{E}} \equiv |\Psi_d(t)\rangle$, i.e.,

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_{nd}(t)\rangle + |\Psi_d(t)\rangle = |\psi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}} \otimes |\epsilon_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{E}} + |\psi_d(t)\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |0\rangle_{\mathcal{D}} \otimes |\epsilon_d(t)\rangle_{\mathcal{E}}, \quad (5.4)$$

onde $|\epsilon_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|\epsilon_d(t)\rangle_{\mathcal{E}}$ são os estados do ambiente associados à não detecção e à detecção da partícula, respectivamente, e a evolução de $|\psi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{S}}$ é dada pelo Hamiltoniano $\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{\mathcal{S}} - i\gamma\Theta(\hat{x})/2$ (4.15). Note que $|\epsilon_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{E}}$ e $|\epsilon_d(t)\rangle_{\mathcal{E}}$ não são ortogonais enquanto $\hat{\rho}_{10}$ e $\hat{\rho}_{01}$ das Eqs. (4.11) e (4.12) são diferentes de zero. Com isso, a probabilidade de em uma medição no instante t , encontrarmos o detector no seu estado de não detecção é dada por

$$\mathcal{P}_{nd}(t) = \left| {}_{\mathcal{D}}\langle 1 | \Psi(t) \rangle \right|^2 = {}_{\mathcal{S}}\langle \psi_{nd}(t) | \psi_{nd}(t) \rangle_{\mathcal{S}}, \quad (5.5)$$

onde ${}_{\mathcal{E}}\langle \epsilon_{nd}(t) | \epsilon_{nd}(t) \rangle_{\mathcal{E}} = 1$. Por outro lado, a probabilidade de encontrar o detector no seu estado de detecção é $\mathcal{P}_d(t) = 1 - \mathcal{P}_{nd}(t)$. Nesse contexto, vemos que imediatamente antes da medição, independente de seu resultado, o sistema total se encontra no estado (5.4), ou seja, numa superposição do tipo

$$|\Psi(t)\rangle = |\text{partícula não detectada}\rangle_{\mathcal{SD}\mathcal{E}} + |\text{partícula detectada}\rangle_{\mathcal{SD}\mathcal{E}}. \quad (5.6)$$

Em outras palavras, medir o detector no instante t e encontrá-lo, por exemplo, no estado $|0\rangle_{\mathcal{D}}$, não significa que a partícula chegou em algum momento do passado entre $[0, t]$. Portanto, o fato do sistema total estar na superposição (5.6) antes da medição vai de encontro ao uso da Eq. (5.3) como a densidade de probabilidade de chegada, já que em (5.3) interpretamos $N_0(t)/N = \mathcal{P}_d(t)$ como a probabilidade do detector ter medido a chegada da partícula em algum momento no intervalo $[0, t]$. Diante dessa indeterminação quântica, a pergunta “quando a partícula chegou?” parece não ter sentido físico quando lidamos com um sistema único. Vemos com isso uma clara distinção física entre as seguintes declarações: “detector em $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ no instante t (partícula não detectada no instante t)” e “detector em $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ até o tempo t (partícula não detectada entre 0 e t)”.

Para contornar esse problema e podermos falar sobre o instante de chegada sem “contradições” entre os tratamentos via ensemble e sistema único, devemos monitorar o detector, medindo-o em pequenos intervalos de tempo Δt 's (como se estivéssemos observando-o “continuamente”). Ao monitorar o detector em intervalos Δt 's suficientemente pequenos, podemos construir um ensemble de “trajetórias” quânticas do detector, onde uma trajetória específica é definida pela permanência do detector em $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ até o instante específico da detecção da partícula, e em $|0\rangle_{\mathcal{D}}$ a partir desse instante. Assim, calculando a probabilidade de uma trajetória específica (detector estar em $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ até um certo instante t), $\mathcal{P}_1(t)$, podemos usar o raciocínio da Eq. (5.2) e derivar no tempo essa probabilidade (ao invés de derivar $\mathcal{P}_d(t)$ ou $\mathcal{P}_{nd}(t)$) para obter a densidade de probabilidade do tempo de chegada.

O monitoramento descrito acima é feito pelas técnicas de *Quantum Jump Approach* ou *Monte Carlo Wave Function* (HEGERFELDT, 2003). Abordaremos essas técnicas na próxima seção e aplicaremos ao detector de Halliwell. Veremos que pelo fato do detector já estar sendo, de certa forma, monitorado pelo ambiente, sucessivas medições na base $\{|1\rangle_{\mathcal{D}}, |0\rangle_{\mathcal{D}}\}$ não vão alterar a dinâmica do detector. Dessa forma, $\mathcal{P}_{nd}(t) = \mathcal{P}_1(t)$ e, portanto, mesmo o modelo de Halliwell não definindo um tempo de chegada para um sistema único, $\Pi_H(t) = -d\mathcal{P}_{nd}(t)/dt = -d\mathcal{P}_1(t)/dt$ deve descrever satisfatoriamente a chegada da partícula para um monitoramento de intervalos Δt 's suficientemente pequenos. Voltaremos a falar do papel do ambiente nesse processo no Cap. 6 desta dissertação.

5.2 ESTATÍSTICA DE UM ENSEMBLE DE TRAJETÓRIAS QUÂNTICAS DO DETECTOR

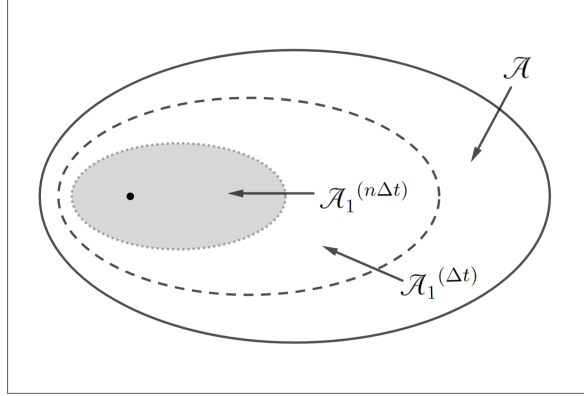
Vamos modelar o monitoramento do detector usando a técnica de *Quantum Jump* (QJ). Esse monitoramento é feito através de colapsos a cada intervalo de tempo Δt , definindo uma “história” (resultados dessas sucessivas medições) desse sistema, uma especie de trajetória quântica. O método de QJ fornece a estatística das possíveis trajetórias quânticas do sistema monitorado.

Idealmente gostaríamos que $\Delta t \rightarrow 0$ para simular medições contínuas. Mas isso é impossível na estrutura da TQ devido ao efeito Zeno quântico (MISRA; SUDARSHAN, 1977). O Efeito Zeno é frequentemente expresso como o “congelamento” da evolução devido à repetição de medições realizadas sobre o sistema em intervalos de tempo muito curtos. Isso acontece por que o sistema colapsa sempre para o mesmo estado por não ter tempo suficiente de evoluir para um estado diferente. Portanto, considere Δt suficientemente grande de modo que não perturbe a dinâmica do sistema+detector. Voltaremos a falar do efeito Zeno ainda nesta seção.

Considere um ensemble $\mathcal{A}$ composto de cópias do sistema definido no Cap. 4 (partícula+detector, já traçado o ambiente). Em $t = 0$, o ensemble pode ser descrito por $|\psi_0\rangle_s |1\rangle_{\mathcal{D}}$, onde $|\psi_0\rangle_s$ é o estado inicial da partícula e $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ é o estado inicial do detector. Podemos também representar o estado inicial com o formalismo de matriz densidade, onde temos $\hat{\rho}_0 = |\psi_0\rangle_s \langle\psi_0| \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}} \langle 1|$. Agora assuma que em cada membro do ensemble sejam feitas medições no detector na base $\{|1\rangle_{\mathcal{D}}, |0\rangle_{\mathcal{D}}\}$ em intervalos $\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t, \dots$. Denotamos $\mathcal{A}_1^{(n\Delta t)}$ o sub-ensemble que consiste de todos os sistemas de $\mathcal{A}$ que na n -ésima medição ainda estão em $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ (veja Fig. 3).

A primeira medição é equivalente a deixar o ensemble evoluir um intervalo de tempo

Figura 3 – O ensemble $\mathcal{A}$ no estado inicial $|\psi_0\rangle_{\mathcal{S}}|1\rangle_{\mathcal{D}}$. Com o passar do tempo, um subconjunto de detectores do ensemble detecta a chegada da partícula, enquanto os demais permanecem no estado de não detecção $|1\rangle_{\mathcal{D}}$. Denotamos $\mathcal{A}_1^{(n\Delta t)}$ como o sub-ensemble composto apenas por detectores que ainda não detectaram a chegada da partícula após n medidas. O ponto está representando o sistema de interesse.



Fonte: Barros (2023)

Δt e projetar no estado do detector associado à não detecção da partícula, ou seja, aplicar $\hat{P}_1 = \hat{\mathbb{I}}_{\mathcal{S}} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1|$. A evolução de $\hat{\rho}_0$ pode ser escrita usando os operadores de Kraus (veja Eq. (3.12)). Com isso, o sub-ensemble $\mathcal{A}_1^{(\Delta t)}$ é descrito pela matriz densidade

$$\hat{\rho}_c(\Delta t) = \hat{P}_1 \left[\sum_j \hat{K}_j \hat{\rho}_0 \hat{K}_j^\dagger \right] \hat{P}_1, \quad (5.7)$$

onde usando as Eqs. (3.14), (3.15), (3.17) e (4.5),

$$\hat{K}_0 = \mathbb{I} - \left(i\hat{H}_{\mathcal{S}} + \frac{\gamma}{2} \Theta(\hat{x}) |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \right) \Delta t \quad \text{e} \quad \hat{K}_1 = \gamma^{1/2} \Theta(\hat{x}) |0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \sqrt{\Delta t}. \quad (5.8)$$

Calculando (5.7), temos

$$\hat{\rho}_c(\Delta t) = \hat{\rho}_{11}(\Delta t) \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1|, \quad (5.9)$$

onde $\hat{\rho}_{11}(\Delta t)$ é a evolução dada pela Eq. (4.17), i.e.,

$$\hat{\rho}_{11}(t) = |\psi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{S}} \langle \psi_{nd}(t)| = \hat{U}_{\text{eff}} |\psi_0\rangle_{\mathcal{S}} \langle \psi_0| \hat{U}_{\text{eff}}^\dagger,$$

com $\hat{U}_{\text{eff}} = \exp(-i\hat{H}_{\text{eff}}t)$ e $\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{\mathcal{S}} - i\gamma\Theta(\hat{x})/2$. Para descrever o sub-ensemble $\mathcal{A}^{(2\Delta t)}$, devemos aplicar novamente os operadores de Kraus e projetar em $\hat{P}_1$. Contudo, note que como a evolução de $\hat{\rho}_{11}$ não depende das amplitudes dos outros elementos $\hat{\rho}_{ij}$, a primeira projeção $\hat{P}_1$ da Eq.(5.9) não perturba a evolução de $\hat{\rho}_{11}(t)$, e, portanto, o sub-ensemble $\mathcal{A}^{(2\Delta t)}$ é descrito simplesmente por

$$\hat{\rho}_c(2\Delta t) = \hat{P}_1 \left[\sum_j \hat{K}_j \hat{\rho}_c(\Delta t) \hat{K}_j^\dagger \right] \hat{P}_1 = \hat{\rho}_{11}(2\Delta t) \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1|. \quad (5.10)$$

Como $\hat{\rho}_c(t)$ evolui como um estado puro, podemos reescrever essa evolução como

$$\hat{U}_{\text{eff}}(2\Delta t) |\psi_0\rangle_s |1\rangle_{\mathcal{D}} = |\psi_{nd}(2\Delta t)\rangle_s |1\rangle_{\mathcal{D}}.$$

Após n medições, podemos descrever $\mathcal{A}_1^{(n\Delta t)}$ fazendo

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 \hat{U}_{\text{eff}}(n\Delta t, (n-1)\Delta t) \hat{P}_1 \cdots \hat{P}_1 \hat{U}_{\text{eff}}(\Delta t, 0) |\psi_0\rangle_s |1\rangle_{\mathcal{D}} &= \hat{U}_{\text{eff}}(n\Delta t) |\psi_0\rangle_s |1\rangle_{\mathcal{D}} \\ &= |\psi_{nd}(n\Delta t)\rangle_s |1\rangle_{\mathcal{D}}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

que é a mesma evolução (4.19) sem os sucessivos colapsos. Portanto, a probabilidade de encontrar o detector no estado de não detecção *até* o instante t , $\mathcal{P}_1(t)$, é igual à probabilidade de encontrar o detector no estado de não detecção *no instante* t ,

$$\mathcal{P}_1(t) = {}_s\langle \psi_{nd}(t) | \psi_{nd}(t) \rangle_s = \mathcal{P}_{nd}(t). \quad (5.12)$$

Pela Ref. (MØLMER; CASTIN; DALIBARD, 1993), esse resultado era esperado. Nessa referência é apresentada a técnica de QJ aplicada a sistemas acoplados a grandes ambientes. Os autores concluem que, em uma grande classe de problemas envolvendo dissipação de energia, o ensemble de trajetórias quânticas fornece um resultado equivalente ao fornecido pela equação de Lindblad (3.18). Na Ref. (DALIBARD; CASTIN; MØLMER, 1992) os autores aplicam o QJ em uma equação similar à equação mestra do modelo de Halliwell (4.7).

Finalmente, temos que a probabilidade da partícula chegar no intervalo $[t, t + \Delta t]$ é dada por

$$\Pi_H(t)\Delta t = -(\mathcal{P}_1(t + \Delta t) - \mathcal{P}_1(t)) = -(\mathcal{P}_{nd}(t + \Delta t) - \mathcal{P}_{nd}(t)), \quad (5.13)$$

e para Δt suficientemente pequeno, temos que a densidade de probabilidade temporal da chegada da partícula é dada pela própria distribuição de Halliwell,

$$\Pi_H(t) = -\frac{d\mathcal{P}_1}{dt} = -\frac{d\mathcal{P}_{nd}}{dt}, \quad (5.14)$$

como havíamos feito no capítulo anterior.

Pode parecer desta derivação que podemos tomar o limite $\Delta t \rightarrow 0$ sem se preocupar com o efeito Zeno. No entanto, sabemos que a equação de Lindblad não é válida para intervalos de tempo arbitrariamente pequenos (veja a definição de δt no Cap. 3). Se $\Delta t < \delta t$, devemos usar a Eq. de Schrödinger com o Hamiltoniano da Eq. (4.2). Assim, o efeito Zeno é observado (SCHULMAN, 1998).

Por fim, considere que a história de cada elemento do ensemble é registrada em N sistemas auxiliares $\mathcal{M}$. Dessa maneira, após N medições, a trajetória cuja detecção da partícula acontece no intervalo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ é dada pelo estado das memórias de $\mathcal{M}$

$$|1_{(1)} 1_{(2)} \cdots 1_{(n-1)} 1_{(n)} 0_{(n+1)} \cdots 0_{(N)}\rangle_{\mathcal{M}}, \quad (5.15)$$

onde a numeração entre parênteses define a ordem dos resultados das medições. Note que nessa trajetória, o detector permanece em $|1\rangle_{\mathcal{D}}$ até o instante $t = n\Delta t$. Após a medição da partícula, o mesmo se mantém em $|0\rangle_{\mathcal{D}}$. Note também que podemos distinguir uma trajetória das demais apenas pelo momento em que a transição $|1\rangle_{\mathcal{D}} \rightarrow |0\rangle_{\mathcal{D}}$ ocorre, e portanto, uma notação mais concisa para o estado (5.15) é $|1_{(n)}\rangle_{\mathcal{M}}$, sendo n o número da última medição que registrou $|1\rangle_{\mathcal{D}}$.

Além disso, sabemos que a probabilidade dessa transição acontecer no intervalo $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ é dada pela Eq. (5.13) e a probabilidade da partícula não ter chegado até o instante $t = n\Delta t$ é dada pela Eq. (5.12). Portanto, o estado que descreve o ensemble de trajetórias deve ser dado por

$$\hat{\rho}_{\text{ens}}(N\Delta t) = {}_s\langle\psi_{nd}(N\Delta t)|\psi_{nd}(N\Delta t)\rangle_s |1_{(N)}\rangle_{\mathcal{M}}\langle 1_{(N)}| + \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t \Pi_{\text{H}}(n\Delta t) |1_{(n)}\rangle_{\mathcal{M}}\langle 1_{(n)}|. \quad (5.16)$$

O primeiro termo representa o estado de não detecção, $|1_{(N)}\rangle_{\mathcal{M}}\langle 1_{(N)}|$, onde interpretamos como o estado em que o detector ainda não detectou a partícula. Essa situação acontece com probabilidade ${}_s\langle\psi_{nd}(t)|\psi_{nd}(t)\rangle_s$, com $t = N\Delta t$. Já no segundo termo temos uma superposição clássica de todas as possíveis trajetórias (partícula observada no instante $n\Delta t$, com $n = 1, \dots, N-1$), onde a trajetória $|1_{(n)}\rangle_{\mathcal{M}}$ acontece com probabilidade $\Delta t \Pi_{\text{H}}(n\Delta t)$.

6 ACOPLAMENTO RELÓGIO-DETECTOR NA OBTENÇÃO DO TEMPO DE CHEGADA

Diferentemente do modelo de Halliwell, que registra apenas se a partícula chegou ou não na origem, aqui temos o objetivo de manter um registro permanente de *quando acontece a chegada da partícula*. Para isso, diferentemente do Cap. 2, não vamos acoplar o relógio diretamente à partícula, mas ao detector de Halliwell, medindo portanto o momento da sua transição irreversível. O conteúdo deste capítulo representa uma contribuição original desta dissertação.

6.1 DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE CHEGADA VIA INTERAÇÃO RELÓGIO-DETECTOR

Considere um relógio, $\mathcal{R}$, que faz um registro permanente de quando um detector, $\mathcal{D}$ (sistema de dois níveis da Sec. 4.1), sofre uma transição irreversível de estado. Para isso, queremos que o relógio “rode” enquanto o detector estiver em seu estado $|1\rangle_{\mathcal{D}}$. Vamos então definir o Hamiltoniano de interação relógio-detector como

$$\hat{H}_{\mathcal{D}\mathcal{R}} = |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \otimes \hat{H}_{\mathcal{R}}, \quad (6.1)$$

onde $|1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1|$ atua como projetor e $\hat{H}_{\mathcal{R}}$ é o Hamiltoniano do relógio.

Como fizemos no Cap. 4, um Hamiltoniano que descreve esse processo é dado por

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathcal{S}} + \hat{H}_{\mathcal{D}} + \hat{H}_{\mathcal{D}\mathcal{R}} + \hat{H}_{\mathcal{E}} + \Theta(\hat{x})\hat{H}_{\mathcal{D}\mathcal{E}}, \quad (6.2)$$

onde $\hat{H}_{\mathcal{S}}$ é o Hamiltoniano da partícula, $\hat{H}_{\mathcal{D}}$ é o Hamiltoniano do detector, $\hat{H}_{\mathcal{E}}$ é o Hamiltoniano do ambiente, e $\hat{H}_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$ é o Hamiltoniano de interação entre o ambiente e o detector. $\hat{H}_{\mathcal{E}}$ e $\hat{H}_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$ são os mesmos das equações (4.3) e (4.4), respectivamente. Note que a única diferença entre a Eq. (4.2) e a Eq. (6.2) é o termo de interação relógio-detector $\hat{H}_{\mathcal{D}\mathcal{R}}$.

Aqui, estamos interessados na dinâmica reduzida ao relógio, ao detector e à partícula. Portanto tomando o traço parcial do ambiente buscamos a equação mestra para a matriz densidade reduzida, $\hat{\rho}$, desses sistemas. Como vimos, esse tratamento do ambiente é equivalente a usarmos a dinâmica de um sistema aberto com um único operador de Lindblad não nulo com a mesma forma da equação (4.5), ou seja, $\hat{\mathcal{L}} = \gamma^{1/2}\Theta(\hat{x})|0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1|$. Apenas adicionando a interação relógio-detector, a equação de Lindblad (3.18) que resultou na Eq. (4.7) se torna

agora

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = & -i \left[\hat{H}_S + \hat{H}_{\mathcal{D}} + \hat{H}_{\mathcal{DR}}, \hat{\rho} \right] \\ & + \frac{\gamma}{2} \left(2\Theta(\hat{x}) |0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \hat{\rho} |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 0| \Theta(\hat{x}) - \Theta(\hat{x}) |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \hat{\rho} - \hat{\rho} |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \Theta(\hat{x}) \right), \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde temos apenas o termo adicional $\hat{H}_{\mathcal{DR}}$ no comutador com $\hat{\rho}$. Essa equação é resolvida escrevendo, novamente,

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{11} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| + \hat{\rho}_{10} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 0| + \hat{\rho}_{01} \otimes |0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| + \hat{\rho}_{00} \otimes |0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 0|, \quad (6.4)$$

onde agora $\hat{\rho}_{ij}$ representam estados dos subsistemas $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$. Usando (6.1) e (6.4),

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{\mathcal{DR}}, \hat{\rho}] &= [\hat{H}_{\mathcal{R}} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1|, \hat{\rho}_{11} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| + \cdots + \hat{\rho}_{00} \otimes |0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 0|] \\ &= \left(\hat{H}_{\mathcal{R}} \hat{\rho}_{11} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| + \hat{H}_{\mathcal{R}} \hat{\rho}_{10} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 0| \right) - \left(\hat{\rho}_{11} \hat{H}_{\mathcal{R}} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| + \hat{\rho}_{01} \hat{H}_{\mathcal{R}} \otimes |0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| \right) \\ &= [\hat{H}_{\mathcal{R}}, \hat{\rho}_{11}] \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1| + \hat{H}_{\mathcal{R}} \hat{\rho}_{10} \otimes |1\rangle_{\mathcal{D}}\langle 0| - \hat{\rho}_{01} \hat{H}_{\mathcal{R}} \otimes |0\rangle_{\mathcal{D}}\langle 1|. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Substituindo (6.4) e (6.5) em (6.3), e separando em componentes, temos

$$\frac{d\hat{\rho}_{11}}{dt} = -i [\hat{H}_S + \hat{H}_{\mathcal{R}}, \hat{\rho}_{11}] - \frac{\gamma}{2} \{ \hat{\rho}_{11}, \Theta(\hat{x}) \}, \quad (6.6)$$

$$\frac{d\hat{\rho}_{10}}{dt} = -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{10}] - \left(i\hat{H}_{\mathcal{R}} + \frac{\gamma}{2} \Theta(\hat{x}) \right) \hat{\rho}_{10} - i\Omega \hat{\rho}_{10}, \quad (6.7)$$

$$\frac{d\hat{\rho}_{01}}{dt} = -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{01}] + \hat{\rho}_{01} \left(i\hat{H}_{\mathcal{R}} - \frac{\gamma}{2} \Theta(\hat{x}) \right) + i\Omega \hat{\rho}_{01}, \quad (6.8)$$

$$\frac{d\hat{\rho}_{00}}{dt} = -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{00}] + \gamma \Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{11} \Theta(\hat{x}), \quad (6.9)$$

onde as três primeiras equações se distinguem das Eqs.(4.10)-(4.12) pela presença de $\hat{H}_{\mathcal{DR}}$. Note que a Eq. (6.9) é igual a Eq. (4.13).

Como queremos a informação de quando a partícula chegou, devemos nos ater ao estado do relógio (diferentemente do modelo de Halliwell),

$$\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{SD}}[\hat{\rho}(t)] = \text{Tr}_{\mathcal{S}}[\hat{\rho}_{11}(t) + \hat{\rho}_{00}(t)]. \quad (6.10)$$

Para isso devemos encontrar a solução para os estados de não detecção e de detecção da partícula, $\hat{\rho}_{11}$ e $\hat{\rho}_{00}$. Note que a Eq. (6.9) depende do estado de detecção $\hat{\rho}_{11}$. Portanto, para obter $\hat{\rho}_{00}$ devemos primeiramente resolver a Eq. (6.6).

Reorganizando (6.6), temos

$$\frac{d\hat{\rho}_{11}}{dt} = -i \left[\left(\hat{H}_S + \hat{H}_{\mathcal{R}} - \frac{i\gamma}{2} \Theta(\hat{x}) \right) \hat{\rho}_{11} - \hat{\rho}_{11} \left(\hat{H}_S + \hat{H}_{\mathcal{R}} + \frac{i\gamma}{2} \Theta(\hat{x}) \right) \right], \quad (6.11)$$

e definindo um novo Hamiltoniano,

$$\hat{H}_{\text{EFF}} \equiv \hat{H}_{\text{eff}} + \hat{H}_{\mathcal{R}}, \quad (6.12)$$

onde $\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_S - i\gamma\Theta(\hat{x})/2$, temos

$$\frac{d\hat{\rho}_{11}}{dt} = -i \left(\hat{H}_{\text{EFF}} \hat{\rho}_{11} - \hat{\rho}_{11} \hat{H}_{\text{EFF}}^\dagger \right). \quad (6.13)$$

Dessa forma,

$$\hat{\rho}_{11}(t) = e^{-i\hat{H}_{\text{EFF}}t} \hat{\rho}_{11}(0) e^{i\hat{H}_{\text{EFF}}^\dagger t}. \quad (6.14)$$

Considerando que o estado inicial do sistema (partícula, detector e relógio) é dado por $|\psi_0\rangle_S \otimes |1\rangle \otimes |\phi_0\rangle_{\mathcal{R}}$, a Eq. (6.14) pode ser escrita como

$$\hat{\rho}_{11}(t) = |\psi_{nd}(t)\rangle_S \langle\psi_{nd}(t)| \otimes |\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}} \langle\phi_{nd}(t)|, \quad (6.15)$$

onde $|\psi_{nd}(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t} |\psi_0\rangle_S$ e $|\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}} = e^{-i\hat{H}_{\mathcal{R}}t} |\phi_0\rangle_{\mathcal{R}}$. Portanto o estado de não detecção pode ser dado pelos *kets* $|\psi_{nd}(t)\rangle_S$ e $|\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}}$, cujas evoluções são dadas pelas equações de Schrödinger com os Hamiltonianos $\hat{H}_{\text{eff}}$ e $\hat{H}_{\mathcal{R}}$, respectivamente:

$$i \frac{d}{dt} |\psi_{nd}(t)\rangle_S = \hat{H}_{\text{eff}} |\psi_{nd}(t)\rangle_S, \quad (6.16)$$

$$i \frac{d}{dt} |\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}} = \hat{H}_{\mathcal{R}} |\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}}. \quad (6.17)$$

Vemos, portanto, que o estado de não detecção permanece separável. Para representar o estado do relógio associado à não detecção da partícula, tomamos o traço parcial de $\hat{\rho}_{11}$, com isso

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\mathcal{R}}^{(nd)}(t) &= \text{Tr}_S \hat{\rho}_{11}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x | \psi_{nd}(t) \rangle_S \langle \psi_{nd}(t) | x \rangle |\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}} \langle \phi_{nd}(t)| \\ &= {}_S \langle \psi_{nd}(t) | \psi_{nd}(t) \rangle_S |\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}} \langle \phi_{nd}(t)|. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Note que a norma de $|\psi_{nd}(t)\rangle$ diminui com o tempo por conta da parte imaginária no Hamiltoniano efetivo $\hat{H}_{\text{eff}}$ (que atua como potencial absorvedor).

Como se pode ver no Apêndice B, a solução para $\hat{\rho}_{00}$ na Eq. (6.9) é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{00}(t) &= \gamma \int_0^t dt' e^{-i\hat{H}_S(t-t')} \Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{11}(t) \Theta(\hat{x}) e^{i\hat{H}_S(t-t')} \\ &= \gamma \int_0^t dt' e^{-i\hat{H}_S(t-t')} \Theta(\hat{x}) |\psi_{nd}(t')\rangle_S \langle\psi_{nd}(t')| \Theta(\hat{x}) e^{i\hat{H}_S(t-t')} \otimes |\phi_{nd}(t')\rangle_{\mathcal{R}} \langle\phi_{nd}(t')|. \end{aligned} \quad (6.19)$$

O estado descrito na Eq. (6.19) representa o estado de detecção da partícula. Sendo assim, o estado do relógio que representa a detecção da partícula, $\hat{\rho}_{\mathcal{R}}^{(d)}$, é dado por

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\mathcal{R}}^{(d)}(t) &= \text{Tr}_S \hat{\rho}_{00}(t) \\ &= \gamma \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x | e^{-i\hat{H}_S(t-t')} \Theta(\hat{x}) |\psi_{nd}(t')\rangle_S \langle\psi_{nd}(t')| \Theta(\hat{x}) e^{i\hat{H}_S(t-t')} |x\rangle \\ &\quad \times |\phi_{nd}(t')\rangle_{\mathcal{R}} \langle\phi_{nd}(t')| \\ &= \gamma \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx I(x) |\phi_{nd}(t')\rangle_{\mathcal{R}} \langle\phi_{nd}(t')|,\end{aligned}\quad (6.20)$$

onde

$$I(x) \equiv \langle x | e^{-i\hat{H}_S(t-t')} \Theta(\hat{x}) |\psi_{nd}(t')\rangle_S \langle\psi_{nd}(t')| \Theta(\hat{x}) e^{i\hat{H}_S(t-t')} |x\rangle. \quad (6.21)$$

A integral em x em (6.20) foi desenvolvida de forma similar no Cap. 4 entre as Eqs.(4.22)-(4.30), nos dando

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx I(x) = \int_0^{\infty} dx |\psi_{nd}(x, t')|^2, \quad (6.22)$$

onde $\psi_{nd}(x, t) = \langle x | \psi_{nd}(t) \rangle_S$ é a função de onda da partícula não detectada sujeita ao potencial $\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_S - i\gamma\Theta(\hat{x})/2$. Usando (6.22), a Eq. (6.20) resulta em

$$\hat{\rho}_{\mathcal{R}}^{(d)}(t) = \gamma \int_0^t dt' \int_0^{\infty} dx |\psi_{nd}(x, t')|^2 |\phi_{nd}(t')\rangle_{\mathcal{R}} \langle\phi_{nd}(t')|. \quad (6.23)$$

Finalmente, o estado do relógio em um instante t qualquer é dado por

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t) &= \hat{\rho}_{\mathcal{R}}^{(nd)}(t) + \hat{\rho}_{\mathcal{R}}^{(d)}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_{nd}(x, t)|^2 |\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}} \langle\phi_{nd}(t)| + \gamma \int_0^t dt' \int_0^{\infty} dx |\psi_{nd}(x, t')|^2 |\phi_{nd}(t')\rangle_{\mathcal{R}} \langle\phi_{nd}(t')|. \end{aligned}\quad (6.24)$$

Vale ressaltar que $|\phi_{nd}(t)\rangle$ é o estado do relógio evoluindo exclusivamente sob ação de $\hat{H}_{\mathcal{R}}$. Na seção seguinte, discutiremos a interpretação física desse estado e sua previsão da densidade de probabilidade do tempo de chegada.

6.2 ANALISANDO A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DO TEMPO DE CHEGADA

Primeiramente, note que podemos reescrever $\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t)$ em termos da distribuição de tempo de chegada de Halliwell da Eq. (4.31):

$$\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t) = {}_s\langle\psi_{nd}(t)|\psi_{nd}(t)\rangle_s |\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}} \langle\phi_{nd}(t)| + \int_0^t dt' \Pi_H(t') |\phi_{nd}(t')\rangle_{\mathcal{R}} \langle\phi_{nd}(t')|. \quad (6.25)$$

Fazendo uma análise similar ao que fizemos no Cap. 2 (onde o relógio estava acoplado diretamente à partícula), se observarmos o relógio em um tempo t suficientemente longo, a densidade de probabilidade do ponteiro do relógio marcar θ (ou seja, a partícula ter chegado no instante $t = \theta/\omega$) é

$$\begin{aligned}\Pi(\theta) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr} \left(|\theta\rangle\langle\theta| \hat{\rho}_{\mathcal{R}}^{(d)}(t) \right) \\ &= \int_0^\infty dt \text{Tr} \left(|\theta\rangle\langle\theta| \phi_{nd}(t) \rangle_{\mathcal{R}} \langle \phi_{nd}(t)| \right) \Pi_{\text{H}}(t) \\ &= \int_0^\infty dt |\phi_{nd}(\theta, t)|^2 \Pi_{\text{H}}(t).\end{aligned}\tag{6.26}$$

Temos agora $\Pi(\theta)$ como a distribuição de Halliwell modulada pelo módulo quadrado da função de onda do relógio. Para explorar o limite em que $\Pi(\theta)$ é a própria distribuição de Halliwell, vamos usar o relógio de Peres desenvolvido ao longo da Sec. (2.4). A evolução $|\phi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{R}} = \exp(-i\hat{H}_{\mathcal{R}}t) |\phi_0\rangle_{\mathcal{R}}$ da Eq. (6.17) para o relógio de Peres com estado inicial $|v_0\rangle$ é $|v_{t/\tau}\rangle$ da Eq. (2.23), com $\phi_{nd}(\theta, t) = v_{t/\tau}(\theta)$. Além disso, vimos que no limite em que o número de estados ortogonais do relógio é muito grande, o módulo ao quadrado da função de onda do relógio tende a uma delta de Dirac: $N \gg 1 \Rightarrow |v_{t/\tau}(\theta)|^2 \rightarrow \delta(\theta - \omega t)$. Esse limite é equivalente a aumentar significativamente a precisão do relógio, $\tau \rightarrow 0$, recaindo no modelo ideal de Salecker e Wigner. Dessa forma,

$$\Pi(\theta) = \int_0^\infty dt \delta(\theta - \omega t) \Pi_{\text{H}}(t) = \frac{1}{\omega} \Pi_{\text{H}}(\theta/\omega).\tag{6.27}$$

onde $\Pi(\theta)$ é a densidade de probabilidade por unidade de θ . A distribuição por unidade de tempo é $\omega\Pi(\theta)$, que é a distribuição de Halliwell $\Pi_{\text{H}}(t)$, onde $t = \theta/\omega$. Reobtemos assim a distribuição de probabilidade de Halliwell para tempo de chegada sem o uso do artifício da derivada temporal das probabilidades, como feito na Eq. (4.31), mas sim pela informação armazenada no relógio.

Como veremos na próxima seção, havendo reflexão, a partícula não é sempre detectada, e a função de onda refletida deve ser descrita por $\psi_{nd}(x, t)$. É importante notar que $\psi_{nd}(x, t)$ independe das características do relógio, mas apenas de $\hat{H}_{\mathcal{S}}$ e da interação partícula-detector-ambiente $(\Theta(\hat{x})\hat{H}_{\mathcal{DE}})$. Dessa forma, o aumento da resolução do relógio, como fizemos na Eq. (6.27), não provoca o aumento da reflexão da partícula, como acontece no acoplamento direto entre partícula e relógio (veja Cap. 2). Isso nos permite usar relógios mais precisos sem afetar a dinâmica da partícula. Contudo, não estamos livres do fenômeno da reflexão por conta da interação $\Theta(\hat{x})\hat{H}_{\mathcal{DE}}$. Nesse caso, como veremos na próxima seção, outros artifícios podem ser usados para inibir as perturbações do aparato de medida sobre a partícula.

Vamos agora discutir fisicamente o estado do relógio em um instante t qualquer. Nesse caso, ainda usando o relógio de Peres, temos

$$\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t) = {}_s\langle\psi_{nd}(t)|\psi_{nd}(t)\rangle_s |v_{t/\tau}\rangle_{\mathcal{R}}\langle v_{t/\tau}| + \int_0^t dt' \Pi_H(t') |v_{t'/\tau}\rangle_{\mathcal{R}}\langle v_{t'/\tau}|. \quad (6.28)$$

onde $|v_{t/\tau}\rangle$ é o estado de não detecção do relógio de Peres no instante t . Tomando o mesmo limite acima, $\tau \rightarrow 0$, resulta em $|v_{t/\tau}\rangle_{\mathcal{R}} \rightarrow |t\rangle_{\mathcal{R}}$ (com ${}_R\langle t|t'\rangle_R = \delta(t-t')$), e a Eq. (6.28) pode ser reescrita como

$$\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t) = {}_s\langle\psi_{nd}(t)|\psi_{nd}(t)\rangle_s |t\rangle_{\mathcal{R}}\langle t| + \int_0^t dt' \Pi_H(t') |t'\rangle_{\mathcal{R}}\langle t'|. \quad (6.29)$$

Vemos que o estado do relógio no instante t é uma mistura clássica de dois estados, *partícula não-detectada* e *partícula detectada*. No estado de não detecção, $|t\rangle_{\mathcal{R}}\langle t|$, a partícula ainda não foi detectada, e o relógio evoluiu sem parar de rodar até o instante t . Ao medir o relógio em t , essa situação acontece com probabilidade ${}_s\langle\psi_{nd}(t)|\psi_{nd}(t)\rangle_s$. Por outro lado, no segundo termo do lado direito da Eq. (6.29), temos uma superposição clássica de todos os instantes no intervalo $[0, t]$ em que a partícula pode ter chegado.

Vale a pena notar a semelhança da Eq. (6.29) com o ensemble de trajetórias descrito pelo estado (5.16). Para uma melhor comparação, devemos lembrar que a resolução de t em $\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t)$ é dada pela escala de tempo δt que valida o uso da equação de Lindblad (3.18). Então, ao assumir $\tau \rightarrow 0$, estamos na verdade tomando τ da ordem de δt . Com isso, $t = N \delta t = N\tau$, onde N é um número inteiro. Dessa maneira, a integral em t' da Eq. (6.29) pode ser escrita como $\int_0^t dt' \rightarrow \sum_{n=0}^N \tau$. Nessas circunstâncias, definindo $t' = n\tau$ (n inteiro), temos

$$\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(N\tau) = {}_s\langle\psi_{nd}(N\tau)|\psi_{nd}(N\tau)\rangle_s |v_N\rangle_{\mathcal{R}}\langle v_N| + \sum_{n=0}^N \tau \Pi_H(n\tau) |v_n\rangle_{\mathcal{R}}\langle v_n|. \quad (6.30)$$

A probabilidade da partícula ter chegado no intervalo $[m\tau, (m+1)\tau]$ para $m < N$, $\mathcal{P}_c(m\tau)$, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c(m\tau) &= \text{Tr} \left[|v_m\rangle_{\mathcal{R}}\langle v_m| \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(N\tau) \right] \\ &= \sum_{n'=0}^N \sum_{n=0}^N \tau \Pi_H(n\tau) {}_R\langle v_{n'}|v_m\rangle_{\mathcal{R}}\langle v_m|v_n\rangle_{\mathcal{R}}\langle v_n|v_{n'}\rangle_{\mathcal{R}} = \tau \Pi_H(m\tau). \end{aligned} \quad (6.31)$$

A Eq. (6.30) é equivalente ao estado quântico do ensemble de trajetórias quânticas do detector, Eq. (5.16), quando o mesmo sofre sucessivos colapsos a cada intervalo τ . Aqui, o registro do relógio $|v_n\rangle_{\mathcal{R}}$ representa a trajetória

$$|1_{(1)} 1_{(2)} \cdots 1_{(n-1)} 0_{(n)} \cdots 0_{(N)}\rangle, \quad (6.32)$$

cujo peso é $\tau \Pi_H(n\tau)$. Vemos portanto que o relógio monitora o detector de maneira análoga a sucessivas medições sobre o detector em intervalos iguais à resolução do relógio.

Contudo, é importante notar uma diferença essencial entre as Eqs.(5.16) e (6.30), a primeira (segunda) representa uma mistura própria (imprópria). Em outras palavras, a Eq. (6.30) vem de um estado puro do sistema total partícula+detector+relógio+ambiente, enquanto que a Eq. (5.16) surge de um ensemble de trajetórias do detector. Portanto, a informação contida no ensemble de trajetórias está, no nosso modelo, armazenada em um único relógio após uma rodada do experimento do tempo de chegada. Note que a entropia de von Neumann de $\hat{\rho}_{\mathcal{R}}$ (6.30) é a mesma de $\hat{\rho}_{\text{ens}}$ (5.16), $S(\hat{\rho}_{\mathcal{R}}) = S(\hat{\rho}_{\text{ens}})$.

Por fim, diferentemente do modelo de Halliwell onde o estado de um único sistema $\mathcal{S} + \mathcal{D} + \mathcal{E}$ é a superposição do tipo $|\text{partícula não detectada}\rangle_{\mathcal{S}\mathcal{D}\mathcal{E}} + |\text{partícula detectada}\rangle_{\mathcal{S}\mathcal{D}\mathcal{E}}$, ao usarmos o relógio temos o estado do sistema $\mathcal{S} + \mathcal{D} + \mathcal{R} + \mathcal{E}$ como uma superposição dos possíveis instantes em que a partícula chegou. Como discutido anteriormente, agora a pergunta sobre o instante da chegada da partícula, para um único sistema, parece fazer sentido. Uma outra maneira dessa pergunta fazer sentido sem a necessidade do uso do relógio é se o próprio ambiente desempenhar o papel do relógio. Essa circunstância foi proposta na Ref. (DIAS, 2021) se referindo a medições em geral, e é tema de um trabalho em andamento do nosso grupo de pesquisa. Aplicando esse modelo ao tempo de chegada, o estado do ambiente é similar ao estado das memórias da Eq. (5.15). Aqui, cada grau de liberdade $\alpha_{(n)} = 0_{(n)}$ ou $1_{(n)}$ (com $n = 1, 2, \dots, N$) representa um subsistema do ambiente. Nesse caso, o ambiente interage com $\mathcal{D}$ via sucessivas interações de seus subsistemas (como acontece no modelo colisional), com $\alpha_{(n)}$ representando a informação armazenada pelo subsistema $\mathcal{E}_{(n)}$ no instante $t = n\tau$. Nessa circunstancia, o estado do sistema total em $t = N\tau$ é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = |\psi_{nd}(t)\rangle_{\mathcal{S}} |1\rangle_{\mathcal{D}} |1_{(N)}\rangle_{\mathcal{E}} + \sum_{n=1}^N \sqrt{\tau \Pi_H(n\tau)} |\psi_d(t)\rangle_{\mathcal{S}} |0\rangle_{\mathcal{D}} |1_{(n)}\rangle_{\mathcal{E}}, \quad (6.33)$$

com $|1_{(n)}\rangle_{\mathcal{E}}$ dado pela Eq. (6.32). Contudo, apesar de cópias da informação contida em $|1_{(n)}\rangle_{\mathcal{E}}$ ser espalhada rapidamente pelo ambiente (via um processo conhecido como Darwinismo quântico (ZUREK, 2009)), essa informação é inacessível, pois não temos controle sobre o ambiente.

6.3 CALCULANDO $|\psi_{nd}(t)\rangle$ E ANALISANDO O PROBLEMA DA REFLEXÃO

Nesta seção, vamos calcular $\psi_{nd}(x, t)$ para um pacote de onda incidente de momentos positivos com amplitude de momento dada por $\tilde{\psi}(p)$. Em seguida, analisaremos as refle-

xões provenientes da interação com o detector. O Hamiltoniano responsável pela evolução de $|\psi_{nd}(t)\rangle$ é $\hat{H}_{\text{eff}}$, portanto, a equação estacionária é

$$\hat{H}_{\text{eff}} |E\rangle = E |E\rangle, \quad (6.34)$$

onde $|E\rangle$ é autoestado de $\hat{H}_{\text{eff}}$. Projetando a equação na base das posições, temos

$$\left(\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{i\gamma\Theta(x)}{2} \right) \chi(x) = E\chi(x), \quad (6.35)$$

onde $\chi(x) = \langle x|E\rangle$. Pela descontinuidade de $\Theta(x)$, temos duas soluções. Para $x < 0$, o termo imaginário é zero e, sendo $E = p^2/2\mu$, temos

$$\frac{d^2\chi^<}{dx^2} = -p^2\chi^<. \quad (6.36)$$

Como a onda incide pela esquerda ($p > 0$), a solução para $x < 0$ é

$$\chi^<(x) = e^{ipx} + R_p e^{-ipx}. \quad (6.37)$$

Para $x > 0$ temos a atuação do termo imaginário, portanto

$$\frac{d^2\chi^>}{dx^2} = -q^2\chi^>, \quad (6.38)$$

onde $q^2 \equiv p^2 + i\mu\gamma$. Com isso (para $\text{Im } q > 0$), temos

$$\chi^>(x) = T_q e^{iqx}. \quad (6.39)$$

Aplicando as condições de contorno para $x = 0$, obtemos

$$R_p = \frac{p - q}{p + q}, \quad (6.40)$$

$$T_q = \frac{2p}{p + q}. \quad (6.41)$$

Usando a notação $\chi = \chi_p$ (pois $q = q_p = \sqrt{p^2 + i\mu\gamma}$), temos

$$\chi_p(x) = \begin{cases} e^{ipx} + \left(\frac{p - q_p}{p + q_p} \right) e^{-ipx}, & \text{se } x < 0 \\ \left(\frac{2p}{p + q_p} \right) e^{iq_p x}, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (6.42)$$

Como a onda incidente só tem momento positivo, $\psi_{nd}(x, t)$ como uma superposição dos auto-estados de energia é dado por

$$\psi_{nd}(x, t) = \int_0^\infty dp \tilde{\psi}(p) \chi_p(x) e^{-ip^2 t/2\mu}, \quad (6.43)$$

onde lembre-se que $\tilde{\psi}(p)$ é a amplitude de momento em $t = 0$.

Primeiramente, note que o coeficiente de reflexão R_p depende de γ . Para $\gamma \ll p^2/2\mu$, temos que $q \rightarrow p$, $|R_p| \rightarrow 0$, e $\chi_p^<(x) = \chi_p^>(x)$ para todo x . Isso acontece porque se γ for muito pequeno, o potencial imaginário diminui seu efeito absorvedor e a partícula penetra em um degrau fraco (que leva muito tempo para absorver $|\psi_{nd}(t)\rangle_s$) que provoca uma baixa reflexão. Já no limite em que $\gamma \gg p^2/2\mu$, temos que $|q| \gg p$, de modo que $|R_p| \rightarrow 1$. Nesse limite, a barreira tende a refletir todo o pacote, e portanto, $|\psi_{nd}(t)\rangle_s$ não é absorvido. Sendo assim, é impossível acontecer a transição do detector e a partícula nunca é detectada.

Para contornar o efeito da reflexão, Muga *et al* na Ref.(MUGA; BROUARD; MACIAS, 1995) investigaram a existência de um potencial perfeitamente absorvedor. Para isso, consideraram um potencial não uniforme em um domínio espacial finito (o equivalente a $\gamma = \gamma(x)$ em nosso sistema) de forma que a reflexão seja nula para um pacote de onda incidente pela esquerda. Dessa forma, calculando $-\mathrm{d}\mathcal{P}_{nd}/\mathrm{d}t$ (1.15) eles obtiveram a densidade de corrente $J(0, t)$ como a densidade de probabilidade do tempo de chegada. Como podemos usar relógios mais precisos, aplicando esse potencial ao nosso problema, esperamos que o relógio registre o tempo de chegada ideal também dado pelo $J(0, t)$, diferentemente do modelo YH que não pôde tomar esse limite (relembre da Eq.(2.25)).

7 CONCLUSÃO

Nesta dissertação investigamos o problema do tempo de chegada de uma partícula quântica. Os tratamentos para esse problema consistem em dois tipos de modelos: os ideais, que envolvem apenas o estado da partícula “livre” de medição, e os modelos operacionais, que envolvem os aparatos de medição do tempo de chegada. Revisamos os modelos operacionais de Yearsley-Halliwel (YH) (YEARSLEY et al., 2011) e Halliwel (HALLIWELL, 1999). Em seguida, propomos um meio de obter o tempo de chegada em $x = 0$ acoplado um relógio a um detector que sofre uma transição irreversível quando a partícula entra na região $x \geq 0$.

Mais especificamente, vimos no Cap. 2 que o modelo de YH consiste no acoplamento de um relógio quântico (que atua como um cronômetro) com a partícula que se deseja medir o seu tempo de chegada. Nesse modelo, o relógio “roda” enquanto a partícula não chega na região de interesse (consideramos para todos os modelos que a região é $x > 0$). Por conta do acoplamento partícula-relógio, esse modelo apresenta a necessidade de que a energia do relógio seja muito menor que a energia da partícula para que evite a sua reflexão. Ainda no Cap. 2, apresentamos um relógio quântico ideal (o relógio de Salecker-Wigner) e um relógio mais realista (o relógio de Peres). Vimos que a necessidade do relógio do modelo de YH ter baixa energia faz com que a medição do tempo de chegada tenha um alto grau de imprecisão.

Revisamos também o modelo de Halliwel (Cap. 4), que consiste em um detector que registra de forma irreversível a chegada da partícula na região $x > 0$. Para que isso aconteça, considera-se que o detector entra em contato com um grande ambiente nessa região. Por isso, no Cap. 3, introduzimos a dinâmica quântica de um sistema aberto, fazendo também uma breve revisão do formalismo de matriz densidade. Vimos que o modelo de Halliwel gera o potencial complexo que foi proposto de forma fenomenológica por Allcock, trinta anos antes. O modelo fornece também as probabilidades de detecção e não detecção da partícula em um certo instante t .

Ainda sobre o modelo de Halliwel, no Cap. 5, vimos que antes da medição da partícula o sistema (partícula+detector+ambiente) se encontra numa superposição dos estados de “detecção” e “não-detecção” da partícula. Sendo assim, o modelo não registra quando a partícula chega, mas se ela chegou ou não. Diante dessa indeterminação quântica, o modelo de Halliwel parece descrever bem a distribuição de probabilidade do tempo de chegada para um ensemble, mas não para um sistema único. Para contornar esse problema e falarmos do instante

de chegada para um sistema único, monitoramos o detector em intervalos de tempo muito curtos, construindo assim um ensemble de trajetórias do detector. Na Sec. 5.2, vimos que esse monitoramento não afeta a evolução do estado de não-deteção, fornecendo assim a mesma distribuição que o modelo de Halliwell para o tempo de chegada. Por fim, vimos que o ensemble de trajetórias pode ser descrito por uma mistura estatística de estados representando todas as possíveis trajetórias, onde cada estado acontece no ensemble com probabilidade diretamente proporcional à distribuição de Halliwell.

No Cap. 6, diferente do modelo de Halliwell que registra apenas se a partícula foi ou não detectada, propomos um modelo que tem o objetivo de manter um registro permanente de quando acontece a chegada da partícula. Para isso, diferentemente do Cap. 2, não acoplamos o relógio diretamente à partícula, mas ao detector de Halliwell, medindo assim o instante em que o detector realiza a sua transição irreversível. Vimos que esse tipo de acoplamento (relógio-detector) não afeta a dinâmica da partícula, permitindo assim que usemos um relógio mais preciso comparado ao modelo YH.

Ao usar um relógio com alta precisão (respeitando o limite imposto pela Eq. de Lindblad à evolução do sistema), o estado do relógio pode ser descrito como uma mistura clássica de dois estados: um estado de “não detecção” e outro descrevendo todos os instantes em que a partícula pode ter sido detectada. Assim como no ensemble de trajetórias, a probabilidade que cada um desses estados aconteça é proporcional à distribuição de Halliwell, com a diferença de que se trata de um sistema único descrevendo uma única “rodada” de experimento.

Embora possamos usar relógios mais precisos, ainda não estamos livres do problema da reflexão por causa da interação partícula-detector. Essa interação gera um potencial complexo na dinâmica da partícula. Para contornar esse problema, em trabalhos futuros, pretendemos aplicar o potencial perfeitamente absorvedor de Muga *et al* da Ref. (MUGA; BROUARD; MACIAS, 1995) ao nosso modelo e esperamos obter a corrente de probabilidade como distribuição ideal do tempo de chegada.

Outra perspectiva de extensão deste trabalho é explorar o ambiente desempenhando o papel do relógio. Além disso, pretendemos também aplicar a relação de comutação $[\hat{\theta}, \hat{L}] = i$ do relógio para obter uma relação de incerteza energia-tempo associada à energia da partícula e seu tempo de chegada. Por fim, pretendemos usar relógios mais precisos de modo que a equação de Lindblad não seja mais válida e tenhamos que usar a equação de Schrödinger incluindo o ambiente. Com isso, podemos analisar como o relógio muda a dinâmica do detector e seu efeito na distribuição do tempo de chegada.

REFERÊNCIAS

- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Time in the quantum theory and the uncertainty relation for time and energy. *Physical Review*, APS, v. 122, n. 5, p. 1649, 1961.
- ALLCOCK, G. R. The time of arrival in quantum mechanics i. formal considerations. *Annals of physics*, Elsevier, v. 53, n. 2, p. 253–285, 1969.
- ALLCOCK, G. R. The time of arrival in quantum mechanics ii. the individual measurement. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 53, n. 2, p. 286–310, 1969.
- ALLCOCK, G. R. The time of arrival in quantum mechanics iii. the measurement ensemble. *Annals of physics*, Elsevier, v. 53, n. 2, p. 311–348, 1969.
- BAUTE, A.; EGUSQUIZA, I.; MUGA, J. Quantum times of arrival for multiparticle states. *Physical Review A*, APS, v. 65, n. 3, p. 032114, 2002.
- BAUTE, A.; EGUSQUIZA, I.; MUGA, J.; MAYATO, R. S. Time-of-arrival distributions from position-momentum and energy-time joint measurements. *Physical Review A*, APS, v. 61, n. 5, p. 052111, 2000.
- BAUTE, A.; EGUSQUIZA, I. L.; MUGA, J. Time-of-arrival distributions for interaction potentials. *Physical Review A*, APS, v. 64, n. 1, p. 012501, 2001.
- BRACKEN, A.; MELLOY, G. Probability backflow and a new dimensionless quantum number. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 27, n. 6, p. 2197, 1994.
- DALIBARD, J.; CASTIN, Y.; MØLMER, K. Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics. *Physical review letters*, APS, v. 68, n. 5, p. 580, 1992.
- DAMBORENEA, J.; EGUSQUIZA, I.; HEGERFELDT, G.; MUGA, J. Measurement-based approach to quantum arrival times. *Physical Review A*, APS, v. 66, n. 5, p. 052104, 2002.
- DAS, S.; NÖTH, M. Times of arrival and gauge invariance. *Proceedings of the Royal Society A*, The Royal Society Publishing, v. 477, n. 2250, p. 20210101, 2021.
- DIAS, E. O. Quantum formalism for events and how time can emerge from its foundations. *Physical Review A*, APS, v. 103, n. 1, p. 012219, 2021.
- DIAS, E. O.; PARISIO, F. Space-time-symmetric extension of nonrelativistic quantum mechanics. *Physical Review A*, APS, v. 95, n. 3, p. 032133, 2017.
- GIANNITRAPANI, R. Positive-operator-valued time observable in quantum mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 36, p. 1575–1584, 1997.
- HALLIWELL, J. Arrival times in quantum theory from an irreversible detector model. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 102, n. 4, p. 707–717, 1999.
- HALLIWELL, J.; GILLMAN, E.; LENNON, O.; PATEL, M.; RAMIREZ, I. Quantum backflow states from eigenstates of the regularized current operator. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 46, n. 47, p. 475303, 2013.
- HEGERFELDT, G. C. The quantum jump approach and quantum trajectories. In: *Irreversible Quantum Dynamics*. [S.l.]: Springer, 2003. p. 233–242.

HEGERFELDT, G. C.; SEIDEL, D.; MUGA, J. G. Quantum arrival times and operator normalization. *Physical Review A*, APS, v. 68, n. 2, p. 022111, 2003.

KIJOWSKI, J. On the time operator in quantum mechanics and the heisenberg uncertainty relation for energy and time. *Reports on Mathematical Physics*, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 361–386, 1974.

LANDAUER, R.; MARTIN, T. Barrier interaction time in tunneling. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 66, n. 1, p. 217, 1994.

LEAVENS, C. R. Bohm trajectory approach to timing electrons. *Time in Quantum Mechanics*, Springer, p. 129–162, 2008.

LEÓN, J.; JULVE, J.; PITANGA, P.; URRÍES, F. de. Time of arrival through a quantum barrier. *arXiv preprint quant-ph/9903060*, 1999.

LEÓN, J.; JULVE, J.; PITANGA, P.; URRÍES, F. D. Time of arrival in the presence of interactions. *Physical Review A*, APS, v. 61, n. 6, p. 062101, 2000.

LUNARDI, J. T.; MANZONI, L. A.; NYSTROM, A. T. Salecker–wigner–peres clock and average tunneling times. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 375, n. 3, p. 415–421, 2011.

MISRA, B.; SUDARSHAN, E. G. The zeno's paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 18, n. 4, p. 756–763, 1977.

MØLMER, K.; CASTIN, Y.; DALIBARD, J. Monte carlo wave-function method in quantum optics. *JOSA B*, Optica Publishing Group, v. 10, n. 3, p. 524–538, 1993.

MUGA, G.; MAYATO, R. S.; EGUSQUIZA, I. *Time in quantum mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. v. 734.

MUGA, G.; RUSCHHAUPT, A.; CAMPO, A. *Time in quantum mechanics - Vol.2*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. v. 789.

MUGA, J.; BROUARD, S.; MACIAS, D. Time of arrival in quantum mechanics. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 240, n. 2, p. 351–366, 1995.

MUGA, J.; LEAVENS, C.; PALAO, J. Space-time properties of free-motion time-of-arrival eigenfunctions. *Physical Review A*, APS, v. 58, n. 6, p. 4336, 1998.

MUGA, J.; PALAO, J.; LEAVENS, C. Arrival time distributions and perfect absorption in classical and quantum mechanics. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 253, n. 1-2, p. 21–27, 1999.

MUGA, J. G.; LEAVENS, C. R. Arrival time in quantum mechanics. *Physics Reports*, Elsevier, v. 338, n. 4, p. 353–438, 2000.

PAULI, W. *Die allgemeinen prinzipien der wellenmechanik*. [S.l.]: Springer, 1933.

PERES, A. Measurement of time by quantum clocks. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 48, n. 7, p. 552–557, 1980.

PERES, A. *Quantum mechanics: concepts and methods*. [S.l.]: Kluwer, Dordrecht, 1993.

RIVAS, A.; HUELGA, S. F. *Open quantum systems*. [S.l.]: Springer, 2012. v. 10.

RONCALLO, S.; SACHA, K.; MACCONE, L. When does a particle arrive? *Quantum*, Verein zur Förderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften, v. 7, p. 968, 2023.

SALECKER, H.; WIGNER, E. P. Quantum limitations of the measurement of space-time distances. *Part I: Particles and Fields. Part II: Foundations of Quantum Mechanics*, Springer, p. 148–154, 1958.

SCHULMAN, L. Continuous and pulsed observations in the quantum zeno effect. *Physical Review A*, APS, v. 57, n. 3, p. 1509, 1998.

SOBEL, D. Longitude: The true story of a lone genius who solved the greatest scientific problem of his time. ACADEMY OF MANAGEMENT, 1947.

XIMENES, R.; PARISIO, F.; DIAS, E. O. Comparing experiments on quantum traversal time with the predictions of a space-time-symmetric formalism. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 3, p. 032105, 2018.

YEARSLEY, J.; HALLIWELL, J. An introduction to the quantum backflow effect. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2013. v. 442, n. 1, p. 012055.

YEARSLEY, J. M.; DOWNS, D.; HALLIWELL, J.; HASHAGEN, A. Quantum arrival and dwell times via idealized clocks. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 2, p. 022109, 2011.

ZUREK, W. H. Quantum darwinism. *Nature physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 5, n. 3, p. 181–188, 2009.

APÊNDICE A – REPRESENTAÇÃO DA DELTA DE KRONECKER COMO UMA SOMA DISCRETA

Na equação (2.21) usamos o resultado:

$$\frac{1}{n} \sum_{m=-j}^j e^{2i\pi m(r-s)/N} = \delta_{rs}, \quad (\text{A.1})$$

onde $n = 2j + 1$. Aqui demonstraremos essa relação. Para isso, precisamos mostrar que o resultado do primeiro membro é 1 para $r = s$ e se anula para os demais casos. O primeiro caso é trivial, se $r = s$, temos

$$\frac{1}{n} \sum_{m=-j}^j e^0 = \frac{1}{n} \left(\underbrace{1 + \dots + 1}_{j \text{ vezes}} + 1 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{j \text{ vezes}} \right) = \frac{2j + 1}{n} = 1 \quad (\text{A.2})$$

O segundo caso requer que façamos uma substituição de variáveis. Definindo $l \equiv 2\pi(r - s)$ e $k \equiv e^{il/n}$, temos

$$\frac{1}{n} \sum_{m=-j}^j k^m = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n k^{m-(n+1)/2}, \quad (\text{A.3})$$

onde fizemos uma “translação” no somatório, passamos de $-j \rightarrow 1$ no limite inferior, e por consequência, $j \rightarrow 2j + 1$ no limite superior, o que é equivalente a fazer $-(n - 1)/2 \rightarrow 1$ e $(n - 1)/2 \rightarrow n$. Isso representa uma translação de $(n + 1)/2$, tendo que fazer no argumento do somatório a mesma mudança com sinal oposto. Com isso, a Eq. (A.3) pode ser escrita como

$$\frac{1}{n} \sum_{m=-j}^j k^m = \frac{k^{-j}}{nk} \sum_{m=1}^n k^m \quad (\text{A.4})$$

Temos então a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, o que resulta em

$$\sum_{m=1}^n k^m = \frac{k(k^n - 1)}{k - 1}. \quad (\text{A.5})$$

Analisemos a expressão de k^n (para valores de r, s inteiros),

$$k^n = e^{il} = e^{2i\pi(r-s)} = \cos[2\pi(r - s)] + i \sin[2\pi(r - s)] = 1. \quad (\text{A.6})$$

Com isso, temos para $r \neq s$,

$$\sum_{m=1}^n k^m = \frac{k(1 - 1)}{k - 1} = 0, \quad (\text{A.7})$$

que resulta na expressão da Eq. (A.3) igual a zero, como queríamos provar.

APÊNDICE B – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PRESENTE NOS CAPÍTULOS 4 E 6

Nos capítulos 4 e 5 temos as equações diferenciais (4.13) e (6.9) na forma

$$\frac{d\hat{\rho}_{00}}{dt} = -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{00}] + \gamma \Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{11} \Theta(\hat{x}). \quad (\text{B.1})$$

Tentemos uma solução da forma

$$\hat{\rho}_{00}(t) = \int_0^t dt' e^{-i\hat{H}_S(t-t')} \hat{F}(t') e^{i\hat{H}_S(t-t')}, \quad (\text{B.2})$$

onde o operador $\hat{F}$ é desconhecido. Essa escolha é motivada pela presença do comutador $[\hat{H}_S, \hat{\rho}_{00}]$ na Eq. (6.9). Resta-nos obter $\hat{F}$ para que seja solução de (B.1). Definindo

$$\hat{R}(t) \equiv \int_0^t dt' e^{i\hat{H}_S t'} \hat{F}(t') e^{-i\hat{H}_S t'}. \quad (\text{B.3})$$

e derivando a Eq. (B.2) em relação ao tempo, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{00}}{dt} &= \frac{d}{dt} [e^{-i\hat{H}_S t} \hat{R}(t) e^{i\hat{H}_S t}] \\ &= -i\hat{H}_S \hat{\rho}_{00} + i\hat{\rho}_{00} \hat{H}_S + e^{-i\hat{H}_S t} \left(\frac{d\hat{R}}{dt} \right) e^{i\hat{H}_S t} \\ &= -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{00}] + e^{-i\hat{H}_S t} \left(\frac{d\hat{R}}{dt} \right) e^{i\hat{H}_S t}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Note que

$$\frac{d\hat{R}}{dt} = \left(e^{i\hat{H}_S t'} \hat{F}(t') e^{-i\hat{H}_S t'} \right) \Big|_0^t = e^{i\hat{H}_S t} \hat{F}(t) e^{-i\hat{H}_S t} - \hat{F}(0). \quad (\text{B.5})$$

Finalmente, usando (B.5) em (B.4), temos que

$$\frac{d\hat{\rho}_{00}}{dt} = -i [\hat{H}_S, \hat{\rho}_{00}] + \hat{F}(t) - \hat{F}(0). \quad (\text{B.6})$$

Comparando a Eq. (B.6) com (B.1), temos que

$$\hat{F}(t) = \gamma \Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{11}(t) \Theta(\hat{x}). \quad (\text{B.7})$$

e

$$\hat{F}(0) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Veja que $\hat{F}(t)$ satisfaz a condição $\hat{F}(0) = 0$, já que não temos possibilidade de encontrar a partícula em $x > 0$ em $t = 0$. Isso acontece por conta da atuação de $\Theta(\hat{x})$ em $\hat{\rho}_{11}(0)$, que retorna o operador nulo,

$$\Theta(\hat{x}) \hat{\rho}_{11}(0) = \int_0^\infty dx \underbrace{\psi_{nd}(x, 0) |x\rangle_S \langle \psi_{nd}(0)|}_{0 \text{ se } x > 0} \otimes |\phi(0)\rangle_{\mathcal{R}} \langle \phi(0)| = 0. \quad (\text{B.9})$$