UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

EMANOEL RODRIGUES DOS SANTOS

UM MÉTODO DE VOLUMES FINITOS NÃO-LINEAR UTILIZANDO UM MÉTODO QUASE-NEWTON PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MEIOS POROSOS.

Caruaru
2023

EMANOEL RODRIGUES DOS SANTOS

Um método de volumes finitos não-linear utilizando um método Quase-Newton para simulação numérica de escoamento monofásico em meios porosos utilizando

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de artigo científico, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil. Defesa realizada por videoconferência.

Área de concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo

Orientador(a): Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras

Caruaru

2023

AGRADECIMENTOS

A Deus, por conceber toda graça e permitir que mais uma etapa da vida fosse concluída, pois nada acontece sem que seja sua vontade.

A minha mãe Luciana, que com toda sua bondade, me mostrou o que é amor incondicional, e que me ensinou tudo que eu precisava aprender. Obrigado por me apoiar e fazer toda essa caminhada ser possível.

Ao meu pai Erinaldo, que sempre me deu todo o suporte necessário para que eu pudesse seguir com minha vida pessoal e profissional, por todas as palavras de apoio e por seu carinho incondicional.

A minha avó Joana *(in memorian),* por fazer parte da minha vida, e contribuir positivamente com meu crescimento.

A minha irmã Layane, que sempre me deu total suporte e incentivo para que eu seguisse a minha jornada, e por estar sempre ao meu lado.

A minha namorada Raquel, pessoa que apareceu na minha vida num momento fundamental, me ajudou em todos os meus momentos difíceis e que com todo seu amor, me tornou uma pessoa melhor.

Aos meus professores da UFPE, Dr. Douglas, Dr. Humberto, Dr.a Michele, Dr. Washington, Dr. José Moura, Dr.a Jocilene, Dr. Elder, e em especial, meu professor orientador Dr. Fernando, que compartilhou comigo seu conhecimento e que esteve disposto a me guiar pelo caminho da pesquisa científica.

Aos meus amigos da SESP – PMC, em especial, Igor Willys, pelos mais de 2 anos de trabalho juntos.

Aos meus amigos da UFPE, em especial a Ana Carolina, Érica Rafaela, João Barros, Maria Brunna, Victor Torres, Matheus Calegari e Jhonatta Deyvid.

A dois amigos de profissão Ytalo Farias e Professor Wesley Lima.

Ao meu amigo de curso Matheus Araújo, que nunca mediu esforços para me ajudar com a realização deste trabalho.

A todos os colegas que fiz por toda a jornada da graduação.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DMP	Discrete Maximum Principle
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
NL-TPFA	Non-linear Two Point Flux Approximation
SC	Superfície de Controle
VC	Volume de Controle

LISTA DE SÍMBOLOS

i	Subíndice que representa o passo
Λ	Permeabilidade
R	Matriz de rotação
Ω	Domínio contínuo
Q	Termo de fonte ou sumidouro
Γ_D e Γ_N	Fronteira de Dirichlet e Neumann, respectivamente
p	Campo de pressão
∇p	Gradiente de pressão
F	Fluxo

Um Método De Volumes Finitos Não-Linear Utilizando Um Método Quase-Newton Para Simulação Numérica De Escoamento Monofásico Em Meios Porosos.

A Non Linear Finite Volume Method Using A Quase-Newton Method For Numerical Simulation Of Single-Phase Flow In Porous Media.

Emanoel Rodrigues dos Santos[1]

RESUMO

A dinâmica de fluidos computacional é um ramo da engenharia que, entre uma de suas atribuições, realiza a simulação do escoamento de fluidos em meios porosos, que por sua vez compreende um conjunto de fenômenos físicos bastante complexos e de difícil formulação matemática, assim como numérico-computacional. Para o engenheiro de reservatório, existem considerações que fazem parte das formulações dos métodos numéricos existentes. Dentre estas considerações, em volumes finitos, as variáveis primárias são localizadas nos centros das células, enquanto as variáveis secundárias geralmente estão situadas nos vértices e/ou nas faces da malha computacional. No método dos volumes finitos, a obtenção da pressão é fundamental, e devido aos parâmetros físicos do meio poroso, sua obtenção se dá através de um sistema de equações que podem ser não-lineares. Portanto, sabe-se que a escolha do método numérico que resolva esse sistema de equações é de extrema importância, uma vez que este estará associado fortemente à eficiência computacional da simulação, e afeta diretamente o problema tratado. Para o escopo deste trabalho, utiliza-se uma formulação via volumes finitos não-linear para equação de pressão, onde o meio poroso tem características geológicas complexas, sendo caracterizado por possuir alta razão de heterogeneidade e anisotropia. Nesse contexto, o objetivo do trabalho é avaliar a eficiência computacional de uma nova estratégia aplicada ao método iterativo já conhecido, chamado de Broyden. Assim, através de experimentos numéricos conduzidos, adotando malhas triangulares e quadrilaterais que podem ser distorcidas, é possível realizar uma análise categórica quanto à eficiência e acurácia obtidas nas soluções numéricas para resolução da equação de pressão.

Palavras-chave: simulação de meios porosos; escoamento monofásico; métodos quase-Newton; métodos de volumes finitos.

[1]Graduando em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: emanoel.rsantos@ufpe.br

ABSTRACT

Computational Fluid Dynamics (CFD) is a branch of engineering that deals with the simulation of fluid flow in petroleum reservoirs. This field deals with a set of complex physical phenomena that present mathematical and numerical-computational challenges. For reservoir engineers, specific considerations play a role in the formulation of numerical methods. In the context of the finite volume method, the primary variables are typically located at the cell centers, while the secondary variables are located at the vertices or faces of the computational mesh. In the finite volume method, obtaining the primary variable, i.e., pressure, is crucial. Due to the physical properties of the porous medium, the determination of the pressure requires the solution of a system of nonlinear equations. Therefore, it is well know that the choice of the appropriate numerical method to solve this system of equations is crucial. It strongly affects the computational efficiency of the simulation and has a direct impacto on the problem under study. For the purpose of this study, a nonlinear finite volume formulation is used for the pressure equation, especially in cases where the porous medium has complex geological properties, characterized by a high degree of heterogeneity and anisotropy. In this context, the objective of this research is to evaluate the computational efficiency of a novel strategy applied to the well-known iterative Broyden method. Consequently, using numerical experiments performed with both triangular and quadrilateral grids, including distorted grids, a comprehensive analysis is performed to evaluate the efficiency and accuracy of the numerical solutions for the pressure equation. In addition, the study aims to identify the most efficient approach based on the numerical method used.

Keywords: porous media simulation; mophasic flow; quase-newton methods; finite volumes mehtods.

DATA DE APROVAÇÃO:

1 INTRODUÇÃO

Os problemas de difusão apresentados na literatura são baseados em leis de conservação, e estão presentes em diversas aplicações da engenharia, a exemplo do escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo ou ainda da simulação de águas subterrâneas em aquíferos, e são regidos por princípios matemáticos que descrevem a difusão de massa, através de meios porosos. Esses fenômenos físicos são matematicamente descritos por equações que envolvem um operador elíptico com um coeficiente de difusão, que pode ser, em geral, descontínuo e representado por um tensor completo de segunda ordem, neste caso bidimensional, capaz de apresentar uma alta razão de anisotropia, tornando a solução dessas equações ainda mais complexa.

A solução analítica de modelos matemáticos não-lineares pode ser inexistente devido à complexidade dos parâmetros físicos que estão presentes no fenômeno. Utilizando esta perspectiva, a empregabilidade de métodos numéricos mais sofisticados nas soluções das equações é perfeitamente justificada. Então, um método numérico ideal para a discretização do operador elíptico, a exemplo da equação de pressão, deveria atender idealmente as seguintes condições: ser localmente conservativo, manter soluções positivas ou o Princípio do Máximo Discreto (DMP), além da preservação da linearidade, possuir taxas de convergência de segunda ordem, apresentar resultados coerentes em malhas que possuem distorções e em meios porosos altamente heterogêneos e anisotrópicos (CONTRERAS *et al*, 2021).

A simulação numérica de escoamento em meios porosos é realizada por ferramentas computacionais e tem se tornado uma prática frequente para o analista numérico. Em particular, o método de volumes finitos não-lineares é uma metodologia numérica que fornece resultados consistentes com o modelo matemático, que consiste em discretizar o domínio por volumes finitos. As variáveis como pressão são aproximadas dentro de cada volume de controle e a continuidade dos fluxos são aplicadas em cada interface da malha computacional, logo pelo balanço de massa tem-se um sistema de equações não-lineares, que para resolvê-lo é necessário o uso de métodos iterativos, a exemplo dos métodos tipo Newton ou Quase-Newton. Estes métodos buscam encontrar a solução aproximada do sistema não-linear do campo de pressões por meio de iterações sucessivas, refinando a estimativa inicial até atingir uma convergência desejada.

Diversos modelos iterativos de segunda ordem utilizam em sua metodologia uma matriz Jacobiana, que é composta por taxas de variação de primeira ordem das funções que compõem o sistema não-linear e fornece informações acerca da taxa de variação de cada uma das funções

presentes. Mais especificamente, no presente trabalho o método iterativo de Broyden é utilizado para resolver sistemas não-lineares, e sua principal vantagem é evitar o cálculo da matriz jacobiana para cada iteração. Neste método, a matriz Jacobiana é calculada uma única vez, e através de manipulações algébricas, novas aproximações são obtidas, de forma a ficar tão precisa quanto desejado. Entretanto, quando malhas com um grande número de volumes de controle (altamente refinada) são utilizadas, a obtenção da Jacobiana envolverá um alto custo computacional.

Ao longo dos anos, diversos autores buscaram desenvolver técnicas aprimoradas para uma obtenção eficiente do cálculo da matriz jacobiana. Uma dessas propostas é o método de *graph coloring* desenvolvida por Curtis *et al*. (1974), cuja abordagem consiste em aplicação da teoria de grafos para reduzir o custo computacional da montagem da matriz jacobiana, este método permite agrupar variáveis em conjuntos independentes e submetidos a restrições, reduzindo o número de operações necessárias para a obtenção da matriz, outro exemplo é a proposta da utilização de partições mostrada em YPMA (1986), que sugere dividir o problema em partes menores e mais facilmente gerenciáveis. Ao decompor o sistema em subproblemas, a técnica de partições facilita a análise individual de cada parte e, em seguida, a combinação dos resultados para obter a matriz jacobiana completa. Nesse sentido, o presente trabalho foi inspirado na metodologia proposta por YPMA (1986).

Tendo em vista a necessidade de estratégias capazes de determinar de maneira mais eficientes a matriz jacobiana o presente trabalho modela numericamente a distribuição dos campos de pressão em meios porosos, utilizando um método de volumes finitos não linear, na qual a resolução da não linearidade do sistema de equações pode ser obtida através do método iterativo de Broyden, com uma estratégia de particionamento para a obtenção da matriz jacobiana. A validação do método numérico será através da resolução de diversos problemas envolvendo malhas estruturadas e não estruturada, mais precisamente, analisaremos a acurácia, robustez e eficiência computacional dos métodos propostos.

2 METODOLOGIA

O trabalho aborda a simulação em meios porosos para reservatório de petróleo considerando um escoamento monofásico, e a formulação de volumes finitos é utilizada para discretizar a dinâmica de escoamento baseada nos procedimentos de difusão, que são utilizam como base as equações de pressão. A construção do fluxo numérico em cada superfície de

controle é construída, e logo em seguida é obtida uma combinação para fluxos em uma direção. O processo de interporlação utilizado é o Linearity Preserving Explicit Weight (LPEW2).

2.1 Modelo Matemático

A formulação da equação governante para o escoamento de fluidos monofásicos em meios porosos homogêneos e anisotrópicos é descrita a seguir. A descrição matemática do problema pode ser através de uma equação de difusão, para o caso do escoamento em meios porosos abordado, esta equação de difusão é também conhecida como equação de pressão.

$$\nabla \cdot \vec{F} \;=\; Q(\vec{x}) \;\; com \;\; \vec{F} \;=\; -\Lambda(\vec{x})\nabla p \;\; em \;\; \vec{x} \;=\; (x,y) \;\; \in \;\; \Omega \;\; \subset \;\; \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

Onde os parâmetros da Eq (1) são:

Ω – Um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^2$, com $\partial\Omega$ sendo seu limite.

p – Denota o campo de pressão.

$\vec{F}$ – Representa o fluxo de Darcy.

$Q(\vec{x})$ – Termo fonte (ou semidouro).

O tensor de difusão (ou de permeabilidade) é um parâmetro não-linear que caracteriza as propriedades físicas do reservatório, é definido geralmente na coordenada cartesiana seguinte forma:

$$\Lambda(\vec{x}) \;=\; \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$\Lambda(\vec{x})$ é uma matriz positiva e simétrica, definida de forma que pode ser descontínua ponto a ponto em todo o domínio Ω. O problema descrito na equação (1) e pode ser resolvido quando as condições de contorno apropriadas são utilizadas. As condições de contorno usuais são conhecidas como condições de Dirichlet e Neumann:

$$\begin{cases} p \;=\; g_D\,, \;\; \text{em} \;\; \Gamma_D \\ \vec{F} \;\cdot\; \vec{n} \;=\; g_N, \;\; \text{em} \;\; \Gamma_N \end{cases} \tag{3}$$

Para qual $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, onde Γ_D e Γ_N são os contornos de Dirichlet e Neumann, respectivamente. A função escalar g_D (variável escalar prescrita) é definida em Γ_D e g_N (fluxos prescritos) é definido em Γ_N. Por fim, $\vec{n}$ é o vetor normal unitário.

2.2 Discretização da equação de pressão

A seguir, é mostrado as notações utilizadas ao longo do trabalho, para representação das variáveis que podem ser observadas na figura 1:

- $M = \{K\}$ é um conjunto de células poligonais e não sobrepostas, de tal forma que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in MK}$. A medida da célula genérica K é denotada por $|K|$. O volume de K ∈ M é representado por V_k.

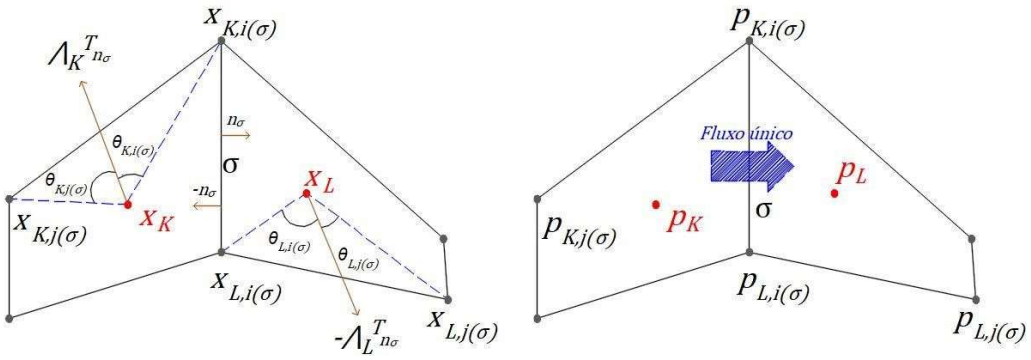
- $\mathcal{E} = \{\sigma\}$ é um conjunto de superfícies de controle (SC) disjuntas de $\bar{\Omega}$. A medida da superfície de controle genérica σ é representada por $|\sigma|$. Sejam $\mathcal{E}_{int} = \mathcal{E} \cap \Omega$ e $\mathcal{E}_{ext} = \mathcal{E} \cap \partial\Omega$ as representações dos conjuntos de SC bordas interiores e externas, respectivamente. Admite-se que para todo $K \in M$, há um subconjunto $\mathcal{E}_K$ de $\mathcal{E}$ de forma que $\partial K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_k} \bar{\sigma}$. Para $\sigma \in \mathcal{E}_K$, $n_{K,\sigma}$ denota o vetor unitário normal a σ que aponta para fora de K.

- $x_K \in K$ é o centro da célula K, e também representa o vetor posição do centro celular. Para $\sigma \in \mathcal{E}_K$, denota-se por $d_{K,\sigma}$ a distância ortogonal entre x_K e σ. Seja $d_\sigma = d_{K,\sigma} + d_{L,\sigma}$ se $\sigma = \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L$ e $d_\sigma = d_{K,\sigma}$ se $\sigma = \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}$. A aproximação da solução p no centro da célula x_K é expressa como p_k e Λ_K representa $\Lambda(x_K)$.

- $\mathcal{V}$ é o conjunto de vértices e $\mathcal{V}_{ext}$ denota o conjunto de vértices no contorno $\partial\Omega$.

- $\simeq$ é utilizado para indicar que a aproximação relevante satisfaz o critério de preservação da linearidade, ou seja, quando a solução p é linear por partes e o tensor de difusão é constante em relação à malha, tem-se uma aproximação precisa.

Figura 1 – Caracterização dos parâmetros físico-geométricos



Fonte: Adaptado de Contreras *et al*. (2021).

Integrando a Eq. (1) em todo o domínio de interesse e após algumas manipulações algébricas aliado à utilização do teorema da divergência, considerando uma aproximação para cada volume de controle em que $K \in M$ é uma malha poligonal, a equação de balanço de fluxo pode ser representada como:

$$\sum_{\sigma \in \varepsilon_K} F_\sigma \cdot N_\sigma = V_K \tilde{Q}_K \tag{4}$$

Tal que:

$$\int_{\partial K} \vec{F} \cdot \vec{n} = \sum_{\sigma \in \varepsilon_K} \vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma \quad e \quad \int_K Q \, dV = V_k \, \tilde{Q}_K \tag{5}$$

$\vec{F}_\sigma$ – Densidade média do fluxo.

$\tilde{Q}$ – Termo fonte ou semidouro.

O fluxo numérico é aproximado a partir de volumes finitos não-linear (5), o fluxo unilateral através de σ em relação ao volume de controle genérico K é expresso como:

$$\int_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}_\sigma \, ds = - \int_\sigma \Lambda_K \nabla p \cdot \vec{n}_\sigma \, ds = - \int_\sigma \nabla p \Lambda_K^T \cdot \vec{n}_\sigma \, ds, \quad \forall \sigma \in \varepsilon_K \tag{6}$$

$\overrightarrow{\Lambda_{K_\sigma}^T}$ – Transposta do tensor de permeabilidade.

O termo ∇p é aproximado a partir da região triangular auxiliar ilustrada na Fig. 1. Considerando o triângulo $\Delta \, x_K x_{K,i(\sigma)} x_{K,j(\sigma)}$ para uma decomposição da co-normal $\Lambda_K^T \vec{n}_\sigma$ que é

escrita como uma combinação linear dos segmentos $\overrightarrow{x_K x}_{K,i(\sigma)}$ e $\overrightarrow{x_K x}_{K,j(\sigma)}$. Tem-se:

$$\Lambda_K^T \vec{n}_\sigma = \alpha_{K,i(\sigma)} \overrightarrow{x_k x_{k,\iota(\sigma)}} + \alpha_{K,j(\sigma)} \overrightarrow{x_k x_{k,J(\sigma)}} \tag{7}$$

Ainda podemos definir os parâmetros $\alpha_{K,i(\sigma)}$ e $\alpha_{K,j(\sigma)}$ como:

$$\alpha_{i,r(\sigma)} = \frac{\left|\Lambda_i^T\right|\vec{n}_\sigma \sin(\theta_{i,\sigma}^1)}{\left|\overrightarrow{x_l x_{l,r(\sigma)}}\right| \sin(\theta_{i,\sigma}^1 + \theta_{i,\sigma}^2)}, \quad i = K, L; \; r = i, j; \; i \neq j \tag{8}$$

Onde $\alpha_{K,i(\sigma)}$ e $\alpha_{K,j(\sigma)}$ parâmetros positivos pois são sujeitos às restrições $\alpha_{K,i(\sigma)} > 0$, $\alpha_{K,j(\sigma)} > 0$ e $\alpha_{K,i(\sigma)} + \alpha_{K,j(\sigma)} > 0$ que devem ser aplicadas sob as condições $0 < \theta_K, i(\sigma)$, $\theta_K, j(\sigma) < \pi$ e $\theta_K = \theta_K, i(\sigma) + \theta_K, j(\sigma)$.

2.3 Construção do fluxo numérico

Aplicando a Eq. (7) na Eq. (6), e obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}_\sigma \, ds = -\int_\sigma \left(\alpha_{k,i(\sigma)} \nabla_P \cdot \overrightarrow{x_K x_{\hat{K},\iota(\sigma)}} + \alpha_{K,j(\sigma)} \nabla_P \cdot \overrightarrow{x_K x_{K,J(\sigma)}}\right) ds \tag{9}$$

O fluxo unilateral se relaciona às superfícies de controle σ dos volumes de controle K e L utiliza-se um esquema de diferenças finitas local que permite aproximar as derivadas parciais de ∇_P ao longo das direções $\overrightarrow{x_K x_{\hat{K},\iota(\sigma)}}$ e $\overrightarrow{x_K x_{K,J(\sigma)}}$. Que pode ser expressada da seguinte forma:

$$\vec{F}_\sigma^K . \vec{N}_\sigma = |\sigma|(\psi_{K,\sigma} p_K - \sum_{\Upsilon=i,j} \alpha_{K,\Upsilon(\sigma)} p_{K,\Upsilon(\sigma)} \tag{10}$$

$$\vec{F}_\sigma^L . \vec{N}_\sigma = |\sigma|(\psi_{L,\sigma} p_L - \sum_{\Upsilon=i,j} \alpha_{L,\Upsilon(\sigma)} p_{L,\Upsilon(\sigma)} \tag{11}$$

Onde $\psi_{K,\sigma} = \alpha_{K,i(\sigma)} + \alpha_{K,j}(\sigma)$ e $\psi_{K,\sigma} > 0$. De fórma análoga, $\psi_{L,\sigma} = \alpha_{L,i(\sigma)} + \alpha_{L,j(\sigma)}$ e $\psi_{L,\sigma} > 0$. Agora, para construção de um fluxo único atuante sob σ, construindo um método a partir da seguinte combinação não linear:

$$\vec{F}_\sigma \cdot \vec{N}_\sigma = \vartheta_{K,\sigma} \vec{F}_\sigma^K \cdot \vec{N}_\sigma = -\vartheta_{L,\sigma} \vec{F}_\sigma^L \cdot \vec{N}_\sigma \tag{12}$$

Para qual $\vartheta_{K,\sigma}$ e $\vartheta_{L,\sigma}$ são dois coeficientes não nulos que dependem inteiramente da variável de pressão e o sinal negativo indica o sentido de direção do fluxo. Substituindo a Eq. (10) e Eq. (11) na Eq. (12) e após algumas manipulações, obtém-se um único fluxo na superfície de controle σ:

$$\begin{aligned}\vec{F}_\sigma . \vec{N}_\sigma = |\sigma|\left(\vartheta_{K,\sigma}\psi_{K,\sigma}p_K - \vartheta_{L,\sigma}\psi_{L,\sigma}p_L\right) + |\sigma|(\vartheta_{L,\sigma}\sum_{\Upsilon=i,j}\alpha_{L,\Upsilon(\sigma)}\,p_{L,\Upsilon(\sigma)} \\ - \vartheta_{K,\sigma}\sum_{\Upsilon=i,j}\alpha_{K,\Upsilon(\sigma)}\,p_{K,\Upsilon(\sigma)})\end{aligned} \tag{13}$$

Com o objetivo de obter um método monótono de volumes finitos não-linear utilizando uma aproximação de fluxo de dois pontos (NL-TPFA), os coeficientes $\vartheta_{K,\sigma}$ e $\vartheta_{L,\sigma}$, não-lineares, são escolhidos de forma a satisfazer os seguintes requisitos:

$$\begin{cases}\vartheta_{L,\sigma}\,a_{L,\sigma} - \vartheta_{k,\sigma}\,a_{K,\sigma} = 0 \\ \vartheta_{L,\sigma} - \vartheta_{K,\sigma} = 1 \\ \vartheta_{L,\sigma} \geq 0, \vartheta_{K,\sigma} \geq 0\end{cases} \tag{14}$$

Para a simulação de reservatórios de petróleo, campos de pressão negativo são uma possibilidade, e devem ser evitados. Queiroz *et al.*(2014) demonstra a existência possível de campos de pressões oscilantes em interpoladores de segunda ordem. Por conseguinte, em casos de campos de pressão negativo, o cálculo de velocidade de Darcy pode apresentar valores incoerentes. Portanto, é necessário garantir que os coeficientes positivos, mesmo quando os pesos de interpolação são negativos:

$$\vartheta_{L,\sigma} = \frac{a_{K,\sigma} + e}{a_{K,\sigma} + a_{L,\sigma} + 2e}, a_{K,\sigma}a_{L,\sigma} \geq 0;\ \vartheta_{L,\sigma} = \frac{\left|a_{K,\sigma}\right| + e}{|a_{K,\sigma}| + |a_{L,\sigma}| + 2e}, a_{K,\sigma}a_{L,\sigma} < 0 \tag{15}$$

$$\vartheta_{K,\sigma} = 1 - \vartheta_{L,\sigma} \tag{16}$$

A utilização do fator $e = 10^{-16}$ objetiva evitar divisões por valores nulos. Quando $a_{K,\sigma}a_{L,\sigma} < 0$, os valores de $\vartheta_{L,\sigma}$ e $\vartheta_{K,\sigma}$ explícitos nas Eq. (15) e (16) não satisfazem o primeiro critério proposto na Eq. (15). Sendo assim, baseado em Wu e Gao (2014), introduzimos o seguinte termo na borda $\sigma \in \varepsilon_K \cap \varepsilon_L \subset \varepsilon_{int}$:

$$\beta_\sigma = \vartheta_{L,\sigma}\alpha_{L,\sigma} - \vartheta_{K,\sigma}\alpha_{K,\sigma} \tag{17}$$

Considerando $\beta_\sigma{}^+ = {}^{|\beta_\sigma|}{}_2{}^{+\beta_\sigma}$ e $\beta_\sigma{}^- = {}^{|\beta_\sigma|}{}_2{}^{-\beta_\sigma}$, a Eq. (13) pode ser reescrita como:

$$\vec{F}_\sigma.\vec{N}_\sigma = |\sigma|(\vartheta_{K,\sigma}\psi_{K,\sigma}p_K - \vartheta_{L,\sigma}\psi_{L,\sigma}p_L + (\beta_\sigma^+ - \beta_\sigma^-)) \tag{18}$$

Utilizando de manipulações algébricas, é possível obter:

$$\vec{F}_\sigma.\vec{N}_\sigma = \mathrm{w}_{K,\sigma}(p)p_k - \mathrm{w}_{L,\sigma}(p)p_L + |\sigma|\left(\frac{\beta_\sigma^+ e}{p_K + e} - \frac{\beta_\sigma^- e}{p_L + e}\right) \tag{19}$$

Onde

$$\mathrm{w}_{K,\sigma}(p) = |\sigma|\left(\vartheta_{K,\sigma}\psi_{K,\sigma} + \frac{\beta_\sigma^+ e}{p_K + e}\right),\ \mathrm{w}_{L,\sigma}(p) = |\sigma|\left(\vartheta_{L,\sigma}\psi_{L,\sigma} + \frac{\beta_\sigma^- e}{p_L + e}\right) \tag{20}$$

Como e é um número muito pequeno, o último termo na Eq. (19) é insignificante. Dessa forma, podemos reescrever essa equação na seguinte forma compacta:

$$\vec{F}_\sigma.\vec{N}_\sigma = \mathrm{w}_{K,\sigma}(p)p_k - \mathrm{w}_{L,\sigma}(p)p_L \tag{21}$$

Finalmente, como os parâmetros $\vartheta_{K,\sigma}, \vartheta_{L,\sigma}, \psi_{K,\sigma}, \psi_{L,\sigma}, \beta_\sigma{}^+, \beta_\sigma{}^-$ tratados são positivos, por consequência $\mathrm{w}_{K,\sigma}(p)$ e $\mathrm{w}_{L,\sigma}(p)$ também são positivos. Assim, para a borda σ, o fluxo dado pela Eq. (21) é único, e satisfaz a condição de conservação local $\vec{F}_\sigma.\vec{N}_\sigma + \vec{F}_{-\sigma}.\vec{N}_{-\sigma} = 0$

2.4 Tratamento das condições de contorno

A partir das condições na Eq. (3) e das Eq. (10) e (11), a expressão para o fluxo das bordas σ contidas no contorno de Dirichlet $\Gamma_D \subset \varepsilon_K \cap \varepsilon_{ext}$, com pressões prescritas, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{F}_{\sigma}.\vec{N}_{\sigma} = |\sigma|(\psi_{K,\sigma}p_K - \sum_{\gamma=i,j} \alpha_{K,\gamma(\sigma)}g_{DK,\gamma(\sigma)}) \tag{22}$$

Onde as pressões nodais g_D são prescritas.

Também a partir da Eq. (3), para bordas σ contidas no contorno de Neumann $\Gamma_N \subset \varepsilon_K \cap \varepsilon_{ext}$, com fluxos prescritos, podemos expressar:

$$\vec{F}_{\sigma}.\vec{N}_{\sigma} = \overline{g}_{N_{\sigma}} \tag{23}$$

Onde o fluxo normal em Γ_N dado pelo valor médio $\bar{g}_{N\sigma}$

2.5 Sistema discreto

A partir de uma aproximação de fluxo para todas as células no domínio discreto, nos quais os fluxos são computados a partir do obtido na Eq. (10), podemos obter um sistema não-linear, que pode ser escrito em forma de matriz da seguinte maneira:

$$T_{(P)}P = B(P) \tag{24}$$

$T-$ Um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^2$, com $\partial\Omega$ sendo seu limite.

$P-$ Denota o campo de pressão.

$B-$ Representa o fluxo de Darcy.

A construção da matriz T depende da pressão, dos parâmetros físico-geométricos e dos pesos de interpolação. O sistema não-linear é resolvido utilizando os métodos de Picard e Broyden.

2.6 Estratégia de partições do método iterativo de Broyden

Para resolução da equação de pressão, objetivo desta pesquisa, é necessário resolver sistemas de equações não lineares. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ao qual é necessário encontrar $x* \in \mathbb{R}^n$ tal qual *F(x*) = 0*. Entretanto, a resolução destes sistemas pode consumir um alto custo computacional. Denotamos as *n* funções de *F* como:

$$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{25}$$

e a matriz jacobiana de *F* em *x* como *F'(x):*

$$F'(x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x). \quad (26)$$

Quando a solução desejável puder ser obtida através de um razoável cálculo de *F'(x)*, é conveniente utilizar o método de Newton-Raphson, que produz uma série de aproximações $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ para *x**, a partir de uma aproximação inicial x_0 e a da seguinte expressão:

$$x_{i+1} = x_i - F'(x_i)^{-1} F(x_i) \quad (27)$$

Se F é não singular e contínuo em x* e x_0 é suficientemente próximo de x*, então o algoritmo converge quadraticamente para x*, ou seja, existe uma constante c tal que $||x_{i+1} - x*|| \leq c\ ||x_i - x*||^2$ para todo *i.* Em geral *F'(x)* não é facilmente obtida, então existe uma estratégia lógica para substituir *F'(x)* em (16), conhecida como iteração de Newton-Raphson modificada ou também chamado método iterativo quase-Newton.

$$x_{i+1} = x_i - B_i^{-1} F(x_i) \quad (28)$$

Tal que $B_{i+1} = U(B_i)$ e U usa informações de F. Em 1965, Charles George Broyden introduziu uma família de *updates* para U, conhecidos como *Quase-Newton updates*. Também introduziu o caso particular, utilizado em seu próprio método, em que se x_0 é muito próximo de *x**, então a norma da matriz de $B_0 - F'(x_0)$ é suficientemente pequena e várias condições razoáveis em F são satisfeitas, a convergência é superlinear para x*, i.e., $\lim_{i\to\infty} \frac{\|x_{i+1} - x*\|}{\|x_i - x*\|} = 0$ Broyden *et al*, (1977).

Algorítmo 1: Método iterativo de Broyden.

Entrada: {f_0, $P_{(0)}$, tolerância, $J_{[P(0)]}$}

1: **While** tolerância < erro

2: O método de Newton é definido por $P_{new} = P_{old} - J_{[P(0)]}^{-1} f_i$, na qual J é a matriz jacobiana avaliada em $P_{(0)}$;

3: É obtido um novo valor de interpolação para pressão. P_new;

4: f = (T(P_{new})(P_{new}) - B), cálculo do resíduo utilizando P_{new}.

5: A Jacobiana J_{i+1} é obtida, fazendo:

$$j_{i+1} = \frac{j_i + f((-j_i^{-1})f_i)^{-1}}{((-j_i^{-1})f_i)^{-1}((-j_i^{-1})f_i)};$$

6: $Erro = \frac{norm(f)}{norm(f_0)}$, cálculo do erro em módulo;

7: $P_{(i)} = P_{new}$;

end

A matriz jacobiana discreta é frequentemente calculada a partir do método das diferenças finitas, e esta abordagem pode ter um alto custo computacional, quando tratamos domínios computacionais com malhas muito refinadas. Portanto, foi adotada uma metodologia clássica a modo de comparação, esta metodologia consiste em linearizar derivadas parciais utilizando uma união da matriz padrão.

Seja $J(x,h)_{ij}$ elemento *i-j* da matriz jacobiana:

$$J(x,h) \in L(R^n), J(x,h)_{ij} = \frac{1}{h_{ij}}[f_i(x + h_{il}e^j) - f_i x] \quad (29)$$

Onde, comumente e^l, ..., e^nsão as bases canônicas de R^n e $h \in R^{n^2}$é um vetor com componentes diferentes de zero, geralmente é a norma euclidiana definida por$\sqrt{(\Delta x)^2}$. O procedimento para montar a matriz jacobiana pela estratégia de partições consiste em considerar uma matriz padrão $T_F = (T_{i,j}) \in L(R^n)$ da matriz global *A*. Esta matriz padrão é particionado em *N* subconjuntos mutuamente disjuntos, em que N_k possui a propriedade que para todo $\iota \in N$ existe em cada N_k pelo menos um *J* no qual $T_{i,j} = 1$.

Seja $N_k = \{j_1, \ldots j_p\}$ sendo um dos subconjuntos da partição, o vetor de diferença para essa partição é dada por:

$$d^k = F(x + h_{j1}e^{j1} + h_{j2}e^{j2} + \cdots + h_{jp}e^{jp}) - Fx \text{ para cada } k \quad (30)$$

Algorítmo 2: Montagem da matriz jacobiana.

Entrada: {f, P_i, $P_{(0)}$, $J_{[P(0)]}$}

ΔH = $\sqrt{10^{-3} norm(P_{(0)})}$

dx = $\sqrt{10^{-3} norm(P_{(0)})} * I_{(:,V(i,z))}$

1: **For** ielem = 1, ... Z

2: Atualiza o vetor x, a depender das partições criadas. $x = x + dx;$

3: Montagem da jacobiana por diferenças finitas, a partir da matriz global: $d = M_{i+1} - f$; onde f é o resíduo calculado anteriormente.

4: **End**

5: Atualiza o vetor **x**.

end

A construção das partições é realizada a partir de uma esparsa matriz de aproximação inicial, na qual é realizada uma análise de disposição de seus termos não nulos, e a partir da identificação de suas respectivas posições, as colunas são agrupadas de maneira a não existir sobreposição destes termos. A garantia de não sobreposição é dada pelo produto interno das duas colunas. A partir da construção das partições, para todo $i \in N$ existe em cada N_k pelo menos um J no qual $T_{i,j} = 1$. Então, o elemento $(e^i)^T d^k$ do vetor d^kdividido pelo passo h_{ji} é, exatamente, o elemento (i, j_i)th da *matriz Jacobiana J(x,h).*

Algorítmo 3: Montagem da matriz jacobiana com partições

Entrada: {f, P_i, $P_{(0)}$, V, $J_{[P(0)]}$}

ΔH = $\sqrt{10^{-3} norm(P_{(0)})}$ dx = $\sqrt{10^{-3} norm(P_{(0)})} * I_{(:,V(i,z))}$

1: **For** ielem = 1, ... Z

2: Verifica a condição de produto interno para as partições $V_{(i,j)}$;

3: Atualiza o vetor x, a depender das partições criadas. $x = x + dx;$

4: Montagem da jacobiana por diferenças finitas, a partir da matriz global: d = M_{i+1} - $d = M_{i+1} - f$ onde f é o resíduo calculado anteriormente;

5: **For** var = 1, ... i

$j = \frac{d \; x \; V_{(var,z)}}{\Delta H}$ Onde I é a matriz identidade padrão e V é a matriz de partições.

end

6: Atualiza o vetor x.

end

2.7. Modelo Numérico

A discretização dos fenômenos físicos foi realizada por meio da utilização de algoritmos computacionais integrados ao simulador matemático conhecido como MATLAB (MATrix LABoratory). A escolha do MATLAB deveu-se à sua reputação como um simulador interativo de alto desempenho voltado para cálculos numéricos, além de sua compatibilidade com outras ferramentas computacionais amplamente reconhecidas internacionalmente.

O MATLAB oferece funcionalidades abrangentes, que incluem análise numérica, manipulação de matrizes, processamento de sinais e criação de gráficos, tudo em um ambiente de fácil utilização. Esse ambiente permite a expressão de problemas e soluções de forma semelhante à notação matemática, em contraste com abordagens de programação mais tradicionais.

Por meio dos algoritmos desenvolvidos, torna-se possível investigar e testar diversas situações típicas relacionadas à gestão de reservatórios de petróleo.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, serão apresentados os resultados numéricos obtidos pelas nossas formulações simulando os campos de pressão de meios porosos que possuem características geológicas adversas, utilizando malhas quadrilaterais e triangulares, e suas respectivas análises em função do objetivo de verificar a eficiência dos diferentes métodos para solução da equação de pressão.

3.1 Modelo comparativo

Objetivando realizar uma análise comparativa quanto à eficiência dos diferentes modelos numéricos, adota-se o método iterativo de Broyden, em sua maneira clássica e o método de Broyden utilizando uma estratégia de interpolação. Associado à estes, serão observados também a iteração de Picard, juntamente com o método de iterativo de Picard com aceleração de Anderson, proposta em 1965.

3.2 Experimentos numéricos

Para o cálculo das taxas de convergência adotamos as seguintes normas discretas L2:

$$\mathfrak{E}_p = \left(\frac{\sum_{\hat{L} \in M} (p(\vec{x}_{\hat{L}}) - p_{\hat{L}})^2 V_{\hat{L}}}{\sum_{\hat{L} \in M} V_{\hat{L}}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{31}$$

Onde $p(\vec{x}_{\hat{L}})$ representa a solução analítica obtida nos baricentros $\vec{x}_{\hat{L}}$ do volume de controle $\hat{L}$ e $p_{\hat{L}}$ é a pressão numerica obtido pelo método proposto. Enquanto que para o fluxo, adotamos:

$$\mathfrak{E}_F = \left(\frac{\sum_{IJ \in \varepsilon} \left((\vec{F}_n(\vec{x}_{IJ}) - \vec{F}_{IJ}) \cdot \vec{n}_{IJ} \right)^2 A_{IJ}}{\sum_{IJ \in \varepsilon} A_{IJ}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

Sendo, o fluxo analítico no ponto médio $\vec{x}_{IJ}$ definido por $\vec{F}_n(\vec{x}_{IJ}) = -K\nabla p(\vec{x}_{IJ})$ e A_{IJ} uma área representativa como a soma das áreas dos volumes de controle que compartilham IJ. As taxas de convergência numérica R_γ ($\gamma = p, F$) são obtidas pela seguinte expressão:

$$R_\gamma = \frac{log\left(\varepsilon_\gamma(h_2)/\varepsilon_\gamma(h_1)\right)}{log(h_2/h_1)} \tag{33}$$

Onde h_1 e h_2 representam o tamanho de duas malhas sucessivas e $\varepsilon_\gamma(h_1)$ e $\varepsilon_\gamma(h_2)$ as respectivas normas L2 correspondentes dos erros. Os valores máximo e mínimo do campo de pressão são calculados usando as seguintes relações $p_{max} = max\{p_{\hat{L}}\}$ e $p_{min} = min\{p_{\hat{L}}\}$ $\forall \hat{L} \in M$, respectivamente.

3.3 Teste de convergência: escoamento monofásico num meio poroso altamente heterogêneo e anisotrópico

Este problema foi adaptado de (CONTRERAS *et al.,* 2019) e consiste em um domínio quadrado de dimensões $\Omega = [0,1]^2$ com um tensor de permeabilidade que varia em função da posição, definido por:

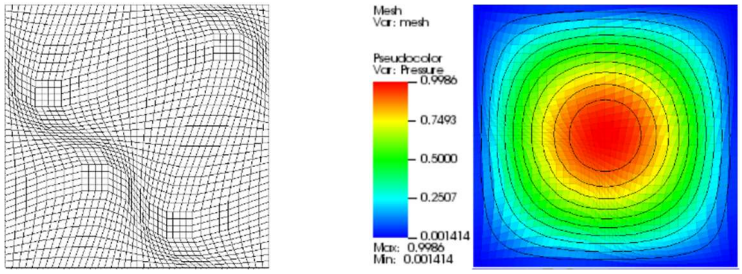
$$K(\vec{x}) = R_\theta diag(1 + 2x^2 + y^2, 1 + x^2 + 2y^2) R_{-\theta}, \quad \theta = 5\pi/12 \tag{34}$$

A solução analítica para esse problema é expressa por:

$$p(\vec{x}) = sin(\pi x)\, sin(\pi y). \tag{35}$$

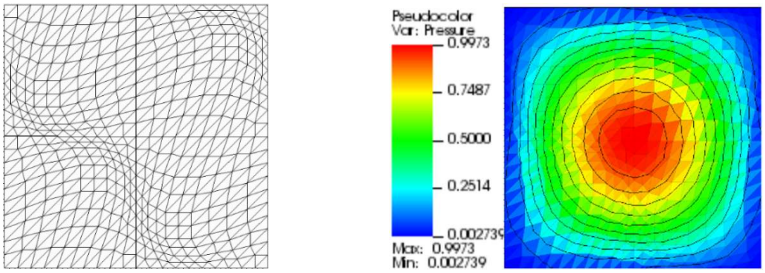
As condições de contorno de Dirichlet são obtidas diretamente da solução analítica. Para avaliar as taxas de convergência, foi considerado um conjunto de malhas triangulares e quadrilaterais. Já para avaliar as estratégias adotadas, foi realizado um teste comparativo entre os diferentes métodos de resolução de sistemas não-lineares, comparando-se os números de iterações, o tempo computacional, o erro associado e os valores de pressão. O método iterativo de Broyden com a montagem do jacobiano clássico e a estratégia com partições, estes últimos foram implementados e fizeram parte do nosso projeto de pesquisa, considerando que o cálculo da matriz jacobiana clássica é feito pelo método diferencia finita de primeira ordem.

Figura 2 – (a) Malha quadrilateral e (b) campo de pressão.



(a) (b)

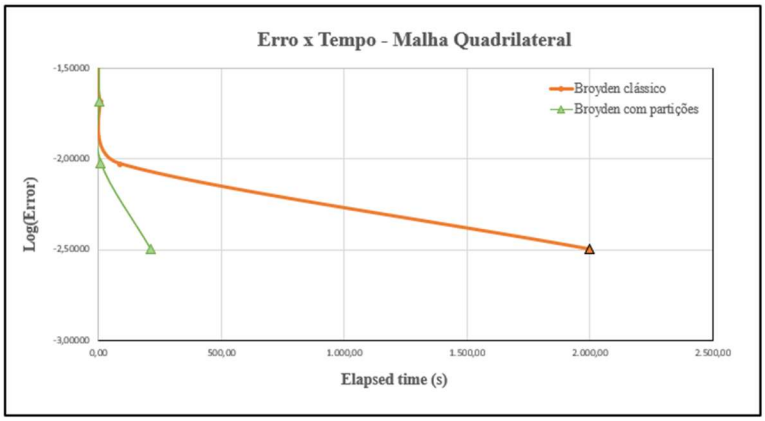
Figura 3 – (a) Malha triangular e (b) Campo de pressão.



(a) (b)

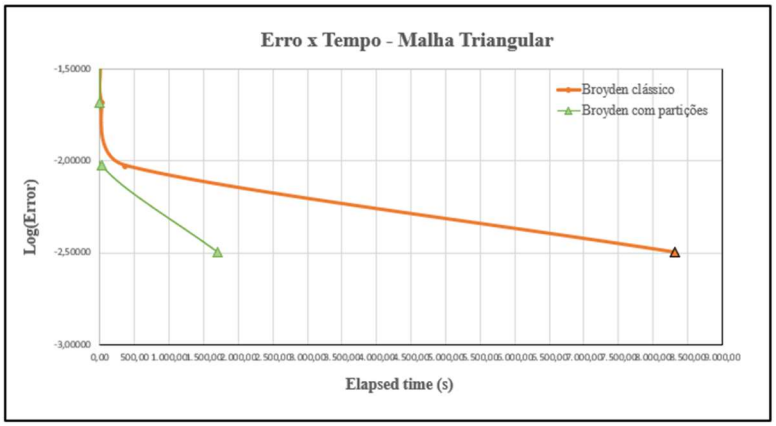
A seguir, é mostrado um gráfico de desempenho da estratégia com partição, quando comparado à obtenção da matriz jacobiana de forma clássica, o gráfico foi realizado para uma sequência de malhas mostradas na figura 2 e 3. Na figura 4 e 5, observamos que o tempo computacional obtido pela nossa formulação proposta é menor que obtido pela formulação clássica (matriz jacobiano com montagem clássica) evidenciando o potencial em aplicações da engenharia.

Figura 4. Eficiência computacional para malha quadrilateral.



Fonte: O autor (2023).

Figura 5. Eficiência computacional para malha triangular.



Fonte: O autor (2023).

Assim como nas figuras 4 a 5, nas tabelas 1 e 2, observamos que o método iterativo de Broyden com matriz jacobiano clássico teve um custo computacional maior, comaparado à estratégia adotada ainda embora o número de iterações tenha se mantido o mesmo. Neste sentido, podemos afirmar que nosso objetivo foi alcançado. Entretanto, comparando os resultados com o método de Picard, e Picard+Anderson observamos que o custo computacional ainda é alto, em futuros trabalhos pretendemos investigar essa desvantagem frente aos métodos iterativos de primeira ordem.

Tabela 1: Taxas de convergência, número de iterações e tempo computacional sobre malha quadrilateral.

Malha	m x n	10x10	20x20	40x40	80x80
	H	0,10	0,05	0,03	0,01
Erro	E p	0,010	0,0026	0,00065	0,00016
	E v	0,125	0,0454	0,0165	0,0059
Taxa de conv. Pressão		-	1,94	2,01	2,03
Taxa de conv. Velocidade		-	1,46	1,46	1,48
Broyden com matriz jacobiano clássico	Iterações	15	19	22	24
	Tempo (s)	0,48	7,68	85,37	2.000,17
Broyden com matriz jacobiano baseada em partições	Iterações	15	19	22	24
	Tempo (s)	0,21	0,84	8,13	210,82
Iteração de Picard	Iterações	18	27	35	40
	Tempo (s)	0,40	0,80	5,30	33,62
Picard com aceleração And.	Iterações	14	19	22	24
	Tempo (s)	0,30	0,67	3,94	15,47

Fonte: O autor (2023).

Tabela 2: Taxas de convergência, número de iterações e tempo computacional sobre malha triangular.

Malha	m x n	10x10	20x20	40x40	80x80
	H	0,10	0,05	0,03	0,01
Erro	E p	0,0137	0,0039	0,0011	0,00032
	E v	0,1125	0,0400	0,0140	0,0049
Taxa de conv. Pressão		-	1,81	1,83	1,78
Taxa de conv. Velocidade		-	1,49	1,51	1,51
Broyden com matriz jacobiano clássico	Iterações	14	18	19	21
	Tempo (s)	0,96	19,70	358,07	8.317,17
Broyden com matriz jacobiano baseada em partições	Iterações	14	18	19	21
	Tempo (s)	0,24	1,17	25,33	1.699,39
Iteração de Picard	Iterações	19	24	27	28
	Tempo (s)	0,42	0,95	5,19	35,70
Iteração Picard com aceleração And.	Iterações	14	18	19	21
	Tempo (s)	0,37	0,63	10,43	25,03

Fonte: O autor (2023).

3.4 Teste de monoticidade: escoamento monofásico em meios porosos altamente heterogéneo e anisotrópico

O teste de monoticidade tem por objetivo avaliar se o método utilizado é positivo, a pressão é considerada zero nas bordas $p = 0$. Adaptado dos testes realizados por Gao e Wu (2013), o termo fonte é dado por:

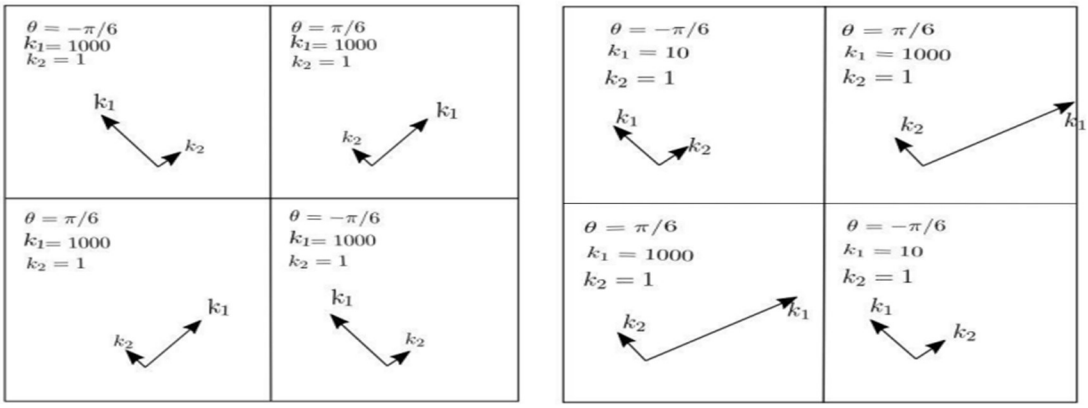
$$Q(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{81}{4}, \vec{x} \in \left(\frac{7}{18}, \frac{11}{18}\right)^2 \\ 0, \vec{x} \notin \left(\frac{7}{18}, \frac{11}{18}\right)^2 \end{cases} \tag{36}$$

E o tensor de permeabilidade:

$$\Lambda(\vec{x}) = \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \mathcal{R}_{-\theta} \tag{37}$$

Os casos que serão investigados estão nos subdomínios que serão ilustrados na Figura 6.

Figura 6 – Subdomínios, em caso I – Principais direções do tensor de permeabilidade com autovalores fixos. Caso II – Padrão *chessboard*.



Fonte: Contreras et al. (2021).

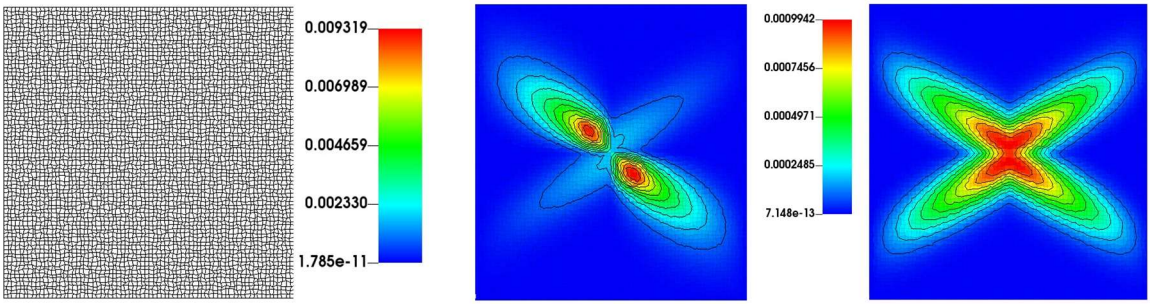
O caso I possui: k_1= 1000 e k_2= 1 com o ângulo θ modificado a cada subdomínio. Para o caso II, há a distribuição chessboard para k_1 e k_2, conforme ilustrado na Figura 6.b. As malhas utilizadas foram de tamanho 72x72 vértices aleatoriamente distribuídos, que são construídas a partir de malhas uniformes estruturadas triangulares e quadrangulares com uma distorção aleatória das coordenadas (x, y) na forma:

$$x = x + 0{,}3\xi x h;\ y = y + 0{,}3\xi y h;\ \xi x, \xi y \in [-1{,}1] \tag{38}$$

Com h sendo o espaçamento entre os vértices.

Figura 7 – (a) Malha triangular aleatoriamente distorcida, (b) Campo de pressão Caso I, (c) Campo de pressão Caso II.

(a) (b) (c)



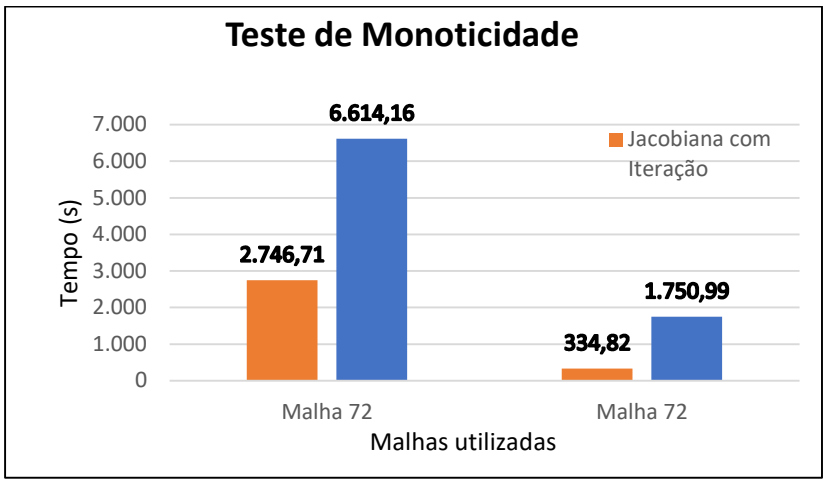
Fonte: O autor (2023).

Tabela 4: Teste de monoticidade.

Malha 72x72		Triangular	Quadrilateral
CVs		10.368	5.184
Broyden com matriz jacobiano clássico	$P_{máx}$	0,0011	$9{,}94 \times 10^{-4}$
	$P_{mín}$	$-7{,}01 \times 10^{-11}$	$-3{,}23 \times 10^{-11}$
	Interações	85	71
	Tempo (s)	6.614,16	1.750,99
Broyden com matriz jacobiano baseada em partições	$P_{máx}$	0,0011	$9{,}94 \times 10^{-4}$
	$P_{mín}$	$-6{,}25 \times 10^{-11}$	-4.56×10^{-12}
	Interações	86	71
	Tempo (s)	2.746,71	334,82

Fonte: O autor (2023).

Figura 8 – Resultado comparativo da matriz jacobiana obtida para o teste de monoticidade.



Fonte: O autor (2023).

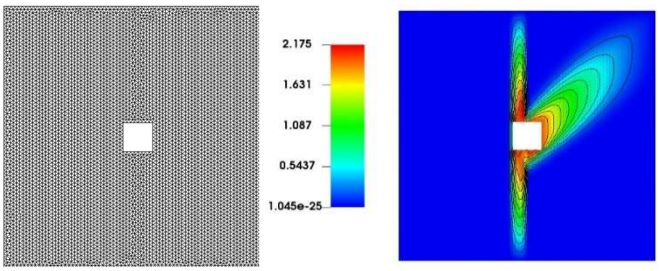
É possível observar que a condição de monoticidade foi obedecida, e a eficiência computacional da matriz jacobiana com partições torna-se evidente, mesmo em situações que o número de iterações foi superior, o tempo computacional foi consideravelmente reduzido.

3.5 Teste de princípio de máximo discreto: escoamento monofásico em meios porosos altamente heterogêneas e anisotrópicas

O Princípio do Máximo Discreto (DMP) estabelece que, se uma solução numérica de uma EDP atende a certas condições de estabilidade e precisão, ela não pode violar os limites físicos ou condições iniciais e de contorno impostas pelo problema, em outras palavras, a solução numérica não pode crescer infinitamente ou receber valores negativos. O teste DMP é crucial para garantir que soluções numéricas sejam confiáveis e que esta solução represente de maneira

confiável o fenômeno físico modelado. Estre problema foi adaptado de Queiroz *et al.*(2014), o teste realizado para verificação do DMP levou em consideração um domínio computacional quadrado unitário com um furo no interior, definido como $\Omega = [0,1]^2/[4/9,5/9]^2$ cujo limite é a união disjunta de Γ_0 e Γ_1. Também é determinado $g_D = 0$ em Γ_0 e $g_D = 2$ em Γ_0 e o termo fonte $Q(\vec{x}) = 0$. Cujos parâmetros são $\theta = \frac{\pi}{2}$, com $x_1 = x + 10^{-3}$ e $y_1 = y + 10^{-3}$. Foram realizados testes em três níveis de refinamento diferentes, e nestes foram avaliados a eficiência e robustez do algoritmo de Broyden.

Figura 4 – (a) Malha triangular não estruturada e (b) Campo de pressão.



Fonte: O autor (2023).

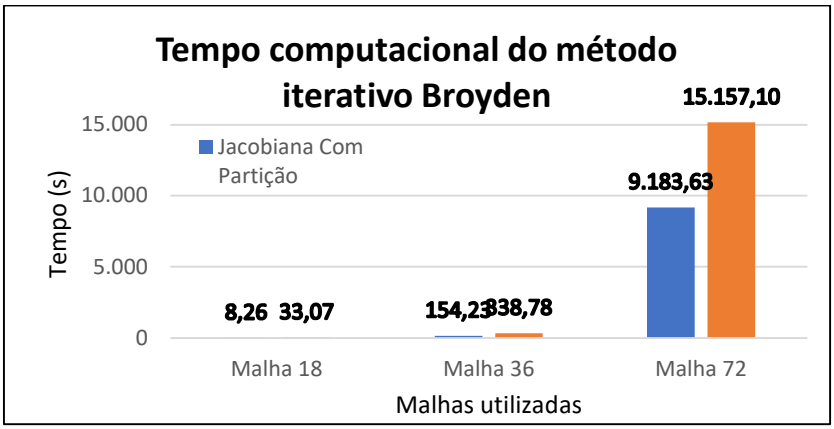
Tabela 3: Avaliação da eficiência das partições no teste DMP

Malha	m x n	18x18	36x36	72x72
CVs		734	2.730	12.008
Broyden com matriz jacobiano clássico	$P_{máx}$	2,39	2,44	2,17
	$P_{mín}$	$-5,10x10^{-3}$	$-6.23x10^{-11}$	$-7.89x10^{-15}$
	Interações	331	122	137
	Tempo (s)	33,07	338,78	15.157,10
Broyden com matriz jacobiano baseada em partições	$P_{máx}$	2,39	2,44	2,17
	$P_{mín}$	$-5,17x10^{-3}$	$-2.26x10^{-11}$	$-1,22x10^{-14}$
	Interações	149	173	142
	Tempo (s)	8,26	154,23	9.183,63

Fonte: O autor (2023).

No teste de DMP, é possível observar que a resolução através do método LPEW2 não garante a positividade da solução numérica, isto desvantagem é inerente dos métodos Newton ou Quase-Newton, porém existem estratégias para positivisar os resultados. Na tabela 3, observa-se que o método possui valores acima de 2, isso também é inerente do nosso método já que ele garante a monotonicidade mas não garante respeita o extremo superior. Por outro lado, a eficiência da estratégia utilizada demonstra um ganho computacional considerável para o cálculo da equação de pressão.

Figura 5 – Resultado comparativo (tempo) da matriz jacobiana obtida.



Fonte: O autor (2023).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, exploramos uma estratégia de partição destinada a acelerar o tempo computacional envolvido no cálculo da matriz Jacobiana no método iterativo de Broyden que foi utilizado para resolver o sistema de equações não-lineares para o cálculo da pressão em reservatórios. A matriz jacobiana tem um papel fundamental na resolução deste modelo matemático, em casos em que a malha é muito refinada (possui um grande número de volumes de controle), sua obtenção pode apresentar um alto custo computacional. Nos testes realizados, as características físicas do reservatório possuíam uma alta razão de anisotropia e heterogeneidade. Os resultados alcançados ao longo deste estudo demonstram de forma clara a eficiência da estratégia de partição adotada, proporcionando uma melhoria significativa no tempo de processamento da simulação.

REFERÊNCIAS

CONTRERAS, F.; LYRA, P.; SOUZA, M.; CARVALHO, D. **A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs**. Computers & Fluids, Elsevier, v. 127, p. 1–16, 2016.

CONTRERAS F. R. L. **Métodos de volumes finitos robustos para a simulação de escoamentos bifásicos de água e óleo em reservatórios de petróleo**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2016.

CONTRERAS F. R. L.; LYRA P. R.; CARVALHO D. K. E. **A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (MPFA-QL) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media**. Em: Applied Mathematical Modelling, v.70, p. 659–676, 2019.

GAO, Z.; WU, J. **A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and aniso- tropic diffusion equations on general meshes.** International Journal for Numerical Methods in Fluids, Wiley Online Library, v. 67, n. 12, p. 2157–2183, 2011.

QUEIROZ, L.; SOUZA, M.; CONTRERAS, F.; LYRA, P.; CARVALHO, D. **On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using different interpolations strategies**. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Wiley Online Library, v. 74, n. 4, p. 270–291, 2014.

WU, J.; GAO, Z. **Interpolation-based second-order monotone finite volume schemes for anisotropic diffusion equations on general grids**. Journal of Computational Physics, Elsevier, v. 275, p. 569–588, 2014.

YUAN, G.; SHENG, Z. **Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes**. Journal of computational physics, Elsevier, v. 227, n. 12, p. 6288–6312, 2008.

BROYDEN, C. G. **"A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations"**. Em:Mathematics of Computation 92 (1965), pp. 577–593.

ANDERSON, D. G. **"Iterative Procedures for Nonlinear Integral Equations"**. Em: Journal of the ACM 12 (1965), pp. 547–560.

WERNER, R. C. **Methods for solving systems of nonlinear equations**. SIAM, 1998.

GOLDFARB, D. A family of variable-metric methods derived by variational means. **Mathematics of computation**, v. 24, n. 109, p. 23-26, 1970.

FLETCHER, R. A new approach to variable metric algorithms. **The computer journal**, v. 13, n. 3, p. 317-322, 1970.

EMANOEL RODRIGUES DOS SANTOS

UM MÉTODO DE VOLUMES FINITOS NÃO-LINEAR UTILIZANDO UM MÉTODO QUASE-NEWTON PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MEIOS POROSOS.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de artigo científico, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil. Defesa realizada por videoconferência.

Área de concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo

Aprovado em: 06/10/2023

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Pedro Pereira dos Santos (Avaliador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Alessandro Romário Echevarria Antunes (Avaliador)
Universidade Federal de Pernambuco