



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
LICENCIATURA EM FÍSICA

MAURILIO ARTUR BEZERRA DA SILVA

**Simuladores digitais interativos: uma análise das simulações para
o ensino de momento angular**

CARUARU

2024

MAURILIO ARTUR BEZERRA DA SILVA

**Simuladores digitais interativos: uma análise das simulações para
o ensino de momento angular**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação do Curso de
Licenciatura em Física do Campus Agreste
da Universidade Federal de Pernambuco –
UFPE, na modalidade de monografia,
como requisito parcial para a obtenção do
grau de licenciado em Física.

Área de concentração: Ensino de Física

Orientador (a): Tassiana Fernanda Genzini de Carvalho

**CARUARU
2024**

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Maurilio Artur Bezerra da.

Simuladores digitais interativos: uma análise das simulações para o ensino
de momento angular / Maurilio Artur Bezerra da Silva. - Caruaru, 2024.
62 p. : il., tab.

Orientador(a): Tassiana Fernanda Genzini de Carvalho

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Física - Licenciatura, 2024.

Inclui referências, apêndices.

1. Ensino de física. 2. Simuladores digitais. 3. Momento angular. 4.
Momento de inércia. 5. Torque resultante. I. Carvalho, Tassiana Fernanda
Genzini de . (Orientação). II. Título.

530 CDD (22.ed.)

MAURILIO ARTUR BEZERRA DA SILVA

**Simuladores digitais interativos: uma análise das simulações para
o ensino de momento angular**

TCC apresentado ao Curso de
Licenciatura em Física da Universidade
Federal de Pernambuco, Centro
Acadêmico do Agreste, como requisito
para a obtenção do título de Licenciado em
Física.

Aprovado em: 18/03/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Tassiana Fernanda Genzini de Carvalho (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. João Eduardo Fernandes Ramos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Augusto César Lima Moreira (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

À minha família, em especial a minha mãe,
minha avó e minha companheira, por todo
apoio.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe Maria José, por todo incentivo, dedicação e cuidados ao longo de toda minha vida e graduação.

A minha Vó Josefa Pereira, por todo apoio e conselhos.

A minha companheira Damillis, por todo cuidados, dedicação, conselhos e companheirismo.

À Prof^a Tassiana Fernanda Genzini de Carvalho, pela excelente orientação.

Aos meus companheiros de curso, por todo companheirismo e auxílio nos momentos difíceis.

Aos professores da minha graduação, pela excelente mediação dos conhecimentos.

À CAPES, pelo Programa Residência Pedagógica (PIBID), onde participei por 1 ano e 6 meses e tive a oportunidade de estar ao lado de grandes profissionais adquirindo muito conhecimento e experiências.

RESUMO

Neste trabalho foi analisado como as simulações digitais podem funcionar como ferramenta pedagógica para o ensino de momento angular. As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs), em seu estado atual de evolução e desenvolvimento, devem serem vistas com bons olhos por professores que ensinam ciência no modo geral, em física em específico, uma disciplina tida por muitos, como difícil e até impossível de se entender, os profissionais devem recorrer aos métodos mais atrativos e atual para um melhor êxito no processo de ensino. O objetivo da pesquisa foi analisar simulações com a finalidade de se ensinar o momento angular e as grandezas físicas relacionadas. As buscas ocorreram diferentes plataformas que possuam simulações digitais e interativas, e ao identificar as simulações, elas foram analisadas qualitativamente com relação aos critérios definido na pesquisa. Depois, foram analisadas minuciosamente, uma simulação em cada plataforma encontrada de tal forma, a levar uma lógica didática ao ensinar momento angular.

Palavras chaves: Momento angular; simuladores digitais; TDICs

ABSTRACT

In this paper, analyzed how digital simulations can function as a pedagogical tool for teaching angular momentum. Digital Information and Communication Technologies (TDICs), in their current state of evolution and development, should be viewed favorably by teachers who teach science in general, In physics specifically, a subject considered by many to be difficult and even impossible to understand, professionals must resort to the most attractive and current methods for better success in the teaching process. The objective of the research was to analyze simulations with the purpose of teaching angular momentum and related physical quantities. The searches took place on different platforms that have digital and interactive simulations, and when identifying the simulations, they were qualitatively analyzed in relation to the criteria defined in the research. Afterwards, a simulation was analyzed in detail on each platform found in such a way as to bring a didactic logic to teaching angular momentum.

Keywords: Angular Momentum; digital simulators; TDICs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Diagrama esquemático sobre as grandezas vetoriais em uma partícula descrevendo um movimento angular.	19
Figura 2 -	Corpo rígido descrevendo movimento angular e os esquemas das grandezas relacionadas.	19
Figura 3 -	Vista inicial da simulação movimento de rotação.	32
Figura 4 -	Marcação do tempo gasto para completar 5 voltas	33
Figura 5 -	Vetor momento angular (L) e vetores posição (r) e velocidade linear (v).	34
Figura 6 -	Vista inicial da simulação momento de inércia.	36
Figura 7 -	O uso do controle da inclinação da pista	37
Figura 8 -	Uso do controle de perspectiva do plano e os objetos	38
Figura 9 -	Uso dos controles do movimento dos objetos	39
Figura 10 -	Vista da configuração inicial da simulação com as equações envolvidas no movimento de rolamento	40
Figura 11 -	Vista inicial da simulação Angular Momentum: Person on Rotating Platform	42
Figura 12 -	Uso do controle "Radius of Cylinder"	43
Figura 13 -	O uso do controle "Radius of Person's Path"	43
Figura 14 -	O uso do controle "Mass of Person"	44
Figura 15 -	O uso do controle "Mass of Cylinder"	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Identificação das simulações	28
Tabela 2 –	Relação entre as simulações e os critérios adotados.	29

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	TDICS NA EDUCAÇÃO E NO ENSINO DE FÍSICA	15
3	ENSINO DO MOMENTO ANGULAR	18
3.1	DEFINIÇÃO E LITERATURA	18
3.2	O USO DE SIMULADORES NO ENSINO DE FÍSICA E NO ENSINO DE MOMENTO ANGULAR.	21
4	METODOLOGIA DA PESQUISA	24
5	RESULTADO E ANÁLISES	27
5.1	RESULTADOS GERAIS	27
5.2	ANÁLISES ESPECÍFICAS	31
5.2.1	Simulação 1 – Movimento de rotação	32
5.2.2	Simulação 2 – Momento de Inércia	35
5.2.3	Simulação 3 – Angular Momentum: Person on rotating plataform.....	41
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47
	REFERÊNCIAS	50
	APÊNDICE A – CÁLCULOS ENVOLVENDO AS SIMULAÇÕES	52

1 INTRODUÇÃO

Hoje, as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) já são algo tão presente na vida das pessoas que se tornou quase impossível conviver em sociedade sem o auxílio delas. Sendo elas consideradas computadores, softwares educativos, internet, jogos interativos didáticos, games Gonçalves (2016).

Assim como destaca Gonçalves (2019, p. 18), “as TDICs são fundamentais em todos os setores da sociedade, tanto na economia, na política, nas relações afetivas, na indústria, na agricultura, e outros”.

Com isso, as presenças das TDICs na educação devem ser vistas com bons olhos, entendendo que elas podem se tornar uma ferramenta muito útil na abordagem de conteúdos considerados mais difíceis e abstratos. A partir do uso das ferramentas que as TDICs propiciam, agora, é possível trabalhar com a visualização da evolução de um sistema físico, descrito pelo modelo teórico discutido em sala. Especialmente, se o tema no qual o professor está trabalhando seja estudo de movimentos, a evolução do sistema depende além das condições iniciais, o tempo que aquele experimento é realizado. Nesse contexto quanto ao uso das simulações Araújo et al. (2021, p. 8) aponta.

Os simuladores virtuais podem ser considerados como ferramentas didáticas adequadas para a exposição dos fenômenos dependentes do tempo, uma vez que tornam mais acessíveis a percepção das ações que estão em discussão e podem ser trabalhados em horário extra-sala com roteiros auto-instrucionais. (ARAÚJO et al, 2021, p. 8).

No contexto das simulações, elas são muito úteis para mostrar o fenômeno ocorrendo, com isso, o professor em sala, pode utilizar esse recurso como uma forma ilustrativa do conteúdo que está sendo debatido. Nesse trabalho, será analisado o conteúdo do ensino do momento angular poderá ser complementado com o uso dos simuladores.

O ensino de momento angular está previsto de forma mais completa, ou seja, com formalismo matemático e conceitual, apenas no ensino superior, nas graduações das áreas que contemplam disciplinas de física básica na sua grade curricular. No

ensino médio, o documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), não menciona o conteúdo em nenhuma das suas competências relacionadas à área de “Ciências da natureza e suas tecnologias”. Talvez, por conta dessa ausência nos documentos oficiais, é encontrado poucos trabalhos de ensino de momento angular, em especial, fazendo uso de simuladores. Com isso, esse trabalho visa montar um repertório de simulações para que seja possível, o ensino de um mesmo conceitos ter disponibilidade de trabalhar com várias simulações.

Uma hipótese sobre este assunto não ser abordado no Ensino Médio pode estar relacionado com o grau de dificuldade do conteúdo, exigindo do discente um grau de abstração muito elevado, pois seu próprio conceito não é algo trivial. Portanto uma boa maneira de abordar o presente conteúdo poderia ser através das simulações virtuais, encontradas nas diversas plataformas educacionais, sendo elas pertencentes a universidades ou de algum projeto isolado de um algum pesquisador/professor de física. Nesse contexto, a proposta do presente trabalho é responder de que maneira as plataformas digitais, em específico as simulações interativas, podem propiciar um aporte para o ensino de conceitos relacionados ao momento angular para o Ensino Médio e Superior?

O tema da inserção das TDICs na educação vem a contribuir para uma democratização ao ensino de física, com ênfase no ensino do momento angular, levando em conta que muitas escolas, especialmente as públicas, não possuem em seus espaços laboratórios didáticos no ensino de ciência e, obviamente, nisso está incluso a física. Como Sobrinho e Oliveira (2023, p.2) destacam, a partir de dados do censo escolar de 2018 (INEP, 2019), “enquanto o acesso à internet é uma realidade em 95,1% das escolas de ensino médio, o laboratório de ciências é encontrado em apenas 44,1% delas”.

Logo, parece necessário pensar em como as tecnologias digitais da informação e da comunicação podem ser um elemento importante e essencial para um ensino mais acessível e atrativo aos estudantes, onde através dela podem ser abordados conceitos mais abstratos e de difícil compreensão, como é o caso do momento angular.

No entanto, para inserir e utilizar TDICs em sala de aula se faz necessário o conhecimento técnico e sobre o potencial dessas ferramentas para o ensino, então, o

uso das simulações digitais pode vir a contribuir para essa metodologia mais atrativa e desmistificada.

É fato que o ensino precisa se modificar para atrair atenção dos jovens, que hoje já nascem rodeados pelas tecnologias e vão se habituando naturalmente às evoluções dela, e esses podem ser chamadas de *nativos digitais*. Como afirmam Palfrey e Gasser (2011, apud Tezani, 2017, p.04 para defini-los:

Os nativos digitais são aqueles que possuem habilidades com as TDIC em vários contextos como nos relacionamentos (redes sociais), busca de informações, novas formas de comunicação, possibilidade de aprender.

Ou seja, não é esperado que essas pessoas se adequem ao modo tradicional de educação, mas que a educação busque meios para se adequar às pessoas.

Nesse cenário, é importante pensar metodologias mais atrativas e menos tradicionais para o ensino de física como um todo, então, as TDICs podem ser uma aliada de muito ganho pedagógico, porque elas permitem que o professor utilize de ferramentas que ele e os alunos têm acesso, que são os celulares smarthphones, notebooks, desktop e etc. assim, como destacado:

Como aliado pode-se trabalhar com as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs), as quais, quando inseridas no ensino de Física, oferecem aos professores oportunidades de associarem metodologia de ensino e conteúdo programático trabalhando este binômio nos laboratórios virtuais. (SOBRINHO e OLIVEIRA, 2023, p.2).

Além disso, as TDICs podem funcionar como uma maneira de estimular a curiosidade e o trabalho em grupo por parte dos estudantes como destacado:

As TDICs se destacam quando utilizadas nas aulas por estimularem o trabalho em grupo, a interdisciplinaridade, a solução de desafios, a conectividade, a aprendizagem com as vitórias e com as derrotas, a aulas mais interessantes, a diferenciação da realidade virtual e teórica, entre outras (GONÇALVES, 2019, p.17).

Com isso, o profissional em sala de aula, ou os formandos podem encontrar maneiras para quando chegar na sala de aula tratar os assuntos mais complexos de uma maneira moderna, atrativa com seus alunos. Em destaque ao ensino de conceitos relacionados ao estudo do momento angular, onde seu grau de abstração requer do professor um cuidado redobrado no ensino dos seus conceitos e dos fatores relevantes a ele.

Então, levando em conta a praticidade das simulações digitais, e o grau de abstração do entendimento dos conceitos relacionado ao momento angular, é pensado em como essa ferramenta poderia auxiliar nesse ensino para torná-lo mais atual e menos complexo ou abstrato. Logo, foi decidido pesquisar sobre essa temática afim de responder se as simulações digitais são viáveis para o ensino do momento angular.

Com isso a presente pesquisa tem como objetivo analisar simulações que possuam elementos para o estudo e abordagem didática do momento angular e os conceitos relacionado a sua variação e conservação. Além disso, o trabalho também tem como objetivos específicos: analisar a usabilidade das simulações, identificar a aplicabilidade das simulações nos diferentes estágios de ensino, e identificar influência de grandezas relacionadas ao momento angular nas simulações tais como: torque resultante e momento de inércia.

2 TDICS NA EDUCAÇÃO E NO ENSINO DE FÍSICA

As tecnologias da informação e da comunicação, já permeiam os ambientes escolares há muito tempo. Assim como traz Dias e Silva (2010), existem registros que se propõem a essa discussão desde 1920, na obra *Teachers and Machines: The Classroom Use of Technology*. A cada nova geração, mais a tecnologia é inserida em seus contextos, e hoje os jovens têm mais acessos do que seus pais tiveram, que por sua vez tiveram mais acesso que seus avós.

Toda essa evolução faz que os jovens estejam inseridos em uma sociedade altamente digitalizada, onde todo funcionamento das atividades cotidianas possui alguma ligação com as TDICs (TEZANI, 2017). Então, no contexto do sistema educacional, Presnsky (2001, p.1) afirma “Nossos alunos mudaram radicalmente. Os alunos de hoje não são os mesmos para os quais nosso sistema educacional foi criado”. Ou seja, todo o sistema educacional deveria levar em conta essas mudanças e incorporar elementos condizentes com a realidade vivenciada pelos estudantes.

Logo, é possível notar que os lugares voltados à educação deveriam ser um espaço dinâmico que tenta, ou pelo menos deveria sempre incorporar novas ferramentas de ensino. Nesse contexto da digitalização da sociedade como um todo, naturalmente, ao longo dos anos as escolas foram abrindo seus espaços às novas tecnologias, não apenas para as aulas, mas sim, para todo o funcionamento das mesmas. Entretanto, segundo dados da UNESCO (2023), 63% das escolas brasileiras de ensino fundamental e médio, possuem computador voltado para uso dos alunos em atividades de ensino. Mas, apenas 58% dessas escolas possuem computadores com acesso à internet, na qual, esses dados são relatados no documento TIC Educação 2022 ¹.

Contudo, já existem políticas públicas com objetivo de implementar tecnologias nesses espaços, como no caso do Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo), que desde 2007 está em vigor. Com isso, existe uma participação coletiva de municípios, estados e governo federal para desenvolver condições para

¹ disponível em: <https://cetic.br/pt/tics/educacao/2022/escolas/> Acesso em 02 dez, 2023.

implementação de tecnologias nas escolas (SOUZA, 2021). Nesse contexto de participação coletiva entre os poderes públicos, se abre a discussão para os recursos nas salas de aulas, é importante que exista uma estrutura adequada nas escolas e nos espaços onde ocorrerão as aulas, para receber os recursos tecnológicos, como aponta Souza (2021, p.6).

Os recursos materiais são essenciais para colocar em prática a integração das TDICs na sala de aula. Sem estrutura, computadores, acesso à rede e aos tablets fica difícil colocar em prática o que se apregoam os aparatos legais vigentes.

Arelado a todo esse desenvolvimento, temos o personagem principal no quesito ensino, que é professor. Nesse sentido, como destaca Junior (2019, p.3) “no aspecto didático, os docentes deverão utilizar as tecnologias como ferramentas que potencializem as situações de aprendizagem e a interação”. Além dos professores, os estudantes devem ser estimulados a lidar com a tecnologia na aprendizagem, isso é posto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nesse sentido os alunos devem ter visão crítica, significativa, reflexiva e ética no uso das TDICs (LISKA, 2021).

Com isso, já existe um estudo que discute a utilização das tecnologias digitais e a associa a um maior engajamento dos estudantes nas aulas, assim como aponta Pereira (2019 apud Junior e Melo, 2021, os professores devem ter os conhecimentos técnicos e pedagógicos para utilização das tecnologias e de suas aplicações.

Os trabalhos mais recentes em física, em muitos casos, tratam das TDICs associadas à modelagem computacional de diversos problemas, trazendo como as simulações podem ser usadas com a finalidade de discutir os resultados, associando elementos teóricos – esperados pelos cálculos – com a realidade. Corroborando com essa visão, Moreira (2018, p. 4) traz que as “simulações computacionais, modelagem computacional, laboratórios virtuais deveriam estar naturalmente integrados ao ensino de Física no século XXI”. Ou seja, quando elementos tecnológicos não estão presentes nas aulas de física, não se está inserindo, de fato, toda a possibilidade desse ensino nos dias atuais.

Aliado ao fato discutido acima, para o ensino de física, que em alguns casos pode se tornar uma prática desafiadora, as TDICs podem vir a contribuir significativamente, como afirma Araújo et al. (2021, p. 5).

Especialmente em Física, o uso de recursos digitais pode facilitar a compreensão dos conceitos e pode instigar a investigação no estudante que,

ao recorrer a estas ferramentas, descobrirá diversas soluções para os problemas discutidos.

Santos et al. (2017 apud Siqueira, 2023, p. 8) também mencionam os benefícios da aplicação das TDICs no ensino de física.

As tecnologias digitais têm facilitado o aprendizado de temas, muitas vezes, complexos ou abstratos para os estudantes; muitos destes abordando a natureza atômica da matéria, o conceito de energia, o funcionamento de circuitos elétricos, o comportamento gasoso e outros fenômenos.

Então, é possível evidenciar que o uso das TDICs tem um propósito imediato que é facilitar a explicação dos conceitos de uma forma que pode ser mais clara e objetiva. Além de, obviamente, instigar os estudantes com relação aos conteúdos a serem compreendidos. Então, como aponta Moreira (2017, p.11).

Laboratórios virtuais podem motivar os alunos a contribuir para o desenvolvimento de competências científicas: 1. Os alunos podem modificar características de modelos científicos ;2. Podem criar modelos computacionais; 3. Podem fazer experimentos sobre fenômenos não observáveis diretamente; 4. Criar ambientes online que usem dados individuais armazenados de estudantes, para guiá-los em experimentos virtuais apropriados para seus conhecimentos prévios e seus estágios de desenvolvimento cognitivo.

Com isso, é possível ter um ganho significativo ao colocar os alunos como um ser ativo no seu processo de aprendizagem, logo que, eles podem interagir com o experimento de tal modo, a modificar parâmetros e analisar o comportamento do mesmo.

3 ENSINO DO MOMENTO ANGULAR

Para tratar do ensino momento angular foi tratado no presente trabalho, de trazer a definição do conceito, trazendo assim literaturas do ensino superior e trazer uma problematização, sobre o porquê de encontrar mais amplamente essa definição nas literaturas de nível superior. Além de explanar alguns trabalhos que visem o ensino desse conceito. Após esse momento, se fez necessário buscar como os simuladores digitais são utilizados no ensino de física e no ensino de momento angular em específico.

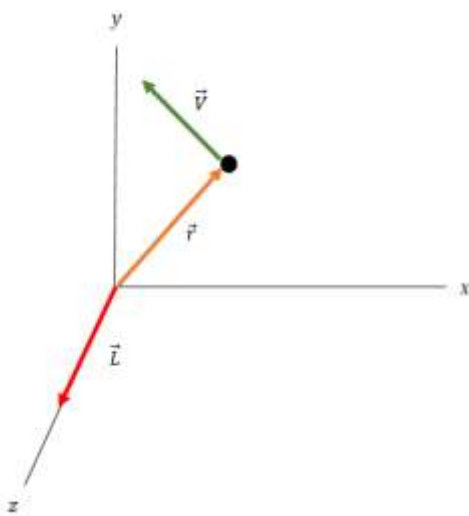
3.1 DEFINIÇÃO E LITERATURA

Para falar do ensino do Momento Angular (MA) e sua conservação, é necessário entender o que é definido sobre seus conceitos. Para uma partícula, o momento angular ($\vec{L}$) é uma grandeza vetorial, que depende de seu movimento em relação a um referencial definido, ou seja, o vetor posição ($\vec{r}$) no problema, além da massa (m) da partícula e da sua velocidade linear ($\vec{V}$) (Nussenveig, 2002). Temos, portanto, a seguinte expressão matemática para a definição do momento angular.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

Onde a grandeza $\vec{P}$, é o momento linear sendo definida como o produto da massa (m) pela velocidade linear ($\vec{V}$) da partícula (TIPLER, 2009). O momento linear que está associado com quantidade movimento de translação de um corpo, ou seja, o movimento no qual o Centro de Massa (CM), se desloca em relação a um referencial fixo. Como visto na figura 1, abaixo.

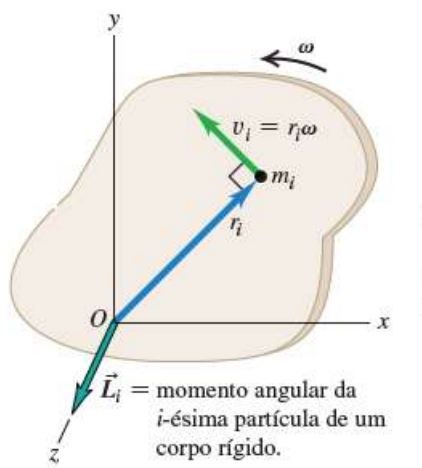
Figura 1 - Diagrama esquemático sobre as grandezas vetoriais em uma partícula descrevendo um movimento angular.



Fonte: elaborado pelo autor

Então, pela figura 1, é possível notar que os vetores posição e velocidade, formam um plano e o ângulo entre eles sempre vale 90° . Além disso, como (Nussenveig, 2002), comenta a direção de $\vec{L}$ é sempre perpendicular ao plano de definido por $\vec{r}$ e $\vec{v}$. Para um corpo rígido, ou seja, corpo formados por várias partículas e cuja as dimensões não são desprezíveis. A figura 2, esquematiza a relação entre os vetores acima.

Figura 2 - Corpo rígido descrevendo movimento angular e os esquemas das grandezas relacionadas.



Fonte: Young e Freedman, (2016)

Portanto, para um corpo rígido, deve considerar o somatório de todas partículas com massas m_i , a uma distância r_i , do eixo central O, na qual, o movimento está sendo descrito o movimento de rotação. Com isso, para corpos rígidos todas partículas descrevem um movimento de rotação com velocidade angular ω , e por consequência a velocidade linear de cada partícula, é dado por $v_i = r_i\omega$.

É notado que as referências para se conceituar o momento angular, são da literatura acadêmicas, utilizadas no ensino superior. Além disso, é possível notar que o formalismo matemático é um tanto avançado, levando um afastamento desse conteúdo a nível médio. Por exemplo, para explicar momento angular, utiliza-se do formalismo vetorial, bem como do produto vetorial, sendo este último assunto que, muitas vezes, não é visto ou não é aprofundado no Ensino Médio

Tal fato é observado nos sumários nos livros do ensino médio, que mostram que conceitos relacionados ao momento angular estão presentes, como é no caso do torque e equilíbrio de corpos extensos, contudo, o conceito ou o termo “momento angular”, propriamente dito, não aparece. Nas obras “Fundamentos da física” (Ramalho, Nicolau, Toledo, 2009), “Ser protagonista” (Edições SM, 2016), e “Tópicos de física” (Helou; Gualter; Newton, 2012), que são coleções de livros de física para o ensino médio, não citam o momento angular em nenhum tópico, mesmo que outros tópicos relacionados a seu estudo sejam abordado no texto do livro.

Com isso, faz necessário para que o professor que porventura tenha que ensinar esse tópico, em algum contexto na sala de aula, ou em grupo específico, buscar outras alternativas. Nesse contexto, alguns autores percebem a falta do conteúdo sobre momento angular, e tentam amenizar essa omissão, construindo outras formas menos tradicionais para esse ensino.

Duarte (2012), produziu um kit de experimentos de baixo custo para o ensino de dinâmica das rotações, além de criar um software para simular as experiências vivencias do kit. O objetivo do trabalho segundo o autor é “criar uma ponte para que a passagem do real para o abstrato seja mais amena” (DUARTE, 2012, p.3). Ou seja,

vemos a utilização das TDICs podendo servir para amenizar essas situações adversas, junto com a utilização da experimentação.

Outro trabalho que visa o ensino do conceito do momento angular é apresentado por Moreira (2021), na qual a autora desenvolve um protótipo de análise buscando contabilizar o tempo gasto em uma rotação de uma plataforma giratória. Com isso, segundo a autora, seu objetivo seria: “trazer qualidade aos resultados da prática de conservação de Momento Angular realizada no laboratório de Mecânica Clássica” (MOREIRA, 2021, p.16). Por isso, é possível ver a relação da prática atrelada a ferramentas tecnológicas para o desenvolvimento de equipamentos que auxilie o ensino de MA.

Portanto, é notado uma inserção das tecnologias no contexto de ensino do momento angular, é claro, que as simulações não são utilizadas, contudo, as propostas de ensino são significativas pelo fato de se trabalhar com algo concreto, ou seja, com os experimentos onde é possível observar e trabalhar com o modelo adequado e explicar os resultados experimentais. Essas propostas seriam mais potencializadas em um contexto na qual a escola, universidade e/ou institutos, possuíssem um espaço adequado para essas propostas no caso um laboratório didático de física ou de ciências, logo, que esses espaços oferecem mais comodidade e o ambiente é realmente destinado a esses momentos.

3.2 O USO DE SIMULADORES NO ENSINO DE FÍSICA E NO ENSINO DE MOMENTO ANGULAR.

Como já foi destacado, a tecnologia, no aspecto educacional, deve contribuir para os momentos de ensino e de aprendizagem. Em física, muitas vezes, apenas a explicação dos livros didáticos junto com a explicação dialógica do professor, pode não ser suficiente. É então que deve ser utilizada de forma adequada e responsável outras ferramentas disponíveis, assim como sugere Bulegon (2011 apud SOUZA, 2021, p. 55):

A utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no Ensino, especificamente a Internet e softwares educacionais, têm sido apontados

como poderosos recursos para o ensino de Física, especialmente aqueles que oferecem a possibilidade de alterar valores e manusear com as variáveis de forma interativa.

Dentro dessas tecnologias, podem estar também os simuladores virtuais que são definidos por Silva, Souza & Lopes (2023, p.5) como:

Softwares cujo objetivo é emular equipamentos e situações reais para experimentação (aprendizagem de conceitos) ou treinamento (aprendizagem de utilização), como o que ocorre com os simuladores de voo (Microsoft Flight Simulator, por exemplo).

Com isso, como já explorado nos tópicos anteriores, os simuladores podem ser pensados como uma ferramenta pedagógica, de modo a estimular os alunos a aprenderem os conteúdos de física, além de servir ao profissional em sala, como uma maneira de articular sua aula com explicação atreladas aos recursos audiovisuais que os simuladores oferecem.

Além desse ganho, Silva, Souza e Lopes (2023, p. 8) também trazem outros ganhos com o uso de simuladores em sala de aula, são eles:

- Interagir com situações cotidianas simuladas cuja reprodução em laboratório seria trabalhosa e/ou demorada, como por exemplo, processos térmicos que são lentos;
- Reproduzir situações que envolvem itens caros e, por vezes, indisponíveis aos ambientes escolares, como circuitos eletrônicos;
- Realizar experimentos que não são possíveis de serem realizados na superfície da terra, como ambientes com aceleração da gravidade diferente da terra;
- Depara-se com situações seriam perigosas de serem realizadas na prática, mas com são realizadas com segurança de realização via software;
- Realizar procedimentos nos quais, sem o devido treinamento e atenção, o aluno poderia danificar os insumos e/ou componentes com muita facilidade;
- Simular conceitos ou situações abstratas, de difícil construção por parte do aluno, como por exemplo, na área de física: campos magnéticos, elétricos e gravitacionais;
- Permite ao aluno refazer o experimento muitas vezes e em locais diversos a sala de aula, uma vez que o software pode ser acessado de diversos locais e formas, possibilitando o treinamento e favorecendo a aprendizagem;
- Preparar um experimento de forma mais rápida, uma vez que há casos nos quais o tempo necessário para elaboração do experimento real é consideravelmente superior ao tempo gasto para iniciar uma simulação virtual.

Com esses elementos, é possível observar que o ganho pedagógico é bastante significativo. Atrelado a uma metodologia que dialogue com os jovens nativos digitais, a aprendizagem pode ser mais proveitosa. Além disso, é possível pensar em uma conciliação entre as aulas práticas de laboratório e as simulações, nesse sentido, os estudantes podem ver uma modelagem do fenômeno ocorrendo e aplicarem esse conhecimento nas dinâmicas do trabalho experimental.

As simulações para o ensino do momento angular, ainda são pouco utilizadas como objetos de estudos científicos. Na revisão da literatura, os autores, normalmente utilizam-se de arranjos experimentais físicos para essas dinâmicas do ensino do momento angular. Como já mencionado os trabalhos de Moreira (2021) e Duarte (2012), onde dialogam com a ideia mais prática envolvendo experimentos, é uma alternativa viável para ensinar o momento angular. Contudo, trabalhos experimentais a depender de suas complexidades requerem ambientes adequados para a sua realização. É possível, atentar que as simulações podem ser alternativas mais acessíveis, logo que elas podem ser utilizadas tanto em escolas que possuem ou não laboratórios didáticos, além de ser uma prática mais simples em relação a um experimento real.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

A pesquisa se iniciou em meados de outubro de 2023, estabelecendo objetivos e justificativas para prosseguimento das atividades de análises. Logo, em seguida foram selecionados artigos para compor o referencial teórico, onde se visou buscar o que os pesquisadores e teóricos defendia a respeito das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs), além de buscar como as gerações que já nasceram imersas nesse mundo de tecnologias e nas facilidades que as elas proporcionam se relacionam com elas no ensino. Nesse momento, foi discutido como os equipamentos de comunicações e internet estão inseridos no contexto das escolas e se elas estão sendo utilizadas para fins pedagógicos.

Por conseguinte, foi realizada uma busca sobre o ensino do momento angular, onde foi definido o conceito, utilizando referenciais do ensino superior, com isso, foi-se provocada a ideia de analisar brevemente, algumas literaturas do ensino médio, a fim de encontrar como era abordado o conteúdo, entretanto nos materiais analisados não foi encontrado nenhum tópico destinado a esse ensino.

Assim, considerando os objetivos desta pesquisa, que pretende analisar o potencial das simulações para o ensino de momento angular, inicialmente, procurou-se por plataformas digitais que possuíam em seus ambientes digitais simulações virtuais que tratassem sobre o momento angular. Uma plataforma de suma importância, para as buscas dessas plataformas foi o espaço de apoio, pesquisa e cooperação de professores de física (Profis), que funciona sob supervisão do Instituto de Física da Universidade São Paulo (USP).

Ao identificar essas plataformas foi procurado informações sobre o funcionamento, o desenvolvedor daquele ambiente e outros aspectos técnicos, como por exemplo: se possui a função de mudar o idioma ou se possui aplicativo para os smartphones. Nesse momento, foram procuradas tanto plataformas cujo as administrações são brasileiras, quanto as estrangeiras, editadas e administradas por universidades, institutos ou até por uma pessoa física. Com isso, o intuito foi ter mais êxito para a análise das simulações.

O passo seguinte, consistiu em identificar simulações condizentes com nossa questão problema, ou seja, quais das simulações presentes nos espaços virtuais, poderiam ser utilizadas para ensinar tópicos relacionados ao momento angular.

Com isso, identificadas e selecionadas as simulações foram analisados os aspectos inerentes ao seu funcionamento, como sua usabilidade, ou seja, verificar se a simulação é simples e intuitiva, e também foi feita uma análise conceitual, verificando, por exemplo, se é possível alterar parâmetros para chegar em resultados diferentes, e se possui instruções de uso. Os critérios são detalhados abaixo:

Critério 1 – Usabilidade

Nesse quesito, a simulação será analisada facilidade de se usar, se precisa de mais do que o acesso a ela para conseguir usá-la, ou seja, se faz necessário, baixar ou instalar algum plugin. E também se é possível acessar apenas por um computador, ou se está também acessível por smartphones.

Critério 2 – Intuitividade

Nessa análise, a simulação é relacionada com os elementos presentes e se eles estão dispostos de tal a forma, a criarem no usuário uma lógica de como utilizar da simulação. Ou seja, se todos controles estão bem sinalizados, e coloridos de tal forma a representar uma lógica e também se os elementos estão dispostos em lugares que não atrapalham a visualização do progresso da simulação.

Critério 3 – Possui instruções de uso.

Nesse item, será verificado se a simulação possui algum texto ou documento, que forneça instruções de uso para uma melhor análise dos resultados. E também se é proposta algum roteiro para análise do experimento.

Critério 4 – É possível identificar todos elementos da simulação

Nesse ponto, será analisado se todos elementos que compõe a simulação estão claros e bem sinalizados. Ou seja, além dos objetos presentes, como as esferas, cilindros e anéis. Se estar claro a sinalização dos vetores (Força, Torque, Momento angular, e as velocidades linear e angular).

Critério 5 – Idioma original

Nesse tópico, se a simulação ou a plataforma oferece recurso para tradução para outras línguas, preferencialmente o português.

Ao final, para o aprofundamento da análise foram escolhidas três simulações para discutir suas potencialidades para se trabalhar os conceitos do vetor Momento Angular, a distribuição de massa em torno do espaço e como influencia no movimento de rolamento dos objetos e a conservação do MA. Além dessa discussão, foi identificado a que público essas simulações podem ser aplicadas, ou seja, se sua utilização contempla o público do ensino básico ou do superior. Com essa análise, pretendemos responder se é possível utilizar as simulações como ferramenta pedagógica viável para ensinar momento angular e quais são seus potenciais.

5 RESULTADO E ANÁLISES

Durante as buscas pelas simulações nas plataformas, foram selecionadas aquelas que estavam relacionadas com o conteúdo de momento angular. É possível constatar que não tem muitas simulações voltadas diretamente ao ensino do movimento angular, contudo, algumas dessas, poderiam ser adaptadas ao ensino do momento angular, com isso, foi possível realizar essa adaptação em uma das simulações e considera-las em nossas análises. Logo, que um dos objetivos da simulação, como já mencionado, é interação com as situações ocorridas no dia a dia dos estudantes, e movimentos de rotação são muito comuns na experiência cotidiana, desde o movimento de uma roda de um carro, até o movimento da terra em torno do seu próprio eixo.

Nesse momento, os resultados serão apresentados em duas etapas, as análises das simulações que foram encontradas e que envolvia o estudo do momento angular. Nessa parte, todas simulações encontradas foram submetidas aos critérios adotados e descritos na metodologia. Após isso, os resultados foram expostos em uma tabela. Já na segunda etapa, foi escolhida uma simulação de cada plataforma e analisada mais profundamente.

5.1 RESULTADOS GERAIS

Afim de buscar uma maior organização dos resultados obtidos, foram criadas duas tabelas a primeira, identifica as simulações, onde estão armazenadas e seu endereço virtual. A segunda, relaciona as simulações com critérios de análises adotados. É possível notar que todas as simulações estão armazenadas apenas em três ambientes virtuais: O laboratório virtual da Universidade Federal do Ceará, Ophysics e Vascak. Contudo, foi possível selecionar nove simulações ao total para análise.

Tabela 1 - Identificação das simulações

Simulação	Nome da plataforma	Endereço eletrônico
Movimento de rotação	Laboratório virtual de física da Universidade Federal do Ceará	laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/movimento-de-rotacao
Pêndulo Físico	Laboratório virtual de física da Universidade Federal do Ceará	laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/pendulo-fisico
Pêndulo de torção	Laboratório virtual de física da Universidade Federal do Ceará	laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/pendulo-torcao
Rotation, Sliding, Rolling, and Friction	oPhysics: Interactive Physics Simulations	ophysics.com/r1.html
Rotation: Rolling Motion	oPhysics: Interactive Physics Simulations	https://ophysics.com/r2.html
Moment of Inertia: Rolling and Sliding Down an Incline	oPhysics: Interactive Physics Simulations	https://ophysics.com/r3.html
Rotational Inertia Lab (choice of three scenarios)	oPhysics: Interactive Physics Simulations	https://ophysics.com/r5.html
Angular Momentum:	oPhysics: Interactive Physics Simulations	https://ophysics.com/r9.html

Person on Rotating Platform		
Momento de inércia	Vascak	vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mech_moment&l=pt

Fonte: O autor

Com as simulações escolhidas e identificadas, a análise consistiu de fato aos aspectos de seu uso. Para a análise das simulações foram demarcados com sim, não ou em partes, logo, que em alguns aspectos algumas características são mais evidentes que outro, então é necessário identificar essas características e como elas se fazem presente ao longo da simulação. Com isso, afim de maior organização para apresentação dos resultados. Será listado abaixo os critérios de análise e o que se pretende chegar ao aplica-los.

A tabela a seguir relaciona cada simulação já apresentada com os critérios descritos. Com isso, as simulações foram submetidas aos critérios as respostas serão: Sim, se atende totalmente ao critério submetido. Não, se não atender ao critério submetido. E sim, em partes, caso a simulação atenda parcialmente ao critério abordado. Na tabela, as designações de sim, não e sim, em partes serão relacionados com as cores: Verde, Vermelho e amarelo respectivamente.

Tabela 2 – Relação entre as simulações e os critérios adotados.

	Critério 1	Critério 2	Critério 3	Critério 4	Critério 5
Movimento de rotação	Verde	Amarelo	Verde	Verde	Verde
Pêndulo Físico	Verde	Amarelo	Verde	Vermelho	Verde
Pêndulo de torção	Verde	Amarelo	Verde	Amarelo	Verde

Rotation, Sliding, Rolling, and Friction					
Rotation: Rolling Motion					
Moment of Inertia: Rolling and Sliding Down an Incline					
Rotational Inertia Lab (choice of three scenarios)					
Angular Momentum: Person on Rotating Platform					
Momento de inércia					

Sim;

Sim, em partes;

Não.

Fonte: O autor

Portanto, a análise mostra mais pontos positivos para as simulações, algumas tem alguns pontos para ser analisados antes de utilizá-las, mas no geral cumprem são boas ferramentas práticas para o uso no dia-a-dia. É possível notar que todas as simulações, atenderam o critério de usabilidade, com isso, todas são adequadas para serem acessadas nos computadores e smartphones. Já de intuitividade que é 2º, apenas três não possuem os elementos necessários para atender à exigência desse trabalho, mas possuem elementos suficientes para estarem presentes, logo que possuem o caráter interativo em que o usuário pode controlar a evolução da simulação. O critério 3 que relaciona as simulações com as instruções de uso, é uma análise que vai além das simulações apresentadas na tabela 2, logo que foi possível observar que todas simulações dispostas nas plataformas que atenderam ou não o critério, as demais também seguiriam a configuração, com isso, é possível concluir que é a falta ou disposição de instruções de uso, é uma condição das plataformas na qual estão armazenadas as simulações. No critério 4, apenas duas simulações não o atenderam, contudo, é possível trabalhar com elas, pois em uma dinâmica com o uso

de simulações, talvez, não seja necessário a visualização de todos elementos, mas os específicos para objetivo daquela aula. Assim como no critério 3, foi possível observar que o 5º também está mais associado as plataformas que as simulações propriamente ditas, pois, em todas simulações da plataforma Ophysics não é possível traduzir para outras línguas as simulações que estão contidas nesse ambiente virtual, obviamente que, se o professor e a turma possuírem noções em língua inglesa, as simulações não terão muitas dificuldades para interagir com elas.

Importante destacar que cada uma das simulações foi escolhida para que pudéssemos explorar algum conceito que envolve o momento angular e sua conservação, ou seja, em uma simulação pretendemos analisar o potencial dela para o ensino do vetor momento angular. Em outra, será explorado como é tratada a distribuição de massa no espaço, ou seja, como o momento de inercia influencia no momento angular e no movimento rolamento daquele objeto. E também, a que vai proporcionar estudar o a conservação do momento angular e como grandezas como a massa, raio e distância de uma partícula na plataforma influencia na velocidade angular.

5.2 ANÁLISES ESPECÍFICAS

Nesse tópico, como já explicado foi escolhida uma simulação em cada site diferente para poder analisar mais profundamente tanto a simulação e apresentar ao leitor, as plataformas encontradas. As simulações escolhidas não estão necessariamente na ordem que foi posta nas tabelas anteriores. Mas seguem uma ordem didática, logo que a primeira simulação está relacionada ao ensino do vetor momento angular e sua relação com as grandezas relacionadas. A segunda discute sobre como a distribuição de massa pelo espaço (Momento de inércia), influencia no movimento de rotação e consequentemente, esse resultado deriva da influência do MA. E a terceira e última relaciona a conservação do MA e as grandezas envolvidas.

5.2.1 Simulação 1 – Movimento de rotação

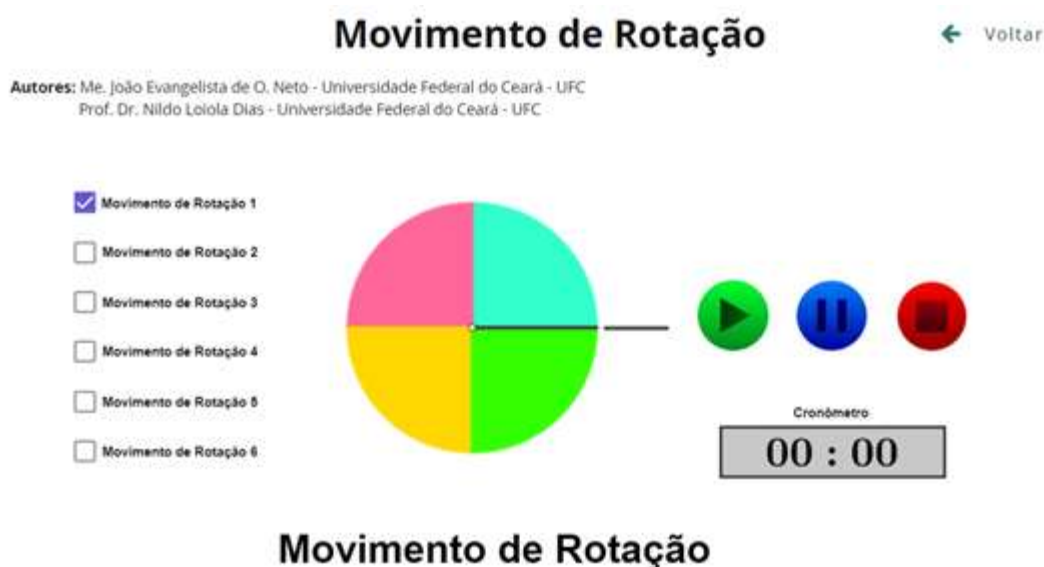
Armazenada no espaço virtual da Universidade Federal do Ceará (UFC), criada pelos Me. João Evangelista de O. Neto e Prof. Dr. Nildo Loiola Dias. A plataforma em que é possível acessá-la é nomeada por “Laboratório virtual da UFC”, e é totalmente gratuita, apresentando duas alternativas de experimentos: os reais filmados e simulações interativas. O ambiente possui tradução em português e inglês.

Os temas abordados na plataforma digital, relacionados ao ensino de física, são: Mecânica, ondulatória, termodinâmica, eletromagnetismo, óptica e física moderna. As simulações se aproximam bastante de um experimento em laboratório, sendo possível observar a marcação de variáveis, como tempo, número de repetições do experimento. E talvez, pensando nisso, a própria UFC disponibiliza roteiros sobre o experimento, para a análise dos dados obtidos.

A plataforma disponibiliza alguns experimentos para o ensino do movimento e momento angular, sendo eles: movimento de rotação, pêndulo físico e pêndulo de torção. Devido ao caráter voltado a tentativa mais realística do experimento, é possível calcular grandezas físicas além de explicar alguns conceitos relevantes.

A simulação escolhida nessa plataforma permite analisar o movimento de rotação de um disco fixo em seu centro. Onde, podemos ter dois tipos de movimento circular: o uniforme e o uniforme variado.

Figura 3 - Vista inicial da simulação movimento de rotação.



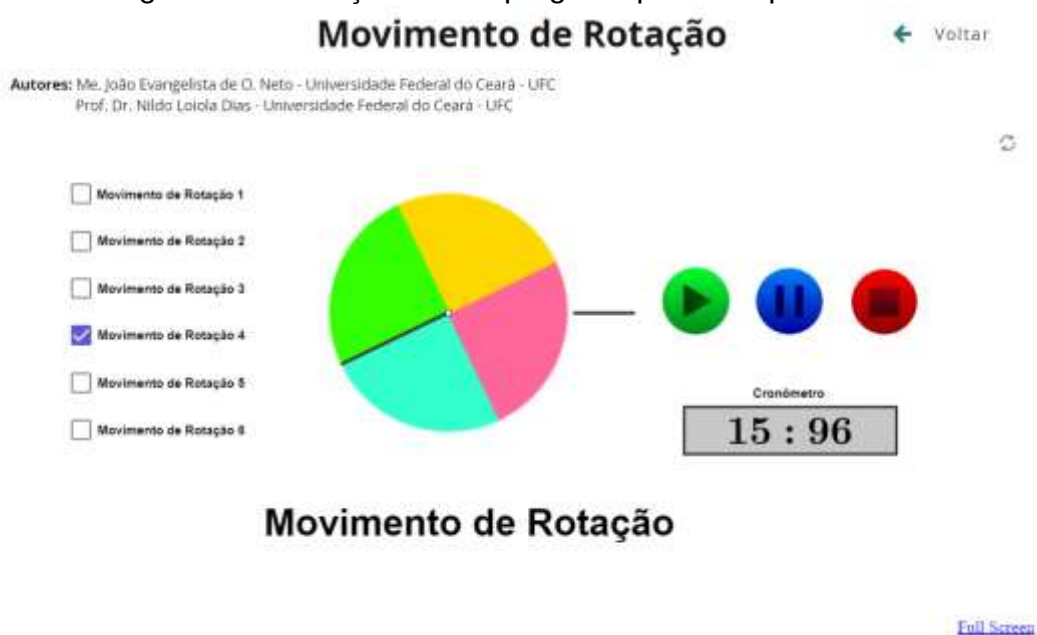
Fonte: [laboratoriovirtual.fisica.ufc.br /movimento-de-rotacao](http://laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/movimento-de-rotacao)

Na figura 3, é possível identificar as pessoas que desenvolveram a simulação, na parte de cima, à esquerda. É possível ver que o disco possui uma marcação de uma linha que é para servir como uma referência para a contagem do número de voltas e também para identificar se a velocidade da simulação, nesse caso, a velocidade angular muda ou permanece constante.

Ao lado direito da figura 3, vemos os movimentos de rotação listados de 1 à 6. Os movimento de 1 à 3 são movimentos circulares uniformes (MCU) , ou seja, sua velocidade angular ω é constante, contudo cada movimento tem o valor do módulo de ω diferentes, ao passo, que é possível constatar pelo tempo gasto para executar as cinco voltas. Os movimentos de 4 a 6, são movimentos circulares uniformemente acelerado. Ou seja, agora ω não é mais constante. Mas a aceleração angular α é constante, com o tempo e quantidade voltas. É possível calculá-la.

No MCUV (movimento circular uniformemente variado), é possível verificar com os dados fornecido pela simulação, na qual são: o número de voltas e tempo gasto cronômetro, como mostra a figura 4. logo abaixo:

Figura 4 - Marcação do tempo gasto para completar 5 voltas

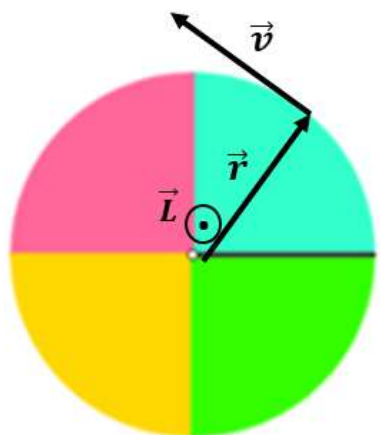


Fonte: <https://www.laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/movimento-de-rotacao>

Nesse sentido, é possível calcular a aceleração angular do disco, com os dados obtidos, por consequência desenvolver uma expressão para o torque resultante. Então, pela dinâmica da simulação, encontraríamos as duas expressões, tanto da aceleração angular e do torque resultante, em valores aproximados aos teóricos, já que, pelo o que já foi descrito sobre a plataforma, a ideia é tentar alcançar um experimento real realizado em um local controlado. Importante destacar, que quem controla o experimento é o próprio usuário, ou seja, é de responsabilidade do aluno ou professor, o acionamento do cronômetro e sua parada. Então, é possível também considerar o erro, devido ao tempo de reação do usuário.

Contudo, essa ferramenta em específico, teria um ganho para o ensino do vetor momento angular, ou seja, a direção de vetor momento angular $\vec{L}$, é perpendicular à direção do plano formado pelos vetores posição e velocidade linear (Moysés, 2002). Para a figura o experimento analisado acima, temos que:

Figura 5 - Vetor momento angular (L) e vetores posição (r) e velocidade linear (v).



Fonte: <https://www.laboratoriovirtual.fisica.ufc.br/movimento-de-rotacao>

Para a demarcação dos vetores, utilizamos na figura 5, os sinais $\odot$ para assumir o sentido saindo do plano do papel, e $\otimes$ para simbolizar o sentido entrando do plano do papel. Obviamente, que essa análise simplifica bastante os cálculos relacionados a essas grandezas, mas como o intuito nesse caso é a abordagem do vetor momento angular, a descrição matemática foi omitida.

A simulação em questão rotaciona apenas no sentido anti-horário, o que nos leva a ter essa configuração de vetores, e é importante lembrar que a direção do vetor momento angular permanecerá sempre no mesmo sentido e direção. Entretanto, o

módulo do mesmo é alterado quando estamos tratando da simulação do MCUV. Portanto, a simulação na qual o objetivo não é especificamente o ensino momento angular, ainda oferece recursos para a análise para o estudo desse conteúdo, como por exemplo analisar o plano que o disco se movimento e traçar os vetores, que compõe momento angular. No movimento acelerado, é possível calcular o torque resultante e sua aceleração.

A simulação poderia ser utilizada para alunos do ensino superior nas aulas iniciais do conteúdo. O professor responsável por essa aula, poderia tentar utilizar a forma intuitiva do experimento e apresentar antes das demonstrações matemáticas, o sentido do momento angular e trabalhar a ideia do plano formado entre os vetores posição e velocidade linear.

5.2.2 Simulação 2 – Momento de Inércia

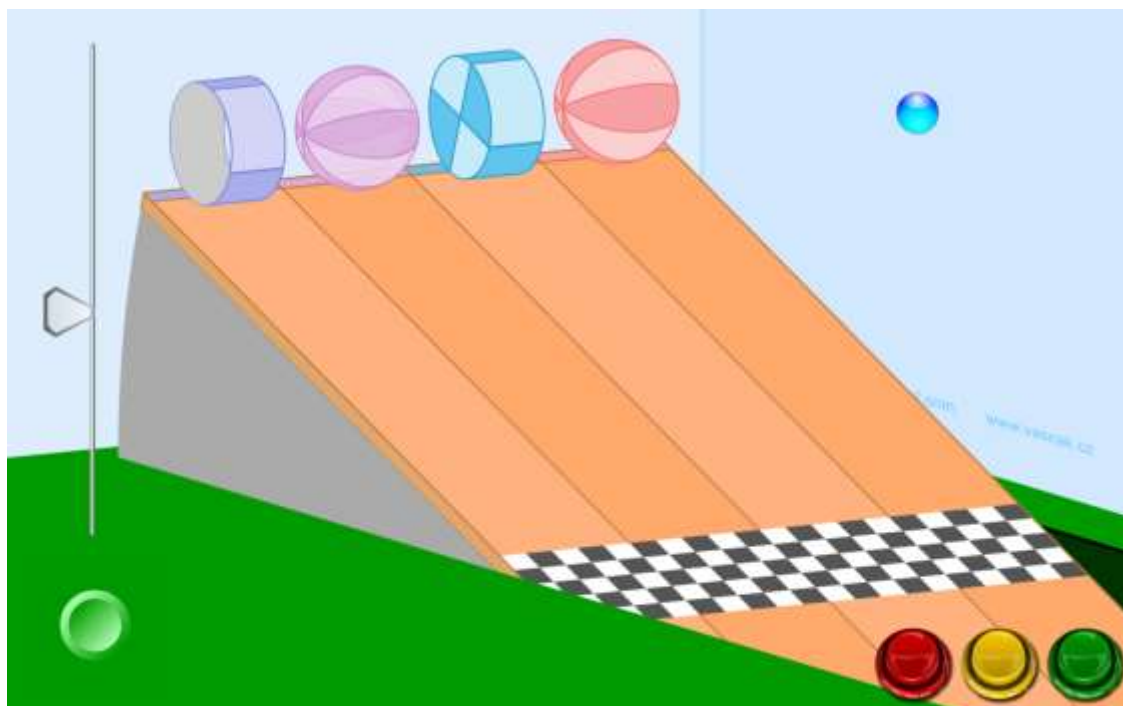
A próxima simulação escolhida é intitulada sobre “momento de inércia” armazenada virtualmente na plataforma Vascak. Desenvolvida pelo professor doutor Vladimir Vascak, é uma plataforma onde apresenta simulações de quase todos conteúdos que teoricamente são abordados no ensino médio e superior. O idioma da plataforma é originalmente em inglês, mas pode ser traduzido para diversas línguas, inclusive o português.

As simulações encontradas na plataforma dão ao usuário a liberdade para controlar parâmetros iniciais do experimento a ser realizado também, é a única que possui as equações matemáticas envolvidas no experimento, onde o usuário pode analisá-las e, a partir disso, já fazer as previsões do experimento. Além de ser a única até então, no contexto das plataformas analisadas, que possui aplicativos para smartphones.

O ambiente possui uma gama de experimentos que englobam desde os assuntos iniciais trabalhados no ensino médio, como: Algarismos significativos, referencial, utilização dos instrumentos de medidas e etc. até conteúdos de física moderna como: efeito fotoelétrico, física nuclear, modelos atômicos e dentre outros.

A plataforma possui algumas simulações para o ensino momento/movimento angular. Sendo algum deles: momento de inércia, máquina de atwood, movimento circular uniforme. A simulação escolhida para trabalho proporciona ao usuário uma vista inicial de quatro objetos redondos sendo eles um anel, uma esfera oca, um cilindro maciço e uma esfera maciça. Como mostrado na figura 6, logo abaixo.

Figura 6 - Vista inicial da simulação momento de inércia.

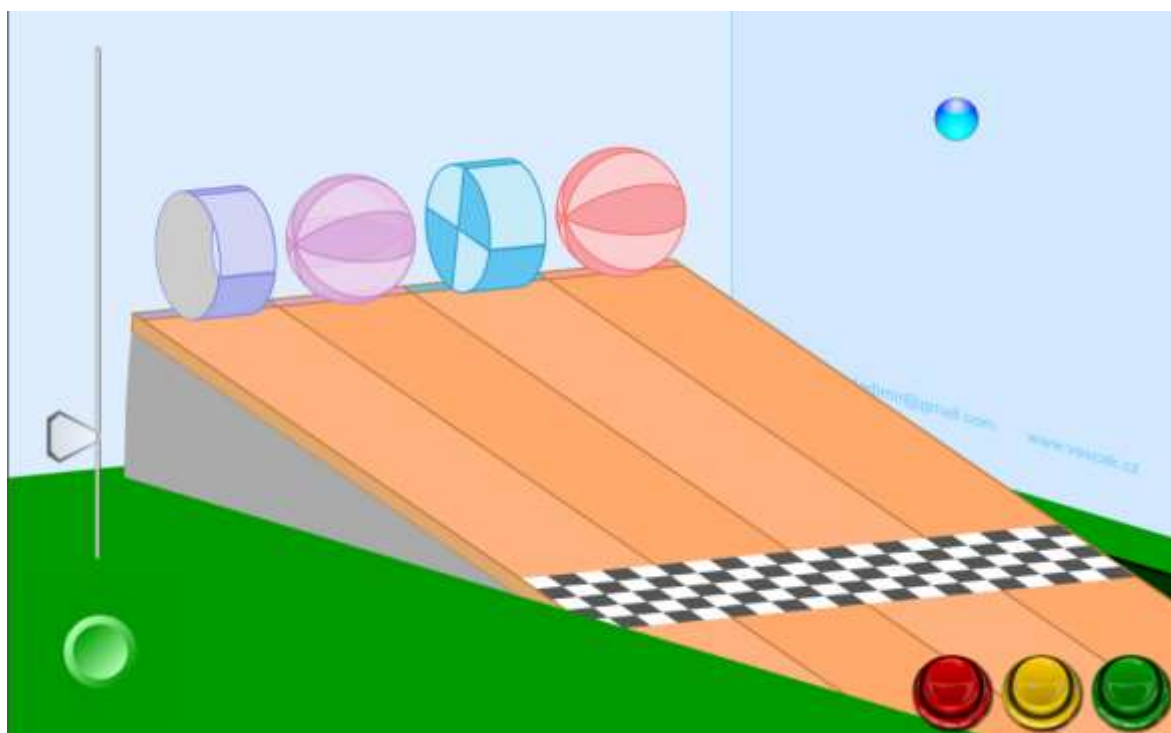


Fonte: https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?f=mech_moment&l=pt

Os quatro objetos mostrados na figura 6 possuem mesma massa, mas que estar distribuída pelo espaço de maneira diferente. Logo, nessa simulação se evidencia como a geometria do objeto influencia no movimento de rolamento dos mesmos.

É possível observar na figura 6, alguns controles de comandos para alterar os parâmetros da simulação. O primeiro a se destacar é o que está ao lado esquerdo na vertical, com o qual, é possível alterar a inclinação da pista, como mostra a figura 7, logo abaixo:

Figura 7- O uso do controle da inclinação da pista

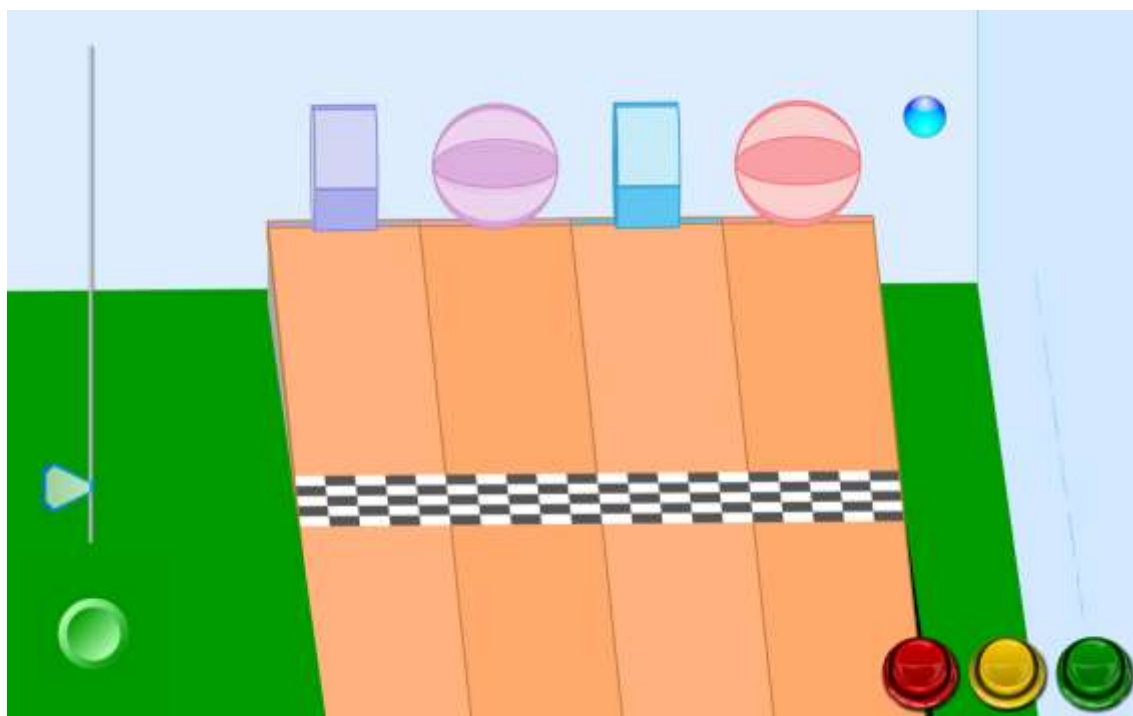


Fonte: https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?f=mech_moment&l=pt

Com esse controle, é possível analisar melhor o movimento de rolamento dos objetos. Pois, a depender da inclinação, os objetos levarão tempos diferentes para atingir a linha de chegada. Além disso, é possível analisar como varia o intervalo de tempo de chegada dos objetos em função da inclinação do plano. Ou seja, essa ideia dialoga com o que foi visto no referencial, onde é possível reproduzir várias vezes o mesmo experimento e analisar com parâmetros diferentes.

Ainda na figura 7, é possível perceber, logo abaixo do controle de inclinação, o controle verde, no canto inferior esquerdo, que serve para mudar a perspectiva do plano em relação ao plano da tela do dispositivo utilizado para acessar a simulação, como vemos na figura 8.

Figura 8 - Uso do controle de perspectiva do plano e os objetos

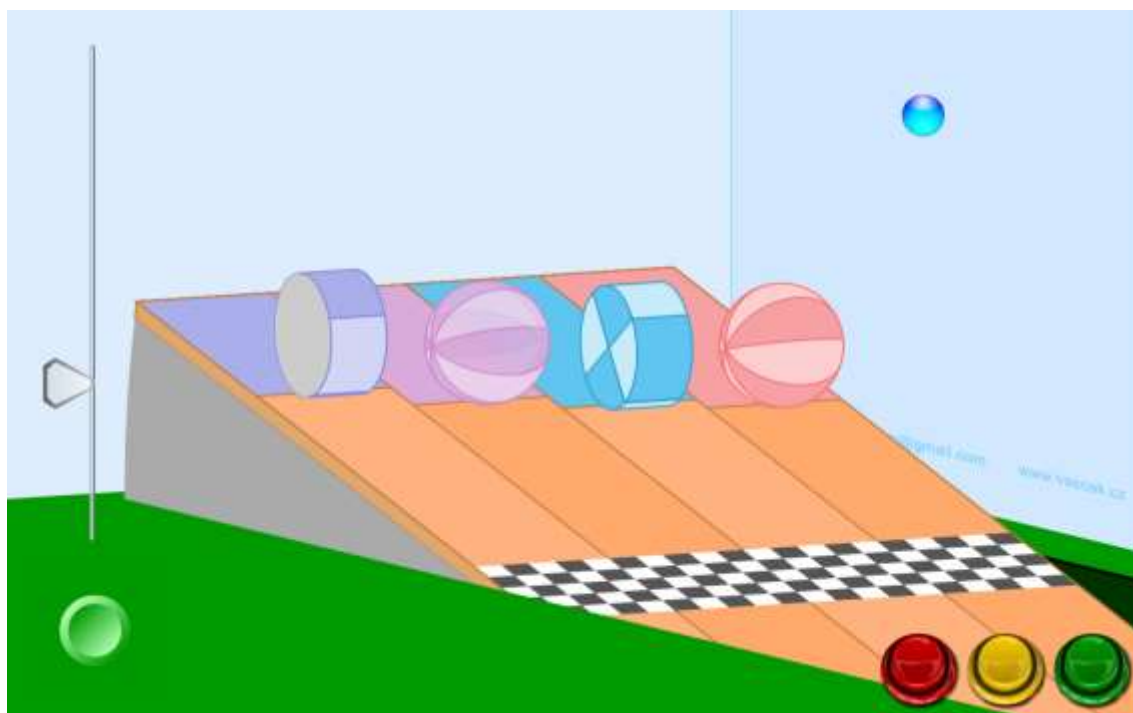


Fonte: https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?f=mech_moment&l=pt

Com isso, observa-se que a simulação permite uma interatividade significativa para os indivíduos que a utiliza, proporcionando assim, uma possibilidade de analisar o experimento ocorrendo de várias vezes e com perspectivas diferentes.

Os três controles, ao lado inferior direito na figura 9, estão relacionados com o desenvolvimento do movimento de rolamento dos objetos. Ou seja, são eles que iniciam, pausam e recomeçam a simulação. Onde, é possível, a qualquer instante, pausar a simulação e analisar a distância percorrida pelos objetos.

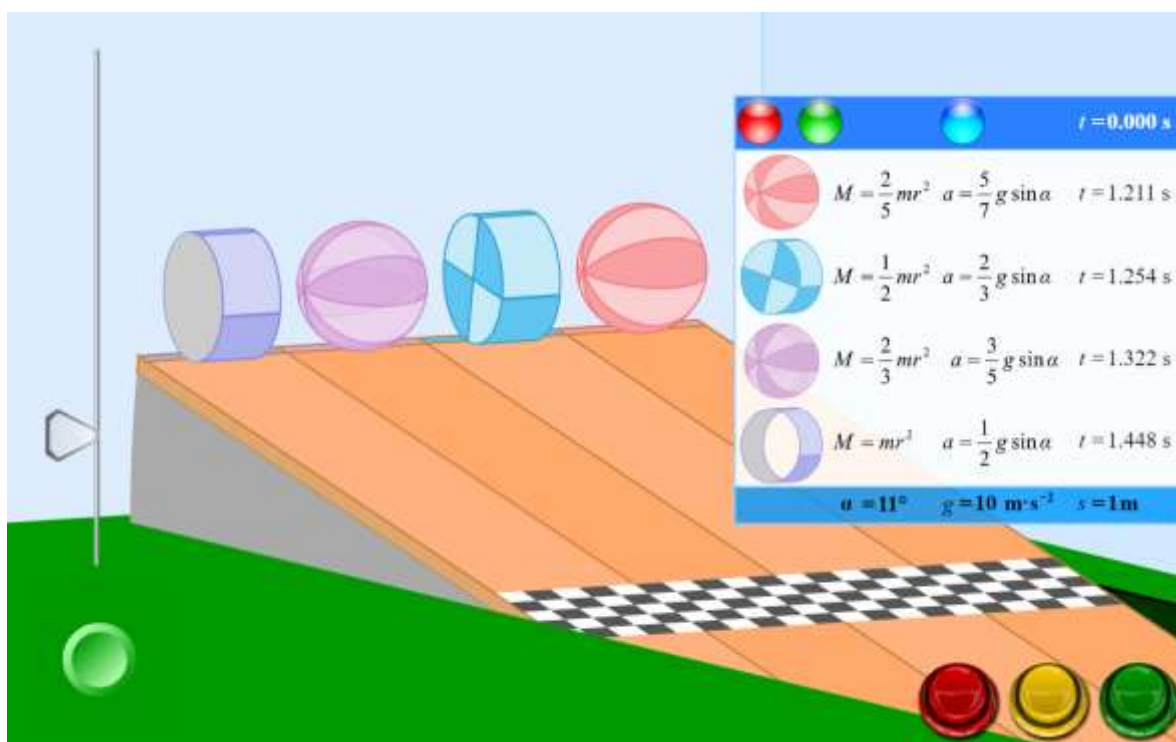
Figura 9 - Uso dos controles do movimento dos objetos



Fonte: https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?f=mech_moment&l=pt

Até então, essa análise poderia ser direcionada aos estudantes do ensino médio ou do superior. Porém, com o ícone azul no canto superior direito na figura 10, é possível obter as equações relacionadas aos momentos de inércia de cada objetos e aceleração que eles irão adquirir ao experienciar a força gravitacional. Então, é possível que professores e estudantes que estejam em um curso superior, cuja grade curricular contemple o conteúdo de momento angular, realizem os cálculos e cheguem até as equações mostradas, podendo analisar como a distribuição de massa no espaço influencia o movimento de rolamento.

Figura 10 - Vista da configuração inicial da simulação com as equações envolvidas no movimento de rolamento



Fonte: https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?f=mech_moment&l=pt

A simulação possui diversas ferramentas para analisar os movimentos dos objetos e atestar como funciona o momento de inércia. Ainda assim, é possível detectar alguns pontos a serem melhorados como: os controles apenas estão presentes, mas sem nenhuma indicação sobre o que eles realizam, talvez ideia do idealizador era relacionar as cores dos botões de controle com algumas cores do nosso dia a dia, relacionadas ao tráfego no trânsito, assim o verde inicia e o vermelho retorna ao início. Contudo, isso não fica muito claro para uma pessoa que está utilizando pela primeira vez. Outro ponto é que a simulação não dispõe de um manual com uma sequência lógica de como analisar o experimento, ou seja, é preciso que as pessoas saibam que os objetos possuem mesma massa e raio, ao observar as equações. Então, o professor, ao utilizar essa ferramenta, deve deixar claro aos seus estudantes essas características associadas.

5.2.3 Simulação 3 – Angular Momentum: Person on rotating platform

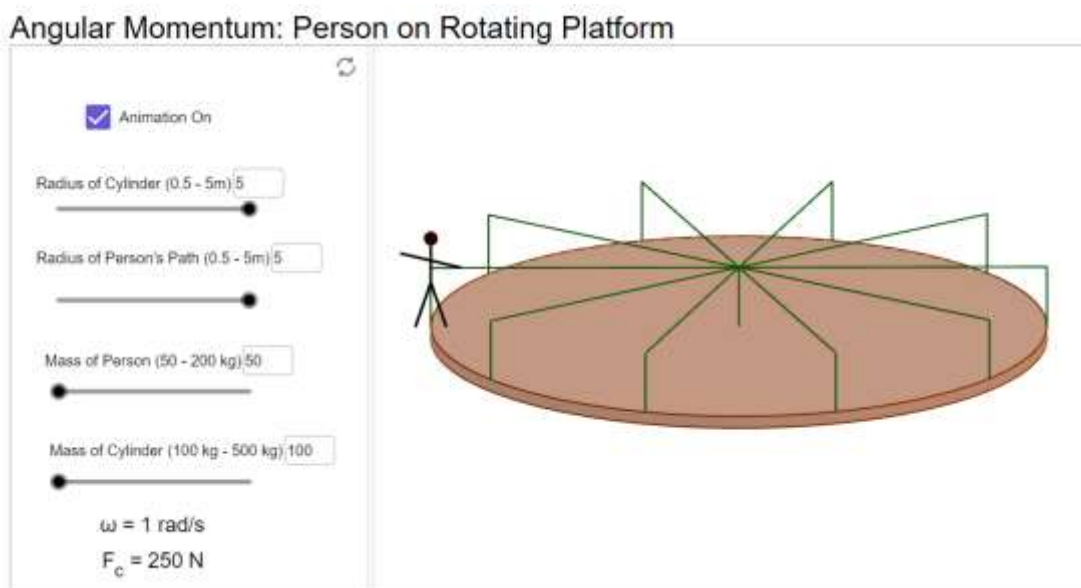
A simulação seguinte é intitulada em tradução livre “Momento Angular: pessoa em uma plataforma rotatória”, que está armazenada virtualmente em OPhysics. Plataforma desenvolvida pelo professor Tom Walsh, onde as ideias para as simulações foram obtidas através das experiências em sala de aula, já que ele possui 27 anos de experiência como professor.

As simulações na plataforma possuem um design mais simples, não tão elaborados como as analisadas anteriormente. Porém, os conceitos são rigorosamente respeitados e mostrados, tendo a possibilidade de realizar medidas quantitativas como também qualitativas. É possível alterar, assim como os outros os parâmetros das simulações, no qual é possível a interação com o experimento. A plataforma se destaca pela sua usabilidade, onde os parâmetros da simulação estão claros e escritos, facilitando ao usuário os alterar para analisar o experimento proposto.

Como o nome sugere, a plataforma é voltada apenas as simulações de física, beneficiando apenas essa área. Nela, é encontrada experimentos virtuais que englobam grandes área da física, como: cinemática, forças, conservação da energia, eletromagnetismo e dentre outras.

Sobre o ensino momento/movimento angular, são encontrados diversos experimentos, sendo a única possui, de fato, simulações voltadas ao ensino do momento angular e sua conservação, além da exploração das grandezas que influencia nas variações do momento angular, como torque, momento de inercia. De fato, para o ensino momento/movimento angular é a simulação mais completa, com relação àquelas que foram analisadas aqui. A simulação escolhida nessa plataforma tem a vista inicial uma plataforma em formato cilíndrico e uma sobre ela, e conjunto executando um movimento circular uniforme. Como mostrado na figura 11:

Figura 11 - Vista inicial da simulação Angular Momentum: Person on Rotating Platform



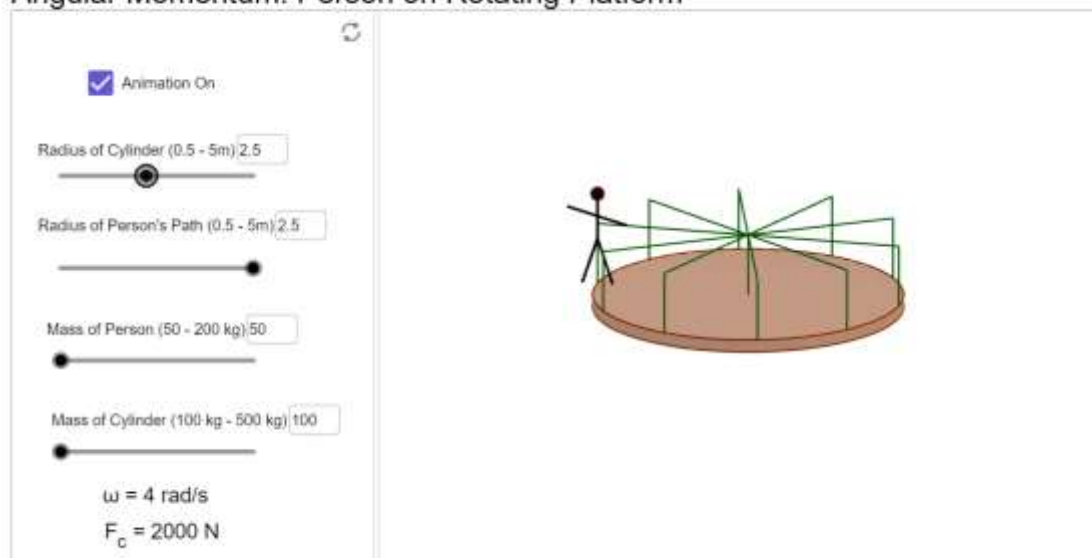
Fonte: <https://ophysics.com/r9.html>

Além da plataforma e a pessoa, é possível observar os controles de comando da simulação disposto ao lado esquerdo da tela na figura 11. Além dos controles, podemos observar inicialmente a velocidade angular inicial (ω), e a resultante centrípeta (F_c), experienciada pela pessoa.

O primeiro controle, de cima para baixo figura 9, denominado “Animation on”, tem a função de pausar temporariamente a simulação, ou seja, com o uso dele, é possível com auxílio de um cronômetro, a parte da simulação, contabilizar o tempo gasto para completar as voltas a serem analisadas. Os controles abaixo denominados “Radius of Cylinder” e “Radius of Person’s Path”, controlam respectivamente, o raio da plataforma e a distância que a pessoa se encontra do centro. Como mostrado nas figuras 12 e 13, logo abaixo:

Figura 12 - Uso do controle "Radius of Cylinder"

Angular Momentum: Person on Rotating Platform

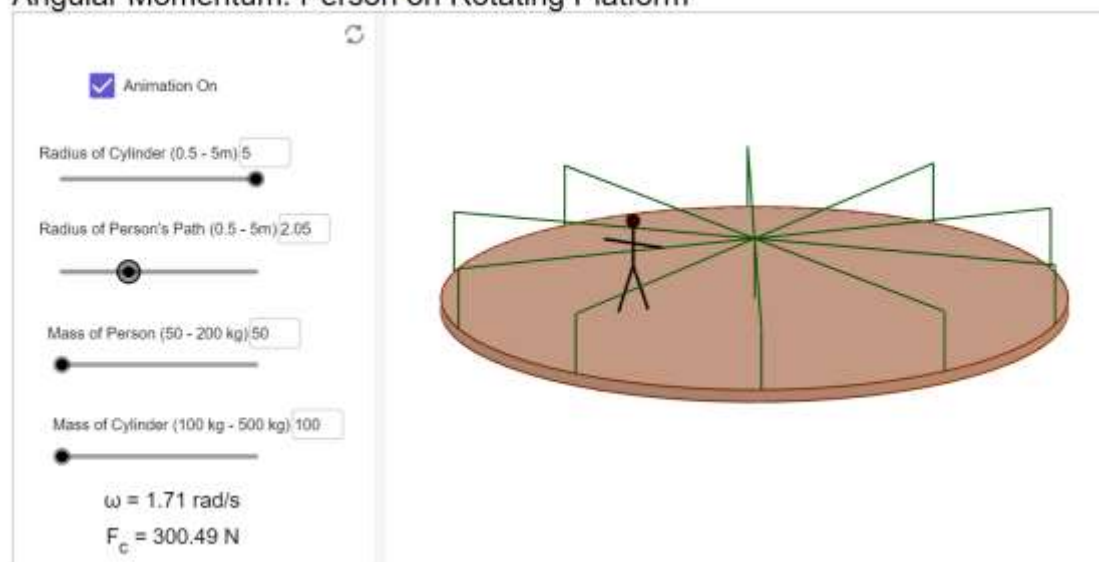


Fonte: <https://ophysics.com/r9.html>

É possível notar que a representação da pessoa na figura 12 continua, sempre no mesmo lugar em relação à plataforma, mas o raio do cilindro é alterado.

Figura 13 - O uso do controle "Radius of Person's Path"

Angular Momentum: Person on Rotating Platform

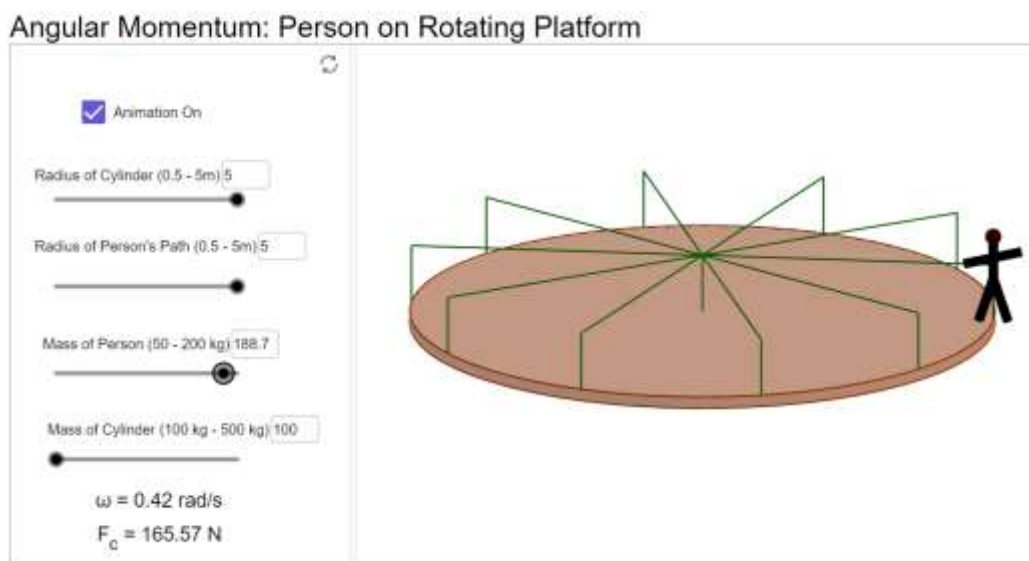


Fonte: <https://ophysics.com/r9.html>

Então, com esse controle podemos mudar a distância que a representação da pessoa se encontra em relação ao centro da plataforma assim como visto na figura 13. É possível notar que as alterações nessas variáveis já alteram os resultados das grandezas velocidade angular e resultante centrípeta assim como visto nas figuras

anteriores. Ou seja, com esses controles é possível ensinar a relação dessas variáveis no ensino de MA. Além desses controles, temos abaixo na tela, os controles “Mass of Person” e “Mass of Cylinder”, esses controlam respectivamente, a massa da pessoa e da plataforma. Nas figuras 14 e 15, é mostrado como as alterações nos valores desses controles mudam a configuração da simulação.

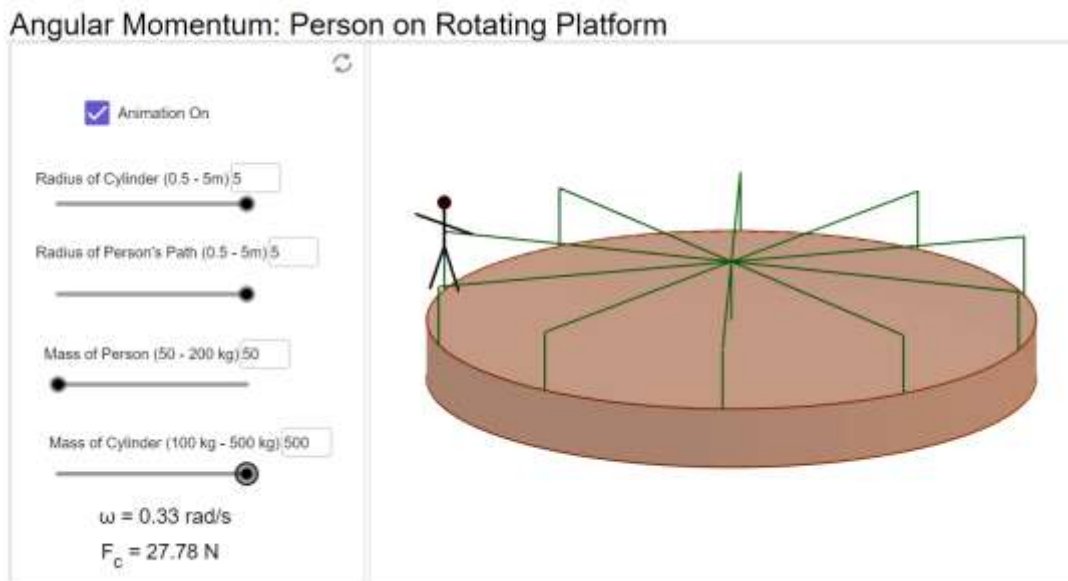
Figura 14 - O uso do controle "Mass of Person"



Fonte: <https://ophysics.com/r9.html>

Novamente, a alteração no valor da massa da representação da pessoa na plataforma, tem por consequência a alteração no valores de ω e F_c como visto na figura 14. Logo, é possível prever que a alteração na massa da plataforma terá essa consequência também.

Figura 15 - O uso do controle "Mass of Cylinder"



Fonte: <https://ophysics.com/r9.html>

Ou seja, as alterações na massa e na geometria da plataforma afeta a velocidade angular com que o sistema “pessoa-plataforma” se move. Com isso, é possível mostrar como esse modelo exemplifica a conservação angular, e como a geometria e as quantidades de matéria estão relacionadas. Obviamente, que uma simulação usada no nível superior, seria possível utilizar o formalismo matemático para prever esses resultados, o que seria um ganho significativo em uma atividade sobre o tema em específico. O desenvolvimento, do modelo teórico utilizando o formalismo matemático que explica essa variação do valor de ω , pode ser visto, no apêndice A, desse trabalho. No apêndice também são encontradas as deduções das expressões de todos os valores trabalhados em nas simulações analisadas.

Vale salientar que de todas as plataformas, a Ophysic é a que possui design mais simples, entretanto, nos critérios analisados, ela foi suficiente para ser analisada. Em alguns parâmetros ela precisa ainda se adequar, como por exemplo: ter opção para traduções para outros idiomas, contudo, entre os endereços analisados foi a que possui mais simulações para tratar do ensino do momento angular, logo, um profissional que tenha que trabalhar o tema e prefira trabalhar com simulações, seria recomendável verificar a plataforma, a procura de alguma simulação que se adeque a melhor em plano de aula.

Logo, as três simulações analisadas especificamente, é possível trabalhar em uma sequência didática sobre o conteúdo do momento angular. Além disso, é possível adaptar as simulações apresentadas na tabela 2, para se adequar ao planejamento das aulas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino momento angular com todas as formalidades matemáticas, é visto apenas nos cursos superiores, qual a grade curricular possui cadeiras para o ensino de física. No ensino médio, por mais que se trabalhe movimentos angulares, e torque, não é tratado do conteúdo do momento angular, nem se que muitas vezes é citado que essa grandeza existe. É relevante entender que a matemática envolvida pode ser desafiadora, contudo, uma abordagem conceitual utilizando de elementos para facilitar a aprendizagem poderia ser pensada para inserir o conteúdo de MA, nessa fase de ensino. Como já mencionado, poucos são ainda trabalhos que relacione o ensino de momento angular, com ferramentas menos tradicionais, como no caso das simulações. Nesse sentido, o trabalho buscou analisar um número maior de simuladores, com finalidade de ter mais repertório no ensino de MA, além de mostrar que é possível uma organização dos simuladores afim de desenvolver uma sequência didática. Nesse trabalho em específico, o autor, nas suas análises específicas, trouxe essa ideia de como as simulações se organizaram para trabalhar o conteúdo de MA, através do uso de simulações. Com isso, é possível organizar as outras simulações para trazer mais recursos nesse ensino, ou o professor que ministrar essas aulas, definir sua própria sequência didática.

No ensino superior, além de entender a parte conceitual, se faz necessário para os estudantes entender a matemática envolvida, entretanto, observar e analisar um modelo de um experimento virtual ou real, pode levar a diminuir as dificuldades causada nesse processo, ou seja, as simulações podem vir a complementar essa lacuna de interpretação dos conceitos e se obter êxito nas formulações matemáticas. Desse modo, parece ser uma boa alternativa usar simulações nesse momento do ensino, por tudo que já foi explicado e também pelo fato, de ser uma ferramenta tecnológica englobada no contexto das pessoas na atualidade. Nesse contexto de simulações, é possível concluir que há simulações com recursos para tratar do ensino de MA, e adiciona-las nos planejamentos das aulas, criando um ambiente atual e tecnológico e mais estimulante para os estudantes que estão presentes em sala.

Levando em conta todas as análises realizadas nas simulações, foi constatado que as simulações trazem consigo, vários elementos para abordar os diversos conceitos

do ensino do Momento Angular. Desde várias representações dos objetos, dos movimentos em torno deles, movimentos sobre várias superfícies, sendo elas horizontais ou inclinadas. É possível também identificar como as grandezas torque e momento de inércia influenciam esses movimentos e consequentemente o momento angular e sua variação. Desse modo, as simulações, no seu estado atual de evolução e desenvolvimento, propiciam ao professor, as utilizar em seu planejamento de aulas para tratar do momento angular, onde assim, pode vir a diminuir as abstrações intrínsecas ao conteúdo.

Nas análises apresentadas, foi possível constatar que a interatividade está presente em todas as simulações, ou seja, é possível alterar os valores das variáveis, contabilizar grandezas como o tempo, para determinar os valores de outras variáveis, além de ser uma ferramenta digital com potencial enorme para o ensino, além de atual que dialoga com a geração dos nativos digitais. Concomitantemente, à essas conclusões, é possível trabalhar de maneira conceitual com as simulações, explicando o que são os conceitos e exemplifica-los, quanto pode tratar com um formalismo matemático mais rigoroso, logo que em muitas simulações, é possível direcionar os estudantes para produzir um modelo matemático com base nos conceitos discutidos. Com isso, as simulações no seu estado atual de evolução e desenvolvimento, propiciam ao professor, as utilizar em seu planejamento de aulas para tratar do momento angular, onde assim, pode vir a diminuir as abstrações intrínsecas ao conteúdo.

Através de todas as conclusões que a pesquisa forneceu, seria possível, explorar outras simulações armazenadas nas demais plataformas que possa encontrar, fazendo análises mais aprofundadas em um único conceito, por exemplo: aprofundar em como as simulações tratam da influência do momento de inércia dos corpos rígidos no movimento circular que eles descrevem levando em conta os aspectos didáticos e pedagógico, assim como é possível ensinar a alunos do ensino médio a conservação do momento angular utilizando simulações digitais, logo que o conteúdo é praticamente escasso nas literatura do ensino médio, aliado com as aulas do professor, pode ser uma alternativa com grande potencial. Além dessas possibilidades, vários outros conteúdos como termodinâmica, eletricidade e física moderna, podem ser trabalhos com o auxílio das simulações digitais. Assim, visando as salas de aulas, o desenvolvimento de sequências didáticas que utilize

principalmente as simulações digitais como ferramenta pedagógica, de modo a trazer mais elementos visuais e estimular os estudantes a estudarem e sentirem familiarizado com os conceitos envolvidos.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, Evando Santos et al. O uso de simuladores virtuais educacionais e as possibilidades do PhET para a aprendizagem de Física no Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1-25, 2021.
- BARBOSA, Alexandre *et al.* TIC Educação: Coletiva de imprensa. **ESCOLAS QUE POSSUEM COMPUTADOR PARA USO DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM (2022)**, [s. l.], 25 set. 2023. Disponível em: <https://cetic.br/pt/tics/educacao/2022/escolas/>. Acesso em: 8 dez. 2023
- DIAS, Altamir Souto; SILVA, Ana Paula Bispo da. A argumentação em aulas de ciências como uma alternativa ao uso das novas tecnologias da informação e comunicação em cenários comuns à escola pública brasileira. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 91, n. 229, p. 622-633, set/dez 2010.
- DUARTE, Sergio Eduardo. FÍSICA PARA O ENSINO MÉDIO USANDO SIMULAÇÕES E EXPERIMENTOS DE BAIXO CUSTO: UM EXEMPLO ABORDANDO DINÂMICA DA ROTAÇÃO. **Cad. Bras. Ens. Fís.**, [s. l.], 2012.
- GONÇALVES, Kelly Meinerz. **Tecnologias digitais de Informação e comunicação (TDIC) no ensino de ciências: análise de repositórios disponíveis**. 2019. Dissertação (Mestrado em educação de ciências) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, [S. l.], 2019.
- EDIÇÕES SM (Brasil) (ed.). **Física 1: Ser protagonista**. 3ª. ed. [S. l.]: Editora SM Ltda, 2016.
- ESTADUAL (São Paulo). Universidade de São paulo (ed.). **PROFIS: Espaço de Apoio, Pesquisa e Cooperação de Professores de Física**. [S. l.], 2023. Disponível em: <https://fep.if.usp.br/~profis/index.html#page-top>. Acesso em: 12 out. 2023
- HELOU, Ricardo; GUALTER, José Biscuola; NEWTON, Villas Bôas. **Tópicos de física 1**. 21ª. ed. [S. l.]: Saraiva S.A, 2012.
- JUNIOR, Artur Pires de Camargos. Formação docente e uso de TDICS na educação básica. **Brazilian Journal of Development**, [s. l.], 17 jul. 2019
- JÚNIOR, Ismael Lemes Vieira; MELO, José Carlos de. Utilizando as tecnologias na educação: possibilidades e necessidades nos dias atuais. **Brazilian Journal of Development**, [s. l.], 4 abr. 2021.
- LISKA, G. J. R. **Cultura digital, linguagem e TDIC na BNCC e na BNC- formação no contexto da pandemia**, Revista Linguagem, São Carlos, v. 40, n. 1 (temático), p. 288-304, 2021.
- MOREIRA, Marco Antonio. Uma análise crítica do ensino da física. **Ensino de Ciências Estud. Av.**, v. 32, n. 94, sep./dec. 2018.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica**. 4ª. ed. [S. l.: s. n.], 2002. v. 1

RAMALHO, Francisco; NICOLAU, Gilberto Ferraro; TOLEDO, Paulo Antônio. **Física 1: Os fundamentos da física**. 10^a. ed. [S. l.]: Moderna, 2009.

Silva, A.G; Souza, G.F; Lopes, J.S.B. Ensino de física com uso de Simuladores virtuais: Potencial de Utilização em sala de aula. **HOLOS**, [s. l.], 2023.

SOBRINHO, Anderson Vicente de Jesus; OLIVEIRA, Daniel de. O uso de laboratórios virtuais pode minimizar as abstrações no Ensino de física?. **RECIMA** 4(5), e453139, 2023.

SOUZA, Jaqueline Corrêa Godinho. INTEGRAÇÃO DAS TDICs NA EDUCAÇÃO: ESPAÇOS DIGITAIS. **EDUCAÇÃO E SOCIEDADE MODERNA: NARRATIVAS CIENTÍFICAS**, [s. l.], 2021.

TEZANI, Thaís Cristina Rodrigues. Nativos digitais: considerações sobre os alunos contemporâneos e a possibilidade de se (re)pensar a prática pedagógica. **Doxa: Rev. Bras. Psicol. Educ.**, Araraquara, v.19, n.2, p. 295-307, jul./dez. 2017.

TIPLER, Paul A. **Física para Cientista e Engenheiros**. 6^a. ed. [S. l.: s. n.], 2009. v. 1

APÊNDICE A – CÁLCULOS ENVOLVENDO AS SIMULAÇÕES

Para chegar as equações mostradas nas simulações, vamos partir da 2ª Lei de newton. Logo:

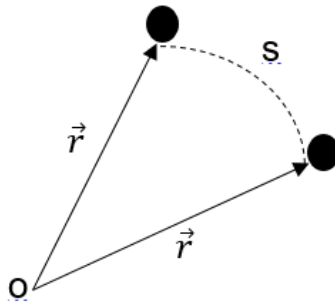
$$(1) \quad \vec{F}_r = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Onde $\vec{P}$ é uma grandeza vetorial denominada momento linear da partícula, que está relacionada com a quantidade de movimento que uma partícula possui, caracterização desse vetor é dada por:

$$(2) \quad \vec{P} = m\vec{v}$$

Onde, m é massa da partícula e $\vec{v}$ é o velocidade linear da partícula. Pela expressão (2), os vetores $\vec{P}$ e $\vec{v}$, possuem sempre mesma direção e sentido.

Considerando uma partícula descrevendo um movimento circular acelerado, a uma distância descrita pelo vetor $\vec{r}$ que liga o centro do disco a partícula com $|\vec{r}| = cte$. Como mostrado na figura abaixo.



Onde, O é ponto fixo no centro da circunferência, onde denominaremos de *eixo de rotação*. S é o arco descrito pela partícula. Multiplicando vetorialmente ambos lados de (1), por $\vec{r}$, obtemos:

$$(3) \quad \vec{F}_r \times \vec{r} = \frac{d\vec{P}}{dt} \times \vec{r}$$

Por definição, o lado esquerdo da equação (5), é o torque resultante na partícula ($\vec{\tau}_r$). E utilizando a seguinte propriedades da derivação:

$$(4) \quad \left(\frac{dk \cdot f}{dx} \right) = k \left(\frac{df}{dx} \right)$$

Podemos escrever a (3) agora, como:

$$(5) \quad \vec{\tau}_r = \frac{d(\vec{P} \times \vec{r})}{dt}$$

O produto vetorial $(\vec{P} \times \vec{r})$, é a definição de momento angular de uma partícula simbolizado por $\vec{L}$, logo:

$$(6) \quad \vec{L} \equiv \vec{P} \times \vec{r}$$

Então, agora é possível definir uma equação denominada de 2º Lei de Newton para rotações, dada por:

$$(7) \quad \vec{\tau}_r = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ou seja, o torque resultante, é igual a variação do momento angular da partícula. Então, para que uma partícula rotacione, é necessária ação de um torque não nulo atuando sobre ela. Desse modo, temos que:

$$(8) \quad \vec{\tau}_r = \frac{d(m\vec{v} \times \vec{r})}{dt}$$

Aplicando a regra do produto das derivadas, retirando a constante da derivada, temos:

$$(9) \quad \vec{\tau}_r = m \left[\vec{v} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right]$$

É possível notar, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, com isso, o produto vetorial $(\vec{v} \times \vec{v}) = 0$, logo a (9), fica:

$$(10) \quad \vec{\tau}_r = m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

A $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$. Sabendo que o comprimento do arco descrito em um movimento circular é dado por:

$$(11) \quad ds = r d\theta$$

Onde, ds , é comprimento infinitesimal do arco, r é o raio da circunferência descrita e $d\theta$, é infinitésimo do ângulo em relação ao centro da circunferência. Derivando a (11) duas vezes em relação ao tempo obtemos:

$$(12) \quad \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = v = r\omega$$

$$(13) \quad \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = a = r\alpha$$

Onde para a partículas, v , velocidade linear e ω , velocidade angular. E a , Aceleração linear, assim como α , aceleração angular. Logo, substituindo a (13) em (10), sendo a (10), agora em módulo ou seja, $|\vec{\tau}_r| = \tau_r$, obtemos:

$$(14) \quad \tau_r = mr(r\alpha) = mr^2\alpha$$

Até então, toda análise foi feita considerando uma partícula, contudo, um corpo rígido possui dimensões a ser levado em conta, então, para calcular o torque resultante exercido no objeto é necessário levar em considerações todas as partículas que a compões, logo:

$$(15) \quad \tau_r = \sum_{i=1}^N (mr^2) \alpha$$

A (15), evidencia que é necessário somar o produto da massa com o quadrado da distância de todas as partículas que compõe o corpo. Colocando em forma diferencial, obtemos:

$$(16) \quad I \equiv \sum_{i=1}^N (mr^2) = \int r^2 dm$$

Com isso, essa grandeza é denominada de momento de inércia, e estar relacionada a distribuição de massa no espaço. Outra consequência, para trabalhar com corpos extensos, a expressão ideal para escrever o Momento Angular será:

$$(17) \quad L = I\omega$$

Logo, a expressão para o torque, será:

$$(18) \quad \tau_r = I\alpha$$

Com nosso referencial teórico desenvolvido, vamos aplica-los nas simulações.

Primeira simulação

As grandezas que pode conseguir realizando o experimento, na 1ª simulação são o tempo (t) e número de voltas (n) executadas pelo disco. Para determinar a aceleração angular, recorreremos a função do ângulo descrito, em um Movimento circular acelerado:

$$(19) \quad \Delta\theta = \frac{\alpha t^2}{2}$$

Para determinar o ângulo percorrido, podemos pensar que:

$$(20) \quad \frac{1 \text{ volta}}{n \text{ voltas}} = \frac{2\pi}{\Delta\theta} = \Delta\theta = 2\pi n$$

Substituindo (20) em (19), temos:

$$(21) \quad 2\pi n = \frac{\alpha t^2}{2} = \alpha = \frac{4\pi n}{t^2}$$

Então, aceleração angular no disco pode ser dada de acordo com a eq. (21). Substituindo (21) em (18), obtemos:

$$(22) \quad \tau_r = I \left(\frac{4\pi n}{t^2} \right) = 4\pi n \left(\frac{I}{t^2} \right)$$

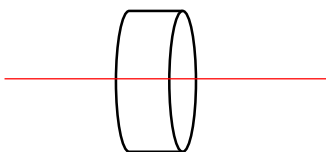
Onde, o torque resultante está inicialmente em função do Momento de Inércia do disco, que mais à frente será demonstrada.

Segunda simulação

Na 2ª simulação, são mostradas as equações dos momentos de inércia dos objetos, e as acelerações linear. Vamos inicialmente, demonstrar os momentos de inércia e com o auxílio delas, chegar as acelerações.

Importante, vamos considerar todos objetos com distribuição de massa homogênea e uniforme. Então:

Anel uniforme



$$(23) \quad \sigma = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA} = dm = \sigma dA$$

Sendo σ , a distribuição de massa no objeto em relação a sua área de $A = 2\pi Rh$. Para determinar dA , teremos que:

$$(24) \quad dA = Rh d\theta$$

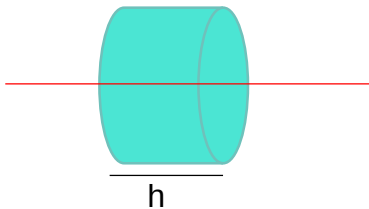
Substituindo (24) em (23) e logo após em (16) temos:

$$I = \int r^2 (\sigma Rh d\theta) = I = \sigma R^3 h \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma R^3 h (2\pi)$$

$$(25) \quad I = \frac{2\pi h M}{2\pi h} \frac{R^3}{R} = I = MR^2$$

Então, a (25) calcula o momento de inércia de um anel. Passando para o próximo objeto, temos:

Cilindro maciço



$$(26) \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} = dm = \rho dV$$

Sendo ρ , a distribuição de massa em relação ao volume do cilindro de $V = \pi R^2 h$. Para determinar dV , podemos imaginar um volume infinitesimal, como uma casca com o formato do cilindro, mas agora com uma espessura muito pequena dr . Logo:

$$(27) \quad dV = 2\pi h r dr$$

Substituindo (27) em (26) e depois em (16), obtemos:

$$I = \int r^2 (\rho 2\pi h r dr) = 2\pi h \rho \int_0^R r^3$$

$$I = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \frac{2\pi h M R^4}{4V} = \frac{2\pi h M R^4}{4\pi R^2 h}$$

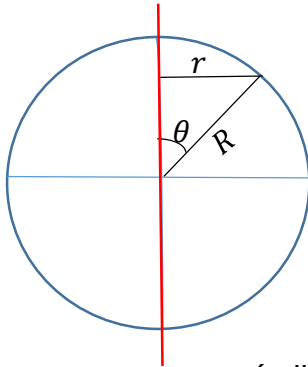
$$(28) \quad I = \frac{MR^2}{2}$$

Então a (28), calcula o momento de inércia de um cilindro maciço. Além do cilindro, pelo o fato, de o momento de inércia não depender do tamanho, a (28) também calcula o momento de inércia de um disco uniforme. Desse modo, aplicando (28) em (22), obtemos:

$$(29) \quad \tau_r = 4\pi n \left(\frac{MR^2}{t^2} \right) = 2\pi n \left(\frac{MR^2}{t^2} \right)$$

Então, a (29), é a expressão para o torque resultante no disco da 1ª simulação. Obviamente, se o movimento possui $\alpha = cte$. O próximo objeto, será:

Casca esférica



Como a massa está distribuída na área da casca, que possui $A = 4\pi R^2$, temos a mesma expressão da (23).

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{dm}{dA} \quad dm = \sigma dA$$

Para determinar dA , é possível pensar que o infinitésimo de área pode ser escrito, como um fino anel distando r do eixo de rotação com espessura dS , portanto:

$$(30) \quad dA = 2\pi r dS = 2\pi r (R d\theta) = 2\pi R r d\theta$$

Portanto:

$$I = \int r^2 (2\pi \sigma R r d\theta) = 2\pi R \sigma \int r^3 d\theta$$

Para encontrar uma relação entre r e θ , é possível notar que $r = R \sin \theta$, logo:

$$I = 2\pi R \sigma \int (R \sin \theta)^3 d\theta = 2\pi R^4 \sigma \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

Com isso, podemos mostrar com a ajuda das técnicas de integração e sabendo que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, que:

$$(31) \quad \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

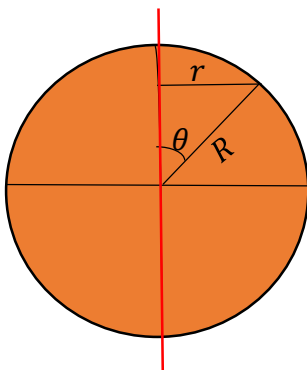
Portanto:

$$I = 2\pi R^4 \sigma \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{8\pi R^4}{3} \frac{M}{4\pi R^2}$$

$$(32) \quad I = \frac{2}{3} MR^2$$

Com isso, a (32) é a expressão do momento de inércia de uma casca esférica. O próximo de último objeto será:

Esfera maciça



Como agora a massa está distribuída no volume da esfera, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Então, a distribuição de massa, é dado seguindo a equação (26), logo:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$$

Para determinar dV , pensaremos que o infinitésimo de volume é pode ser dado por área infinitesimal de um círculo dA , que possui raio r , multiplicado por um altura também infinitamente pequena dy , portanto:

$$(33) \quad dV = dA \cdot dy = 2\pi r dr dy$$

Logo:

$$I = \int r^2 (2\pi r dr dy) = 2\pi \int r^3 dr dy$$

Para contabilizar todos os momentos de inércia das partícula da esfera, os limites integração serão de 0 à $\sqrt{(R^2 - y^2)}$, e de -R a R, logo:

$$I = 2\pi\rho \int_0^{\sqrt{(R^2 - y^2)}} r^3 dr dy = 2\pi\rho \int_{-R}^R (\sqrt{(R^2 - y^2)})^4 dy =$$

$$I = 2\pi\rho \int_{-R}^R (R^2 - y^2)^2 dy = 2\pi\rho \int_{-R}^R R^4 dy - 2 \int_{-R}^R R^2 y^2 dy + \int_{-R}^R y^4 dy$$

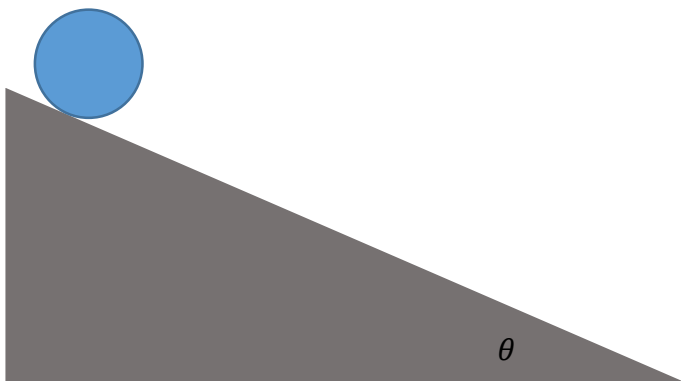
$$I = 2\pi\rho \left[2R^5 - \frac{4}{3}R^5 + \frac{2}{5}R^5 \right] = 2\pi\rho R^5 \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) =$$

$$I = \frac{8}{15} \frac{\pi M R^5}{V} = \frac{8}{15} \frac{\pi M R^5}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{24}{60} M R^2$$

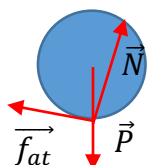
$$(34) \quad I = \frac{2}{5} M R^2$$

Com a (34), encerramos os cálculos dos momentos de inércia dos objetos. Com os dessas equações demonstraremos a aceleração dos corpos ao descer o plano inclinado.

Para obtermos as equações vamos considerar um objeto redondo sobre um plano inclinado com ângulo θ , logo:

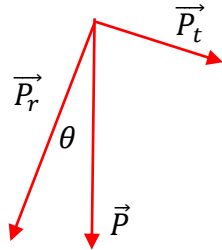


Então, as forças que atuam nos objetos são:



$$(35) \quad \vec{F}_r = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_{at}$$

Decompondo a força peso nas componentes radiais e tangenciais, obtemos:



$$(36) |\vec{P}_t| = |\vec{P}| \sin\theta$$

$$(37) |\vec{P}_r| = |\vec{P}| \cos\theta$$

Portanto, como o movimento ocorre apenas na direção tangencial, utilizando a (1), temos:

$$(38) \vec{P}_t + \vec{f}_{at} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Tomando a (38) em módulo, sendo $|\vec{P}_t| = P_t$ e $|\vec{f}_{at}| = f_{at}$. Considerando que as massas dos objetos sejam constantes em todo momento, temos:

$$(39) P_t - f_{at} = \frac{d(mv)}{dt} = P_t - f_{at} = m \frac{dv}{dt} = P_t - f_{at} = ma$$

Como a força de atrito, é única força que produz torque nos objetos, podemos obter seu valor através da (18), logo:

$$(40) f_{at}R = I\alpha = f_{at} = \frac{I\alpha}{R}$$

Pela (13), obtemos:

$$(41) f_{at} = \frac{Ia}{R^2}$$

Substituindo o valor de (41) em (39), temos:

$$P_t - \frac{Ia}{R^2} = ma = P_t = ma + \frac{Ia}{R^2} =$$

$$(42) a = \frac{P_t}{\left(m + \frac{I}{R^2}\right)} = \frac{mg \sin\theta}{\left(m + \frac{I}{R^2}\right)}$$

Então, a (42) calcula a aceleração linear dos objetos rolando pelo plano inclinado, substituindo os valores dos Momento de Inércia, determinados nas eqs. (25), (28), (32) e (34), temos:

Anel

$$(43) \quad a = \frac{mg \sin \theta}{\left(m + \frac{mR^2}{R^2}\right)} = \frac{mg \sin \theta}{(m+m)} = \frac{1}{2} g \sin \theta$$

Cilindro maciço

$$(44) \quad a = \frac{mg \sin \theta}{\left(m + \frac{mR^2}{2R^2}\right)} = \frac{mg \sin \theta}{\left(m + \frac{m}{2}\right)} = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

Casca esférica

$$(45) \quad a = \frac{mg \sin \theta}{\left(m + \frac{2mR^2}{3R^2}\right)} = \frac{mg \sin \theta}{\left(m + \frac{2}{3}m\right)} = \frac{3}{5} g \sin \theta$$

Esfera maciça

$$(46) \quad a = \frac{mg \sin \theta}{\left(m + \frac{2mR^2}{5R^2}\right)} = \frac{mg \sin \theta}{\left(m + \frac{2}{5}m\right)} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

Tendo o valor do tempo que a simulação fornece, podemos calcular a distância percorrida pelos objetos, sendo:

$$(47) \quad d = \frac{at^2}{2}$$

Terceira simulação

Para a última simulação, temos uma plataforma giratória com uma pessoa em cima, para desenvolvermos uma expressão que explique a variação da velocidade angular do conjunto, devemos considerar que o momento de inércia total, será:

$$(48) \quad I_{tot} = I_{pla} + I_{pes}$$

Como a plataforma possui formato cilíndrico e a pessoa pode ser considerada uma partícula sobre ela, temos:

$$(49) \quad I_{tot} = \frac{M_{cil}R_{cil}^2}{2} + M_{pes}d^2$$

Onde, utilizando a (28), e consideramos d , como a distância da pessoa ao centro da plataforma. Então, como nenhum torque resultante é realizado sobre a plataforma, da equação (17), temos:

$$(50) \quad L_i = L_f = I_{tot_i}\omega_i = I_{tot_f}\omega_f$$

Substituindo (49) em 50, obtemos:

$$(51) \quad \left(\frac{M_{cil_i} R_{cil_i}^2}{2} + M_{pes_i} d_{pes_i}^2 \right) \omega_i = \left(\frac{M_{cil_f} R_{cil_f}^2}{2} + M_{pes_f} d_{pes_f}^2 \right) \omega_f$$

Ou seja, a 51 evidencia a conservação do Momento Angular, ao alterar a massa do cilindro ou da pessoa, assim como o raio do objeto ou a distância que a pessoa se encontra do centro do cilindro, para manter o valor de $L = cte$, a velocidade angular, se altera.