



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

JAILSON CAVALCANTE DE ARAÚJO

**IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS CONCEITUAIS DA GEOMETRIA E DAS
GRANDEZAS E MEDIDAS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA ÁREA DE
PARALELOGRAMOS**

RECIFE

2023

JAILSON CAVALCANTE DE ARAÚJO

**IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS CONCEITUAIS DA GEOMETRIA E DAS
GRANDEZAS E MEDIDAS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA ÁREA DE
PARALELOGRAMOS**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain

Coorientadora: Profa. Dra. Lúcia de Fátima Durão Ferreira

RECIFE

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Anaíse de Santana Santos, CRB-4/2329

- A663i Araújo, Jailson Cavalcante de.
Imbricações entre os campos conceituais da geometria e das grandezas e medidas no ensino e na aprendizagem da área de paralelogramos. / Jailson Cavalcante de Araújo. – Recife, 2023.
464 f.: il.
- Orientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain.
Coorientador: Lúcia de Fátima Durão Ferreira
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2023.
Inclui Referências.
1. Teoria dos campos conceituais. 2. Engenharia didática. 3. Grandezas e medidas. 4. Geometria. 5. Área de paralelogramos. I. Bellemain, Paula Moreira Baltar. (Orientadora). II. Ferreira, Lúcia de Fátima Durão. (Coorientador). III. Título.
- 370 (23. ed.) UFPE (CE2023-098)

JAILSON CAVALCANTE DE ARAÚJO

**IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS CONCEITUAIS DA GEOMETRIA E DAS
GRANDEZAS E MEDIDAS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA ÁREA DE
PARALELOGRAMOS**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 28/08/2023.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora interna)
Universidade de Pernambuco

Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Examinadora interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. André Pereira da Costa (Examinador externo)
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Profa. Dra. Marilena Bittar (Examinadora externa)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Dedico esta tese à minha mãe, Helena, ao meu pai, João,
às minhas irmãs, Jaciane e Jacineide,
aos meus sobrinhos, Jonas e Gabriel,
e à minha sobrinha/afilhada, Gabrielle.

AGRADECIMENTOS

Início agradecendo
A Deus, primeiramente
Segundo, à minha família
Que esteve sempre presente
Nessa árdua trajetória
Mostrando que a vitória
Alcançaria brevemente

Manuela não somente
Deu apoio e incentivo
Criou e refez figuras
Recuperou meu arquivo
Filmando com um celular
Me ajudou a alcançar
Este nosso objetivo

Não tenho apenas um motivo
Para expressar a gratidão
Que tenho por Paula Baltar
E também Lúcia Durão
Mães, amigas, professoras
Ótimas orientadoras
Que guardo no coração

Alguém que desde a graduação
Nunca me deixou sozinho
É Marilene Rosa dos Santos
Por quem tenho muito carinho
Agradeço por você
Durante o meu TCC
Ter indicado esse caminho

André a ela esteve juntinho
Na banca da monografia
Agora com Rosinalda e Marilena
Outra história se inicia
Com diferentes visões
Deram as contribuições
Que o texto merecia

A Franklin, pela companhia
Em estudo e discussão
Com Leonardo e Thiago
Sempre estendendo a mão

Trazendo ideias brilhantes
Junto aos demais estudantes
Do grupo de orientação

No EDUMATEC, a coordenação
E todos funcionários
Sempre dispostos a ajudar
Sejam quais fossem os horários
E os professores de Didática
Na teoria ou na prática
Todos são extraordinários

Indo a outros cenários
Onde tudo se inicia
Agradeço a Vanda Andrade
Gilmara e a secretaria
A Ana Lúcia e os estudantes
Que foram os participantes
Sem eles nada acontecia

À CAPES que financia
Projetos na universidade
Que continuam transformando
Sonhos em realidade
Agradeço por me ajudar
Pois trabalhar e estudar
É muita dificuldade

O Pró-Grandezas de verdade
Me deixou muito inspirado
Sou muito grato a todos
Mesmo quem não foi citado
Do fundo do coração
A palavra é gratidão
A vocês muito obrigado

Deixei aqui registrado
Um pouco da nossa cultura
Se estas estrofes inspirarem
Pelos menos uma criatura
Me dever será cumprido
Espero ter contribuído
A todos boa leitura

*“Ninguém nasce feito: é experimentando-
nos no mundo que nós nos fazemos”.*

Paulo Freire

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo compreender as implicações da concepção e experimentação de uma sequência didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, no aprofundamento da compreensão e na diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem persistentes relativas à área de paralelogramos por estudantes do 9º ano do ensino fundamental. A fundamentação teórica é composta pela Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e seus colaboradores, e pela abordagem de área como uma grandeza autônoma proposta por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian. A engenharia didática, a partir da perspectiva de Guy Brousseau, Michèle Artigue e outros, foi a opção metodológica adotada na pesquisa. As análises prévias evidenciaram erros recorrentes ao lidar com situações sobre a área de paralelogramos, caracterizaram como área e paralelogramos são abordados em documentos de orientação curricular e na coleção de livros didáticos adotada na escola campo de pesquisa. Destacaram-se as dificuldades dos estudantes em situações envolvendo a área e os paralelogramos, principalmente quando se tratava de losangos não quadrados e de paralelogramos não retângulos e não losangos. Verificou-se nos livros didáticos a predominância por situações de medição, desenhos prototípicos e ênfase nas figuras do quadrado e do retângulo não quadrado. Esses e outros achados serviram de suporte para a construção e análise a priori da sequência didática relativa à área de paralelogramos, a qual incluiu situações dos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas. A sequência foi experimentada com estudantes do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal do município de Ferreiros/PE. Os resultados permitiram aprofundar a compreensão de diferentes aspectos envolvidos no processo de conceituação da área de paralelogramos quando situações complexas do campo das Grandezas e Medidas são decompostas em distintas tarefas elementares que podem continuar nesse mesmo campo e/ou remeter a outros campos conceituais, principalmente o da Geometria, devido às fortes imbricações existentes entre esses dois campos. Assim, foi possível compreender mais profundamente os avanços e bloqueios dos estudantes ao lidar com as situações, por meio do sucesso ou insucesso em determinadas tarefas elementares. Quanto às contribuições para a aprendizagem dos estudantes, destacam-se: a ampliação na diversidade dos quadriláteros e o domínio de propriedades ligadas às definições; a dissociação entre área, superfície e número; a utilização de procedimentos geométricos como a decomposição e recomposição; o aprimoramento da forma prediativa do conhecimento, entre outras. Os estudantes que apresentaram um bom desempenho geral no trabalho realizado no campo da Geometria, o refletiram nas atividades do campo das Grandezas e Medidas, contribuindo assim para a diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem relativas à área da região delimitada por paralelogramos. No entanto, outros aspectos necessitariam de aprofundamento em um trabalho futuro mais prolongado, como a atribuição de sentido às expressões de área e a invariância da área em relação à escolha do lado tomado como base em um paralelogramo não retângulo e não losango.

Palavras-chave: teoria dos campos conceituais; engenharia didática; grandezas e medidas; geometria; área de paralelogramos.

ABSTRACT

This research aimed to understand the implications of the design and implementation of a didactic sequence based on sets of situations that give meaning to the concepts of area and notable quadrilaterals. It prioritized the interconnections between the fields of Geometry and Magnitudes and Measurements, aiming to deepen understanding and reduce persistent conceptual learning difficulties related to the area of parallelograms among 9th-grade students in elementary school. The theoretical framework includes Gérard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields and its collaborators, as well as the approach to area as an autonomous magnitude proposed by Régine Douady and Marie-Jeanne Perrin-Glorian. The didactic engineering, following the perspective of Guy Brousseau, Michèle Artigue, and others, was the chosen methodological approach. Preliminary analyses revealed recurrent errors when dealing with situations involving the area of parallelograms. It characterized how area and parallelograms are addressed in curriculum guidance documents and the collection of textbooks adopted in the research school. Student difficulties were highlighted, particularly in situations involving the area of non-square rhombuses and non-rectangular, non-rhomboid parallelograms. Textbooks were found to predominantly focus on measurement situations, prototypical drawings, and emphasis on the figures of the square and non-square rectangle. These findings, among others, supported the construction and a priori analysis of the didactic sequence related to the area of parallelograms, incorporating situations from the fields of Geometry and Magnitudes and Measurements. The sequence was tested with 9th-grade students in a public municipal school in Ferreiros/PE. Results allowed a deeper understanding of various aspects involved in the conceptualization process of the area of parallelograms. Complex situations in the field of Magnitudes and Measurements were decomposed into distinct elementary tasks that could continue in the same field and/or refer to other conceptual fields, mainly Geometry, due to strong interconnections between these two fields. This approach facilitated a more profound understanding of students' progress and obstacles when dealing with situations, based on success or failure in certain elementary tasks. Contributions to student learning include the expansion of quadrilateral diversity and mastery of properties linked to definitions, the dissociation between area, surface, and number, the use of geometric procedures such as decomposition and recomposition, and the refinement of the predicative form of knowledge, among others. Students who demonstrated overall good performance in Geometry reflected this in Magnitudes and Measurements activities, thus contributing to reducing conceptual learning difficulties related to the area of the region delimited by parallelograms. However, certain aspects would require further exploration in future, more extended work, such as giving meaning to area expressions and the invariance of area concerning the choice of the side taken as a base in a non-rectangular, non-rhomboid parallelogram.

Keywords: theory of conceptual fields; didactic engineering; magnitudes and measurements; geometry; area of parallelograms.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de figuras geométricas planas com mesma área e perímetros distintos.....	38
Figura 2 – Representação de figuras geométricas distintas com áreas iguais	44
Figura 3 – Representação de quadriláteros.....	45
Figura 4 – Representação da classificação de quadriláteros notáveis a partir da definição dada por Euclides	46
Figura 5 – Representação da classificação dos paralelogramos a partir da definição dada por Legendre	46
Figura 6 – Representação da classificação dos paralelogramos a partir da definição dada por Hadamard.....	47
Figura 7 – Representação dos paralelogramos a partir de suas propriedades	48
Figura 8 – Relação entre os três tipos de objetos	49
Figura 9 – Desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango na França.....	50
Figura 10 – Desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango no Brasil....	50
Figura 11 – Alguns desenhos não prototípicos de paralelogramos não retângulos e não losangos	51
Figura 12 – Desenho prototípico do quadrado	52
Figura 13 – Alguns desenhos não prototípicos de quadrados	52
Figura 14 – Desenho prototípico do retângulo não quadrado	52
Figura 15 – Alguns desenhos não prototípicos de retângulos não quadrados	53
Figura 16 – Desenho prototípico do losango não quadrado	53
Figura 17 – Alguns desenhos não prototípicos de losangos não quadrados.....	54
Figura 18 – Exemplo de uma situação de medição para determinar comprimentos a partir de uma área dada, no LD do 8º ano.....	56
Figura 19 – Exemplo de uma situação de medição e sua decomposição em tarefas elementares	60
Figura 20 – Exemplo de uma situação de produção de superfícies e sua decomposição em tarefas elementares	62
Figura 21 – Figuras utilizadas pelas pesquisadoras na classificação de quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos.....	73
Figura 22 – Representações dos paralelogramos em situação de classificação	77
Figura 23 – Situação de identificação de paralelogramos na malha quadriculada.....	79

Figura 24 – Representação considerada retângulo pelos participantes em Tavares (2014)	80
Figura 25 – Resultado da identificação de quadrados em malha quadriculada.....	80
Figura 26 – Representações do quadrado e do losango não quadrado no <i>software</i> GeoGebra	82
Figura 27 – Situações de medição com quadrados e retângulos não quadrados	85
Figura 28 – Retângulo não quadrado com comprimentos dos lados explícitos	91
Figura 29 – Recorte de uma das tarefas sem o uso das unidades de medida e indicação dos ângulos retos	92
Figura 30 – Representações para comparação das áreas	95
Figura 31 – Situação de medição com o desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango	98
Figura 32 – Situação de medição com um desenho não prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango	99
Figura 33 – Situação de comparação de áreas a partir da ampliação da figura geométrica plana	123
Figura 34 – Situação de construção a partir da ampliação de coordenadas	124
Figura 35 – Situação de classificação com o losango não quadrado.....	125
Figura 36 – Situação de medição da área de um quadrado	126
Figura 37 – Situação de classificação envolvendo alguns paralelogramos	127
Figura 38 – Situação de medição envolvendo o retângulo não quadrado	127
Figura 39 – Situações de medição envolvendo quadrados	128
Figura 40 – Situação de medição para determinar outra grandeza dada a área.....	129
Figura 41 – Exemplo de situações de produção no livro didático do 6º ano.....	134
Figura 42 – Exemplo de situações de medição no livro didático do 7º ano	136
Figura 43 – Exemplo de situação de inclusão no livro didático do 9º ano.....	137
Figura 44 – Exemplo de situação em que poderia ser desenhado um paralelogramo no livro didático do 8º ano	139
Figura 45 – Exemplo de situação para associar o nome da figura a partir de propriedades no livro didático do 8º ano.....	139
Figura 46 – Exemplo de situação para determinar o comprimento do lado dada a área no livro didático do 8º ano	140
Figura 47 – Situação com área e comprimentos sem as respectivas unidades de medida no livro didático do 8º ano.....	140
Figura 48 – Exemplo de uma tarefa que foca no numérico, mas que poderia contribuir para situações de produção no livro didático do 8º ano	141

Figura 49 – Classificação dos quadriláteros apresentada no livro didático do 8º ano.....	143
Figura 50 – Desenho do paralelogramo não retângulo e não losango priorizado pelo autor no livro didático do 8º ano.....	144
Figura 51 – Desenho do retângulo não quadrado priorizado pelo autor no livro didático do 8º ano	144
Figura 52 – Desenho do quadrado priorizado no livro didático do 8º ano.....	145
Figura 53 – Desenho do losango não quadrado priorizado no livro didático do 8º ano.....	145
Figura 54 – Exemplo de uma situação ligada à inclusão no livro didático do 8º ano	145
Figura 55 – Exemplo de uma situação de construção no livro didático do 8º ano.....	146
Figura 56 – Exemplo de uma situação para determinar comprimentos a partir do perímetro no livro didático do 8º ano.....	146
Figura 57 – Exemplo de uma situação para determinar a abertura do ângulo a partir de informações dadas no livro didático do 8º ano	147
Figura 58 – Exemplo inicial para a área do retângulo não quadrado e do quadrado no livro didático do 8º ano	149
Figura 59 – Expressão de área do quadrado no livro didático do 8º ano	150
Figura 60 – Exemplo introdutório para as áreas do triângulo e do paralelogramo não retângulo e não losango no livro didático do 8º ano.....	150
Figura 61 – Uso da expressão de área no cálculo da área do paralelogramo não retângulo e não losango no livro didático do 8º ano	150
Figura 62 – Exemplo para o cálculo da área do trapézio e do losango não quadrado a partir da decomposição da figura no livro didático do 8º ano.....	151
Figura 63 – Situação de medição que demanda a inclusão de classes de paralelogramos para o cálculo da área no livro didático do 8º ano.....	152
Figura 64 – Situações de medição e de comparação envolvendo o paralelogramo não retângulo e não losango em seu desenho prototípico no livro didático do 8º ano.....	153
Figura 65 – Situações de comparação e de produção no livro didático do 8º ano	154
Figura 66 – Situação de medição na malha quadriculada que exige a decomposição no livro didático do 8º ano	154
Figura 67 – Situações de medição com ausência de elementos geométricos no livro didático do 8º ano	155
Figura 68 – Confusão entre as unidades de área e de comprimento no livro didático do 8º ano	155
Figura 69 – Obtenção de uma reta por meio de dobraduras.....	171

Figura 70 – Obtenção de retas perpendiculares por meio de dobraduras	171
Figura 71 – Obtenção de retas paralelas por meio de dobraduras	172
Figura 72 – Obtenção de um retângulo por meio de dobraduras	172
Figura 73 – Possibilidade de agrupamento a partir de critérios não válidos para todas as figuras	176
Figura 74 – Construção de quadrados com duas e três peças do Tangram	179
Figura 75 – Construção de quadrados com quatro peças do Tangram	180
Figura 76 – Construção de quadrados com cinco e sete peças do Tangram	180
Figura 77 – <i>Kit</i> disponibilizado na primeira sessão	238
Figura 78 – Extrato da resolução de um estudante na atividade 1 da primeira sessão	240
Figura 79 – Extrato da resolução de um estudante na atividade 2 da primeira sessão	242
Figura 80 – Extrato da resolução de um estudante na atividade 3 da primeira sessão	245
Figura 81 – Retângulo não quadrado produzido na atividade 3 da primeira sessão	246
Figura 82 – Quadrados e retângulos não quadrados desenhados em papel branco na atividade 1 da segunda sessão	248
Figura 83 – Quadrados e retângulos não quadrados desenhados em papel pontilhado na atividade 1 da segunda sessão	249
Figura 84 – Trapézios e paralelogramo não retângulo e não losango desenhados em papel pontilhado na atividade 1 da segunda sessão	249
Figura 85 – Losangos não quadrados e trapezoides desenhados em papel branco na atividade 1 da segunda sessão	250
Figura 86 – Cilindro e quadrilátero não convexo desenhados em papel pontilhado na atividade 1 da segunda sessão	251
Figura 87 – Agrupamento de figuras que têm características de um quadrado	254
Figura 88 – Figuras agrupadas como quadrados	254
Figura 89 – Figuras agrupadas como diferentes por causa do formato	255
Figura 90 – Figuras agrupadas por parecerem quadrados “esticados”	256
Figura 91 – Agrupamento de losangos não quadrados por formato comum	257
Figura 92 – Agrupamento de retângulos não quadrados por “laços parecidos”	258
Figura 93 – Agrupamento de paralelogramos em “ângulos diferentes”	258
Figura 94 – Agrupamento de figuras que lembram retângulos (comprimentos de lados adjacentes diferentes)	259
Figura 95 – Algumas construções realizadas na atividade 4 da primeira sessão	261

Figura 96 – Construções de quadrados com quatro peças do Tangram na atividade complementar da primeira sessão.....	263
Figura 97 – Dúvida se é um quadrado na atividade complementar da primeira sessão	263
Figura 98 – Quadrado com oito peças na atividade complementar da primeira sessão	264
Figura 99 – Construções de quadrados com quatro peças do Tangram sobre a banca	265
Figura 100 – Mudança de peça na construção de quadrados sobre a banca.....	265
Figura 101 – Paralelogramo não retângulo e não losango formado com três peças do Tangram	267
Figura 102 – Paralelogramo não retângulo e não losango formado com duas peças do Tangram.....	267
Figura 103 – Quadrado com sete peças na atividade complementar da primeira sessão	269
Figura 104 – Figuras que lembram quadrados na atividade 2 da segunda sessão.....	270
Figura 105 – Figuras que possuem os quatro ângulos retos agrupadas pela dupla (A6 e A9)	274
Figura 106 – Figuras consideradas com os quatro ângulos retos pela dupla (A4 e A10)	275
Figura 107 – Figuras que possuem os quatro lados com mesmo comprimento agrupadas pela dupla (A6 e A9)	276
Figura 108 – Utilização da régua não graduada na atividade 1 da quarta sessão.....	277
Figura 109 – Figuras consideradas com os ângulos internos opostos iguais pela dupla (A8 e B12)	278
Figura 110 – Utilização do papel transparente na atividade 1 da quarta sessão.....	278
Figura 111 – Figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento agrupadas pela dupla (A2 e A7)	279
Figura 112 – Figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento agrupadas pela dupla (A6 e A9)	280
Figura 113 – Figuras que possuem os dois pares de lados opostos paralelos entre si agrupadas pela dupla (A8 e B12).....	281
Figura 114 – Figuras agrupadas na letra (f) da atividade 1 pela dupla (A6 e A9)	284
Figura 115 – Figuras identificadas como paralelogramos na atividade 2 da quarta sessão ...	287
Figura 116 – Figuras classificadas como quadrados na atividade 2 da quarta sessão.....	288
Figura 117 – Ilustração das figuras classificadas como quadrados por A2 e A9	289
Figura 118 – Figuras classificadas como retângulos na atividade 2 da quarta sessão	290
Figura 119 – Ilustração das figuras classificadas como retângulos por A2 e A9.....	290
Figura 120 – Figuras classificadas como losangos na atividade 2 da quarta sessão	292

Figura 121 – Ilustração das figuras classificadas como losangos por A4	292
Figura 122 – Explicação dos estudantes que discordaram que todo quadrado é um retângulo	297
Figura 123 – Explicação dos estudantes que concordaram que todo retângulo é quadrado ..	298
Figura 124 – Explicação dos estudantes que concordaram que todo quadrado é um losango	299
Figura 125 – Explicação dos estudantes que discordaram que todo losango é um quadrado	300
Figura 126 – Explicação dos estudantes que concordaram que todo quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo	301
Figura 127 – Explicação da estudante que concordou que os retângulos são paralelogramos	301
Figura 128 – Explicação dos estudantes que concordaram que os losangos são paralelogramos	302
Figura 129 – Explicação dos estudantes que discordaram que os retângulos e losangos não são paralelogramos.....	302
Figura 130 – Figuras classificadas como quadrados na atividade 1 da sexta sessão	304
Figura 131 – Ilustração das figuras classificadas como quadrados por A9.....	305
Figura 132 – Figuras classificadas como retângulos na atividade 1 da sexta sessão	305
Figura 133 – Ilustração das figuras classificadas como retângulos por A9.....	306
Figura 134 – Figuras classificadas como retângulos não quadrados na atividade 1 da sexta sessão.....	306
Figura 135 – Ilustração das figuras classificadas como retângulos não quadrados por A9 ...	307
Figura 136 – Figuras classificadas como losangos na atividade 1 da sexta sessão	307
Figura 137 – Ilustração das figuras classificadas como losangos por (A2 e A4).....	308
Figura 138 – Figuras classificadas como losangos não quadrados na atividade 1 da sexta sessão.....	309
Figura 139 – Ilustração das figuras classificadas como losangos não quadrados por (A8 e B12)	309
Figura 140 – Figuras classificadas como paralelogramos na atividade 1 da sexta sessão	310
Figura 141 – Ilustração das figuras classificadas como paralelogramos por (A2 e A4)	310
Figura 142 – Figuras classificadas como paralelogramos não retângulos e não losangos na atividade 1 da sexta sessão	311
Figura 143 – Ilustração das figuras classificadas como paralelogramos não retângulos e não losangos por (A6 e A7).....	311

Figura 144 – Figuras classificadas como não paralelogramos na atividade 1 da sexta sessão	312
Figura 145 – Ilustração das figuras classificadas como não paralelogramos por A9.....	312
Figura 146 – Representação de uma diagonal utilizando a régua não graduada.....	314
Figura 147 – Traçado de diagonal na atividade 2 da sexta sessão	315
Figura 148 – Figuras classificadas a partir da propriedade: possuir diagonais de mesmo comprimento.....	316
Figura 149 – Figuras classificadas a partir da propriedade: possuir diagonais perpendiculares	316
Figura 150 – Figuras classificadas a partir da propriedade: possuir as diagonais de mesmo comprimento e perpendiculares.....	317
Figura 151 – Figuras classificadas a partir da propriedade: possuir diagonais que se interceptam em seus pontos médios	318
Figura 152 – Propriedades assinaladas relativas aos quadrados.....	320
Figura 153 – Propriedades assinaladas relativas aos retângulos	321
Figura 154 – Propriedades assinaladas relativas aos losangos	322
Figura 155 – Propriedades assinaladas relativas aos paralelogramos	323
Figura 156 – Discussão da atividade da sétima sessão: propriedades de quadrados e retângulos	325
Figura 157 – Discussão da atividade da sétima sessão: propriedades de quadrados e losangos	326
Figura 158 – Discussão da atividade da sétima sessão: propriedades dos paralelogramos....	326
Figura 159 – Compreensão de área como “tanto” de espaço ocupado na atividade 1 da oitava sessão.....	331
Figura 160 – Diferenciação de áreas a partir do formato da figura na atividade 1 da oitava sessão	332
Figura 161 – Participante A7 usando peças de Tangram para mostrar igualdade de áreas a A9	333
Figura 162 – Participante A7 usando Poliminós para mostrar igualdade de áreas a A9.....	335
Figura 163 – Retângulos não quadrados tratados como distintos e explicação baseada em aspectos visuais	338
Figura 164 – Resposta e explicação na comparação (A e C) da atividade 3 da oitava sessão	342
Figura 165 – Comparação (A e C) da atividade 3 da oitava sessão	343
Figura 166 – Resposta e explicação na comparação (A e B) da atividade 3 da oitava sessão	343

Figura 167 – Comparação (A e B) da atividade 3 da oitava sessão	344
Figura 168 – Figuras equivalentes constituídas pelas peças do Tangram	345
Figura 169 – Figuras equivalentes constituídas por duas peças de Poliminós	346
Figura 170 – Respostas distintas de grupos na comparação (A e B) da atividade 3 da oitava sessão	349
Figura 171 – Decomposição, recomposição e mudança de unidade na comparação (A e D)	351
Figura 172 – Utilizando a régua não graduada na atividade 1 da nona sessão.....	353
Figura 173 – Paralelogramos produzidos corretamente na atividade 1 da nona sessão	353
Figura 174 – Produção inadequada de losango não quadrado e do quadrado na atividade 1 da nona sessão	354
Figura 175 – Procedimentos de decomposição e recomposição para produção de figuras na atividade 1 da nona sessão.....	355
Figura 176 – Utilizando as peças do Tangram para medições na atividade 2 da nona sessão.....	356
Figura 177 – Medição incorreta na atividade 2 da nona sessão	358
Figura 178 – Explicação apresentada por um grupo na atividade 2 da nona sessão	359
Figura 179 – Ladrilhando a figura para depois contar os quadradinhos um a um	361
Figura 180 – Desenhos prototípicos de quadrados na atividade 1 da décima sessão	362
Figura 181 – Confusão entre os conceitos de área e perímetro na atividade 1 da décima sessão	364
Figura 182 – Resposta associada a um possível erro de cálculo numérico na atividade 1 da décima sessão	364
Figura 183 – Possíveis erros nos cálculos relacional e numérico na atividade 1 da décima sessão.....	365
Figura 184 – Desenhos prototípico e que se aproxima do prototípico na atividade 2 da décima sessão.....	366
Figura 185 – Participante B4 tentando convencer B12 de que seu procedimento é o mais adequado.....	367
Figura 186 – Respostas e representação simbólica apresentadas na atividade 2 da décima sessão.....	369
Figura 187 – Resposta apresentada considerando propriedade dos quadrados na atividade 2 da décima sessão	370
Figura 188 – Participante A8 explicando como fez no quadro no momento de sistematização	371

Figura 189 – Exemplos relacionados à distinção entre área e superfície e entre área e número	377
Figura 190 – Exemplo relacionado à mudança dos números de acordo com a unidade adotada	378
Figura 191 – Exemplos para discutir as expressões de área no caso dos retângulos não quadrados e quadrados.....	379
Figura 192 – Procedimento de decomposição e recomposição na atividade 1 da décima primeira sessão	383
Figura 193 – Indicação dos quatro ângulos retos após a recomposição na atividade 1 da décima primeira sessão.....	384
Figura 194 – Exemplo contendo erros relativos à álgebra das grandezas na atividade 1 da décima primeira sessão.....	384
Figura 195 – Possível confusão entre os conceitos de área e perímetro na atividade 1 da décima primeira sessão.....	385
Figura 196 – Fazendo a decomposição e recomposição em vez de calcular pela expressão de área.....	386
Figura 197 – Indicação de base e altura após a decomposição e recomposição na atividade 2 da décima primeira sessão	386
Figura 198 – Indicação de ângulos retos após a decomposição e recomposição na atividade 2 da décima primeira sessão	387
Figura 199 – Explicando a A10 que um centímetro é a distância de ponto a outro	388
Figura 200 – Todos juntos fazendo pela fórmula a atividade 2 da décima primeira sessão ..	389
Figura 201 – Representação de bases e alturas na atividade 2 da décima primeira sessão	390
Figura 202 – Respostas apresentadas na atividade 2 da décima primeira sessão.....	390
Figura 203 – Formando um retângulo não quadrado a partir do losango não quadrado recortado	392
Figura 204 – Desenho de retângulo não quadrado cujos comprimentos dos lados são $d/2$ e D	393
Figura 205 – Fazendo o desenho de um losango não quadrado com condições dadas sobre os comprimentos das diagonais.....	394
Figura 206 – Decomposição e recomposição do losango não quadrado em um triângulo	394
Figura 207 – Decomposição de um losango não quadrado em um paralelogramo não retângulo e não losango	395

Figura 208 – Percebendo a mudança na diagonal de um losango não quadrado após decomposição e recomposição	396
Figura 209 – Explicação voltada à necessidade de conhecer os comprimentos dos lados de um quadrado para poder calcular a sua área.....	397
Figura 210 – Explicação voltada ao cálculo da área de um quadrado a partir do produto dos comprimentos das diagonais.....	397
Figura 211 – Explicação associada a uma possível confusão entre os conceitos de área e perímetro.....	398
Figura 212 – Decomposição de losango não quadrado e recomposição em retângulos para obtenção da expressão de área.....	399
Figura 213 – Paralelogramos não retângulos e não losangos com diferentes lados tomados como base	402
Figura 214 – Diferentes manipulações da álgebra das grandezas na letra (a) da atividade 1 da última sessão.....	405
Figura 215 – Troca entre os conceitos de área e perímetro na letra (a) da atividade 1 da última sessão.....	405
Figura 216 – Realizando procedimento de decomposição e recomposição na atividade 1 da última sessão.....	406
Figura 217 – Multiplicação dos comprimentos fornecidos com erros na álgebra das grandezas e de cálculo numérico	407
Figura 218 – Insucesso ao tentar decompor o paralelogramo não retângulo e não losango da letra (f) da última sessão	408
Figura 219 – Soma de todos os dados fornecidos e erro de cálculo numérico na atividade 1 da última sessão.....	409
Figura 220 – Soma dos dados fornecidos e multiplicação dos resultados na atividade 1 da última sessão.....	410
Figura 221 – Diferentes respostas apresentadas na letra (g) da atividade 1 da última sessão	411
Figura 222 – Erro na álgebra das grandezas e no cálculo numérico na atividade 2 da última sessão.....	413
Figura 223 – Retângulo não quadrado produzido na atividade 2 da última sessão.....	414
Figura 224 – Retângulo não quadrado com área maior e indicação incorreta dos comprimentos	415
Figura 225 – Representações simbólicas relativas à produção de losangos na atividade 2 da última sessão.....	416

Figura 226 – Produção de losango com mesma área que um paralelogramo não retângulo e não losango dado	417
Figura 227 – Produção de losango não quadrado com área menor que um paralelogramo não retângulo e não losango dado	418
Figura 228 – Confusão entre paralelogramos não retângulos e não losangos e losangos na última sessão.....	419
Figura 229 – Figuras produzidas como losangos não quadrados na última sessão.....	420
Figura 230 – Quadrado produzido adequadamente na atividade 2 da última sessão	421
Figura 231 – Confusão entre os conceitos de área e perímetro na produção de quadrados ...	421
Figura 232 – Quadrado produzido com área menor que a da figura dada na atividade 2 da última sessão.....	422
Figura 233 – Desenhos de retângulos não quadrados em vez de quadrados na atividade 2 da última sessão.....	423

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Percentual aproximado das classes de situações sobre paralelogramos e área de paralelogramos verificadas nas apostilas do 6º ao 9º ano.....	130
Gráfico 2 – Percentual aproximado das classes de situações sobre paralelogramos e área de paralelogramos verificadas no livro didático do 6º ano.....	133
Gráfico 3 – Percentual aproximado das classes de situações sobre paralelogramos e área de paralelogramos verificadas no livro didático do 7º ano.....	135
Gráfico 4 – Percentual aproximado das classes de situações sobre paralelogramos e área de paralelogramos verificadas no livro didático do 9º ano.....	137

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades voltadas ao reconhecimento de figuras geométricas planas no campo da Geometria para os anos iniciais do ensino fundamental na BNCC	105
Quadro 2 – Habilidades voltadas às figuras geométricas planas no campo da Geometria para os anos finais do ensino fundamental na BNCC	106
Quadro 3 – Habilidades voltadas ao conceito de área de figuras geométricas planas no campo das Grandezas e Medidas para os anos iniciais do ensino fundamental na BNCC	108
Quadro 4 – Habilidades voltadas ao conceito de área de figuras geométricas planas no campo das Grandezas e Medidas para os anos finais do ensino fundamental na BNCC.....	109
Quadro 5 – Seleção das habilidades e dos conteúdos para o 6º ano nos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, organizadas por bimestres.....	114
Quadro 6 – Seleção das habilidades e dos conteúdos para o 7º ano nos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, organizadas por bimestres.....	115
Quadro 7 – Seleção das habilidades e dos conteúdos para o 8º ano nos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, organizadas por bimestres.....	116
Quadro 8 – Seleção das habilidades e dos conteúdos para o 9º ano nos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, organizadas por bimestres.....	116
Quadro 9 – Detalhamento das sessões que compõem a sequência didática.....	164
Quadro 10 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da primeira sessão	168
Quadro 11 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da primeira sessão	169
Quadro 12 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 3 da primeira sessão	172
Quadro 13 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da segunda sessão.....	174
Quadro 14 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da segunda sessão.....	177
Quadro 15 – Variáveis didáticas e seus valores nas atividades 4 e sua complementar da primeira sessão	181
Quadro 16 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da quarta sessão	185
Quadro 17 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da quarta sessão	188
Quadro 18 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade única da quinta sessão	191
Quadro 19 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da sexta sessão.....	195
Quadro 20 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da sexta sessão.....	198
Quadro 21 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade única da sétima sessão.....	201
Quadro 22 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da oitava sessão	203
Quadro 23 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da oitava sessão	205

Quadro 24 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 3 da oitava sessão	211
Quadro 25 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da nona sessão	214
Quadro 26 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da nona sessão	216
Quadro 27 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da décima sessão	218
Quadro 28 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da décima sessão	219
Quadro 29 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da décima primeira sessão ...	221
Quadro 30 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da décima primeira sessão ...	223
Quadro 31 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da décima segunda sessão ...	226
Quadro 32 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da décima segunda sessão ...	227
Quadro 33 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da décima terceira sessão	232
Quadro 34 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da décima terceira sessão	235
Quadro 35 – Informações gerais acerca das sessões realizadas	237
Quadro 36 – Critérios e agrupamentos estabelecidos pelos estudantes individualmente.....	253
Quadro 37 – Critérios e agrupamentos estabelecidos pelos estudantes em grupos.....	257
Quadro 38 – Agrupamentos realizados na letra (a) da atividade 1 da quarta sessão.....	274
Quadro 39 – Agrupamentos realizados na letra (b) da atividade 1 da quarta sessão	275
Quadro 40 – Agrupamentos realizados na letra (c) da atividade 1 da quarta sessão.....	277
Quadro 41 – Agrupamentos realizados na letra (d) da atividade 1 da quarta sessão	279
Quadro 42 – Agrupamentos realizados na letra (e) da atividade 1 da quarta sessão.....	281
Quadro 43 – Agrupamentos realizados na letra (f) da atividade 1 da quarta sessão	283
Quadro 44 – Figuras identificadas como paralelogramos na atividade 2 da quarta sessão....	286
Quadro 45 – Figuras classificadas como quadrados na atividade 2 da quarta sessão	288
Quadro 46 – Figuras classificadas como retângulos na atividade 2 da quarta sessão	289
Quadro 47 – Figuras classificadas como losangos na atividade 2 da quarta sessão.....	291
Quadro 48 – Figuras identificadas como paralelogramos antes e após a discussão e sistematização	294
Quadro 49 – Figuras classificadas como quadrados antes e após a discussão e sistematização	294
Quadro 50 – Figuras classificadas como retângulos antes e após a discussão e sistematização	295
Quadro 51 – Figuras classificadas como losangos antes e após a discussão e sistematização	295
Quadro 52 – Figuras classificadas como quadrados na atividade 1 da sexta sessão	304
Quadro 53 – Figuras classificadas como retângulos na atividade 1 da sexta sessão.....	305

Quadro 54 – Figuras classificadas como retângulos não quadrados na atividade 1 da sexta sessão.....	306
Quadro 55 – Figuras classificadas como losangos na atividade 1 da sexta sessão	307
Quadro 56 – Figuras classificadas como losangos não quadrados na atividade 1 da sexta sessão.....	308
Quadro 57 – Figuras classificadas como paralelogramos na atividade 1 da sexta sessão.....	309
Quadro 58 – Figuras classificadas como paralelogramos não retângulos e não losangos na atividade 1 da sexta sessão	310
Quadro 59 – Figuras classificadas como não paralelogramos na atividade 1 da sexta sessão.....	311
Quadro 60 – Figuras classificadas por possuírem as diagonais de mesmo comprimento.....	315
Quadro 61 – Figuras classificadas por possuírem as diagonais perpendiculares	316
Quadro 62 – Figuras classificadas por possuírem as diagonais de mesmo comprimento e perpendiculares.....	317
Quadro 63 – Figuras classificadas por possuírem diagonais que se interceptam em seus pontos médios.....	317
Quadro 64 – Sistematização dos resultados na atividade única da sétima sessão.....	323
Quadro 65 – Síntese das respostas da atividade 3 da oitava sessão	342
Quadro 66 – Procedimentos verificados ao calcular áreas na atividade 1 da última sessão ..	406
Quadro 67 – Atividades indicadas para modificações pelos participantes nas entrevistas	430

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	27
1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	33
1.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	33
1.2 ÁREA COMO GRANDEZA AUTÔNOMA	41
1.3 OS PARALELOGRAMOS: ALGUMAS DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES.....	44
1.3.1 Os paralelogramos e suas representações	48
1.4 ESTUDO DAS SITUAÇÕES COMPLEXAS E SUAS RESPECTIVAS TAREFAS ELEMENTARES NAS IMBRICAÇÕES DOS CAMPOS DAS GRANDEZAS E MEDIDAS E DA GEOMETRIA	54
2 ESCOLHAS METODOLÓGICAS.....	65
2.1 CARACTERIZAÇÃO DO CONTEXTO DA PESQUISA	65
2.2 SITUANDO A ENGENHARIA DIDÁTICA	67
3 ANÁLISES PRÉVIAS.....	72
3.1 O QUE DIZEM ALGUMAS PESQUISAS JÁ REALIZADAS.....	72
3.1.1 Sobre os paralelogramos	72
3.1.2 Sobre área.....	83
3.1.3 Sobre área de paralelogramos	94
3.2 O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS DE ORIENTAÇÃO CURRICULAR E OUTROS MATERIAIS	104
3.2.1 A Base Nacional Comum Curricular.....	104
3.2.2 O Currículo de Pernambuco	110
3.2.2.1 O Organizador Curricular por Bimestre de Matemática de Pernambuco	113
3.2.2.2 O Documento de Reorganização Curricular de Pernambuco	117
3.2.3 Os planejamentos da escola campo de pesquisa	118
3.2.4 As apostilas de atividades dos alunos.....	122
3.3 ANÁLISE DA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS ADOTADA PELA ESCOLA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	131
3.3.1 Análise do livro didático do 8º ano.....	138
3.3.1.1 Capítulo que contempla o estudo dos paralelogramos	142
3.3.1.2 Capítulo que contempla o estudo da área de paralelogramos.....	148
3.4 SÍNTESE ACERCA DAS ANÁLISES PRÉVIAS.....	157

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI.....	163
5 EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	236
5.1 ANÁLISE DA PRIMEIRA SESSÃO	238
5.2 ANÁLISE DA SEGUNDA SESSÃO	247
5.3 ANÁLISE DA TERCEIRA SESSÃO.....	260
5.4 ANÁLISE DA QUARTA SESSÃO.....	269
5.5 ANÁLISE DA QUINTA SESSÃO	292
5.6 ANÁLISE DA SEXTA SESSÃO	303
5.7 ANÁLISE DA SÉTIMA SESSÃO	318
5.8 ANÁLISE DA OITAVA SESSÃO	328
5.9 ANÁLISE DA NONA SESSÃO.....	344
5.10 ANÁLISE DA DÉCIMA SESSÃO.....	359
5.11 ANÁLISE DA DÉCIMA PRIMEIRA SESSÃO.....	376
5.12 ANÁLISE DA DÉCIMA SEGUNDA SESSÃO.....	391
5.13 ANÁLISE DA DÉCIMA TERCEIRA SESSÃO	404
5.14 DISCUSSÃO DAS ENTREVISTAS COM OS PARTICIPANTES E COM A PROFESSORA.....	424
5.14.1 Discussão das entrevistas com os participantes	424
5.14.2 Discussão das entrevistas com a professora de Matemática dos participantes ...	434
5.15 SÍNTESE ACERCA DA EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO E ENTREVISTAS	440
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	446
REFERÊNCIAS	455
APÊNDICE A – ROTEIRO DE ENTREVISTA COM OS PARTICIPANTES	461
APÊNDICE B – ROTEIRO DE ENTREVISTA COM A PROFESSORA DE MATEMÁTICA DOS PARTICIPANTES	462
APÊNDICE C – MODELO DO TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	463

INTRODUÇÃO

Nosso interesse em investigar questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem do conceito de área surgiu a partir de experiências em sala de aula, muitas delas durante as atividades do estágio curricular supervisionado no curso de graduação em Licenciatura em Matemática, em especial, as de observação e regência. Percebíamos que a abordagem realizada pela maioria dos professores da educação básica consistia em representar as figuras no quadro, colocar o nome de cada uma delas seguido das expressões de área (as chamadas “fórmulas”), resolver alguns exemplos e passar exercícios parecidos com os exemplos estudados, para os quais bastava apenas a substituição dos dados numéricos fornecidos nas expressões apresentadas. Porém, quando alguma atividade do livro didático fugia daquele padrão, trazendo dados extras ou insuficientes, com ausência do desenho ou com a figura representada em uma posição diferente da apresentada inicialmente pelo professor, os estudantes tinham muita dificuldade, afirmando até mesmo que “não haviam estudado aquele assunto”.

Diante da experiência acima, realizamos nosso trabalho de conclusão de curso de graduação (Araújo, 2014) sobre o conceito de área, o qual teve a orientação da professora Marilene Rosa dos Santos. Nele, analisamos o desempenho e os procedimentos utilizados por alunos do 9º ano do ensino fundamental em situações de comparação de áreas, de medida de áreas e de produção de superfícies, todas envolvendo o paralelogramo não retângulo e não losango (o qual chamávamos, na época, de paralelogramo qualquer).

Os resultados da monografia apontaram que os participantes apresentaram um melhor desempenho ao comparar áreas quando recorreram a um procedimento numérico. No cálculo de áreas, confirmamos a hipótese inicial de que teriam melhor desempenho em situações próximas às vivenciadas em sala de aula, uma vez que houve o maior número de acertos no item em que a figura se encontrava representada em sua posição habitual e com os dados necessários e suficientes para o cálculo. No entanto, quando a representação da figura estava em uma posição diferente e com dados extras para medição da área, eles sentiram mais dificuldades e não obtiveram um bom desempenho. A produção de figuras de mesma área que uma figura inicial foi a que apresentou o maior número de erros, possivelmente pelo fato de não terem prática de trabalhar com situações desse tipo.

Em relação aos procedimentos utilizados pelos estudantes ao lidar com as situações que exigiam a comparação de áreas, não tínhamos o objetivo de comparar por meio de estratégias numéricas, porém alguns deles sentiram a necessidade de utilizar a régua graduada

para resolvê-la. Também utilizaram corte e colagem, associação a situações do dia a dia, procedimentos de medida e combinação entre eles (corte e colagem e medida).

Como na pesquisa supracitada, as situações abordavam apenas o paralelogramo não retângulo e não losango, ficamos nos questionando como seria o desempenho dos estudantes ao lidar com situações envolvendo todos os paralelogramos (quadrado, retângulo não quadrado, losango não quadrado e o paralelogramo não retângulo e não losango). E, além disso, como eles identificariam e classificariam essas figuras, visto que, a partir das observações realizadas, os professores as representavam e colocavam seus nomes sem nenhuma discussão a respeito de suas propriedades, elementos geométricos e relações entre elas. Diante desses questionamentos, realizamos nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018), orientada pela professora Paula Moreira Baltar Bellemain, que teve como objetivo geral analisar como estudantes do 8º ano¹ do ensino fundamental lidam com situações sobre a área de paralelogramos. A fundamentação teórica usada foi a Teoria dos Campos Conceituais.

Os resultados da pesquisa de mestrado serão tratados mais adiante com maior detalhamento em uma seção específica para a área de paralelogramos, mas antecipamos que os participantes tiveram desempenhos mais satisfatórios quando os paralelogramos abordados eram quadrados ou retângulos não quadrados. Notamos que surgiram maiores dificuldades ao lidar com losangos não quadrados e paralelogramos não retângulos e não losangos ou quando foram dados outros comprimentos, tais como o da diagonal em vez do comprimento de uma base e o da altura relativa a ela, ou mesmo quando a figura estava representada em uma posição inabitual. Observamos ainda erros no tratamento dos números e das unidades de medida, e confusão entre área e perímetro, esta última, já amplamente discutida em pesquisas realizadas há mais de 30 anos, como em Douady e Perrin-Glorian (1989).

A presente tese buscou dar continuidade à dissertação de mestrado (Araújo, 2018), entretanto, intervindo por meio de uma sequência didática, uma vez que, naquele momento, foi feito apenas um diagnóstico das dificuldades. Nesse sentido, elaboramos e experimentamos uma sequência didática voltada à aprendizagem de área dos paralelogramos de modo que abrangesse mais estreitamente as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas. Imbricação é um termo utilizado por Teles (2007) para “caracterizar um tipo de relação em que os campos conceituais se sobrepõem mutuamente, se

¹ Tínhamos o interesse de realizar a pesquisa de mestrado também no 9º ano do ensino fundamental, entretanto, os professores dos participantes sugeriram que fosse no 8º ano, pois se tratava de um colégio em que os alunos tinham um bom desempenho geral.

articulam e a partir dessa “interconexão dinâmica” são gerados novos significados para os conteúdos matemáticos em foco” (p. 18).

Por um lado, há dificuldades que são próprias do conceito de área dentro do campo das Grandezas e Medidas, como confusões entre as variações da área e do perímetro, utilização inadequada das unidades de medida, seja durante os cálculos ou ao final deles, extensão das expressões de áreas para casos em que não são válidas, entre outras. Por outro lado, existem dificuldades que são próprias dos paralelogramos no campo da Geometria, como: considerar os paralelogramos como retângulos deformados; não os reconhecer em outra posição ou inclinação; não conseguir classificá-los nem apontar algumas de suas propriedades; considerar o losango como um quadrado inclinado; dificuldade em representar por meio de desenho um paralelogramo a partir de suas propriedades etc. Diversas dessas dificuldades são relatadas nas pesquisas de Araújo (2012), Araújo (2018), Baltar (1996), Douady e Perrin-Glorian (1989), Fujita (2012), Pereira da Costa (2016), Rosa dos Santos (2005), Souza (2013), entre outras.

Sabemos que ao lidar com situações sobre área de figuras geométricas planas, outros campos conceituais estão imbricados, como o numérico e o algébrico, mas devido à própria complexidade desse objeto foi preciso priorizar alguns aspectos. Pelo fato de a área ser uma grandeza geométrica da Matemática, assim como comprimento, volume e abertura de ângulo, reconhecer e representar as figuras adequadamente, classificá-las, identificar suas propriedades e seus elementos geométricos poderia se apresentar como uma maneira para lidar com as dificuldades persistentes citadas no parágrafo anterior. Além disso, a necessidade de aprofundamento do estudo das relações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, na aprendizagem e no ensino da área de paralelogramos, vem desde a tese de Baltar (1996), passando por Teles (2007) e ganha mais relevo com nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018). Nesse sentido, fizemos algumas escolhas do ponto de vista das variáveis para evitar a complexidade dos demais campos e nos debruçarmos sobre a parte das imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas.

Para realizar esta pesquisa, nos apoiamos na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1986, 1990), pois procuramos investigar o sujeito ao lidar com situações sobre área e paralelogramos. Além disso, na ótica desse aporte teórico, para que o estudante atribua sentido à área de paralelogramos, ele deve lidar com diversas situações, as quais consideramos que devem ser relacionadas tanto ao aspecto geométrico quanto ao das Grandezas e Medidas, destacando o papel das imbricações entre eles na resolução das tarefas.

Em relação ao campo das Grandezas e Medidas, há um estudo das situações que dão sentido ao conceito de área, proposto por Baltar (1996), no qual são apontadas três classes de

situações - comparação de áreas, medida de área e produção de superfícies. Ferreira (2010) aprimora esse estudo incluindo a classe das situações de mudança de unidade, a qual passa a denominar situação de conversão de unidades em Ferreira (2018). Tomamos essas situações como ponto de partida, pois sua adoção ao lidar com o referido conceito mostrou melhorias nos conhecimentos mobilizados pelos estudantes, porém algumas dificuldades ainda persistem e foi preciso trabalhá-las em conjunto com outras.

Quanto ao campo da Geometria, consideramos a proposta de Pereira da Costa (2019) para as classes de situações que dão sentido ao conceito de quadrilátero notável²: classificação, inclusão e construção. Apesar de terem sido desenvolvidas para serem aplicadas aos quadriláteros notáveis, as usamos apenas para os paralelogramos. Além dessas, destacamos ainda a situação de identificação dessas figuras, conforme Araújo (2018), a qual diferencia-se da classificação, como veremos mais adiante. Após enunciar esses dois conjuntos de situações, podemos apresentar nossa hipótese: a concepção e experimentação de uma sequência didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, contribui para aprofundar a compreensão e provocar a diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem persistentes relativas à área da região delimitada por paralelogramos³.

Para verificar esta hipótese, escolhemos a engenharia didática (ED) como metodologia de pesquisa, pois se trata de um arcabouço teórico-metodológico adequado e consistente para testar a sua pertinência e validade. Tal escolha levou a conhecer os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos relativos ao paralelogramo e sua área para, a partir disso, elaborar uma sequência didática e realizar sua análise a priori, elencando as variáveis didáticas e fazer escolhas dos valores a serem adotados, experimentar e validar nossa hipótese. Além disso, a ED possui uma certa flexibilidade, permitindo retornar às fases anteriores mesmo estando em uma posterior para complementar ou rever o que for necessário em termos do que foi achado.

Este estudo foi realizado com estudantes do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal situada no município de Ferreiros, estado de Pernambuco, pois pretendíamos atuar na localidade em que diagnosticamos as primeiras dificuldades ao fazer a monografia, além de estudos pilotos realizados durante a dissertação, e contribuir para a

² A definição de quadriláteros notáveis adotada na nossa tese está apoiada em Hadamard (1898): são todos os trapézios e paralelogramos (com a inclusão do quadrado, retângulo e losango).

³ A partir deste momento, vamos utilizar apenas área de paralelogramos para nos referirmos à área da região delimitada por paralelogramos.

valorização de pesquisas desenvolvidas no interior do estado. A escolha do ano escolar dos participantes se apoiou nas recomendações dos documentos de orientação curricular, pois era esperado que já tivessem vivenciado e sistematizado no ano anterior o conteúdo de área. Tínhamos também a intenção de contribuir com estudantes que passaram dois anos com aulas em condições não habituais devido à pandemia de Covid-19 (SARS-CoV-2), conforme veremos mais adiante em seção específica.

Portanto, diante do exposto até o presente momento, temos a seguinte questão de pesquisa: De que maneira a concepção e experimentação de uma sequência didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, contribui para aprofundar a compreensão e provocar a diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem persistentes relativas à área de paralelogramos por estudantes do 9º ano do ensino fundamental? Na busca de respostas para esta questão, elencamos como objetivo geral: compreender as implicações da concepção e experimentação de uma sequência didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, no aprofundamento da compreensão e na diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem persistentes relativas à área de paralelogramos por estudantes do 9º ano do ensino fundamental.

Em resumo, a pesquisa aqui proposta se ancorou na perspectiva de que uma compreensão aprofundada dos aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos relativos à área e ao paralelogramo, na imbricações dos campos das Grandezas e Medidas e da Geometria, funciona como ponto de partida para fundamentar escolhas didáticas mais adequadas ao ensino e cria meios para mostrar como situações mais complexas sobre a área de paralelogramos podem ser decompostas em tarefas elementares que ajudam na compreensão e fazem intervir diferentes campos conceituais, sobre os quais escolhemos lançar olhar para o das Grandezas e Medidas e o da Geometria que estão fortemente imbricados.

O presente texto está estruturado da seguinte maneira: inicia pela introdução, ora apresentada. Em seguida, vem o capítulo 1 dedicado à fundamentação teórica, no qual discutimos sobre a Teoria dos Campos Conceituais, a área como grandeza autônoma, as definições, propriedades e representações dos paralelogramos e uma seção dedicada às situações da Geometria e das Grandezas e Medidas e suas respectivas relações. No capítulo 2 apresentamos nossas escolhas metodológicas, caracterizando o cenário da pesquisa e situando

a engenharia didática. O capítulo 3 é dedicado à primeira etapa da engenharia didática, as análises prévias. Nele, começamos pelo levantamento das pesquisas já realizadas sobre os paralelogramos, sobre área e sobre área de paralelogramos. Em seguida, discutimos sobre as orientações trazidas na Base Nacional Comum Curricular, no Currículo, Organizador e documento de Reorganização Curricular, ambos de Pernambuco. Depois, apresentamos uma análise dos planejamentos semestrais da escola campo de pesquisa bem como das apostilas de Matemática com atividades mensais entregues aos alunos durante as aulas remotas/híbridas no período da pandemia de Covid-19. Ao final desse capítulo, é feita a análise da coleção de livros didáticos adotada pela escola, com maior ênfase no livro do 8º ano, principalmente nos capítulos sobre os paralelogramos e a área de paralelogramos, pois é quando deve ocorrer a sistematização desse conteúdo. O capítulo 4 é dedicado à apresentação da sequência didática, com a concepção e análise a priori de cada uma das atividades que compõem as sessões do nosso experimento. A experimentação, análise a posteriori e validação constam no capítulo 5. Por fim, temos o capítulo 6 com as considerações finais seguido das referências que serviram de suporte para a elaboração deste estudo e os apêndices.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo é dividido em quatro seções e uma subseção. Na primeira delas, discutimos sobre a Teoria dos Campos Conceituais, a qual é fundamentada pelos seguintes autores: Vergnaud (1986, 1990, 1993, 1996, 1998, 2009, 2013, 2019), Teles (2007), Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2008), Muniz (2009) e Araújo (2018). Na segunda seção é realizada uma discussão sobre a área como uma grandeza autônoma, iniciando-se por uma breve abordagem da parte histórica e sua passagem pelos diferentes campos. Os textos que a fundamentam são: Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), Brasil (1997, 1998), Bellemain e Lima (2002), Vergnaud (2013), Araújo, Silva e Bellemain (2020). Na terceira apresentamos algumas definições e propriedades dos paralelogramos apoiadas nos trabalhos de Bongiovanni (2004), Barbosa (2006), Lima e Carvalho (2010), Machado (2012), Moura (2013), Pereira da Costa (2016, 2019). Nela, temos uma subseção dedicada à discussão dos diferentes desenhos dos paralelogramos, cujos textos de apoio são de: Laborde e Capponi (1994), Rosa dos Santos (2005), Teles (2007), Lima e Carvalho (2010), Araújo (2018). Por fim, na última seção, é feita uma abordagem das situações dos campos das Grandezas e Medidas e da Geometria sobre área e paralelogramos, respectivamente, tratando-as como situações complexas que podem ser decompostas em tarefas mais elementares e remeter a diferentes campos e suas imbricações. Os textos que fundamentam a discussão são de Vergnaud (1986, 2013), Baltar (1996), Bellemain e Lima (2002), Barbosa (2006), Teles (2007), Lima e Carvalho (2010), Ferreira (2010, 2018), Moraes (2013), Araújo (2018) e Pereira da Costa (2019).

1.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1986, 1990, 1993, 1996, 1998, 2009, 2013, 2019) e seus colaboradores discute o comportamento cognitivo do sujeito ao lidar com uma diversidade de situações. Por meio dela, é possível analisar o desenvolvimento e o sentido atribuído aos conceitos por esse sujeito na ação.

O pesquisador destaca duas ideias centrais no desenvolvimento cognitivo do sujeito: a de variedade e a de história. A primeira está relacionada à variedade de situações de um campo conceitual e, a segunda, ao domínio progressivo das situações pelo indivíduo ao longo do tempo. Por exemplo, para que o estudante desenvolva adequadamente o conceito de área, deve lidar com situações variadas sobre esse conceito e por um período de tempo

considerável. Apesar de ser um aspecto teoricamente importante, a segunda ideia não será tratada em nossa pesquisa devido às limitações de nossas escolhas teóricas e metodológicas, cujo tempo é limitado, mas sabemos que eles devem caminhar juntos ao longo da trajetória escolar do estudante, pois não basta que ele lide por um longo período de tempo com apenas situações de uma determinada classe, mas sim com uma variedade delas.

Vergnaud toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais. Como são as situações que dão sentido ao conceito, esse pesquisador define campo conceitual de modo mais amplo como “[...] um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (Vergnaud, 1986, p. 84). Destaca ainda que, por um lado, o foco está nas situações porque são elas que dão sentido ao conceito. Por outro lado, uma situação não tem como ser analisada com um único conceito. Segundo o autor, este é o principal motivo pelo qual pesquisadores devem estudar campos conceituais, e não situações ou conceitos isolados. Assim, em uma publicação mais recente, Vergnaud aponta outras entradas para um campo conceitual, como, por exemplo:

Um campo conceitual é uma terna de três conjuntos:

- 1 O conjunto de situações, cujo domínio progressivo demanda uma variedade de conceitos, esquemas e representações simbólicas em estreita conexão
- 2 O conjunto dos conceitos que contribuem para o domínio dessas situações
- 3 O conjunto de formas linguísticas e simbólicas que permitem expressar os objetos de pensamento e as conceituações implícitas ou explícitas nessas situações (Vergnaud, 2019, p. 12).

Em seus estudos, o pesquisador supracitado explorou mais profundamente dois grandes campos conceituais: o das Estruturas Aditivas e o das Estruturas Multiplicativas. O primeiro refere-se ao conjunto de situações cujo domínio requer uma adição, uma subtração ou uma combinação de tais operações. Envolve os conceitos “[...] de medida, de transformação, de comparação, de diferença, de inversão, de operação unária, de operação binária, de número natural, de número relativo, de função, [...]” (Vergnaud, 1986, p. 84). Assim como o das Estruturas Aditivas, o campo conceitual multiplicativo compreende simultaneamente um conjunto de situações cuja resolução intervêm operações de multiplicação, divisão ou combinação entre elas, e de conceitos, tais como produto, quociente, razão, fração, função etc.

Embora esse pesquisador tenha se interessado especialmente pelos campos conceituais das Estruturas Aditivas e das Estruturas Multiplicativas, existem outras construções teóricas de campos conceituais, como o da Geometria, o das Grandezas Geométricas, o da Eletricidade, o da Álgebra, o da Moralidade, entre outros. De acordo com Teles (2007, p. 38):

O campo conceitual das grandezas inclui as situações cuja apropriação requer o conceito de grandeza e outros correlatos tais como medida. As grandezas são entendidas como propriedades dos objetos. As medidas quantificam as grandezas e são essenciais para interpretação de fenômenos do mundo físico e social.

A necessidade de construções de campos conceituais ou mesmo de estudar partes menores deles se justifica pelo fato de que

Para analisar o desenvolvimento de habilidades e conceituações do tema nos distintos registros de sua atividade, é essencial recortar objetos de estudo menores que a experiência global, mesmo que essa experiência global também mereça ser analisada por si mesma, e mesmo que pese na experiência de determinados campos. É a essa questão metodológica que responde o conceito de "campo conceitual": seu objetivo é designar subcampos de experiência, em torno das duas ideias de situação e conceito (Vergnaud, 2013, p. 141, tradução nossa)⁴.

Embora seja dito que é possível identificar, por razões de viabilidade, campos conceituais que são “mais restritos em uma determinada área de atuação, como a compreensão de textos narrativos no ensino fundamental, a mecânica do movimento no ensino médio e o funcionamento de centrais nucleares entre profissionais em atividade ou formação” (*Ibid.*, p. 142, tradução nossa)⁵, alerta para “o perigo de tomar objetos de estudo muito pequenos, no sentido de que corremos o risco de não compreender os processos que organizam o desenvolvimento de habilidades e conceituações” (*Ibid.*, tradução nossa)⁶.

Vergnaud (2013) aponta ainda que a experiência está relacionada ao encontro do sujeito com as situações e, se um pesquisador quer entender o desenvolvimento cognitivo ao longo da experiência, é preciso tomar dois conjuntos, um de situações e outro de conceitos, isto é, um campo conceitual.

O pesquisador supracitado destaca que, mesmo as definições tendo sua importância na formação da racionalidade, os conceitos não devem ser tomados apenas como resultados de uma definição, mas como produto da experiência pessoal do sujeito. Nesse sentido, o conceito (C) na Teoria dos Campos Conceituais é um tripé indissociável: $C = (S, IO, R)$, no qual (S) é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito, que o torna significativo; (IO) o conjunto dos Invariantes Operatórios, os quais apoiam a operacionalidade dos esquemas e

⁴ Pour analyser le développement des compétences et des conceptualisations du sujet dans les différents registres de son activité, il est indispensable de découper des objets d'étude plus petits que l'expérience globale, même si cette expérience globale mérite aussi d'être analysée pour elle-même, et même si elle pèse sur l'expérience des domaines particuliers. C'est à cette question méthodologique que répond le concept de "champ conceptuel": son objectif est de désigner des sous champs de l'expérience, autour des deux idées de situation et de concept.

⁵ [...] plus restreints, dans tel ou tel registre de l'activité, comme la compréhension de textes narratifs à l'école élémentaire, la mécanique du mouvement au lycée, la conduite des centrales nucléaires chez les professionnels en activité ou en formation.

⁶ [...] a péril à prendre des objets d'étude trop petits, en ce sens qu'on risque de ne pas saisir les processus organisateurs du développement des compétences et des conceptualisations.

constituem o seu significado; e (*R*) o conjunto das representações simbólicas constituintes do seu significante. Por exemplo, ao falar no conceito de área na perspectiva da TCC, modelizam-se as situações que lhe dão sentido (comparação, medição, produção e conversão de unidades) que, por ser um processo de modelização contínuo, podem surgir modificações nessas classes ao longo do desenvolvimento das pesquisas; os invariantes operatórios mobilizados ao lidar com as tarefas; e as representações simbólicas (desenhos, rabiscos, cálculos, gestos, palavras etc.) utilizadas no tratamento das situações.

Em relação ao primeiro elemento do tripé, as situações, Vergnaud (1996, p. 167) aponta que:

O conceito de situação não tem, aqui, o sentido de situação didáctica, mas antes o sentido de tarefa; a ideia é que qualquer situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldade próprias é importante conhecer. A dificuldade de uma tarefa não é, nem a soma, nem o produto das dificuldades das diferentes subtarefas, mas é claro que o fracasso numa subtarefa implica o fracasso global.

Esse pesquisador acrescenta ainda que o conjunto dos conceitos e teoremas permite analisar as situações como tarefas matemáticas.

A partir da citação acima, defendemos que uma situação complexa sobre a área de paralelogramos pode ser decomposta em tarefas elementares, cuja complexidade e dificuldades próprias remetem a campos conceituais distintos, sobre os quais escolhemos considerar as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, sem desconsiderar a intervenção de outros, como o numérico e/ou algébrico que não são explorados nesse momento do presente estudo. Por exemplo, considerando a situação complexa do campo das Grandezas e Medidas, que consiste em representar uma figura cuja área seja igual à de outra figura dada, algumas tarefas elementares do campo da Geometria podem surgir, tais como: saber que figura desenhar, como classificá-la, quais as suas propriedades, se pode considerar a inclusão de classes, como relacionar os elementos geométricos como base, altura ou diagonal para que possua uma região interna com área igual à da figura dada, entre outras. Esses aspectos apontam como esses dois campos conceituais estão fortemente imbricados de tal modo que para dominar uma situação mais complexa do primeiro é preciso ter domínio sobre as tarefas elementares do segundo, cuja dificuldade em uma dessas últimas pode implicar o fracasso na mais ampla.

Em relação ao outro elemento do tripé do conceito, os invariantes operatórios, como eles são componentes do esquema, gostaríamos de falar inicialmente deste último. Vergnaud (2013) traz duas definições para ele. Na primeira, “o esquema é uma organização invariante

da atividade para uma determinada classe de situações” (p. 138, tradução nossa)⁷. Já a segunda é mais voltada ao detalhamento dos seus componentes, que são quatro: “um objetivo, submetas e antecipações”; “regras de ação, informação e controle”; “invariantes operacionais: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação”; “possibilidades de inferência em situação” (p. 138, tradução nossa)⁸. Por exemplo, ao atravessar a rua, inicialmente temos um objetivo (que é atravessá-la); podemos fazer algumas antecipações (se vai dar tempo ou não, por onde é menos movimentado), agir baseado nas informações coletadas (analisar se vem carro, caso sim, se ele vem rápido, se podemos atravessar andando ou será preciso correr), alguns conceitos são pertinentes na ação (velocidade média, deslocamento, trajetória), proposições são pensadas (se eu for devagar, o carro pode me atropelar) e algumas inferências posteriores (da próxima preciso ter mais atenção, não vou mais por aqui porque o fluxo de veículos é maior, entre outras). O pesquisador destaca ainda que quando estamos diante de uma classe de situações já conhecida, dispomos de esquemas prontos para lidar com situações daquela classe, porém quando se trata de uma situação nova, devemos buscar por novos esquemas a partir do que já temos.

Após definir esquema, podemos abordar a questão dos invariantes, sobre os quais Vergnaud (1986) aponta que “[...] um invariante é uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre um certo conjunto de transformação” (p. 81). Os invariantes operatórios são ingredientes dos esquemas e há três tipos deles: proposições (teoremas em ação), função proposicional (conceitos em ação) e argumento, que ocorre quando as funções proposicionais assumem valores particulares.

Um teorema em ação é uma proposição considerada como verdadeira pelo sujeito que a mobiliza, mas que pode ser falsa para a Matemática ou ter apenas validade para casos pontuais, cuja solução de um problema depende da sua ativação. Ele pode ser modelizado pelo pesquisador para estudar o comportamento do estudante a partir do que é observado ou registrado. Vejamos um exemplo de um teorema em ação verdadeiro:

Entre 5 e 7 anos, as crianças descobrem que não é preciso recontar o todo para achar o cardinal de $A \cup B$, se A e B já foram contados. Este conhecimento pode ser expresso por um teorema-em-ação:
 $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ desde que $A \cap B = \emptyset$ (Vergnaud, 1993, p. 6).

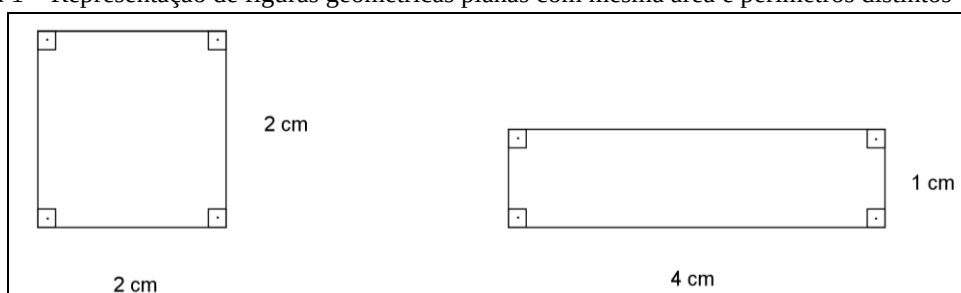
⁷ le schème est une organisation invariante de l’activité pour une classe de situations donnée.

⁸ – un but, des sous buts et anticipations;
 – des règles d’action, de prise d’information et de contrôle;
 – des invariants opératoires: concepts-en acte et théorèmes en acte;
 – des possibilités d’inférence en situation.

E ainda alerta que “a ausência de quantificador dá a entender que este teorema não é universalmente válido para as crianças” (*Ibid.*, p. 6).

Os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos a partir da modelização de um pesquisador. Estes últimos, ajudam a compreender os erros cometidos pelos estudantes a partir do que foi explicitado e, com isso, é possível inferir a mobilização de determinado teorema em ação. Nesse sentido, quando notamos que o estudante explicita que “duas superfícies que possuem mesma área, possuem necessariamente o mesmo perímetro e reciprocamente”, podemos inferir que ele está se apoiando em um teorema em ação falso, que é um invariante operatório do tipo proposição, para justificar as operações realizadas ao resolver uma determinada tarefa. Diante disso, o professor deve propor novas situações em que o estudante confronte suas ideias iniciais para concluir que duas superfícies que possuem mesma área podem ter perímetros diferentes, como no exemplo abaixo:

Figura 1 – Representação de figuras geométricas planas com mesma área e perímetros distintos



Fonte: Araújo (2018, p. 30)

Os conceitos em ação possibilitam a determinação dos elementos importantes para resolver o problema. Vergnaud (1993) aponta que eles são indispensáveis para a construção das proposições e raramente são explicitados pelos alunos. No primeiro exemplo, temos os conceitos em ação de cardinal e coleção, já no segundo, de área e perímetro. Note que eles, diferentemente dos teoremas em ação, não são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, pois não faz sentido dizer que os conceitos de coleção e área, por exemplo, são falsos. Eles apenas podem ser pertinentes ou não na ação.

De acordo com Vergnaud (1993), as funções proposicionais podem ser propriedades $P(x)$, relações binárias $R_2(x, y)$, ternárias $R_3(x, y, z)$ etc. Quando esses valores genéricos das funções proposicionais assumem valores particulares, temos os invariantes do tipo argumento. Por exemplo, na relação ternária $R_3(x, y, z)$, em que y está entre x e z , se atribuirmos João, Maria e José para x , y e z , respectivamente, teremos que Maria está entre João e José. Dessa forma, os argumentos podem ser personagens como os citados acima, objetos materiais como um livro, números ($5 + 3 = 8$), relações como as de maior que ou menor que, entre outros.

Como vimos anteriormente, as funções proposicionais podem tornar-se argumentos a partir da atribuição de valores particulares aos elementos genéricos. Dessa maneira, consideramos, neste estudo, apenas os invariantes do tipo proposição e função proposicional, mais especificamente os teoremas em ação e conceitos em ação, por entendermos que os argumentos já estão sendo contemplados, como afirmado por Vergnaud (1996, p. 164): “quem diz função proposicional e proposição, diz argumento”.

Ainda sobre a operacionalização, mas já estabelecendo uma ligação com o parágrafo seguinte, ao lidar com uma situação, o sujeito pode expressar seu conhecimento de duas formas, as quais Vergnaud (2013) chama de forma predicativa e forma operatória do conhecimento. A primeira está relacionada com o que ele é capaz de dizer sobre como fazer algo, e a segunda é relativa ao que o sujeito efetivamente faz e que na maioria das vezes não pode ser totalmente dita na primeira. Ainda sobre esta última, o referido pesquisador aponta que ela possibilita além de fazer, ter sucesso em uma determinada situação e está ligada ao termo competência. Autores como Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2008, p. 11) apontam que “a competência é traçada pela ação do aluno diante das situações [...]”. Na ótica da TCC, grande parte do nosso conhecimento é competência.

É a partir do que é explicitado pelo sujeito na ação, seja verbalmente ou por símbolos, que chegamos ao terceiro e último elemento do tripé do conceito, porém não menos importante, as representações simbólicas. Vergnaud aponta que elas podem ser linguísticas e não linguísticas, e têm a função de representar simbolicamente os conceitos, suas propriedades, os procedimentos, as situações. Segundo ele, apesar de o observador ou professor não conseguir acessar ou interpretar algumas delas, “[...] certas representações são objetiváveis, no sentido de que podemos delas perceber indicadores importantes nas produções do sujeito (palavras pronunciadas, desenhos, gestos analógicos, operações feitas pelos sujeitos, etc.)” (Vergnaud, 2009, p. 86).

Entre as principais representações que são utilizadas no ensino da Matemática, Vergnaud (2009) aponta as “expressões linguísticas ou enunciados da língua natural”, os “esquemas espaciais no plano (linhas, flechas, regiões do espaço, localizações)” e as “expressões algébricas” (p. 86). Ainda podemos citar um desenho, as posições em que são representados, uma expressão para o cálculo de área, alguma operação realizada pelo indivíduo, entre outros.

O pesquisador supracitado afirma que “as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão colocada exige várias etapas” (Vergnaud, 1996, p. 184). E enfatiza que sua

função vai além de ajudar na resolução de problemas complexos, no sentido de que elas se constituem como meios para identificar mais explicitamente os objetos matemáticos que são decisivos para a conceitualização. Elas dão possibilidades para que algumas inferências aconteçam e futuros eventos sejam antecipados (Vergnaud, 1998).

As representações utilizadas ao lidar com as tarefas sobre área de paralelogramos constituem uma ligação entre o que é pensado e o que é representado, servindo como um meio para identificar os objetos matemáticos utilizados e considerados pertinentes para a atribuição de sentido a esse conceito, assim como observar os campos conceituais que podem estar envolvidos e suas imbricações.

Uma parte importante dos erros dos estudantes no uso de expressões para o cálculo de áreas vem da leitura, sobre o objeto gráfico, dos comprimentos a serem utilizados nos problemas envolvendo esse conceito. Disso, nossa escolha de adotar situações do campo da Geometria, como a identificação, classificação, inclusão e construção, como parte da compreensão sobre a área de paralelogramos, uma vez que elas estão imbricadas e aparecem como tarefas elementares para lidar com situações complexas do campo das Grandezas e Medidas.

Após essa apresentação mais detalhada de cada componente do conceito, iniciamos uma discussão sobre dois tipos de cálculos de naturezas distintas em que os sujeitos costumam cometer erros. Segundo Muniz (2009, p. 46):

Para a resolução de um problema matemático, Vergnaud propõe duas fases que constituem o processo resolutivo. A primeira é aquela de seleção das informações. A segunda diz respeito aos processos de resolução das operações em si. Cada uma dessas etapas comporta objetivos, regras, representações e inferências.

A primeira fase da citação acima se refere ao cálculo relacional, isto é, às operações do pensamento necessárias à resolução dos problemas. Por exemplo, na resolução de uma tarefa, o aluno inicialmente realiza a leitura do enunciado, seleciona as informações relevantes, entende o que está sendo solicitado e escolhe as estratégias e procedimentos mais adequados para obter êxito. Araújo (2018) aponta que um exemplo clássico de erro decorrente do cálculo relacional é quando o aluno confunde área e perímetro, ou seja, é solicitado o cálculo da área e ele aponta o perímetro como resultado. Para Vergnaud (2009, p. 37), “a noção de cálculo relacional contribui para esclarecer e explicitar a noção, muito vaga, de raciocínio”. Acrescenta também que “[...] todo raciocínio matemático pode ser analisado como um cálculo relacional” (*Ibid.*, p. 81).

A segunda fase é relativa ao cálculo numérico, o qual é voltado para o desenvolvimento dos algoritmos, para a execução das operações usuais. Após a seleção das

informações e saber o que fazer com elas, características do cálculo relacional, o estudante segue para a realização dos cálculos e execução dos algoritmos selecionados. Um exemplo de erro muito comum de cálculo numérico nas situações sobre área está relacionado às operações envolvendo números decimais. Como não focamos no campo numérico, realizamos escolhas de modo a evitá-las, uma vez que, como já dito, nosso interesse está na exploração das imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas.

Por fim, destacamos duas etapas importantes na aprendizagem de determinado conceito: provocar a transformação de teoremas em ação implícitos em conhecimento explícito (da forma operatória para a forma predicativa); modelizar os erros em teoremas em ação para construir um modelo de interpretação de conhecimentos mobilizados pelos estudantes e, a partir daí, criar situações que desestabilizem aqueles que são falsos. Segundo Vergnaud (1996, p. 178):

A tese subjacente à teoria dos campos conceituais é, contudo, a de que uma boa encenação didática se apoia necessariamente no conhecimento da dificuldade relativa das tarefas cognitivas, dos obstáculos com que habitualmente se depara, do repertório dos procedimentos disponíveis, e das representações possíveis.

Após toda essa discussão relativa aos elementos da TCC, podemos passar para a seção seguinte que tratará do conceito de área, algumas dificuldades dos estudantes, suas características como grandeza autônoma, entre outros aspectos.

1.2 ÁREA COMO GRANDEZA AUTÔNOMA

Do ponto de vista da história da Matemática, o conceito de área surgiu em situações de medição de terras como, por exemplo, às margens dos rios Nilo na África, Tigres e Eufrates, ambos na Ásia, com as civilizações dos egípcios, babilônios ou ainda dos chineses.

Naquela época, as margens desses rios eram solos férteis para agricultura e ocorriam demarcações nas terras para realizar a cobrança de impostos das pessoas que trabalhavam lá, a qual era proporcional à quantidade de terra utilizada por cada um deles. Tais demarcações eram realizadas com frequência devido às inundações provocadas pelas chuvas e que acabavam apagando as marcações dos seus locais. Foi nesse contexto que se deram as origens do conceito de área que, como vários outros da Matemática, surgiu da necessidade de problemas a serem resolvidos, sobre os quais Bellemain e Lima (2002, p. 42) apontam que “os problemas são ora vinculados fortemente a práticas sociais (como o problema da medida da terra), ora contextualizados em questões internas à própria Matemática (como a quadratura do círculo, e a teoria da medida, por exemplo)”.

A partir desses aspectos históricos e até mesmo pela própria etimologia da palavra Geometria, percebemos uma forte relação entre a sua origem e os problemas de medição de terras. Já a sua formulação enquanto campo conceitual, assim como o das Grandezas e Medidas, é uma construção teórica feita por um pesquisador. Nesse sentido, é possível notar que o conceito de área foi tratado por muitos anos apenas no campo da Geometria e, em algumas pesquisas, ainda é, como veremos mais adiante. A esse respeito, Lima e Carvalho (2010, p. 136) apontam que: “Desde seus primórdios, o saber geométrico envolveu o que hoje podemos chamar de grandezas geométricas – comprimento, área, volume e abertura de ângulo. Isso explica porque alguns tratam essas grandezas como parte do campo da geometria”. No entanto, uma abordagem estritamente geométrica não põe em jogo todas as funções desse conceito e nem permite a sua exploração nas diferentes situações e tarefas elementares, sejam elas referentes às práticas sociais ou que articulem diversos outros conceitos.

O reconhecimento das Grandezas e Medidas como campo da Matemática Escolar deu-se a partir de pesquisas em Educação Matemática, entre elas, os estudos e discussões realizadas pelo pesquisador Paulo Figueiredo Lima. Tais trabalhos, alguns citados a seguir, influenciaram os documentos de orientação curricular e, com a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997, 1998), a divisão dos conteúdos passou a ser feita em blocos, os quais foram denominados Números e Operações, Espaço e Forma, Tratamento da Informação e um específico para as Grandezas e Medidas. A partir daí, considerando as construções teóricas de campos conceituais, o conceito de área tornou-se um elemento deste último e não mais estrito da Geometria (Espaço e Forma), mas sem perder as fortes imbricações principalmente entre esses dois campos nas situações que o envolvem.

Em resumo, se olharmos em diferentes momentos da história da construção da Matemática e da Matemática Escolar, o conceito de área se fez presente na interface entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, reforçando nossa proposta de aprofundar o estudo dessas imbricações. Segundo Teles (2007, p. 74): “O fato da geometria historicamente tratar grandezas evidencia imbricação histórica entre o campo das grandezas, ao qual pertencem as fórmulas de área e o campo geométrico ao qual pertencem as figuras”.

Ao considerar o conceito de área como elemento do campo das Grandezas e Medidas, passamos a tê-lo como uma grandeza, notadamente geométrica, influenciados por estudos realizados na França, como o de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), e de Baltar (1996). É sobre a ideia de área como grandeza que vamos discorrer a partir de agora.

Douady e Perrin-Glorian (1989) perceberam alguns erros comuns cometidos por estudantes de 9 a 11 anos ao trabalharem com o conceito de área, tais como: superfícies de mesma área têm necessariamente mesmo perímetro, calcular a área de um paralelogramo a partir do produto dos comprimentos dos seus lados. Interpretamos tais erros, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, como resultantes da mobilização de possíveis teoremas em ação falsos, ou seja, de proposições consideradas como verdadeiras pelos sujeitos que as mobilizam, mas que podem ser falsas ou ter um domínio de validade restrito para a Matemática, como vimos anteriormente.

Elas também relatam que os estudantes mobilizam duas concepções (geométrica ou numérica) ao lidar com o conceito de área: na primeira delas, eles entendem que ao mudar a figura, sua área também se altera; nas situações em que se constata as concepções numéricas, os estudantes consideram apenas os aspectos pertinentes para o cálculo, levando-os a fazer extensões incorretas de expressões de área, omissão e/ou utilização inadequada das unidades de medida.

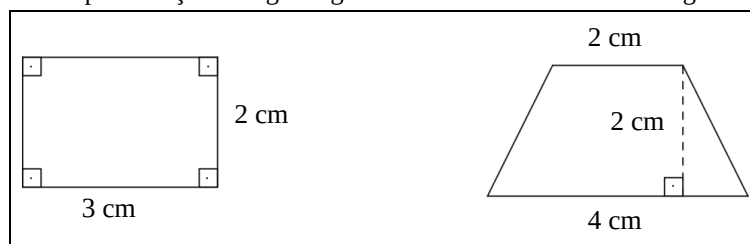
A proposta apresentada por Douady e Perrin-Glorian (1989) traz como exigência a diferenciação nítida dos conceitos de área e superfície, da mesma maneira que entre área e número, ou seja, aborda a área como uma grandeza autônoma em relação à superfície e ao número associado a ela. Essa abordagem objetiva a superação das concepções geométricas e numéricas por meio da distinção e articulação entre os quadros⁹ geométrico, numérico e das grandezas. A esse respeito, considerando a proposta teórica de Douady e Perrin-Glorian (1989), autores como Bellemain e Lima (2002) apontam que:

- Quadro Geométrico: constituído por superfícies planas. Exemplos: as figuras planas, triângulos, quadriláteros, dentre outros.
- Quadro Numérico: consistindo nas medidas da área das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos. Exemplos: 2; 4; 7,5; dentre outros.
- Quadro das grandezas: contexto próprio da noção de área, que integra os dois primeiros e é caracterizado formalmente como classes de equivalência de superfícies de mesma área. Exemplos: expressões compostas de um número e de uma unidade de medida como 2 m^2 , dentre outros (Bellemain; Lima, 2002, p. 28-29).

O exemplo a seguir pode ajudar na compreensão:

⁹ Para Douady e Perrin-Glorian (1989) um quadro é constituído por objetos de um ramo da Matemática, de suas formulações eventualmente diversas, das relações entre esses objetos, e das imagens mentais que o sujeito associa a um momento dado aos objetos e suas relações.

Figura 2 – Representação de figuras geométricas distintas com áreas iguais



Fonte: Araújo, Silva e Bellemain (2020, p. 802)

Podemos observar a representação de um retângulo não quadrado e de um trapézio que possuem a mesma área (6 cm^2). Segundo estes autores:

A medida de área, isto é, o número (6) mudaria se quiséssemos expressar a área em metros quadrados – $0,0006 \text{ m}^2$ – ou qualquer outra unidade de área, mas a área das figuras permaneceria invariante. Ou seja, poderíamos ter diferentes pares (n° , unidade de medida), porém equivalentes, que designariam a mesma área (Araújo; Silva; Bellemain, 2020, p. 802).

Como vimos, o fato de figuras distintas poderem ter mesma área, a torna autônoma em relação à superfície. Da mesma maneira, ela não é o número (medida), pois a adoção de distintas unidades conduz à variação dos números, mas a área permanece invariante. Por isso a importância de tratá-la como uma grandeza. Vergnaud (2013, p. 141) aponta que “a distinção entre uma grandeza e sua medida é essencial” (tradução nossa)¹⁰.

Uma vez abordada a noção de área como uma grandeza autônoma, na seção seguinte trazemos uma discussão voltada aos paralelogramos, a qual contempla algumas definições, propriedades e diferentes representações.

1.3 OS PARALELOGRAMOS: ALGUMAS DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

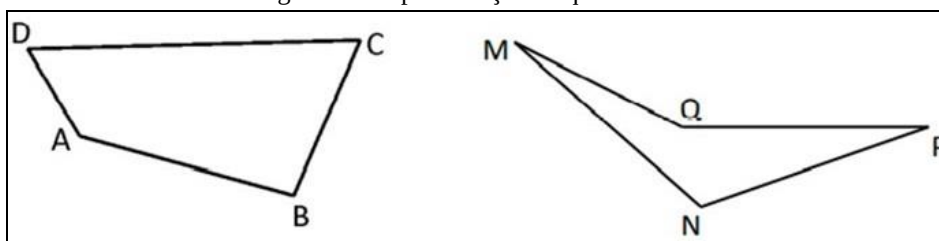
Antes de passarmos à discussão relativa às definições dos paralelogramos, gostaríamos de definir quadrilátero, pois iremos abordar alguns deles. Segundo Lima e Carvalho (2010, p. 154):

Consideremos quatro pontos arbitrários em um plano, por exemplo, A, B, C, D, com a condição de que três quaisquer deles não estão em uma mesma reta. Chamamos quadrilátero ABCD ao conjunto de pontos que estão nos segmentos de reta AB, BC, CD e DA. [...] podemos também designar este quadrilátero por outras sequências apropriadas dos símbolos A, B, C e D.

Vejamos alguns deles no exemplo a seguir:

¹⁰ La distinction entre une grandeur et sa mesure est indispensable.

Figura 3 – Representação de quadriláteros



Fonte: Lima e Carvalho (2010, p. 154)

Os paralelogramos assim como os trapézios pertencem a um grupo de quadriláteros específico, os notáveis, sobre os quais, apoiados em Pereira da Costa (2019), podemos apontar algumas de suas características, tais como: fazem parte do plano euclidiano, nenhum de seus ângulos internos possui abertura maior que 180° , suas diagonais se interceptam em um único ponto e possuem pelo menos um par de lados opostos paralelos.

Na figura acima, temos a representação de dois quadriláteros não notáveis: o primeiro é um trapezoide, o qual não possui lados opostos paralelos; o segundo é não convexo, ou seja, “há um ângulo, no qual a medida de sua abertura é maior que 180° . As diagonais não se encontram em nenhum ponto, sendo que uma delas possui pontos, incluídos no segmento de reta que as formam, fora da região interna” (Pereira da Costa, 2019, p. 47).

No que refere às diferentes definições dos quadriláteros notáveis, mais especificamente os utilizados neste trabalho (quadrado, retângulo não quadrado, losango não quadrado e paralelogramo não retângulo e não losango), ao longo do tempo e suas evoluções, Bongiovanni (2004), em um texto cedido pela Sociedade Brasileira de Matemática, inicialmente publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM)¹¹ aponta que as primeiras ideias da Geometria têm suas origens na Grécia e que a estudada hoje nas escolas é originária do livro *Os Elementos*, de Euclides (aproximadamente 300 a.C.). Nessa obra, Bongiovanni (2004, p. 1) diz que ele apresentava as seguintes definições para:

- O quadrado: “figura quadrilátera de quatro lados iguais e com ângulos retos”.
- O oblongo (caso particular do retângulo): “figura quadrilátera com ângulos retos, mas que não tem quatro lados iguais”.
- O rombo (caso particular do losango): “figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas não com ângulos retos.
- Romboide (caso particular do paralelogramo): “figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas não tem quatro lados iguais nem ângulos retos”.

¹¹ <https://www.rpm.org.br/>

A partir das definições acima, não é possível realizar a inclusão entre nenhuma das figuras citadas, pois há restrições em cada caso que não possibilitam tal realização, conforme representação abaixo:

Figura 4 – Representação da classificação de quadriláteros notáveis a partir da definição dada por Euclides



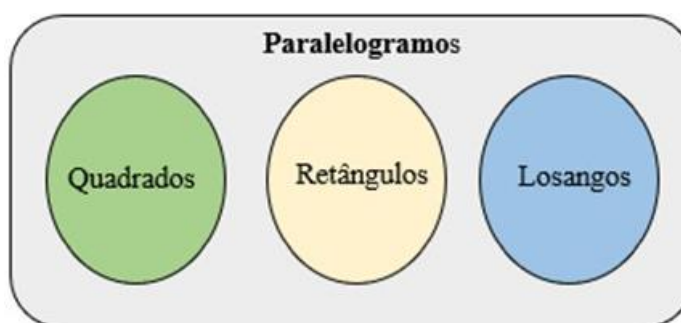
Fonte: Bongiovanni (2004, p. 1)

Bongiovanni (2004, p. 2) menciona um texto posterior à obra de Euclides, o qual também teve grande importância no ensino que é *Os Elementos de Geometria*, de Legendre (1793). Nele, as figuras acima foram assim definidas:

- O quadrado: “tem seus lados iguais e seus ângulos retos”.
- O retângulo: “tem ângulos retos sem ter os lados iguais”.
- O losango: “tem os lados iguais sem que os ângulos sejam retos”.
- O paralelogramo: “tem os lados opostos paralelos”.

Na definição de Legendre é possível perceber, em relação à dada por Euclides, que as figuras assumem seus nomes atuais e é menos restritiva em relação ao paralelogramo, ou seja, a partir dessa definição é possível considerar o quadrado, o retângulo e o losango como sendo paralelogramos. A ilustração abaixo ajuda na visualização:

Figura 5 – Representação da classificação dos paralelogramos a partir da definição dada por Legendre



Fonte: Acervo da pesquisa

No último texto discutido por Bongiovanni (2004, p. 2), o Tratado de Hadamard (1898), *Leçons de géométrie élémentaire*, as definições eram assim apresentadas:

- O quadrado: “é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais”;
- O retângulo: “é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais e, consequentemente, retos”.
- O losango: “é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais”.
- O paralelogramo: “é um quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois”.

Percebemos que, após muitos anos, nesse livro as definições aparecem menos restritivas e, consequentemente, inclusivas, a partir das quais o quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo, da mesma maneira que ambos são paralelogramos, conforme representação abaixo:

Figura 6 – Representação da classificação dos paralelogramos a partir da definição dada por Hadamard



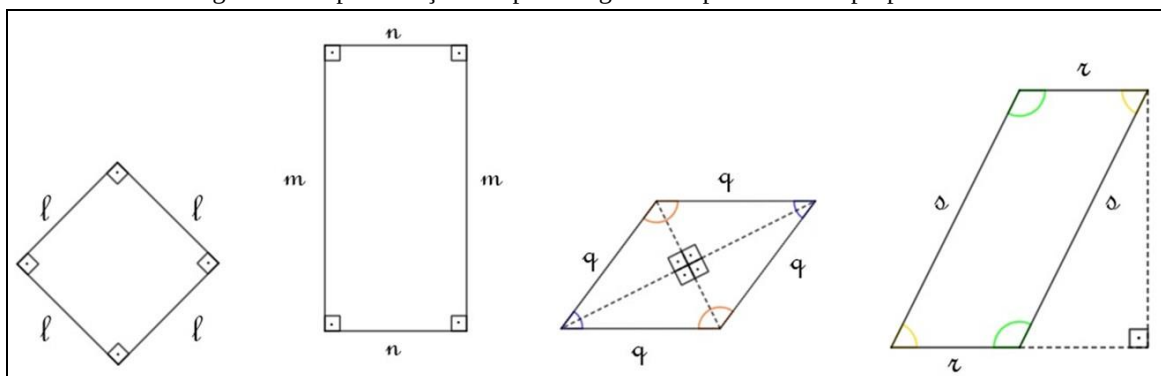
Fonte: Acervo da pesquisa

Diante do exposto, percebemos que os paralelogramos passaram por distintas definições na visão dos autores ao longo do tempo. Adotamos a última classificação acima nesta pesquisa, mesmo não sendo unânime a sua adoção desde os tempos remotos e nossa intenção não é torná-la universal, mas apenas mostrar suas contribuições ao calcular a área de paralelogramos. Optamos por utilizá-la também pelo fato de ser a classificação adotada no livro didático (LD) dos participantes da nossa pesquisa como veremos mais adiante e, segundo Pereira da Costa (2019), ser a versão mais aceita nos dias de hoje e bastante abordada nos LD de Matemática no Brasil.

Para finalizar a parte das definições, reiteramos que consideramos o paralelogramo um quadrilátero com exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si. Além disso,

destacamos a propriedade¹² de que lados e ângulos opostos são congruentes (Barbosa, 2006; Moura, 2013). Com isso, corroboramos com Pereira da Costa (2016) ao argumentar que os quadrados são retângulos e são losangos, pois apresentam as mesmas propriedades, ou seja, possuem os lados opostos paralelos, ângulos internos opostos congruentes e as diagonais se cortam ao meio. “Nesse sentido, dizemos que quadrado é todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo” (Pereira da Costa, 2016, p. 58).

Figura 7 – Representação dos paralelogramos a partir de suas propriedades



Fonte: Acervo da pesquisa

Não consideramos o paralelogramo como sendo trapézio por este último ter exatamente dois lados paralelos ou, conforme Machado (2012), possui apenas um par de lados opostos paralelos entre si. Em relação aos paralelogramos, este autor alerta para o fato de que: “[...] todo quadrado é um retângulo, e todo retângulo é um paralelogramo, mas as relações recíprocas não são verdadeiras. Observe também que todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado” (p. 108).

Após esse momento de definições e algumas propriedades, podemos avançar na discussão sobre os paralelogramos, destacando agora seus diferentes desenhos e as características daqueles que são mais comuns no ensino, privilegiados pelos livros didáticos ou pelo professor durante as aulas, os chamados desenhos prototípicos.

1.3.1 Os paralelogramos e suas representações

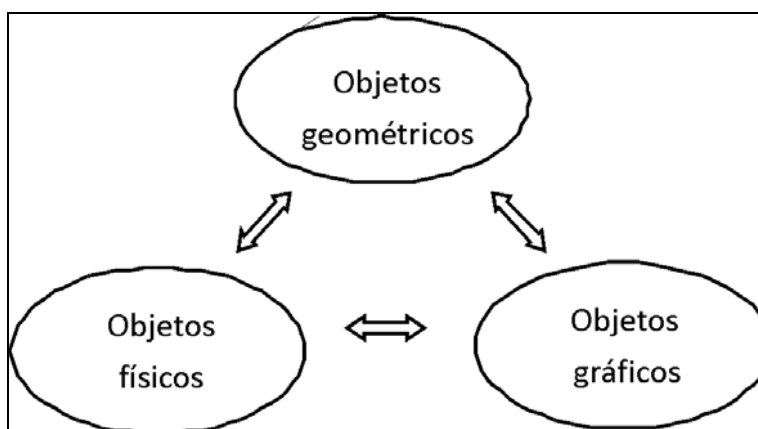
A princípio, consideramos pertinente diferenciar três tipos de objetos no campo da Geometria para ajudar na compreensão das ideias discutidas nesta subseção: objeto geométrico, objeto físico e objeto gráfico. Lima e Carvalho (2010) relatam que conceitos matemáticos (relativos a objetos geométricos) devem estar associados aos objetos físicos e às suas representações (objetos gráficos). Segundo eles, ao definirmos um quadrado, temos

¹² Outras propriedades dos paralelogramos com as respectivas demonstrações dadas por diferentes autores podem ser encontradas no Anexo A da dissertação de Araújo (2018).

[...] a definição de um objeto abstrato, no qual não podemos efetuar medições com instrumentos concretos. Nos exemplos concretos de quadrados – desenhados ou construídos de algum material adequado – as medições fornecerão sempre igualdades aproximadas dos comprimentos dos lados e das aberturas dos ângulos em jogo. Além disso, no que se refere à definição geométrica, o comprimento do lado do quadrado pode ser concebido em centímetros, em metros, ou em qualquer outra unidade de comprimento (Lima; Carvalho, 2010, p. 137).

Diante das ideias acima, os três tipos de objetos – geométricos, físicos e gráficos – se relacionam conforme representação abaixo, proposta pelos autores supracitados:

Figura 8 – Relação entre os três tipos de objetos



Fonte: Lima e Carvalho (2010, p. 138)

Como exemplificação para a relação acima, estes autores tomam um dado (objeto físico) que pode ser representado por um desenho (objeto gráfico) e associado a um cubo (objeto geométrico). Laborde e Capponi (1994) consideram que o desenho é a representação gráfica de uma ideia. Ele se diferencia do objeto geométrico (elemento abstrato) porque pode possuir imperfeições.

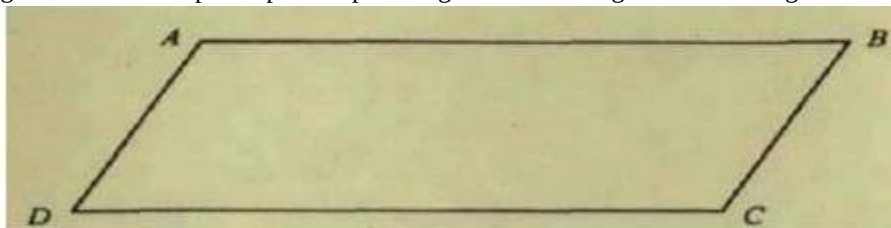
Em nossa sequência didática, os participantes puderam transitar entre os três objetos: físicos, ao utilizarem o Tangram e os quadriláteros em papel; gráficos, com a construção de desenhos fazendo uso de instrumentos adequados, como níveis intermediários para a construção mental dos objetos geométricos. Cabe ressaltar que, assim como Lima e Carvalho (2010, p. 191), uma superfície ou figura geométrica é utilizada neste estudo “[...] para designar tanto um objeto físico, um desenho ou imagem quanto uma figura geométrica bidimensional propriamente dita [...]”.

Feito isso, antes de passarmos a algumas representações dos paralelogramos, vamos falar brevemente do termo prototípico. Segundo Laborde e Capponi (1994, p. 53), “desenhos prototípicos de objetos geométricos constituíram-se ao longo do tempo, resultantes de influências ao mesmo tempo perceptivas e culturais (em sentido amplo e escolar)”. Ainda sobre este assunto, Menegotto e Lara (2011, p. 38) apontam que:

o termo “figura prototípica” foi introduzido por Rina Hershkowitz no ensino da Geometria na década de 1990. Protótipos, segundo Baruch e Hershkowitz (1999), correspondem a alguns exemplos mais centrais do que outros para a aprendizagem, exemplos que podem ser vistos como membros de uma categoria que reflete melhor a “estrutura de redundância” da categoria como um todo. Baruch e Hershkowitz (1999) referem os estudos de Rosch e Mervis publicados em 1975, segundo os quais os exemplos tidos como prototípicos geralmente são usados como “pontos de referência cognitiva” para a formação e julgamento sobre outros exemplos da categoria.

Em relação ao desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango, Laborde e Capponi (1994, p. 53) apontam que “o desenho prototípico de um paralelogramo é, ao menos na França, aquele em que a diagonal AC é perpendicular ao lado AD [...]”, conforme mostrado a seguir:

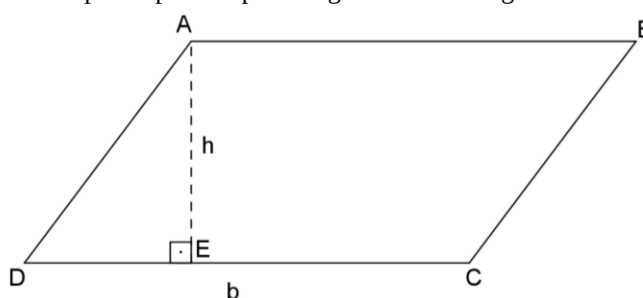
Figura 9 – Desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango na França



Fonte: Laborde e Capponi (1994, p. 53)

Rosa dos Santos (2005) comparou as características do desenho do paralelogramo não retângulo e não losango considerado prototípico na França e no Brasil e notou aproximações, tais como o lado de maior comprimento na posição horizontal e a “inclinação” para a direita. Além dessas características, Teles (2007) pontuou que sua altura traçada é sempre interna, relativa ao lado de maior comprimento posicionado horizontalmente, como mostrado a seguir:

Figura 10 – Desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango no Brasil



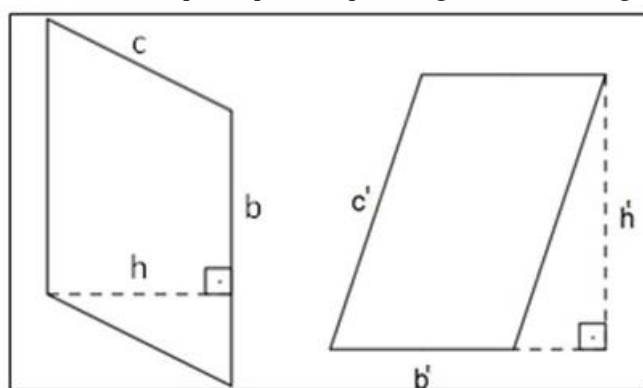
Fonte: Araújo (2018, p. 49)

Assim como Rosa dos Santos (2005), não somos contrários à utilização de tarefas que contemplem desenhos prototípicos, pois elas possuem sua importância no processo de conceituação que, por vezes, se apoia em protótipos. No entanto, apenas tarefas desse tipo não são suficientes para que o sujeito atribua sentido amplo aos conceitos, sendo necessário uma diversidade delas, com e sem desenhos prototípicos. Sobre as relações destes últimos com as expressões de área dessa figura, Teles (2007, p. 48) apontou que

[...] considera-se a posição relativa dos lados, que podem estar na horizontal, na vertical ou ambos os lados em posição oblíqua. Outros critérios são a inclinação da figura e o comprimento dos lados. Esta discussão torna evidente a imbricação entre o campo da geometria e o campo das grandezas na construção do significado da fórmula de área do paralelogramo.

Se a figura anterior estivesse inclinada para a esquerda, mantendo-se as demais características, teríamos um desenho que mais se aproxima do prototípico. Além desse, o paralelogramo não retângulo e não losango pode ser representado de outras maneiras, os quais podem ser caracterizados como desenhos não prototípicos. Alguns deles são apresentados a seguir:

Figura 11 – Alguns desenhos não prototípicos de paralelogramos não retângulos e não losangos



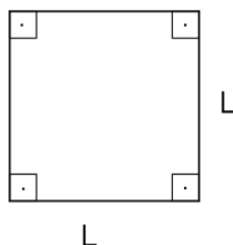
Fonte: Araújo (2018, p. 50, adaptado)

Como percebemos, eles se diferenciam do desenho prototípico, uma vez que, no da esquerda, apesar de a altura traçada relativa ao lado de maior comprimento ser interna, este último está na posição vertical; já o outro possui inclinação para a direita, porém a altura traçada é relativa ao lado de menor comprimento e externa, e o lado de maior comprimento não se encontra posicionado horizontalmente. Tais representações, geralmente, não são apresentadas nos livros didáticos e, conseqüentemente, são pouco exploradas na educação básica.

Em relação aos demais paralelogramos (quadrados, retângulos não quadrados e losangos não quadrados), seus desenhos prototípicos correspondem àqueles sinalizados por Menegotto e Lara (2011) e confirmados a partir da análise da coleção de livros didáticos adotada na escola campo de pesquisa, exemplificados adiante. Os desenhos do quadrado e do retângulo não quadrado são comuns aos considerados prototípicos em nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018), os quais também integram alguns elementos apontados por Teles (2007) e Pereira da Costa (2016). No entanto, o do losango não quadrado diferencia-se do que consideramos prototípico naquele momento, embora seja o que mais se aproxima dele, como veremos nos exemplos seguintes.

No caso do quadrado, seu desenho prototípico é o representado abaixo, no qual há um lado na posição horizontal e outro na vertical, considerando a margem da folha como referência. Além disso, é explicitado o comprimento do lado.

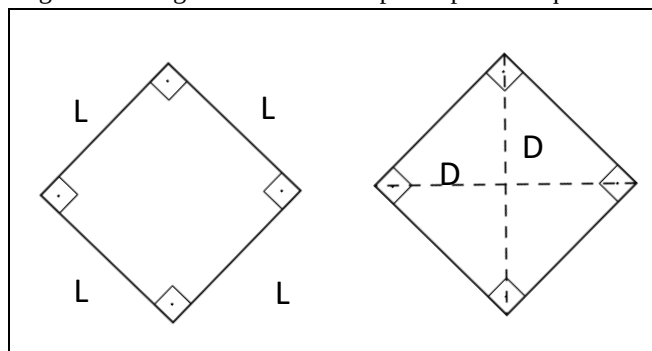
Figura 12 – Desenho prototípico do quadrado



Fonte: Araújo (2018, p. 52)

Quanto aos desenhos não prototípicos, apontamos aqueles que diferem do anterior, ou seja, não possuem um lado apoiado na horizontal e sim, por exemplo, um vértice, tomando a borda da folha como referência, ou é explicitado o comprimento em todos os lados ou é fornecido apenas o comprimento da diagonal. Vejamos alguns casos, porém podem existir outros que não estejam em conformidade com o da figura 12:

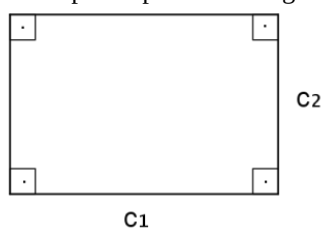
Figura 13 – Alguns desenhos não prototípicos de quadrados



Fonte: Araújo (2018, p. 52)

No caso do retângulo não quadrado, seu desenho prototípico possui o lado de maior comprimento na horizontal e o de menor comprimento na vertical, considerando a borda da folha como referência. Também são fornecidos os comprimentos dos dois lados, como na figura abaixo:

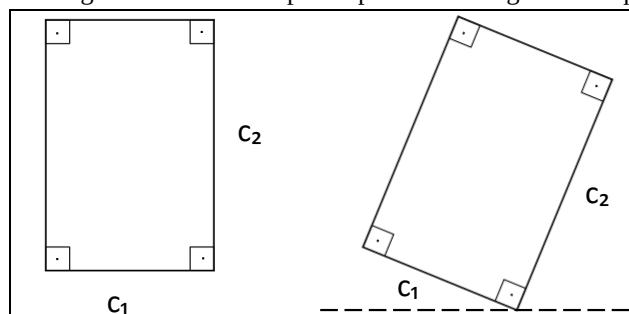
Figura 14 – Desenho prototípico do retângulo não quadrado



Fonte: Araújo (2018, p. 51)

Os desenhos não prototípicos de retângulos não quadrados possuem o lado de maior comprimento na vertical ou inclinado, apoiado em um dos vértices, considerando a borda da folha como referência. Neles, podem ser explicitados todos os comprimentos ou dois deles, como nos exemplos a seguir, ou o da diagonal e de um dos lados, entre outras possibilidades que se diferenciam do representado na figura 14.

Figura 15 – Alguns desenhos não prototípicos de retângulos não quadrados

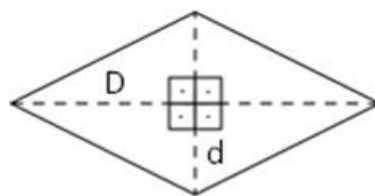


Fonte: Araújo (2018, p. 51)

O da esquerda pode ser considerado como o que mais se aproxima do desenho prototípico, porém diferencia-se por possuir o lado de maior comprimento na posição vertical. Já o da direita possui os lados em posição oblíqua, tomando como referência a linha tracejada.

O último paralelogramo a ser discutido, porém igualmente importante, é o losango não quadrado. Seu desenho prototípico é aquele que possui a diagonal de maior comprimento na horizontal e a de menor comprimento na vertical, tomando as margens da folha como referência.

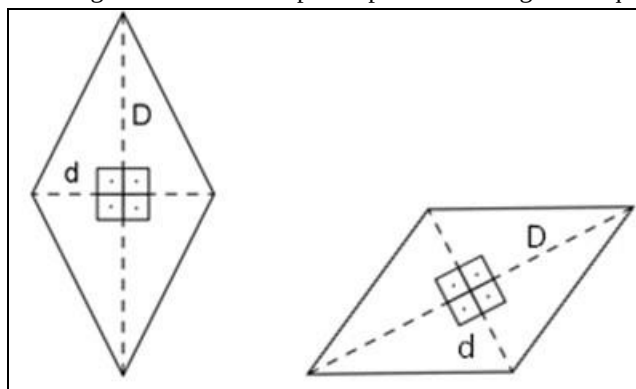
Figura 16 – Desenho prototípico do losango não quadrado



Fonte: Araújo (2018, p. 52, adaptado)

Os desenhos não prototípicos de losangos não quadrados se diferenciam do exposto acima por não possuírem a diagonal de maior comprimento na posição horizontal ou por estarem com um dos lados apoiados horizontalmente, tomando a borda da folha como referência, ou por ser fornecido o comprimento do lado ao invés dos comprimentos das diagonais, entre outras características que fogem do padrão destacado anteriormente. Vejamos alguns exemplos:

Figura 17 – Alguns desenhos não prototípicos de losangos não quadrados



Fonte: Araújo (2018, p. 51-52, adaptado)

Assim como dito para o retângulo não quadrado, o da esquerda pode ser considerado como o que mais se aproxima do desenho prototípico, porém diferencia-se por possuir a diagonal de maior comprimento na posição vertical. O outro está com um de seus lados apoiado horizontalmente, considerando a borda da folha como referência.

Por fim, alertamos que trabalhar apenas com desenhos prototípicos pode gerar entraves à aprendizagem dos estudantes em Geometria. Assim, destacamos a necessidade de explorar as figuras geométricas planas em diversas representações e não apenas os desenhos prototípicos. Esse aspecto contribui para o reconhecimento dos elementos e propriedades comuns entre elas e, com isso, o sentido atribuído pelo sujeito passa a ser mais amplo.

As discussões traçadas nas seções anteriores servirão de suporte para a seção seguinte, na qual discutiremos a respeito dos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, e como ambos podem ser considerados ao lidar com a área de paralelogramos, tomando com maior ênfase as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas.

1.4 ESTUDO DAS SITUAÇÕES COMPLEXAS E SUAS RESPECTIVAS TAREFAS ELEMENTARES NAS IMBRICAÇÕES DOS CAMPOS DAS GRANDEZAS E MEDIDAS E DA GEOMETRIA

Vimos na seção específica da TCC que Vergnaud (1986) considera um campo conceitual como um conjunto que contempla situações e conceitos, bem como as diversas representações e os invariantes mobilizados ao lidar com as tarefas. Este pesquisador também aponta para a necessidade de tomar objetos de estudo menores (fazer recortes) para analisar o processo de conceituação e desenvolvimento de habilidades (Vergnaud, 2013). É nesse sentido que tomamos neste trabalho dois campos conceituais, o da Geometria e o das Grandezas e Medidas e, mais estritamente, o das grandezas geométricas, sobre o qual

Bellemain e Lima (2002) alertam para a importância de considerar sua complexidade ao analisar os erros cometidos pelos alunos e suas possíveis origens, e Lima e Carvalho (2010, p. 137) apontam que “é consenso que o estudo das grandezas geométricas é uma maneira privilegiada de se promover a ligação entre esses dois importantes campos da matemática escolar”.

Em relação à grandeza geométrica área, pertencente a um campo conceitual mais amplo – o das Grandezas e Medidas – há um conjunto de situações que dá sentido ao seu conceito, proposto por Baltar (1996), que contempla a comparação de áreas, medida de área e produção de superfícies. Ao referido conjunto, Ferreira (2010) incluiu a situação de mudança de unidade. Incorporadas algumas substituições¹³, as situações que dão sentido ao conceito de área passaram a ser assim denominadas: comparação de áreas, medição de área, produção de superfícies e conversão de unidades.

No caso da comparação, o sujeito tem a tarefa de comparar áreas, dizendo se são iguais, maiores ou menores. Ela está situada em torno do quadro das grandezas, pois ao compararmos duas figuras, estamos verificando se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência – ter mesma área. Note que mesmo o destaque sendo dado ao quadro das grandezas, na comparação das figuras há também a presença, embora em segundo plano, de outros quadros, como o geométrico e o numérico. Este último não será enfatizado pelos motivos já explicitados anteriormente.

Nas situações de medição, a tarefa principal que o sujeito tem a desempenhar é medir áreas, que pode ser cumprida de diferentes maneiras como, por exemplo, realizando comparações, estimativas ou utilizando instrumentos formais de medição. Além dessa, incorporamos a partir de necessidade encontrada ao analisar os LD, e por isso uma das razões de apresentá-la aqui, a tarefa de determinar outras grandezas, principalmente comprimentos, dada a área, ou ela e um comprimento dado, conforme o extrato a seguir:

¹³ De acordo com Ferreira (2018), estudos e discussões realizados por participantes do grupo de pesquisas Pró-grandezas da UFPE conduziram à substituição de alguns termos nas classes de situações, como medição (Morais, 2013) em substituição à medida (Baltar, 1996) na situação de medida de área, pois a medida, em determinada unidade de área, seria o resultado da medição e não a situação em si; conversão (Ferreira, 2018) em substituição à mudança (Ferreira, 2010) na situação de mudança de unidade, pois a conversão está associada à transformação sem alteração do estado físico, enquanto que a mudança está relacionada à variação/transformação de um estado.

Figura 18 – Exemplo de uma situação de medição para determinar comprimentos a partir de uma área dada, no LD do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 179)

Como podemos observar na situação acima, o estudante não tem a tarefa de medir áreas, pois ela já é previamente fornecida, mas de determinar outras grandezas, no caso comprimentos, a partir de uma área dada. Por esse motivo, considerando a tarefa cognitiva que o sujeito tem a desempenhar, optamos por dividir a situação de medição de áreas em duas tarefas: medir áreas e determinar grandezas a partir dela.

Nas situações de medição se destaca o quadro numérico e o resultado esperado é uma grandeza (número acompanhado de uma unidade de medida), seja ela área, comprimento ou outra. No entanto, poderá surgir a necessidade de representar alguma figura por meio de desenho para servir de apoio à resolução, remetendo também ao quadro geométrico e trazendo à tona a importância das imbricações entre esses dois campos.

Em relação às situações de produção de superfícies, a tarefa do sujeito é produzir figuras de mesma área que a de uma figura dada, de área maior ou menor que a de uma figura dada ou a produção de superfícies a partir de uma área dada. Esse tipo de situação se diferencia das anteriores por admitir várias respostas corretas e, apesar de a resposta esperada ser um objeto gráfico, pertencente ao quadro geométrico, o estudante não precisa necessariamente fazer o desenho da figura, pois pode se apoiar na linguagem natural, utilizando a representação verbal, para descrever por meio de um texto as características do objeto geométrico solicitado. Nesse tipo de situação, a presença dos quadros numéricos e das grandezas também tem grande importância, apesar de o destaque maior ser para o geométrico.

Em relação à situação de conversão de unidade, a tarefa que o sujeito tem a desempenhar é representar uma mesma grandeza utilizando unidades de medidas distintas, o que corresponde a obter diferentes pares (n° , unidade medida), porém equivalentes. Mais precisamente:

As situações de conversão de unidade têm como procedimento caracterizar que uma mesma grandeza pode ser representada com unidades de medidas diferentes. Essas situações devem privilegiar a articulação entre o quadro dos objetos geométricos, o quadro das grandezas e o quadro numérico para que a compreensão do par ordenado (número, unidade de medida) não seja apenas uma transformação operatória com o uso de um sistema de unidades (Ferreira, 2018, p. 65).

Os diferentes tipos de situações apresentados acima contribuem para que o sujeito atribua sentido ao conceito de área, passando pelos quadros numérico, geométrico e das grandezas, percebendo que figuras geométricas com diferentes regiões internas podem ter mesma área e que ela não é o número, pois este depende das unidades adotadas, caracterizando a área como uma grandeza autônoma.

No campo da Geometria, há um conjunto de situações que dá sentido ao conceito de quadrilátero notável, proposto por Pereira da Costa (2019) a partir da verificação em livros didáticos de Matemática. Este pesquisador, apoiado na TCC, aponta que essas situações são: classificação, construção e inclusão. Como vimos na seção anterior dedicada às definições, os paralelogramos compõem uma das famílias dos quadriláteros notáveis e, com isso, esse conjunto também os abrange.

Antes de passarmos ao detalhamento de cada uma dessas situações, precisamos fazer duas colocações. A primeira é que, embora Pereira da Costa (2019) tenha se apoiado nas ideias de Vergnaud (1986) para proposição dessa tipologia, ele caracteriza as situações como didáticas, por estarem presentes nos livros didáticos, e já vimos anteriormente que o conceito de situação na ótica da TCC é outro. Nesse sentido, as adotaremos, mas considerando-as como situações no âmbito dessa teoria, isto é, como tarefas matemáticas que podem ser decompostas em tarefas cognitivas elementares. Em relação à segunda colocação, Pereira da Costa (2019) deixou claro que “no levantamento das situações que dão sentido ao conceito de quadriláteros notáveis, não discutiremos sobre os invariantes operatórios e as representações simbólicas, pois não é objetivo de nossa pesquisa” (p. 60). Em nosso estudo, vamos focar também nesses elementos do tripé do conceito que não foram objetos de estudo do pesquisador supracitado. Feitas estas observações, podemos caracterizar cada situação do campo da Geometria (identificação, classificação, construção e inclusão), apoiados em Araújo (2018), Pereira da Costa (2019) e nos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais.

Na situação de classificação, Pereira da Costa (2019) aponta que o sujeito deverá reconhecer (ou identificar) os quadriláteros notáveis a partir da sua representação gráfica no plano. Esse pesquisador usa “classificação ou identificação” (p. 61) remetendo à mesma classe de situação. No entanto, levando em consideração as tarefas cognitivas a serem desempenhadas pelos sujeitos em cada uma delas, percebemos que identificar e classificar são

de naturezas distintas, como discutimos em nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018). Por exemplo, em uma situação que contemple os desenhos de várias figuras, se pedirmos para assinalar os paralelogramos, o sujeito irá identificar. Mas se solicitarmos que ele diga quais são quadrados, retângulos e losangos, ou seja, se as classes estão pré-definidas, sua tarefa é classificar as figuras que pertencem a cada uma delas. Concordamos com Lima e Carvalho (2010, p. 151) ao afirmarem que classificar é “[...] organizar as figuras em classes [...]”. Dessa maneira, temos duas situações distintas voltadas ao reconhecimento das figuras – identificação e classificação – em que a primeira, geralmente, antecede a segunda.

Na situação de inclusão, a tarefa do sujeito é relativamente mais complexa do ponto de vista cognitivo que as anteriores, pois ele precisa estabelecer relações entre as propriedades dos quadriláteros notáveis, tais como indicar características comuns entre quadrado e retângulo ou apresentar uma divergência entre eles, agora, entre o quadrado e o retângulo não quadrado. A partir da situação de classificação, já é possível notar alguns indícios da situação de inclusão ao percebermos se os estudantes incluem os quadrados ao dizer quais são retângulos e losangos, ou mesmo colocar todos esses na classe dos paralelogramos.

Na situação de construção, o sujeito tem a tarefa de representar as figuras geométricas planas por meio de uma condição dada, seguida da sua orientação, que pode ser apenas passar de uma linguagem verbal para a gráfica, construir com o auxílio de um *software* ou com materiais manipulativos adequados, este último resultando no objeto físico. Apesar de haver uma proximidade com a situação de produção de superfícies proposta por Baltar (1996), elas são distintas, porém interligadas. Esta última envolve a relação entre o objeto geométrico e a grandeza. Já a de construção está relacionada à passagem de uma linguagem, geralmente, verbal, para outra, a gráfica. As situações de produção podem exigir as de construção, como veremos em exemplos mais adiante. Destacamos que o termo construção proposto por Pereira da Costa (2019), por vezes, está muito atrelado ao uso de *softwares* ou materiais como régua e compasso para poder construir. Assim, apesar de o utilizarmos, reforçamos que a tarefa cognitiva do estudante em nosso estudo será de representar figuras por meio de desenhos, sem o uso desses materiais.

Diante dos dois conjuntos de situações acima, um pertencente ao campo das Grandezas e Medidas, que dá sentido ao conceito de área (comparação, medição, produção e conversão de unidades), e outro ao campo da Geometria, que dá sentido ao conceito de quadriláteros notáveis, em nosso caso, paralelogramos (identificação, classificação, inclusão e construção), defendemos que quando os estudantes lidam com as situações do primeiro conjunto necessitam dominar tarefas elementares que remetem ao segundo. Em outras

palavras, para lidar adequadamente com as situações e compreender aspectos sobre área de paralelogramos, precisamos considerar também as situações voltadas aos paralelogramos. Essa necessidade se deve ao fato de esses dois campos estarem fortemente imbricados no tratamento desse conceito e que raramente as resoluções dessas situações se dão em cada campo isoladamente, sem que haja nenhuma intervenção do outro. Nesse sentido, segundo Teles (2007, p. 264), podemos olhar para as imbricações “[...] como abertura de possibilidade de resolução evidenciada na variedade de tipos de procedimento de resolução [...]”.

A adoção de situações de campos conceituais distintos, porém imbricados, notadamente o da Geometria e o das Grandezas e Medidas, se justifica ainda pelo fato de que, ao estudar as situações sobre a área de paralelogramos, além de se considerar as relações entre objeto geométrico, grandeza e medida, próprias da área, precisamos tomar apoio também no que está em torno do objeto paralelogramo, suas propriedades e situações que dão sentido a seu conceito, pois suas diferentes representações e o tipo de cada um deles podem ter relações diretas com a área como veremos nos exemplos seguintes. Teles (2007) destacou que ao mobilizar conhecimentos geométricos relativos à figura, suas propriedades e características como base ou altura, o estudante está no campo geométrico.

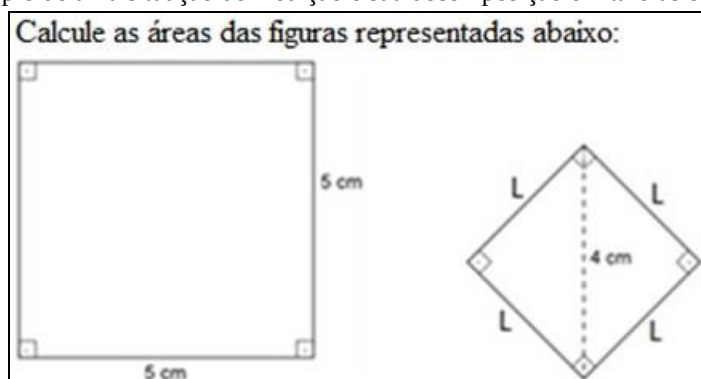
Antes de exemplificarmos, gostaríamos de estabelecer um paralelo com os campos conceituais estudados por Vergnaud. Nas discussões sobre os campos das Estruturas Aditivas e Multiplicativas, em geral, não se debruçam sobre a natureza dos números, visto que é uma variável em que os valores que ela pode assumir consistem em elementos importantes para taxas de acerto ou de erro. Por exemplo, os estudantes geralmente têm mais erros em cálculo numérico quando lidam com números decimais. Quando olhamos para os esquemas mobilizados em situações de Estruturas Aditivas ou Multiplicativas com tais números, é preciso se ancorar tanto nos elementos do próprio campo quanto nas ideias relativas às operações com números que constituem tarefas elementares (Te) dentro da situação complexa (Sc), pois o pesquisador supracitado aponta que as Sc podem ser decompostas em Te cuja complexidade deve ser estudada, uma vez que o fracasso em uma delas pode conduzir ao fracasso global.

Na decomposição das Sc em Te, estas últimas podem continuar no próprio campo, como é o caso das operações com números nos campos das Estruturas Aditivas e Multiplicativas, ou remeter a campos conceituais distintos. Quando acontece desta segunda maneira, a noção de imbricações entre campos conceituais aparece com mais intensidade. Nesse sentido, vamos olhar para as situações que envolvem a área de paralelogramos como situações complexas que precisam ser decompostas em tarefas elementares, as quais podem

remeter a campos conceituais distintos e suscitar diferentes esquemas, cujas natureza e dificuldades próprias de cada campo estão em jogo.

De modo análogo, ao estudarmos uma situação mais ampla, precisamos do suporte dos diferentes campos conceituais. Nesse sentido, vamos olhar para as etapas dos diferentes modos de resolução como tarefas elementares cujo fracasso em uma delas pode implicar o insucesso global. No entanto, ressaltamos que os modos de resolução que serão apresentados a seguir não são os únicos e nem há um rigor para seguir a ordenação proposta, pois a decomposição em diferentes tarefas elementares e sua ordem dependem dos esquemas mobilizados pelos sujeitos. Às vezes, lidar com tarefas de uma classe leva à passagem por outras, até mesmo por idas e vindas em cada uma delas, cuja ordem não é estrita, fazendo as diferentes classes de distintos campos, ora imbricados, terem ou não uma relação mais próxima. Esse aspecto se justifica pela própria complexidade do campo conceitual das Grandezas Geométricas e dos campos a sua volta: o da Geometria e o das Grandezas e Medidas. Vamos aos exemplos:

Figura 19 – Exemplo de uma situação de medição e sua decomposição em tarefas elementares



Fonte: Araújo (2018, p. 84-85, adaptado)

Temos uma situação de medição em que a tarefa do estudante é encontrar as áreas da região interna dos quadrados representados acima. O da esquerda se enquadra no desenho prototípico, com o comprimento do lado fornecido. Para a obtenção da sua área, poderiam ser utilizadas expressões de área, sobre as quais Teles (2007, p. 29) apontou que:

[...] podemos vê-las como um elemento do campo conceitual das grandezas geométricas e também como um elemento que articula vários outros campos conceituais. São elementos do campo das grandezas geométricas, pois expressam relações entre comprimentos de figuras geométricas planas e, entre outros aspectos, desempenham papel importante na aprendizagem do conceito de área.

Assim, o estudante poderia fazer: $A_q = L \times L$ ou $(L)^2$ (área do quadrado (A_q) é igual ao comprimento do lado (L) elevado ao quadrado). Já encontrar a área do quadrado da direita é uma tarefa mais complexa do ponto de vista cognitivo do estudante, uma vez que o desenho que compõe a situação não é prototípico e o dado fornecido foi apenas o comprimento da sua

diagonal. Uma possibilidade de resolução é utilizar o teorema de Pitágoras, para calcular o comprimento do lado do quadrado e elevar esse comprimento ao quadrado para calcular a área. Nesse caso, os estudantes teriam que lidar com uma medida de comprimento irracional, saindo do domínio numérico dos inteiros positivos, o que é uma fonte de erros. Discutimos a seguir outra possibilidade de decomposição dessa situação complexa em tarefas elementares, na qual há fortes imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas:

Te₁: se apoiar na situação de inclusão (campo geométrico) e observar que todo quadrado é losango e, com isso, utilizar a expressão de área deste último para obter a área da região interna da figura fornecida, ou seja: $Al = \frac{D \times d}{2}$ (área da região interna delimitada por um losango (Al) é igual ao comprimento da diagonal maior (D) vezes o comprimento da diagonal menor (d), dividido por 2).

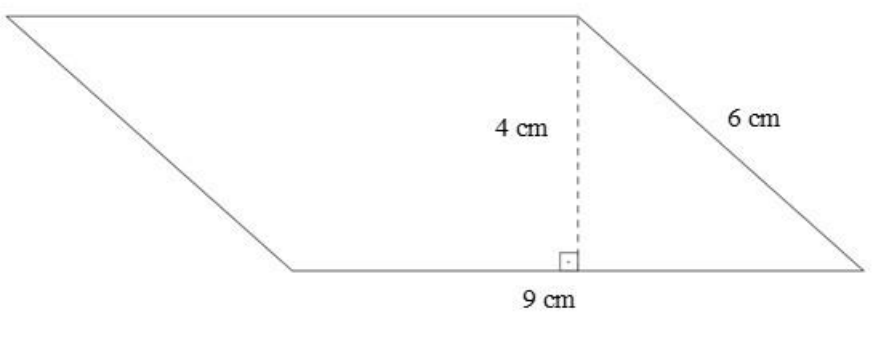
Te₂: se apoiar ainda na anterior ao utilizar a inclusão, mas ir além: aplicar a propriedade de que no quadrado as diagonais são congruentes, e fazer $Aq = \frac{D^2}{2}$ (área da região interna delimitada por um quadrado (Aq) é igual ao produto do comprimento das diagonais (D) dividido por dois e, por ser um quadrado, $D = d \rightarrow D^2$).

As duas tarefas elementares acima remetem a situações do campo da Geometria, mais precisamente, a de inclusão, e, como podemos ver, trazem implicações diretas sobre a maneira de calcular a área em uma situação de medição mais complexa pertencente ao campo das Grandezas e Medidas. Apesar de sabermos que há presença do campo algébrico ligado às expressões de área e também do numérico na realização das operações, foi o apoio no campo geométrico que possibilitou lidar com a situação dessa maneira. Apesar de concordarmos com Teles (2007) sobre as imbricações desses outros campos e as interferências provocadas por eles, não os exploramos porque nosso recorte de análise consistiu em colocar uma lupa nas imbricações entre o campo geométrico e o das Grandezas e Medidas.

Os participantes da nossa dissertação de mestrado – (Araújo, 2018), alunos do 8º ano do ensino fundamental, tiveram 78% de acertos no primeiro caso e apenas 26% no segundo. Na ocasião, já pretendíamos que eles considerassem que todo quadrado é losango e fizessem uso dessa relação, porém até mesmo os que realizaram a inclusão na situação de classificação não reinvestiram esse conhecimento nessa situação, se mostrando necessária uma intervenção como a que pretendemos realizar.

Figura 20 – Exemplo de uma situação de produção de superfícies e sua decomposição em tarefas elementares

Questão 4: Observe a figura a seguir e faça o que se pede:



a) Desenhe um retângulo R com área igual à da figura acima.

b) Desenhe um losango L com área igual à da figura acima.

c) Desenhe um quadrado Q com área igual à da figura acima.

Fonte: Araújo, (2018, p. 92)¹⁴

Na situação acima, temos vários elementos que aumentam sua complexidade, como a presença de dados numéricos extras, se fazendo necessário escolher quais serão utilizados para o cálculo da área, a representação da figura que, apesar de possuir o lado de maior comprimento na posição horizontal e altura traçada internamente, sua inclinação é para a esquerda. Um erro comum dos estudantes ao calcular a área de um paralelogramo não retângulo e não losango apontado por pesquisas anteriores como Baltar (1996) e Douady e Perrin-Glorian (1989) é fazer o produto dos comprimentos dos lados a partir da mobilização de uma expressão de área errônea e apoiado em um teorema em ação falso, o qual leva ao erro global em toda a situação. Vejamos algumas tarefas elementares que estão em jogo:

Te₁: calcular a área do paralelogramo dado. Se o estudante opta pela utilização da expressão de área dessa figura, pode se apoiar na seguinte proposição: “a área de um paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado” (Barbosa, 2006, p. 177). Um aspecto importante envolvendo a área do paralelogramo é a sua invariância em relação ao lado tomado por base¹⁵. No caso acima, para o cálculo da área,

¹⁴ Parte da malha fornecida aos participantes da pesquisa foi recortada, aqui, por uma questão de organização textual.

¹⁵ Essa e outras demonstrações de propriedades aqui utilizadas se encontram no Anexo A da nossa dissertação (Araújo, 2018).

teríamos: $A_p = b \times h$ (área da região interna delimitada por um paralelogramo (A_p) é igual ao produto do comprimento de um lado tomado como base (b) pelo comprimento da altura (h) relativa a ele);

Te₂: classificar um retângulo para poder representá-lo no item (a). Com isso, é preciso escolher adequadamente seus comprimentos de modo que as áreas sejam iguais, realizando assim, além da identificação e classificação, a comparação e a medição, que são situações dos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, reforçando o papel das imbricações entre eles. Nesse tipo de paralelogramo, a maneira de calcular a área pela utilização da expressão de área é: $A_r = C_1 \times C_2$ (área do retângulo (A_r) é igual ao produto dos comprimentos (C_1 e C_2) de seus lados);

Te₃: classificar um losango para poder representá-lo no item (b). Aqui também se faz necessário escolher e relacionar adequadamente os comprimentos de suas diagonais de modo que as áreas sejam iguais, realizando comparações e medições. Essa ação é mais complexa do ponto de vista cognitivo que a escolha dos comprimentos do retângulo anterior, tida como fonte de dificuldades por parte dos estudantes e apontadas nos estudos de Araújo (2018) e Bernardes, Souza e Zandonade (2014). A maneira de calcular sua área por meio da expressão de área, assim como a do quadrado, já foi discutida no exemplo anterior;

Te₄: classificar um quadrado para poder representá-lo no item (c). Assim como nos casos anteriores, é preciso também escolher adequadamente o comprimento do seu lado de modo que as áreas sejam iguais.

Um estudante que já lidou com diversas situações tanto do campo da Geometria quanto das Grandezas e Medidas e, conseqüentemente, tem um repertório de esquemas mais amplo, não precisa passar por todas as tarefas elementares e ações acima para obter êxito na situação complexa, pois basta apenas mobilizar a seguinte tarefa elementar:

Tex: incluir quadrados como retângulos e losangos e desenhar apenas um quadrado que atenda ao solicitado nos três itens, visto que não há restrições como “retângulo não quadrado” ou “losango não quadrado”, fazendo adequadamente a escolha do comprimento do seu lado de modo que possua área igual à da região interna do paralelogramo dado e, com isso, além das situações de inclusão e produção, se apoia também nas de comparação e medição. Esse aspecto reforça como essas situações estão interligadas devido às próprias imbricações entre os campos às quais elas pertencem.

A Tex exige a mobilização de esquemas que utilizem simultaneamente várias situações dos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, embora a de inclusão funcione como ponto chave na resolução, reforçando mais uma vez nossa escolha pelo estudo

das imbricações entre esses dois campos. Em nossa dissertação, apenas 5% dos participantes fizeram dessa maneira, o que corresponde a somente dois dos 40 participantes, fortalecendo nossa posição em defesa da realização de uma intervenção apoiada nos dois conjuntos de situações supracitados. Cabe ressaltar que após a sua realização não podemos garantir que os estudantes sigam exatamente as etapas descritas, pois o domínio das situações pelos sujeitos é progressivo e pode levar um longo período de tempo, como vimos anteriormente. No entanto, esse primeiro contato com a diversidade de situações a serem propostas ampliará o repertório de esquemas de cada um deles.

Após toda essa discussão teórica e com o intuito de intervir, passamos para a parte metodológica, que inicia pela caracterização do contexto em que foi realizada a pesquisa e finaliza situando a engenharia didática.

2 ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Este capítulo divide-se em duas seções. A primeira é dedicada à caracterização do contexto da pesquisa: a escola, os participantes, o formato das aulas durante e após a pandemia de Covid-19. A segunda seção é dedicada a situar a metodologia de pesquisa adotada, a engenharia didática, apoiada pelos textos de Artigue (1996, 2020), Almouloud e Coutinho (2008), Brousseau (2013) e Bittar (2017).

2.1 CARACTERIZAÇÃO DO CONTEXTO DA PESQUISA

A motivação para realizar uma intervenção com os estudantes de um colégio da rede municipal de Ferreiros vem desde nossa monografia da graduação, como dito na parte introdutória desta tese, quando percebemos dificuldades dos alunos ao lidar com a área de paralelogramos. Além disso, deveria ser uma escola da rede municipal, visto que foram estudantes do 9º ano do EF e com disponibilidade de sala de aula no contraturno para a aplicação de uma sequência didática pelo pesquisador.

A rede municipal de educação do município de Ferreiros, estado de Pernambuco, dispõe de duas escolas que atendem tanto aos anos iniciais quanto aos anos finais do ensino fundamental, sendo ofertados nos turnos matutino e vespertino. Uma delas oferece ainda a modalidade Educação de Jovens e Adultos (EJA) à noite. No entanto, apenas em uma teria sala de aula disponível no contraturno durante o ano letivo de 2022 (ano de realização da experimentação da pesquisa) e, consequentemente, foi a indicada pela secretaria municipal de educação como a que atenderia ao nosso estudo.

A instituição de ensino em que realizamos a pesquisa tem 14 salas de aula, sendo uma delas dedicada ao Atendimento Educacional Especializado (AEE). Além disso, conta com outros espaços como laboratório de informática, sala de leitura (minibiblioteca), quadra poliesportiva, pátio razoavelmente extenso, banheiros, cantina, depósitos, sala dos professores, secretaria e sala da equipe de gestão.

O formato habitual das aulas na escola campo de pesquisa é presencial, entretanto, com a pandemia de Covid-19, desde o primeiro semestre de 2020 até agosto de 2021, os estudantes passaram a realizar todas as atividades em suas casas. Apostilas com atividades elaboradas pelos próprios professores eram entregues mensalmente, os quais orientavam os estudantes por meio de grupos de *WhatsApp*. As atividades funcionavam como elemento de

avaliação e para computar a frequência do estudante, e deveriam ser devolvidas ao final de cada mês. O LD também foi utilizado nesse período.

Em 2021 foi desenvolvida a plataforma Educa Ferreiros¹⁶, espaço para postagem de atividades, vídeos e orientações. Entretanto, a maioria dos estudantes continuou a utilizar o *WhatsApp*. Para aqueles que não dispunham de aparelho e/ou conexão com internet, as apostilas continuaram a ser entregues.

A partir de setembro de 2021, com a vacinação contra Covid-19 e, consequentemente, a diminuição no número de casos e de óbitos, a secretaria de educação de Ferreiros optou pelo retorno dos estudantes em formato híbrido da seguinte maneira: cada turma foi dividida em dois grupos (A e B); em uma semana, o grupo A tinha cinco aulas diárias presenciais de 30 minutos de duração cada e o grupo B ficava em casa com aula remota. Na outra, havia o revezamento. Os professores após liberarem os estudantes, ficavam orientando aqueles que estavam à distância na realização das atividades.

Em 2022, o primeiro mês do ano letivo (fevereiro) foi totalmente remoto, com auxílio das apostilas e da plataforma. A partir de nove de março desse mesmo ano teve o retorno totalmente presencial. Algumas atividades continuaram sendo postadas na plataforma somente em dias de reunião, planejamento ou formação para os professores.

Os nossos participantes foram estudantes do 9º ano dessa escola, os quais eram divididos em três turmas, sendo duas no turno da manhã (9º A e 9º B) e uma no turno da tarde (9º C), com cerca de 25 alunos cada uma delas. Os estudantes que residem na zona rural frequentavam apenas as turmas da manhã devido ao transporte escolar. Já a turma da tarde era formada totalmente pelos da zona urbana. A maioria deles eram de classe baixa, beneficiários de programas sociais, cuja renda dos pais é proveniente do trabalho na usina de cana-de-açúcar vizinha ao município, da agricultura e criação de animais ou de pequenos comércios locais.

Pelo fato de as sessões terem sido realizadas à tarde, participaram apenas estudantes das duas turmas da manhã, uma vez que os da tarde estavam em aula nesse momento. Essas duas turmas eram atendidas pela mesma professora de Matemática, a qual é formada em Ciências com Habilitação em Matemática, possui especialização em Educação e exerce a docência há 22 anos.

O convite para participação da pesquisa foi realizado nas duas turmas da manhã e a adesão foi voluntária com a anuência de pais/responsáveis por meio de um termo de

¹⁶ <https://educaferreiros.tec.br/>

consentimento livre e esclarecido¹⁷. Inicialmente tivemos 23 estudantes inscritos e, dentre os que não devolveram o termo assinado e/ou não participaram da maioria dos encontros, principalmente os dedicados ao campo das Grandezas e Medidas, finalizamos com apenas nove deles.

A seção seguinte versará sobre a engenharia didática, com o intuito de situá-la e caracterizá-la como metodologia adotada na pesquisa. Tudo o que compõe os capítulos subsequentes apoia-se nas etapas e especificidades da engenharia didática, bem como a parte histórica e epistemológica brevemente tratada na fundamentação teórica e a discussão da seção anterior, cuja vertente é mais didática.

2.2 SITUANDO A ENGENHARIA DIDÁTICA

A engenharia didática (ED) surgiu devido à necessidade de uma metodologia que auxiliasse os pesquisadores na elaboração e análise de sequências didáticas, de modo a contemplar tanto aspectos específicos da própria Matemática quanto didáticos. Bittar (2017) aponta que, na França, no início da década de 1970, eram realizadas várias investigações sobre o processo de aprendizagem da Matemática, por meio de experimentações de sequências didáticas em sala de aula, mas “não havia, à época, uma metodologia que auxiliasse os pesquisadores no preparo e análise dessas sequências [...]” (p. 101). Em seguida, passaram a surgir os primeiros trabalhos sobre ED, a qual foi debatida coletivamente pela primeira vez na segunda Escola de Verão de Didática da Matemática¹⁸, em 1982.

Ainda no início dos anos 1980, alguns estudos começaram a ser sistematizados por pesquisadores como Guy Brousseau, Yves Chevallard, Régine Douady e, mais notadamente, Michèle Artigue, que desempenha um papel importante na sistematização da engenharia didática ao realizar o curso da Escola de Verão de 1989, momento em que a ED volta a ser estudada, resultando na publicação de um artigo que permitiu a disseminação dessa metodologia não apenas para a comunidade da didática da matemática francesa, mas para toda a França e outros países.

Segundo Brousseau (2013),

A engenharia didática tornou-se assim, de facto, uma parte da Didática da Matemática onde dispositivos didáticos precisos, viáveis, observáveis e

¹⁷ Modelo disponível no Apêndice C desta tese.

¹⁸ Evento realizado na França de dois em dois anos que reúne diversos pesquisadores em Didática da Matemática.

reprodutíveis, específicos de várias formas de conhecimento de determinadas entidades matemáticas, são concebidos e estudados, de forma empírica, experimental e teórica (Brousseau, 2013, p. 6, tradução nossa)¹⁹.

Desde a sua sistematização até então, a ED vem sendo utilizada em diversas pesquisas, nas quais o foco de investigação é voltado a relações entre ensino e aprendizagem de objetos matemáticos, inclusive, no campo das Grandezas e Medidas (Baltar, 1996; Douady; Perrin-Glorian, 1989; Perrin-Glorian; Bellemain, 2019).

Em relação ao seu interesse, Brousseau (2013, p. 4) aponta que:

A engenharia didática preocupa-se com a criação de modelos consistentes e relevantes e a realização de dispositivos pedagógicos para um conhecimento específico, destinados a descrever ou prever, e explicar os acontecimentos observáveis de um dado episódio de ensino [...]. (Tradução nossa)²⁰.

O pesquisador supracitado ressalta ainda que “o estudo da consistência e relevância destes modelos requer um exame crítico de todos os conceitos relacionados com o ensino, a aprendizagem e a própria constituição da matéria ensinada” (*Ibid.*, p. 4, tradução nossa)²¹.

Mesmo diante do status alcançado, a ED não permaneceu estática com o passar do tempo, uma vez que, atualmente, existem algumas evoluções da engenharia didática inicial, tida como clássica ou de primeira geração. Tal fato foi tema de discussão da Escola de Verão em 2009, mais precisamente por Marie-Jeanne Perrin-Glorian, para discutir a engenharia didática de segunda geração, voltada ao desenvolvimento e formação, a qual passou a considerar o professor e suas práticas, interessada na elaboração de recursos para a formação desse profissional e que pudessem ser usados por ele em sala de aula. Além dessa, Artigue (2020) aponta outras, como: a Engenharia Didática Cooperativa, cujo surgimento encontra-se no âmbito da Teoria da Ação Conjunta em Didática; a do Percorso de Estudo e Pesquisa que consiste no olhar da Teoria Antropológica do Didático para a ED. Também podemos citar outras, como a dos Domínios de Experiência, a qual agrega questões da dimensão cultural; a Engenharia Didática Profissional, mais ligada à produção de recursos educativos, com

¹⁹ L'ingénierie didactique est alors devenue, de facto, une partie de la Didactique des mathématiques où se conçoit et s'étudie, empiriquement, expérimentalement et théoriquement, les dispositifs précis réalisables, observables et reproductibles d'enseignement, spécifiques de diverses formes de connaissances d'entités mathématiques déterminées.

²⁰ "L'ingénierie didactique s'occupe de créer des modèles consistants et pertinents et de réaliser des dispositifs d'enseignement d'une connaissance précise, destinés à décrire ou à prévoir, et à expliquer les événements observables d'un épisode d'enseignement déterminé [...]".

²¹ L'étude de la consistance et de la pertinence de ces modèles renvoie à un examen critique de tous les concepts relatifs à l'enseignement, à l'apprentissage et à la constitution même de la matière enseignée.

utilização ou não de tecnologias; e a Engenharia Didático-Informática, voltada ao desenvolvimento de *softwares* educativos.

Cientes da diversidade de engenharias citadas no parágrafo anterior, mesmo assim, nos apoiamos na ED clássica ou de 1ª geração, pois realizamos uma intervenção com os estudantes, focando na investigação em si e não em outros elementos específicos de cada uma das variações acima. Segundo Artigue (1996), a proposta deve visar um conteúdo matemático preciso, em nosso caso, o conceito de área de paralelogramos, o qual faz o pesquisador mergulhar no centro da complexidade do sistema investigado. Tomamos área de paralelogramos como conceito porque investigamos os conjuntos de situações que dão sentido a ele, os conceitos e teoremas em ação, e as representações simbólicas, todos mobilizados e/ou utilizados ao lidar com tarefas sobre esse conceito. Tal proposta nos conduziu a elaborar e experimentar uma sequência didática cujas situações pertencessem aos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, considerando também as imbricações entre eles.

Artigue (2020) aponta duas características essenciais da ED clássica: a primeira é que ela “baseia-se em realizações didáticas na sala de aula, ou seja, na concepção, implementação, observação e análise de sequências de ensino” (p. 32, tradução nossa)²² e a segunda consiste no fato de que:

a sua validação é interna, baseada no confronto entre a análise a priori e a posteriori, e a sua estruturação em quatro fases: a das análises prévias, a da concepção e análise a priori da engenharia, a da experimentação e coleta de dados, e finalmente a da análise a posteriori e validação (*Ibid.*, p. 32, tradução nossa)²³.

Cabe ressaltar que, embora essas fases estejam ordenadas, não significa que não se possa voltar a uma etapa anterior mesmo estando em uma posterior. Essas retomadas dependerão das necessidades que forem surgindo.

Neste momento, vamos apresentar apenas características de cada uma de suas fases, as quais serão realizadas efetivamente nos capítulos seguintes deste trabalho, mais especificamente nos capítulos 3, 4 e 5 dedicados, respectivamente, às análises prévias, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. Da mesma maneira, as pesquisas que utilizam a ED assim como as que se apoiam na TCC, ou em ambas, também serão discutidas nos capítulos seguintes.

²² elle est basée sur des réalisations didactiques dans les classes, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement.

²³ sa validation est interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori, et sa structuration en quatre phases: celle des analyses préalables, celle de la conception et de l'analyse a priori de l'ingénierie, celle de l'expérimentation et du recueil de données, enfin, celle de l'analyse a posteriori et de la validation.

Nas análises prévias, consideram-se articuladamente as vertentes epistemológica, cognitiva e didática. Em nossa pesquisa, a epistemológica trata-se de um estudo do ponto de vista matemático e histórico voltado para a área e os paralelogramos; a cognitiva envolve a aprendizagem, dificuldades e erros comuns e persistentes dos estudantes sobre a área e paralelogramos; por último, na didática entra o ensino de área de paralelogramos, documentos de orientação curricular, livros didáticos, questões e materiais utilizados na escola, seu funcionamento, entre outros. Portanto, as análises prévias devem subsidiar o estudo de concepções errôneas frequentes que se pretende desestabilizar e ancoram a etapa seguinte, a da concepção e análise a priori, a partir do que já sabemos sobre outras pesquisas e trabalhos já realizados.

Na concepção e análise a priori são concebidas as situações que compõem a sequência didática, o que conduz a elencar variáveis didáticas e realizar escolhas argumentadas dos valores a serem adotados para elas, bem como a descrição e antecipação de procedimentos de resolução das tarefas que serão realizadas, funcionando como referencial para nortear e explicar os achados durante a análise a posteriori. Cabe ressaltar que a análise a priori não é uma “bola de cristal” para prever tudo que pode acontecer durante a experimentação e nem significa “análise feita antes”, embora precisemos realizar uma primeira versão da análise a priori antes da realização da sequência, para ancorar teoricamente o instrumento construído. Assim, é preciso separar o que é específico de uma experimentação que a gente não pensava que seria daquela maneira do que é antecipável a partir do que já sabemos por meio de pesquisas já realizadas. Com isso, podemos incorporar na análise a priori, mesmo após a análise a posteriori, elementos que as pesquisas anteriores permitiriam antecipar, mas que por motivos diversos não foram antecipados.

A experimentação é o momento de colocar em prática as sessões que compõem a sequência didática e, a partir disso, realizar a observação e produção dos dados. Almouloud e Coutinho (2008, p. 68) apontam que “a análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo”. Nesta fase, o pesquisador pode retornar à análise a priori, em um processo de complementação. Antes da aplicação da sequência didática realizamos observações de aula e,

após sua aplicação, fizemos entrevistas semiestruturadas²⁴ com os participantes e com a professora.

Na análise a posteriori e validação é realizada a confrontação entre a análise a priori e os dados empíricos produzidos pelo percurso teórico-metodológico realizado, sem necessariamente ter que haver uma correspondência perfeita entre elas. Segundo Artigue (2020, p. 34, tradução nossa)²⁵: “O essencial é que a validação seja interna, não pensada em termos de uma comparação externa entre grupos experimentais e grupos de controle”. Nessa etapa, é possível verificar a pertinência das escolhas didáticas realizadas e testar a validade da hipótese que, em nosso caso, consiste no fato de que a concepção e experimentação de uma sequência didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, contribui para aprofundar a compreensão e provocar a diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem persistentes relativas à área de paralelogramos.

Agora, vamos discutir mais detalhadamente cada uma dessas etapas e, como já dito, algumas de suas vertentes já estão sendo abordadas nas seções anteriores, principalmente a epistemológica e um pouco da didática. Esta última e a dimensão cognitiva serão discutidas mais amplamente no capítulo a seguir, a partir do qual vamos observar como a área e os paralelogramos foram abordados em pesquisas anteriores, em documentos de orientação curricular, nos materiais da escola campo de pesquisa e nos livros didáticos adotados por ela.

²⁴ Seguimos dois roteiros prévios organizados por blocos de perguntas, disponibilizados nos Apêndices A e B desta tese, aos quais poderiam ser acrescentados outros questionamentos a partir das respostas obtidas. Todas as entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas pelo pesquisador.

²⁵ Ce qui est essentiel c'est que la validation est interne, et non pensée en termes de comparaison externe entre groupes expérimental et contrôle.

3 ANÁLISES PRÉVIAS

Este capítulo é dedicado às análises prévias ou preliminares, primeira etapa da ED, mais especificamente ao aprofundamento das vertentes cognitiva e didática, uma vez que a epistemológica já vem sendo contemplada ao longo do texto, principalmente na parte dedicada à área e aos paralelogramos como dito acima. Iniciamos com uma breve revisão de literatura com estudos sobre os paralelogramos, sobre área e os que tratam da área de paralelogramos. Em seguida, discutimos o ensino de área e de paralelogramos em documentos brasileiros de orientação curricular, assim como aqueles construídos tanto pelo estado de Pernambuco quanto pela escola campo de pesquisa, inclusive no período da pandemia de Covid-19. Finalizamos com a análise da coleção de livros didáticos de Matemática adotada nos anos finais do ensino fundamental da referida escola e trazemos algumas considerações relativas aos resultados encontrados, destacando suas contribuições para a construção das situações que compõem a sequência didática.

3.1 O QUE DIZEM ALGUMAS PESQUISAS JÁ REALIZADAS

Nossa revisão de literatura, além dos elementos comuns presentes em cada pesquisa, busca com o olhar da TCC privilegiar aspectos qualitativos e dar destaque às principais situações dos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, representações utilizadas, dificuldades verificadas e, se possível, invariantes operatórios mobilizados pelos participantes.

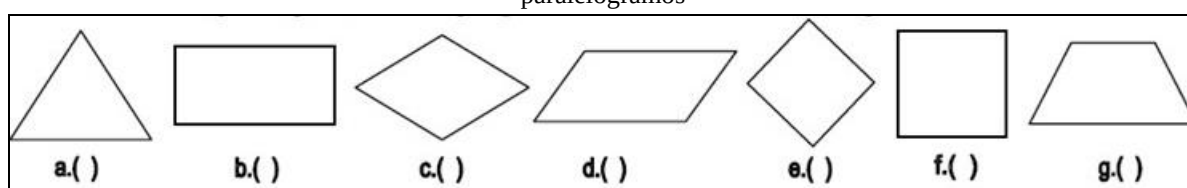
3.1.1 Sobre os paralelogramos

Esta subseção contempla as pesquisas de Menegotto e Lara (2011), Fujita (2012), Diniz (2013), Tavares (2014), Pereira da Costa (2016) que, embora abordem na sua maioria quadriláteros, apresentam resultados relativos aos paralelogramos, um dos focos do nosso estudo.

Menegotto e Lara (2011) realizaram uma pesquisa com estudantes do 7º ano do ensino fundamental cujo objetivo foi analisar a contribuição do GeoGebra para a construção de conceitos relativos aos paralelogramos. As pesquisadoras compararam o desempenho de um grupo experimental, com o qual realizaram uma abordagem dinâmica por meio do GeoGebra, e de um grupo controle utilizando o papel, lápis, quadro, giz etc. em uma abordagem estática,

nas situações de classificação de paralelogramos e também para apontar suas propriedades. Para atingir seu objetivo, inicialmente, aplicaram um pré-teste, realizaram uma intervenção seguida de um pós-teste igual ao primeiro para verificar se houve avanço no desempenho dos estudantes. A classificação que adotaram foi a inclusiva, ou seja, consideraram que o quadrado é retângulo e losango, e ambos são paralelogramos. Utilizaram o mesmo conjunto de figuras representado a seguir para as questões 1, 2, 3 e 4, correspondentes às classes de quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos, nessa ordem. Assim, a tarefa cognitiva do sujeito era assinalar as figuras que pertenciam a cada uma dessas classes.

Figura 21 – Figuras utilizadas pelas pesquisadoras na classificação de quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos



Fonte: Menegotto e Lara (2011, p. 37)

As pesquisadoras consideraram como desenhos prototípicos do retângulo não quadrado, losango não quadrado, paralelogramo não retângulo e não losango, e quadrado as figuras (b), (c), (d) e (f), nessa ordem, corroborando com os adotados em nosso estudo. Como podemos observar, entre os paralelogramos acima, apenas o quadrado apareceu em mais de um desenho, ou seja, não prototípico na letra (e) e prototípico na letra (f).

Em relação aos resultados da identificação de quadrados no pré-teste, a figura (f) foi reconhecida como quadrado por todos os participantes. No entanto, apenas um estudante do grupo experimental identificou também a figura (e). Já o da figura (f) foi reconhecido como quadrado por todos eles. O losango não quadrado foi reconhecido como quadrado por 42,86% deles. No grupo controle, nenhum estudante identificou corretamente todos os quadrados e 81,81% assinalaram apenas o que estava em seu desenho prototípico (figura f). Já o losango não quadrado foi reconhecido como quadrado por 27,27% deles.

No que se refere ao fato de os estudantes apresentarem melhor desempenho ao identificarem o quadrado em seu desenho prototípico, as autoras apontaram que se percebe “[...] não apenas nos livros didáticos, mas também nas explicações de alguns professores, o quadrado posicionado apenas como na alternativa f” (Menegotto; Lara, 2011, p. 39).

Após a intervenção, os estudantes do grupo experimental tiveram um aumento no desempenho de 42,86% na identificação de quadrados e no grupo controle o percentual de crescimento foi de 18,18%. Quanto às propriedades do quadrado, 85,71% dos estudantes do grupo experimental e 72,72% dos alunos do grupo controle conseguiram reconhecer pelo

menos uma delas: possuir quatro lados de mesmo comprimento ou quatro ângulos de 90° . Os percentuais de crescimento foram 57,14% e 9,09% para o primeiro e segundo grupos, respectivamente.

As pesquisadoras ressaltaram que tanto no caso do quadrado como no dos demais paralelogramos, a ênfase foi sobre as propriedades relativas aos ângulos e lados e não exploraram aquelas relativas às diagonais ou aos eixos de simetria, que também não foram citadas pelos participantes.

Na identificação de retângulos, 42,86% dos estudantes do grupo experimental e 36,36% dos alunos do grupo controle, no pré-teste, reconheceram apenas o que estava em seu desenho prototípico (figura b). Esses mesmos percentuais foram verificados para aqueles que, além da (b), também assinalaram o paralelogramo não retângulo e não losango (d). As pesquisadoras verificaram ainda que nenhum estudante dos dois grupos incluiu os quadrados (e) e (f) ao realizarem o pré-teste. Quanto ao crescimento na identificação após a intervenção, as pesquisadoras apontaram que foram os mesmos percentuais verificados para o quadrado e houve diminuição dos casos em que consideravam o paralelogramo não retângulo e não losango como retângulo.

Na descrição das propriedades dos paralelogramos exploradas nos itens, 57,14% dos estudantes do grupo experimental não responderam e 54,55% dos alunos do grupo controle erraram, ambos no pré-teste. Quanto aos erros, apontaram que os retângulos têm: “quatro lados de 90° ”, “quatro retas com o mesmo cm”, “quatro partes iguais” (p. 44). No entanto, como também sinalizado pelas autoras, essas expressões inadequadas poderiam estar relacionadas aos termos corretos como ângulos de 90° ou lados com mesmo comprimento, caracterizando-se, em nossa interpretação, como uma dificuldade na forma prediativa do conhecimento. Após a intervenção, os aumentos nos percentuais dos estudantes que conseguiram citar duas propriedades do retângulo (lados opostos paralelos e quatro ângulos de 90°) foram de 42,86% e 27,27% nos grupos experimental e controle, respectivamente.

No caso do losango, no pré-teste, 28,57% dos estudantes do grupo experimental identificaram todos eles (figuras c, e, f). Já o que estava em seu desenho prototípico (c) foi reconhecido por 14,29% desses participantes. Nenhum dos estudantes do grupo controle reconheceu os três losangos e 72,73% não conseguiram identificar pelo menos um deles. Entre os erros, trocaram losango com trapézio, retângulo não quadrado e paralelogramo não retângulo e não losango. Após a intervenção, 28,57% dos estudantes do grupo experimental melhoraram seu desempenho e passaram a incluir o quadrado em seu desenho prototípico (figura f) aos losangos. O índice de erros dos estudantes do grupo controle diminuiu em

54,55%. Segundo as pesquisadoras: “[...] percebemos que o losango foi um dos quadriláteros que os alunos encontraram mais dificuldades para construir, principalmente os alunos do grupo de controle” (Menegotto; Lara, 2011, p. 46).

Em relação às propriedades, 71,43% e 63,64% dos estudantes dos grupos experimental e controle, respectivamente, deixaram em branco no pré-teste. Realizada a intervenção, os resultados do pós-teste indicaram que houve diminuição nos percentuais de ausência de respostas, sendo de 28,57% no grupo experimental e de 63,64% no grupo de controle. Apesar desses valores, algumas respostas apresentadas pelos estudantes deste último não foram suficientes para caracterizar um losango, apesar de necessárias, como ter lados opostos paralelos, citada por 54,55% deles. Os aumentos nos percentuais de acertos ao citarem as duas propriedades relativas aos lados e ângulos de um losango foram de 14,29% no grupo experimental e de 9,09% no outro grupo.

Por fim, na identificação de paralelogramos, 42,86% dos estudantes do grupo experimental e 36,36% dos alunos do grupo controle assinalaram, no pré-teste, apenas o que estava em seu desenho prototípico (figura d) e os demais erraram ou não responderam. Com a intervenção, 57,14% e 36,36% dos estudantes dos grupos experimental e controle, respectivamente, conseguiram identificar todos os paralelogramos. No entanto, 28,57% do primeiro grupo continuou reconhecendo como paralelogramo apenas o que estava no desenho prototípico.

Em relação às propriedades, 71,43% dos estudantes do grupo experimental e 54,55% dos estudantes do grupo controle não responderam. Além disso, segundo as pesquisadoras, embora seja apontado no livro didático utilizado por eles que os paralelogramos possuem dois pares de lados paralelos, tal característica não foi citada por nenhum participante dos dois grupos no pré-teste. Após a intervenção, 85,72% e 36,36% dos estudantes dos grupos experimental e controle, nessa ordem, conseguiram citá-la.

Essa pesquisa de Menegotto e Lara (2011) adotou a classificação inclusiva dos paralelogramos e se apoia nos desenhos prototípicos, em conformidade com o que discutimos no capítulo 1. Seus resultados fortalecem nossa compreensão de que a apropriação das relações entre os quadriláteros notáveis e de suas propriedades é um processo desafiador para os estudantes dos anos finais do ensino fundamental e que há necessidade de realizar pesquisas que abordem a aprendizagem e o ensino dos aspectos geométricos relativos aos paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados.

Fujita (2012) apresentou dados de uma investigação sobre a compreensão de estudantes do Reino Unido envolvendo a situação de inclusão entre os quadriláteros, mais

especificamente os paralelogramos, na qual objetivou propor um modelo teórico abrangente e um método que possibilitasse descrever o desenvolvimento cognitivo dos alunos na compreensão das relações de inclusão entre os quadriláteros. O pesquisador apontou que esse é um aspecto em que os alunos geralmente têm muitas dificuldades e citou alguns exemplos, tais como a de não considerar o quadrado como um paralelogramo porque este último possui lados inclinados (no que se refere ao aspecto visual) e em aceitar que o quadrado é um retângulo se este tem dois lados mais longos e dois mais curtos, entre outras.

Foi possível notar que Fujita (2012) adotou uma classificação para os paralelogramos similar à nossa, assim como fizeram Menegotto e Lara (2011). No ano anterior à realização do seu estudo com os participantes principais, estudantes de nível de escolaridade equivalente ao atual 9º ano brasileiro (14 anos de idade), considerados acima da média em Matemática, o pesquisador realizou alguns estudos pilotos, sendo um deles com estudantes que estavam no primeiro ano em uma universidade e o outro com alunos do 7º ano (12 anos de idade), no Reino Unido.

Em relação aos resultados que mais nos interessam, no primeiro estudo piloto, os participantes consideraram que não poderia haver paralelogramos em que os ângulos internos fossem todos retos e os quadrados não são paralelogramos por apresentarem uma aparência distinta; uns entendiam a relação de inclusão entre quadrados e retângulos, mas não a entre quadrados e losangos; já outros tinham o entendimento desta última e não da primeira que, sob a ótica da TCC, mostra que o repertório de esquemas deles ainda está em desenvolvimento para lidar com situações dessa classe e poderiam estar se apoiando na seguinte proposição falsa: se uma figura possui os ângulos internos todos retos, não é um paralelogramo; também verificou que os trapézios foram considerados como losangos e apresentaram maiores dificuldades na figura do losango não quadrado, também observadas em Menegotto e Lara (2011). Relativamente ao segundo estudo piloto descrito, apontou que apenas metade dos participantes reconheceu os quadrados e losangos não quadrados como paralelogramos e 54% identificaram o retângulo como paralelogramo.

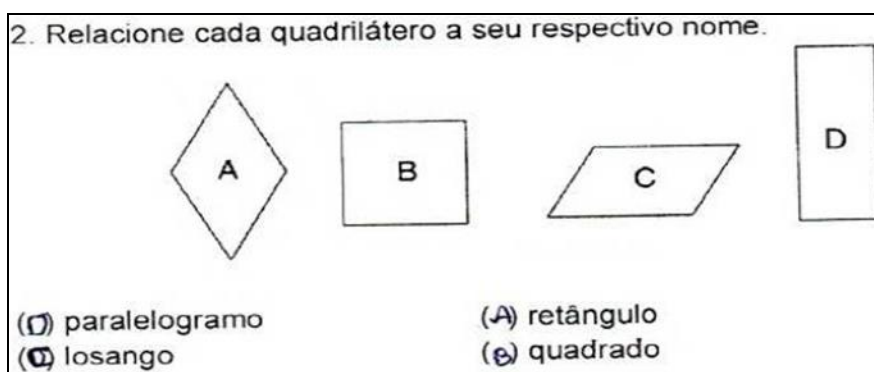
Quanto aos resultados do estudo principal, Fujita (2012) observou que 90% dos estudantes reconheceram apenas o paralelogramo não retângulo e não losango como paralelogramo e 60% conseguiram indicar uma definição adequada dessa figura. Já no caso do losango, somente 14% conseguiram defini-lo corretamente. Além disso, alguns ainda o consideraram como um quadrado inclinado. O pesquisador apontou também dificuldades em reconhecer os quadrados como retângulos, também observada na pesquisa anterior, por pensarem que não existe um tipo deles que tenha quatro lados de comprimentos congruentes

entre si. Em entrevistas realizadas com dois professores estagiários que possuíam uma compreensão bastante representativa dos resultados encontrados, o supracitado pesquisador verificou que um deles falou que os paralelogramos deveriam ser inclinados e os retângulos com quatro ângulos internos retos e, com isso, haveria para ele duas famílias de figuras: uma de paralelogramos e losangos (associado pelo entrevistado a um diamante) e outra de quadrados e retângulos.

Diniz (2013) realizou uma pesquisa com o objetivo de investigar que habilidades são mobilizadas por alunos de 7º e 9º anos do ensino fundamental em situações de classificação de figuras geométricas, conforme o conjunto que adotamos. Para tanto, apoiou-se nas discussões de Van-Hiele citadas por Crowley (1994), Del Grande (1994) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – (Brasil, 1998). Quanto aos aspectos metodológicos, elaborou e aplicou um teste cujo intuito era de que os participantes exteriorizassem quais critérios utilizaram na classificação das figuras.

Os seus resultados apontaram que os participantes tiveram índices de acertos melhores na classificação pela visualização quando as figuras representadas foram o quadrado (24%) e o retângulo não quadrado (16%). Assim como em Fujita (2012) e Menegotto e Lara (2011), as dificuldades na figura do losango não quadrado aumentaram, cujo índice de acerto foi de 11%, e no paralelogramo não retângulo e não losango, apenas 10%. Ao observarmos os desenhos utilizados pelo pesquisador nessa questão, verificamos que o do losango não quadrado (figura A) e o do retângulo não quadrado (figura D) foram os que mais se aproximam dos prototípicos. As demais se encontravam em seu desenho prototípico, como mostrado abaixo:

Figura 22 – Representações dos paralelogramos em situação de classificação



Fonte: Diniz (2013, p. 7)

Percebemos nas representações acima que não há marcas que garantam a congruência dos lados e dos ângulos internos. Neste protocolo, o estudante trocou algumas figuras geométricas ao preencher as classes, pois no espaço para indicar a letra correspondente ao

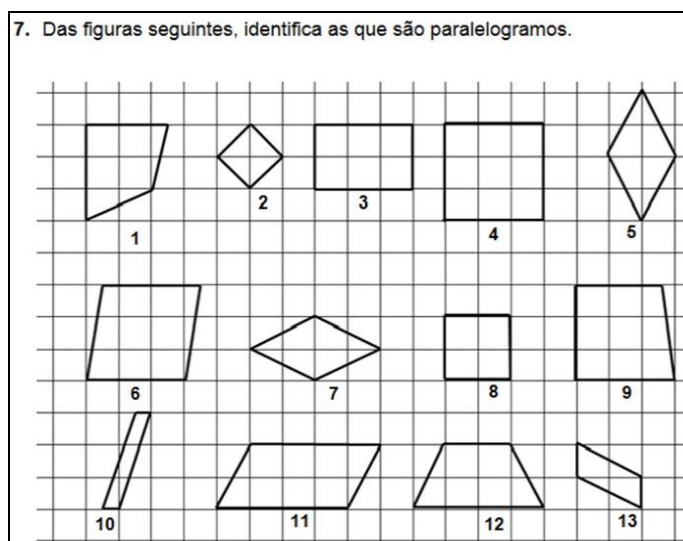
retângulo (não quadrado), colocou a do losango (não quadrado); já no lugar deste último, inseriu a letra relativa ao paralelogramo não retângulo e não losango.

Diniz (2013) também solicitou que os estudantes desenhasssem as figuras a partir dos seus nomes, aproximando-se da situação de construção, considerando o conjunto de situações que adotamos. Nela, os paralelogramos utilizados foram os não retângulos e não losangos e o retângulo não quadrado. Os participantes que acertaram, desenharam figuras parecidas com as representadas acima, inclusive, o retângulo não quadrado com o lado de maior comprimento na vertical. Os que erraram, desenharam um retângulo não quadrado com as características anteriores quando deveria ser um paralelogramo não retângulo e não losango e trataram o retângulo não quadrado em representações diferentes como duas figuras distintas.

Em outra questão também de construção, desenharam losangos não quadrados ao invés de paralelogramos não retângulos e não losangos. Para representar um triângulo retângulo, desenharam duas figuras: um triângulo e um retângulo não quadrado. Na inclusão das figuras a partir de propriedades comuns, os participantes se apoiaram, assim como em Fujita (2012), no aspecto visual para agrupá-las, considerando em sua aparência o “arredondamento das formas”, “formato triangular”, “bicos para baixo” ou “bicos agudos” (p. 11), se referindo aos vértices.

Tavares (2014) realizou uma pesquisa com o objetivo de compreender e avaliar os conhecimentos que alunos no início do 3º ciclo, mais especificamente do 7º ano do ensino fundamental, possuíam relativamente aos conceitos de triângulo, paralelogramo, retângulo e quadrado, apoiando-se na teoria de Van-Hiele. Para isso, aplicou um questionário que explorava, de acordo com o conjunto de situações que adotamos, as de identificação e inclusão. Na classificação adotada nesse estudo, o quadrado, retângulo não quadrado e losango não quadrado foram também considerados paralelogramos. Como resultados, a pesquisadora apontou que os participantes revelaram dificuldades relacionadas aos conceitos dessas figuras geométricas planas, os quais davam mais importância a atributos como o “tamanho” e a posição em que se encontravam representadas. Vejamos uma situação de identificação de paralelogramos em diferentes desenhos utilizada em seu estudo:

Figura 23 – Situação de identificação de paralelogramos na malha quadriculada



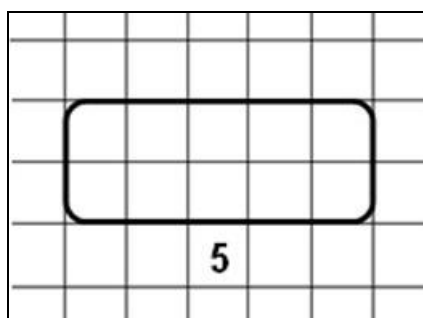
Fonte: Tavares (2014, p. 65)

Na situação acima, apenas 8% dos participantes reconheceram todos os paralelogramos (figuras 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 e 13). O desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango, figura 11, foi o mais selecionado pelos participantes (72%) como paralelogramo, assim como em Menegotto e Lara (2011). Quanto aos diferentes desenhos, podemos notar que apenas o do retângulo não quadrado não variou em relação ao prototípico.

Em uma tarefa que foi exigida a definição de paralelogramo, os resultados foram nitidamente inferiores aos verificados por Fujita (2012), uma vez que 40% não responderam, 44% dos participantes fizeram uma descrição incompleta ou imprecisa e 16% particularizaram o não retângulo e não losango sem, no entanto, conseguir dar uma definição completa. Algumas respostas explicitadas (forma prediativa do conhecimento) foram: “uma figura geométrica”, “uma figura com 4 lados” e até mesmo como um “gênero de retângulo”, porém, segundo eles, “mais inclinado para um lado” (p. 69).

Na identificação de retângulos, os índices de acerto foram acima de 80% no caso dos não quadrados, inclusive em diferentes representações. No entanto, nenhum participante teve acerto pleno, pois não incluíram os quadrados ao assinalarem os retângulos (dificuldades na inclusão), também verificada em Menegotto e Lara (2011). A figura representada abaixo foi identificada erroneamente como retângulo por 40% dos participantes:

Figura 24 – Representação considerada retângulo pelos participantes em Tavares (2014)



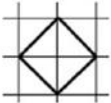
Fonte: Tavares (2014, p. 73)

Supomos que tal erro se deva ao fato de a figura estar em uma configuração parecida com o desenho prototípico do retângulo não quadrado, pois o lado de maior comprimento está posicionado horizontalmente.

Em relação à definição de retângulo, a pesquisadora supracitada aponta que 48% dos participantes possuem uma definição incompleta ou imprecisa, como, por exemplo, “uma figura geométrica com comprimento e largura diferente” (p. 77), porém sem ausência de respostas. O destaque para a diferença nos comprimentos dos lados do retângulo também foi observado em Fujita (2012).

Na identificação de quadrados, os que estavam em seu desenho prototípico foram reconhecidos por todos os participantes diferentemente do que estava apoiado sobre um dos vértices, o qual foi identificado por 60% deles, como mostrado abaixo:

Figura 25 – Resultado da identificação de quadrados em malha quadriculada

Figuras	Frequência absoluta	Porcentagem
 Figura 2	15	60,0%
 Figura 4	25	100,0%
 Figura 8	25	100,0%

Fonte: Tavares (2014, p. 83)

Como podemos observar, a mudança no desenho fez com que alguns estudantes não o reconhecessem como quadrado. No caso do estudo de Diniz (2013), os participantes tratavam os retângulos não quadrados em posições diferentes como figuras distintas.

Tavares (2014) também observou que um retângulo não quadrado e um paralelogramo não retângulo e não losango foram reconhecidos como quadrado por 36% e 12% dos estudantes, respectivamente. Quanto à sua definição, 36% dos participantes o definiram adequadamente e outros 36% particularizam o losango não quadrado: “uma figura com **quatro lados todos iguais**” (p. 86, grifos da autora), sem ausência de respostas assim como para os retângulos. Como também vimos em Menegotto e Lara (2011), alguns participantes consideraram o losango não quadrado como quadrado.

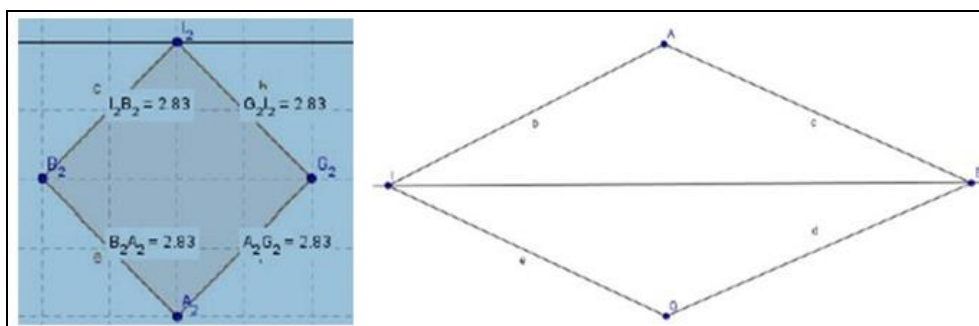
Relativamente às propriedades de paralelogramos, retângulos e quadrados, os índices de acerto pleno foram 20%, 8% e 20%, nessa ordem. Elementos que pertencem ao campo da Geometria como diagonal, ângulo, paralelismo e perpendicularidade também foram explorados por Tavares (2014), os quais foram apontados pela pesquisadora como fontes de dificuldades dos estudantes. Assim como verificamos em Diniz (2013), os participantes de Tavares (2014) tiveram melhor desempenho na identificação de quadrados. Destacamos ainda a necessidade de exploração do losango não quadrado, pois esse tipo de paralelogramo não foi tão explorado quanto os demais nesse estudo.

Também apoiado na teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van-Hiele, Pereira da Costa (2016) objetivou analisar os efeitos de uma sequência didática para a construção do conceito de quadriláteros notáveis com a utilização do *software* GeoGebra, cujos participantes foram estudantes do 6º ano do ensino fundamental. Para tanto, realizou um pré-teste, depois uma intervenção por meio da sequência didática e um pós-teste ao final.

Em relação aos resultados voltados aos paralelogramos, Pereira da Costa (2016) apontou que cinco das quinze duplas não conseguiram construir um paralelogramo no GeoGebra pelo fato de ainda não o reconhecerem, nem pela sua aparência global nem pelas propriedades, chegando a fazer quadriláteros não notáveis. As quatro duplas que fizeram corretamente, representaram o paralelogramo não retângulo e não losango com o lado de maior comprimento na horizontal e a inclinação para a direita. Na construção do retângulo a partir de retas perpendiculares, todas as duplas produziram o não quadrado com o lado de maior comprimento posicionado horizontalmente que, assim como no paralelogramo não retângulo e não losango, caracterizam o seu desenho prototípico. Das quinze duplas, sete consideraram sua definição e propriedades e as demais apenas o aspecto físico da figura, este último dado também verificado pelos participantes de Diniz (2013), Fujita (2012) e Tavares (2014). Duas duplas participantes também argumentaram acerca da necessidade de o retângulo ter dois lados de comprimentos maiores e dois de comprimentos menores (Fujita, 2012; Pereira da Costa, 2016; Tavares, 2014).

Na construção do retângulo a partir de uma diagonal, apenas uma dupla considerou a inclusão de classes e produziu um quadrado. Nas tarefas de construção de quadrados, seis duplas deram como respostas representações de retângulos não quadrados e uma dupla a de um trapézio. Diferentemente dos dois tipos de paralelogramos explorados nas tarefas anteriores, no caso do losango, surgiram outras representações por parte dos estudantes, embora em quantidade inferior, tanto a prototípica como a do quadrado apoiado sobre um dos vértices, considerando a margem da folha como referência, conforme mostrado abaixo:

Figura 26 – Representações do quadrado e do losango não quadrado no *software* GeoGebra



Fonte: Pereira da Costa (2016, p. 179-180, adaptado)

Observou ainda que algumas duplas construíram o paralelogramo não retângulo e não losango ou trapézio ao invés de losango. Esse fato possivelmente associa-se à inclinação da figura, aspecto visual, assim como vimos em Fujita (2012).

Quanto aos resultados do pré-teste e pós-teste, foi possível observar que dos 81% dos participantes que consideravam o quadrado como um não retângulo no pré-teste, 53% ainda continuaram considerando mesmo após a intervenção. Na classificação de retângulos, mais de 80% dos participantes, em ambos os testes, reconheceram apenas o não quadrado, também observado em Menegotto e Lara (2011), e em diferentes representações. Os quadrados foram classificados como retângulos por apenas 3% no pré-teste e por 23% no pós-teste. Apesar do avanço, esse índice ainda é relativamente baixo. Tal aspecto também foi evidenciado em Tavares (2014). O quadrado em seu desenho prototípico foi reconhecido como quadrado por mais 90% deles no pré-teste e no pós-teste. Já o que estava apoiado sobre um dos vértices teve percentuais de reconhecimento de 67% e 70% no pré e pós-testagem, respectivamente. Na classificação de paralelogramos, os não retângulos e não losangos foram reconhecidos por 73% dos participantes no pré-teste e por 83% no pós-teste.

Em relação à inclusão de quadrados, losangos e retângulos como paralelogramos, os índices foram 20%, 23% e 20% no pré-teste, respectivamente. O índice do quadrado se manteve no pós-teste, o do retângulo aumentou para 24%, já o do losango caiu para 17%. Na classificação de losangos, o quadrado em seu desenho prototípico foi reconhecido como

losango por 13% no pré-teste e por 27% no pós-teste. Já o que estava apoiado sobre um dos vértices, os índices nos testes foram de 67% e 80%, respectivamente. Além disso, paralelogramos não losangos também foram selecionados por 12% e 17% em ambos os testes, nessa ordem. Por fim, cerca de 60% no pré-teste e 53% no pós-teste consideraram quadrados representados em tamanhos diferentes como figuras distintas, mais uma vez dando ênfase ao aspecto visual.

De modo geral, os achados das pesquisas citadas acima apontam para a prioridade na exploração do quadrado e do retângulo não quadrado, e mostram que as dificuldades são maiores nos paralelogramos não retângulos e não losangos e nos losangos não quadrados. Isso reforça nosso interesse em realizar uma intervenção que contemple todos os paralelogramos. Percebemos ainda que quando há explicitação do conhecimento por parte dos estudantes (forma predicativa do conhecimento) nas definições, elas são incompletas ou inadequadas. As classes de situações exploradas são identificação, classificação, inclusão e construção. Já os desenhos das figuras priorizados pelos participantes são os prototípicos.

Por fim, ressaltamos que algumas escolhas dos professores, possivelmente influenciados por alguns livros didáticos, contribuem para o aumento de dificuldades por parte dos estudantes no ensino de Geometria como, por exemplo, explorar determinados paralelogramos em detrimento de outros ou priorizar apenas os seus desenhos prototípicos, levando o estudante a não reconhecer essas figuras geométricas planas em uma representação diferente e não conseguir lidar adequadamente com situações que abordem aquelas que são menos exploradas.

Mas o que dizem as pesquisas sobre área? É em buscas de respostas para esta pergunta que passaremos à subseção seguinte na qual vamos discutir a respeito de algumas pesquisas já realizadas que envolvem esse conceito. Vamos observar, como dito anteriormente, quais das situações (comparação, medição, produção e conversão de unidades) são priorizadas bem com as principais representações e dificuldades dos participantes. Além disso, veremos ainda se utilizam situações do campo da Geometria (identificação, classificação, inclusão e construção).

3.1.2 Sobre área

Ferreira (2010) realizou uma pesquisa em que estudou a construção do conceito de área por alunos do 3º ciclo do ensino fundamental, mais especificamente, do 6º ano do ensino fundamental, apoiada na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1990) e seus

colaboradores, e no modelo de área como uma grandeza autônoma proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989). Nela, analisou a abordagem dos conceitos de área e perímetro nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e em duas coleções de LD, uma dos anos iniciais e outra dos anos finais do ensino fundamental. Em seguida, fez a aplicação de um teste de sondagem e desenvolveu uma sequência didática para ser trabalhada com os participantes, seguida de um pós-teste e entrevistas. Percebemos que, entre os paralelogramos, os explorados foram os quadrados e os retângulos não quadrados.

Seus resultados indicaram que as situações de comparação e produção eram reduzidas nas coleções analisadas, havia ênfase nas de medição e predominância de figuras poligonais. Percebeu ainda que, apesar de haver evoluções em alguns aspectos, tais como na diferenciação entre contorno e perímetro, no uso da decomposição, recomposição e ladrilhamento, persistiram algumas dificuldades relativas à compreensão da ordenação dos comprimentos e a diferenciação entre os conceitos de área e perímetro, e em situações com ausência da representação simbólica das figuras. A pesquisadora ainda apontou a necessidade de realização de pesquisas que estudem outras situações que contribuam para a construção dos conceitos de área e perímetro. Na realização desse estudo, Ferreira (2010) percebeu a necessidade da inclusão da situação de mudança de unidade ao conjunto de situações que dão sentido ao conceito de área proposto por Baltar (1996), conforme já discutido amplamente ao longo deste texto.

Diferentemente da pesquisa acima, Santos (2010) realizou um estudo mais voltado ao aspecto prático do conceito de área. Seu objetivo foi investigar o conhecimento matemático prático de trabalhadores rurais, voltado ao cálculo de área, buscando estabelecer possíveis diferenças conceituais entre os procedimentos não formais desses participantes e os formais usados na escola. Para tanto, apoiou-se na Etnomatemática de Ubiratan D'Ambrósio, em questões socioculturais embasadas em Vygotsky e nas ideias de Vergnaud na análise do desenvolvimento dos conceitos. Por meio de uma abordagem qualitativa, a pesquisa foi dividida em dois momentos: um realizado com alunos dos 8º e 9º anos do ensino fundamental e os professores de Matemática, e outro fora da escola, com trabalhadores rurais. Focaremos apenas nos resultados referentes aos alunos, pois têm relação com nosso interesse de pesquisa.

Em relação aos resultados, o significado do cálculo de área para a maioria dos alunos (27,5%) estava relacionado a dificuldades, cujas expressões evocadas foram “embaralha tudo, para mim é mais complicado”, “dar um branco...falta de interesse, e dá vontade de desistir de tudo” (p. 80). O segundo maior percentual (22,5%) apontou que seu significado estava relacionado a “relações métricas”, “lado vezes altura” (p. 80), entre outras expressões que

evidenciavam o aspecto numérico. Em questões de medição de área, os paralelogramos explorados pela pesquisadora foram o quadrado e o retângulo não quadrado, assim como em Ferreira (2010). O primeiro teve o maior número de acertos (40,7%), e, no segundo, o índice de acertos caiu para 11,1%. Diante de uma diferença considerável, decidimos observar como eram essas questões que foram embasadas a partir de livros didáticos, estudos já realizados ou formuladas pela própria pesquisadora, como mostrado a seguir:

Figura 27 – Situações de medição com quadrados e retângulos não quadrados

Atv 2 - Temos um retângulo de lado 3,5 altura 2,5 qual a área desse retângulo? E qual o perímetro? Atv 3 - Determine a área do quadrado de lado 3 por 3.

Fonte: Santos (2010, p. 97)

Em ambos os casos, notamos a ausência das unidades de medida nos dados numéricos, reforçando a ideia de que o número é suficiente para lidar com os problemas de área. Na tarefa sobre o retângulo não quadrado, notamos que as medidas não são inteiras, o que não ocorre no segundo caso. As dificuldades no cálculo numérico por parte dos estudantes apontadas pela pesquisadora podem justificar que a diferença nos índices de acertos não decorreu apenas pela mudança nos valores da variável didática tipo de figura. Santos (2010) ainda verificou problemas com o uso das unidades de medida e confusão entre os conceitos de área e perímetro, erro comum de cálculo relacional, também observado por Ferreira (2010).

Nunes (2011) realizou uma pesquisa sobre a prática da argumentação como método de ensino, o qual focou nos conceitos de área e perímetro de figuras geométricas planas. Para isso, propôs uma sequência didática modelada e analisada a partir das fases que compõem o processo argumentativo de Toulmin (1996). Assim como na pesquisa de Ferreira (2010), as tarefas da sequência foram baseadas nas ideias de Douady e Perrin-Glorian (1989) e de Baltar (1996), e também estudou aspectos estáticos e dinâmicos, este último com o auxílio do *software* GeoGebra. Utilizou a engenharia didática como metodologia de pesquisa e os seus participantes foram alunos do 5º ano do ensino fundamental. Analisando a sua sequência, verificamos que o pesquisador explorou tarefas que abordaram: construção e identificação de figuras; propriedades geométricas, focando na maioria das vezes no quadrado e no retângulo não quadrado; distinção entre os conceitos de área e perímetro e o fato de não variarem no mesmo sentido; diferenciação entre área, superfície e número; utilização de diferentes unidades; determinação das expressões de área do quadrado, retângulo não quadrado, paralelogramo não retângulo e não losango e triângulo. A partir das respostas provisórias dos

estudantes, o pesquisador levantou questionamentos para que eles argumentassem sobre suas respostas e as repensassem.

Como principais resultados, Nunes (2011) notou que a prática da argumentação favoreceu a compreensão de propriedades das figuras e dos conceitos de área e perímetro de figuras geométricas planas, o que habilitou tal prática como método de ensino. Os participantes adquiriram competências argumentativas a partir das interações que lhes possibilitaram ter mais autonomia na comunicação e defesa de suas ideias, estarem mais atentos e apreender símbolos e linguagem específicos da Matemática.

Embora tenha enquadrado sua pesquisa no campo da Geometria, notamos que Nunes (2011) também abordou tarefas das Grandezas e Medidas e, mesmo transitando pelos dois campos, reforçando a necessidade de considerar suas imbricações, explorou exaustivamente as figuras do quadrado e do retângulo não quadrado, apontando a necessidade de pesquisas que foquem nos demais paralelogramos, como o não retângulo e não losango e, principalmente o losango não quadrado.

Também explorando os conceitos de área e perímetro e fazendo utilização do *software* GeoGebra, como realizado pelo pesquisador acima, Machado (2011) investigou a significação desses conceitos por meio da metodologia da observação participante em uma turma do 7º ano do ensino fundamental. Para isso, apoiou-se no trabalho de Gravina (2001) e no pensamento reflexivo de Dewey (1959). As tarefas propostas por esse pesquisador eram em sua maioria de medição que contemplavam figuras retangulares ou triangulares, exploravam aspectos próximos à realidade dos alunos, como o quadro da sala de aula, a horta, as letras iniciais do nome da escola e outras que foram realizadas no laboratório de informática.

Entre outros resultados, o pesquisador percebeu no teste inicial uma relação acentuada por parte dos participantes no que se refere a relacionar a área às expressões de área, também observada em Santos (2010), definindo-a como lado vezes lado, com foco maior na figura do retângulo. No teste final, alguns estudantes afirmaram que área seria “O espaço contido dentro do contorno”, “Área é simplesmente isso: é o número de quadradinhos” (p. 127). Em geral, a maioria dos participantes associou o perímetro à parte “em volta” ou “que rodeia” uma figura e a área ao que está “dentro” dela. Apesar de dissociarem de certa maneira área e perímetro, a associação da grandeza ao objeto geométrico pode levar à mobilização de concepções errôneas, tais como, se mudar a parte de “dentro” de uma figura, sua área também se altera. O mais indicado no ensino é realizar a distinção entre os conceitos e entre objeto geométrico, medida e grandeza. Por exemplo, uma superfície é um objeto geométrico que possui alguns

atributos, entre eles a grandeza área, à qual podemos associar um número que é a medida dessa grandeza na unidade escolhida.

Jesus (2011) realizou uma pesquisa com estudantes do 9º ano do ensino fundamental sobre área de polígonos e volume de prismas, a qual focou na motivação para aprender por meio de manipulação de materiais e objetos que possibilitaram aos participantes a compreensão dos conceitos, das propriedades e a visualização das figuras. Com isso, buscou verificar por meio de um estudo de caso e apoiada nas abordagens teóricas da motivação aplicadas ao ambiente escolar, como essa proposta contribuiu para a motivação dos alunos na realização de atividades e para melhoria do desempenho deles em Matemática.

Ao analisar o conceito de área em uma coleção de LD dos anos finais do ensino fundamental, apesar de não explicitar, é possível interpretar a partir dos achados que há ênfase na medida (aspecto numérico), assim como verificado por Ferreira (2010), e que se privilegia o uso das expressões de área e conversão de unidades em detrimento de outros procedimentos mais geométricos. Ao perguntar “o que é a área de uma sala?”, a pesquisadora obteve respostas como “é o espaço da sala”, “é o ângulo”, “é a soma de todos os lados”, “é o espaço dentro da sala”, “é o tamanho do produto” (p. 106), entre outras. Podemos notar alguns conceitos não pertinentes à pergunta, em que as três últimas respostas sugerem, respectivamente, uma possível troca entre os conceitos de área e perímetro, também verificado por Ferreira (2010) e Santos (2010), uma possível concepção geométrica de área e uma possível associação desse conceito às expressões de área e ao espaço interno, conforme também observado em Machado (2011).

Os polígonos explorados pela pesquisadora nas atividades práticas foram triângulo, quadrado, retângulo não quadrado, paralelogramo não retângulo e não losango e trapézio, apontando para a necessidade de pesquisas que explorem a figura do losango não quadrado diante das dificuldades dos estudantes com esse tipo de paralelogramo. A explicação dada por Jesus (2011) para a expressão de área do paralelogramo não retângulo e não losango pareceu não considerar uma propriedade importante dessa figura que é a invariância da área em relação ao lado tomado por base. Vejamos o que foi dito por ela: “Mostrei que a base do paralelogramo continuava a mesma quando tirávamos a ‘ponta’ para encaixar do outro lado, formando o retângulo, e que a altura também permanecia a mesma”. (p. 132). Além disso, nas figuras representadas o lado tomado por base era o horizontal, contribuindo para solidificar a tendência a considerar que a ideia matemática de base está necessariamente associada ao “chão”. Como seu olhar foi voltado para elementos que motivam para aprender, tais como situações do cotidiano, uso de materiais recicláveis, materiais manipulativos, construção de

objetos, entre outros, a pesquisadora não deu relevo aos aspectos mais específicos do conceito de área nas situações trabalhadas com os participantes. Mesmo assim destacou, além das questões já citadas anteriormente como a confusão entre os conceitos de área e perímetro, e associar a área ao espaço, que a maioria não tinha noção do tamanho de 1 cm^2 . Apesar de ela não explicitar, percebemos também erros de álgebra das grandezas nas respostas dos estudantes (o resultado da multiplicação de dois números como uma grandeza).

Henriques (2011) realizou uma pesquisa com o objetivo de levantar possíveis dificuldades de aprendizagem relativas às noções de área e perímetro de figuras geométricas planas. Apoiou-se no Modelo dos Campos Semânticos (Lins, 2001) como instrumento de análise da produção de significados por alunos do 9º ano do ensino fundamental. Para tanto, elaborou um conjunto de tarefas atendendo a características específicas que possibilitasse identificar a produção de significados dos participantes para os conceitos de área e perímetro. Outro propósito da sua investigação consistiu na elaboração de um produto educacional com uma série de tarefas e orientações didáticas a serem utilizadas por professores no quarto ciclo do ensino fundamental.

Ao observarmos as tarefas propostas por Henriques (2011), percebemos que todas são de medição, seja para o cálculo da área ou do perímetro, apenas uma não contempla a representação gráfica das figuras e os paralelogramos explorados são apenas o quadrado e o retângulo não quadrado, em seus desenhos prototípicos. A ênfase dada a esses paralelogramos, tal como vimos nas pesquisas de Ferreira (2010), Nunes (2011) e Santos (2010), reafirma a necessidade da realização de estudos que contemplem os demais paralelogramos, principalmente o losango não quadrado, menos explorado ainda que o paralelogramo não retângulo e não losango.

Em relação aos resultados, apesar de o interesse do pesquisador ser voltado aos significados produzidos, notamos que, tratando de aspectos mais relacionados ao nosso trabalho, os participantes recorreram a procedimentos numéricos para o cálculo da área, como contar quadradinhos e fazer medições com o lápis, na ausência de uma régua. O pesquisador destacou a troca entre os conceitos de área e perímetro, mas não apontou os erros na álgebra das grandezas, parecidos com os observados em Jesus (2011). Houve também a afirmação por parte dos participantes de que o perímetro “é o tamanho por fora” e a área “é o interior todo” (p. 150), o que reafirma os dados encontrados por Machado (2011). Ao analisar as falas dos participantes durante a realização das tarefas, verificamos um momento em que uma aluna valorizou a disciplina de Desenho Geométrico por ajudá-la nas situações sobre área, conforme recorte a seguir:

Mas o Desenho Geométrico facilita muito as coisas, eu acho. Eu prefiro resolver as coisas do jeito que o professor de Desenho Geométrico resolve, do que como o professor de Matemática resolve. Porque pelo Desenho Geométrico, como o próprio nome da matéria já diz, resolve pelo desenho; pela Matemática, só por cálculo, o que às vezes é bem complicado (*Ibid.*, p. 105).

Como podemos observar, a participante da pesquisa de Henriques (2011) apontou a importância de considerar o campo da Geometria nas situações do campo das Grandezas e Medidas, reforçando o papel das imbricações entre eles, e não apenas o numérico e/ou algébrico que, comumente, são mais explorados. Percebemos ainda, embora implicitamente em suas palavras, a relevância das representações das figuras para lidar com as tarefas, necessidade também observada por Ferreira (2010). Podemos interpretar outras afirmações dos participantes dessa pesquisa como teoremas em ação falsos como, por exemplo, o de que área e perímetro variam no mesmo sentido: “Se a área aumentar, o perímetro vai aumentar. Se o perímetro aumentar, a área aumenta também. Eles meio que obrigatoriamente dependem um do outro” (p. 153), o qual foi desestabilizado por meio de situações propostas pelo pesquisador. A dificuldade no ladrilhamento e na escolha das unidades de medida adequadas para figuras não poligonais também foram verificadas. Notamos ainda ao longo do texto que o termo medida foi usado frequentemente pelo pesquisador para referir-se a comprimento.

Com o objetivo de promover uma abordagem didática do conceito de área propiciando ao estudante a solução de situações-problema do seu cotidiano, Araújo (2012) apoiou-se no Construtivismo, na Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van-Hiele e em um recorte da engenharia didática para realizar momentos de aprendizagem com estudantes do 6º ano noturno do ensino fundamental. Nesse estudo, notamos determinado destaque para área como medida.

Araújo (2012) percebeu nos resultados de suas entrevistas iniciais que 60% deles afirmaram não ter estudado Geometria e que 65% não gostavam desse campo. Dos que já estudaram em algum momento, 75% não apoiavam a maneira como era abordada. Em relação à área, 70% dos entrevistados afirmaram que nunca ouviram falar nessa palavra. Quando questionados sobre o que entendiam por área, 15% não souberam, 25% associaram a um espaço – observamos também em Jesus (2011) – ou território, e 60% não responderam.

No teste piloto 1, 100% dos participantes conseguiram identificar o quadrado em seu desenho prototípico e apenas 17,6% reconheceram o que estava desenhado com um dos vértices apoiados sobre a margem da folha. Em relação ao retângulo não quadrado, 58,8% o identificaram em seu desenho prototípico e 29,4% reconheceram o que não estava desenhado dessa maneira. O paralelogramo não retângulo e não losango em seu desenho prototípico foi

identificado como retângulo por 41,2% deles, percentual ainda maior que o do próprio retângulo em desenho diferente do prototípico. O paralelogramo não retângulo e não losango em seu desenho prototípico foi identificado por 41,2% dos participantes e o desenhado diferente desse, por 29,4% deles. Já 64,7% assinalaram o trapézio como paralelogramo. O pesquisador não contemplou nesse teste a figura do losango não quadrado, reforçando a necessidade de pesquisas que o explorem tanto no reconhecimento quanto no cálculo da área, como já chamamos a atenção mais de uma vez ao longo desta revisão de literatura. O teste piloto 2 foi mais voltado ao estudo das retas, por isso não trouxemos seus resultados.

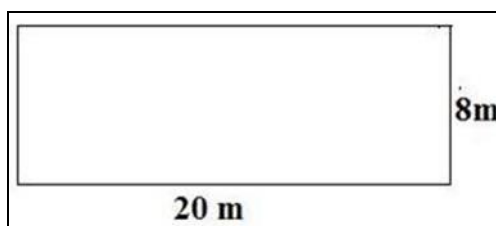
Com a experimentação e a análise a posteriori, Araújo (2012) percebeu que o uso de materiais concretos como Tangram, canudos, massa de modelar e outros recursos contribuiu para a compreensão dos conceitos de área e perímetro. Verificou ainda que a utilização de superfície unitária quadrada facilitou o cálculo da área nas situações práticas. Em suas anotações ao longo da pesquisa, o pesquisador registrou afirmações dos participantes como “[...] sabendo as medidas dos lados é fácil calcular a área [...]” (p. 109). No nível 2 do teste de Van-Hiele, apenas 30% conseguiram dar três propriedades dos paralelogramos, 70% conseguiram dar três propriedades do quadrado e 30% acertaram totalmente algumas propriedades do retângulo não quadrado. Destacamos que a maioria das situações utilizadas por esse pesquisador eram de identificação, envolvendo propriedades, e de medição, utilizando diferentes instrumentos e objetos, boa parte voltada ao cotidiano dos participantes, como colocar cerâmica, usar caixas de sapato, paredes, entre outras, muitas delas com a representação das figuras na malha quadriculada.

Mendes (2012) realizou uma investigação com estudantes do 9º ano do ensino fundamental objetivando identificar o processo de apropriação e construção do conceito de área por meio de suas falas e escritas, apoiando-se nas atividades orientadoras de ensino de Moura (1996), as quais envolveram a área da região delimitada por polígonos como o retângulo, triângulo, paralelogramo, trapézio e losango. O trabalho foi conduzido pelo próprio pesquisador e desenvolvido em sala de aula e no contexto de uma marmoraria, com atividades constituídas por quebra-cabeças, cujo procedimento em destaque foi a decomposição e composição de figuras geométricas planas.

Entre as tarefas desenvolvidas em sala de aula, a maioria contemplava o desenho prototípico das figuras, inicialmente sem dados numéricos, porém a régua era utilizada posteriormente em alguns momentos. Por meio do recorte de figuras desenhadas seguido da composição, era possível determinar como calcular a área da região delimitada por alguns polígonos transformando-os em retângulos. Outro aspecto a ser destacado é o uso do termo

medida referindo-se a comprimento, fato que também observamos nas pesquisas de Henriques (2011). Ao receber um retângulo sem os comprimentos dos lados e quando solicitado a calcular a área de sua região interna, um aluno disse: “Mas como vou calcular se não tem as medidas?” (p. 88). A partir da sua insistência, foram atribuídos os comprimentos dos lados como mostrado abaixo:

Figura 28 – Retângulo não quadrado com comprimentos dos lados explícitos



Fonte: Mendes (2012, p. 88)

Como podemos observar e a partir do que já discutimos, este é o desenho prototípico do retângulo não quadrado. Nesta e em outras situações de medição, foi possível verificar erros relacionados à álgebra das grandezas, em que os estudantes fizeram os cálculos apenas com os números e deram as respostas também sem as unidades, como 164 de área para o exemplo acima e, além disso, alguns apresentaram erros de cálculo numérico, geralmente quando eram números decimais.

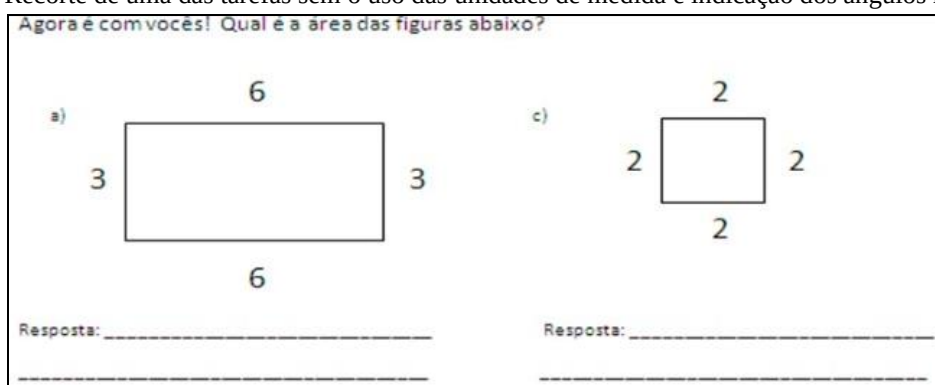
Ao decompor e recompor figuras, alguns estudantes afirmaram, se referindo às áreas, que “Elas são iguais por que área é a mesma metragem” (p. 106). A depender do que esse estudante estava chamando de metragem, ele poderia estar se apoiando na mobilização do seguinte teorema em ação: “figuras de mesma metragem possuem mesma área”, cuja veracidade dependerá do que foi entendido como metragem. Mendes (2012) relacionou o uso desse termo pelos estudantes à questão das unidades de medida.

Outras dificuldades foram percebidas ao deduzir, generalizar e escrever algebricamente as expressões de área, principalmente na figura do losango não quadrado. As atividades realizadas na marmoraria foram mais voltadas ao entendimento do uso prático de cálculo de áreas, observar como o marmorista calculava os valores a partir da área, a qual ele chamou de “metragem quadrada da pedra”, possivelmente sofrendo influência da linguagem local, assim como vimos a utilização desse termo nas respostas dos estudantes. Um ponto que gostaríamos de destacar é que, diferentemente dos estudantes, o marmorista fazia seus cálculos manipulando corretamente número e unidade de medida, apesar de não colocar as unidades nas representações simbólicas das figuras que fazia.

Além dos estudos de Ferreira (2010) e Araújo (2012), a pesquisa de Domingos (2013) também foi realizada com estudantes do 6º ano do ensino fundamental, a qual propôs uma série de atividades com o objetivo de facilitar os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos de área e perímetro de figuras geométricas planas. A construção das atividades incluiu experimentos com o Geoplano, materiais confeccionados com Etinil Vinil Acetado (EVA) e orientações para auxiliar a compreensão dos conceitos envolvidos. A pesquisadora também se apoiou em elementos da engenharia didática, assim como Nunes (2011) e Araújo (2012), utilizando situações de construção e de medição, a qual focou na figura no retângulo, pois, segundo ela, “o retângulo, com lados de medida inteira, constitui a figura mais adequada para se começar a ensinar área, pois ele pode ser decomposto em quadrados unitários” (p. 26).

Na maioria das tarefas propostas aos alunos, a pesquisadora não usou as unidades de medidas, fornecendo apenas os números e, apesar de destacar propriedades do retângulo como “[...] uma figura com quatro lados, dois a dois de mesma medida e quatro ângulos retos [...]” (p. 35), e a relação de que o retângulo pode ser um quadrado, não evidenciou alguns desses elementos nas representações utilizadas conforme podemos ver na figura abaixo:

Figura 29 – Recorte de uma das tarefas sem o uso das unidades de medida e indicação dos ângulos retos



Fonte: Domingos (2013, p. 39)

Percebemos ainda no seu texto, o uso do termo medida referindo-se a comprimento, ou seja, o que tratamos como sendo apenas um número (medida), a pesquisadora utilizou para se referir à grandeza (nº, unidade de medida), fato que também observamos nas pesquisas de Henriques (2011) e Mendes (2012).

Em relação aos resultados, apesar de os alunos terem tido, segundo a pesquisadora, desempenho eficiente, nós interpretamos erros relacionados ao cálculo relacional, no que se refere a calcular o perímetro quando solicitados a calcular a área, também observados em Ferreira (2010), Jesus (2011) e Santos (2010), e não utilização em alguns momentos das unidades de medida, possivelmente pelo fato de algumas delas não terem sido fornecidas, como exemplificado no recorte acima. Ao final, Domingos (2013) reforçou ainda o

tratamento dado a perímetro e área como medidas do campo da Geometria ao falar que “nosso produto se aplica a um determinado momento de uma sequência didática no ensino de medidas em Geometria” (p. 64).

Reis (2017) desenvolveu um estudo com estudantes do 9º ano do ensino fundamental cujo objetivo foi apresentar áreas de regiões poligonais elementares, comprimento de circunferência e áreas de regiões circulares, buscando torná-los capazes de compreender os conceitos de Geometria Euclidiana Plana por meio do uso de materiais manipulativos em atividades práticas. O pesquisador adotou uma classificação para os paralelogramos igual à nossa, ou seja, incluindo os quadrados, retângulos não quadrados e losangos não quadrados à família dos paralelogramos.

Verificamos o uso de termo medida referindo-se a comprimento, também observado nos estudos de Domingos (2013), Henriques (2011) e Mendes (2012). A maioria das situações propostas por Reis (2017) foi de medição ou construção de figuras, esta última resultando em produções pelos estudantes de desenhos prototípicos. O autor evidenciou bom desempenho deles, principalmente se comparado à prova diagnóstica contendo situações de medição, todas com os desenhos das figuras, em sua maioria prototípicos. Apesar disso, os cálculos das áreas foram feitos sem o uso das unidades de medida, achado também observado no estudo de Domingos (2013). Reis (2017) apontou um aluno que teve um aproveitamento de 100%, “[...] com ressalva às unidades de medida, que nem foram objetivos deste trabalho” (p. 62). Observamos uma fala preocupante, pois como estudar o conceito de área sem levar em consideração a importância das unidades de medida e as situações de conversão?

Diante do exposto, podemos observar que as principais situações exploradas nas pesquisas são de medição com prioridade nos quadrados e retângulos não quadrados, esta última também observada nos estudos sobre os paralelogramos. Os desenhos das figuras mais utilizados foram os prototípicos, com pouca ênfase na utilização das unidades de medida e foco no aspecto numérico. Essas escolhas no ambiente escolar contribuem para o aumento de dificuldades por parte dos estudantes relativas ao ensino do conceito de área. Verificamos também erros de álgebra das grandezas, de cálculo numérico, principalmente com números decimais, e de cálculo relacional, em sua maioria, a confusão entre os conceitos de área e perímetro. Destacamos a utilização de materiais manipuláveis, malha quadriculada, procedimentos geométricos de decomposição e recomposição de figuras, atividades em contextos aplicados e a necessidade de consideração das imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas como pontos positivos a serem considerados ao se

trabalhar com o conceito de área. A malha, os procedimentos e a necessidade indicada foram considerados em nossa sequência didática.

Após essa discussão de pesquisas que trazem resultados sobre os paralelogramos e sobre a área de modo mais amplo, passamos a estudos realizados sobre área de paralelogramos.

3.1.3 Sobre área de paralelogramos

Neste momento, vamos discutir sobre algumas pesquisas relativas à área de paralelogramos, a iniciar pelo estudo de Douady e Perrin-Glorian (1989), o qual também fundamentou nossa seção sobre a área como uma grandeza autônoma.

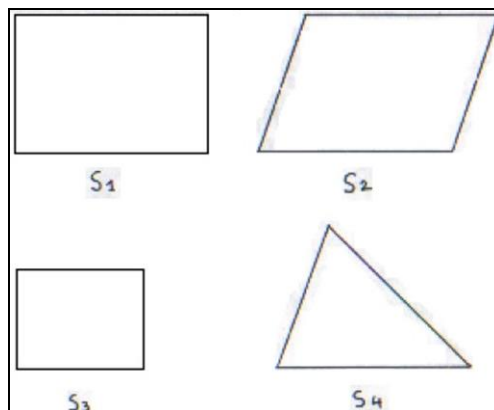
As pesquisadoras supracitadas realizaram investigações com turmas de nível equivalente ao 4º e 5º ano do ensino fundamental (estudantes com idades de 9 e 10 anos e 10 e 11 anos, respectivamente). Apoiadas na dialética instrumento-objeto e no jogo de quadros (Douady, 1984, 1987) realizaram uma engenharia didática nessas turmas, cujas hipóteses eram voltadas à necessidade de construir a noção de área como uma grandeza autônoma para poder estabelecer as relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico, e de retardar a diferenciação entre área e número, pois uma identificação precoce entre grandezas e números poderia favorecer a confusão entre área e comprimento (Douady; Perrin-Glorian, 1989).

Os dados foram produzidos ao longo da engenharia mediante observação, entrevistas, análise das produções dos participantes e provas. Em suas sessões, essas pesquisadoras adotaram diferentes pontos de vista acerca do conceito de área. Na abordagem que chamaram de física, apoiaram a comparação de áreas na comparação de massas de figuras produzidas em um mesmo material (portanto, com mesma densidade e espessura). Na etapa que denominaram de abordagem geométrica, exploraram a decomposição, o decalque de superfícies, a comparação de áreas, o ladrilhamento, a medição e o enquadramento de áreas, entre outros. Ainda nessa etapa, trataram da independência entre área e perímetro, evidenciando que superfícies de mesma área podem ter perímetros distintos.

Em relação aos resultados, Douady e Perrin-Glorian (1989) verificaram que certas crianças tinham uma concepção geométrica de área, uma vez que “[...] os alunos atribuem uma certa importância à forma da superfície e querem modificar o tamanho sem mudar a forma” (p. 15), ou seja, mobilizar o critério da semelhança entre as figuras, e nesse caso, a área e o perímetro variam necessariamente no mesmo sentido. Além disso, confundiram área

e perímetro e não tiveram dificuldades em associar diferentes números à mesma superfície por meio do ladrilhamento com superfícies unitárias distintas, com exceção de quando os números eram fracionários. Entre as figuras utilizadas em seu estudo, destacamos algumas em desenhos prototípicos, como mostrado a seguir:

Figura 30 – Representações para comparação das áreas



Fonte: Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 17)

Observamos que os desenhos dos dois retângulos não quadrados e do paralelogramo não retângulo e não losango são prototípicos. Os participantes tinham a tarefa de comparar as áreas das regiões delimitadas por essas figuras geométricas planas. Para isso, alguns recorreram a expressões de área erradas fazendo o produto dos comprimentos dos lados nas figuras S_2 e S_4 , com a justificativa de que o paralelogramo tem duas dimensões e por isso devem multiplicá-las para saber sua área. Outro argumento dado pelos estudantes e destacado pelas autoras consiste em fazer uma “correção” no paralelogramo para torná-lo um retângulo, ou seja, realizar modificações de modo que o lado inclinado ficasse na posição vertical.

Ao final, perceberam que o ladrilhamento das figuras se tornou um procedimento disponível para todos os estudantes e alguns progressos relativos à independência da área em relação à forma e na diferenciação entre área e perímetro. Além disso, surgiram algumas dificuldades que não foram previstas, como os efeitos das deformações contínuas nas superfícies, por exemplo, considerar o paralelogramo como um retângulo deformado. Com isso, surgiu a necessidade de levar em consideração a interação entre os aspectos estáticos e dinâmicos, e analisar os efeitos das transformações e deformações sobre a área e o perímetro, como a rotação do paralelogramo, que conserva a área e o perímetro, a inclinação de um lado em torno de um vértice que conserva o perímetro, mas altera a área e o deslizamento de um lado sobre sua reta suporte que conserva a área, mas altera o perímetro do paralelogramo.

Apoiada neste último aspecto, Baltar (1996) realizou uma pesquisa também na França voltada à elaboração e experimentação de uma engenharia didática com alunos de nível

equivalente ao terceiro ciclo do ensino fundamental brasileiro, como foco sobre a dissociação entre área e perímetro e o papel das expressões de área, levando em consideração o ponto de vista dinâmico por meio do uso do Cabri-Géomètre. Além disso, a pesquisadora propôs, apoiada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) e no modelo de área como uma grandeza autônoma de Douady e Perrin-Glorian (1989), um conjunto de situações que dá sentido ao conceito de área (comparação, medida e produção), sobre o qual já discutimos anteriormente em seção específica.

Seus resultados confirmaram as hipóteses de Douady e Perrin-Glorian (1989) relativas à importância de considerar a área como uma grandeza autônoma para estabelecer as relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico, e à interação entre os pontos de vista estático e dinâmico para a conceitualização da grandeza e dissociação entre área e perímetro.

Em relação aos paralelogramos, Baltar (1996) destacou que o fato de não ter feito um trabalho aprofundado com os estudantes na identificação de uma base e de uma altura relativa a ela causou alguns problemas, como: considerar a base como o lado posicionado horizontalmente ou o mais longo e, mesmo dada a altura relacionada ao lado de menor comprimento, eles sentiam a necessidade de medir a que fosse relativa ao de maior comprimento. Além disso, modelizou alguns teoremas em ação mobilizados pelos participantes, como: dois paralelogramos cujos lados têm comprimentos iguais, têm mesma área; a área de um paralelogramo é o produto dos comprimentos dos seus lados, este último também mobilizado na pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989).

Por fim, apontou a necessidade de considerar a forma e as posições em que as figuras são representadas em pesquisas posteriores. E, mesmo seu estudo contribuindo para uma melhor compreensão de elementos de campos conceituais em que o conceito de área pode estar inserido, a pesquisadora destaca a necessidade de extensões desse trabalho.

Apoiada nos dois estudos anteriores, mais especificamente na modelo de área como uma grandeza autônoma e nas situações que dão sentido ao seu conceito, Rosa dos Santos (2005) realizou uma pesquisa com estudantes de uma turma de 8ª série do ensino fundamental, atual 9º ano, com o objetivo de investigar que relações existiriam entre a abordagem da área do paralelogramo em uma coleção de LD destinada aos anos finais dessa etapa e os procedimentos utilizados por esses estudantes na resolução de problemas envolvendo tal conceito. A pesquisadora fundamentou-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e seus seguidores, mais especificamente nas noções de contrato didático e variável didática.

Em relação aos resultados voltados à análise da coleção de LD, Rosa dos Santos (2005) apontou que mais de 60% dos paralelogramos não retângulos e não losangos possuem o lado de maior comprimento na posição horizontal e os índices dos que possuem inclinação para a direita superam 89%, com predominância da altura interior, caracterizando seu desenho prototípico como já discutimos em seção específica. Além disso, as tarefas envolvendo essa figura sempre continham a sua representação e havia prioridade nos aspectos numéricos.

Nos resultados relativos aos participantes, a pesquisadora percebeu que eles, por vezes, não reconheceram o paralelogramo não retângulo e não losango e apresentaram dificuldades na resolução de tarefas envolvendo a sua área, com desenhos não prototípicos das figuras. Verificou ainda que, mesmo não sendo o de maior comprimento, o lado tomado por base geralmente era o horizontal, fato encontrado tanto na coleção quanto nos procedimentos dos estudantes. Baltar (1996) também percebeu essa predominância do lado tomado por base ser o horizontal, ou o de maior comprimento. Segundo Rosa dos Santos (2005, p. 31):

Um dos fatores que explica essas lacunas é que existe um foco no aspecto numérico e da fórmula e numa forma mecânica e padronizada de se trabalhar o conceito de área do paralelogramo. Ao mesmo tempo, a crítica pertinente à maneira como o ensino vem sendo estruturado, não parece suficiente para explicar as dificuldades dos estudantes.

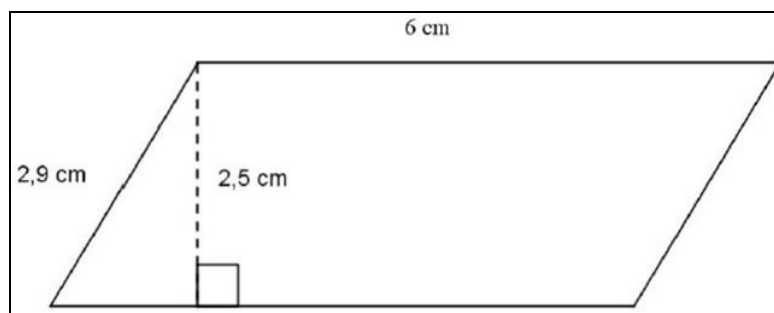
A maioria dos seus participantes distinguiram área e perímetro, contrariando suas expectativas iniciais e o que estudos anteriores apontavam, como Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996), entre outros. Entretanto, fizeram o emprego de expressões de área erradas, como a extensão indevida da expressão de área do retângulo para paralelogramos não retângulos, ou seja, o produto dos comprimentos dos lados, também observado em Baltar (1996) e Douady e Perrin-Glorian (1989). Apresentaram erros de álgebra das grandezas e sentiram a necessidade de desenhar a figura, em sua maioria prototípica, como um suporte à resolução das tarefas, mesmo aquelas em que não havia sua representação gráfica, como também observado por Ferreira (2010) e Teles (2007).

Por fim, percebemos que a pesquisadora pareceu assumir que os participantes da pesquisa já consideravam o retângulo não quadrado e o quadrado como sendo paralelogramos, pois, em uma questão de comparação de áreas, apareceram essas figuras em meio a paralelogramos não retângulos e não losangos, mas, em nenhum momento, verificou se esta hipótese é verdadeira, ou seja, se realmente os estudantes da pesquisa consideravam essas figuras como paralelogramos. Não observamos a presença do losango não quadrado nas

tarefas propostas, reforçando mais uma vez a necessidade de sua utilização e da realização de pesquisas que explorem todos os paralelogramos, como a que nos propomos a fazer.

Assim como Baltar (1996), Souza (2013) também se apoiou no modelo de área como uma grandeza autônoma proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) e na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) e seus colaboradores. O objetivo da sua pesquisa foi analisar como estudantes do 2º ano do ensino médio técnico lidam com a área de paralelogramos. Mais especificamente, verificou persistências ou não dos aspectos apontados por Rosa dos Santos (2005), mediante análise de dois elementos da TCC, o cálculo relacional e o cálculo numérico, e também da álgebra das grandezas. Dentre as tarefas aplicadas aos sujeitos de sua pesquisa, Souza (2013) analisou duas, as quais contemplavam a medição da área de paralelogramos não retângulos e não losangos. Vejamos a primeira delas:

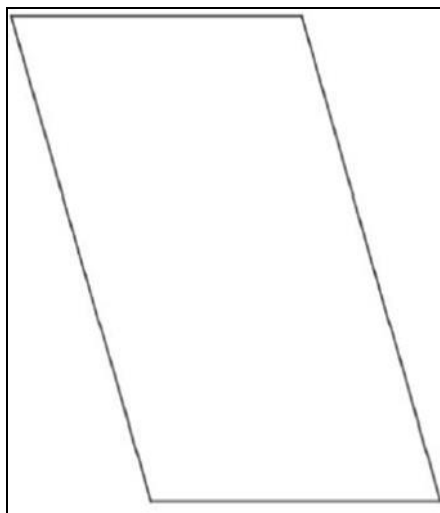
Figura 31 – Situação de medição com o desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango



Fonte: Souza (2013, p. 48)

Nesta primeira situação, há presença da figura em seu desenho prototípico e com dados numéricos extras para o cálculo da área, considerada pelo pesquisador como uma tarefa habitual. Como são solicitados área e perímetro, Souza (2013) considerou que não tinha dados desnecessários e que foram respeitadas as cláusulas do contrato didático, no entanto, havia a possibilidade de fazerem o produto dos comprimentos dos lados na medição da área. Já a segunda continha a figura em seu desenho não prototípico, sem dados numéricos, a qual considerou como uma tarefa não habitual, conforme mostrado a seguir:

Figura 32 – Situação de medição com um desenho não prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango



Fonte: Souza (2013, p. 56)

Nesta situação também é solicitado o cálculo da área e do perímetro, entretanto, este último não foi analisado.

Em relação aos resultados, observou que algumas dificuldades em relação à área de paralelogramos apresentadas em pesquisas anteriores como Baltar (1996), Douady e Perrin-Glorian (1989) e Rosa dos Santos (2005) persistiram mesmo no ensino médio, pois os participantes do seu estudo apresentaram confusão entre os conceitos de área e perímetro, emprego de expressões de área erradas, fazendo o produto dos comprimentos dos lados da figura ou cálculos de diferentes maneiras que envolvessem todos os dados fornecidos que, neste último caso, decorreu de uma cláusula do contrato didático relativa à necessidade de utilização de todos os dados fornecidos na tarefa. Houve confusão entre a expressão de área do paralelogramo com a do triângulo ou a do trapézio, uma vez que seus participantes viam na expressão de área deste último uma maneira de utilizar todos os dados presentes na representação do paralelogramo não retângulo e não losango, mais uma vez, consequência da busca por conformidade com o contrato didático. Outro ponto importante é relativo à utilização correta da expressão de área na tarefa considerada habitual, diferentemente da não habitual que não a empregaram.

Outros aspectos do cálculo relacional verificados por Souza (2013), além dos já mencionados, apontaram que 40% dos estudantes utilizaram procedimentos adequados na situação habitual, diminuindo para 25% em situação não habitual. No que diz respeito ao cálculo numérico, cerca de um terço dos alunos cometeu erros envolvendo operações numéricas com números decimais. Já na álgebra das grandezas, menos de 20% dos participantes expressaram adequadamente a área do paralelogramo não retângulo e não

losango pelo par (número, unidade de área); outros fizeram a utilização inadequada de unidades de medida (centímetro ou centímetro cúbico como unidades de áreas) ou a ausência delas, levando-os a considerar a área apenas como um número (concepção numérica).

Por fim, Souza (2013) fez o cruzamento dos dados (cálculo relacional, cálculo numérico e álgebra das grandezas) e notou que o acerto simultâneo de cálculo relacional e cálculo numérico foi de aproximadamente 30% nas condições consideradas habituais e 20% nas condições não habituais, ou seja, com os desenhos prototípicos e não prototípicos do paralelogramo não retângulo e não losango, respectivamente. Menos de 25% dos estudantes que acertaram o cálculo relacional em ambas as tarefas, lidaram adequadamente com unidades de comprimento e de área. Mesmo alguns participantes tendo expressado a área por um número seguido da unidade de medida, inicialmente operavam apenas com os números e ao final expressavam o resultado acrescentando a unidade de área. De modo geral, houve diferenças significativas em relação ao tratamento dado à tarefa habitual e não habitual e o tipo de paralelogramo explorado na sua pesquisa foi apenas o não retângulo e não losango.

Bernardes, Souza e Zandonade (2014), assim como o pesquisador anterior, também desenvolveram sua pesquisa com estudantes do ensino médio, mais especificamente, do 1º ano. Em seu artigo, relataram sobre a aplicação de uma atividade com esses participantes por meio da qual buscaram criar significados para o conceito de área a partir da investigação sobre paralelogramos, com a construção de figuras geométricas planas já estudadas. Basearam-se em documentos de orientação curricular nacional e do estado do Espírito Santo, o qual, à época, previa o estudo de áreas de regiões delimitadas por figuras geométricas planas no ano escolar da investigação. Na atividade aplicada, inicialmente os alunos deveriam dizer o que entendiam por área da região delimitada por uma figura plana. Em seguida, teriam que desenhar em papel quadriculado diferentes paralelogramos, iniciando por retângulos não quadrados e quadrados, depois paralelogramos não retângulos e não losangos e, por fim, losangos não quadrados. Além disso, deveriam tentar encontrar a área dessas figuras fazendo relação com os comprimentos dos seus lados ou das diagonais, neste último, recortá-los e compor retângulos de mesma área, e generalizar por meio de uma expressão de área de cada figura produzida.

Os resultados indicaram que os estudantes apresentaram muita dificuldade em responder o que seria área, como também observamos em Araújo (2012) e Santos (2010), sem exemplos no texto de definições dadas por eles. Outro dado importante é relativo à falta de compreensão do que seria uma expressão de área por alguns participantes, mesmo sendo estudantes do ensino médio, associando-a a um elemento do componente curricular Física. Na

construção e produção dos paralelogramos, as dificuldades em relacionar os comprimentos dos lados à sua área e em encontrar uma expressão de área geral para o cálculo dela foram maiores no caso dos paralelogramos não retângulos e não losangos, inclusive na determinação da sua altura, do que para os retângulos não quadrados e quadrados. No entanto, no caso do losango não quadrado, a dificuldade foi ainda maior, tanto na sua construção, alguns participantes chegando a perguntar como seria essa figura, quanto na relação entre os comprimentos das diagonais e sua área, sem muita compreensão do que seria uma diagonal, reforçando os resultados que discutimos nas seções sobre os paralelogramos e sobre a área. Notamos ainda a utilização pelas pesquisadoras do termo medida referindo-se a comprimento.

De modo geral, mesmo abordando todos os paralelogramos, essa pesquisa se volta para situações de produção e medição, com foco no aspecto numérico a partir da contagem de quadradinhos, cujas definições das figuras foram dadas previamente, sem aprofundamento nas discussões sobre elas e suas propriedades.

Em nossa pesquisa de mestrado (Araújo, 2018) investigamos como estudantes do 8º ano do ensino fundamental lidam com situações relativas à área de paralelogramos, mais especificamente com a identificação, classificação, comparação, medição e produção, sendo as duas primeiras específicas do nosso estudo e as três últimas propostas por Baltar (1996). Assim como esta pesquisadora e Souza (2013), nos apoiamos na TCC e na área como grandeza autônoma. Como Bernardes, Souza e Zandonade (2014), contemplamos todos os paralelogramos, no entanto, indo além no que se refere à exploração de outras classes de situações e de elementos específicos da TCC. Também avançamos em relação a Rosa dos Santos (2005) e Souza (2013) no que se refere ao trabalho com todos os paralelogramos. Outro ponto a mais em relação aos trabalhos citados nesta seção foi a inclusão de situações do campo da Geometria que realizamos, como a identificação e classificação. Apesar dessa ampliação, foi possível fazer apenas o diagnóstico das dificuldades por meio da aplicação de um teste e realização de entrevistas.

Os resultados mostraram que 80% dos participantes reconheceram os quadrados e os retângulos não quadrados, inclusive em desenhos não prototípicos. Já no caso do losango não quadrado, o percentual de acertos foi de apenas 36%. A situação de medição e a de identificação foram as que tiveram os menores índices de acertos 12% e 24%, respectivamente. Uma dificuldade em relação ao quadrado ocorreu quando foi fornecida a sua representação apoiada sobre um dos vértices e dado somente o comprimento da diagonal, na qual apenas 26% dos estudantes acertaram, diferentemente do resultado com ele em seu desenho prototípico que foi de 78% de acertos, como já mostramos anteriormente. Alguns

teoremas em ação foram modelizados como, por exemplo: figuras de perímetros diferentes podem ter áreas iguais; retângulos que possuem bases e alturas de medidas diferentes, possuem áreas diferentes. Também se verificou ausência e/ou utilização inadequada das unidades de medida e confusão entre área e perímetro, reafirmando os achados já discutidos ao longo desta seção.

Estudos pilotos que realizamos anteriores à dissertação como Araújo (2017), Araújo, Silva e Silva (2017) e Araújo, Santos, Melo, Pacheco e Moura (2018), com estudantes dos 8º e 9º anos do ensino fundamental de escolas públicas municipais, sendo uma situada no Recife e a outra em Ferreiros/PE apontaram que, mesmo com públicos de anos escolares diferentes e em regiões diferentes, as dificuldades convergiram para um ponto comum e não se distanciaram das apresentadas nas pesquisas que contemplavam isoladamente situações do campo da Geometria voltadas ao reconhecimento e as situações que dão sentido ao conceito de área do campo das Grandezas e Medidas. Os resultados dos estudantes do 8º ano indicaram que eles têm dificuldades na identificação de paralelogramos, principalmente quando a figura em jogo não é o quadrado. No que se refere às situações que dão sentido ao conceito de área, na de produção houve grande quantidade de ausência de respostas e alguns estudantes confundiram as figuras a produzir, bem como apresentaram dificuldades em reconhecer os elementos geométricos que têm relação com a sua área, assim como verificado em Bernardes, Souza e Zandonade (2014). Foi possível modelizar algumas proposições como, por exemplo, o teorema em ação falso segundo o qual figuras diferentes necessariamente têm áreas diferentes.

Quanto aos resultados dos estudantes do 9º ano, nenhum deles incluiu os quadrados ao classificar retângulos e losangos, este último teve índices de acerto muito baixos nessa situação, convergindo com os dados do estudo principal. Um estudante chegou a afirmar erroneamente que “losango é toda figura que possui cinco lados ou mais”. Na classificação de quadrados, a dificuldade foi menor, assim como no 8º ano. As questões de medição e produção não tiveram acertos plenos nem parciais ou então foram deixadas em branco. Fizeram confusão entre os conceitos de área e perímetro, e todos confundiram unidades de medida de comprimento e de área.

Com o intuito de ir além do ensino fundamental, aplicamos o mesmo teste piloto com estudantes do quarto período de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior pública da cidade do Recife. Sistematizamos esses resultados em Araújo,

Silva e Bellemain (2020)²⁶ que, de modo geral, indicaram que esses universitários apresentaram um bom padrão de acertos no conjunto de questões. No entanto, foram verificados alguns aspectos não plenamente dominados por eles, uma vez que na questão de classificação, observamos equívocos como considerar que “todo losango também é quadrado”. Modelizamos alguns teoremas em ação verdadeiros como a invariância da área por decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição. Ao indagá-los sobre quais dificuldades os estudantes encontrariam ao resolver as tarefas propostas, eles responderam que a principal seria a posição em que as figuras estavam representadas, principalmente para aqueles do ensino fundamental e médio.

Nesta seção, podemos observar que estudos realizados em intervalos de tempo relativamente longos e com participantes de distintos níveis de ensino apontaram resultados convergentes, alguns também observados por Teles (2007) como: extensão da expressão de área do retângulo para o paralelogramo não retângulo e não losango ao multiplicar os comprimentos dos seus lados, utilização inadequada das unidades de medida, prioridade por desenhos prototípicos, lidar mais adequadamente com situações que contemplam o quadrado ou o retângulo não quadrado e, conseqüentemente, ter maiores dificuldades com o paralelogramo não retângulo e não losango e com o losango não quadrado, não relacionar os comprimentos dos lados ou das diagonais com área das figuras em situações de produção, entre outras. Foi possível notar ainda que essas dificuldades se assemelham àquelas descritas nas pesquisas sobre os paralelogramos ou sobre área de diversas figuras geométricas planas, fortalecendo nosso interesse e a necessidade de realizar uma intervenção que contemplasse situações dos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, reforçando o papel das imbricações entre eles, pois nosso intuito não foi apenas apontar as dificuldades, mas experimentar meios que contribuíssem com a aprendizagem dos estudantes. Assim, exploramos na sequência didática procedimentos geométricos como a decomposição e recomposição para evitar o produto dos comprimentos dos lados em um paralelogramo não retângulo e não losango, situações em que diferentes lados poderiam ser tomados como base e não apenas o de maior comprimento na posição horizontal, além de diversas situações com losangos não quadrados.

Após esse levantamento de pesquisas já realizadas e dos principais erros cometidos pelos estudantes ao lidar com a área de paralelogramos, bem como aqueles que são

²⁶ http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/2415/pdf_423

persistentes, passamos para a discussão do que é preconizado para o ensino nos documentos curriculares nacional, estadual e municipal acerca do conceito de área e dos paralelogramos.

3.2 O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS DE ORIENTAÇÃO CURRICULAR E OUTROS MATERIAIS

Nesta seção, discutimos a abordagem do ensino de área e de paralelogramos nos seguintes documentos: Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – (Brasil, 2018), Currículo de Pernambuco (CPE) – (Pernambuco, 2019), Organizador Curricular por Bimestre de Matemática de Pernambuco (OCBMPE) – (Pernambuco, 2020a) e o Documento de Reorganização Curricular de Pernambuco (DRCPE) – (Pernambuco, 2020b), este último criado em virtude da pandemia de Covid-19.

3.2.1 A Base Nacional Comum Curricular

A BNCC é um documento de caráter normativo obrigatório, em que se define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica (Brasil, 2018). Na área de conhecimento e também componente curricular – Matemática – temos cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística, as quais orientam a formulação de habilidades para serem desenvolvidas durante o ensino fundamental. Nelas, estão organizados os conteúdos, conceitos e processos, tratados como objetos de conhecimento. Levando em consideração que nossa investigação se volta para as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, tratados como unidades temáticas na BNCC, nossa discussão será direcionada apenas para eles a partir deste momento, ressaltando que todos são igualmente importantes, no entanto, recortes precisam ser feitos para melhor aprofundamento.

Com relação à Geometria, o documento aponta que:

[...] nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (Brasil, 2018, p. 271).

Nos anos iniciais do ensino fundamental, espera-se que os estudantes nomeiem e comparem polígonos a partir de propriedades relacionadas aos lados, vértices e ângulos. Já

nos anos finais, o ensino situa-se na consolidação e aprofundamento das aprendizagens realizadas na etapa anterior. É alertado no documento que a Geometria

[..] não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (Brasil, 2018, p. 272-273).

Mencionar o conceito de área ao falar sobre Geometria, como acabamos de ver na citação acima, pode estar relacionado ao fato de as grandezas geométricas estabelecerem a articulação entre os campos da Geometria e o das Grandezas e Medidas. Além disso, reforça a necessidade de estudar as imbricações entre esses campos conceituais a partir desse conceito. Por outro lado, pode levar ao entendimento de que a área é um conceito restrito a esse campo e, com isso, perca de certa maneira sua característica de grandeza.

O quadro a seguir contempla algumas habilidades do campo da Geometria, a partir das quais é possível perceber que desde o primeiro ano do ensino fundamental já é esperado o desenvolvimento de habilidades relativas à identificação de figuras geométricas.

Quadro 1 – Habilidades voltadas ao reconhecimento de figuras geométricas planas no campo da Geometria para os anos iniciais do ensino fundamental na BNCC

<u>Algumas habilidades relativas às figuras geométricas planas nos anos iniciais</u>	
Anos	Habilidades
1º	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.
2º	(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.
3º	(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
4º	(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.
5º	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

Fonte: elaborado a partir da BNCC (Brasil, 2018)

De acordo com o quadro acima, observamos que os estudantes devem ter contato inicialmente com situações de identificação e classificação e que os paralelogramos em jogo são o quadrado e o retângulo não quadrado, inclusive em diferentes representações. Já o

paralelogramo não retângulo e não losango aparece no 3º ano. No 4º ano, além do reconhecimento, os estudantes têm a tarefa de representar figuras congruentes. O fato de o losango não quadrado não ser citado entre as outras figuras descritas nas habilidades acima, não impede que o professor, de acordo com as especificidades de sua turma, utilize situações que o contemplem por meio de jogos ou atividades práticas, pois como é apontado no próprio documento: “[...] não se pode frear a curiosidade e o entusiasmo pela aprendizagem, tão comum nessa etapa da escolaridade, e muito menos os conhecimentos prévios dos alunos” (Brasil, 2018, p. 276).

Em relação aos anos finais, o quadro a seguir contempla algumas habilidades para o campo da Geometria:

Quadro 2 – Habilidades voltadas às figuras geométricas planas no campo da Geometria para os anos finais do ensino fundamental na BNCC

<u>Algumas habilidades relativas às figuras geométricas planas no campo da Geometria nos anos finais</u>	
Anos	Habilidades
6º	(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
7º	(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
8º	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
9º	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Fonte: elaborado a partir da BNCC (Brasil, 2018)

A partir das habilidades acima, percebemos que novas situações podem ser exploradas, como a de inclusão de classes entre os quadriláteros, a construção e a demonstração de propriedades. Observamos ainda que no 9º ano aparece a utilização de conhecimentos da Geometria como a determinação de pontos médios e distância entre dois pontos para calcular grandezas, no caso, perímetros e áreas.

De modo geral, entre as habilidades apresentadas no quadro acima, damos destaque às previstas para o 6º ano do ensino fundamental, pois são importantes para que o estudante possa lidar mais adiante com o conceito de área no campo nas Grandezas e Medidas. Elas contemplam situações de identificação, classificação, construção e inclusão, além da ampliação e redução de figuras planas com o uso da malha quadriculada. Representar retas paralelas e perpendiculares também ajuda na compreensão de propriedades dos quadriláteros e na escolha de uma altura relativa a determinada base em situações de medição e produção envolvendo os paralelogramos. Esses aspectos foram considerados em nossa sequência didática.

Em relação ao campo das Grandezas e Medidas:

[...] a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico” (Brasil, 2018, p. 273).

Nos anos iniciais do ensino fundamental, espera-se que os estudantes sejam capazes de resolver situações provenientes do cotidiano que envolvam, por exemplo, a área de triângulos e de retângulos sem o uso de expressões de área. Para os anos finais, é esperado que

os alunos reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais. Além disso, espera-se que estabeleçam e utilizem relações entre essas grandezas e entre elas e grandezas não geométricas, para estudar grandezas derivadas como densidade, velocidade, energia, potência, entre outras. Nessa fase da escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, e as de volumes de prismas e de cilindros [...]” (Brasil, 2018, p. 273).

Notamos o destaque dado às grandezas geométricas (comprimento, área, volume e abertura de ângulo) tanto com relação a outros componentes curriculares quanto a aspectos da própria Matemática.

Destacamos algumas habilidades do campo das Grandezas e Medidas para os anos iniciais do ensino fundamental no quadro seguinte, mais especificamente aquelas voltadas ao conceito de área.

Quadro 3 – Habilidades voltadas ao conceito de área de figuras geométricas planas no campo das Grandezas e Medidas para os anos iniciais do ensino fundamental na BNCC

<u>Algumas habilidades relativas ao conceito de área de figuras geométricas planas no campo das Grandezas e Medidas nos anos iniciais</u>	
Anos	Habilidades
1º	Não observada
2º	Não observada
3º	(EF03MA17) Reconhecer que o resultado de uma medida depende da unidade de medida utilizada.
	(EF03MA21) Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos.
4º	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.
5º	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
	(EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.

Fonte: elaborado a partir da BNCC (Brasil, 2018)

A partir do quadro acima, podemos observar que as habilidades relativas ao conceito de área devem começar a ser trabalhadas a partir do 3º ano do ensino fundamental. Além disso, já nos anos iniciais são tratados três pontos de grande importância ao lidar com esse conceito: o primeiro é a relevância dada às unidades de medida nos processos de medição, possibilitando que os números variem a partir das unidades adotadas, porém mantendo invariante a grandeza; o segundo é o de que figuras diferentes podem ter mesma área que, junto à anterior, a caracteriza como uma grandeza autônoma; o terceiro e último busca desestabilizar uma dificuldade persistente nos alunos, ou seja, a de que área e perímetro variam no mesmo sentido. Também percebemos que o estudo desse conceito é iniciado pela situação de comparação de áreas, depois medição e algumas conversões de unidades, nas quais priorizam-se procedimentos visuais, de superposição, contagem de quadradinhos. O uso das expressões de área não é indicado para esse momento.

Quanto aos anos finais do ensino fundamental, o quadro abaixo contém algumas habilidades:

Quadro 4 – Habilidades voltadas ao conceito de área de figuras geométricas planas no campo das Grandezas e Medidas para os anos finais do ensino fundamental na BNCC

<u>Algumas habilidades relativas ao conceito de área de figuras geométricas planas no campo das Grandezas e Medidas nos anos finais</u>	
Anos	Habilidades
6º	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
7º	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
	(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
8º	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
9º	Não observada

Fonte: elaborado a partir da BNCC (Brasil, 2018)

No 9º ano não foram encontradas habilidades desse campo associadas ao nosso objeto de pesquisa visto que, a partir desse ano escolar e no ensino médio, o conceito de área faz parte do campo da Geometria, como vimos na última habilidade para esse ano escolar descrita no quadro 2. No entanto, é apontado no documento que: “A leitura dos objetos de conhecimento e das habilidades essenciais de cada ano nas cinco unidades temáticas permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas” (Brasil, 2018, p. 298). Esse aspecto reforça o interesse de investigar sobre o conceito de área na imbricação entre esses dois campos e a escolha dos nossos participantes serem estudantes do 9º ano do ensino fundamental, pois é esperado que a sistematização do conceito de área no campo das Grandezas e Medidas tenha acontecido no 8º ano, o qual passa a ser explorado no campo da Geometria nos anos seguintes de escolarização. Além disso, esperamos que já tenham lidado com diversas situações ao longo da sua vida escolar, uma vez que, como vimos, desde os anos iniciais, habilidades relacionadas ao reconhecimento e à área de figuras geométricas planas são apontadas na BNCC. Outro ponto que reforça nosso interesse por participantes do 9º ano é o fato de estarem concluindo o ensino fundamental após dois anos de pandemia (2020 e 2021), a qual trouxe, acentuou e/ou deu maior visibilidade a diversos problemas e desafios educacionais. Por esse motivo, escolhemos

resgatar habilidades voltadas aos anos escolares anteriores, explorando-as por meio de situações sobre área de paralelogramos. Assim, nossa proposta é uma maneira de amenizar os prejuízos na aprendizagem sofridos por esses estudantes que, possivelmente, deixaram de vivenciar adequadamente habilidades e situações presentes na BNCC, que são o mínimo recomendado para o ensino de área e de paralelogramos no ensino fundamental.

Uma vez tida essa visão do que é preconizado no documento a nível nacional, passamos a analisar os documentos estaduais, iniciando pelo Currículo de Pernambuco e depois o Organizador Curricular por Bimestre e o Documento de Reorganização Curricular de Matemática, ambos do referido estado.

3.2.2 O Currículo de Pernambuco

O Currículo de Pernambuco (CPE), em consonância com a BNCC e complementando-a no nível do estado de Pernambuco, é um documento orientador para as redes públicas estadual e municipais, e para as escolas privadas. Seu objetivo é “nortear as propostas pedagógicas dos municípios, os projetos políticos pedagógicos das escolas e as práticas pedagógicas vivenciadas em sala de aula” (Pernambuco, 2019, p. 42).

Assim como na BNCC, no CPE também há a divisão em cinco unidades temáticas – Geometria, Estatística e Probabilidade, Álgebra, Grandezas e Medidas, e Números, cujas caracterizações e orientações iniciais se assemelham ao que é proposto no primeiro documento.

Em relação ao trabalho com Geometria nos anos iniciais, é apontado no CPE que o estudante deve ser levado a perceber propriedades comuns e diferenças entre várias figuras, sem tanta preocupação com as denominações, cujo aprofundamento deve ser dado nos anos finais do ensino fundamental.

Nesta segunda etapa, os estudantes devem passar a analisar as figuras a partir de suas propriedades e não mais pelo aspecto global. O documento ressalta o cuidado com a ênfase dada à memorização das propriedades e nomenclaturas das figuras e que as “atividades de composição e decomposição de figuras complexas, a partir de figuras geométricas simples, podem auxiliar tanto na articulação dessas propriedades como na compreensão dos conceitos relativos às grandezas geométricas” (Pernambuco, 2019, p. 379-380).

Em relação às habilidades do campo da Geometria previstas para os anos iniciais do ensino fundamental, envolvendo aspectos relacionados aos quadriláteros que interessam a nossa pesquisa, a maioria é comum às encontradas na BNCC, apresentadas no quadro 1. Além

dessas, o CPE inclui para o 3º ano a habilidade de “(EF03MAXPE) Compor e decompor figuras, a partir das figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo)” (Pernambuco, 2019, p. 396). Para os anos finais, não verificamos habilidades desse campo no CPE além das apresentadas no quadro 2, extraídas da BNCC.

Quanto às Grandezas e Medidas, é destacado que:

Além do papel articulador dessa unidade temática, é fundamental que os estudantes compreendam a noção de grandeza enquanto atributo de um objeto; identifiquem diferentes grandezas associadas a um mesmo objeto; percebam a diferença entre uma figura, as grandezas a ela associadas e o número associado à medição dessa grandeza; saibam utilizar instrumentos de medição e compreendam a diferença entre a medição prática e a teórica e entre precisão, erro e estimativa de medidas (Pernambuco, 2019, p. 361).

A citação acima contempla pontos importantes para a compreensão de aspectos relacionados às grandezas que, no caso da área, destaca a distinção entre três elementos (figura, grandeza e medida), contribuindo para a sua compreensão como uma grandeza autônoma em relação ao número e à superfície, como já destacado em seção específica.

É apontado criticamente no documento que, em relação ao trabalho com Grandezas e Medidas nos anos iniciais, há privilégio pela apresentação de unidades de medidas padronizadas, inclusive para a área, e é dada importância em excesso à conversão das unidades de medida. Além disso, a apresentação das expressões de área seguidas de uma lista enorme de problemas para aplicação tem se mostrado ineficaz, podendo gerar obstáculos futuros como, por exemplo, a confusão entre área e perímetro (Pernambuco, 2019). É destacada ainda a importância de comparar sem precisar fazer medições e que o uso das expressões de área deve ser deixado para os anos finais do ensino fundamental, como também observamos na BNCC.

Nos anos finais do ensino fundamental, aponta-se que

Iniciar atividades que relacionem a área de algumas figuras planas com a área do retângulo permite o estabelecimento de expressões algébricas que possibilitam generalizar procedimentos de medidas de áreas a outras figuras, levando, assim, à sistematização de algumas fórmulas (áreas de quadrados, paralelogramos, triângulos, trapézios, losangos e comprimento da circunferência). É preciso ressaltar, porém, a necessidade de uma forte articulação com a geometria, buscando-se utilizar as propriedades das figuras planas para generalizar expressões (Pernambuco, 2019, p. 383).

Como podemos observar, a citação acima reforça nossa proposta de trabalhar as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, considerando que as tarefas matemáticas sobre área de paralelogramos também exigem conhecimentos geométricos, permitindo reforçar a articulação entre esses dois campos, bem como as necessidades que são próprias de cada um deles ao lidar com situações mais amplas.

Em relação às habilidades do campo das Grandezas e Medidas previstas para os anos iniciais do ensino fundamental, que envolvam aspectos relacionados à área de figuras geométricas planas, a maioria é comum às encontradas na BNCC, apresentadas no quadro 3. Além dessas, o CPE inclui para o 5º ano a habilidade de “**(EF05MAXPE)** Compreender o significado de um metro quadrado e de um centímetro quadrado para comparar áreas e as relações entre centímetro cúbico, decímetro cúbico e metro cúbico com o litro” (Pernambuco, 2019, p. 405). Para os anos finais do ensino fundamental, não verificamos habilidades para esse campo além das observadas na BNCC, distribuídas no quadro 4.

Cabe ressaltar que, assim como na BNCC, as habilidades relativas ao conceito de área iniciam-se nesse campo a partir do 3º ano do ensino fundamental e ocorre sua sistematização no 8º ano. A partir do 9º ano do ensino fundamental em diante, o conceito de área passa a ser abordado no campo da Geometria. Esses aspectos corroboram com nossa escolha por participantes do 9º ano, uma vez que, de acordo com os documentos acima, esses estudantes já devem ter vivenciado diversas situações relativas à área de paralelogramos.

Em resumo, fazendo uma breve comparação entre os achados na BNCC e no CPE, percebemos que para os anos iniciais²⁷ do ensino fundamental há o acréscimo de duas habilidades no CPE que não aparecem na BNCC, uma no campo da Geometria voltada ao 3º ano, relativa à decomposição e recomposição de figuras, procedimentos geométricos importantes ao lidar com o conceito de área que também foram explorados em nossa sequência didática, e outra no campo das Grandezas e Medidas para o 5º ano, relacionada à compreensão do significado de um metro quadrado e de um centímetro quadrado para comparar áreas e algumas relações entre unidades de medida de volume com o litro. Esta última, começa a preparar o estudante para o trabalho com a situação de conversão de unidades. Há ainda uma terceira habilidade a mais no CPE, também para o 5º ano, porém é sobre o reconhecimento de ângulos de um quarto de volta, meia volta e uma volta que não é primordial em nosso estudo. Já com relação aos anos finais do ensino fundamental, não verificamos diferenças entre as habilidades apresentadas nos dois documentos – BNCC e CPE.

Após essa análise do CPE, passamos ao Organizador Curricular por Bimestre de Matemática de Pernambuco que, assim como o Documento de Reorganização a ser analisado mais adiante, são complementares ao currículo. No organizador curricular, além das

²⁷ Embora esses documentos tenham sido aprovados quando nossos participantes já tinham vivenciado os anos iniciais, consideramos importante fazer esse levantamento na BNCC e no CPE para compreender o ensino de área e de paralelogramos para um estudante ao longo de todo ensino fundamental. Nos demais documentos, a análise é realizada apenas para os anos finais.

habilidades e dos objetos de conhecimento de cada unidade temática previstos no CPE para seus respectivos anos escolares, há o apontamento dos conteúdos e dos bimestres em que devem ser trabalhados.

3.2.2.1 O Organizador Curricular por Bimestre de Matemática de Pernambuco

Nesta subseção, faremos a análise do Organizador Curricular por Bimestre de Matemática de Pernambuco (OCBMPE) direcionada apenas aos anos finais do ensino fundamental, uma vez que nossos participantes fazem parte dessa etapa. Esse documento, como dito acima, vai além do que é estabelecido no currículo, pois esclarece os conteúdos a serem trabalhados e os respectivos bimestres.

No quadro a seguir, destacamos as habilidades para o 6º ano tanto do campo da Geometria quanto do das Grandezas e Medidas, já apresentadas na análise da BNCC e, como vimos, comuns ao CPE, os conteúdos, priorizando os mais voltados à área e aos quadriláteros, e os bimestres indicados para serem trabalhadas:

Quadro 5 – Seleção das habilidades e dos conteúdos para o 6º ano nos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, organizadas por bimestres

6º ano – Grandezas e Medidas (área)		
Habilidades	Alguns conteúdos	Bimestres
(EF06MA24PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.	- Resolução e elaboração de problemas do cotidiano usando unidades de medida (comprimento, tempo, massa, temperatura, área e do volume); - Reconhecimento das grandezas; - Seleção do tipo adequado de unidade de medida; - Identificação do instrumento adequado para medida de uma grandeza.	1º
(EF06MA29PE) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado representados em malhas quadriculadas ou em outros meios (inclusive softwares) ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.	- Relação entre o perímetro e a área de um quadrado quando da redução ou ampliação de seus lados; - Proporcionalidade entre o lado e o perímetro de um quadrado.	4º
6º ano – Geometria (quadriláteros)		
Habilidades	Alguns conteúdos	Bimestres
(EF06MA20PE) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.	- Análise dos tipos de quadriláteros, identificando suas características; - Classificação dos quadriláteros em relação a lados e a ângulos; - Reconhecimento da inclusão e a intersecção de classes entre os quadriláteros.	2º
(EF06MA21PE) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano e/ou tecnologias digitais.	- Análise das condições necessárias e suficientes para se obter figuras semelhantes; - Ampliação e redução de figuras planas, utilizando malha quadriculada, plano cartesiano e/ou tecnologias digitais.	3º
(EF06MA22PE) Utilizar instrumentos, como réguas, esquadros ou softwares, para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.	- Conceito de retas paralelas e perpendiculares; - Construção e análise de quadriláteros no software de geometria dinâmica, usando técnicas de construção com régua e compasso.	4º

Fonte: elaborado a partir do Organizador Curricular (Pernambuco, 2020a)

A partir do quadro acima, podemos notar que as primeiras situações sugeridas aos estudantes do 6º ano do ensino fundamental são do campo das Grandezas e Medidas, uma vez que no 1º bimestre devem resolver e elaborar problemas com a área de triângulos e retângulos. As habilidades sobre o conceito de área voltam a ser discutidas no 4º bimestre. Nesse intervalo, são trabalhadas as do campo da Geometria, com as situações de identificação, classificação e inclusão no 2º bimestre, e construção no 4º. Podemos notar também que a ampliação e redução de figuras é trabalhada no 3º bimestre no campo da Geometria e são retomadas no bimestre seguinte no campo das Grandezas e Medidas ao trabalhar a relação entre os conceitos de área e perímetro com a figura do quadrado, considerando a ampliação e redução dos comprimentos de seus lados. A forte articulação

entre esses dois campos é enfatizada no CPE e reforça nosso interesse em estudar as imbricações entre eles.

Vejamos agora as habilidades, conteúdos e bimestres organizadas para o 7º ano do ensino fundamental:

Quadro 6 – Seleção das habilidades e dos conteúdos para o 7º ano nos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, organizadas por bimestres

7º ano – Grandezas e Medidas (área)		
Habilidades	Alguns conteúdos	Bimestres
(EF07MA31PE) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros, explorando os diversos tipos de contextos.	- Cálculo de área de figuras planas por decomposição; - Cálculo de área de triângulo e paralelogramo por composição em retângulos;	3º
(EF07MA32PE) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas, inclusive com suporte em materiais manipuláveis e/ou tecnologias digitais.	- Cálculo de área de polígonos por decomposição em triângulos, quadrados, retângulos; - Resolução e elaboração de problemas que envolvem cálculo de medida de área de figuras planas.	
7º ano – Geometria (quadriláteros)		
Habilidades	Alguns conteúdos	Bimestres
(EF07MA28PE) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.	Descrição de um algoritmo para a construção de polígonos regulares.	4º

Fonte: elaborado a partir do Organizador Curricular (Pernambuco, 2020a)

Como podemos observar, as habilidades relativas ao conceito de área e aos quadriláteros são contempladas no segundo semestre do ano letivo, sendo as do campo das Grandezas e Medidas no 3º bimestre, com situações de medição e envolvendo procedimentos geométricos de decomposição e recomposição de figuras. Já a habilidade do campo da Geometria está no 4º bimestre, tratando da descrição de um algoritmo para situações de construção de quadrados e triângulos equiláteros.

Vamos ao quadro com as informações destinadas ao 8º ano:

Quadro 7 – Seleção das habilidades e dos conteúdos para o 8º ano nos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, organizadas por bimestres

8º ano – Grandezas e Medidas (área)		
Habilidades	Alguns conteúdos	Bimestres
(EF08MA19PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos) em situações como determinar medida de terrenos.	- Determinação de área pela composição ou decomposição de figuras planas; - Resolução e elaboração de problemas que envolvem cálculo de área de figuras geométricas (quadriláteros, triângulos e círculos); - Reconhecimento das medidas agrárias de superfícies e suas relações com o metro quadrado.	1º
8º ano – Geometria (quadriláteros)		
Habilidades	Alguns conteúdos	Bimestres
(EF08MA14PE) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.	Demonstração das propriedades dos quadriláteros a partir da congruência de triângulos.	1º

Fonte: elaborado a partir do Organizador Curricular (Pernambuco, 2020a)

Os conteúdos desses campos estudados ao final do 7º ano são retomados no início do 8º ano, mais precisamente, no 1º bimestre. Percebemos também que os procedimentos de decomposição e recomposição voltam a ser utilizados em situações de medição de áreas que podem estar relacionadas a contextos sociais. Quanto ao campo da Geometria, há um aprofundamento em relação aos bimestres dos anos anteriores relativo às demonstrações.

Por fim, apresentamos o que é contemplado nesse documento para o 9º ano nos campos das Grandezas e Medidas e da Geometria, e seus respectivos objetos:

Quadro 8 – Seleção das habilidades e dos conteúdos para o 9º ano nos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, organizadas por bimestres

9º ano – Grandezas e Medidas (área)		
Habilidades	Alguns conteúdos	Bimestres
Não observada	-	-
9º ano – Geometria (quadriláteros)		
Habilidades	Alguns conteúdos	Bimestres
(EF09MA15PE) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua, compasso e também softwares.	Descrição de algoritmo para a construção de qualquer polígono regular dada a medida do seu lado.	4º
(EF09MA16PE) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.	Cálculo do perímetro e da área de figuras planas dadas as coordenadas de seus vértices.	

Fonte: elaborado a partir do Organizador Curricular (Pernambuco, 2020a)

Como esse documento é baseado no CPE, não contempla habilidades relativas ao conceito de área no campo das Grandezas e Medidas para o 9º ano do ensino fundamental, como também vimos na análise da BNCC e do CPE, uma vez que esse conceito passa a ser abordado no campo da Geometria, no 4º bimestre. Quanto à descrição do algoritmo,

percebemos um avanço em relação ao 7º ano, pois passou da construção de quadrado e triângulo equilátero para qualquer polígono regular, explorando a forma predicativa do conhecimento ao fazer a descrição, também abordada ao solicitarmos explicações de como fizeram em nossa sequência didática.

Agora, vamos analisar como ficaram reorganizadas as habilidades e conteúdos nos bimestres em cada campo e ano escolar no período da pandemia de Covid-19, com a criação do Documento de Reorganização Curricular de Pernambuco, sobre o qual discutiremos na subseção seguinte. Nele, há também a divisão de habilidades do organizador curricular em prioritárias e complementares.

3.2.2.2 O Documento de Reorganização Curricular de Pernambuco

No contexto educacional, a pandemia da Covid-19, por um lado, trouxe vários problemas e, por outro, deu maior visibilidade a alguns já existentes, como é o caso da desigualdade social. Muitos estudantes ficaram com aulas apenas remotas ou até mesmo nem tiveram acesso a elas, por dificuldades de conexão ou mesmo na ausência de equipamentos tecnológicos adequados. Os professores se depararam com uma realidade nova para muitos deles, em que seu quarto, sala, cozinha ou outros cômodos viraram salas de aula e o quadro branco e pincel foram substituídos por uma tela de computador e um teclado.

Foi nesse cenário de pandemia que foi criado o Documento de Reorganização Curricular de Pernambuco (DRCPE), que “[...] vem a contribuir como uma referência para orientar o professor a reorganizar o planejamento de suas aulas em 2020, tanto as propostas de atividades não presenciais para esse momento, como também após o retorno às aulas presenciais” (Pernambuco, 2020b, p. 2). É alertado no documento que é necessária a reorganização do planejamento anual por parte dos professores de modo que priorizem a revisão do que foi estudado de maneira presencial antes da pandemia, ou remota durante o período pandêmico, buscando com essa proposta “garantir os direitos e objetivos de aprendizagem dos estudantes sobre o que está posto no currículo, dentro de um planejamento alinhado com a realidade da pandemia e dos desafios que ela impõe à Educação” (*Ibid.*, p. 3).

Esse documento, que possui como referência o CPE, contempla em cada componente curricular, ano e bimestre dos anos finais do ensino fundamental, as unidades temáticas, os objetos de conhecimento, as habilidades e os conteúdos, priorizando os mais relevantes para aquele ano escolar do estudante. Também são apontadas quais habilidades são consideradas

prioritárias e quais são complementares e há ainda a indicação de quais conteúdos relativos às habilidades foram mais detalhados e discutidos em videoaulas no Portal Educa PE²⁸.

Como se trata de uma reorganização do que estava estabelecido pelo organizador curricular, realizamos uma análise comparativa entre esses dois documentos, observando especificamente entre as habilidades que acabamos de discutir na subseção anterior, se alguma delas passou a ser considerada complementar e, por esse motivo, poderia não ter sido explorada pelos professores em sala de aula.

A partir da realização da análise descrita no parágrafo anterior, percebemos que apenas uma das habilidades que discutimos nos quadros elaborados com base no Organizador Curricular foi considerada como complementar. Mais precisamente, a habilidade “(EF09MA15PE) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua, compasso e também softwares” (Pernambuco, 2020b, p. 276). Cabe ressaltar também que todas se mantiveram em seus respectivos bimestres, como indicado no OCBMPE, inclusive esta última considerada complementar.

A análise acima se fez necessária para, como já dito, observar entre as habilidades que os professores vinham trabalhando em um contexto tido como “normal” de sala de aula, previstas no currículo e no organizador curricular, quais deveriam ser consideradas como prioritárias e quais poderiam ser deixadas em segundo plano, como complementar. Além disso, ela servirá de suporte para a subseção seguinte que trata da análise dos planejamentos semestrais para o ano letivo de 2021 elaborados pelos professores de Matemática da escola local de pesquisa.

3.2.3 Os planejamentos da escola campo de pesquisa

Na análise dos planejamentos elaborados pelos professores²⁹ de Matemática para o ano letivo de 2021, observamos quais habilidades voltadas ao conceito de área e aos quadriláteros foram contempladas e em que meses do ano foram trabalhadas. Este último aspecto possibilitou decidir em que momento do ano seguinte a essa análise (2022) poderíamos realizar a experimentação. Como vimos acima, tanto no Organizador Curricular

²⁸ <https://educape.educacao.pe.gov.br/>

²⁹ No início de cada semestre letivo, há um momento em que os professores se reúnem por área para confecção dos planejamentos. Com isso, as ideias tratadas aqui representam as escolhas de um grupo de professores de Matemática da escola onde realizamos nossa pesquisa.

quanto no Documento de Reorganização Curricular, é esperado que as habilidades relativas ao conceito de área sejam sistematizadas no 8º ano do ensino fundamental, no primeiro bimestre. Com isso, iniciamos a experimentação no primeiro semestre do ano seguinte com turmas de 9º ano, pois era previsto que já tivessem vivenciado diversas situações sobre a área de paralelogramos.

O documento que os professores da rede municipal de Ferreiros/PE são orientados a preencher semestralmente em seus planejamentos contém um quadro com os meses, eixos temáticos, conteúdos, habilidades e procedimentos de avaliação. Assim, para cada uma das quatro turmas do ensino fundamental anos finais, eles elaboram dois planejamentos durante o ano letivo, um para cada semestre, apoiados nos documentos de orientação curricular de Pernambuco que acabamos de apresentar. Vamos discutir sobre esses planejamentos nos parágrafos seguintes, estabelecendo uma relação com as habilidades que selecionamos na BNCC e CPE, e com o proposto no Organizador e no Documento de Reorganização Curricular em relação aos bimestres, chamados de unidades didáticas na referida rede de ensino.

Optamos por analisar todos os planejamentos voltados aos anos finais do ensino fundamental para conhecermos que habilidades foram selecionadas e possivelmente exploradas em sala de aula.

Nos planejamentos para o 6º ano do ensino fundamental, apesar de todas as cinco habilidades que havíamos selecionado no quadro 5 relativas ao conceito de área e aos quadriláteros serem consideradas prioritárias no Documento de Reorganização Curricular, verificamos apenas três delas: a *“(EF06MA21PE) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano e/ou tecnologias digitais”* e a *“(EF06MA22PE) Utilizar instrumentos, como réguas, esquadros ou softwares, para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros”*, ambas do campo da Geometria e previstas para serem trabalhadas nos meses de setembro e novembro, respectivamente. A outra habilidade é do campo das Grandezas e Medidas: *“(EF06MA29PE) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado representados em malhas quadriculadas ou em outros meios (inclusive softwares) ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área”*, prevista para o mês de dezembro.

Em todas as habilidades anteriores, percebemos coerência com o Organizador e o Documento de Reorganização Curricular no que se refere à indicação dos bimestres. As duas

habilidades não consideradas eram relativas, entre outros aspectos, à resolução e elaboração de problemas envolvendo a área de triângulos e retângulos, prevista para o 1º bimestre no campo das Grandezas e Medidas, e à identificação das características dos quadriláteros para realizar inclusão e intersecção de classes entre eles, esta última considerada muito importante para nosso estudo e que deveria ter sido estudada no 2º bimestre no campo da Geometria, conforme orientações já discutidas. Embora não sejam nossos participantes, não trabalhar essas habilidades trará prejuízos para essa turma nos anos seguintes relativos às situações de medição e de inclusão.

Nos planejamentos voltados ao 7º ano do ensino fundamental, não verificamos nenhuma das três habilidades que havíamos selecionado no quadro 6 e consideradas prioritárias no Documento de Reorganização Curricular, das quais duas eram do campo das Grandezas e Medidas, relacionadas a situações de medição de área envolvendo procedimentos de decomposição e recomposição de figuras, previstas para o 3º bimestre, e uma do campo da Geometria, ligada à descrição de um algoritmo para situações de construção de quadrados e triângulos equiláteros, no 4º bimestre. A partir da análise desses planejamentos, observamos que no primeiro semestre, no campo da Geometria, as habilidades contempladas eram sobre o estudo de simetria e da circunferência. Já no campo das Grandezas e Medidas, estavam relacionadas ao estudo do volume de blocos retangulares e suas unidades de medida. No 2º semestre, momento em que deveriam ter sido trabalhadas as habilidades acima, como apontado no Organizador e no Documento de Reorganização Curricular, não foram incluídas habilidades do campo da Geometria e as do campo das Grandezas e Medidas eram voltadas ao objeto matemático ângulo e à grandeza associada a ele, a abertura de ângulo. Diante disso, possivelmente, os conteúdos sobre área e quadriláteros não foram vivenciados nesse ano escolar pelos estudantes. Talvez, a opção por parte dos professores de não trabalhar com área nesse momento se deva ao fato de os documentos, como BNCC e CPE, apontarem sua sistematização no 8º ano e, com isso, decidirem fazer tudo nele, desconsiderando o tempo de aprendizagem de cada estudante, a construção gradativa das competências e o domínio progressivo dos conceitos.

Quanto aos planejamentos para o 8º ano do ensino fundamental, verificamos convergências e divergências relativas à seleção das habilidades que trouxemos no quadro 7 e ao que é apontado no Organizador e no Documento de Reorganização Curricular. Sobre as convergências, há a presença da habilidade no campo das Grandezas e Medidas: *“(EF08MA19PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos)*

em situações como determinar medida de terrenos”, considerada como prioritária no Documento de Reorganização Curricular e que também a selecionamos por ser relativa ao conceito de área. No entanto, nesse documento e no Organizador Curricular, ela está prevista para o 1º bimestre e, nos planejamentos, para o mês de maio, compreendido no 2º bimestre. Outro ponto em que diverge é a ausência da habilidade do campo da Geometria voltada às demonstrações das propriedades de quadriláteros com utilização da congruência de triângulos. Essa ausência se justifica, talvez, pelo fato de ela ser um aprofundamento em relação às habilidades que foram trabalhadas nos anos anteriores sobre as propriedades dessas figuras e, como vimos, não foram incluídas nos planejamentos. Também não descartamos a possibilidade de os professores não se sentirem seguros em ensinar os conteúdos previstos pela habilidade. Por fim, ressaltamos que estamos descrevendo estudantes hipotéticos que vivenciaram, possivelmente, no ano de 2021 o previsto nesse planejamento e que foram nossos participantes no ano de 2022.

Em relação ao 9º ano, como vimos na BNCC e no CPE, não há habilidades relativas ao conceito de área no campo das Grandezas e Medidas e isso é refletido nos planejamentos dos professores. Das duas habilidades que selecionamos no quadro 8 relativas ao campo da Geometria, uma foi considerada prioritária no Documento de Reorganização Curricular e estava presente nos planejamentos para o 9º ano do ensino fundamental: “*(EF09MA16PE) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano*”. Como podemos ver, se trata da habilidade que contempla o conceito de área no campo da Geometria. A outra que selecionamos, mas não estava presente nos planejamentos e foi considerada complementar no Documento de Reorganização Curricular envolvia a descrição de um algoritmo para construção de um polígono regular qualquer.

Em resumo, a análise desses documentos possibilitou conhecer quais habilidades foram selecionadas pelos professores em seus planejamentos que, em alguns momentos, divergiram daquelas consideradas prioritárias pelo Documento de Reorganização Curricular. Também percebemos que eles não seguem à risca o Organizador Curricular no que se refere aos bimestres em que cada uma delas deve ser trabalhada. Outro ponto de destaque é que habilidades importantes, como as relativas à classificação e inclusão entre os quadriláteros não foram contempladas, assim como as que envolviam situações de medição de áreas utilizando procedimentos de decomposição e recomposição, o que pode comprometer o

desenvolvimento do repertório de esquemas desses estudantes, tornando-o limitado para lidar com determinadas classes de situações. A não inclusão de algumas habilidades consideradas prioritárias pode estar relacionada à realidade dos alunos conhecida pelos professores e ao momento pandêmico em que se encontravam. Tais aspectos traduzem, ao menos parcialmente, o que foi estudado pelos estudantes ao longo do ano letivo de 2021, corroborado com a análise das apostilas de atividades realizada a seguir.

3.2.4 As apostilas de atividades dos alunos

Como já dito na seção relativa à caracterização do contexto da pesquisa, com a adoção das aulas remotas, a Secretaria Municipal de Educação de Ferreiros/PE passou a entregar mensalmente aos alunos fichas de atividades elaboradas pelos professores das turmas, chamadas por eles de apostilas, para realizarem em casa. Elas contemplavam blocos de atividades de todos os componentes curriculares do ensino fundamental.

Vamos analisar todas as dez apostilas³⁰ de cada ano escolar, mapeando as situações sobre o conceito de área e os paralelogramos, mais especificamente, classificando-as em comparação, medição, produção, conversão de unidades, identificação, classificação, inclusão e construção. Além disso, veremos se há representação das figuras e, em caso positivo, se os desenhos são prototípicos, não prototípicos ou se aproximam dos prototípicos. Sempre que possível também buscaremos estabelecer um elo entre as orientações curriculares, os planejamentos e as atividades.

Ao analisarmos as apostilas do 6º ano do ensino fundamental, verificamos que todas somaram um total de 65 questões relativas a todo conteúdo de matemática, das quais duas eram relacionadas à comparação de áreas a partir da ampliação e redução das figuras, no campo das Grandezas e Medidas, e duas à construção de figuras com o dobro do comprimento do lado que uma figura inicial, no campo da Geometria, todas na malha quadriculada. Vejamos um exemplo de uma situação de comparação:

³⁰ Não teve apostila no mês de janeiro por ser o período de férias dos professores e estudantes. Já a destinada ao mês de dezembro foi montada a partir da seleção de atividades já contempladas nas apostilas dos demais meses, funcionando como uma revisão. Dessa maneira, analisamos apenas as dez apostilas relativas aos meses de fevereiro a novembro de 2021.

Figura 33 – Situação de comparação de áreas a partir da ampliação da figura geométrica plana

2. (Prova Brasil) Os desenhos a seguir representam o formato de um jardim que será construído em uma praça da cidade. Inicialmente pensou-se num jardim pequeno, mas, devido ao grande entusiasmo da população da cidade, o prefeito solicitou que fizessem um novo projeto, com desenho maior. O novo projeto terá área:



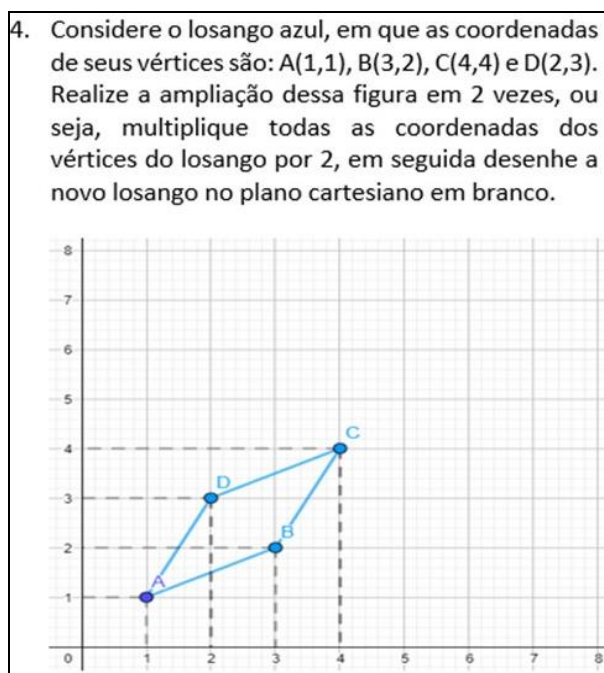
a) ☐ 2 vezes maior que o primeiro.
b) ☐ 3 vezes maior que o primeiro.
c) ☐ 4 vezes maior que o primeiro.
d) ☐ 6 vezes maior que o primeiro.

Fonte: Apostila de atividades do 6º ano (out./2021) extraída da Prova Brasil

Na situação acima, temos a comparação de áreas a partir da ampliação das figuras que, no caso, são retângulos não quadrados em desenhos prototípicos. Apesar de ser uma situação de comparação, uma de suas tarefas elementares consiste na medição das áreas a partir da contagem de quadradinhos para poder responder adequadamente. Na outra situação dessa classe, constam desenhos prototípicos de quadrado, cuja comparação se dá a partir da redução.

Quanto às situações de construção, uma delas trazia o desenho prototípico do retângulo não quadrado e a outra o desenho não prototípico de um losango não quadrado, esta última apresentada a seguir:

Figura 34 – Situação de construção a partir da ampliação de coordenadas



Fonte: Apostila de atividades do 6º ano (set./2021)³¹

Como podemos observar, o estudante tem a tarefa de representar a figura não pelas propriedades, embora precise preservá-las após o tratamento, mas a partir das coordenadas dos vértices. A outra situação dessa classe era voltada à construção de um retângulo não quadrado a partir do dobro do comprimento do seu lado, também sobre o recurso malha quadriculada.

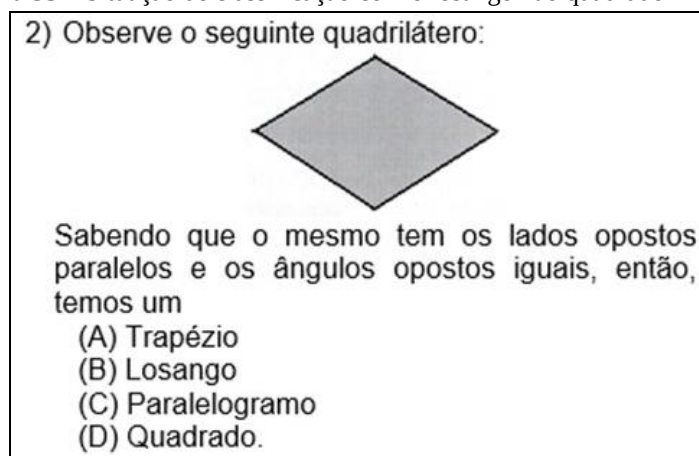
Essas situações estavam presentes nas apostilas dos meses de setembro e outubro, uma de cada classe identificada em cada um dos meses, corroborando o previsto em seus planejamentos no que se refere ao trabalho com as habilidades de representação de figuras semelhantes em malhas quadriculadas a partir da redução e ampliação, e à análise das mudanças sobre a área ao ampliar ou reduzir a representação de um quadrado também na malha, ambas nos 3º e 4º bimestres, respectivamente. No entanto, nesta última habilidade e como apresentado acima, em uma das situações propostas é utilizado o desenho do retângulo não quadrado ao invés do quadrado. As malhas utilizadas nessas atividades eram iguais, diferentemente da nossa sequência didática que utilizamos malhas diferentes.

As apostilas do 7º ano do ensino fundamental totalizaram 72 questões de Matemática. Entre elas, identificamos uma situação de classificação e quatro de medição, contrariando o que estava posto nos planejamentos para esse ano escolar, pois não haviam incluído

³¹ Por uma questão de organização, suprimimos a parte da malha onde o estudante deveria representar a nova figura.

habilidades que envolvessem essas situações, como vimos na subseção anterior. Vejamos a situação de classificação:

Figura 35 – Situação de classificação com o losango não quadrado

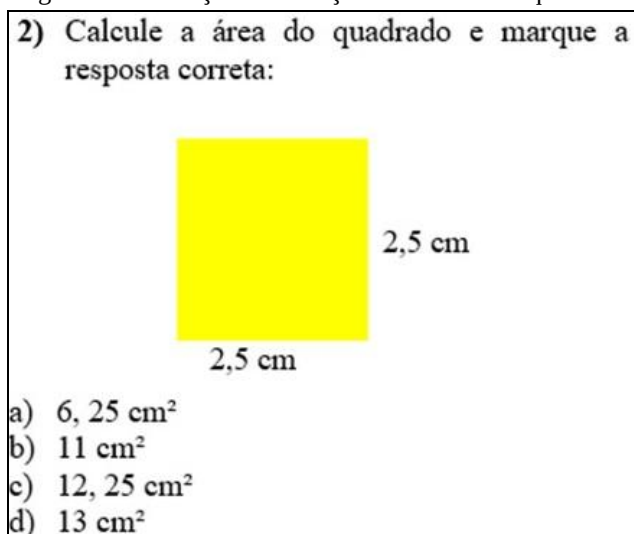


Fonte: Apostila de atividades do 7º ano (fev./2021)

Nesta situação, a resposta correta esperada pelo professor é que o estudante assinale a alternativa B, ou seja, classifique a figura representada como um losango, conforme gabarito fornecido na atividade. Se estudante levar em consideração apenas o aspecto visual, poderá chegar a tal resposta. No entanto, as propriedades descritas em seu comando são necessárias, mas não são suficientes para caracterizar um losango, pois não é dito que todos os lados possuem o mesmo comprimento. Elas remetem ao paralelogramo – lados opostos paralelos e ângulos internos opostos iguais – fazendo-o marcar a alternativa C. Podemos citar ainda uma terceira possibilidade de resposta a ser dada pelo estudante que consiste em considerar tanto o aspecto visual quanto as propriedades e assinalar as alternativas B ou C, visto que não há elementos que garantam a igualdade dos comprimentos dos lados, como já mencionado. Dessa maneira, o professor poderia ter solicitado a marcação da figura que não se enquadrasse nem na representação nem nas propriedades, levando os estudantes a assinalarem a alternativa A. Destacamos ainda a presença do desenho prototípico do losango não quadrado.

Em relação às situações de medição, três delas continham o desenho do retângulo não quadrado, sendo dois prototípicos e um que se aproxima do prototípico, em que o lado de maior comprimento estava na posição vertical. Dessas três, duas eram para determinar a área a partir da contagem de quadradinhos na malha quadriculada e uma por meio do ladrilhamento de um retângulo não quadrado a partir de um quadradinho com lado medindo um centímetro, fornecido como superfície unitária. A quarta situação de medição é apresentada a seguir:

Figura 36 – Situação de medição da área de um quadrado

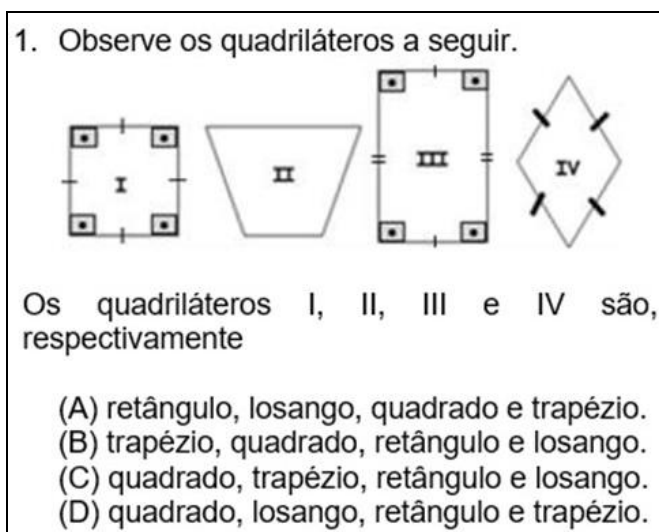


Fonte: Apostila de atividades do 7º ano (jul./2021)

Percebemos uma situação com o desenho prototípico do quadrado, apesar da não sinalização dos ângulos retos na representação gráfica, cuja aplicação direta da expressão de área é suficiente para encontrar sua área. Ela se diferencia das demais de medição por não estar na malha e também por ser a primeira cujo domínio numérico dos dados sai do campo dos inteiros positivos.

Nas apostilas de atividades para o 8º ano do ensino fundamental, verificamos um total de 75 questões, a partir das quais identificamos uma situação de classificação envolvendo, entre os paralelogramos, o quadrado em seu desenho prototípico, o losango não quadrado e o retângulo não quadrado, ambos em desenhos que mais se aproximam dos prototípicos. Além dessa, observamos duas de medição que contemplavam o desenho prototípico do retângulo não quadrado e com dados numéricos no campo dos números inteiros positivos. Vejamos a de classificação:

Figura 37 – Situação de classificação envolvendo alguns paralelogramos

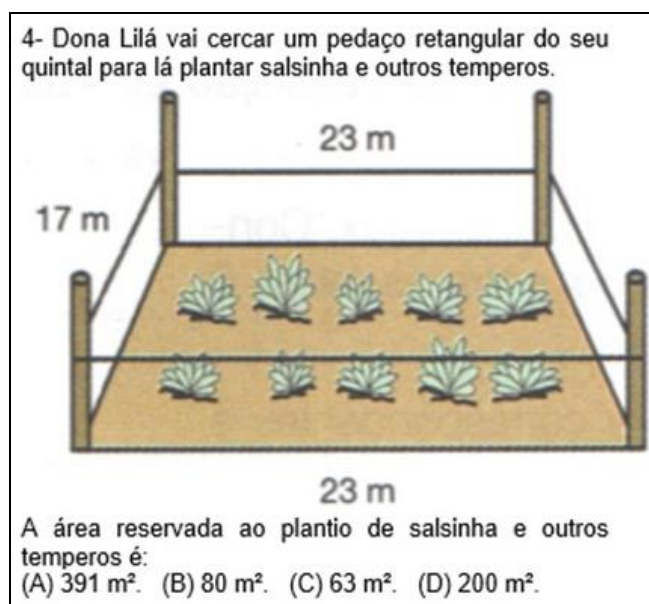


Fonte: Apostila de atividades do 8º ano (fev./2021)

Na situação acima percebemos uma evolução na representação das figuras em relação à de classificação de losango não quadrado extraída da apostila do 7º ano, uma vez que aqui são sinalizados elementos indispensáveis para a identificação e classificação, como os ângulos retos e a igualdade dos lados. Em relação aos paralelogramos, notamos que o desenho I é prototípico e o III e IV se aproximam do prototípico. A partir do gabarito da questão, espera-se que os estudantes assinalem a alternativa C como resposta correta. Porém, algumas confusões entre elas poderiam surgir, tais como a entre trapézio e losango, também verificada em pesquisas anteriores, como Fujita (2012) e Pereira da Costa (2016).

Apresentamos uma das situações de medição a seguir:

Figura 38 – Situação de medição envolvendo o retângulo não quadrado



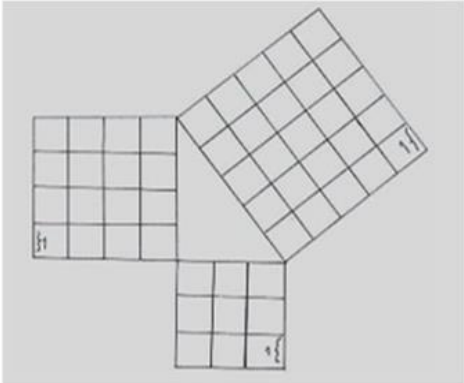
Fonte: Apostila de atividades do 8º ano (mai./2021)

Temos uma situação de medição em um contexto aplicado, o que levou a que o objeto gráfico que representa um retângulo (sinalizado no enunciado da questão) não correspondesse visualmente a um retângulo, pois está desenhado em perspectiva. Ainda assim, destacamos que o lado de maior comprimento está na posição horizontal. São explicitados os comprimentos de três dos quatro lados, o que pode aumentar as chances de os estudantes cometerem erros no cálculo relacional, como confundir área e perímetro ou adicionar os comprimentos marcados no desenho. A outra questão de medição também seguia esse padrão. Havia outras questões de medição de área, porém com figuras que não são de interesse da nossa pesquisa como o triângulo, trapézio e círculo, corroborando com a habilidade do campo das Grandezas e Medidas prevista para esse ano escolar e presente nos planejamentos para ser trabalhada no mês de maio que, de fato, se materializou a partir da análise da apostila desse mês.

As apostilas para o 9º ano do ensino fundamental totalizaram 63 questões de Matemática. Identificamos cinco situações de medição: três para o estudante calcular a área de quadrados, com dois deles em seu desenho prototípico; nas outras duas a tarefa do estudante é determinar outras grandezas, no caso, comprimentos, dada a área de dois retângulos, com um deles em seu desenho prototípico. Essas duas últimas são articuladas à resolução de equações do 2º grau, conteúdo do campo da Álgebra. Vejamos um exemplo do primeiro caso:

Figura 39 – Situações de medição envolvendo quadrados

01) Observe a figura e faça o que é pedido nos itens abaixo:



a) Calcule a área dos dois quadrados menores.
b) Some a área desses dois quadrados.
c) Calcule a área do quadrado maior.

Fonte: Apostila de atividades do 9º ano (ago./2021)

Como podemos observar, a questão acima se divide em três situações de medição de áreas de quadrados a partir da contagem de quadradinhos. Notamos ainda que, possivelmente, a intenção do professor é que o aluno perceba que a soma das áreas dos dois quadrados menores é igual à área do maior e, a partir disso e do triângulo formado entre eles, estabeleça alguma relação com o Teorema de Pitágoras, caracterizando a articulação do conceito de área com outros conteúdos matemáticos. A seguir, apresentamos um recorte que representa as outras duas situações:

Figura 40 – Situação de medição para determinar outra grandeza dada a área

3) Uma galeria vai organizar um concurso de pintura e faz as seguintes exigências:
1º) A área de cada quadro deve ser 600 cm^2 ;
2º) Os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.



Qual deve ser a altura dos quadros?
(A) 10 cm
(B) 15 cm
(C) 20 cm
(D) 25 cm

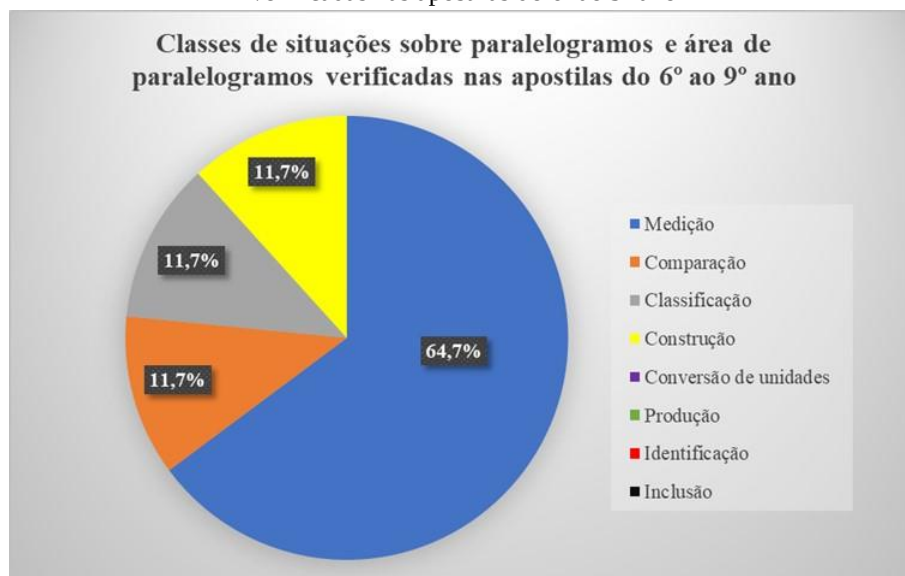
Fonte: Apostila de atividades do 9º ano (mai./2021)

Na situação acima o quadro representa uma figura retangular em que o lado de maior comprimento está na posição horizontal e os dados numéricos envolvidos são do campo dos inteiros positivos. Percebemos mais uma vez que o conceito de área é utilizado para estabelecer relações com outros conteúdos matemáticos, neste caso, o de equações do 2º grau, entretanto, o estudante pode se apoiar apenas na multiplicação para resolvê-la. Essa articulação que percebemos tanto neste recorte quanto no anterior se deve ao fato de, como vimos no 9º ano, o conceito de área não é tratado no campo das Grandezas e Medidas, contribuindo para que ele apareça em situações de outros campos, como o da Geometria e o da Álgebra. A outra situação dessa classe segue esse mesmo padrão, com um retângulo em seu desenho prototípico.

Em resumo, com análise das apostilas de atividades notamos convergências ao compararmos com o previsto nos planejamentos, como trabalhar habilidades relativas à ampliação e redução de figuras em malha quadriculada, comparando as mudanças sobre a área, no 6º ano do ensino fundamental, e divergências como constar situações voltadas à área

nas apostilas do 7º ano sem ter habilidades previstas nos planejamentos sobre esse conceito para esse ano escolar, entre outras. Os dados quantitativos apontaram que das 275 questões de Matemática analisadas em todas as apostilas, verificamos 17 com situações sobre a área de paralelogramos, sendo 11 de medição, duas de comparação, duas de construção e duas de classificação, estas últimas destacadas no gráfico a seguir:

Gráfico 1 – Percentual aproximado³² das classes de situações sobre paralelogramos e área de paralelogramos verificadas nas apostilas do 6º ao 9º ano



Fonte: dados da pesquisa

Um dado preocupante é que não verificamos nenhuma situação de inclusão, provavelmente por não constar nos planejamentos dos professores, embora seja considerada prioritária no Documento de Reorganização Curricular, e nem de medição que envolvesse o losango não quadrado e o paralelogramo não retângulo e não losango. Esses dados, por um lado, contribuem para que os estudantes tenham mais dificuldades ao lidar com situações envolvendo essas figuras, como vimos nos estudos de Araújo (2018), Diniz (2013), entre outros. Por outro, reafirmam a necessidade de pesquisas que façam os estudantes terem contato com esses tipos de paralelogramos. Por fim, essa análise possibilitou confirmar resultados de pesquisas anteriores no que se refere à predominância por situações de medição, pelo retângulo não quadrado e o quadrado e pelo desenho prototípico dessas figuras, a exemplo de Nunes (2011), Santos (2010), entre outras.

Após a análise das apostilas de atividades, podemos passar para a de outro recurso utilizado pelos professores em suas aulas, sendo, muitas vezes, sua principal fonte de consulta que é o livro didático. Dessa maneira, assim como fizemos anteriormente, vamos observar

³² Neste e nos demais gráficos, a soma dos valores será sempre próxima a 100%, pois não realizamos arredondamentos.

quais situações são contempladas, as representações utilizadas, entre outros elementos que consideramos importantes relativos à área de paralelogramos.

3.3 ANÁLISE DA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS ADOTADA PELA ESCOLA PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Nossa análise está dividida em dois momentos: um mais geral, observando como o conceito de área e os paralelogramos estão sendo tratados ao longo de toda a coleção nos campos das Grandezas e Medidas e da Geometria, respectivamente, olhando mais precisamente para as classes de situações (comparação, medição, produção, conversão de unidades, identificação, classificação, inclusão e construção) e as representações utilizadas, nos livros didáticos dos 6º, 7º e 9º anos; o outro é uma análise mais detalhada do livro do 8º ano, focando especificamente nos capítulos sobre os quadriláteros e área de figuras planas, com ênfase nos paralelogramos e na área de paralelogramos, nessa ordem. Essa escolha se deve ao fato de, como dito acima, o LD ser um dos recursos mais utilizados pelo professor em suas aulas e, conforme as orientações dos documentos de orientação curricular, é nesse ano que deve ocorrer a sistematização do conceito de área no campo das Grandezas e Medidas. Além disso, como nossos participantes foram estudantes do ano posterior a esse, foi preciso conhecer melhor as situações que os estudantes deveriam ter vivenciado, caso a proposta do LD tivesse sido efetivamente trabalhada na sala de aula no ano anterior, para construirmos adequadamente a sequência didática de modo que não explorássemos somente e daquela maneira o que já é enfaticamente trabalhado no LD, contrariando a ideia de variedade de situações prevista na TCC.

A análise foi realizada considerando as situações que discutimos anteriormente, tanto do campo da Geometria quanto do campo das Grandezas e Medidas, além dos aspectos relacionados à área como uma grandeza autônoma. Com isso, sempre que necessário, fizemos comentários a respeito do que foi posto pelo LD e o que é apontado nos estudos já realizados sobre tais escolhas.

A coleção de matemática adotada pela escola campo de pesquisa para as turmas do 6º ao 9º ano do ensino fundamental é Matemática: compreensão e prática, do autor Ênio Silveira, da editora Moderna, 5ª edição, ano de publicação 2018, aprovada no PNLD 2020, para ser utilizada durante os anos letivos de 2020 a 2023. Ela é dividida em quatro volumes, sendo cada um desses composto por quatro unidades formadas por dois ou mais capítulos. Uma sugestão dada pelo autor é que cada unidade seja trabalhada durante um bimestre. Silveira

(2018) faz a abertura dos capítulos a partir das seções “É hora de observar e refletir” e “Trocando ideias”, as quais buscam, respectivamente, promover a observação e reflexão por meio de uma atividade introdutória relativa ao conteúdo do capítulo, e o diálogo entre os estudantes para mobilização de conhecimentos. Após esse momento, o autor apresenta o conteúdo matemático por meio de definições, propriedades, exemplos e atividades. Ao longo dos capítulos aponta sugestões de leituras e aspectos históricos dos assuntos envolvidos. Os capítulos são encerrados com a seção “Trabalhando com conhecimentos adquiridos”, a qual tem o objetivo de retomar os principais pontos tratados e aprofundá-los com questões de diferentes níveis.

O manual do professor é apresentado nas versões impressa e digital, com uma proposta ancorada na BNCC. Em relação ao campo da Geometria, é apontado na parte sobre as unidades temáticas que

O papel da Geometria é fundamental na construção do conhecimento matemático pelo aluno. O conhecimento nessa área é trabalhado desde os primeiros anos de escolaridade e se aprofunda nos Anos Finais do Ensino Fundamental, em uma articulação desejável entre a Geometria plana e a Geometria espacial (Silveira, 2018, p. XVI-XVII).

O autor reforça ainda que a utilização de *softwares* de geometria dinâmica e de materiais concretos ajuda na compreensão, uma vez que possibilita a visualização e manipulação das figuras geométricas, o que também, segundo ele, contribui para o avanço no estudo das grandezas associadas e suas medidas.

No que se refere ao campo das Grandezas e Medidas,

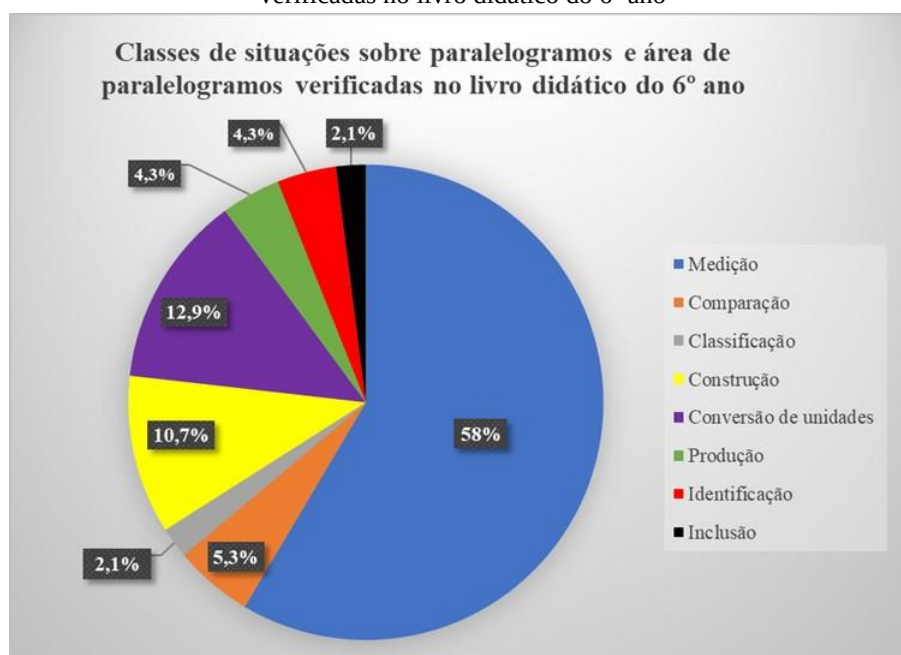
Os conteúdos relacionados à unidade temática Grandezas e medidas podem ser abordados em articulação com as demais unidades temáticas da Matemática escolar. Contextos ligados ao cotidiano do aluno fornecem elementos para que o professor possa trabalhar tais conteúdos em sala de aula, sem desvincular a Matemática da realidade do aluno. A compreensão das diversas grandezas e das medidas que se associam, destacando a discussão sobre as mudanças de unidades e os efeitos de tais mudanças na análise dos resultados observados na resolução das atividades propostas, é fundamental para a aprendizagem conceitual da Matemática (Silveira, 2018, p. XVII).

O autor traz também uma citação da BNCC que aponta, entre outros elementos, o favorecimento da integração da Matemática com outras áreas de conhecimento e da aplicação das noções geométricas por meio do estudo da unidade temática Grandezas e Medidas. Como percebemos, tanto as falas do autor quanto o que é apontado na BNCC e, como vimos, no CPE, caminham na direção de que esses dois campos estão fortemente imbricados de tal modo que, como também defendemos, lidar com situações de um deles conduz à necessidade de conhecimento de elementos do outro.

No livro didático do 6º ano do ensino fundamental, verificamos que o capítulo 9 é dedicado à discussão das figuras geométricas planas, o qual apresenta uma definição para os paralelogramos comum à que adotamos e, no capítulo 11, é abordado o conceito de área do quadrado, retângulo não quadrado e triângulo retângulo, com uso da expressão de área nos dois primeiros a partir da justificativa de que o quadrado é um caso particular do retângulo e por isso se pode utilizar a maneira de calcular a área do retângulo para calcular a área do quadrado.

Em relação às situações envolvendo os paralelogramos e sua área, observamos ao longo desse livro didático o seguinte quantitativo: 54 de medição, 12 de conversão de unidades, 10 de construção, 5 de comparação, 4 de produção, 4 de identificação, 2 de classificação e 2 de inclusão, totalizando 93 situações, cujos percentuais são apresentados no gráfico a seguir:

Gráfico 2 – Percentual aproximado das classes de situações sobre paralelogramos e área de paralelogramos verificadas no livro didático do 6º ano



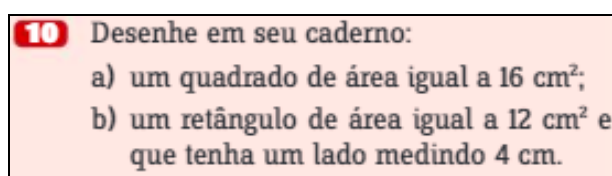
Fonte: dados da pesquisa

Quanto aos desenhos prototípicos discutidos na seção 1.3.1 desta tese, se confirmaram para o quadrado (92,4%), o retângulo não quadrado (80,3%) e o paralelogramo não retângulo e não losango (54,5%). No entanto, contrariamente ao esperado, o que prevaleceu nesse LD para o losango não quadrado foi o que possui um dos lados apoiados horizontalmente, considerando a borda da folha como referência, (66,6%). Cabe ressaltar que os quadrados e retângulos não quadrados foram as figuras mais representadas, provavelmente pelo fato de o autor seguir as orientações curriculares vigentes, totalizando juntas 104 representações,

enquanto o losango não quadrado e o paralelogramo não retângulo e não losango totalizaram 14 representações. Tais dados reforçam o que discutimos acima no que se refere à predominância por situações de medição, pelos quadrados e retângulos não quadrados e por desenhos prototípicos, com exceção do losango não quadrado nesse caso.

A seguir apresentamos um recorte que envolve situações de produção de quadrados e retângulos não quadrados a partir de áreas dadas. Neste momento, vamos apresentar apenas um exemplo em cada livro para não ser repetitivo, visto que a análise detalhada do LD do 8º ano já contempla vários exemplos, tanto das diferentes classes de situações quanto das representações das figuras.

Figura 41 – Exemplo de situações de produção no livro didático do 6º ano



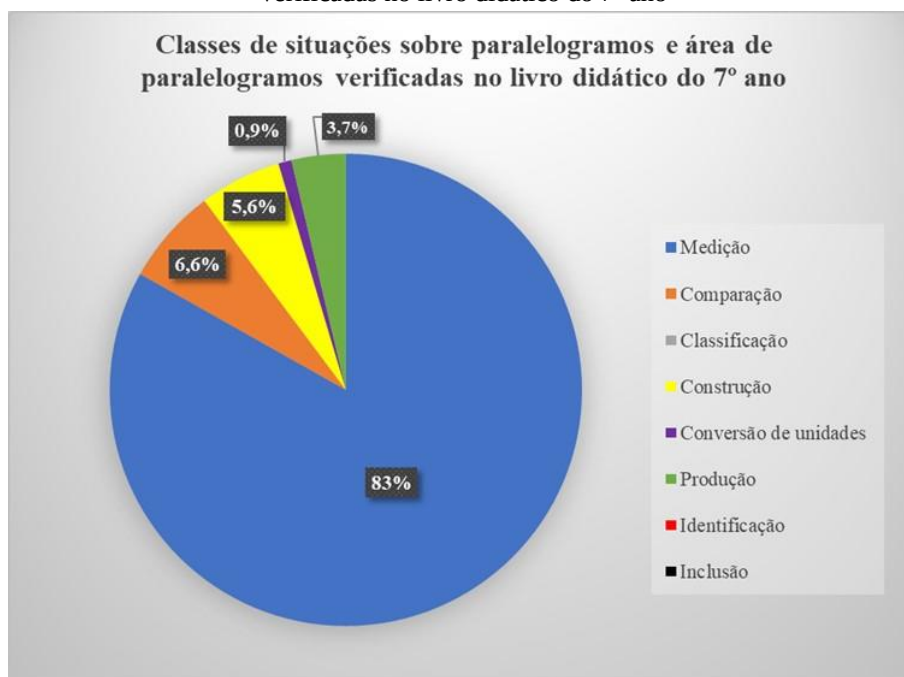
Fonte: Silveira (2018a, p. 260)

Podemos notar que na letra (a) é solicitada a representação de um quadrado a partir da área dada. Já na letra (b), além da área, é dado o comprimento de um dos lados (4 cm) que leva à representação de um retângulo não quadrado. Se esse comprimento fosse omitido, o estudante poderia considerar a inclusão de classes e desenhar um quadrado cujo lado fosse $\sqrt{12} \text{ cm}$. Verificamos também situações de construção de figuras mais gerais como, por exemplo, pedir para desenhar uma figura geométrica ou a planta baixa de determinado lugar, sobre as quais optamos por não contabilizar porque não há garantia de que a figura representada seja algum paralelogramo.

No livro didático do 7º ano do ensino fundamental, o conceito de área é abordado no capítulo 10, no qual ocorre uma ampliação em relação ao ano anterior relativa ao estudo da área de outras figuras, entre elas a do paralelogramo e a do losango. No capítulo 11 há o estudo das figuras geométricas planas, entretanto, mais voltado para construções de circunferências e triângulos, sem discussão acerca das classificações e inclusões dos paralelogramos como foi feito no ano anterior, possivelmente, porque será tratada no ano seguinte.

Quanto às situações relativas ao paralelogramo e sua área ao longo desse LD, identificamos o seguinte quantitativo: 88 de medição, 7 de comparação, 6 de construção, 4 de produção e 1 de conversão de unidades, totalizando 106 situações, cujos percentuais são apresentados no gráfico a seguir:

Gráfico 3 – Percentual aproximado das classes de situações sobre paralelogramos e área de paralelogramos verificadas no livro didático do 7º ano

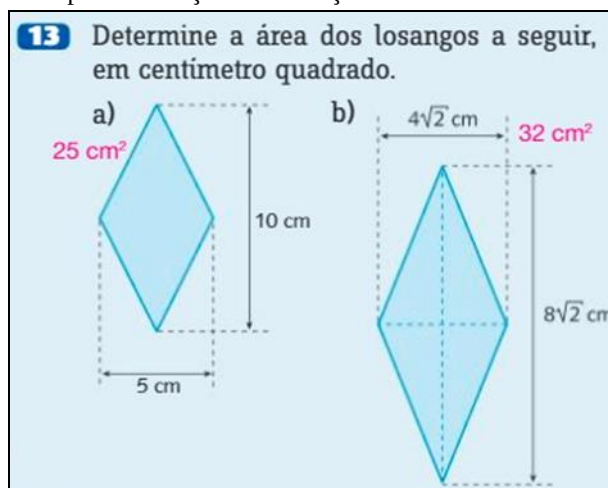


Fonte: dados da pesquisa

Nas situações de medição, aproximadamente, 74,5% eram voltadas ao cálculo de área e 8,4% para determinar outras grandezas dada a área. Como vemos, não verificamos situações de identificação, classificação ou de inclusão, provavelmente, por não ter sido tratada nesse livro didático.

No que se refere aos desenhos dos paralelogramos, 82,6% no caso do quadrado e 65,7% no do retângulo não quadrado eram prototípicos. O paralelogramo não retângulo e não losango apareceu em seu desenho prototípico 63,7% das vezes e o losango não quadrado, diferentemente do que verificamos no livro do 6º ano, o desenho prevalente foi o que mais se aproxima do prototípico (50%), o qual possui a diagonal de maior comprimento na posição vertical, apresentado na figura a seguir. O segundo maior percentual foi do prototípico (25%), ou seja, que possui a diagonal de maior comprimento na posição horizontal.

Figura 42 – Exemplo de situações de medição no livro didático do 7º ano



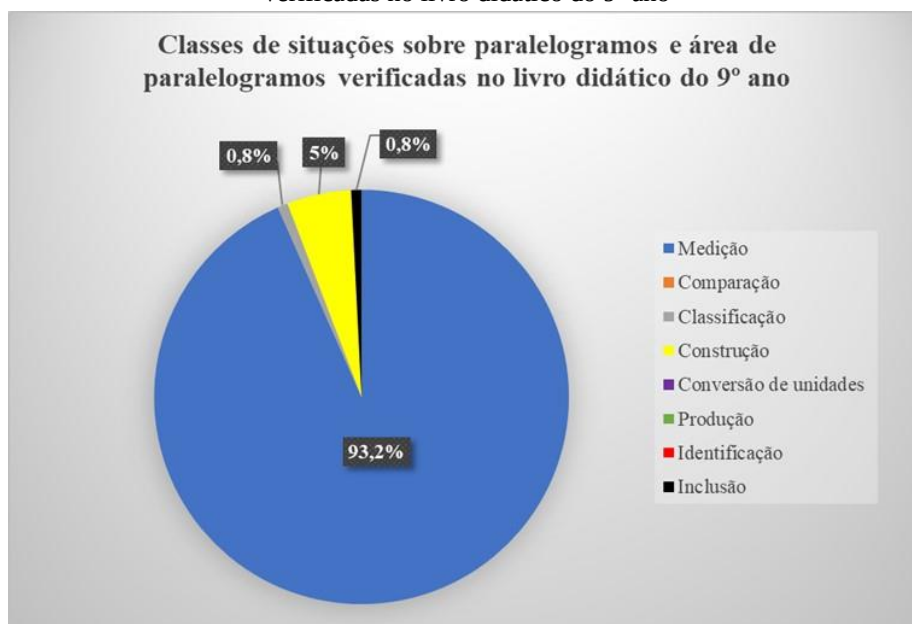
Fonte: Silveira (2018b, p. 240)

O exemplo acima contempla duas situações de medição com desenhos de losangos não quadrados que mais se aproximam do prototípico, cujos dados numéricos em uma delas sai do campo dos números inteiros positivos. Essa classe de situação, assim como vimos na análise do LD do 6º ano, também foi predominante no livro do 7º ano. Outros dados como a maior quantidade de desenhos prototípicos e prioridade pelos quadrados e retângulos não quadrados convergem com os achados no livro do 6º ano. Destacamos ainda que na maioria dos objetos gráficos que representam as figuras geométricas nas situações relativas à área, a região interna dos polígonos está sombreada.

No livro didático do 9º ano do ensino fundamental, não verificamos um capítulo específico para tratar do conceito de área como foi observado nos exemplares dos anos anteriores, o que se justifica a partir da BNCC. Alguns paralelogramos aparecem no capítulo dedicado aos polígonos regulares, mas apenas para dizer quais se enquadram como polígono regular. Nesse sentido, tanto o conceito de área como os paralelogramos aparecem ao longo do livro articulados com outros conteúdos matemáticos, como potenciação, polinômios, equações, funções, entre outros.

Nessa obra analisada, reafirmamos os achados anteriores, uma vez que das 119 situações envolvendo o paralelogramo e sua área, 111 eram de medição, 6 de construção, 1 de classificação e 1 de inclusão, conforme mostrado a seguir:

Gráfico 4 – Percentual aproximado das classes de situações sobre paralelogramos e área de paralelogramos verificadas no livro didático do 9º ano



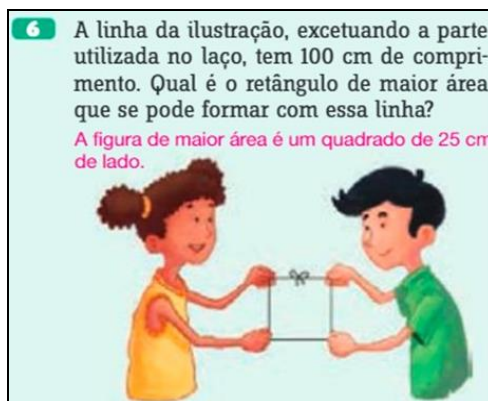
Fonte: dados da pesquisa

Como vemos, 93,2% das situações envolvendo a área de paralelogramos eram de medição, sendo 80,6% voltadas ao cálculo da área e 12,6% à determinação de outras grandezas a partir da área. Não verificamos situações de identificação, comparação, produção e conversão de unidades.

Quanto aos desenhos prototípicos dos paralelogramos, o do quadrado apareceu 88,2%, o do retângulo não quadrado 58,7%, o do losango não quadrado 66,6% e o do paralelogramo não retângulo e não losango 90%.

O recorte a seguir contempla a situação que categorizamos como de inclusão e a resposta esperada pelo autor é que os estudantes considerem que todo quadrado é retângulo para poder responder adequadamente. No entanto, a ilustração pode induzi-lo a responder que é um quadrado sem necessariamente ter compreendido a ideia de inclusão:

Figura 43 – Exemplo de situação de inclusão no livro didático do 9º ano



Fonte: Silveira (2018d, p. 169)

Essa análise mais geral dos livros dos 6º, 7º e 9º anos mostrou que na coleção adotada na escola campo de pesquisa, a abordagem dos conteúdos em foco na pesquisa corresponde à observada nas pesquisas discutidas na revisão de literatura. Há predominância de situações de medição, ênfase no quadrado e no retângulo não quadrado e em desenhos prototípicos dos paralelogramos. Uma diferença em relação às pesquisas anteriores é relativa ao losango não quadrado, pois em cada um dos três livros analisados prevaleceu um desenho diferente: no LD do 6º ano foi o que possui um dos lados apoiados na horizontal; no do 7º ano foi o que possui a diagonal de maior comprimento na posição vertical, que mais se aproxima do prototípico; no do 9º ano, como acabamos de ver, prevaleceu o seu desenho prototípico. Mas o que diz o livro didático de 8º ano? Passemos à sua análise.

3.3.1 Análise do livro didático do 8º ano

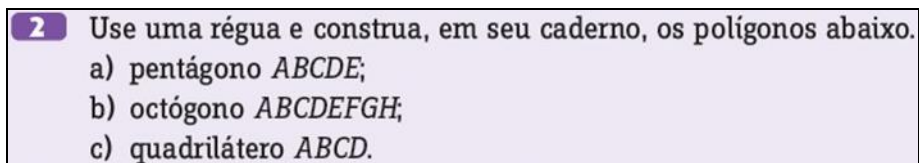
O LD do 8º ano é dividido em quatro unidades de três capítulos cada, a saber:

- Unidade I: 1) Conjuntos numéricos, 2) Potenciação e radiciação, 3) Sistemas de equações do 1º grau;
- Unidade II: 4) Ângulos e transformações geométricas, 5) Polígonos, 6) Probabilidade;
- Unidade III: 7) Triângulos e quadriláteros, 8) Área, volume e capacidade, 9) Equações do 2º grau;
- Unidade IV: 10) Grandezas e proporcionalidade, 11) Medidas de tendência central e pesquisa estatística e, por fim, o 12) Gráficos estatísticos.

Antes de irmos diretamente para as análises dos capítulos 7 e 8 que trazem aspectos relativos aos paralelogramos e à área, respectivamente, fizemos uma busca ao longo de todos os capítulos com o objetivo de verificar se aparecem situações envolvendo esses conceitos e quais são priorizadas pelo autor, assim como as representações utilizadas.

Em relação às situações do campo da Geometria voltadas aos paralelogramos (identificação, classificação, inclusão e construção), verificamos ao longo dos capítulos, com exceção do capítulo 7, a ser tratado em uma subseção específica, que em nenhum deles aparecem explicitamente situações dessas classes. No entanto, observamos duas situações em que é solicitada a construção de alguns polígonos, entre eles, quadriláteros que, entre as possibilidades de respostas, poderia ser desenhado algum dos paralelogramos. Vejamos uma delas:

Figura 44 – Exemplo de situação em que poderia ser desenhado um paralelogramo no livro didático do 8º ano

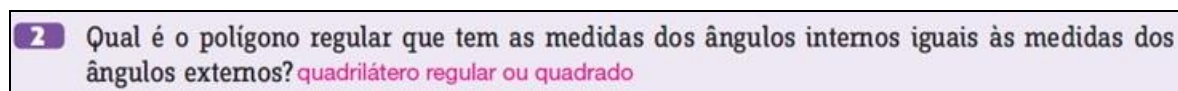


Fonte: Silveira (2018c, p. 101)

Como vemos, no item (c) solicita-se o desenho de um quadrilátero *ABCD*, para o qual poderia ser representado algum paralelogramo, visto que não há mais informações nem indicações de propriedades geométricas como deveria aparecer em uma situação de construção, entretanto, elas podem ser mobilizadas na resolução. Ela foi extraída do capítulo dedicado ao estudo dos polígonos. A outra desse estilo está no capítulo voltado ao conceito de área, a qual pede que o estudante represente a planta de um dos cômodos de sua casa que, assim como no exemplo acima, uma das possibilidades é a representação de algum paralelogramo, principalmente o retângulo não quadrado. Voltaremos a essa discussão no referido capítulo e lá também analisaremos uma situação em que se espera que o estudante utilize a situação de inclusão para o cálculo da área de um quadrado.

Notamos ainda no capítulo sobre polígonos uma situação em que o estudante deve associar o nome da figura a partir das propriedades dadas, mas que não categorizamos como identificação ou classificação, porque deveria estar associado ao reconhecimento da figura a partir da sua representação ou sua indicação em classes, e nem como inclusão, pois precisaria haver alguma relação com outra figura, estabelecendo propriedades comuns ou diferentes entre elas. Vejamos:

Figura 45 – Exemplo de situação para associar o nome da figura a partir de propriedades no livro didático do 8º ano

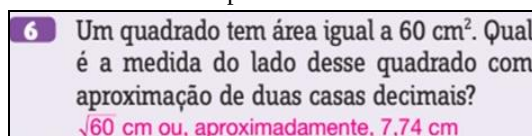


Fonte: Silveira (2018c, p. 107)

É possível perceber que a resposta esperada pelo autor é o quadrado e, por se tratar de um paralelogramo, resolvemos trazer este recorte.

Em relação às situações que dão sentido ao conceito de área (comparação, medição, produção e conversão de unidades), verificamos ao longo dos capítulos, com exceção do capítulo 8 que será tratado em uma seção específica, que aparecem 19 situações sobre área envolvendo os paralelogramos, todas classificadas como de medição, sendo quatro para o cálculo e 15 para determinar comprimentos, dados apenas a área ou ela e um ou mais comprimentos da figura. Vejamos um exemplo:

Figura 46 – Exemplo de situação para determinar o comprimento do lado dada a área no livro didático do 8º ano



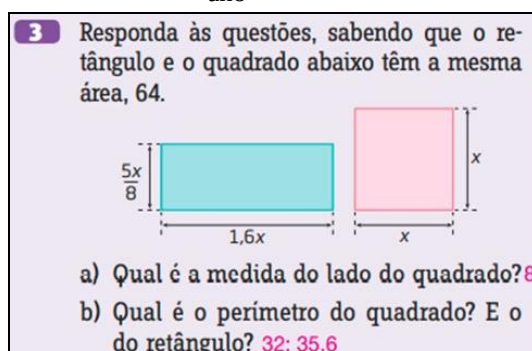
Fonte: Silveira (2018c, p. 44)

Fizemos questão de trazer a resposta esperada para destacar que o autor espera, na verdade, o comprimento do lado (número e unidade de medida) e não apenas a medida (número) como solicitado na tarefa. Notamos claramente uma confusão entre medida de uma grandeza (um número) e a própria grandeza (um número acompanhado de uma unidade de medida). Essa confusão é recorrente ao longo do livro didático, salvo os casos em que são solicitadas as dimensões, mas que provavelmente está se referindo às medidas em vez dos comprimentos. Também observamos a utilização do termo medida referindo-se a comprimento como encontrado em alguns estudos anteriores, a exemplo de Domingos (2013), Henriques (2011), Mendes (2012), entre outros.

Entre os capítulos não específicos da área de figuras geométricas planas, o que mais contempla situações – 13 das 19 observadas – envolvendo esse conceito é o 9, dedicado às equações do 2º grau. Esse fato talvez se explique porque esse capítulo é visto logo após o de área, como uma maneira de reinvestir no conteúdo anterior. Dessas 13 tarefas, apenas uma é para calcular a área e as demais são para determinar comprimentos a partir de uma área dada e/ou ela juntamente a alguns comprimentos dos lados. Além disso, há ainda a relação do conceito de área com outros conteúdos matemáticos, também observada nas apostilas de atividades elaboradas pelos professores de Matemática.

Apesar de o autor apresentar algumas tarefas que envolvem o ladrilhamento de figuras ou enfatizem que a ampliação das dimensões provoca alterações na área, consideradas como positivas na aprendizagem desse conceito, percebemos sua predominância no aspecto numérico. Mostramos mais um recorte que reforça este último ponto:

Figura 47 – Situação com área e comprimentos sem as respectivas unidades de medida no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 178)

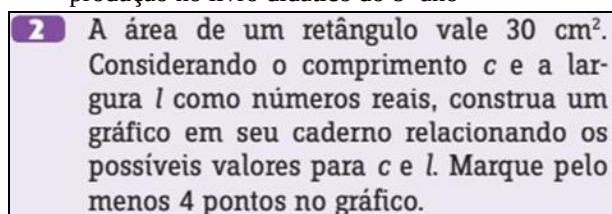
Neste recorte, notamos que ele se refere tanto à área quanto ao comprimento apenas como números, sem as respectivas unidades de medida, desprezando a ideia de que as medidas podem variar dependendo das unidades adotadas, porém a área permanece invariante, pois trata-se de uma grandeza autônoma. Destacamos também os desenhos prototípicos do retângulo não quadrado e do quadrado.

Outro recorte voltado ao aspecto numérico está relacionado à definição de grandeza dada pelo autor: “Já vimos que grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado” (Silveira, 2018c, p. 191). Esta é uma definição comum em muitos livros didáticos, porém que reduz a amplitude de uma grandeza e as possibilidades de tratamento que a envolve, limitando-a apenas a algo que é passível de medição. Com isso, destaca-se o aspecto numérico, pois na medição “[...] atribui-se um número a uma grandeza, que é a medida da grandeza na unidade escolhida” (Lima; Bellemain, 2010, p. 178). Ao medir estamos realizando uma comparação por meio da qual se determina quantas vezes determinada unidade “cabe” na grandeza a ser medida. No entanto, em muitos casos, para comparar não precisamos necessariamente medir, pois é possível dizer quem é maior, menor ou igual sem realizar uma medição. Além disso, também podemos fazer estimativas mesmo sem medir ou contar.

Como citado no início desta seção, o autor defende nas orientações que a Geometria contribui para o estudo das grandezas associadas e suas medidas, reforçando o papel das imbricações entre esses dois campos, porém nenhuma situação sobre o conceito de área foi apresentada no capítulo sobre triângulos e quadriláteros.

Para finalizar esta parte mais geral sobre os capítulos do livro didático do 8º ano, destacamos uma tarefa que, apesar de possuir como foco o aspecto numérico, poderia contribuir para as situações de produção a partir de uma área dada.

Figura 48 – Exemplo de uma tarefa que foca no numérico, mas que poderia contribuir para situações de produção no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 199)

Note que ele destaca os comprimentos e não as medidas como sendo números reais. Esta tarefa poderia ser adaptada de modo que, inicialmente, pedisse para os estudantes produzirem quatro retângulos possíveis que tivessem 30 cm^2 de área e, depois, trabalhasse a

parte gráfica apenas com os valores numéricos. Dessa maneira, mobilizaria conhecimentos da Geometria, das Grandezas e Medidas, da proporcionalidade e de representações gráficas no plano.

Após essa parte mais geral, vamos nos debruçar sobre a unidade III, mais especificamente, sobre os capítulos 7 e 8, pois são os que trazem aspectos sobre os paralelogramos e sua área, respectivamente, com o objetivo de conhecer como o livro didático aborda os elementos relativos a essa figura, as situações e as principais representações utilizadas.

3.3.1.1 Capítulo que contempla o estudo dos paralelogramos

O capítulo 7 é dedicado ao estudo dos triângulos e quadriláteros. A parte referente aos triângulos aborda sua classificação, cevianas notáveis e a congruência de triângulos. Tais elementos não são de interesse deste trabalho. Por este motivo, partiremos para a discussão sobre os quadriláteros, mais especificamente, os paralelogramos.

Entre as habilidades da BNCC a serem desenvolvidas com o estudo desse capítulo, o autor destaca a “(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos” (Brasil, 2018, p. 315). Ela é prevista no Organizador Curricular e no Documento de Reorganização Curricular, ambos de Pernambuco, para ser estudada no 1º bimestre. No entanto, a partir da organização do livro didático e da sugestão dada pelo autor no que se refere a trabalhar cada unidade em um bimestre, ela seria estudada no 3º, visto que pertence à unidade III. Os professores não a incluíram em seus planejamentos, mas foi possível perceber a partir da análise das apostilas de atividades do 8º ano que eles propuseram situações de classificação no mês de fevereiro, notadamente, no 1º bimestre.

Na nossa análise, observamos inicialmente a classificação adotada pelo autor para os quadriláteros, comparando-a com a que adotamos e discutimos as possíveis consequências dessa adoção. Em seguida, tentamos classificar as situações propostas por ele, observando também as principais representações utilizadas.

Após definir quadrilátero como um polígono que possui quatro lados, Silveira (2018c) aborda quadrilátero convexo e não convexo, e a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo. Posteriormente, inicia a seção dedicada à classificação dos quadriláteros falando que eles podem ser classificados em paralelogramos, trapézios e trapezoides, e apresenta a organização abaixo, orientando o professor a fazer um

levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes relativos às características que determinaram a classificação dos quadriláteros.

Figura 49 – Classificação dos quadriláteros apresentada no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 141)

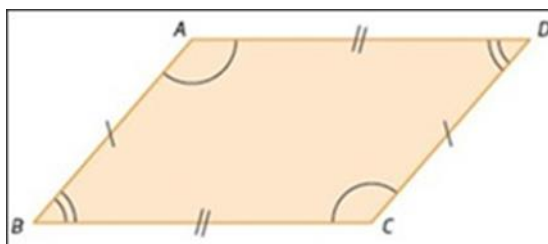
Como podemos notar, o autor adota uma classificação em que diferencia paralelogramos e trapézios e considera o quadrado, o retângulo e o losango como paralelogramos, assim como iniciou no LD do 6º ano, convergindo com a que adotamos e com as apresentadas anteriormente nos trabalhos de Araújo (2018), Barbosa (2006), Moura (2013), Pereira da Costa (2016, 2019), entre outros.

Silveira (2018c) destaca que essa classificação é feita a partir de algumas características e propriedades em comum. Para ele, “paralelogramo é o quadrilátero convexo que tem os lados opostos paralelos” (p. 142). E acrescenta:

- cada diagonal o divide em dois triângulos congruentes;
- os lados opostos são congruentes;
- os ângulos opostos são congruentes;
- os ângulos consecutivos são suplementares;
- as diagonais interceptam-se em seus pontos médios. (*Ibid.*, p. 143).

Em relação aos desenhos do paralelogramo não retângulo e não losango apresentados pelo autor ao longo de todo livro didático, percebemos que aproximadamente 53% deles eram prototípicos, conforme podemos ver na figura a seguir:

Figura 50 – Desenho do paralelogramo não retângulo e não losango priorizado pelo autor no livro didático do 8º ano

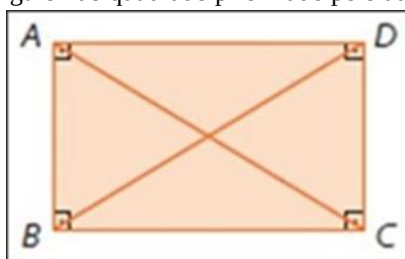


Fonte: Silveira (2018c, p. 143)

Como podemos observar, corresponde ao desenho prototípico evidenciado por Rosa dos Santos (2005), no qual o lado de maior comprimento está na horizontal e a inclinação é para a direita. Neste, não há altura traçada.

Quanto ao retângulo não quadrado, o autor aponta que “é o paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos” (Silveira, 2018c, p. 145). Mais uma vez, percebemos que suas ideias estão em consonância com as dos autores que adotamos. Cerca de 70% de seus desenhos ao longo do LD são prototípicos, ou seja, com o lado de maior comprimento na posição horizontal, considerando a borda da folha como referência, conforme mostrado abaixo:

Figura 51 – Desenho do retângulo não quadrado priorizado pelo autor no livro didático do 8º ano

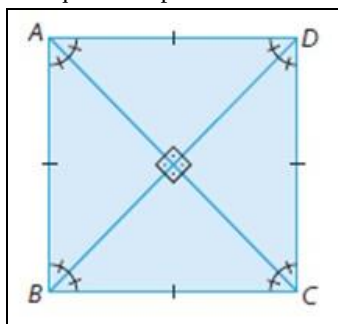


Fonte: Silveira (2018c, p. 145)

Na sequência, o autor explica que as propriedades do paralelogramo são válidas para o retângulo, pois este também o é, e destaca a congruência das diagonais em todo retângulo. Além disso, percebemos que Silveira (2018c) considera a inclusão de classes entre os paralelogramos, ou seja, segundo ele: “o quadrado é um paralelogramo e um caso particular de retângulo e de losango; [...] todas as propriedades dos retângulos e dos losangos valem para os quadrados” (*Ibid.*, p. 145).

Em relação aos desenhos do quadrado, os que possuem um dos lados apoiado sobre a margem da folha (prototípicos), totalizaram ao longo do LD aproximadamente 81%, como apresentado em seguida:

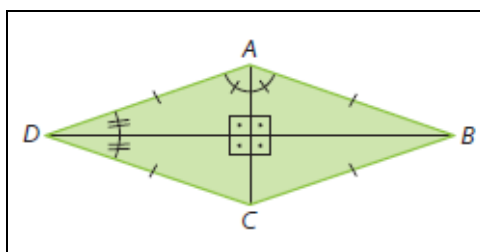
Figura 52 – Desenho do quadrado priorizado no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 145)

O desenho do losango não quadrado priorizado ao longo do LD também foi o prototípico, ou seja, o que possui a diagonal de maior comprimento na posição horizontal, paralela às margens da folha, se a tomarmos como referência. Ele também foi predominante no livro didático do 9º ano, como vimos anteriormente. O recorte seguinte o exemplifica:

Figura 53 – Desenho do losango não quadrado priorizado no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 145)

Em relação às situações envolvendo os paralelogramos nesse capítulo, verificamos um total de 24, sendo três de inclusão (12,5%), duas de construção (8,3%), cinco para determinar comprimentos a partir de informações dadas (20,8%) e 14 para determinar aberturas de ângulos conhecidas algumas informações sobre as figuras ou suas propriedades (58,3%). Não identificamos situações que envolvessem a identificação ou classificação de paralelogramos. Vejamos um exemplo que envolve a inclusão:

Figura 54 – Exemplo de uma situação ligada à inclusão no livro didático do 8º ano

- 1** Quais das sentenças são verdadeiras?
- a) Todo quadrado é um losango.
 - b) Existem retângulos que são losangos.
 - c) Todo paralelogramo é um quadrilátero.
 - d) Todo quadrado é um retângulo.
 - e) Um losango pode não ser um paralelogramo.
 - f) Em um losango, os quatro lados são sempre congruentes.
 - g) Todo retângulo é um paralelogramo e todo paralelogramo é um retângulo.

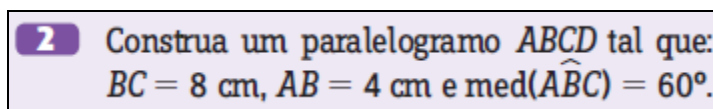
Fonte: Silveira (2018c, p. 146)

Esta situação está ancorada nas propriedades e na inclusão de classes. Nela, percebemos a necessidade de atenção para a reciprocidade das afirmações, conforme alertou

Machado (2012) no sentido de que as relações recíprocas não são verdadeiras. Silveira (2018c) apresenta a seguinte orientação para o professor: “Na atividade 1, peça aos alunos que justifiquem as afirmativas falsas. Caso encontrem dificuldades, retome os conceitos explorados na página anterior. Amplie a atividade e peça aos alunos que reescrevam as sentenças falsas tornando-as verdadeiras” (p. 146). No entanto, tal recomendação seria mais eficiente se fossem exploradas as propriedades em situações práticas de modo que estudantes pudessem contestar suas concepções falsas de maneira operatória.

O recorte a seguir contempla uma situação de construção de um paralelogramo não retângulo e não losango a partir de algumas orientações dadas:

Figura 55 – Exemplo de uma situação de construção no livro didático do 8º ano

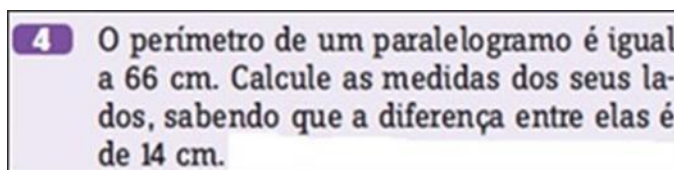


Fonte: Silveira (2018c, p. 144)

Esta é uma situação que envolve explicitamente conceitos dos dois campos, reforçando as imbricações entre eles, pois para representar o paralelogramo solicitado, o estudante precisa ter conhecimento da sua classificação, das grandezas comprimento e abertura de ângulo, além de utilizar instrumentos como esquadro, régua ou algum *software*. A outra situação dessa classe também envolve o paralelogramo não retângulo e não losango e solicita que o estudante faça um esboço dessa figura a partir de uma abertura de ângulo dada. Verificamos ainda outra situação de construção com as características daquelas apresentadas na análise geral desse livro, na figura 44, ou seja, não são direcionadas aos paralelogramos, mas eles fazem parte das possibilidades de respostas, pois os estudantes são solicitados a representarem quadriláteros convexos.

O exemplo seguinte contém outro tipo situação verificado, no qual são dadas algumas informações e solicita-se a determinação de comprimentos, próxima à situação de medição para determinar outras grandezas a partir da área, apesar de não envolver esse conceito:

Figura 56 – Exemplo de uma situação para determinar comprimentos a partir do perímetro no livro didático do 8º ano



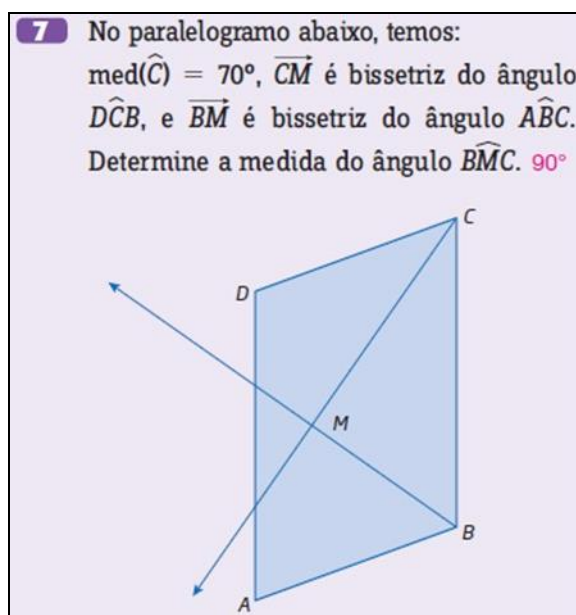
Fonte: Silveira (2018c, p. 144)

Outro dado a ser destacado é que medida e comprimento são tratados como sinônimos, como já destacamos anteriormente e ela não contempla a representação gráfica da figura,

apesar de haver a possibilidade de o estudante precisar desenhá-la para indicar as incógnitas e montar os sistemas de equações do 1º grau.

Vejamos agora um exemplo da situação predominante (58,3%) envolvendo os paralelogramos nesse capítulo, a qual solicita a determinação de aberturas de ângulos a partir de algumas informações previamente fornecidas:

Figura 57 – Exemplo de uma situação para determinar a abertura do ângulo a partir de informações dadas no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 144)

Como vemos, temos o desenho não prototípico de um paralelogramo não retângulo e não losango em que são dados alguns conceitos do campo geométrico como, por exemplo, a bissetriz do ângulo, e pede a determinação de uma grandeza, a abertura de outro ângulo, pertencente ao campo das Grandezas e Medidas.

A título de informação, pois não é nosso foco, Silveira (2018c) apresenta uma definição de trapézio convergente com a que adotamos: “Trapézio é todo quadrilátero convexo que tem apenas um par de lados paralelos” (p. 147). Entre as atividades propostas sobre essa figura, destacamos duas: uma de classificação, em que ele pede para classificar os trapézios em retângulos, isósceles ou escalenos e outra de inclusão em que solicita que seja dada a diferença entre trapézio e trapezoide. Note que na situação de inclusão podemos apresentar tanto propriedades comuns quanto diferentes, conforme defendido por Pereira da Costa (2019).

De modo geral, a análise desse capítulo do livro dedicado aos quadriláteros apontou que o autor adota uma classificação similar à nossa, prioriza desenhos prototípicos dos paralelogramos e a maioria das situações se volta para determinar aberturas de ângulos e/ou

comprimentos por meio de informações dadas e aplicação de propriedades. Verificamos a confusão entre grandeza e medida de uma grandeza e situações de construção e de inclusão envolvendo os paralelogramos. No entanto, a situação de classificação só foi observada com os trapézios. Por fim, esperamos que as características e propriedades tratadas nesse capítulo sejam reinvestidas no próximo, pois as fortes imbricações existentes entre esses dois campos, evidenciada em alguns momentos da análise, contribuem para que o estudante lide adequadamente com as situações por meio do domínio de tarefas elementares que compõem as situações mais complexas.

3.3.1.2 Capítulo que contempla o estudo da área de paralelogramos

Esse capítulo do LD contempla outras grandezas além da área, tais como o volume e sua instanciación³³, a capacidade. No entanto, assim como fizemos na subseção anterior, nosso foco será apenas na grandeza área, mais especificamente, na de paralelogramos (quadrados, retângulos não quadrados, losangos não quadrados e paralelogramos não retângulos e não losangos), apesar de ele também abordar a do triângulo, do trapézio, do círculo, da coroa e do setor circular.

Entre as habilidades propostas pela BNCC que o autor espera desenvolver por meio do estudo desse capítulo, destaca a de “(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos”. (Brasil, 2018, p. 315). Ela é prevista no Organizador Curricular e no Documento de Reorganização Curricular, ambos de Pernambuco, para ser estudada no 1º bimestre. Porém, a partir da organização do livro didático e da sugestão dada pelo autor no que se refere a trabalhar cada unidade em um bimestre, ela seria estudada no 3º, visto que pertence à unidade III. Os professores a incluíram em seus planejamentos para ser estudada no mês de maio, ou seja, no 2º bimestre diferenciando-se, assim, tanto dos documentos quanto da proposta do LD.

A análise desse capítulo é realizada a partir das situações que dão sentido ao conceito de área: comparação, medição, produção e conversão de unidade, com a situação de medição dividida em calcular a área e determinar comprimentos dados a área e/ou ela e um ou mais comprimentos da figura. Também observamos as representações utilizadas e, em alguns momentos, aspectos relacionados à álgebra das grandezas.

³³ Termo utilizado para tratar da mesma grandeza, porém com algumas particularidades. No caso acima, a capacidade trata-se do volume interno de um recipiente. Também utilizamos para o perímetro, pois ele é uma instanciación do comprimento.

O autor inicia dizendo que o cálculo de área de alguns quadriláteros já foi visto em anos anteriores, conforme observamos na análise dos LD dos 6º e 7º anos, e que vai relembrá-los. No exemplo introdutório envolvendo a área do retângulo não quadrado e do quadrado, Silveira (2018c) apresenta um contexto de uma compra imobiliária que, para saber o valor máximo a ser pago por um terreno, é necessário calcular a sua área:

Figura 58 – Exemplo inicial para a área do retângulo não quadrado e do quadrado no livro didático do 8º ano

Área do retângulo e do quadrado

Situação 1

Joana foi encarregada de comprar um terreno para uma empresa, sabendo que poderia pagar até R\$ 500,00 pelo metro quadrado do terreno. Chegando ao local, veja o que o corretor de imóveis informou sobre o terreno.

Joana lembrou que a **área de um retângulo** é dada pela multiplicação entre as medidas da base e da altura, como indica a expressão a seguir.

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$$

Substituindo os valores correspondentes à largura e ao comprimento do terreno na expressão, Joana determinou a área do terreno.

$$A_{\text{terreno}} = 12 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} = 240 \text{ m}^2$$

Para determinar o valor máximo que poderia pagar pelo terreno, Joana multiplicou o valor correspondente à área encontrada por 500.

$$240 \cdot 500 = 120000$$

Portanto, Joana poderia pagar, no máximo, R\$ 120 000,00 por esse terreno.

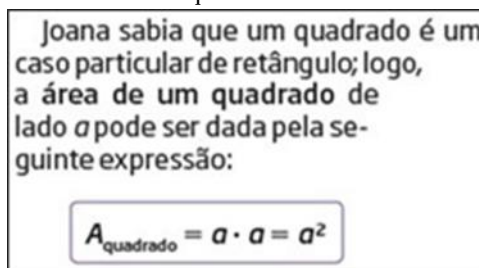


Fonte: Silveira (2018c, p. 158)

Percebemos que se trata de uma situação de medição de área que não contempla o desenho da figura, apesar de trazer algumas ilustrações. Destacamos a aplicação correta da álgebra das grandezas no cálculo da área, ou seja, na operação envolvendo os comprimentos do terreno, manipula simultaneamente números e unidades de medida para manter a coerência e não chegar a resultados como $12 \times 20 = 240 \text{ m}^2$, em que números são igualados a grandezas erroneamente. Porém, essa coerência não é mantida, pelo menos explicitamente, para o cálculo do valor máximo que poderia ser pago pelo terreno, e a relação de proporcionalidade entre as duas grandezas permanece implícita. Mesmo assim, a ênfase precoce em situações de medição não contribui para a construção do conceito de área como uma grandeza autônoma, conforme proposta de Douady e Perrin-Glorian (1989).

Para chegar à área do quadrado, Silveira (2018c) continua no mesmo contexto da situação anterior, só que agora com um terreno em formato quadrado. Cabe ressaltar que o autor considera a relação de que todo quadrado é um retângulo para apresentar a expressão de área do quadrado, conforme excerto a seguir:

Figura 59 – Expressão de área do quadrado no livro didático do 8º ano

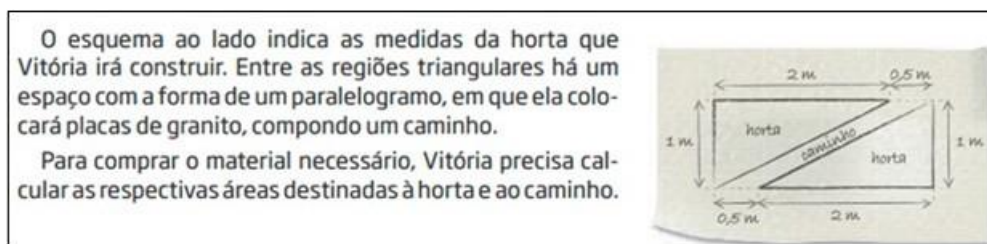


Fonte: Silveira (2018c, p. 158)

Destacamos o fato de considerar a relação existente entre os dois paralelogramos - retângulo não quadrado e quadrado -, porém sem mais justificativas sobre essa particularidade com elementos do campo da Geometria. Mais uma vez, mantém coerência em relação à álgebra das grandezas e o exemplo não contempla a representação gráfica do quadrado.

Quanto à área do paralelogramo não retângulo e não losango, o autor supracitado mantém o padrão dos casos anteriores, ou seja, um exemplo seguido pela apresentação da expressão de área e substituição dos valores:

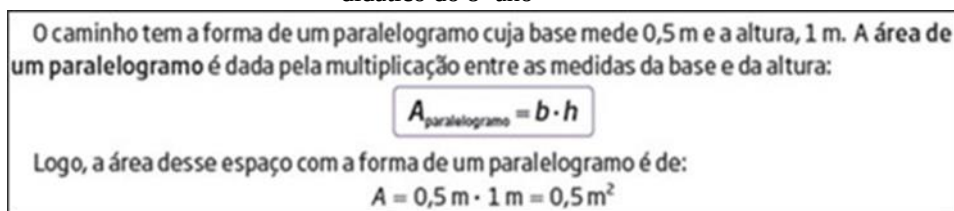
Figura 60 – Exemplo introdutório para as áreas do triângulo e do paralelogramo não retângulo e não losango no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 159)

Após apresentar como calcular a área destinada à horta por meio da expressão de área de um triângulo retângulo, o autor apresenta o procedimento para o cálculo da área reservada ao caminho:

Figura 61 – Uso da expressão de área no cálculo da área do paralelogramo não retângulo e não losango no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 159)

Notamos mais um exemplo que se enquadra como uma situação de medição, dessa vez, com presença de objetos gráficos associados às figuras. No caso do paralelogramo não retângulo e não losango, apesar de inclinado para a direita, o lado de maior comprimento não

se encontra na posição horizontal e sua altura não está traçada, caracterizando seu desenho como não prototípico.

Essa questão também apresenta operações no conjunto dos números racionais não negativos sem comentários sobre a validação da expressão de área no manual do professor. Outro ponto a ser destacado é que em nenhum momento é realizada uma discussão referente ao fato de a altura tomada para o triângulo coincidir com a do paralelogramo.

O modo de apresentação do conteúdo segue o mesmo estilo para a área do losango não quadrado: o autor inicia por uma situação de medição de área como nos casos anteriores, apresenta a expressão de área e substitui os valores para encontrá-la. No caso anterior, foi utilizada a mesma situação para apresentar a área do triângulo e do paralelogramo não retângulo e não losango e, dessa vez, trouxe o desenho de uma figura poligonal sobre a malha quadriculada para exploração do cálculo da área do trapézio e do losango não quadrado. Cabe ressaltar que essa é a primeira vez que esse recurso aparece no capítulo, apesar da sua relevância para construção do conceito de área como grandeza, principalmente por favorecer a utilização de procedimentos não necessariamente numéricos.

Figura 62 – Exemplo para o cálculo da área do trapézio e do losango não quadrado a partir da decomposição da figura no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 159-160, adaptado)³⁴

Após a apresentação da questão, a decomposição da figura é realizada em um trapézio e um losango não quadrado, conforme representado à direita, seguida das respectivas expressões de área e substituição dos valores para sua determinação. No caso do losango não quadrado, o texto afirma que os comprimentos das diagonais foram obtidos com o auxílio de uma régua, em centímetros, transformados para metros conforme a escala e, só então, os valores foram substituídos na expressão de área. O procedimento utilizado pelo autor para transformar a figura poligonal dada em quadriláteros, sobre os quais o estudante já consegue lidar, é considerado positivo e contribui para a construção do conceito de área como uma

³⁴ Optamos por colocar ao lado da figura algumas informações e/ou outras figuras que estavam depois delas no LD, para melhor organização textual. Nelas, aparecerá a palavra “adaptado” na fonte.

grandeza autônoma. A decomposição das figuras evidencia o desenho prototípico de um trapézio e o não prototípico de um losango não quadrado, tendo em vista que sua diagonal de maior comprimento não está na posição horizontal, seguindo as linhas da malha quadriculada.

Observamos no tópico 1. Área de figuras planas no capítulo 8 do LD analisado que todo o conteúdo é apresentado por meio de situações de medição, uma para cada figura plana considerada, associadas à representação das expressões de área e sua aplicação se dá, em geral, no conjunto dos números inteiros não negativos. Apenas duas das situações recorrem a desenhos não prototípicos de paralelogramos.

Passamos a analisar, agora, as atividades propostas no LD nas seções “Atividades” e “Trabalhando os conhecimentos adquiridos”. Verificamos um total de 16 atividades que classificamos como: duas são de comparação (12,5%), uma de produção (6,2%)³⁵ e treze de medição (81,2%), sendo duas para determinar comprimentos dados a área e outros comprimentos (12,5%) e onze para calcular a área (68,7%), com duas delas na malha quadriculada. Estes dados reafirmam a preferência do autor por situações de medição associadas ao cálculo da área de retângulos não quadrados e à aplicação das expressões de área, conforme já sinalizado ao fazer o levantamento ao longo dos demais capítulos do livro e análise dos outros livros dessa coleção. As situações de comparação e de produção, bastante reduzidas, também privilegiam o quadro numérico e as unidades de medidas convencionais. Tal fato corrobora achados de outras pesquisas sobre área em LD, a exemplo de Ferreira (2018).

Analisemos uma situação de medição em que é preciso mobilizar conhecimentos geométricos e das grandezas e medidas para calcular adequadamente a área, mais precisamente, se apoiar na relação de inclusão entre quadrados e losangos:

Figura 63 – Situação de medição que demanda a inclusão de classes de paralelogramos para o cálculo da área no livro didático do 8º ano

2 Um quadrado tem diagonal medindo 5 cm. Qual é a área desse quadrado? Explique como você pensou para responder a essa questão.

Fonte: Silveira (2018c, p. 160)

Como podemos observar, nesta situação não há presença do objeto gráfico associado ao quadrado. Segundo afirmação do manual do professor, “Espera-se que os alunos percebam que um quadrado também é um losango. Logo, sua área pode ser determinada pelo produto das medidas de suas diagonais dividido por 2” (*Ibid.*, p. 160). Em outras palavras, o autor espera que o aluno considere a inclusão de classes entre os paralelogramos. Alertamos para a

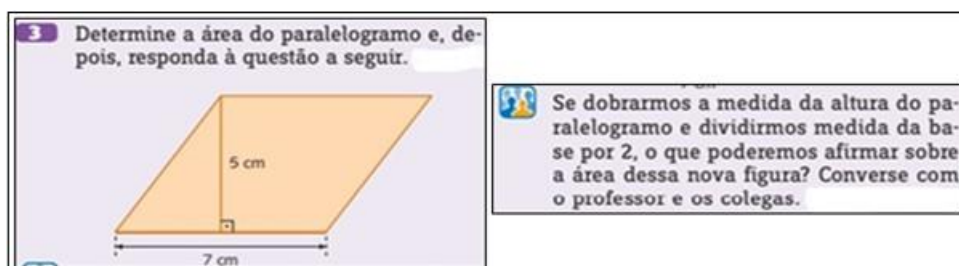
³⁵ A situação de comparação e a de produção fazem parte de uma única questão, porém como ela é dividida em letras a) e b), e cada uma dessas letras se tratam de tarefas distintas do ponto de vista cognitivo, resolvemos contá-las separadamente.

ênfase na medida (número) nesta fala do autor, pois deveria considerar a grandeza comprimento (número, unidade de medida) para as diagonais. Destacamos ainda que, nessa questão, apenas a representação linguística da diagonal pode levar o estudante a confundir com o lado do quadrado, pois para o cálculo da área em um quadrado, ele precisa apenas de uma dimensão, o comprimento do lado.

Situações como a apresentada acima reforçam a necessidade de considerar a representação da figura como parte da compreensão sobre área, e as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas ao lidar com as grandezas geométricas, mais especificamente, com a compreensão dos conceitos de quadrado, losango, diagonal e área, que ampliam as possibilidades de enfrentamento da situação. Tal aspecto também foi defendido por Araújo (2018) e por Teles (2007) ao apontar que na mobilização de conhecimentos geométricos relativos à figura, suas propriedades e características como base e altura para lidar com o conceito de área, o estudante está no campo geométrico.

O exemplo a seguir apresenta duas situações, uma de medição e outra de comparação, que destacam alterações no aspecto numérico e geométrico da figura, mas conservam a área a partir da relação de classes de equivalência.

Figura 64 – Situações de medição e de comparação envolvendo o paralelogramo não retângulo e não losango em seu desenho prototípico no livro didático do 8º ano

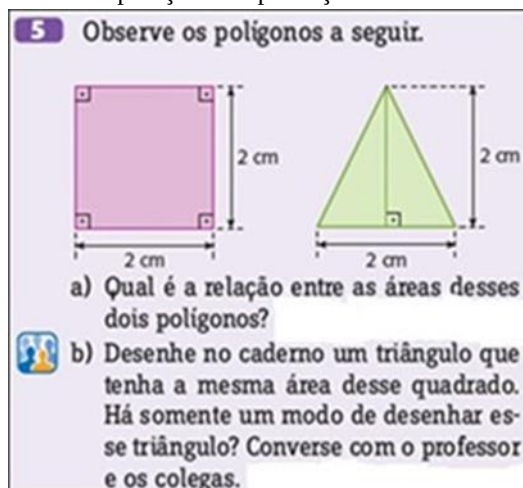


Fonte: Silveira (2018c, p. 161, adaptado)

Novamente, alertamos para a confusão entre medida e comprimento (número x grandeza) que pode levar o leitor a realizar apenas a comparação numérica entre as áreas, sem articular os demais quadros propostos por Douady e Perrin-Glorian (1989). Também destacamos o desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango.

Vejamos situações que envolvem a comparação de áreas e a produção de superfícies a partir de uma figura dada, em que há presença do desenho prototípico do quadrado e do desenho de um triângulo, com dados numéricos necessários e suficientes para a aplicação das expressões de área.

Figura 65 – Situações de comparação e de produção no livro didático do 8º ano

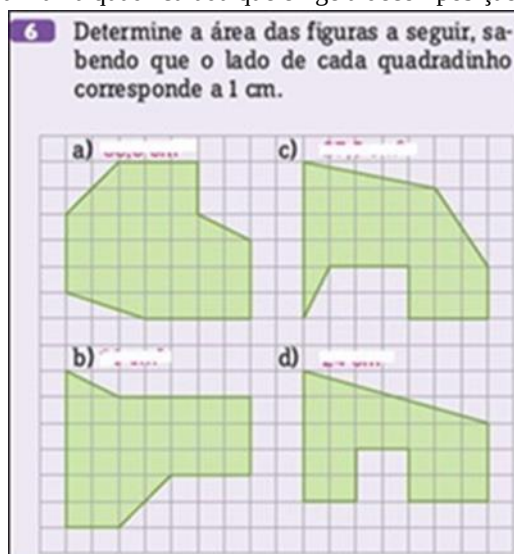


Fonte: Silveira (2018c, p. 161)

As situações acima, apesar de ser necessário inicialmente calcular as áreas para poder compará-las e produzir uma figura na condição dada, se diferenciam das anteriores por ir além da medição, uma vez que não existe uma única resposta correta e fortalece a ideia de que figuras diferentes podem ter mesma área, como discutido por Bellemain e Lima (2002). Destacamos ainda que a comparação entre as áreas pode ocorrer apenas por procedimentos geométricos, como a decomposição ou sobreposição, e a necessidade do conhecimento das características da figura a produzir bem como da escolha adequada dos comprimentos para que o triângulo desenhado possua área igual à do quadrado.

Apenas uma das atividades de medição propostas não apresenta dados numéricos explícitos e contempla figuras não usuais, para as quais é necessário realizar a decomposição e recomposição para poder calcular as áreas.

Figura 66 – Situação de medição na malha quadriculada que exige a decomposição no livro didático do 8º ano

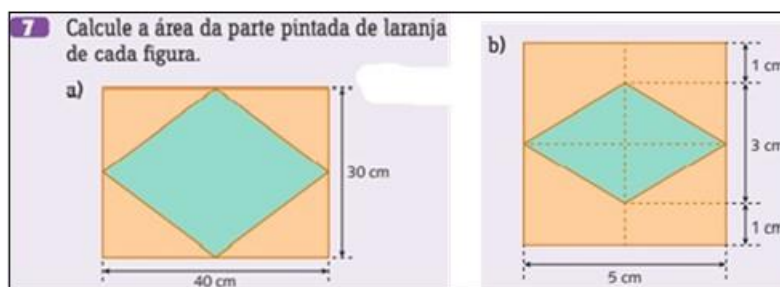


Fonte: Silveira (2018c, p. 161)

A situação acima diferencia-se das anteriores por encontrar-se na malha quadriculada e contemplar figuras para as quais a aplicação direta de uma expressão de área não é possível. Situações como esta e como a anterior são importantes para a construção do conceito de área pelos estudantes, conforme apontado em Baltar (1996) e Douady e Perrin-Glorian (1989). No entanto, os polígonos apresentados favorecem a decomposição em triângulos retângulos, quadrados e retângulos não quadrados, e a contagem de quadradinhos, sem levar o sujeito à necessidade de elaborar novos esquemas, contrariando os pressupostos defendidos por Vergnaud (1990) no que se refere à diversidade de situações para a atribuição de sentido a determinado conceito.

O exemplo a seguir apresenta situações de medição envolvendo quadrados, retângulos não quadrados e losangos não quadrados em desenhos prototípicos:

Figura 67 – Situações de medição com ausência de elementos geométricos no livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 161, adaptado)

Nas figuras representadas acima, não há indicação dos elementos geométricos suficientes para que o estudante consiga identificar corretamente as figuras, como os ângulos retos e marcas que garantam a igualdade dos comprimentos dos lados. Apesar de o capítulo anterior a esse ter tratado das propriedades dos triângulos e quadriláteros, e pertencer à mesma unidade, a ausência dos elementos citados nos desenhos das figuras não favorece a sua compreensão e o cálculo das áreas.

Embora não seja envolvendo os paralelogramos, mas por consistir em um erro recorrente dos estudantes, resolvemos apresentar uma tarefa em que há confusão entre as unidades de área e de comprimento, conforme mostrado abaixo:

Figura 68 – Confusão entre as unidades de área e de comprimento no livro didático do 8º ano

1 Considere um trapézio cuja base maior meça 8 mm, a altura meça 3 mm e tenha 18 mm de área. Qual é a medida da base menor desse trapézio?

Fonte: Silveira (2018c, p. 169)

É possível observar que o autor diz que o trapézio tem 18 mm de área quando deveriam ser 18 mm² de área, entretanto, também não descartamos a possibilidade de ser um erro de revisão gráfica. Outro ponto a ser destacado ainda é que ele pede a medida se

referindo ao comprimento, tratando medida e grandeza como sinônimos, como também observamos em pesquisas analisadas.

A partir da análise das atividades propostas, verificamos que todas envolvem os paralelogramos, e dessas, treze são da classe de situações de medição (onze para calcular áreas e duas para determinar outras grandezas a partir da área), uma de produção e duas de comparação. Treze das atividades apresentaram objetos gráficos para representar as figuras, sendo oito deles prototípicos. A ênfase é no quadro numérico, com foco na maioria das vezes na aplicação direta da expressão de área. Destacamos como aspectos positivos, ainda que na minoria das situações, proporcionar figuras sem dados numéricos explícitos, utilizar procedimentos como decomposição e recomposição, relacionar elementos da inclusão para o cálculo da área, reforçando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, e a manipulação coerente dos dados relativa à álgebra das grandezas. Reiteramos que a predominância de determinadas situações e ausência de outras podem estar relacionadas ao cumprimento por parte do autor de determinadas exigências provenientes de documentos normativos ou de orientações. No entanto, sabemos que ele poderia trazer outras em complementação, mas optou por aquelas estabelecidas pelos documentos.

Por fim, podemos observar que o desenho predominante do losango não quadrado não foi unânime ao longo dos livros didáticos analisados como ocorreu com os demais paralelogramos. No entanto, considerando toda a coleção, prevaleceu o que consideramos nesta tese como prototípico, o qual possui a diagonal de maior comprimento na posição horizontal (32,1%), predominante nos LD dos 8º e 9º anos, seguido do que mais se aproxima do prototípico, ou seja, tem essa diagonal em posição vertical (28,5%) que prevaleceu no LD do 7º ano. O terceiro mais utilizado foi o que tem um dos lados apoiado na horizontal (17,8%), priorizado no LD do 6º ano. Há outros desenhos, entretanto, estamos destacando os que foram maioria em cada livro didático e, conseqüentemente, em toda a coleção. Essa diversidade de representações para uma mesma figura ao longo dos exemplares da coleção é considerada um ponto positivo para o seu reconhecimento pelos estudantes.

Na próxima seção vamos retomar os principais resultados verificados a partir da realização das análises preliminares. Mais especificamente, os achados relativos: às pesquisas sobre os paralelogramos, área e área de paralelogramos; aos documentos de orientação curricular, planejamentos e apostilas de atividades; e, por fim, à análise da coleção de livros didáticos.

3.4 SÍNTESE ACERCA DAS ANÁLISES PRÉVIAS

Os achados das pesquisas sobre os paralelogramos permitiram constatar que há prioridade na exploração do quadrado e do retângulo não quadrado, nas quais os estudantes apresentavam melhor desempenho, com maiores dificuldades nos paralelogramos não retângulos e não losangos e nos losangos não quadrados, como em Diniz (2013) e Fujita (2012). Foi possível perceber ainda dificuldades no reconhecimento dessas figuras geométricas planas, em citar propriedades adequadas, desenhá-las, e que as definições dadas pelos estudantes eram incompletas ou inadequadas, a exemplo da pesquisa de Menegotto e Lara (2011). Havia valorização do aspecto visual das figuras para caracterizá-las, como formato e posição, e os desenhos priorizados foram os prototípicos, como em Tavares (2014). As classes de situações do campo da Geometria exploradas foram identificação, classificação, inclusão e construção.

No caso dos achados relativos às pesquisas sobre área de figuras geométricas planas, verificamos que a situação de medição, pertencente ao campo das Grandezas e Medidas, foi a mais explorada e, assim como nos estudos sobre os paralelogramos, houve prioridade nos quadrados e retângulos não quadrados, por desenhos prototípicos e necessidade de estudos envolvendo os losangos não quadrados, como em Henriques (2011) e Nunes (2011). O conceito de área quando não associado a uma concepção numérica ou geométrica, foi tido como não estudado ou mesmo ligado a dificuldades e incompreensões pelos participantes, a exemplo da pesquisa de Santos (2010). Observamos também pouca ênfase na utilização das unidades de medida, dificuldades em generalizar e escrever expressões de área, principalmente envolvendo o losango não quadrado, como em Mendes (2012); foco no aspecto numérico, erros de álgebra das grandezas, de cálculo numérico, principalmente com números decimais, e de cálculo relacional, em sua maioria, a confusão entre os conceitos de área e perímetro, a exemplo das pesquisas de Ferreira (2010) e Jesus (2011). Entre os pontos considerados positivos, apontamos a utilização de materiais manipuláveis, Tangram, malha quadriculada, procedimentos de decomposição e recomposição de figuras, atividades em contextos aplicados e a necessidade de consideração das imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas ao se trabalhar com o conceito de área, como em Araújo (2012) e Henriques (2011).

Quanto aos resultados relacionados à área de paralelogramos, foi possível observar que, mesmo em estudos realizados em intervalos de tempo relativamente longos e com participantes de níveis diferentes de ensino, alguns achados foram convergentes como:

confusão entre os conceitos de área e perímetro, extensão da expressão de área do retângulo para o paralelogramo não retângulo e não losango ao multiplicar os comprimentos dos seus lados, como em Baltar (1996), Douady e Perrin-Glorian (1989) e Rosa dos Santos (2005); utilização inadequada das unidades de medida e não relacionar os comprimentos dos lados ou das diagonais para que as figuras fiquem com determinada área em situações de produção, a exemplo da pesquisa de Bernardes, Souza e Zandonade (2014). Alguns achados se aproximaram daqueles encontrados nos estudos sobre os paralelogramos, como considerar o paralelogramo não retângulo e não losango como um retângulo deformado ou um “gênero de retângulo” porém mais inclinado para um lado, observados, respectivamente, nas pesquisas de Douady e Perrin-Glorian (1989) e de Tavares (2014), esta última desenvolvida no campo da Geometria. De maneira análoga, também verificamos resultados próximos aos achados das pesquisas sobre área de diversas figuras geométricas planas, como dificuldade em responder o que seria esse conceito, observada em Araújo (2012), Bernardes, Souza e Zandonade (2014) e Santos (2010). Outros achados mais gerais foram prioridade por desenhos prototípicos, lidar mais adequadamente com situações que contemplam o quadrado ou o retângulo não quadrado e, conseqüentemente, ter maiores dificuldades com o losango não quadrado e o paralelogramo não retângulo e não losango.

No que se refere à análise dos documentos de orientação curricular, em especial a BNCC e o CPE, percebemos que habilidades do campo da Geometria voltadas a identificar e nomear quadrados e retângulos não quadrados são propostas desde o 1º ano do ensino fundamental. Já em relação ao conceito de área, elas iniciam a partir do 3º ano por meio de situações de comparação e devem ser sistematizadas no 8º ano, no campo das Grandezas e Medidas. Além das habilidades descritas nos quadros anteriores relativas aos paralelogramos e ao conceito de área, notamos que para os anos iniciais do ensino fundamental há o acréscimo de duas habilidades no CPE que não apareceram na BNCC, uma no campo da Geometria voltada ao 3º ano relativa à decomposição e recomposição de figuras, e outra no campo das Grandezas e Medidas para o 5º ano relacionada à compreensão do significado de um metro quadrado e de um centímetro quadrado para comparar áreas e algumas relações entre unidades de medida de volume com o litro. Houve ainda uma terceira habilidade a mais no CPE, também do 5º ano, porém voltada ao reconhecimento do objeto geométrico ângulo que, apesar de importante, não é primordial em nosso estudo. Já com relação aos anos finais do ensino fundamental, não verificamos diferenças entre as habilidades apresentadas nos dois documentos – BNCC e CPE.

A análise do Organizador Curricular e o Documento de Reorganização Curricular, ambos de Pernambuco, permitiu verificar que apenas uma das habilidades que discutimos nos quadros elaborados com base no primeiro documento foi considerada como complementar no período pandêmico, a qual era voltada à descrição, por escrito e a partir de um fluxograma, de um algoritmo para a construção de polígono regular em que o comprimento do lado é conhecido, com a utilização de alguns materiais como régua, compasso ou *softwares* (Pernambuco, 2020b). Mesmo com a criação do Documento de Reorganização, todas as habilidades permaneceram em seus respectivos bimestres, conforme havia sido indicado no Organizador Curricular, inclusive a citada acima considerada complementar.

Ao analisar os planejamentos elaborados pelos professores de Matemática da escola campo de pesquisa, percebemos que algumas habilidades selecionadas divergiram daquelas consideradas prioritárias pelo Documento de Reorganização Curricular. Também notamos que eles não seguem à risca o Organizador Curricular no que se refere aos bimestres em que cada uma deve ser trabalhada. Outro ponto de destaque é que habilidades importantes, como as voltadas à classificação e inclusão entre os quadriláteros não foram contempladas, assim como as que envolviam situações de medição de áreas utilizando procedimentos de decomposição e recomposição. Entretanto, possivelmente, a não inclusão de algumas habilidades consideradas prioritárias pode estar relacionada à realidade dos alunos conhecida pelos professores e ao momento pandêmico em que se encontravam.

Outro instrumento utilizado pelos professores foram as apostilas mensais de atividades. Sua análise permitiu verificar convergências e divergências quando comparado ao previsto nos planejamentos. Quanto ao primeiro aspecto, observamos situações relativas às habilidades sobre a ampliação e redução de figuras em malha quadriculada, comparando as mudanças sobre a área, no 6º ano do ensino fundamental. Já as divergências consistiram no fato de constar situações voltadas à área nas apostilas do 7º ano mesmo sem haver habilidades previstas nos planejamentos sobre esse conceito para esse ano escolar, entre outras. Os dados quantitativos apontaram predominância por situações de medição, corroborando os achados nas pesquisas sobre área. Também foram observadas situações de comparação, classificação e construção, entretanto, em menor quantidade. Outro ponto comum aos resultados encontrados nas pesquisas é a prioridade por situações envolvendo o retângulo não quadrado e o quadrado e por desenhos prototípicos. Um dado preocupante é que não verificamos nenhuma situação de inclusão, provavelmente por não constar nos planejamentos dos professores, embora seja considerada prioritária no Documento de Reorganização Curricular, e nem de medição que envolvesse o losango não quadrado e o paralelogramo não retângulo e não losango. A análise

das apostilas de atividades juntamente à dos planejamentos, permitiu conhecer, ao menos parcialmente, o que foi estudado pelos estudantes ao longo do ano letivo de 2021, anterior à experimentação.

Por fim, o último componente das análises prévias foi a análise da coleção de livros didáticos adotada pela escola campo de pesquisa. Nela, tivemos uma visão mais geral dos livros dos 6º, 7º e 9º anos e uma mais específica do LD do 8º ano, pois é onde ocorre a sistematização do conceito de área no campo das Grandezas e Medidas, como vimos na BNCC e no CPE, além de ser o ano anterior à nossa experimentação. Observamos que o autor adota uma classificação inclusiva para os paralelogramos, comum à nossa, e que mantém coerência relativa às definições ao longo dos quatro exemplares analisados. Contrariamente aos planejamentos dos professores para o 7º ano que não contemplavam habilidades voltadas ao conceito de área, o LD inicia nesse ano escolar o estudo da área de paralelogramos não retângulos e não losangos e de losangos não quadrados. Apesar de as apostilas conterem atividades envolvendo o conceito de área, inclusive as do 7º ano que não estava previsto nos planejamentos, nenhuma envolvia essas duas figuras. Esse dado aponta que não há uma relação direta entre o que é proposto pelos documentos e nos LD e o que efetivamente é realizado pelos professores com os estudantes. Por um lado, mostra uma certa autonomia desses profissionais em relação ao que é indicado nesses instrumentos, mas, por outro, algumas situações consideradas importantes podem deixar de ser vivenciadas pelos estudantes. Os demais achados não foram diferentes dos já discutidos provenientes das pesquisas anteriores e das apostilas de atividades, pois verificamos predominância por situações de medição, pelas figuras do quadrado e do retângulo não quadrado e pelos desenhos prototípicos dos paralelogramos, inclusive o do losango não quadrado que, apesar de variar de um livro para outro, ao final, ao observar toda a coleção, prevaleceu o seu desenho conforme ao que consideramos na pesquisa como prototípico.

Ao longo do livro didático do 8º ano, com exceção dos capítulos 7 e 8 que foram tratados em subseções específicas, pois eram dedicados entre outros aspectos ao estudo dos quadriláteros e do conceito de área, respectivamente, não verificamos explicitamente situações do campo da Geometria (identificação, classificação, inclusão e construção) voltadas aos paralelogramos. Já as situações do campo das Grandezas e Medidas (comparação, medição, produção e conversão de unidades), verificamos 19 que envolviam a área de paralelogramos, todas classificadas como de medição, sendo quatro para o cálculo da área e 15 para determinar comprimentos dados apenas a área ou ela e um ou mais

comprimentos da figura, estabelecendo relações com outros conteúdos matemáticos, como equações do 2º grau, também observado nas apostilas de atividades.

No capítulo do livro dedicado ao estudo dos quadriláteros verificamos que o autor adotou uma classificação dos paralelogramos similar à nossa, coerente com a dos demais exemplares da coleção, como já dito anteriormente. Entre outras habilidades a serem desenvolvidas com o estudo desse capítulo, o autor destacou realizar a demonstração de propriedades de quadriláteros por meio da congruência de triângulos, presente na BNCC e no CPE, porém sugerida para ser trabalhada em bimestres diferentes dos indicados no Organizador Curricular e no Documento de Reorganização Curricular, ambos de Pernambuco. Apesar de os professores não terem inserido essa habilidade em seus planejamentos, a análise das apostilas apontou que atividades voltadas a esse aspecto foram propostas no bimestre indicado nos documentos e não como sugerido no LD. Quanto às representações e situações, Silveira (2018c) priorizou desenhos prototípicos dos paralelogramos e a maioria das situações era voltada à determinação de aberturas de ângulos e/ou comprimentos por meio de informações dadas e aplicação de propriedades. Verificamos a confusão entre grandeza e medida de uma grandeza, também observada na revisão de literatura, e situações de construção e de inclusão envolvendo os paralelogramos. Já a situação de classificação só foi observada com os trapézios.

No capítulo dedicado ao estudo do conceito de área, uma das habilidades a serem desenvolvidas apontada pelo autor, presente na BNCC, no CPE e nos planejamentos dos professores, é relativa à resolução e elaboração de problemas que envolvam a área de figuras geométricas planas, como quadriláteros, triângulos e círculos, com a utilização das expressões de área. No entanto, o Organizador Curricular e o Documento de Reorganização Curricular propõem que ela seja trabalhada no 1º bimestre, o autor do LD sugere que seja no 3º e os professores a indicaram no 2º, apontando uma divergência nesse ponto entre os três materiais analisados. Os demais resultados convergiram com os já apresentados ao longo desta seção, ou seja, a maioria das situações envolvendo a área de paralelogramos era de medição e os desenhos prototípicos foram priorizados. Também verificamos situações de comparação e de produção, mas em menor quantidade. Destacamos a ênfase dada ao quadro numérico, com foco na maioria das vezes na aplicação direta da expressão de área. Alguns pontos positivos foram observados, ainda que na minoria das situações, como apresentar figuras sem dados numéricos explícitos, utilizar procedimentos geométricos como decomposição e recomposição, relacionar elementos da inclusão para o cálculo da área, reforçando as

imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, e a manipulação coerente dos dados relativa à álgebra das grandezas.

Em resumo, a construção dos capítulos anteriores, principalmente deste dedicado às análises preliminares, possibilitou conhecer aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos relativos aos paralelogramos e ao conceito de área. Entre os elementos verificados, destacamos: aspectos históricos, as principais dificuldades dos estudantes e os erros persistentes em relação aos paralelogramos, ao conceito de área e à área de paralelogramos; como esses conceitos são tratados nos documentos de orientação curricular, as habilidades, conteúdos e bimestres em que devem ser trabalhados; as situações, os paralelogramos e os desenhos que são priorizados nas pesquisas já realizadas, nas atividades propostas pelos professores e nos livros didáticos. A partir desses achados, sentimos a necessidade de explorar situações de todas as classes e não enfatizar apenas na de medição, destacando a necessidade de considerar também as situações do campo da Geometria ao lidar com as do campo das Grandezas e Medidas, devido às fortes imbricações existentes entre eles. A exploração de todos os paralelogramos em diferentes representações, principalmente os losangos não quadrados e os paralelogramos não retângulos e não losangos também se mostrou necessária. Esses aspectos fortaleceram nosso interesse e a necessidade de realizar uma intervenção com esses estudantes, pois nosso intuito não é apenas apontar as dificuldades ou sugestões de como poderia ser feito, mas experimentar meios que contribuam com a sua aprendizagem. Norteados por tais achados, podemos passar ao capítulo seguinte dedicado à concepção e análise a priori das situações que compõem a sequência didática.

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Este capítulo é dedicado à segunda etapa da ED, a concepção das situações que compõem a sequência didática e a realização da sua análise a priori. Para sua construção, apoiamo-nos nas análises prévias realizadas anteriormente que possibilitaram conhecer mais profundamente aspectos relativos à área e aos paralelogramos, tanto em pesquisas já realizadas quanto em documentos a nível federal, estadual, municipal e local da escola campo de pesquisa.

Antes de passarmos para a sequência didática propriamente dita, gostaríamos de debater três pontos muito importantes: o primeiro é que nossa proposta se distancia, ao menos parcialmente, das orientações curriculares e do que propõem os livros didáticos, pois sabemos que é preciso conhecer o que é dito nesses documentos, mas não podemos ficar restrito a eles e fazer exatamente daquela maneira, uma vez que a engenharia didática como metodologia de pesquisa permite, entre outros aspectos, experimentar novas possibilidades fortemente ancoradas numa fundamentação teórica; o segundo ponto está relacionado ao fato de que, metodologicamente, em uma tese não dispomos de tempo hábil para observar o longo prazo previsto na TCC para que o sujeito domine progressivamente e atribua sentido a determinado conceito. Nesse sentido, alguns aspectos podem necessitar de aprofundamento em estudos posteriores. Mesmo assim, abre possibilidades para uma maior reflexão diante de novas situações e elaboração de novos esquemas junto a outras experiências com as situações envolvidas; no terceiro e último ponto discutimos que, assim como Baltar (1996) ao investigar as relações entre estático e dinâmico relativas à área de paralelogramos, primeiro estudou a parte estática para, em seguida, explorar o aspecto dinâmico, optamos por iniciar a sequência didática com situações do campo da Geometria para, depois, observar os conhecimentos geométricos que seriam utilizados ou reinvestidos ao lidar com situações do campo das Grandezas e Medidas, cujas atividades deste último foram pensadas considerando as imbricações entre esses dois campos.

A princípio, a sequência didática foi pensada para ser experimentada em 12 sessões, mas houve a necessidade de repetir algumas atividades para os estudantes faltosos, acarretando em um encontro a mais, cujo detalhamento ocorre na parte dedicada à análise dos resultados. Cada sessão corresponde a um encontro com duas horas de duração, totalizando 26 horas de intervenção com os estudantes, conforme apresentado no quadro a seguir:

Quadro 9 – Detalhamento das sessões que compõem a sequência didática

Sessões	Atividades³⁶	Situações trabalhadas	Descrição geral	Duração
1ª	1	-	Familiarização com materiais que serão utilizados ao longo das sessões e retomada de alguns elementos geométricos possivelmente estudados em anos anteriores como retas perpendiculares e paralelas, lados e ângulos opostos e congruentes, ângulo reto.	2h
	2			
	3			
	4			
	Complementar a ativ. 4			
2ª	1	Construção	Observação de que quadriláteros são priorizados pelos estudantes em suas representações e dos critérios escolhidos por eles para realizarem agrupamentos.	2h
	2	Identificação e classificação		
3ª	At. 4 da 1ª sessão	-	Exploração do Tangram para familiarização e diagnóstico de dificuldades e conhecimentos prévios.	2h
	At. comp. da 1ª sessão			
4ª	1	Identificação, classificação e inclusão	Retomada e sistematização coletiva do trabalho realizado na segunda sessão e aprofundamento das identificações e dos agrupamentos das figuras.	2h
	2	Identificação e classificação		
5ª	Única	Inclusão e construção	Reflexão sobre a compreensão das relações de inclusão e as relações recíprocas.	2h
6ª	1	Classificação e inclusão	Exploração de outras características dos paralelogramos além das já trabalhadas e que apoiaram sua definição, como propriedades das diagonais etc.	2h
	2	Classificação e inclusão		
7ª	Única	Identificação, classificação e inclusão	Sistematização das propriedades dos paralelogramos.	2h
8ª	1	Comparação	Trabalho com a distinção entre área e superfície e sua invariância por decomposição e recomposição utilizando o Tangram e Poliminós.	2h
	2	Produção		
	3	Comparação		
9ª	1	Produção	Trabalho com a distinção entre área e número com a utilização de peças do Tangram.	2h
	2	Medição		
10ª	1	Construção e medição	Atribuição de sentido às expressões de área dos paralelogramos, no caso dos quadrados e retângulos não quadrados.	2h
	2	Construção e medição		
11ª	1	Medição	Atribuição de sentido às expressões de área dos paralelogramos não retângulos e não losangos.	2h

³⁶ As atividades que foram retiradas de outras pesquisas estão com as devidas referências em nota de rodapé. As demais fazem parte do acervo da pesquisa.

	2	Medição		
12 ^a	1	Construção e inclusão	Atribuição de sentido às expressões de área dos losangos não quadrados. Sistematização final.	2h
	2	Medição e inclusão		
13 ^a	1	Medição que exige inclusão etc.	Fechamento das sessões utilizando diferentes situações do campo das Grandezas e Medidas cujas tarefas elementares poderiam remeter a situações do campo da Geometria. Culminância.	2h
	2	Produção que exige classificação, inclusão etc.		

Fonte: acervo da pesquisa

A sequência didática foi experimentada por meio de oficinas com alunos de duas turmas do 9º ano do ensino fundamental, no município de Ferreiros, estado de Pernambuco, no ano letivo de 2022. Os encontros (sessões) foram semanais, às quintas-feiras, com duração de duas horas cada (de 13h30min a 15h30min). O pesquisador conduziu cada sessão e uma pessoa previamente designada o ajudou com a parte tecnológica nas filmagens e gravações, como já dito anteriormente. Em cada encontro, entregamos as respectivas atividades juntamente com um *kit* contendo os materiais necessários para sua realização, encerrando ou iniciando o encontro seguinte a partir de um debate coletivo sobre as produções realizadas, resgatando os elementos trabalhados e realizando um processo de sistematização quando necessário. Tentamos utilizar o máximo possível de materiais manipuláveis de fácil confecção, baixo custo e que não colocavam em evidência o aspecto numérico como, por exemplo, réguas não graduadas, papel branco, transparente e pontilhado, malhas quadriculadas, cartolinas Guache, Tangram, Poliminós, entre outros de uso comum como tesouras, fita adesiva e caneta hidrográfica. O trabalho com procedimentos geométricos como decomposição e recomposição também diminuiu a força do campo numérico.

Antes do detalhamento de cada sessão bem como das atividades que as compõem, gostaríamos de reiterar que nossa proposta é voltada à exploração das imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas. Por esse motivo, tentamos evitar sempre que possível a intervenção dos demais campos, mesmo sabendo que estão presentes, como evidenciado na pesquisa desenvolvida por Teles (2007). Nesse sentido, não focamos em conversão de unidades de medida, com exceção da compreensão básica de que a área como grandeza é autônoma em relação ao número, pois a adoção de diferentes unidades conduz à variação dos números, mas a área permanece invariante. Além disso, optamos por utilizar dados numéricos no conjunto dos inteiros positivos com o objetivo de bloquear a intervenção do campo numérico, pois sabemos das dificuldades ao operar com decimais e dos erros de

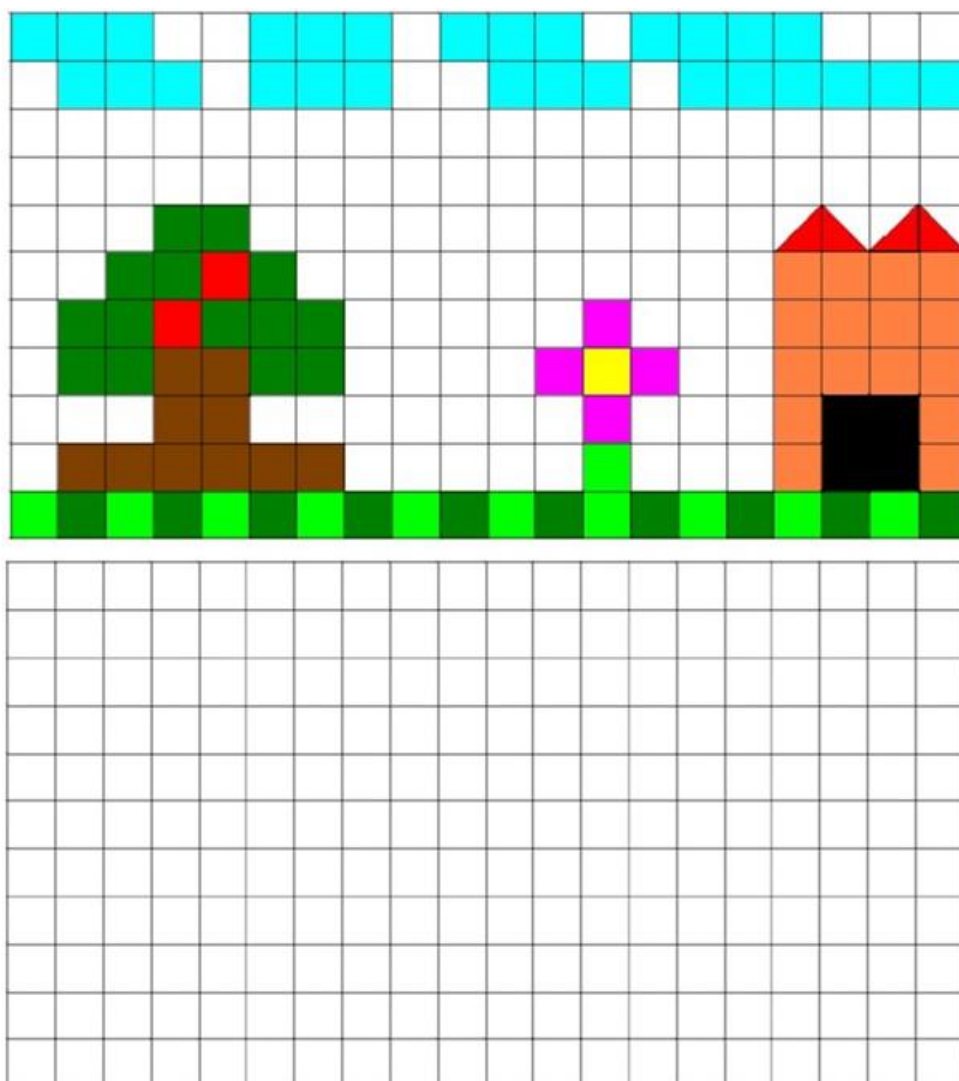
cálculo numérico associados. Em resumo, tornamos o trabalho do estudante artificialmente simplificado para podermos nos debruçar sobre a parte das imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas.

Primeira sessão: *É aula de Matemática ou de Arte?*

Nesta sessão, inicialmente, promovemos a familiarização dos participantes com alguns materiais que utilizamos durante as sessões como malha quadriculada, papel pontilhado, régua não graduada e o Tangram que foi utilizado na construção de algumas figuras, além de dobraduras em papel branco. Iniciamos apresentando esses materiais para eles, perguntando se conheciam, se já utilizaram em aulas de Matemática ou em outro componente curricular, para que servem, entre outros questionamentos que surgiram a partir dessa conversa inicial. Também retomamos alguns elementos do campo da Geometria considerados importantes para o trabalho desenvolvido com os paralelogramos ao longo das sessões como retas perpendiculares, paralelas, ângulo reto, ângulos e lados opostos, ângulos e lados congruentes. Optamos por realizar esse resgate porque são alunos que passaram dois anos de pandemia e, como sabemos, muitos tiveram as condições de ensino e aprendizagem prejudicadas nesse período. Esta sessão deveria ser composta por cinco atividades, mas apenas três delas foram trabalhadas nesse encontro, conforme detalhado mais adiante. A primeira delas foi:

Atividade³⁷ 1: Observe a figura e em seguida reproduza-a na malha quadriculada:

³⁷ Atividade foi retirada da dissertação de Silva (2016, p. 273).



Esta atividade foi importante para familiarização dos participantes com a malha quadriculada, a partir da qual eles puderam observar o distanciamento que deveriam deixar entre as figuras, quando utilizar totalmente o quadradinho ou apenas uma parte dele, quais deveriam ser deixados sem preencher e, além disso, fazer traçados de diagonais, segmentos paralelos e perpendiculares. Ela foi realizada individualmente e com a utilização de régua não graduada para se apoiarem ao fazer os traçados dos contornos das figuras e lápis de cor para pintá-las. Por serem estudantes do 9º ano e se tratar de uma atividade que não possui tanta complexidade do ponto de vista cognitivo, as dificuldades poderiam ser poucas, principalmente voltadas à distância entre uma figura e outra ou à quantidade de quadradinhos pintados que cada uma deveria conter. As variáveis didáticas e seus valores são descritas no quadro a seguir:

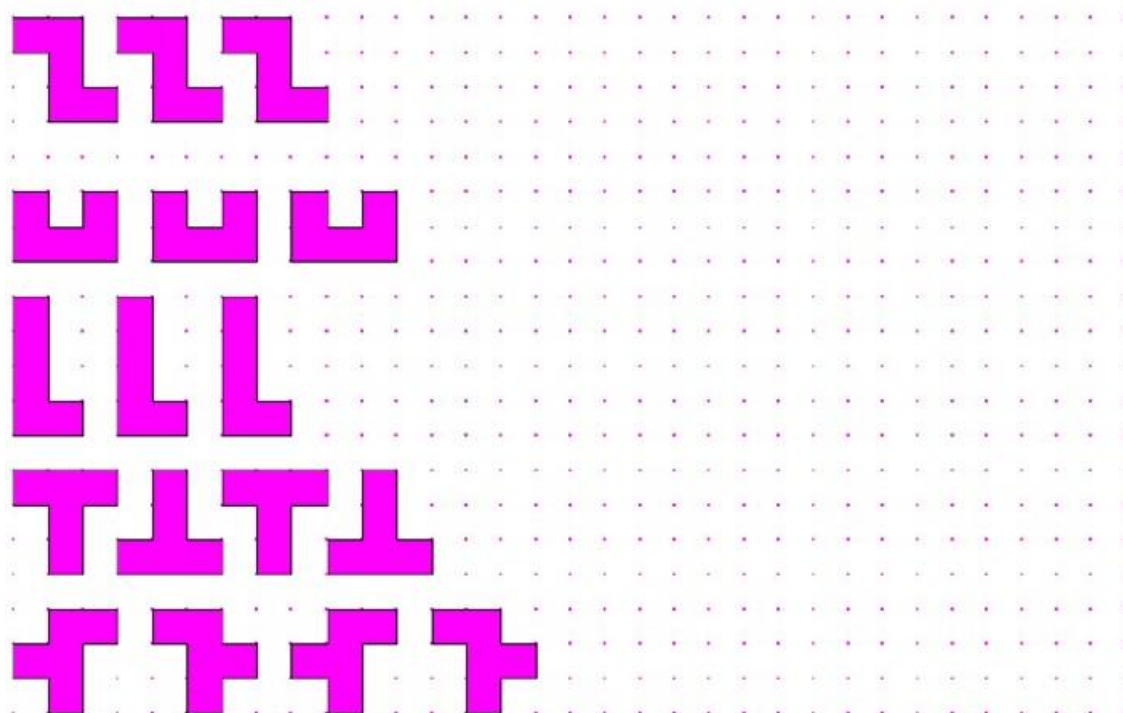
Quadro 10 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da primeira sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figuras	Quadrados, retângulos não quadrados e triângulos
Desenho da figura no enunciado	Presente
Desenho da figura solicitado	Sim
Tipo de papel	Quadriculado
Natureza das soluções	Gráfica

Fonte: acervo da pesquisa

Vamos à próxima atividade desta primeira sessão.

Atividade³⁸ 2: Observe os padrões abaixo e continuem a reproduzi-los na malha pontilhada:



Nosso interesse em utilizar esta atividade está ligado à familiarização dos participantes com o papel pontilhado. Ela foi realizada individualmente e foram disponibilizados lápis de cor para poderem pintar as figuras e réguas não graduadas para se apoiarem ao realizar os traçados dos seus contornos. Nela, há um pouco mais de dificuldades se comparada à anterior, pois além do distanciamento e da quantidade de pontinhos, precisa identificar os padrões e desenhá-las apenas sobre os pontos enquanto na outra havia todo o preenchimento do quadradinho na malha quadriculada. Os dois últimos desenhos possuem mais complexidade que os anteriores por haver uma alternância no padrão entre um e outro. O estudante poderia fazer todo o contorno da figura e depois pintá-la ou já iniciar pintando, observando o

³⁸ Assim como a anterior, essa atividade também foi extraída da dissertação de Silva (2016, p. 274), com uma pequena alteração no enunciado relativa à retirada das palavras frisos e pentaminós para evitar possíveis dúvidas pelos participantes, o que não muda sua essência.

distanciamento entre elas. Vejamos as variáveis didáticas e os valores que assumem nessa atividade:

Quadro 11 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da primeira sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figuras	Pentaminós
Desenho da figura no enunciado	Presente
Desenho da figura solicitado	Sim
Tipo de papel	Pontilhado
Natureza das soluções	Gráfica

Fonte: acervo da pesquisa

A atividade 3 desta primeira sessão é apresentada em seguida.

Atividade 3: Você está recebendo um pedaço de papel como o apresentado a seguir.



Siga as instruções abaixo:

a) Dobre o papel uma vez, abra e cubra a marca encontrada com a cor azul. Em seguida, faça outra dobra e cubra a marca encontrada com a cor vermelha. Você sabe como se chamam as retas representadas por essas duas cores? _____

b) Tente determinar por meio de dobraduras uma reta que seja perpendicular à reta em azul. Se já encontrou na letra (a), passe para a próxima etapa.

c) Tente determinar por meio de dobraduras uma reta que seja paralela à reta em vermelho. Se já encontrou na letra (a), passe para a próxima etapa.

d) Tente fazer um retângulo por meio de dobraduras nesse pedaço de papel. É possível identificar quais lados são opostos? Quais possuem o mesmo comprimento? Como se chamam os ângulos internos dessa figura? _____

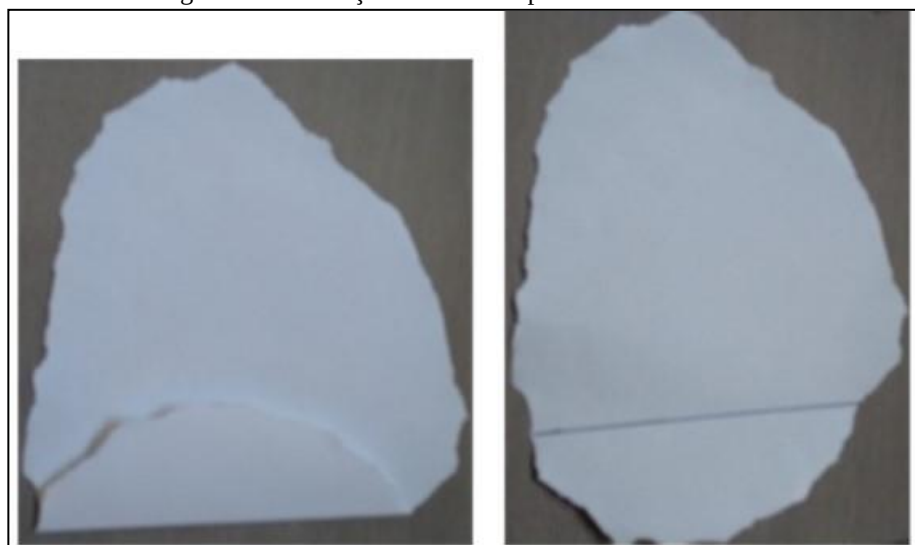
Esta atividade se trata de uma retomada de elementos geométricos possivelmente estudados anteriormente. Apesar de realizada por cada estudante, sua abordagem foi de maneira coletiva com o pesquisador fazendo a leitura e levantando questionamentos. Os materiais disponibilizados foram: pedaços de papel branco para realizarem as dobraduras, régua não graduada para apoiar os traçados e lápis de cor para traçarem as retas em cores diferentes. A régua não graduada também possibilita verificar os comprimentos dos lados sem recorrer necessariamente ao aspecto numérico. Nosso interesse foi relembrar o que são retas perpendiculares, paralelas, como identificar lados opostos e de mesmo comprimento, e o que são e como podemos representar ângulos retos em dobraduras. Discutimos sobre esses elementos no momento em que estavam realizando a atividade, promovendo um debate coletivo.

Esperávamos que não apresentariam dificuldades em identificar lados opostos e de mesmo comprimento no retângulo, mas que poderiam encontrar dificuldades na classificação das retas traçadas, provavelmente, por não lembrar ou não ter estudado esse conteúdo durante a pandemia. Como as retas traçadas pertencem ao mesmo plano, elas podem ser classificadas em paralelas (não possuem ponto em comum³⁹), concorrentes (possuem um único ponto em comum) ou perpendiculares (retas concorrentes que formam quatro ângulos cuja abertura de cada um deles é 90° no ponto de encontro entre elas). Esta última opção poderia ser a mais obtida por eles devido à maneira de realizar as dobras como uma “cruz”, entretanto, sua denominação talvez não seja tão clara para todos. A construção do retângulo por meio de dobraduras também não é tão simples, mas poderiam desenvolver a atividade a partir de traçados de retas perpendiculares e paralelas, e obtenção de ângulos retos com dobraduras como podemos observar no passo a passo a seguir:

1) fazer uma dobra e traçar em azul;

³⁹ As retas paralelas podem ainda ter todos os pontos em comum, ou seja, serem coincidentes, entretanto, como pedimos para fazerem duas dobras, acreditamos que os estudantes não iriam fazer uma dobra sobre ela mesma e traçar a mesma reta em duas cores. Dessa maneira, a possibilidade esperada para as paralelas é que sejam distintas.

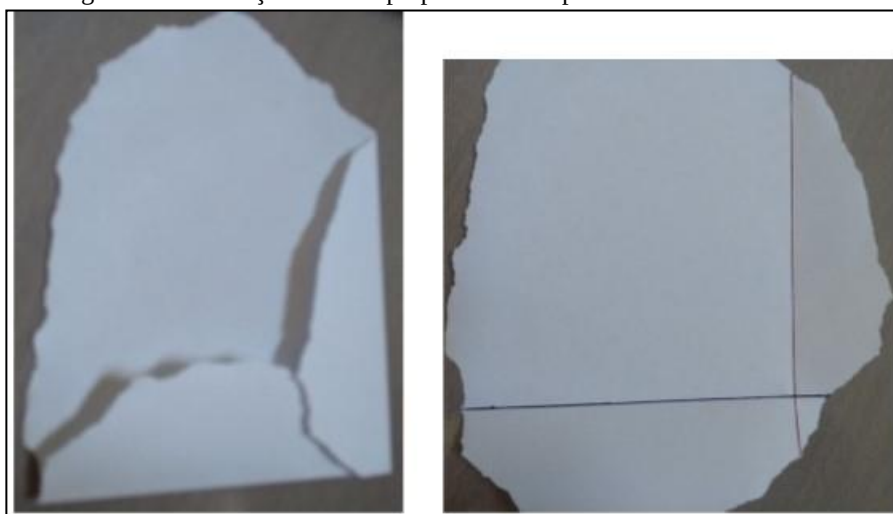
Figura 69 – Obtenção de uma reta por meio de dobraduras



Fonte: acervo da pesquisa

2) dobrar um dos lados do papel apoiando a reta em azul sobre ela mesma, formando um ângulo reto, para obtenção de uma perpendicular a ela e traçar na cor vermelha;

Figura 70 – Obtenção de retas perpendiculares por meio de dobraduras



Fonte: acervo da pesquisa

3) para encontrar uma paralela à reta em vermelho, basta o dobrar o outro lado do papel apoiando a reta em azul sobre ela mesma, formando outro ângulo reto;

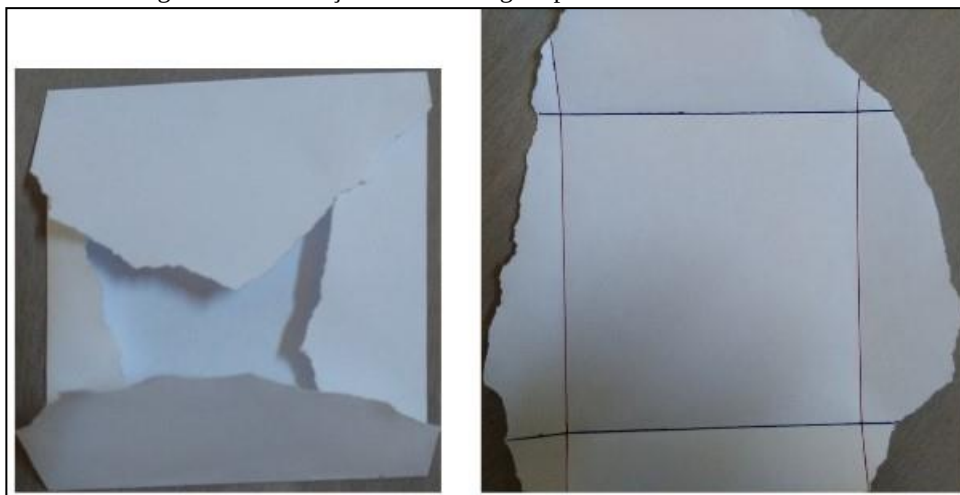
Figura 71 – Obtenção de retas paralelas por meio de dobraduras



Fonte: acervo da pesquisa

4) por fim, para obter o retângulo basta dobrar a parte de cima do pedaço de papel apoiando as retas em vermelho sobre elas mesmas, obtendo uma reta paralela à reta em azul e perpendicular às duas em vermelho.

Figura 72 – Obtenção de um retângulo por meio de dobraduras



Fonte: acervo da pesquisa

Cabe ressaltar que as imagens anteriores são apenas exemplos, pois sabemos que podem não seguir totalmente esses passos e nem obter exatamente um retângulo igual ao representado acima. As variáveis didáticas e seus valores são apresentados no quadro a seguir:

Quadro 12 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 3 da primeira sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figuras	Retângulo
Desenho da figura no enunciado	Ausente
Desenho da figura solicitado	Sim
Tipo de papel	Branco
Natureza das soluções	Textual e gráfica

Fonte: acervo da pesquisa

As duas atividades que discutiremos na terceira sessão faziam parte deste primeiro encontro, porém o intervalo de tempo disponível na primeira sessão e a ausência de alguns estudantes na segunda, contribuíram para que houvesse esse redirecionamento. No entanto, quem desejar replicar essa sequência didática, pode mantê-las na primeira sessão e o total de 12 encontros e não 13 como efetivamente fizemos.

Segunda sessão: *Explorando quadriláteros*

Esta sessão permitiu conhecer os quadriláteros que foram priorizados pelos estudantes em seus desenhos e os critérios utilizados por eles para agrupá-los, trabalhando, ainda que de maneira indireta, as classes de situações de construção, identificação, classificação e inclusão, pertencentes ao campo da Geometria. A verificação de congruências de lados e de ângulos com uso de estratégias não numéricas também poderia ser observada. Ela é composta por duas atividades e a primeira delas é apresentada a seguir:

Atividade 1: Desenhe oito figuras diferentes, sendo quatro no papel branco e quatro no papel pontilhado, com a condição de que cada uma delas tenha quatro lados.

Esta situação se enquadra como de construção, conforme Pereira da Costa (2019). Porém, como já dito, entendemos que a tarefa cognitiva do sujeito é fazer o desenho da figura (representá-la graficamente), sem necessariamente utilizar *softwares* ou régua e compasso, estes últimos exigidos na BNCC em situações de construção. Ela foi realizada individualmente e possibilitou verificar se os estudantes conseguiriam desenhar oito quadriláteros distintos em tipos de papel branco e pontilhado que foram fornecidos juntamente com réguas não graduadas. Por meio dela, poderíamos observar a que atribuíram o universo dos quadriláteros, se considerariam a posição em que as figuras estavam representadas como elemento que as distinguem, conforme observamos nas pesquisas de Diniz (2013) e Pereira da Costa (2016) em que retângulos em representações diferentes foram tratados como figuras distintas, foco apenas no aspecto visual (Fujita, 2012; Tavares, 2014 etc.) ou em propriedades, entre outras possibilidades. O quadrado e o retângulo não quadrado poderiam ser as duas figuras mais desenhadas pelo fato de, possivelmente, terem lidado com elas há mais tempo na vida escolar e fora da escola, porém não descartamos outros paralelogramos ou trapézios, quadriláteros não notáveis e, até mesmo, figuras espaciais como observado no estudo de Fujita (2012) ao associarem o losango não quadrado a um diamante.

Ao final dessa atividade, pretendíamos indagar se eles saberiam como se chama um polígono com quatro lados e promover uma discussão sobre os quadriláteros, mas não foi possível naquele momento devido ao intervalo de tempo disponível para realização da atividade 2. No quadro seguinte, elencamos as variáveis didáticas e os seus respectivos valores:

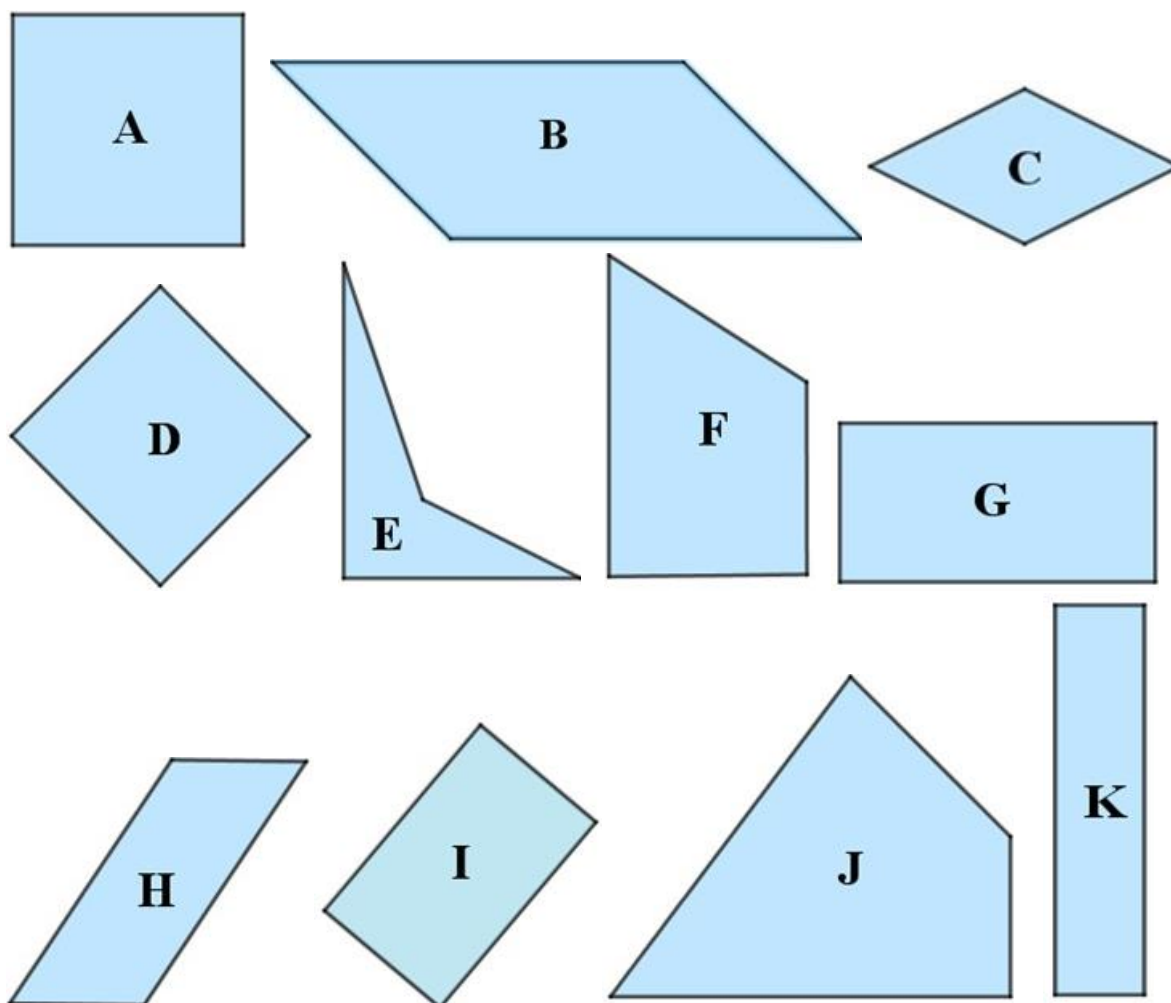
Quadro 13 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da segunda sessão

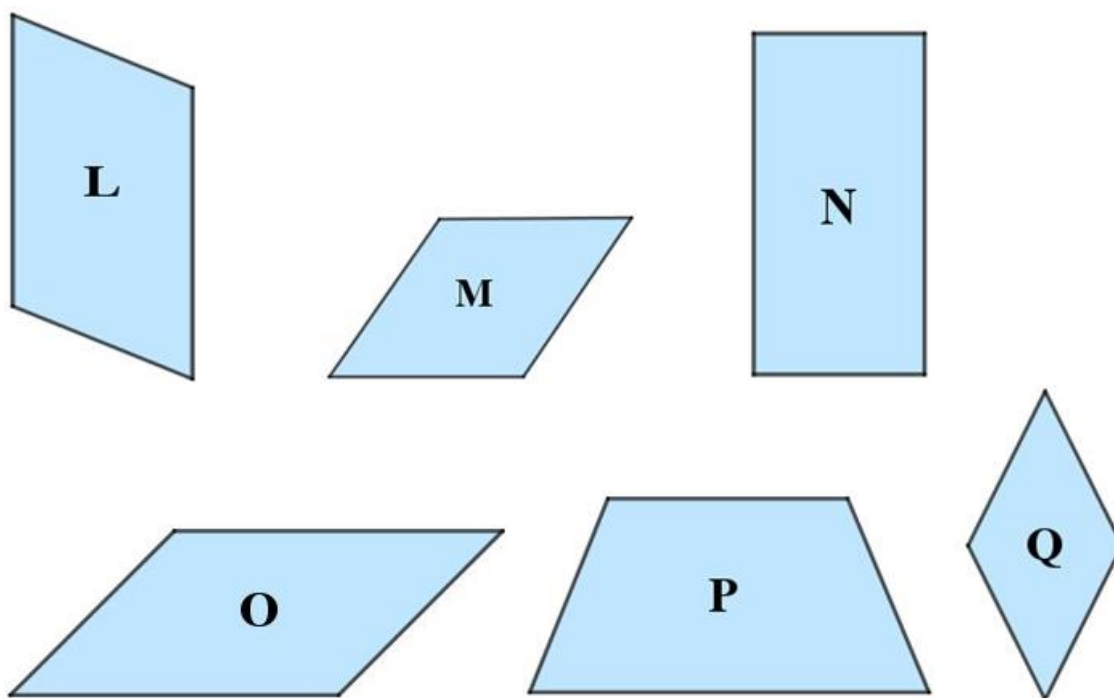
Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figuras	Quadriláteros
Desenho da figura no enunciado	Ausente
Desenho da figura solicitado	Sim
Tipo de papel	Branco e pontilhado
Natureza das soluções	Gráfica

Fonte: acervo da pesquisa

Vamos à próxima atividade desta segunda sessão:

Atividade 2: Você está recebendo as figuras representadas a seguir e algumas folhas em branco. Cole-as nas folhas em branco, agrupando-as a partir de características que você considera comuns entre elas. Coloque o título do agrupamento considerado em cada folha.





Esta atividade se aproxima das situações de identificação e de classificação em que deveriam mobilizar conhecimentos sobre as propriedades das figuras de forma operatória, entretanto, não é solicitada a atribuição de seus nomes. Seu objetivo foi saber quais critérios seriam considerados pelos estudantes para agruparem os quadriláteros representados acima, os quais estão em diferentes posições e contendo todos os paralelogramos, rompendo a prioridade pelos quadrados e retângulos não quadrados em desenhos prototípicos, como vimos nas análises prévias. Eles foram confeccionados sem marcações que indicassem a congruência dos comprimentos dos lados ou das aberturas dos ângulos internos, mas poderiam tentar obter essas grandezas utilizando procedimentos diversos. Inicialmente, foi realizada de maneira individual e cada estudante recebeu apenas uma cópia de cada figura, porém deixamos outras cópias de cada figura disponíveis sobre o birô para pegarem, caso precisassem. Além dessas, folhas brancas também estavam disponíveis no mesmo local. Depois, se reuniram em grupos⁴⁰ de três ou quatro participantes cada, receberam mais cópias das mesmas figuras e deveriam chegar a um consenso, refazendo as colagens a partir de critérios comuns discutidos no grupo. Fornecemos régua não graduada para verificarem os

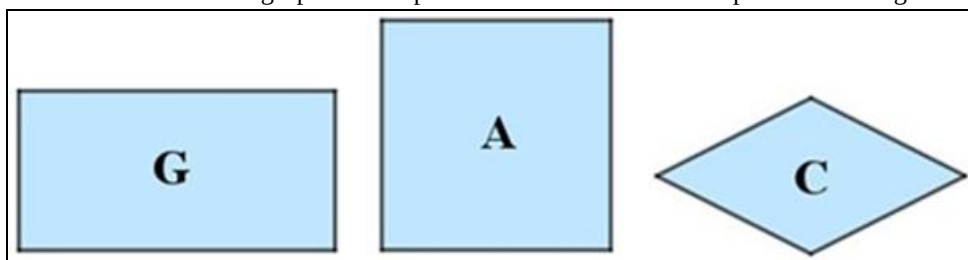
⁴⁰ Nas atividades que exigiam a formação de duplas, trios ou grupos, eles foram formados espontaneamente pelos participantes sem a intervenção do pesquisador.

comprimentos dos lados, papel transparente para observarem os ângulos congruentes, folhas em branco e fita adesiva⁴¹ para realizarem as colagens.

Em relação às possibilidades de critérios para agrupamentos que poderiam ser utilizados pelos participantes, citamos propriedades como: “as que possuem lados de mesmo comprimento” para agrupar os losangos que também incluem os quadrados; “as que possuem quatro ângulos retos” para agrupar os retângulos, incluindo também os quadrados; “as que possuem ângulos opostos congruentes” ou “lados opostos iguais”, própria dos paralelogramos, ou mesmo as que possuem “quatro lados”, comum a todas elas, entre outras. No entanto, poderiam aparecer outros critérios como verificamos em Fujita (2012): “as que são inclinadas” para os paralelogramos não retângulos e não losangos e os losangos não quadrados e outra apoiada nos ângulos retos para os quadrados e retângulos não quadrados. Paralelogramos não retângulo e não losangos poderiam ser agrupados como retângulos, por considerá-los como um retângulo deformado, como em Baltar (1996) e Douady e Perrin-Glorian (1989) ou mesmo como um gênero de retângulo inclinado, conforme observado no estudo de Tavares (2014). Também vimos nas análises prévias que o losango não quadrado e retângulo não quadrado foram considerados como quadrado nas pesquisas de Menegotto e Lara (2011) e Tavares (2014), respectivamente. Assim, a possibilidade de agruparem essas figuras como quadrados não foi descartada.

Há ainda a possibilidade de escolha e explicitação de determinado critério pelos estudantes, mas que não conseguiriam agrupar a partir dele, ou mesmo agrupar fazendo uma combinação de critérios que não são válidos para todas as figuras do agrupamento como, por exemplo, colar um retângulo não quadrado (figura G), um quadrado (figura A) e um losango não quadrado (figura C) e dizerem que colaram os três juntos porque os dois primeiros possuem ângulos retos e o do meio e o último têm os lados de mesmo comprimento, como apresentado a seguir:

Figura 73 – Possibilidade de agrupamento a partir de critérios não válidos para todas as figuras



Fonte: acervo da pesquisa

⁴¹ Optamos pela fita adesiva ao invés da cola branca porque se precisarem fazer alguma mudança após ter colado, a fita adesiva permite remover mais facilmente a figura colada no papel do que a cola branca.

A formação de equipes é justamente para ampliar as possibilidades de agrupamentos possíveis, pois um colega pode ter pensado em algo que o outro não pensou, e para promover um debate entre eles. Cabe ressaltar que guardamos as produções individuais e em grupo para maiores elementos de análise. As letras no interior de cada figura é justamente para que possam observá-las em diferentes posições e verificarmos se priorizariam durante as colagens a letra, para que fique na posição correta de leitura, ou a posição da figura independente da letra em seu interior, uma vez que ela pode ser tão importante para algum aluno de modo que ele despreze a posição correta da letra. Por fim, poderíamos perguntar como fizeram para selecionar as características e agrupar as figuras, para verificar os comprimentos dos lados e as aberturas dos ângulos internos etc. As variáveis didáticas e seus valores estão no quadro a seguir:

Quadro 14 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da segunda sessão

Variáveis	Valores	Figuras
Tipos de figura	Quadrado	A, D
	Retângulo não quadrado	G, I, K, N
	Losango não quadrado	C, M, Q
	Paralelogramo não retângulo e não losango	B, H, L, O
	Trapézio	F, P
	Trapezoide	J
	Quadrilátero não convexo	E
Desenho da figura ⁴²	Prototípico	A, C, G, O
	Se aproxima do prototípico	B, N, Q
	Não prototípico	D, H, I, K, L, M
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho da figura solicitado	Não	
Natureza das soluções	Textual e Gráfica	
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	H, O
	Esquerda	B
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	B, O
	Vertical	L
	Oblíqua	H

Fonte: acervo da pesquisa

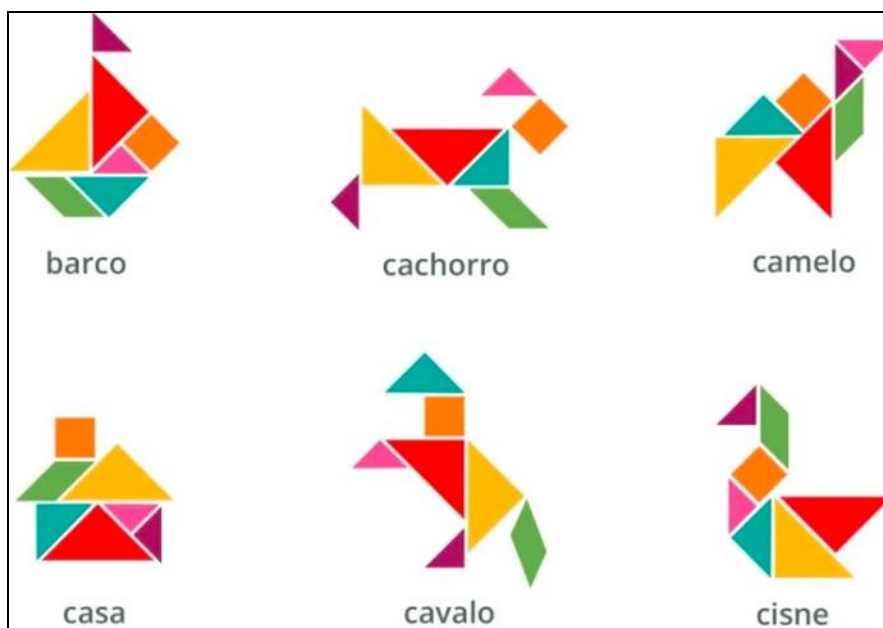
Passemos à próxima sessão que contém as duas atividades que seriam realizadas na primeira sessão.

Terceira sessão: *Continuidade das atividades da primeira sessão*

⁴² Indicamos apenas os paralelogramos porque não estudamos suficientemente as outras figuras para caracterizar seus desenhos em prototípicos ou não prototípicos. Faremos o mesmo nas demais atividades em que aparecerem outras figuras que não pertencem à família dos paralelogramos.

Atividade 4 da primeira sessão: Você conhece ou já utilizou o Tangram em algum momento?

As figuras⁴³ a seguir foram construídas a partir de suas peças:



Utilizando as peças do Tangram que você recebeu, construa as figuras acima.

Nesta atividade, continuamos trabalhando a familiarização com os materiais que foram utilizados ao longo dos encontros, dessa vez, cada estudante recebeu um Tangram construído em cartolina Guache com peças coloridas para montagem das figuras acima e, caso quisessem ir além, poderiam fazer outras, como peixes, gatos, aves, pessoas ou mesmo polígonos diversos. Ela foi realizada individualmente e não apresentaram dificuldades para resolvê-la, pois as figuras acima são de fácil construção.

Ainda sobre o Tangram, elaboramos uma atividade complementar à anterior, pois se trata de uma continuidade dela, que poderia ser iniciada em sala ainda na primeira sessão ou levada para tentarem fazer em casa. Dessa maneira, cada estudante recebeu um Tangram em papel ofício para recortar suas peças e usá-las nessa atividade em casa. Ela foi concluída em grupos na terceira sessão.

Atividade complementar da primeira sessão: Utilizando o Tangram, responda as questões a seguir:

a) Uma das peças do Tangram representa um quadrado. Usando duas de suas peças, tente montar outros quadrados. Desenhe a(s) solução(ões) que você obteve.

⁴³ Fonte: <https://matematicasimplificada.com/tangram-o-lendario-jogo-chines-das-pecas-da-sabedoria/>

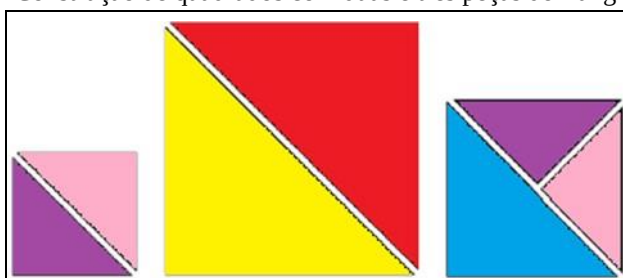
b) E com três peças, você consegue construir quadrados? Desenhe a(s) solução(ões) que você obteve.

c) E com quatro peças, você acha que é possível construir quadrados? Desenhe a(s) solução(ões) que você obteve.

d) E com cinco, depois seis e, por fim, sete peças, você consegue construir quadrados? Desenhe a(s) solução(ões) que você obteve.

A seguir, apresentamos algumas possibilidades dessas construções de quadrados com duas e três peças, que não foram fontes de dificuldade para os estudantes:

Figura 74 – Construção de quadrados com duas e três peças do Tangram

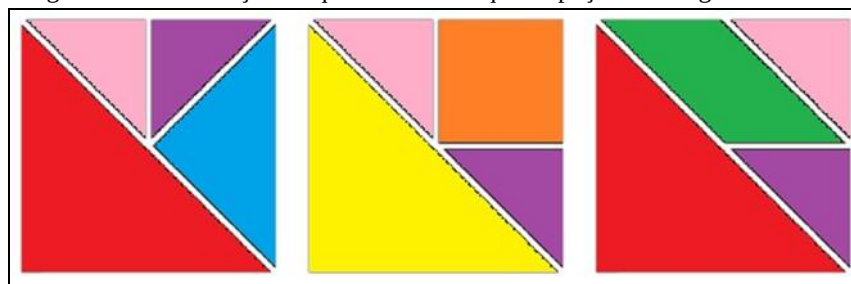


Fonte: Acervo da pesquisa

Nas construções com duas peças, utilizamos os dois triângulos pequenos no primeiro quadrado e os dois triângulos grandes no segundo. Já com três peças, foram utilizados o par de triângulos pequenos e o triângulo médio. É possível perceber neste último caso a relação existente entre essas peças: os dois triângulos pequenos são equivalentes ao triângulo médio.

As possibilidades de construções de quadrados utilizando quatro peças são apresentadas a seguir e poderiam ser mais complexas para os participantes que os casos anteriores, embora com maior potencial para discutir relações de equivalência entre as peças:

Figura 75 – Construção de quadrados com quatro peças do Tangram

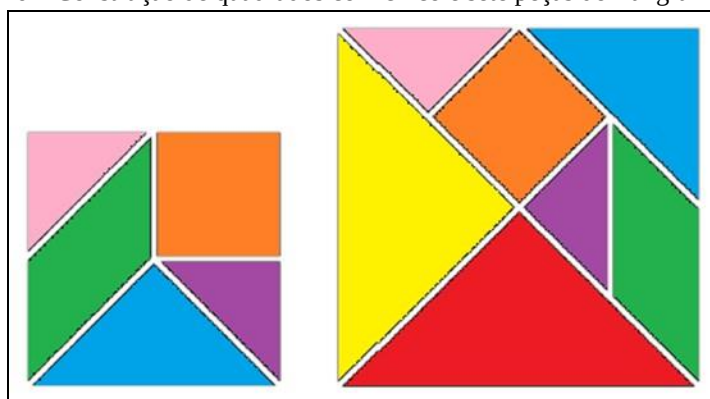


Fonte: acervo da pesquisa

Como podemos observar, em todos os casos utilizamos um dos triângulos grandes e os dois pequenos. As mudanças nos desenhos ocorreram ao substituírmos o triângulo médio pelo quadrado ou pelo paralelogramo não retângulo e não losango, uma vez que esses últimos são equivalentes. A igualdade das áreas dessas três peças foi discutida, embora saibamos da importância atribuída à forma pelos estudantes, como vimos em Douady e Perrin-Glorian (1989) ou mesmo ao aspecto visual, como em Diniz (2013), Fujita (2012) e Tavares (2014). Assim, por meio dessa situação de construção, campo da Geometria, é possível explorar relações de equivalência (ter mesma área), campo das Grandezas e Medidas, sem falar explicitamente do conceito de área naquele momento.

A seguir, apresentamos as construções com cinco e sete peças que, assim como no caso anterior, poderiam não encontrar cada uma delas de imediato, sendo preciso realizar algumas tentativas:

Figura 76 – Construção de quadrados com cinco e sete peças do Tangram



Fonte: acervo da pesquisa

No primeiro caso, utilizamos todas as peças com exceção do par de triângulos grandes. Já no segundo, todas as sete peças foram utilizadas. A impossibilidade da construção de quadrados utilizando apenas seis peças do Tangram⁴⁴ poderia gerar dificuldades entre os

⁴⁴ As possibilidades de construções apresentadas anteriormente assim como uma discussão mais ampla a respeito dessa impossibilidade e algumas demonstrações podem ser acessadas em: https://www.researchgate.net/publication/277620171_Tangram_por_que_nao_se_pode_construir_um_quadrado_utilizando_exatamente_6_de_suas_pecas

estudantes, mas que deveriam continuar tentando ao longo da experimentação, pois a manipulação das peças durante as tentativas contribuiria para ampliar a familiarização com o Tangram. Ao perceberem a impossibilidade com seis peças, poderíamos sugerir que tentassem formular explicações a esse respeito.

As variáveis didáticas e seus valores são apresentadas no quadro a seguir:

Quadro 15 – Variáveis didáticas e seus valores nas atividades 4 e sua complementar da primeira sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figuras	Triângulos retângulos isósceles, quadrado, paralelogramo não retângulo e não losango
Desenho das figuras no enunciado	Ausente
Desenho solicitado	Sim
Natureza das soluções	Gráfica

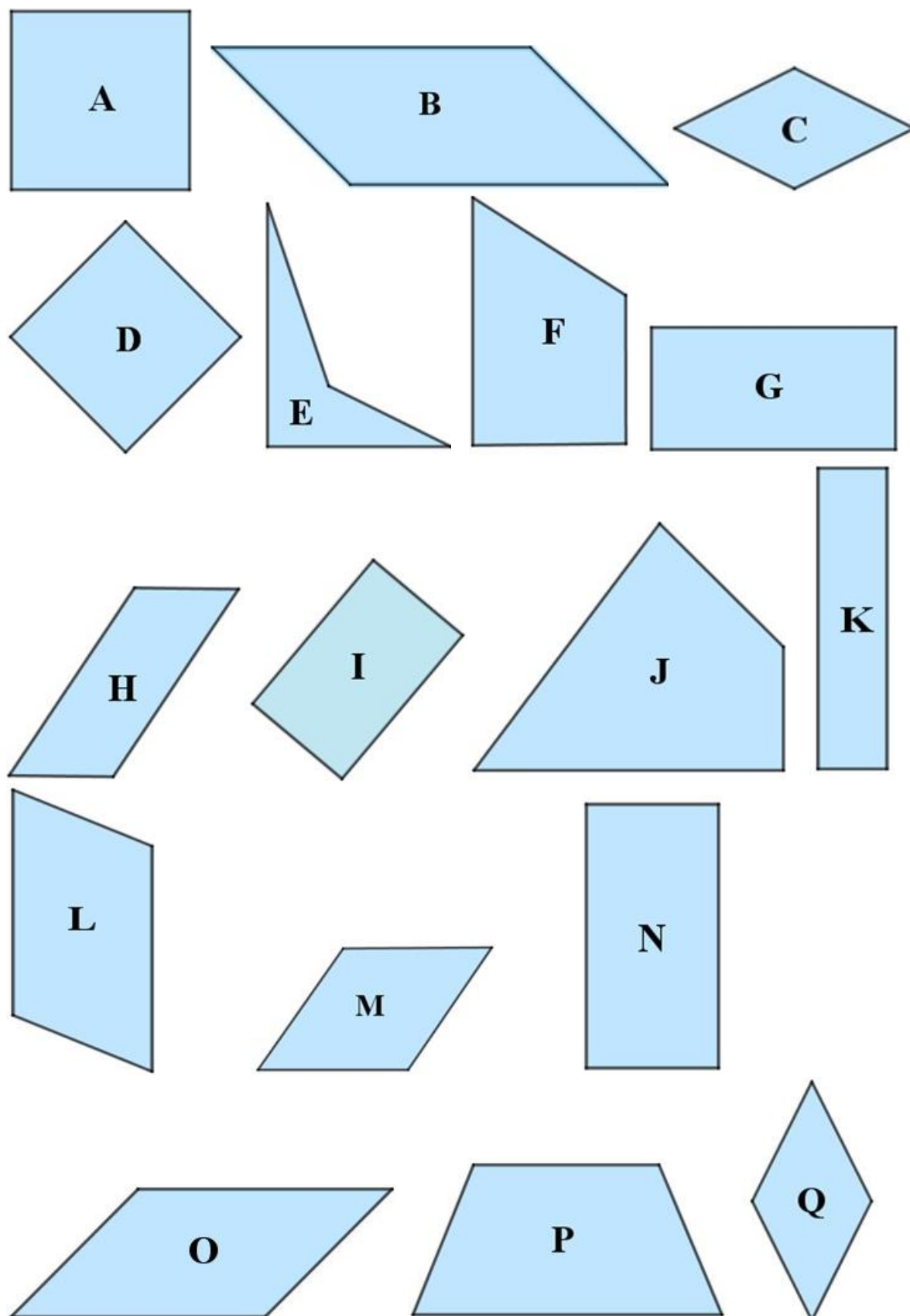
Fonte: acervo da pesquisa

A partir das sessões seguintes exploramos classes de situações específicas em cada atividade, como identificação, classificação, inclusão, construção, comparação, medição, produção ou conversão de unidades, o que não delimitamos na primeira nem na terceira por se tratar de uma retomada e familiarização com os materiais. Ressaltamos que ao explorar determinada classe de situação, não descartamos as demais, pois elas podem se apresentar como uma tarefa elementar da situação mais complexa devido às imbricações entre os campos estudados e a dificuldade em dissociá-los. A esse respeito, Teles (2007) apontou que a dificuldade em caracterizar o que é próprio de cada um dos campos conceituais que explorou (grandezas, geométrico, numérico, algébrico e funcional), a fez lançar olhar sobre as imbricações e não sobre as separações entre eles.

Quarta sessão: *Explorando paralelogramos*

Nesta sessão, iniciamos retomando brevemente alguns aspectos trabalhados no segundo encontro por meio de recortes dos critérios utilizados por alguns grupos, sem identificá-los, para debate. Em seguida, continuamos agrupando as figuras, mas dessa vez com critérios dados, para confrontarem com os que foram estabelecidos por eles na segunda sessão. Poderíamos observar ainda quais nomes eles atribuiriam a essas figuras e promover, ao final, a compreensão das inclusões entre os paralelogramos a partir da percepção de propriedades comuns entre eles, trabalhando assim as situações de identificação, classificação e inclusão do campo da Geometria. Ela é composta por duas atividades e a primeira delas é apresentada a seguir:

Atividade 1: Assim como na atividade anterior, você está recebendo novamente as figuras representadas a seguir:



Além das figuras, você está recebendo seis folhas em papel branco, cada uma contendo uma propriedade. Em duplas, cole as figuras no papel branco que vocês acham que possui cada uma das propriedades.

- a) As figuras que possuem os quatro ângulos retos (90°);
- b) As figuras que possuem os quatro lados com mesmo comprimento;
- c) As figuras que possuem os ângulos internos opostos iguais⁴⁵;
- d) As figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento;
- e) As figuras que possuem os dois pares de lados opostos paralelos entre si;
- f) As figuras que possuem os lados e ângulos internos opostos iguais e os dois pares de lados opostos paralelos entre si.

Esta atividade apesar de contemplar as mesmas figuras da segunda sessão, se diferencia dela porque dessa vez os critérios de agrupamentos foram dados, fazendo-os confrontar com seus próprios critérios e pensar sobre o que poderiam ter feito naquele momento. Nela, trouxemos de maneira operacional as inclusões entre os paralelogramos ao perceberem que existem figuras que estão em mais de uma classe por possuírem propriedades comuns. Eles receberam várias cópias de uma mesma figura e outras ficaram disponíveis sobre o birô (mesa do professor), para poder colá-las, repetindo-as sempre que necessário. Com isso, temos elementos da identificação, classificação e inclusão. Como dito no enunciado, ela foi desenvolvida em duplas. Dispuseram de régua não graduada para observar congruência de comprimentos de lados, papel transparente para ser utilizado na verificação dos ângulos congruentes, fita adesiva e tesouras sem ponta.

Em relação às respostas corretas esperadas: na letra (a), deveriam colar na mesma folha as figuras (A, D, G, I, K e N), pois são as que possuem os quatro ângulos retos; na letra (b), as figuras (A, C, D, M e Q) são as que têm os quatro lados de mesmo comprimento e, com isso, já é possível notar que algumas delas são comuns às do agrupamento anterior; nas demais letras, o intuito foi perceber que as propriedades descritas são específicas de uma família de figuras, os paralelogramos (A, B, C, D, G, H, I, K, L, M, N, O, Q), sendo a letra (f) uma junção das letras (c), (d) e (e). Esta última poderia gerar mais dificuldades por possuir um conjunto de propriedades a ser verificado, embora bastasse apenas juntar os paralelogramos agrupados em (c), (d) e (e), sem repeti-los. As figuras (E, F, J, P,) não

⁴⁵ Optamos pela utilização deste termo naquele momento da sequência, pois a expressão “ângulos internos opostos congruentes” foi inserida em um momento posterior, quando os participantes já estavam mais familiarizados com os termos geométricos utilizados.

pertencem a nenhum dos agrupamentos por não serem paralelogramos. Dessa maneira, caso perguntassem o que fazer com essas figuras, iríamos esclarecer que todas são quadriláteros e, entre esses, estávamos estudando apenas aqueles que foram agrupados, mais especificamente, nosso foco de estudo foi sobre os paralelogramos.

Entre as possibilidades de respostas incorretas ou incompletas, poderiam agrupar apenas os quadrados e retângulos não quadrados, ambos em desenhos prototípicos ou que mais se aproximam do prototípico, como as figuras que possuem os quatro ângulos retos. A confusão entre ângulos internos opostos e adjacentes poderia levá-los a indicar que o trapézio isósceles (J) possui ângulos internos opostos iguais, visto que seus ângulos internos adjacentes desfrutam dessa propriedade. Ainda poderiam manifestar outras dificuldades relativas à compreensão de elementos do campo geométrico como paralelismo, retas perpendiculares, lados e ângulos internos opostos, entre outros, mesmo já tendo sido tratado na primeira sessão. Realizar medição de comprimentos com régua não graduada e transportar aberturas de ângulos com papel transparente também poderia gerar algumas dificuldades para eles. Assim, seriam mostradas no quadro algumas possibilidades de utilização de cada um deles. Essa dificuldade se deve ao fato de que não são materiais de uso comum em sala de aula, pois não observamos nos documentos, planejamentos, apostilas e LD analisados propostas de trabalho ou atividades que sugerissem utilizá-los. Consideramos importante a utilização deles uma vez que para classificar paralelogramos não necessitamos da intervenção do campo numérico, privilegiando o olhar sobre as imbricações entre o campo da Geometria, com as representações gráficas e seus elementos, e o das Grandezas e Medidas por meio das grandezas a elas associadas, como aberturas de ângulos e comprimentos. Por fim, embora sejam descritas propriedades, poderiam se apoiar em elementos visuais da figura para realizar os agrupamentos. No quadro a seguir apresentamos as variáveis didáticas e seus valores:

Quadro 16 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da quarta sessão

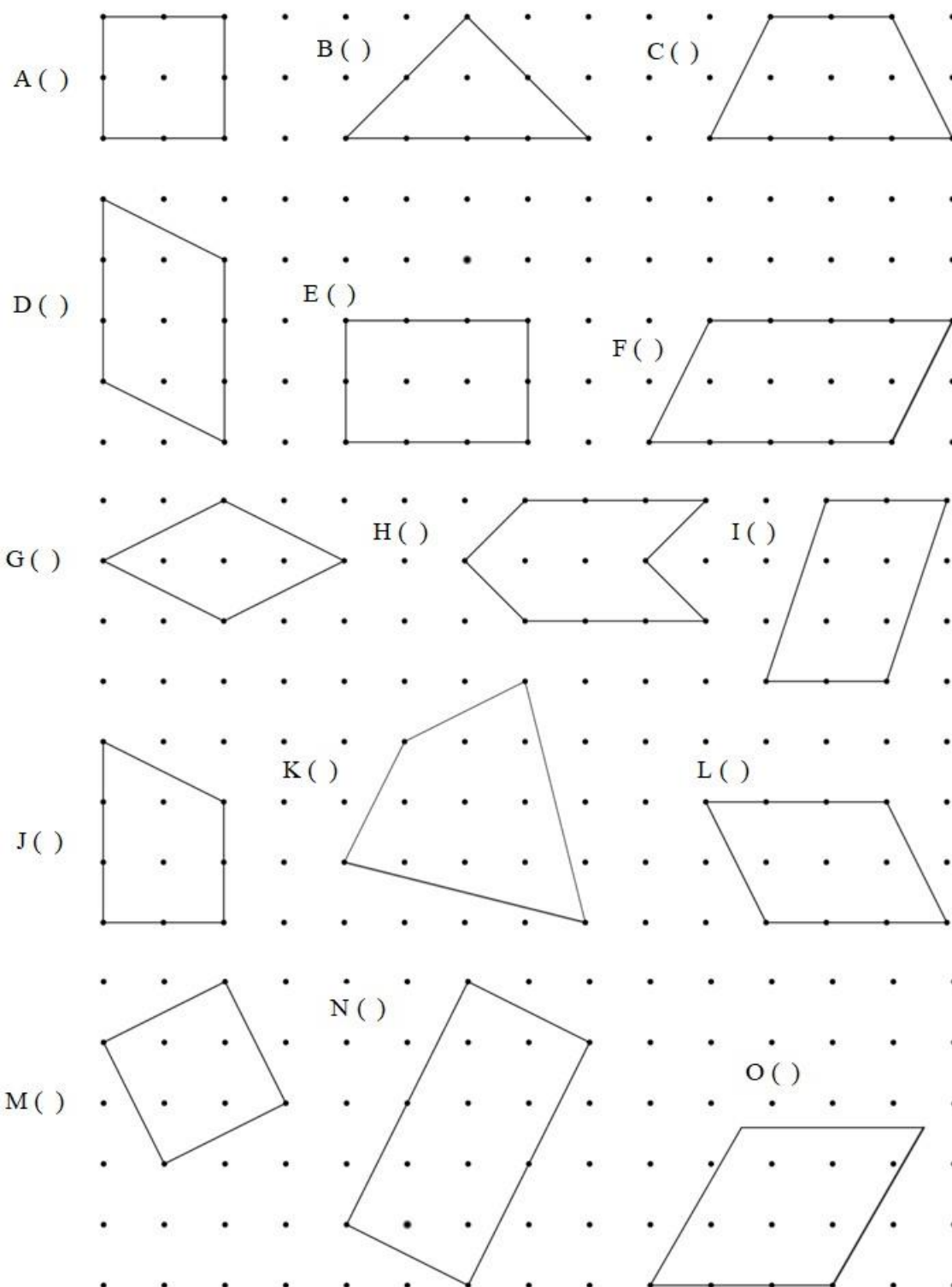
Variáveis	Valores	Figuras
Tipos de figura	Quadrado	A, D
	Retângulo não quadrado	G, I, K, N
	Losango não quadrado	C, M, Q
	Paralelogramo não retângulo e não losango	B, H, L, O
	Trapézio	F, P
	Trapezoide	J
	Quadrilátero não convexo	E
Desenho da figura	Prototípico	A, C, G, O
	Se aproxima do prototípico	B, N, Q
	Não prototípico	D, H, I, K, L, M
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho da figura solicitado	Não	
Natureza das soluções	Gráfica	
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	H, O
	Esquerda	B
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	B, O
	Vertical	L
	Oblíqua	H

Fonte: acervo da pesquisa

Após esse momento, pretendíamos fazer uma discussão coletiva seguida da sistematização, resgatando os nomes das figuras que pertencem aos agrupamentos a partir da nomenclatura oficial, mas não foi possível. Mesmo assim, esperamos que tenham percebido algumas relações de inclusão entre os paralelogramos ao realizarem os agrupamentos verificando propriedades de maneira operatória e, a partir disso, reinvestam esse conhecimento na atividade 2, a seguir.

Atividade⁴⁶ 2: Entre as figuras abaixo, assinale o(s) paralelogramo(s).

⁴⁶ Essa atividade foi extraída da nossa dissertação de mestrado (ARAÚJO, 2018) com uma pequena alteração relativa ao acréscimo da sequência de letras (a), (b) e (c) nas classes dos quadrados, retângulos e losangos, respectivamente.



a) Qual(is) das figuras acima é(são) quadrado(s)? _____

b) Qual(is) das figuras acima é(são) retângulo(s)? _____

c) Qual(is) das figuras acima é(são) losango(s)? _____

Temos inicialmente uma situação de identificação ao solicitarmos que assinalem os paralelogramos. Em seguida, de classificação ao pedirmos que indiquem quais figuras pertencem a cada classe. Alguns indícios da inclusão também podem ser trabalhados visto que os quadrados devem estar presentes nos grupos dos retângulos e dos losangos, e todos esses ao assinalarem os paralelogramos. Essa atividade foi realizada individualmente pelos participantes. Pelo fato de as figuras estarem no papel pontilhado, facilitando a visualização de lados e ângulos congruentes, poderiam não precisar de outros materiais. No entanto, como já tinham recebido no *kit* réguas não graduadas e papel transparente para realizarem a atividade anterior, poderiam utilizá-los se achassem necessário.

Na identificação de paralelogramos, a resposta correta esperada seria assinalar as figuras (A, D, E, F, G, I, L, M, N e O). No entanto, ao apresentar dificuldades na compreensão do que seria um paralelogramo, poderiam assinalar: todos os quadriláteros (A, C, D, E, F, G, I, J, K, L, M, N, e O), pois todos os paralelogramos são quadriláteros, mas nem todo quadrilátero é paralelogramo, como é o caso das figuras (C, J e K); só os paralelogramos não retângulos e não losangos (D, F, I e L); apenas o paralelogramo em desenho prototípico (F); figuras que possuem lados dois a dois paralelos (A, D, E, F, G, H, I, L, M, N e O). Nesse caso, a figura (H) também seria marcada, mesmo não sendo paralelogramo; figuras que têm pelo menos um par de lados paralelos (A, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N e O). Obedecendo a este critério, além dos paralelogramos, seriam assinalados os trapézios (C e J) e o hexágono (H), que não são paralelogramos. Na pesquisa de Teles (2007), os participantes esboçaram um trapézio quando solicitados a fazer o esboço de um paralelogramo. Se tomarmos como referência a definição que adotamos, manifestaram uma troca entre essas figuras, provavelmente apoiados na condição anterior.

Em relação à classificação de quadrados, tínhamos as seguintes possibilidades: a correta, que seria indicar todos eles, ou seja, as figuras (A e M) ou considerar apenas o quadrado em seu desenho prototípico (A). Como observamos nas análises prévias em Menegotto e Lara (2011) e Tavares (2014), alguns participantes consideraram o losango não quadrado como quadrado. Assim, não descartamos tal possibilidade.

Quanto à classificação de retângulos, poderiam indicar: corretamente todos eles (A, E, M e N), apenas os retângulos não quadrados (E e N), como em Menegotto e Lara (2011) e Pereira da Costa (2016), ou somente o que está em desenho prototípico (E).

Por fim, na classificação de losangos, assim como para os paralelogramos, poderiam: apresentar dificuldades relativas à compreensão dessa figura, visto que é um dos paralelogramos menos explorado, como vimos nas análises preliminares; indicar todos (A, G,

M e O), apenas os losangos não quadrados (G e O) ou o que está em desenho prototípico (G). Esperamos que tenham melhor desempenho na classificação de quadrados e retângulos se comparada à de losangos, assim como em nossa dissertação (Araújo, 2018) que mais de 80% dos participantes reconheceram quadrados e retângulos, ambos em diferentes posições. Na classificação de losangos, o índice de acerto foi de apenas 36%. Já na identificação de paralelogramos foi de 45%. No quadro a seguir apresentamos as variáveis didáticas com os respectivos valores que cada uma delas assume nessa atividade:

Quadro 17 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da quarta sessão

Variáveis	Valores	Figuras
Tipos de figura	Quadrados	A, M
	Retângulos não quadrados	E, N
	Losangos não quadrados	G, O
	Paralelogramos não retângulos e não losangos	D, F, I, L
	Triângulo	B
	Trapézios	C, J
	Trapezoide	K
	Hexágono não convexo	H
Desenho da figura	Prototípico	A, E, F, G
	Se aproxima do prototípico	L
	Não prototípico	D, I, M, N, O
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho solicitado	Não	
Tipo de papel	Pontilhado	
Natureza das soluções	Textual	
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	F, I, O
	Esquerda	L
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	F, L
	Vertical	D
	Oblíqua	I

Fonte: acervo da pesquisa

Quinta sessão: *É verdade ou não é?*

Iniciamos esta sessão retomando aspectos estudados em encontros anteriores, aprofundando o estudo dos paralelogramos e suas propriedades, enfatizando também que as relações recíprocas de inclusão não podem ser consideradas. Vejamos a atividade única prevista para esta sessão:

Atividade: Estudantes de uma turma de 9º ano do ensino fundamental da Escola Darcy Ribeiro estavam estudando alguns quadriláteros. Durante as discussões foram feitas algumas

afirmações. Em trios, vocês deverão ler essas afirmações, debater, marcar se concordam ou não com cada uma delas e explicar a opinião do trio com textos e desenhos.

a) Todo quadrado é um retângulo. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

b) Todo retângulo é um quadrado. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

c) Todo quadrado é um losango. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

d) Todo losango é um quadrado. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

e) Todo quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

f) Os retângulos são paralelogramos. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

g) Os losangos são paralelogramos. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

h) Os retângulos e losangos não são paralelogramos. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

Nosso objetivo com esta atividade que envolve a situação de inclusão foi verificar a compreensão dos estudantes acerca das relações inclusivas e qual o posicionamento deles sobre as recíprocas. Como vimos no enunciado, ela deveria ser realizada em trios para que confrontassem suas interpretações pessoais com as de outros colegas, promovendo um debate até chegarem às devidas conclusões. Foram disponibilizadas régua não graduadas para apoiar

a execução dos desenhos. O reinvestimento dos conhecimentos adquiridos ao resolverem as atividades anteriores foi de fundamental importância nesse momento.

Esperávamos que concordassem com as afirmações das letras (a), (c), (e), (f) e (g), e discordassem com o que foi dito nas letras (b), (d) e (h). No entanto, alguns equívocos poderiam surgir ao respondê-las, tais como considerar que todo quadrado é retângulo e a relação recíproca também é verdadeira ou não concordar que todo quadrado é retângulo. Na pesquisa de Fujita (2012), tiveram dificuldade em aceitar que todo quadrado é retângulo por considerarem este último como tendo dois lados mais curtos e dois mais longos. Já no estudo de Tavares (2014, p. 77) falaram que o retângulo é “uma figura geométrica com comprimento e largura diferente”. Em ambos os casos, se apoiaram nos comprimentos dos lados e não nas aberturas dos ângulos. Poderiam afirmar ainda que não existem paralelogramos que não são nem retângulos nem losangos, entre outras. As variáveis didáticas e seus valores estão no quadro seguinte:

Quadro 18 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade única da quinta sessão

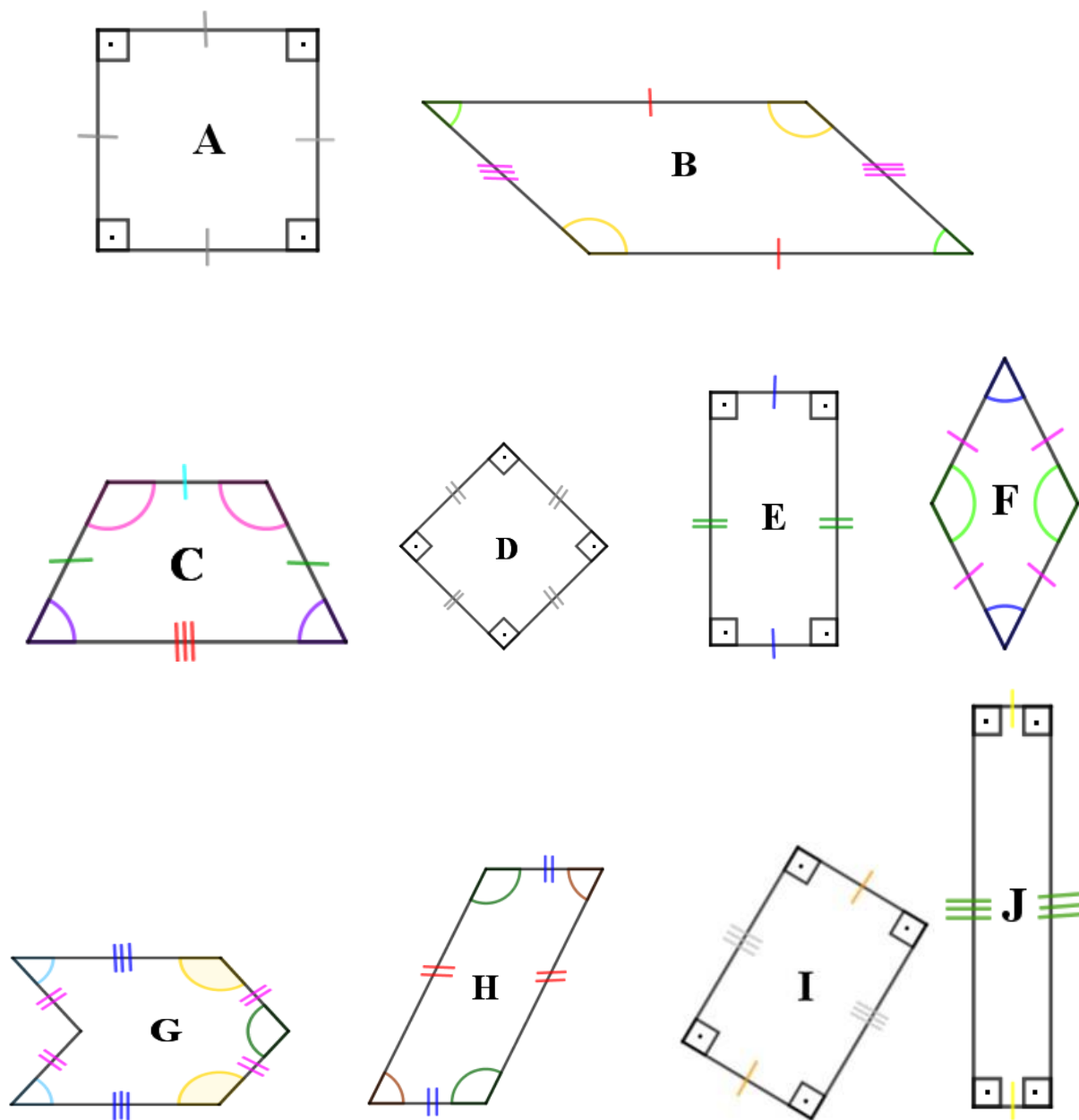
Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figuras	Quadrado, retângulo não quadrado, losango não quadrado, paralelogramo não retângulo e não losango.
Desenho das figuras no enunciado	Ausente
Desenho solicitado	Sim
Natureza das soluções	Textual e gráfica

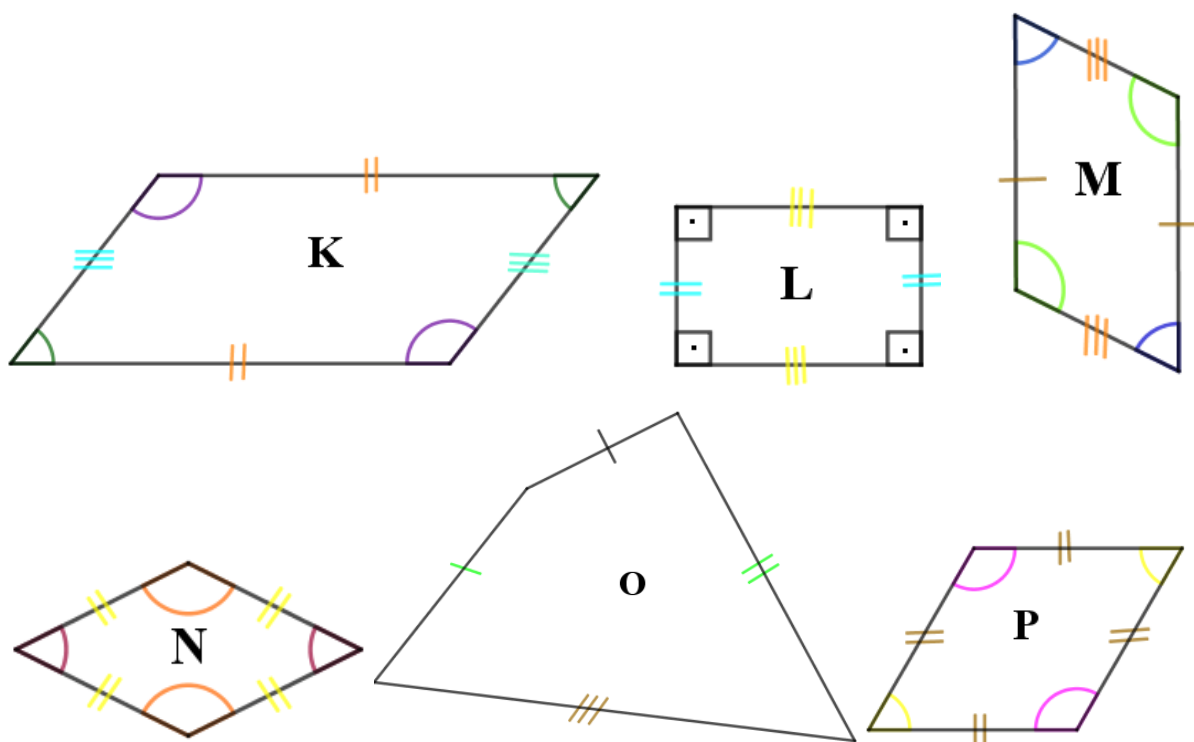
Fonte: acervo da pesquisa

Sexta sessão: *Vamos classificar?*

Nesta sessão, continuamos a exploração do reconhecimento dos paralelogramos e questões inclusivas entre eles. Além disso, outras características além das já trabalhadas anteriormente que apoiaram suas definições foram contempladas. Mais especificamente, abordamos propriedades relacionadas às diagonais como, por exemplo, o fato de se interceptarem em seus pontos médios e, no caso dos losangos, serem perpendiculares; já a dos retângulos serem de mesmo comprimento etc. Iniciamos esse encontro com uma apresentação em *slides* resgatando elementos e propriedades estudadas em sessões anteriores, com o intuito de promover um debate convidando estudantes que concordaram e que discordaram com algumas afirmações da atividade anterior para justificarem suas opiniões, os quais poderiam ir ao quadro e fazer desenhos para ajudar na argumentação. Em seguida, realizamos as duas atividades previstas para essa sessão, cuja primeira é apresentada em seguida:

Atividade 1: Observem as figuras representadas abaixo:





Em duplas, indiquem:

- Os quadrados: _____
- Os retângulos: _____
- Os retângulos que não são quadrados: _____
- Os losangos: _____
- Os losangos que não são quadrados: _____
- Os paralelogramos: _____
- Os paralelogramos que não são nem retângulos e nem losangos: _____
- As figuras que não são paralelogramos: _____

Nesta atividade, temos uma situação de classificação. O nosso interesse foi que os estudantes, em duplas, relembassem as propriedades e nomenclaturas trabalhadas nas sessões anteriores, e refletissem sobre as respostas dadas na atividade da quinta sessão que a antecede. Além disso, necessitava-se que se atentassem às inclusões ou exclusões a partir do que era solicitado como, por exemplo, retângulos (incluindo os quadrados) ou retângulos que não são quadrados (excluindo os quadrados). Esse conhecimento é importante para identificar e representar corretamente os paralelogramos quando solicitado em situações de identificação e construção de paralelogramos ou produção de superfícies.

Optamos pelas figuras acima, diferentes das apresentadas até agora, para discutir sobre algumas convenções utilizadas em Geometria, como indicar os lados de mesmo comprimento por “tracinhos” iguais ou de mesma cor, esta última também apoia a indicação de aberturas de ângulos que são congruentes. Como as próprias figuras representadas já possuem tais indicações, supomos que não precisariam do auxílio de outros materiais para resolverem a atividade. Dessa maneira, as respostas corretas esperadas são:

- a) os quadrados: figuras A e D;
- b) os retângulos: figuras A, D, E, I, J e L;
- c) os retângulos que não são quadrados: figuras E, I, J e L;
- d) os losangos: figuras A, D, F, N e P;
- e) os losangos que não são quadrados: F, N e P;
- f) os paralelogramos: A, B, D, E, F, H, I, J, K, L, M, N e P;
- g) Os paralelogramos que não são nem retângulos e nem losangos: B, H, K e M;
- h) As figuras que não são paralelogramos: C, G e O.

No entanto, sabemos que outras respostas poderiam surgir ao considerar os diferentes desenhos de uma mesma figura como elementos que as distinguem, como já dito anteriormente e foi observado nas pesquisas de Diniz (2013), Pereira da Costa (2016) e Tavares (2014). Também poderia existir a confusão entre trapézio e paralelogramo, como em Teles (2007) ou considerar que o paralelogramo não retângulo e não losango é um “gênero de retângulo”, porém mais inclinado para um lado, como em Tavares (2014). Poderiam, até mesmo, considerar o hexágono como paralelogramo por possuir lados opostos paralelos dois a dois, entre outras possibilidades. Não descartamos a possibilidade de apresentarem mais dificuldades nas letras em que aparecem exclusões devido à complexidade de algumas afirmações como, por exemplo, paralelogramos que não são nem retângulos e nem losangos. No entanto, poderiam desconsiderar as exclusões e repetir as mesmas figuras. Apresentamos a seguir o quadro contendo as variáveis didáticas e seus valores:

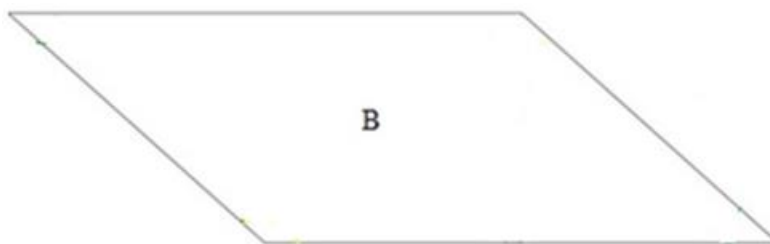
Quadro 19 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da sexta sessão

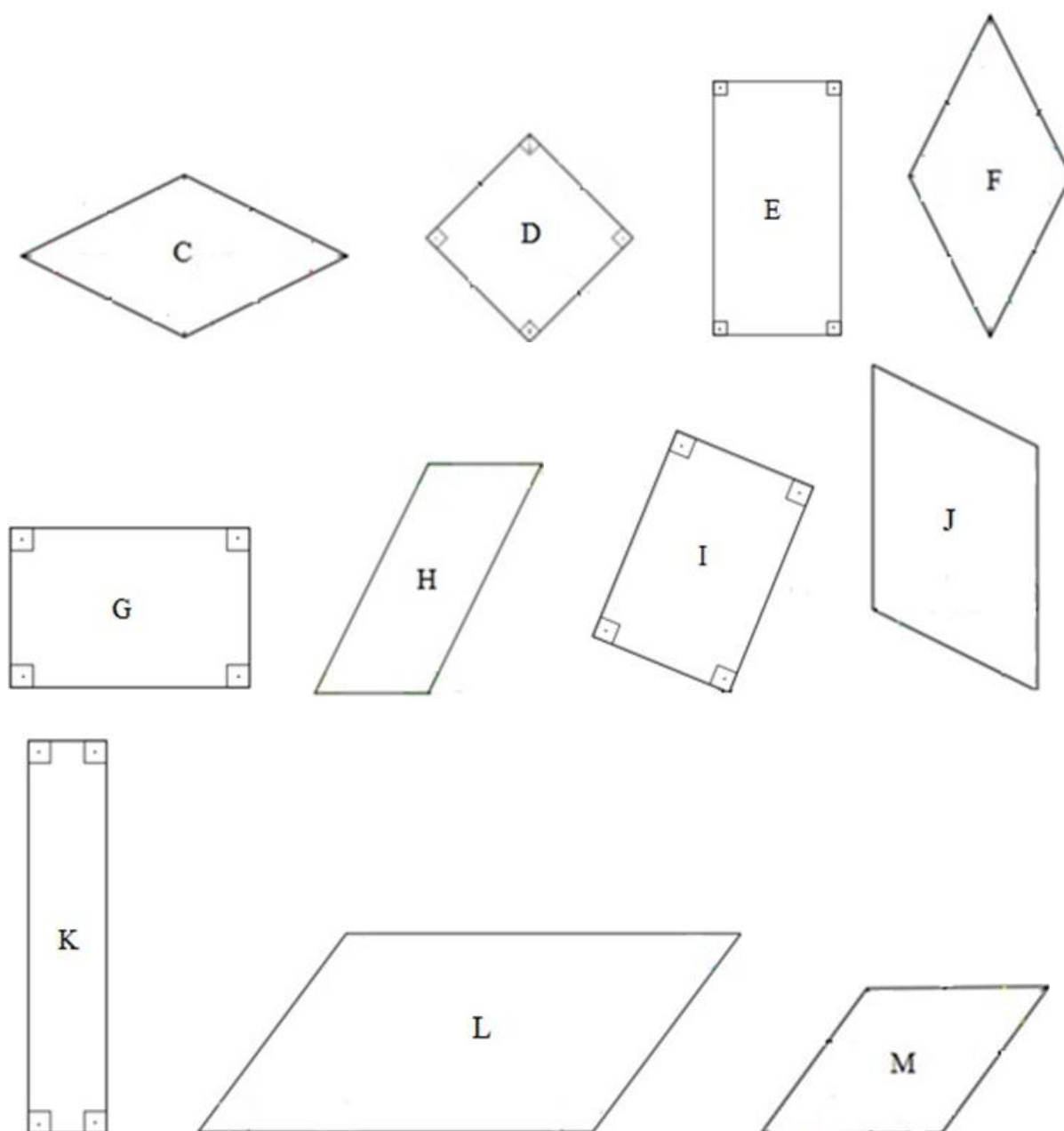
Variáveis	Valores	Figuras
Tipos de figura	Quadrado	A, D
	Retângulo não quadrado	E, I, J, L
	Losango não quadrado	F, N, P
	Paralelogramo não retângulo e não losango	B, H, K, M
	Hexágono não convexo	G
	Trapézio	C
	Trapezoide	O
Desenho da figura	Prototípico	A, K, L, N
	Se aproxima do prototípico	B, E, F
	Não prototípico	D, H, I, J, M, P
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho solicitado	Não	
Natureza das soluções	Textual	
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	H, K
	Esquerda	B
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	B, K
	Vertical	M
	Oblíqua	H

Fonte: acervo da pesquisa

Vejamos a próxima atividade:

Atividade 2: Vocês estão recebendo as figuras representadas a seguir:





Com o auxílio de uma régua não graduada, façam o que se pede:

- a) Representem em cada desenho as diagonais dessas figuras;
 b) Há figura(as) em que as diagonais possuem o mesmo comprimento? Se sim, qual(is)?

c) Há figura(as) em que as diagonais são perpendiculares, ou seja, formam um ângulo de 90° ao se interceptarem? Se sim, qual(is)?

d) Há figura(as) em que as diagonais possuem o mesmo comprimento e são perpendiculares? Se sim, qual(is)?

e) Há figura(as) em que as diagonais se interceptam em seus pontos médios, ou seja, se cortam ao meio? Se sim, qual(is)? _____

Esta atividade contempla elementos da classificação e inclusão, além da construção de elementos do campo da Geometria, como realizado na atividade 1 da primeira sessão. Ela foi realizada em duplas, pois a intenção era que eles confrontassem suas opiniões e chegassem a um consenso para a resposta final. Nela, o trabalho foi sobre as propriedades das diagonais dos paralelogramos, as quais poderiam ser traçadas e medidas com o auxílio de réguas não graduadas. Para verificar se os ângulos são retos, eles poderiam se apoiar nos “cantos” das folhas ou em dobraduras, como estudado na primeira sessão.

Esperávamos que, na letra (b), indicassem os retângulos, incluindo os quadrados, como as figuras que possuem diagonais de mesmo comprimento (figuras A, D, E, G, I e K); na letra (c), os losangos, incluindo os quadrados, são os que possuem as diagonais perpendiculares (figuras A, C, D, F e M); a resposta esperada para a letra (d) era que indicassem os quadrados (figuras A e D) como os que possuem as diagonais de mesmo comprimento e perpendiculares; por fim, na letra (e), indicassem todas elas, pois são paralelogramos e, portanto, as diagonais se interceptam em seus pontos médios. Entretanto, algumas dificuldades poderiam surgir como, por exemplo, relativas à definição de diagonal, como observado na pesquisa de Tavares (2014), no seu traçado e em verificar a igualdade dos seus comprimentos com a régua não graduada. Responder não em algumas das letras também poderia ocorrer, ou seja, afirmar que não há figuras com tais propriedades ou mesmo classificar figuras que não satisfazem a propriedade indicada. As variáveis didáticas e seus valores são descritas no quadro a seguir:

Quadro 20 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da sexta sessão

<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>	<u>Figuras</u>
Tipos de figura	Quadrado	A, D
	Retângulo não quadrado	E, G, I, K
	Losango não quadrado	C, F, M
	Paralelogramo não retângulo e não losango	B, H, J, L
Desenho da figura	Prototípico	A, C, G, L
	Se aproxima do prototípico	B, E, F
	Não prototípico	D, H, I, K, J, M
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho solicitado	Não	
Natureza das soluções	Textual e gráfica	
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	H, L
	Esquerda	B
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	B, L
	Vertical	J
	Oblíqua	H

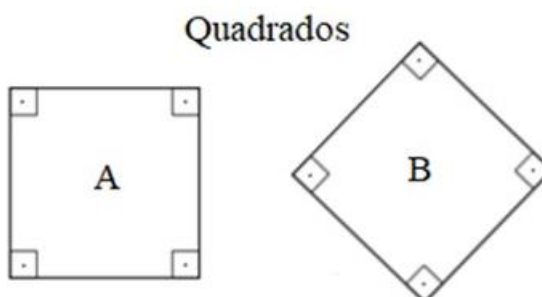
Fonte: acervo da pesquisa

Vamos à próxima sessão.

Sétima sessão: *Deixe-me ver se entendi...*

Nesta sessão, trabalhamos uma atividade que envolve propriedades dos paralelogramos e, por meio dela, realizamos uma sistematização geral, visto que a sessão seguinte já é voltada ao campo das Grandezas e Medidas.

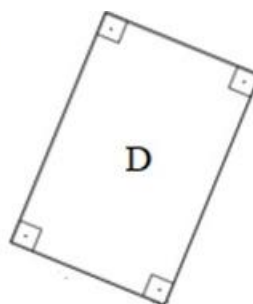
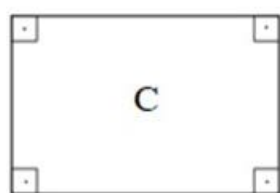
Atividade única: Você está recebendo desenhos de quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos. Abaixo dessas figuras, são descritas algumas propriedades. Marque um X nas propriedades que pertencem a cada par de figuras.



- () Possui quatro ângulos de 90°
- () Possui todos os lados de mesmo comprimento
- () Possui as diagonais com mesmo comprimento
- () Possui as diagonais perpendiculares

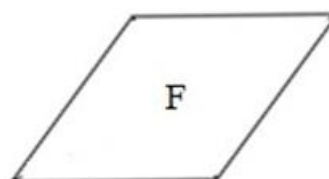
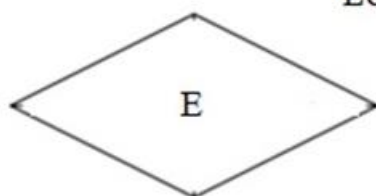
- () Possui os ângulos opostos congruentes
- () Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si
- () Possui lados opostos de mesmo comprimento
- () Suas diagonais cortam-se ao meio

Retângulos

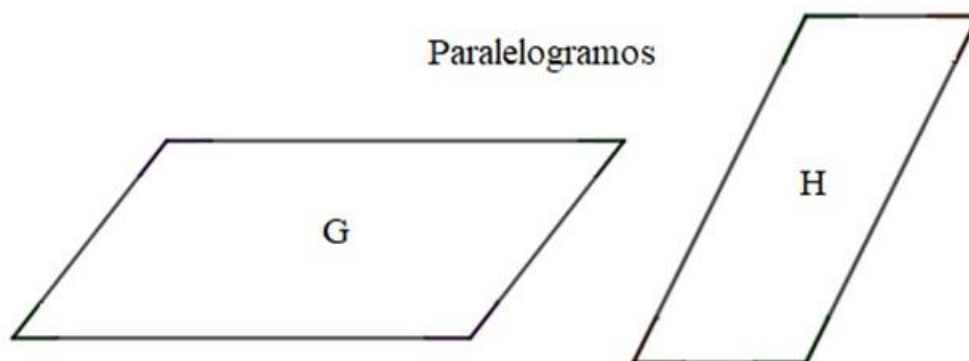


- () Possui quatro ângulos de 90°
- () Possui todos os lados de mesmo comprimento
- () Possui as diagonais com mesmo comprimento
- () Possui as diagonais perpendiculares
- () Possui os ângulos opostos congruentes
- () Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si
- () Possui lados opostos de mesmo comprimento
- () Suas diagonais cortam-se ao meio

Losangos



- () Possui quatro ângulos de 90°
- () Possui todos os lados de mesmo comprimento
- () Possui as diagonais com mesmo comprimento
- () Possui as diagonais perpendiculares
- () Possui os ângulos opostos congruentes
- () Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si
- () Possui lados opostos de mesmo comprimento
- () Suas diagonais cortam-se ao meio



- () Possui quatro ângulos de 90°
- () Possui todos os lados de mesmo comprimento
- () Possui as diagonais com mesmo comprimento
- () Possui as diagonais perpendiculares
- () Possui os ângulos opostos congruentes
- () Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si
- () Possui lados opostos de mesmo comprimento
- () Suas diagonais cortam-se ao meio

Nesta atividade que contempla elementos da classificação e inclusão, o nosso interesse foi sistematizar algumas propriedades dos paralelogramos tanto voltadas aos ângulos e lados quanto às diagonais. Ela foi realizada individualmente, entretanto, discutida em duplas por meio da troca de respostas com os colegas. Após analisarem as respostas um do outro e conversarem, entregamos novas folhas com as figuras e as propriedades para que registrassem o entendimento da dupla e pudéssemos ter acesso às duas produções: individual e coletiva. Régua não graduada e papel transparente foram disponibilizados para verificarem igualdade de comprimentos e congruências de ângulos, respectivamente. Inserimos letras no interior de cada figura tanto para destacar a posição em que ela está representada quanto para que os estudantes pudessem se referir a algumas delas mais facilmente. As discussões foram feitas seguindo a ordem em que as figuras aparecem, ou seja, primeiro sobre os quadrados, depois retângulos não quadrados, losangos não quadrados e, finalmente, paralelogramos não retângulos e não losangos.

Em relação às respostas corretas, esperávamos que assinalassem todas as propriedades para os quadrados; no caso dos retângulos não quadrados, deveriam assinalar que possuem quatro ângulos de 90° , as diagonais de mesmo comprimento, os ângulos opostos congruentes, possuem exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si, lados opostos de mesmo

comprimento e suas diagonais cortam-se ao meio; para os losangos não quadrados, foi esperado que assinalassem, além dessas quatro últimas, que possuem todos os lados de mesmo comprimento e as diagonais perpendiculares; por fim, deveriam assinalar como propriedades dos paralelogramos não retângulos e não losangos as quatro últimas, já citadas no caso dos retângulos não quadrados e válidas também para os quadrados e losangos não quadrados. Com isso, buscamos solidificar a ideia de que os quadrados são retângulos e losangos e ambos são paralelogramos visto que possuem as mesmas propriedades.

Entre as dificuldades que poderiam encontrar, destacamos, inicialmente, os desenhos não prototípicos de uma das figuras de cada par, não reconhecer a igualdade dos comprimentos dos lados ou congruência dos ângulos na ausência de instrumentos de medição convencionais. Assim como no caso das diagonais, o termo “congruentes”, pertencente ao campo da Geometria, também poderia gerar dificuldades para eles. Pelo fato de a definição do retângulo estar associada a ângulo reto, e este último à perpendicularidade, poderiam assinalar de maneira inadequada que o retângulo não quadrado possui as diagonais perpendiculares, ou mesmo que o losango não quadrado possui as diagonais de mesmo comprimento porque seus lados são congruentes, entre outras. As variáveis didáticas e seus valores são descritas a seguir:

Quadro 21 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade única da sétima sessão

<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>	<u>Figuras</u>
Tipos de figura	Quadrado	A, B
	Retângulo não quadrado	C, D
	Losango não quadrado	E, F
	Paralelogramo não retângulo e não losango	G, H
Desenho da figura	Prototípico	A, C, E, G
	Não Prototípico	B, D, F, H
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho solicitado	Não	
Natureza das soluções	Textual	
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	G, H
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	G
	Oblíqua	H

Fonte: acervo da pesquisa

A partir da próxima sessão vamos iniciar a parte relativa às situações do campo das Grandezas e Medidas, retomando sempre que possível elementos estudados nas sessões anteriores, específicas do campo Geometria, reforçando o papel das imbricações entre eles.

Oitava sessão: *Hoje os números estão de férias*

Nesta sessão, buscamos fazer a distinção entre área e superfície e sua invariância por decomposição e recomposição, sem o uso de dados numéricos explícitos. Ela é composta por três atividades. A primeira delas é apresentada a seguir:

Atividade⁴⁷ 1: Usando as peças do Tangram, Rosa e Pedro fizeram as figuras abaixo:



Figura feita por Rosa

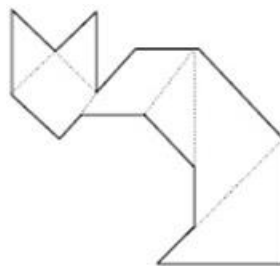


Figura feita por Pedro

Alguns estudantes do 9º ano fizeram as seguintes afirmações sobre as áreas das duas figuras acima. Você concorda com eles? Explique sua resposta.

André: A área da figura feita por Rosa é menor que a área da figura feita por Pedro.

Concordo ()

Discordo ()

Rita: As áreas das figuras feitas por Rosa e por Pedro são iguais.

Concordo ()

Discordo ()

Nesta atividade, temos uma situação de comparação de áreas que foi realizada individualmente e que contempla espaço para o estudante escrever ou desenhar alguma figura para apoiar sua argumentação. Seu objetivo é a distinção entre área e superfície, uma vez que elas possuem mesma área porque são constituídas pelas mesmas peças. Com isso, os estudantes poderiam ser levados a perceber que superfícies diferentes podem ter mesma área. Eles receberam um Tangram em seu *kit* para utilizarem caso quisessem montar as figuras.

⁴⁷ Essa atividade foi retirada da dissertação de Ferreira (2010), na qual realizamos algumas adaptações, como não explorar o perímetro, pois não era foco de investigação da nossa pesquisa, e outras pequenas mudanças no enunciado que não alteraram a sua essência.

Assim como aconteceu com termos do campo da Geometria como diagonal e congruência de lados e ângulos, poderiam manifestar dificuldades relativas ao campo das Grandezas e Medidas, mais especificamente na compreensão do que é área de uma figura geométrica plana ou mesmo terem esquecido. Em Bernardes, Souza e Zandonade (2014) e Santos (2010), os participantes demonstraram dificuldades em responder o que seria área. Já na pesquisa de Jesus (2011, p. 106) responderam que “é o espaço da sala”, “é o espaço dentro da sala”, “é o tamanho do produto”. Sobre as possibilidades de respostas para a atividade, alguns poderiam dizer que André está certo, pois a figura feita por Pedro é mais “comprida”, logo possui maior área. Outros talvez discordassem das duas afirmações alegando que a figura feita por Rosa é mais “compacta” e, por isso, tem maior área, ou que não possuem a mesma área por serem diferentes, mobilizando uma concepção geométrica de área, como apontado por Douady e Perrin-Glorian (1989). Vejamos as variáveis didáticas com seus respectivos valores:

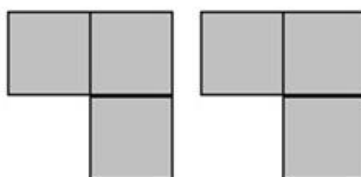
Quadro 22 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da oitava sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figuras	Triângulos retângulos isósceles, quadrado, paralelogramo não retângulo e não losango, não quadrilátero
Desenho das figuras no enunciado	Presente
Desenho solicitado	Não
Natureza das soluções	Textual ou gráfica

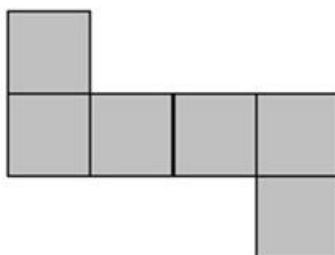
Fonte: acervo da pesquisa

A segunda atividade desta sessão é apresentada a seguir.

Atividade⁴⁸ 2: As duas peças a seguir são idênticas:

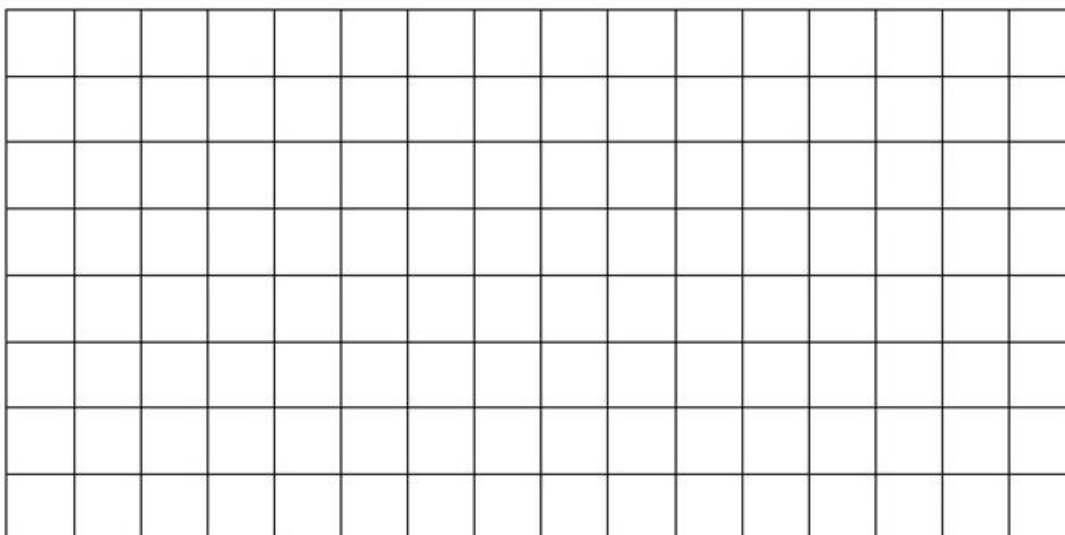


Ao juntarmos essas peças, podemos formar uma peça maior, como mostrado abaixo:



⁴⁸ Essa atividade também foi extraída da dissertação de Ferreira (2010) com algumas adaptações: a referida pesquisadora exigiu que pelo menos quatro figuras fossem desenhadas e nós solicitamos exatamente quatro e, além disso, também explorou questões relativas ao perímetro, o que não é nosso interesse.

a) Na malha quadriculada a seguir, desenhe outras quatro peças a partir das duas peças dadas e que sejam diferentes do exemplo apresentado. Em seguida, nomeie cada uma delas com as letras A, B, C e D.



b) O que é possível afirmar sobre as áreas das figuras A, B, C e D?

Esta situação de produção foi realizada individualmente e seu objetivo ainda está relacionado à distinção entre área e superfície, uma vez que as figuras variam, mas as áreas de cada uma delas permanecem invariantes, pois são constituídas pelas mesmas peças. Dessa maneira, reforçamos a compreensão de que figuras diferentes podem ter mesma área. No *kit* dos participantes, disponibilizamos as duas peças acima para, caso tivessem interesse, manipulá-las e montar as figuras antes de representá-las na malha quadriculada.

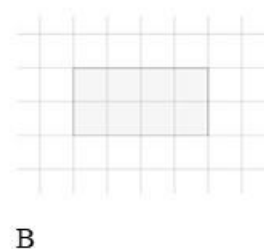
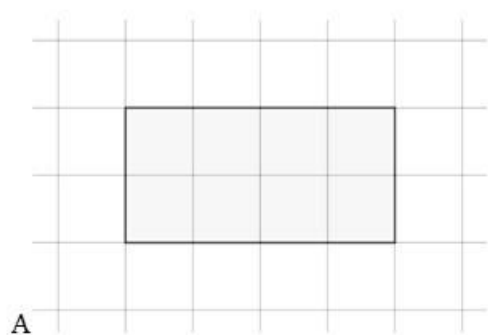
Em relação às dificuldades, poderiam desenhar a mesma figura em posições diferentes e tratá-las como distintas, conforme observado na pesquisa de Diniz (2013). A mobilização de uma concepção geométrica de área poderia ocorrer na letra (b) ao dizerem que as áreas são diferentes porque as figuras são distintas (Douady; Perrin-Glorian, 1989), apoiados no teorema em ação falso de que superfícies diferentes devem necessariamente ter áreas diferentes, campo das Grandezas e Medidas, ou em elementos voltados ao aspecto visual das figuras, campo da Geometria, como observamos nas pesquisas de Fujita (2012), Pereira da Costa (2016), Tavares (2014), entre outras. As variáveis didáticas e seus respectivos valores são elencadas no quadro a seguir:

Quadro 23 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da oitava sessão

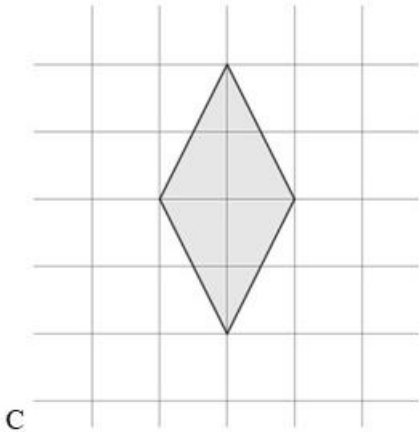
Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figuras	Poliminós
Desenho das figuras no enunciado	Presente
Desenho solicitado	Sim
Natureza das soluções	Textual e gráfica

Fonte: acervo da pesquisa

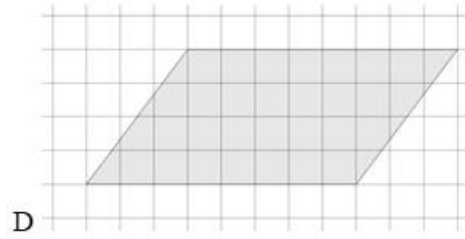
Passemos à última atividade desta sétima sessão:

Atividade⁴⁹ 3: Observe os paralelogramos abaixo:

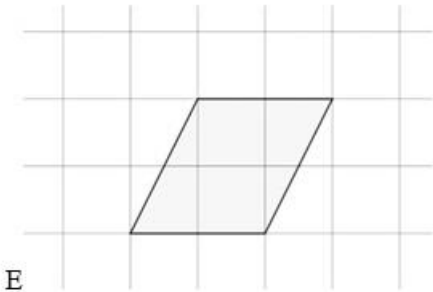
⁴⁹ Essa atividade foi retirada da nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018).



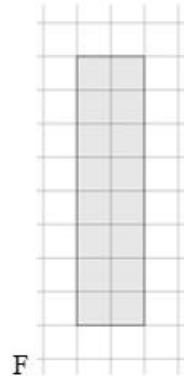
C



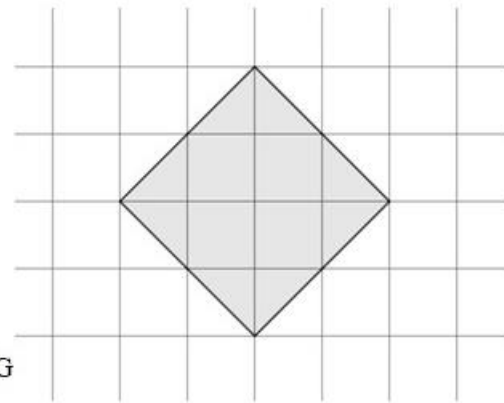
D



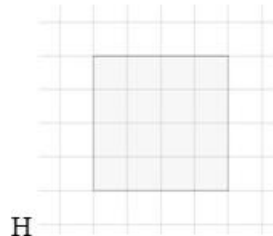
E



F



G



H

Assinale (V) para verdadeiro ou (F) para falso nas seguintes afirmações. Explique como você pensou.

() As figuras A e B possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e G possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e C possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras E e F possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras F e H possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e D possuem mesma área.

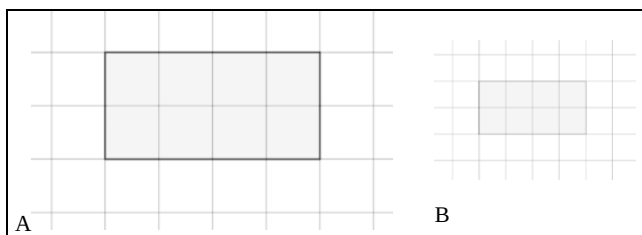
Explicação: _____

Esta é uma situação de comparação de áreas em malhas quadriculadas diferentes: a malha maior possui comprimento do lado do quadradinho igual a um centímetro e, na menor, o lado do seu quadradinho tem 0,5 cm de comprimento. Seu uso está relacionado à importância atribuída pelos estudantes às unidades de medida e ao fato de só poderem comparar as medidas (os números) quando estiverem com a mesma unidade. Nosso interesse foi trabalhar a relação de equivalência (ter mesma área) e também chamar a atenção para o fato de que apenas o número não é suficiente para comparar áreas. Como vimos nas análises, a utilização do recurso malha quadriculada foi observada tanto nos documentos analisados quanto nas apostilas e livros didáticos. Essa atividade foi realizada individualmente e não foram fornecidos outros materiais, visto que a malha quadriculada já possibilitava a verificação de congruências de lados e de ângulos. As explicações de como pensaram poderiam fornecer elementos importantes para identificarmos os invariantes operatórios mobilizados ao realizar as comparações, embora saibamos que os explicitados nas respostas (forma prediativa do conhecimento) poderiam não ser os únicos utilizados para aquela resolução (forma operatória do conhecimento).

Temos seis afirmações que foram julgadas pelos estudantes individualmente a partir da comparação das áreas dos paralelogramos representados acima, sendo três comparações na mesma malha (A e G), (A e C) e (F e H) e três em malhas diferentes (A e B), (E e F) e (A e

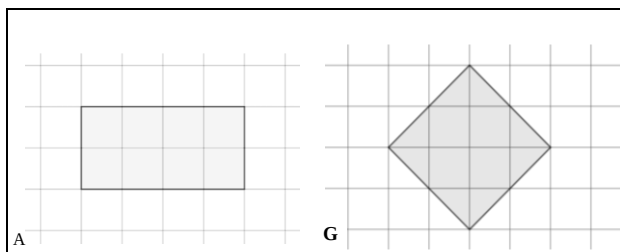
D). As comparações (A e G) e (A e C) são das áreas de figuras que estão na malha em que o quadradinho possui comprimento do lado igual a um centímetro e a comparação (F e H) é relativa às áreas de figuras sobre a malha quadriculada cujo lado do quadradinho tem meio centímetro de comprimento. As demais comparações são em malhas diferentes. Vejamos as respostas corretas esperadas e algumas possibilidades de respostas incorretas em cada uma das afirmações:

() As figuras A e B possuem mesma área



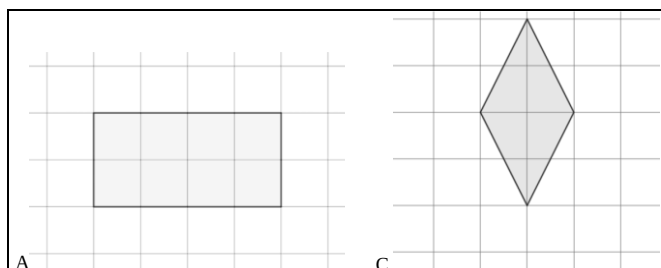
É falso, pois a figura (A) possui 8 cm^2 e a (B) tem 2 cm^2 de área. No entanto, se o estudante levasse em consideração apenas o aspecto numérico, poderia dizer que as áreas são iguais, pois elas têm a mesma quantidade de quadradinhos (8). Já se considerasse o aspecto geométrico, poderia também afirmar que as figuras têm mesma área por serem retângulos não quadrados semelhantes em desenho prototípico. Caso ele considerasse o “tanto” de espaço ocupado ou que as unidades são distintas, falaria que as áreas são diferentes.

() As figuras A e G possuem mesma área



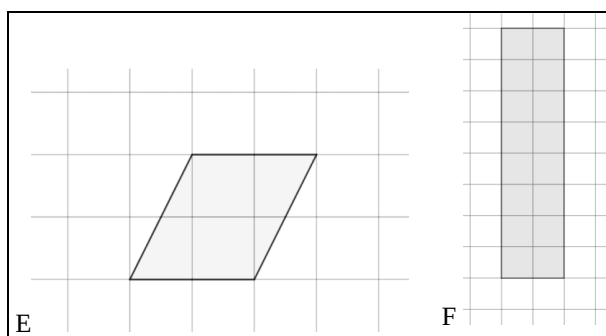
Verdadeiro, pois cada uma têm 8 cm^2 de área. Na figura (G), o estudante poderia se apoiar na situação de inclusão ao considerar que todo quadrado é losango e fazer o produto dos comprimentos das diagonais dividido por dois para encontrar a sua área. Essa é uma tarefa elementar do campo da Geometria que poderia ser considerada ao lidar com essa situação de comparação, além de procedimentos geométricos como a decomposição e recomposição. Já o fato de serem desenhos diferentes (prototípico na A e não prototípico na G) poderia conduzir o estudante a falar que não possuem mesma área. Neste caso, interpretamos que ele estaria mobilizando uma concepção geométrica de área ou se apoiando no teorema em ação falso de que superfícies diferentes devem necessariamente ter áreas diferentes, como apresentado em nossa fundamentação teórica.

() As figuras A e C possuem mesma área



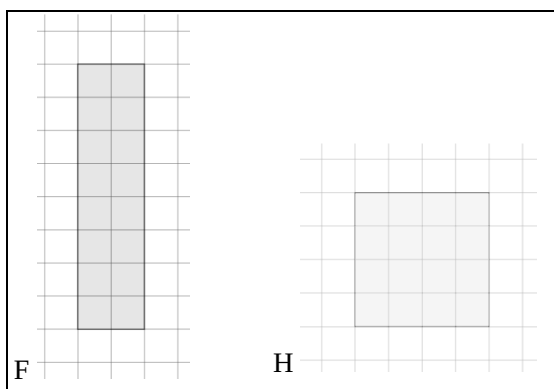
Falso, pois a figura (A) tem 8 cm^2 e a (C) tem 4 cm^2 . Porém, se o estudante utilizasse incorretamente a expressão de área para o losango não quadrado, ao fazer o produto dos comprimentos das diagonais e não dividir por dois, poderia dizer que elas possuem a mesma área.

() As figuras E e F possuem mesma área



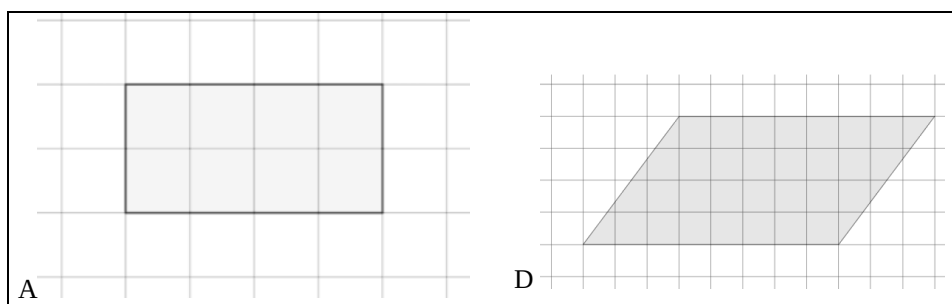
Verdadeiro, pois a cada uma tem 4 cm^2 de área. O estudante poderia realizar a decomposição e recomposição para transformar uma figura na outra e considerar que quatro quadradinhos da malha cujo comprimento do lado é de $0,5 \text{ cm}$ equivalem a um quadradinho da malha que tem 1 cm de comprimento do lado. Assim, 4 quadradinhos da malha maior correspondem a 16 quadradinhos da menor e, embora 4 e 16 sejam numericamente diferentes, ao considerarmos os pares (número, unidade) percebemos que as áreas dessas duas figuras são iguais. Entretanto, se for considerado apenas o aspecto numérico e desprezada a diferença entre as unidades, os participantes poderiam interpretar que as figuras possuem áreas diferentes porque os números não são iguais ($4 \neq 16$). Destacamos ainda como elementos que poderiam conduzir ao erro: extensão indevida da expressão de área do retângulo para o paralelogramo ou uso incorreto dela, não consideração do espaço ocupado, ou seja, procedimentos que dão indícios da mobilização de uma concepção numérica de área, como vimos nos estudos de Ferreira (2010), Santos (2010), Souza (2013), entre outros.

() As figuras F e H possuem mesma área



Verdadeiro, pois possuem áreas iguais a 4 cm^2 cada. Como estão no mesmo tipo de malha, o estudante poderia ter sucesso ao contar os quadradinhos, ao usar a expressão de área, ao fazer decomposição e recomposição e, mesmo diante dessa variedade de procedimentos que conduzem à resposta correta, poderia cometer erros relacionados a uma concepção geométrica, considerando elementos visuais como a mais “comprida” ou a mais “larga” como a que tem maior área, ou ao se apoiar no teorema em ação falso: para que duas figuras possuam mesma área, elas devem ser idênticas.

() As figuras A e D possuem mesma área



Verdadeiro, pois cada uma tem 8 cm^2 de área. Ao compará-las, o estudante deveria perceber que numericamente são diferentes, mas como as unidades também são distintas, a relação que existe entre elas conduz à resposta correta. Além disso, o procedimento geométrico de decomposição clássica do paralelogramo não retângulo e não losango e recomposição em um retângulo não quadrado também poderia levar ao acerto. No entanto, poderia desconsiderar a relação entre as malhas, realizar a contagem de quadradinhos e afirmar que a figura (D) tem área maior que a figura (A).

No quadro a seguir, elencamos as variáveis didáticas e os respectivos valores que elas assumem nessa atividade:

Quadro 24 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 3 da oitava sessão

<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>	<u>Figuras</u>
Tipos de figura	Quadrados	G e H
	Retângulo não quadrados	A, B e F
	Losango não quadrado	C
	Paralelogramo não retângulo e não losango	D, E
Desenho da figura	Prototípico	A, B, D, H
	Se aproxima do prototípico	C
	Não prototípico	E, F, G
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho da figura solicitado	Não	
Tipo de malha	Quadriculada com 1 cm de comprimento do lado	A, C, E, G
	Quadriculada com 0,5 cm de comprimento do lado	B, D, F, H
Posição relativa das figuras em relação à malha	Todos os lados da figura “seguem a malha”	A, B, F, H
	Algum (s) lado (s) da figura “seguem a malha” e há pelo menos um lado que é diagonal de um retângulo não quadrado	D, E
	Nenhum dos lados da figura “segue a malha”	C, G
Tipo de superfície unitária	Quadrado	
Tipos de uso das expressões de área	Calcular áreas	Todas
	Comparar áreas	
Natureza das soluções	Textual	
Operações	Adição	Todas
	Subtração	C, D, E, G
	Multiplicação	Todas
	Divisão	C, G
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	D, E
	Esquerda	-
Posição do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo	Horizontal	D, E
	Vertical	-
	Oblíqua	-
Orientação do lado de maior comprimento no paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	D
	Vertical	-
	Oblíqua	E
Comprimento do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo e não losango	Maior	D
	Menor	E

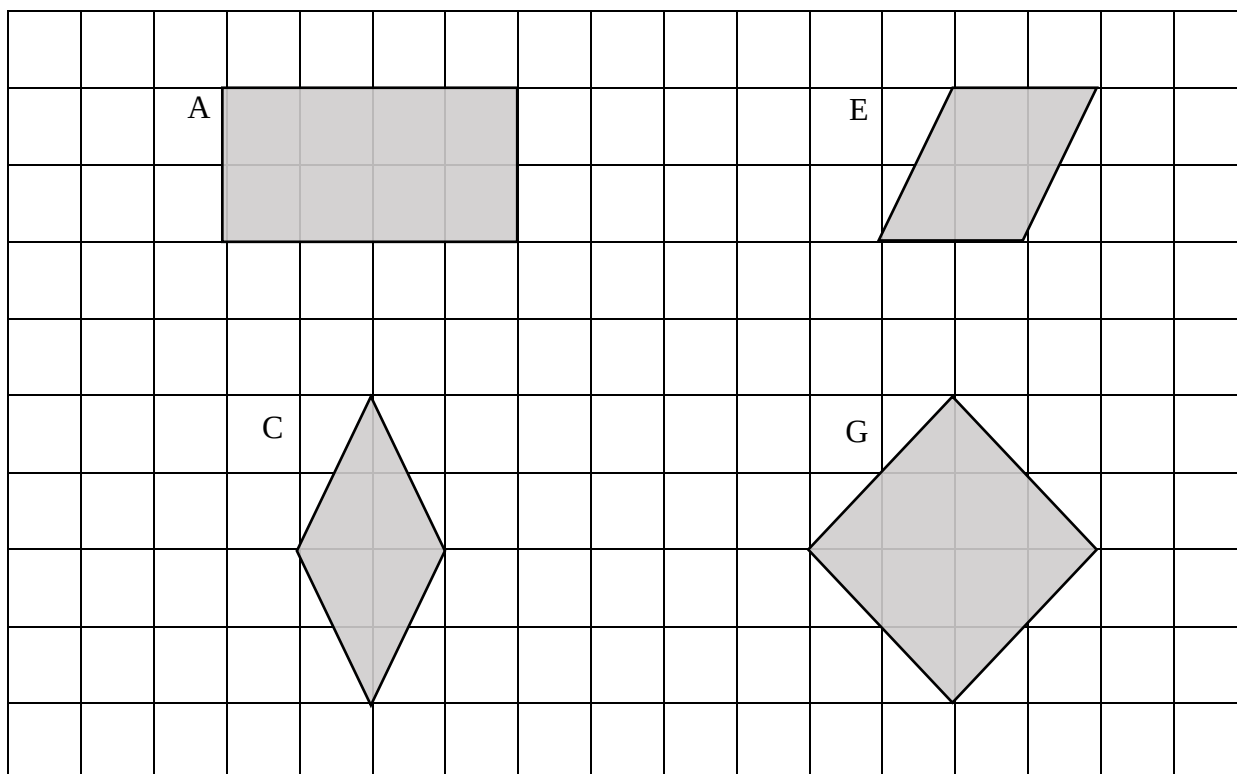
Fonte: acervo da pesquisa

Nona sessão: Os números voltaram!

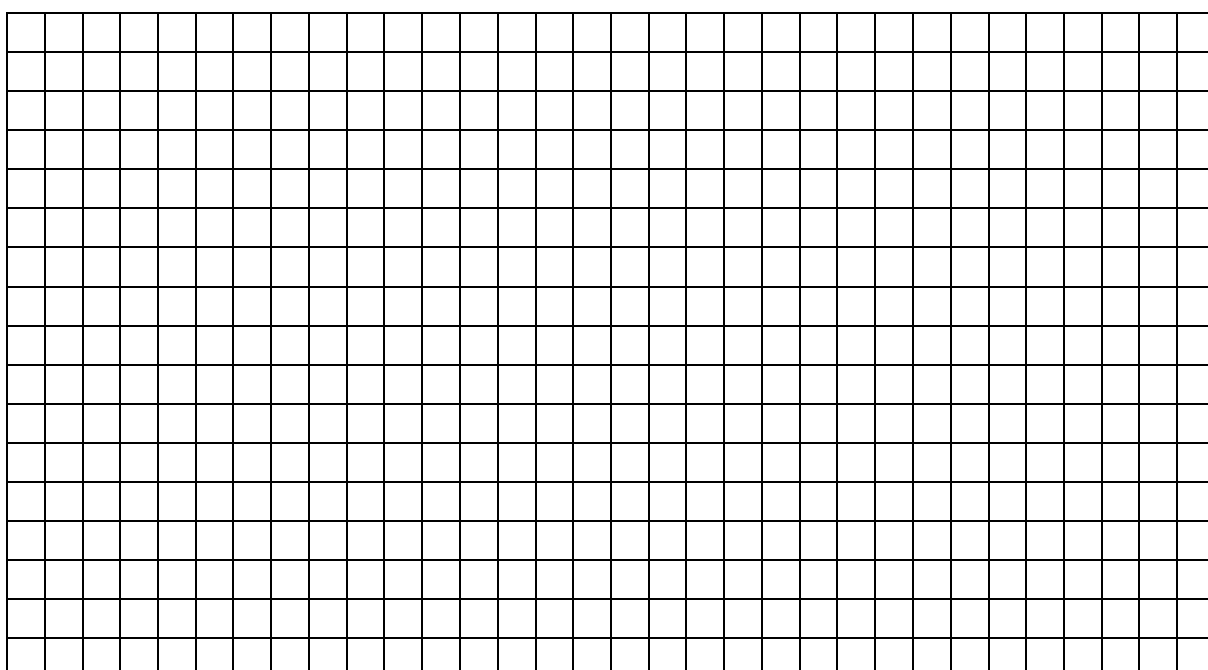
Nesta sessão, trabalhamos a distinção entre área e número por meio de situações de produção de figuras utilizando malhas quadriculadas e de medição sem dados numéricos fornecidos, mas que permitem a contagem a partir da utilização de diferentes superfícies unitárias. Iniciamos apresentando recortes das respostas dadas nas atividades da sessão

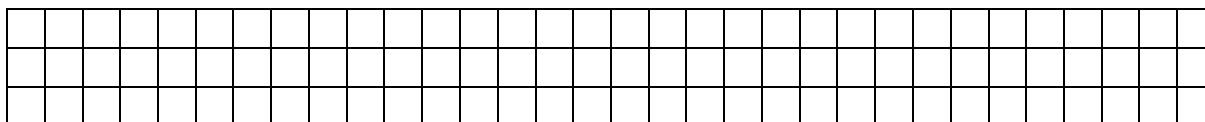
anterior por meio de *slides*. Em seguida, passamos às duas atividades do dia, cuja primeira delas é mostrada a seguir:

Atividade 1: Você está recebendo as figuras A, C, E e G que usou na atividade da sessão anterior.



Desenhe-as na malha a seguir de modo que permaneçam com a mesma área.





Nesta atividade, continuamos trabalhando a importância de considerar as unidades de medida e que o número não é suficiente para lidar com situações envolvendo o conceito de área. Temos uma situação de produção de superfícies de mesmas áreas que superfícies dadas. As figuras fornecidas, assim como já discutido na última atividade da sessão anterior, estão na malha quadriculada cujo comprimento do lado do quadradinho mede um centímetro. Os estudantes, individualmente, deveriam desenhá-las na malha quadriculada em que o lado do quadradinho mede meio centímetro. Dessa maneira, seria preciso considerar a relação existente entre eles, ou seja, quatro quadradinhos da malha menor equivalem a um quadradinho da malha maior. Receberam régua não graduada para ajudar nos traçados, principalmente aqueles que não “seguem a malha”, os quais poderiam gerar mais dificuldades.

As áreas das figuras (A) e (G) são 8 cm^2 cada, correspondendo a oito quadradinhos da malha maior. Já (C) e (E) ambas possuem áreas de 4 cm^2 que equivalem a quatro deles. Dessa maneira, esperávamos que os estudantes percebessem que as malhas são diferentes e considerassem a relação entre elas, desenhando as figuras (A) e (G) em 32 quadradinhos cada e (C) e (E) com 16 quadradinhos cada, ambos da malha menor. Outra possibilidade seria perceber a relação entre as malhas não em termos de área, mas de comprimento dos respectivos lados dos quadradinhos e, com isso, considerar que as figuras a serem desenhadas deveriam ter o dobro dos comprimentos dos lados e das respectivas alturas ou das diagonais no caso dos losangos. Esta última opção estaria apoiada no uso das expressões de área dessas figuras. Esperávamos ainda que a maioria das figuras produzidas estivesse nas mesmas posições das que foram fornecidas, pois alguns estudantes ficam “presos” a elas e acham que se mudar a posição, a figura torna-se outra, como vimos em Pereira da Costa (2016). Na pesquisa de Diniz (2013), os participantes que obtiveram êxito nas atividades desenharam figuras parecidas com as que foram dadas por ele.

Entre as possibilidades de respostas não adequadas, inicialmente, destacamos aquela em que não atribuíam a devida importância às unidades de medida e produziam figuras semelhantes, mas não equivalentes, às fornecidas. Poderiam encontrar dificuldades tanto em determinar as áreas quanto em fazer o desenho no caso das figuras que possuem quadradinhos não totalmente preenchidos, principalmente no caso do losango não quadrado (C), como no estudo de Bernardes, Souza e Zandonade (2014) ou no quadrado em desenho não prototípico

(G), conforme observado em nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018) dificuldades com esse tipo de paralelogramo em condições não habituais. Outras possibilidades de respostas que já discutimos na sessão anterior envolvendo essas mesmas figuras permanecem válidas aqui. As variáveis didáticas e seus valores constam no quadro a seguir:

Quadro 25 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da nona sessão

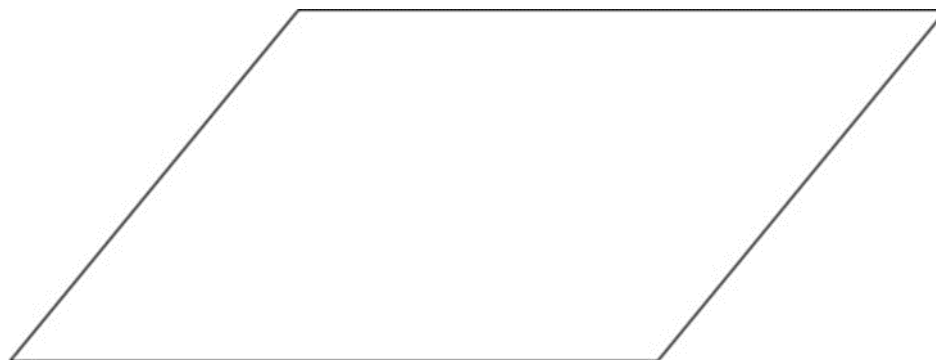
<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>	<u>Figuras</u>
Tipos de figura	Quadrado	G
	Retângulo não quadrado	A
	Losango não quadrado	C
	Paralelogramo não retângulo e não losango	E
Desenho da figura	Prototípico	A
	Se aproxima do prototípico	C
	Não prototípico	E, G
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho da figura solicitado	Sim	
Tipo de malha	Quadriculada com 1 cm de comprimento do lado	
	Quadriculada com 0,5 cm de comprimento do lado	
Posição relativa das figuras em relação à malha	Todos os lados da figura “seguem a malha”	A
	Algum (s) lado (s) da figura “seguem a malha” e há pelo menos um lado que é diagonal de um retângulo não quadrado	E
	Nenhum dos lados da figura “segue a malha”	C, G
Tipo de superfície unitária	Quadrado	
Tipos de uso das expressões de área	Calcular áreas	Todas
Natureza das soluções	Gráfica	
Operações	Adição	Todas
	Subtração	C, E, G
	Multiplicação	Todas
	Divisão	C, G
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	E
Posição do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo	Horizontal	E
Orientação do lado de maior comprimento no paralelogramo não retângulo e não losango	Oblíqua	E
Comprimento do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo e não losango	Menor	E

Fonte: acervo da pesquisa

Vejamos a segunda atividade desta sessão.

Atividade 2: Você está recebendo a figura⁵⁰ a seguir e outras menores que correspondem às peças do Tangram.

⁵⁰ A figura foi entregue com dimensões suficientes para que os estudantes obtivessem os resultados esperados ao realizarem as medições utilizando as peças do Tangram construídas a partir de uma folha tipo A4.



Tente recobrir totalmente a figura acima utilizando cada uma dessas peças e anote no espaço fornecido o resultado encontrado em cada medição.

Superfície unitária	Resultado obtido
Quadrado	
Paralelogramo	
Triângulo grande	
Triângulo médio	
Triângulo pequeno	

Após realizar as medições anteriores, houve alguma mudança na área da figura dada? Explique. _____

Nesta atividade, trabalhamos a distinção entre área e número a partir de situações de medição utilizando diferentes superfícies unitárias. Esperávamos que os estudantes, em duplas, encontrassem como resultados: dois quadrados, dois paralelogramos, um triângulo grande, dois triângulos médios e quatro triângulos pequenos, e afirmassem que não houve alterações na área da figura ao realizar as medições, pois os números variaram porque foram utilizadas superfícies unitárias diferentes. Além disso, era esperado que percebessem também as relações existentes entre as peças do Tangram para facilitar o processo de medição, como dois triângulos médios equivalem a um triângulo grande, uma vez que é menos complicado ladrilhar totalmente a figura dada com dois triângulos médios do que com um triângulo maior, por exemplo.

Em relação às dificuldades que poderiam surgir, inicialmente, destacamos que realizar as medições utilizando as superfícies unitárias que não recobrem totalmente o paralelogramo não retângulo e não losango dado, como o já citado triângulo maior e o quadrado, é uma

delas. Alguns estudantes talvez pensassem que só seria possível ladrilhar a figura fornecida com outra semelhante a ela e, com isso, utilizar apenas a peça do Tangram correspondente ao paralelogramo não retângulo e não losango. Já nas explicações, afirmar se houve ou não variação na área da figura dada vai depender da concepção de área (Douady; Perrin-Glorian, 1989) desses estudantes: se mobilizam uma concepção numérica, poderiam falar que houve mudança porque os números também mudaram; caso ela seja geométrica, poderiam afirmar que a área não variou visto que a figura fornecida não foi alterada. As variáveis didáticas e seus valores estão no quadro a seguir:

Quadro 26 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da nona sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipo de figura	Paralelogramo não retângulo e não losango
Desenho da figura	Prototípico
Desenho da figura no enunciado	Presente
Desenho solicitado	Não
Tipos de superfície unitária	Quadrado, paralelogramo, triângulo grande, triângulo médio e triângulo pequeno
Natureza das soluções	Númerica e textual
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita
Posição do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo	Horizontal
Orientação do lado de maior comprimento no paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal
Comprimento do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo e não losango	Maior

Fonte: acervo da pesquisa

Décima sessão: *Teria outra maneira de fazer?*

Nesta sessão, trabalhamos a atribuição de sentido às expressões algébricas de área dos paralelogramos, explorando de que maneira se apoiam nos casos do quadrado e do retângulo não quadrado. Iniciamos com as atividades previstas para esse encontro e, ao final, convidamos alguns estudantes para ir ao quadro mostrar como fizeram, discutir os diferentes modos de resolução e realizamos um momento de sistematização. A primeira das duas atividades trabalhadas nesta sessão foi a seguinte:

Atividade 1: Você está recebendo uma cartolina, régua graduada e quadrados menores em cartolina Guache, com comprimento do lado medindo 1 cm. Desenhe na cartolina três quadrados cujos comprimentos dos lados de cada um deles são 5 cm, 10 cm e 15 cm, respectivamente.

Em seguida, responda:

a) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 5 cm?

b) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 10 cm? _____

c) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 15 cm? _____

d) Teria alguma maneira de saber quantos quadradinhos são necessários para preencher toda a figura sem precisar contá-los um a um? Se sim, qual?

e) E se o quadrado tivesse lado de comprimento n , como faríamos?⁵¹

Nosso objetivo nesta atividade foi introduzir o estudo das expressões de área dos paralelogramos, a começar pela do quadrado. Temos situações de construção, campo da Geometria, e de medição, campo das Grandezas e Medidas, esta última a partir da contagem de quadradinhos, que foi realizada individualmente e com o auxílio dos materiais citados no enunciado. Esperávamos que os estudantes percebessem que a quantidade de quadradinhos necessária para as letras (a), (b) e (c) é igual à área dos quadrados desenhados na cartolina, ou seja, 25 cm^2 , 100 cm^2 e 225 cm^2 , respectivamente. Nas letras (d) e (e), deveriam notar que se trata da multiplicação do comprimento do lado do quadrado por ele mesmo ou que precisa elevá-lo ao quadrado, obtendo n^2 no último caso e, com isso, generalizassem a expressão de área do quadrado.

O caso genérico poderia gerar mais dificuldades, tanto no desenho da figura sem uma dimensão inteira a ser considerada, como ocorreu nas letras anteriores, quanto no cálculo da área. A possibilidade de um erro no cálculo relacional ao confundirem os conceitos de área e perímetro não foi descartada, conforme observado em pesquisas anteriores como Baltar (1996), Domingos (2013), Douady e Perrin-Glorian (1989), Ferreira (2010), Jesus (2011),

⁵¹ Como buscamos bloquear o campo numérico em nosso estudo, n assume apenas valores inteiros positivos. Essa informação foi omitida na atividade para evitar que os estudantes se confundissem ao realizá-la.

Santos (2010), Souza (2013), entre outros. Erros de álgebra das grandezas também poderiam ocorrer, como a multiplicação de números e obter grandezas como resultado (Araújo, 2018). As variáveis didáticas e seus valores estão no quadro a seguir:

Quadro 27 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da décima sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figura	Quadrados
Desenho da figura	Prototípico e não prototípico
Desenho da figura no enunciado	Ausente
Desenho da figura solicitado	Sim
Tipo de superfície unitária	Quadrado com 1 cm de comprimento do lado
Tipo de uso das expressões de área	Calcular áreas
Natureza das soluções	Gráfica, numérica, algébrica e textual

Fonte: acervo da pesquisa

A segunda atividade da nona sessão é apresentada a seguir.

Atividade 2: Com base na maneira de calcular a área do quadrado vista na atividade anterior, formem três grupos e sigam as seguintes instruções:

- Grupo 1: desenhar um retângulo cujos comprimentos dos lados são 3 cm e 6 cm;
- Grupo 2: desenhar um retângulo cujos comprimentos dos lados são 6 cm e 12 cm;
- Grupo 3: desenhar um retângulo cujos comprimentos dos lados são 12 cm e 24 cm.

Após desenharem e receberem o mesmo quadradinho em cartolina Guache com comprimento do lado medindo 1 cm que foi utilizado na atividade anterior, respondam:

a) Quantos quadrados são necessários para recobrir totalmente o retângulo do seu grupo?

b) Há alguma maneira de saber essa quantidade sem contar os quadradinhos um a um?

c) Desenhe na cartolina um retângulo cujos comprimentos dos lados medem $m \times n$ e digam uma maneira de saber sua área.

d) O procedimento descrito na letra (c) serve para o quadrado? Explique.

Nesta atividade, esperávamos que os participantes, divididos em grupos e com o auxílio de réguas graduadas, chegassem à expressão de área do retângulo e,

consequentemente, do quadrado por meio de situações de construção e de medição. Dessa maneira, assim como foi feito para o quadrado, a quantidade de quadradinhos necessária, letra (a), é igual à área de cada retângulo construído, ou seja, 18 cm^2 , 72 cm^2 e 288 cm^2 . Na letra (b), a maneira de saber a quantidade sem precisar contar um a um é realizar o produto dos comprimentos dos lados que, no caso da letra (c), é m vezes n , também válida para o quadrado como vimos anteriormente. A partir do que vimos nas análises prévias, foi esperado que os desenhos prototípicos fossem priorizados pelos participantes.

Algumas dificuldades poderiam surgir ao tentar desenhar e calcular a área de um retângulo cujos comprimentos dos lados são m e n , assim como para o quadrado de lado n , uma vez que se trata de um caso genérico e eles não têm “medidas concretas” para se apoiar. Também não descartamos a confusão entre os conceitos de área e perímetro, e erros na álgebra das grandezas. No quadro seguinte, apresentamos as variáveis didáticas e os valores que assumem:

Quadro 28 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da décima sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figura	Retângulos não quadrados
Desenho da figura	Prototípico e não prototípico
Desenho da figura no enunciado	Ausente
Desenho da figura solicitado	Sim
Tipo de superfície unitária	Quadrado com 1 cm de comprimento do lado
Tipo de uso das expressões de área	Calcular áreas
Natureza das soluções	Gráfica, numérica, algébrica e textual

Fonte: acervo da pesquisa

Passemos à próxima sessão.

Décima primeira sessão: *Ah, podemos fazer assim...*

Nesta sessão, trabalhamos a atribuição de sentido às expressões algébricas de área no caso dos paralelogramos não retângulos e não losangos. Para tanto, exploramos procedimentos geométricos, como a decomposição e recomposição em retângulos não quadrados. Também utilizamos algumas figuras em que o lado tomado como base não é o de maior comprimento nem o horizontal, buscando romper com a ideia de que o paralelogramo não retângulo e não losango possui uma única base e ela sempre será o lado horizontal, associando-a à ideia de chão como em Rosa dos Santos (2005) e/ou de maior comprimento, observado por Baltar (1996). Não exploramos atividades que tratassem diretamente da invariância da área em relação ao lado tomado como base porque necessitaria sair do campo numérico dos inteiros e esse não era nosso interesse. Iniciamos com uma apresentação resgatando elementos voltados ao conceito de área abordados nos encontros anteriores e, em

seguida, aplicamos as duas atividades previstas para essa sessão. A primeira delas é apresentada em seguida:

Atividade 1: Como você faria para calcular a área do paralelogramo a seguir?

Sugestão: Tente se apoiar no que você já sabe sobre as expressões de área estudadas na sessão anterior.



Explique: _____

Nesta atividade, era esperado que os estudantes já estivessem familiarizados com a decomposição e recomposição dessa figura em retângulos e chegassem à expressão de área do paralelogramo não retângulo e não losango. De acordo com Teles (2007, p. 134): “O retângulo é a figura geométrica plana mais utilizada nos livros didáticos para subsidiar a construção do significado das fórmulas de área e perímetro de outras figuras planas através da decomposição e recomposição”. Ao final, poderiam concluir que é possível chegar à mesma maneira de calcular a área em todos, pois fazem parte da mesma família de figuras – paralelogramos. Ela foi realizada individualmente e os estudantes receberam réguas não graduadas e papel transparente para apoiar os procedimentos utilizados.

Algumas dificuldades poderiam surgir devido à ausência de dados numéricos e talvez apontassem a necessidade de medir os comprimentos dos lados para saber a área. O fato de a inclinação da figura não ser para a direita, apesar de possuir o lado de maior comprimento na posição horizontal, também poderia gerar alguma dificuldade. Não descartamos a possibilidade de explicarem procedimentos voltados ao cálculo do perímetro ao invés da área no espaço reservado à forma prediativa do conhecimento. O quadro a seguir contempla as variáveis didáticas e seus valores:

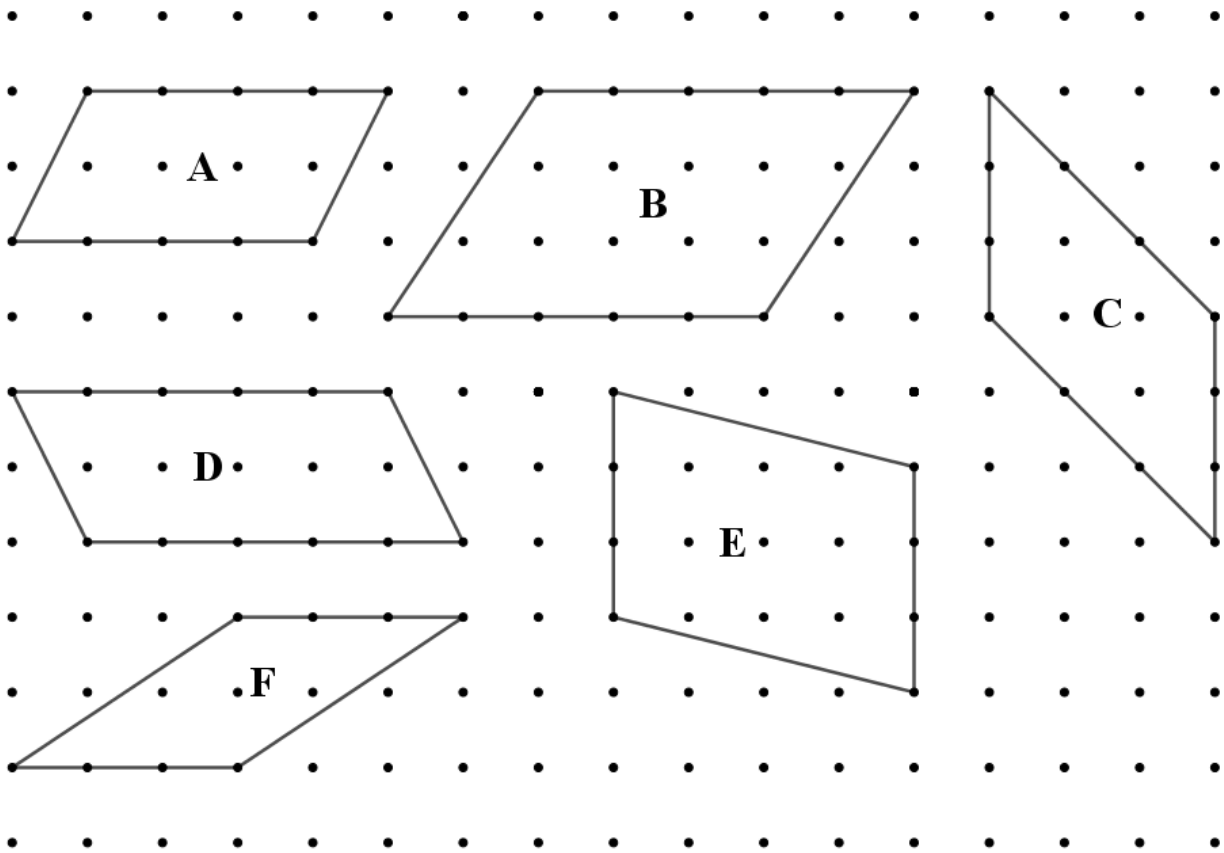
Quadro 29 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da décima primeira sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figura	Paralelogramo não retângulo e não losango
Desenho da figura	Se aproxima do prototípico
Desenho da figura no enunciado	Presente
Desenho da figura solicitado	Não
Tipo de uso das expressões de área	Calcular área
Natureza das soluções	Algébrica e textual
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Esquerda
Posição do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo	Horizontal
Orientação do lado de maior comprimento no paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal
Comprimento do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo e não losango	Maior

Fonte: acervo da pesquisa

Vejamos a segunda atividade desta sessão:

Atividade⁵² 2: Você está recebendo os paralelogramos abaixo, desenhados em papel pontilhado cuja distância entre um ponto e outro, na horizontal e na vertical, é de um centímetro.



⁵² Essa atividade foi extraída da tese de Baltar (1996), no entanto, não trouxemos a parte que explorava a área de triângulos e realizamos pequenas alterações no texto que não alteraram a sua essência.

Dividam-se em dois grupos G1 e G2 e façam o que se pede:

- O grupo 1 deverá calcular as áreas dos paralelogramos utilizando procedimentos geométricos. Registrem os resultados encontrados no espaço abaixo.
- O grupo 2 deverá calcular as áreas dos paralelogramos utilizando as expressões de área (“fórmulas”). Registrem os resultados encontrados no espaço abaixo.
- Comparem os resultados encontrados.

Área da figura A: _____

Área da figura D: _____

Área da figura B: _____

Área da figura E: _____

Área da figura C: _____

Área da figura F: _____

Nosso objetivo com esta atividade que trabalha a situação de medição foi continuar o estudo da expressão de área do paralelogramo não retângulo e não losango, explorando a decomposição e recomposição e o fato de diferentes lados poderem ser tomados como base. Como dito acima, ela foi realizada em grupos e os estudantes poderiam utilizar réguas não graduadas para traçar as alturas relativas a determinadas bases e papel transparente para apoiar os procedimentos de decomposição e recomposição.

Quanto aos procedimentos geométricos que poderiam ser utilizados pelos estudantes do grupo 1, era esperado que se apoiassem na decomposição e recomposição para produzirem retângulos a partir dos paralelogramos não retângulos e não losangos dados. Já os estudantes do grupo 2 deveriam identificar uma base e a altura relativa a ela para aplicação da expressão de área. Como apontado por Baltar (1996), um dos lados das figuras segue uma linha horizontal ou vertical, permitindo identificar a altura relativa a ele mais facilmente. Além disso, todas as alturas relacionadas a esses lados podem ser traçadas internamente. Dessa maneira, esperávamos que ambos os grupos encontrassem as seguintes áreas para cada figura: (A) 8 cm^2 , (B) 15 cm^2 , (C) 9 cm^2 , (D) 10 cm^2 , (E) 12 cm^2 e (F) 6 cm^2 . A discussão dos resultados encontrados poderia validar ou não os procedimentos e/ou as expressões de área utilizados por eles.

Nas figuras (A, B e D), o lado de maior comprimento segue a linha horizontal e esse pode ser um elemento que leve os estudantes a ter melhor desempenho nelas, pois costumam associar a base à ideia de “chão”, conforme verificado por Rosa dos Santos (2005). Já nas figuras (C, E e F), o lado tomado como base é o de menor comprimento e está na posição vertical nas duas primeiras, nas quais eles poderiam ter mais dificuldades em traçar a altura relativa a ele ou até mesmo confundir esses elementos geométricos. Alguns poderiam cometer

erros relativos à álgebra das grandezas ou se apoiar no teorema em ação falso de que a área de um paralelogramo é o produto dos comprimentos dos seus lados e encontrar resultados fora do domínio numérico dos inteiros positivos (Baltar, 1996; Douady; Perrin-Glorian, 1989). As variáveis didáticas e seus valores são apresentadas no seguinte quadro:

Quadro 30 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da décima primeira sessão

<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>	<u>Figuras</u>
Tipos de figura	Paralelogramos não retângulos e não losangos	Todas
Desenho da figura	Prototípico	A, B
	Se aproxima do prototípico	D
	Não prototípico	C, E, F
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho da figura solicitado	Não obrigatoriamente	
Tipo de papel	Pontilhado	
Tipos de uso das expressões de área	Calcular áreas	Todas
Natureza das soluções	Numérica e textual	
Operações	Adição	Todas
	Subtração	
	Multiplicação	
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	A, B, F
	Esquerda	D
Posição do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo	Horizontal	A, B, D, F
	Vertical	C, E
	Oblíqua	-
Orientação do lado de maior comprimento no paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	A, B, D
	Vertical	-
	Oblíqua	C, E, F
Comprimento do lado tomado como base no paralelogramo não retângulo e não losango	Maior	A, B, D
	Menor	C, E, F

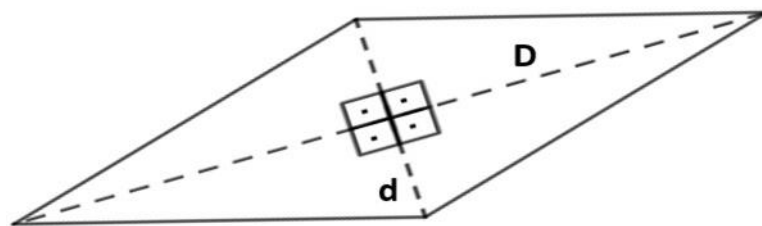
Fonte: acervo da pesquisa

Vamos à próxima sessão.

Décima segunda sessão: *Os números estão de férias novamente?*

Nesta sessão, trabalhamos a atribuição de sentido às expressões algébricas de área no caso dos losangos não quadrados por meio de procedimentos geométricos, como a decomposição e recomposição em retângulos não quadrados e quadrados. Iniciamos pelas duas atividades previstas para esse encontro e encerramos com um momento de sistematização geral, resgatando situações, definições, propriedades e demais elementos explorados do campo da Geometria, estabelecendo relações com outras do campo das Grandezas e Medidas. A primeira atividade foi a seguinte:

Atividade 1: Você está recebendo o losango representado a seguir.



a) Recorte-o nas diagonais (linhas tracejadas) em quatro partes e transforme-o em outro paralelogramo. Em seguida, desenhe a figura obtida no espaço abaixo.

b) Ao recortar o losango e transformá-lo em outro paralelogramo, o que aconteceu com o comprimento de suas diagonais?

c) Desenhe um losango no papel recebido em que o comprimento da diagonal maior é exatamente o dobro do comprimento da diagonal menor.

d) Recorte a figura anterior nas diagonais em quatro partes e a transforme em outro paralelogramo. Em seguida, desenhe a figura obtida no espaço abaixo.

e) Ao recortar o losango desenhado e transformá-lo em outro paralelogramo, o que aconteceu com o comprimento de suas diagonais?

f) Existe algum losango em que os comprimentos de suas diagonais são iguais? Se sim, qual?

Esta atividade aborda a situação de construção e procedimentos de decomposição e recomposição de figuras geométricas planas, levando os estudantes à obtenção da expressão

de área do losango não quadrado, uma vez que ao decompor e recompor essa figura, esperávamos que obtivessem um retângulo não quadrado (letra (a)). Assim, o comprimento da diagonal maior é dividido por dois e passa a ser um dos lados desse retângulo, enquanto o comprimento da diagonal menor se mantém (letra (b)) e é o outro lado do retângulo, o que justifica o produto dos comprimentos das diagonais dividido por dois. Nos casos em que o comprimento da diagonal maior é exatamente o dobro do da diagonal menor, era esperado que a decomposição levasse a um quadrado (letra (d)), embora alguns talvez tentassem transformar o losango não quadrado desenhado na letra (c) em um paralelogramo não retângulo e não losango, visto que as letras (d) e (e) falam em transformá-lo em outro paralelogramo, mas não exigem que seja necessariamente o não retângulo e não losango. Na letra (f), esperávamos que eles respondessem que é o quadrado, possibilitando se apoiar na expressão de área do losango não quadrado para lidar com situações em que é dado apenas o comprimento da diagonal de um quadrado, como na atividade 2 desta sessão. Destacamos ainda a existência de fortes imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, uma vez que situações e conceitos de cada um deles são necessários para lidar adequadamente com as tarefas propostas.

A realização dessa atividade em duplas poderia favorecer o confronto de opiniões e a discussão dos diferentes procedimentos de resolução pelos estudantes. Foram fornecidas régua não graduada para medição de comprimentos e ajudar na execução dos desenhos, provavelmente prototípicos, em cartolina tradicional, e tesouras sem ponta para fazerem os recortes indicados. Utilizamos cartolina Guache na confecção da figura fornecida por ser mais grossa e permitir melhor manipulação pelos participantes.

Entre as dificuldades que possivelmente surgiriam, apontamos que alguns estudantes poderiam não perceber as mudanças ocorridas com a diagonal após os procedimentos indicados ou pensar que ambas se dividem ao meio. Fazer o desenho de um losango não quadrado de modo que atenda as condições preestabelecidas também poderia gerar algumas dúvidas. A compreensão da expressão de área poderia não ser tão evidente para alguns de imediato, mas a longo prazo devido às dificuldades enfrentadas ao lidar com esse tipo de paralelogramo, como vimos em pesquisas como a realizada por Mendes (2012). As variáveis didáticas e seus valores são descritas logo abaixo:

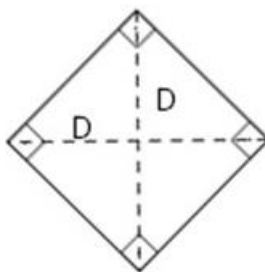
Quadro 31 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da décima segunda sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipos de figura	Losango não quadrado, retângulo não quadrado, quadrado e paralelogramo não retângulo e não losango
Desenho da figura	Não prototípico
Desenho da figura no enunciado	Presente
Desenho da figura solicitado	Sim
Natureza das soluções	Algébrica, gráfica e textual

Fonte: acervo da pesquisa

Vamos à próxima atividade.

Atividade 2: É possível calcular a área do quadrado representado abaixo conhecendo apenas os comprimentos de suas diagonais?



Explique: _____

Nesta atividade, esperávamos que eles se apoiassem na situação de inclusão ao considerar os quadrados como losangos e utilizassem a expressão de área deste último em suas respostas ou, como as diagonais são de mesmo comprimento, elevá-lo ao quadrado e dividir o resultado por dois. Procedimentos de decomposição e recomposição também poderiam ser utilizados, apoiados na atividade anterior. Ela foi realizada em duplas e, caso houvesse necessidade, poderiam utilizar os mesmos instrumentos recebidos no *kit* ao início desta sessão.

Quanto às dificuldades, alguns estudantes poderiam expressar a necessidade de medir o comprimento do lado do quadrado ou mesmo da diagonal para poder determinar a sua área. Mendes (2012) notou a necessidade por parte dos participantes de conhecerem os comprimentos dos lados de um retângulo não quadrado para poderem calcular a sua área. Poderiam indicar ainda que se deve fazer o produto dos comprimentos das diagonais ($D \times D$), entretanto, esquecendo de dividir o resultado obtido por dois. O quadro a seguir apresenta as variáveis didáticas e seus valores:

Quadro 32 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da décima segunda sessão

Variáveis didáticas	Valores
Tipo de figura	Quadrado
Desenho da figura	Não prototípico
Desenho da figura no enunciado	Presente
Desenho da figura solicitado	Não
Tipo de uso das expressões de área	Calcular área
Natureza das soluções	Algébrica e textual

Fonte: acervo da pesquisa

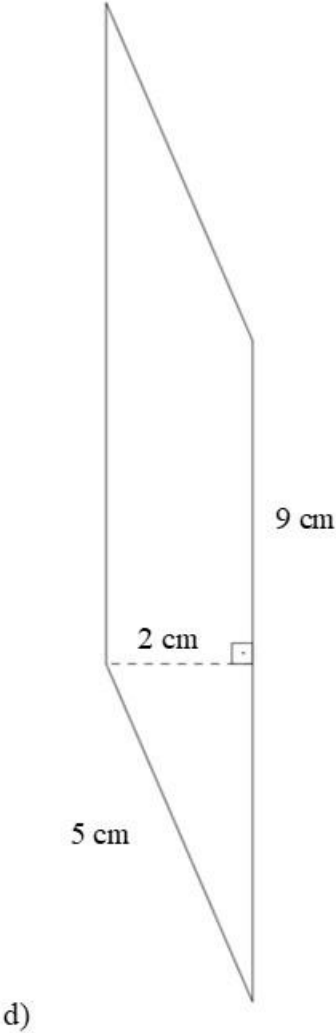
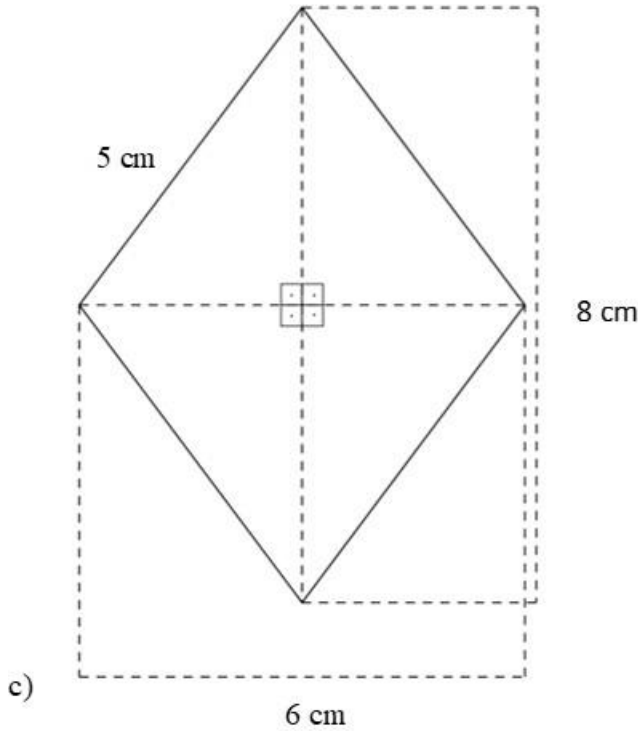
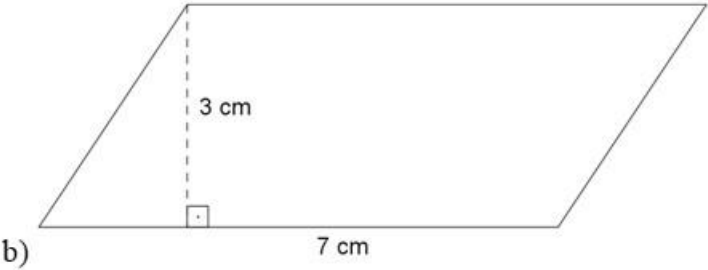
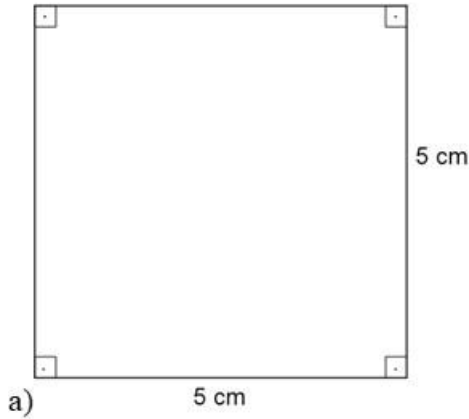
Vejamos a última sessão e suas respectivas atividades.

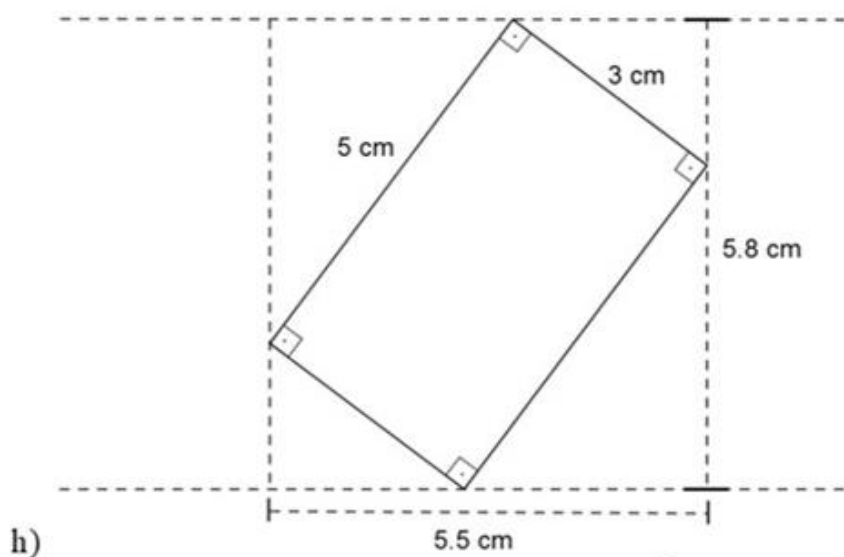
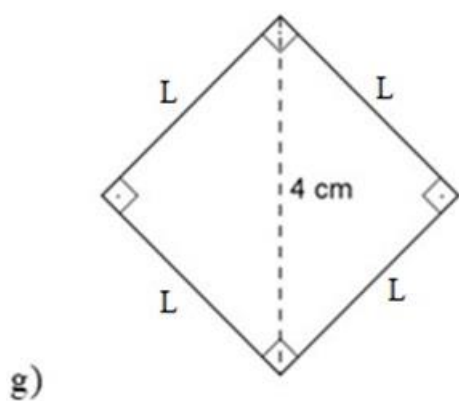
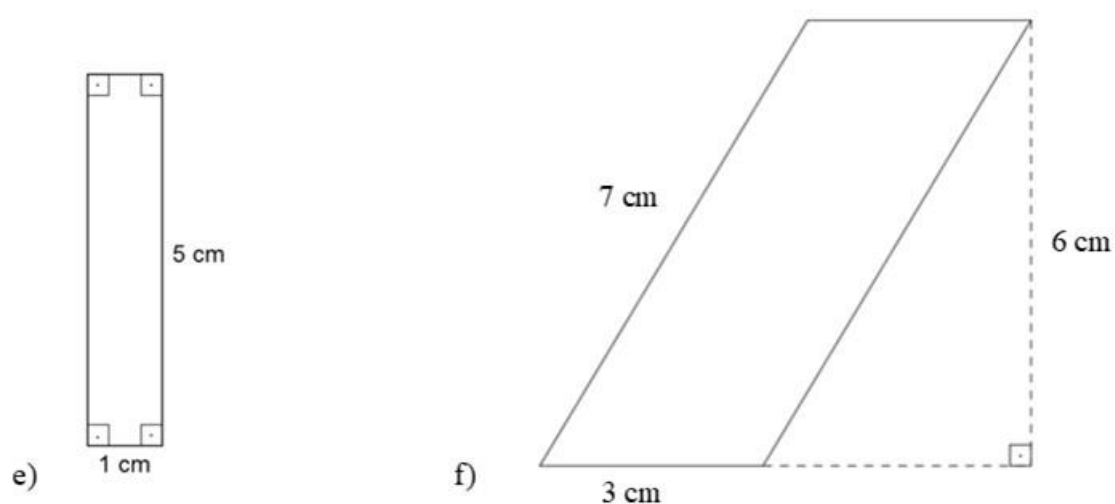
Décima terceira sessão: ***Vamos lá, agora vai ser moleza!!!***

Nesta sessão, abordamos classes de situação de medição e produção relativas à área de paralelogramos, campo das Grandezas e Medidas, que em alguns momentos poderiam exigir o domínio de situações do campo da Geometria, como identificação, classificação, inclusão e construção, reforçando as imbricações entre esses dois campos. Iniciamos com as duas atividades previstas para esse encontro e finalizamos com um momento de culminância. A primeira delas foi a seguinte:

Atividade⁵³ 1: Calcule a área das figuras abaixo:

⁵³ Essa atividade foi extraída da nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018), em que alteramos apenas a letra (g), pois indicamos além da congruência dos ângulos, a dos lados, para garantir que se trata de um quadrado.





Esta é uma situação de medição a partir da qual poderíamos averiguar se houve diferenças marcantes no tratamento dado a cada tipo de paralelogramo no que se refere à identificação dos elementos geométricos para o cálculo das áreas. Ela foi realizada individualmente e não fornecemos nenhum material.

As respostas corretas que esperávamos em cada uma das letras são: (a) 25 cm^2 , (b) 21 cm^2 , (c) 24 cm^2 , (d) 18 cm^2 , (e) 5 cm^2 , (f) 18 cm^2 , (g) 8 cm^2 e, por fim, (h) 15 cm^2 . Entre os procedimentos que poderiam ser utilizados nessa atividade e considerados satisfatórios, destacamos a decomposição e recomposição, que também possibilita a compreensão da ideia de invariância de áreas pelos participantes, a utilização adequada da expressão de área a partir da escolha correta dos dados bem como o apoio em situações do campo da Geometria, conforme veremos em seguida. As letras (a), (b), (e) e (g) não têm dados extras. Com exceção deste último, nos demais a aplicação direta da expressão de área resolve o problema. Também era esperado que se apoiassem nos conhecimentos geométricos anteriores relacionados à perpendicularidade de uma altura relativa a determinado lado.

Nas letras (c), (d), (f) e (h) há dados extras, sendo preciso decidir quais deles poderiam ser utilizados para o cálculo da área. Vimos nas análises prévias que uma das regras do contrato didático consiste em fazer cálculos de diferentes maneiras para usar todos os dados fornecidos na questão (Souza, 2013). Como procedimentos corretos para o losango não quadrado da letra (c), o aluno poderia: aplicar diretamente a expressão de área utilizando os comprimentos das diagonais; perceber que a figura equivale a quatro triângulos retângulos congruentes, cujos catetos medem a metade das diagonais dadas, a saber 3 cm e 4 cm e, em seguida, calcular a área de um triângulo e depois multiplicar o resultado por quatro; decompor a figura e recompor em retângulos de comprimentos 6 cm e 4 cm ou 8 cm e 3 cm.

Em relação aos paralelogramos não retângulos e não losangos, a dificuldade maior concentra-se nas letras (d) e (f), pois o lado de maior comprimento não se encontra na posição horizontal e, neste último, não é possível aplicar a decomposição e recomposição clássica em um retângulo. Outro fator é a escolha da altura em relação ao lado tomado como base. Poderiam se apoiar no teorema em ação falso de que a área de um paralelogramo é dada pelo produto dos comprimentos dos seus lados, conforme apontado por Baltar (1996).

Na letra (g) é dado apenas o comprimento da diagonal do quadrado, visto que o L em seus lados, assim como a marcação dos ângulos retos, são apenas para garantir que se trata de um quadrado. Para resolvê-la, esperávamos que o estudante considerasse que todo quadrado é losango e aplicasse a expressão de área para encontrá-la, reinvestindo o que foi estudado na sessão anterior. Poderiam ainda: decompor o quadrado e recompor em um retângulo de dimensões 2 cm por 4 cm; aplicar a expressão que relaciona os comprimentos da diagonal e do lado de um quadrado ou utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar o comprimento do lado. Se o estudante tentasse fazer a soma dos comprimentos das diagonais, coincidentemente encontraria o número oito que corresponde à medida (número) da área na unidade adotada.

Esse é um exemplo em que embora a resposta numérica estivesse correta, a estratégia utilizada seria inadequada. Se o procedimento consiste em calcular com números e acrescentar a unidade de medida relacionada ao final, a resposta poderia estar correta sem que se apoiasse em conceitos em ação pertinentes e teoremas em ação verdadeiros.

A dificuldade na letra (h) consiste na identificação dos dados necessários e suficientes para o cálculo da área do retângulo não quadrado, considerando que possui dados extras e a figura não está em seu desenho prototípico. Se o estudante relacionasse a base à ideia de “chão”, poderia considerar erroneamente 5,5 cm como sendo a base da figura e utilizá-la para calcular a área. Tivemos o cuidado de não sair do campo dos inteiros positivos para evitar possíveis erros no cálculo numérico, uma vez que ao escolher explorar as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, buscamos intencionalmente evitar os aspectos numéricos e os cálculos sobre as conversões de unidade, mesmo sabendo que são questões importantes do processo de conceitualização. Porém, tanto nessa letra (h) quanto na (g) poderiam ocorrer casos em que aparecem respostas fora do campo numérico dos inteiros, envolvendo números irracionais ou racionais, que são fatores desencadeados por erros no cálculo numérico ou confusão na escolha dos dados. No caso da letra (h), o cálculo numérico adequado seria $5\text{ cm} \times 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$. No entanto, poderiam fazer inadequadamente: $5,5\text{ cm} \times 5,8\text{ cm} = 31,9\text{ cm}^2$.

A confusão entre os conceitos de área e perímetro, isto é, adicionar os comprimentos dos lados – erro de cálculo relacional – poderia ocorrer em todas as figuras. Consideramos também, como relatado por Souza (2013), a possibilidade de que alguns participantes poderiam somar todos os dados numéricos fornecidos ou os multiplicassem ou fizessem alguma combinação de operações numéricas, de modo que todos eles fossem utilizados. Esse tipo de resposta é consequência de cláusulas do contrato didático, como já dito acima. Em todas as letras haveria possibilidade de erros relacionados à álgebra das grandezas, conforme verificamos em nossa dissertação (Araújo, 2018), com a multiplicação apenas dos números e a colocação da unidade de medida ao final como, por exemplo, $3 \times 7 = 21\text{ cm}^2$, que consiste em igualar grandezas a números. Para essa atividade, as variáveis didáticas e seus respectivos valores são apresentadas no quadro a seguir:

Quadro 33 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 1 da décima terceira sessão

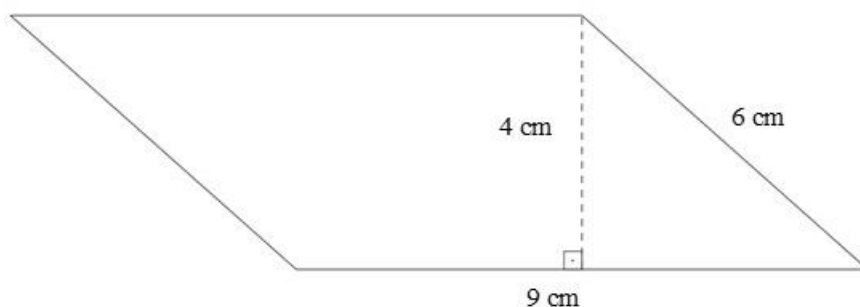
Variáveis	Valores	Figuras
Tipos de figura	Quadrado	A, G
	Retângulo não quadrado	E, H
	Losango não quadrado	C
	Paralelogramo não retângulo e não losango	B, D, F
Desenho da figura	Prototípico	A, B
	Se aproxima do prototípico	C
	Não prototípico	D, E, F, G, H
Desenho da figura no enunciado	Presente	
Desenho da figura solicitado	Não	
Dados fornecidos	Necessários e suficientes	A, B, E, G
	Extras	C, D, F, H
Tipos de uso das expressões de área	Calcular a área	Todas
	Calcular comprimentos que caracterizam a figura	G
Natureza das soluções	Numérica e algébrica	
Operações	Adição	G
	Multiplicação	Todas
	Divisão	C
	Potenciação	A, G
	Radiciação	G
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Direita	B, F
	Esquerda	D
Posição do lado tomado como base do paralelogramo não retângulo	Horizontal	B, F
	Vertical	D
	Oblíqua	-
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal	B
	Vertical	D
	Oblíqua	F
Posição da altura traçada do paralelogramo não retângulo e não losango	Interior	B, D
	Exterior	F
Comprimento do lado tomado como base do paralelogramo não retângulo e não losango	Maior	B, D
	Menor	F

Fonte: acervo da pesquisa

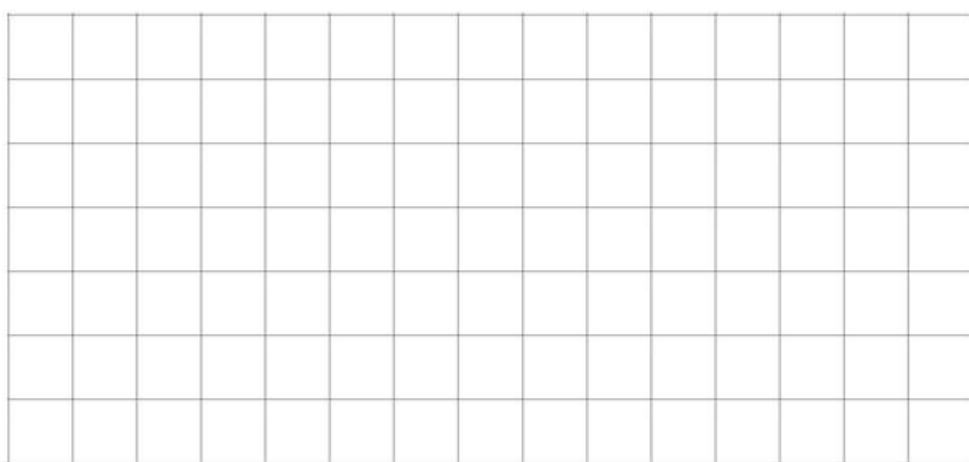
Passemos à última atividade da nossa experimentação.

Atividade⁵⁴ 2: Observe a figura a seguir e faça o que se pede:

⁵⁴ Essa atividade também foi extraída da nossa dissertação (Araújo, 2018). Fornecemos mais uma folha inteira com malha quadriculada para produção das figuras, além da apresentada na atividade.



- Desenhe um retângulo R com área igual à da figura acima.
- Desenhe um losango L com área igual à da figura acima.
- Desenhe um quadrado Q com área igual à da figura acima.



Esta é uma situação de produção de superfícies a partir de uma figura dada. Ela exige que os estudantes lidem com situações tanto do campo das Grandezas e Medidas, como produção, medição e comparação, quanto do campo da Geometria, como identificação, classificação, inclusão e construção, estas últimas emergindo como tarefas elementares para obter sucesso na situação complexa. Esta atividade foi realizada individualmente e os participantes poderiam fazer uso de réguas não graduadas para apoiar os traçados, caso julgassem necessário.

A figura dada possui a altura interna, o lado de maior comprimento na posição horizontal e é também o tomado por base, com inclinação para a esquerda, caracterizada como um desenho que se aproxima do prototípico. Além disso, possui dados numéricos extras, conduzindo-os a decidir quais comprimentos considerar para o cálculo da área e quais deveriam ser as dimensões dos lados e/ou diagonais das figuras produzidas para que atenda à condição dada.

Por se tratar de uma situação de produção do campo das Grandezas e Medidas, vimos na seção dedicada ao seu estudo que ela se diferencia das anteriores por admitir várias

respostas corretas. A área do paralelogramo dado é de 36 cm^2 , a qual poderia ser obtida por meio da expressão de área ou utilizando procedimentos geométricos explorados em sessões anteriores, como a decomposição e recomposição. Quanto às figuras produzidas, algumas possibilidades de respostas corretas, como soluções no conjunto dos números inteiros positivos, seriam:

- Retângulos de dimensões: 2 cm x 18 cm; 3 cm x 12 cm; 4 cm x 9 cm; 1 cm x 36 cm (esta última não poderia estar em verdadeira grandeza devido à limitação da folha fornecida). Se ele considerasse que todo quadrado é retângulo, poderia desenhar um quadrado com área igual à do paralelogramo dado.
- Losangos de diagonais medindo: 3 cm x 24 cm; 4 cm x 18 cm; 6 cm x 12 cm; 8 cm x 9 cm; 2 cm x 36 cm; 1 cm x 72 cm (estas duas últimas não poderiam estar em verdadeira grandeza no papel fornecido). Assim como para o retângulo, o estudante poderia também fazer um quadrado nesse item, considerando que todo quadrado é losango.
- Quadrado com comprimento do lado medindo 6 cm.

Algumas dificuldades poderiam estar relacionadas: à identificação dos dados necessários e suficientes; a não saber classificar as figuras de maneira adequada e confundilas ou não as desenhar; à confusão entre área e perímetro e, com isso, produzir figuras com perímetro igual ao da figura dada (erro de cálculo relacional); erros de cálculo numérico. Poderíamos ter ainda a possibilidade de o estudante considerar o paralelogramo em desenho não prototípico como sendo um não paralelogramo, e produzir outro que estivesse em seu desenho prototípico como uma das respostas para a atividade, como vimos no estudo desenvolvido por Pereira da Costa (2016), no qual os estudantes consideravam o retângulo em desenho não prototípico como sendo um não retângulo. Outra possível dificuldade seria relacionar os comprimentos dos lados da figura e sua área na construção dos paralelogramos e também em determinar a sua altura, como apresentado na pesquisa de Bernardes, Souza e Zandonade (2014).

Em relação à inclusão de classes, quando apontamos como possibilidade de resposta fazer quadrados ao ser solicitado a produzir retângulos e/ou losangos, nos apoiamos no fato de que a questão pede retângulo e losango, sem especificar que eles deveriam ser retângulos não quadrados e losangos não quadrados, por isso nosso interesse em trabalhar com os estudantes previamente atividades que contemplassem aspectos e nomenclaturas inclusivas e exclusivas. Mesmo explorando que as relações recíprocas não devem ser consideradas, não descartamos a possibilidade de erros nos casos em que eles considerem que todo quadrado é retângulo e losango, e todo retângulo e/ou losango também é quadrado e, nesse caso, ao ser solicitado a

produzir um quadrado, poderiam fazer um retângulo não quadrado e/ou um losango não quadrado. Para tanto, é preciso considerar o que Machado (2012) aponta: todo quadrado é um retângulo e todo retângulo é um paralelogramo, mas as relações recíprocas não são verdadeiras. E também que todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado. O detalhamento das variáveis didáticas e seus respectivos valores é apresentado no quadro a seguir:

Quadro 34 – Variáveis didáticas e seus valores na atividade 2 da décima terceira sessão

<u>Variáveis</u>	<u>Valores</u>
Tipos de figura	Paralelogramo não retângulo e não losango
	Retângulo
	Losango
	Quadrado
Desenho da figura	Se aproxima do prototípico
Desenho da figura no enunciado	Presente
Desenho da figura solicitado	Sim
Tipo de papel	Quadriculado com 1 cm de comprimento do lado
Dados fornecidos	Extras
Tipos de uso das expressões de área	Calcular a área
	Produzir figuras em condições dadas
Natureza das soluções	Gráfica
Operações	Multiplicação
Inclinação do paralelogramo não retângulo	Esquerda
Posição do lado tomado como base do paralelogramo não retângulo	Horizontal
Orientação do lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango	Horizontal
Posição da altura traçada do paralelogramo não retângulo e não losango	Interior
Comprimento do lado tomado como base do paralelogramo não retângulo e não losango	Maior

Fonte: acervo da pesquisa

Ao final desta última sessão teve a culminância e, em outro momento, foram realizadas entrevistas semiestruturadas com os participantes e com a professora de Matemática deles para conhecer a percepção desses estudantes e da professora sobre a dinâmica dos encontros, os materiais utilizados e as atividades realizadas.

5 EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Neste capítulo, realizamos a discussão da experimentação e análise a posteriori e validação que constituem a terceira e quarta etapas da engenharia didática, respectivamente. Inicialmente, apresentamos algumas informações acerca da experimentação, retomando pontos já tratados ao longo do texto e incluindo outros elementos. Em seguida, temos as seções que compõem este capítulo, uma para análise de cada sessão da sequência didática desenvolvida e experimentada.

Antes da aplicação da sequência didática, realizamos observações de aulas nos 9º anos A e B tanto para conhecer o modo como a professora de Matemática habitualmente trabalhava ou, pelo menos, optou por trabalhar naquele momento, quanto para os estudantes irem se acostumando com nossa presença em sala. Os conteúdos explorados ao longo das 12 aulas observadas (seis em cada turma) foram expressões numéricas envolvendo potenciação, localização de números decimais e fracionários na reta numérica, radiciação e fatoração. Foi possível observar que a professora conduzia as aulas explicando detalhadamente os assuntos, lendo as atividades e orientando o passo a passo que os estudantes deveriam seguir para realizá-las. Os estudantes participaram razoavelmente e parecerem não se intimidar com nossa presença em sala.

Como já mencionamos anteriormente, as sessões foram realizadas em uma escola pública municipal do município de Ferreiros/PE, às quintas-feiras, das 13h30min às 15h30min, experimentadas pelo pesquisador e filmadas⁵⁵ por alguém que designamos previamente. Escolhemos a quinta-feira devido à disponibilidade dessa pessoa para realizar as filmagens. As datas em que os encontros foram realizados, algumas observações e a frequência dos participantes são apresentadas a seguir:

⁵⁵ Para realização das filmagens, dispomos de uma câmera fixa tentando pegar toda a sala e outra móvel, na qual a pessoa designada para este fim passava nas bancas ou nos grupos com o intuito de captar discussões pontuais e procedimentos de resolução que não apareceriam apenas com a câmera fixa.

Quadro 35 – Informações gerais acerca das sessões realizadas

Sessões	Datas (2022)	Observações	Total de presentes
1ª - É aula de Matemática ou Arte?	28 de abril	Familiarização com os recursos.	19
2ª - Explorando quadriláteros.	05 de maio	Conhecendo os quadriláteros e critérios priorizados pelos participantes.	12
3ª (redimensionada)	12 de maio	Sessão de ajuste. Exploração do Tangram.	15
4ª - Explorando paralelogramos.	19 de maio	Aprofundamento das identificações e agrupamentos das figuras.	11
5ª - É verdade ou não é?	26 de maio	Compreensão das relações inclusivas.	09
6ª - Vamos classificar?	09 de junho	Exploração de outras propriedades (intervalo de duas semanas entre a 5ª e 6ª).	11
7ª - Deixe-me ver se entendi....	30 de junho	Sistematização de propriedades (intervalo de três semanas entre a 6ª e a 7ª).	09
8ª - Hoje os números estão de férias	11 de agosto	Distinção entre área e superfície (intervalo de seis semanas entre a 7ª e a 8ª).	05
9ª - Os números voltaram!	18 de agosto	Distinção entre área e número.	09
10ª - Teria outra maneira de fazer?	25 de agosto	Exploração das expressões de área de quadrados e retângulos não quadrados.	06
11ª - Ah, podemos fazer assim...	01 de setembro	Exploração das expressões de área de paralelogramos não retângulos e não losangos.	05
12ª - Os números estão de férias novamente?	15 de setembro	Exploração das expressões de área de losangos não quadrados (intervalo de duas semanas entre a 11ª e a 12ª).	09
13ª - Vamos lá, agora vai ser moleza!!!	22 de setembro	Atividades de encerramento e culminância.	09

Fonte: acervo da pesquisa

Como apresentado acima, em algumas quintas-feiras não realizamos os encontros devido a feriados, pontos facultativos, recesso escolar do mês de julho ou por necessidades tanto da escola quanto do pesquisador.

Em relação à quantidade de participantes, foram 23 estudantes inscritos, sendo 11 do 9º ano A e 12 do 9º ano B. No entanto, um aluno do 9º ano A não devolveu o termo de autorização assinado e nem estava frequentando as aulas regulares. Dos 22 que devolveram o termo de autorização assinado pelos pais/responsáveis, nove ficaram até o fim. Como nosso intuito era olhar de que maneira os elementos trabalhados nas atividades do campo da Geometria seriam utilizados como suporte nas tarefas elementares pertencentes às situações complexas do campo das Grandezas e Medidas, analisamos apenas as produções desses nove participantes, pois os demais faltaram toda parte de Grandezas e Medidas e, consequentemente, não realizaram as atividades propostas relativas ao conceito de área. Dessa maneira, pode haver divergência entre a quantidade de participantes por sessão no quadro acima e o total analisado em cada uma delas, apresentado mais adiante. Para preservar a identidade de cada um deles, os sete estudantes do 9º ano A que ficaram até o fim estão codificados por A2, A4, A6, A7, A8, A9 e A10. Já os dois do 9º ano B são B4 e B12. Destacamos que o participante B12 esteve presente em todos os encontros.

Nas sessões compostas por mais de uma atividade, entregávamos uma de cada vez, fazíamos a leitura do enunciado na maioria das vezes e, caso ainda ficassem com dúvidas, explicávamos como deveriam fazer, mantendo o cuidado para não os influenciar em suas respostas. O *kit* com os materiais era entregue junto à primeira atividade. Passemos à análise dos resultados obtidos em cada uma das sessões que compõem a sequência didática.

5.1 ANÁLISE DA PRIMEIRA SESSÃO

A primeira sessão foi realizada em 28 de abril de 2022 e os nove estudantes (A2, A4, A6, A7, A8, A9, A10, B4 e B12) estavam presentes. Ela foi iniciada às 13h45min devido à espera por alguns participantes que se atrasaram, mas que certamente viriam segundo os que já haviam chegado. Nosso objetivo nessa sessão foi promover a familiarização dos participantes com alguns materiais que foram utilizados ao longo dos demais encontros como a malha quadriculada, papel pontilhado, régua não graduada, Tangram. Também pretendíamos retomar alguns elementos do campo da Geometria como retas paralelas, perpendiculares, ângulo reto, lados e ângulos opostos e congruentes, obtidos por meio de dobraduras em papel branco.

Antes de entregarmos as atividades uma a uma, cada estudante recebeu um *kit* com os materiais que poderiam utilizar naquele dia: régua não graduada, lápis de cor, lapiseira, tesoura sem ponta, Tangram tanto com peças coloridas em cartolina Guache quanto em papel ofício para recortar e pintar em casa. Após a realização das atividades, o *kit* era devolvido ao final de cada encontro. Vejamos uma foto do *kit* entregue nesse dia:

Figura 77 – Kit disponibilizado na primeira sessão



Fonte: acervo da pesquisa

Iniciamos a sessão apresentando a malha quadriculada, perguntando se a conheciam, se já utilizaram em aulas de Matemática ou outro componente curricular, conforme havíamos planejado. Apenas um estudante disse que a conhecia, embora, como explicitamos nas análises prévias, haja habilidades envolvendo seu uso na BNCC, no CPE e nos planejamentos dos professores, bem como atividades propostas nas apostilas e nos LD. No entanto, sabemos que o fato de aparecerem nesses documentos não garante sua efetiva utilização pelos estudantes. Já o papel pontilhado e a régua não graduada não eram conhecidos por eles.

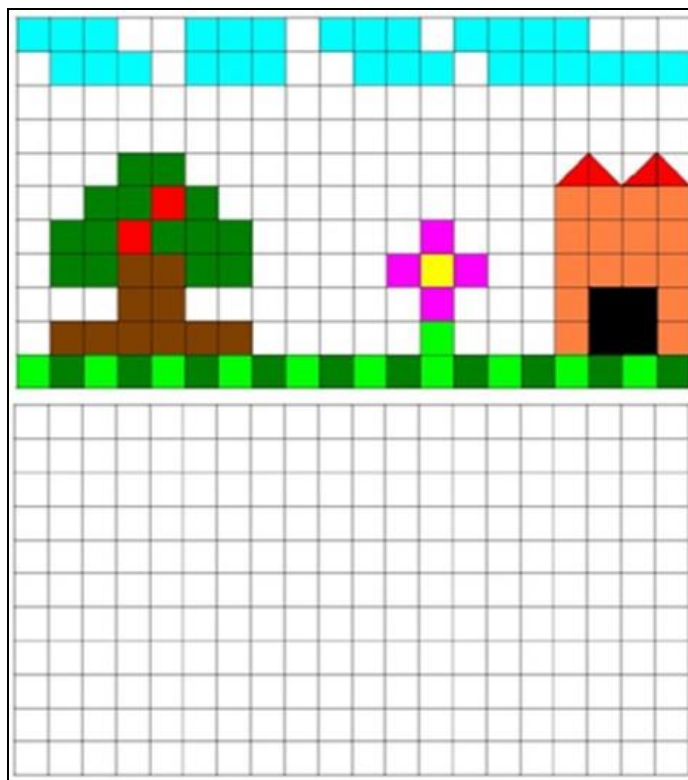
Em relação às atividades previstas em nossa análise a priori para essa sessão, realizamos em sala apenas três das cinco, visto que a última poderia ser feita em casa por eles, mas a quarta atividade não foi aplicada devido ao horário, justificado pelo atraso no início. De imediato, pensamos em deixá-la como uma atividade adicional para um momento em que eles concluíssem todas antes do intervalo de tempo previsto ou houvesse alguma necessidade. No entanto, ela foi utilizada no terceiro encontro, por razões que serão detalhadas mais adiante.

Como a primeira sessão foi apenas para familiarização, não fizemos uma análise aprofundada, estabelecendo relações com outros estudos e aspectos teóricos, como ocorre nas demais. Assim, destacamos apenas os elementos principais ligados ao seu objetivo, como a familiaridade dos participantes e as dificuldades identificadas no primeiro momento. Vamos utilizar extratos das respostas dos estudantes e recortes de suas falas durante as atividades para exemplificação.

Antes de iniciar, gostaríamos de destacar três pontos: o primeiro é que para a análise desta e das demais atividades das sessões, vamos priorizar os conhecimentos dos dois campos estudados e os procedimentos de resolução presentes nessas atividades. Mesmo assim, quando falarmos em acerto pleno, significa que o estudante acertou totalmente a atividade; o acerto parcial caracteriza-se quando ele acertou apenas parte dela; consideramos como erro quando não identificamos nenhum aspecto correto na resolução da atividade; a ausência de respostas é caracterizada quando o estudante devolveu a folha da maneira como a recebeu, sem nenhuma indicação de resposta. O segundo ponto consiste no fato de que no início da análise de cada uma das atividades das sessões vamos apresentar novamente a atividade, em tamanho reduzido, apenas para facilitar a compreensão do leitor, mas não são contabilizadas na contagem das figuras para evitar repetições e, conseqüentemente, contagens duplas. O terceiro e último ponto refere-se aos recortes das transcrições das filmagens e das gravações das entrevistas, nos quais P significa pesquisador e os estudantes são representados por A2, A4, A6, A7, A8, A9, A10, B4 e B12, como dito anteriormente. Usamos PAB sempre que houver

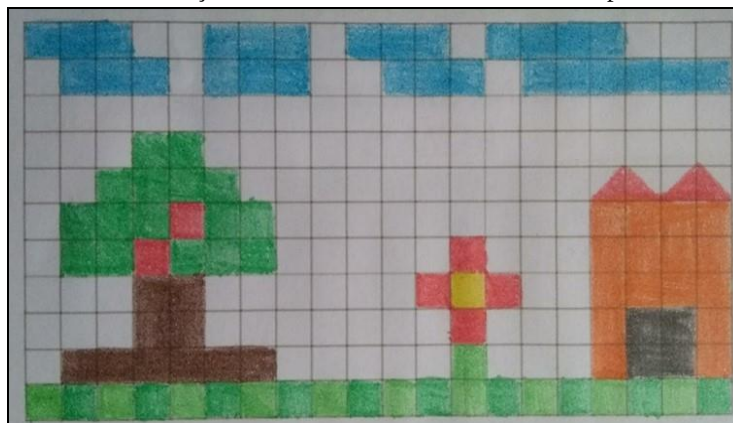
referência à professora de Matemática das turmas A e B. A primeira atividade retirada da dissertação de mestrado de Silva (2016) foi a seguinte:

Atividade 1: Observe a figura e em seguida reproduza-a na malha quadriculada:



Nesta atividade, os estudantes tiveram um bom desempenho, como previsto em nossa análise a priori, visto que sete obtiveram acerto pleno e nenhum deles a errou ou deixou sem respostas. Os dois acertos parciais foram decorrentes dos seguintes aspectos: erros na quantidade de quadradinhos que as figuras devem conter e distanciamento incorreto entre elas, como podemos observar no exemplo a seguir:

Figura 78 – Extrato da resolução de um estudante na atividade 1 da primeira sessão

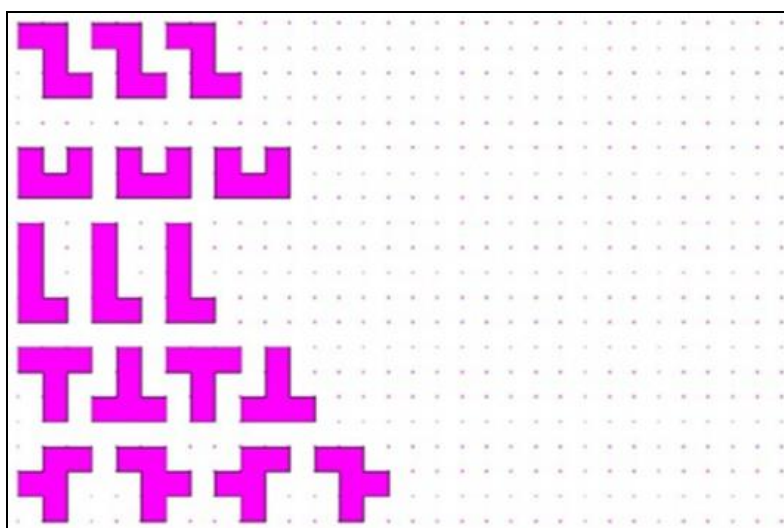


Fonte: Participante A2

No extrato acima temos um acerto parcial, pois o participante A2 apesar de ter reproduzido as demais figuras corretamente, errou na quantidade de quadradinhos que representam as folhas da árvore e, conseqüentemente, no distanciamento entre elas, o tronco e as nuvens, indicando uma dificuldade inicial ao lidar com atividades na malha quadriculada. O outro participante, mais precisamente A10, que também obteve acerto parcial, errou apenas no distanciamento entre as nuvens.

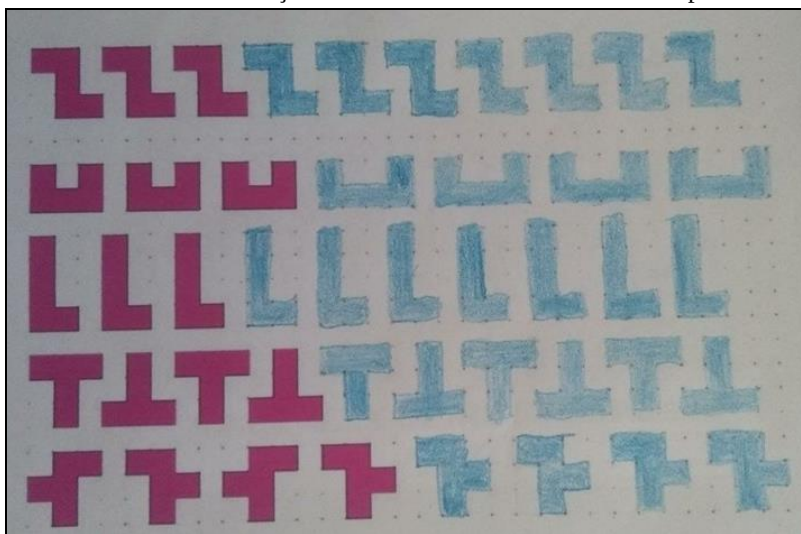
Durante a realização dessa atividade, ao passar de banca em banca, percebemos como procedimentos de resolução ligados aos esquemas mobilizados por esses estudantes que alguns deles marcaram apenas os pontinhos para depois pintar e outros já foram contando os quadradinhos e pintando. De modo geral, a familiarização com a malha quadriculada ocorreu de maneira satisfatória, considerando que se tratava do primeiro contato com esse recurso para muitos deles. Vamos à análise da próxima atividade que também foi retirada da dissertação de Silva (2016) e é apresentada a seguir:

Atividade 2: *Observe os padrões abaixo e continuem a reproduzi-los na malha pontilhada:*



Assim como previsto em nossa análise a priori, nesta atividade os estudantes apresentaram um pouco mais de dificuldades, visto que, além da quantidade de pontinhos a serem ligados e da distância entre eles, era preciso observar o padrão nas duas últimas. Dessa maneira, apenas três deles conseguiram realizar adequadamente toda a atividade. Não verificamos erros ou ausência de respostas. Seis estudantes tiveram acertos parciais, os quais foram provenientes de erros no distanciamento das figuras, na quantidade de pontinhos ligados formando quadradinhos e no padrão a ser seguido em algumas delas, apontando para um repertório de esquemas ainda em desenvolvimento para lidar com situações desse tipo. A seguir, apresentamos o extrato de um estudante para exemplificação:

Figura 79 – Extrato da resolução de um estudante na atividade 2 da primeira sessão



Fonte: Participante B4

Observamos que o participante reproduziu corretamente a primeira, terceira e quarta figuras, entretanto, errou na quantidade de pontinhos ligados formando quadradinhos na segunda e não seguiu o padrão na última figura. Os demais estudantes que também obtiveram acerto parcial, além do mostrado neste protocolo, erraram o distanciamento entre as figuras. A régua não graduada foi utilizada por alguns estudantes para auxiliar no traçado do contorno das figuras.

No decorrer da atividade 2 passamos nas bancas perguntando se estavam sentindo alguma dificuldade. O participante A8, comparando com a atividade 1, respondeu: “*Eu estou tendo mais dificuldade nessa*”. Ao final, outros estudantes também relataram ter sentido mais dificuldade na atividade 2, a qual pode ser justificada pelo fato de ser o primeiro contato com esse tipo de papel.

Orientamos os participantes que iam terminando essa atividade a manipularem as peças do Tangram, tentando formar algumas figuras, objetos ou animais, enquanto aguardávamos os demais finalizarem, visto que a atividade 3 seria realizada de maneira coletiva. Naquele momento, A8 e B12 iniciaram um diálogo:

A8: Vamos fazer alguma coisa? [Chamando B12 para fazer figuras com as peças do Tangram]⁵⁶

B12: Vamos.

A8: Bora. Oh um triângulo [levantando os triângulos grandes]. Que isso aqui hein? [Segurando o paralelogramo não retângulo e não losango].

B12: Pergunta ao professor. Aí a, um peixe [mostrando para A8 a construção de um peixe com as peças do Tangram].

⁵⁶ Os textos entre colchetes são acréscimos do pesquisador a partir de observações durante as sessões. Seu objetivo é ajudar o leitor a compreender as ações dos estudantes complementares às suas falas.

O recorte acima mostra que esses estudantes ainda não possuíam familiaridade com o paralelogramo não retângulo e não losango. Já o triângulo era uma figura conhecida e facilmente identificável por eles. Vejamos os resultados da última atividade realizada nesse encontro, a qual é apresentada em seguida:

Atividade 3: *Você está recebendo um pedaço de papel como o apresentado a seguir.*



Siga as instruções abaixo:

a) Dobre o papel uma vez, abra e cubra a marca encontrada com a cor azul. Em seguida, faça outra dobra e cubra a marca encontrada com a cor vermelha. Você sabe como se chamam as retas representadas por essas duas cores?

b) Tente determinar por meio de dobraduras uma reta que seja perpendicular à reta em azul. Se já encontrou na letra (a), passe para a próxima etapa.

c) Tente determinar por meio de dobraduras uma reta que seja paralela à reta em vermelho. Se já encontrou na letra (a), passe para a próxima etapa.

d) Tente fazer um retângulo por meio de dobraduras nesse pedaço de papel. É possível identificar quais lados são opostos? Quais possuem o mesmo comprimento? Como se chamam os ângulos internos dessa figura?

Realizamos a atividade acima de maneira coletiva, ou seja, íamos lendo, dando as orientações e realizando questionamentos a respeito de alguns termos. Nas observações de aulas que realizamos, verificamos que essa era uma prática bastante utilizada pela professora

da turma, a qual sempre fazia a leitura das atividades e explicava bem detalhadamente. Assim, preferimos não romper de imediato, e sim gradativamente, com o funcionamento habitual das aulas de Matemática, para evitar que eles achassem muito diferente e acabassem perdendo o interesse em continuar participando. Tanto nessas atividades da primeira sessão quanto na maioria das demais buscamos ler os enunciados e dizer o que deveriam fazer, sempre com o cuidado de não os influenciar nas respostas. Naquelas em que não fazíamos dessa maneira, alguns estudantes pediam para ler ou chamavam e perguntavam o que deveriam fazer.

Os resultados dos estudantes não se distanciaram muito dos observados nas outras duas atividades, visto que não houve ausência de respostas e seis deles conseguiram realizá-la corretamente. Porém, se não tivéssemos orientado, tentando resgatar algum conhecimento anterior do repertório de esquemas deles e, em alguns momentos, relembando as definições, poderiam ter apresentado mais dificuldades. Como o objetivo dessa sessão era realmente esse, não vimos problemas em tentar formular uma resposta coletiva a partir de questionamentos realizados, com as devidas explicações, quando necessário, conforme podemos observar nos recortes das transcrições das filmagens que seguem:

P: É, você dobrou, certo? Marcou em azul, depois deu outra dobra, marcou em vermelho. Aí a pergunta que tem na sua folha é: você sabe como se chamam as retas representadas por essas duas cores? [A maioria respondeu: não!].

A10: Y e Z

P: A10 falou que acha que é Y e Z. Ele acha que as retas representadas por ele é Y e Z⁵⁷.

Como podemos observar, na letra (a) da atividade, os estudantes não responderam adequadamente como se chamavam as retas representadas por eles. O participante A10 falou que era Y e Z, provavelmente, associando ao plano cartesiano, com uma pequena troca de X por Z. Essa inferência se deve ao fato de termos observado que praticamente todos fizeram retas perpendiculares em suas dobras. Nesse sentido, A10 associou-a ao eixo das abscissas e ao das ordenadas. Cabe ressaltar que o comando da atividade pode ter influenciado nesse tipo de resposta, pois perguntou como se chamavam as retas e não a relação entre elas. Nesse sentido, pode ter ocorrido uma incompreensão do que estava sendo perguntado e não necessariamente uma falta de conhecimento.

Ao perguntarmos se lembravam quando duas retas eram paralelas, a maioria respondeu que sim, embora com dúvidas se, realmente, fizeram desse tipo. Assim, questionamos se algum deles fez retas que não possuem ponto em comum, todos responderam

⁵⁷ Por vezes, o uso de máscaras de proteção dificultou um pouco a compreensão de algumas falas, principalmente daqueles estudantes mais tímidos ou que falavam baixinho com o colega. Por isso, perguntamos mais de uma vez, repetimos as suas falas para confirmar o entendimento ou pedimos para que repetissem.

que não. Em relação às perpendiculares foi o contrário, responderam que não lembravam. B12 disse: “*Nunca nem vi o nome!*”. Elementos do campo da Geometria como paralelismo e perpendicularidade também foram fontes de dificuldades por parte dos estudantes na pesquisa de Tavares (2014). Em seguida, perguntamos como foram as retas produzidas por eles e obtivemos as seguintes respostas:

A10: Uma cruz. [Alguém falou baixinho que todo mundo fez igual].

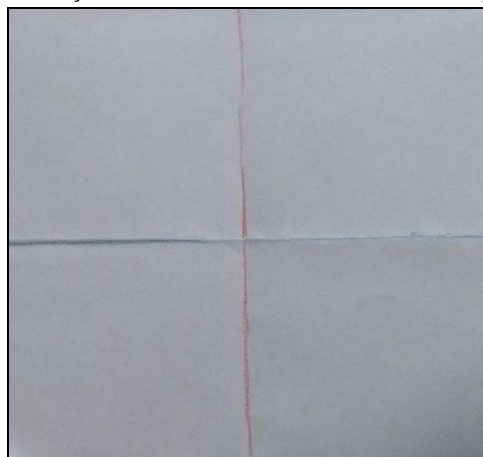
P: Todo mundo fez igual?

A8: É mais simples.

A6: Simplesinha.

A partir do recorte acima, notamos que todos fizeram retas concorrentes, embora não lembrassem esse nome e nem que seriam perpendiculares, como vimos nos recortes anteriores. O extrato abaixo exemplifica a posição relativa das retas obtidas por eles:

Figura 80 – Extrato da resolução de um estudante na atividade 3 da primeira sessão



Fonte: Participante B12

Ao fazer como apresentado nesta representação simbólica, já responderam ao solicitado na letra (b), porém nem todos conseguiram obter ângulos retos devido às dobraduras não formarem um ângulo cuja abertura é 90° .

Na obtenção de retas paralelas, letra (c), apresentaram um pouco mais de dificuldades. Diante das dúvidas apresentadas, passamos nas bancas orientando-os e questionando-os sobre as dobraduras que haviam feito. Vejamos algumas falas:

A8: Aí, eu fiz assim [mostra como fez as dobraduras].

P: Aí você dobrou, marcou aqui. Se você dobrar aqui em cima, da, da dobra, aqui assim [mostramos para ele como fazer]. Quais são as paralelas aí?

A8: Paralelas? Não tem paralela aqui não.

P: Em relação à vermelha?

A8: Não tem não.

P: Quando eu pegar a vermelha, tem alguma reta que não tem ponto em comum nenhum com ela?

A8: Não.

P: Tem não? Essa reta aqui não tem nenhum ponto em comum com a vermelha?

A8: Tem.

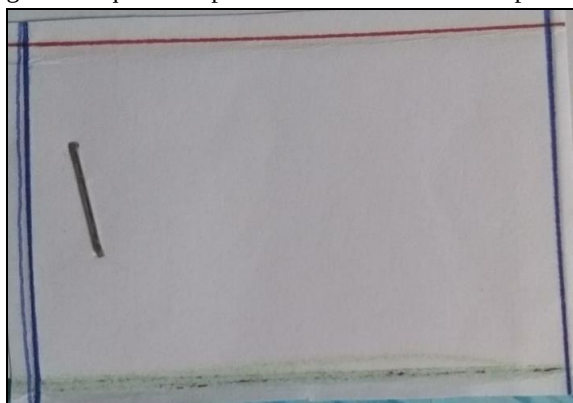
P: Tem? [Ele balança a cabeça que sim]. Qual é o ponto? [Ele pensa um pouco].

A8: Num sei não.

Observamos no recorte acima que o estudante apresenta dúvidas relativas à compreensão do que seja uma reta paralela, embora os documentos que analisamos (Brasil, 2018; Pernambuco, 2019, 2020a, 2020b) e os planejamentos dos professores já apresentassem habilidade voltada à representação de retas perpendiculares e paralelas com a utilização de instrumentos desde o 6º ano do Ensino Fundamental.

Por último, na obtenção de um retângulo por meio de dobraduras, letra (d), apesar de muitos estudantes não terem devolvido o pedaço de papel, percebemos que se manifestaram menos em relação a chamar para tirar dúvidas, provavelmente, por já terem encontrado retas perpendiculares e paralelas que poderiam ser utilizadas como lados desse retângulo. Vejamos uma produção de um dos participantes:

Figura 81 – Retângulo não quadrado produzido na atividade 3 da primeira sessão



Fonte: Participante A8

O retângulo produzido pelo participante A8 foi a partir das retas já encontradas nas letras anteriores e encontra-se em seu desenho prototípico. Ao final desse momento, recortamos uma figura que havíamos construído junto com eles e fizemos uma discussão coletiva identificando as cores que representavam pares de retas perpendiculares, paralelas, lados opostos e de mesmo comprimento. Orientamos que “*P: [...] vocês em casa podem pegar pedaços de papel e ir treinando, tenta fazer uma reta perpendicular, depois tenta fazer uma reta paralela com qualquer pedaço de papel irregular mesmo vocês conseguem fazer isso aí, tá?*”.

De modo geral, a primeira sessão contribuiu em três pontos: o primeiro foi a familiarização dos materiais que, apesar de terem apresentado algumas dificuldades na quantidade de quadradinhos e de pontinhos, distanciamento entre eles e no padrão a ser seguido para reprodução de determinadas figuras, todos eles conseguiram fazer pelo menos parcialmente a atividade, apontando para um repertório de esquemas ainda em

desenvolvimento para lidar com situações desse tipo; o segundo ponto é relativo à sua função de diagnóstico dos conhecimentos desses estudantes a respeito dos temas tratados, o qual evidenciou dificuldades relacionadas à compreensão e explicitação (forma predicativa do conhecimento) sobre retas perpendiculares e paralelas; por fim, o terceiro e último ponto se refere ao começo da construção de um vínculo entre pesquisador e participantes. No início, pareciam bem tímidos e envergonhados porque estavam sendo filmados, mas participaram bem ao final desse encontro.

Em relação às outras duas atividades previstas para essa sessão, a quarta ficou para outro momento, mais precisamente, para ser utilizada na terceira sessão e a atividade complementar pedimos que tentassem fazer em casa.

5.2 ANÁLISE DA SEGUNDA SESSÃO

A segunda sessão foi realizada em 05 de maio de 2022 e contamos com a participação de sete (A2, A6, A7, A8, A9, A10 e B12) dos nove estudantes. Ela foi iniciada às 13h40min devido à espera por alguns participantes que achávamos que viriam. Nosso objetivo nessa sessão foi conhecer os quadriláteros que são priorizados pelos estudantes em seus desenhos e os critérios utilizados por eles para agrupá-los, trabalhando, ainda que de maneira indireta, as classes de situações de construção, identificação, classificação e inclusão.

A verificação de congruências de lados e de ângulos com uso de estratégias não numéricas também poderia ser observada. Para tanto, disponibilizamos régua não graduada e papel transparente. Além desses, o *kit* continha tesoura sem ponta, fita adesiva, lapiseira e uma caneta hidrográfica. A atividade 1, realizada individualmente, tinha o seguinte enunciado:

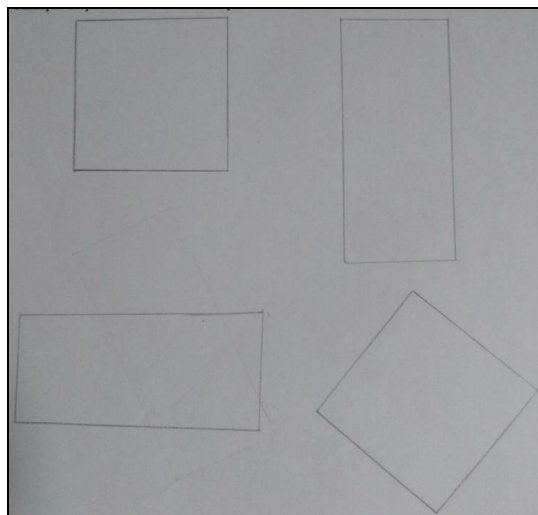
A atividade 1: Desenhe oito figuras diferentes, sendo quatro no papel branco e quatro no papel pontilhado, com a condição de que cada uma delas tenha quatro lados.

A tarefa cognitiva do estudante nesta atividade pertencente à classe de situações de construção, campo da Geometria, era fazer desenhos correspondentes às figuras solicitadas, a partir dos quais foi possível conhecer os quadriláteros priorizados por eles. Apenas um estudante não utilizou a régua não graduada para ajudar no traçado das figuras.

Em relação aos resultados obtidos, conforme previsto em nossa análise a priori, o quadrado foi a figura mais desenhada, aparecendo nas representações simbólicas de todos os

estudantes. Vejamos um extrato dos desenhos realizados pelo participante A2 no papel branco:

Figura 82 – Quadrados e retângulos não quadrados desenhados em papel branco na atividade 1 da segunda sessão



Fonte: Participante A2

Neste recorte temos quadrados e retângulos não quadrados, tanto em desenhos prototípicos quanto em não prototípicos ou que se aproximam do prototípico como é o caso do retângulo não quadrado com o lado de maior comprimento na posição vertical. Como o enunciado solicitava que fossem desenhadas quatro figuras diferentes no papel branco, podemos inferir que esse participante, assim como previsto em nossa análise a priori e observado nos estudos de Diniz (2013) e Pereira da Costa (2016), considerou a posição em que as figuras estão representadas como elemento que as distinguem. Assim, apesar de serem quadrados e retângulos não quadrados que aparentam ser congruentes, A2 tratou-os como figuras distintas, mobilizando uma concepção segundo a qual figuras que não estão exatamente na mesma posição são diferentes. Em outras palavras, possivelmente para ele, desde que modifique a posição já não é mais a mesma figura. Vejamos o que disse um deles:

A6: Oh, professor, se mudar de posição? Assim, por exemplo [mostrando como havia feito].

P: É, A6, né? Você acha que elas são diferentes?

A6: De certa forma, sim?

P: De certa forma como?

A6: Uma tá de, na diagonal e a outra, tá...

P: Se você achar que são diferentes, tá.

A6: Assim, sim mesmo, ah. O importante é ter quatro lados, né?

P: Isso, uma figura de quatro lados, né. [Fez um desenho e disse]:

A6: Continua sendo quadrilátero.

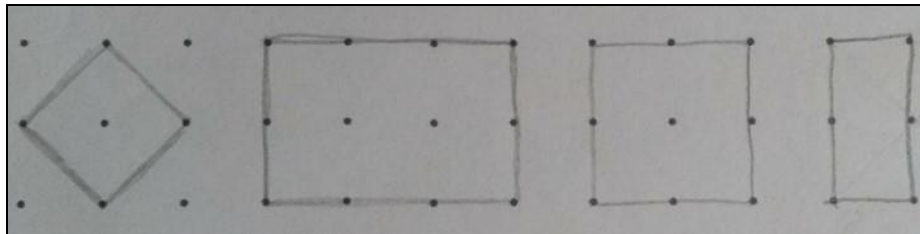
P: Você acha?

A6: Sim.

O fato de considerar a posição em que figuras parecidas ou aparentemente congruentes estavam desenhadas como elemento que as distingue foi observado em cinco dos sete

participantes presentes nesse encontro, não apenas no papel branco, mas também no pontilhado como podemos ver na representação simbólica a seguir:

Figura 83 – Quadrados e retângulos não quadrados desenhados em papel pontilhado na atividade 1 da segunda sessão

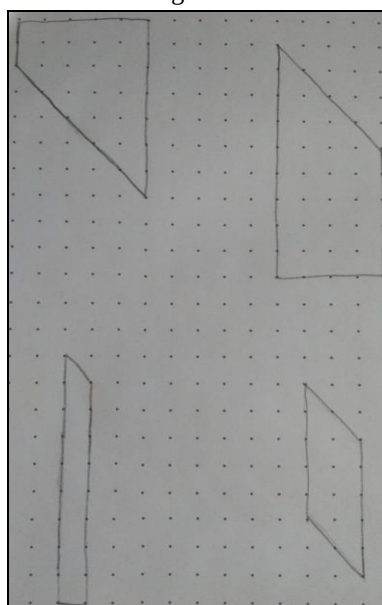


Fonte: Participante B12

Mais uma vez, temos desenhos prototípicos e não prototípicos de quadrados e retângulos não quadrados. Nesse caso, as figuras não são congruentes diferentemente das anteriores desenhadas pelo participante A2, mesmo se tratando de quadrados e retângulos não quadrados. As respostas apresentadas por B12 apontam para uma possível relação forte dele com figuras que possuem lados perpendiculares entre si, pois não desenhou nenhum quadrilátero que tivesse lados adjacentes oblíquos. Supomos que o fato de exigir figuras diferentes contribuiu para a aparição de desenhos não prototípicos, que poderia não ser dessa maneira se tivéssemos pedido apenas a representação de uma unidade de cada figura.

Os retângulos não quadrados, juntamente aos paralelogramos não retângulos e não losangos e os trapézios foram o segundo grupo de figuras mais desenhado pelos estudantes, mais precisamente, por seis dos sete presentes. A figura a seguir contempla um recorte de um deles:

Figura 84 – Trapézios e paralelogramo não retângulo e não losango desenhados em papel pontilhado na atividade 1 da segunda sessão

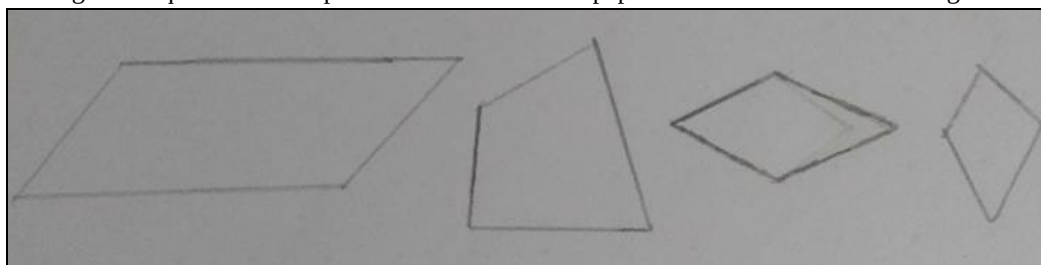


Fonte: Participante A9

Observamos trapézios retângulos em diferentes posições e um paralelogramo não retângulo e não losango em desenho não prototípico. Trapézios isósceles e escaleno também foram verificados em respostas de outros participantes. A possibilidade de representarem simbolicamente essas figuras não foi descartada em nossa análise a priori, visto que são estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e espera-se que já tenham lidado com tais representações, conforme vimos nos documentos analisados (Brasil, 2018; Pernambuco, 2019, 2020a, 2020b).

Apenas três dos sete participantes dessa sessão tentaram desenhar losangos não quadrados. Esse mesmo quantitativo fez desenhos de trapezoides, como apresentamos a seguir:

Figura 85 – Losangos não quadrados e trapezoides desenhados em papel branco na atividade 1 da segunda sessão



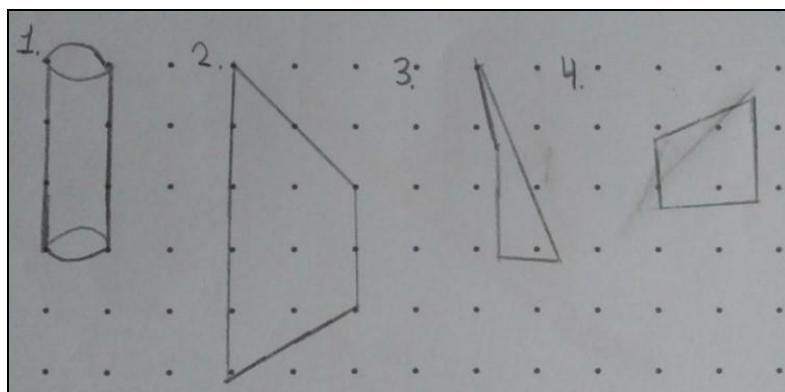
Fonte: Participante B12

Além do trapezoide e do losango não quadrado em desenho prototípico, ambos centralizados, vemos à esquerda um paralelogramo não retângulo e não losango também em desenho prototípico e, à direita, a tentativa de fazer o desenho de um losango não quadrado que se aproxima do prototípico, mas evidentemente, os lados não possuem o mesmo comprimento. Percebemos marcas nos dois desenhos da direita que indicam tentativas de desenhar corretamente um losango não quadrado. A dificuldade ao lidar com situações envolvendo esse tipo de paralelogramo foi observada em estudos anteriores como Araújo (2018), Bernardes, Souza e Zandonade (2014), Diniz (2013), Fujita (2012), Menegotto e Lara (2011), entre outros.

A possibilidade de surgirem desenhos de trapézios e de quadriláteros não notáveis, como é o caso dos trapezoides, não foi descartada em nossa análise a priori. Isso se deve ao fato de termos observado nas análises prévias, mais especificamente no capítulo sobre quadriláteros do LD do 8º ano, (Silveira, 2018c), situações de classificação que pediam para o estudante classificar os trapézios em retângulos, isósceles ou escalenos, e de inclusão, que solicitavam que fosse apresentada a diferença entre trapézio e trapezoide. Isso indica que esses estudantes ao terem, possivelmente, vivenciado essas atividades, desenvolveram um repertório de esquemas envolvendo essas figuras e o utilizaram nesse momento da atividade.

Entre os desenhos apresentados como resposta nessa atividade 1, verificamos que três estudantes fizeram uma figura parecida com um cilindro, apontando para uma incompreensão da mudança dimensional entre figuras geométricas planas e espaciais. Um deles também desenhou outra que aparenta ser um quadrilátero não convexo, como mostrado em seguida:

Figura 86 – Cilindro e quadrilátero não convexo desenhados em papel pontilhado na atividade 1 da segunda sessão



Fonte: Participante A10

Os desenhos 1 e 3 aparentam ser, respectivamente, um cilindro e um quadrilátero, não convexo, este último contemplado no grupo dos não notáveis, previsto em nossa análise a priori. Já o segundo desenho representa um trapézio escaleno e no 4 temos uma tentativa de fazer um trapézio retângulo. O participante A10, na tentativa de desenhar figuras de quatro lados não usuais, indo além de quadrados e retângulos não quadrados, falou sobre a possibilidade de o cilindro ser um quadrilátero:

A10: O cilindro eu acho que tem quatro lados.

P: Oi.

A10: O cilindro tem quatro lados.

P: Você acha que o cilindro tem quatro lados? [Gesticulando ele conta]:

A10: Um [mostrando o lado direito com a mão], dois [mostrando o lado esquerdo com a mão], três [mostrando a parte inferior com a mão], quatro [mostrando a parte superior com a mão].

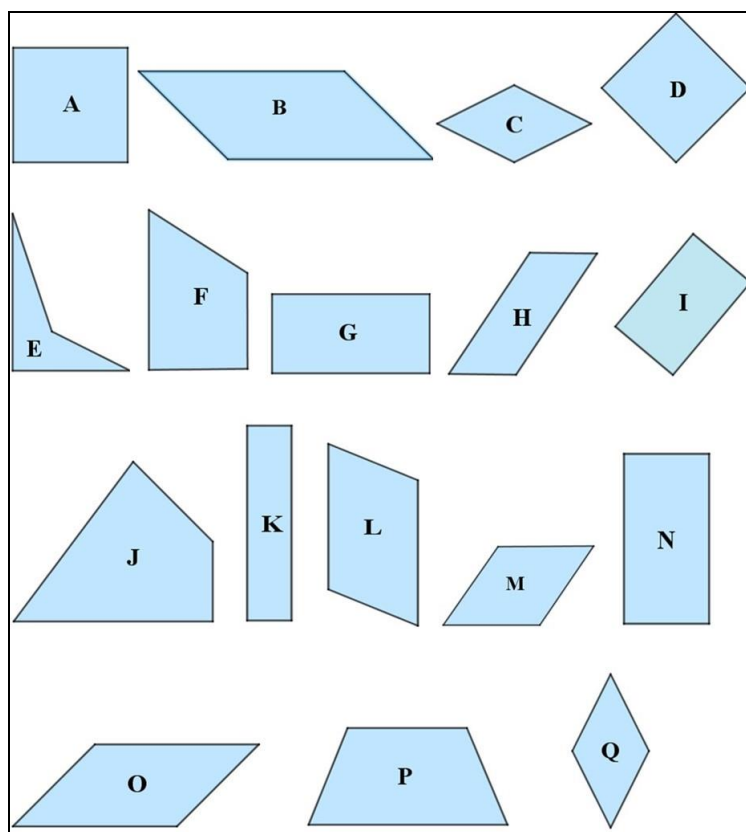
A representação de figuras espaciais no plano o fez utilizar o termo “lados” para designar tanto os segmentos correspondentes às faces quanto as bases circulares de um cilindro. Como vimos nas análises prévias, no estudo desenvolvido por Fujita (2012), figuras planas como o losango não quadrado foi associado a objetos tridimensionais, como um diamante, por exemplo. Nesse caso, talvez, fosse interessante em sala de aula propor diferentes atividades com objetos físicos representando figuras espaciais para desestabilizar esse conhecimento errôneo por parte de A10.

De modo geral, a atividade 1 possibilitou perceber que os participantes predominantemente mobilizaram os conceitos em ação quadrado e retângulo não quadrado para representar quadriláteros. As figuras que não são desse tipo, como paralelogramos não

retângulos e não losangos, trapézios, entre outras, foram menos exploradas. O losango não quadrado e quadriláteros não notáveis como o trapezoide e o não convexo também foram observados, assim como a representação de cilindros. Percebemos ainda que utilizaram desenhos prototípicos e não prototípicos e consideraram figuras semelhantes ou aparentemente congruentes em posições diferentes como distintas. Mas quais os critérios utilizados por eles para agruparem diferentes quadriláteros? Passemos à análise e discussão da atividade 2 que trata desse aspecto.

A atividade 2 foi realizada, inicialmente, de maneira individual. Em seguida, pedimos que eles se juntassem em grupos para discutir as respostas dadas e tentar chegar a um consenso, estabelecendo critérios para agrupamentos comuns ao grupo, sem alterar o que haviam feito individualmente. Nela, foi possível conhecer os critérios utilizados por eles para agrupar diferentes quadriláteros, trabalhando ainda que de maneira indireta, as classes de situações identificação, classificação e inclusão. O conhecimento sobre as propriedades das figuras foi mobilizado de forma operatória. A atividade foi a seguinte:

Atividade 2: Você está recebendo as figuras representadas a seguir e algumas folhas em branco. Cole-as nas folhas em branco, agrupando-as a partir de características que você considera comuns entre elas. Coloque o título do agrupamento considerado em cada folha.



Como dito no início da análise dessa segunda sessão, cada estudante recebeu uma cópia de cada figura acima, folhas brancas, fita adesiva para realizarem as colagens, régua não graduada, papel transparente e caneta hidrográfica. Caso precisassem de mais cópias ou folhas, poderiam levantar e pegar várias outras que ficaram sobre a mesa do professor. No trabalho em grupos, mais cópias foram entregues a cada um deles.

Apresentamos no quadro a seguir os critérios apontados pelos participantes para agrupamento das figuras:

Quadro 36 – Critérios e agrupamentos estabelecidos pelos estudantes individualmente

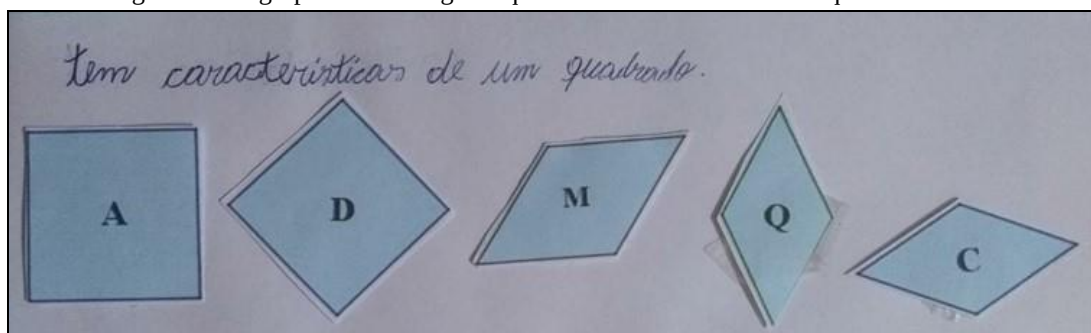
Participantes	Critérios	Figuras agrupadas
A2	Figuras que parecem um quadrado	A, C, D, M, Q
	Figuras que parecem quadrados esticados	B, G, H, I, K, L, N, O
A6	Figuras com formato parecido em ângulos diferentes	B, H, L, M, O
	Figuras que possuem laços ⁵⁸ parecidos	G, I, N, K
A7	Figuras que parecem quadrados em ângulos diferentes	A, C, D, M, Q
	Figuras que parecem retângulos	B, G, H, I, K, L, N, O
A8	Quadrados	A, D, G, K, N
	Figuras parecidas porque têm lados pontiagudos	B, C, H, I, L, M, O
	Figuras diferentes das outras	E, F, J, P, Q
A9	Figuras que têm características de um quadrado	A, C, D, M, Q
	Figuras que têm ângulos diferentes	B, G, H, I, K, L, N, O
	Figuras que não têm ângulos parecidos	E, F, J, P
A10	“As comuns: são as normais que nós vemos no dia a dia”	A, B, C
	“As anormais: são as que raramente vemos”	E, F, J
	“As queridinhas: são as que nós vemos na rua ou etc.”	D, G, K, N, O
B12	Figuras que parecem um quadrado	A, D, G, K, N
	Figuras parecidas porque se parecem	B, H, I, L, M, O
	Figuras diferentes por causa do formato	C, E, F, J, P

Fonte: dados da pesquisa

A partir do quadro acima, podemos perceber que o critério mais utilizado para agrupamento, cinco dos sete estudantes, foi o das figuras que parecem, têm características ou são quadrados. No entanto, as figuras agrupadas não foram as mesmas, uma vez que A2, A7 e A9 fizeram um tipo de agrupamento e A8 e B12 fizeram outro, como vemos nos recortes a seguir:

⁵⁸ Termo usado pelo participante e depois pelo grupo para designar características parecidas em determinadas figuras.

Figura 87 – Agrupamento de figuras que têm características de um quadrado

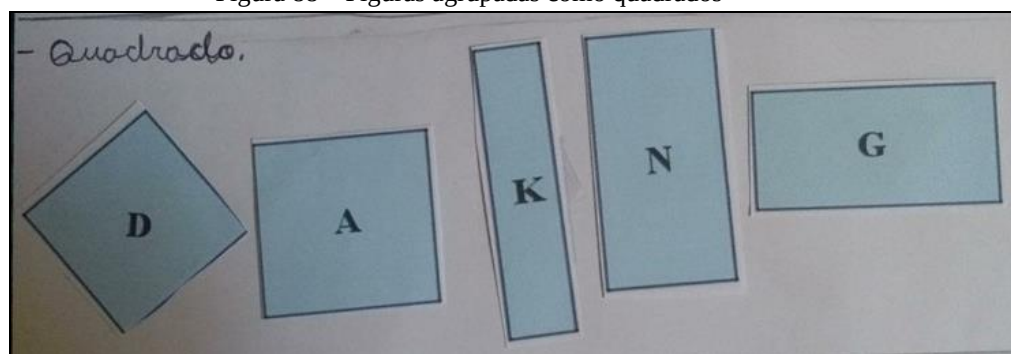


Fonte: Participante A9

O agrupamento realizado por A9 também foi o mesmo de A2 e A7. Percebemos que eles incluíram aos quadrados (A e D) e os losangos que não são quadrados (C, M e Q). Não consideramos as respostas apresentadas por eles como incorretas porque, diferentemente do caso que veremos adiante, eles não afirmaram que são quadrados, mas que têm características ou se parecem com um quadrado. No caso, todas possuem os quatro lados de mesmo comprimento.

Como discutido nas análises prévias e previsto em nossa análise a priori, o quadrado é uma figura com a qual já possuem um certo conhecimento, de tal maneira que todos produziram quadrados na atividade anterior e, agora, a maioria se apoiou nesse tipo de paralelogramo para agrupar os quadriláteros fornecidos. Vejamos outro recorte para esse mesmo critério:

Figura 88 – Figuras agrupadas como quadrados



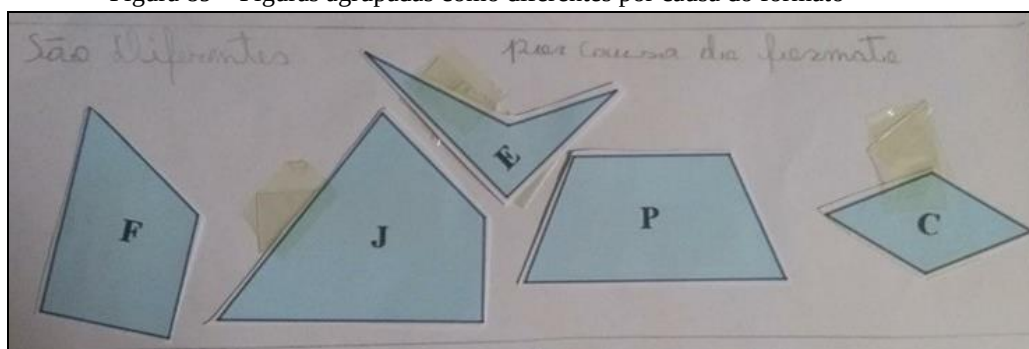
Fonte: Participante A8

O agrupamento acima representa as respostas dadas por A8 e B12 que também se apoiaram no quadrado para estabelecer o critério. No entanto, há uma diferença: o participante A8 escreveu que as figuras são quadrados, o que não é verdade, pois temos retângulos não quadrados (G, K e N); B12 apesar de ter utilizado as mesmas figuras em seu agrupamento, apontou que elas parecem um quadrado. Em resumo, os três participantes anteriores, A2, A7 e A10, incluíram os losangos não quadrados e esses dois, A8 e B12, colaram retângulos não quadrados, com exceção da figura (I), possivelmente, por estar inclinada para a direita. Assim,

mesmo não explicitando (forma prediativa do conhecimento), pareceram mobilizar (forma operatória do conhecimento) propriedades dos losangos e dos retângulos para os quadrados, como os lados de mesmo comprimento e os quatro ângulos retos, respectivamente. Considerar o losango não quadrado e o retângulo não quadrado como quadrado também foi verificado nas pesquisas de Menegotto e Lara (2011) e Tavares (2014), respectivamente.

O segundo critério mais utilizado pelos participantes nos agrupamentos, por quatro dos sete, foi aquele que aponta as figuras como diferentes, “anormais” ou que não se parecem. Vejamos um extrato de um dos estudantes:

Figura 89 – Figuras agrupadas como diferentes por causa do formato



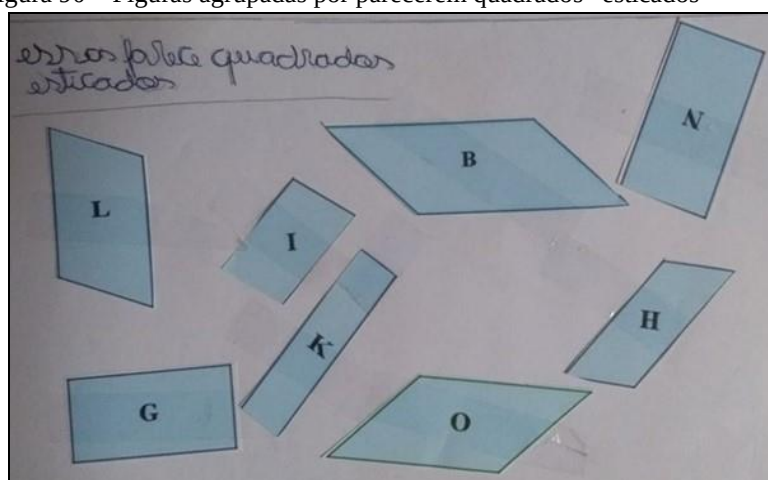
Fonte: Participante B12

Algo em comum nos agrupamentos desses quatro participantes é a presença dos quadriláteros não notáveis (E e J) e do trapézio retângulo (F). Apenas um deles não incluiu o trapézio isósceles (P). De certa maneira, eles perceberam algo que não é comum entre essas figuras e os paralelogramos, mas não conseguiram explicitar, acarretando uma dificuldade na forma prediativa do conhecimento. Apontaram apenas como diferentes em algum aspecto ou “anormais”, como fez A10.

No agrupamento acima, percebemos a presença do losango não quadrado em desenho prototípico (C). O participante A8 também incluiu um losango não quadrado, mas foi o que estava em um desenho que se aproxima do prototípico, a figura (Q). Assim como na atividade anterior, o losango não quadrado se apresenta como algo não muito comum para esses participantes, corroborando com nossas discussões nas análises prévias.

As figuras (B, G, H, I, K, L, N e O) apareceram em agrupamentos de três estudantes, porém baseadas em critérios diferentes. Vejamos um extrato:

Figura 90 – Figuras agrupadas por parecerem quadrados “esticados”



Fonte: Participante A2

A partir do exemplo acima, é possível perceber que mesmo quando não estavam agrupando quadrados, eles o tomavam como referência. No caso exemplificado, o participante A2 considerou os paralelogramos não retângulos e não losangos (B, H, L e O) e os retângulos não quadrados (G, I, K e N) como quadrados “esticados”, levando em consideração o formato das figuras como critério para agrupá-las, assim como verificado nos estudos de Diniz (2013) e Fujita (2012). A participante A7 agrupou essas mesmas figuras por parecerem retângulos, considerando, possivelmente, o paralelogramo não retângulo e não losango como um retângulo deformado, conforme vimos nas pesquisas francesas de Baltar (1996) e Douady e Perrin-Glorian (1989). No estudo de Tavares (2014), o paralelogramo não retângulo e não losango foi definido pelos participantes como um “gênero de retângulo”, porém mais inclinado para um lado. Já A9 agrupou-as afirmando que possuem ângulos diferentes, talvez, pelo fato de umas possuírem ângulos retos e outras, não, mas isso não foi explicitado nem percebido em sua fala em nenhum momento.

Havíamos pensado em nossa análise a priori no modo como os participantes iriam colar as figuras: se considerariam a maneira correta para leitura das letras em seu interior ou se iriam priorizar determinada posição da figura independente da letra escrita internamente a ela. A partir dos agrupamentos realizados percebemos que não houve um padrão nas colagens, os quais ora colavam na posição convencional de leitura, ora inclinadas ou invertidas.

Nos agrupamentos individuais não percebemos critérios levando em consideração propriedades dos paralelogramos com os que foram trabalhados posteriormente na quarta sessão, reforçando ainda mais a necessidade de sua realização.

Após o momento de trabalho individual, pedimos que se juntassem em grupos para discutirem os agrupamentos realizados, tentarem chegar a um consenso e apresentassem

agrupamentos a partir de critérios comuns ao grupo, sem alterar o que já haviam feito. O quadro a seguir contém o detalhamento de cada deles e as escolhas realizadas:

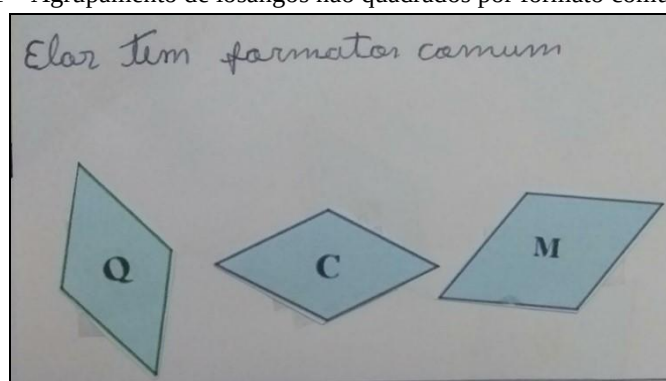
Quadro 37 – Critérios e agrupamentos estabelecidos pelos estudantes em grupos

Grupos	Critérios	Figuras agrupadas
(A6, A8, B12)	Quadrados	A, D, G, K, N
	Figuras que têm formato comum	C, M, Q
	Figuras que possuem laços parecidos	G, I, K, N
	Figuras diferentes por causa do formato	C, E, F, J, P
(A2, A9, A10)	Figuras que têm as mesmas características: em todas há quatro lados, mas em ângulos diferentes	B, C, D, G, K, N
A7⁵⁹	Figuras que lembram quadrado	A, C, D, M, Q
	Figuras que lembram retângulo	B, G, H, I, K, L, N, O, P

Fonte: dados da pesquisa

O primeiro grupo, formado pelos participantes (A6, A8 e B12), incluiu um novo critério em relação ao que haviam feito individualmente: “elas têm formato em comum”, cujo agrupamento realizado é apresentado a seguir:

Figura 91 – Agrupamento de losangos não quadrados por formato comum



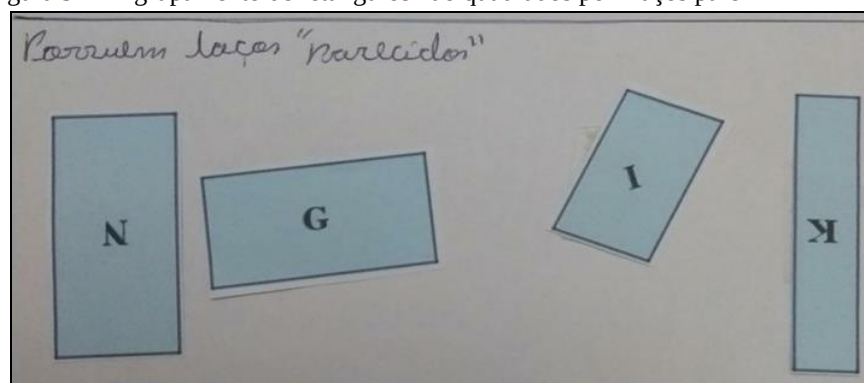
Fonte: Participantes (A6, A8 e B12)

Como vemos, esse grupo se apoiou no aspecto visual, também observado nas pesquisas de Diniz (2013), Fujita (2012) e Tavares (2014), para agrupar os losangos não quadrados. Esses participantes se apoiaram mais em uma percepção global das figuras do que em um vocabulário relativo a seus elementos. No caso acima, mesmo não utilizando adequadamente esse vocabulário, eles agruparam os losangos não quadrados. Esse critério foi originado nas discussões em grupo, visto que os demais foram selecionados pegando um de cada participante em suas respectivas respostas individuais. As figuras agrupadas como quadrados (participante A8) e as que são diferentes por causa do formato (participante B12) já foram discutidas nas figuras 88 e 89, respectivamente. O participante A6 utilizou em seu

⁵⁹ No dia em que o encontro foi realizado, a participante A7 fez a atividade juntamente com outras duas estudantes que desistiram ao longo da experimentação e, pelos motivos já apresentados, não serão contabilizadas nem analisadas as suas produções. O mesmo vale para as demais sessões em que os participantes realizaram atividades com estudantes que desistiram ao longo dos encontros.

agrupamento individual, que também foi incorporado aos do grupo, o critério para colar aquelas que “possuem laços parecidos”, como mostrado a seguir:

Figura 92 – Agrupamento de retângulos não quadrados por “laços parecidos”

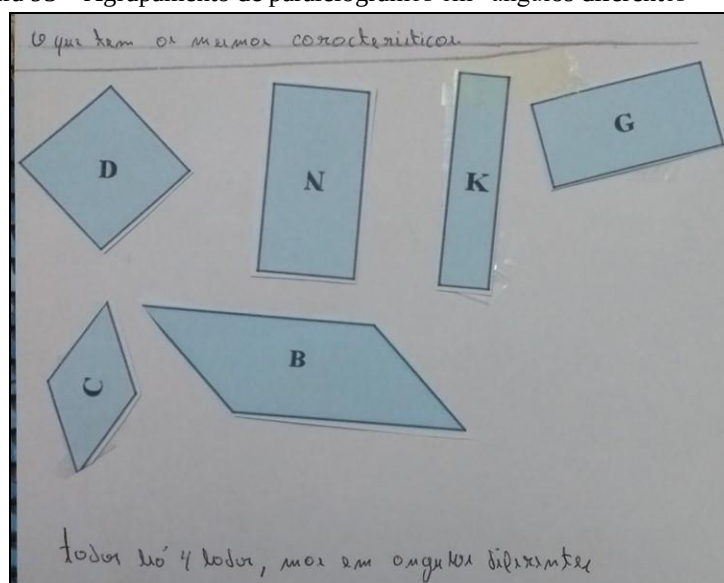


Fonte: Participantes (A6, A8 e B12)

O critério “laços parecidos”, também ligado à aparência, pois designa características parecidas em determinadas figuras, foi utilizado pelo grupo para agrupar os retângulos não quadrados que, como dito acima, partiu inicialmente do participante A6. Percebemos ainda que a posição convencional de leitura das letras não foi considerada, visto que algumas foram coladas invertidas.

O segundo grupo, formado pelos participantes (A2, A9 e A10), criaram um critério único para agrupamento das figuras, o qual teve um caráter mais próximo de uma propriedade: figuras “que têm as mesmas características: em todas há quatro lados, mas em ângulos diferentes”. Vejamos:

Figura 93 – Agrupamento de paralelogramos em “ângulos diferentes”



Fonte: Participantes (A2, A9 e A10)

O agrupamento acima não deixa muito claro o que foi levado em consideração, pois incluíram um quadrado e o outro, não; o mesmo com o losango não quadrado e com o

paralelogramo não retângulo e não losango. O participante A2 ao apresentar o que havia feito a A9 e A10, falou um pouco sobre as figuras que parecem quadrados “esticados”:

A2: Se parecem com um quadrado. [Se referindo aos paralelogramos não retângulos e não losangos (B, H, L e O) e aos retângulos não quadrados (G, I, K e N)].

A10: Se parecem com um quadrado?

A2: É. Se parecem com um quadrado, só que meio esticado.

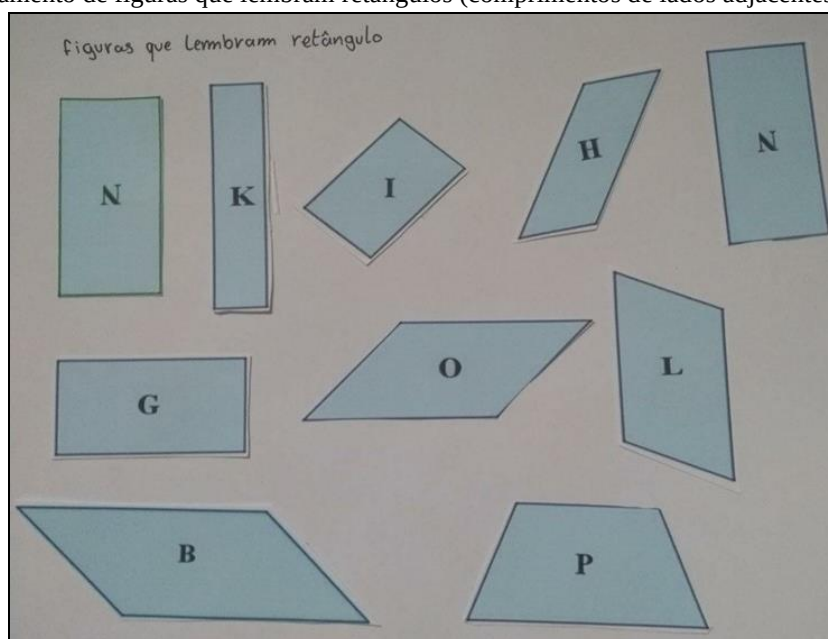
A10: Meio esticado. É, meio diferente.

A2: É, meio diferente.

Embora tenham discutido brevemente os critérios individuais de agrupamentos, nenhum dos nove critérios propostos pelos três estudantes foi considerado no agrupamento final coletivo.

No terceiro e último grupo, permaneceram os dois critérios elencados individualmente pela participante A7, um deles relativo às figuras que lembram quadrados, cujo agrupamento semelhante pode ser observado na figura 87 e outro relacionado às figuras que lembram retângulo, também já discutido anteriormente, porém com uma alteração, na qual foi incorporado o trapézio isósceles (P), como mostrado a seguir:

Figura 94 – Agrupamento de figuras que lembram retângulos (comprimentos de lados adjacentes diferentes)



Fonte: Participante A7

Nas figuras que “lembram retângulo” agrupadas por A7, percebemos, além dos retângulos não quadrados (G, I, K e N), paralelogramos não retângulos e não losangos (B, H, L e O) e o trapézio isósceles (P). A inclusão deste último foi nova em relação a sua resposta anterior e, a partir dela, é provável que a participante tenha levado em consideração a aparência das figuras. Outra possibilidade de interpretação é que A7 tenha considerado como

critério que os lados adjacentes da figura têm comprimentos diferentes. A figura (N) foi colada duas vezes, mas deve ter sido apenas uma repetição por esquecimento.

De modo geral, a atividade 2 possibilitou que tivessem contato com outros quadriláteros, aumentando o número de possibilidades se comparado à atividade 1 e, além disso, permitiu conhecer os critérios utilizados para agruparem essas figuras, os quais levaram em consideração o aspecto visual ou o formato delas, tomando em sua maioria o quadrado como referência para olhar as demais. As discussões em grupo permitiram a criação de novos critérios, a junção de alguns e inclusão de outras figuras em agrupamentos já realizados a partir da mesma condição. Passemos à análise da próxima sessão.

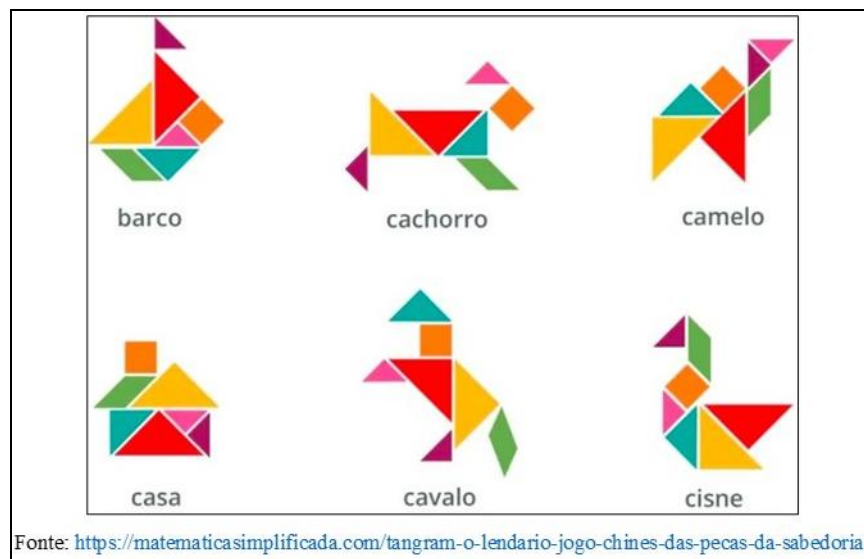
5.3 ANÁLISE DA TERCEIRA SESSÃO

A terceira sessão foi realizada em 12 de maio de 2022. Como no encontro anterior faltaram 10 dos 22 inscritos e, naquele momento, achávamos que eles continuariam frequentando os encontros, resolvemos redimensionar a terceira sessão de modo a atender esses estudantes que faltaram. Assim, de um lado da sala colocamos alguns dos que tinham faltado, os quais deveriam fazer as atividades da segunda sessão; do outro lado, ficaram aqueles que estavam presentes no encontro anterior. Eles realizaram a atividade 4 da primeira sessão sobre o Tangram, que não houve intervalo de tempo suficiente para fazê-la antes, e continuaram explorando as possibilidades da construção de quadrados com determinados quantitativos de peças do Tangram, na atividade complementar, também da primeira sessão. Apesar de termos feito dessa maneira para tentar atender aos que haviam faltado, nem todos compareceram e, mesmo aqueles que faltaram na sessão anterior e estavam presentes nessa, falaram que iriam desistir por motivos diversos como falta de tempo, o pai estava de férias e voltou a trabalhar, que iria ajudar o pai nas atividades diárias, entre outros. Talvez o fato de ser no contraturno também tenha gerado certa dificuldade de permanência por parte de alguns participantes. As atividades que inicialmente seriam na terceira sessão foram para a quarta, as da quarta para quinta e assim sucessivamente, acarretando no acréscimo de um encontro em uma sequência didática já considerada razoavelmente longa. Assim, vamos analisar as produções de oito participantes (A2, A4⁶⁰, A6, A7, A8, A9, A10 e B12), provenientes das atividades 4 e complementar da primeira sessão. A atividade aplicada foi a seguinte:

⁶⁰ O participante A4 faltou na segunda sessão, mas não se juntou ao grupo dos que faltaram, talvez por não ter entendido ou lembrado que havia faltado. Não foi possível perceber esse fato naquele momento, pois ainda não sabíamos o nome de todos os participantes e por acreditarmos que eles iriam atender ao solicitado na dinâmica de separação dos grupos.

Atividade 4 da primeira sessão: Você conhece ou já utilizou o Tangram em algum momento?

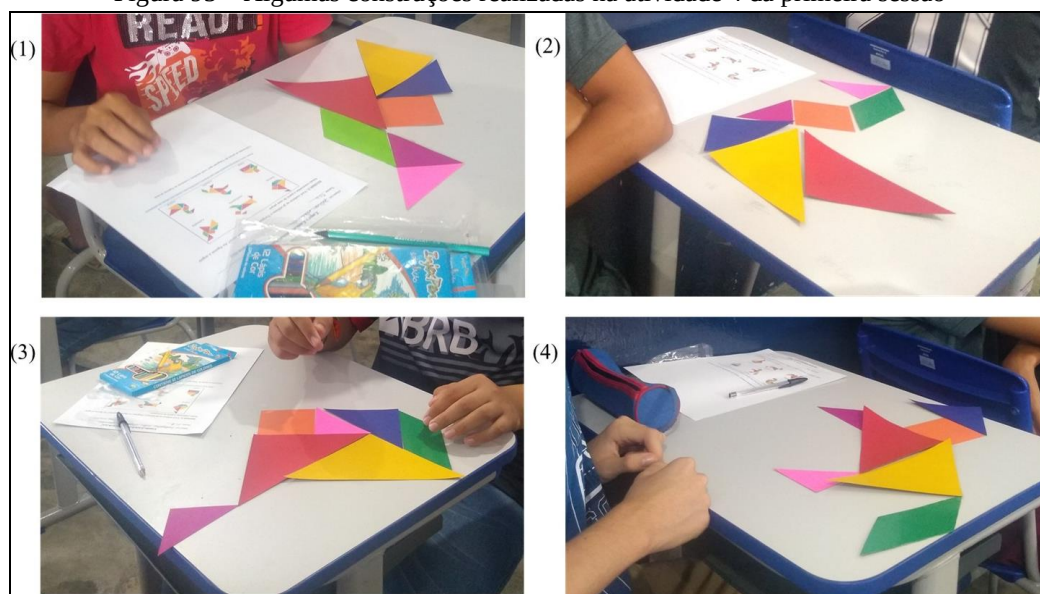
As figuras a seguir foram construídas a partir de suas peças:



Utilizando as peças do Tangram que você recebeu, construa as figuras acima.

Ela foi realizada individualmente e os estudantes não apresentaram dificuldades para concluí-la, visto que era uma atividade para familiarização com o Tangram. Vejamos algumas construções feitas pelos participantes:

Figura 95 – Algumas construções realizadas na atividade 4 da primeira sessão



Fonte: (1) A2, (2) A6, (3) A9, (4) A10

Nas construções acima utilizando as peças do Tangram temos, na ordem em que se apresentam, camelo, cisne, barco e cavalo. Em complemento a essa atividade, eles realizaram

mais uma com a utilização do Tangram, dessa vez com um caráter desafiador, a qual é apresentada e discutida a seguir.

Atividade complementar da primeira sessão: Utilizando o Tangram, responda as questões a seguir:

a) Uma das peças do Tangram representa um quadrado. Usando duas de suas peças, tente montar outros quadrados. Desenhe a(s) solução(ões) que você obteve.

b) E com três peças, você consegue construir quadrados? Desenhe a(s) solução(ões) que você obteve.

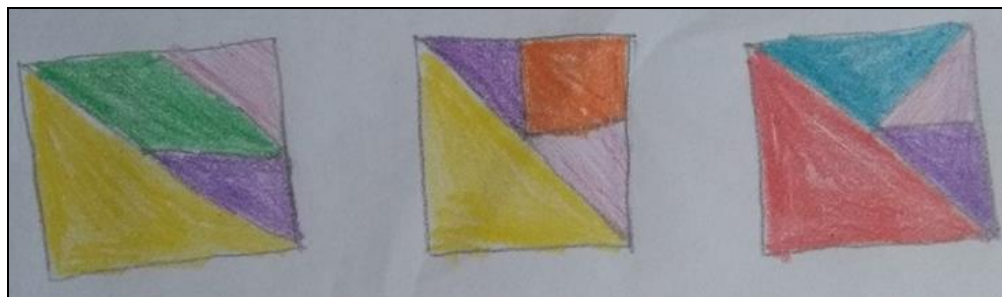
c) E com quatro peças, você acha que é possível construir quadrados? Desenhe a(s) solução(ões) que você obteve.

d) E com cinco, depois seis e, por fim, sete peças, você consegue construir quadrados? Desenhe a(s) solução(ões) que você obteve.

Esta atividade já havia sido levada por eles para tentarem fazer em casa, como previsto na análise a priori, mas alguns não tinham tentado, outros esqueceram e os poucos que tentaram não exploraram todas as possibilidades. Assim, pedimos que se juntassem em grupos para realizá-la e discutir as respostas encontradas. A partir dela, foi possível perceber algumas relações entre as peças do Tangram, como a equivalência entre o triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo não retângulo e não losango, sem tratar diretamente sobre o conceito de área. Assim, a partir da situação de construção, campo da Geometria, exploramos outras do campo das Grandezas e Medidas, como a comparação e a medição, reforçando o papel das imbricações entre esses dois campos, como veremos mais adiante nos trechos das falas dos estudantes.

Foram formados três grupos e apenas um deles não conseguiu encontrar todas as soluções que previmos em nossa análise a priori, sobre o qual falaremos mais adiante. Todos conseguiram formar rapidamente os quadrados com duas peças. À medida que era exigida a utilização de uma quantidade maior de peças, a dificuldade também aumentava. Em relação à construção com quatro peças, pedimos que tentassem encontrar mais de uma possibilidade, as quais são exemplificadas nas representações simbólicas a seguir:

Figura 96 – Construções de quadrados com quatro peças do Tangram na atividade complementar da primeira sessão



Fonte: Participantes (A2, A4 e A7)

Como vemos, eles utilizaram triângulos grandes e os dois pequenos. As mudanças nos desenhos ocorreram ao substituírem o paralelogramo não retângulo e não losango pelo quadrado e pelo triângulo médio, uma vez que esses últimos são equivalentes, como discutimos em nossa análise a priori.

Durante as tentativas para encontrar as soluções nessa atividade, o participante B12 explicitou uma dúvida relativa à compreensão de um quadrado, o qual construiu um retângulo não quadrado utilizando os dois triângulos grandes, os dois pequenos e o quadrado, como mostrado a seguir:

Figura 97 – Dúvida se é um quadrado na atividade complementar da primeira sessão



Fonte: Participante B12

Vejamos um trecho do diálogo estabelecido nesse momento:

B12: Oh, Jailson.

P: Oi

B12: Isso aqui é um quadrado [mostrando um retângulo não quadrado feito com peças do Tangram].

P: Você toma como referência esse aqui, né [mostrando a peça do Tangram que representa um quadrado]. O que é que faz essa figura ser um quadrado? [Ele fica pensando. Em seguida mostramos outros quadrados que ele havia feito com peças do Tangram]. Essa aqui, com essa e essa, né? [Mostrando o quadrado que ele fez com as peças que representam os dois triângulos pequenos].

B12: É

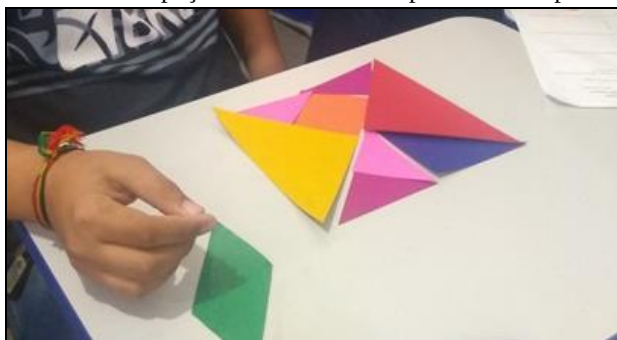
P: Essa aqui também [mostrando o quadrado que ele havia feito com as peças que representam dois triângulos grandes].

Optamos por não dizer naquele momento se seria ou não um quadrado, mas tentamos mostrar outros quadrados, tanto o que pertence ao próprio Tangram, quanto outros que ele já

havia feito utilizando os triângulos grandes e pequenos. Perguntamos para ele o que fazia determinada figura ser um quadrado e ele ficou pensando, o que aponta para um conhecimento ainda instável, embora esse tipo de paralelogramo fosse o mais utilizado por eles nas atividades anteriores. Nas sessões seguintes ao trabalharmos as características dessa figura, esse participante esclareceu suas dúvidas.

Em outro grupo, o participante A9 foi além do que a atividade pedia ao fazer um quadrado utilizando oito peças de Tangram, a partir do qual ficou bastante admirado com o que havia feito. Vejamos a sua construção:

Figura 98 – Quadrado com oito peças na atividade complementar da primeira sessão



Fonte: Participante A9

Após a construção da figura acima, ele falou:

A9: Fiz com oito! [Admirado com a obtenção de um quadrado com oito peças do Tangram].

P: Tem oito aí? Dá licença. Deixa, eu contar.

A6: Tem oito, tá ligado. Dois roxos e...

P: Três, seis, oito.

A9: Eu num sei como não, eu consegui não!

O participante A9 ficou impressionado com o que fez. Mesmo após nos afastarmos, ele continuou falando: “*Mas como é que eu consegui fazer isso hein, doido!?*”. Percebemos na sua figura que esse estudante substituiu o paralelogramo não retângulo e não losango por mais dois triângulos pequenos, tornando o quadrado obtido equivalente ao Tangram usual com sete peças, considerando a relação que há entre as peças substituídas. Sua admiração se deu também pelo fato de a atividade só pedir com até sete e ele ir além, conseguir com oito.

Olhando por um viés social, considerando que esses estudantes enfrentaram dois anos de pandemia e com toda dificuldade atrelada a isso, a fala de A9 é bastante motivadora e, possivelmente, o encorajou a olhar para os desafios de Matemática com uma visão diferente, sentindo-se capaz de solucioná-lo e não desistir na primeira tentativa. Assim, vemos a autoestima do estudante sendo nutrida por meio da realização de atividades e utilização dos materiais fornecidos. A9 passou a se empenhar mais tanto nos encontros quanto em sala de aula, confirmado a partir das entrevistas que realizamos com ele e com a professora da turma.

Com o intuito de promover uma discussão sobre as possibilidades de construção de um quadrado com quatro peças e a relação entre elas, pedimos que os participantes do grupo (A8, A10 e B12) montassem novamente sobre a banca os quadrados construídos com quatro peças, conforme haviam desenhado e é apresentado a seguir:

Figura 99 – Construções de quadrados com quatro peças do Tangram sobre a banca



Fonte: Participantes (A8, A10 e B12)

Como podemos perceber na folha perto das figuras, eles já haviam finalizado toda a atividade, com exceção do quadrado com seis peças que é impossível. Para iniciar a discussão, fizemos o seguinte questionamento:

P: Podia trocar essa peça amarela por uma vermelha [se referindo à peça que representa o triângulo grande]?

A8: Oi?

B12: Podia

A10: Podia.

P: Por que?

A10: Por que é o mesmo tamanho...

B12: Formato.

A10: É o mesmo tamanho, mas só muda a cor.

P: É do mesmo tamanho, mas só muda a cor?

A10: Sim

P: Tá...

Percebemos nas falas acima o surgimento de expressões importantes do campo da Geometria, como “tamanho”, “formato” e ter o “mesmo tamanho, mas só muda a cor”. Enquanto falavam, fizeram a substituição da peça amarela pela vermelha, como mostrado a seguir:

Figura 100 – Mudança de peça na construção de quadrados sobre a banca



Fonte: Participantes (A8, A10 e B12)

Após a provocação inicial, percebemos que não tiveram resistência em perceber que os triângulos vermelho e amarelo são congruentes. Nossa intenção em continuar o debate é de que percebam a relação de equivalência entre o triângulo médio, quadrado e paralelogramo não retângulo e não losango. Vejamos mais alguns trechos:

P: E nesses daqui o que foi que mudou neles? [se referindo às três possibilidades montadas para o quadrado].

B12: Esse...

A8: Esse aqui mudou [ambos se referindo à peça que representa o paralelogramo não retângulo e não losango].

B12: Esse mudou porque não tem o azul [se referindo à peça que representa o triângulo médio] e nem o quadrado. Esse aqui mudou porque não tem o verde...

A8: e nem o quadrado...

B12: ... e nem quadrado. E esse nem tem o verde nem o azul.

P: Agora, por que você acha que; permaneceram as mesmas outras peças, num foi isso? Por que você acha que trocando essa por essa e por essa dá a mesma figura? [apontando para as peças que representam, respectivamente, o paralelogramo não retângulo e não losango, o triângulo médio e o quadrado]. Por que faz isso?

B12: Não sei.

A10: Por que muda o formato

P: Oi?

A10: Por que muda o formato.

Percebemos mais uma vez a questão do formato, aspecto visual, também considerado nos estudos de Diniz (2013), Fujita (2012) e Tavares (2014), mas não apareceram falas relativas às dimensões como antes. Continuando, perguntamos se eles consideravam o paralelogramo não retângulo e não losango, o triângulo médio e o quadrado peças equivalentes, mas todos responderam que não. Naquele momento, provavelmente, a ideia de equivalência para eles ainda estava muito atrelada a ter mesmo formato e mesmo tamanho, ou seja, congruência, como foi no caso dos dois triângulos grandes. Essa importância atribuída à forma da figura também foi observada na pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989), do campo das Grandezas e Medidas.

Na tentativa de mostrar a relação existente entre essas três peças, questionamos sobre a possibilidade de obtê-las a partir dos dois triângulos pequenos. No caso do quadrado, eles já haviam encontrado na própria atividade e, no triângulo médio, também não tiveram dificuldades. No entanto, em relação ao paralelogramo não retângulo e não losango, vejamos:

P: Com esses dois triângulos pequenos, você consegue obter essa peça aqui? [apontando para a peça que representa o paralelogramo não retângulo e não losango].

A8: Não!

P: Consegue não?

B12: Consegue.

A10: Consegue.

P: Como? [B12 e A8 tentam fazer].

B12: Assim. Dá não porque essa daqui é muito...

A8: Consegue não.

P: Consegue não?

A8: Consegue não!

P: Tem certeza?

A8: Tenho.

B12: Por que ela é grande, essa outra é maior [se referindo ao lado de maior comprimento da peça que representa o paralelogramo não retângulo e não losango].

A8: Poderia até coisar, né, se tivesse [monta um paralelogramo não retângulo e não losango utilizando, além dos triângulos pequenos, o quadrado].

A figura construída por A8 é representada a seguir:

Figura 101 – Paralelogramo não retângulo e não losango formado com três peças do Tangram



Fonte: Participante A8

Em seguida, questionamos o fato de o paralelogramo não retângulo e não losango produzido por ele ser maior que o outro, fazendo a sobreposição do menor sobre o maior e ele falou:

A8: É. Se tirar aqui, vai sobrar essas duas aqui. [Ele retira a peça que representa o quadrado e junta as duas que representam os triângulos pequenos].

P: Você tem certeza...

A8: Consegue!

B12: Consegue.

A10: Consegue.

A8: É, é!

Vejamos a nova construção feita por ele ao retirar o quadrado e manter apenas os dois triângulos pequenos:

Figura 102 – Paralelogramo não retângulo e não losango formado com duas peças do Tangram



Fonte: Participante A8

E perguntamos: P: “Observaram que essa peça, essa e essa [se referindo às peças que representam o paralelogramo não retângulo e não, o quadrado e o triângulo médio, respectivamente] são dois desse? [apontado para as que representam os dois triângulos pequenos]”. Eles responderam que sim e o participante B12 complementou: “As pequenas se

transformam em três peças”. Em seguida, pedimos que continuassem tentando encontrar relações entre as demais peças enquanto íamos nos outros grupos fazer questionamentos e provocar discussões como a apresentada acima.

Não demorou muito e eles chamaram novamente. Após algumas tentativas e resistência em aceitar, perceberam, tomando como referência os triângulos pequenos, que era possível ladrilhar efetivamente um dos triângulos grandes com o quadrado ou com o paralelogramo não retângulo e não losango, conforme trecho do diálogo a seguir:

P: Mas vocês já viram que esse quadrado aqui é equivalente a dois triângulos desse, né? [Se referindo ao triângulo pequeno].

B12: É.

P: Do pequeno?

B12: Dois triângulos dá pra fazer um quadrado também.

P: Então, o triângulo grande vale quantos triângulos pequenos? [Ladrilhando totalmente o triângulo grande com triângulos pequenos].

B12: Quatro.

A8: Quatro, vale dois, dois.

P: Vale quantos triângulos pequenos?

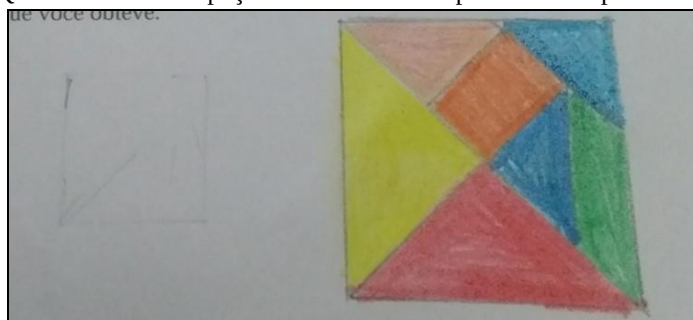
A10: Quatro.

A8: Não, triângulos vale quatro, mas se for quadrados, vale dois.

No trecho acima, discutimos procedimentos geométricos do cálculo de área sem necessariamente explicitar esse conceito. Ao continuar o diálogo, perguntamos: P: *“Entenderam agora, tá? Vale quantos desse aqui? [Mostrando o paralelogramo não retângulo e não losango]”*. O participante A10 respondeu: *“Dois também”*. Assim, a partir de uma situação de construção de figuras utilizando diferentes peças do Tangram, campo da Geometria, realizaram o ladrilhamento com diferentes superfícies unitárias e, como evidenciado nas falas de A8 e A10, observamos que diferentes números foram obtidos ao mudar a unidade, mas sem alteração na área de cada figura, campo das Grandezas e Medidas. Esse conhecimento poderia ser reinvestido na nona sessão ao calcular a área de um paralelogramo não retângulo e não losango utilizando essas mesmas peças como superfícies unitárias. A nomenclatura de figuras como triângulos e quadrados pareceu ser comum para eles.

Como dito no início da análise dessa atividade, apenas um dos grupos não a concluiu plenamente, pois, além de não desenharem o quadrado formado com os dois triângulos pequenos, os participantes desse grupo não encontraram o quadrado com cinco peças, deixando apenas o formado por sete peças, como apresentado a seguir:

Figura 103 – Quadrado com sete peças na atividade complementar da primeira sessão



Fonte: Participantes (A6 e A9)

É possível perceber na representação simbólica acima que uma parte foi apagada, a qual provavelmente está relacionada a tentativas de obtenção do quadrado com cinco peças que não foi alcançada pelo grupo, apesar de o participante A9 ter encontrado com oito peças, como vimos anteriormente.

De modo geral, a realização dessa atividade da classe de construção, pertencente ao campo da Geometria, se mostrou muito importante, pois os estudantes se entusiasmaram mais, fortaleceu os laços iniciais entre pesquisador e participantes e proporcionou discussões muito boas, tanto sobre as relações entre as peças do Tangram quanto relacionadas a elementos do campo das Grandezas e Medidas, como a relação de equivalência entre elas e o ladrilhamento utilizando diferentes superfícies unitárias. Esses aspectos discutidos demonstram o quão imbricados estão esses dois campos e reforçam a importância da nossa proposta de aprofundamento do estudo dessa relação. Passemos à análise da quarta sessão.

5.4 ANÁLISE DA QUARTA SESSÃO

A quarta sessão foi realizada em 19 de maio de 2022 e contou com a presença de oito (A2, A4, A6, A7, A8, A9, A10 e B12) dos nove estudantes. Com a mudança ocorrida na anterior, realizamos o quarto encontro, entretanto, aplicando o que estava previsto para o terceiro. Nele, objetivamos trazer de maneira operacional as inclusões entre os paralelogramos ao perceberem a existência de figuras que pertencem a mais de uma classe por possuírem propriedades comuns. Assim, trabalhamos as seguintes situações do campo da Geometria: classificação, identificação e inclusão. A atividade 1 foi realizada em duplas e a segunda individualmente, as quais serão apresentadas e discutidas mais adiante. O *kit* preparado para esse encontro continha régua não graduada, papel transparente, hidrocor, fita durex, tesoura sem ponta e lapiseira.

O encontro foi iniciado com uma apresentação em *slides*, na qual apontamos os critérios que haviam utilizado e alguns recortes dos agrupamentos que tinham realizado na atividade 2 da segunda sessão, sem identificá-los e levantamos alguns questionamentos a partir deles. Ao final da apresentação, discutimos como utilizar a régua não graduada para comparar comprimentos e o papel transparente para transpor aberturas de ângulos com a participação dos estudantes.

Essa apresentação inicial proporcionou que muitos deles participassem e, a partir de suas falas, pudéssemos entender melhor algumas expressões e critérios utilizados para agruparem as figuras na atividade 2 da segunda sessão. Diante da relevância das falas apresentadas, vamos discuti-las nesse início, antes de irmos propriamente para as atividades desenvolvidas na quarta sessão.

Vimos que alguns agrupamentos realizados por eles foram a partir de critérios envolvendo o aspecto visual, como “laços parecidos” e “formato comum”. Em relação à primeira expressão, eles falaram que estavam se referindo à aparência, ou seja, características comuns entre elas. E sobre a segunda:

P: Mas o que é o formato pra você? [A9 fala algo que não entendemos]

P: Como é A9?

A6: O formato é a forma.

P: É?

A6: A forma.

P: A forma dela?

A6: Só muda a posição, o ângulo.

P: No caso elas possuem a mesma forma e [A6 complementa] ...

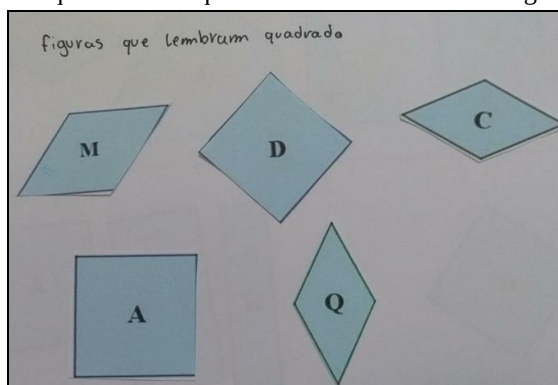
A6: Ângulos diferentes.

P: Quando você fala ângulos diferentes, você se refere aos ângulos da figura ou a posição dela?

A6: A posição dela [outros também deram essa mesma resposta].

Como vemos, foi esclarecido pelos próprios estudantes que o formato está ligado à forma da figura e o ângulo, nesse contexto, à posição dela. Observemos alguns dos recortes utilizados na apresentação para discussão:

Figura 104 – Figuras que lembram quadrados na atividade 2 da segunda sessão



Fonte: Participante A7

Já vimos que os losangos não quadrados (C, M e Q) foram agrupados pelos participantes A6, A8 e B12 como tendo formato comum, a “forma”, segundo alguns deles durante as discussões das respostas. Em relação à figura (C), A8 falou que:

A8: Essa daqui parece que tá deitado.

P: Qual, A8?

A8: A letra (C) parece que tá deitada, parece um quadrado também, mas tá deitado.

P: Um quadrado deitado.

A8: A (Q) parece que tá de lado.

A partir das falas acima, percebemos que os losangos não quadrados (C e Q) foram tidos por A8 como um quadrado “deitado” ou “que tá de lado”, respectivamente. Questionamos se essas figuras eram quadrados ou só lembravam quadrados e obtivemos a seguinte resposta:

A6: Tem umas que é realmente quadrado aí.

P: A6, tem umas que são realmente quadrados. Qual, A6, você acha que é quadrado?

A6: (A) e (D).

P: (A) e (D) você acha que são quadrados. E por que as outras não são?

A6: O formato delas também, né?

Segundo o participante A6, as figuras (A e D) são quadrados e as demais não, devido ao formato delas. Percebemos nessas falas, por um lado, a questão visual sendo tomada para caracterização das figuras, também observado em Diniz (2013), Fujita (2012), Pereira da Costa (2016) e Tavares (2014), mas, por outro lado, parece haver a mobilização de uma propriedade relativa à deformação da figura com conservação da igualdade dos comprimentos dos lados, sem considerar as mudanças ocorridas nas aberturas de ângulos. Ao perguntarmos se concordavam com A6, o participante B12 falou: *“Quadrado aí só tem o A mesmo!”* E complementou: *“Os outros só tem formato de quadrado, mas não é quadrado”*. Ainda segundo ele: *“Parece que o (D) virou o (C). Esmagaram o (D) pra virar o (C)”*, o que está ligado a um efeito de deformação. A partir destas falas, um quadrado para o participante B12, naquele momento, era apenas o que está em seu desenho prototípico e o losango não quadrado, foi considerado por ele como um quadrado “esmagado ou achatado”. Na pesquisa de Fujita (2012), o losango não quadrado foi tido pelos participantes como um quadrado inclinado.

Assim como planejado em nossa análise a priori, perguntamos se eles sabiam como se chamavam essas figuras. Já vimos um pouco da percepção dos participantes sobre os quadrados. Os retângulos não quadrados também foram nomeados corretamente pela maioria. Já no caso dos paralelogramos não retângulos e não losangos e dos losangos não quadrados foi o contrário, afirmaram não saber os seus nomes. Apenas o participante A10 os chamou, respectivamente, de paralelepípedo e prisma, trazendo conceitos não pertinentes para a

discussão. No estudo realizado por Fujita (2012), o losango não quadrado foi associado também a um diamante. Assim, essa associação a figuras espaciais foi antecipada em nossa análise a priori, pois pesquisas anteriores levavam a considerar essa possibilidade previsível.

Em relação ao nome de figuras com quatro lados, ele respondeu corretamente que eram quadriláteros. Sobre os paralelogramos não retângulos e não losangos, perguntamos:

P: Vocês já viram essas figuras em algum local?

B12: Borracha.

A8: Já [outros responderam sim].

P: Na borracha? E em que mais?

A8: Eu já vi, mas não tenho em mente não.

O tipo de borracha a que B12 se referiu foi, possivelmente, aquele em que uma parte é azul e a outra é vermelha, na qual algumas faces remetem a paralelogramos não retângulos e não losangos. Ainda em relação a como se chamam:

A9: Não sei nem pra onde vai.

P: No caso, foi A9, né? Não sabe nem pra onde vai?

A9: Só sei o retângulo só!

P: E qual é o retângulo aqui pra você?

B12: Vixe.

A9: O, o (K).

P: O (K) é retângulo?

A9: Hunrum.

P: A10 falou que retângulo é o (G).

A9: O (G) também, e o (G).

P: (K e G) são retângulos?

A10: O (G) e a (N) é retângulos, só que em posição diferente.

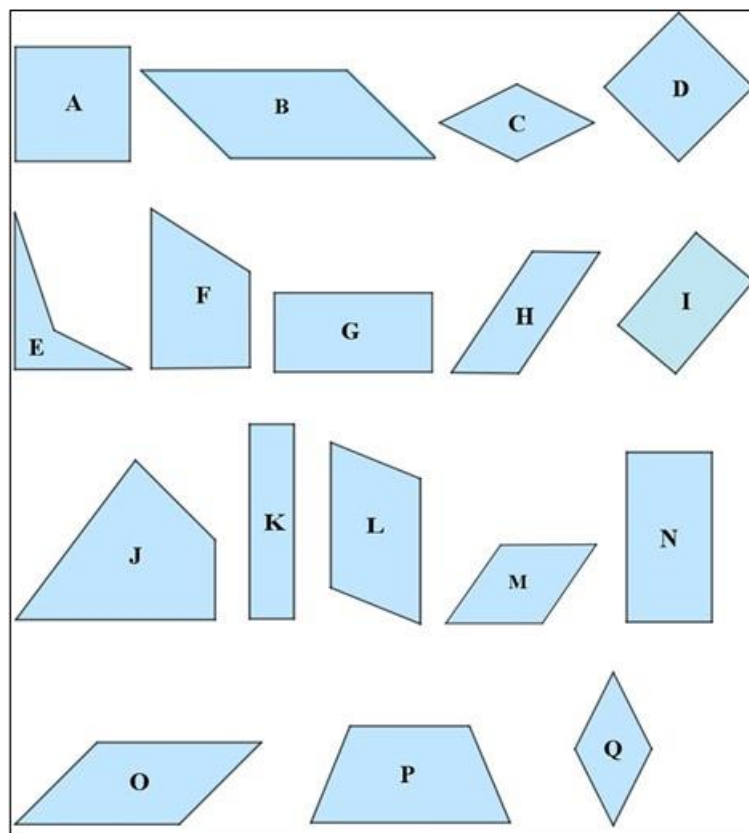
P: Então, agora, você já mudou. O (G, K e N) são retângulos, é isso? [Balança a cabeça que sim].

Apesar de afirmarem não saber, à medida que íamos questionando e confrontando com as respostas já apresentadas por outros colegas, eles ampliavam suas respostas e conseguiam enxergar elementos novos, apontando para uma diminuição das dificuldades iniciais. No caso das figuras que chamaram de retângulos, todas, realmente, eram retângulos não quadrados. Na pesquisa de Tavares (2014), o paralelogramo não retângulo e não losango foi definido pelos participantes como um “gênero de retângulo”, porém mais inclinado para um lado.

Esse momento de apresentação em *slides* e discussão coletiva foi encerrado relembrando retas paralelas, concorrentes e perpendiculares, mostrando-as nas peças do Tangram que representam o triângulo e o paralelogramo não retângulo e não losango. Também falamos sobre ângulos com mesma abertura, ângulos retos e como utilizar o papel transparente e régua não graduada, com ajuda do participante A10 que foi ao quadro exemplificar.

Passemos à análise da atividade 1 da quarta sessão, a qual foi realizada em duplas e é apresentada a seguir:

Atividade 1: Assim como na atividade anterior, você está recebendo novamente as figuras representadas a seguir:



Além das figuras, você está recebendo seis folhas em papel branco, cada uma contendo uma propriedade. Em duplas, cole as figuras no papel branco que vocês acham que possui cada uma das propriedades.

- As figuras que possuem os quatro ângulos retos (90°);
- As figuras que possuem os quatro lados com mesmo comprimento;
- As figuras que possuem os ângulos internos opostos iguais;
- As figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento;
- As figuras que possuem os dois pares de lados opostos paralelos entre si;
- As figuras que possuem os lados e ângulos internos opostos iguais e os dois pares de lados opostos paralelos entre si.

Cada uma das seis folhas entregues continha apenas uma das propriedades acima. As duplas receberam várias cópias de todas as figuras e outras ficaram disponíveis sobre o birô. Caso precisassem, poderiam levantar e pegar quantas fossem necessárias. No quadro a seguir, sintetizamos os agrupamentos formados a partir da primeira propriedade: as figuras que possuem os quatro ângulos retos (90°):

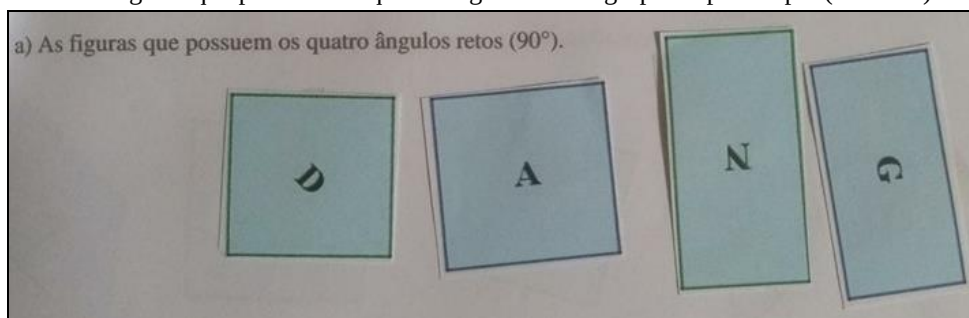
Quadro 38 – Agrupamentos realizados na letra (a) da atividade 1 da quarta sessão

Figuras que possuem os quatro ângulos retos (90°)		
Duplas	Figuras agrupadas⁶¹	Agrupamento correto esperado
(A2 e A7)	A, D, G, K, N	A, D, G, I, K, N
(A4 e A10)	A, C, D, G, I, K, N, Q	
(A6 e A9)	A, D, G, N	
(A8 e B12)	A, D, G, K, N	

Fonte: dados da pesquisa

Como podemos observar, nenhuma dupla agrupou todas, e somente, as figuras que possuem os quatro ângulos retos. As figuras (A, D, G e N) estiveram presentes em todos os agrupamentos realizados. Vejamos um deles:

Figura 105 – Figuras que possuem os quatro ângulos retos agrupadas pela dupla (A6 e A9)



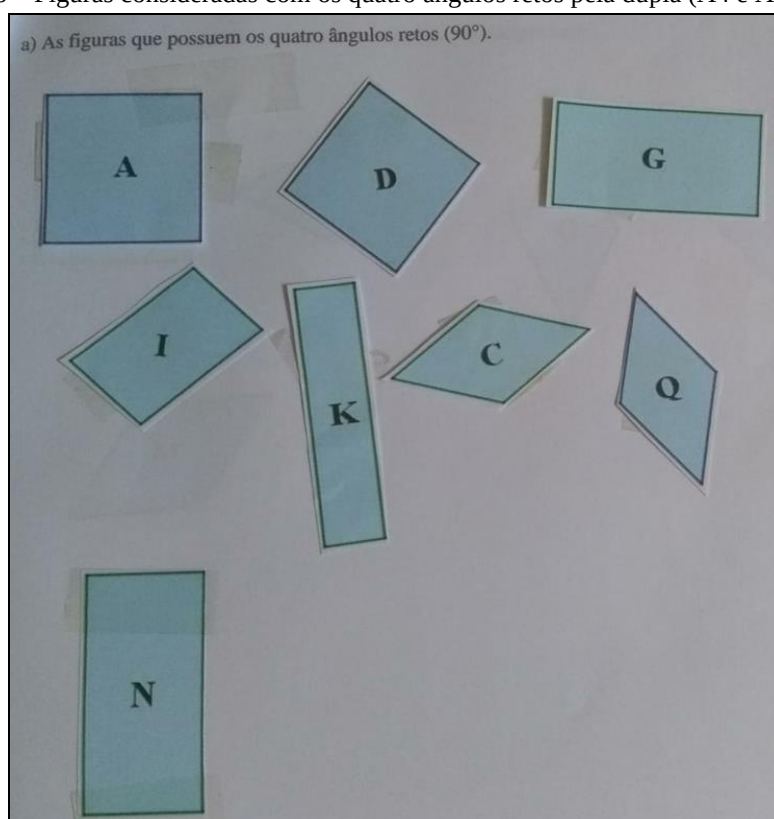
Fonte: Participantes (A6 e A9)

Os quadrados (A e D) e os retângulos não quadrados (G e N) foram colados em todos os agrupamentos, sendo as figuras mais consideradas pelos participantes como munidas da propriedade acima. Percebemos ainda que a posição convencional de leitura das letras no interior de cada uma delas não foi considerada nesse caso. No entanto, não podemos afirmar que os desenhos prototípicos foram priorizados, visto que nos retângulos não quadrados eles não foram considerados, os quais optaram por aquele que se aproxima do prototípico. As figuras (I e K), que também são retângulos não quadrados, não foram incluídas nesse agrupamento por não terem considerado a propriedade indicada, mas outros elementos relativos à maneira como se apresentavam na atividade, como fala de B12 durante o encontro sobre a inclinação da (I) e que “[...] a (K) é mais fina”. Participantes de pesquisas anteriores, como a de Fujita (2012), consideraram a aparência das figuras como critério para agrupá-las, como já dito anteriormente.

Uma dupla, além de agrupar os quadrados e retângulos não quadrados, incluiu os losangos não quadrados (C e Q), sendo a única dupla a ter agrupado figuras que não possuem ângulos retos, conforme extrato a seguir:

⁶¹ Neste e em outros quadros colocamos na cor verde as figuras agrupadas, identificadas ou classificadas corretamente pelos estudantes para ajudar na visualização dos dados.

Figura 106 – Figuras consideradas com os quatro ângulos retos pela dupla (A4 e A10)



Fonte: Participantes (A4 e A10)

Nos surpreendeu o fato de essa dupla, mais especificamente o participante A10, ter incluído figuras que não possuem ângulos retos, uma vez que ele foi um dos que lembrava a definição e representação de um ângulo de 90° , com participação no quadro antes do início da atividade. Na ótica da TCC, esse estudante teve sucesso na forma prediativa do conhecimento, mas na forma operatória, seu repertório de esquemas não se mostrou totalmente eficiente para lidar com a inclusão de outras figuras. Para finalizar a discussão dessa propriedade, duas duplas agruparam corretamente as figuras (A, D, G, K e N), mas não incluíram a I, possivelmente, por estar inclinada, como pode ser observado no recorte acima. Passemos à análise da letra (b) dessa atividade 1, relativa à coleção de figuras que possuem os quatro lados com mesmo comprimento:

Quadro 39 – Agrupamentos realizados na letra (b) da atividade 1 da quarta sessão

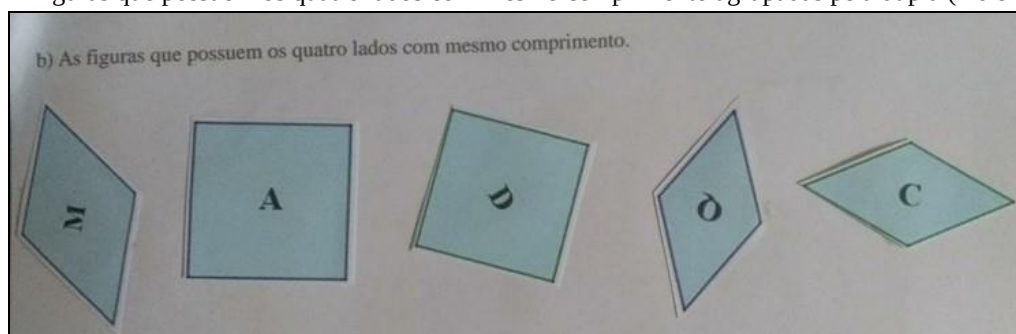
<u>Figuras que possuem os quatro lados com mesmo comprimento</u>		
Duplas	Figuras agrupadas	Agrupamento correto esperado
(A2 e A7)	A, C, D, Q	A, C, D, M, Q
(A4 e A10)	A, C, D, M, Q	
(A6 e A9)	A, C, D, M, Q	
(A8 e B12)	C, M, Q	

Fonte: dados da pesquisa

Diferentemente da letra anterior e das demais dessa atividade, como veremos ao longo da análise dessa sessão, esse foi o único caso em que tivemos acerto pleno, mais

precisamente, duas duplas conseguiram agrupar corretamente todas as figuras que possuem os quatro lados com mesmo comprimento. O recorte de uma delas é apresentado em seguida:

Figura 107 – Figuras que possuem os quatro lados com mesmo comprimento agrupadas pela dupla (A6 e A9)



Fonte: Participantes (A6 e A9)

A dupla formada pelos participantes (A4 e A10) também apresentaram esta mesma resposta. Os losangos não quadrados (C e Q), representados acima, estiveram presentes em todos os agrupamentos, contradizendo, de certa maneira, as ideias intuitivas relacionadas a uma figura de quatro de lados que, geralmente, são apontadas na maioria dos casos como quadrados. Nesse sentido, era esperado que os quadrados, principalmente o da figura (A), por estar em desenho prototípico, fossem os mais presentes nas respostas desses estudantes. No entanto, sequer apareceram no agrupamento de (A8 e B12), os quais aparentaram se apoiar em uma classificação exclusiva.

A dupla formada pelos participantes (A2 e A7) não incluiu a figura (M) em seu agrupamento, provavelmente, por ela se aproximar visivelmente do desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango. Assim, como a aparência das figuras se mostrou um aspecto importante para eles, a propriedade a ser considerada passou em segundo plano. Nesse sentido, tomando que (A) parece com (D) e (C) parece com (Q), a figura (M) seria “estranha” ao agrupamento e talvez este tenha sido o raciocínio seguido por eles.

Diferentemente da letra (a), na letra (b) dessa atividade todas as figuras agrupadas possuíam a propriedade indicada, ou seja, tinham os quatro lados de mesmo comprimento, entretanto, nem todas foram consideradas pelas duplas. No caso anterior, deveriam colar figuras que tivessem os quatro ângulos retos e, como vimos, os losangos não quadrados (C e Q) foram inseridos mesmo não satisfazendo essa propriedade.

Entre os materiais disponibilizados nesse encontro, a régua não graduada foi bastante utilizada para realização das letras (a) e (b), tanto para verificar comprimentos de lados quanto para conferir se o ângulo era reto, colocando um de seus vértices sobre figura recortada, como podemos ver a seguir:

Figura 108 – Utilização da régua não graduada na atividade 1 da quarta sessão



Fonte: Dados da pesquisa

Vamos à análise da letra (c) da atividade 1, relativa às figuras que possuem os ângulos internos opostos iguais, cujas letras que representam as figuras dos agrupamentos a partir deste critério são apresentadas no quadro a seguir:

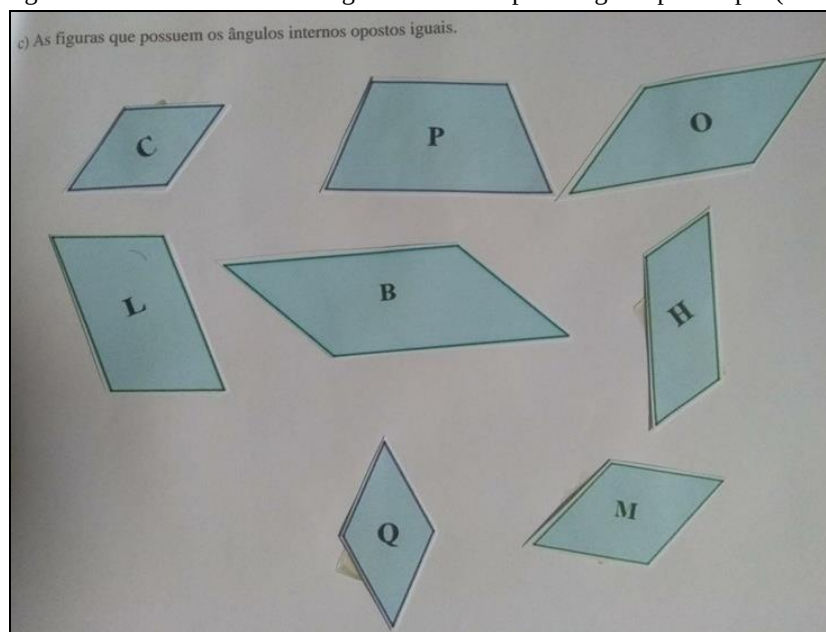
Quadro 40 – Agrupamentos realizados na letra (c) da atividade 1 da quarta sessão

<u>Figuras que possuem os ângulos internos opostos iguais</u>		
Duplas	Figuras agrupadas	Agrupamento correto esperado
(A2 e A7)	A, D, G, I, K, N	A, B, C, D, G, H, I, K, L, M, N, O, Q
(A4 e A10)	D, G, K, L, M, N, O, P, Q	
(A6 e A9)	B, C, H, L, M, O, Q	
(A8 e B12)	B, C, H, L, M, O, P, Q	

Fonte: dados da pesquisa

Como sinalizado em nossa análise a priori, a partir da letra (c) todas as propriedades descritas são próprias dos paralelogramos e, por isso, o agrupamento correto esperado será o mesmo em todas elas. A partir do quadro acima, percebemos que nenhuma das duplas conseguiu classificar todas as figuras que possuem os ângulos internos opostos iguais. Assim como na letra (a) e diferentemente da letra (b), houve figuras incluídas nos agrupamentos que não estavam de acordo com a propriedade especificada, que é o caso do trapézio isósceles (P), mostrado no recorte a seguir:

Figura 109 – Figuras consideradas com os ângulos internos opostos iguais pela dupla (A8 e B12)



Fonte: Participantes (A8 e B12)

É possível perceber que as duplas (A6 e A9) e (A8 e B12) incluíram em seus agrupamentos todos os paralelogramos não retângulos e não losangos (B, H, L, O) e os losangos não quadrados (C, M, Q) presentes na atividade e que satisfazem a propriedade acima. Entretanto, (A8 e B12), assim como (A4 e A10), incluíram o trapézio isósceles (P), possivelmente, por nessa figura em específico, terem considerado as aberturas dos ângulos adjacentes e não dos opostos.

Apesar de todas as duplas terem conseguido classificar corretamente mais de cinco figuras que possuem os ângulos internos opostos iguais, diferentemente dos casos anteriores, nenhuma figura foi comum a todos os agrupamentos. As mais selecionadas, por três das quatro duplas, foram os paralelogramos não retângulos e não losangos (L e O) e os losangos não quadrados (M e Q), sendo (O) o único em seu desenho prototípico.

Na verificação de ângulos opostos, o papel transparente foi bastante utilizado pelos participantes, conforme é mostrado a seguir o momento em que o participante A10, em dupla com A4, o utilizou para verificação de congruência de ângulos:

Figura 110 – Utilização do papel transparente na atividade 1 da quarta sessão



Fonte: Dados da pesquisa

Os agrupamentos relativos à letra (d), figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento, são apresentados no quadro seguinte:

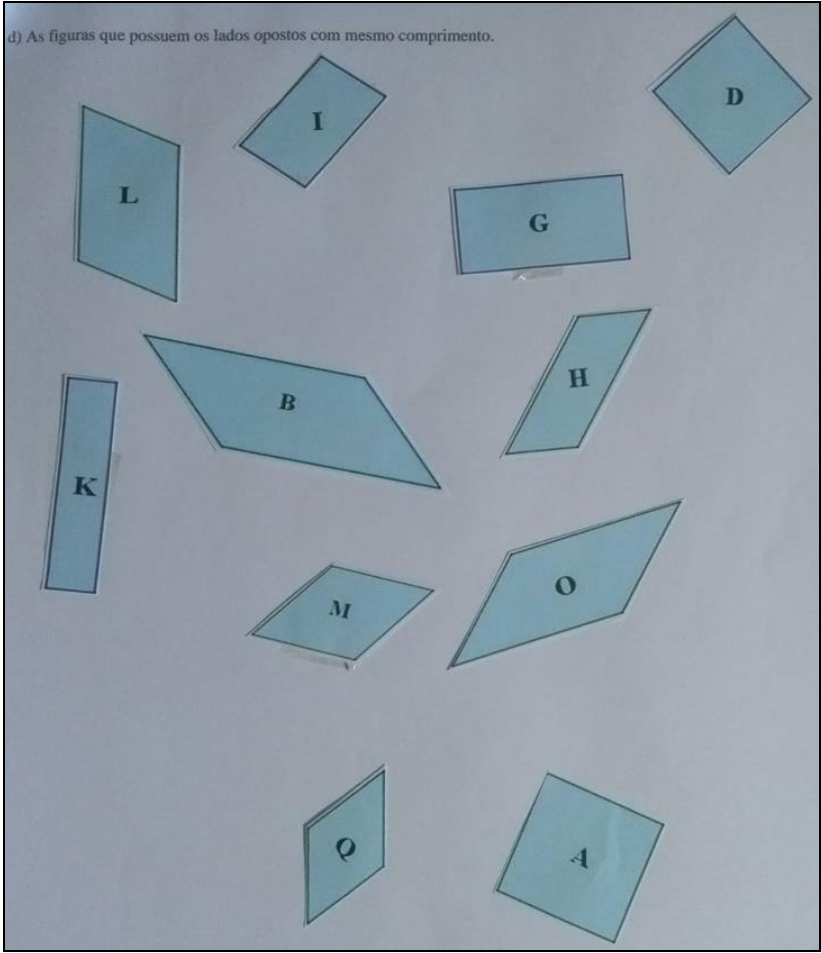
Quadro 41 – Agrupamentos realizados na letra (d) da atividade 1 da quarta sessão

Figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento		
Duplas	Figuras agrupadas	Agrupamento correto esperado
(A2 e A7)	A, B, D, G, H, I, K, L, M, O, Q	A, B, C, D, G, H, I, K, L, M, N, O, Q
(A4 e A10)	C, D, H, I, K, L, M, P, Q	
(A6 e A9)	A, C, D, G, I, K, N, O	
(A8 e B12)	C, H, I, L, M, P	

Fonte: dados da pesquisa

A partir deste quadro, notamos que nenhuma das duplas conseguiu classificar todas as figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento. Os participantes (A2 e A7) foram os que compõem a dupla que classificou o maior número de figuras com essa propriedade, cujo agrupamento realizado por eles é apresentado logo abaixo:

Figura 111 – Figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento agrupadas pela dupla (A2 e A7)



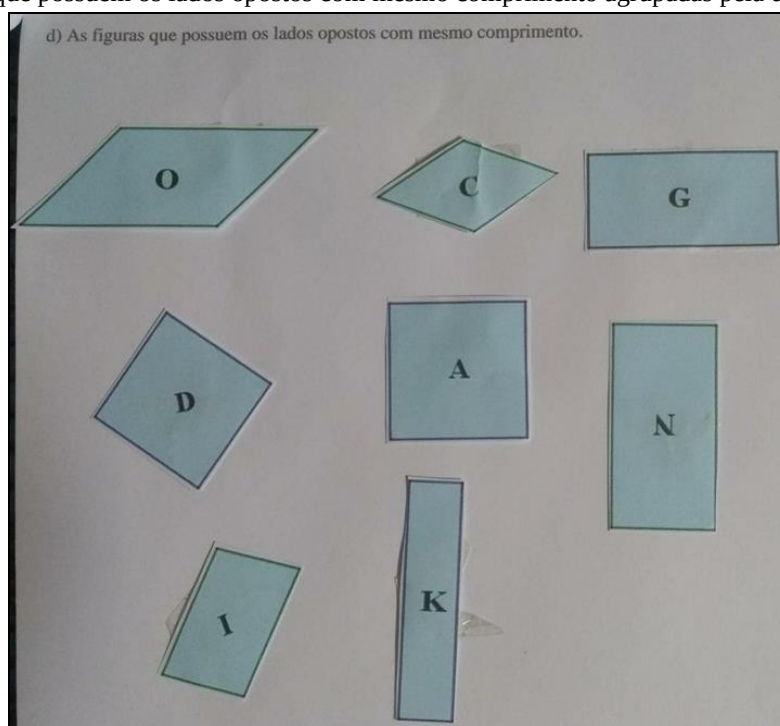
Fonte: Participantes (A2 e A7)

Essa dupla não obteve acerto pleno porque não incluiu duas figuras, o losango não quadrado em desenho prototípico (C) e o retângulo não quadrado em um desenho que se aproxima do prototípico (N). O fato de terem agrupado os demais losangos não quadrados e retângulos não quadrados aponta para um possível esquecimento das outras duas, visto que já

demonstraram, a partir das respostas apresentadas anteriormente, que conseguiriam classificar figuras com os lados opostos de mesmo comprimento. Em relação à posição convencional de leitura das letras no interior da figura, percebemos que não há um rigor quanto a isso, embora alguns estudantes a tenham considerado em determinados momentos.

Os participantes (A6 e A9), apesar de terem classificado um número menor figuras, incluíram em seu agrupamento as duas (C e N) que não apareceram na resposta apresentada por (A2 e A7). A seguir, trazemos o extrato da resposta dessa dupla:

Figura 112 – Figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento agrupadas pela dupla (A6 e A9)



Fonte: Participantes (A6 e A9)

Como vemos, os quadrados (A e D) e os retângulos não quadrados (G, I, K e N) foram todos agrupados por essa dupla como figuras que possuem os lados opostos com mesmo comprimento, independentemente de os desenhos serem ou não prototípicos. Já no caso do losango não quadrado e do paralelogramo não retângulo e não losango foram classificados apenas os que estão em seus desenhos prototípicos, (C e O), respectivamente.

Em relação aos demais agrupamentos, assim como na letra (c), as duplas (A4 e A10) e (A8 e B12) continuaram classificando o trapézio isósceles (P) como uma figura que possui propriedades que são próprias dos paralelogramos, neste caso, ter os lados opostos de mesmo comprimento. Provavelmente, tal resposta se deve ao fato de terem considerado apenas o par de lados não paralelos que, pelo tipo de trapézio, realmente, possuem o mesmo comprimento. Ainda comparando as respostas dadas nas letras (c) e (d) dessa atividade 1, por serem específicas dos paralelogramos, tivemos nesta última, diferentemente da anterior, uma figura

que foi comum a todos os agrupamentos realizados pelas duplas, que foi o retângulo não quadrado (I). Vejamos, agora, as figuras classificadas a partir da propriedade: possuir os dois pares de lados opostos paralelos entre si.

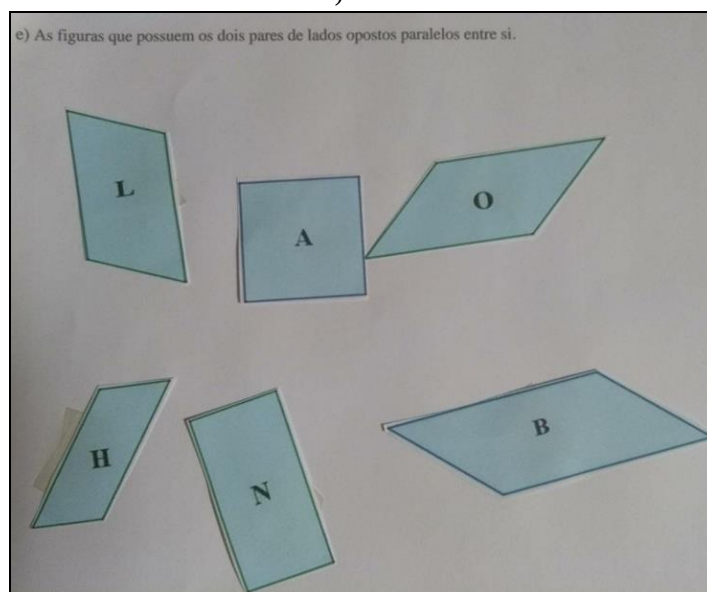
Quadro 42 – Agrupamentos realizados na letra (e) da atividade 1 da quarta sessão

Figuras que possuem os dois pares de lados opostos paralelos entre si		
Duplas	Figuras agrupadas	Agrupamento correto esperado
(A2 e A7)	A, B, C, H, I, K, L, M, Q	A, B, C, D, G, H, I, K, L, M, N, O, Q
(A4 e A10)	B, C, G, H, K, L, O, Q	
(A6 e A9)	A, D, H, K, N	
(A8 e B12)	A, B, H, L, N, O	

Fonte: dados da pesquisa

Nessa letra (e) da atividade 1, assim como na (b), relativa à classificação de figuras com os quatro lados de mesmo comprimento, todas que foram agrupadas estavam de acordo com a propriedade indicada. Mais uma vez, a dupla formada pelos participantes (A2 e A7) conseguiu classificar um maior número de figuras, mas nenhuma delas teve acerto pleno. A única figura comum a todos os agrupamentos foi o paralelogramo não retângulo e não losango em desenho não prototípico (H), o qual pode ser observado na resposta abaixo:

Figura 113 – Figuras que possuem os dois pares de lados opostos paralelos entre si agrupadas pela dupla (A8 e B12)



Fonte: Participantes (A8 e B12)

Todos os paralelogramos não retângulos e não losangos (B, H, L e O) foram considerados neste agrupamento. No início desse encontro, ao discutirmos sobre as respostas que deram na segunda sessão, (A8 e B12) falaram um pouco mais sobre essas quatro figuras, como podemos ver no trecho a seguir:

A8: Oh, professor?

P: Oi

A8: Olha, as que são parecidas aí são, é, a (B), (O) e (H).

P: (B), (O) e (H).

A8: A (L) não parece, não tá parecendo muito não.

P: A (L) não tá parecendo muito não.

B12: E o (H) é mais fino.

A8: É.

P: O (H) é mais fino.

A8: Mas na minha opinião mesmo, tá parecendo o (H), (O) e (B). Agora (L), é, (O), assim, como eu falei, a (B), (O) e (H) tem o bico mais, mais fino e a (L), não.

P: Sei.

B12: A (L) tá parecendo um retângulo.

P: A (L) tá parecendo o que, B12?

B12: Um retângulo.

O recorte acima foi anterior à realização dessa atividade e, conseqüentemente, não era esperado que estivessem falando em lados opostos paralelos. O trouxemos para destacar um pouco da percepção deles acerca dos paralelogramos não retângulos e não losangos, os quais apontaram aspectos visuais da figura (H), voltados a sua aparência, como ter “o bico mais fino”. Essa mesma palavra (bico) se referindo ao vértice também foi observada no estudo realizado por Fujita (2012). Segundo Teles (2007, p. 39), a palavra ângulo no senso comum “[...] está ligada a ideias como quina, esquinas ou giros. Esta é a noção de ângulo que os alunos trazem para a escola”. Já o paralelogramo não retângulo e não losango (L) foi apontado por B12 como parecido com um retângulo, possivelmente, por possuir um par de lados posicionado verticalmente, tomando a margem da folha como referência. O fato de considerar essa figura um retângulo deformado já foi observado em estudos anteriores, como Baltar (1996) e Douady e Perrin-Glorian (1989), ou como um “gênero de retângulo”, porém mais inclinado para um lado (Tavares, 2014).

Quanto às demais figuras do agrupamento acima, parece existir uma falta de coerência no cálculo relacional, pois consideraram apenas o quadrado em desenho prototípico (A), mas no caso do retângulo não quadrado, o considerado foi que estava em um desenho próximo ao prototípico (N). Assim, não podemos afirmar que a não inclusão dos demais retângulos estava condicionada ao tipo de desenho.

Em relação aos agrupamentos dos outros participantes, o paralelogramo não retângulo e não losango (H) esteve presente em todos eles, como já dito. As outras figuras mais presentes nas respostas de três das quatro duplas foram o quadrado (A), e os paralelogramos não retângulos e não losangos (B e O), sendo (A e O) ambos em seus respectivos desenhos prototípicos. Passemos à análise da última letra da atividade 1.

Quadro 43 – Agrupamentos realizados na letra (f) da atividade 1 da quarta sessão

Figuras que possuem os lados e ângulos internos opostos iguais e os dois pares de lados opostos paralelos entre si		
Duplas	Figuras agrupadas	Agrupamento correto esperado
(A2 e A7)	A, D, G, I, K	A, B, C, D, G, H, I, K, L, M, N, O, Q
(A4 e A10)	A, B, C, D, G, M, O, Q	
(A6 e A9)	A, B, D, H, I, K, L, M, N, O, Q	
(A8 e B12)	A, B, C, D, I, L, M, O, Q	

Fonte: dados da pesquisa

A partir deste quadro é possível notar que todas as figuras agrupadas satisfazem as propriedades indicadas, assim como nas letras (b) e (e). No entanto, algumas delas não foram incorporadas, culminando em acerto pleno apenas na letra (b) de toda a atividade. Como essa letra (f) foi uma junção das letras (c), (d) e (e), eles apresentaram um pouco mais de dúvidas em como fazer, daí sugerimos que fizessem por partes, analisando se possuíam uma das três propriedades de cada vez, conforme o seguinte trecho:

P: Colem bem colado que é pra depois não sair, tá? [Vamos até B12 e A8 que haviam chamado, os quais apontam para a letra (f) da atividade 1 e fazemos a leitura]. As figuras que possuem os lados e ângulos internos opostos iguais e os dois pares de lados opostos paralelos entre si. São muitas informações, então vamos fazer por parte, tá? Vamos pegar uma figura, pegar essa letra...

B12: Letra (B) [se referindo à figura (B)].

P: Pegar essa letra (B) aqui, tá. Então, vamos por parte, figuras que possuem, aí você vai ver três coisas: lados opostos iguais, ângulos internos opostos iguais e os lados serem paralelos, três coisas, né? Então, vamos ver logo se os lados, os lados opostos são iguais. Nessa figura aqui os lados opostos são iguais?

A8: Hunrum. [B12 balança a cabeça que sim].

P: Condição atendida! Os ângulos internos opostos são iguais?

A8: Hunrum. [Balançam a cabeça que sim].

P: São esses os ângulos, então os opostos são iguais. [Continuam balançando a cabeça que sim]. E se os dois pares de lados, ou seja, um par de lados, outro par de lados, se eles são paralelos.

A8: Hunrum. [B12 balança a cabeça que sim].

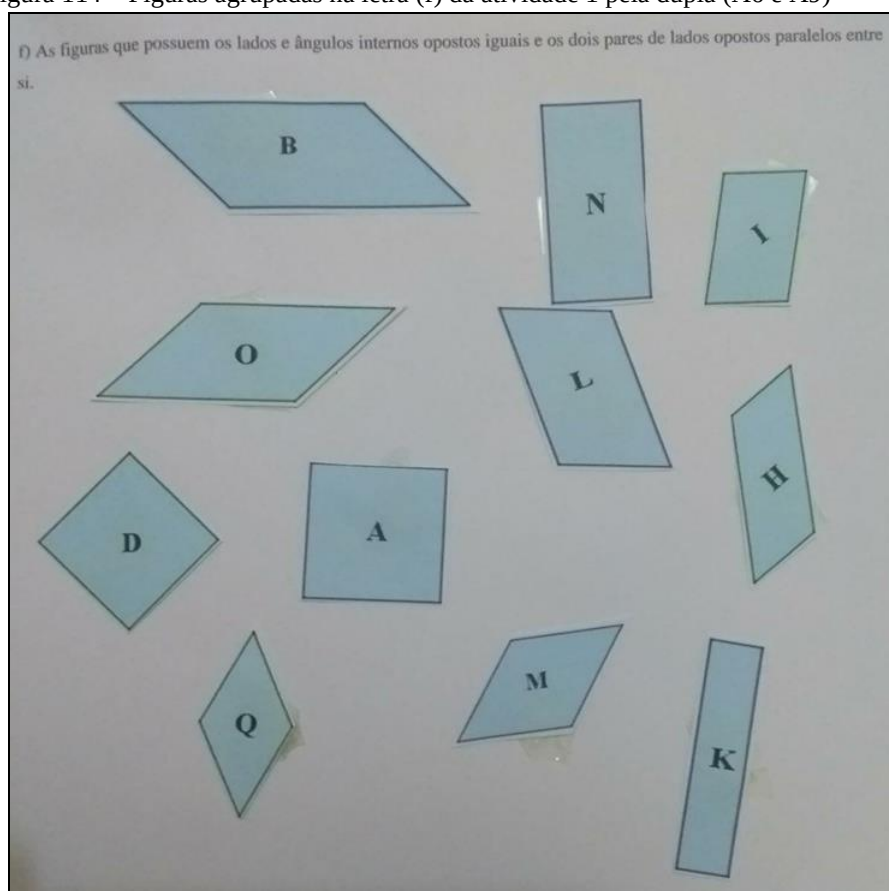
P: Então, você cola.

A8: Tá.

Não foi percebido pelos participantes que já haviam verificado, nas três últimas letras da atividade, todas as propriedades que constavam na letra (f). Assim, bastava apenas juntar, sem repetição, as figuras que tinham colado em cada uma delas. Mas nenhum agrupamento sequer foi repetido.

Como vimos nas letras (d) e (e), os participantes (A2 e A7) conseguiram classificar um número maior de figuras com as propriedades indicadas em cada uma delas, o que não aconteceu quando as juntamos, pois o número de figuras agrupadas por (A2 e A7) diminuiu. A dupla (A6 e A9) conseguiu incluir uma quantidade maior de paralelogramos em seu agrupamento que é apresentado a seguir:

Figura 114 – Figuras agrupadas na letra (f) da atividade 1 pela dupla (A6 e A9)



Fonte: Participantes (A6 e A9)

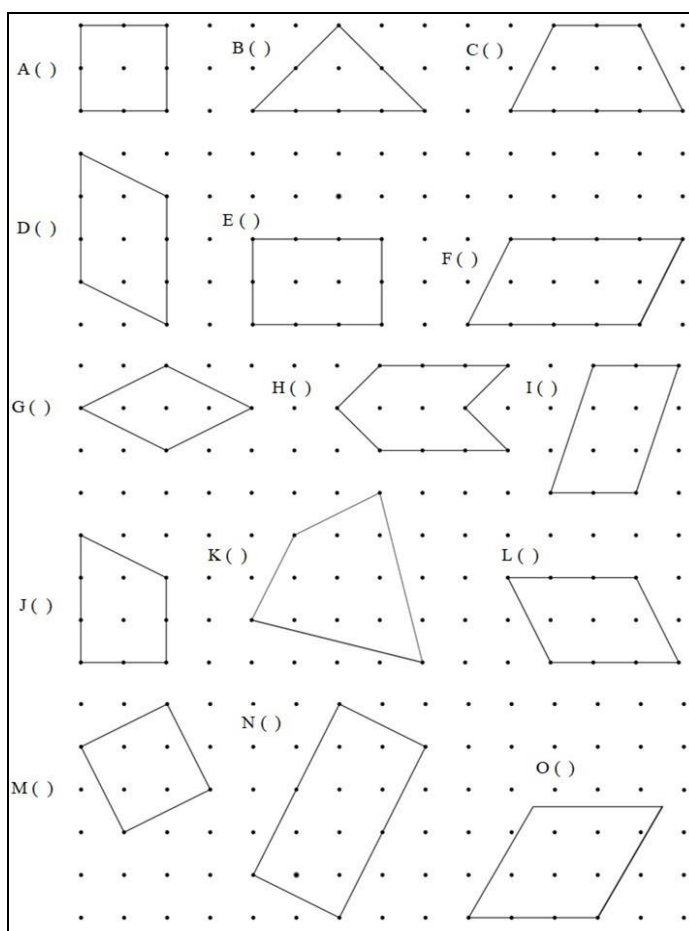
Como previsto em nossa análise a priori, essa atividade era de classificação, mas a identificação e inclusão também estariam presentes de maneira operatória, e isso é possível observar nas respostas dos estudantes. Nessa letra (f), as propriedades elencadas são específicas dos paralelogramos: lados e ângulos internos opostos iguais e os dois pares de lados opostos paralelos entre si. Neste agrupamento, percebemos que todos os paralelogramos não retângulos e não losangos (B, H, L e O), os quadrados (A e D), alguns retângulos não quadrados (I, K e N) e losangos não quadrados (M e Q) foram agrupados. Apesar de não incluírem todos os retângulos não quadrados e losangos não quadrados, o agrupamento acima é uma evidência de que conseguiram incluir, de forma operatória, tais figuras na família dos paralelogramos. Os quadrados (A e D) estavam presentes em todas as respostas dessa letra.

De modo geral, esses estudantes conseguiram classificar figuras que satisfazem propriedades dos paralelogramos, mesmo não incluindo todas elas na maioria das vezes ou, em alguns, agrupando o trapézio isósceles (P). Mesmo assim, com o auxílio da régua não graduada e do papel transparente, perceberam as demais figuras que não são paralelogramos, mais especificamente, o quadrilátero não convexo (E), o trapézio retângulo (F) e o trapezoide

(J), os quais não apareceram em nenhuma resposta dada por eles. Essas figuras já haviam sido consideradas como “diferentes” por esses participantes na atividade 2 da segunda sessão.

Após a atividade 1, tínhamos pensado na análise a priori em realizar uma discussão coletiva sobre as respostas apresentadas, mas não foi possível devido ao tempo. Dessa maneira, à medida que foram terminando a primeira atividade, entregamos a segunda, a qual é apresentada e analisada a partir de agora.

Atividade 2: Entre as figuras abaixo, assinale o(s) paralelogramo(s).



a) Qual(is) das figuras acima é(são) quadrado(s)? _____

b) Qual(is) das figuras acima é(são) retângulo(s)? _____

c) Qual(is) das figuras acima é(são) losango(s)? _____

Esta atividade foi retirada da nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018). Ela foi realizada individualmente pelos participantes. Para melhor aproveitamento dos dados, vamos analisá-la a partir de quatro aspectos: identificação de paralelogramos, classificação de quadrados, classificação de retângulos e classificação de losangos. Assim como na anterior, a situação de inclusão também está presente de maneira indireta, visto que não pede para os

participantes classificarem retângulos não quadrados e sim retângulos (incluídos os quadrados e os retângulos não quadrados). Vejamos as letras que indicam as figuras identificadas pelos participantes como paralelogramos.

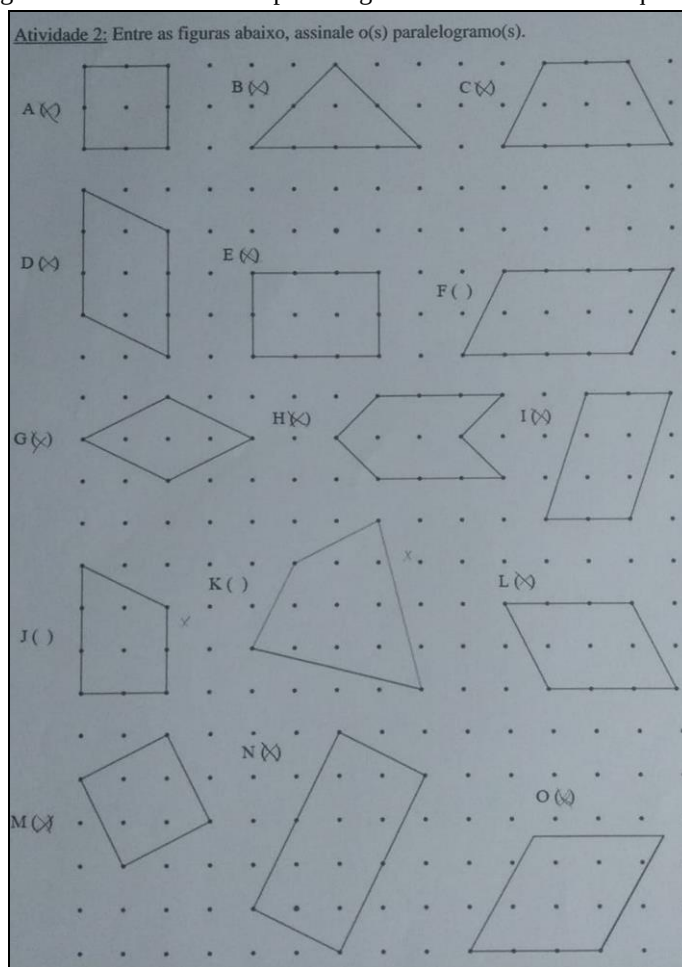
Quadro 44 – Figuras identificadas como paralelogramos na atividade 2 da quarta sessão

Identificação de paralelogramos		
Participantes	Figuras identificadas	Resposta correta esperada
A2	C, E, G, H, I, L, M, N, O	A, D, E, F, G, I, L, M, N, O
A4	A, C, D, E, F, G, I, L, M, N, O	
A6	K	
A7	A, D, E, F, G, I, L, M, N, O	
A8	C, D, H, I, J, K, L, M	
A9	Ausência de resposta	
A10	A, B, C, D, E, G, H, I, L, M, N, O	
B12	A, D, E, F, I, M, N	

Fonte: dados da pesquisa

Como podemos observar, nas respostas relativas à identificação de paralelogramos tivemos um acerto pleno da participante A7, um erro de A6, que identificou apenas o trapézioide (K), uma ausência de resposta de A9. Este último estudante perguntou no início da atividade: “O que é um paralelogramo hein?”. Apesar de muitos terem apresentado essa mesma dúvida, optamos por não dizer naquele da experimentação, pois o intuito era conhecer o que eles sabiam a respeito desse quadrilátero e irem descobrindo suas propriedades a partir da realização das atividades. Cabe ressaltar que tanto A6 quanto A9, em dupla na atividade anterior, conseguiram classificar corretamente a maioria dos paralelogramos a partir da verificação de maneira operatória das propriedades: possuir os lados e ângulos internos opostos iguais e os dois pares de lados opostos paralelos entre si. Isso confirma uma questão importante na TCC relativa ao fato de os diferentes tipos de situações levam os estudantes a mobilizar distintas propriedades, e o fato de o sujeito dispor de determinado conhecimento ao realizar uma tarefa, não significa que ele seja capaz de utilizá-lo nos diferentes tipos de situações. Por isso, a necessidade de que ele seja confrontado com várias classes de situações. No caso dos demais participantes, alguns dos paralelogramos foram identificados sozinhos ou em meio a outras figuras, como mostrado a seguir:

Figura 115 – Figuras identificadas como paralelogramos na atividade 2 da quarta sessão



Fonte: Participante A10

Em relação às figuras que são paralelogramos, A10 não identificou apenas a figura (F), a qual está em seu desenho prototípico e achávamos que seria a mais assinalada por todos. Quanto aos não paralelogramos, ele foi o único marcar o triângulo (B), entretanto, o trapézio isósceles (C) e o hexágono (H) foram os não paralelogramos mais identificados como paralelogramos por quatro e três participantes, respectivamente. Metade dos estudantes presentes terem assinalado o trapézio isósceles pode ser decorrente de suas respostas nas atividades anteriores, os quais incluíram repetidamente esse quadrilátero em seus agrupamentos. Teles (2007) percebeu uma troca entre paralelogramo não retângulo e não losango e trapézio, uma vez que os participantes esboçaram este último quando solicitados a fazer o esboço do primeiro.

No conjunto de respostas, as mais identificadas como paralelogramos, por seis dos oito participantes, foram o paralelogramo não retângulo e não losango (I) e o quadrado (M), ambos em desenhos não prototípicos. O trapézioide (K) foi assinalado por dois deles e o

trapézio retângulo (J) por apenas um estudante. Passemos à análise da classificação de quadrados, cujas respostas são apresentadas no quadro a seguir:

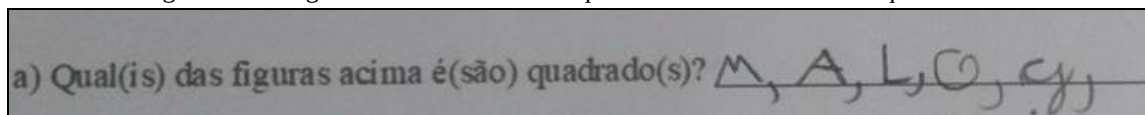
Quadro 45 – Figuras classificadas como quadrados na atividade 2 da quarta sessão

Classificação de quadrados		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2	A, G, L, M, O	A, M
A4	A, G, L, M	
A6	A, M	
A7	A, B	
A8	A, M	
A9	A, G, L, M, O	
A10	A, M	
B12	A, M	

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos um desempenho melhor que na identificação de paralelogramos, pois quatro estudantes (A6, A8, A10 e B12) classificaram corretamente todos os quadrados. Como discutido em nossa análise a priori, o quadrado em seu desenho prototípico (A) esteve presente em todas as respostas, entretanto, em nenhuma delas ele foi o único. O quadrado em desenho não prototípico (M) foi classificado por sete dos oito participantes, apontando para o reconhecimento dessa figura independente da maneira como esteja representada. Em nossa dissertação (Araújo, 2018), mais de 80% dos participantes reconheceram quadrados e retângulos, inclusive em posições não habituais. Vejamos um exemplo das respostas acima:

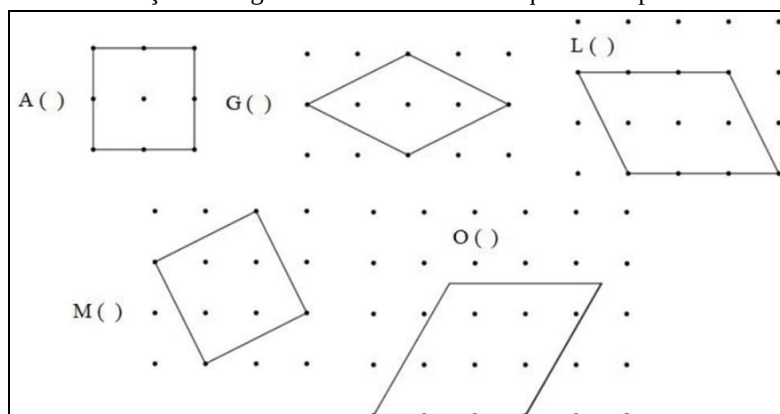
Figura 116 – Figuras classificadas como quadrados na atividade 2 da quarta sessão



Fonte: Participante A2

O participante A2, assim como A9, além de classificar corretamente os quadrados (A e M), incluiu os losangos não quadrados (G e O) e o paralelogramo não retângulo e não losango (L). Nos estudos desenvolvidos por Menegotto e Lara (2011) e Tavares (2014) também foi observado que alguns participantes consideraram o losango não quadrado como quadrado. Vamos apresentar as figuras indicadas na resposta acima para ajudar o leitor na visualização:

Figura 117 – Ilustração das figuras classificadas como quadrados por A2 e A9



Fonte: Acervo da pesquisa

O participante A4 também classificou as figuras acima como quadrados, com exceção do paralelogramo não retângulo e não losango (L). Neste caso, temos uma possibilidade de compreensão do raciocínio utilizado: todo quadrado é losango e vice-versa, a qual poderia ser confirmada ou refutada na atividade da sessão seguinte que trata dessa relação, mas o estudante faltou nesse dia. Já a inclusão da figura (L) nas respostas de A2 e A9 pode estar relacionada à ideia de quadrado deformado discutida antes, na qual desconsideram-se as alterações nas aberturas dos ângulos e prioriza a conservação dos comprimentos dos lados ou os mantém relativamente próximos.

Já no caso da participante A7 que classificou o triângulo (B) como quadrado, acreditamos que tenha sido um equívoco entre as letras, pois é uma estudante que demonstrou um bom desempenho geral em todos os encontros.

Vamos à análise da classificação de retângulos.

Quadro 46 – Figuras classificadas como retângulos na atividade 2 da quarta sessão

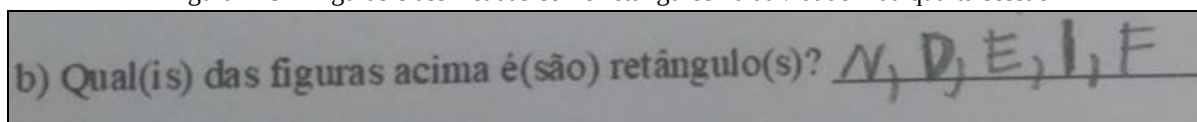
Classificação de retângulos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2	D, E, F, I, N	A, E, M, N
A4	E, F, N	
A6	E, N	
A7	E, N	
A8	E, F, N	
A9	D, E, F, I, N	
A10	E, N	
B12	E, F, N	

Fonte: dados da pesquisa

É possível perceber que nenhum dos participantes acertou plenamente a classificação de retângulos e isso se deve ao fato de não terem incluído nenhum dos quadrados em suas respostas, como também observado em Menegotto e Lara (2011) e Pereira da Costa (2016). Os retângulos não quadrados (E e N) foram classificados por todos os estudantes, com A6, A7 e A10 considerando apenas essas figuras, conforme prevista em nossa análise a priori tal

possibilidade de resposta. A inclusão do paralelogramo não retângulo e não losango em desenho prototípico (F) pela maioria dos estudantes, mais precisamente por cinco dos oito participantes, não foi esperada inicialmente, mas que poderia acontecer devido às respostas nas atividades anteriores. Vejamos um exemplo:

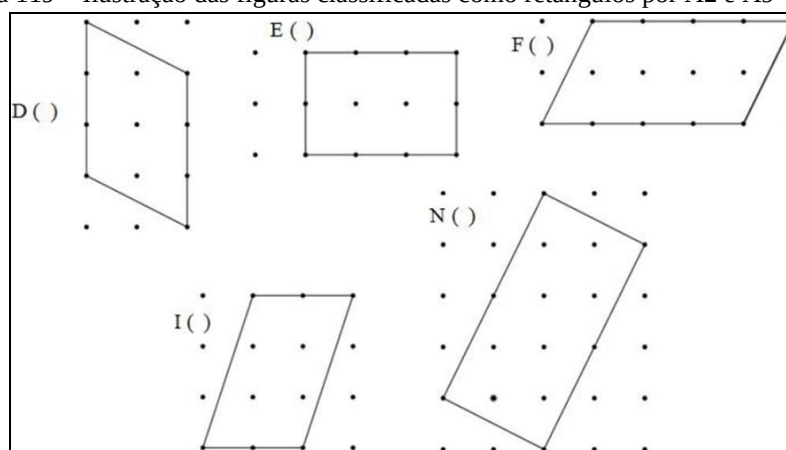
Figura 118 – Figuras classificadas como retângulos na atividade 2 da quarta sessão



Fonte: Participante A9

A resposta apresentada por A9, assim como na classificação de quadrados, novamente foi igual à de A2. Ambos incluíram além dos retângulos não quadrados (E e N), os paralelogramos não retângulos e não losangos (D, F e I), possivelmente, por considerar como critério ter os comprimentos dos lados adjacentes diferentes. As figuras estão representadas a seguir para melhor compreensão por parte do leitor:

Figura 119 – Ilustração das figuras classificadas como retângulos por A2 e A9



Fonte: Acervo da pesquisa

Os resultados apresentados pelos participantes na classificação de retângulos foram diferentes dos encontrados em nossa dissertação, pois lá, tiveram mais de 80% de acerto ao classificarem quadrados e retângulos, como já falado anteriormente. Como nenhum dos nossos participantes classificou apenas o retângulo em desenho prototípico (E), mostra que a posição da figura não interferiu em seu reconhecimento para eles e isso se deve, possivelmente, ao trabalho realizado anteriormente com figuras em diferentes posições e com a manipulação das peças do Tangram.

Os resultados da classificação de losangos são apresentados no quadro a seguir:

Quadro 47 – Figuras classificadas como losangos na atividade 2 da quarta sessão

Classificação de losangos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2	C, H, J, K	A, G, M, O
A4	D, M, O	
A6	“Não sei”	
A7	G	
A8	F, G, L, O	
A9	Ausência de resposta	
A10	D, F, I, L, O	
B12	F, I, L, O	

Fonte: dados da pesquisa

Em nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018), os estudantes apresentaram maior dificuldade na classificação de losangos e na identificação de paralelogramos, cujos percentuais de acerto foram de 36% e 45%, respectivamente. A dificuldade ao lidar com essas figuras também foi percebida com nossos participantes atuais, visto que na identificação de paralelogramos tivemos um erro e uma ausência de resposta e na classificação de losangos, como podemos ver no quadro acima, um dos estudantes não acertou nenhuma das figuras classificadas, um escreveu “não sei” e o outro deixou em branco. Cabe ressaltar que as ausências de respostas na identificação de paralelogramos e na classificação de losangos foram do mesmo participante, no caso, A9.

Quando iniciaram a classificação de losangos já começaram a perguntar o que seria essa figura como, por exemplo, A6 e A8 que fizeram exatamente a mesma pergunta: “O que é losango?”. Nós respondemos P: “O que é um losango? O que você acha que é um losango. É isso que eu quero saber”. Mais adiante continuamos:

P: Então, no caso, vocês estão com mais, assim, o que mais está gerando dúvidas é saber o que é, o que é...

A6: O paralelogramo.

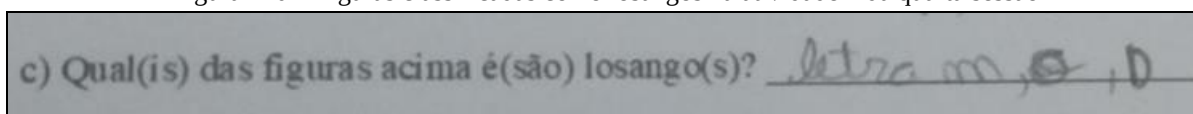
A9: O paralelogramo e o losango.

A fala anterior reafirma os achados da pesquisa de Diniz (2013) cujos índices de acertos na classificação pela visualização do losango não quadrado e do paralelogramo não retângulo e não losango foram de apenas 11% e 10%, respectivamente. Maiores dificuldades envolvendo o losango não quadrado também foram observadas nos estudos de Fujita (2012) e Menegotto e Lara (2011).

Entre as figuras classificadas corretamente como losangos, diferentemente do que esperávamos, o que estava em desenho não prototípico (O) foi mais considerado entre eles, por quatro dos oito participantes. Já o que estava em seu desenho prototípico (G) foi classificado por apenas dois participantes, sendo a única figura inserida por A7. Paralelogramos não retângulos e não losangos foram classificados como losangos por três dos oito participantes. Diferentemente da classificação de retângulos, houve a inclusão do

quadrado em desenho não prototípico (M) pelo estudante A4 ao classificar losangos, como mostrado a seguir:

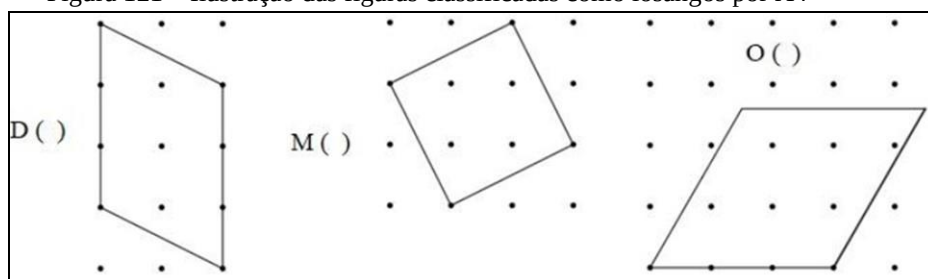
Figura 120 – Figuras classificadas como losangos na atividade 2 da quarta sessão



Fonte: Participante A4

Na resposta acima, A4 incluiu na sua classificação o paralelogramo não retângulo e não losango (D), o quadrado (M), possivelmente por estar apoiado sobre um dos vértices, e o losango não quadrado (O), todos em seus respectivos desenhos não prototípicos, como podemos ver na ilustração a seguir:

Figura 121 – Ilustração das figuras classificadas como losangos por A4



Fonte: Acervo da pesquisa

Por fim, o participante A2 classificou como losangos os quadriláteros presentes na atividade que não eram paralelogramos, mais especificamente: os trapézios (C e J), o hexágono (H) e o trapezoide (K), provavelmente, por não saber que figura está classificando e, assim, optou por colocar aquelas consideradas em atividades anteriores como “diferentes”.

Em resumo, as atividades trabalhadas nessa quarta sessão possibilitaram perceber que os estudantes conseguiram verificar propriedades dos paralelogramos e classificá-los a partir delas de forma operatória, inclusive realizando inclusões, mesmo não agrupando todos eles. No entanto, quando deveriam identificar e agrupar a partir da nomenclatura oficial de cada figura, a dificuldade aumentou, principalmente quando se tratava de paralelogramos não retângulos e não losangos e losangos não quadrados, possivelmente por serem menos exploradas como vimos nas análises prévias. O desempenho no quadrado foi melhor em relação às demais figuras e não houve inclusão ao classificarem retângulos. Passemos à análise da quinta sessão.

5.5 ANÁLISE DA QUINTA SESSÃO

A quinta sessão foi realizada em 26 de maio de 2022 e contou com a presença de cinco (A2, A6, A7, A10 e B12) dos nove estudantes. A partir da atividade prevista para esse dia, verificamos a compreensão dos estudantes acerca das relações inclusivas e qual o posicionamento deles sobre as recíprocas, aprofundando a forma predicativa do conhecimento por meio das explicações e representações simbólicas apresentadas. Ela estava prevista para ser feita em trios, mas devido à quantidade de estudantes presentes, foi realizada em duas duplas e individualmente. Dispuseram de réguas não graduadas para ajudar no traçado dos desenhos durante as explicações e na verificação de igualdade de comprimentos.

Iniciamos essa sessão com uma apresentação em *slides* contendo agrupamentos que realizaram a partir das propriedades da atividade 1 da quarta sessão. Naquele momento, levantamos alguns questionamentos a partir das respostas deles, buscando apresentar, sempre que possível, agrupamentos que satisfaziam e que não satisfaziam cada propriedade indicada.

Após a introdução da nomenclatura oficial das figuras a partir de propriedades características de uma delas, consideramos pertinente reaplicar a atividade 2 da quarta sessão relativa à identificação de paralelogramos e classificação de quadrados, retângulos e losangos, para observar possíveis avanços ou dificuldades que ainda persistiram mesmo após as discussões realizadas. Antes de passarmos à análise comparativa das respostas apresentadas nessa atividade na quarta sessão e na quinta, após a sistematização, vejamos alguns recortes das discussões durante a apresentação em *slides*.

Ao questionarmos como se chama uma figura com os quatro ângulos retos, o participante A6 respondeu “quadrado” e A10 disse que seria um “paralelepípedo”, conforme recorte a seguir:

P: Como é que se chama uma figura que possui os quatro ângulos retos, ou seja, os quatro ângulos com 90° ?

A10: Eu vou dizer um nome, mas não sei se tá certo: paralelepípedo.

P: Paralelepípedo.

Naquele momento, como estávamos em um processo de sistematização, explicamos que o paralelepípedo faz parte de outro grupo de figuras, as espaciais, e utilizamos uma caixa de papelão para exemplificar, apontando as faces como figuras planas e que vamos nos restringir apenas a elas em nossos encontros. Ao final do momento de sistematização, o estudante B12 falou:

B12: Os losangos, os retângulos e os quadrados tá tudo no paralelogramo.

P: Como é, B12?

A6: Menos (P) e (J) [se referindo ao trapézio isósceles e o trapezoide, respectivamente].

B12: Menos (P) e (J).

P: Como é, B12?

B12: O losango, o quadrado e o retângulo tá tudo no paralelogramo.

P: Tá.

B12: Tá tudo numa festa só. [...].

Como podemos observar, o participante B12 utilizou corretamente a nomenclatura das figuras e demonstrou ter compreendido a relação de inclusão entre elas, a qual podemos verificar a partir de agora realizando a análise comparativa das respostas apresentadas na quarta sessão e na quinta, após discussão e sistematização, na atividade de identificação e classificação de paralelogramos. Vejamos, inicialmente, a identificação de paralelogramos:

Quadro 48 – Figuras identificadas como paralelogramos antes e após a discussão e sistematização

Identificação de paralelogramos			
Participantes	Figuras identificadas antes da discussão e sistematização	Figuras identificadas após a discussão e sistematização	Resposta correta esperada
A2	C, E, G, H, I, L, M, N, O	A, C, E, G, H, I, J, K, M, N	A, D, E, F, G, I, L, M, N, O
A6	K	A, D, E, F, G, I, L, M, N, O	
A7	A, D, E, F, G, I, L, M, N, O	A, D, E, F, G, I, L, M, N, O	
A10	A, B, C, D, E, G, H, I, L, M, N, O	A, D, E, F, I, L, M, N, O	
B12	A, D, E, F, I, M, N	A, D, E, F, G, I, L, M, N, O	

Fonte: dados da pesquisa

A partir do quadro acima, é possível perceber uma mudança no estado de conhecimento dos estudantes, visto que antes da discussão e sistematização, apenas a participante A7 havia acertado plenamente a identificação de paralelogramos. Após esse momento, tivemos mais dois acertos plenos, inclusive de A6 que não tinha conseguido identificar corretamente nenhum paralelogramo anteriormente. Apenas A2 continuou a incluir em sua resposta figuras que não são paralelogramos, como trapézios (C e J), hexágono (H) e trapezoide (K). A evolução na classificação de quadrados também foi observada e é apresentada no quadro a seguir:

Quadro 49 – Figuras classificadas como quadrados antes e após a discussão e sistematização

Classificação de quadrados			
Participantes	Figuras classificadas antes da discussão e sistematização	Figuras classificadas após a discussão e sistematização	Resposta correta esperada
A2	A, G, L, M, O	A, M	A, M
A6	A, M	A, M	
A7	A, B	A, M	
A10	A, M	A, M	
B12	A, M	A, M	

Fonte: dados da pesquisa

Na classificação de quadrados já haviam tido um desempenho melhor que nos demais paralelogramos e aqueles que não conseguiram acertar plenamente antes da discussão e sistematização passaram a classificá-los corretamente, como é o caso dos participantes A2 e A7 que incluíam anteriormente em suas respostas losangos não quadrados (G e O), paralelogramo não retângulo e não losango (L) e triângulo (B). Vejamos o comparativo relativo à classificação de retângulos:

Quadro 50 – Figuras classificadas como retângulos antes e após a discussão e sistematização

Classificação de retângulos			
Participantes	Figuras classificadas antes da discussão e sistematização	Figuras classificadas após a discussão e sistematização	Resposta correta esperada
A2	D, E, F, I, N	D, E, F, L, N	A, E, M, N
A6	E, N	D, E, F, I, N	
A7	E, N	A, E, M, N	
A10	E, N	E, N	
B12	E, F, N	A, E, I, M, N	

Fonte: dados da pesquisa

Na classificação de retângulos houve uma melhora, entretanto, não foi tão significativa quanto nos casos anteriores. Percebemos que a estudante A7 passou a ter acerto pleno e os quadrados (A e M) passaram a ser incluídos nos retângulos por dois deles (A7 e B12). Todos continuaram a considerar como retângulos os não quadrados (E e N), sendo as únicas figuras consideradas por A10 nos dois momentos. Os paralelogramos não retângulos e não losangos (D, F, I e L) foram as únicas figuras que não são retângulos classificadas como retângulos, reforçando a ideia já tratada anteriormente de que o paralelogramo é um retângulo deformado (Baltar, 1996; Douady; Perrin-Glorian, 1989) ou um “gênero de retângulo”, porém mais inclinado para um lado (Tavares, 2014). Para finalizar essa parte comparativa, passemos à classificação de losangos.

Quadro 51 – Figuras classificadas como losangos antes e após a discussão e sistematização

Classificação de losangos			
Participantes	Figuras classificadas antes da discussão e sistematização	Figuras classificadas após a discussão e sistematização	Resposta correta esperada
A2	C, H, J, K	A, G, M, O	A, G, M, O
A6	“Não sei”	G, L, K	
A7	G	A, G, M, O	
A10	D, F, I, L, O	A, M	
B12	F, I, L, O	G, M, O	

Fonte: dados da pesquisa

Observamos no quadro acima que antes da discussão e sistematização nenhum estudante teve acerto pleno, o que mudou após esse momento, visto que os participantes A2 e A7 conseguiram classificar todos os losangos corretamente. O estudante A6 foi o único a incluir em sua resposta figuras que não são losangos, como o paralelogramo não retângulo e não losango (L) e o trapézio (K). Pereira da Costa (2016) notou que algumas duplas participantes de sua pesquisa construíram o paralelogramo não retângulo e não losango ou trapézio quando solicitados a construir um losango. Notamos ainda que o participante A10 considerou apenas os quadrados (A e M) como losangos e B12 não incluiu em sua resposta o quadrado em desenho prototípico (A), embora tenha acrescentado o (M).

De modo geral, o momento de discussão e sistematização e a reaplicação da atividade 2 da quarta sessão mostrou uma diminuição na dificuldade dos estudantes e, conseqüentemente, avanços em seus desempenhos tanto no reconhecimento das figuras quanto na relação de inclusão entre elas. Após isso, passamos para a atividade prevista para aquele dia, que foi a seguinte:

Atividade⁶²: Estudantes de uma turma de 9º ano do ensino fundamental da Escola Darcy Ribeiro estavam estudando alguns quadriláteros. Durante as discussões foram feitas algumas afirmações. Em trios, vocês deverão ler essas afirmações, debater, marcar se concordam ou não com cada uma delas e explicar a opinião do trio com textos e desenhos.

a) Todo quadrado é um retângulo. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

e) Todo quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

b) Todo retângulo é um quadrado. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

f) Os retângulos são paralelogramos. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

c) Todo quadrado é um losango. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

g) Os losangos são paralelogramos. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

d) Todo losango é um quadrado. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

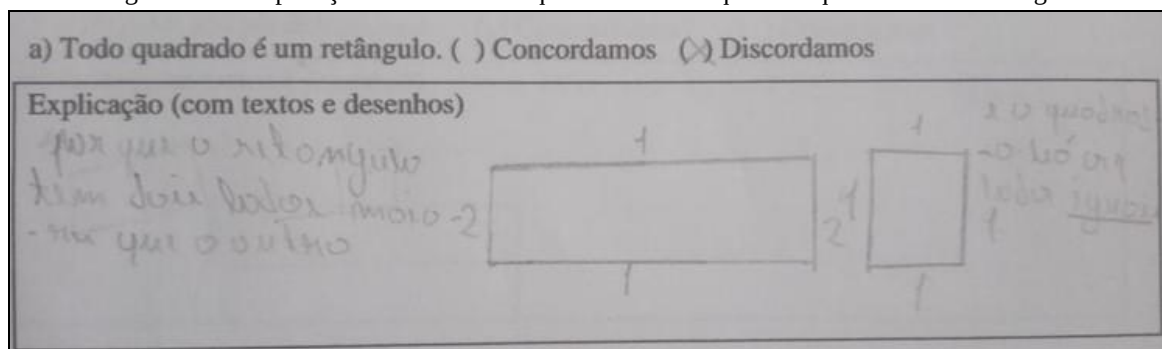
h) Os retângulos e losangos não são paralelogramos. () Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

Em relação à letra (a) *Todo quadrado é um retângulo*, dois grupos concordaram e um discordou, este último se apoiando em uma classificação não inclusiva, conforme podemos ver no recorte a seguir:

⁶² Na atividade aplicada, as afirmações não estavam lado a lado como mostrado aqui e os espaços para as explicações eram maiores. Optamos por colocá-las dessa maneira por uma questão de organização do texto.

Figura 122 – Explicação dos estudantes que discordaram que todo quadrado é um retângulo



Fonte: Participantes (A2 e A10)

Como podemos observar, os participantes (A2 e A10) se apoiaram no aspecto visual do retângulo, considerando que ele tem “dois lados maiores que o outro” e que o quadrado não poderia ser um retângulo visto que nele “há os quatro lados iguais”. Os participantes da pesquisa de Fujita (2012) também tiveram dificuldade em aceitar que o quadrado é retângulo, pois tomaram como referência apenas os retângulos não quadrados, ou seja, aqueles que têm lados adjacentes de comprimentos diferentes. As representações simbólicas desses estudantes conduzem a duas interpretações diferentes: a primeira é relativa a uma troca nos valores numéricos, uma vez que o lado que contém uma unidade possui comprimento maior que o lado com duas unidades, com ausência das unidades de medida; a segunda pode estar relacionada à utilização desses números não como medidas, mas para designar lados de mesmo comprimento ou comprimentos diferentes. Destacamos ainda os desenhos prototípicos do retângulo não quadrado e do quadrado.

Quanto aos participantes que concordaram com a afirmação, apenas A7 se apoiou na propriedade discutida durante o encontro, relativa ao fato de o quadrado possuir os quatro ângulos retos. Já o grupo formado por (A6 e B12) concordou porque, segundo esses participantes, ambos possuem quatro lados, ou seja, se apoiaram no fato de serem quadriláteros. Vejamos um trecho da discussão entre esses dois participantes e que já aponta para sua resposta na letra (b) da atividade:

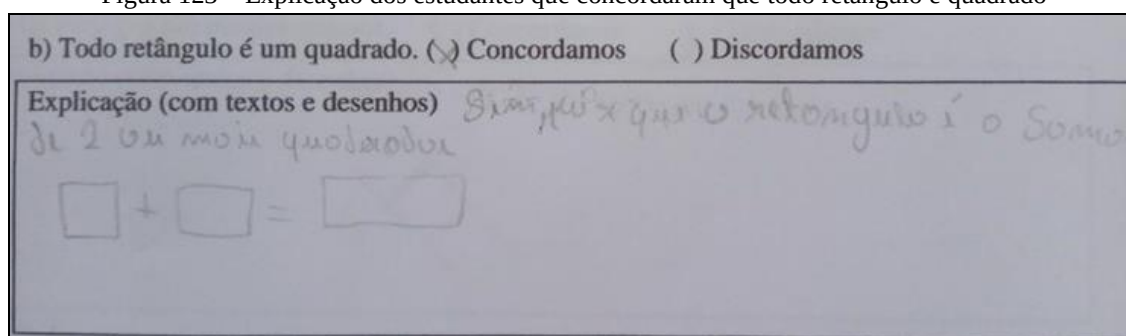
- A6: Oh, professor, chegue aí, professor. Todo retângulo é um quadrado, né?
 P: É com vocês.
 A6: Todo retângulo é um quadrado. Mas todo quadrado é um retângulo?
 P: E aí, vê aí. O que é que você acha?
 B12: Todo quadrado é um retângulo.
 P: Ele já tá dizendo outra coisa.
 B12: Eu já digo outra coisa. [...].

Ao questionarmos o que uma figura precisaria ter para ser um retângulo, A6 deu uma resposta que converge com a ideia de retângulo para a dupla (A2 e A10). Segundo ele, precisa “Ter quatro lados e o lado, e um lado dele ser; e um dos lados opostos ser maior”. Esta

definição é convergente com as ideias apresentadas pelos participantes de Fujita (2012) e se assemelha à explicitada pelos de Tavares (2014, p. 77) ao dizerem que o retângulo é “uma figura geométrica com comprimento e largura diferente”. Já o participante B12 pareceu estar convicto de que todo quadrado é um retângulo, tanto que incluiu os quadrados ao classificar retângulos na atividade anterior, diferentemente de A6 que não o fez.

Na letra (b) *Todo retângulo é um quadrado*, todos os participantes concordaram com a afirmação, conforme previsto em nossa análise a priori que poderiam considerar verdadeiro tanto que todo quadrado é retângulo quanto que todo retângulo é quadrado. Mais uma vez, apresentamos o recorte da explicação dada por (A2 e A10):

Figura 123 – Explicação dos estudantes que concordaram que todo retângulo é quadrado



Fonte: Participantes (A2 e A10)

Novamente, o aspecto visual do retângulo apareceu na resposta desses estudantes, sendo que a parte textual da representação simbólica pode ser interpretada como de cunho aritmético ou, combinada com a parte gráfica, designa a palavra soma como a união das regiões, cujo cunho é geométrico. Os desenhos apresentados são prototípicos e sem comprimentos dos lados explicitados. Na pesquisa de Diniz (2013), quando solicitados a desenhar um triângulo retângulo, os participantes desenharam um triângulo e um retângulo não quadrado, possivelmente, se apoiando nessa ideia de junção para compor outra figura. Os demais participantes se apoiaram nos argumentos anteriores utilizados na letra (a), um relativo a possuir quatro lados e o outro a ter os ângulos de 90°.

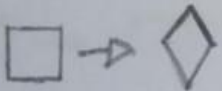
Na letra (c) *Todo quadrado é um losango*, todos os participantes concordaram com esta afirmação, mas apenas (A2 e A10) se apoiaram na propriedade discutida em sala: possuir quatro lados de mesmo comprimento. A dupla (A6 e B12) explicitou uma propriedade dos paralelogramos, como mostrado a seguir:

Figura 124 – Explicação dos estudantes que concordaram que todo quadrado é um losango

c) Todo quadrado é um losango. (X) Concordamos () Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

sim, por que possuem lados opostos iguais



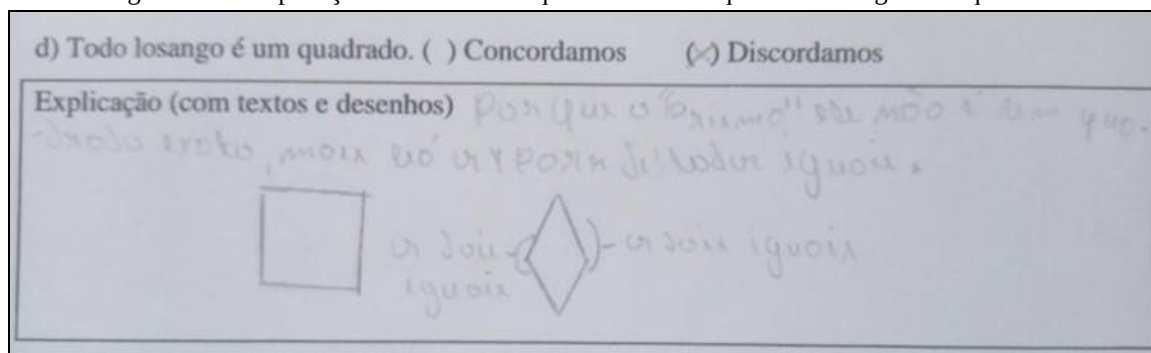
Fonte: Participantes (A6 e B12)

A explicação acima, apresentada pelos estudantes A6 e B12, é necessária, mas não é suficiente para justificar a afirmação. Vimos algo parecido em uma situação de classificação presente nas apostilas do 7º ano da escola campo de pesquisa em que havia o desenho de um losango, porém as propriedades descritas eram próprias dos paralelogramos – possuir os lados opostos paralelos e os ângulos internos opostos iguais – não sendo suficientes para a classificação de um losango. Menegotto e Lara (2011) também observaram a mobilização de propriedades necessárias, porém não suficientes para caracterizar um losango como, por exemplo, ter lados opostos paralelos.

A participante A7 concordou com a afirmação, mas sua explicação não foi adequada, pois se apoiou numa ideia segundo a qual “os quadrados e losangos tem 4 lados de 90°”, destacando, inclusive, ângulos retos no losango que desenhou. A expressão ter “quatro lados de 90°” também foi observada na pesquisa de Menegotto e Lara (2011), ao descreverem propriedades dos retângulos. Apesar da utilização de termos inadequados como “lados de 90°”, percebeu-se uma evolução na forma prediativa do conhecimento por parte de nossos participantes, em representações simbólicas verbal, textual e gráfica, inclusive descrevendo adequadamente propriedades e termos específicos das figuras em estudo como possuir lados opostos iguais, ângulos retos, entre outros.

Na letra (d) *Todo losango é um quadrado*, dois grupos discordaram e um concordou. A participante A7 falou que concordava ainda apoiada no fato de que, segundo ela, “eles têm os lados iguais a 90°”. O grupo de (A2 e A10) considerou o losango como um prisma, conforme apresentamos abaixo:

Figura 125 – Explicação dos estudantes que discordaram que todo losango é um quadrado

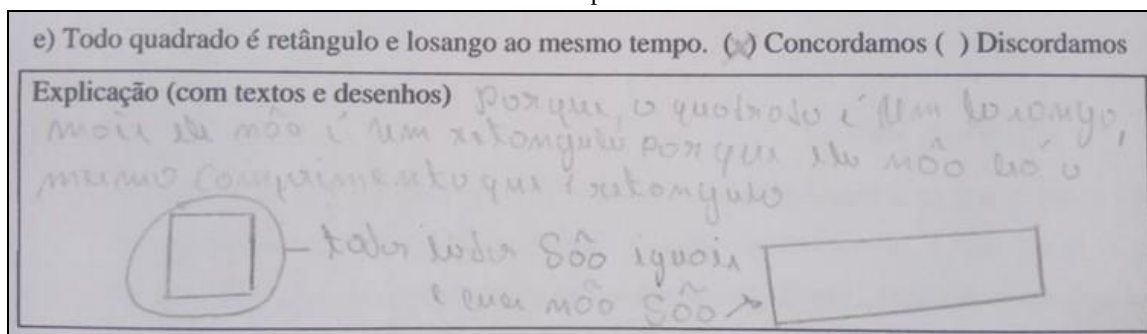


Fonte: Participantes (A2 e A10)

Na explicação acima, eles discordaram que todo losango é um quadrado “porque o “prisma” ele não é um quadrado exato, mas há os 2 pares de lados iguais”. Apesar de ser uma atividade em grupo, a utilização do termo “prisma” se referindo ao losango não quadrado pode ter sido influenciada pelo participante A10, pois ele já vinha utilizando de forma equivocada uma nomenclatura de figuras espaciais como paralelepípedo e prisma para o paralelogramo não retângulo e não losango e o losango não quadrado, respectivamente, ao longo dos outros encontros. Do ponto de vista cognitivo, ele pareceu reconhecer que não se tratava de um prisma em si, mas lembrava essa figura, por isso a utilização das aspas em sua representação simbólica. Com exceção do termo inadequado, eles se apoiaram corretamente no fato de terem quatro lados iguais, mas que o losango não quadrado não é, segundo eles, “um quadrado exato”. Destacamos o desenho prototípico do quadrado e o losango não quadrado em um desenho que se aproxima do prototípico, também representados pelos demais participantes. Para finalizar a discussão da letra (d), o outro grupo que discordou apresentou uma explicação incoerente, discordando porque “eles não possuem quatro lados opostos”.

Na letra (e) *Todo quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo*, todos os participantes concordaram, entretanto, se considerarmos o conjunto de respostas anteriores nas letras (a) e (c) que trataram dessas afirmações isoladamente, apenas dois grupos haviam concordado com elas. O grupo formado pelos estudantes (A2 e A10), apesar de concordar, manteve coerência em suas respostas na explicação, pois permaneceu discordando que todo quadrado é retângulo, como podemos ver no extrato em seguida:

Figura 126 – Explicação dos estudantes que concordaram que todo quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo

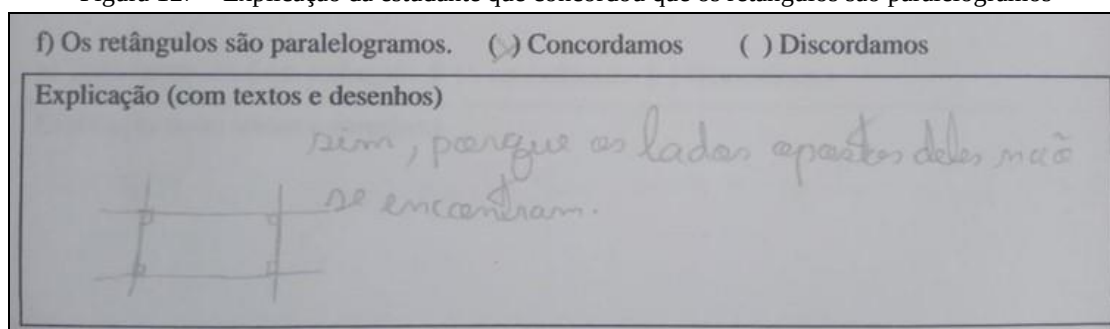


Fonte: Participantes (A2 e A10)

Na explicação acima, eles concordaram que o quadrado é um losango, mas continuaram discordando que é um retângulo por não considerarem os quatro ângulos retos, mas apenas a igualdade dos comprimentos dos lados. Já a participante A7 permaneceu, possivelmente, confundindo lado e ângulo, pois falou que os três têm “4 lados de 90°”, caracterizando uma resposta inadequada, pois este não é o caso do losango se considerarmos que sua fala é relativa aos ângulos. O grupo de (A6 e B12) concordou, falando apenas que “são paralelos” e representou um quadrado e um trapézio aparentemente isósceles.

Na letra (f) *Os retângulos são paralelogramos*, todos os participantes concordaram. Dois grupos se apoiaram em uma das propriedades dos paralelogramos discutida durante o encontro, aquela relativa aos lados opostos serem paralelos, cujo exemplo é mostrado a seguir:

Figura 127 – Explicação da estudante que concordou que os retângulos são paralelogramos



Fonte: Participante A7

Percebemos que a participante fez o desenho prototípico de um retângulo não quadrado com os lados opostos prolongados para mostrar que eles não se encontram, conforme explicação apresentada. Já o grupo de (A6 e B12) também concordou, mas considerou o aspecto da figura, ou seja, a questão visual.

Na letra (g) *Os losangos são paralelogramos*, todos os participantes também concordaram, assim como na anterior. O argumento utilizado nas explicações dos

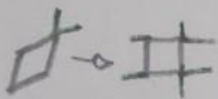
participantes também foi o mesmo, segundo o qual “as linhas não se encontram”, referindo-se à propriedade de paralelismo dos lados opostos, conforme recorte a seguir:

Figura 128 – Explicação dos estudantes que concordaram que os losangos são paralelogramos

g) Os losangos são paralelogramos. ☒ Concordamos ☐ Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

sim, pois tem linhas, que não se encontram.



Fonte: Participantes (A6 e B12)

Na representação simbólica dos estudantes percebemos que consideraram a inclusão de classes, pois desenharam não apenas o losango não quadrado. No entanto, não conseguiram prolongar corretamente os lados opostos do losango não quadrado para mostrar que eles não se encontram, como possivelmente pretendiam para validar a explicação dada.

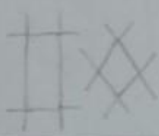
Finalmente, na letra (h) *Os retângulos e losangos não são paralelogramos*, dois grupos discordaram e um concordou, embora os argumentos apresentados nas explicações sejam comuns, voltados ao paralelismo dos lados opostos, o que nos leva a inferir que o grupo de (A2 e A10) concordou por não perceber a palavra “não” na afirmação acima. Vejamos um recorte de um dos participantes que discordaram:

Figura 129 – Explicação dos estudantes que discordaram que os retângulos e losangos não são paralelogramos

h) Os retângulos e losangos não são paralelogramos. ☐ Concordamos ☒ Discordamos

Explicação (com textos e desenhos)

Não porque paralelogramos são linhas que não se cruzam.



Fonte: Participante A7

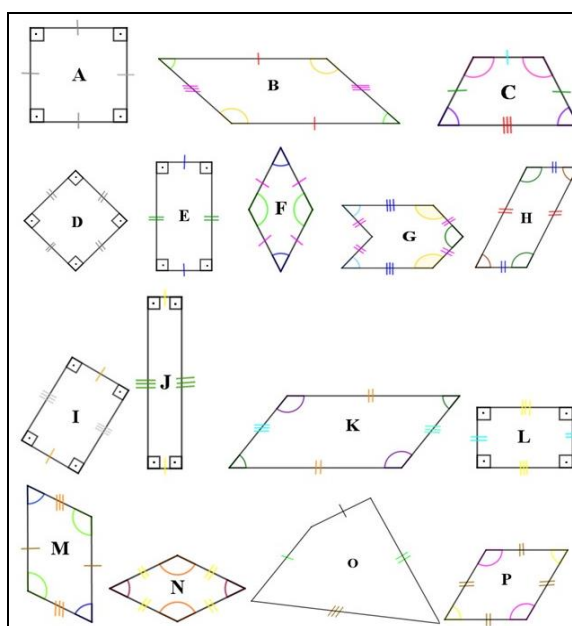
No recorte acima, a estudante conseguiu mostrar que os lados opostos não se cruzam, até mesmo quando foram prolongados, no entanto, nesse momento da atividade não tratou esse fato como propriedade, mas como uma definição dos paralelogramos: “são linhas que não se cruzam”. Vimos na figura 127 que ela considerou como uma propriedade e não definição. Os desenhos acima de retângulo não quadrado e losango não quadrado são aqueles que se aproximam dos prototípicos.

Em geral, essa sessão mostrou uma evolução por parte dos estudantes, tanto no reconhecimento dos paralelogramos e compreensão da inclusão de classes entre eles quanto na forma prediativa do conhecimento, os quais passaram a utilizar termos e propriedades específicos, salvo alguns equívocos como “lados de 90°” e chamar o losango não quadrado de “prisma”, bem como utilização de representações simbólicas dessas figuras. Passemos à análise da próxima sessão.

5.6 ANÁLISE DA SEXTA SESSÃO

A sexta sessão foi realizada em 09 de junho de 2022 e contou com a presença de oito (A2, A4, A6, A7, A8, A9, A10 e B12) dos nove estudantes. Iniciamos com uma apresentação em *slides*, relembrando propriedades dos quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos, destacando as inclusões de classes entre eles. Também falamos sobre retas paralelas, ângulos retos e propriedades de figuras que não são paralelogramos. Em seguida, fizemos uma discussão acerca das respostas dadas na atividade da sessão anterior e iniciamos as atividades do dia, as quais foram realizadas em duplas pela maioria dos participantes. Aprofundamos o estudo dos paralelogramos e suas propriedades por meio de situações de classificação e inclusão, explorando também propriedades relativas às diagonais. Dispuseram de régua não graduada para ajudar no trabalho com as diagonais. A primeira atividade foi a seguinte:

Atividade 1: Observem as figuras representadas abaixo:



Em duplas, indiquem:

- a) Os quadrados: _____
- b) Os retângulos: _____
- c) Os retângulos que não são quadrados: _____
- d) Os losangos: _____
- e) Os losangos que não são quadrados: _____
- f) Os paralelogramos: _____
- g) Os paralelogramos que não são nem retângulos e nem losangos: _____
- h) As figuras que não são paralelogramos: _____

Como apontamos na análise a priori, na situação de classificação acima, optamos por figuras em representações diferentes das tratadas até aqui para ampliar a diversidade delas e discutirmos algumas convenções em Geometria, como quantidade de tracinhos de mesmo tamanho e cor para representar congruências de comprimentos de lados, e marcas de mesma cor no caso das congruências de aberturas de ângulos. Assim, como as figuras já possuíam tais marcações, a régua não graduada foi utilizada apenas na atividade 2 dessa mesma sessão.

As respostas apresentadas na classificação de quadrados, letra (a), foram agrupadas no quadro a seguir:

Quadro 52 – Figuras classificadas como quadrados na atividade 1 da sexta sessão

Classificação de quadrados		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	A, D	A, D
A6 e A7	A, D	
A8 e B12	A, D	
A9	A, D, N, P	
A10	A, D	

Fonte: dados da pesquisa

Como vemos, apesar do bom desempenho apresentado pelos estudantes na classificação de quadrados, o participante A9 incluiu figuras que não são quadrados em sua resposta, como podemos ver no extrato a seguir:

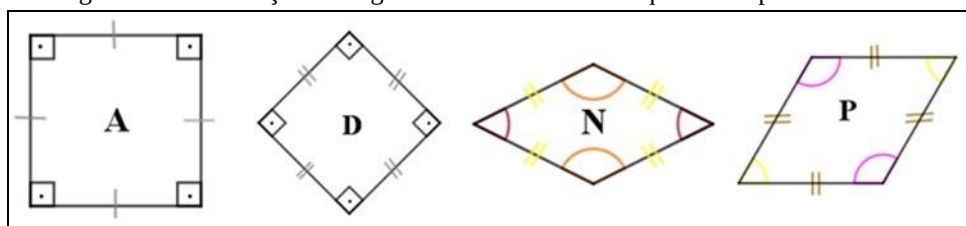
Figura 130 – Figuras classificadas como quadrados na atividade 1 da sexta sessão

a) Os quadrados: A, D, P, N.

Fonte: Participante A9

Além dos quadrados (A e D), o estudante A9 incluiu losangos não quadrados (N e P), considerando, possivelmente, que todo quadrado é losango e reciprocamente. No entanto, não classificou o losango não quadrado (F), em desenho que mais se aproxima do prototípico, em sua resposta. As figuras classificadas por ele são apresentadas abaixo:

Figura 131 – Ilustração das figuras classificadas como quadrados por A9



Fonte: Acervo da pesquisa

Em relação à classificação de retângulos, letra (b), obtivemos as seguintes respostas contidas no quadro a seguir:

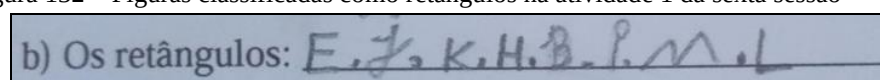
Quadro 53 – Figuras classificadas como retângulos na atividade 1 da sexta sessão

Classificação de retângulos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	E, I, J, L	A, D, E, I, J, L
A6 e A7	A, D, E, I, J, L	
A8 e B12	E, I, J, L	
A9	B, E, H, I, K, L, M, P	
A10	A, D, E, I, J, L	

Fonte: dados da pesquisa

A partir do quadro acima é possível notar dois acertos plenos, duas classificações apenas de retângulos não quadrados e, no caso de A9, a inclusão de paralelogramos não retângulos e não losangos (B, H, K, M), possivelmente por considerá-los como um “gênero de retângulo”, porém mais inclinado para um lado, como vimos em Tavares (2014), e do losango não quadrado (P) aos retângulos (E, J, L). Mais uma vez, vamos observar a resposta dada por A9 e as figuras classificadas por ele, uma vez que se distanciaram das apresentadas pelos demais colegas:

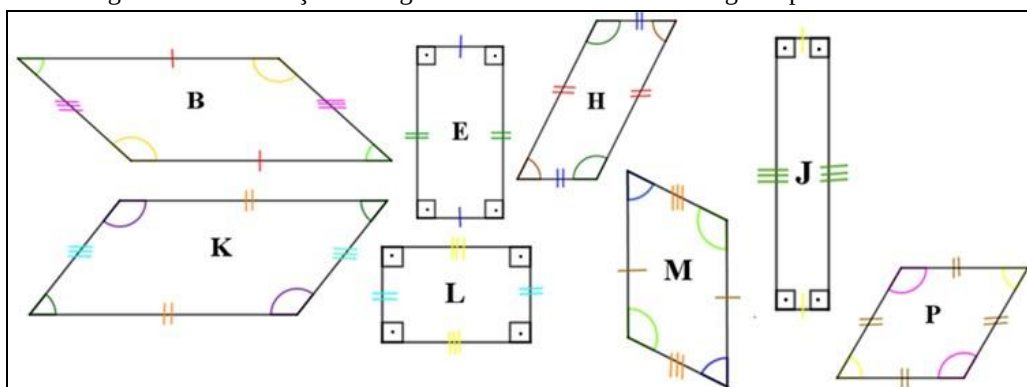
Figura 132 – Figuras classificadas como retângulos na atividade 1 da sexta sessão



Fonte: Participante A9

Apesar do estudante A9 ter classificado alguns retângulos não quadrados, não incluiu o retângulo não quadrado em desenho não prototípico (I). Apresentamos as figuras classificadas por ele na ilustração a seguir:

Figura 133 – Ilustração das figuras classificadas como retângulos por A9



Fonte: Acervo da pesquisa

As respostas apresentadas na classificação de retângulos não quadrados, letra (c), estão agrupadas no seguinte quadro:

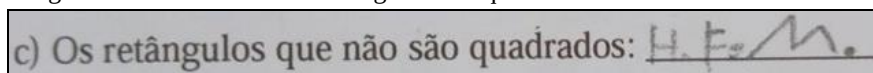
Quadro 54 – Figuras classificadas como retângulos não quadrados na atividade 1 da sexta sessão

Classificação de retângulos não quadrados		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	E, J	E, I, J, L
A6 e A7	E, I, J, L	
A8 e B12	E, I, J, L	
A9	F, H, M	
A10	I, L, L	

Fonte: dados da pesquisa

Diante das respostas acima, observamos que duas duplas tiveram acertos plenos (A6 e A7) e (A8 e B12). Esta última dupla apresentou a mesma resposta tanto para os retângulos quanto para os retângulos não quadrados, parecendo tratar as solicitações das letras (b) e (c) como sinônimas. Já a dupla formada pelos estudantes (A2 e A4), assim como o participante A10, não conseguiram classificar todos os retângulos não quadrados. Mais uma vez, o estudante A9 continuou apresentando dificuldades em realizar adequadamente a classificação das figuras e não conseguiu acertar nenhuma das que classificou, como exemplificado a seguir:

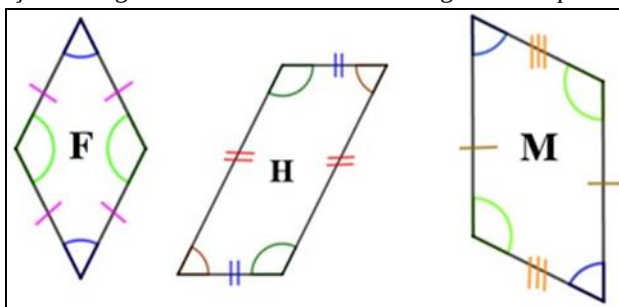
Figura 134 – Figuras classificadas como retângulos não quadrados na atividade 1 da sexta sessão



Fonte: Participante A9

Diante da figura acima, é possível perceber que A9 classificou como retângulo não quadrado o losango não quadrado (F) e os paralelogramos não retângulos e não losangos (H, M). Uma característica comum entre as três figuras agrupadas por ele é relativa ao fato de nenhuma possuir o lado de maior comprimento, ou a diagonal maior no caso do losango não quadrado, na posição horizontal, como podemos ver a seguir:

Figura 135 – Ilustração das figuras classificadas como retângulos não quadrados por A9



Fonte: Acervo da pesquisa

Na letra (d), classificação de losangos, obtivemos as seguintes respostas:

Quadro 55 – Figuras classificadas como losangos na atividade 1 da sexta sessão

Classificação de losangos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	B, F , H, K, M, N , P	A, D, F, N, P
A6 e A7	A, D, F, N, P	
A8 e B12	A, D, F, N, P	
A9	A, D, F, N, P	
A10	A, D, F, N, P	

Fonte: dados da pesquisa

A exibição do quadro em si já evidencia um desempenho satisfatório dos estudantes na classificação de losangos que, assim como no caso dos quadrados, apenas uma dupla (A2 e A4) teve acerto parcial, ou seja, não classificou apenas e corretamente todos os losangos, cuja resposta é apresentada a seguir:

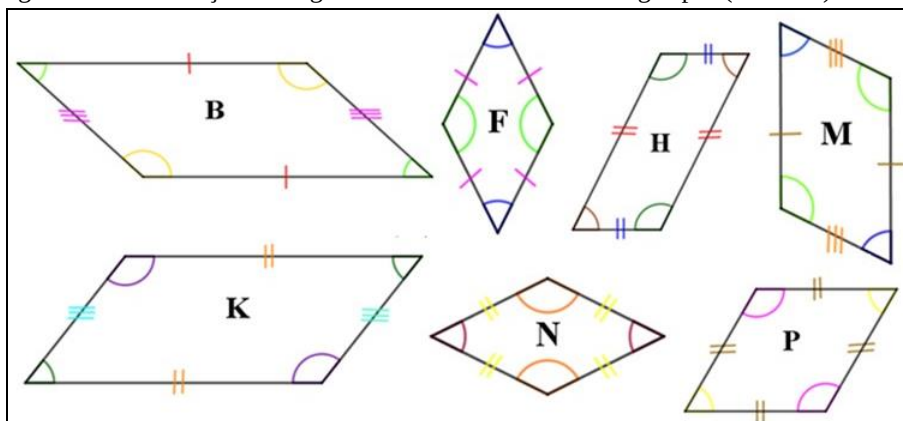
Figura 136 – Figuras classificadas como losangos na atividade 1 da sexta sessão

d) Os losangos: m, m, p, k, f, h, b,

Fonte: Participantes (A2 e A4)

Os losangos classificados por eles foram não quadrados (F, N, P) e incluíram também os paralelogramos não retângulos e não losangos (B, H, K, M). Diferentemente da dupla formada pelos participantes (A6 e A7) e do estudante A10 que adotaram uma classificação inclusiva tanto para os retângulos quanto para os losangos, (A2 e A4) não incluíram os quadrados nem nos retângulos nem nos losangos. Vejamos figuras apresentadas na resposta acima:

Figura 137 – Ilustração das figuras classificadas como losangos por (A2 e A4)



Fonte: Acervo da pesquisa

O desempenho dos estudantes na classificação de losangos foi melhor que na de retângulos. Isso pode estar relacionado ao fato de já carregarem em seus repertórios de esquemas algum conhecimento inadequado relativo aos retângulos, o que torna mais difícil desconstruí-lo para que possam mobilizá-lo da maneira correta. Já para o losango, inicialmente, muitos afirmaram não o conhecer, como foi o caso de A6 que escreveu “não sei” e de A9 que havia deixado a classificação em branco, ambos na atividade 2 da quarta sessão, e, agora, passaram a ter acertos plenos. Embora já tivessem lidado com situações o envolvendo, a concepção dessa figura por parte desses estudantes passou a ser mais bem configurada a partir do momento que começaram a lidar com as situações da sequência didática e as discussões realizadas, favorecendo a ampliação dos seus repertórios de esquemas e, conseqüentemente, repercutindo na diminuição de suas dificuldades.

Em relação à classificação de losangos não quadrados, letra (e), verificamos as seguintes respostas registradas no quadro abaixo:

Quadro 56 – Figuras classificadas como losangos não quadrados na atividade 1 da sexta sessão

Classificação de losangos não quadrados		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	B, F , H, K, M	F, N, P
A6 e A7	F , N	
A8 e B12	A, D, F , N , P	
A9	F	
A10	F , N , P	

Fonte: dados da pesquisa

A partir do quadro acima, podemos notar que o participante A10 foi o único a classificar corretamente os losangos não quadrados. A dupla formada pelos participantes (A6 e A7) classificou apenas dois deles (F, N) e o participante A9, apenas o (F), mais especificamente, aquele que estava em um desenho que mais se aproxima do prototípico, o qual esteve presente em todos os agrupamentos. A dupla (A2 e A4) continuou considerando os paralelogramos não retângulos e não losangos (B, H, K, M) como losangos, os quais já

foram apresentados na letra (d). Já os participantes (A8 e B12) repetiram a mesma resposta dada para o caso dos losangos, como podemos ver a seguir:

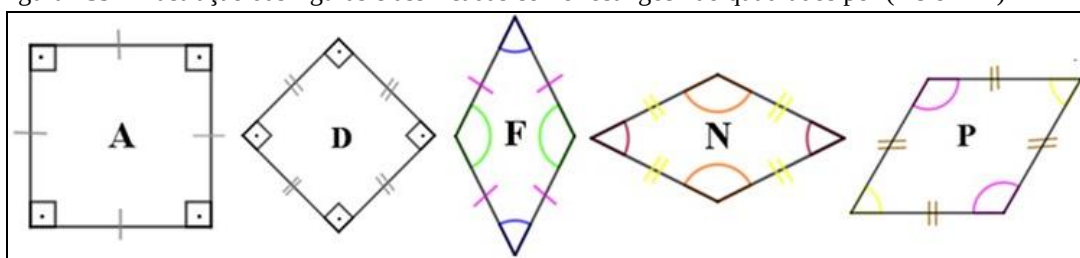
Figura 138 – Figuras classificadas como losangos não quadrados na atividade 1 da sexta sessão

e) Os losangos que não são quadrados: N, D, A, P, F

Fonte: Participantes (A8 e B12)

Os participantes acima pareceram não perceber que há diferença entre as letras (b) e (c) e entre (d) e (e) da atividade, pois repetiram, respectivamente, a mesma resposta para os retângulos e retângulos não quadrados e o mesmo para os losangos e losangos não quadrados. A ilustração das figuras apresentadas na resposta deles é apresentada a seguir:

Figura 139 – Ilustração das figuras classificadas como losangos não quadrados por (A8 e B12)



Fonte: Acervo da pesquisa

As respostas obtidas na classificação de paralelogramos, letra (f), estão organizadas no seguinte quadro:

Quadro 57 – Figuras classificadas como paralelogramos na atividade 1 da sexta sessão

Classificação de paralelogramos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	C, G, O	A, B, D, E, F, H, I, J, K, L, M, N, P
A6 e A7	A, B, D, E, F, H, I, J, K, L, M, N, P	
A8 e B12	A, B, D, E, F, H, I, J, L, N, P	
A9	B, C, E, H, I, J, K, L, M, O	
A10	A, B, D, E, F, H, I, J, K, L, M, N, P	

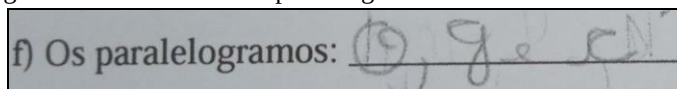
Fonte: dados da pesquisa

Como vemos, a dupla de estudantes (A6 e A7) e o participante A10 continuaram demonstrando um bom desempenho nessa situação de classificação e conseguiram acertar plenamente essa letra da atividade. Como já dito anteriormente, esses mesmos estudantes já haviam incluído os quadrados ao classificarem retângulos e losangos e, dessa vez, incluíram todos eles na classificação de paralelogramos, convergindo com a classificação que adotamos e também observada na coleção de LD adotada na escola campo de pesquisa. Notamos ainda uma evolução de A10 quanto à apropriação da forma prediativa do conhecimento, uma vez que nomeava inicialmente o paralelogramo não retângulo e não losango como um paralelepípedo e o losango não quadrado como um prisma.

A dupla formada pelos estudantes (A8 e B12) faltou incluir em sua resposta apenas os paralelogramos não retângulos e não losangos (K, M). O trapézio isósceles (C) e o trapezoide

(O) foram classificados como paralelogramos pela dupla (A2 e A4) e pelo participante A9, sendo que este último ainda conseguiu classificar alguns paralelogramos, já os dois primeiros classificaram apenas aqueles que não correspondem a essa figura, como podemos ver no extrato a seguir:

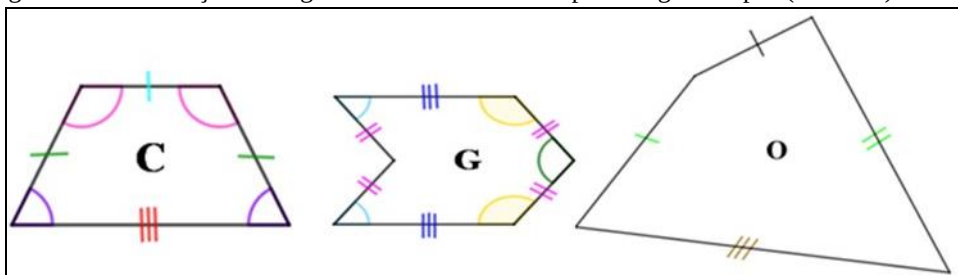
Figura 140 – Figuras classificadas como paralelogramos na atividade 1 da sexta sessão



Fonte: Participantes (A2 e A4)

Os participantes (A2 e A4), em dupla, classificaram como paralelogramos justamente as figuras que não correspondiam a eles, mais precisamente, o trapézio isósceles (C), o hexágono (G) e o trapezoide (O), provavelmente, por serem figuras que se diferem das demais relativamente à propriedade de ser um quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos entre si. Considerar o hexágono como um paralelogramo foi previsto em nossa análise a priori pelo fato de possuir lados paralelos dois a dois, mas não se trata de um quadrilátero. As figuras classificadas por eles são representadas a seguir:

Figura 141 – Ilustração das figuras classificadas como paralelogramos por (A2 e A4)



Fonte: Acervo da pesquisa

Quanto à classificação de paralelogramos não retângulos e não losangos, letra (g), as respostas apresentadas foram as seguintes:

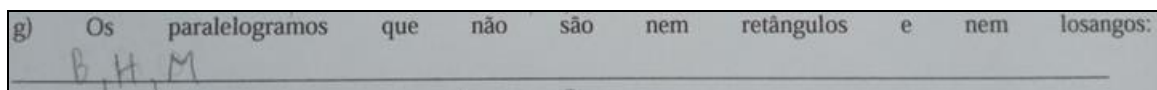
Quadro 58 – Figuras classificadas como paralelogramos não retângulos e não losangos na atividade 1 da sexta sessão

Classificação de paralelogramos não retângulos e não losangos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	G, O	B, H, K, M
A6 e A7	B, H, M	
A8 e B12	C, G, O	
A9	C, O	
A10	G, O	

Fonte: dados da pesquisa

A partir das informações constantes no quadro acima, percebemos que apenas uma dupla (A6 e A7) conseguiu classificar corretamente três dos quatro paralelogramos não retângulos e não losangos presentes na atividade, conforme extrato a seguir:

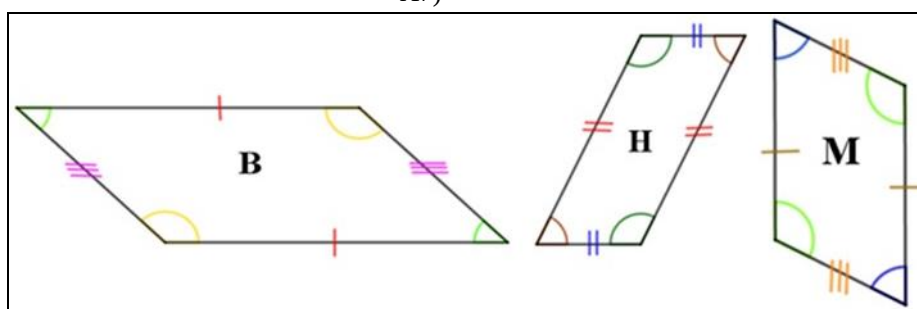
Figura 142 – Figuras classificadas como paralelogramos não retângulos e não losangos na atividade 1 da sexta sessão



Fonte: Participantes (A6 e A7)

Não incluíram em sua resposta o paralelogramo não retângulo e não losango em desenho prototípico (K), que só muda a inclinação se comparado ao (B). Provavelmente, não lembraram de incluí-lo, pois conseguiram classificar os demais em diferentes posições como mostramos em seguida:

Figura 143 – Ilustração das figuras classificadas como paralelogramos não retângulos e não losangos por (A6 e A7)



Fonte: Acervo da pesquisa

Os demais participantes classificaram figuras que não são paralelogramos, já ilustradas acima, sendo o trapezoide (O) comum às respostas deles. Possivelmente, a complexidade lógico-matemática contida na afirmação “paralelogramos que não são nem retângulos e nem losangos” levou a maioria dos estudantes a classificar figuras que não são paralelogramos. A presença de um grau maior de dificuldade nas classificações que continham exclusões já foi observada nas análises acima, provavelmente, por não estarem familiarizados com tal vocabulário e que tratamos de certa maneira como comum para um primeiro contato.

Por fim, na classificação das figuras que não são paralelogramos, letra (h), verificamos as seguintes respostas:

Quadro 59 – Figuras classificadas como não paralelogramos na atividade 1 da sexta sessão

Classificação de figuras que não são paralelogramos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	A, B, D, E, F, J, L, M, N	C, G, O
A6 e A7	C, G, O	
A8 e B12	C, G, O	
A9	A, D, N, P	
A10	O	

Fonte: dados da pesquisa

Como vemos, duas duplas (A6 e A7) e (A8 e B12) conseguiram classificar corretamente as figuras que não são paralelogramos: o trapézio isósceles (C), o hexágono (G) e o trapezoide (O), este último sendo a única figura classificada por A10, possivelmente, por

não possuir nenhum par de lados paralelos e as outras duas possuírem pelo menos um par. A dupla formada por (A8 e B12) repetiu a mesma resposta dada na letra anterior, assim como no caso dos retângulos e retângulos não quadrados, losangos e losangos não quadrados, evidenciando que o “não” caracterizador de exclusão de algumas figuras, não foi levado em consideração por essa dupla.

Em relação aos demais participantes, a dupla (A2 e A4) e o estudante A9 classificaram paralelogramos como figuras que não são paralelogramos, sendo os quadrados (A e D) e o losango não quadrado (N) comum a ambas as respostas. Vejamos o extrato de uma delas:

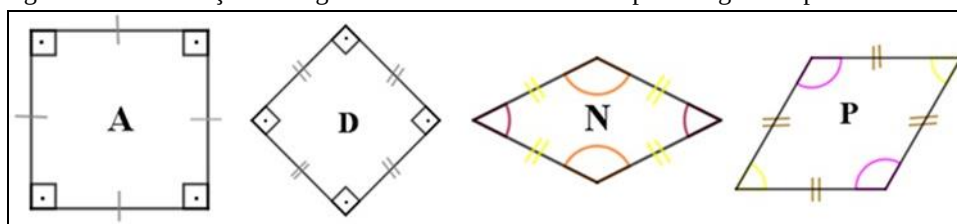
Figura 144 – Figuras classificadas como não paralelogramos na atividade 1 da sexta sessão

h) As figuras que não são paralelogramos: A, D, N, P

Fonte: Participante A9

De acordo com a resposta acima, o participante A9 considerou os quadrados (A e D) e os losangos não quadrados (N e P) como figuras que não são paralelogramos, entretanto, o losango não quadrado em desenho que se aproxima do prototípico (F) não foi considerado por ele. As figuras que compõem a sua resposta são ilustradas em seguida:

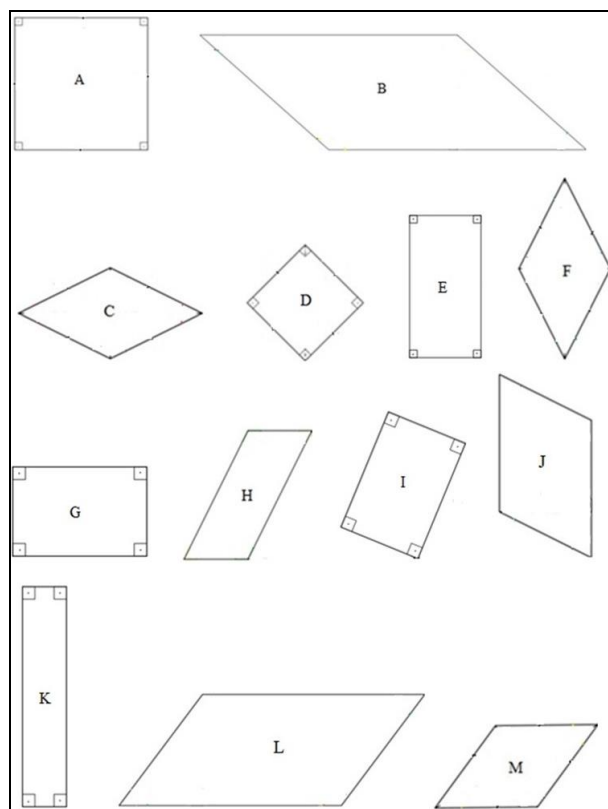
Figura 145 – Ilustração das figuras classificadas como não paralelogramos por A9



Fonte: Acervo da pesquisa

De modo geral, percebemos uma evolução no desempenho dos estudantes relativa à classificação de figuras, inclusive realizando inclusão de classes. Entretanto, as letras que exigiam exclusão pareceram mais difíceis para eles. A maioria realizou inclusões, com exceção da dupla formada pelos participantes (A2 e A4) que em nenhum momento a fez, apontando para a interiorização de uma classificação não inclusiva. Passemos à próxima atividade dessa sessão, a qual é apresentada em seguida:

Atividade 2: Vocês estão recebendo as figuras representadas a seguir:



Com o auxílio de uma régua não graduada, façam o que se pede:

- Representem em cada desenho as diagonais dessas figuras;
- Há figura(as) em que as diagonais possuem o mesmo comprimento? Se sim, qual(is)? _____
- Há figura(as) em que as diagonais são perpendiculares, ou seja, formam um ângulo de 90° ao se interceptarem? Se sim, qual(is)? _____
- Há figura(as) em que as diagonais possuem o mesmo comprimento e são perpendiculares? Se sim, qual(is)? _____
- Há figura(as) em que as diagonais se interceptam em seus pontos médios, ou seja, se cortam ao meio? Se sim, qual(is)? _____

Nesta atividade, com o auxílio de régua não graduadas, a maioria dos estudantes em duplas realizou a classificação das figuras a partir de propriedades das diagonais de cada um dos paralelogramos. Cabe ressaltar que, assim como previsto em nossa análise a priori e verificado na pesquisa de Tavares (2014), surgiram dificuldades relativas ao que seria uma diagonal que, em nosso caso, foi apresentada por todos os participantes, embora tenhamos observado no capítulo sobre quadriláteros do LD do 8º ano algumas propriedades relativas a esse elemento geométrico. Vejamos alguns trechos das discussões a esse respeito:

B12: A gente se esqueceu o que é diagonal.

A8: O que é diagonal?

P: O que é uma diagonal? Se você fosse traçar uma diagonal em uma figura dessas, você faria o quê? [B12 entrega a régua não graduada a A8 e diz]:

B12: Vai na sorte!

A8: Medir? É pra medir é?

A fala acima aponta que esses participantes não dispunham naquele momento da forma operatória sobre diagonal, ou seja, eles precisavam saber o que era uma diagonal para poder iniciar a forma operatória. Assim, como percebemos que eles não estavam sabendo o que deveriam fazer, resolvemos relacionar a um contexto do futebol, visto que eles comentavam bastante sobre o assunto nos corredores da escola:

P: Por exemplo, é, um jogo de futebol, o cara bateu a bola na diagonal, como é que essa bola vai? [Se referindo à direção da bola].

A8: Na trave...

B12: ...diagonal [faz o gesto com a mão da direção da bola].

P: Na figura, como é que fica essa diagonal? [Nesse momento alguém chama, mas pedimos para esperar um pouco].

A8: Assim, vamos fazer assim, aqui, aqui é a barra, né [mostrando o retângulo em desenho prototípico (G) para se referir à trave de um campo de futebol], um exemplo...

B12: ...é a barra mesmo...

A8: ...é a barra. [Nesse momento a assistente de gestão entra e interrompe para dar um aviso a um dos estudantes]. Olha, aqui, aqui é o, a barra. Aí são os quatro lados da barra.

P: Isso.

A8: Pronto, aí o cara pega e chuta, bate aqui mesmo no canto da barra, aqui!

P: Mas aí é no “éle”, né? [se referindo a um dos ângulos internos superiores formados pelas traves de um campo de futebol].

A8: Bateu no “éle”.

P: Mas na diagonal, como fica um chute na diagonal?

A8: Na diagonal [balança a cabeça que não sabe].

P: O cara tá desse lado aqui e chuta a bola na diagonal. Ela faz um movimento assim [mostrando a direção da bola].

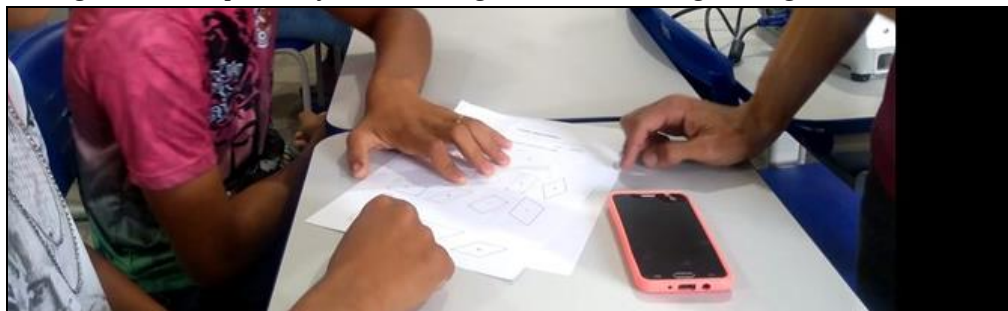
A8: Aí vai pegar nesse sentido aqui, oh. [B12 pega a régua não graduada e diz]:

B12: Diagonal é tipo isso aqui [apoiando a régua não graduada na diagonal do retângulo não quadrado (G)].

A8: Ah!!

A figura a seguir apresenta o momento em que B12 representou a diagonal do retângulo não quadrado (G) com a régua não graduada:

Figura 146 – Representação de uma diagonal utilizando a régua não graduada

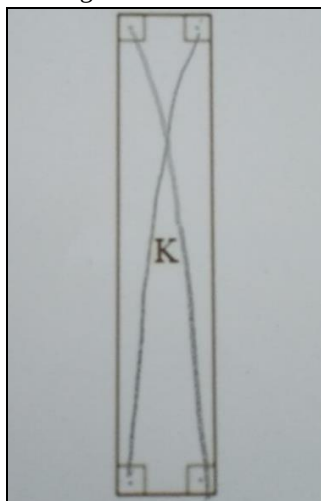


Fonte: Participantes (A8 e B12)

Além do contexto do futebol, nos apoiamos, nesse momento, no fato de já saberem identificar ângulos internos opostos em um paralelogramo para dizer que as diagonais de um paralelogramo ligam um ângulo interno oposto ao outro. O participante A8 falou: “*entendi!*” Assim, discussões parecidas foram traçadas nos demais grupos, na medida em que iam terminando uma atividade e recebendo a outra.

Quanto aos resultados obtidos na letra (a), traçado das diagonais, apenas duas duplas (A2 e A4) e (A6 e A7) não traçaram adequadamente as diagonais do retângulo não quadrado (K), as quais não se interceptaram em seus pontos médios, como podemos ver no recorte a seguir:

Figura 147 – Traçado de diagonal na atividade 2 da sexta sessão



Fonte: Participantes (A2 e A4)

Essa dupla, assim como (A6 e A7), traçou diagonais que não se cruzam em seus pontos médios e aparenta não ter usado a régua não graduada para apoiar nos traçados, diferentemente das demais figuras que ficaram bem alinhadas. Cabe ressaltar que o traçado acima não influenciou nas respostas dadas na letra (e), os quais deveriam indicar as figuras em que as diagonais se interceptavam em seus pontos médios e ambos incluíram o retângulo não quadrado (K), como veremos mais adiante.

Na letra (b), classificação de retângulos a partir da propriedade possuir diagonais de mesmo comprimento, obtivemos as seguintes respostas:

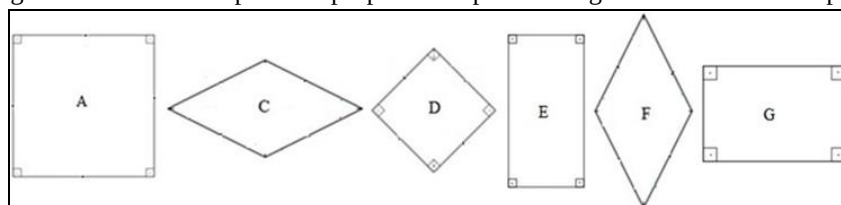
Quadro 60 – Figuras classificadas por possuírem as diagonais de mesmo comprimento

Classificação de retângulos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	A, C, D, E, F, G	A, D, E, G, I, K
A6 e A7	A, D, E, G, I, K	
A8 e B12	A, D, E, G, I, K	
A9	A, D	
A10	A, D, E, G, I, K	

Fonte: dados da pesquisa

A partir dos dados acima, observamos que as duplas (A6 e A7), (A8 e B12) e o participante A10 obtiveram acertos plenos. Já o estudante A9 classificou apenas os quadrados (A, D) e a dupla (A2 e A4) incluiu figuras que não eram retângulos, como os losangos não quadrados (C, F), mas não acrescentaram o (M). As figuras indicadas em sua resposta são representadas a seguir:

Figura 148 – Figuras classificadas a partir da propriedade: possuir diagonais de mesmo comprimento



Fonte: Participantes (A2 e A4)

Na letra (c), classificação de losangos segundo a propriedade possuir as diagonais perpendiculares, verificamos as seguintes respostas:

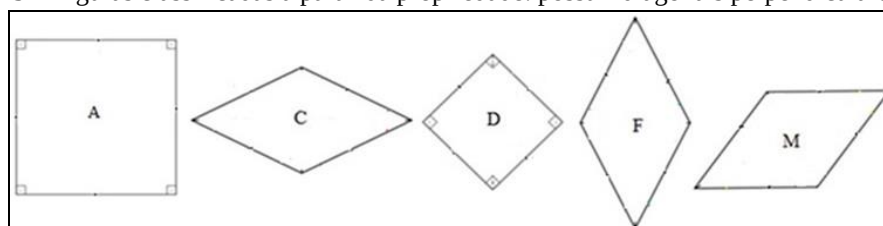
Quadro 61 – Figuras classificadas por possuírem as diagonais perpendiculares

Classificação de losangos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	A, C, D, F, J	A, C, D, F, M
A6 e A7	A, C, D, F, M	
A8 e B12	A, D, E, G, I, K	
A9	A, D	
A10	A, C, D, F	

Fonte: dados da pesquisa

Como vemos, a dupla (A8 e B12) e o participante (A9) repetiram as mesmas respostas que haviam dado na letra anterior, evidenciando que, para eles, os retângulos possuem diagonais perpendiculares. Os quadrados (A, D) estiverem presentes nas respostas de todos os estudantes, tanto na classificação de retângulos quanto de losangos, apontando para uma classificação inclusiva de maneira operatória, o que não foi observado na atividade 1 dessa sessão pela dupla (A2 e A4) ao classificar a partir da nomenclatura oficial das figuras. Essa dupla incluiu em sua resposta, além das mesmas classificadas por A10, figuras (A, C, D, F), o paralelogramo não retângulo e não losango em desenho não prototípico (J). Apenas a dupla (A6 e A7) classificou corretamente todos os losangos, cujas figuras relativas à sua resposta são apresentadas em seguida:

Figura 149 – Figuras classificadas a partir da propriedade: possuir diagonais perpendiculares



Fonte: Participantes (A6 e A7)

As respostas obtidas na letra (d), classificação de quadrados a partir da propriedade possuir as diagonais de mesmo comprimento e perpendiculares são apresentadas no quadro a seguir:

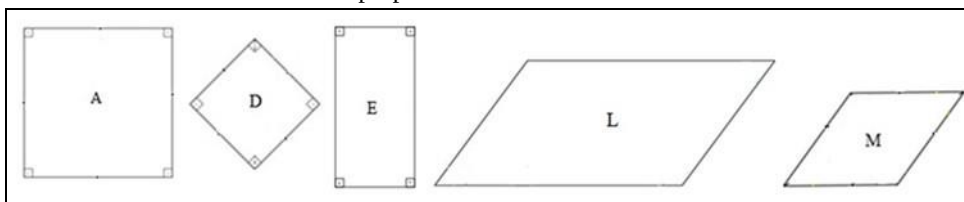
Quadro 62 – Figuras classificadas por possuírem as diagonais de mesmo comprimento e perpendiculares

Classificação de quadrados		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	A, C, D, E, F, I, J	A, D
A6 e A7	A, D	
A8 e B12	A, D, E, G, I, K	
A9	A, D, E, L, M	
A10	A, D	

Fonte: dados da pesquisa

No caso dos quadrados, houve uma mudança no desempenho relativa à classificação a partir da nomenclatura e de maneira operatória ao verificar propriedades das diagonais, uma vez que a maioria teve acerto pleno na primeira. Já na segunda, apenas uma dupla (A6 e A7) e o participante A10 conseguiram classificar corretamente. A dupla (A8 e B12) continuou repetindo as mesmas respostas dadas nas letras (b) e (c), ou seja, permaneceu classificando retângulos. A dupla (A2 e A4), além dos quadrados (A, D), classificou os losangos não quadrados (C, F), os retângulos não quadrados (E, I) e o paralelogramo não retângulo e não losango (J). Já o participante A9 incluiu aos quadrados (A, D), o retângulo não quadrado (E), o paralelogramo não retângulo e não losango (L) e o losango não quadrado (M), como podemos ver a seguir:

Figura 150 – Figuras classificadas a partir da propriedade: possuir as diagonais de mesmo comprimento e perpendiculares



Fonte: Participante A9

Por fim, na letra (e), os estudantes classificaram os paralelogramos segundo a propriedade possuir diagonais que se interceptam em seus pontos médios, cujas respostas obtidas estão registradas no quadro a seguir:

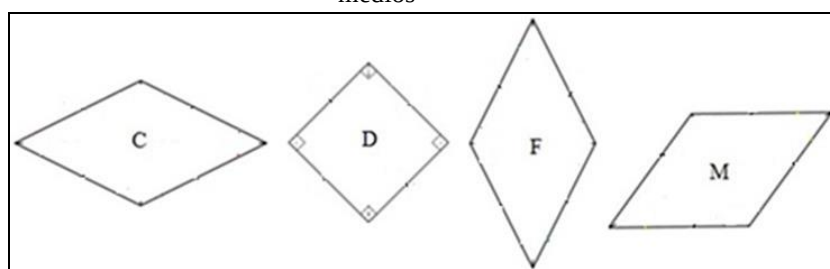
Quadro 63 – Figuras classificadas por possuírem diagonais que se interceptam em seus pontos médios

Classificação de paralelogramos		
Participantes	Figuras classificadas	Resposta correta esperada
A2 e A4	A, B, E, G, H, I, J, K, L, M	(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M)
A6 e A7	Todas	
A8 e B12	C, D, F, M	
A9	A, B, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N	
A10	A, D, E, G, J, M	

Fonte: dados da pesquisa

Com a resposta acima, a dupla de participantes (A6 e A7) encerrou a atividade acertando todas as classificações. A dupla (A2 e A4) só não classificou as figuras (C, D, F), sendo (C, F) losangos não quadrados e (D) um quadrado em desenho não prototípico. O participante A9 também não incluiu em sua resposta o losango não quadrado (C) e, além desse, o retângulo não quadrado (K). Ele escreveu uma figura (N) que não existia, pois a última letra do alfabeto utilizada foi a (M). Já o participante A10 classificou os quadrados (A, D), os retângulos não quadrados (E, G), o paralelogramo não retângulo e não losango (J) e o losango não quadrado (M). A dupla (A8 e B12) considerou, a partir da resposta apresentada, que a propriedade possuir diagonais que se interceptam em seus pontos médios é válida apenas para os losangos não quadrados (C, F, M) e para o quadrado em desenho não prototípico (D), como podemos ver em seguida:

Figura 151 – Figuras classificadas a partir da propriedade: possuir diagonais que se interceptam em seus pontos médios



Fonte: Participantes (A8 e B12)

Como já dito anteriormente, o traçado inadequado das diagonais na letra (a) pelas duplas (A2 e A4) e (A6 e A7) não os impediu de classificar a figura (K) nessa propriedade, embora o aspecto visual das diagonais traçadas aparentasse não a satisfazer. Isso aponta para uma ruptura de considerar apenas questões relativas ao formato das figuras para a consideração de propriedades presentes nelas.

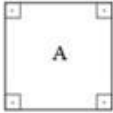
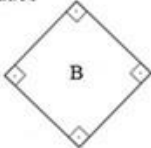
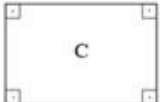
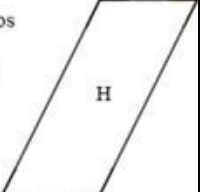
Passemos à análise da última sessão da parte dedicada exclusivamente ao campo da Geometria, mas que, devido às fortes imbricações, por vezes foram explorados direta e indiretamente elementos do campo das Grandezas e Medidas, como a relação de equivalência (ter mesma área).

5.7 ANÁLISE DA SÉTIMA SESSÃO

A sétima sessão foi realizada em 30 de junho de 2022 e contou com a presença de seis (A4, A7, A8, A9, A10 e B12) dos nove participantes. Iniciamos com a atividade única prevista para aquela sessão, a partir da qual fizemos o fechamento das propriedades relativas a cada um dos paralelogramos estudados. Inicialmente, ela foi realizada de maneira individual e

depois, em grupo, por meio da troca de respostas entre os colegas para debaterem e tentarem chegar a um consenso. Disponibilizamos régua não graduada para verificarem comprimentos de lados e papel transparente para verificação de ângulos congruentes. A atividade realizada nessa sessão foi a seguinte:

Atividade única: Você está recebendo desenhos de quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos. Abaixo dessas figuras, são descritas algumas propriedades. Marque um X nas propriedades que pertencem a cada par de figuras⁶³.

Quadrados		Losangos	
 	☐ Possui quatro ângulos de 90° ☐ Possui todos os lados de mesmo comprimento ☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento ☐ Possui as diagonais perpendiculares ☐ Possui os ângulos opostos congruentes ☐ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si ☐ Possui lados opostos de mesmo comprimento ☐ Suas diagonais cortam-se ao meio	 	☐ Possui quatro ângulos de 90° ☐ Possui todos os lados de mesmo comprimento ☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento ☐ Possui as diagonais perpendiculares ☐ Possui os ângulos opostos congruentes ☐ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si ☐ Possui lados opostos de mesmo comprimento ☐ Suas diagonais cortam-se ao meio
Retângulos		Paralelogramos	
 	☐ Possui quatro ângulos de 90° ☐ Possui todos os lados de mesmo comprimento ☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento ☐ Possui as diagonais perpendiculares ☐ Possui os ângulos opostos congruentes ☐ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si ☐ Possui lados opostos de mesmo comprimento ☐ Suas diagonais cortam-se ao meio	 	☐ Possui quatro ângulos de 90° ☐ Possui todos os lados de mesmo comprimento ☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento ☐ Possui as diagonais perpendiculares ☐ Possui os ângulos opostos congruentes ☐ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si ☐ Possui lados opostos de mesmo comprimento ☐ Suas diagonais cortam-se ao meio

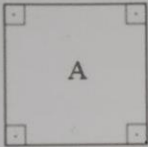
Como dito acima, inicialmente a atividade foi realizada de maneira individual e, após seu término, trocaram as respostas em grupos e entregaram uma versão do grupo. No entanto, para uma melhor organização dos dados obtidos, vamos discutir por tipo de paralelogramo e não seguindo a ordem como efetivamente ocorreu. Por exemplo, no caso dos quadrados, discutimos as respostas individuais e em grupo, o mesmo para os retângulos e assim sucessivamente.

⁶³ Colocamos as figuras lado a lado por uma questão de organização textual. Na atividade estavam uma abaixo da outra com o conjunto de propriedades, na seguinte ordem: quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos.

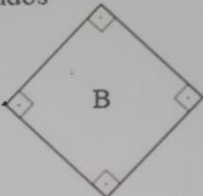
Em relação às propriedades dos quadrados, os estudantes A7, A10 e B12 assinalaram todas corretamente (possuem os quatro ângulos de 90° , todos os lados de mesmo comprimento, diagonais de mesmo comprimento, perpendiculares e que se cortam ao meio, lados e ângulos opostos congruentes e têm exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si). A participante A7 havia questionado, inicialmente, sobre o termo “congruentes”, o que foi explicado em voz alta, pois sua dúvida poderia ser também a de outros participantes. Já os estudantes A4, A8 e A9 apresentaram acertos parciais, uma vez que assinalaram apenas algumas delas, sendo as três primeiras e a última comuns a todos eles, representadas pelo extrato a seguir:

Figura 152 – Propriedades assinaladas relativas aos quadrados

Quadrados



A



B

- ☒ Possui quatro ângulos de 90°
- ☒ Possui todos os lados de mesmo comprimento
- ☒ Possui as diagonais com mesmo comprimento
- ☐ Possui as diagonais perpendiculares
- ☐ Possui os ângulos opostos congruentes
- ☐ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si
- ☐ Possui lados opostos de mesmo comprimento
- ☒ Suas diagonais cortam-se ao meio

Fonte: Participante A4

Além das quatro propriedades assinaladas acima, o participante A9 incluiu que possui as diagonais perpendiculares. Já A8 acrescentou a antepenúltima e a penúltima relativas aos pares de lados opostos paralelos e de mesmo comprimento.

Após se juntarem em grupos, trocarem as respostas com os colegas e debaterem sobre elas, o participante A4, que se juntou a A7 e A10, convenceu-se de que deveria ter assinalado todas elas e assim o fizeram na resposta coletiva. A8, assim como B12, manteve as mesmas respostas. Já A9 assinalou a propriedade relativa aos ângulos opostos congruentes que não havia marcado antes.

Quanto às propriedades dos retângulos, A7 e A10 tiveram acertos plenos ao assinalarem que eles possuem: quatro ângulos de 90° , diagonais de mesmo comprimento e que se cortam ao meio, lados e ângulos opostos congruentes e têm exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si. O participante A4 só faltou marcar que o retângulo possui os

ângulos opostos congruentes. Já A8, além dessa mesma de A4, também não assinalou que possui os lados opostos de mesmo comprimento. O participante A9 marcou, erroneamente, que o retângulo possui as diagonais perpendiculares, entretanto, não assinalou que elas têm o mesmo comprimento. Deixou de marcar ainda as propriedades relativas aos lados e ângulos opostos congruentes. B12, assim como A9, também marcou de maneira incorreta que as diagonais do retângulo são perpendiculares. Além disso, não assinalou que os lados opostos têm o mesmo comprimento, conforme apresentamos a seguir:

Figura 153 – Propriedades assinaladas relativas aos retângulos

Retângulos

C

D

- ☒ Possui quatro ângulos de 90°
- ☐ Possui todos os lados de mesmo comprimento
- ☒ Possui as diagonais com mesmo comprimento
- ☒ Possui as diagonais perpendiculares
- ☒ Possui os ângulos opostos congruentes
- ☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si
- ☐ Possui lados opostos de mesmo comprimento
- ☒ Suas diagonais cortam-se ao meio

Fonte: Participante B12

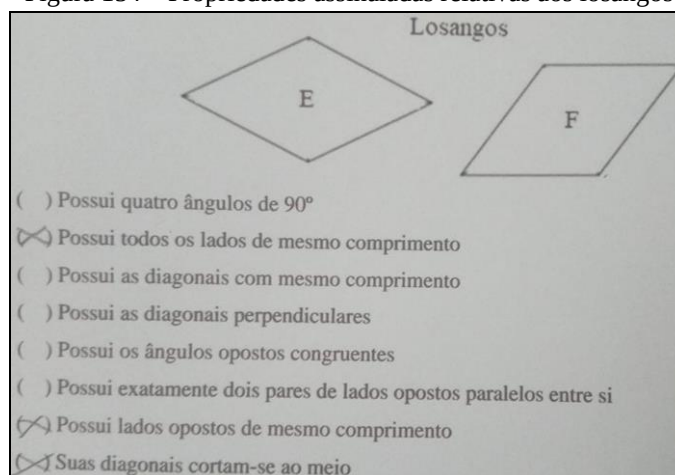
No momento em grupo, o participante A4 novamente aderiu às respostas de A7 e A10, passando a marcar todas as propriedades relativas aos retângulos. A8 desmarcou a propriedade correta de possuir as diagonais com mesmo comprimento, marcou que possui os lados opostos de mesmo comprimento, mas continuou sem assinalar a propriedade relativa aos ângulos. Já o participante A9 marcou, novamente e de maneira incorreta, que as diagonais do retângulo são perpendiculares, entretanto, assinalou que elas têm o mesmo comprimento e que os ângulos opostos são congruentes. Além disso, desmarcou que ele possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si. Já B12 manteve a mesma resposta.

Em todos os casos, tanto individual quanto em grupo, as propriedades ligadas às definições do quadrado (possuir quatro ângulos de 90° e todos os lados de mesmo comprimento) e do retângulo (possuir os quatro ângulos de 90°) foram assinaladas, apontando para uma manifestação da forma operatória do conhecimento dessas propriedades.

No caso das propriedades dos losangos, assim como para os quadrados, A7, A10 e B12 as marcaram corretamente (possuem todos os lados de mesmo comprimento, diagonais perpendiculares e que se cortam ao meio, lados e ângulos opostos congruentes e têm

exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si). O participante A4 deixou de assinalar duas delas: possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si e os lados opostos de mesmo comprimento. A8 não marcou a relativa ao paralelismo dos lados opostos e que as suas diagonais se cortam ao meio. O estudante A9 assinalou apenas três delas, como mostrado a seguir:

Figura 154 – Propriedades assinaladas relativas aos losangos



Fonte: Participante A9

Como vemos, A9 deixou de assinalar que os losangos possuem as diagonais perpendiculares, os ângulos opostos congruentes e os dois pares de lados opostos paralelos entre si.

Em grupos, A4 mais uma vez foi convencido por A7 e A10 que haviam obtido acerto pleno. A8 passou a marcar a propriedade relativa às diagonais se cortarem ao meio, mas continuou sem assinalar a do paralelismo entre os dois pares de lados opostos. A9, assim como B12, manteve as respostas. Cabe ressaltar que, como vimos no caso dos quadrados e retângulos, a propriedade ligada à definição do losango (possuir os quatro lados de mesmo comprimento) foi assinalada por todos os participantes, tanto individual quanto em grupo.

Em relação às propriedades dos paralelogramos, A7 e A10 acertaram todas (possuem lados e ângulos opostos congruentes, têm exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si e diagonais que se cortam ao meio). O participante A4 marcou, erroneamente, que suas diagonais são perpendiculares e deixou de assinalar que seus ângulos opostos são congruentes. A8 marcou, também erroneamente, que as diagonais são perpendiculares e, entre as corretas, não marcou apenas que os lados opostos possuem o mesmo comprimento. B12, assim como A4 e A8, também assinalou a propriedade relativa à perpendicularidade das diagonais. Não marcou aquela ligada aos lados opostos de mesmo comprimento nem que as

diagonais se cortam ao meio. Já o estudante A9 fez a marcação apenas de uma propriedade: possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si.

Antes de passarmos à parte coletiva da atividade no caso das propriedades dos paralelogramos, vejamos um quadro com a sistematização das respostas individuais em todos eles para podermos observar possíveis impactos da discussão sobre a mudança nas respostas.

Vamos considerar A como acerto pleno e P como acerto parcial:

Quadro 64 – Sistematização dos resultados na atividade única da sétima sessão

<u>Domínio das propriedades nos seguintes casos</u>	<u>Resultados dos participantes</u>					
	A4	A7	A8	A9	A10	B12
Quadrado	P	A	P	P	A	A
Retângulo	P	A	P	P	A	P
Losango	P	A	P	P	A	A
Paralelogramo	P	A	P	P	A	P

Fonte: Dados da pesquisa

Como já vimos, A7 e A10 acertaram plenamente toda a atividade. Coletivamente, juntaram-se a A4 que em todos os casos tinha acertado parcialmente. Ao debaterem, chegaram a um consenso de que as respostas corretas eram as que A7 e A10 já haviam marcado individualmente. Vejamos o extrato de uma de suas respostas:

Figura 155 – Propriedades assinaladas relativas aos paralelogramos

Paralelogramos

G

H

() Possui quatro ângulos de 90°

() Possui todos os lados de mesmo comprimento

() Possui as diagonais com mesmo comprimento

() Possui as diagonais perpendiculares

☒ Possui os ângulos opostos congruentes

☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si

☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento

☒ Suas diagonais cortam-se ao meio

Fonte: Participantes (A4, A7 e A10)

Quanto aos demais participantes que se juntaram com outros que não continuaram participando, A8 passou a ter acerto pleno, já A9 e B12 mantiveram suas respostas. Cabe ressaltar que, em todos os casos, a propriedade possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si foi assinalada por todos os participantes, tanto individualmente quanto coletivamente, inclusive sendo a única marcada por A9. Esse fato, assim como também vimos

com as outras figuras, aponta para uma mobilização adequada, de maneira operatória, por parte dos estudantes das propriedades ligadas às definições de cada um deles: os retângulos são paralelogramos que possuem os quatro ângulos retos; os losangos são os paralelogramos que possuem os quatro lados de mesmo comprimento; os quadrados são os paralelogramos possuem os quatro ângulos retos e os quatro lados de mesmo comprimento sendo, assim, retângulo e losango ao mesmo tempo; os paralelogramos são quadriláteros que possuem exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si. Foi sobre essas ideias que realizamos a sistematização da parte sobre Geometria, como veremos nos parágrafos seguintes.

Como previsto em nossa análise a priori, após a realização dessa atividade passamos para uma sistematização das propriedades dos paralelogramos, destacando a inclusão de classes entre eles. Iniciamos relembrando propriedades ligadas à definição que adotamos de cada um deles, a começar pelos retângulos, como segue abaixo.

P: O que é que caracteriza um retângulo? A figura para ser um retângulo, ela precisa ter o quê?

A10: É... quatro ângulos de 90° ?

P: Isso. A figura para ser um retângulo ela precisa ter os quatro ângulos de 90° , ou seja, os quatro ângulos retos. Os quadrados possuem os quatro ângulos retos? [A maioria respondeu: hummm ou balançaram a cabeça que sim].

[...].

P: Então, pelo fato de os quadrados possuírem os quatro ângulos retos, eles também são considerados...

A10: Retângulos.

P: Retângulos. Ok? Tá? Então, se a gente pergunta pra vocês: Qual o paralelogramo que possui os quatro ângulos retos? Esse paralelogramo é o retângulo. Dentro dele temos também os quadrados. Ok? [Balançaram a cabeça que sim].

Em seguida, discutimos a propriedade voltada à definição de losango que adotamos, como mostrado no seguinte trecho:

P: Vimos também os losangos, tá? O que é que uma figura precisa ter para ela ser um losango? O que é que esse conjunto de figuras aí tem em comum? [Se referindo aos losangos apresentados no *slide* e alguém falou: quatro lados]. Quatro lados, mas além disso?

B12: Quatro ângulos.

A10: É, que são lados iguais.

P: O quê?

A10: Os quatro pares de lados iguais [se referindo aos quatro lados]. Assim, do mesmo tamanho.

P: Exatamente! Os quatro lados de mesmo comprimento ou do mesmo tamanho como A10 falou, tá. Então, o paralelogramo que possui os quatro lados de mesmo comprimento ou, como A10 falou, do mesmo tamanho, são os losangos. Pelo fato de os quadrados também terem os quatro lados com o mesmo comprimento, eles também são losangos, tá? Então, os quadrados são ao mesmo tempo, tanto retângulo, por possuírem quatro ângulos retos, quanto losango por terem os quatro lados de mesmo comprimento. Certo? [Balançaram a cabeça que sim].

Nos dois trechos acima, percebemos o participante A10 bastante participativo, cuja explicitação por meio da forma predicativa do conhecimento mostrou uma evolução por parte do estudante. Ao questionarmos sobre o que seria uma diagonal, mais uma vez ele respondeu corretamente:

A10: Diagonal é uma reta que se traça no centro da figura, dentro da figura no caso.

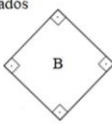
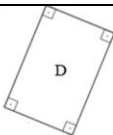
P: Uma reta que traça dentro da figura, mas ela sai de onde e vai pra onde?

A10: Sai da, do ângulo até o outro ângulo, oposto.

P: Até o outro ângulo oposto. Excelente! Exatamente!

Na discussão da atividade estabelecemos, sempre que possível, um elo com as afirmações discutidas na atividade única da quinta sessão, a qual tratava das relações de inclusão entre os paralelogramos e as recíprocas entre elas, como podemos ver no seguinte trecho em que sugerimos fazer uma troca entre os quadrados e retângulos não quadrados, na figura a seguir, para verificar a validade ou não das propriedades assinaladas:

Figura 156 – Discussão da atividade da sétima sessão: propriedades de quadrados e retângulos

Quadrados	Retângulos
 	 
(X) Possui quatro ângulos de 90°	(X) Possui quatro ângulos de 90°
(X) Possui todos os lados de mesmo comprimento	() Possui todos os lados de mesmo comprimento
(X) Possui as diagonais com mesmo comprimento	(X) Possui as diagonais com mesmo comprimento
(X) Possui as diagonais perpendiculares	() Possui as diagonais perpendiculares
(X) Possui os ângulos opostos congruentes	(X) Possui os ângulos opostos congruentes
(X) Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	(X) Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si
(X) Possui lados opostos de mesmo comprimento	(X) Possui lados opostos de mesmo comprimento
(X) Suas diagonais cortam-se ao meio	(X) Suas diagonais cortam-se ao meio

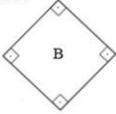
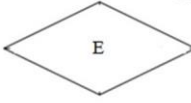
Fonte: acervo da pesquisa

Vejamos o trecho relacionado à figura acima:

P: Então, por isso que todo quadrado é um retângulo, porque se eu, seu eu tiro o retângulo daqui e coloco os quadrados [mostrando no *slide*], as propriedades continuam válidas. Mas dizer que todo retângulo é um quadrado, dizer o contrário, não é válido, não é verdade, porque se eu colocar os retângulos aqui, né, observem que as propriedades não vão continuar válidas; eu vou ter que apagar algumas delas. Certo? [Balançaram a cabeça que sim].

Em relação aos quadrados e losangos não quadrados, apresentamos as seguintes figuras e sugerimos uma troca parecida com a que fizemos anteriormente para verificar se as propriedades continuariam válidas ou se seria necessário apagar algumas delas:

Figura 157 – Discussão da atividade da sétima sessão: propriedades de quadrados e losangos

Quadrados		Losangos	
			
☒ Possui quatro ângulos de 90°	☐ Possui quatro ângulos de 90°	☐ Possui quatro ângulos de 90°	☐ Possui quatro ângulos de 90°
☒ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☒ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☒ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☒ Possui todos os lados de mesmo comprimento
☒ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☒ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento
☒ Possui as diagonais perpendiculares	☒ Possui as diagonais perpendiculares	☒ Possui as diagonais perpendiculares	☒ Possui as diagonais perpendiculares
☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes
☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si
☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento
☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio

Fonte: acervo da pesquisa

Parte da discussão traçada a respeito das propriedades e figuras acima é apresentada a seguir:

P: Todo quadrado é um losango [lendo a afirmação contida no *slide*]. Eu disse isso pra vocês já, lá no início, num foi? O que é que isso significa? Que as propriedades que o losango tem, o quadrado também [responderam juntos: tem]. Tem! Propriedades do losango, tá? [Lendo no *slide* as que marcamos na atividade]: possui todos os lados de mesmo comprimento. O quadrado tem? [Responderam: tem]. Tem! Possui as diagonais perpendiculares. O quadrado tem? [responderam juntos: tem]. Tem! Observem que as quatro de baixo, né, o quadrado também tem. Por isso que todo quadrado é um losango porque possui as mesmas propriedades. Eu poderia retirar os losangos daqui, colocar aqueles quadrados aqui [novamente, falando das figuras sobre as propriedades] e não precisaria apagar nenhuma propriedade dessas. Tá? Agora o contrário é falso, todo losango é um quadrado, o contrário agora, porque se eu colocar os losangos aqui [se referindo no lugar dos quadrados], eu teria que apagar algumas. Digam uma aí que eu tenho que apagar.

A8: O segundo e o primeiro [outra pessoa falou baixinho: o terceiro e o primeiro].

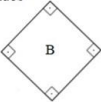
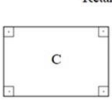
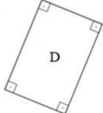
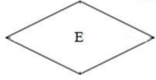
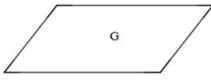
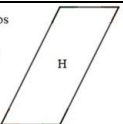
P: O primeiro e o terceiro, né? [Propriedades relativas aos quatro ângulos de 90° e às diagonais de mesmo comprimento, respectivamente].

A8: Não! [Alguns riem]. Desculpa, professor! O terceiro e o primeiro!

P: Hunrum. Certo? Por isso que todo quadrado é um losango, né? Eu olho para o losango, vejo as propriedades que ele tem, e olho se o quadrado também tem. Certo? [Fizeram sinal de positivo com o dedo].

Quanto aos paralelogramos, apresentamos as seguintes figuras no *slide*:

Figura 158 – Discussão da atividade da sétima sessão: propriedades dos paralelogramos

Quadrados		Retângulos		Losangos		Paralelogramos	
							
☒ Possui quatro ângulos de 90°	☒ Possui quatro ângulos de 90°	☒ Possui quatro ângulos de 90°	☐ Possui quatro ângulos de 90°	☐ Possui quatro ângulos de 90°	☐ Possui quatro ângulos de 90°	☐ Possui quatro ângulos de 90°	☐ Possui quatro ângulos de 90°
☒ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☒ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☐ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☐ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☒ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☒ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☐ Possui todos os lados de mesmo comprimento	☐ Possui todos os lados de mesmo comprimento
☒ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☒ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☒ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento	☐ Possui as diagonais com mesmo comprimento
☒ Possui as diagonais perpendiculares	☒ Possui as diagonais perpendiculares	☐ Possui as diagonais perpendiculares	☐ Possui as diagonais perpendiculares	☒ Possui as diagonais perpendiculares	☒ Possui as diagonais perpendiculares	☐ Possui as diagonais perpendiculares	☐ Possui as diagonais perpendiculares
☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes	☒ Possui os ângulos opostos congruentes
☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si	☒ Possui exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si
☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento	☒ Possui lados opostos de mesmo comprimento
☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio	☒ Suas diagonais cortam-se ao meio

Fonte: acervo da pesquisa

Vejamos trechos da sistematização:

P: Por que eu marquei as quatro últimas em todas? [Se referindo as quatro últimas propriedades contidas na atividade].

A7: Por que eles são paralelogramos.

P: Por que eles são...

A7: Paralelogramos.

P: Exatamente!

A participante A7 que praticamente não falava durante os primeiros encontros, mesmo tendo demonstrado um desempenho muito bom nas atividades, respondeu corretamente o questionamento feito, mostrando também uma evolução na forma prediativa do conhecimento que antes estava restrita à forma operatória. Continuamos a discussão:

P: Então, observem que: quadrados são retângulos. Como a gente já viu, as propriedades que os retângulos têm, os quadrados têm. Quadrados são losangos. Vimos também que as propriedades que os losangos têm, os quadrados, observem que os quadrados têm todas, né. Marco todas. E ambos, ou seja, quadrados, retângulos e losangos são paralelogramos porque possuem as mesmas propriedades que os paralelogramos possuem. Se eu tirar os paralelogramos daqui [mostrando as figuras acima das propriedades no *slide*], eu posso colocar qualquer par de figuras desses sem precisar apagar nenhuma propriedade. É verdade ou, não é? [Todos balançaram a cabeça que sim]. Porque esses aqui têm, são propriedades comuns entre eles. Por isso eu digo que quadrados são retângulos e losangos, e todos são...

A10: Paralelogramos.

P: ... paralelogramos.

B12: Eita poxa! [Alguns falaram: entendi].

P: Entenderam a lógica? Como é que funciona? [Balançaram a cabeça que sim].
Alguna pergunta, gente? [Responderam que não].

E para concluir nossa fala sobre as figuras acima, apresentamos o seguinte recorte:

P: Então, hoje, a gente fecha essa parte mais de Geometria, tá? E vamos usar esses conhecimentos que a gente aprendeu hoje nos encontros seguintes, trabalhando outras coisas, tá? Mas sempre com essas figuras aí, com os paralelogramos. E aí vamos ter quadrados, ter retângulos, vamos ter losangos e o próprio paralelogramo, tá. Aqui, são quadrados, tá? [Apontando para os quadrados]. Aqui são retângulos não quadrados, por quê? Porque tem propriedades que o quadrado tem que ele não tem. Aqui são losangos que não são quadrados ou losangos não quadrados, por quê? Porque o quadrado tem propriedade que ele não tem. E aqui são paralelogramos que não são nem retângulos, porque não tem algumas dessas propriedades [apontando para as propriedades dos retângulos], e nem losangos porque não tem essas duas aqui [apontando para as propriedades dos losangos relativas a todos lados de mesmo comprimento e às diagonais perpendiculares].

No término do encontro, A8 e A9 se mostraram surpresos com o que acabaram de ver e fizeram os seguintes comentários: A8: “*Rapaz, eu vou confessar viu: desde o 4º ano que eu tô vendo isso agora*”. A9: “*Eu também! Se eu ouvi, eu não tô lembrado*”. A8: “*Eu também. Se eu vi, não tô lembrado*”.

Nesse encontro, os estudantes estavam bem atentos à sistematização, se colocando sempre de maneira muito pertinente. Quanto à atividade trabalhada, percebemos durante a vivência que a disponibilidade das figuras recortadas no momento da sistematização poderia ter contribuído, de modo que os estudantes pudessem trocar as figuras acima das propriedades

e verificar se ainda continuariam válidas ou se seria necessário desmarcar algumas delas. Isso ajuda na compreensão da inclusão de classes e na recíproca entre elas, principalmente se forem confrontadas com as respostas dadas na atividade da quinta sessão que tratou, justamente, dessa relação.

5.8 ANÁLISE DA OITAVA SESSÃO

Essa sessão estava prevista para ser realizada no dia 07 de julho de 2022, entretanto, como apenas uma estudante estava presente, resolvemos adiá-la. Essa estudante não compareceu em mais nenhum dos encontros. No período de 08 a 26 de julho foi o recesso escolar. Os professores retornaram com formações e planejamentos no dia 27 do mesmo mês e os estudantes realizaram atividades remotas tanto nesse dia quanto nos dias 28 e 29. No dia 01 de agosto retornaram presencialmente. Assim, a oitava sessão seria no dia 04 de agosto, mas apenas o estudante B12 estava presente e resolvemos adiá-la novamente. Dessa maneira, decidimos passar nas salas ao longo da semana reforçando o convite aos estudantes e falando da importância de continuarem frequentando os encontros. Com isso, ela foi realizada no dia 11 de agosto e estavam presentes cinco (A7, A8, A9, A10 e B12) dos nove participantes.

Realizamos as três atividades previstas para o dia individualmente e, ao final, como havia intervalo de tempo disponível, formamos grupos para discutirem as respostas dos colegas, sem alterá-las, e tentarem chegar a um consenso, o que não estava previsto inicialmente em nossa análise a priori. Por meio de situações de comparação e produção, trabalhamos a distinção entre área e superfície, sua invariância por decomposição e recomposição, e que a comparação das medidas (números) só pode ser feita quando as áreas das figuras estão expressas nas mesmas unidades de medida, destacando que os números que expressam as medidas de área, sem as respectivas unidades, não são suficientes para realizar comparações. Receberam um *kit* com peças do Tangram coloridas em cartolina Guache e duas peças de Poliminós em papel ofício iguais às da atividade 2, mostrada mais adiante. Passemos à discussão individual de cada uma delas. A primeira atividade foi retirada da dissertação de Ferreira (2010) e é apresentada a seguir:

Atividade 1: Usando as peças do Tangram, Rosa e Pedro fizeram as figuras abaixo:



Figura feita por Rosa

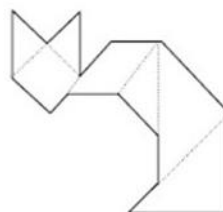


Figura feita por Pedro

Alguns estudantes do 9º ano fizeram as seguintes afirmações sobre as áreas das duas figuras acima. Você concorda com eles? Explique sua resposta.

André: A área da figura feita por Rosa é menor que a área da figura feita por Pedro.

Concordo ()

Discordo ()

Rita: As áreas das figuras feitas por Rosa e por Pedro são iguais.

Concordo ()

Discordo ()

Ao entregarmos a primeira atividade, o participante B12 necessitou saber o que seria área para iniciar a forma operatória, conforme trecho a seguir:

B12: Ei, professor, uma dúvida: a área é o que mesmo?

P: Oi?

B12: A área é o que mesmo?

P: Eita, a área é o que mesmo? Quem sabe o que é a área de uma figura?

A8: Num sei. [A7 fala algo baixinho sobre lados, mas não foi possível compreender o que ela disse].

B12: A10?

P: A10, o que é a área de uma figura, A10?

A10: A área de uma figura? É, tipo assim, tem um quadrado. É tipo dentro do quadrado, dentro da figura.

P: Tem um quadrado, dentro da figura?

A10: É.

P: O que dentro da figura?

A10: Tipo a área dele. É o que tem, a área. É o espaço dentro do quadrado.

P: É o espaço dentro do quadrado. A7, o que é a área? Sabe?

A7: Eu acho que é juntando os lados, multiplicando.

P: Juntando os lados e...

A7: Ou multiplicando.

P: Ou multiplicando. A9, lembra o que é a área de uma figura?

A9: Não.

A noção de área por parte dos nossos participantes se volta, na maioria deles, para uma concepção geométrica de área, embora A7 pareça apontar para a expressão de área, que pode

sinalizar uma concepção numérica. Esse dado se assemelha ao verificado por Jesus (2011) que, ao questionar sobre o que seria a área da sala, obteve respostas como “é o espaço da sala”, “é o espaço dentro da sala”, “é o tamanho do produto” (p. 106), entre outras. Em Araújo (2012), 15% não souberam o que seria área, 25% associaram a um espaço – como em Jesus (2011) – ou território, e 60% não responderam. Em Bernardes, Souza e Zandonade (2014) e Santos (2010), os participantes sentiram muita dificuldade em responder o que seria área, ligada à forma predicativa do conhecimento. Cabe ressaltar que habilidades relativas a esse conceito são propostas na BNCC e no CPE desde o 3º ano do ensino fundamental, cuja sistematização deve ocorrer no 8º ano, no campo das Grandezas e Medidas. A partir do 9º ano e no Ensino Médio, ele é abordado no campo da Geometria, como vimos nas análises prévias.

Diante das respostas que eles apresentaram, decidimos continuar questionando e não fornecer uma resposta de imediato, mas construir uma compreensão de área, pelo menos parcial, naquele momento:

P: E aí, B12 e A8, deu para lembrar mais ou menos o que é? [A8 balançou a cabeça que não].

B12: Deu, deu...mais ou menos.

A9: É quantos centímetro ela mede é? O comprimento dela?

P: Quantos centímetros ou comprimento? A10, a área desse, desse quadro aqui [mostrando o quadro branco da sala] seria como? Como seria essa área aí?

B12: Vai lá, A10!

A10: É meio tipo assim...

B12: ...vai lá, A10! [Insistindo para ir até o quadro mostrar].

A10: Ir lá?

B12: É, lá! Você explica. [Ele levanta e vai].

A10: Eu num sei direito...

P: ...como é que você diria pra B12; B12 perguntou o que é a área. Aí, como é que, você disse que a área é, aí você falou, é, um quadrado, é o que tem dentro do quadrado. Como é que você diria pra B12 qual é a área desse quadro aí?

A10: É tipo assim, pegando daqui até a outra ponta [mostrando de um lado do quadro ao outro na horizontal]. E aqui do mesmo jeito [fazendo o mesmo movimento, porém na vertical, ou seja, de cima até embaixo]. É tipo a área normal, vai ter aqui, vai ter aqui, vai ter aqui [mostrando as partes brancas internas ao quadro].

P: Certo. Então, seria a parte branca? É isso?

A10: Hunrum.

P: E aí, B12, deu mais ou menos para você lembrar o que é?

B12: Deu.

Como vemos, A10 associou a área ao espaço contido dentro de uma figura, apontando para indícios de uma concepção geométrica. Já A7 e A9 se aproximaram de uma concepção numérica, com expressões como juntar ou multiplicar os lados e quantos centímetros ou comprimento mede, respectivamente.

Após iniciar a atividade, A7 se voltou para A10 e comentou:

A7: Oh, A10, eu acho que é tipo o espaço que ocupa. Por exemplo, dois desse dá um desse [se referindo às peças do Tangram: dois triângulos menores e o triângulo médio].

P: Como é, A7?

A7: Tipo, eu acho que a área é o espaço que ocupa, porque dois desse dá um desse.

P: Você acha que a área é o espaço que ocupa. Juntando os dois triângulos menores dá o maior [na verdade, estávamos se referindo ao médio. Tratamos como maior por estarmos comparando com os dois menores].

A7: Tipo aqui, o mesmo espaço ocupado nesse, foi ocupado nesse tudinho. Então, eu acho que os dois têm mesma área [apontando para as figuras da atividade 1].

P: Entendi. No caso seria, assim, o “tanto” de espaço ocupado? [Ela balança a cabeça que sim].

Essa ideia de considerar a área como “tanto” de espaço ocupado ajuda na sua compreensão como uma grandeza autônoma, pois diferentes figuras podem ter o mesmo “tanto” de espaço ocupado. Já associá-la apenas ao espaço interno ocupado pode se prender à forma da figura que o ocupa e conduzir à ideia de que precisam ter a mesma forma para que possuam mesma área ou se mudá-la, a área também se altera.

Em relação aos resultados, A7 e B12 responderam corretamente, discordando da afirmação de André e concordando com a afirmação de Rita. No entanto, A7 levou em consideração o “tanto” de espaço ocupado, como mostrado a seguir, e B12 considerou que tanto o quadrado quanto o gato são formados pelas mesmas peças.

Figura 159 – Compreensão de área como “tanto” de espaço ocupado na atividade 1 da oitava sessão

André: A área da figura feita por Rosa é menor que a área da figura feita por Pedro.

Concordo () Discordo (X)

*por que trocou o espaço
e que foi ocupado
me dáte está me quic-
dando*

Rita: As áreas das figuras feitas por Rosa e por Pedro são iguais.

Concordo (X) Discordo ()

*sim pois as duas
figuras ocupam a
mesmo espaço*

Fonte: Participante A7

Os outros três participantes, A8, A9 e A10, que não responderam adequadamente focaram, além da ideia de espaço ocupado, no formato da figura, assim como fizeram na parte de Geometria, ao criar critérios cujo aspecto visual se apresentava como predominante, por exemplo: ter lados pontiagudos, figuras comuns e anormais, entre outros. Vejamos as explicações apresentadas por um deles:

Figura 160 – Diferenciação de áreas a partir do formato da figura na atividade 1 da oitava sessão

André: A área da figura feita por Rosa é menor que a área da figura feita por Pedro.

Concordo (X) Discordo ()

*Sim, porque Pedro
foi mais espaço
que Rosa*

Rita: As áreas das figuras feitas por Rosa e por Pedro são iguais.

Concordo () Discordo (X)

*não, porque o do Pedro
parece o gato, e o de
Rosa é um quadrado*

Fonte: Participante A8

Na segunda explicação percebemos que o estudante A8 discordou que elas possuem mesma área pelo fato de uma figura parecer um gato e a outra um quadrado, possivelmente, apoiado no teorema em ação falso de que figuras diferentes devem, necessariamente, ter áreas distintas. Notamos que tal mobilização foi apresentada por um participante em que o aspecto visual das figuras se mostrou muito presente nas atividades do campo da Geometria. Já o participante A10 falou nas suas explicações em soma de áreas, área total, expressões também utilizadas na Geometria Espacial, com a qual aparentou ter fortes vínculos ao tratar o losango não quadrado como prisma e o paralelogramo não retângulo e não losango como paralelepípedo, desconsiderando o aspecto dimensional.

Os participantes (A8 e A10), como já haviam tido opiniões parecidas individualmente, ao se juntarem, pegaram uma explicação de cada para justificar as respostas coletivas⁶⁴, respectivamente. Já (A7 e B12) que também apresentaram opiniões próximas, se juntaram com A9 que teve explicações diferentes, os quais foram protagonistas de um debate bem interessante, como podemos ver nos trechos das discussões a seguir:

P: Espere aí, A7 concorda com a de B12, é?

B12: É, e eu concordo com o dela.

A7: Sendo que todo mundo discorda com a de A9.

P: É, discorda com a de A9. A9, é, ele disse que...

B12: ...pelo formato da figura, pelo formato da figura.

P: As áreas das figuras feitas por Rosa e Pedro são iguais [lendo a segunda afirmação]. Aí, A9 colocou que discordava pelo formato das figuras, mas tem o que o formato, A9?

A9: Um gato e um...

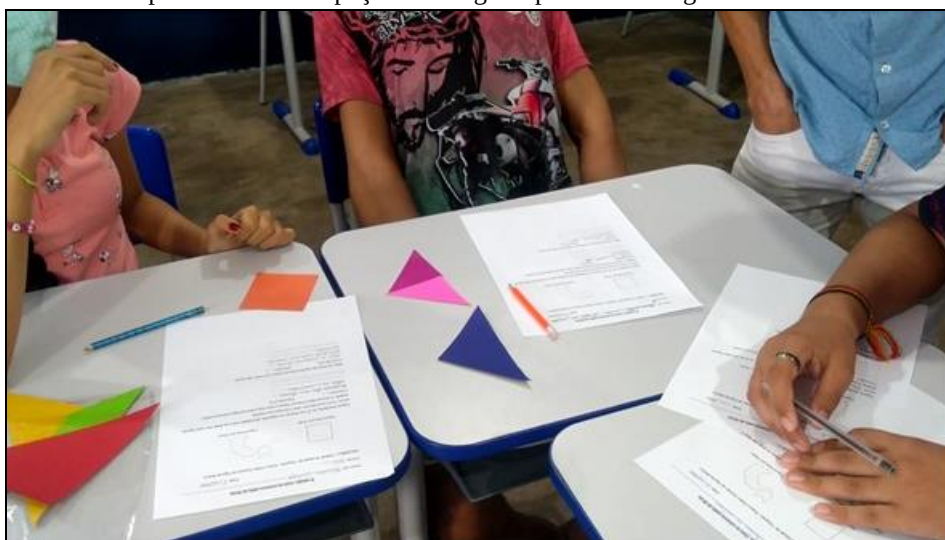
P: ...aí no caso aqui são diferentes?

⁶⁴ No encontro, inicialmente, fizeram as três atividades de maneira individual e, em seguida, formaram grupos para discutir as respostas apresentadas. Para uma melhor organização da análise, optamos por debater cada atividade de maneira individual e coletiva de modo simultâneo, assim como fizemos anteriormente.

A9: É.
 A7: Mas a gente viu, A9...
 A9: ...só se eu entendi errado.
 A7: Aqui, oh...
 B12: Oh, danado, mas num é a mesma, as mesmas formas.
 A7: Mesmo tendo o formato diferente, tipo, quando junta e ocupa a mesma, o mesmo espaço, é a mesma área.
 A9: Mas não tá ocupando o mesmo espaço, não!
 A7: Tipo aqui, ocupa o mesmo espaço. Tem as mesmas sete figuras [apontando para as peças do Tangram], só tá em formato diferente.
 B12: Entendeu?
 A9: Não.
 B12: Então...
 P: Tentem convencer ele ou, então, ele convence vocês.
 B12: Convencer eu, num convence não, que eu tô vendo que tá errado!

Como vemos, mesmo com a insistência de A7 e B12, apontando que figuras de formatos diferentes compostas pelas mesmas peças possuem a mesma área, A9 resistiu e não cedeu, o qual aparentou ter uma concepção geométrica de área solidificada que se constituía em obstáculo para o desenvolvimento da noção de área como uma grandeza. Destacamos a forma prediativa do conhecimento por parte de A7, visto que nos encontros iniciais era uma estudante extremamente tímida, que praticamente não falava. B12, ao contrário, sempre foi muito participativo. Continuaram insistindo, dessa vez com exemplos como mostrado na figura e nos trechos que seguem:

Figura 161 – Participante A7 usando peças de Tangram para mostrar igualdade de áreas a A9



Fonte: Dados da pesquisa

A7: Oh, A9, tipo, olha, se tivesse essa figura aqui [mostrando o triângulo médio do Tangram].
 B12: Sim.
 A7: Aí tu tem essa figura aqui que é o mesmo caso [mostrando um triângulo equivalente ao médio formado pelos dois menores].
 B12: Vá lá...
 A7: Que é o mesmo caso.
 B12: ...professora! [Brincando com A7 ao explicar os exemplos].
 A7: Tá o mesmo tanto.

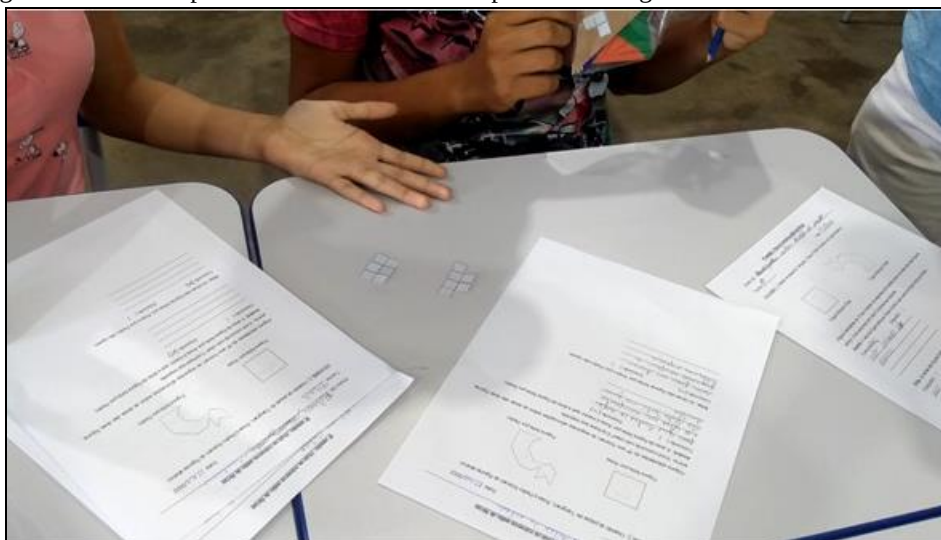
A9: Hum.
 A7: Tu ia dizer que as duas têm a mesma área?
 A9: Tem.
 A7: Por quê?
 A9: Por que junta.
 B12: Então!
 A9: Oxe, e isso daqui é um quadrado e um quadrado é? [Apontando para as figuras da atividade 1. A7 e B12 riem].
 B12: Mas num tem as mesmas formas!?
 A7: O mesmo tanto que usa aqui, usa aqui também [apontando para as duas figuras da atividade 1].
 B12: Né, não?
 A9: Não!
 B12: Não?

No exemplo proposto por A7, sua intenção foi mostrar que as figuras eram equivalentes porque ocupavam o mesmo tanto de espaço, entretanto, como ambas eram regiões triangulares, A9 discordou e esclareceu que o gato e o quadrado da atividade 1 não possuíam a mesma área porque não era “*um quadrado e um quadrado*”, ou seja, deveriam ser da mesma forma para terem áreas iguais. Pedimos que A9 expusesse sua opinião:

P: Explica pra eles, A9, o que você acha.
 A9: Por que aqui é um quadrado, aí tá tudo junto aqui [apontando para o quadrado da atividade 1]. E aqui tá tudo misturado assim [apontando para o gato da atividade 1]. Aí não fica a mesma forma do outro, não.
 P: Aí você acha que tem um maior do que o outro?
 A9: É. Só se for, tipo assim...
 P: ...quem tem maior área aí pra você?
 A9: O gato porque passa mais pro [não deu para entender a palavra que ele falou].
 B12: Aí você tá falando...
 A9: ...só se for...
 B12: Você tá falando a altura do gato.
 A9: Não. Tô falando isso, não. Tô falando do tamanho disso aqui oh, porque se isso, tipo assim...
 B12: ...hum...
 A9: ...esse daqui, cadê, acho que esse tá deitado aqui. Botar esse daqui mais, só se esses dois [apontando para algumas das peças do Tangram] for o mesmo comprimento dessa daqui, aí só muda a forma.
 A7: Vai dar a mesma coisa.
 A9: E num é o que eu tô dizendo.
 A7: E num é o que a gente tá tentando dizer, A9!
 A9: Oxe, vê aqui, pow. Cadê minha resposta?
 B12: Aí, pelo formato.
 P: Tá dizendo assim: as áreas das figuras feita por Rosa, a figura feita por Rosa [apontando para o quadrado] e a figura feita por Pedro [apontando para o gato], tá dizendo aqui que são iguais. Você disse que discordava.
 A9: Foi.
 P: Pelo formato da figura.
 A9: Então, pelo formato.

Diante da fala de A9, a participante A7 percebeu que o exemplo que apresentou utilizando as peças do Tangram não havia sido suficiente para fazê-lo compreender que figuras em formatos diferentes podem ter mesma área e tomou as peças de Poliminós utilizadas na atividade 2 para propor novos exemplos, como mostrado na figura a seguir:

Figura 162 – Participante A7 usando Poliminós para mostrar igualdade de áreas a A9



Fonte: Dados da pesquisa

- A7: Essas duas figuras...
- A9: ...hum...
- A7: Formadas por esses dois negocinhos aqui, têm a mesma área?
- A9: Tem.
- A7: Por que têm a mesma área?
- A9: Porque ocupa o mesmo tanto.
- A7: Então, A9, é isso que a gente tá querendo explicar. Aqui tá diferente [apontando para as figuras da atividade 1], mas usa o mesmo espaço em cada.
- A9: E se eu fizer outra figura com os mesmos negócios?
- A7: Juntando tudo? Ela tem a mesma área.
- B12: Tirando isso aqui [apontando para o quadrado formado com peças do Tangram] e fazendo outra figura dá a mesma coisa.
- A9: E se tirar, tipo assim, esses dois [apontando para duas peças do gato], vai dar a mesma coisa? [Se referindo a tirar peças].
- A7: Não.
- B12: Não. Só se tirar daqui também [apontando para as mesmas peças no quadrado].
- A9: Então!
- B12: Então!
- A7: Então!
- A9: Vai, coloca aí, qualquer coisa, aí!
- P: Não, mas você tem que entender.
- A9: Eu tô entendendo, mas pra mim é isso daí mesmo.

A partir do recorte acima, enquanto A7 e B12 tentaram convencer A9, percebemos a forma prediativa do conhecimento sendo utilizada por esses estudantes e, a partir dela, A9, cognitivamente, começou a se desequilibrar um pouco, começando a falar em tanto de espaço ocupado e a fazer alguns questionamentos, embora ainda inseguro. Percebemos também que procedimentos geométricos que mantêm a equivalência de áreas foram citados como, por exemplo, retirar as mesmas peças de um e de outro ou decompor o quadrado e formar outras figuras utilizando as mesmas peças. Mesmo diante disso, A9 não se convenceu como podemos ver ao final de sua fala e resolvemos intervir, visto que o horário já estava avançando e tínhamos outras demandas para esse encontro:

P: E aqui [apontando para o quadrado da atividade 1], pegando lá as peças, né, tem quantos triângulos desse grande?

A9: Nesse aqui? [Apontando para o quadrado].

P: Sim.

A9: Dois.

P: E nesse aqui? [Apontando para o gato].

A9: Dois.

P: Tem quantos quadrados aí?

A9: Tipo, assim, juntando ou...

P: ...não! Quadrado!

A9: Quadrado, dois!

P: Ali, pega ali, por favor [pedindo para A7 pegar as peças do Tangram no kit].

B12: O quadradão laranja.

P: Oh, dois triângulos grandes, os dois triângulos grandes têm nas duas, né?

A9: É.

P: Pronto, tem aqui e tem aqui, certo? [Apontando para as duas figuras da atividade 1]. Então, aí quadrado tem um aqui, na outra tem quanto? [os participantes do outro grupo interrompem].

A10: Professor, já terminou.

A9: Um.

P: Terminou também? Eu vou aí, só um minutinho. Um também, ok! Aí, o triângulo médio, no caso, esse daqui [pegando a peça do Tangram].

B12: O azulzinho.

P: Tem quantos aí? Nessa [apontando para o quadrado da atividade 1]. No caso, eu acho que é esse aqui, né?

B12: É.

A9: É. É um.

P: E na outra? [Apontando para a outra figura].

B12: Aqui, mesmo em cima de onde tem esse negócio aí, debaixo desse negócio aqui mesmo [mostrando o triângulo médio do gato a A9].

A7: É.

A9: Acho que é esse daí.

P: Aqui, né? [Os três responderam: é]. Tem também?

B12: Tem.

P: Pronto! O paralelogramo, esse aqui.

B12: É.

P: Nesse aqui tem quantos? [Apontando para o quadrado da atividade].

A9: Tem um.

P: E nessa? [Apontando para o gato].

A9: Um.

P: Ok! E agora, os dois triângulos pequenos. Esses dois aqui que é a...

B12: As orelhas.

P: As orelhas do gato.

A9: Dois.

P: Dois também.

B12: E aí, tem, ou não tem?

A9: Ah, só se eu entendi errado. [B12 ri].

P: Mas você entendeu o quê?

A9: Eu entendi que, tipo assim, eu, tipo assim, se eu medisse isso daqui [apontando para o quadrado], aí esse daqui já vai dar outro [apontando para o gato], outro comprimento por causa da forma do gato. Aí eu entendi errado!

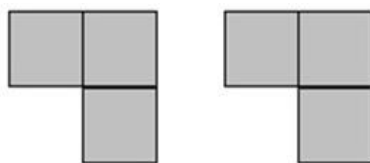
P: Mas você agora entendeu?

A9: Agora eu entendi o que eles tão querendo dizer!

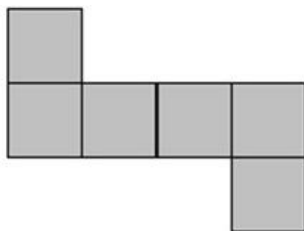
Como vemos, houve um conflito entre concepção geométrica e grandeza. Na perspectiva de obstáculos à aprendizagem, A9 entendeu o sentido que se atribui oficialmente para área, mas a concepção que ele tinha permaneceu, a qual diz respeito a um outro conhecimento: uma ideia pragmática de ocupar espaço que se estrutura em torno de uma

concepção geométrica. Após conferirmos que tanto o quadrado quanto o gato da atividade eram formados pelas mesmas peças do Tangram, A9 pareceu começar a compreender que eles possuem mesma área. Passemos à análise dos resultados da atividade 2, a partir da qual aprofundamos a distinção entre área e superfície. Ela é apresentada a seguir e também foi retirada da dissertação de Ferreira (2010):

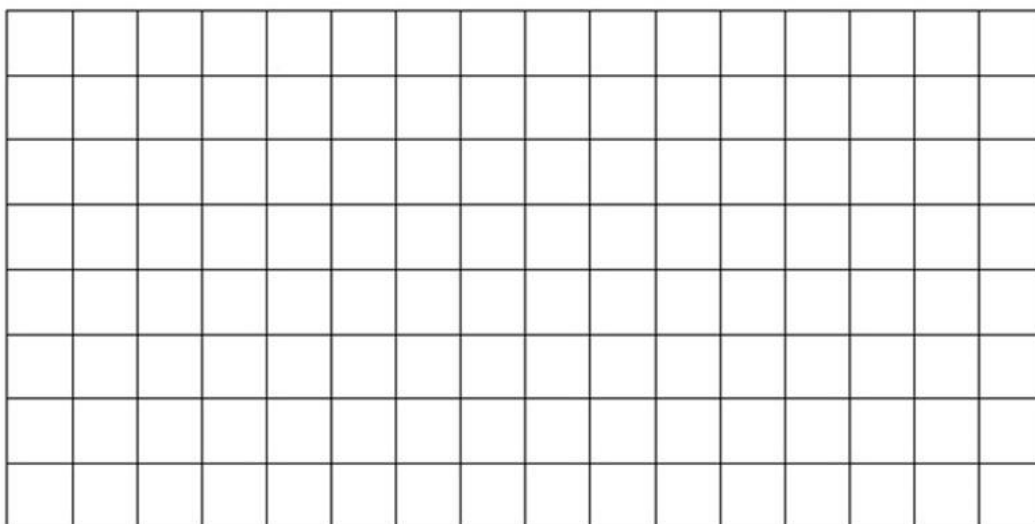
Atividade 2: *As duas peças a seguir são idênticas:*



Ao juntarmos essas peças, podemos formar uma peça maior, como mostrado abaixo:



a) Na malha quadriculada a seguir, desenhe outras quatro peças a partir das duas peças dadas e que sejam diferentes do exemplo apresentado. Em seguida, nomeie cada uma delas com as letras A, B, C e D.



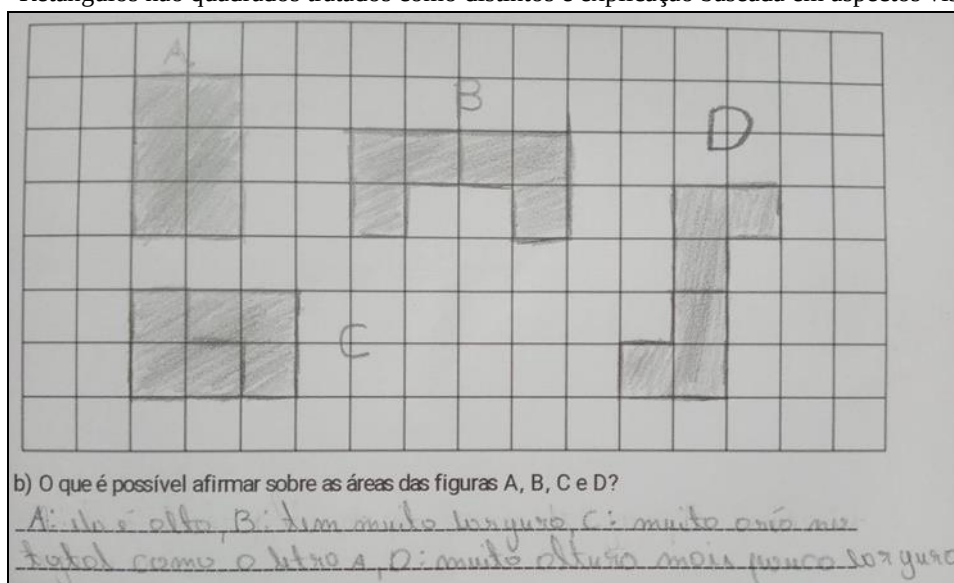
b) O que é possível afirmar sobre as áreas das figuras A, B, C e D?

Ao entregarmos essa atividade, perguntamos se já haviam utilizado peças de Poliminós em algum momento da vida escolar deles, mas afirmaram que não. Pedimos que

lessem, tentassem entender o que estava pedindo e a realizassem sem termos que ler para eles, como de costume. Caso surgissem dúvidas, podiam chamar para esclarecimentos. Fizemos isso buscando romper com a cláusula do contrato vigente na turma de que o professor sempre deve ler a atividade e dizer o que eles têm que fazer. Nosso intuito era promover a autonomia dos participantes, desprendendo-os da necessidade de alguém para dizer o que eles deveriam fazer, estando com a atividade em mãos. Mesmo assim alguns ainda pediram depois para explicar.

Em relação aos resultados, os participantes A7 e B12 produziram as figuras corretamente e afirmaram que todas possuem mesma área, embora em posições ou formatos diferentes. O participante A9 falou que eram do mesmo comprimento (se referindo à quantidade de quadradinhos), mas de forma diferente. A10 apesar de ter produzido algumas figuras corretamente, considerou retângulos não quadrados em posições diferentes como figuras distintas, como podemos ver a seguir:

Figura 163 – Retângulos não quadrados tratados como distintos e explicação baseada em aspectos visuais



Fonte: Participante A10

Como podemos observar, os retângulos não quadrados (A e C) em posições diferentes foram considerados distintos, como em Diniz (2013), uma vez que a atividade acima exigia a produção de quatro figuras diferentes. Cabe ressaltar que o retângulo não quadrado foi a única figura comum a todos os participantes, sendo predominante o seu desenho prototípico (com o lado de maior comprimento na posição horizontal). Na explicação apresentada, foi considerado o aspecto visual das figuras (alta, mais larga, muita altura etc.), também observado nos resultados de pesquisas no campo da Geometria, como Diniz (2013), Fujita (2012), Pereira da Costa (2016), Tavares (2014), entre outros. Esse aspecto também foi

considerado por A8, que usou expressões como alto, largo, fino, comprido etc., cujo trecho seguinte reforça seu argumento:

A8: [...] Deixa eu ver, viu. Iguais elas não são, né?

P: Oi?

A8: Elas não, elas não são iguais não.

P: Essas áreas não são iguais, não? Por quê?

A8: Porque essa aqui tem o formato diferente. Essa aqui também tem, essa daqui e essa [apontando para as figuras que produziu. O deixamos pensando para não interferir em sua resposta].

Conforme explicitado acima, A8 considerou que as áreas são diferentes porque têm formato distintos, se apoiando no teorema em ação falso segundo o qual figuras com formatos diferentes não possuem a mesma área.

No momento coletivo para troca de respostas e discussão, não houve mudanças significativas. A10 deixou de repetir o mesmo retângulo ao fazer em dupla com A8 e o termo comprimento não foi mais usado por A9, sobre o qual trazemos o seguinte trecho do diálogo:

P: A7, B12 colocou: são áreas iguais com formatos diferentes. Ele [se referindo a A9] colocou: são o mesmo comprimento e formatos diferentes. Área e comprimento são a mesma coisa?

B12: Não.

A9: Sei lá.

B12: Eu acho que não.

Continuando a discussão acerca dessas duas grandezas geométricas:

A7: Eu concordo com o meu e com o de B12.

P: Você não concorda com, com o de A9, não? [Ela balança a cabeça que não]. Por quê?

B12: Comprimento [rindo].

A9: Sei lá.

A7: Tipo, a área é o que é dentro e comprimento é aquilo que é fora [se referindo ao perímetro].

B12: É.

A fala acima aponta para a distinção entre área e perímetro do ponto de vista topológico e se assemelha aos achados da pesquisa de Henriques (2011), que para alguns participantes o perímetro “é o tamanho por fora” e a área “é o interior todo” (p. 150) e reafirma os dados encontrados por Machado (2011). Continuando a discussão com eles:

P: Mas voltando à discussão, área e comprimento é a mesma coisa?

B12: Rapaz, eu penso que não...talvez.

P: Quando você se mede, você diz assim: eu tenho um metro e sessenta de comprimento ou um metro e sessenta de área?

B12: De comprimento. Apoi, é não!

A9: Sei lá.

B12: Discordo do seu [apontando para A9].

Como vemos, optamos por apresentar um exemplo voltado ao dia a dia para irem revendo a utilização do vocabulário adequado relativo a cada grandeza. Em complemento, B12 apontou que:

B12: Comprimento é tamanho. A área é dentro do negócio aí.

A7: A área é o espaço.

B12: É, é o espaço. Espaço contido.

A9: Comprimento é o de fora, né?

B12: É, é. Isso mesmo! Agora entendestes!?

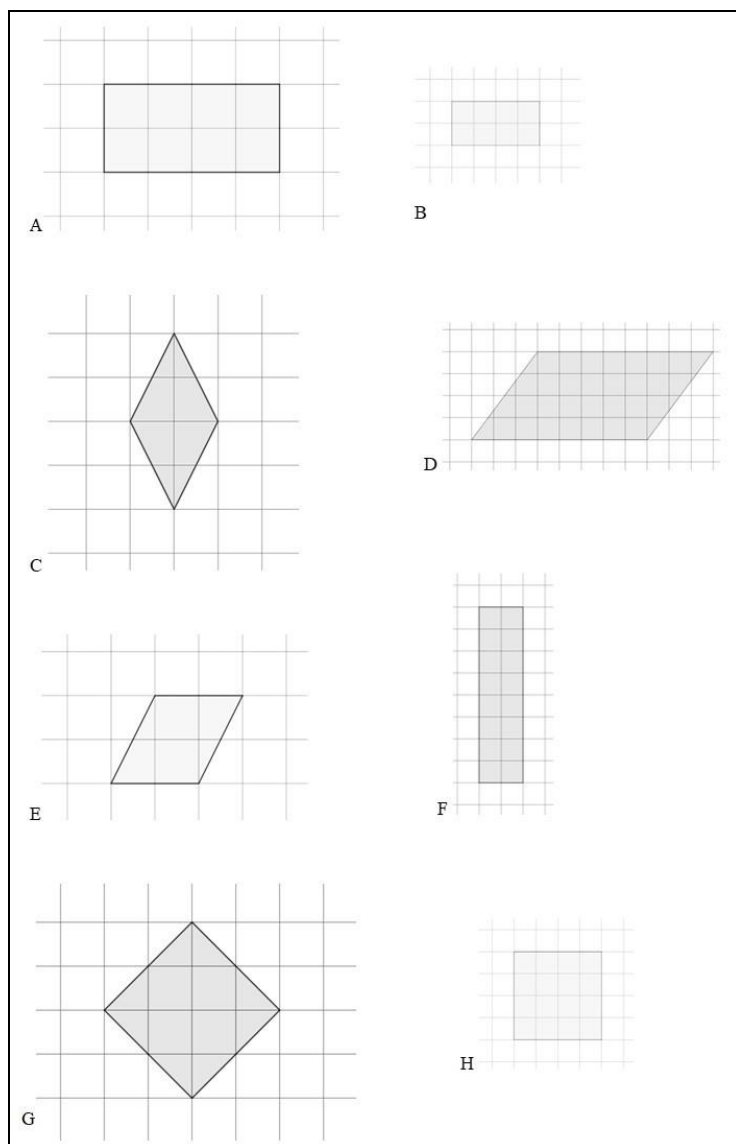
A9: É isso, professor?

P: A gente vai conversando ao longo dos encontros... [optamos por não fornecer a resposta, mas continuar questionando e deixar que eles fossem formulando uma compreensão acerca dos conceitos envolvidos].

A partir do diálogo acima, foi mobilizada a ideia de que comprimento é relacionado ao tamanho, fora da figura, e a área ao espaço contido em seu interior. Apesar de ser uma noção ainda em construção e que precisa ser aperfeiçoada, já configura uma evolução em relação à concepção inicial de A9 que utilizou o termo comprimento em vez de área. De modo mais amplo, o debate de ideias matemáticas pelos participantes, mediado pelo pesquisador, se mostrou muito proveitoso em vários momentos da experimentação e pode ser estendido para o ambiente da sala de aula convencional.

A atividade 3, apresentada a seguir, foi extraída da nossa dissertação (Araújo, 2018):

Atividade 3: *Observe os paralelogramos abaixo:*



Assinale (V) para verdadeiro ou (F) para falso nas seguintes afirmações. Explique como você pensou.

() As figuras A e B possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e G possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e C possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras E e F possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras F e H possuem mesma área.

Explicação: _____

() As figuras A e D possuem mesma área.

Explicação: _____

No quadro a seguir, apresentamos uma síntese das respostas verificadas nesta atividade, destacando as comparações que os participantes acertaram e a referência a partir da qual se apoiaram nas explicações fornecidas:

Quadro 65 – Síntese das respostas da atividade 3 da oitava sessão

<u>Agrupamento dos resultados da atividade 3</u>			
Participantes	Comparações corretas	Tipo de Malha	Centro das explicações
A7	A e G	1 cm	Espaço ocupado
	A e C	1 cm	
	F e H	0,5 cm	
A8	A e C	1 cm	Aspecto visual das figuras
	A e D	1 cm e 0,5 cm	
A9	A e G	1 cm	Aspecto visual e quantitativo
	A e C	1 cm	
A10	A e B	1 cm e 0,5 cm	Aspecto visual das figuras
	A e C	1 cm	
B12	A e G	1 cm	Espaço ocupado
	A e C	1 cm	
	F e H	0,5 cm	
	A e D	1 cm e 0,5 cm	

Fonte: Dados da pesquisa

A partir do quadro acima, é possível observar que a maioria dos acertos decorreu de comparações de figuras que estavam na mesma malha, ou seja, cujos comprimentos dos lados dos quadradinhos eram iguais, sendo o acerto na comparação (A e C) comum a todos os participantes. Verificamos ainda três critérios principais para explicar as respostas apresentadas: o espaço ocupado, que implicitamente está o “tanto” de espaço ocupado, o aspecto visual das figuras ligado ao seu formato e este último combinado com o quantitativo, voltado à quantidade de quadradinhos da malha ocupada pelas figuras. Vejamos um recorte:

Figura 164 – Resposta e explicação na comparação (A e C) da atividade 3 da oitava sessão

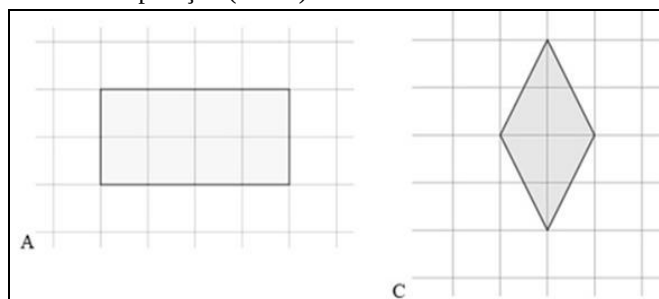
(F) As figuras A e C possuem mesma área.

Explicação: As figuras A e C possuem a mesma quantidade de quadradinhos.

Fonte: Participante A9

O recorte acima exemplifica tanto a comparação em que todos acertaram quanto o critério aspecto visual (forma) e quantitativo (quantidade de quadrados). As figuras presentes nessa comparação são apresentadas a seguir para ajudar o leitor na compreensão:

Figura 165 – Comparação (A e C) da atividade 3 da oitava sessão



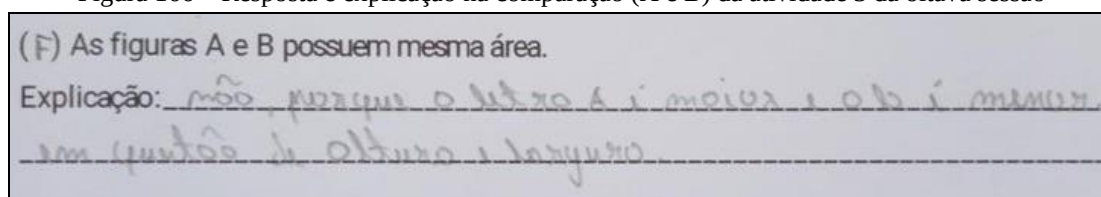
Fonte: Acervo da pesquisa

O fato de todos terem acertado a comparação acima envolvendo um retângulo não quadrado e um losango não quadrado pode ter ocorrido por, além de estarem na malha quadriculada cujo lado do quadradinho mede um centímetro, elas não atenderem a nenhum dos critérios estabelecidos por eles: não ocupam o mesmo “tanto” de espaço, não possuem a mesma forma e não têm a mesma quantidade de quadradinhos.

Coletivamente, (A7, A9 e B12) mantiveram as respostas de A7, incorporando às suas explicações a questão da quantidade de quadrados. Assim, em relação a A9, houve a inclusão da comparação (F e H) e, quanto a B12, teve a exclusão da comparação (A e D), embora correta, provavelmente, por A7 tê-lo convencido de que não havia distinção entre os quadradinhos das malhas, cuja explicação foi baseada na diferença entre a quantidade de quadrados das figuras (A e D).

Já na dupla formada por (A8 e A10), as respostas que prevaleceram foram as deste último e as explicações também, havendo poucas alterações em relação à sua atividade individual. Assim como B12, o participante A8 retirou a comparação (A e D) que estava correta. Houve um aprimoramento na escrita por parte de A8, influenciado por A10, pois ele havia utilizado expressões ao comparar as figuras como “mais maior”, “mais menor” “mais comprida” entre outras e, em grupo, explicitaram elementos geométricos, como apresentado no recorte a seguir:

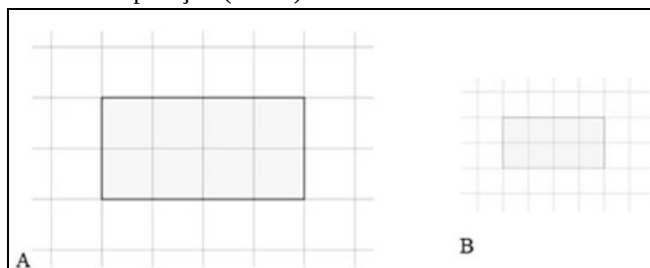
Figura 166 – Resposta e explicação na comparação (A e B) da atividade 3 da oitava sessão



Fonte: Participantes (A8 e A10)

Como vemos, as expressões acima foram substituídas por maior e menor relativas à altura e largura. O participante A8, individualmente, havia colocado (V) para a comparação (A e B) por, segundo ele, se parecerem, ligado ao aspecto visual delas, cuja resposta mudou no momento coletivo. Vejamos as figuras dessa comparação:

Figura 167 – Comparação (A e B) da atividade 3 da oitava sessão



Fonte: Acervo da pesquisa

De modo geral, nessa primeira sessão do campo das Grandezas e Medidas, notamos que há predominância de concepções geométricas de área, ligadas ao teorema em ação de que figuras diferentes têm, necessariamente, áreas diferentes. Essa importância atribuída pelos estudantes à forma da figura já foi discutida no estudo de Douady e Perrin-Glorian (1989) e aponta para a forte relação do campo da Geometria no tratamento de situações do campo das Grandezas e Medidas. A concepção numérica se mostrou enfraquecida, possivelmente, por ser um reflexo dos encontros anteriores em que o campo numérico foi bloqueado enquanto o geométrico foi bastante explorado, embora em outro contexto. Enfatizamos as discussões importantes levantadas por eles, os exemplos utilizados, o aumento e o aprimoramento da forma prediativa do conhecimento. Passemos à próxima sessão.

5.9 ANÁLISE DA NONA SESSÃO

A nona sessão foi realizada no dia 18 de agosto de 2022 e contou com a presença dos nove participantes (A2, A4, A6, A7, A8, A9, A10, B4 e B12) que foram até o fim da experimentação. Trabalhamos a distinção entre área e número por meio de situações de produção de figuras utilizando a malha quadriculada e de medição sem dados numéricos fornecidos, mas que permitiam a contagem a partir da utilização de diferentes superfícies unitárias. A primeira atividade foi individual e a segunda em duplas. Os participantes receberam um *kit* com régua não graduada e um Tangram.

Iniciamos com uma apresentação contendo recortes de respostas das atividades da sessão anterior, a qual gerou bastante discussão e interesse por parte dos estudantes. Ao discutir a relação entre as áreas do quadrado e do gato, ambos formados com peças do

Tangram, na atividade 1 da oitava sessão, B12, que antes precisou saber o que seria área para poder utilizar a forma operatória, passou a se apoiar no teorema em ação verdadeiro segundo o qual figuras equidecompostas têm áreas iguais, conforme trecho de sua fala a seguir:

B12: É a mesma coisa, professor.

P: A mesma coisa, o que é a mesma coisa?

B12: A área de, de Rosa é a mesma coisa do de Pedro.

P: Por quê?

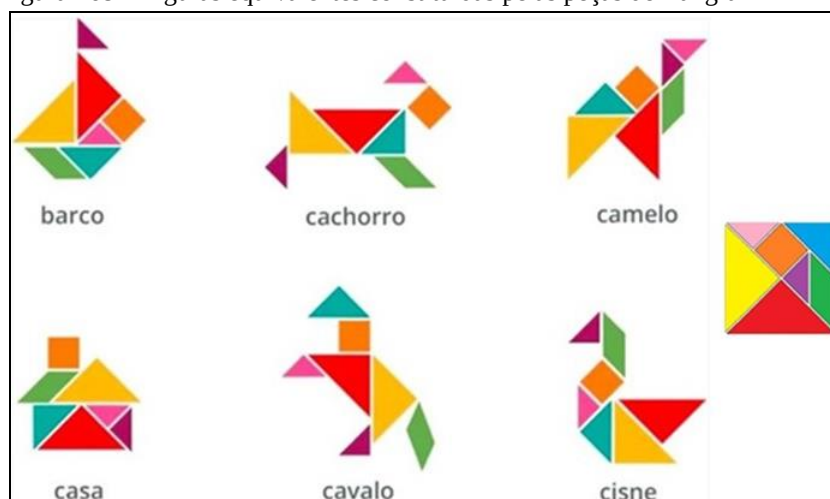
B12: Só que em formato diferente.

P: Tem formato diferente, mas a área é a mesma?

B12: É. Porque usa as mesmas peças.

Naquele momento, A10 que havia discordado que as duas possuem a mesma área, passou a concordar: “A10: *Agora eu concordo. Eu não pensei nisso, não. [...]*”. Assim como A10, o participante A9 foi um dos que discordaram e, inclusive, foi protagonista de uma discussão em seu grupo, como vimos anteriormente. Para reforçar sua compreensão, que ainda parecia não muito solidificada, levamos figuras de uma atividade utilizada na primeira sessão para ajudá-lo a compreender, como mostrado a seguir:

Figura 168 – Figuras equivalentes constituídas pelas peças do Tangram



Fonte: <https://matematicasimplificada.com/tangram-o-lendario-jogo-chines-das-pecas-da-sabedoria/>

(adaptado)

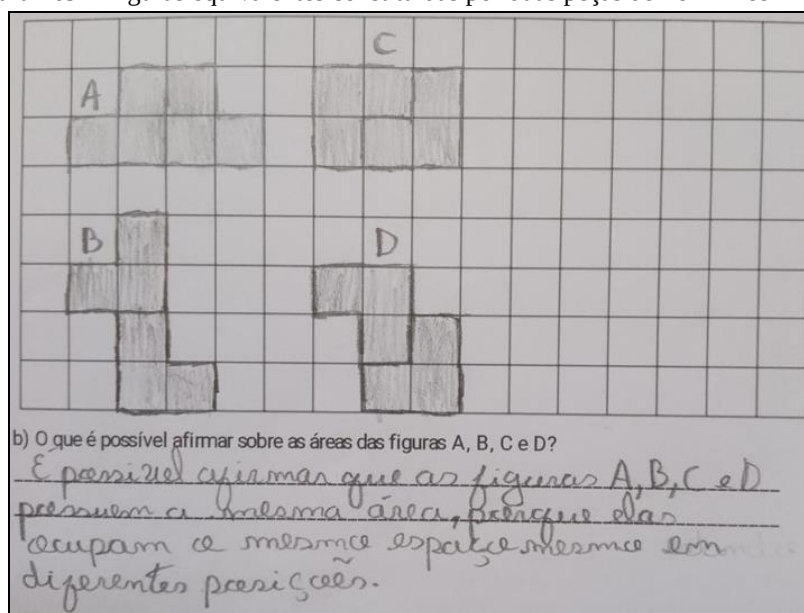
Com as figuras acima exibidas no *slide*, questionamos:

P: Pergunto para vocês: esse, que figura é essa? [Apontando para o quadrado formado com peças do Tangram e todos responderam: quadrado]. Esse quadrado aqui possui a mesma área que essas figuras? [Todos responderam que sim, que eram as mesmas peças]. Tá? Isso, são constituídos pelas mesmas peças. Sendo assim, eles ocupam o mesmo tanto de espaço, tá? A área não é o espaço em si; é o tanto de espaço que ocupa, tá certo? Poderia, tranquilamente né, com essa aqui [apontando para o quadrado] fazer qualquer uma dessas daqui [apontando para as demais] sem acrescentar peças, sem diminuir, sem recortar nenhuma delas, ok?

Após fecharmos a discussão da atividade 1 com a figura acima, começamos a discutir a atividade 2, a qual solicitava a produção de figuras equivalentes na malha quadriculada utilizando duas peças de Poliminós, com vimos anteriormente. Ao longo desse momento,

percebemos uma sutil distinção entre os conceitos de área e perímetro, conforme trecho apresentado adiante, motivado a partir do seguinte recorte:

Figura 169 – Figuras equivalentes constituídas por duas peças de Poliminós



Fonte: Participante A7

Ao apresentarmos o recorte acima, A10 comentou:

A10: Por fora não ocupam o mesmo espaço, não.

P: Como, A10?

A10: Por fora, tipo assim, por fora da figura.

P: Tem como você mostrar isso aqui?

B12: Vai lá, A10!

A6: Vai, A10!

A10: Oh, professor...

P: O que você fala por fora?

A10: Tipo assim...

B12: Ele tá falando o tamanho.

A10: A (B), você vê que a (B)...

P: ...a (B) de qual? Desse ou daquele?

A10: Daquele [apontando para a figura (B) produzida por A7].

P: Desse aqui, essa (B) aqui.

A10: Ela é bem grandinha, mas só que ela tem a mesma área. Já a (A) [figura produzida também por A7] é menor e tem a mesma área.

P: Isso.

A10: Entendeu?

A fala de A10 ao final também aponta um conflito entre concepção geométrica e grandeza. Continuamos questionando, pois o entendimento dele poderia ser também o de outros participantes e não poderíamos avançar com a explicitação de uma relação que costuma gerar dificuldades por parte dos estudantes que é a confusão entre os conceitos de área e perímetro:

P: Mas o que...

A6: Todos têm a mesma área.

P: ... por fora e por dentro é o quê?

A10: É porque, tipo assim, por fora ela ocupa mais espaço e...

P: Quando você fala “por fora”, você tá falando desse contorno é? Assim oh. [Apontando para os comprimentos dos lados dos quadradinhos que constituem a figura (B)].
 A9: Tu é doido!
 A10: É.
 P: Tá.
 A10: Ocupa, tipo, mais...
 B12: ...que sorte, o cara falou em contorno num negócio desse.
 P: Vocês lembram como se chama esse contorno?
 A10: Vértice?

Como vemos, não utilizamos a palavra perímetro de imediato. O participante A10 chamou de vértice, apontando para uma troca entre elementos geométricos e grandeza de uma figura, vértice e comprimento, respectivamente, indicando mais um indício da fragilidade dos conhecimentos geométricos, em especial, na forma predicativa. Dando continuidade:

A9: É o comprimento?
 P: É o quê?
 A9: Comprimento.
 P: Isso, é o comprimento. Mas esse, esse, o tanto de comprimento aqui, vamos juntar ele: aqui tem um comprimento, outro comprimento, outro comprimento [mostrando os lados dos quadradinhos]. Quando eu somo todos esses comprimentos aqui, o que é que eu tenho?
 A9: Uma figura.
 P: O que, A7 [pois ouvimos ela falar baixinho para A10: perímetro?].
 A7: Não. [Não quis falar, provavelmente, com medo de errar].
 A9: Uma figura.
 P: Uma figura, tá. Mas ela, já ouviram falar em perímetro?
 A7: Eu num disse, A10!?
 A9: Perímetro.
 P: Não teve, cadê a?
 A10: Ela disse, professor!!
 A9: Eu acho que já ouvi falar.
 P: Confiança, A7! Tá? Então, viu, A10, quando você fala assim “por fora”, você está querendo falar do perímetro. Tudo bem, os perímetros aqui são diferentes, tá? Perímetro dessa, o perímetro dessa é: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze, treze [contando os lados dos quadradinhos da figura (B) produzida por A7].

Destacamos em alguns momentos o amálgama entre objeto geométrico e grandeza por parte de A9. Prosseguindo com a discussão:

P: Pronto, então, esse aqui tem perímetro treze, é, unidades de comprimento. Vamos ver esse aqui [apontando para a figura (A) produzida por A7]. Começar por aqui, vou marcar para não esquecer que eu já contei: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze...
 A6: ...doze!
 P: Tá? Os perímetros aqui são diferentes, mas as áreas são iguais. As áreas são o quê? Cada quadradinho...
 A10: Quadradinho de dentro.
 P: ...cada quadrado desse ocupa. Então, um, dois, três, quatro, cinco, seis [contando na figura (A)]. Um, dois, três, quatro, cinco [complementaram: seis. Contagem dos quadradinhos na figura (B)]. Tá? São figuras que possuem a mesma área e perímetros [complementaram novamente: diferentes]. Diferentes, tá? Ok, essa parte fora do quadrado?
 A9: Beleza!
 A10: É porque eu não sabia direito, aí tentei explicar do meu jeito.
 P: Legal, mas tudo bem, foi ótimo!

Essa explicitação de A10 a partir da forma predicativa do conhecimento foi o ponto de partida para falarmos rapidamente sobre o perímetro que, embora não fosse objeto de investigação neste estudo, sua estreita relação com o conceito de área e a confusão histórica existente entre eles, relatada em pesquisas como Baltar (1996), Douady e Perrin-Glorian (1989), Ferreira (2010), Souza (2013) etc., exigiram que dedicássemos alguns minutos para uma breve diferenciação, nos forçando a até mesmo antecipar alguns aspectos numéricos que estavam sendo evitados. Contudo, propor diferentes atividades que levem à diferenciação entre esses conceitos é mais viável em uma pesquisa com este fim, que não era o nosso naquele momento.

Ao iniciarmos a discussão da atividade 3, última da sessão anterior, que envolvia diferentes paralelogramos, questionamos a respeito dos nomes específicos de cada um deles e, mais uma vez, o losango não quadrado foi tratado como prisma, mesmo após termos diferenciado figuras planas de espaciais em momentos anteriores. Vejamos um trecho:

P: A atividade 3 diz: observe os paralelogramos abaixo, tá? Pelo que a gente estudou antes, nos encontros anteriores, essas figuras aqui elas são:

A10: Paralelogramos.

P: Paralelogramos, tá. E algumas recebem nomes especiais, como é o caso do [complementaram: retângulo] retângulo, que não é quadrado, né? Esse aqui? [Apontando para o losango não quadrado].

A6: Prisma.

A10: Prisma. Acho que é prisma.

P: Esse daqui?

A10: Mas tem um nomezinho, professor.

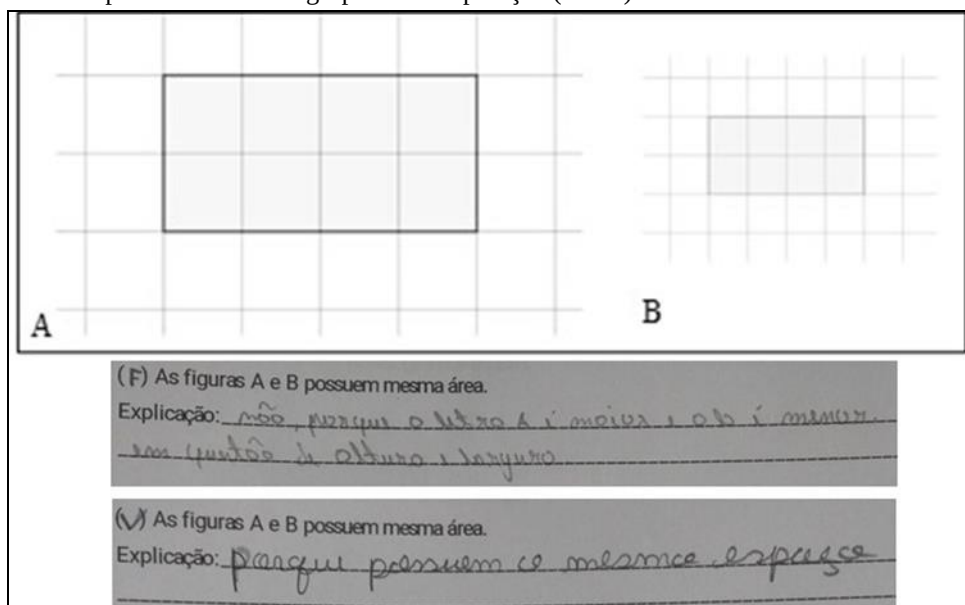
A6: Sei lá, o apelido dele é prisma.

A9: É paralelepípedo. [Nesse momento, A7 fala para A10 que é losango e ele e os demais responderam corretamente].

Embora tenha se repetido essa troca na nomenclatura, percebemos uma maior aceitação do seu nome real, pois trataram “prisma” como apelido do losango não quadrado. A participante A7 mais uma vez falou corretamente o termo questionado.

Na discussão da comparação (A e B), apresentamos a seguir as respostas de um grupo que indicou (F) e outro que assinalou (V), com as devidas explicações:

Figura 170 – Respostas distintas de grupos na comparação (A e B) da atividade 3 da oitava sessão



Fonte: Dados da pesquisa

Após lermos as afirmações acima e questionarmos sobre o que eles achavam dessas respostas, iniciou uma discussão entre eles, conforme trecho abaixo:

A8: Porque assim, tipo assim, as duas são iguais entendeu, é, só que aquela dali é mais pequena e essa daqui é mais maior [apontando para as figuras (B) e (A), respectivamente], aquela largura e espaço.

B12: Oh, danado?

A10: É não.

B12: Quantos quadradinhos?

A10: Conta os quadradinhos! [A10 mudou de opinião em relação à de antes que não considerou a quantidade de quadradinhos].

A8: Ah, conta os quadradinhos, né?

A10: Os quadradinhos é a área, professor. Eu devo ter errado por causa disso aí. Eu não observei os quadradinhos, rápido. Fui [fez sinal de escrevendo rápido e B12 ri].

A8: Apoi eu errei. Nesse aqui [apontando para a figura (A)] tem quatro quadradinhos; naquele ali [apontando para a figura (B)] tem seis...

A6: Quatro?

A10: Seis?

B12: Tem oito quadrados cada um!

A6: Tai cego, é?

A10: Tem oito quadrado cada um.

B12: Diminui o tamanho.

A10: Olha, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito [contando os quadradinhos da figura (A)].

A9: É a mesma figura em tamanhos diferentes.

A6: É.

A8: É.

A10: Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito [contando os quadradinhos da figura (B)].

A8: Não, é a mesma figura só que aquela tá mais menor [se referindo à figura (B)].

B12: Mas conta!!!

A10: Mas é menor, mas...

A8: Eu sei.

B12: O que importa é dentro.

Percebemos, na discussão acima, que A9 falou em figuras semelhantes e A8 tomou como referência o tamanho delas, mais próximo de uma concepção geométrica, enquanto B12 se restringiu à contagem dos quadradinhos que compõem cada uma das figuras, sem considerar o tamanho de cada um deles, mais ligado a uma concepção numérica. Diante das colocações de cada um deles, fizemos a seguinte intervenção:

P: Vocês lembram quando eu falei lá do Tangram, eu disse que elas tinham a mesma área porque as peças eram iguais, idênticas, do mesmo tamanho, num era? [Responderam hunrum ou balançaram a cabeça que sim]. Se eu pegasse peças maiores, ia dar uma área maior, num foi isso?

A8: Hunrum.

P: Então, digamos que a gente pega um quadradinho desse aqui [contornando o quadradinho da figura (A)]. A7 e A10 conversam baixinho que não é possível ouvir o que estão falando]. Tá? E um quadrado do outro, um quadradinho do outro [contornando na figura (B)], enquanto B12 falava algo de carro que deu uma sobrada, fora do contexto da aula, mas olha para A10 e diz].

B12: É (F).

A10: Bom!!!

P: E aí? São iguais?

A8: São.

B12: E aí, é ou não? [Olhando para A8].

A8: Não.

A10: Não.

A8: Não!

A10: Agora mudou a resposta.

A8: Porque o quadrado ali é muito mais maior e o de lá, não.

A6: É verdade, são iguais.

B12: Sim, e a quantidade?

A10: É (F)!

A8: Ali tem oito quadrados, ali também tem oito [apontando para as figuras (A) e (B), respectivamente].

B12: Sim.

A8: Então!

A10: A quantidade é a mesma, professor, só que só muda o tamanho.

B12: Então, ele tá falando de área.

A6: Eu acho que é o mesmo. Oh o zap no celular [se referindo ao toque do celular de alguém].

A10: Nesse aí eu fico meio na dúvida.

B12: Eu fico no muro, professor [se referindo à expressão “ficar em cima do muro”].

Percebemos que começaram a se desequilibrar, uns passaram a ficar na dúvida enquanto outros mudaram de opinião. Vejamos a continuidade do debate ao falarmos da relação existente entre os quadradinhos de uma malha e de outra:

P: Olhem, nessa, nesse aqui, tá [figura (A)].

A6: Sim.

P: Esse lado aqui ele possui um centímetro. Vou trazer esse quadradinho pra cá [desenhando-o fora da malha].

A10: É verdade, é verdade.

P: Esse quadrado aqui, tá, ele possui um centímetro, tá.

A6: Pronto.

P: Quadrado em que o lado dele é um centímetro, certo? [A10 falou baixinho: quatro centímetros de perímetro]. Nesse aqui pequeno, no menor, esse quadradinho possui lado meio centímetro, tá. Esse quadradinho daí possui lado meio centímetro [A7 e A10 falam baixinho e apertam as mãos, mas não foi possível ouvir o que eles falaram]. Certo?

A10: Hunrum.

P: Qual a relação que há entre esse quadrado maior e esse menor? Eu preciso de quantos quadrados desse menor aqui para ter um maior desse?

A8: Quatro!

A6: Quatro.

A9: Quatro.

Observamos que eles perceberam rapidamente a relação existente entre eles, a qual foi reforçada pelo acréscimo seguinte:

P: [...] se a gente transformar esses quadrados aqui menores em quadrados daquele maior, como é que ficaria, né? Quatro desse pequeno...

A8: No caso, vai ficar dois quadrados!

P: Então, assim oh [contornando quatro quadrados pequenos para transformar em um maior] dá um daquele grande, né?

A10: É.

P: Perceba aqui a relação. O outro vem pra cá, né? [A6 fala baixo e não entendemos o que ele falou].

A6: Precisou de quatro pra formar um. Que massa!

Mais adiante, concluímos que:

P: Então, quando a gente for olhar para área, a gente tem que ver também o tamanho da peça que a gente tá considerando, tá? A relação que tem aí é que quatro desses, quatro daquele pequenininho valem a um desse grande, certo? Ok, A7? Tá? Ou seja, a área da figura (B), né, ela é um quarto da área dessa figura maior aqui [figura A]. É a área dessa dividido por quatro, tá?

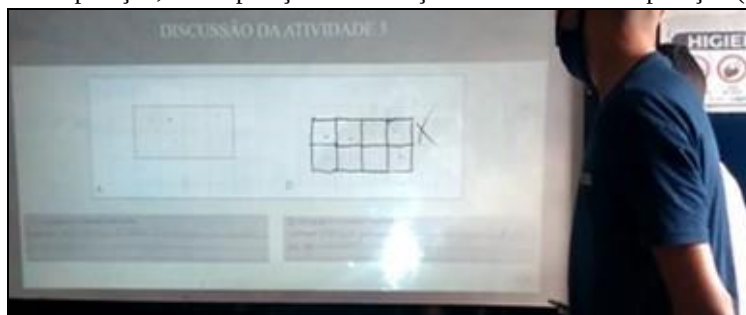
B12: Ok, A8?

P: Ok? [Responderam hunrum].

B12: Primeira vez A8 acertou!

Após esse momento de discussão da relação entre as malhas, perceberam os erros nas demais comparações e foram ao quadro mostrar como fazer corretamente, realizando complementação dos quadrados que estavam parcialmente contidos na figura e transformações entre os quadradinhos das malhas para poderem comparar. Assim, realizaram no quadro procedimentos geométricos como decomposição e recomposição de figuras, além de transformações entre as unidades nas malhas etc., como podemos ver a seguir:

Figura 171 – Decomposição, recomposição e mudança de unidade na comparação (A e D)

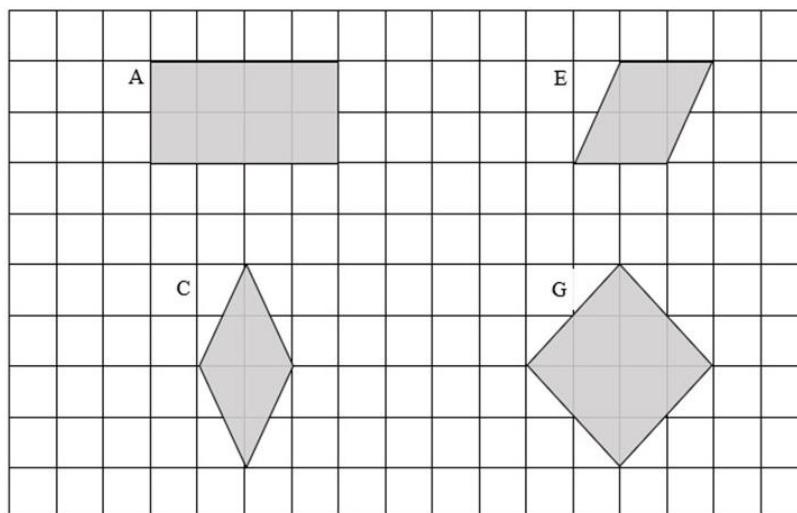


Fonte: Participantes A8 e B12

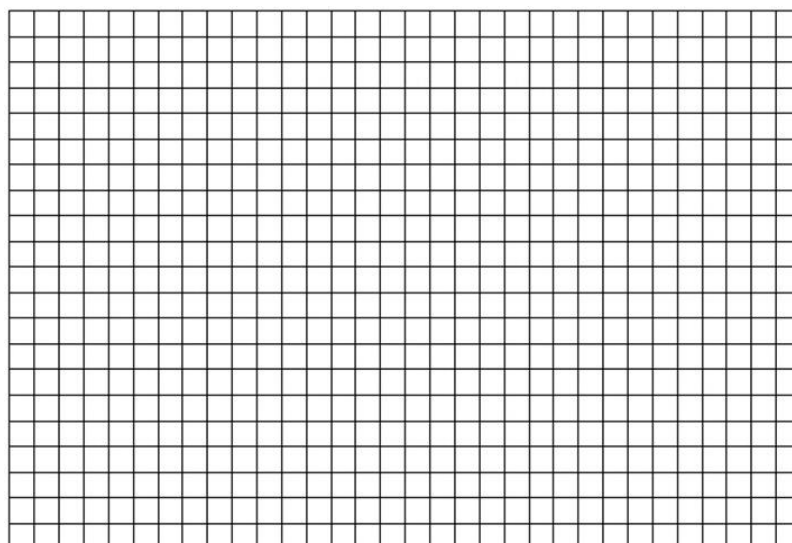
Na figura acima notamos que eles, ao lidar com uma situação de comparação pertencente ao campo das Grandezas e Medidas, inicialmente, se apoiaram no campo da Geometria ao fazer a decomposição do paralelogramo não retângulo e não losango (D) em um

retângulo não quadrado, ambos em desenho prototípico. Em seguida, por meio do campo numérico, aplicaram a relação entre os quadradinhos das malhas, considerando a necessidade de só poder as comparar grandezas quando estiverem na mesma unidade de medida. Esta última compreensão levou alguns deles a transformarem duas figuras que já estavam na mesma unidade (quadradinhos de 0,5 cm) em quadradinhos de 1 cm. Assim, mostramos que não precisava, pois já eram iguais e, mesmo assim, a resposta seria a mesma, pois os valores obtidos eram proporcionais, os quais bastavam ser divididos por quatro. Encerrado esse momento de sistematização, passamos à realização das atividades próprias dessa sessão, cuja primeira foi:

Atividade 1: *Você está recebendo as figuras A, C, E e G que usou na atividade da sessão anterior.*

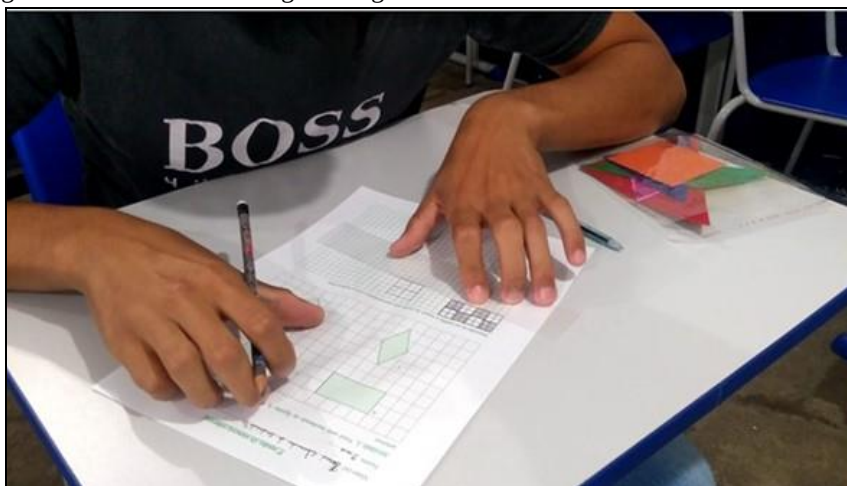


Desenhe-as na malha a seguir de modo que permaneçam com a mesma área.



Na atividade acima os estudantes deveriam tomar como referência as discussões sobre a atividade anterior e produzir figuras com mesma área que os paralelogramos dados, considerando a relação existente entre cada tipo de malha quadriculada. A régua não graduada foi utilizada pelos participantes para ajudar no traçado das figuras e/ou verificar alguma igualdade de comprimentos de lados. A seguir, mostramos ela sendo utilizada por um deles:

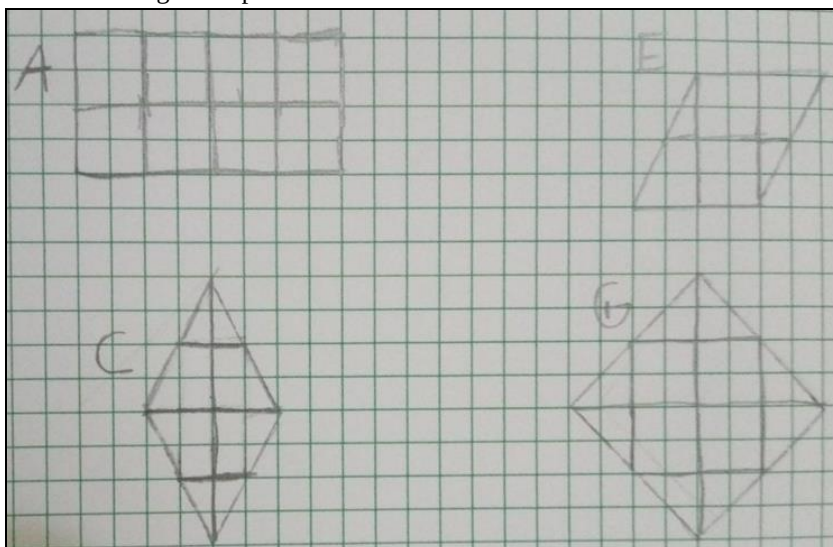
Figura 172 – Utilizando a régua não graduada na atividade 1 da nona sessão



Fonte: Participante B4

Quanto aos resultados obtidos, o retângulo não quadrado (A) foi produzido corretamente por todos os participantes, entretanto, apenas a participante A7 conseguiu acerto pleno nessa atividade, cujo recorte de suas produções é apresentado a seguir:

Figura 173 – Paralelogramos produzidos corretamente na atividade 1 da nona sessão



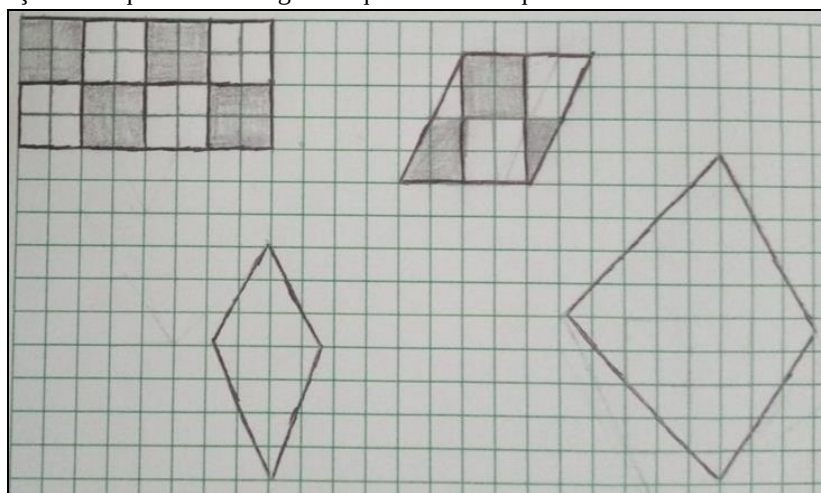
Fonte: Participante A7

Como previsto em nossa análise a priori e exemplificado no extrato acima, a maioria das figuras produzidas pelos participantes foi em posições iguais às das figuras fornecidas, assim como também observado no estudo de Diniz (2013), voltado ao campo da Geometria,

em que os participantes que obtiveram êxito, desenharam figuras parecidas com as fornecidas pelo pesquisador.

Nessa atividade, a maior dificuldade se concentrou nas figuras em que os lados não seguem a malha (C e G), principalmente no losango não quadrado (C), reafirmando resultados de pesquisas anteriores como Bernardes, Souza e Zandonade (2014). As principais dificuldades verificadas nesse tipo de paralelogramo foram: comprimentos das diagonais diferentes da figura original, lados não congruentes, diagonais não interceptando-se em seus pontos médios, vértices não coincidindo com os da malha, entre outras. Vejamos um recorte:

Figura 174 – Produção inadequada de losango não quadrado e do quadrado na atividade 1 da nona sessão

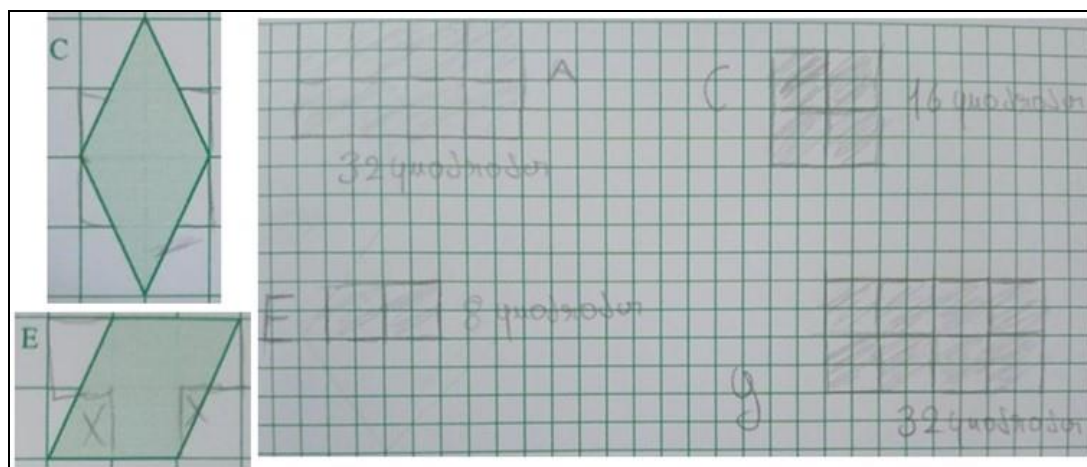


Fonte: Participante B4

O participante B4 produziu corretamente o retângulo não quadrado e o paralelogramo não retângulo e não losango. No entanto, o losango não quadrado produzido, também observado em A9 e B12, não possui os lados de mesmo comprimento, parece ter apenas dois pares de lados iguais, a diagonal maior não intercepta a menor em seu ponto médio, vértices que não coincidem com os da malha. Já a figura que deveria ser um quadrado apoiado sobre um dos vértices aparenta ser um trapezoide, sem nenhuma propriedade do quadrado. Em ambos os casos, ao lidar com a situação de produção do campo das Grandezas e Medidas, esses estudantes não obtiveram êxito na situação de construção, que surgiu como uma tarefa elementar do campo da Geometria. Essa dificuldade no quadrado quando aparece em condições não habituais também foi verificada em nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018).

Diferentemente dos demais participantes, A10 aplicou os conhecimentos geométricos abordados no início do encontro para decompor as figuras em quadrado e retângulos não quadrados, destacando a quantidade de quadradinhos que compõem cada uma delas a partir da relação entre as malhas, como exposto logo em seguida:

Figura 175 – Procedimentos de decomposição e recomposição para produção de figuras na atividade 1 da nona sessão

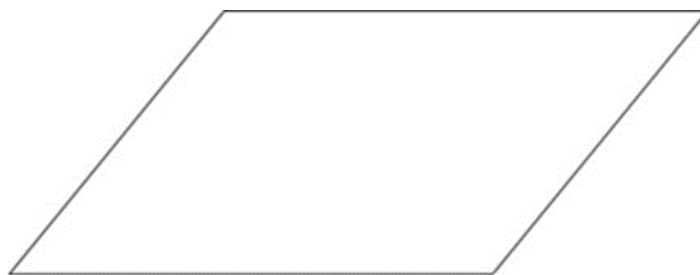


Fonte: Participante A10

Na representação simbólica acima das figuras (C e E), observamos traços de sua decomposição e recomposição, entretanto, no paralelogramo não retângulo e não losango (E), apesar da sinalização correta do procedimento utilizado, deveriam ser quatro quadradinhos de um centímetro de lado totalmente preenchidos, equivalentes a 16 quadradinhos da malha menor e não oito como apontado por ele. No caso, foram considerados apenas os quadradinhos recompostos durante o procedimento e deixados de lado os dois já existentes na figura. Percebemos ainda que A10 não desenhou as figuras exatamente na mesma ordem em que apareceram na atividade, também observado em A9 e B12. Os demais as fizeram conforme a atividade apresentava.

De modo geral, pareceram reinvestir adequadamente a dissociação entre área e número, uma vez que apesar de a malha ser diferente, eles não se apoiaram unicamente nos aspectos numéricos. Assim, perceberam a necessidade de considerar a relação entre as malhas para que as figuras produzidas tenham a mesma área que as dadas na atividade. As dificuldades concentraram-se, principalmente, no losango não quadrado, tanto em desenhar esse paralelogramo conservando suas propriedades, tarefa elementar do campo da Geometria, quanto em deixá-lo equivalente ao fornecido, tarefa elementar do campo das Grandezas e Medidas. Dificuldades em relacionar o comprimento das diagonais de um losango e sua área foram observadas em pesquisas como em Bernardes, Souza e Zandonade (2014). Passemos à análise da atividade 2, a qual é apresentada em seguida.

Atividade 2: Você está recebendo a figura⁶⁵ a seguir e outras menores que correspondem às peças do Tangram.



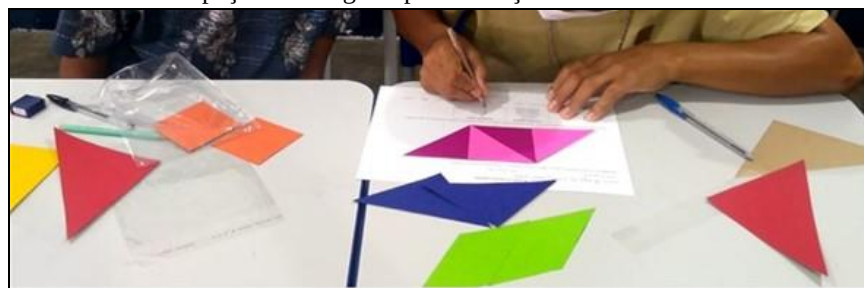
Tente recobrir totalmente a figura acima utilizando cada uma dessas peças e anote no espaço fornecido o resultado encontrado em cada medição.

Superfície unitária	Resultado obtido
Quadrado	
Paralelogramo	
Triângulo grande	
Triângulo médio	
Triângulo pequeno	

Após realizar as medições anteriores, houve alguma mudança na área da figura dada? Explique. _____

Esta atividade foi realizada em duplas e um trio devido à quantidade de participantes presentes ser ímpar. Como dito na introdução dessa sessão, trabalhamos a distinção entre área e número a partir de situações de medição utilizando diferentes superfícies unitárias, as quais correspondiam às peças do Tangram, como podemos ver a seguir:

Figura 176 – Utilizando as peças do Tangram para medições na atividade 2 da nona sessão



Fonte: Participantes (A4 e A8)

Quanto à utilização das peças do Tangram como superfícies unitárias, em alguns casos o ladrilhamento efetivo era possível, como utilizando os triângulos pequenos e médios ou o

⁶⁵ Como destacado em nossa análise a priori, verificamos e comprovamos, antes de entregar a atividade, que a figura fornecida poderia ser totalmente sobreposta pela seguinte quantidade de peças: 2 (quadrados, triângulos médios e paralelogramos não retângulos e não losangos), 1 triângulo grande e 4 triângulos pequenos.

paralelogramo não retângulo e não losango, já em outros não, como é o caso do quadrado e o triângulo grande. A principal dificuldade apresentada pelos participantes foi com esta última peça, conforme apresentado nos seguintes trechos:

P: Você não consegue fazer com ele? [Se referindo ao triângulo grande].

A7: É.

P: E aí, mas teria como você descobrir aí alguma relação entre as outras peças e o grande, ou não? [Ela começa a tentar e diz:]

A7: Acho que não [continua tentando, sobrepondo as peças]. Que dá dois desse? [Apontando para o triângulo médio].

P: Não sei, veja aí se dá!

A7: Dá!

P: Tem outro dele aqui também pra você juntar com ele. Junta e mede. [A7 pede para A2 pegar o outro triângulo médio].

A7: Dá dois desse [se referindo aos triângulos médios] e também dá quatro desse [apontando para os triângulos pequenos].

Após ela ladrilhar o triângulo grande com peças que possuem mesma forma, ou seja, que também correspondiam a triângulos, como o médio e o pequeno, questionamos se poderia fazer o mesmo com peças de outros formatos:

P: E nas outras peças, tem alguma relação?

A7: Acho que não.

P: Acha que não? A relação entre esse quadrado; tem relação entre esse aqui [o quadrado] e algum outro?

A7: Com esse [apontando para o triângulo pequeno].

P: Dá quantos desse?

A7: Dois.

P: Dois. E esse daqui [apontando para o triângulo pequeno] dá quantos desse [apontando para o triângulo médio].

A7: Esse aqui?

P: Sim.

A7: Dois.

P: Então, esse quadrado com esse [apontando para o triângulo médio] dá quantos? Qual é a relação entre eles? Em termos de área, são áreas diferentes ou mesma área?

A7: A mesma.

P: E com esse aqui você consegue; e o triângulo grande dá quantos quadrados?

A7: Dois?

P: Confiança! Dá dois ou não?

A7: Acho que dá. Porque um quadrado desse é dois desse [mostrando o triângulo pequeno].

P: Certo!

A7: Aí pra fazer um desse [apontando para o triângulo grande] é quatro desse [se referindo ao triângulo pequeno]. Vai dar dois desse! [apontando para o quadrado].

P: E com esse aqui [apontando para o paralelogramo não retângulo e não losango], tem relação com esse aqui e o triângulo grande? Pra saber quantos desse sobrepõe totalmente o triângulo grande?

A7: Acho que dois.

P: Por quê? [Enquanto ela pensava, os demais grupos discutiam baixinho a atividade e falavam de outros assuntos fora do contexto da atividade].

A7: São dois desse aqui [sobrepondo os triângulos pequenos sobre o paralelogramo].

P: Qual a relação entre esse aqui [o paralelogramo] e esse triângulo azul [médio]?

A7: A mesma área.

A discussão acima com a participante A7 e observada atentamente por seu par, o estudante A2, ao qual questionamos ao final se havia entendido e ele respondeu que sim,

reforçou a ideia de que figuras diferentes podem ter mesma área, pois A7 foi levada a perceber a relação de equivalência entre eles a partir dos questionamentos realizados, o que contribuiu para evitar a mobilização do teorema em ação falso de que duas figuras só têm a mesma área se tiverem exatamente a mesma forma, como observado em Douady e Perrin-Glorian (1989). Uma discussão parecida, mas não tão detalhada, ocorreu com o participante A8, em dupla com A4, que antes havia falado que a área seria zero ao medir com o triângulo grande, pois não era possível recobrir toda a figura dada utilizando-o. Cabe ressaltar que, embora alguns não tenham participado do debate, muitos ficavam atentos às explicações em outros grupos e já tiravam as suas dúvidas.

Em relação aos resultados, todos apresentaram bom desempenho nessa atividade. O único erro verificado foi justamente na medição utilizando o triângulo grande, como mostrado a seguir:

Figura 177 – Medição incorreta na atividade 2 da nona sessão

Tente recobrir totalmente a figura acima utilizando cada uma dessas peças e anote no espaço fornecido o resultado encontrado em cada medição.

Superfície unitária	Resultado obtido
Quadrado	2
Paralelogramo	2
Triângulo grande	2
Triângulo médio	2
Triângulo pequeno	4

Após realizar as medições anteriores, houve alguma mudança na área da figura dada? Explique.

não, por que as formas são as mesmas

Fonte: Participantes (A9, B4 e B12)

A resposta relativa ao triângulo grande deveria ser um e não dois como indicado pelo trio acima. O fato de terem respondido dessa maneira, provavelmente, deve estar ligado aos demais resultados obtidos que também foram dois, com exceção do último. Antes de chegar à explicação apresentada após as medições, houve um breve debate entre eles, conforme trecho a seguir:

B12: Explique! Esse negócio de explicar é o chato [se referindo à explicação a ser dada ao final da atividade 2]. Por mim coloca...

B4: Sim, num mudou as formas que a gente tava fazendo, né?

A9: Sim, no quadrado, no bagulho lá.

B12: Eu que, eu acho que não, professor. Porque todas as formas que a gente usou num fez a mesma forma [apontando para a figura dada].

A9: Real.

B4: Mas o triângulo, a gente num transformou ele em, naquele, igual ao outro, como é?

B12: Igual a esse!

A6: Losango. [A6 não participava do grupo. Estava aguardando eles terminarem para irem juntos para casa].

B4: É.

B12: O triângulo a gente num transformou pra ficar igual a esse aqui!

B4: Positivo! Então!

B12: Então! [B12 conseguiu convencê-los].

A maioria das explicações apresentadas converge para a ideia proposta por B12 ao seu grupo, relativa ao fato de poder chegar ao paralelogramo não retângulo e não losango dado a partir das diferentes peças do Tangram. Apenas a dupla formada pelos estudantes (A6 e A10) foi além desse critério, como mostrado em seguida:

Figura 178 – Explicação apresentada por um grupo na atividade 2 da nona sessão

Tente recobrir totalmente a figura acima utilizando cada uma dessas peças e anote no espaço fornecido o resultado encontrado em cada medição.

Superfície unitária	Resultado obtido
Quadrado	2
Paralelogramo	2
Triângulo grande	1
Triângulo médio	2
Triângulo pequeno	4

Após realizar as medições anteriores, houve alguma mudança na área da figura dada? Explique.

Sim, pois todas foram feitas com todas as figuras em quantidades diferentes

Fonte: Participantes (A6 e A10)

Após realizarem todas as medições corretamente, os participantes (A6 e A10), em dupla, foram além do aspecto geométrico, apontando que não houve mudança na área da figura dada “pois todas foram feitas com todas as figuras em quantidades diferentes”.

De modo geral, nessa sessão, apesar de algumas dificuldades observadas como desenhar losango não quadrado ou quadrado, ambos não prototípicos, os participantes em sua maioria souberam diferenciar, de maneira prática (forma operatória do conhecimento), a área tanto do número quanto da superfície associada a ela, validando suas compreensões a partir das explicações apresentadas (forma predicativa do conhecimento). Passemos à próxima sessão.

5.10 ANÁLISE DA DÉCIMA SESSÃO

A décima sessão foi realizada em 25 de agosto de 2022 e contou com a presença de seis (A2, A4, A8, A9, B4 e B12) dos nove estudantes. Trabalhamos a atribuição de sentido às expressões de área dos paralelogramos, explorando de que maneira se apoiam nos casos do quadrado e do retângulo não quadrado por meio de situações de construção, campo da Geometria, e de medição a partir do ladrilhamento e contagem de quadradinhos, campo das Grandezas e Medidas. A primeira atividade foi realizada de maneira individual e a segunda, em grupos. Ao entregarmos o *kit* contendo régua graduada e quadradinhos cujo comprimento dos lados media um centímetro para ladrilharem as figuras desenhadas, o participante B12 falou:

B12: Hoje, a régua é diferente!

P: Hoje, a régua é diferente, B12? Por quê?

B12: Porque essa daí é de, de, normal.

P: Essa é normal? E a outra era anormal, era?

B12: A outra era normal, não. Era num sei o que de graduada.

P: Não graduada.

Como sugerido por Douady e Perrin-Glorian (1989), procuramos não introduzir precocemente o quadro numérico, buscando bloquear procedimentos que levassem a esse aspecto, tanto nos materiais fornecidos quanto nos enunciados das atividades. A partir dessa sessão passamos a explorá-lo mais explicitamente, como mostrado a seguir:

Atividade 1: Você está recebendo uma cartolina, régua graduada e quadrados menores em cartolina Guache, com comprimento do lado medindo 1 cm. Desenhe na cartolina três quadrados cujos comprimentos dos lados de cada um deles são 5 cm, 10 cm e 15 cm, respectivamente.

Em seguida, responda:

a) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 5 cm? _____

b) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 10 cm? _____

c) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 15 cm? _____

d) Teria alguma maneira de saber quantos quadradinhos são necessários para preencher toda a figura sem precisar contá-los um a um? Se sim, qual? _____

e) E se o quadrado tivesse lado de comprimento n , como faríamos? _____

Ao iniciar a atividade, o estudante B4, apesar de estar utilizando uma régua considerada “normal” por B12 e, provavelmente, ser comum no dia a dia escolar deles, apresentou a seguinte dúvida ao utilizá-la:

B4: É assim que faz? Começa do, do zero ou do um aqui? [Perguntando se ao medir com a régua graduada iniciaria do zero ou do um].

P: Oi, você, como é?

B4: Começa a fazer...

P: No caso, cinco centímetros?

B4: Sim.

P: Do zero.

B4: Ah, do zero?

P: Isso.

No trecho apresentado, percebemos que ele não sabia se deveria começar a medir os cinco centímetros a partir do zero ou do um na régua graduada. Tal dificuldade pode ser

reflexo dos dois anos que passaram afastados das atividades escolares presenciais e, consequentemente, de tarefas que exigissem tal manuseio.

Quanto aos resultados, apenas A8 e B12 desenharam corretamente os quadrados e apresentaram todas as respostas corretas, mesmo tendo começado ladrilhando toda a figura e contando um a um, como podemos observar logo abaixo o participante A8 preenchendo a figura desenhada com os quadradinhos em amarelo:

Figura 179 – Ladrilhando a figura para depois contar os quadradinhos um a um



Fonte: Participante A8

Só após certo tempo que ele percebeu que não precisava ladrilhar toda a figura e contar os quadradinhos um a um, como discutido no trecho a seguir:

A8: Agora! Se eu fosse, eu ia morrer se fosse colocar os quadradinhos aqui dentro [se referindo ladrilhar toda a figura com os quadradinhos colocando um a um].

B12: Eu também, oxe!

P: Como é, A8?

A8: Eu ia morrer se fosse colocar os quadradinhos aqui dentro. Só era a pessoa botar aqui, contar os daqui de cima, botar aqui do lado, contar do lado e dividir [confundiu as operações, mas havia multiplicado na atividade].

B12: Ei, A8, eu tava pensando outra coisa. Num precisava ter feito isso não! E o número aqui!! [Apontando para os comprimentos dos quadrados a serem desenhados].

A8: Aonde? [B12 mostra os comprimentos das figuras a serem desenhadas na atividade].

P: Como é, B12?

B12: Num precisava ter feito isso aqui, não! Era só ter pegado esse número aqui e multiplicado por ele mesmo.

A8: É mesmo!!!

P: Por que vocês acham que é assim?

A8: Sim mesmo, B12!!

B4: Vocês, vocês num fizeram assim não, foi?

A8: PAB [professora da turma] falou uma vez. É!!! A gente pegava aqui...

B4: ... porque os quadrados né, né do mesmo tamanho.

B12: Aí ela pegava e saía colocando assim [se referindo a colocar as dimensões nas figuras].

B4: Só somava esse...

A8: ... e multiplicava, aí dava o total que a pessoa queria.

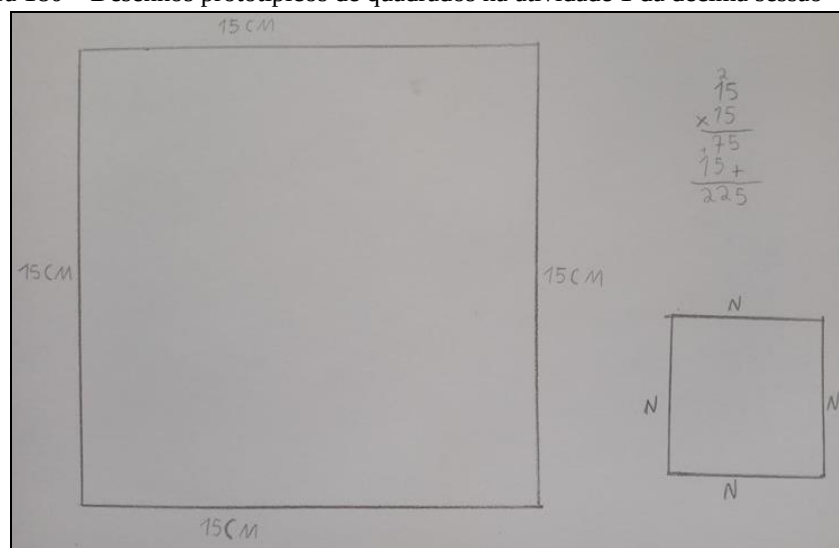
B12: É isso mesmo!

A8: É, é rapaz! Oxe, eu ia morrer pra botar esses quadradinhos aqui dentro.

No trecho acima temos três ideias diferentes: a primeira, mais vinculada ao campo geométrico, partiu de A8 ao perceber que não precisava contar os quadradinhos um a um, mas sim colocá-los em dois dos lados adjacentes da figura, contá-los e fazer a multiplicação entre o total deles. Mesmo se tratando de um quadrado, ele ainda apontou para a necessidade do preenchimento de dois dos seus lados. A segunda, proveniente de B12, se desvinculou da figura e focou nas medidas, apontando que não precisava preencher toda a figura com quadradinhos e realizar a contagem deles. Embora ele tenha se distanciado da figura, expressou a propriedade do quadrado e de sua área, ao apontar que bastava pegar o comprimento e multiplicar por ele mesmo. Já B4 partiu de um raciocínio parecido com o de B12, mas confundiu os conceitos de área e perímetro como veremos mais adiante ao tratar especificamente do extrato da sua resolução.

Ainda sobre A8, ele foi o único que indicou o comprimento em todos os lados dos quadrados que desenhou, inclusive no de lado n , como podemos ver a seguir em dois deles:

Figura 180 – Desenhos prototípicos de quadrados na atividade 1 da décima sessão



Fonte: Participante A8

Assim como os demais participantes, A8 fez figuras em desenho prototípico e operou apenas com os números sem as unidades de medida, como também exemplificado na representação simbólica acima. Quanto à indicação do comprimento dos lados, A2 e A4 não a fizeram em nenhum deles, já B4 e B12 colocaram apenas em um deles. Cabe ressaltar que nenhum dos participantes representou os ângulos retos nos quadrados desenhados. O participante A9 não deixou registrado na cartolina seus desenhos, apesar de ter utilizado a régua graduada para medir e preencher o comprimento obtido com os quadradinhos fornecidos, sem traçá-lo. Já o participante A4 fez retângulos não quadrados, cuja diferença entre os comprimentos dos lados adjacentes foi cerca de meio centímetro.

Desenhar um quadrado cujo comprimento dos lados fosse n , campo da Geometria, também gerou dúvidas pelos participantes, como podemos observar no seguinte trecho:

B12: O que é um quadrado de comprimento n ?

P: Você quando desenhou o quadrado colocou cinco centímetros, num foi? [Balançou a cabeça que sim]. Aí se no lugar desse cinco fosse n ? Qualquer número! Fosse n , n , n e n , os lados dele.

B12: Mas com os números iguais?

P: Oi?

B12: Mas com tipo, aqui é cinco, no lugar de cinco...

P: Vocês podem fazer os cálculos na folha, gente, tá? Se quiser, pode fazer o cálculo na própria folha... [olhando para A8 que estava escrevendo na carteira escolar].

A8: Pode fazer na folha mesmo?

P: Pode fazer aí ao lado, no ladinho!

B12: Aí se aqui fosse, no lugar do cinco fosse um n .

P: Um n . Isso!

B12: n , n , n e n .

P: E n .

B12: Ia ser?

P: Um quadrado com tudo n [referindo ao comprimento dos lados].

As dúvidas relativas ao quadrado de comprimento de lado n não foram apenas no seu desenho, campo da Geometria, mas também em como calcular a sua área, campo das Grandezas e Medidas, conforme trecho a seguir:

P: Como foi que você fez para saber nesse aqui [apontando para o quadrado de lado 15 cm]?

A8: Eu contei os quadrados aqui, contei não, assim eu botei do lado, aí eu contei um de cada lado e o outro de cada lado. Cada lado tinha quinze, aí eu peguei os dois e multipliquei tudo.

P: E aqui, cada lado tem n , né? Cada lado tem n , aqui tem n quadradinhos e aqui n quadradinhos [se referindo à superfície unitária]. Como é que você faria?

A8: Não sei.

P: Daqui a pouco a gente; a gente conversa sobre isso.

Esperávamos que A8 conseguisse generalizar e falasse $n \times n$, mas não conseguiu. Depois de um certo tempo, ele falou: “*Ainda não entendi ainda, professor*”. Diante da necessidade de atender a outros estudantes e, como teríamos um momento para discussão ao final desse encontro, falamos que depois conversaríamos sobre isso na sistematização.

Assim como previsto em nossa análise a priori e já sinalizado por pesquisas anteriores como Baltar (1996), Domingos (2013), Douady e Perrin-Glorian (1989), Ferreira (2010), Jesus (2011), Santos (2010), Souza (2013), entre outros, houve confusão entre os conceitos de área e perímetro por três deles, A4, A9 e B4, compreendida como erro de cálculo relacional na ótica na TCC, como apresentado a seguir:

Figura 181 – Confusão entre os conceitos de área e perímetro na atividade 1 da décima sessão

a) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 5 cm?
30

b) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 10 cm?
40

c) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 15 cm?
60

d) Teria alguma maneira de saber quantos quadradinhos são necessários para preencher toda a figura sem precisar contá-los um a um? Se sim, qual?
sim é só somar os lados

e) E se o quadrado tivesse lado de comprimento n , como faríamos?
somamos ele

Fonte: Participante B4

Como vemos, todos os valores apresentados por ele remetem à soma das medidas (números) dos comprimentos dos lados dos quadrados, cujo entendimento é reforçado pelas explicações apresentadas nas letras (d) e (e), nas quais B4 falou que “é só somar os lados” e “somava ele”, respectivamente. Ele manteve coerência quanto ao cálculo do perímetro em todas as suas respostas, diferentemente de A4 e A9 que, mesmo tendo feito o perímetro em algum momento, em outros calcularam a área corretamente e falaram em “multiplicar os lados”, por exemplo.

Além desse erro de cálculo relacional, verificamos outros que podem ter ocorrido devido a erro no cálculo numérico, como exemplificado abaixo pelo extrato das respostas de um dos participantes:

Figura 182 – Resposta associada a um possível erro de cálculo numérico na atividade 1 da décima sessão

a) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 5 cm?
25 quadradinhos

b) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 10 cm?
100 quadradinhos

c) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir todo o quadrado cujo lado mede 15 cm?
225 quadradinhos

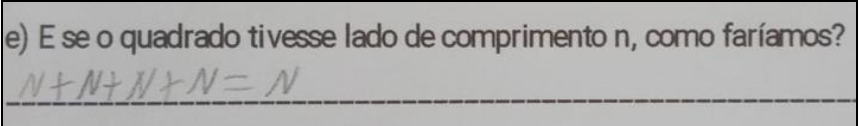
d) Teria alguma maneira de saber quantos quadradinhos são necessários para preencher toda a figura sem precisar contá-los um a um? Se sim, qual?
sim. Calculando a medida de um quadradinho por lado e multiplicando

e) E se o quadrado tivesse lado de comprimento n , como faríamos?
calculando o lado e multiplicando

Fonte: Participante A2

Conforme exemplificado acima, A2 acertou as letras (a) e (b), mas respondeu 235 em vez de 225 quadradinhos na letra (c), possivelmente em decorrência de um erro de cálculo numérico, visto que mesmo tendo apagado, há marcas ao lado dos desenhos que fez na cartolina de que realizou uma soma de várias parcelas de 15, se apoiando em um procedimento aditivo e não multiplicativo. Destacamos ainda a sua fala relativa à maneira de calcular a área de um quadrado de comprimento n : “contando de 1 por 1”. Essa estratégia, além de ser pouco prática, pode ter altas chances de erro na contagem a depender do valor assumido por n . Outro erro de cálculo numérico pode ser interpretado na seguinte operação realizada por A9:

Figura 183 – Possíveis erros nos cálculos relacional e numérico na atividade 1 da décima sessão



e) E se o quadrado tivesse lado de comprimento n , como faríamos?

$$N + N + N + N = N$$

Fonte: Participante A9

O participante A9 apresentou a resposta acima ao dizer como calcularia a área de um quadrado cujo comprimento do lado fosse n . Embora nos casos em que o comprimento do lado era conhecido ele tenha dito que bastava “multiplicar os lados, por fila” para encontrar a área sem precisar contar os quadradinhos um a um, interpretamos a resposta apresentada nesse extrato como um erro de cálculo relacional, pois a soma dos comprimentos dos lados no quadrado corresponde ao seu perímetro, e de cálculo numérico, pois deveria ter obtido $4n$, uma vez que sua soma só seria válida para $n = 0$, o que é impossível se tratando de comprimentos e área de uma figura. Também não descartamos a possibilidade de dificuldades com a linguagem algébrica na operação realizada, pois o estudante “não tem números” para somar. Passemos à análise da atividade 2 dessa sessão, a qual é apresentada a seguir:

Atividade 2: Com base na maneira de calcular a área do quadrado vista na atividade anterior, formem três grupos e sigam as seguintes instruções:

- Grupo 1: desenhar um retângulo cujos comprimentos dos lados são 3 cm e 6 cm;
- Grupo 2: desenhar um retângulo cujos comprimentos dos lados são 6 cm e 12 cm;
- Grupo 3: desenhar um retângulo cujos comprimentos dos lados são 12 cm e 24 cm.

Após desenharem e receberem o mesmo quadradinho em cartolina Guache com comprimento do lado medindo 1 cm que foi utilizado na atividade anterior, respondam:

a) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir totalmente o retângulo do seu grupo? _____

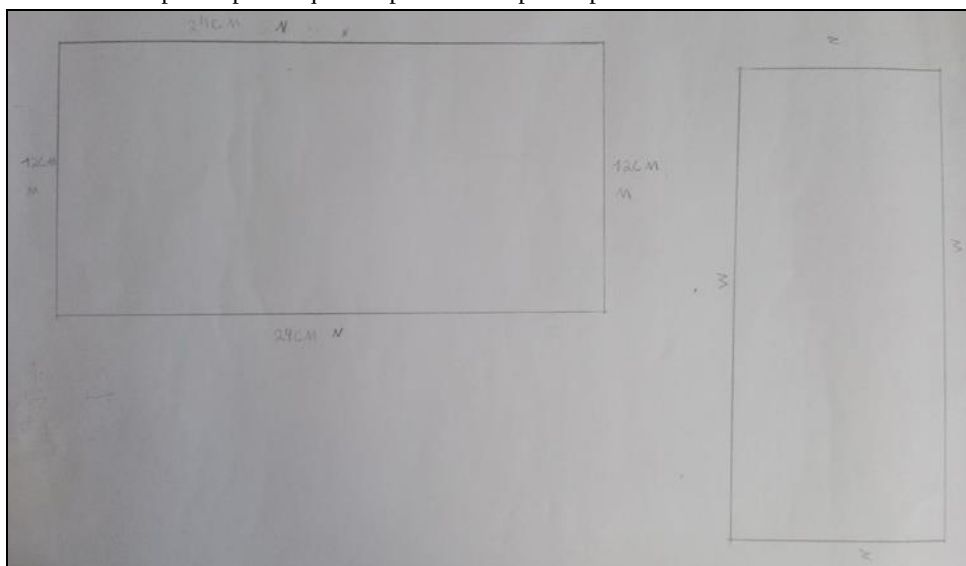
b) Há alguma maneira de saber essa quantidade sem contar os quadradinhos um a um?

c) Desenhe na cartolina um retângulo cujos comprimentos dos lados medem $m \times n$ e digam uma maneira de saber sua área. _____

d) O procedimento descrito na letra (c) serve para o quadrado? Explique. _____

Quanto à construção de retângulos não quadrados pelas duplas, nenhuma representou os ângulos retos na figura, embora a maioria tenha indicado corretamente os comprimentos dos lados. No caso dos desenhos a partir dos comprimentos fornecidos na atividade, prevaleceram os desenhos prototípicos. Já quando foi o caso genérico, assim como para o quadrado de lado n , os participantes apresentaram dúvidas sobre como fazer o retângulo com comprimentos dos lados $m \times n$, aí usamos como exemplo o que já haviam feito nessa mesma atividade, relacionando os comprimentos dados com m e n , respectivamente. Neste caso, o desenho mais utilizado foi o que se aproxima do prototípico. A dupla (A4 e A8) fez os dois prototípicos. Já outra formada por (A2 e A9) utilizou o mesmo desenho tanto no caso em que os comprimentos foram fornecidos quanto para o genérico. A dupla (B4 e B12) fez da seguinte maneira:

Figura 184 – Desenhos prototípico e que se aproxima do prototípico na atividade 2 da décima sessão



Fonte: Participantes (B4 e B12)

Em relação às áreas das figuras desenhadas a partir dos comprimentos fornecidos, os grupos 1, (A4 e A8), e 2, (A2 e A9), responderam corretamente 18 quadradinhos e 72 quadradinhos, nessa ordem. No entanto, o grupo 3, (B4 e B12), não chegou a um consenso e resolveu colocar as duas respostas encontradas por cada um deles: 288 ou 576, sem a

indicação da unidade. Isso se deu porque o participante B4, que confundiu os conceitos de área e perímetro na atividade 1, insistiu na necessidade de ter que realizar alguma soma de comprimentos dos lados antes de multiplicá-los, como podemos ver nos trechos a seguir:

P: Como é, B12?

B12: Será que dá isso tudinho? [Se referindo ao cálculo feito por B4: 48×24].

B4: É.

P: Se tem dúvida, preenche [se referindo a ladrilhar a figura com os quadradinhos].

B4: Ele encontrou...

B12: ...vinte e quatro mais vinte e quatro mais vinte e... bote vinte e quatro doze vezes. Tu bota... tu arrumasse esse quarenta e oito aonde? [Perguntando a B4].

B4: Foi que aqui num deu vinte e quatro?

B12: Foi.

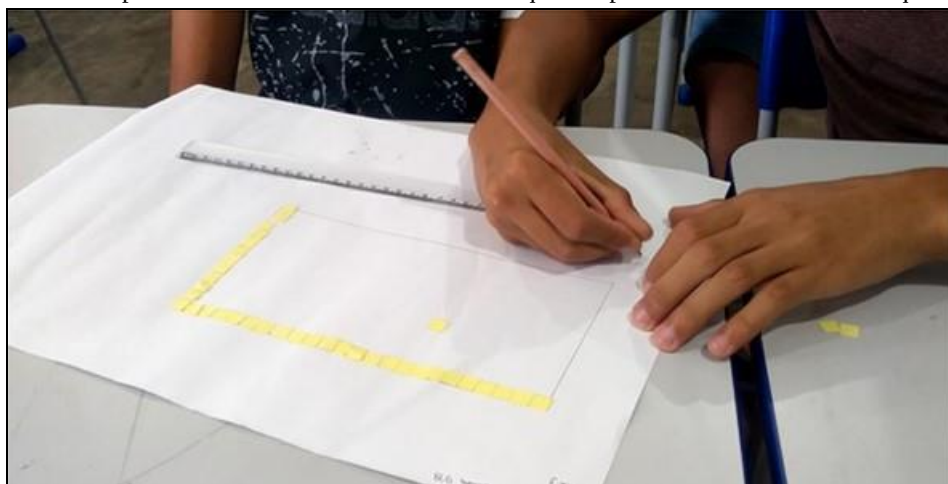
B4: Esse lado aqui vai dar vinte e quatro também que é o mesmo lado. [Apontando para o lado de maior comprimento no retângulo não quadrado]. Aí vai dar quarenta e oito, somando. E esse aqui num deu doze?

B12: Foi.

B4: Aí dá vinte e quatro. Vinte e quatro vezes quarenta e oito. Quarenta e oito vezes vinte e quatro!

A partir do trecho acima, B4 tentou convencer B12 de que deveria somar os comprimentos dos lados opostos antes de multiplicá-los para encontrar a área do retângulo não quadrado de comprimentos 12 cm e 24 cm, exemplificado na imagem seguinte:

Figura 185 – Participante B4 tentando convencer B12 de que seu procedimento é o mais adequado



Fonte: Participantes (B4 e B12)

Como vemos, eles ladrilharam apenas os lados adjacentes do desenho prototípico de um retângulo não quadrado, visto que já haviam percebido a partir da atividade 1 que não precisava ladrilhar toda a figura e contar os quadradinhos um a um. Mesmo diante da insistência de B4, o participante B12 não se convenceu e disse:

B12: Mas pera!! Eu vou fazer o vinte e quatro vezes doze.

P: Aqui, rapaz! Faça na folha [eles costumavam realizar os cálculos na carteira escolar].

B12: É mesmo.

B4: Bota quarenta e oito em cima.

B12: Não! Deixa eu fazer esse meu primeiro. Se der a mesma quantidade, tá certo.

B4: Aí tu vai ter que multiplicar ele duas vezes, pow, no caso.

A9: Professor, posso ir no banheiro?

P: Pode.

B12: Olha! [Mostrando a B4].

B4: Deu diferente do outro. Multiplica de novo!

B12: Não, é vinte e quatro, é, você fez errado. Num era pra ter quarenta e oito aqui não. Aí já não ia ser doze, né danado.

B4: Entendi foi mais nada! Olha, se esse lado aqui mede vinte e quatro...

B12: ... sim...

B4: ... esse lado aqui vai medir também, vai medir vinte e quatro também. Esse lado aqui é vinte e quatro e esse aqui doze.

B12: Sim.

B4: Junta esses dois, vai dar quarenta e oito, né não, professor?

B12: Eu ainda acho que o meu ainda tá certo.

B4: Né não, professor?

P: Como é?

B12: Eu ainda acho que o meu tá certo!

B4: Esse lado aqui deu vinte e quatro, esse aqui deu vinte e quatro.

P: Esse aqui é vinte e quatro?

B4: É, vinte e quatro. Esse lado aqui também vai ser vinte e quatro, também? [Apontando para o lado oposto ao que tem vinte e quatro centímetros].

P: Também é vinte e quatro. Num é um retângulo, esses lados são iguais [apontando para os lados opostos].

B4: Aí somando dá quarenta e oito. E esses dois lados aqui [mostrando os outros dois lados menores]

B12: Sim, aí bota quarenta e oito doze vezes? Quarenta e oito, não; vinte e quatro doze vezes?

B4: Vinte não, quarenta e oito, quarenta e oito vezes vinte e quatro!!

B12: Eu ainda acho que o meu tá certo!!

O participante B12 não aceitou a maneira apresentada por B4 mesmo após ele ter destacado propriedades geométricas do retângulo, como possuir os lados opostos de mesmo comprimento. E B4 continuou insistindo:

B4: Aqui é doze centímetros, meu amigo. Aqui não é um quadrado todo, não! Aqui não é um quadrado, não. É um retângulo. Oxe! Só vai medir esses dois lados olha [apontando para os lados de comprimento doze centímetros].

B12: Oh, danado, mas num é vinte e quatro, é...

B4: ... tu multiplica só duas vezes.

B12: Oh, danado, num é igual a doze dias de vinte e quatro!

B4: E aqui vale doze, aqui então ah.

B12: Deixe, depois você vai me falar [continuou realizando os cálculos].

B4: Oh meu Deus! [Enquanto discutiam, tirávamos a dúvida de outro grupo falando baixinho].

Ao longo da discussão, B4 apesar de parecer convencido do seu procedimento, mudou de ideia e passou a defender a necessidade de somar apenas os lados cujo comprimento era 12 cm. Assim, o cálculo numérico antes realizado por ele, apenas com as medidas, que foi 24×48 passou a ser 24×24 , cuja resposta final foi registrada em sua atividade, apresentada a seguir:

Figura 186 – Respostas e representação simbólica apresentadas na atividade 2 da décima sessão

a) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir totalmente o retângulo do seu grupo?
 288 ou 676

b) Há alguma maneira de saber essa quantidade sem contar os quadradinhos um a um?
 multiplicando

c) Desenhe na cartolina um retângulo cujos comprimentos dos lados medem $m \times n$ e digam uma maneira de saber sua área.
 medindo e multiplicando os lados

d) O procedimento descrito na letra (c) serve para o quadrado? Explique.
 não porque não sabe qual é a medida dos lados

Handwritten calculation on the right:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 480 \\ \hline 576 \end{array}$$

Fonte: Participantes (B4 e B12)

Na resposta da letra (a) parece ser “288 ou 676”, mas é 576, confirmada tanto pelos diálogos acima quanto pelo cálculo numérico na imagem ao lado que, mesmo parcialmente apagado, é possível ver que fizeram 24×24 . Assim, destacamos a importância de não se restringir apenas aos resultados finais dos estudantes durante a análise de suas respostas, mas de observar as demais representações simbólicas feitas por eles, pois constituem elementos importantes para a compreensão dos esquemas evocados e do resultado final obtido. Quanto às demais respostas acima, prevaleceu a compreensão de B12 relacionada à multiplicação e não à soma, como defendido por B4.

Nos outros grupos, (A4 e A8) se apoiaram em uma resposta de cada dada na atividade anterior, uma relativa à possível confusão entre os conceitos de área e perímetro na letra (b), “somando os 4 lados” e outra na letra (c), voltada à necessidade de “fazer uma conta para descobrir o valor de m e n ”. A figura indicada para ser construída por (A4 e A8) possuía o número relacionado ao perímetro (18) igual ao da área (18), visto que seus comprimentos eram 3 cm e 6 cm. Essa prática de pegar respostas individuais de cada um sem discuti-las profundamente se mostrou comum entre alguns deles, porém por vezes foi repreendida por nós ao reforçarmos a necessidade de discutir e tentar chegar a um consenso como foi o caso de (A2 e A9) que apresentaram respostas diferentes das individuais, os quais demonstraram mais coerência e melhor desempenho se considerar o conjunto de respostas apresentados por eles, como mostrado em seguida:

Figura 187 – Resposta apresentada considerando propriedade dos quadrados na atividade 2 da décima sessão

a) Quantos quadradinhos são necessários para recobrir totalmente o retângulo do seu grupo?
 72 quadradinhos

b) Há alguma maneira de saber essa quantidade sem contar os quadradinhos um a um?
 multiplicar os lados, por exemplo

c) Desenhe na cartolina um retângulo cujos comprimentos dos lados medem $m \times n$ e digam uma maneira de saber sua área.
 multiplicando os lados $m \times n$

d) O procedimento descrito na letra (c) serve para o quadrado? Explique.
 Sim, por que os lados são iguais

Fonte: Participantes (A2 e A9)

No caso desses participantes, os comprimentos dos lados do retângulo não quadrado proposto para eles foram 6 cm e 12 cm, cuja resposta correta foi apresentada acima, a qual foi estendida para o caso genérico $m \times n$, em que indicaram a multiplicação entre as variáveis.

Por fim, se o procedimento utilizado para calcular a área de um retângulo não quadrado serviria para o quadrado, todos responderam que sim, mas nenhum deles se apoiou no fato de que todo quadrado é um retângulo (situação de inclusão) e, por esse motivo, a maneira de calcular a área é a mesma para os dois. Vejamos um trecho da discussão entre (B4 e B12) a esse respeito:

B4: Eu digo não, porque o retângulo é totalmente diferente do quadrado. Mas se for fazer pelo mesmo modo, sim. Vai achar, vai encontrar o resultado. Encontrou um lado, vai encontrar os quatro [se referindo ao quadrado]. E o outro, não! [Se referindo ao retângulo]. O outro tem que somar, fazer um lado e...

P: Digam aí [pedindo que escrevessem na atividade].

B4: E aí, B12, o que você acha?

B12: Faça aí, faça aí.

B4: Vá, vá!

B12: Eu concordo com você. Eu ia falar a mesma coisa, sendo que eu não ia me explicar desse jeito. Mas eu ia falar a mesma coisa.

Como B4 faltou a maioria dos encontros das sessões relativas ao campo da Geometria, demonstrou persistência em aceitar a inclusão entre famílias de figuras ao falar que “o retângulo é totalmente diferente do quadrado”, tomando como referência o fato de o retângulo não ter os quatro lados de mesmo comprimento, elemento considerado para exclusão de classes, também observado nos estudos do campo da Geometria, como Fujita (2012) e Tavares (2014). Mesmo assim, (B4 e B12) responderam que o procedimento é válido.

Após todos terminarem as duas atividades previstas para esse encontro, iniciamos o momento de discussão de algumas respostas apresentadas, convidando os participantes para irem ao quadro mostrar como fizeram e, por fim, a sistematização. O participante A8 foi ao

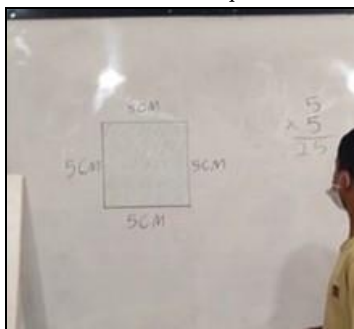
quadro desenhar o quadrado de comprimento do lado igual a cinco centímetros e explicou como fez:

A8: Aí, eu fiz assim a: eu peguei, cinco mais cinco, dez; mais cinco, quinze; mais cinco, vinte. [Confusão entre os conceitos de área e perímetro].
 B12: Eu já fiz ao, eu já fiz de outro jeito.
 A8: Eu fiz assim.
 B12: Eu já multipliquei.
 B4: Pra tu, pra tu saber o resultado?
 A9: Eu fiz completamente diferente.
 B12: Eu multipliquei.
 B4: Pra tu fazer o resultado?
 P: Certo, você pegou os quadradinhos, num foi?
 B4: Aqui fora é um centi, é um...
 P: Fez o quê? Saiu preenchendo assim [ladrilhando a figura desenhada com os quadradinhos recortados].
 B12: Oh, A8?
 A8: Oi.
 B12: Se todos os lados, é, tem cinco centímetros aí no quadro.
 A8: Então!
 B12: Mas você fez os lados [se referindo ao perímetro]. E dentro? [Se referindo à área].
 A8: Hum.

Ao percebemos que ele estava cometendo um erro de cálculo relacional e não estava compreendendo a ideia de B12, pedimos que tentasse pintá-los, depois contasse um a um, obtendo 25 quadradinhos. Em seguida, questionamos:

P: E aí, é vinte ou vinte e cinco?
 A8: Vinte e cinco!
 P: Por que não é vinte?
 A8: Por que tem outra maneira de fazer também, assim oh: cinco vezes cinco...
 B12: Vinte e cinco.
 A8: Dá vinte e cinco [realizando a operação no quadro].
 B12: Era isso que eu tava falando!
 P: E por que não é vinte?
 A8: Por que não é vinte? Deixa eu ver, viu [ficou pensando]. Eu falei que foi vinte, foi.
 B12: Mas porque você somou os lados.
 A8: Foi, eu somei os lados.
 B4: Eu fiz a mesma coisa, eu somei os lados.
 P: Você fez igual também?
 B4: Foi, eu somei os lados.

Figura 188 – Participante A8 explicando como fez no quadro no momento de sistematização



Fonte: Dados da pesquisa

Para reforçar o entendimento, explicitamos as ideias envolvidas nos diálogos traçados acima:

P: Assim, A9, é para saber quantos quadradinhos são necessários para recobrir totalmente essa figura. Recobrir ela totalmente, tá? Da maneira que B4 falou, ele pegou apenas o contorno.

A9: Sim, rapaz, entendi!

P: Ele pegou apenas o contorno aqui oh: cinco, dez, quinze...

A8: Vinte.

P: Vinte. Ele pegou apenas o comprimento do contorno, tá? Aqui ele tá pegando o perímetro. É uma coisa que é diferente de área. É o comprimento total desse contorno aqui oh: cinco centímetros, dez centímetros, quinze centímetros, vinte centímetros [somando os comprimentos dos lados do quadrado de lado cinco centímetros]. Quando é pra recobrir totalmente a figura, a gente tá vendo o tanto de espaço que eu vou precisar pra recobrir aqui, o tanto de quadradinhos. São quantos? Esses vinte aqui [os vinte relativos ao perímetro] mais a parte que tá dentro, tá?

A9: Entendi!

P: Entendeu? Esses aqui mais esses outros que estão aqui oh [apontando para os quadradinhos do centro da figura não pintados]. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete e aí, como a gente viu, os vinte e cinco. Ok, B4? Tá? [Balançou a cabeça que havia entendido].

Nos cálculos realizados no quadro, A8 operou apenas com os números sem as unidades de medida. Sobre esse aspecto, desenvolvemos o seguinte debate:

P: Outra coisa, né, vejam só: aqui são cinco centímetros [apontando para o comprimento do lado do quadrado].

B12: É isso mesmo.

P: Num é?

A8: Hunrum.

P: Aqui ele fez apenas cinco vezes cinco, tá [apontando para a operação feita por A8].

A8: Isso.

P: Mas são cinco o quê? [A8 e outros responderam: cinco centímetros]. Cinco centímetros! Então, centímetro, centímetro [se referindo à unidade de medida a ser colocada ao lado do cinco]. E aqui daria o que o resultado?

A8: Aí daria...

B12: Vinte e cinco centímetros!

P: O quê? [Esperando que respondessem ao quadrado].

A8: Daria vinte e cinco centímetros.

B12: É?

P: É?

B4: É, eu acho.

B12: Né centímetro, não!

A9: E é o quê?

A8: É 25 centímetros.

B4: É vinte e cinco, é. Agora o quê?

B12: É o, esse né centímetro, não! Centímetro é fora, né A8?

A8: É 25 centímetros.

B12: E dentro?

B4: Ele contou dentro!

A8: Então, eu num botei dentro.

Neste recorte, percebemos uma confusão entre área e perímetro manifestada pelo participante A8 do ponto de vista dimensional. Apesar de serem estudantes do 9º ano, apenas B12 pareceu entender que a unidade centímetro estava ligada ao comprimento, mas “dentro”, como ele falou, seria de outra maneira. Isso justifica a não utilização das unidades de medida

nos cálculos realizados por eles ao longo das atividades desse encontro. Diferentemente dos participantes de Domingos (2013) que não as utilizavam porque elas não eram fornecidas em algumas atividades, como vimos no recorte apresentado em nossas análises prévias, nós as fornecemos. Na pesquisa de Reis (2017), os cálculos das áreas eram realizados sem o uso das unidades de medida e, mesmo assim, ele considerou aproveitamento de 100%, justificando que as unidades de medida não foram objetos de seu estudo, valorizando apenas o aspecto numérico. Como durante as observações de aulas, a professora estava trabalhando o conteúdo potenciação nas turmas, resolvemos tentar resgatar conhecimentos anteriores e esquemas já construídos por eles relativos às propriedades das potências para chegar à unidade de medida de área, conforme segue abaixo:

P: Por exemplo, quando você tinha assim, é: x vezes x .
 B12: Hum.
 P: Você tinha o que aqui como resultado?
 B4: x .
 A9: x .
 P: Só x ? Aqui eu tenho o expoente 1.
 B4: É um mais um.
 P: Daria o quê?
 B4: Um.
 A8: Um mais um, dois.
 P: x ao quadrado, né?
 A8: Isso!
 P: Se você tem a vezes a , que resultado você obtém?
 A8: a .
 P: a ao quê?
 A8: a ao quadrado.
 P: Lembram, não? Propriedades das potências: eu repito a base e somo os expoentes. Tá?
 A8: Hunrum.

Em seguida, exemplificamos com um quadradinho cujo comprimento do lado é um centímetro, bastante utilizado em livros didáticos:

P: [...] quando você faz um centímetro vezes um centímetro [exemplificando com um quadrado de lado um centímetro], o que é que você tem: um vezes um...
 A8: Um.
 P: Um. E tem aqui centímetro vezes [alguns responderam juntos: centímetro] centímetro, isso vai dar o quê?
 A8: Fica centímetro ao quadrado.
 P: Centímetro ao [responderam: quadrado] quadrado, tá? Então, o que eu tenho aqui é um centímetro quadrado [apontando para o quadradinho de lado um centímetro].

Ao longo dos diálogos traçados foi possível perceber que antes das atividades propostas, os participantes não mostraram conhecer a unidade de área centímetro quadrado e mesmo a professora da turma tendo trabalhado potenciação em sala, observamos que os conhecimentos sobre esse conteúdo também eram instáveis. Após a discussão anterior, concluíram que seria 25 centímetros quadrados, o mesmo quando o comprimento do lado foi 10 centímetros, que deu 100 centímetros quadrados etc. Como reforço, usamos letras

genéricas para exemplificar a área do quadrado, como a, b, c, L e n, como foi solicitado na questão, tomando como referência as áreas calculadas no início da atividade. Nesse momento, B12 foi além da tarefa principal da situação de medição, que é medir áreas, e questionou a respeito da tarefa de determinar outras grandezas a partir da área, também observada na análise da coleção de LD adotada na escola campo de pesquisa:

B12: Ei, A8, o problema é se pedir o valor de L!

P: Vamos lá, tá, tudo bem. Então, existe um quadrado em que, cuja área é, é igual a, deixa eu ver aqui um valor, 121 centímetros quadrados, tá. Isso aqui é a área dele, tá? A área desse quadrado é 121 centímetros quadrados. Qual é o valor de L? Qual o valor do lado dele? Aí você pensa: que número vezes ele mesmo vai me dar 121?

B4: Onze.

P: Onze. Então, esse quadrado, tá, possui lado onze centímetros.

B12: A raiz quadrada.

B4: Aí se não soubesse, ia fazer como?

P: Ok?

B4: Se não soubesse, ia dividir por dois, num era?

P: Não! Calculava a raiz quadrada de 121. Por exemplo, quando foi 225, qual é a raiz quadrada de 225? Deu quanto lá?

B12: Quinze.

P: Quinze. Quando foi 100, qual é a raiz quadrada de 100?

B12: Dez.

P: Dez. Entendeu? [Balançou a cabeça que sim].

[...]

P: Então, quando eu perguntei lá pra vocês um quadrado de lado n, como eu faria pra calcular a área dele, você deveria ter dito que faria n vezes n ou n ao [a maioria respondeu: quadrado] quadrado, independentemente de qual valor seja esse n.

A partir do questionamento de B12, percebemos que B4 ao dizer que bastava dividir por dois ao invés de calcular a raiz quadrada estava se apoiando no seguinte teorema em ação falso, frequente na educação básica: se a^2 é um quadrado perfeito, então $a^2 \div 2 = a$. Na verdade, este teorema em ação só é válido quando $a = 0$ ou $a = 2$, entretanto, o primeiro caso não pode ser utilizado ao tratarmos da área de uma figura.

Na discussão da atividade 2, utilizamos o primeiro retângulo, cujos comprimentos dos lados eram três centímetros e seis centímetros para discutir a maneira como B4 estava fazendo (somando os comprimentos dos lados opostos e multiplicando). Vejamos o trecho referente à discussão:

P: Aí naquele seu caso, é...

B12: B4.

P: B4, você tava fazendo assim oh, tava fazendo seis mais seis doze. Tava fazendo doze...

B4: Hunrum.

P: vezes; três mais três, seis; seis centímetros. Tava obtendo um valor maior do que a quantidade de quadrados que deveria ser.

B12: Eu num te disse!!! [Riu].

B4: Num era assim, não?

P: Vamos lá!

B4: Então, entendi, entendi, mas eu pensei que era assim.

P: Aqui dá quanto esse valor aqui: doze vezes seis?

B12: A9?
 P: 72, né?
 B12: É, 72.
 P: Centímetro vezes centímetro?
 B12: Centímetro ao quadrado.
 P: Vamos ver se aqui tem 72 quadradinhos? [Se referindo ao retângulo não quadrado cujos lados medem três centímetros e seis centímetros].
 B12: Tem não!
 P: A gente já viu que tem quantos?
 B12: Dezoito!
 P: Dezoito, tá?
 B4: Hum.
 B12: Entendeu? Você tava fazendo a conta deu mil e tarará.
 A8: Tá cá poxa!!
 A9: Foi não!?
 B12: Aí depois fez de novo deu quinhentos e pouco.
 A9: Deu a peste!
 P: Ok?
 B12: A minha deu 288 [se referindo ao cálculo de área do retângulo não quadrado cujos comprimentos dos lados eram 12 cm e 24 cm].

Para finalizar, discutimos como calcular a área de um retângulo não quadrado cujos comprimentos dos lados eram m e n :

P: Como é que eu faço pra saber a área desse retângulo aqui? [Se referindo ao retângulo cujos comprimentos dos lados são m e n].
 B4: Eu sei m mais n . É, quatro vezes m !
 B12: Ham???
 B4: Quatro vezes m ; n quer dizer.
 P: Observe quando eu tinha oh...
 B4: Oxente, mas já? [Se referindo ao toque para o intervalo do colégio].
 P: Quando eu tinha assim, digamos que tenha um centímetro e aqui são dois centímetros. Quantos quadradinhos precisava para preencher aqui?
 B12: Dois.
 P: Por quê? É um centímetro vezes...
 B12: Dois centímetros.
 P: Dois centímetros. Que me dá: um vezes dois, dois; centímetro vezes centímetro, centímetro ao...
 B12: Quadrado.
 P: Tá? Quando eu tenho assim, o que foi que eu fiz aqui: eu multipliquei esse por esse [apontando para o comprimento dos lados do retângulo não quadrado desenhado no quadro]. E aqui o que eu faço? [apontando para o retângulo não quadrado $m \times n$].
 B12: Vai multiplicar m ...
 P: ... m vezes [a maioria respondeu: n] n , tá?
 B12: Aí dá...
 P: Não dá.
 B12: É.
 P: Fica assim.
 B12: É.
 P: Aí quando eu souber qual é o valor de m e n , eu vou obter um resultado. Basta fazer m vezes n .

Apesar de o participante B4 ter falado que entendeu anteriormente, ainda há indícios da confusão entre os conceitos de área e perímetro na sua fala inicial. A sua compreensão plena pode ocorrer ao longo da vida escolar, conforme prevê a TCC ao considerar não apenas uma variedade de situações a ser vivenciada pelo sujeito, mas também a ideia de história, pois

o domínio progressivo de determinado conceito pode ocorrer somente em longo prazo. Destacamos ainda a necessidade por parte dos estudantes de obter um resultado final, possivelmente ligada a cláusulas do contrato didático, como vimos na fala acima de B12 “aí dá...”, na sua atividade ao falar medir e depois multiplicar e também observada nas respostas de outros estudantes, como A4 disse que deveria fazer alguma conta para obter os valores de m e n . Encerramos retomando a maneira como a maioria dos livros didáticos aborda a área de um retângulo não quadrado:

P: Você abre o livro e tem assim, oh: retângulo em que a base é b e a altura é h .

B4: Hunrum.

P: Aí diz: a área do retângulo é base vezes altura. O que ele tá dizendo? Que você pra saber essa quantidade de quadradinhos aqui, você faz esse valor aqui vezes esse aqui [apontando para os comprimentos dos lados de um retângulo não quadrado].

De modo geral, com a análise dessa sessão, reafirmamos os achados de pesquisas anteriores como Baltar (1996), Domingos (2013), Douady e Perrin-Glorian (1989), Ferreira (2010), Jesus (2011), Santos (2010), Souza (2013), Teles (2007), entre outros, relativos à confusão entre os conceitos de área e perímetro (erro de cálculo relacional). Observamos ainda a preferência por desenhos prototípicos, possibilidades de erros de cálculo numérico e a realização de operações sem manipular as unidades de medida, como em Domingos (2013) e Reis (2017), ligada à álgebra das grandezas. Tais dificuldades e erros foram discutidos e tratados em sua maioria no desenvolvimento das atividades e, principalmente, durante a discussão e sistematização ao final do encontro. Passemos à próxima sessão.

5.11 ANÁLISE DA DÉCIMA PRIMEIRA SESSÃO

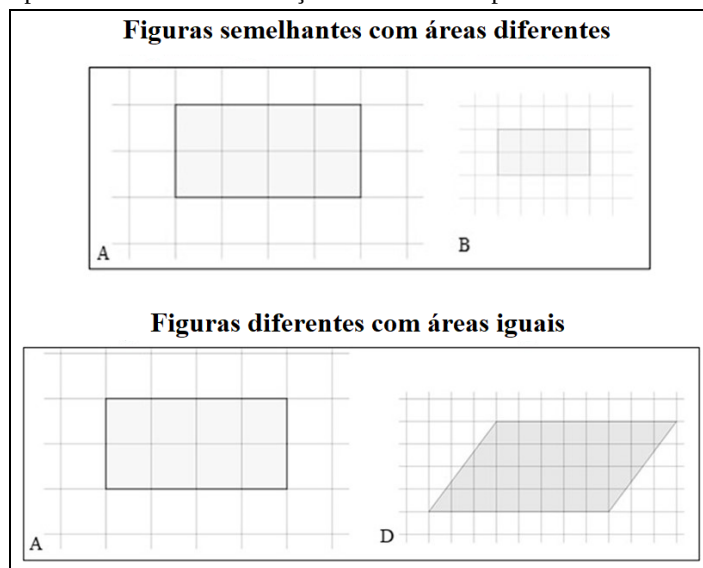
A décima primeira sessão foi realizada em 01 de setembro de 2022 e contou com a participação de cinco (A7, A8, A9, A10 e B12) dos nove estudantes. Exploramos a atribuição de sentido às expressões de área no caso dos paralelogramos não retângulos e não losangos, utilizando procedimentos geométricos em situações de medição, como a decomposição e recomposição. A atividade 1 foi realizada individualmente e a segunda, em grupos, com o auxílio de régua não graduada e papel transparente.

Iniciamos com uma apresentação em *slides* abordando elementos importantes relativos ao conceito de área abordados nos últimos encontros, como o fato de figuras de mesma forma poderem ter áreas distintas e figuras de formas diferentes poderem ter áreas iguais. Também retomamos as relações entre as peças do Tangram, a mudança dos números ao mudarmos as unidades sem alterações sobre área, e o cálculo da área de retângulos pelo uso da expressão de

área, bem como a decomposição e recomposição clássica do paralelogramo não retângulo e não losango em um retângulo não quadrado.

Em relação ao fato de retângulos não quadrados semelhantes poderem ter áreas distintas e figuras com formas diferentes poderem ter áreas iguais (equivalentes), assim como a necessidade de compará-las apenas quando estiverem na mesma unidade, não considerando apenas o número, apresentamos os seguintes recortes da atividade 3 da oitava sessão:

Figura 189 – Exemplos relacionados à distinção entre área e superfície e entre área e número



Fonte: Acervo da pesquisa

Assim, na comparação (A e B) temos retângulos não quadrados semelhantes, com o mesmo número de quadradinhos (8), mas como as malhas são diferentes, suas áreas são distintas. Já na comparação (A e D) há um retângulo não quadrado e um paralelogramo não retângulo e não losango que possuem áreas iguais, mas estão desenhados em malhas diferentes. Considerando a relação existente entre os quadradinhos das malhas - quatro unidades da malha menor correspondem a uma unidade da malha maior - as medidas das áreas são diferentes - a medida da área de (A), na malha maior é 8 e a medida da área de (D), na malha menor é 32. Quanto ao procedimento geométrico utilizado para realizar essa última comparação, apresentamos um trecho da discussão entre eles:

P: E nessa aqui como é que eu faria sem precisar contar um a um? [Apontando para o paralelogramo não retângulo e não losango (D) da atividade 3 da oitava sessão].

A8: Mesma coisa.

A10: Mesma coisa.

P: Como?

A10: Mas só que o problema, professor, é que tem uns quadrados, ali uns retângulos desse lado aqui que tá meio cortado ao meio.

P: E aí, como é que eu faria aí?

B12: A gente fez na outra aula, danado [olhando para A8], que a gente cortou o bagulho ali.

P: Como, B12?

A8: Vai lá, B12! Vai meu irmão [pedindo para ele ir mostrar no quadro].

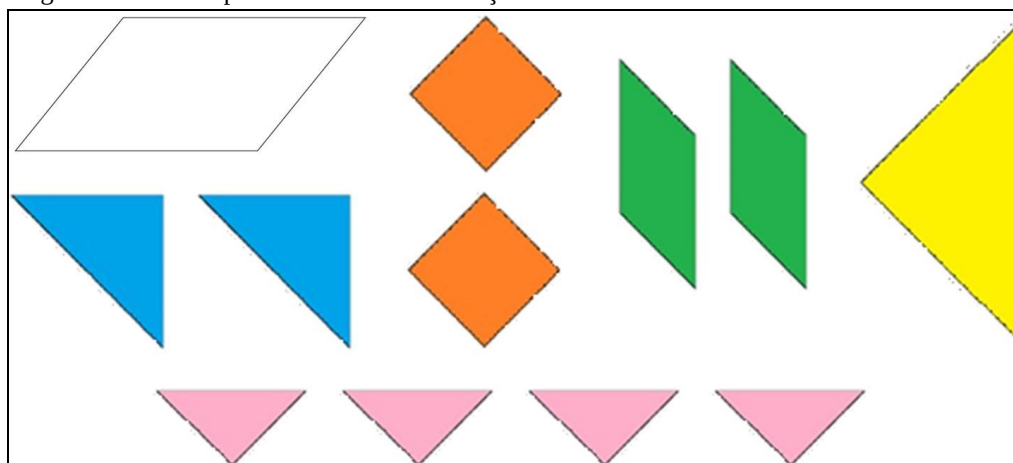
B12: Não, precisa não!
 A8: Você tem que ir!
 P: Como foi que você fez?
 B12: Que a gente fez na aula passada que cortou ali um pedaço e riscou [decomposição].
 P: Sim.
 B12: Aí pegou o pedaço que tava ali e botou aqui [recomposição].
 P: Pronto.
 B12: Aí completou o retângulo [depois de muita insistência de A8, ele foi e mostrou no quadro].

Considerando a forma predicativa do conhecimento, o participante B12 descreveu o procedimento utilizado e, em seguida, foi ao quadro fazer (forma operatória do conhecimento), mas não soube o nome do que estava fazendo. Desse modo, resolvemos apresentar a nomenclatura do procedimento geométrico utilizado:

P: Esse procedimento que B12 fez, disse você corta aqui e completa aqui, chama-se decomposição e recomposição. Ele decompôs a figura, tirou uma parte dela, e compôs novamente. Decompor e recompor aqui, tá? Transformou esse paralelogramo que não era retângulo em um...
 A10: ... retângulo...
 P: ... retângulo. Ok? Isso é importante pra gente saber, tá!?

Quanto à retomada das relações entre as peças do Tangram, apresentamos o seguinte recorte da atividade 2 da nona sessão, na qual deveriam ladrilhar o paralelogramo não retângulo e não losango dado a partir das peças do Tangram:

Figura 190 – Exemplo relacionado à mudança dos números de acordo com a unidade adotada



Fonte: Acervo da pesquisa

Quanto à impossibilidade de ladrilhamento efetivo em alguns casos, apenas a peça que representa o triângulo grande gerou dificuldades para eles, diferentemente da pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989) em que os estudantes resistiam em ladrilhar uma figura utilizando uma superfície unitária de outro formato. Sobre a discussão relativa ao exemplo acima, apresentamos o seguinte trecho:

P: E com o triângulo grande? Aí até não sei se foi A7 ou foi alguém que pegou e colocou o triângulo grande aqui em cima e disse não, não vai ter como fazer com

esse triângulo grande, né [A7 ficou balançando a cabeça confirmando que realmente havia sido ela]. Eu disse tem alguma relação entre o triângulo grande e os outros do, do Tangram? Aí a gente viu que dava um triângulo grande, por quê? Dois triângulos médios valem um triângulo grande; como o triângulo médio é o mesmo [se referindo à área] que o quadrado e o paralelogramo, então dois quadrados ou dois paralelogramos valem o triângulo grande. Como dois triângulos pequenos valem um triângulo médio, significa que quatro triângulos pequenos valem dois triângulos médios; dois triângulos médios valem um triângulo grande, logo quatro triângulos pequenos valem um triângulo grande. Tá rápido ou vocês tão conseguindo acompanhar?

A9: Eu tô conseguindo.

A10: Tô conseguindo.

P: Tá conseguindo? Tá? [Balançaram a cabeça que sim].

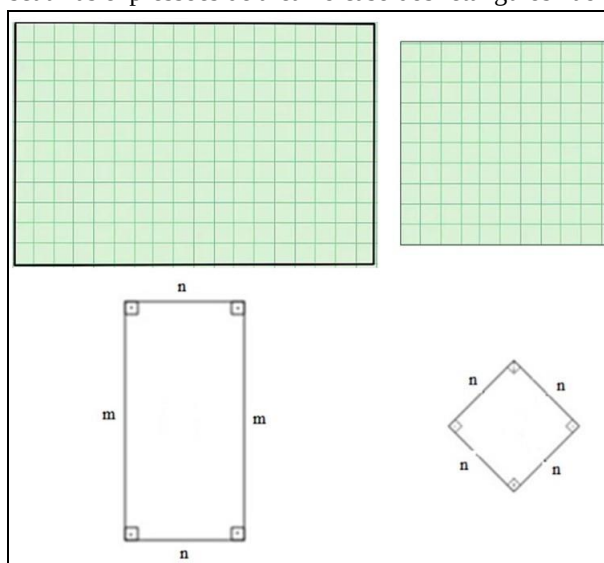
Além da relação de equivalência apresentada acima por meio de aspectos que se aproximam da situação de conversão de unidades, destacamos a mudança dos números a partir das unidades adotadas, mas que não provocaram alterações na área da figura dada:

P: Então, era essa relação que eu queria que vocês observassem quando coloquei essa atividade aí. Aí eu pergunto pra vocês: após fazer, é, as medições utilizando as diferentes peças do Tangram, tá lá na atividade, mudou a área dessa figura [apontando para a figura dada] em alguma coisa? [A maioria respondeu que não ou balançaram a cabeça que não]. Não! A área da figura continuou a mesma, num é? O número é que muda a depender da unidade. Se é triângulo médio, meu número é dois. O mesmo para o quadrado e para o paralelogramo. Se é triângulo pequeno, quatro; quatro triângulos pequenos. O número é quatro! Se é triângulo grande, é um. Mas não muda nada porque há uma relação que torna essas figuras equivalentes, tá, ou seja, eu poderia recortar esse triângulo aqui [apontando para o triângulo grande] de uma maneira que preenchesse totalmente esse paralelogramo aqui [apontando para a figura dada na atividade]. Certo?

A9: Certo!

Ao final do momento de sistematização, retomamos as expressões de área dos retângulos trabalhadas na sessão anterior a partir das figuras a seguir:

Figura 191 – Exemplos para discutir as expressões de área no caso dos retângulos não quadrados e quadrados



Fonte: Acervo da pesquisa

Após destacar que não é preciso contar os quadradinhos um a um para saber o total deles, como visto na décima sessão, mas multiplicar os comprimentos dos lados, seja $m \times n$ para o retângulo não quadrado, e $n \times n$ ou n^2 , no caso do quadrado, que podem ser encontrados em livros didáticos como $b \times h$ e $L \times L$ ou L^2 , respectivamente, questionamos:

P: Por que a relação que vale para o retângulo também vale para o quadrado?

A7: Por que...

A9: ...porque é a mesma coisa.

A7: ... porque os dois são retângulos.

P: Os dois são retângulos, né. Todo quadrado também é um retângulo, tá.

A9: É a mesma coisa.

P: Por isso que a relação que vale para um vale para o outro. Ok? [A maioria respondeu hunrum].

Como observado na fala da participante A7, a inclusão de classes, situação do campo da Geometria, aparece como uma tarefa elementar para fundamentar o conhecimento sobre as maneiras de calcular as áreas nesses paralelogramos específicos, no campo das Grandezas e Medidas, reforçando também as imbricações entre eles.

Sobre a ideia de base, percebemos que eles a associavam ao chão, como verificado por Baltar (1996) e Rosa dos Santos (2005), conforme trecho a seguir:

P: Por exemplo, tenho um retângulo assim [fazendo o desenho prototípico de um retângulo no quadro], aí livro diz pra vocês o seguinte oh: isso aqui é a base [lado de maior comprimento na posição horizontal] e isso aqui é a altura [lado de menor comprimento na posição vertical]. A área dele vai ser base vezes [alguns responderam juntos: altura] altura. Nada mais você fez que contar quantos tinham aqui [apontando para o lado de maior comprimento], colocou aqui; contar quantos tinham aqui [apontando para o lado de menor comprimento], colocou aqui e multiplicou, tá? Mas a gente pode pegar o mesmo retângulo e fazer assim [fazendo o desenho de um retângulo não quadrado que se aproxima do prototípico]. Quem é base e quem é altura aí agora?

A10: A base é o de baixo [se referindo ao lado de menor comprimento na posição horizontal] e a altura é o de lado [se referindo ao lado de maior comprimento na posição vertical].

P: Por que a base é o de baixo?

A10: Por que [falou algo que não entendemos].

P: Ham?

A10: É a sustentação dele, é tipo a base assim [apontando para o tampo da mesinha da sua carteira].

Embora não sendo o lado de maior comprimento, o participante A10 ainda associou a base àquele que “é o de baixo”, “é a sustentação”. Como estamos falando de retângulos, os segmentos adjacentes já são perpendiculares entre si e não há diferença no resultado final relativa a quem é tomado como base e ou como altura, pois fazemos o produto dos comprimentos dos lados e esse produto é comutativo, como destacado no diálogo com ele:

P: Certo, mas no, no seu resultado se você coloca b aqui e h aqui, no seu resultado não vai interferir muito, né? Não vai interferir nada, na verdade! Por que eu digo assim oh: b vezes h num é a mesma coisa que h vezes b ?

A10: É a mesma coisa.

P: Num é? Por exemplo, duas vezes três num é a mesma coisa que três vezes dois? Num é?

A10: É.

P: Então, a gente costuma associar que a base é essa ideia de baixo assim, do que tá embaixo, mas, na verdade ela pode ser, né, qualquer um desses aqui [apontando para os lados do retângulo não quadrado desenhado no quadro].

Como os retângulos possuem quatro ângulos retos, pode ser realizado o procedimento descrito acima, entretanto, no caso do paralelogramo não retângulo e não losango, alertamos para a identificação de uma altura relativa a um lado tomado como base, conforme trecho seguinte no qual foi usado o paralelogramo não retângulo e não losango que ladrilhamos com as peças do Tangram, mostrado anteriormente:

P: Pronto, nesse aqui quem é base e quem é altura aí? [Apontando para o paralelogramo não retângulo e não losango dado na atividade 2 da nona sessão].

A10: O de baixo. [Se referindo ao lado de maior comprimento na posição horizontal].

P: O de baixo é o quê?

A10: A base.

P: A base, tá. Qual é a altura aí?

A7: Esse do lado [fez o gesto com mão de inclinado se referindo ao lado de menor comprimento].

A10: Esse assim [fez o mesmo gesto que A7].

P: Esse aqui?

A10: É.

P: A7, esse? Esse ou esse? [Apontando para os lados paralelos de menor comprimento à direita e à esquerda].

A7: Qualquer um.

P: Qualquer um? Atenção! A altura de uma figura vai ser um segmento perpendicular, ou seja, vai formar noventa graus. Por quê? Vem aqui B12, por favor. Se eu for medir a altura de B12, eu não vou medir a altura de B12 com B12 assim de lado não [inclinando o corpo de B12 para a esquerda]. Dá a altura certa de B12? [Responderam: não!]. Não. B12 tem que tá...

A10: ... reto...

P: ... perpendicular, tem que tá reto. Tem que fazer noventa graus com o chão, tá? Aí aqui sim eu estou medindo a altura real de B12, tá? Eu não posso medir B12 com o corpo inclinado.

O diálogo estabelecido neste recorte, apoiado em elementos do campo da Geometria abordados em sessões anteriores, como ângulo reto e retas perpendiculares, remete à tentativa de trabalhar de maneira intuitiva a invalidação do teorema em ação falso segundo o qual a área do paralelogramo pode ser obtida multiplicando os comprimentos de lados adjacentes, observado em pesquisas anteriores como Baltar (1996) e Douady e Perrin-Glorian (1989). Após enfatizar que a altura deve ser um segmento perpendicular ao lado tomado como base e exemplificar a necessidade de estar “reto” ao falar na altura do participante B12, voltamos à figura dada:

P: [...] vejam só, quando eu escolho uma base, né, eu tenho que pegar um segmento que fique perpendicular a essa base, que forme noventa graus com ela, tá certo.

B12: Então, esse daí nem é base nem altura [se referindo ao lado de menor comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango].

P: Por exemplo oh, se eu pegar, esse aqui é minha base, né? Eu tenho que pegar um segmento que, não posso pegar algo assim [apontando para o lado inclinado], eu tenho que pegar um segmento que faça noventa graus com essa base. Aí sim, seria a minha altura, tá? No caso desse paralelogramo aí, a altura dele seria isso aqui oh, certo. Por quê? Aqui formou noventa graus. Se você pega a quina do papel e coloca aqui, vai ver que formou um ângulo de noventa graus. Então, a minha altura é essa aqui oh [apontando para a altura interna ao paralelogramo não retângulo e não losango que traçamos com auxílio de uma régua não graduada].

A10: Hum.

P: Poderia também pegar a altura externa, certo. Eu poderia prolongar aqui [se referindo ao lado de maior comprimento], tá, e pegar essa parte aqui oh.

A10: Eu ia dizer isso!

Mostramos ainda que o procedimento geométrico de decomposição do paralelogramo não retângulo e não losango e recomposição em um retângulo não quadrado, como exemplificado por B12 acima, faria coincidir o lado tomado por base e a altura relativa a ela com os lados desse retângulo, após recompor a figura, conforme segue abaixo:

P: B12 fez assim oh: você tira esse lado, decompõe esse lado [me referindo à parte da figura que contém esse lado] e recompõe ele aqui, né isso?

B12: Hunrum.

A10: Isso.

P: Aí no caso aqui agora você formou um retângulo. Se você fosse fazer base vezes altura, como é que você faria? Base, a sua altura seria esse pedaço aqui agora, né?

A10: Hunrum.

P: Tá? Aí ficaria assim oh: base vezes altura. Por isso que a altura, né, é esse segmento aqui [apontando para o lado de retângulo não quadrado formado] ou esse segmento aqui, tá? [Apontando para a altura interna traçada que coincide com o lado do retângulo não quadrado recomposto]. São os mesmos, observe que são mesmo comprimento. Conseguiram entender isso aí? [Balançaram a cabeça que sim]. Tá? Esse procedimento tirar daqui pra cá e colocar aqui, decompor e recompor. No retângulo eu faço diretamente qualquer uma das dimensões porque já é perpendicular, são quatro ângulos retos, tá? O quadrado a mesma coisa. Certo? Não tem lado inclinado. Todos eles são perpendiculares, formam quatro ângulos retos, tá. Então, eu posso fazer esse daqui, né, vezes esse, ou posso fazer esse vezes esse [se referindo ao produto dos comprimentos dos lados em retângulos]. Enfim, se eu giro, vai dar a mesma altura novamente. No caso aqui, não [apontando para o paralelogramo não retângulo e não losango], tá com o segmento inclinado. Eu não posso calcular a altura de algo assim [fazendo o gesto de inclinado com o braço].

A discussão anterior se fez necessária a partir do momento em que começaram a associar a base ao lado horizontal e a altura ao lado inclinado do paralelogramo não retângulo e não losango. Assim, visamos evitar que os participantes ao realizar as atividades posteriores se apoiassem no teorema em ação falso de que a área de um paralelogramo é o produto dos comprimentos dos lados, conforme verificado por Baltar (1996) e Douady e Perrin-Glorian (1989). No entanto, esse trabalho poderia ter sido prolongado com a exploração de outras atividades, o que não foi possível devido à limitação de intervalo de tempo de que dispúnhamos naquele momento.

Passemos, agora, à análise dos resultados das duas atividades realizadas nesse encontro. A primeira foi feita individualmente e é apresentada a seguir:

Atividade 1: Como você faria para calcular a área do paralelogramo a seguir?

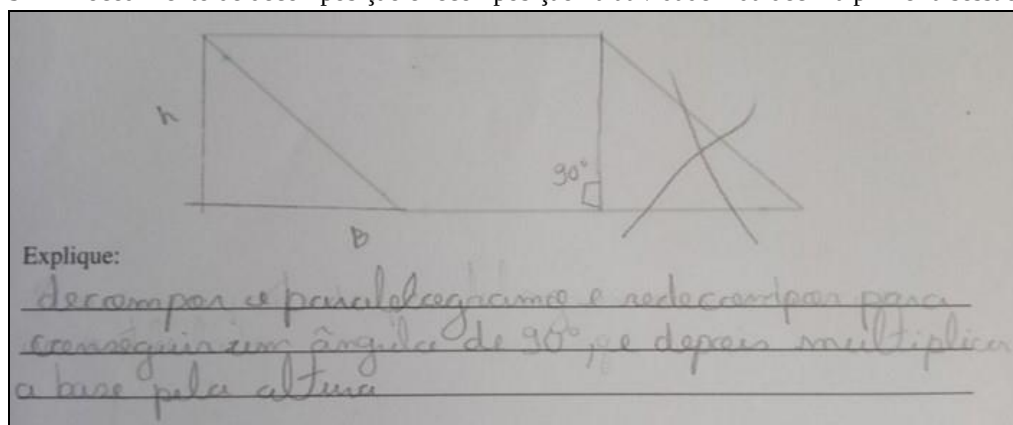
Sugestão: Tente se apoiar no que você já sabe sobre as expressões de área estudadas na sessão anterior.



Explique: _____

Os estudantes terminaram rapidamente esta atividade. Apenas o participante A9 falou que não entendeu a princípio, mas depois disse que havia compreendido. Em relação aos procedimentos utilizados, quatro dos cinco participantes presentes fizeram a decomposição do paralelogramo não retângulo e não losango e recomposição em um retângulo não quadrado. Justamente o participante A9 foi quem não registrou nenhum procedimento em sua folha de resposta. Os participantes A7 e A10 indicaram na figura uma base e a altura relativa a ela, a primeira sendo lado de maior comprimento na posição horizontal e a segunda o lado vertical do retângulo recomposto.

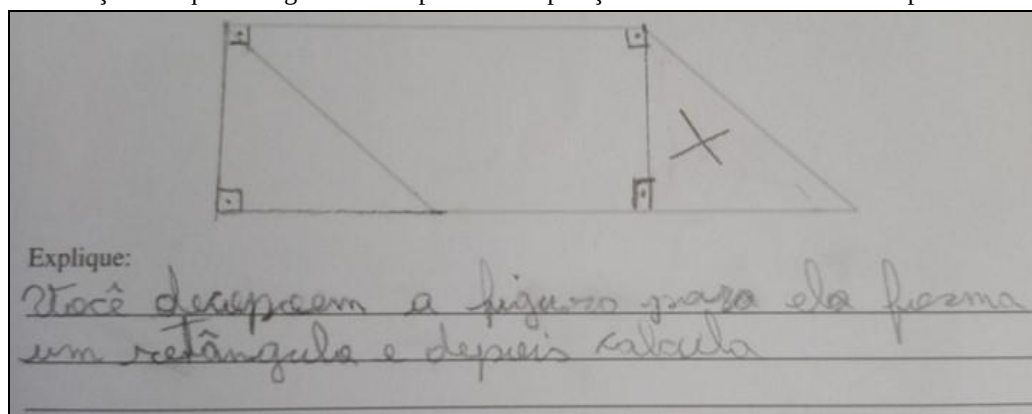
Figura 192 – Procedimento de decomposição e recomposição na atividade 1 da décima primeira sessão



Fonte: Participante A7

O participante A8 fez quadradinhos na figura como se estivesse na malha quadriculada, possivelmente, apoiado em esquemas elaborados a partir das atividades realizadas nas oitava e nona sessões. Já B12 foi o único a indicar os quatro ângulos retos no retângulo não quadrado obtido após a recomposição, como mostrado em seguida na sua representação simbólica:

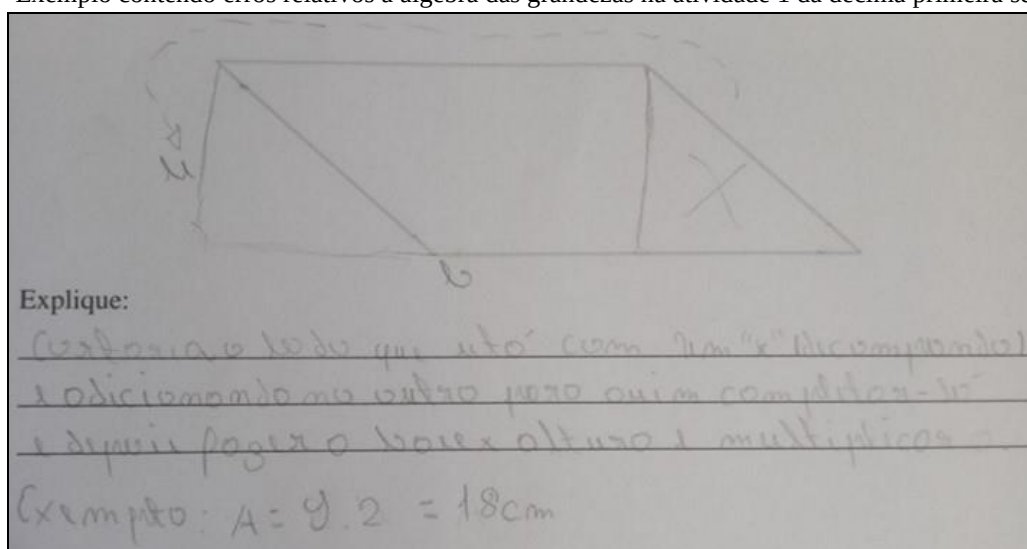
Figura 193 – Indicação dos quatro ângulos retos após a recomposição na atividade 1 da décima primeira sessão



Fonte: Participante B12

Quanto às explicações apresentadas por eles, além dos participantes A7 e B12, como vimos acima, A10 também descreveu corretamente o procedimento de decomposição e recomposição, seguido da multiplicação de uma base pela altura relativa a ela. No entanto, ele apresentou um exemplo para ajudar na argumentação contendo erros relativos à álgebra das grandezas, tanto na multiplicação de números obtendo uma grandeza como resultado quanto na utilização da unidade centímetro em vez de centímetro quadrado para designar a área de uma figura, também observado em Araújo (2018), Jesus (2011) e Souza (2013). Vejamos o seu recorte:

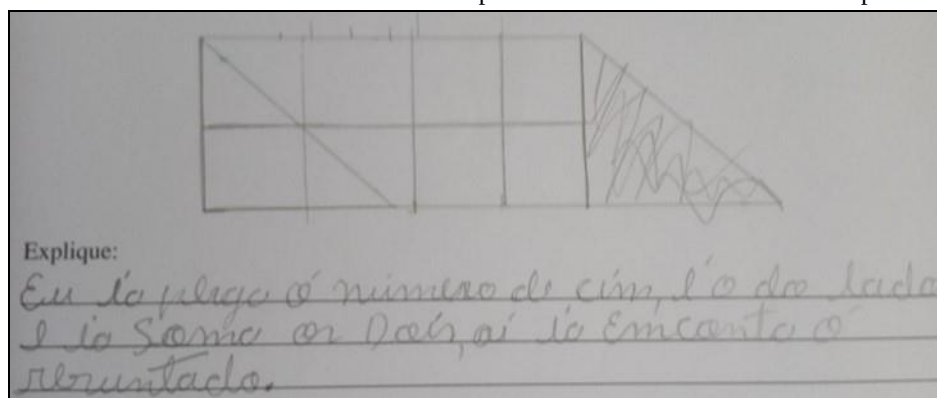
Figura 194 – Exemplo contendo erros relativos à álgebra das grandezas na atividade 1 da décima primeira sessão



Fonte: Participante A10

Nas explicações dadas pelos participantes A8 e A9, notamos uma predominância do aspecto numérico, visto que A9 falou da necessidade de medir com uma régua para saber a área e A8 em “pegar o número de cima e o do lado” para “somar os dois”, este último apresentado a seguir:

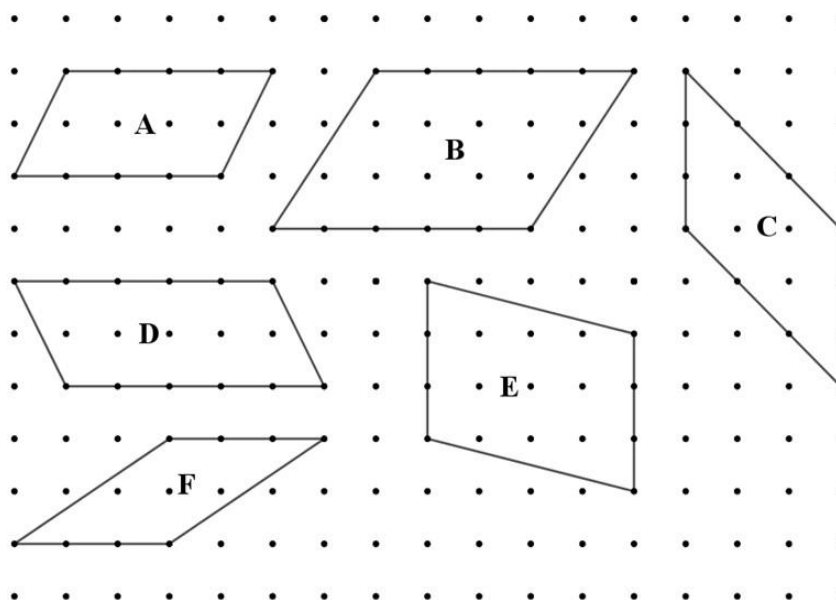
Figura 195 – Possível confusão entre os conceitos de área e perímetro na atividade 1 da décima primeira sessão



Fonte: Participante A8

Como vemos, ele falou em “somar os dois”, possivelmente, atrelado a uma confusão entre os conceitos de área e perímetro, caracterizada como erro de cálculo relacional. Passemos à análise dos resultados da segunda atividade dessa sessão, extraída da tese de Baltar (1996), que foi realizada em grupos:

Atividade 2: Você está recebendo os paralelogramos abaixo, desenhados em papel pontilhado cuja distância entre um ponto e outro, na horizontal e na vertical, é de um centímetro.



Dividam-se em dois grupos G1 e G2 e façam o que se pede:

- O grupo 1 deverá calcular as áreas dos paralelogramos utilizando procedimentos geométricos. Registrem os resultados encontrados no espaço abaixo.
- O grupo 2 deverá calcular as áreas dos paralelogramos utilizando as expressões de área (“fórmulas”). Registrem os resultados encontrados no espaço abaixo.

c) Comparem os resultados encontrados.

Área da figura A: _____

Área da figura D: _____

Área da figura B: _____

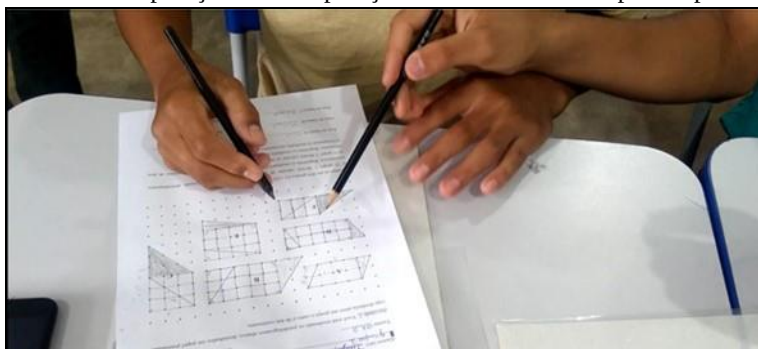
Área da figura E: _____

Área da figura C: _____

Área da figura F: _____

Como a própria atividade solicitava, o grupo 1, formado pelos participantes (A7 e A10), deveria fazer utilizando procedimentos geométricos, como o de decomposição e recomposição realizado acima. Já o grupo 2, constituído pelos participantes (A8, A9 e B12), deveria realizar com a utilização das expressões de áreas, tomando uma base e a altura relativa a ela. No entanto, todos fizeram decomposição e recomposição, inclusive o grupo 2, influenciados pelo trabalho do campo da Geometria realizado previamente. As representações simbólicas do grupo 2 são apresentadas a seguir:

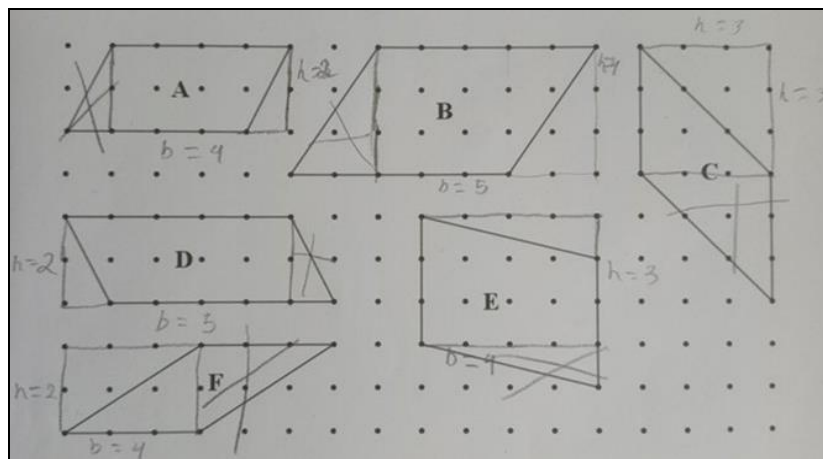
Figura 196 – Fazendo a decomposição e recomposição em vez de calcular pela expressão de área



Fonte: Participantes (A8, A9 e B12)

Em relação aos resultados, os dois grupos realizaram adequadamente o procedimento de decomposição e recomposição, com algumas diferenças nas representações simbólicas de cada um deles, como vamos ver nos extratos que seguem:

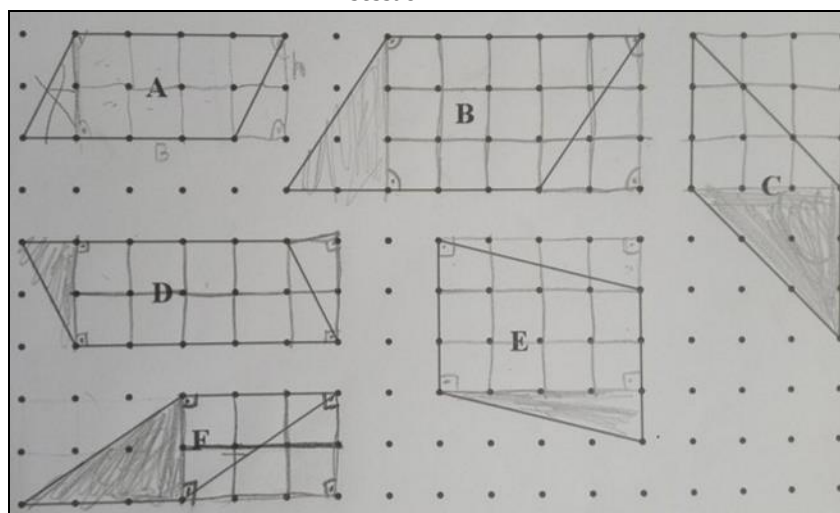
Figura 197 – Indicação de base e altura após a decomposição e recomposição na atividade 2 da décima primeira sessão



Fonte: Participantes (A7 e A10)

Como vemos na representação simbólica acima, o grupo indicou bases e suas respectivas alturas, mas não sinalizou os ângulos retos nem as unidades de medida. Percebemos que na figura (C) foi indicado apenas h e h , possivelmente, por perceberem que formou um quadrado após a decomposição e recomposição, e aplicaram a propriedade da congruência dos lados. Já na figura (E), houve uma troca entre base e altura, que pode estar relacionada à ideia de base associada ao chão, explicitada pelo participante A10 nos trechos apresentados anteriormente. Assim, não tiveram dificuldades em indicar o lado tomado como base na posição horizontal, mesmo não sendo o de maior comprimento, como também observado por Rosa dos Santos (2005). Já nas figuras em que a base a ser tomada, seguindo os pontinhos da malha, seria o lado vertical, eles a indicaram como altura. Vejamos a representação simbólica do outro grupo:

Figura 198 – Indicação de ângulos retos após a decomposição e recomposição na atividade 2 da décima primeira sessão



Fonte: Participantes (A8, A9 e B12)

Notamos que esse grupo indicou os ângulos retos em todos os retângulos não quadrados obtidos após a decomposição e recomposição. Já na figura (C), não fizeram essa indicação, talvez, por perceberem que não se tratava de um retângulo não quadrado, mas sim de um quadrado, embora ele também tenha os quatro ângulos retos. Base e altura foram indicadas apenas na figura (A). Destacamos, ainda, que fizeram a ligação dos pontinhos na malha pontilhada tornando-a quadriculada, possivelmente, influenciados por A8 que quadriculou sua figura da atividade anterior.

Quanto ao cálculo das áreas dos paralelogramos não retângulos e não losangos, todos o fizeram corretamente, com exceção do participante A10 que na figura (B) contou, inicialmente, os pontinhos da malha como sendo um centímetro e não a distância entre um ponto e outro, obtendo 20 cm^2 em vez de 15 cm^2 , mas que foi corrigido por ele mesmo após a

sua identificação no momento em que se juntaram para discutir os resultados e a explicação dada, conforme trecho a seguir:

P: E aí, o que foi que deu, deu alguma diferença?

A7: O de A10!

B12: O de A10!

A7: Aqui dá três centímetros, ele contou quatro pontinhos [se referindo à altura da figura (B)].

P: É, tem que, desculpa [bati no braço de A7 sem querer ao tentar pegar a folha para explicar]. Tem que ter atenção nisso porque, vê só, não é o ponto que é centímetro, é a distância de um ponto ao outro.

A8: Ao outro.

P: A distância daqui pra cá é um, então, um, tá? Essa distância daqui pra cá é mais, então, um, dois, três, quatro [mostrando no finalzinho da malha a contagem enquanto alguns contavam comigo]. Não é o ponto que é um centímetro. Entendeu?

A imagem a seguir mostra o momento em que estávamos tendo essa discussão com ele, assistida pelos demais:

Figura 199 – Explicando a A10 que um centímetro é a distância de ponto a outro



Fonte: Dados da pesquisa

Sobre o fato de todos terem feito pelo mesmo procedimento, destacamos:

P: Então, assim, a ideia era que um grupo fizesse decompondo e o outro fizesse pela fórmula sem decompor, vendo quem é base e quem é altura sem decompor. Os dois fizeram...

A8: ... a mesma coisa...

P: ... a mesma, o mesmo procedimento.

B12: Foi.

P: O que é que a gente vai fazer? Os dois [se referindo aos dois grupos] agora vão fazer utilizando a fórmula, tá?

A9: É uma boa ideia!

P: Sem decompor! Identifica uma base, a altura que é relativa a essa base, tá, e faz a multiplicação da base pela altura, ok? [Balançaram a cabeça que sim e uns falaram baixinho ok]. E os resultados ficaram iguais? [Se referindo ao momento em que fizeram pela decomposição e recomposição].

A9: Hunrum.

A8: Não. Menos a (B).

A7: Só a (B) mesmo.

B12: A (B).

A10: A (B) eu contei errado [se referindo a contar os pontinhos que compõem a figura e não a distância entre eles].

B12: Por que A10 botou, A10 botou vinte ao invés de quinze [se referindo à medida da área (número)].

A10: Conteí pelos pontos. Feito senhor disse, era pra ter contado a distância entre os pontos. Aí eu esqueci!

P: Ah, tá. A distância entre um ponto e outro que você não contou.

A10: Foi.

P: Mas pode alterar se quiser, viu.

A10: Pode alterar?

P: Pode! Não altera quando a gente tá, é o do colega, mas aí é o de vocês mesmo, num é. [Nesse momento, ela apaga e refaz corretamente após ter compreendido].

Em seguida, sugerimos que todos permanecessem juntos, em um grupo único, e fizessem pela expressão de área, em que cada um poderia calcular a área de pelos menos um paralelogramo não retângulo e não losango, a partir da escolha aleatória entre eles, como mostrado a seguir:

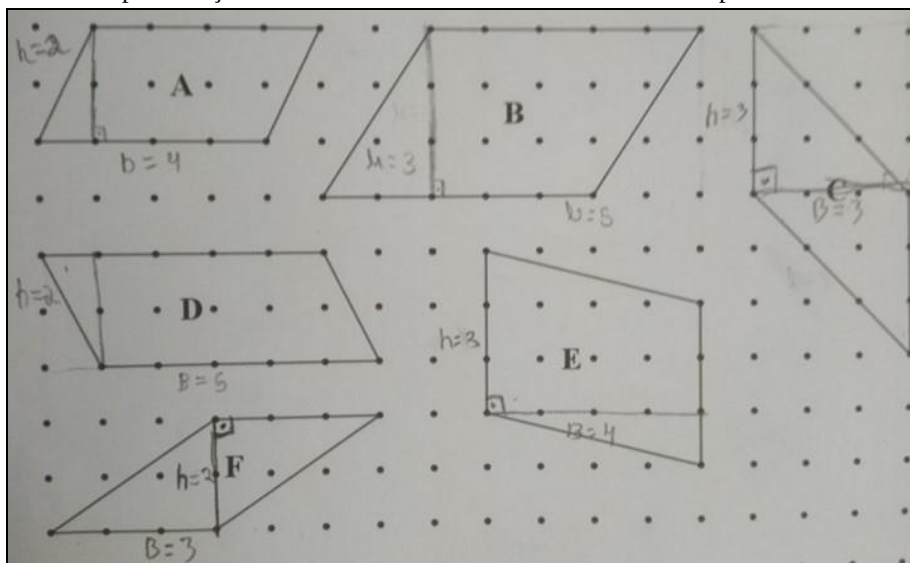
Figura 200 – Todos juntos fazendo pela fórmula a atividade 2 da décima primeira sessão



Fonte: Dados da pesquisa

No extrato do grupo único, a seguir, percebemos que todas as alturas foram traçadas internamente à figura, conforme possibilidade sugerida por Baltar (1996), com a indicação dos seus ângulos retos, sendo que nas figuras (C) e (E) elas foram confundidas com a base, uma vez que prevaleceu a ideia de base associada ao chão, lado horizontal, mesmo não sendo o lado de maior comprimento, também observada por Rosa dos Santos (2005). Além disso, as unidades de medidas não foram sinalizadas, como apresentado a seguir:

Figura 201 – Representação de bases e alturas na atividade 2 da décima primeira sessão



Fonte: Participantes (A7, A8, A9, A10 e B12)

As áreas foram encontradas corretamente e apenas no cálculo da área da figura (B), o participante A10 cometeu um erro na álgebra das grandezas parecido com o que apresentou na atividade 1, em que multiplicou números e obteve uma grandeza como resultado, porém dessa vez utilizou a unidade de medida correta ao final, como mostrado a seguir:

Figura 202 – Respostas apresentadas na atividade 2 da décima primeira sessão

$\begin{array}{l} \text{h.b} \\ \text{Área da figura A: } 2\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 8\text{cm}^2 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{h.b} \\ \text{Área da figura D: } 2\text{cm} \cdot 5\text{cm} = 10\text{cm}^2 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{h.b} \\ \text{Área da figura B: } 3 \cdot 5 = 15\text{cm}^2 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{h.b} \\ \text{Área da figura E: } 3\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 12\text{cm}^2 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{h.b} \\ \text{Área da figura C: } 3\text{cm} \cdot 3\text{cm} = 9\text{cm}^2 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{h.b} \\ \text{Área da figura F: } 2\text{cm} \cdot 3\text{cm} = 6\text{cm}^2 \end{array}$

Fonte: Participantes (A7, A8, A9, A10 e B12)

Por fim, conferimos as respostas finais feitas tanto pela decomposição e recomposição quanto pela expressão de área e todas estavam iguais. Ainda fizemos no quadro um exemplo com um paralelogramo não retângulo e não losango contendo dados extras para que identificassem uma base e a altura relativa a ela, chegando à área da figura. Destacamos o fato de poder tomar qualquer lado como base desde que identificassem a altura relativa a ela, pegando um segmento perpendicular a essa base. Enfatizamos ainda que a área pode ser calculada pela expressão $b \times h$, em que b indica base e h altura, válida também para o retângulo não quadrado e quadrado porque ambos são paralelogramos, por meio da inclusão de classes entre eles.

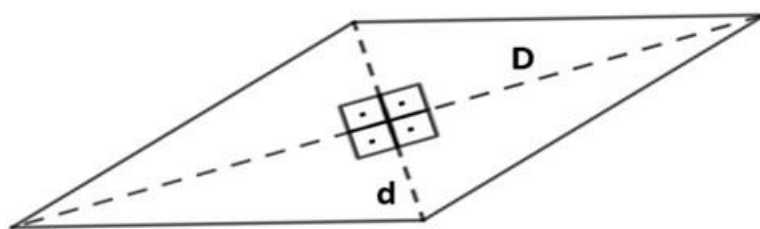
De modo geral, o procedimento de decomposição e recomposição foi plenamente dominado por eles, entretanto, pelo uso das expressões de área prevaleceu a ideia de base associada ao chão, mesmo não se tratando do lado de maior comprimento. Todas as áreas foram calculadas corretamente, como exceção de A10 que, inicialmente, havia contado os pontinhos como sendo um centímetro e não a distância entre eles e, no grupo único ao final, não colocou as unidades de medida ao fazer o cálculo, cometendo um erro na álgebra das grandezas parecido com o cometido por ele na atividade 1 dessa sessão.

Por fim, o fato de todos terem feito pela decomposição e recomposição mesmo sendo solicitado que um grupo aplicasse a expressão de área, foi decorrente do trabalho no campo da Geometria realizado antes. Assim, contribuímos para quebra do paradigma de que o uso da expressão de área seria predominante e os estudantes as aplicariam sem nenhum conhecimento geométrico. Passemos à análise da próxima sessão.

5.12 ANÁLISE DA DÉCIMA SEGUNDA SESSÃO

A décima segunda sessão foi realizada em 15 de setembro de 2022 e estavam presentes os nove participantes (A2, A4, A6, A7, A8, A9, A10, B4 e B12). Exploramos a atribuição de sentido à expressão de área dos losangos, campo das Grandezas e Medidas, por meio de situação de construção e procedimentos geométricos como a decomposição e recomposição, ambos do campo da Geometria. Iniciamos pelas atividades do dia, as quais foram realizadas em três duplas e um trio devido à quantidade de participantes. Disponibilizamos régua graduada, tesouras sem ponta e pedaços de cartolina para fazerem os desenhos. Ao final, fizemos uma discussão e sistematização, resgatando a parte do campo da Geometria, relacionando com o que foi discutido na de Grandezas e Medidas, incluindo, sempre que possível, os procedimentos que utilizaram nesse encontro para reforçar os argumentos ou orientar sobre algum ponto inadequado. A primeira atividade foi a seguinte:

Atividade 1: *Você está recebendo o losango representado a seguir.*



a) Recorte-o nas diagonais (linhas tracejadas) em quatro partes e transforme-o em outro paralelogramo. Em seguida, desenhe a figura obtida no espaço abaixo.

b) Ao recortar o losango e transformá-lo em outro paralelogramo, o que aconteceu com o comprimento de suas diagonais? _____

c) Desenhe um losango no papel recebido em que o comprimento da diagonal maior é exatamente o dobro do comprimento da diagonal menor.

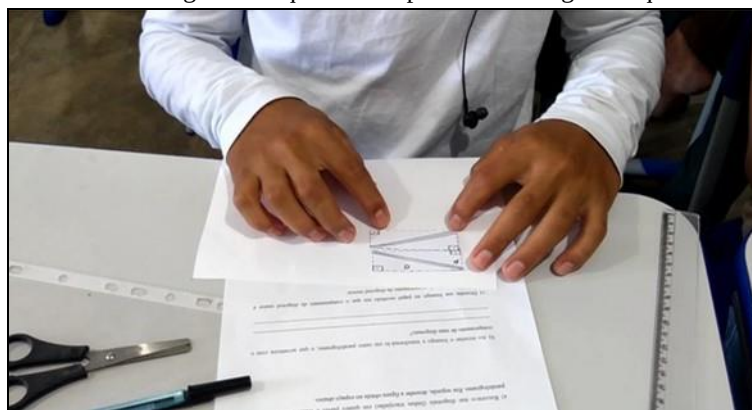
d) Recorte a figura anterior nas diagonais em quatro partes e a transforme em outro paralelogramo. Em seguida, desenhe a figura obtida no espaço abaixo.

e) Ao recortar o losango desenhado e transformá-lo em outro paralelogramo, o que aconteceu com o comprimento de suas diagonais? _____

f) Existe algum losango em que os comprimentos de suas diagonais são iguais? Se sim, qual?

Quanto aos resultados verificados, ao recortar o losango não quadrado dado nas diagonais, todos os grupos obtiveram, após a recomposição, retângulos não quadrados, como previsto em nossa análise a priori e exemplificado a seguir:

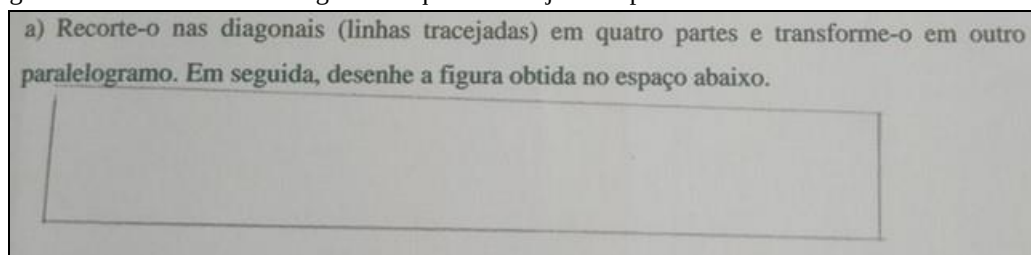
Figura 203 – Formando um retângulo não quadrado a partir do losango não quadrado recortado



Fonte: Participantes (A8 e B4)

No caso acima, a diagonal maior foi dividida por dois. Já o grupo formado por (A7 e A10) não dividiu a diagonal maior por dois, como prevíamos e foi feito pelos demais, mas sim a menor, como podemos perceber a partir do desenho feito por eles, mostrado a seguir:

Figura 204 – Desenho de retângulo não quadrado cujos comprimentos dos lados são $d/2$ e D



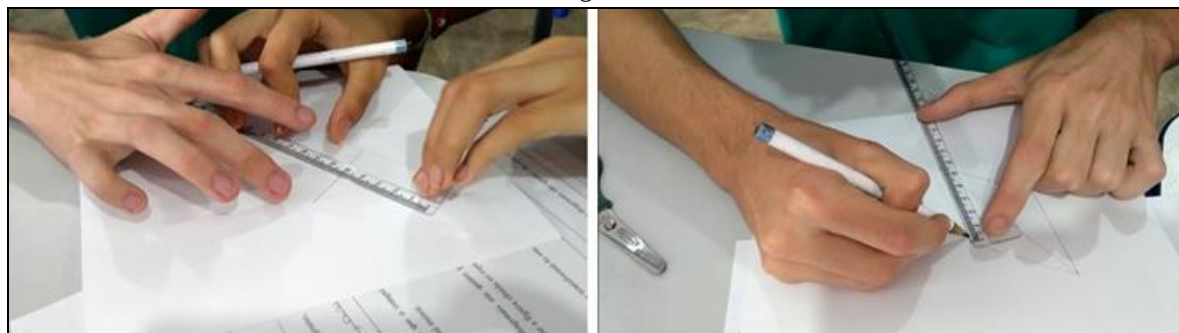
Fonte: Participantes (A7 e A10)

Conforme observamos durante a realização dessa atividade, esses participantes mantiveram a diagonal maior e dividiram a menor por dois, formando um retângulo com dimensões $d/2$ e D , em que d é a diagonal menor e D a diagonal maior, que também leva à expressão de área do losango, assim como os demais que fizeram $D/2$ e d . Em todos os casos da letra (a), os desenhos que realizaram foram prototípicos e apenas o grupo formado por (A8 e B4) indicaram os quatro ângulos retos no retângulo não quadrado desenhado.

Ao perguntarmos na letra (b) o que aconteceu com o comprimento das diagonais após recortar a figura e recompor em outro paralelogramo, o grupo formado por (A6, A9 e B12) falou que “não mudou nada”, (A8 e B4) falaram que “só mudou a forma” e (A2 e A4) responderam que “elas ficaram em linha reta”. Já (A7 e A10) disseram que “as diagonais cresceram, assim como a figura cresceu também”, provavelmente por terem conservado a diagonal maior, como vimos acima, a transformando em um dos lados do retângulo não quadrado e não sua metade como esperávamos. Nesse momento da atividade, nenhum dos grupos percebeu e falou que uma das diagonais havia sido reduzida à metade (forma predicativa do conhecimento), embora tivessem realizado tal procedimento (forma operatória do conhecimento). Em sua pesquisa, Mendes (2012) percebeu dificuldades em deduzir, generalizar e escrever algebricamente as expressões de área, principalmente na figura do losango não quadrado.

Na situação de construção de um losango não quadrado com a condição de que o comprimento da diagonal maior fosse exatamente o dobro do comprimento da menor, letra (c), a maioria sentiu dificuldade ao fazer o desenho da figura para que ficasse com os lados de mesmo comprimento e obedecesse à condição exigida. Assim, sugerimos que iniciassem pelas diagonais, observando quem seriam as diagonais maior e menor em um losango não quadrado e a relação numérica que deveria ser utilizada para que uma fosse o dobro da outra. Vejamos uma das duplas iniciando o desenho pelas diagonais com a utilização da régua graduada:

Figura 205 – Fazendo o desenho de um losango não quadrado com condições dadas sobre os comprimentos das diagonais

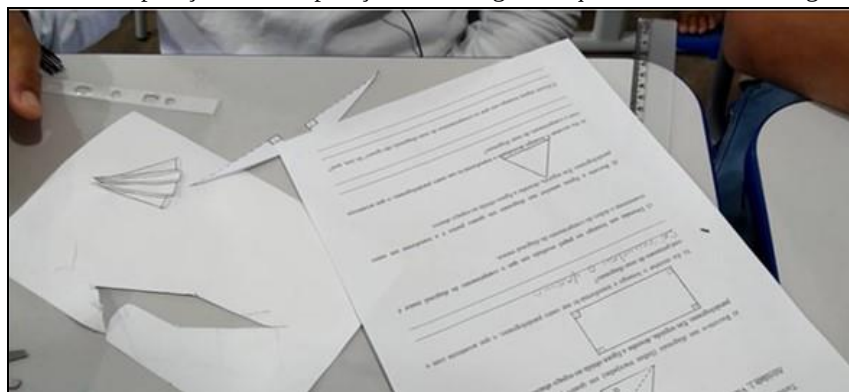


Fonte: Participantes (A7 e A10)

Apenas o grupo formado por (A8 e B4) não atendeu ao exigido e fez um losango não quadrado com a diagonal maior medindo 10 centímetros e a menor dois centímetros. Os demais fizeram corretamente e todos utilizaram medidas inteiras.

Ao decompor a figura desenhada para recompor em outro paralelogramo, letra (d), percebemos que os participantes que não atenderam à condição exigida haviam feito um triângulo em vez de outro paralelogramo, como mostrado a seguir:

Figura 206 – Decomposição e recomposição do losango não quadrado em um triângulo



Fonte: Participantes (A8 e B4)

Mesmo diante da diversidade de propriedades exploradas nas atividades envolvendo os paralelogramos, percebemos estudantes ainda em dúvida quanto à sua construção. Assim, questionamos:

P: Mas o triângulo é um paralelogramo?

B4: Ham?

P: O triângulo é um paralelogramo? Aqui diz né, oh: recorte em quatro partes e a transforme em outro paralelogramo. Em seguida desenhe a figura obtida no espaço abaixo [fazendo a leitura da letra (d) da atividade 1].

A8: Triângulo né um paralelogramo não?

P: Eu tô perguntando. É?

B4: É?

A8: Sei não!

B4: Rapaz, acho que num é não.

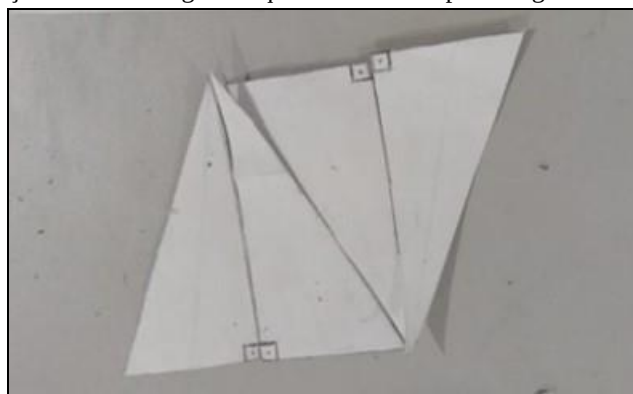
A8: Acho, não, tem que ter certeza!

B4: Apoi a gente errou [nesse momento A8 começa a apagar o desenho do triângulo feito na folha].

Após esse momento, refizeram e obtiveram um retângulo não quadrado em vez de um quadrado, em consequência do desenho feito na letra (c) em que não foi obedecida a condição estabelecida para os comprimentos das diagonais.

Ainda envolvendo triângulos, os participantes (A6, A9 e B12) recortaram o desenho feito por eles e formaram um paralelogramo não retângulo e não losango equivalente à figura desenhada, a partir da junção de dois triângulos formados com as quatro partes do losango não quadrado, como mostrado em seguida:

Figura 207 – Decomposição de um losango não quadrado em um paralelogramo não retângulo e não losango

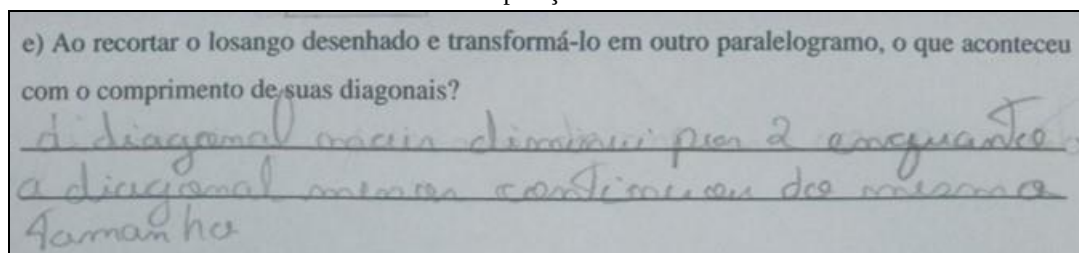


Fonte: Participantes (A6, A9 e B12)

O losango não quadrado desenhado por eles possuía a diagonal maior medindo 16 centímetros, a qual foi dividida por dois, cujo resultado corresponde à altura do paralelogramo não retângulo e não losango acima. Já a diagonal menor tinha oito centímetros e seu comprimento se manteve. Dessa maneira, a área desse paralelogramo não retângulo e não losango acima é de 64 centímetros quadrados, equivalente à de um quadrado de lado medindo oito centímetros, que seria a figura esperada após a recomposição. Voltaremos a discutir esse procedimento mais adiante com todos eles, na discussão e sistematização final. Apenas (A7 e A10) obtiveram um quadrado como previsto em nossa análise a priori. Já (A2 e A4) desenharam um retângulo não quadrado mesmo tendo feito o desenho corretamente na letra (c).

Quanto às mudanças ocorridas nos comprimentos das diagonais após recortarem e formarem outro paralelogramo, letra (e), o grupo (A6, A9 e B12) manteve coerência se comparado à letra (b), ao afirmarem que não houve mudanças. Já (A8 e B4) falaram apenas que “mudou totalmente” e (A2 e A4) disseram que “mudaram de posição”, ainda ligados ao aspecto visual, também observado na letra (b) deles. O único grupo que apresentou uma evolução na compreensão das mudanças ocorridas com o comprimento das diagonais foi o de (A7 e A10), como mostrado a seguir:

Figura 208 – Percebendo a mudança na diagonal de um losango não quadrado após decomposição e recomposição

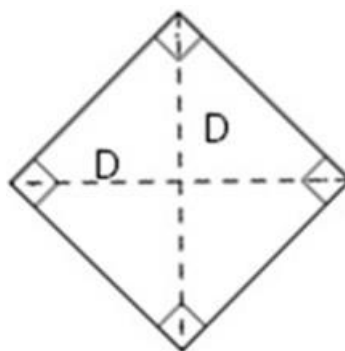


Fonte: Participantes (A7 e A10)

Apesar de terem escrito que “a diagonal maior diminuiu por 2”, entendemos que estavam querendo dizer que ela foi reduzida à metade e que o comprimento da diagonal menor se manteve inalterado. Esse já é o primeiro indício da construção do sentido da expressão de área do losango que será aprofundado com a atividade seguinte.

Por fim, na última letra da atividade 1, dois grupos (A2 e A4) e (A7 e A10) falaram que sim, existe um losango em que os comprimentos das diagonais são iguais e que é o quadrado. (A7 e A10) foram além, complementando que “[...] os seus lados também são do mesmo comprimento”. E os outros dois grupos, (A8 e B4) e (A6, A9 e B12), responderam “eu acho que não” e “não”, respectivamente. Ao voltarmos à atividade única da sétima sessão que explorava essa e outras propriedades de maneira de operatória e observarmos as respostas apresentadas por eles, percebemos que A8, A9 e B12 assinalaram que o quadrado possui as diagonais de mesmo comprimento. Já A6 e B4 não estavam presentes nesse dia. Em linhas gerais, destacamos mais uma vez um desempenho inferior por meio da forma prediativa do conhecimento se comparada à operatória. Passemos à análise da atividade 2, a qual é apresentada a seguir:

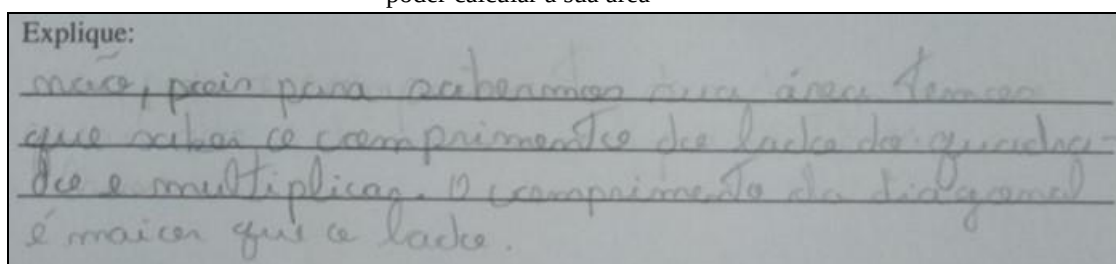
Atividade 2: É possível calcular a área do quadrado representado abaixo conhecendo apenas os comprimentos de suas diagonais?



Explique: _____

Os estudantes terminaram rapidamente esta atividade. Quanto à pergunta inicial, se é possível calcular a área de um quadrado conhecendo apenas o comprimento de suas diagonais, somente a participante A7 respondeu que não. Os demais falaram que sim. Como a atividade foi realizada em grupos, ela e A10 fizeram juntos, entretanto, não chegaram a um consenso e optaram por entregar suas respostas individuais ao final. Vejamos o extrato da resposta dela:

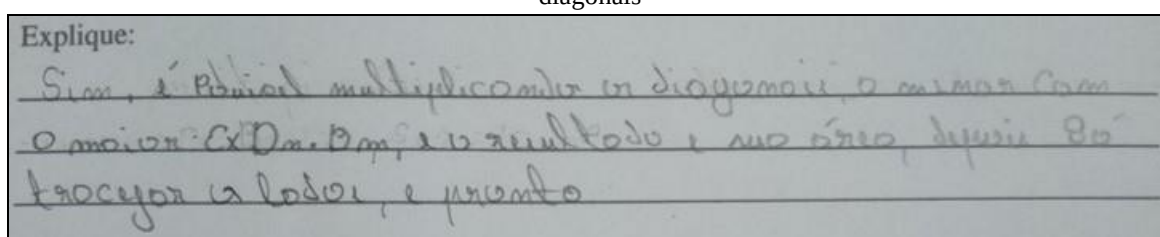
Figura 209 – Explicação voltada à necessidade de conhecer os comprimentos dos lados de um quadrado para poder calcular a sua área



Fonte: Participante A7

Como vemos, A7 falou da necessidade de conhecer o comprimento do lado para poder calcular a área desse quadrado e apontou ainda que o comprimento da diagonal é maior que o do lado. A necessidade de calcular os comprimentos dos lados para poder encontrar o resultado foi prevista em nossa análise a priori e também foi observada nas explicações dos grupos (A8 e B4) e (A6, A9 e B12), este último apontando para a utilização de uma régua. Na pesquisa de Mendes (2012), um aluno também demonstrou a necessidade de conhecer os comprimentos para poder calcular a área, no caso, de um retângulo não quadrado. Já o participante A10 explicou da seguinte maneira:

Figura 210 – Explicação voltada ao cálculo da área de um quadrado a partir do produto dos comprimentos das diagonais



Fonte: Participante A10

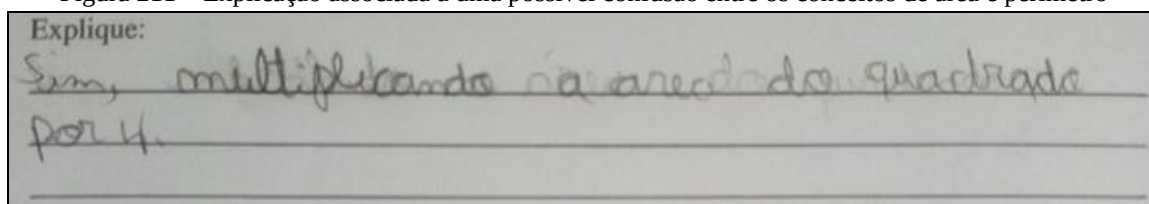
Como previsto em nossa análise a priori, o participante A10 apontou que deveria fazer o produto dos comprimentos das diagonais para calcular a área do quadrado dado na atividade, entretanto, não apontou a necessidade de dividir o resultado por dois. O exemplo apresentado em sua representação simbólica sugere que ele se apoiou no seguinte teorema em ação falso: Sejam D_n e D_m as diagonais de um quadrado. Sua área é igual ao produto $D_n \times D_m$. Mesmo não dividindo o resultado por dois, ele foi o único que se aproximou da resposta

correta que esperávamos, ou seja, deveria se apoiar na inclusão de classes como tarefa elementar do campo da Geometria, considerando que todo quadrado é losango, por isso podemos fazer o produto dos comprimentos das diagonais dividido por dois, em uma situação de medição, no campo das Grandezas e Medidas. Assim, A10 demonstrou uma compreensão parcial das ideias envolvidas.

Tanto na explicação apresentada por A7 quanto na de A10, destacamos a capacidade que ambos demonstraram de explicitar suas ideias de maneira clara e objetiva, apontando para uma evolução na forma prediativa do conhecimento, os quais explicitaram a utilização correta de termos geométricos como “comprimento do lado”, “comprimento da diagonal”, “tracejar” e o exemplo algébrico indicado por A10.

Por fim, o grupo formado pelos participantes (A2 e A4) apresentaram uma explicação, possivelmente, ligada à confusão entre os conceitos de área e perímetro, como podemos ver a seguir:

Figura 211 – Explicação associada a uma possível confusão entre os conceitos de área e perímetro



Fonte: Participante (A2 e A4)

Diante do exposto acima, eles falaram em multiplicar a área do quadrado por quatro e, mesmo não falando em comprimento do lado, possivelmente, estavam se referindo a ele, visto que o participante A4 já havia mobilizado esse erro de cálculo relacional em sessões anteriores.

Como previsto em nossa análise a priori, a compreensão da expressão de área do losango não quadrado não foi tão evidente somente com a realização das atividades, levando à necessidade de um momento de discussão e sistematização ao final, e da realização de atividades futuras a longo prazo. Vejamos alguns trechos desse momento vivenciado nesse encontro.

Iniciamos retomando os retângulos, definindo-os como os paralelogramos que possuem os quatro ângulos de 90° , nos quais incluem-se os quadrados por possuírem tal propriedade. Em seguida, destacamos outras propriedades relativas às diagonais, lados e ângulos já trabalhadas em encontros anteriores. Também falamos da maneira de calcular a área dessas figuras, elencando aspectos discutidos na décima sessão. Após esse momento mais rápido de revisão, chegamos aos losangos, definindo-os como paralelogramos que

possuem os quatro lados congruentes entre si e, pelo fato de o quadrado satisfazer tal propriedade, também é um losango. Assim como para os retângulos, discutimos outras propriedades relacionadas às diagonais, ângulos e lados opostos também já exploradas em outras sessões. Quanto à maneira de calcular a área desse paralelogramo, dedicamos um pouco mais de tempo, pois foi objeto de estudo desse encontro e gerou um pouco de dificuldades, como apresentado nos trechos seguintes:

P: Vamos obter a fórmula de área do losango. Isso foi o que a gente propôs hoje na aula de vocês.

B12: Olha!

P: Nesse encontro, tá? Eu dei pra vocês essa figura aqui.

B12: Foi.

P: Uma figura parecida com essa.

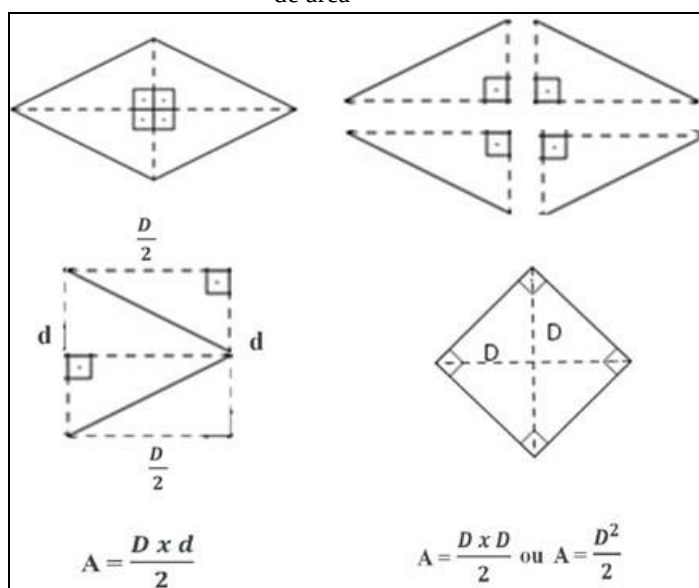
B12: Foi.

P: E disse: corte ela em quatro partes, nas diagonais. Foi isso?

A9: Foi!

Nesse momento, estávamos apresentando em *slides* as seguintes figuras, cada uma em um momento específico, por meio de efeitos inseridos na apresentação:

Figura 212 – Decomposição de losango não quadrado e recomposição em retângulos para obtenção da expressão de área



Fonte: Acervo da pesquisa

Prosseguindo com a discussão:

P: Continuando, observem o seguinte! O que eu quero que vocês prestem atenção é agora! Aí eu perguntava pra vocês o seguinte, é: ao recortar o losango e transformá-lo em outro paralelogramo, o que aconteceu com o comprimento de suas diagonais?

B4: Mudaram.

P: Mudaram como?

B4: De posição. De fórmulas.

P: De fórmulas? Como assim?

A6: De forma, danado! [Corrigindo B4 que falou “fórmulas”]. De fórmulas [rindo].

A9: De posição, professor!

A7: Uma, tipo ficou maior...

P: Como, A7?

A7: Tipo, uma, como eu disse? Uma diagonal ficou maior, menor.

P: Vamos, vamos tentar identificar nessa figura aqui as diagonais? [Apontando para o retângulo formado]. Vamos lá, a minha diagonal menor é essa aqui, num é, oh?

A6: É.

P: A minha diagonal maior é essa aqui [apontando para a diagonal maior].

B12: É.

P: Ok?

A9: Hunrum.

P: Observem que a diagonal menor se manteve aqui, num foi? [Apontando para o retângulo formado e responderam juntos: foi]. Oh, mesmo tamanho, vou chamar de d, tá, minha diagonal menor. Mas o que, a diagonal maior ficou do mesmo jeito aqui? [Apontando para o retângulo formado e maioria respondeu: não].

A7: Não, diminuiu!

P: O que tem ali é o quê?

A7: A metade.

P: A metade dela! Todo mundo tá enxergando isso daí? [Uns responderam que sim ou balançaram a cabeça confirmando].

Essa fala de A7 confirmou nosso entendimento na atividade 1 quando ela e A10 falaram que a diagonal maior havia diminuído por dois, realmente, estavam querendo se referir à metade. Após mostrar no retângulo obtido após a recomposição que um dos lados era a diagonal menor e o outro a diagonal maior dividida por dois, questionamos:

P: Vocês lembram como vocês calculavam a área do retângulo?

A10: Hunrum.

P: Como era?

A7: A altura vezes a base.

A10: A altura vezes a base.

P: Altura vezes base, base vezes altura. Quem é base aí e quem é altura? Então, a área é:

A10: A base, é...

B12: ... a base é essa de baixo!

A7: A metade.

P: Isso. D sobre dois...

A8: E a altura...

A6: ... a altura é d.

P: E a altura é d, tá. Multiplicando isso aqui, eu tenho a, a área de um losango é diagonal maior, lembram que o D, D grande é diagonal maior? Vezes a diagonal menor sobre...

A8: ... dois.

P: Então, se vocês forem lá no livro de vocês e procurarem a fórmula para encontrar a área de um losango, vocês vão encontrar isso aqui oh: diagonal maior vezes diagonal menor sobre dois [apontando para a fórmula escrita no quadro]. Tá? Mas porque isso acontece? Justamente por isso que a gente acabou de fazer: quando a gente decompõe a figura, tá certo, e transforma num retângulo e vai calcular a área desse retângulo aqui, chega nessa expressão.

Aproveitamos esse momento para discutir o procedimento realizado por (A7 e A10) na atividade 1, em que dividiram a diagonal menor por dois, como vimos anteriormente:

P: A7 fez diferente.

A8: Foi.

P: Ela, ao invés de dividir a diagonal maior em duas partes, ela dividiu a menor. Num foi, A7?

A7: Sei não!

P: Foi algo assim que você fez, você pegou assim oh.

B12: Nem ela sabe.

A7: Eu não lembro não.

P: Você fez algo mais ou menos assim, pelo que eu vi, tá? Fez algo assim [fazendo o desenho no quadro].

A7: Ah, foi, foi!!

P: Aí pegou o outro pedaço, colocou aqui assim. O outro pedaço das quatro partes. Num foi?

A7: Foi.

P: Aí aqui era algo mais ou menos assim, tá. Pegou o outro pedaço e colocou assim.

A8: Eu fiz assim também, professor!

P: Num foi isso? [Balançou a cabeça que sim]. Aí vejam...

A6: A gente fez de outro jeito.

P: Aí vejam só, no caso de A7, vai dar a mesma coisa. Ela ao invés de dividir a diagonal maior por dois, ela dividiu a menor. Então, esse lado aqui, oh, a diagonal maior continua, que é o meu D grande, fica aqui no meu retângulo [se referindo ao desenho feito no quadro] e a diagonal menor foi dividida em duas partes. Eu tenho d menor sobre...

A8: ... dois.

P: Dois. Mas quando eu vou calcular a área do retângulo, fazer a área é igual, tá, vamos A9, a área é igual, um retângulo num é base vezes altura, então: D vezes d sobre dois que vai dar a mesma coisa, tá, diagonal maior vezes a diagonal menor sobre dois.

Em seguida, finalizamos a discussão da atividade 1 e iniciamos o debate relativo à atividade 2:

P: Nos casos em que a diagonal maior é o dobro da menor, quando você recorta e junta dá um quadrado. Tá? Aí vocês devem tá se perguntando o seguinte: professor, o senhor disse que todo quadrado é losango, sim! Então, a maneira de calcular a área para o losango também vale para o quadrado, que era a atividade dois de vocês, tá? Então, se você recebe um quadrado assim [apontando para o quadrado da atividade 2), tá, pra calcular, que não tem, se tivesse o comprimento do lado, tudo bem, você faria um vezes o outro ou, então, ele ao quadrado. Mas quando não tem o comprimento do lado, no quadrado as diagonais têm o mesmo comprimento, a gente viu já essa propriedade dele, tá, então, vai fazer D vezes D sobre dois, tá? D vezes D sobre dois ou, como as diagonais são iguais, eu posso fazer D ao quadrado sobre dois. Ou seja, o comprimento da diagonal ao quadrado dividido por [responderam: dois] dois. Isso vale por quê? Vale porque todo quadrado é um losango!

Após retomarmos algumas propriedades dos paralelogramos já trabalhadas nas sessões anteriores, destacando as relações de inclusão entre quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos, e que as recíprocas dessas relações não são verdadeiras, voltamos à maneira de calcular a área de um paralelogramo não retângulo e não losango:

P: [...] Por isso que quadrado, retângulo e losango são...

A8: ... paralelogramos.

P: Mas nem todo paralelogramo é quadrado, retângulo e losango porque essas figuras têm propriedades específicas delas, tá, e todas têm às do paralelogramo. Ok?

A6: Ok!

P: E indo pra maneira de calcular a área, tá, a gente viu, acho que foi no encontro anterior, duas maneiras de calcular a área do paralelogramo, ou...

B12: ... decompor!

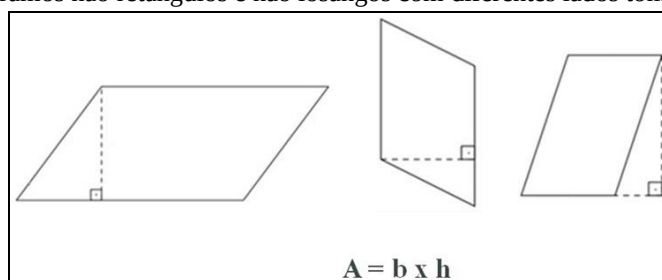
P: Isso! Decompor ele, né?

B12: Tá vendo que eu me lembrei.

P: E, exato B12, decompõe ele e forma um retângulo, tá? E quando eu tenho um retângulo, o que eu faço? Base vezes altura ou um lado vezes o outro. Lembrando que, no paralelogramo, a altura dele tem que ser perpendicular à base que você escolheu, formar noventa graus!

Mesmo não trabalhando propriamente a invariância da área em relação à escolha do lado tomado como base, a figura a seguir foi apresentada para ajudar na compreensão de que a base não é única e nem apenas o lado que está “embaixo”, pois a maioria dos estudantes havia associado à ideia de “chão” quando trabalhamos as expressões de área dos paralelogramos não retângulos e não losangos, na décima primeira sessão:

Figura 213 – Paralelogramos não retângulos e não losangos com diferentes lados tomados como base



Fonte: Acervo da pesquisa

Assim, alertamos que:

P: Aquela maneira como B12 falou é decompor e recompor, essa maneira aqui é fazer pela fórmula, tá? Escolhe a altura a partir da base que você escolheu, então, se minha base é essa aqui [apontando para o paralelogramo não retângulo e não losango em que o lado de maior comprimento na posição horizontal é tomado como base], minha altura é perpendicular a ela; se minha base é essa aqui [apontando para o paralelogramo não retângulo e não losango em que o lado de maior comprimento na posição vertical é tomado como base], minha altura é perpendicular a ela, ou seja, forma noventa graus; se minha base é aqui, tá [apontando para o paralelogramo não retângulo e não losango em que o lado de menor comprimento na posição horizontal é tomado como base], essa minha altura tem que formar noventa graus com ela, minha altura é aqui oh, forma noventa graus e aí você faz justamente base vezes a altura.

Esse destaque para o fato de que a altura deve ser perpendicular ao lado tomado como base também serviu para evitar, embora para alguns não seja de imediato, que se apoiassem no teorema em ação falso de que área de um paralelogramo não retângulo e não losango é o produto dos comprimentos dos lados, visto que os seus lados adjacentes não são perpendiculares. Aproveitamos que estávamos falando da área dessa figura para mostrar a todos os participantes presentes como o grupo formado por (A6, A9 e B12) havia feito a recomposição de um losango não quadrado na atividade 1. Inicialmente, falamos que esperávamos que obtivessem um quadrado de comprimento do lado igual a 8 cm e área 64 cm² após a recomposição do losango não quadrado, cuja diagonal maior era exatamente o dobro da diagonal menor, 16 cm x 8 cm, no caso específico deles. Após fazermos o desenho no quadro tanto desse quadrado quanto do paralelogramo não retângulo e não losango feito por eles, mostrando o que aconteceu com o comprimento das diagonais, calculamos a área do quadrado e partimos para o paralelogramo:

P: Fazendo primeiro pela fórmula: essa altura aqui é quanto? [B12 e outros também responderam juntos: quatro].

P: Observem que essa altura aqui é esse pedaço [apontando para metade da diagonal maior do losango não quadrado].

A6: É

B12: Eita, dezesseis!

P: Não! Dezesseis é daqui até aqui [se referindo ao comprimento total da diagonal maior. Nesse momento, responderam juntos: oito]. Oito.

A6: É a mesma coisa.

P: Oito centímetros, certo? Como é que eu faço a área dele? Base vezes altura, lá [apontando para a fórmula exibida no *slide*. Todos responderam junto comigo: oito centímetros vezes oito centímetros]. Dá quanto? [Responderam juntos: sessenta e quatro centímetros quadrados]. Que dá exatamente igual a...

A10: ... a mesma coisa...

P: ... a outra maneira que a gente fez [se referindo ao quadrado].

A7: Porque têm a mesma área!

B12: Diferente dos iguais [se referindo à maneira como fizeram].

P: Exato, A7! Porque têm a mesma área. São figuras diferentes, oh, com essas figuras, viu A9, aquele negócio que você tava em dúvida [me referindo à atividade 1 da oitava sessão quando ele teve dificuldade em entender que figuras diferentes podem ter mesma área]. Com essas peças, quatro peças aqui [falando das partes recortadas do losango não quadrado], a peça um, dois, três e quatro, eu posso formar essa figura aqui, tá [apontando para o quadrado], um, dois, três, quatro; posso formar essa aqui: um, dois, [alguns contaram comigo: três, quatro]. São figuras diferentes, formadas pelas mesmas peças que levam...

B12: ... a mesma área...

P: Que têm mesmo tanto de espaço ocupado, a mesma área, tá?

B12: É isso mesmo!

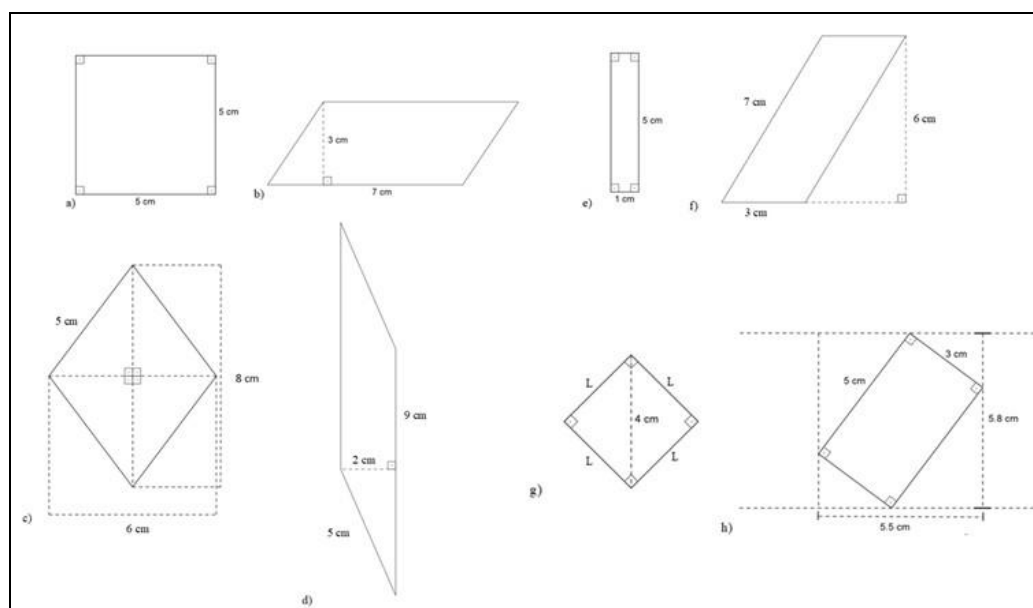
Para encerrar esse momento, fizemos pela decomposição e recomposição, como sugerido por B12 no início, chegando ao quadrado com comprimento do lado medindo oito centímetros e mesma área do paralelogramo não retângulo e não losango feito por eles.

De modo geral, ao longo dessa penúltima sessão, observamos a dificuldade inicial de desenharem um losango não quadrado, situação de construção pertencente ao campo da Geometria, confirmando achados de pesquisas anteriores como Bernardes, Souza e Zandonade (2014) e Menegotto e Lara (2011), e a não percepção, pela maioria dos participantes, das relações existentes entre as diagonais, os lados das figuras recompostas e a área, campo das Grandezas e Medidas, a partir dos procedimentos geométricos de decomposição e recomposição durante a realização das duas atividades propostas, o que já era previsto em nossa análise a priori devido às dificuldades relativas ao losango não quadrado. Assim, o momento de discussão e sistematização ajudou na compreensão das relações que pretendíamos que observassem e também para retomar vários elementos importantes nas imbricações dos campos da Geometria e das Grandezas e Medidas como, por exemplo, propriedades, relações de inclusão, maneiras de calcular a área no caso dos paralelogramos e questões interessantes como o fato de figuras diferentes poderem ter a mesma área. Passemos à análise da última sessão da nossa sequência didática.

5.13 ANÁLISE DA DÉCIMA TERCEIRA SESSÃO

A décima terceira sessão foi realizada em 22 de setembro de 2022 e estavam presentes todos os nove participantes (A2, A4, A6, A7, A8, A9, A10, B4 e B12). Trabalhamos as classes de situação de medição e produção, relativas à área de paralelogramos que, em alguns momentos, poderiam exigir o domínio de situações do campo da Geometria, como a identificação, classificação, inclusão e construção, atuando como tarefas elementares, além do procedimento geométrico de decomposição e recomposição. Iniciamos pelas atividades do dia, retiradas da nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018), as quais foram realizadas individualmente, com o auxílio de réguas não graduadas para serem utilizadas ao traçarem as figuras, na atividade 2. Após as atividades, fizemos em outra sala a culminância, agradecimentos e entrega dos *kits* com os materiais que utilizaram ao longo dos encontros, alguns brindes e uma lembrancinha para o estudante B12, não para elevá-lo em relação aos demais, mas como reconhecimento do seu esforço em ser o único a estar presente em todos os encontros mesmo residindo na zona rural. Participaram desse segundo momento, além do pesquisador, dos estudantes e da pessoa que filmou todas as sessões, a professora de Matemática deles e membros da equipe de gestão do colégio campo de pesquisa. Passemos à análise da primeira atividade, a qual é apresentada a seguir:

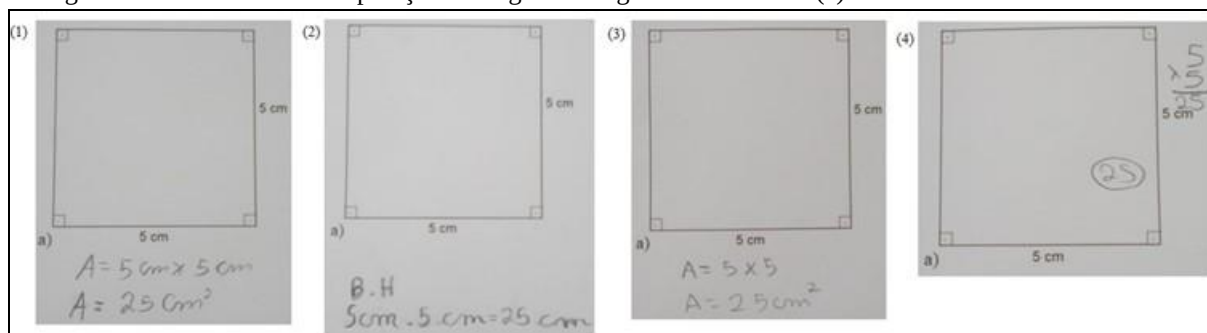
Atividade⁶⁶ 1: Calcule a área das figuras abaixo:



⁶⁶ Na atividade entregue aos estudantes, as quatro figuras da esquerda estavam em uma folha e as quatro da direita em outra, todas em verdadeira grandeza. Aqui, colocamos lado a lado e em tamanho reduzido por uma questão de organização textual.

Em relação aos resultados na letra (a), cálculo da área de um quadrado em desenho prototípico, os estudantes A2, A7, A8, A10 e B12 fizeram o produto do comprimento do lado ($L \times L$), entretanto, apenas o participante A8 multiplicou corretamente número e unidade de medida com indicação da unidade correta ao final. Já B12 manipulou número e unidade de medida, mas não colocou cm^2 no resultado obtido. Os participantes A7 e A10 multiplicaram apenas os números e colocaram a unidade cm^2 ao final, e A2 não utilizou nenhuma unidade de medida. Estes três últimos casos indicaram erros na álgebra das grandezas, como mostrado nas representações simbólicas (2), (3) e (4) a seguir:

Figura 214 – Diferentes manipulações da álgebra das grandezas na letra (a) da atividade 1 da última sessão

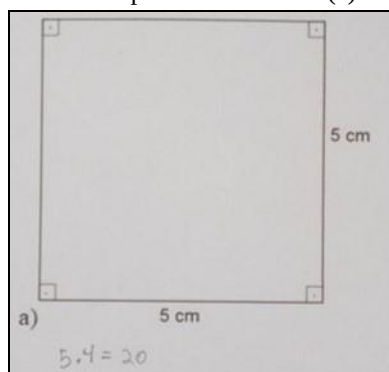


Fonte: (1) A8, (2) B12, (3) A7, (4) A2

Esses participantes, juntamente a A10 que fez igual a A7, chegaram à medida correta da área (25), entretanto, apenas A8 seguiu um caminho coerente obtendo a grandeza área (25 cm^2). Erros relativos à álgebra das grandezas também foram verificados nos estudos de Araújo (2018), Jesus (2011) e Souza (2013).

Os outros quatro participantes, A4, A6, A9 e B4, trocaram os conceitos de área de perímetro, erro de cálculo relacional, pois multiplicaram o comprimento do lado por quatro, que é equivalente a somá-lo quatro vezes, como mostrado a seguir:

Figura 215 – Troca entre os conceitos de área e perímetro na letra (a) da atividade 1 da última sessão



Fonte: Participante B4

Não trouxemos os recortes dos outros três participantes, pois este representa bem os demais, visto que todos procederam dessa maneira, fazendo a multiplicação por quatro sem

utilizar nenhuma unidade de medida. A confusão entre os conceitos de área e perímetro também foi observada em vários estudos anteriores como Baltar (1996), Domingos (2013), Douady e Perrin-Glorian (1989), Jesus (2011), Ferreira (2010), Santos (2010), Souza (2013), Teles (2007), entre outros.

Em resumo, no caso do quadrado em desenho prototípico, verificamos os dois casos acima, fazer o produto do comprimento do lado ou multiplicá-lo por quatro. Já no cálculo da área das demais figuras, observamos outros procedimentos, principalmente quando apresentavam dados extras, os quais foram organizados no seguinte quadro:

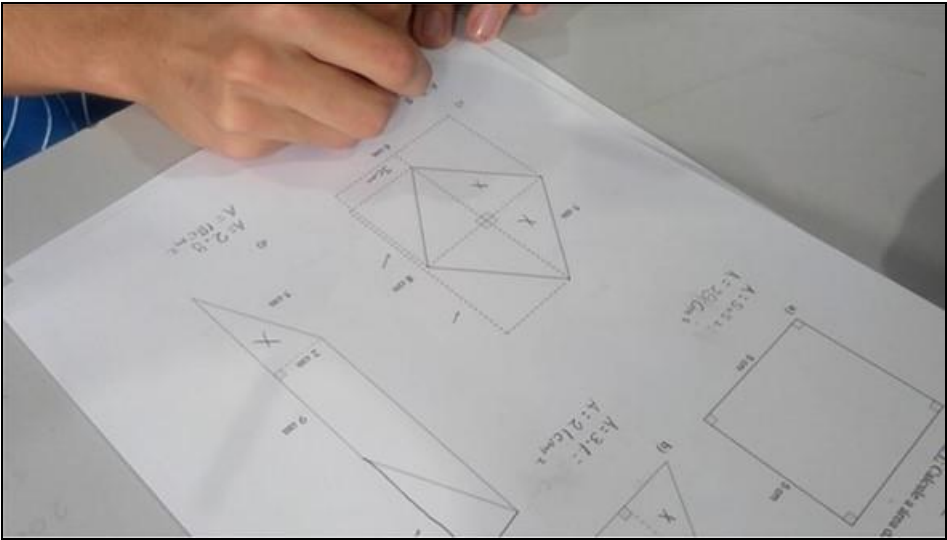
Quadro 66 – Procedimentos verificados ao calcular áreas na atividade 1 da última sessão

Procedimentos observados na atividade 1	
Procedimentos	Participantes
Manter coerência em relação à letra (a) e continuar calculando os valores corretos, embora com erros na álgebra das grandezas	A7, A10 e B12
Indicação do uso da decomposição e recomposição	A10 e B12
Multiplicar todos os dados fornecidos	A2 e A8
Somar todos os dados fornecidos, inclusive os dos lados opostos	A4 e A9
Somar todos os dados fornecidos, inclusive os dos lados opostos, e multiplicar os resultados das somas	A6 e B4

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação ao primeiro procedimento do quadro acima, já exemplificamos como os participantes A7, A10 e B12 realizaram no recorte sobre os quadrados. No conjunto de letras da atividade 1, se desconsiderarmos os erros na álgebra das grandezas, erraram em comum a letra (g), sobre a qual falaremos mais adiante, e A10 e B12 erraram ainda as letras (h) e (c), respectivamente. Quanto à decomposição e recomposição, vejamos:

Figura 216 – Realizando procedimento de decomposição e recomposição na atividade 1 da última sessão



Fonte: Participante A10

Nessa letra (c), cálculo da área de um losango não quadrado em desenho que se aproxima do prototípico, contornado com traçados auxiliares, foi uma das que os estudantes

sentiram mais dificuldade. Após A10 fazer o procedimento geométrico de decomposição e recomposição, questionamos:

P: Ficou quanto? O lado dele ficou quanto?

A10: Esse daqui ficou oito [apontando para o lado do retângulo não quadrado formado conservando a diagonal maior] e esse daqui ficou três [apontando para o lado do retângulo não quadrado formado pela metade da diagonal menor].

P: Hunrum.

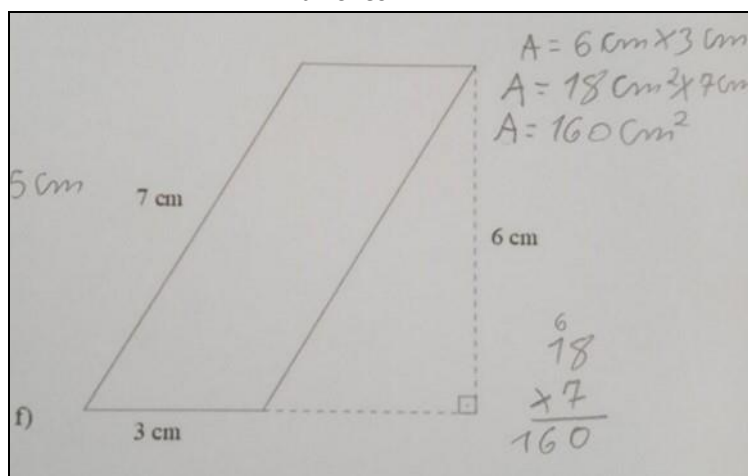
A10: Aí é só fazer o processo normal de multiplicar a área, né? [Se referindo ao produto da base pela altura].

P: Isso. Legal! Sim, sim.

A10: Tá certo.

Quanto aos três últimos procedimentos, reafirmamos os achados de Souza (2013) ao pontuar que os estudantes tentavam utilizar todos dos dados fornecidos nas atividades de diferentes maneiras, em decorrência de uma cláusula do contrato didático. Teles (2007) categorizou esses procedimentos como candidatos a teoremas em ação falsos, segundo os quais a área de uma figura plana é o produto de todos os comprimentos dos lados ou de todos os dados que aparecem na figura. No procedimento de multiplicar todos os dados fornecidos, utilizado pelos participantes A2 e A8, apresentamos a seguinte representação simbólica:

Figura 217 – Multiplicação dos comprimentos fornecidos com erros na álgebra das grandezas e de cálculo numérico



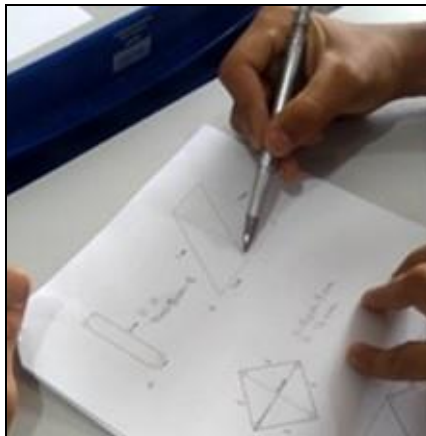
Fonte: Participante A8

Como exposto acima, A8 multiplicou os três comprimentos dados, cometendo erros tanto na álgebra das grandezas ao fazer $\text{cm}^2 \times \text{cm} = \text{cm}^2$ quanto de cálculo numérico, pois ao multiplicar 18×7 , fez $7 \times 8 = 60$, manteve o 0 e “subiu” o 6. Em seguida, fez $7 \times 1 = 7$, $7 + 6 = 16$, obtendo 160 em vez de 126, considerando apenas o produto dos números. Além de A8, A2, A4, A6 e A9 também cometeram erros de cálculo numérico e, todos os participantes, de álgebra das grandezas.

Ainda sobre essa letra (f), o participante B12 tentou encontrar sua área pelo procedimento de decomposição e recomposição, mas como vimos em nossa análise a priori,

não era possível utilizá-lo nessa figura especificamente. O recorte e um trecho de sua fala são mostrados em seguida:

Figura 218 – Insucesso ao tentar decompor o paralelogramo não retângulo e não losango da letra (f) da última sessão



Fonte: Participante B12

Ele comentou que:

B12: Aí eu tentei coisar esse, mas ele sobra um espacinho a [apontando para o paralelogramo não retângulo e não losango da letra (f)].

P: Ah, você tentou decompor ele!?

B12: Foi, mas sobra esse espaço aqui a [apontando conforme na figura acima].

P: Hunrum. É, por que você não faz feito; lembra que, quando a gente fez uma atividade eu disse assim: um grupo vai fazer decompondo e recompondo e o outro grupo vai fazer usando a fórmula? [Referindo-me à atividade 2 da décima primeira sessão]. Aí só que todo mundo fez decompondo e recompondo, depois eu coloquei pra fazer todo mundo usando a fórmula, lembra? [Balançou a cabeça que sim]. Aí você identificava uma base e a altura que era relativa a essa base. E aí, tranquilo, só era calcular.

B12: Hunrum.

P: Tá. Você vai dizer quem é a base.

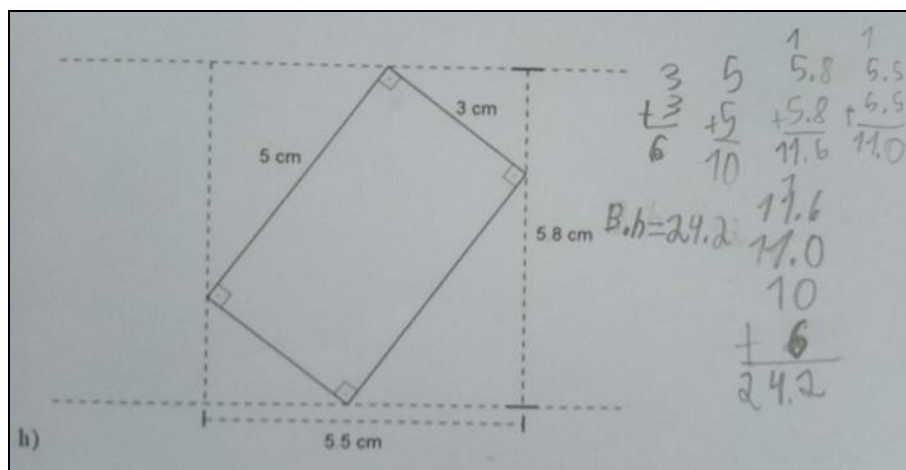
B12: É aqui, aqui é a base [apontando para o lado de menor comprimento na posição horizontal] e aqui a altura [apontando para a linha tracejada externa à figura e perpendicular à base escolhida].

P: Isso. Identificou a base e a altura, só é fazer o procedimento que a gente viu lá.

B12: Hunrum.

Outro procedimento apontado no quadro anterior, utilizado por A4 e A9, foi somar todos os dados fornecidos, inclusive os dos lados opostos mesmo sem estarem explicitados, associado a um erro de cálculo relacional, mais precisamente, à confusão entre os conceitos de área e perímetro. O recorte a seguir exemplifica esse tipo de procedimento:

Figura 219 – Soma de todos os dados fornecidos e erro de cálculo numérico na atividade 1 da última sessão



Fonte: Participante A9

Como vemos, ele somou os dados fornecidos, sem as unidades de medida, tanto do retângulo não quadrado quanto dos traçados auxiliares, cometendo um erro de cálculo numérico ao somar os resultados obtidos, visto que não colocou “vírgula abaixo de vírgula”. Um erro igual a esse e com obtenção desse mesmo resultado também foi observado no protocolo do participante A4. Assim como na letra (c), os traçados auxiliares provocaram algumas dúvidas relativas a qual figura calcular a área, embora no LD do 7º ano adotado na escola campo de pesquisa já aparecessem algumas atividades que os contemplavam. O trecho a seguir esclarece um pouco mais sobre essas dúvidas:

P: Se você tivesse que preencher isso com quadradinhos tá [apontando para o retângulo não quadrado da letra (h)].

A8: Hum.

P: Todinha! O que é que você faria pra depois saber quantos quadradinhos caberiam nela?

A8: Eu ia somar os lados.

P: Somar?

A8: Os lados, esses lados [apontando para os lados da figura (h)].

P: Somar?

A8: Mul, multiplicar. [Por vezes, percebemos que A8 falava em somar se referindo a multiplicar].

A6: Multiplicar!

P: Multiplicar! Tá. E qual é a dúvida aí?

A8: Não, só era isso mesmo. Aí esse aqui de fora é pra coisar também? [Apontando para os comprimentos indicados nos traçados auxiliares].

P: Não. Qual é a figura que você quer?

A8: Não, assim, é pra multiplicar esse aqui, o dentro, o retângulo [apontando para os comprimentos dos lados do retângulo não quadrado (h)] e esse de fora também é?

P: Não. A figura que você, que você tá calculando a área é qual? Num é essa aqui [apontando para o retângulo não quadrado (h)].

A8: É.

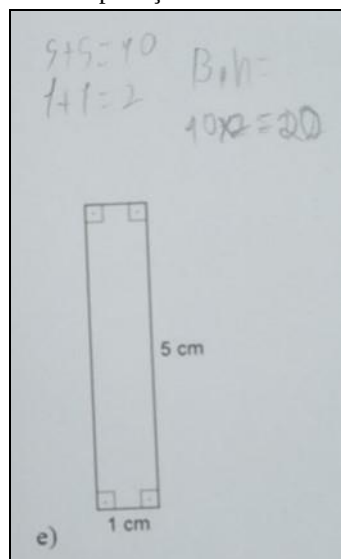
P: Então, você calcula a área dela.

A8: Hunrum.

Uma dúvida parecida com a de A8 foi manifestada por B12, cuja explicação seguiu o mesmo raciocínio. Cabe ressaltar que a figura (h) foi a única em que A8 não multiplicou todos os dados fornecidos, possivelmente, motivado pelo diálogo acima.

Os participantes A6 e B4 foram além do que A4 e A9 fizeram, pois somaram todos os dados fornecidos, inclusive os dos lados opostos, e multiplicaram os resultados ao final, conforme apresentamos a seguir:

Figura 220 – Soma dos dados fornecidos e multiplicação dos resultados na atividade 1 da última sessão



Fonte: Participante A6

Conforme apontado por Souza (2013) e já mencionado anteriormente, cláusulas do contrato didático vigente em sala fazem com que os estudantes sintam a necessidade de utilizar todos os dados fornecidos na atividade, fazendo diferentes operações entre eles e empregando expressões de área de outras figuras, como a do trapézio, no caso da pesquisa citada. Esse pesquisador também verificou erros de cálculo relacional voltados à confusão entre os conceitos de área e perímetro, os quais observamos nos protocolos de A2, A4, A6, A8, A9 e B4. É importante ressaltar que a participante A7, que obteve um bom desempenho geral nas atividades do campo da Geometria, assim como A10 e B12, não cometeu esse tipo de erro. O fato de A10 e B12 terem se apoiado no procedimento geométrico de decomposição e recomposição também pode ter evitado essa confusão, uma vez que reinvestir os conhecimentos do campo da Geometria nas atividades do campo das Grandezas e Medidas possibilitou olhar para as figuras por um viés mais geométrico, secundarizando os aspectos numéricos.

Na letra (g), cálculo da área de um quadrado em desenho não prototípico dado apenas o comprimento de uma diagonal, nenhum dos participantes conseguiu obter êxito ao calcular a sua área. Questionamos a participante A7 ao manifestar dúvidas sobre ela:

P: Que figura é essa? [Apontando para o quadrado da letra (g)].

A7: Um losango.

P: Um losango, certo. E além de ser um losango é o quê? Tem quatro ângulos retos.

A7: Um retângulo e é um quadrado. [Entendemos que ela quis dizer que era um quadrado que também é losango e retângulo, mesmo assim buscamos esclarecer].

P: Mas um retângulo tem os quatro lados de mesmo comprimento?

A7: Não.

P: É um retângulo?

A7: Sei não! [Ficou confusa e rindo].

P: Vamos lá, calma! Você viu que era, é, um losango, num foi? Tá? E o losango que possui os quatro ângulos retos, como é o nome dele?

A7: Um quadrado?

P: Um quadrado.

A6: Um quadrado!

P: Tá. E pra você calcular a área de um losango, você precisa de quê? Volte pra...

A7: Eu lembro não.

P: Você num calculou o do, da, do lado anterior, não?

A6: Lado maior.

P: Você num calculou aqui, num foi? [Se referindo ao losango não quadrado da figura (c)]. Num foi? [Balançou a cabeça que sim]. Então, e esse aqui, por que não calcula nesse? [Apontando para a figura (g)].

A7: Eu vou ver.

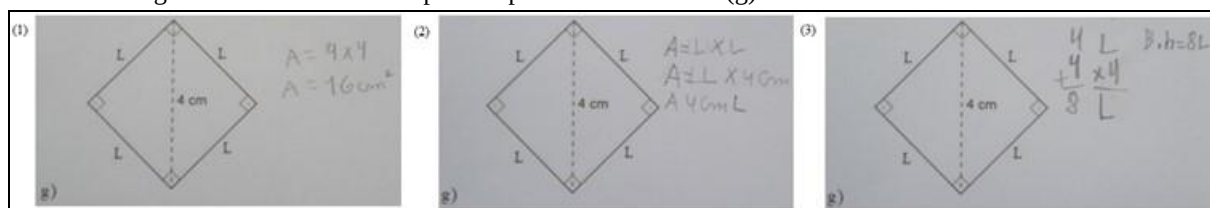
P: Se essa figura é um quadrado [apontando para a figura (g)], num é, essa diagonal aqui mede esse tamanho [apontando para os quatro centímetros], essa daqui mede quanto?

A7: Quatro.

P: Você já pode tentar usar alguma coisa aí, né? [Ela ficou tentando fazer].

Após esse momento, ela e os participantes A4, A6, A10, B4 e B12 fizeram o produto do comprimento das diagonais, mas não dividiram o resultado por dois, possivelmente, apoiados em um teorema em ação falso segundo o qual a área de um quadrado é o produto dos comprimentos de suas diagonais. O participante A2 deixou em branco, configurando uma ausência de resposta. Já A8 respondeu 4 cm L e A9 indicou 8 L, como mostrado nos dois últimos recortes a seguir:

Figura 221 – Diferentes respostas apresentadas na letra (g) da atividade 1 da última sessão



Fonte: (1) A7, (2) A8, (3) A9

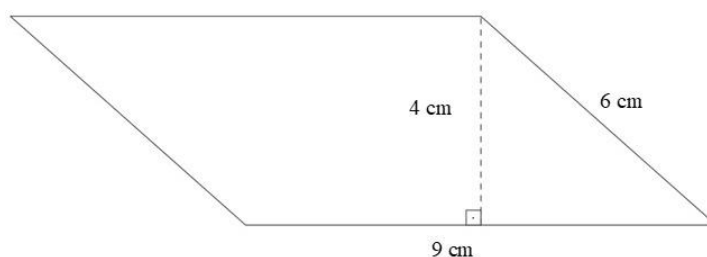
O primeiro recorte representa as respostas dos demais participantes citados anteriormente que, assim como A7, multiplicaram o comprimento das diagonais, mas não dividiram o resultado por dois, apontando que o repertório de esquemas deles ainda precisa ser ampliado para lidar adequadamente com esse tipo de tarefa. No caso acima, ela multiplicou apenas os números e obteve uma grandeza como resultado, cometendo erro na álgebra das grandezas, assim como aqueles que não a utilizaram em nenhum momento ou operaram com os números e as unidades, porém não colocaram centímetros ao quadrado no

final. No do meio, embora A8 tenha indicado corretamente $L \times L$, como não foi dado o comprimento do lado, ele resolveu utilizar o comprimento fornecido, chegando ao resultado acima. Por fim, A9 continuou o procedimento que vinha utilizando nas demais figuras ao somar os dados fornecidos e, nesse caso, a letra L também. Ao final, colocou $b \times h$, mas o resultado obtido, se considerarmos o conjunto de respostas apresentado por ele, está mais ligado à soma que ao produto $8 \times L$, como vimos em recortes anteriores de sua atividade.

Por fim, observando os resultados de maneira mais ampla, verificamos que os participantes A2, A7, A8, A10 e B12, apresentaram um melhor desempenho nas letras (a), (b) e (e), possivelmente por serem figuras que continham somente os dados necessários e suficientes para o cálculo da área. No entanto, apenas A8 manteve coerência relativa à álgebra das grandezas ao multiplicar número e unidade de medida simultaneamente, com exceção da letra (e) que não colocou o quadrado do centímetro ao final. Na letra (g), como acabamos de ver, os estudantes apresentaram desempenho insatisfatório, reafirmando os achados da nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018).

De modo geral, os participantes que mostraram um bom desempenho em sala, tanto por meio da forma operatória do conhecimento quanto da predicativa, A7, A10 e B12, também se apoiando na decomposição e recomposição, apresentaram melhores resultados, salvo os erros na álgebra das grandezas. Notamos ainda uma diminuição das dificuldades dos participantes A2 e A8. Passemos à análise da atividade 2, a qual é apresentada em seguida:

Atividade 2: Observe a figura a seguir e faça o que se pede:



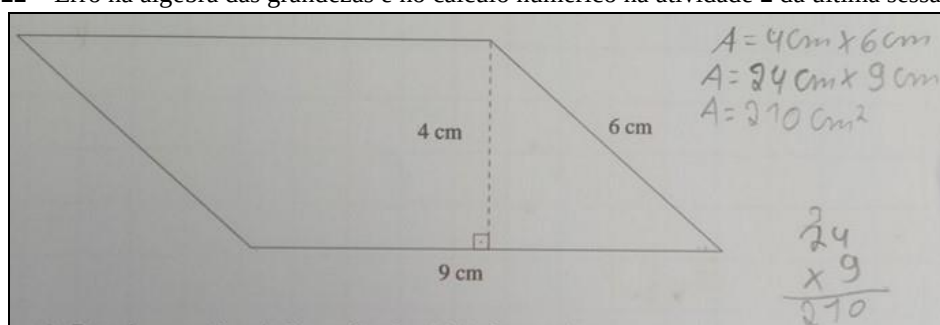
- a) Desenhe um retângulo R com área igual à da figura acima.
- b) Desenhe um losango L com área igual à da figura acima.
- c) Desenhe um quadrado Q com área igual à da figura acima.



Temos situações de produção figuras de mesma área que uma figura dada, que exigem o domínio de outras situações que emergem como tarefas elementares: medição e comparação, também do campo das Grandezas e Medidas, e identificação, classificação, construção e inclusão, do campo da Geometria, pois os participantes precisaram saber a área do paralelogramo não retângulo e não losango dado para, em seguida, produzir adequadamente as figuras na condição estabelecida.

Em relação à primeira tarefa elementar, medição da área da figura dada, apenas os participantes A8 e A10 obtiveram outros valores. O primeiro fez o produto de todos os dados fornecidos, com erros na álgebra das grandezas e no cálculo numérico, como mostrado a seguir:

Figura 222 – Erro na álgebra das grandezas e no cálculo numérico na atividade 2 da última sessão



Fonte: Participante A8

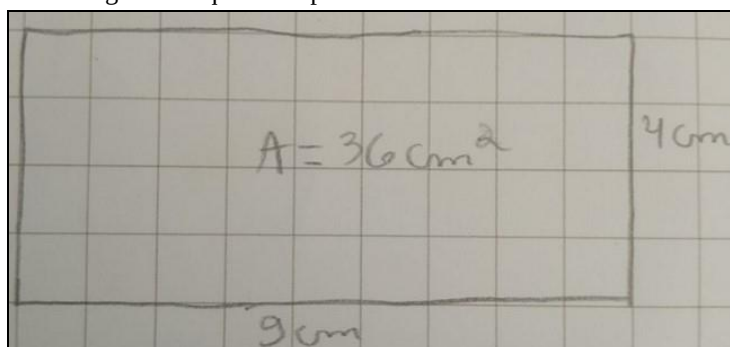
Assim como na atividade 1 dessa sessão, o participante A8 continuou multiplicando todos os dados fornecidos. Ao fazer 4 cm x 6 cm, não colocou a unidade ao quadrado no resultado e, se houvesse colocado, ficaria centímetros cúbicos ao multiplicar por 9 cm logo em seguida. Percebemos um erro de cálculo numérico ao fazer $9 \times 4 = 30$, obtendo ao final

210 em vez de 216. O participante A10 também cometeu erro de cálculo numérico, pois mesmo identificando uma base e a altura relativa a ela de maneira correta, fez mentalmente $9 \times 4 = 27$, sem utilização das unidades de medida. Quanto aos demais participantes, obtiveram a medida (36) correta, porém apresentando erros na álgebra das grandezas como os citados na atividade 1: multiplicação apenas dos números com o acréscimo da unidade ao final ou a não utilização dela.

Em relação à produção de retângulos de mesma área que a da figura dada, letra (a), oito participantes obtiveram êxito (A2, A6, A7, A8, A9, A10, B4 e B12). Todos esses produziram um retângulo não quadrado em desenho prototípico de mesma base e mesma altura que o paralelogramo não retângulo e não losango dado. O fato de até mesmo A8 e A10, que erraram em uma tarefa elementar voltada ao campo numérico, como vimos acima, terem acertado pode estar ligado à possibilidade de utilização do procedimento geométrico de decomposição do paralelogramo não retângulo e não losango e recomposição em um retângulo não quadrado de mesma base e altura que a figura dada. Esse aspecto reforça a importância de considerar as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, pois um erro no cálculo numérico não implicou no insucesso da situação global quando se lançou um olhar geométrico sobre a figura.

O extrato da produção da participante A7 é apresentado a seguir para exemplificar o desenho prototípico feito por eles:

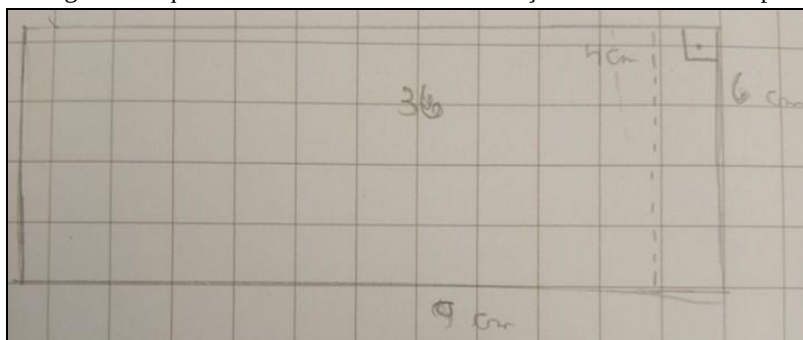
Figura 223 – Retângulo não quadrado produzido na atividade 2 da última sessão



Fonte: Participante A7

Pelos traçados irregulares, percebemos que ela não utilizou a régua não graduada como suporte. O participante A4 também fez o desenho prototípico de um retângulo não quadrado, porém com área maior que a da figura dada e indicação incorreta das mesmas dimensões do paralelogramo não retângulo e não losango fornecido:

Figura 224 – Retângulo não quadrado com área maior e indicação incorreta dos comprimentos



Fonte: Participante A4

A figura produzida pelo participante A4, além de possuir área maior que o paralelogramo não retângulo e não losango dado, tem a indicação incorreta dos mesmos comprimentos da figura fornecida, pois o lado que mede 6 cm é o mesmo que ele tracejou medindo 4 cm, com a sinalização do ângulo reto ligado à altura para o participante. Ele indicou 36 no centro, mas ela possui mais de 44 quadradinhos.

Quanto à produção de losangos, letra (b), apenas dois participantes, A7 e B12, tiveram acertos plenos. Inicialmente, A7 demonstrou dificuldade em uma tarefa elementar também do campo das Grandezas e Medidas voltada a relacionar os comprimentos das diagonais para que o losango produzido tivesse mesma área que o paralelogramo não retângulo e não losango dado, como podemos ver no trecho a seguir:

P: Se você decompõe e fica a metade, tá, então o que você tem que botar aqui [se referindo ao comprimento da diagonal maior] tem que ser um número que quando você decompõe, dê esse aqui [se referindo ao lado de maior comprimento do paralelogramo não retângulo e não losango dado].

A7: É, só que eu não tô conseguindo. Eu já pensei em colocar nove, mas a metade de nove é quatro vírgula e cinco.

P: Sim.

A7: Aí não vai dar trinta e seis. Vai dar menos [se referindo a uma área menor que a da figura dada].

P: Certo. E se você colocar o dobro de nove?

A7: Sei.

P: Você não quer a metade? Você não quer que dê nove no final quando dividir por dois? E qual o número que você depois divide o nove e dá, divide por dois e dá nove? O dobro de nove! Tá entendendo?

A7: Mais ou menos.

Como ela ainda não havia compreendido, resolvemos dar um exemplo utilizando régua não graduada:

P: Vê só, é, eu tenho essa régua aqui, tá [apontando para uma régua não graduada]. Eu quero fazer algo que eu tenha, depois quando eu partir na metade eu ainda tenha esse valor aqui [apontando para o comprimento total da régua]. Então, o que é que eu faço? Eu pego outra régua dessa, igual a essa e faço assim [juntando as duas para duplicar o comprimento]. Quando eu dividir por dois, vou continuar com o mesmo valor daqui. O que foi que eu fiz? Dobrei o que eu tinha! Entendeu?

A7: Mais ou menos. Eu vou tentar pra ver se eu consigo. [Continuou tentando].

P: Você vai desenhar logo a diagonal, né isso?

A7: Não sei.

P: O que é que, o que é que quando decompõe vira a metade, no losango?

A7: A diagonal.

P: A diagonal.

Como percebemos que a participante A7 já havia tentado várias vezes, procuramos fazer com que ela percebesse que uma possibilidade seria dobrar os nove centímetros, pois o produto das diagonais seria dividido por dois ao final, mas ela ainda ficou em dúvida. Depois de várias tentativas, buscando por esquemas já utilizados em outras situações, A7 falou:

A7: Eu consegui agora!

P: Conseguiu!?

A7: Só que falta desenhar, que eu não tô conseguindo desenhar o losango.

P: Quer usar, você tá usando a régua, não?

A7: Não.

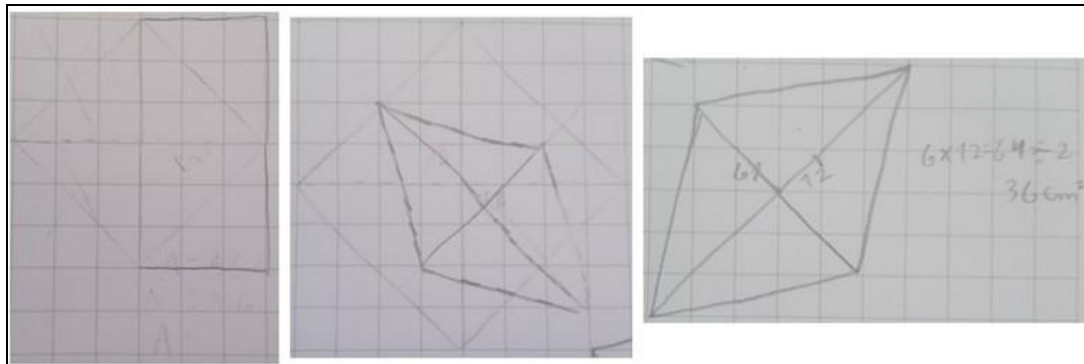
P: Lembra da dica que eu dei? Quando vocês fossem desenhar um losango, desenhava primeiro o quê?

A10: As diagonais.

A7: As diagonais.

Após obter sucesso na tarefa elementar do campo das Grandezas e Medidas que seria relacionar os comprimentos das diagonais para que o losango não quadrado ficasse com mesma área que o paralelogramo não retângulo e não losango dado, a participante A7 se deparou com outra tarefa elementar, dessa vez do campo da Geometria, voltada à construção de um losango não quadrado. Como ela dominava a identificação e classificação, ou seja, já sabia que figura desenhar, a dificuldade apresentada foi apenas construção. A seguir, apresentamos algumas representações simbólicas contendo tentativas feitas por ela que, mesmo estando parcialmente apagadas, é possível fazer algumas inferências mais adiante relativas aos esquemas mobilizados. Já a figura do lado direito correspondente à produção solicitada na situação global após passar pelas diferentes tarefas elementares, tanto do próprio campo das Grandezas e Medidas quanto do campo da Geometria:

Figura 225 – Representações simbólicas relativas à produção de losangos na atividade 2 da última sessão



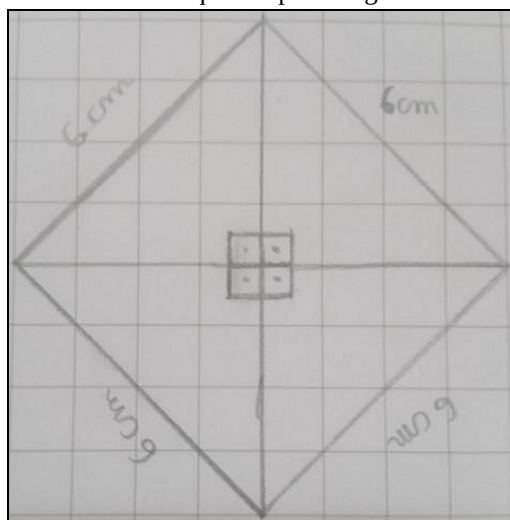
Fonte: Participante A7

No primeiro recorte da esquerda para a direita, percebemos que ela tentou produzir por meio da decomposição e recomposição em um retângulo não quadrado. Já no segundo, fez a

tentativa de desenhá-lo parcialmente inscrito em um quadrado. Por fim, conseguiu produzir um losango não quadrado em desenho não prototípico, de diagonais medindo 6 cm e 12 cm, cuja decomposição e recomposição poderia levar a um quadrado de mesma área que o paralelogramo não retângulo e não losango dado. Percebemos ainda erro na álgebra das grandezas ao multiplicar os números e obter uma grandeza como resultado, e de cálculo numérico quando fez $6 \times 12 = 64$, entretanto, ao dividir chegou aos 36 que pretendia obter. As dimensões apresentadas por A7 não estavam em verdadeira grandeza apenas nessa letra (b), talvez pela dificuldade enfrentada por ela ao tentar resolvê-la.

O outro estudante que conseguiu produzir o losango foi B12. Diferentemente de A7, ele se apoiou na situação de inclusão do campo da Geometria como tarefa elementar para obter sucesso na situação de produção do campo das Grandezas e Medidas, pois fez o desenho não prototípico de um quadrado, apoiado sobre um dos vértices, de mesma área que a figura dada, como mostrado em seguida:

Figura 226 – Produção de losango com mesma área que um paralelogramo não retângulo e não losango dado



Fonte: Participante B12

É importante lembrar que B12 no início dos encontros manifestou dificuldades tanto no campo da Geometria quanto no campo das Grandezas e Medidas como, por exemplo, precisou saber o que era a diagonal de uma figura poder iniciar a forma operatória. O mesmo aconteceu com o conceito de área em que a forma operatória ainda não estava disponível para ele naquele momento da experimentação. E por meio da sua representação simbólica acima, é possível perceber uma diminuição das dificuldades desse estudante, pois fez a indicação de vários elementos e propriedades geométricas importantes, como diagonais perpendiculares e de mesmo comprimento, representação dos ângulos retos formados no ponto de interseção entre elas e o comprimento adequado dos lados para que atenda à condição dada inicialmente na atividade. Assim, destacamos a relevância do trabalho no campo da Geometria realizado

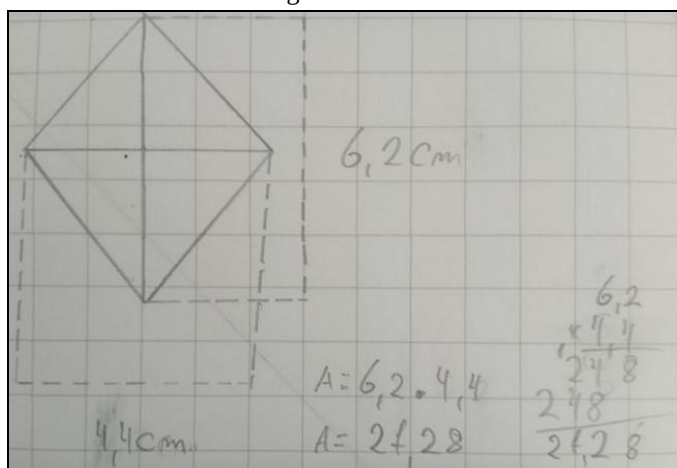
previamente e a importância de considerar as imbricações entre esses dois campos, sem as quais representações simbólicas como essas seriam menos prováveis de aparecer em uma situação de produção do campo das Grandezas e Medidas. Frisamos também que o fato de B12 estar presente em todos os encontros fez com que vivenciasse mais situações que os demais participantes que faltaram uma ou mais sessões, ampliando, portanto, o seu repertório de esquemas.

Outros dois participantes, A2 e A10, tiveram êxito na situação de construção como tarefa elementar ao desenharem corretamente losangos não quadrados, porém fracassaram na de produção, uma vez que as figuras ficaram com área maior e menor, respectivamente, que o paralelogramo não retângulo e não losango dado, este último associado a um erro de cálculo numérico cometido inicialmente, como mostrado no seguinte trecho:

A10: Pronto, o quadrado eu já fiz. Eu fiz uma soma rápida aqui que, oh, deu cinco cada lado, cinco vírgula dois vezes cinco vírgula dois dá vinte e seis vírgula quatro.
P: A área do seu, do seu paralelogramo...
A10: ... vinte e sete.
P: A área aí deu quanto? Essa área aqui [apontando para o paralelogramo não retângulo e não losango dado na atividade 2].
A10: Deu vinte e sete.
P: Desse aqui?
A10: Sim.
P: Como foi que você fez?
A10: Aí eu peguei aqui, professor, olhe: base vezes altura, nove vezes quatro deu, chegou em vinte e sete centímetros quadrados. Aí, esse daqui a...
P: ... você fez nove vezes quatro?
A10: Nove vezes quatro!
P: Deu vinte e?
A10: Deu vinte e sete! Ou eu tô errado?
P: Não sei. [Ele ficou lá revendo e dando continuidade].

Em decorrência do erro de cálculo numérico realizado mentalmente ($9 \times 4 = 27$), o participante A10 fez uma figura de área menor que a dada como mostrado a seguir:

Figura 227 – Produção de losango não quadrado com área menor que um paralelogramo não retângulo e não losango dado

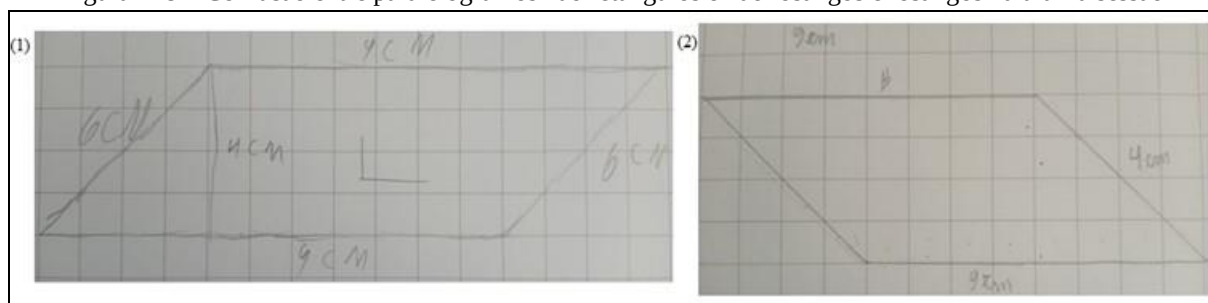


Fonte: Participante A10

Percebemos que A10 produziu uma figura que se assemelha à da letra (c) da atividade 1 dessa sessão, possivelmente, por ter dúvidas em como fazer um losango. Na pesquisa de Diniz (2013), voltada ao campo da Geometria, os participantes desenharam figuras parecidas com as fornecidas nas atividades propostas.

Os participantes A6 e A9 fizeram desenhos de paralelogramos não retângulos e não losangos, sendo o primeiro prototípico, conforme previsto em nossa análise a priori que poderiam considerar o paralelogramo não retângulo e não losango em desenho não prototípico como sendo um não paralelogramo, e produzir outro que estivesse em seu desenho prototípico como uma das respostas para essa atividade, pois vimos no estudo desenvolvido por Pereira da Costa (2016) que os estudantes consideravam o retângulo em desenho não prototípico como sendo um não retângulo. Já A9 o fez igual à figura dada, porém não utilizou todos os comprimentos fornecidos como A6. As duas produções são apresentadas a seguir:

Figura 228 – Confusão entre paralelogramos não retângulos e não losangos e losangos na última sessão

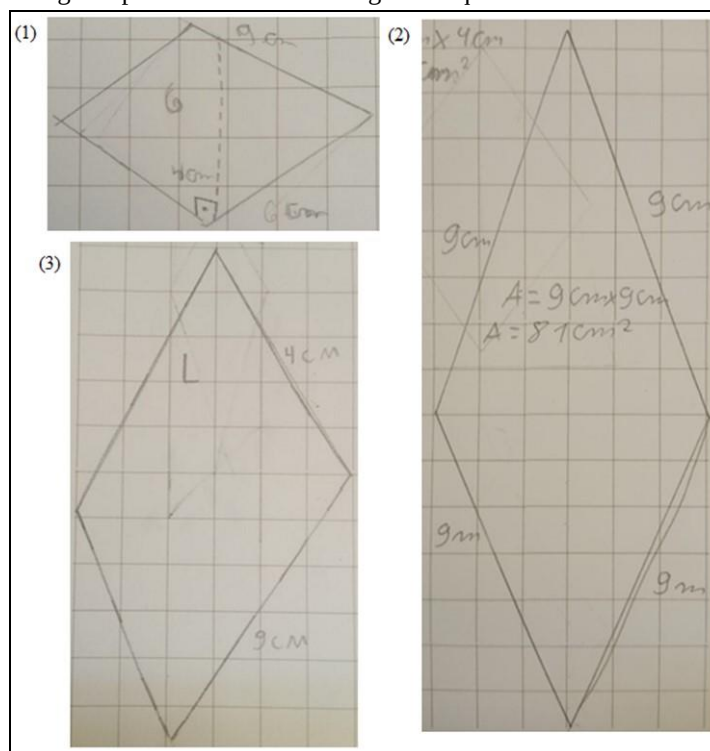


Fonte: (1) A6, (2) A9

Em ambos os casos, os comprimentos indicados não condizem com a quantidade de quadradinhos que compõe cada figura. Possivelmente, repetiram as dimensões da figura dada, sem considerar esse aspecto. Dificuldades na identificação e classificação de losangos podem ter conduzido esses participantes a repetirem a mesma figura dada.

Por fim, dificuldades na situação de construção que emergiu como umas das tarefas elementares da situação complexa levou os participantes A4, A8 e B4 a fazer tentativas de desenhos de losangos não quadrados, porém com pares de lados desiguais ou mesmo, nenhum deles de mesmo comprimento como aconteceu com B4. Esse fato confirma uma dificuldade já discutida em desenhar esse tipo de paralelogramo, como também observado em Bernardes, Souza e Zandonade (2014). Vejamos as produções dos três participantes acima:

Figura 229 – Figuras produzidas como losangos não quadrados na última sessão



Fonte: (1) A4, (2) A8, (3) B4

Como vemos, nas figuras acima há lados desiguais, não atendendo à propriedade que define o losango como o paralelogramo que possui todos os lados de mesmo comprimento. Apesar de A8 indicar 9 cm em cada lado, é possível perceber que há pares de lados de comprimentos diferentes. No cálculo realizado por ele no interior do desenho, percebemos a manipulação correta de número e unidade de medida, embora tenha feito o produto dos comprimentos dos lados para calcular a área de um losango não quadrado. Já A4 tentou colocar todos os dados fornecidos na figura dada, enquanto na produção de B4 nenhum dos lados são iguais.

Na letra (c), produção de quadrados de mesma área que um paralelogramo não retângulo e não losango dado, apenas dois participantes produziram corretamente essa figura na condição exigida, foram A2 e A7. Conforme previsto em nossa análise a priori, ambos fizeram o desenho prototípico do quadrado com lado de comprimento 6 cm, cuja produção de um deles é apresentada em seguida:

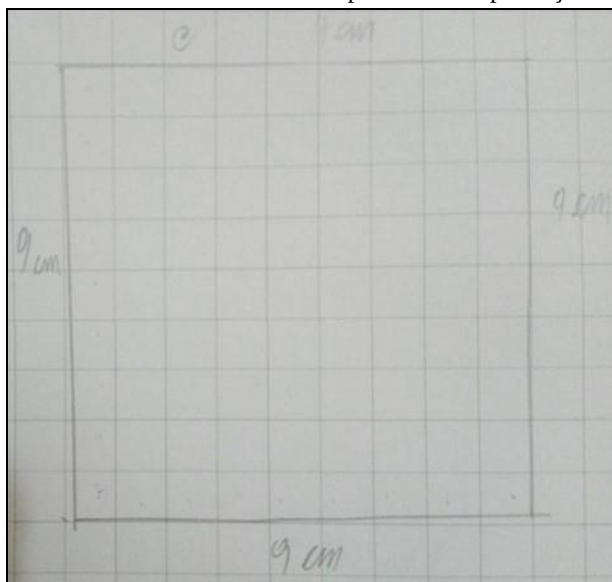
Figura 230 – Quadrado produzido adequadamente na atividade 2 da última sessão



Fonte: Participante A2

Os participantes A6 e A9 produziram o desenho prototípico do quadrado assim como A2 e A7, obtendo sucesso na situação de construção, porém com comprimento do lado igual a 9 cm, remetendo a uma confusão entre os conceitos de área e perímetro, conforme recorte a seguir:

Figura 231 – Confusão entre os conceitos de área e perímetro na produção de quadrados

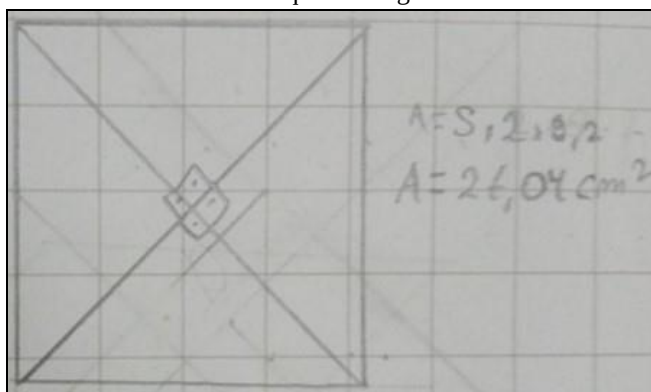


Fonte: Participante A9

É possível notar na figura produzida por A9 que ele marcou pontinhos no lado vertical esquerdo e embaixo na horizontal, assim como havia ladrilhado figuras com quadradinhos na décima sessão. Para ele, bastava colocar nesses dois lados e somar os quatro, levando ao número que designa o perímetro (36) igual ao da área que também era 36.

Os participantes A8, A10 e B12 fizeram corretamente o desenho prototípico do quadrado, também obtendo sucesso na tarefa elementar voltada à situação de construção, mas com área menor que a da figura dada (insucesso na produção). A8 e B12 indicaram 4 cm de comprimento do lado, porém, se considerarmos a quantidade de quadradinhos utilizada, o desenho de A8 continha cinco deles em cada lado. Já A10, ainda em decorrência do erro de cálculo numérico na medição da área do paralelogramo não retângulo e não losango dado, fez um quadrado com a indicação do comprimento do lado igual a 5,2 cm, como mostrado a seguir:

Figura 232 – Quadrado produzido com área menor que a da figura dada na atividade 2 da última sessão

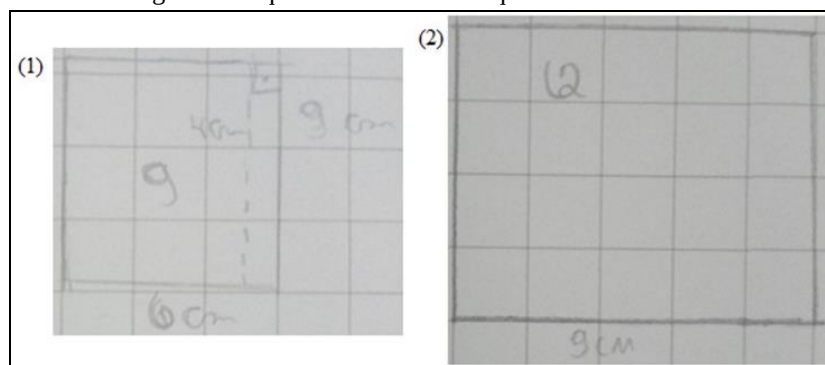


Fonte: Participante A10

Na figura produzida, percebemos a indicação das diagonais de mesmo comprimento e perpendiculares. No cálculo ao lado, há erros na álgebra das grandezas devido à multiplicação dos números e obtenção de uma grandeza como resultado. Como ele havia encontrado incorretamente 27 cm^2 de área na figura dada, produziu com uma área próxima desse valor, visto que não é um quadrado perfeito como 36 cm^2 que seria o correto. Destacamos que o comprimento real do lado do quadrado desenhado acima é de 4,2 cm, ou seja, não está em verdadeira grandeza, assim como o de A8.

Diferentemente dos casos apresentados acima em que todos obtiveram êxito na situação de construção ao fazer o desenho prototípico do quadrado, embora com área menor ou maior, insucesso na situação de produção, ou mesmo sem estar em verdadeira grandeza, os participantes A4 e B4 não conseguiram desenhar corretamente o quadrado, pois fizeram retângulos não quadrados, ambos com área menor que a da figura dada. Apresentamos os dois recortes em seguida, pois remetem a produções diferentes e apenas um deles não representaria o outro:

Figura 233 – Desenhos de retângulos não quadrados em vez de quadrados na atividade 2 da última sessão



Fonte: (1) A4, (2) B4

No primeiro desenho, assim como nos demais realizados por ele nessa atividade, A4 tentou inserir de maneira incorreta todos os comprimentos do paralelogramo não retângulo e não losango dado. Ainda se desconsiderarmos as dimensões indicadas, o lado na posição horizontal é menor que o da vertical, remetendo a um retângulo não quadrado. Já no segundo, B4 indicou apenas o comprimento de um dos lados como sendo 9 cm. No entanto, se observarmos o desenho, também se trata de um retângulo não quadrado, pois contém cinco quadradinhos na horizontal e quatro na vertical.

De modo geral, apesar de a utilização e boa exploração do procedimento geométrico de decomposição e recomposição ter evitado em alguns momentos erros no cálculo da área da figura dada e relativos à confusão entre os conceitos de área e perímetro, e de termos observado a indicação de propriedades importantes relativas às figuras desenhadas, como consequência do trabalho realizado no campo da Geometria no início, nenhum deles se apoiou na situação de inclusão para fazer um quadrado como resposta única que atenderia a todas as solicitações, como previsto na análise a priori. Em nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018), dois dos 40 participantes fizeram dessa maneira, mas cabe ressaltar que se tratava de estudantes com um bom desempenho geral e que não enfrentaram dois anos de pandemia como os nossos participantes atuais. Apenas o participante B12 fez um quadrado quando solicitado a produzir um losango. Os estudantes apresentaram um desempenho melhor na produção do retângulo não quadrado, provavelmente, como já dito, pela possibilidade de decompor o paralelogramo não retângulo e não losango dado e recompor em um retângulo não quadrado de mesma base e altura em desenho prototípico.

Ao final, percebemos a necessidade de realizar uma discussão e sistematização, assim como fizemos ao longo da experimentação, trazendo recortes das respostas apresentadas, pois essa prática se mostrou muito produtiva, promovendo momentos riquíssimos de discussão e

aprendizagem, a qual poderia ajudá-los a diminuir algumas dificuldades que ainda se mostraram persistentes.

5.14 DISCUSSÃO DAS ENTREVISTAS COM OS PARTICIPANTES E COM A PROFESSORA

Com pouco mais de um mês após o término da experimentação, mais precisamente nos dias 25 e 26 de outubro de 2022, realizamos entrevistas com os participantes e com a professora de Matemática deles com o objetivo de conhecer a percepção desses estudantes e da professora sobre os encontros e atividades realizadas, indo além dos aspectos que a engenharia didática possibilitou observar. As entrevistas foram realizadas na sala de informática da escola campo de pesquisa, com os participantes liberados um a um pela professora durante suas aulas de Matemática e, com ela, após o término do expediente matutino.

5.14.1 Discussão das entrevistas com os participantes

A seguir, vamos apresentar as perguntas feitas aos estudantes seguidas de suas respectivas discussões a partir de sínteses das respostas obtidas em cada uma delas.

O bloco 1, intitulado Convite a um amigo, foi composto por duas perguntas, as quais são apresentadas e discutidas a seguir:

- Se eu fosse fazer essas mesmas oficinas no próximo ano, você sugeriria que algum(a) amigo(a) seu participasse? Por quê?

Nesta pergunta, todos responderam que sim, indicariam um colega para participar caso fôssemos realizar as sessões novamente no ano seguinte. Quanto aos motivos apresentados por eles, todos falaram questões relativas à aprendizagem de conhecimentos novos, além de que, para eles, foi muito bom. Vejamos alguns recortes das falas de alguns deles: A7: “*Sim, porque, tipo, ensina várias coisas, tipo, que a pessoa não sabia sobre Matemática e vários conhecimentos novos*”. O participante A8 disse que: “*É, eu, pra mim foi interessante, né, eu gostei muito, eu aprendi alguma, assim, eu não sabia nem de muitas coisas. Depois quando eu comecei ir pra, pra essa oficina, aí eu, é, aprendi mais coisas [...]*”. Em ambos os casos, observamos falas que remetem a novos aprendizados, implicando na ampliação dos repertórios de esquemas desses estudantes após lidar com diferentes classes de situações.

Já o participante B12, por residir na zona rural, lamentou que outros colegas não pudessem participar devido à dificuldade com transporte e por não terem onde ficar: *“Eu gostei muito, aí tinha alguns amigos meus que, que gostaria de vir, mas era do sítio [...], os meninos, disse que gostou e queria vir, mas o transporte também, né, e o lugar de ficar”*. Cabe ressaltar que B12 esteve presente em todos os encontros e foi um dos que apresentou uma evolução muito boa ao longo da experimentação. Após suas aulas no turno da manhã, ele almoçava na casa de alguns parentes ou, às vezes, na própria escola, participava dos nossos encontros à tarde e voltava para sua residência ou com o pai, que trabalhava na cidade, ou de carona no transporte público que pegava os estudantes do turno da noite. A escola lamentou não poder fornecer almoço a todos aqueles que quisessem ficar, uma vez que já podiam merendar ao término dos encontros, junto com os alunos do turno vespertino. A questão do transporte também foi analisada pela Secretaria Municipal de Educação, mas sem êxito devido a outras demandas já existentes. Passemos à pergunta seguinte:

- *Como você convidaria esse(a) amigo(a) e o que você diria para ele(a)?*

Os argumentos apresentados como respostas à pergunta acima foram positivos, muitos deles voltados novamente à aprendizagem e também à maneira, segundo eles, criativa e divertida como os encontros ocorreram. O participante A6 falou que: *“Eu diria que é um, como é que eu posso falar, umas aulas boas. Interessante que junta bastante a criatividade com conhecimento matemático”*. E B4 disse que: *“Rapaz, ia chamar ele e dizer que a aula é, é introdutiva, tipo, tem hora que, é, a gente aprende bem dizer na, no modo de falar, na brincadeira, né. Em partes brincando, o cara vai entendendo e ia chamar ele”*.

Em outros argumentos, os estudantes atribuíram qualidades positivas ao pesquisador como condutor dos encontros, como vemos na fala de A9: *“Que quando entrasse, é, tinha um professor lá muito bom pra ensinar eles sobre esses assuntos, que é um assunto muito, é, né, dificultado [se referindo a difícil]. Que é um assunto muito novo”*. O participante A10 falou que convenceria o seu colega a participar da seguinte maneira *“Ah, eu diria assim oh: olha, tem um curso muito bom ali que o professor Jailson, que ele ensina muito bem e tá tentando dar o melhor dele para poder garantir a educação das pessoas, tá entendendo? Porque é bom, sabe, é bom”*.

No segundo bloco de perguntas, intitulado Sugestões para a dinâmica dos encontros, tentamos conhecer o que eles gostariam que fosse mantido e o que poderia ser melhorado para aplicações futuras. A primeira pergunta e a síntese das respostas são apresentadas a seguir:

- *Em relação à maneira como os encontros aconteceram, o que você acha que deveria ser feito do mesmo jeito? Por quê?*

Nesta pergunta, todos falaram que deveria ser feito tudo do mesmo jeito, como a fala apresentada a seguir de A7: *“Tudo! É tipo, foi um jeito muito bom, explicativo. Então, ficou bom desse jeito”*. O participante A10 falou que:

A10: Eu acho que num, num tem nada a mudar, não, sabe? Por que tá, tá bom demais. O jeito que vocês ensinam é um jeito diferente, sabe? É um jeito muito diferente que, tipo, eu nunca vi nenhum professor ensinando. Sempre o professor ele botava no quadro, desenhava, entendeu? O senhor botava, é, com exemplo, tipo, essa folha, essa, essa [apontando para o papel quadriculado e pontilhado] e várias coisas. Tipo, teve uma vez na aula que o senhor deu um, um, uma folha toda cortada.

P: Essa aqui [apontando para o pedaço de papel branco para dobraduras].

A10: É essa daí mesmo! Aí o senhor botou pra gente poder dobrar pra gente ver os ângulos.

P: Hunrum.

A10: Se era perpendicular, se era essas coisas.

P: Hunrum.

A10: Aí tá bom demais o jeito que o senhor tá fazendo.

Mais uma vez o participante A10 destacou a maneira como os encontros foram conduzidos e apresentou algumas características do funcionamento do ensino, vertente didática da ED, que vivenciou ao longo dos anos escolares, parecidas com aquelas que observamos durante o estágio supervisionado da graduação, citadas na parte introdutória desta tese. Para finalizar essa questão, apresentamos a fala de B12: *“Eu, eu gostaria que fizesse do mesmo jeito que eu gostei muito que o senhor explicava, essas coisas. Eu gostei muito do, daquele jeito”*. A segunda pergunta foi:

- *O que você acha que eu não deveria fazer ou que poderia fazer de outro jeito? Por quê?*

Embora na pergunta anterior tenha sido unânime que deveríamos fazer do mesmo jeito, tivemos algumas sugestões a partir desse segundo questionamento. Os participantes A7, A9, A10, B4 e B12 continuaram afirmando que poderia fazer igual, como vemos nas falas a seguir de A9 e B12: A9: *“Rapaz, todas as coisas eu achei bom viu. Pra mim, não teve nada assim, não”*. B12: *“Não, do jeito que o senhor tava fazendo, tava bom. Num precisava mudar, não”*.

Já os participantes A2, A4, A6 e A8 propuseram algumas sugestões para encontros futuros. As propostas dos dois primeiros foram relativas às atividades, sendo que B4 disse que

poderíamos “*Fazer de um jeito que, que podia ser mais fácil pra gente*”. Realmente notamos certa dificuldade por parte dele ao longo da experimentação. Já o participante A2 propôs que fizéssemos mais atividades junto a eles, possivelmente, ligado ao contrato didático vigente em sala notado durante as observações de aula:

P: [...] quando você diz assim “fazer mais tarefas com a gente”, seria eu colocar mais tarefas pra vocês fazerem ou eu fazer junto com vocês?

A2: Fazer junto com a gente. [Ligado ao contrato didático verificado nas observações de aula].

P: Fazer junto com vocês?

A2: É.

P: Tá. É, mais alguma coisa?

A2: Só isso.

O fato de termos priorizado os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, tornando a intervenção de outros campos secundária, como é o caso do numérico, também foi percebido pelos participantes, conforme trecho de A6 a seguir:

A6: A gente podia ter visto mais número também.

P: Certo.

A6: Que foi uma coisa um pouco, deixou de fora, né.

P: Hunrum.

A6: Trabalhou com parte geométrica, eu acho que é isso.

O participante A8 propôs mudanças na estrutura dos encontros, mais precisamente, na sua duração que, segundo ele, poderia ter ido até o final do ano, como podemos observar no trecho a seguir:

A8: Tipo assim, ter ido além, né, passado, ter passado mais alguma coisa. Entendeu?

P: Então, no caso assim, seria continuar?

A8: É.

P: Ter mais encontros?

A8: Isso.

P: Aí, isso aí, seria algo que você, que eu poderia fazer de outro jeito?

A8: Hunrum.

P: Mais alguma coisa?

A8: Não. Só isso mesmo.

P: É...

A8: ... e também eu gostei. Eu achei que isso aí ia ser até o final do ano, né.

Apesar de considerarmos que nossa sequência didática foi relativamente longa, o participante A8 esperava que ela fosse até o fim do ano de 2022, mesmo tendo sido realizada no contraturno desses estudantes. A outra pergunta desse bloco foi a seguinte:

- *Sobre a organização dos encontros com momentos de atividades individuais e em grupo, momentos de troca de atividades entre os participantes para debate, discussão das respostas e explicações no quadro com a turma toda, o que você achou interessante e o que mudaria e por quê?*

Todos os participantes, com exceção de A10 que não foi tão explícito em sua resposta, acharam mais interessantes os momentos de atividades em grupos e debates com os colegas por meio da troca de respostas para tentarem convencer o outro, conforme exemplificado na fala de A7: *“Eu achei interessante tudo, mas principalmente nas atividades que eram em grupo, porque a gente, tipo, mesmo se tivesse alguma coisa que não concordava um com o outro, a gente tentava fazer o outro concordar e enxergar nossos pensamentos”*; e na fala do participante B4: *“O que eu achei interessante é que a parte de, de troca de, é, de folhagem no caso da atividade, é, pelo menos cada um tinha seu pensamento, como a gente ia pensar, como um colega meu pensava e eu pensava de outro jeito”*.

Apenas os participantes A4, A6 e A10 sugeriram algumas mudanças. O primeiro deles, A4, disse que as atividades eram *“Pra ser mais em grupo, pra trocar mais ideia”*. O participante A10 sugeriu mudanças na maneira como falávamos em alguns momentos, pois ele não compreendia muito bem: *“Por que tinha vez que o senhor dizia, aí eu ficava meio embolado, como assim, como assim e tal? Aí eu acharia melhor, tipo, a forma do senhor dizer, de uma forma mais simples e fácil, tá entendendo?”*. O rigor teórico-metodológico a partir do qual a sequência foi pensada e concebida pode ter sido refletido em alguns momentos de nossas falas, causando essa dificuldade na compreensão de alguns termos. Já o participante A6 propôs mais uma opção para os debates em grupos:

A6: Eu achei interessante que todo mundo tinha seu ponto de vista, né, pra ler. Se tivesse errado, o cara ia, corrigia e o que podia mudar era, que podia fazer como se fosse um, um debate, meia sala com cada um, aí discutia cada um com cada qual.

P: Sei. No caso, por exemplo, assim, quem tivesse resposta comum ia pra um lado.

A6: É. E quem tivesse em outro comum, ia pro outro.

P: Legal. Boa ideia!

A última pergunta desse bloco voltado à dinâmica dos encontros foi sobre os materiais utilizados, como segue abaixo:

- O que você achou dos materiais utilizados?

Mais uma vez tivemos unanimidade nas respostas, pois todos gostaram, acharam interessantes, legais etc. Cabe ressaltar que todos os materiais foram levados e distribuídos sobre uma mesa próxima ao local das entrevistas, de fácil visualização pelos entrevistados. O participante A10 voltou a falar na maneira como o seu ensino funcionou em momentos anteriores e como passou a ser durante os encontros:

A10: Eu achei superlegal porque é uma forma diferente, tá entendendo, diferente de aprender, diferente de ensinar. Sabe que, tipo, como eu disse já anteriormente, é diferente dos outros professores.

P: Hunrum.

A10: O senhor botou outro tipo de, como é que eu posso dizer, outro tipo de jeito de aprender, tá entendendo? Que, tipo, os professores só faziam escrever, escrever, escrever e no final a pessoa ficava ainda com dúvida. Esse aqui, a pessoa era mais fácil de entender, tá entendendo? É mais fácil, mais fácil de entender porque a folha, o papel, a régua [apontando para os materiais utilizados], tá entendendo?

P: Hunrum.

A10: Aí fica muito mais fácil de aprender.

O participante B4 falou de suas dificuldades iniciais e a diminuição delas ao longo dos encontros: *“No começo eu não entendia nada, mas depois achei legal. O cara vai entendendo, sabendo como é os nomes e é fácil de se usar”*. Já B12 falou que: *“Achei diferente e interessante que eu nunca tinha, tinha alguns que eu nunca tinha visto, mas eu gostei muito”*. B12 e a maioria dos participantes gostaram mais do Tangram, pois, segundo ele: *“Por que a pessoa pegava, imaginava, tentava formar as formas imaginando e, no final de tudo, ficava igual à forma que a pessoa queria”*. Já A7 deu destaque ao papel pontilhado, mesmo sendo algo novo para ela: *“Eu achei bem interessantes porque, tipo, principalmente o papel, esse daqui pontilhado, porque a gente aprendeu a fazer, tipo, algumas formas que eu não sabia ainda que existia”*.

No terceiro bloco fizemos a seguinte pergunta relativa às atividades realizadas durante a experimentação:

- Esse caderno tem todas as atividades que realizamos nas oficinas. Você poderia comentar algumas delas, destacando atividades que gostou mais, atividades que não gostou muito ou atividades que poderiam ser modificadas?

Das 26 atividades realizadas durante a experimentação, em apenas seis delas foram propostas modificações e três eles falaram que retirariam, como apresentado no quadro a seguir:

Quadro 67 – Atividades indicadas para modificações pelos participantes nas entrevistas

Atividades indicadas pelos estudantes para serem modificadas ou excluídas			
Sessão	Atividade	Participante	Sugestão e motivo
1ª	Complementar	A8	Modificaria para deixar “nem muito fácil, nem muito difícil”, pois teve dificuldade para fazer.
2ª	1	A10	Modificaria para facilitar com a indicação de exemplos de figuras que poderiam ser desenhadas.
5ª	Única	A2	Retiraria, pois não gostou muito (achou ambas difíceis).
7ª	Única		
8ª	2	A6	Retiraria, pois achou difícil desenhar as figuras formadas com Poliminós na malha quadriculada.
		A10	Modificaria apenas a letra (b), trocando a palavra “afirmar” por “confirmar”.
9ª	1	A4	Modificaria para deixar as áreas “mais ou menos parecidas”, pois achou difícil desenhar.
		B4	Modificaria para deixar os quadradinhos da malha de 0,5 cm de lado maiores, pois achou complicada.
9ª	2	A2	Modificaria para deixar mais fácil.
12ª	1	A2	Retiraria, pois não gostou muito (achou difícil).
12ª	2	A2	Modificaria para diminuir a dificuldade.

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com o quadro acima, percebemos que todos os participantes que propuseram modificações ou sugeriram retirar alguma atividade foi porque tiveram mais dificuldades nelas. No caso do participante A2, sempre que ele falava que não gostou de determinada atividade, sua sugestão era de torná-la mais fácil. Assim, percebemos e confirmamos que, na verdade, ele achou-as difíceis, como esclarecido a seguir:

P: Aí você acha que deveria ser como, na sua opinião?

A2: Um pouquinho mais fácil.

P: Um pouquinho mais fácil?

A2: É.

P: Então, no caso, essas que você não gostou é porque você achou difícil?

A2: Foi.

O participante A10, além da sugestão de apresentar exemplos com nomes de figuras que poderiam ser desenhadas com quatro lados na atividade 1 da segunda sessão, propôs uma mudança de palavras na letra (b) da atividade 2 da oitava sessão que, segundo ele, “afirmar” o deixou em dúvida, como explicado a seguir:

A10: Aí, é tipo assim, é a forma, tá entendendo, da pessoa ler.

P: Sei.

A10: Tipo assim, o que é possível [se referindo à pergunta da letra (b)], se fosse o que é possível confirmar, aí eu já ficava, eu já ficaria meio, já mais de boa.

P: Hunrum.

A10: Agora o que é possível afirmar, eu já fiquei, eu só tô com dúvida por causa desse...

P: ... dessa palavra afirmar?

A10: Afirmar! Só isso.

A entrevista com a participante A7 caminhou para uma direção diferente da maioria dos participantes. Como ela disse que gostou de todas as atividades, que achou bem divertidas e não propôs nenhuma modificação, suas falas foram no sentido de uma análise comparativa

entre o que fez naquele momento e o que faria agora, após o término dos encontros, mesmo sem termos pedido que falasse dessa maneira. Sobre a atividade 1 da segunda sessão em que deveriam desenhar oito figuras diferentes com a condição de que tivessem quatro lados, ela falou que:

A7: Essa aqui também eu gostei, só que eu achei um pouco difícil ter que fazer algumas coisas com quatro lados. Só que depois quando você mostrou lá no quadro outras formas que eram com quatro lados, aí minha mente abriu, que eu não tinha imaginado que poderia existir desses outros jeitos.

No caso da atividade única da quinta sessão em que deveriam analisar afirmações relativas à inclusão de classes e as recíprocas, A7 disse que: *“Essa daqui também eu faria de outra maneira, tipo aqui, todo quadrado é um retângulo, é; mas todo retângulo é um quadrado, eu marquei que sim, mas não é”*. Quanto à verificação de maneira operatória de propriedades das diagonais, atividade 2 da sexta sessão, a participante A7 comentou: *“Ah, essa daqui também eu gostei, só que eu não sabia logo quando entregou a atividade o que eram as diagonais. Eu pensava que, sei lá, diagonais, eu não sei, eu pensava que eram os lados”*. As falas acima são mais um exemplo de diminuição de dificuldade dos estudantes, ampliação do seu repertório de esquemas e aprimoramento da forma prediativa do conhecimento.

E não foi apenas em atividades do campo da Geometria que ela fez essa autoavaliação, destacando sua evolução. No campo das Grandezas e Medidas também houve falas de A7 nesse sentido como, por exemplo, na atividade 2 da nona sessão em que deveriam calcular a área da figura dada utilizando diferentes peças do Tangram, ela disse: *“Ah, essa daqui também eu achei bem legal, principalmente na parte que foi aquele triângulo grande do Tangram, eu fiquei: não cabe aqui! Mas cabe porque cabe dois do médio e cabe quatro do pequeno. Então, cabe sim, é mesma área”*. Na atividade 1 da décima primeira sessão em que deveriam explicar como calcular a área de um paralelogramo não retângulo e não losango sem dados numéricos fornecidos, ela falou que:

A7: Essa daqui também eu achei muito legal pra calcular a área que, tipo, você assim de primeira, você não vai saber como faz a área, você vai pensar que esse lado daqui com esse que dá a área [se referindo ao produto dos comprimentos dos lados do paralelogramo não retângulo e não losango], mas é a altura vezes a base.

Como vemos, apesar de não ter mobilizado o teorema em ação falso segundo o qual a área de um paralelogramo não retângulo e não losango é o produto dos comprimentos dos seus lados, ela apontou tal possibilidade em um primeiro contato com essa figura e que não deve ser realizada. Com relação à última sessão, a participante A7 falou que gostou muito das atividades, mas que teve dificuldade no cálculo da área do losango não quadrado e em fazer

seu desenho, assim como no cálculo da área de um quadrado em desenho não prototípico dado apenas o comprimento da diagonal que, segunda ela, “[...] *eu me compliquei toda*”.

Por fim, confirmando o que verificamos em sala durante os encontros, o participante B12 falou que gostou de todas as atividades e não modificaria nenhuma delas, mas que teve dificuldade nas explicações (forma prediativa do conhecimento), possivelmente, por termos rompido com o contrato didático vigente em sala ao qual ele estava habituado:

B12: As únicas partes que eu achei mais difícil foi nessa parte de explicar.

P: De explicar?

B12: É, oxe.

P: De dizer...

B12: ... é, de dizer...

P: ... como pensou, né, ou como você fez.

B12: A de explicar era uma parte muito difícil, mas quando era em grupo, era mais fácil que ia perguntando se era isso ou aquilo com os meninos.

P: Hunrum.

B12: Aí era mais fácil de concluir.

Diferentemente dos participantes A2 e A6 que sugeriram retirar algumas atividades por terem achado difícil respondê-las, o participante B12 falou o seguinte:

B12: Só não sei se os outros meninos gostaram, né. Mas eu gostei muito de todas. Não mudaria nada, não.

P: Hunrum. E a parte de explicar que você disse que tinha um pouco de dificuldade, você manteria ainda?

B12: Manteria.

P: Você acha que ela foi importante?

B12: Foi.

No quarto e último bloco de perguntas, intitulado Considerações gerais, procuramos saber as implicações da participação nos encontros na maneira de os estudantes olharem para a Matemática e se aceitariam ser monitores em oficinas futuras envolvendo as atividades trabalhadas. Vejamos a primeira pergunta com a síntese de suas respostas:

- *Você acha que os encontros o(a) ajudaram a olhar para a Matemática de uma maneira diferente? Poderia dar algum exemplo?*

Nesta pergunta, todos afirmaram que sim, ajudou, e a maioria dos exemplos apresentados foi relativo ao dia a dia da sala de aula, estabelecendo relações entre o que a professora da turma trabalhava e o que foi visto nas oficinas. Algumas falas são apresentadas em seguida:

A9: Ajudou e muito.

P: Poderia dar algum exemplo?

A9: Algum exemplo é, tipo assim, tem vez que PAB [professora da turma] coloca lá alguma figura, tal. Pronto, essa semana, ontem, tava tendo um negócio de ângulo de

cento, é, noventa graus, é, cento e oitenta graus, aí quando ela já passou isso na página, eu já sabia já. Já tava meio ligado já no que era.

P: Certo. Legal!

Assim como A9, os participantes A6, A7, B4 e B12 também trouxeram exemplos nesse sentido. A participante A7, cuja forma predicativa do conhecimento é bem clara e objetiva, falou que:

A7: Sim, porque tipo, quando a gente ia lá pros encontros, a gente aprendia várias coisas diferentes que, tipo, eu não imaginava que existia, tipo, eu não achava que o quadrado era um retângulo também. Eu pensava que era apenas um quadrado. Mas depois que eu descobri um retângulo, aí eu fiquei né. Também a gente aprendeu outras coisas sobre ângulos, áreas e quando a gente ia pra escola, tinha essas mesmas coisas. Aí a gente comentava lá que a gente aprendeu isso nas oficinas de Matemática.

Assim como A7, os participantes A2 e A8 também destacaram a aprendizagem de conhecimentos novos. Vejamos o que disse o estudante A8:

A8: Sim.

P: Poderia dar algum exemplo?

A8: Por que assim, eu não sabia, né, que existia, assim, que eu poderia ir mais além do que isso, entendeu? Eu num, depois que teve essa oficina, eu aprendi mais alguma coisa, comecei a me interessar sobre isso, entendeu?

P: Hunrum.

A8: Foi bom, eu gostei muito, adorei, né! E cada dia mais, eu tô aprendendo também com isso.

P: Certo.

A fala acima, confirmada pela professora como veremos mais adiante, é pertinente no sentido de que despertou interesse no participante A8 que achava que não poderia ir além do conhecimento que já tinha e que continua aprendendo mais a cada dia. Essa motivação e melhora na aprendizagem também foi manifestada por A4 que falou na diminuição de dificuldades anteriores no campo da Geometria: *“Me ajudou a ver a Matemática de um jeito bom, pra um jeito que, principalmente essa Matemática que envolvia figura que eu não entendia muito e agora tô compreendendo mais”*.

Finalizando essa pergunta, apresentamos a fala do participante A10 voltada a relembrar assuntos que havia esquecido e a uma mudança de visão, a partir da qual passou a enxergar elementos do campo geométrico em vários objetos do dia a dia:

A10: Eu achei, sim. Eu achei que sim porque, tipo, eu tava, como eu disse anteriormente, eu disse que eu tava meio esquecido dessas coisas sabe, que tipo, se alguém me perguntasse algo que, o que isso forma pra você? Se é um ângulo de noventa graus? Aí eu não saberia responder.

P: Certo. Essa quina aqui do papel.

A10: É.

P: Da folha, da cartolina.

A10: Eu ficaria assim, o quê? Como assim? Mas depois que, dessas aulas, eu, realmente, eu tô enxergando diferente. Eu enxergo, tipo, o quadro eu vejo um, um ângulo de noventa graus, outro ângulo, outro ângulo. Aí chega ali, é outro ângulo de noventa graus. Foi bom, tá entendendo?

P: Certo.

A última pergunta das entrevistas com os participantes foi a seguinte:

- *Você aceitaria ser monitor em algumas oficinas com outros estudantes na escola, envolvendo atividades e materiais que utilizamos ao longo dos encontros?*

Nesta pergunta, apenas o participante A10 respondeu que não. Mesmo sendo bem participativo durante os encontros e com bom desempenho geral, ele disse que:

A10: Não. Eu não queria ser monitor, não, sabe?

P: Queria não?

A10: Porque, é tipo, num, num presto muito pra essas coisas porque eu sou meio desastrado, aí acaba que eu fico, começo a gaguejar, começo a, a tremer. Aí não, seria melhor, não, tá entendendo?

P: Certo, A10.

Os demais responderam que aceitariam. O participante A6 complementou o seu sim dizendo que: *“Parece ser um trabalho bem divertido [...]”*.

Em resumo, com a realização dessas entrevistas, percebemos que as atividades, materiais e dinâmica dos encontros foram bem avaliados, e, principalmente, contribuímos para a aprendizagem e diminuição de dificuldades dos participantes, que enfrentaram dois anos de pandemia, além de ajudar no dia a dia escolar de cada um deles. Vejamos o que disse a professora a respeito desses estudantes em sala de aula e a sua avaliação acerca dos materiais e das atividades propostas.

5.14.2 Discussão das entrevistas com a professora de Matemática dos participantes

A seguir, vamos apresentar as perguntas feitas à professora de Matemática (PAB) dos participantes, seguidas de suas respectivas discussões a partir de sínteses das respostas obtidas em cada uma delas.

No primeiro bloco, intitulado Possíveis Impactos das oficinas sobre os alunos, fizemos a seguinte pergunta:

- *Entre os estudantes que participaram das oficinas comigo, você notou alguma mudança em sala, por parte deles, relativa ao comportamento, participação ou desempenho na resolução das atividades? Poderia citar algum exemplo ou algum aluno?*

A resposta da professora a esta pergunta confirmou falas de participantes anteriores, como A8 e A9, também citados por ela:

PAB: Veja, é, alguns, né, realmente, eles, eles mudaram. A8 mesmo, citando nomes, né, A8 melhorou muito e de uns dias pra cá ele está bem melhor. Todo mundo está comentando dele. Aí sempre quando eu boto uma atividade que vem uma figura, aí fala numa área, “a gente aprendeu com o professor Jailson”, “a gente viu isso com o professor Jailson” [citando falas dos alunos]. A9 do mesmo jeito. [...]. Por que, às vezes, tem aquele percurso, né: no começo do ano estão melhor, no, aí quando vai chegando o final do ano estão preguiçosos e eles, não sei se foi por causa do, do projeto, né, do seu trabalho, mas eles estão naquele mesmo pique. A maioria continua respondendo, se esforçando, né, na resolução das atividades, dos trabalhos propostos.

A partir da fala acima, percebemos impactos positivos da realização das oficinas sobre a participação dos estudantes em sala durante as aulas de Matemática, havendo até uma ruptura em relação ao que ela estava acostumada a vivenciar, na qual os estudantes começam o ano bem dispostos e iam perdendo o interesse e disposição quando se aproximava do fim do ano.

Ao questionarmos sobre o desempenho dos participantes na resolução de atividades, ela falou que há *“assuntos que eles se dão melhor, tem assuntos que eles não se dão tão bem. É, e assim, os assuntos que a gente estava vendo, não estavam bem dentro da sua, das oficinas, né”*. No entanto, complementou que quando em uma *“questão que aparecia alguma coisa que eles viam, eles sempre estavam ali lembrando que estavam vendo, estavam estudando”*. Sobre os assuntos que trabalhou concomitantemente ao período de realização das oficinas, vamos falar na última parte da entrevista.

No segundo bloco de perguntas, falamos sobre as atividades, os recursos que utilizamos durante os encontros assim como a dinâmica adotada. A primeira pergunta desse bloco foi:

- Esse caderno tem todas as atividades que realizamos nas oficinas e que lhe entregamos na culminância. Entre essas atividades, você indicaria alguma que pudesse ser vivenciada com toda a turma, ao trabalhar os assuntos paralelogramo e área do paralelogramo? Se sim, qual ou quais?

Esse momento foi importante porque percebemos alguns indícios do que é área para a professora dos participantes e também, mesmo sem perguntarmos, algumas limitações relativas à situação de inclusão. Inicialmente, sobre as atividades, ela falou que trabalharia com os estudantes *“toda aquela onde apareceu a figura, né, eu acho que, que dá”*. Diante dessa fala e por não ter indicado nenhuma questão sem figuras ao folhear o caderno de atividades, notamos que, para ela, questões que as contém são mais apropriadas para se trabalhar com os estudantes. Complementou sua fala dizendo:

PAB: Mas eu acho que também dá dependendo da turma porque assim, a gente tem que começar tudo tão [simples], para que eles entendam o que é uma área. Por mais que a gente diga o que é uma área, chão, chão, chão, superfície, mas eles ficam tão sem entender, às vezes, o que é área.

É possível perceber na fala acima indícios de uma concepção geométrica de área, associada ao chão e superfície. Notamos ainda que ela opta por tentar dizer o que é área, ao invés de propor atividades que levem os estudantes a irem construindo o seu conceito.

Ao chegar na atividade 1 da décima segunda sessão, a partir da qual trabalhamos a atribuição de sentido à expressão de área do losango recortando suas diagonais, ela falou que:

PAB: Essa aqui é mais para diagonal.

P: Mas utilizaria ela também ou não?

PAB: Para área?

P: Para trabalhar ou o paralelogramo ou a área do paralelogramo.

PAB: Ah, sim. Se é para trabalhar ele também, sim.

Podemos inferir a partir da fala acima que ela não considera relevante, ou até mesmo não trabalha com os estudantes, propriedades relativas às diagonais e o porquê da utilização da expressão de área que a envolve, apesar de ter optado anteriormente por atividades que continham a presença de figuras. Ainda sobre essa atividade:

PAB: Por que o losango é quase um paralelogramo, né?

P: Hunrum.

PAB: É quase? Ou é? [Dúvida]. Porque tem uns negócios aí que eu fico meio, tem aquela de o quadrado é um retângulo, o retângulo é um quadrado. Eu me atrapalho tanto nessa vida quando eu fico em casa, quem é quadrado, quem é retângulo [se perguntando a si mesma]. Mas porque o, o retângulo que é um quadrado é, Jailson?

P: O quadrado é um retângulo. Todo quadrado é retângulo.

PAB: Ah, todo quadrado é retângulo?

P: Isso.

Inicialmente, preferimos não ir a fundo nesse assunto para não comprometer o restante da entrevista visto que foi perto do horário de almoço dela. Como continuou questionando, decidimos falar rapidamente:

PAB: Mas o retângulo?

P: Nem todo retângulo é quadrado.

PAB: Eu me, olhe, eu fico nessa paranoia e toda vez eu me esqueço. Todo quadrado é um retângulo?

P: Isso.

PAB: Todo quadrado é um retângulo.

P: Porque a definição de retângulo que a gente adota é: o retângulo é um quadrilátero que possui os quatro ângulos retos.

PAB: E o quadrado também?

P: O quadrado também tem. O mesmo para o losango. Todo quadrado é losango. Por que o que é um losango? O losango é um quadrilátero que tem os quatro lados de mesmo comprimento. Como o quadrado também tem...

PAB: ... então, ali o que eu falei deu errado num foi? Do, do losango e o paralelogramo? [Ficou rindo e falou algo baixinho que não entendemos].

P: O losango também é paralelogramo.

PAB: É porque é tanta definição.

P: É porque depende do que você está, da definição, é.

PAB: É.

P: Tem gente que diz, tem definição que não inclui, né. Mas a que eu adoto e que eu trabalhei com eles, inclui. Diz que o quadrado é retângulo e losango, e quadrado, retângulo e losango são paralelogramos.

PAB: Eu me atrapalho que só nessa parte vi.

A dúvida apresentada relativa às definições e inclusão de classes, campo da Geometria, aponta para a necessidade de formações com professores explorando diferentes definições dos paralelogramos e a importância de manter coerência ao adotar uma delas, sem desconsiderar a importância das demais. Muito provavelmente, ela não trabalha essas situações ao estudar os paralelogramos e sua área com os estudantes justamente por ter tais dúvidas.

A segunda pergunta desse bloco também foi sobre as atividades, conforme mostrada a seguir:

- Você pode comentar se eliminaria alguma atividade ou se faria alguma modificação nas atividades (se sim, que modificação)?

A professora falou que não realizaria mudanças nas atividades, a não ser que fosse para torná-las mais contextualizadas, como mostrado no trecho a seguir:

PAB: Pronto, elas são bem objetivas, né? Que também faz muito parte da Matemática. Eu acho assim, que tem aquele conteúdo mais objetivo, aquela atividade mais objetiva pra depois a gente contextualizar. Por que se, se não for assim. Então, eu gostei das atividades, que eu já tinha visto já, sabe?

P: Hunrum.

PAB: Eu estou assim folheando porque é tanta coisa no meu juízo, mas eu já tinha visto ele e, e apesar de ter alunos, a gente sabe que tem alunos de vários, né, tem uns que aprendem ligeiro, outros que aprendem mais rápido e, e, e tem toda essa, essa diferença de, de tempo de aprendizagem, mas eu acho que dá.

P: Todas?

PAB: Eu acho que todas dá.

P: Você modificaria alguma? Faria alguma modificação para fazer com eles ou do jeito que está aí, você faria?

PAB: Eu não analisei cada uma, cada uma minuciosamente, não, sabe, Jailson.

P: Certo.

PAB: De ler cada frase, cada item.

P: Hunrum.

PAB: Mas eu acho, assim, pelo nível deles, eles conseguem. Eu não mudaria, não. Porque também eu nem me apropriei de fato, mas assim, pelo que eu já folhee dela, eu acho que num, num acrescentaria nadinha, não.

P: Hunrum.

PAB: Só se fosse assim, né, contextualizar. Mas como eu estou dizendo a você, tem que ter, na Matemática tem a parte mais objetiva e tem a parte mais contextualizada.

P: Certo.

Após dizer que não proporia mudanças nas atividades, ela falou um pouco de como costuma trabalhar: “[...] eu trabalho assim, vejo logo a parte objetiva, aquela parte mecânica de você dominar o algoritmo, de você dominar ela seca para depois a gente ir para, é, para a

parte contextualizada”. E complementou dizendo: “*Apesar de que, às vezes, eu começo já com a parte contextualizada, depois a gente vai só cortando*”.

A professora ainda destacou a dificuldade em utilizar diferentes materiais: “*Agora, já quando vai para material, eu já não garanto tanto porque tem o material, a turma já é numerosa, eles não têm interesse de trazer cada um o seu [...]*”. E citou um exemplo que estava enfrentando no momento que realizamos a entrevista:

PAB: Eu estou no sexto ano, a gente está em polígonos, né, iniciando agora polígonos, aquela parte bem inicial de definição, de identificação, é, a gente viu ângulos, aí para medir ângulos, uma turma de vinte e, acho que uns vinte e três ou vinte e quatro, dez não tem o transferidor, né. Aí eu estou nessa, vão trazendo, quando a maioria trouxer, aí a gente, né, que é para juntar já em grupo, em dupla, pelo menos um vai, né, a gente começa.

A fala dela acima já introduziu a próxima pergunta da entrevista que foi justamente sobre os recursos que utilizamos, os quais, assim como fizemos com os estudantes, estavam dispostos sobre uma mesa próxima ao local da entrevista. Assim, perguntamos:

- *O que você achou dos recursos utilizados?*

Em sua resposta, ela falou que era um material de fácil acesso, de baixo custo, entretanto, uma das dificuldades era sua utilização em turmas numerosas. Vejamos:

PAB: Básico do estudante, né. Isso é básico de um estudante. Mas o acesso é que é complicado. Por ser bem simples, eu não vou dizer que está tudo, que as coisas aqui são caras, né, eles teriam condições. Agora assim, para toda atividade a gente usar isso tudinho, eu acho que fica mais trabalhoso sabe, Jailson.

P: Hunrum.

PAB: Porque eles não trazem material, né? A gente empresta, “quem pode emprestar”, “empresta”, “empresta”, [frases que ela pronuncia em sala] tudo bem, mas as folhas, cada atividade, né, é uma folha para cada menino, apesar de ser barato, né, mas você sabe como é o, o, a escola pública.

A fala acima é uma realidade de muitos professores de escola pública, uma vez que sabemos das dificuldades enfrentadas e o controle no gasto de folhas, como ela falou, é uma delas. Nem sempre há papel disponível para imprimir as atividades e/ou utilizá-lo para outros fins, como dobraduras, por exemplo.

A última pergunta desse bloco foi relativa à dinâmica utilizada nos encontros, como mostrada a seguir:

- *Os encontros foram estruturados intercalando momentos de atividades individuais, em pequenos grupos e com toda a turma, alguns deles iniciando com o resgate do que foi realizado no encontro anterior. Também realizamos trocas de respostas entre os alunos para*

debaterem e tentarem chegar a um consenso, discussão com toda a turma das respostas e resoluções deles, sem identificá-los, no quadro por meio de slides. Muitos dos encontros foram finalizados com uma sistematização do conteúdo trabalhado naquele dia. O que você acha dessa dinâmica?

Em sua resposta, apesar de ter considerado a dinâmica adotada muito boa, ela falou que não a aplicava em sala e um dos motivos foi a correria do dia a dia. Sua fala completa é apresentada a seguir:

PAB: Muito boa, né. Apesar de a gente não aplicar na sala. É porque assim, o conhecimento, ele é muito demorado. Porque se, muitos não, né, para alguns, ele, ele, para você adquirir um conhecimento, tem que ser bem trabalhado, né, Jailson.

P: Hunrum.

PAB: E a sua dinâmica foi muito boa. Que, que realmente dá certo. A gente sabe que se for trabalhar dessa forma que você falou aí, com todos esses, esses meios, é, dá muito certo mesmo. Talvez a gente nas correrias, eu não sei, num sei, eu num sei nem o que dizer, mas a gente fosse trabalhar feito você fez aí, sempre né, usando muitos métodos diferentes, meios diferentes, muitos não, mas dava certo. Foi, foi bom mesmo.

No trecho apresentado, percebemos um elemento importante da Teoria dos Campos Conceituais relativo ao intervalo de tempo necessário para o domínio progressivo de determinado conceito pelo sujeito. Além disso, ser bem trabalhado como ela falou, envolve a utilização de diversas situações e meios para abordar cada uma delas.

Finalizando as entrevistas, o terceiro bloco buscou saber que conteúdos foram vivenciados em sala durante o período de experimentação da sequência didática, cuja pergunta única foi:

- Ao longo da aplicação da sequência, quais os conteúdos foram trabalhados por você nas turmas dos estudantes participantes?

Em sua resposta, a professora estabeleceu algumas relações entre os conteúdos abordados e alguns aspectos explorados em nossos encontros:

PAB: A gente trabalhou radicais, então, a gente entrava nessa parte de área, de perímetro. Quando a gente trabalhou, é, equação, né, calcular também. É, viu muito nessa parte. Agora, é até que setembro que você quer dizer, né?

P: Isso. Foi de final de abril a setembro. [Se referindo ao período dos encontros]. Assim, independentemente de ter relação ou não com o que eu fiz.

PAB: Pronto.

P: O que você trabalhou nesse período?

PAB: Eu acho que equações e radicais.

P: Equações do primeiro, segundo?

PAB: Do primeiro.

P: Primeiro grau.

PAB: Acho que foi equação do primeiro grau.

Ao final, ela falou que a escola está de portas abertas para outros momentos como esses, pois tudo que é para ajudar, é bem-vindo porque os estudantes precisam e que estava disposta a atividades em parceria comigo em momento oportuno.

De modo geral, a realização dessa entrevista foi muito importante, pois além de confirmar as falas dos estudantes e complementar os dados das observações de aulas, percebemos um pouco da maneira como a professora habitualmente trabalha, atividades que prioriza, dificuldades enfrentadas em seu dia a dia e vislumbramos sua concepção de área. Enfatizamos sua coragem e humildade em apresentar suas dúvidas relativas a situações do campo da Geometria, como a inclusão de classes entre paralelogramos.

Foi possível perceber ainda a necessidade de formações com os professores, apontando elementos importantes do campo da Geometria, como as diferentes definições existentes e as evoluções ao longo do tempo, bem como reforçar a importância de adotar uma delas, de preferência a que também aparece no livro didático dos estudantes para que o professor não fale uma e eles vejam outra no LD, porém sem desconsiderar ou negar a existência de outras.

5.15 SÍNTESE ACERCA DA EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO E ENTREVISTAS

Como já apontado em outros momentos desta tese, compreende nossa experimentação observações de aulas e vivência da sequência didática concebida. Além disso, também realizamos entrevistas com os participantes e com a professora de Matemática deles para conhecer a percepção desses estudantes e da professora sobre os encontros e atividades realizadas.

Durante as observações de aula, foi possível verificar, além dos conteúdos trabalhados naquele momento, elementos importantes da dinâmica vigente em sala como, por exemplo, o fato de a professora explicar detalhadamente os assuntos, lendo as atividades e orientando o passo a passo que os estudantes deveriam seguir para realizá-las. Buscamos romper com esta e outras cláusulas de contratos didático e pedagógico ao longo da experimentação. As observações de aulas também serviram para que os participantes fossem se acostumando com nossa presença em sala.

Quanto à vivência da sequência didática, a primeira sessão contribuiu em três pontos: o primeiro foi a familiarização dos materiais que, apesar de terem apresentado algumas dificuldades na quantidade de quadradinhos e de pontinhos das malhas, distanciamento entre

eles e no padrão a ser seguido para reprodução de determinadas figuras, todos eles conseguiram fazer pelo menos parcialmente a atividade; o segundo ponto é relativo à sua função de diagnóstico dos conhecimentos desses estudantes a respeito dos temas tratados, o qual evidenciou dificuldades relacionadas à compreensão e explicitação (forma predicativa do conhecimento) sobre retas perpendiculares e paralelas; por fim, o terceiro e último ponto se refere ao início da construção de um vínculo entre pesquisador e participantes. No início, pareciam bem tímidos e envergonhados porque estavam sendo filmados, mas participaram bem ao final do encontro.

Na segunda sessão, inicialmente, verificamos que os participantes predominantemente mobilizaram os conceitos em ação quadrado e retângulo não quadrado para representar quadriláteros. As figuras que não são desse tipo, como paralelogramos não retângulos e não losangos, trapézios, entre outras, foram menos exploradas. O losango não quadrado e quadriláteros não notáveis como o trapezoide e um não convexo também foram observados, assim como a representação de cilindros. Percebemos ainda que utilizaram desenhos prototípicos e não prototípicos e consideraram figuras semelhantes ou aparentemente congruentes em posições diferentes como distintas. Essa sessão possibilitou que tivessem contato com outros quadriláteros, aumentando o número de possibilidades para desenhos futuros e, além disso, permitiu conhecer os critérios utilizados para agruparem as figuras, os quais levaram em consideração o aspecto visual ou o formato delas, tomando em sua maioria o quadrado como referência para lançar olhar sobre as demais. As discussões em grupo permitiram a criação de novos critérios, a junção de alguns já apontados e inclusão de outras figuras em agrupamentos já realizados a partir da mesma condição.

Na terceira sessão, a realização de atividades utilizando o Tangram, principalmente a voltada à classe de construção, pertencente ao campo da Geometria, se mostrou muito importante, pois os estudantes apresentaram mais entusiasmo, fortaleceu os laços iniciais entre pesquisador e participantes e proporcionou discussões muito boas, tanto sobre as relações entre as peças do Tangram quanto relacionadas a elementos do campo das Grandezas e Medidas, como a relação de equivalência entre algumas delas.

Na quarta sessão, as atividades trabalhadas possibilitaram perceber que os estudantes conseguiram verificar propriedades dos paralelogramos e classificá-los a partir delas de forma operatória, inclusive realizando inclusões, mesmo não agrupando todos eles. No entanto, quando deveriam identificar e agrupar a partir da nomenclatura oficial de cada figura, a dificuldade aumentou, principalmente quando se tratava de paralelogramos não retângulos e não losangos e losangos não quadrados, possivelmente, por serem menos exploradas como

vimos nas análises prévias. O desempenho no quadrado foi melhor em relação às demais figuras e não houve inclusão ao classificarem retângulos.

Na quinta sessão observamos uma diminuição das dificuldades dos estudantes, tanto no reconhecimento dos paralelogramos e compreensão da inclusão de classes entre eles quanto na forma predicativa do conhecimento, os quais passaram a utilizar termos e propriedades específicos, salvo alguns equívocos como “lados de 90°” e chamar o losango não quadrado de “prisma”, bem como utilização de representações simbólicas dessas figuras.

Na sexta sessão também percebemos uma evolução no desempenho dos estudantes relativa à classificação de figuras, inclusive realizando inclusão de classes. Entretanto, as letras da atividade que exigiam exclusão pareceram mais difíceis para eles. A maioria realizou inclusões, com exceção de uma das duplas que em nenhum momento a fez, apontando para a interiorização de uma classificação não inclusiva naquela etapa da experimentação.

Na sétima sessão, assim como em sessões anteriores, observamos uma mobilização adequada por parte dos estudantes, de maneira operatória, das propriedades ligadas às definições de cada um deles: os retângulos são paralelogramos que possuem os quatro ângulos retos; os losangos são os paralelogramos que possuem os quatro lados de mesmo comprimento; os quadrados são os paralelogramos que possuem os quatro ângulos retos e os quatro lados de mesmo comprimento sendo, portanto, retângulo e losango ao mesmo tempo; os paralelogramos são quadriláteros que possuem exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si.

Na oitava sessão, primeira do campo das Grandezas e Medidas, notamos que havia predominância de concepções geométricas de área, ligada ao teorema em ação falso de que figuras diferentes têm, necessariamente, áreas distintas. Essa importância atribuída pelos estudantes à forma da figura já foi discutida no estudo de Douady e Perrin-Glorian (1989) e aponta para a forte relação do campo da Geometria no tratamento de situações do campo das Grandezas e Medidas. A concepção numérica foi menos evidente, possivelmente, por ser um reflexo dos encontros anteriores em que o campo numérico foi bloqueado enquanto o geométrico foi mais explorado. Enfatizamos as discussões importantes levantadas por eles, os exemplos utilizados e aumento e aprimoramento da forma predicativa do conhecimento.

Na nona sessão, os participantes pareceram reinvestir adequadamente a dissociação entre área e número, uma vez que apesar de estarem lidando com situações em malhas diferentes, eles não se apoiaram unicamente nos aspectos numéricos, sendo levados a perceber as relações entre elas para produção das figuras. As maiores dificuldades concentraram-se, principalmente, no losango não quadrado, tanto em desenhar esse

paralelogramo conservando suas propriedades, campo da Geometria, quanto em deixá-lo equivalente ao fornecido, campo das Grandezas e Medidas. Dificuldades em relacionar o comprimento das diagonais de um losango e sua área foram observadas em pesquisas anteriores, como a de Bernardes, Souza e Zandonade (2014). Nessa sessão, apesar de algumas dificuldades observadas como desenhar losango não quadrado ou quadrado, ambos não prototípicos, os participantes em sua maioria souberam diferenciar, de maneira prática (forma operatória do conhecimento), a área tanto do número quanto da superfície associada a ela, validando suas compreensões a partir das explicações apresentadas (forma predicativa do conhecimento).

Na décima sessão, reafirmamos os achados de pesquisas anteriores como Baltar (1996), Domingos (2013), Douady e Perrin-Glorian (1989), Ferreira (2010), Jesus (2011), Santos (2010), Souza (2013), Teles (2007), entre outros, relativos à confusão entre os conceitos de área e perímetro (erro de cálculo relacional). Observamos ainda a preferência por desenhos prototípicos, possibilidades de erros de cálculo numérico e a realização de operações sem manipular as unidades de medida, como em Domingos (2013) e Reis (2017), ligada à álgebra das grandezas. Tais dificuldades foram diminuídas e erros esclarecidos em sua maioria no desenvolvimento das atividades e, principalmente, durante a discussão e sistematização ao final do encontro.

Na décima primeira sessão, procedimentos geométricos como a decomposição e recomposição foram plenamente dominados pelos participantes, entretanto, no uso das expressões de área prevaleceu a ideia de base associada ao chão, mesmo não se tratando do lado de maior comprimento, como em Rosa dos Santos (2005). O fato de todos terem feito pela decomposição e recomposição mesmo sendo solicitado que um dos grupos aplicasse a expressão de área, foi decorrente do trabalho realizado previamente no campo da Geometria. Como consequência, foi observada a quebra no paradigma de que o uso da fórmula era predominante e os estudantes as aplicavam sem nenhum conhecimento geométrico.

Na décima segunda sessão, em linhas gerais, destacamos mais uma vez um desempenho inferior por meio da forma predicativa do conhecimento se comparada à operatória. A compreensão da expressão de área do losango não quadrado não foi tão evidente somente com a realização das atividades, levando à necessidade do momento de discussão e sistematização para retomar propriedades, relações de inclusão e diferentes maneiras de calcular a área no caso dos paralelogramos. A realização de diferentes atividades futuras e a longo prazo também se mostrou necessária para que a dominem progressivamente, como apontado na Teoria dos Campos Conceituais.

Na décima terceira sessão, os participantes que mostraram um bom desempenho em sala, tanto por meio da forma operatória do conhecimento quanto da predicativa, conseguiram lidar mais adequadamente com as situações propostas, reinvestindo conhecimentos do campo da Geometria, salvo os erros na álgebra das grandezas. Notamos ainda uma diminuição das dificuldades e evolução no desempenho de alguns deles, pois passaram a representar elementos geométricos, indicar propriedades importantes relativas às figuras desenhadas e aplicar conhecimentos sobre área que antes não estavam disponíveis nem de forma operatória. A utilização e boa exploração do procedimento geométrico de decomposição e recomposição evitou em alguns momentos insucesso em situação de produção, erros no cálculo da área da figura dada e relativos à confusão entre os conceitos de área e perímetro. Apesar de todos esses pontos positivos, nenhum dos participantes se apoiou na situação de inclusão como tarefa elementar para fazer um quadrado como resposta única que atenderia a todas as solicitações na situação de produção, como previsto em nossa análise a priori. Porém, cabe ressaltar que se tratava de estudantes que tiveram as condições de ensino e aprendizagem prejudicadas ao enfrentar dois anos de pandemia.

Ao final da vivência da sequência didática, percebemos a necessidade, mas não tivemos tempo, de realizar uma discussão e sistematização, assim como fizemos ao longo da experimentação, trazendo recortes das respostas apresentadas por eles uma discussão. Essa prática se mostrou muito produtiva, promovendo momentos riquíssimos de debate e aprendizado, a qual poderia ajudá-los a diminuir as dificuldades encontradas e fazer emergir elementos importantes que pretendíamos que aparecessem e não foi possível apenas com a relação das atividades.

Quanto à realização das entrevistas com os participantes, percebemos que as atividades, materiais e dinâmica dos encontros foram bem avaliados, e, principalmente, contribuímos com o aprendizado de estudantes que, destacando mais uma vez, enfrentaram dois anos de pandemia, além de ajudar no dia a dia escolar de cada um deles, provocando, inclusive, mudanças atitudinais.

Por fim, a entrevista com a professora de Matemática foi muito importante, pois além de confirmar as falas dos estudantes e complementar os dados das observações de aulas, percebemos um pouco da maneira como a professora habitualmente trabalhava, atividades que priorizava, dificuldades enfrentadas em seu dia a dia e vislumbramos sua concepção de área. Enfatizamos sua coragem e humildade em apresentar suas dúvidas relativas a situações do campo da Geometria, como a inclusão de classes entre os paralelogramos, apontando para

a necessidade de formações de professores que abordem elementos importantes desse campo, como as diferentes definições existentes e as evoluções ao longo do tempo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente, vamos falar um pouco de nossas intenções ao longo da vida acadêmica e caracterizar o contexto em que foi realizado este trabalho. Como já relatado na parte introdutória desta tese, realizamos nosso trabalho de conclusão de curso da graduação (Araújo, 2014) sobre área de paralelogramos no município de Ferreiros/PE. Tínhamos a intenção de fazer o experimento da nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018) também em Ferreiros. Por isso, realizamos estudos pilotos nesse município e averiguamos profundas lacunas nos conhecimentos dos participantes da pesquisa tanto no campo da Geometria como das Grandezas e Medidas. Considerando que a pesquisa do mestrado era de natureza diagnóstica, preferimos realizar a parte empírica da pesquisa em uma escola na qual pudéssemos extrair algo a mais do que a constatação do fracasso no ensino desses importantes campos da matemática escolar, cujo abandono é denunciado e investigado há décadas. Quando ingressamos no curso doutorado em 2019, tomamos a decisão de realizar um experimento que provocasse alterações no estado de conhecimento dos estudantes e que deveria ser realizado no referido município, pelos motivos supracitados. No entanto, encontramos um cenário ainda mais desafiador do que aquele da dissertação, pois se tratava de estudantes que haviam enfrentado dois anos de pandemia, 2020 e 2021, causada pela Covid-19. Foi nesse cenário que desenvolvemos a experimentação desta pesquisa no ano de 2022, no contraturno dos estudantes.

Agora, vamos tecer algumas considerações de cunho mais teórico e que justificaram a sua realização. Desde o estudo de Douady e Perrin-Glorian (1989), várias pesquisas sobre o conceito de área foram realizadas, algumas delas específicas sobre os paralelogramos (Araújo, 2018; Baltar, 1996; Rosa dos Santos, 2005; Souza, 2013). Baltar (1996) apontou a necessidade de considerar a forma e as posições em que as figuras são representadas em pesquisas posteriores, assim como a exploração de desenhos não prototípicos por meio de procedimentos geométricos. No trabalho de Rosa dos Santos (2005), assim como em Teles (2007), mesmo quando não solicitado, os participantes sentiram a necessidade de desenhar a figura, em desenho prototípico na sua maioria, como um suporte à resolução das tarefas. Ferreira (2010) também percebeu que as dificuldades dos estudantes em situações com ausência da representação gráfica das figuras persistiram mesmo após a aplicação de sua sequência didática. Junto a isso, verificamos nas análises prévias uma predominância nos estudos pelo quadrado e retângulo não quadrado e seus respectivos desenhos prototípicos. Já os losangos não quadrados e os paralelogramos não retângulos e não losangos eram as figuras

em que os estudantes apresentavam mais dificuldades e as menos exploradas nas pesquisas. Foi possível notar ainda que os estudos eram realizados de maneira isolada, quando consideramos os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas.

Em nossa dissertação de mestrado (Araújo, 2018) tentamos estabelecer maiores relações entre esses dois campos ao trabalhar classes de situações de identificação, classificação, comparação, medição e produção. Da mesma maneira que Baltar (1996) e Souza (2013), nos apoiamos na TCC e no modelo de área como uma grandeza autônoma proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989). Como Bernardes, Souza e Zandonade (2014), fomos além de Rosa dos Santos (2005) e Souza (2013) no que refere ao trabalho com todos os paralelogramos (quadrados, retângulos não quadrados, losangos não quadrados e paralelogramos não retângulos e não losangos). Também avançamos em relação a Bernardes, Souza e Zandonade (2014) quanto à exploração de outras classes de situações e de elementos específicos da TCC. Outro ponto a mais em relação aos trabalhos citados acima foi a inclusão de situações do campo da Geometria que realizamos, como a identificação e classificação. Apesar dessa ampliação, naquele momento foi possível fazer apenas o diagnóstico das dificuldades por meio da aplicação de um teste e realização de entrevistas.

Neste estudo atual, trabalhamos de maneira mais articulada as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas diante das necessidades de aprofundamento, notadas desde a pesquisa de Baltar (1996), e de exploração de todos os paralelogramos e não priorizar determinadas representações gráficas ou classes de situações em detrimento de outras. Assim, tomamos como hipótese a validar que a concepção e experimentação de uma sequência didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, contribui para aprofundar a compreensão e provocar a diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem persistentes relativas à área de paralelogramos. Norteados por tal hipótese, tínhamos a seguinte questão de pesquisa: De que maneira a concepção e experimentação de uma sequência didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, contribui para aprofundar a compreensão e provocar a diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem persistentes relativas à área de paralelogramos por estudantes do 9º ano do ensino fundamental?

Com o intuito de buscar respostas para a questão acima, elencamos o seguinte objetivo: compreender as implicações da concepção e experimentação de uma sequência

didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, no aprofundamento da compreensão e na diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem persistentes relativas à área de paralelogramos por estudantes do 9º ano do ensino fundamental. Para atendê-lo, tomamos suporte na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e seus colaboradores e na engenharia didática clássica na perspectiva de Guy Brousseau e Michèle Artigue. Quanto aos elementos da TCC mais explorados, destacamos situações, conceitos, invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação), representações simbólicas, cálculo relacional, cálculo numérico, forma operatória do conhecimento, forma predicativa do conhecimento e, mais amplamente, a noção de campo conceitual. Em relação à engenharia didática, este trabalho está estruturado em capítulos que correspondem a suas fases: análises prévias, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação.

Na vertente epistemológica das análises prévias, fizemos um estudo acerca do conceito de área, a partir do qual foi possível notar uma forte relação entre sua origem e os problemas e medição de terras em civilizações antigas. Nesse sentido, em diferentes momentos da história da construção da Matemática e da Matemática Escolar, o conceito de área se fez presente na interface entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas. De maneira análoga, realizamos um estudo voltado aos paralelogramos, resgatando diferentes definições exclusivas e inclusivas, bem como propriedades ao longo dos anos, como aquelas apresentadas por Euclides (aproximadamente 300 a. C.), Legendre (1793) e Hadamard (1898), até chegar a algumas mais atuais como Barbosa (2006), Moura (2013) e Pereira da Costa (2016).

Na vertente cognitiva das análises prévias, realizamos um levantamento de estudos já realizados sobre os paralelogramos, área de figuras geométricas planas mais gerais e, de modo mais específico, área de paralelogramos. Em relação aos paralelogramos, foi possível perceber dificuldades dos estudantes em reconhecê-los, desenhá-los, citar propriedades e em dar definições completas e adequadas. Os paralelogramos mais explorados eram os quadrados e os retângulos não quadrados, e os estudantes apresentavam mais dificuldades nos paralelogramos não retângulos e não losangos e nos losangos não quadrados. Quanto aos resultados voltados à área de figuras geométricas planas gerais, havia prioridade por situações de medição e pelos quadrados e retângulos não quadrados. Tanto no caso anterior quanto nesse, os desenhos priorizados eram os prototípicos. Observamos foco no aspecto numérico e confusão entre os conceitos de área e perímetro. Como pontos positivos, destacamos procedimentos de decomposição e recomposição, uso de malha quadriculada e de materiais

manipulativos. Os resultados das pesquisas sobre a área de paralelogramos não se distanciaram dos já citados até agora, como lidar mais adequadamente com situações envolvendo o quadrado e o retângulo não quadrado, apresentando mais dificuldades com os paralelogramos não retângulos e não losangos e com os losangos não quadrados, principalmente em fazer o seu desenho e em relacionar suas diagonais para que fique com determinada área. Notamos ainda prioridade por desenhos prototípicos e a extensão de expressão de área do retângulo para o paralelogramo não retângulo e não losango ao considerá-lo como um retângulo deformado.

Na vertente didática das análises prévias, analisamos aspectos voltados ao ensino do conceito de área e de paralelogramos. Para tanto, observamos as habilidades relativas aos quadriláteros e ao conceito de área na Base Nacional Comum Curricular e no Currículo de Pernambuco. Analisamos também o Organizador Curricular e o Documento de Reorganização Curricular, ambos de Pernambuco, para observar como se dava a organização das habilidades selecionadas por bimestres e quais passaram a ser prioritárias ou complementares durante o período da pandemia de Covid-19. Além desses, fizemos a análise dos planejamentos elaborados pelos professores de Matemática, das apostilas de atividades enviadas aos estudantes durante as aulas remotas no ano anterior à experimentação, e da coleção de livros didáticos adotada na escola campo de pesquisa. De modo geral, foi possível perceber que os professores não seguiam fielmente o que era proposto nos documentos de orientação curricular e nos livros didáticos, pois nem sempre incluíam habilidades em seus planejamentos consideradas prioritárias nos documentos e, mesmo assim, atividades que as contemplavam apareceram nas apostilas. Também nem sempre seguiam os bimestres indicados no Organizador Curricular e no Documento de Reorganização, e nem nos LD. Esse dado aponta que não havia uma relação direta entre o que era proposto pelos documentos e nos LD e o que efetivamente foi realizado pelos professores com os estudantes. Como ponto positivo, mostrou uma certa autonomia desses profissionais em relação ao que é indicado nesses instrumentos e, como negativo, algumas situações consideradas importantes deixaram de ser vivenciadas pelos estudantes.

Tanto nas apostilas de atividades quanto nos livros didáticos analisados, os resultados convergiram com os verificados nas pesquisas já realizadas no que se refere à prioridade por desenhos prototípicos, situações de medição, foco nas figuras do quadrado e do retângulo não quadrado. A partir das análises prévias realizadas foi possível caracterizar os desenhos de todos os paralelogramos (quadrados, retângulos não quadrados, losangos não quadrados e

paralelogramos não retângulos e não losangos) em prototípicos, não prototípicos ou que se aproximam dos prototípicos.

Diante desses achados, passamos à segunda fase da engenharia didática, a concepção e análise a priori das situações que compuseram a sequência didática. Ao todo foram 26 atividades previstas inicialmente para serem trabalhadas em 12 sessões, mas devido à necessidade de redimensionamento de uma delas, ao todo foram 13 sessões de duas horas de duração cada. As atividades que trabalhamos durante a nossa pesquisa de mestrado foram fracionadas e utilizadas em diferentes momentos da sequência didática, assim como outras extraídas das pesquisas de Baltar (1996), Ferreira (2010) e Silva (2016). Nessas atividades, procuramos explorar as diferentes classes de situações do campo da Geometria (identificação, classificação, inclusão e construção) e do campo das Grandezas e Medidas (comparação, medição, produção e, em menor proporção, conversão de unidades), destacando as imbricações entre esses dois campos e a maneira como o domínio de tarefas elementares e procedimentos geométricos como a decomposição e recomposição do primeiro campo poderia contribuir para o sucesso e compreensão de uma situação complexa do segundo. Diversos materiais de baixo custo e fácil confecção foram utilizados como Tangram, Poliminós, régua não graduada, papel transparente, papel branco para dobraduras, papel pontilhado, malha quadriculada, régua graduada etc.

Após a concepção da sequência didática e análise a priori de suas atividades, passamos à terceira etapa da engenharia didática, a experimentação. Inicialmente, realizamos observações de aulas nas duas turmas dos nossos participantes tanto para que fossem se acostumando com nossa presença em sala de aula, criando os primeiros vínculos entre pesquisador e participantes, quanto para conhecer mais elementos acerca do funcionamento do ensino, como a professora habitualmente trabalhava, cláusulas de contratos didático e pedagógico vigentes, entre outros aspectos. Em seguida, aplicamos a sequência didática em encontros semanais de duas horas cada, como dito acima, no contraturno dos estudantes, os quais foram filmados por meio de uma câmera fixa para visualizar toda a turma e outra móvel para captar procedimentos e diálogos mais pontuais. Ao final da experimentação, realizamos entrevistas com os participantes e com a professora de Matemática para conhecer a percepção deles acerca da dinâmica dos encontros, das atividades e dos materiais utilizados. As entrevistas foram gravadas em áudio e, assim como as filmagens, transcritas posteriormente. Seus achados mais detalhados foram apresentados no capítulo anterior em que tratamos da análise a posteriori e validação.

Mesmo diante do cenário desafiador e das condições que existiam no início da experimentação, validamos a nossa hipótese, uma vez que trabalhar os dois conjuntos de situações, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas contribuiu para aprofundar o conhecimento relativo à área de paralelogramos por meio do estudo teórico das classes de situações. Mais especificamente, ao analisarmos as diferentes etapas de resolução de uma atividade como tarefas elementares do campo conceitual da Geometria e que eram necessárias para o sucesso em uma situação complexa do campo das Grandezas e Medidas, pudemos compreender mais profundamente os avanços e bloqueios por parte dos estudantes.

Quanto à contribuição para a aprendizagem dos participantes, destacamos: a compreensão das relações entre retas, como paralelas e perpendiculares; o reconhecimento de ângulos retos, opostos e congruentes; a ampliação na diversidade dos quadriláteros que no início pareciam conhecer apenas o quadrado e o retângulo quadrado, sendo o primeiro tomado como referência para lançar olhar sobre outros quadriláteros, entre outras. Evidenciamos conhecimentos que emergiram em sua forma operatória no início do processo, mas se mostravam frágeis em relação à forma predicativa, e que ao final da experimentação foram mobilizados adequadamente como, por exemplo, relacionados à nomenclatura oficial das figuras e propriedades ligadas a suas definições; compreensão sobre a área de uma figura geométrica plana e as unidades de medida. Ao longo do processo, houve uma superação, pelo menos parcial, do teorema em ação falso segundo o qual a área de um paralelogramo não retângulo e não losango é obtida a partir da multiplicação dos comprimentos dos seus lados. Os participantes da pesquisa avançaram em relação à utilização adequada de algumas representações gráficas e à diferenciação entre área, superfície e o número associado a ela. Percebemos uma quebra do paradigma relativo à predominância pelo uso de expressões de área sem nenhum conhecimento geométrico a respeito da figura. Há indícios também de conquistas quanto à apresentação de respostas a partir de reflexões e estabelecimento de diálogos para tentar chegar a um consenso, com apropriação do pensamento lógico-matemático como instrumento de debate de ideias e argumentação; quanto à utilização e ao aprimoramento da forma predicativa do conhecimento, entre outras. Estudar propriedades relativas às diagonais das figuras foi algo que também realizamos e habitualmente não é comum nas pesquisas que se propõem a investigar aspectos relativos ao ensino e aprendizagem do conceito de área. Embora não tenha sido foco da nossa pesquisa, a diversidade dos recursos utilizados ao lidar com as situações dos dois campos também contribuiu para a aprendizagem dos estudantes.

Ao término da experimentação, percebemos que determinados conhecimentos dos participantes ainda se revelavam instáveis. Quanto ao campo da Geometria, destacamos propriedades dos paralelogramos que não estavam ligadas às definições, como aquelas relativas às diagonais, bem como a construção de um losango não quadrado. No campo das Grandezas e Medidas, a parte das expressões de área necessitava de um intervalo de tempo maior, devido à delicadeza envolvida em cada caso, que não houve em decorrência do cumprimento do calendário. De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, o processo de conceituação é longo e o tempo de maturação de determinados conhecimentos por parte dos estudantes não era o mesmo que dispúnhamos naquele momento.

Além dos aspectos apresentados acima, destacamos outros de caráter mais social, visto que a pesquisa foi desenvolvida em uma escola comum de uma pequena cidade de interior, com estudantes que enfrentaram dois anos de pandemia, muitos deles sem condições financeiras de terem equipamentos tecnológicos e ambiente físico adequado para terem acesso às aulas remotas. Mesmo diante das dificuldades, foi possível mostrar que esses estudantes se envolveram, participaram ativamente das atividades e têm potencial para desenvolverem qualquer tipo de atividade ou dinâmica escolar, e para se apropriar dos conhecimentos trabalhados na sequência didática. A princípio estavam intimidados, mas aos poucos ganharam confiança, dirigiam-se ao quadro, explicavam suas resoluções, debatiam com o grupo, apresentavam diferentes maneiras de resolução e registravam todo o processo pensado até chegar a uma resposta. Para algumas pessoas, a execução de aulas dessa maneira só seria possível em um colégio com altos índices de desempenho geral, considerado de referência. Em outras palavras, mostramos que é possível fazer diferente em uma sala de aula “normal”.

Embora esse aspecto não tenha sido alvo direto da pesquisa, a maneira como trabalhamos com os participantes foi muito diferente da que estavam habituados. Esse aspecto poderia ser investigado em pesquisas posteriores, sob a ótica das rupturas de contratos didático e pedagógico. Assim, falas de alguns participantes nas entrevistas como, por exemplo, ao sinalizarem a necessidade de propor atividades mais fáceis ou explicar mais, ou a resistência de determinados participantes em alguns momentos da experimentação, eram decorrentes dessa quebra das condições de condução dos processos de ensino e aprendizagem vigentes em sala de aula.

Quanto à sequência didática concebida e experimentada, a quem desejar replicá-la sugerimos que na atividade única da sétima sessão, sejam levadas as figuras recortadas para o momento de discussão e sistematização, de modo que os estudantes possam colocar as figuras acima das propriedades e verificar a validade das afirmações, observando se as propriedades

continuariam válidas, se seria necessário desmarcar algumas delas ou substituir as figuras. Isso ajuda na compreensão da inclusão de classes e na recíproca entre elas, principalmente se for confrontado com as respostas dadas na atividade única da quinta sessão. Na letra (c) da atividade 2 da décima sessão, sugerimos colocar retângulos de comprimentos “m e n” e não “m x n” como aparece na atividade, pois este último caso pode induzir o estudante a realizar uma multiplicação sem necessariamente dominar os aspectos geométricos e das Grandezas e Medidas envolvidos.

Por fim, como possíveis encaminhamentos para pesquisas futuras, sugerimos explorar a invariância da área em relação ao lado tomado como base, uma vez que até tentamos falar rapidamente a esse respeito, mas para alguns participantes a distância entre o que queríamos que eles captassem e o que conseguiam captar era muito grande. Outra possibilidade que converge com a tese de Baltar (1996) é que a atribuição de sentido às expressões de área exige um investimento de tempo didático relativamente grande e poderia ser outra via de investigação. Mesmo tendo evitado, a confusão entre os conceitos de área e perímetro emergiu e essa relação na imbricação entre campos conceituais poderia ser aprofundada em outros momentos. Explorar a área de paralelogramos na imbricação entre campos conceituais considerando os aspectos estáticos e dinâmicos é outra possibilidade de pesquisa futura. Analisar nossos dados empíricos a partir de outros aportes teóricos como, por exemplo, classificar as produções dos nossos participantes no campo da Geometria nos níveis e subníveis propostos por Pereira da Costa (2019) é outra possibilidade de continuidade de nossa pesquisa. A questão de gênero na Matemática também é uma via, visto que tínhamos apenas uma participante e, apesar de ter ideias e respostas muito pertinentes, por vezes, ela não sentia confiança em expor sua opinião. Realizar formações com professores, possivelmente, ancoradas em uma engenharia didática de segunda geração, voltada ao desenvolvimento e formação, de modo a contribuir com os professores diante das necessidades e limitações enfrentadas por esses profissionais, como confirmamos a partir da entrevista com a professora. Assim, as atividades poderiam ser pensadas e elaboradas em conjunto com esses profissionais levando em consideração os aspectos acima citados.

Concluimos essas considerações finais resgatando nossa tese: a concepção e experimentação de uma sequência didática apoiada nos conjuntos de situações que dão sentido ao conceito de área e ao conceito de quadrilátero notável, priorizando as imbricações entre os campos da Geometria e das Grandezas e Medidas, contribuiu para aprofundar a compreensão e provocar a diminuição de dificuldades conceituais de aprendizagem persistentes relativas à área de paralelogramos. Além disso, temos a convicção que os

estudantes e a professora participantes desta pesquisa se beneficiaram da experiência vivenciada. Esperamos que os achados desta tese sejam úteis a professores, estudantes e escolas; e que pesquisas futuras retomem, discutam e aprofundem aspectos que não foi possível desenvolver ao longo desse doutorado.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPED. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.6, p. 62-77, UFSC: 2008.
- ARAÚJO, W. R. **O ensino do conceito de área no sexto ano noturno do Ensino Fundamental**: uma proposta didática fundamentada na teoria de Van Hiele. 2012. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.
- ARAÚJO, J. C. **Situações que dão sentido ao conceito de área**: um estudo com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em relação à área do paralelogramo. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade de Pernambuco – Campus Mata Norte, Nazaré da Mata, 2014.
- ARAÚJO, J. C. Situação de medida de área de paralelogramos: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. **Anais...** IV Congresso Nacional de Educação, 2017, João Pessoa/PB.
- ARAÚJO, J. C.; SILVA, M. M. F.; SILVA, J. F. Identificação e classificação de paralelogramos: um estudo com alunos do 9º ano do ensino fundamental. **Anais...** IV Congresso Nacional de Educação, 2017, João Pessoa/PB.
- ARAÚJO, J. C. **Como os alunos de 8º ano lidam com situações relativas à área de paralelogramos?**: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.
- ARAÚJO, J. C.; SANTOS, V. A.; MELO, W. J. A.; PACHECO, F. F. F.; MOURA, A. P. Um estudo com alunos do 8º ano sobre identificação e produção de paralelogramos. **Anais...** XVI Congresso Internacional de Tecnologia na Educação, 2018, Olinda/PE.
- ARAÚJO, J. C.; SILVA, A. D. P. R.; BELLEMAIN, P. M. B. Situações que envolvem paralelogramos e suas áreas: um estudo com licenciandos em matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, Brasil, v. 09, n. 19, p.796-820, jul.-out. 2020. http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/2415/pdf_423
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didáticas das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, cap. 4, p. 193-217, 1996.
- ARTIGUE, M. Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques: Où en sommes-nous? **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, p. 25-64, 2020.
- BALTAR, P. M. **Enseignement-apprentissage de la notion d'aire de surface plane**: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. (Tese Doutorado) Grenoble, França: Universidade Joseph Fourier, 1996.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática, 10ª edição, 2006.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental** / Paula Moreira Baltar Bellemain, Paulo Figueiredo Lima. Natal: SBHMata, 2002.

BERNARDES, G. M.; SOUZA, C. S.; ZANDONADE, C. S. A construção do conceito de área por meio de atividades investigativas: uma experiência com paralelogramos no PIBID/IFES. Revista eletrônica **Sala de Aula em Foco**. Vol. 3, nº 1, 73 - 82, 2014.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. In: Rosinalda Aurora de Melo Teles; Rute Elisabete de Souza Rosa Borba; Carlos Eduardo Ferreira Monteiro. (Org.). **Investigações em didática da matemática**. 1ed. Recife: UFPE, 2017, v. 1, p. 101-132.

BONGIOVANNI, V. **As diferentes definições dos quadriláteros notáveis**. Matemática. Assunto: Geometria - Projeto Apoema. Editora do Brasil. Texto cedido pela Sociedade Brasileira de Matemática, publicado originalmente na Revista do Professor de Matemática (<http://www.rpm.org.br>). São Paulo: IME-USP, n. 55, p. 29-32, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BROUSSEAU, G. **Introduction à l'ingénierie didactiques**. 2013. Disponível em: <<http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-l'ing%C3%A9nierie-didactique3.pdf>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

DINIZ, L. S. Habilidades e níveis do pensamento geométrico de alunos do ensino fundamental sobre quadriláteros. **Revista Acadêmica do Campus de Marabá**, nº 1/2013 Universidade Federal do Pará.

DOMINGOS, V. S. **Desenvolvendo os conceitos de perímetro e de área no ensino fundamental**. 2013. 88 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. vol. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

FERREIRA, L. F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudos sob a óptica da teoria dos campos conceituais. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE, Recife-PE, 2010.

FERREIRA, L. F. D. **Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental**: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro. 2019. 386 f. Tese

(Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

FUJITA, T. Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. **Journal of Mathematical Behavior**, 31, 2012, p. 60-72.

HENRIQUES, M. D. **Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro**. 2011. 218 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

JESUS, A. G. **A motivação para aprender matemática no 9º ano do ensino fundamental: um estudo do potencial dos materiais manipulativos e da construção de objetos na aprendizagem de área de polígonos e volume de prismas**. 2011. 314 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Géomètre. **Em Aberto: Tendências em Educação Matemática**, Brasília, v. 14, n. 62, p. 51-62, abr./jun. 1994.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J.B.P.F. Geometria. In: CARVALHO, J. B. P. F. **Coleção Explorando o Ensino: Matemática**, v. 17. Brasília, MEC, 2010, p. 135 – 166.

MACHADO, J. P. A. **A significação dos conceitos de perímetro e área, na ótica do pensamento reflexivo, trabalhando em ambientes de geometria dinâmica**. 2011. 178 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana**. CAED/UFMG, Belo Horizonte - MG, 2012.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando – Adição e Subtração – contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. 3ª edição, Proem Editora Ltda. São Paulo, 2008.

MENDES, A. F. **Da resolução de quebra-cabeças em sala de aula à aplicabilidade no cotidiano de uma marmoraria: o que os estudantes do 9º ano do ensino fundamental falam e escrevem sobre o conceito de área**. 2012. 159 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

MENEGOTTO, G.; LARA, I. C. M. Contribuições do software GeoGebra para o estudo de paralelogramos. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.4, n.2, p. 31-55, 2011.

MORAIS, L. B. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de matemática do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2013.

MOURA, L. K. J. **Abordagem alternativa no estudo dos quadriláteros**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM. UFMT – Cuiabá-MT, 2013.

MUNIZ, C. A. O conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: **A Aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais** / Marilena Bittar, Cristiano Alberto Muniz (organizadores). – 1. ed. – Curitiba: Editora CRV, 2009.

NUNES, J. M. V. **A prática da argumentação como método de ensino**: o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. 2011. 220 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental**: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 242f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico**: o caso dos quadriláteros notáveis. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

PERNAMBUCO. **Currículo de Pernambuco**. Secretaria Estadual de Educação - SEE, Recife, 2019.

PERNAMBUCO. **Organizador Curricular de Matemática**. Secretaria Estadual de Educação - SEE, Recife, 2020a.

PERNAMBUCO. **Reorganização Curricular**. Secretaria Estadual de Educação - SEE, Recife, 2020b.

PERRIN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L’Ingenierie Didactique entre recherche et ressource pour l’enseignement et la formation des maitres. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**. Sergipe, Editora IFS, vol. 9, nº 1, p. 45-82, 2019. Disponível em: <https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/artic/e/view/298> Acesso em: 09 ago. 2020.

REIS, T. F. **Ensino de áreas de polígonos e círculo por meio de materiais manipulativos**. 2017. 67 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2017.

ROSA DOS SANTOS, M. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo**: um estudo sob a ótica das variáveis didáticas e do contrato didático. 2005. 178 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – UFRPE, Recife-PE, 2005.

SANTOS, L. M. S. **Cálculo de área na vida e na escola**: possíveis diferenças conceituais. 2010. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2010.

SILVA, A. D. P. R. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica**: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre

2 no 6º ano do ensino fundamental. 2016. 315f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2016.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. Matemática – 6º ano, 5ª edição, São Paulo: Moderna, 2018a.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. Matemática – 7º ano, 5ª edição, São Paulo: Moderna, 2018b.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. Matemática – 8º ano, 5ª edição, São Paulo: Moderna, 2018c.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. Matemática – 9º ano, 5ª edição, São Paulo: Moderna, 2018d.

SOUZA, E. R. **Análise de estratégias de alunos do ensino médio em problemas de cálculo de área do paralelogramo**. 2017. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2013.

TAVARES, C. V. A. **Conhecimento dos alunos sobre geometria no início do 3º ciclo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Escola Superior de Educação de Lisboa – Instituto Politécnico de Lisboa. Lisboa, 2014.

TELES, R. A. M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas**. Tese (Doutorado em Educação) – UFPE, Recife-PE, 2007.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas**. *Análise Psicológica*, 1, 1986, pp. 75-90.

VERGNAUD, G. La théorie des Champs Conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 10, nº 2.3, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., Rio de Janeiro, 1993. **Anais...** Rio de Janeiro: UFRJ Projeto Fundação, Instituto de Matemática, 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. (Ed.). **Didácticas das Matemáticas**. V. 62. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996. p. 155-191⁶⁷.

VERGNAUD, G. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. **Journal of Mathematical Behavior**, 1998, v. 17 (2), p. 167-181.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Tradução: Maria Lucia Faria Moro. Revisão técnica: Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

⁶⁷ Tradução do texto de Vergnaud: La théorie des Champs Conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 10, nº 2.3, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Infancia y Aprendizaje**, 2013, 36:2, 131-161. Disponível em
<<https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1174/021037013806196283>> Acesso em: 07 out. 2021.

VERGNAUD, G. Quais questões a Teoria dos Campos Conceituais busca responder? **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, v. 9, n. 1, 2019.

APÊNDICE A – ROTEIRO DE ENTREVISTA COM OS PARTICIPANTES

1 – Convite a um amigo

- Se eu fosse fazer essas mesmas oficinas no próximo ano, você sugeriria que algum(a) amigo(a) seu participasse? Por quê?
- Como você convidaria esse(a) amigo(a) e o que você diria para ele(a)?

2 – Sugestões para a dinâmica dos encontros

- Em relação à maneira como os encontros aconteceram, o que você acha que deveria ser feito do mesmo jeito? Por quê?
- O que você acha que eu não deveria fazer ou que poderia fazer de outro jeito? Por quê?
- Sobre a organização dos encontros com momentos de atividades individuais e em grupo, momentos de troca de atividades entre os participantes para debate, discussão das respostas e explicações no quadro com a turma toda, o que você achou interessante e o que mudaria e por quê?
- O que você achou dos materiais utilizados?

3 – Sobre as atividades

- Esse caderno tem todas as atividades que realizamos nas oficinas. Você poderia comentar algumas delas, destacando atividades que gostou mais, atividades que não gostou muito ou atividades que poderiam ser modificadas?

4 – Considerações gerais

- Você acha que os encontros o(a) ajudaram a olhar para a Matemática de uma maneira diferente? Poderia dar algum exemplo?
- Você aceitaria ser monitor em algumas oficinas com outros estudantes na escola, envolvendo atividades e materiais que utilizamos ao longo dos encontros?

APÊNDICE B – ROTEIRO DE ENTREVISTA COM A PROFESSORA DE MATEMÁTICA DOS PARTICIPANTES

1 – Possíveis impactos das oficinas sobre os alunos

- Entre os estudantes que participaram das oficinas comigo, você notou alguma mudança em sala, por parte deles, relativa ao comportamento, participação ou desempenho na resolução das atividades? Poderia citar algum exemplo ou algum aluno?

2 – Sobre as atividades, os recursos utilizados e a dinâmica dos encontros

- Esse caderno tem todas as atividades que realizamos nas oficinas e que lhe entregamos na culminância. Entre essas atividades, você indicaria alguma que pudesse ser vivenciada com toda a turma, ao trabalhar os assuntos paralelogramo e área do paralelogramo? Se sim, qual ou quais?

- Você pode comentar se eliminaria alguma atividade ou se faria alguma modificação nas atividades (se sim, que modificação)?

- O que você achou dos recursos utilizados?

- Os encontros foram estruturados intercalando momentos de atividades individuais, em pequenos grupos e com toda a turma, alguns deles iniciando com o resgate do que foi realizado no encontro anterior. Também realizamos trocas de respostas entre os alunos para debaterem e tentarem chegar a um consenso, discussão com toda a turma das respostas e resoluções deles, sem identificá-los, no quadro por meio de *slides*. Muitos dos encontros foram finalizados com uma sistematização do conteúdo trabalhado naquele dia. O que você acha dessa dinâmica?

3 – Conteúdos vivenciados em sala durante a experimentação sequência

- Ao longo da aplicação da sequência, quais os conteúdos foram trabalhados por você nas turmas dos estudantes participantes?

APÊNDICE C – MODELO DO TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Estamos convidando seu filho (a) para participar de uma pesquisa a ser realizada no _____, com o título _____ . Para tanto, necessitamos do seu consentimento.

O objetivo do estudo é _____. Para tanto, serão realizadas _____ sobre o referido tema, a ocorrer nas _____, no horário _____, cujo calendário com as datas será entregue aos estudantes. Todos os encontros serão filmados.

A identificação de seu filho (a) será resguardada, porque cada aluno será considerado por uma letra e um número. Não haverá nenhum dano físico ou moral para o seu filho. Tratam-se de momentos de estudo, reflexões e debates juntos aos educadores matemáticos.

O responsável pela pesquisa é um estudante de doutorado do Programa de Pós-Graduação em _____ da _____ e as professoras _____, orientador(a), e _____, coorientador(a) da pesquisa. Pedimos o seu consentimento para o desenvolvimento da pesquisa e também para a organização de artigos científicos. Se o (a) senhor (a) responsável estiver de acordo, por gentileza, assine este documento, que possui duas cópias (sendo uma sua e a outra do responsável pela pesquisa).

Caso não aceite, não se preocupe, pois, não sofrerá nenhuma penalidade. Desde já, ficamos gratos pela sua compreensão e colaboração!

Pesquisadores responsáveis:

Nome do(a) doutorando(a)
 Doutorando(a)

Nome do(a) orientador(a)
 Professor(a) orientador(a)

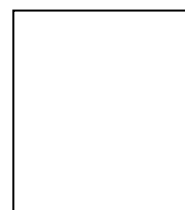
**CONSENTIMENTO DO RESPONSÁVEL PARA A PARTICIPAÇÃO DO
ESTUDANTE NA PESQUISA**

Eu, _____,
CPF _____, assinado abaixo, responsável por
_____ estou

de acordo que meu filho (a) atue na pesquisa como participante. Fui notificado acerca do estudo e de sua metodologia, e de que todas as informações relacionadas não deverão ser referendadas ao nome de meu filho, em caso de publicação e divulgação. Foi-me assegurado a possibilidade de retirar a autorização em qualquer instante.

Local, _____ de _____ de _____.

Assinatura do responsável



**CONSENTIMENTO DO RESPONSÁVEL PARA A PARTICIPAÇÃO DO
ESTUDANTE NA PESQUISA**

Eu, _____,
CPF _____, assinado abaixo, responsável por
_____ estou

de acordo que meu filho (a) atue na pesquisa como participante. Fui notificado acerca do estudo e de sua metodologia, e de que todas as informações relacionadas não deverão ser referendadas ao nome de meu filho, em caso de publicação e divulgação. Foi-me assegurado a possibilidade de retirar a autorização em qualquer instante.

Local, _____ de _____ de _____.

Assinatura do responsável

