



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

Alecio Soares Silva

**Um estudo sobre alguns conceitos de estabilidade com horizonte variável no
Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos**

Recife

2023

Alecio Soares Silva

**Um estudo sobre alguns conceitos de estabilidade com horizonte variável no
Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Estatística.

Área de Concentração: Probabilidade.

Orientador (a): Dr. Leandro Chaves Rêgo

Coorientador (a): Dr. Giannini Italino Alves Vieira

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

S576e Silva, Alecio Soares
Um estudo sobre alguns conceitos de estabilidade com horizonte variável no Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos / Alecio Soares Silva. – 2023.
118 f.: il., fig.

Orientador: Leandro Chaves Rêgo.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2023.
Inclui referências.

1. Probabilidade. 2. Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos. 3. Estabilidade. 4. Horizonte variável. I. Rêgo, Leandro Chaves (orientador). II. Título.

519.2 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2023 - 106

ALECIO SOARES SILVA

**UM ESTUDO SOBRE ALGUNS CONCEITOS DE ESTABILIDADE COM HORIZONTE
VARIÁVEL NO MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovado em: 07 de junho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo
Orientador, UFPE

Prof. Dr. Giannini Italino Alves Vieira
Coorientador, UFC

Prof. Dr. Alexandre Bevilacqua Leoneti
Examinador Externo à Instituição, USP

Prof^a Dr^a Maisa Mendonça Silva
Examinadora Externa ao Programa, UFPE

Prof. Dr. Raydonal Ospina Martinez
Examinador Interno

Prof. Dr. Roberto Ferreira Manghi
Examinador Interno

Dedico esta tese ao meu irmão e grande amigo, que desde sempre, foi uma grande fonte de inspiração por sua bondade, paciência, respeito, carinho e amor ao longo de minha trajetória. Embora ele não esteja aqui para que pudessémos nos abraçar bem forte, como sempre fizemos, as memórias de seus ensinamentos e de tudo que vivemos sempre permanecerão vivas em meu coração. Espero que este trabalho possa honrar sua memória e evidenciar a importância que ele teve em minha vida. Agradeço por sempre ter sido um exemplo de perseverança, coragem e bondade. Almicio, você foi o homem que eu cresci admirando e que, permanentemente, desejei me tornar, você sempre será meu herói.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus a quem devo minha vida, inspiração e sabedoria. Até este momento, Ele me sustentou e nunca me abandonou. Estou profundamente agradecido por Sua constante presença em minha vida e por Seu amor incondicional.

A meus pais Almidian Silva e Lucivânio Felix que sempre foram uma fortaleza na qual pude me refugiar tanto nos momentos confortáveis, quanto nos momentos de angústia.

A minha filha Alane Sophi, minha fonte de inspiração, e que mesmo sendo tão pequena, é minha grande amiga.

As minhas irmãs e amigas Thalita Alves e Alice Soares, pela parceria em todos os momentos, pela torcida, por todas nossas conversas, pela paciência e pelos estudos compartilhados.

A minha tia Adeilda Antonia pelo carinho, pela torcida e pelas orações que sempre dedicou a mim.

Aos meus orientadores, Professor Leandro Chaves Rêgo e Professor Giannini Italino Alves Vieira, por toda paciência, todo carinho, todo respeito, todos momentos de ensinamentos. Durante essa jornada, pude aprender muito com cada um de vocês.

Aos Professores Máisa Mendonça Silva, Raydonal Ospina Martínez, Roberto Ferreira Manghi e Alexandre Bevilacqua Leoneti pela disponibilidade de participação na banca de defesa, além das contribuições sugeridas para colaboração com nossa pesquisa, pois inegavelmente, uma pesquisa se faz com o trabalho de muitas mãos.

Aos meus amigos Elania Daniele, Ailton Diniz, Joselito Elias, Mozart Edson, Rodrigo José, Wesley Balbino e Flávio Franklin por todas as conversas, pelos conselhos e toda torcida.

Aos Professores Bráulio Maia (*in memoriam*), José Urânio (*in memoriam*), Jorge Henrique, José de Barros, José de Arimatéia, Luiz Antonio, José Iraponil, Joelson Pimentel, Aníbal Menezes e José Havelange que participaram de minha jornada sendo grandes referências para mim.

A todos os colegas do Programa de Pós-Graduação em Estatística, em especial, France Evelylyn, Alisson dos Santos, Jerfson Bruno, Alexsandra Gomes, Ernando Campos, Alisson de Lima.

A todos os Professores da Pós-Graduação em Estatística, pelo carinho demonstrado no decorrer das disciplinas ministradas, mesmo em um momento tão difícil no qual todos tivemos que nos adaptar a uma rotina nova e cheia de contratempos, bem como, a todos os funcionários da secretaria do programa.

A Universidade Federal de Pernambuco.

RESUMO

Nesta tese abordamos conceitos de estabilidade de horizonte variável, os quais, apesar de serem mais flexíveis em relação aos conceitos de horizontes fixos, ainda não são muito explorados na literatura sobre o Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR). Nosso objetivo é aumentar o entendimento sobre tais conceitos proporcionando alguns avanços e correções na literatura. Assim, dentre os avanços apresentados, temos um teorema que estabelece a equivalência entre os conceitos das estabilidades Maximin_h e Metarracionalidade generalizada MR_h , para conflitos bilaterais, a qual foi justificada pela construção de uma política Maximin, baseada na construção de uma árvore Maximin. O segundo avanço foram resultados que estabelecem a relação entre as estabilidades Maximin_h e Metarracionalidade Generalizada Alternativa, para conflitos multilaterais, que diferente do caso de conflitos com dois decisores, não são equivalentes. O terceiro avanço foi propor duas generalizações alternativas para a estabilidade Movimento Limitado, na qual consideramos os oponentes do decisor focal como uma coalizão, sendo que em uma delas a coalizão de oponentes tem um comportamento cooperativo e na outra mais individualista. Além disso, estudamos as relações destes conceitos com os conceitos clássicos de estabilidade do GMCR. No que se refere às correções sugeridas, a primeira delas foi o fato de o estado antecipado de acordo com a estabilidade L_h não ser único, gerando uma ambiguidade, para a qual, também, sugerimos uma desambiguação. A segunda, foi apontar que o corolário apresentado na literatura sobre o GMCR, sobre equilíbrio em políticas e Metarracionalidade Generalizada está incorreto, o que mostramos por meio de um exemplo. A terceira correção proposta, refere-se à justificativa para o fato de a estabilidade Movimento Limitado implicar a estabilidade Metarracional Generalizada, para o caso de conflitos bilaterais. Apesar desta implicação ser verdadeira, a justificativa não considera que em um conflito, um estado s pode ser L_h estável para o decisor focal, mas seu oponente pode, ao buscar maximizar seu *payoff*, acessar estados diferentes a partir de um mesmo estado, quando este aparecer mais uma vez na árvore que representa seus possíveis movimentos. Daí, apresentamos uma justificativa correta para a implicação. Por fim, a quarta correção sugerida foi o fato de o estado antecipado de acordo com a estabilidade Maximin_h não ser único, o que assim como no caso anterior da estabilidade L_h , também gera uma ambiguidade, e mais uma vez, sugerimos uma desambiguação.

Palavras-chave: estabilidade; árvore; política; relações entre conceitos; horizonte variável.

ABSTRACT

In this thesis, we address concepts of variable horizon stability, which, despite being more flexible compared to fixed horizon concepts, are still not extensively explored in the literature on the Graph Model for Conflict Resolution (GMCR). Our objective is to increase the understanding of these concepts by providing some advances and corrections in the literature. Thus, among the advances presented, we have a theorem that establishes the equivalence between the concepts of Maximin_h stability and Generalized metarationality MR_h , for bilateral conflicts, which was justified by the construction of a Maximin policy, based on building a Maximin tree. The second breakthrough were results that establish the relationship between Maximin_h stability and Alternative Generalized Metarationality, for multilateral conflicts, which, unlike the case of conflicts with two decision makers, are not equivalent. The third advance was to propose two generalizations of Limited Move stability, in which we consider the opponents of the focal decision maker as a coalition, where in one of them the coalition has a more cooperative behavior, while in the other it has a more individualistic behavior. In addition, we study the relationships of this concept with the classic stability concepts of the GMCR. With regard to the suggested corrections, the first one was the fact that the anticipated state according to L_h stability is not unique, for which we also suggest a disambiguation. The second was to point out that the corollary presented in the literature on the GMCR, about equilibrium in policies and Generalized Metarationality, is incorrect, which we show through an example. The third proposed correction refers to the justification for the fact that Limited Move stability implies Generalized Metarational stability, in the case of bilateral conflicts. Even though the implication is true, the justification does not consider that in a conflict, a state s may be L_h stable for the focal decision maker, but his opponent may, when seeking to maximize his *payoff*, access different states from the same state, when this state appears once again in the tree that represents his possible moves. Hence, we present a correct justification for this implication. Finally, the fourth suggested correction was the fact that the anticipated state according to the Maximin_h stability is not unique, which, as in the L_h case, also generates an ambiguity, and once again, we suggest a disambiguation.

Keywords: stability; tree; policy; relationships between concepts; variable horizon.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Análise de estabilidade de NASH para o DM i , a partir do estado s	28
Figura 2 – Análise de estabilidade GMR e SEQ para o DM i , a partir do estado s	29
Figura 3 – Análise de estabilidade SMR e SSEQ para o DM i , a partir do estado s	29
Figura 4 – Análise de estabilidade de L_4 para o DM i , a partir do estado s	33
Figura 5 – Análise de estabilidade de MR_4 para o DM i , a partir do estado s	34
Figura 6 – Análise de estabilidade de Maximin_4 para o DM i , a partir do estado s	34
Figura 7 – Análise de estabilidade Maximin_7 do estado s para o DM i no conflito descrito no Exemplo 4.2.1, onde as setas vermelhas indicam as escolhas feitas de acordo com o paradigma Maximin.	46
Figura 8 – Análise de estabilidade para o DM i no conflito descrito no Exemplo 3.2.7, onde as setas vermelhas indicam as escolhas feitas de acordo com o paradigma Maximin.	58
Figura 9 – Análise de estabilidade para o DM i no conflito descrito no Exemplo 3.3.2.	65
Figura 10 – Análise de estabilidade L_h para o DM i no conflito descrito no Exemplo 4.2.1.	74
Figura 11 – Análise de estabilidade para o conflito descrito no Exemplo 4.3.4.	76
Figura 12 – Análise de estabilidade para o DM i no conflito descrito no Exemplo 4.5.2.	84
Figura 13 – Análise de estabilidade, de acordo com o conceito L_h (caso 1), do estado s , para o DM i no conflito descrito no Exemplo 5.3.2.	90
Figura 14 – Análise de estabilidade L_4 , a partir do estado s , (caso 2) para o DM i no conflito descrito no Exemplo 5.3.2.	91
Figura 15 – Análise de estabilidade L_3^{CC} para o DM i , a partir do estado s , no conflito descrito no Exemplo 5.3.2.	91
Figura 16 – Árvore de acessibilidades para os DMs no conflito descrito no Exemplo 5.4.4.	96
Figura 17 – Árvore de acessibilidades para os DMs no conflito descrito no Exemplo 5.6.8.	106
Figura 18 – Análise de estabilidade L_4^{CC} , L_4^{CI} e Maximin_4 para o DM i , a partir do estado s , no conflito descrito Exemplo 5.6.11, ilustradas respectivamente, pelas árvores (a), (b) e (c).	109

Figura 19 – Análise de estabilidade L_4^{CC} , L_4^{CI} e Maximin_4 para o DM i , a partir do estado s , no conflito descrito Exemplo 5.6.12, ilustradas respectivamente, pelas árvores (a), (b) e (c).	111
Figura 20 – Grafo representando as relações entre os conceitos de estabilidade para conflitos bilaterais no GMCR.	114
Figura 21 – Grafo representando as relações entre os conceitos de estabilidade para conflitos multilaterais no GMCR.	114

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DM	Tomador e decisão.
GMR	Estabilidade Metarracional Geral.
NASH	Estabilidade de Nash.
SEQ	Estabilidade Sequencial.
SMR	Estabilidade Metarracional Simétrica.
SSEQ	Estabilidade Sequencial Simétrica.

LISTA DE SÍMBOLOS

L_h	Estabilidade Movimento Limitado.
MR_h	Estabilidade Metarracional Generalizada.
Maximin_h	Estabilidade Maximin_h .
MR_h^{new}	Estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa.
MR_h^{new*}	Estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa Modificada.
L_h^{CC}	Estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão Cooperativa.
L_h^{CI}	Estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão Individualista.
N	Conjunto dos decisores.
S	Conjunto dos estados viáveis do conflito.
$\succ$	Relação de preferência estrita.
$\succeq$	Relação de preferência fraca.
$\sim$	Relação de indiferença.
$K_i(s)$	Quantidade de estados piores do que o estado s para o decisor i .
D_i	Grafo direcionado do decisor i .
A_i	Conjunto de arcos para o DM i .
$R_i(s)$	Conjunto dos estados alcançáveis pelo DM i em um único movimento.
$R_i^+(s)$	Conjunto dos movimentos de melhoria unilátero para o DM i .
h	Comprimento o horizonte do conflito.
$G_h(i, s)$	Estado antecipado com um horizonte h quando o DM i se move a partir do estado s de acordo com a noção da estabilidade L_h .
$M_h(i, s)$	Estado para o qual o DM i se move do estado s considerando um horizonte de h , de acordo com a noção de estabilidade L_h , sendo escolhido arbitrariamente em caso de indiferença.

$\mathcal{N}_h(i, s)$	Estado para o qual o DM i se move do estado s considerando um horizonte de h , de acordo com a noção de estabilidade L_h , sendo escolhido como o imediatamente melhor para o DM i em caso de indiferença.
$A_h(i, s)$	Número de estados piores que o estado antecipado pelo DM i , de acordo com a noção da estabilidade L_h , quando ele se move a partir do estado s e considera um horizonte h .
S_k	Subconjunto dos estados do conflito nos quais o DM j se move na árvore Maximin.
S_0	Subconjunto dos estados de um conflito bilateral que não fazem parte da árvore Maximin.
S_k^j	Subconjunto dos estados do conflito nos quais algum DM $j \in N_i$ se move na árvore Maximin.
S_0^j	Subconjunto dos estados de um conflito multilateral que não fazem parte da árvore Maximin.
$\mathcal{P}_i$	Política para o decisor i .
$\mathcal{P}_i^*$	Política Maximin para conflitos bilaterais com horizonte ímpar.
$\mathcal{P}_i^\#$	Política Maximin para conflitos bilaterais com horizonte par.
$\mathcal{P}_i'$	Política Maximin para conflitos multilaterais com horizonte par.
$M_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s)$	Algum estado acessível ao decisor focal, que maximiza seu <i>payoff</i> , quando é a vez do decisor oponente se mover, a partir de um estado acessível, e o horizonte é $h - 1$ e o DM i acredita que o conflito seguirá de acordo com a noção da estabilidade MR_h .
PSS	Equilíbrio em políticas.
$G_h^i(j, s)$	Estado antecipado pelo DM i com um horizonte h e o DM j se move a partir do estado s de acordo com a noção da estabilidade Maximin_h .
$M_h^i(j, s)$	Estado para o qual o DM i acredita que o DM j se move do estado s considerando um horizonte de h , quando o DM i acredita que o conflito seguirá

de acordo com o paradigma Maximin_h , sendo escolhido arbitrariamente em caso de indiferença.

$\mathcal{M}_h^i(j, s)$	Estado para o qual o DM i acredita que o DM j se move do estado s considerando um horizonte de h , quando o DM i acredita que o conflito seguirá de acordo com o paradigma Maximin_h , sendo escolhido como o imediatamente pior para o DM i em caso de indiferença.
$A_h^i(j, s)$	Número de estados piores que o estado antecipado pelo DM i , considerando um horizonte h , de acordo com a noção da estabilidade Maximin_h , quando o DM j se move a partir do estado s .
$H_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s)$	Estado antecipado pelo DM i quando ele se move a partir do estado s , o DM j utiliza a política $\mathcal{P}_j$ e o DM i se move buscando o melhor estado antecipado considerando um horizonte $h - 1$.
$H_h^{i, \mathcal{P}_j}(j, s)$	Estado antecipado pelo DM i quando seu oponente se move a partir do estado s utilizando a política $\mathcal{P}_j$ e o DM i se move buscando o melhor estado antecipado considerando um horizonte $h - 1$.
$H_h^{i, \mathcal{P}_j}(N_i, s)$	Estado antecipado pelo DM i quando algum dos DM $j \in N_i$ se move a partir do estado s , com cada um dos DM $j \in N_i$ utilizando a política $\mathcal{P}_j$ e o DM i se move buscando o melhor estado antecipado considerando um horizonte $h - 1$.
H	Coalizão de decisores.
N_i	Coalizão de oponentes do decisor focal.
$R_H(s)$	Conjunto dos estados alcançáveis por uma coalizão de decisores por meio de uma sequência legal de movimetos.
$R_H^+(s)$	Conjunto de estados atingíveis por meio de melhorias unilaterais para a coalizão.
$R_h(N_i, s)$	Conjunto de todos os estados finais antecipados do conflito quando algum oponente de DM i sai do estado s e o horizonte de conflito é h , de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CC} .

$R'_h(N_i, s)$	Conjunto de todos os estados finais antecipados do conflito quando algum oponente de DM i sai do estado s e o horizonte de conflito é h , de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CI} .
$R_h^{CC}(i, s)$	Conjunto de todos estados que podem se caracterizar como o estado final de uma sequência legal de movimentos cujo estado antecipado a partir deles não são Pareto dominados dentro do conjunto $R_h(N_i, s)$ para a coalizão N_i .
$R_h^{CI}(i, s)$	Conjunto de todos estados que podem se caracterizar como o estado final de uma sequência legal de movimentos cujo estado antecipado a partir deles Pareto domina algum estado dentro do conjunto $R'_h(N_i, s)$ para a coalizão N_i .
$O_h^{CC}(i, s)$	Estado final antecipado quando o DM i se move a partir de s com um horizonte h de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CC} .
$O_h^{CI}(i, s)$	Estado final antecipado quando o DM i se move a partir de s com um horizonte h de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CI} .
$Q_h^{CC}(i, s)$	Algum estado para o qual o decisor i se move do estado s considerando um horizonte de h , quando o DM i acredita que o conflito seguirá de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CC} .
$Q_h^{CI}(i, s)$	Algum estado para o qual o decisor i se move do estado s considerando um horizonte de h , quando o DM i acredita que o conflito seguirá de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CI} .
$A_h^{CC}(i, s)$	Número de estados piores para o DM i que o estado antecipado pelo DM i , de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CC} , quando ele se move a partir do estado s .
$A_h^{CI}(i, s)$	Número de estados piores para o DM i que o estado antecipado pelo DM i , de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CI} , quando ele se move a partir do estado s .

- $g_h^i(j, s)$ O estado antecipado pelo DM i quando DM j sai do estado s , o horizonte do conflito é h , e o conflito segue de acordo com a estabilidade L_h (Caso 2).
- $g_h^{(i,j)}(H, s)$ O estado antecipado pelo DM j , de acordo com a noção da estabilidade L_h (Caso 2), quando DM i é o DM focal, de modo que o DM em H que se moverá em s será aquele que moverá o conflito para o pior estado para o DM j .
- $m_h^i(j, s)$ Algum estado acessível ao DM j , que maximiza seu payoff, quando o próximo DM a se mover será aquele que moverá o conflito para o pior estado para o DM j , o horizonte é $h - 1$ e o conflito segue de acordo com a noção da estabilidade L_h (Caso 2).
- $a_h^i(j, s)$ Número de estados piores para o DM i que o estado antecipado pelo DM i , de acordo com a noção da estabilidade L_h (Caso 2), quando algum DM $j \in N_i$ se move a partir do estado s .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	MOTIVAÇÃO	20
1.2	OBJETIVOS	21
1.3	MÉTODOS E PROCEDIMENTOS	21
1.4	ORGANIZAÇÃO DA TESE	22
2	REVISÃO DE LITERATURA	25
2.1	INTRODUÇÃO	25
2.2	MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS	25
2.3	ALGUNS CONCEITOS DE ESTABILIDADE PARA CONFLITOS BILATERAIS	26
2.4	ALGUNS CONCEITOS DE ESTABILIDADE PARA CONFLITOS MULTILATERAIS	35
3	SOBRE A RELAÇÃO ENTRE A ESTABILIDADE Maximin_h E METARRACIONALIDADE GENERALIZADA	43
3.1	INTRODUÇÃO	43
3.2	CONFLITOS BILATERAIS	45
3.2.1	Alguns resultados sobre a a estabilidade Maximin_h	45
3.2.2	A árvore Maximin_h	47
3.2.2.1	A política <i>Maximin</i>	50
3.2.2.2	Política <i>Maximin</i> para conflitos com horizonte ímpar	50
3.2.2.3	Política <i>Maximin</i> para conflitos com horizonte par	51
3.2.3	A equivalência entre os conceitos Maximin_h e MR_h	52
3.3	CONFLITOS MULTILATERAIS	58
3.3.1	Árvore Maximin_h	58
3.3.1.1	Política <i>Maximin</i>	60
3.3.1.2	A política $\mathcal{P}'_j$, do DM j , para o caso h par	61
3.3.2	A relação entre os conceitos de estabilidade Maximin_h e $\overline{\text{MR}}_r^{\text{new}}$	63
3.3.3	Uma adaptação na definição da estabilidade $\overline{\text{MR}}_r^{\text{new}}$	67
3.3.4	A relação entre a estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa Modificada e a estabilidade Maximin_h	68

3.4	CONCLUSÃO	70
4	SOBRE ALGUMAS PROPRIEDADES DAS ESTABILIDADES MOVIMENTO LIMITADO, METARRACIONALIDADE GENERALIZADA E EQUILÍBRIOS POLÍTICOS	72
4.1	INTRODUÇÃO	72
4.2	CORRIGINDO UM PROBLEMA NA DEFINIÇÃO DE ESTABILIDADE DE L_h	73
4.3	FIXANDO A RELAÇÃO ENTRE O EQUILÍBRIO EM POLÍTICAS E A METARRACIONALIDADE GENERALIZADA	75
4.4	CORRIGINDO A PROVA DE QUE L_h IMPLICA EM MR_h	77
4.4.1	A árvore L_h	77
4.4.2	A política L_h	78
4.4.2.1	<i>Política L_h para conflitos com horizonte ímpar</i>	<i>79</i>
4.4.2.2	<i>Política L_h para conflitos com horizonte par</i>	<i>80</i>
4.5	A PROVA FORMAL	81
4.6	CONCLUSÃO	84
5	SOBRE AS ESTABILIDADES MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVAS	86
5.1	INTRODUÇÃO	86
5.2	DOMINÂNCIA DE PARETO	87
5.3	ESTABILIDADE MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVA COM COALIZÃO COOPERATIVA, L_h^{CC}	88
5.4	ALGUNS RESULTADOS A RESPEITO DA ESTABILIDADE MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVA COM COALIZÃO COOPERATIVA	93
5.4.1	A relação entre as estabilidades L_h e L_h^{CC} em conflitos bilaterais . .	93
5.4.2	As relações entre o conceito de estabilidade L_h^{CC} e outros conceitos de estabilidade do GMCR	95
5.5	ESTABILIDADE MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVA COM COALIZÃO INDIVIDUALISTA, L_h^{CI}	100
5.6	ALGUNS RESULTADOS A RESPEITO DA ESTABILIDADE MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVA COM COALIZÃO INDIVIDUALISTA	102
5.6.1	A relação entre os conceitos de estabilidade L_h e L_h^{CI} em conflitos bilaterais	102

5.6.2	As relações entre o conceito da estabilidade L_h^{CI} e outros conceitos de estabilidade em conflitos multilaterais.	105
5.7	CONCLUSÃO	112
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	113
6.1	DIRECIONAMENTOS PARA TRABALHOS FUTUROS	115
	REFERÊNCIAS	117

1 INTRODUÇÃO

No dia a dia as pessoas estão, constantemente, se colocando em situações nas quais é necessário uma tomada de decisão, e é natural que determinados sujeitos desejem dispor de possibilidades para analisar situações envolvendo interações estratégicas como, por exemplo, uma negociação em uma página eletrônica de vendas ou na construção do plano de ações de um político em campanha eleitoral. A Teoria dos Jogos é um dos ramos da matemática que possui objetivo de estudar um conjunto de ferramentas que nos ajuda a compreender o fenômeno observado quando tomadores de decisão interagem estrategicamente (SANTOS, 2014). Ainda nesse sentido, (VIEIRA, 2017) explica que a teoria dos jogos é uma importante teoria matemática, a qual tem objetivo de analisar interações estratégicas.

Dentre os diversos modelos da Teoria dos Jogos está o Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR) (KILGOUR; HIPEL; FANG, 1987), o qual se apresenta como uma importante ferramenta matemática na modelagem e análise de situações de conflitos estratégicos. Este modelo é capaz de ser utilizado para, dentre outros aspectos, descrever um conjunto de estados possíveis para o conflito, os quais surgem por conta das ações que podem ser tomadas pelos sujeitos envolvidos no conflito.

Tais sujeitos, denominados de tomadores de decisões e denotados por DMs, podem mudar um estado do conflito para outro, que seja acessível a ele, levando em conta as suas opções e suas preferências entre os estados do conflito, sendo os estados mutuamente conhecidos pelos DMs envolvidos no conflito.

No GMCR, uma das etapas mais importantes é a etapa de análise de estabilidade. Existem vários conceitos de estabilidade nesse modelo, sendo que alguns possuem horizonte fixo, como a estabilidade de Nash (NASH, 1950), a estabilidade Metarracional Geral (GMR) (HOWARD, 2003), a estabilidade Metarracional Simétrica (SMR) (HOWARD, 2003), a estabilidade Sequencial (SEQ) (FRASER; HIPEL, 1979), a estabilidade Sequencial Simétrica (SSEQ) (RÊGO; VIEIRA, 2017) e outros, que possuem horizonte variável, como a estabilidade Movimento Limitado (L_h) (KILGOUR, 1985), a estabilidade Metarracional Generalizada (MR_h) (ZENG et al., 2006), a estabilidade Maximin _{h} (RÊGO; VIEIRA, 2020c), em que a intuição de horizonte variável é a de que conflitos podem ser analisados uma quantidade h de passos a frente, em que existe uma liberdade para a escolha do valor de h não presente nos conceitos de horizonte fixo.

1.1 MOTIVAÇÃO

Dentre os principais conceitos de estabilidade com horizonte variável estão a estabilidade Movimento limitado, Metarracionalidade Generalizada e Maximin_h . Intuitivamente, um estado é estável de acordo com o conceito da estabilidade Movimento Limitado se esse estado é aquele que ele prevê como dando o maior ganho para ele, considerando um horizonte h e acreditando que todos os DMs se movem de acordo com o que é melhor para eles para cada horizonte h' menor que h , dado que as preferências de todos é de conhecimento comum.

De acordo com o conceito da estabilidade Metarracional Generalizada, os decisores devem utilizar uma política, a qual pode ser entendida como um plano de ação, ou uma estratégia que visa orientar o comportamento dos decisores envolvidos, assim impedindo o agente de fazer ações distintas sempre que a situação de conflito estiver em um determinado estado, sem levar em conta o horizonte restante de análise do conflito. A partir da noção de política temos a ideia de árvore Metarracional que é uma representação gráfica das possíveis sequências de movimentos realizadas pelos decisores envolvidos no conflito, com o oponente do decisor focal se movendo de acordo com uma política predefinida.

Já de acordo com a noção da estabilidade Maximin_h o decisor focal, que é o decisor que está analisando o conflito, ao avaliar o conflito com o horizonte h acredita, de forma conservadora, que seus oponentes agirão movendo-se para o estado que dá o pior ganho possível para ele sabendo que o decisor focal sempre busca atingir o melhor estado possível considerando um horizonte h' menor que h , uma vez que não sabe nada sobre as preferências de seus oponentes.

Em geral, os conceitos de estabilidade com horizonte variável possuem relação com os conceitos clássicos, os quais possuem horizonte fixo. Então julgamos que a compreensão sobre as possíveis relações entre os conceitos de estabilidade que tem horizonte variável se destaca como bastante relevante para a literatura do GMCR. Por exemplo, como apontam (ZENG et al., 2006) e (RÊGO; VIEIRA, 2020c), as estabilidades Metarracional Generalizada e a estabilidade Maximin_h para conflitos, as quais serão recordadas mais adiante, com horizontes 1, 2 e 3, são equivalentes as estabilidades de Nash, Metarracional Geral e Metarracional Simétrica, respectivamente. A partir dessas relações, uma questão natural que surge é se a estabilidade Maximin_h e a estabilidade Metarracional Generalizada detinham potencial de serem equivalentes para quaisquer outros valores de h , salientando pontualmente a importância deste estudo.

Uma outra lacuna percebida na literatura, diz respeito a versão para conflitos multilaterais da estabilidade do movimento limitado. Duas generalizações foram propostas em (FANG; HIPEL;

KILGOUR, 1993), chamadas de estabilidade Movimento Limitado *Caso 1* e *Caso 2*. Porém, percebemos que a estabilidade Movimento Limitado *Caso 2* não coincide com a estabilidade do movimento limitado no caso de só haverem dois decisores. Além disso, em ambos os casos, cada movimento de um oponente do decisor focal aumenta o horizonte em uma unidade, diferente dos outros conceitos de estabilidade do GMCR, nos quais um movimento decisor focal ou uma sequência legal de movimentos dos adversários é que aumenta o horizonte em uma unidade. Assim, destacamos também, a importância da apresentação de um novo conceito de estabilidade que generalize a estabilidade Movimento Limitado para conflitos com mais de dois decisores.

1.2 OBJETIVOS

Esta tese tem como objetivo geral apresentar algumas contribuições propostas como avanços na literatura sobre o GMCR em relação a conceitos de estabilidade com horizonte variável. Especificamente, essas contribuições se enquadram nos itens a seguir:

- (1) Estudar propriedades das estabilidades Movimento Limitado L_h , Metarracional Generalizada MR_h e Maximin_h para conflitos envolvendo dois e múltiplos DMs;
- (2) Estabelecer relações entre alguns conceitos de estabilidades com horizonte variável;
- (3) Propor definições alternativas a definição apresentada por (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993) para a estabilidade Movimento Limitado L_h para conflitos multilaterais.

1.3 MÉTODOS E PROCEDIMENTOS

Na elaboração desta tese fizemos um amplo estudo sobre algumas obras propostas na literatura do GMCR. Nosso estudo concentrou-se em recordar os principais aspectos relativos ao GMCR e, também, alguns conceitos de estabilidade. A partir de nossos estudos, identificamos alguns problemas na literatura do GMCR, os quais nos motivaram a corrigi-los propondo, por exemplo, uma nova justificativa para o fato de a estabilidade L_h implicar a estabilidade MR_h , uma vez que a justificativa apresentada em (ZENG et al., 2006) possuía erro.

Além disso, buscando construir a justificativa de que as estabilidades Maximin_h e MR_h são equivalentes, em conflitos bilaterais, buscamos definir uma árvore Maximin para, a partir

dela, definirmos uma política Maximin buscando justificar que a estabilidade Maximin_h implica a estabilidade Metarracional Generalizada para conflitos envolvendo dois decisores, para assim justificarmos a equivalência entre tais conceitos. E, afim de verificar tais relações entre estes conceitos em conflitos com múltiplos decisores, também, buscamos construir uma política que justificasse que a estabilidade Maximin_h (RÊGO; VIEIRA, 2020c) implica na estabilidade Metarracionalidade Generalizada Alternativa (RÊGO; VIEIRA, 2020a) para o caso de conflitos com horizonte par. Contudo, mostramos que não ocorre tal implicação no caso de conflitos com horizonte ímpar e, portanto, a equivalência entre esses conceitos de estabilidade não é verdadeira para conflitos com múltiplos decisores. Por fim, ao estudarmos as extensões da estabilidade Movimento Limitado para conflitos multilaterais, propostas em (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993), notamos que uma das duas versões apresentadas por tais autores não generaliza a noção de estabilidade L_h , sendo que nessas versões cada movimento feito por um dos decisores pertencentes a coalizão de oponentes do decisor focal é contado como um horizonte. Dessa forma, sentimos a necessidade de propor conceitos alternativos, à noção de estabilidade Movimento Limitado, considerando uma maneira diferente de contar o horizonte do conflito.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE

A tese consiste em seis capítulos. Após o presente capítulo introdutório, no Capítulo 2, fazemos uma breve revisão de literatura sobre o GMCR, destacando suas principais componentes e os conceitos de solução mais corriqueiros.

No Capítulo 3, apresentamos alguns resultados relativos as relações entre os conceitos da metarracionalidade generalizada e da estabilidade Maximin_h . Em um destes resultados estabelecemos uma equivalência entre os conceitos da estabilidade Maximin_h e a estabilidade Metarracional Generalizada dentro GMCR, para conflitos envolvendo dois decisores. Esse resultado possui bastante atratividade, pois esses conceitos são aparentemente distintos, devido ao oponente do DM focal, na metarracionalidade generalizada, ter seus movimentos limitados pelo uso de uma política. Para atingir nosso objetivo, definimos uma árvore Maximin_h , para construir políticas maximin a partir da escolha do oponente DM focal nesta árvore, sendo necessário, também, a construção de uma política para conflitos com horizonte ímpar e outra para conflitos de horizonte par. Esse resultado, além de melhorar nossa compreensão em relação a esses conceitos de estabilidade facilita a determinação de estados que satisfazem a metarracionalidade generalizada, uma vez que os estados maximin podem ser determinados

por meio de um processo de indução reversa, para mais informações sobre o método de indução reversa, consultar (MYERSON, 1991).

Ainda nesse capítulo, apresentamos, também, alguns resultados referentes as relações entre os conceitos citados para conflitos multilaterais. Para tal, definimos a árvore Maximin e a política para o oponente do decisor focal, no caso de conflitos com horizontes pares. Além disso, fornecemos um teorema que estabelece que, em conflitos cujo horizonte é par, a estabilidade Maximin_h implica a metarracionalidade generalizada Alternativa. Adicionalmente, propomos uma pequena modificação na definição da estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa, para então apresentarmos um teorema que propõe que a estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa Modificada implica a estabilidade Maximin. A seção sobre conflitos bilaterais deste capítulo foi submetida e encontra-se em avaliação no periódico *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems*. Além disso, um resumo deste resultado foi publicado nos anais e apresentado na 23a. *International Conference on Group Decision and Negotiation*.

No Capítulo 4, apresentamos algumas imprecisões existentes na literatura do GMCR, acerca de conceitos de estabilidades. Mais especificamente, tais problemas foram identificados no trabalho de (ZENG et al., 2006) e estão relacionados com os conceitos de estabilidade Movimento Limitado L_h , estabilidade Metarracional Generalizada (MR_h) e equilíbrio em políticas, os quais serão apresentados, respectivamente, nas Seções 2.3 e 4.3. No primeiro destes problemas, observamos que um mesmo estado pode ser antecipado pelo decisor por meio de mais de um de seus movimentos em algum estado, considerando que os decisores se comportam de acordo com a estabilidade do Movimento Limitado e buscam sempre maximizar seus ganhos levando em consideração as futuras decisões e o horizonte de análise remanescente. Em seguida, por meio de um contra-exemplo, apontamos que um resultado, fornecido em (ZENG et al., 2006), envolvendo o conceito de equilíbrio em políticas e o conceito MR_h não é válido.

Já o terceiro problema, remete a uma imprecisão na justificativa apresentada em (ZENG et al., 2006) para justificar que a estabilidade L_h implica a estabilidade MR_h . Após identificarmos esse problema, propomos uma justificativa adequada para garantir o resultado. Tal justificativa é construída a partir da definição de uma árvore L_h , para construir políticas L_h , a partir da escolha do oponente do DM focal nesta árvore, sendo que necessitamos construir uma política específica para conflitos com horizonte ímpar e outra para conflitos de horizonte par. O conteúdo deste capítulo foi submetido e encontra-se em avaliação no periódico *Discrete Applied Mathematics*.

No Capítulo 5, apresentamos uma versão para a definição da dominância de Pareto, utili-

zando a notação própria do GMCR. Ainda neste capítulo, apresentamos definições alternativas para a estabilidade de movimento limitado para conflitos com múltiplos decisores. Após definirmos esses novos conceitos, denominados de estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão Cooperativa, denotado por L_h^{CC} , e estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão individualista, denotado por L_h^{CI} , obtivemos alguns resultados relacionando essas estabilidades com os conceitos clássicos de estabilidade do GMCR. Além disso, fornecemos resultados que estabelecem a equivalência entre os conceitos das estabilidades L_h^{CC} e Maximin_h , e entre das estabilidades L_h^{CI} e Maximin_h , para conflitos nos quais os DMs pertencentes a coalizão de oponentes tem preferências iguais e completamente opostas as do decisor focal. Por fim, no Capítulo 6 apresentamos nossas principais conclusões e algumas orientações para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, nós recordamos os principais conceitos necessários para a compreensão deste trabalho. Iniciamos na seção seguinte com a apresentação formal do modelo de grafos para a resolução de conflitos.

2.2 MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

O GMCR busca capturar as principais características de um conflito, como o conjunto finito dos estados viáveis para o conflito, denotado por $S = \{s, s_1, s_2, \dots, s_k\}$, o conjunto finito de DMs, denotado por $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, para cada DM, um conjunto de pares de estados indicando como os DMs podem alterar o estado do conflito e as relações de preferência dos DMs, em relação aos estados de conflito, que podem ser expressas por uma relação binária sobre o conjunto S , denotada por $\succ_i$, onde $s_1 \succ_i s_2$, indica que DM i prefere estritamente o estado s_1 ao estado s_2 . A partir dessa relação de preferência estrita, derivam-se duas outras relações em S , a preferência fraca, denotada por $\succeq_i$, onde $s_1 \succeq_i s_2$ indica que $s_2 \not\succ_i s_1$, e a indiferença, denotada por $\sim_i$, onde $s_1 \sim_i s_2$ indica que $s_1 \not\succ_i s_2$ e $s_2 \not\succ_i s_1$. A relação binária de preferência estrita é assimétrica (MAS-COLELL; WHINSTON; GREEN, 1995) e em alguns casos, como aponta (XU et al., 2018), pode ser intransitiva. Aqui, como veremos mais a frente, para a definição de Maximin_h , é necessário assumirmos transitividade e completude.

Essencialmente, o GMCR permite visualizar um conflito em termos de uma coleção de grafos direcionados, em que os vértices (ou nós) representam os estados e as arestas (ou arcos) que conectam os estados representam o movimento dos DMs entre os estados. Formalmente, para cada DM i , temos um grafo direcionado $D_i = \{S, A_i\}$, onde $A_i \subset S \times S$, que determina para cada estado $s \in S$, os estados para os quais o DM i pode levar o conflito a partir do estado s . Esses estados são chamados de alcançáveis, ou acessíveis, pelo DM i em uma única etapa a partir de um estado específico. Este conjunto é convenientemente representado por $R_i(s) = \{s_l \in S : (s, s_l) \in A_i\}, \forall i \in N$. Se um estado alcançável também é preferível para DM i , então ele pertence ao conjunto de movimentos de melhoria unilateral (UI) para o DM i a partir do estado s , representado por $R_i^+(s) = \{s_m \in R_i(s) : s_m \succ_i s\}$.

2.3 ALGUNS CONCEITOS DE ESTABILIDADE PARA CONFLITOS BILATERAIS

É natural que, durante um conflito, alguns dos DMs sejam encorajados a mudar suas ações em virtude das ações tomadas pelos demais DMs. A análise de estabilidade é uma ferramenta capaz de contribuir para a modelagem de diferentes características comportamentais que podem surgir no decorrer de um conflito. Segundo (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993), caracteriza-se como a análise sistemática das possíveis interações entre os DMs durante um conflito, como suas ações e as possíveis sanções para cada movimento no conflito até sua resolução, tais sanções podem ser vista como um componente da função objetivo que é maximizada ou minimizada pelas partes envolvidas no conflito. Em (HIPEL; KILGOUR; FANG, 2020), sugere-se um paralelo entre a atuação de um enxadrista durante uma partida de xadrez e a de DMs durante o desenrolar de um conflito, que estão envolvidos em uma disputa em que é necessário considerar o conflito em termos de ataques e contra-ataques.

Em vista disso, existem, na literatura sobre o GMCR, diversos conceitos de estabilidade, os quais possuem um caráter estático, ou seja, não possuem as características de um jogo dinâmico que analisa um caminho ótimo através de uma sequência de estados ou de um jogo repetido em que o jogo pode ser jogado várias vezes consecutivas entre os mesmos jogadores. Uma informação importante para tais conceitos diz respeito ao número de passos em que se analisa o conflito, conhecido como horizonte h do conflito. Tais conceitos diferem nas suposições sobre o comportamento dos DMs envolvidos e, também, sobre quantos passos a frente o conflito está sendo analisado. Para conflitos nos quais o horizonte h é fixo, temos, por exemplo, o conceito de estabilidade de Nash (NASH, 1950), na qual, de forma intuitiva, leva em consideração apenas a visão do DM focal em buscar o melhor estado para si, sem levar em conta as reações dos oponentes. De acordo com os conceitos da Metarracionalidade Geral (GMR) (HOWARD, 2003) e da Estabilidade Sequencial (SEQ) (FRASER; HIPEL, 1979), o DM focal avalia o conflito dois passos a frente, ou seja, qual pode ser a reação dos oponentes caso ele decida mover o conflito para um estado, acessível para ele, sendo que no conceito GMR, permite-se que a resposta do oponente, ao movimento do DM focal, pode não ser um movimento de melhoria unilateral e, portanto, ser não crível, enquanto que o conceito SEQ considera somente movimentos de melhoria unilaterais, ou seja credíveis, por parte dos oponentes. De acordo com o conceito da Metarracionalidade Simétrica (SMR) (HOWARD, 2003), o decisor focal avalia o conflito em até três passos a frente, ou seja, analisa se ele consegue escapar das sanções que seus oponentes podem impor a partir do movimento inicial

do DM focal. Já, de acordo com o conceito da estabilidade Sequencial Simétrica (SSEQ) (RÊGO; VIEIRA, 2017), o decisor focal avalia o conflito, também, em até três passos a frente, ou seja, analisa se ele consegue escapar das sanções que seus oponentes podem impor a partir do movimento inicial do DM focal, porém considerando apenas movimentações críveis dos oponentes do DM focal. Abaixo, recordamos, formalmente, as definições dos conceitos de estabilidades com horizontes fixo mencionados acima.

Definição 2.3.1 *Nash (NASH, 1950) Um estado $s \in S$ é Nash estável para o DM $i \in N$ se, e somente se, $R_i^+(s) = \emptyset$.*

A intuição é que um estado s é Nash estável para o decisor i , quando não existe nenhum movimento de melhoria unilateral para este decisor a partir do estado s .

Definição 2.3.2 *GMR (HOWARD, 2003) Um estado $s \in S$ é Metarracional Geral estável para o DM $i \in N$ se, e somente se, $\forall s_1 \in R_i^+(s)$, existe $s_2 \in R_j(s_1)$, tal que $s \succeq_i s_2$.*

A intuição é que um estado s é GMR estável para o decisor i , quando para todo movimento de melhoria unilateral para ele, a partir do estado s , existe algum movimento de sanção do decisor oponente a partir do estado acessado pelo DM i .

Definição 2.3.3 *SMR (HOWARD, 2003) Um estado $s \in S$ é simetricamente metarracional estável para o DM $i \in N$ se, e somente se, $\forall s_1 \in R_i^+(s)$, existe $s_2 \in R_j(s_1)$, tal que $s \succeq_i s_2$ e $s \succeq_i s_3$, $\forall s_3 \in R_i(s_2)$.*

A intuição é que caso exista algum movimento de sanção acessível ao decisor oponente, a partir de qualquer estado acessado por meio de um movimento de melhoria unilateral realizado pelo decisor i , a partir de s , o estado s é SMR estável para o decisor i se ele não puder escapar dessa sanção para um estado melhor do que o estado s .

Definição 2.3.4 *SEQ (FRASER; HIPEL, 1979) Um estado $s \in S$ é sequencialmente estável para o DM $i \in N$ se, e somente se, $\forall s_1 \in R_i^+(s)$, existe $s_2 \in R_j^+(s_1)$, tal que $s \succeq_i s_2$.*

A intuição é semelhante a intuição da estabilidade GMR, porém, considerando apenas as sanções críveis, isto é, sanções que representem movimentos de melhorias unilaterais para o oponente do decisor focal.

Definição 2.3.5 *SSEQ (RÊGO; VIEIRA, 2017)* Um estado $s \in S$ é simetricamente sequencial estável para o DM $i \in N$ se, e somente se, $\forall s_1 \in R_i^+(s)$, existe $s_2 \in R_j^+(s_1)$, tal que $s \succeq_i s_2$ e $s \succeq_i s_3$, $\forall s_3 \in R_i(s_2)$.

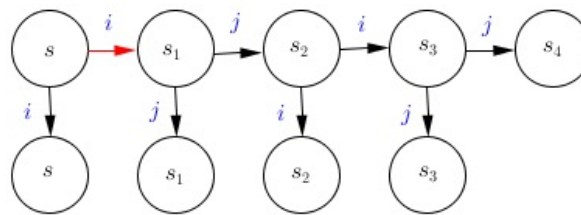
A intuição é semelhante a intuição da estabilidade SMR, porém, considerando apenas as sanções críveis.

O Exemplo 2.3.6 abaixo que apresenta um conflito hipotético, o qual analisaremos a partir dos conceitos de estabilidades recordados acima, afim de esclarecer a intuição por trás de cada um deles.

Exemplo 2.3.6 Considere um conflito hipotético com dois decisores, digamos i e j , e cinco estados s, s_1, s_2, s_3 e s_4 . Sejam as acessibilidades dos DMs i e j dadas, respectivamente, por: $R_i(s) = \{s_1\}$, $R_i(s_2) = \{s_3\}$, $R_j(s_1) = \{s_2\}$ e $R_j(s_3) = \{s_4\}$. Considere ainda que as relações de preferências dos DMs i e j são dadas, respectivamente, por: $s_3 \succ_i s_1 \succ_i s \succ_i s_2 \succ_i s_4$ e $s_2 \succ_j s_1 \succ_j s \succ_j s_4 \succ_j s_3$.

Ao analisarmos este conflito a partir da noção da estabilidade de Nash, temos que o estado s não é Nash estável para o DM i , pois há um movimento de melhoria unilateral, como destacado pela seta vermelha na Figura 1 para o DM i a partir do estado s .

Figura 1 – Análise de estabilidade de NASH para o DM i , a partir do estado s .

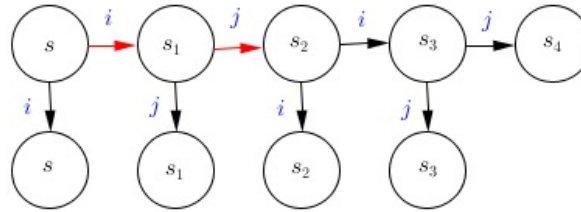


Fonte: O autor (2023).

Ao analisarmos este conflito a partir da noção da estabilidade de GMR, temos que o estado s é GMR estável para o DM i , pois existe um movimento de sanção acessível ao DM j , após o movimento de melhoria unilateral para o DM i a partir do estado s , como podemos observar destacado pelas setas vermelhas na Figura 2 abaixo. Além disso, como tal sanção é um movimento de melhoria unilateral para o DM j , segue que o estado s , também, é SEQ estável para o DM i .

Ao analisarmos este conflito a partir da noção da estabilidade de SMR, temos que o estado s não é SMR estável para o DM i , pois o DM i pode escapar da sanção imposta pelo seu oponente acessando o estado s_3 , o qual é melhor que o estado s , de acordo com suas

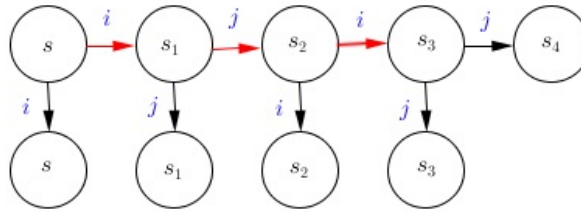
Figura 2 – Análise de estabilidade GMR e SEQ para o DM i , a partir do estado s .



Fonte: O autor (2023).

preferências, como destacado pelas setas vermelhas na Figura 3 abaixo. Ademais, como s não é SMR estável para o DM i , segue que, também, não será SSEQ estável.

Figura 3 – Análise de estabilidade SMR e SSEQ para o DM i , a partir do estado s .



Fonte: O autor (2023).

Por outro lado, alguns conceitos de estabilidade no GMCR possuem horizonte h variável. Aqui cabe destacar que apesar do nome variável, o valor de h deve ser escolhido previamente para que seja feita a análise de estabilidade. O nome variável é utilizado na literatura para enfatizar que existem vários valores de h que podem ser escolhidos, em oposição aos conceitos clássicos em que cada um possui um único valor de horizonte. Dentre estes, tem-se a estabilidade Movimento Limitado (L_h) (KILGOUR, 1985), a estabilidade Metarracional Generalizada (MR_h) (ZENG et al., 2006) e a estabilidade Maximin (Maximin_h) (RÊGO; VIEIRA, 2020c). A seguir, recordamos suas definições.

Com relação a estabilidade L_h , os DMs envolvidos avaliam quais serão seus movimentos, podendo permanecer no estado atual ou levar o conflito para algum estado acessível. Nele a quantidade de movimentos realizados pelos DMs, suas ações e reações, está limitada por h , o horizonte do conflito. Assim um DM pode antecipar em h passos qual será o estado final do conflito, considerando as possíveis mudanças que os demais DMs podem fazer para alcançar os estados de acordo com suas preferências, as quais são de conhecimento comum.

Para recordarmos essa noção de estabilidade, é necessário ter em mente alguns conceitos. Primeiro, seja $K_i(s) = ||\{s_1 : s \succ_i s_1\}||$ o número de estados piores que um determinado

estado s para DM i . Quanto maior o valor de $K_i(s)$ mais desejável é o estado s para DM i , por isso este valor é algumas vezes denominado de *payoff* do estado. Agora, define-se o estado que o DM i antecipa, a partir do estado s , quando o DM i se move em s e o horizonte é h , denotado por $G_h(i, s)$, da seguinte maneira:

$$G_h(i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset \\ s, & \text{se } K_i(s) \geq A_h(i, s) \\ G_{h-1}(j, M_h(i, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $M_h(i, s)$ é algum estado $s_1^* \in R_i(s)$ que satisfaz $K_i(G_{h-1}(j, s_1^*)) = \max\{K_i(G_{h-1}(j, s_1)) : s_1 \in R_i(s), j \neq i\}$ e $A_h(i, s) = K_i(G_{h-1}(j, M_h(i, s)))$. Por convenção, assume-se ainda que $G_0(\cdot, s) = s$.

Dessa forma, a estabilidade Movimento Limitado (L_h) é definida como se segue:

Definição 2.3.7 (KILGOUR, 1985) *Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é L_h estável para o DM i se e somente se $G_h(i, s) = s$.*

Em relação aos conceitos de estabilidades Maximin_h e MR_h , destacamos que ambas as definições não requerem que o DM focal tenha qualquer conhecimento sobre as preferências de seus oponentes. Em relação à estabilidade MR_h , (ZENG et al., 2006) estabelecem-na após definir o conceito de árvore Metarracional, que está essencialmente relacionado ao conceito de política, que nada mais é do que uma estratégia utilizada por um dos DMs envolvidos no conflito, a qual determina a maneira como ele se comportará em cada estado de conflito. Essa estratégia, de certa forma, influencia os passos dados pelos DMs envolvidos e, consequentemente, o desfecho final do conflito.

Formalmente, uma política para o DM $i \in N$ é uma função $\mathcal{P}_i : S \rightarrow S$, tal que $\mathcal{P}_i(s) \in R_i(s) \cup \{s\}$. Ou seja, uma política para um DM especifica a ação que ele tomará em cada estado (ficar nesse estado ou mover-se para outro estado alcançável), toda vez que esse estado surgir durante o curso do conflito (ZENG et al., 2006). Assim, uma vez que as políticas para ambos os DMs são escolhidas, e o DM i é o primeiro a se mover no conflito do estado s^* , então o conflito evolui do estado s^* de acordo com a seguinte sequência de movimentos e contramovimentos $(s^*, i, \mathcal{P}_i(s^*), j, \mathcal{P}_j(\mathcal{P}_i(s^*)), \dots)$, com $j \neq i$. O comprimento de uma sequência é dado pelo número de estados da sequência menos um. O resultado de uma sequência é dado pelo seu estado final, em que o estado final é o estado acessado pelo último decisor a se mover na

sequência. A partir daí, (ZENG et al., 2006) define uma árvore Metarracional Generalizada da seguinte forma:

Definição 2.3.8 (ZENG et al., 2006) *Uma árvore metarracional para DM i em relação ao status quo e política $\mathcal{P}_j$ do DM j é uma árvore cujos vértices e arcos são determinados por indução da seguinte forma:*

1. *A raiz é o estado s , e o DM i controla qualquer movimento possível de s .*
2. *Um vértice não terminal s_{2h} de profundidade $2h$, ($h = 0, 1, \dots$, com $s_0 = s$), a partir do qual um movimento é controlado pelo DM i , é conectado por arcos em A_i a vértices de profundidade $2h + 1$, que são estados em $R_i(s_{2h})$.*
3. *s_{2h} também está conectado a um vértice terminal s_{2h} para indicar a ação de permanecer.*
4. *Um vértice não terminal s_{2h+1} de profundidade $2h + 1$, ($h = 0, 1, \dots$) está conectado ao vértice $P_j(s_{2h+1})$ de profundidade $2h + 2$, para a qual o DM j se move. Se s_{2h+1} estiver conectado a si mesmo, então a política do oponente indica que ele deve ficar em s_{2h+1} que é chamado de vértice terminal.*

A intuição é a que o decisor focal é o primeiro a se mover, a partir do estado s , e ele pode se mover para qualquer estado acessível, ou permanecer no estado atual encerrando o conflito. Já o oponente se move a partir de algum acessado pelo decisor focal e seus movimentos são determinados por sua política.

A política, $\mathcal{P}_j$, determina como o oponente do DM focal se move através dos estados da árvore Metarracional do DM i . Por outro lado, cada movimento do DM i , em qualquer estado s^* na árvore, cria um possível galho na árvore considerando que ele pode ficar em s^* ou passar para qualquer estado acessível a partir de s^* para ele/ela. Temos que em uma árvore Metarracional para um determinado DM não há dúvida sobre qual DM se move, em cada estado, pois os DMs sempre alternam os movimentos. Além disso, o conflito termina quando algum DM permanece em um determinado estado, sendo a sequência chamada de terminada e esse estado que se repete o estado final do conflito, semelhante a noção de um estado absorvente em uma cadeia de Markov, uma vez que pelo fato de o conflito se encerrar não pode mais sair daquele estado, porém as transições entre os estados não ocorrem de forma probabilísticas, mas sim de acordo com as ações escolhidas pelos decisores.

Assim, apresentadas as noções de políticas, sequência de movimentos, árvore Metarracional, podemos definir uma sequência em uma árvore Metarracional como uma sequência cujos DMs e os estados são aqueles que pertencem a árvore Metarracional. Daí, podemos recordar a definição de estabilidade Metarracional Generalizada, estabelecida em (ZENG et al., 2006).

Definição 2.3.9 (ZENG et al., 2006) *O estado s é MR_h estável para o DM i , denotado por $s \in S_i^{MR_h}$, se houver uma política $\mathcal{P}_j$, do DM j , com $\mathcal{P}_j(s) = s$, de modo que para todas as sequências de comprimento h e todas as sequências terminadas de comprimento menor que h , na árvore metarracional do DM i , os resultados destas sequências não são preferíveis a s pelo DM i . Caso contrário, o estado s é chamado de MR_h instável para o DM i .*

Para definir a estabilidade Maximin_h , (RÊGO; VIEIRA, 2020c) modificou a noção da estabilidade movimento limitado adaptando-a ao paradigma maximin (NEUMANN; MORGENTERN, 1944), o qual propõe que um jogador deve escolher a estratégia que maximiza o valor mínimo que ele pode obter, independentemente do que os outros jogadores façam. Assim, considerando um conflito com dois DMs, o DM focal analisa o conflito com o horizonte h acreditando que o outro DM sempre levará o conflito ao pior estado possível para o DM focal sabendo que o DM focal sempre se move buscando o melhor cenário possível, considerando um horizonte menor que h .

Antes de lembrarmos a noção de estabilidade Maximin_h , seja $G_h^i(j, s) \in S$ o estado que o DM i acredita ser o estado final do conflito considerando um horizonte h , com DM j movendo-se inicialmente a partir do estado s . Assume-se que $G_0^i(\cdot, s) = s$, e define-se $G_h^i(\cdot, s)$ indutivamente como segue:

$$G_h^i(i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset \\ s, & \text{se } K_i(s) \geq A_h^i(i, s) \\ G_{h-1}^i(j, M_h^i(i, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $M_h^i(i, s)$ é algum estado $s_1^* \in R_i(s)$ que satisfaz $K_i(G_{h-1}^i(j, s_1^*)) = \max\{K_i(G_{h-1}^i(j, s_1)) : s_1 \in R_i(s), j \neq i\}$ e $A_h^i(i, s) = K_i(G_{h-1}^i(j, M_h^i(i, s)))$.

Por outro lado, $G_h^i(j, s)$ é definido da seguinte forma:

$$G_h^i(j, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_j(s) = \emptyset \\ s, & \text{se } K_i(s) \leq A_h^i(j, s) \\ G_{h-1}^i(i, M_h^i(j, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

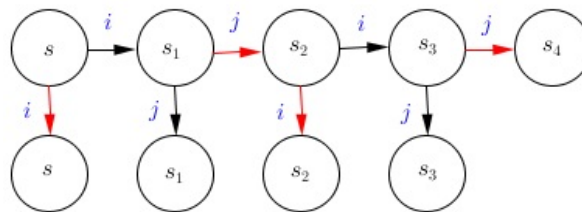
em que $M_h^i(j, s)$ é algum estado $s_1^* \in R_j(s)$ que satisfaz $K_i(G_{h-1}^i(i, s_1^*)) = \min\{K_i(G_{h-1}^i(i, s_1)) : s_1 \in R_j(s), j \neq i\}$ e $A_h^i(j, s) = K_i(G_{h-1}^i(i, M_h^i(j, s)))$.

A intuição é que quando é a vez do DM i se movimentar, e o horizonte é h , ele antecipa o estado que dá o melhor resultado para ele entre os estados que ele antecipa quando é a vez de DM j se movimentar e o horizonte é $h - 1$. Por outro lado, quando for a vez do DM j se movimentar e o horizonte é h , o DM i antecipa o estado que dá o pior resultado para ele entre os estados que ele antecipa quando é sua vez de se mover e o horizonte é $h - 1$. O conceito de estabilidade Maximin_h é definido da seguinte forma:

Definição 2.3.10 (RÊGO; VIEIRA, 2020c) *Seja h qualquer número inteiro positivo. O estado $s \in S$ é Maximin estável, com horizonte h para o DM $i \in N$, denotado por Maximin_h , se e somente se $G_h^i(i, s) = s$.*

Ao analisarmos o conflito apresentado no Exemplo 2.3.6, a partir da noção da estabilidade L_h , podemos utilizar um processo de indução reversa, como destacado pelas setas vermelhas na Figura 4 abaixo. Percebemos que, caso o conflito atinja o estado s_3 , teremos $G_1(j, s_3) = s_4$, pois $s_4 \succ_j s_3$. Logo, no estado s_2 o DM i antecipa o estado $G_2(i, s_2) = s_2$, pois $s_2 \succ_i s_4$. Assim no estado s_1 o DM i antecipa o estado $G_3(j, s_1) = s_2$, pois $s_2 \succ_j s_1$. Dessa maneira, no estado s o DM i antecipa o estado $G_4(i, s) = s$, pois $s \succ_i s_2$. Ou seja, o estado s é L_4 estável para o DM i .

Figura 4 – Análise de estabilidade de L_4 para o DM i , a partir do estado s .

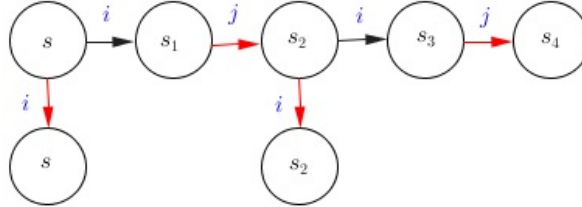


Fonte: O autor (2023).

Ao analisarmos agora o conflito de acordo com a noção da estabilidade Metarracional Generalizada, então considerando as políticas $\mathcal{P}_j(s_1) = s_2$ e $\mathcal{P}_j(s_3) = s_4$, do DM j , temos que o

estado s é MR_4 estável para o DM i , uma vez que as sequências terminadas $(s, i, s_1, j, s_2, i, s_2)$ e $(s, i, s_1, j, s_2, i, s_3, j, s_4)$, destacadas em vermelho na árvore Metarracional apresentada na Figura 5 abaixo, não tem resultado melhor do que s para o DM i .

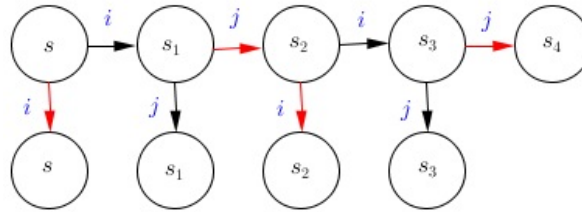
Figura 5 – Análise de estabilidade de MR_4 para o DM i , a partir do estado s .



Fonte: O autor (2023).

A análise do conflito apresentado no Exemplo 2.3.6 de acordo com a noção da estabilidade Maximin_h também segue por um processo semelhante ao método da indução reversa, como destacado pelas setas vermelhas na Figura 6. Percebemos que, caso o conflito atinja o estado s_3 , teremos $G_1^i(j, s_3) = s_4$, pois $s_3 \succ_i s_4$. Logo, no estado s_2 o DM i antecipa o estado $G_2^i(i, s_2) = s_2$, pois $s_2 \succ_i s_4$. Assim no estado s_1 o DM i antecipa o estado $G_3^i(j, s_1) = s_2$, pois $s_1 \succ_i s_2$. Dessa maneira no estado s , o DM i antecipa o estado $G_4^i(i, s) = s$, pois $s \succ_i s_2$. Ou seja, o estado s é Maximin_4 estável para o DM i .

Figura 6 – Análise de estabilidade de Maximin_4 para o DM i , a partir do estado s .



Fonte: O autor (2023).

Também é importante notar que tanto a estabilidade MR_h quanto a estabilidade Maximin_h estão relacionadas aos conceitos clássicos de estabilidade do GMCR. Por exemplo, é mostrado em (ZENG et al., 2006) a equivalência entre a estabilidade MR_2 e a estabilidade GMR, bem como, que a estabilidade MR_3 é equivalente à estabilidade SMR. Em (RÊGO; VIEIRA, 2020c), mostra-se que a estabilidade Maximin_2 é equivalente à estabilidade GMR, além disso, que a estabilidade Maximin_3 é equivalente à estabilidade SMR. Assim, com base nesses resultados entre os conceitos de estabilidade Maximin_h e MR_h e os conceitos clássicos, uma questão natural é investigar as relações entre as estabilidades Maximin_h e MR_h para horizontes superiores, que será a principal contribuição do Capítulo 3 desta tese.

2.4 ALGUNS CONCEITOS DE ESTABILIDADE PARA CONFLITOS MULTILATERAIS

Para apresentar as definições das estabilidades GMR, SMR, SEQ e SSEQ, para conflitos que envolvem mais de dois DMs, (RÊGO; VIEIRA, 2020b) destacam que há uma coleção de estados possíveis para o qual os DMs podem se mover através de uma sequência legal de movimentos, assim precisamos recordar primeiro o conceito de sequência legal de movimentos. Formalmente, seja $H \subseteq N$ um conjunto de DMs, chamado de coalizão, uma sequência de movimentos feitos pelos DMs em H é dita ser uma sequência legal se os DMs podem se mover mais de uma vez nessa sequência, mas nunca duas vezes consecutivas.

Assim temos que os estados alcançáveis a partir do estado s , por meio de uma sequência legal de movimentos, formam um particular conjunto, chamado de conjunto de estados acessíveis para a coalizão H , a partir do estado s , por meio de sequências legais de movimentos, denotado por $R_H(s)$. De maneira mais formal, $R_H(s)$ é composto pelos estados s' tais que existe uma sequência alternada de estados e DMs, $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_m)$, com $s_0 = s$, $s_m = s'$, $i_k \in H$, $s_{k+1} = R_{i_k}(s_k)$ e $i_k \neq i_{k+1}$, para $0 \leq k \leq m - 1$. Da mesma forma, pode-se definir o conjunto $R_H^+(s)$, de melhorias unilaterais, a partir de s , feitas pelo grupo de DMs em H obtidas por meio de uma sequência de melhorias unilaterais, em que uma sequência melhorias unilaterais é uma sequência legal, imposta a condição de que os DMs que se movem na sequência possam fazer somente movimentos de melhorias unilaterais. A definição do conjunto $R_H^+(s)$ é análoga a do conjunto $R_H(s)$, substituindo R_{i_k} por $R_{i_k}^+$. Daqui em diante passaremos a utilizar a notação $N_i = N - \{i\}$ para representar a coalizão formada por todos os oponentes do DM i .

Assim, não há situações em que um dos DMs faça dois movimentos consecutivos, além disso, é necessário assumir como premissa, que nenhum dos DMs permaneça em um determinado estado sem que o conflito se encerre. A definição da estabilidade de Nash para conflitos multilaterais permanece a mesma que a dos conflitos bilaterais uma vez que a mesma só depende do movimento do decisor focal. Por outro lado, as estabilidades GMR, SMR, SEQ e SSEQ para conflitos com n -DMs são definidas da seguinte forma:

Definição 2.4.1 (GMR) (HOWARD, 2003) *Seja S_i^{GMR} o conjuntos dos estados GMR-estáveis para o DM i . Assim, $s \in S_i^{GMR}$ se, e somente se, $\forall s_1 \in R_i^+(s)$, $\exists s_2 \in R_{N_i}(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$.*

Definição 2.4.2 (SMR) (HOWARD, 2003) *Seja S_i^{SMR} o conjuntos dos estados SMR-estáveis*

para o DM i . Assim, $s \in S_i^{SMR}$ se, e somente se, $\forall s_1 \in R_i^+(s), \exists s_2 \in R_{N_i}(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$ e $s \succeq_i s_3, \forall s_3 \in R_i(s_2)$.

Definição 2.4.3 (SEQ) (FRASER; HIPEL, 1979) Seja S_i^{SEQ} o conjunto dos estados SEQ-estáveis para o DM i . Assim, $s \in S_i^{SEQ}$ se, e somente se, $\forall s_1 \in R_i^+(s), \exists s_2 \in R_{N_i}^+(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$.

Definição 2.4.4 (SSEQ)(RÊGO; VIEIRA, 2017) Seja S_i^{SSEQ} o conjunto dos estados SSEQ-estáveis para o DM i . Assim, $s \in S_i^{SSEQ}$ se, e somente se, $\forall s_1 \in R_i^+(s), \exists s_2 \in R_{N_i}^+(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$ e $s \succeq_i s_3, \forall s_3 \in R_i(s_2)$.

Para recordarmos as estabilidades Metarracionais Alternativas MR_r^{new} e $\overline{MR}_r^{new}$, propostas em (RÊGO; VIEIRA, 2020a), é necessário ter em mente a noção de sequência de movimentos baseada em uma específica política, na qual, dado um estado inicial $s^* \in S$ e um conjunto de políticas $\mathcal{P}_i$, para cada $i \in N$, uma sequência de movimentos que se inicia no estado s^* e, na qual, os DMs se movem de acordo com suas políticas é, intuitivamente, uma sequência da forma $(s^*, i, \mathcal{P}_i(s^*), j, \mathcal{P}_j(\mathcal{P}_i(s^*)), \dots)$, com $j \in N_i$, as quais podem ser definidas formalmente da seguinte maneira.

Definição 2.4.5 (RÊGO; VIEIRA, 2020a) Dado um conjunto de políticas, $\mathcal{P}_j, j \in N_i$, uma sequência de movimentos baseada em $\mathcal{P}_j, j \in N_i$, é uma lista alternada de estados e DMs, que:

- (1) Toda sequência de movimentos para o DM i começa em algum estado e tem i como seu segundo elemento;
- (2) Toda sequência finita de movimentos para o DM i termina em algum estado;
- (3) Se a tripla (s, i, s_1) aparecer em alguma parte da sequência de movimentos para o DM i , então $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$;
- (4) Se a tripla $(s, j, s_1), j \neq i$ aparece em alguma parte da sequência de movimentos para o DM i , então $s_1 = \mathcal{P}_j(s)$;
- (5) Não existe tripla da forma $(j, s_1, j), j \in N$, em qualquer parte, de qualquer sequência de movimentos para o DM i ;

- (6) Uma tripla da forma (s, j, s) , $j \in N$, só pode aparecer no final de uma sequência de movimentos para o DM i , que, neste caso, é chamada de sequência terminal;
- (7) Toda sequência infinita de movimentos para o DM i também é chamada de terminal.

Em tais sequências nenhum dos DMs envolvidos no conflito pode movimentar-se duas vezes consecutivamente, caso ocorra de algum DM permanecer em um determinado estado a sequência termina nesse estado. Nelas o DM i decide entre permanecer no estado atual, e assim encerrar o conflito, ou movimentar-se para algum dos estados alcançáveis. Já os demais DMs, se movimentam de acordo com uma política pré-estabelecida para definir sua ação sempre que um determinado estado surja.

Uma sequência de movimentos do DM i é dita possuir r rodadas se o DM i aparecer exatamente r vezes nesta sequência. As sequências de movimentos com r rodadas para DM i são chamadas de i -sequência de r rodadas quando terminam com um movimento feito pelo DM i , ou seja, o final desta sequência é uma tripla da forma (s_1, i, s_2) para $s_1, s_2 \in S$, e é chamado de $\bar{i}$ -sequência de r rodadas, caso contrário.

Porém, a ordem dos movimentos dos DMs na sequência pode gerar diversas sequências diferentes, mesmo sendo fixada a política adotada por cada um dos DMs. Objetivando fixar a ordem de movimentos dos DMs, (RÊGO; VIEIRA, 2020a) apresentam uma noção de árvore metarracional, seguindo uma idéia análoga à noção de árvore metarracional definida em (ZENG et al., 2006), a qual recordamos a seguir.

Definição 2.4.6 (RÊGO; VIEIRA, 2020a) Dado um conjunto de políticas $\mathcal{P}_j, j \in N_i$, uma árvore metarracional, denotada por $A_i^r(s)$, baseada em $\mathcal{P}_j$, para DM i a partir do estado s , com r rodadas, é um conjunto de todas as sequências possíveis de movimentos baseados em $\mathcal{P}_j, j \neq i$, para DM i começando em s tal que:

- (1) Se $(s, i, \dots, s_n)$ não é uma sequência terminal na árvore, então existe um único DM j tal que $(s, i, \dots, s_n, j, s_{n+1})$ é a parte inicial de alguma sequência na árvore;
- (2) Se $(s, i, \dots, s_n)$ é uma sequência terminal na árvore, então não há outra sequência na árvore que contenha $(s, i, \dots, s_n)$ como sua primeira parte;
- (3) Nenhuma sequência da árvore tem o DM i aparecendo mais de r vezes.

De acordo com a condição (1), em cada estado de uma árvore metarracional, não deve haver dúvida com relação a qual DM se movimenta em um estado pertencente a uma sequência

de movimentos para DM i , isto é, cada árvore determina quem se movimenta em cada um dos estados. Já de acordo com a condição (2), se um dos DMs permanecer em um determinado estado, este estado será o estado final do conflito, isto é, o conflito se encerra no referido estado. Por fim, de acordo com a condição (3) não existe uma sequência de movimentos, pertencente a uma árvore metarracional do DM i , com r rodadas, em que o número de rodadas seja maior que r , (RÊGO; VIEIRA, 2020a).

Um conjunto de políticas $\mathcal{P}_j, j \neq i$ pode estar relacionado com muitas árvores metarracionais, do DM i a partir de s , as quais podem diferir apenas pela ordem em que os DMs se movimentam no estados. No caso $n = 2$, esta árvore é única, uma vez que os DMs alternam os movimentos em qualquer sequência da árvore, ou seja, não há dúvidas sobre a ordem em que os DMs se movem. Porém, para os conflitos com mais de dois DMs envolvidos, (RÊGO; VIEIRA, 2020a) definem um tipo de árvore metarracional do DM i que garante que todas as sequências terminem nos estados acessados pelo DM i , ou seja, garantindo que um DM $j \in N_i$, não possa encerrar o conflito sem que o DM i tenha a oportunidade de responder com um contramovimento.

Definição 2.4.7 (RÊGO; VIEIRA, 2020a) *Dado um conjunto de políticas $\mathcal{P}_j, j \in N_i$, uma árvore metarracional, baseada em $\mathcal{P}_j, j \neq i$, para DM i a partir do estado s com r rodadas, é dita ser regular se:*

- (1) *Não há sequência na árvore que contenha uma parte da forma (j, s_n, m, s_n) , em que j e m são diferentes de i ;*
- (2) *Não há sequência infinita na árvore;*
- (3) *Se $(s, i, \dots, s_{n-1}, i, s_n)$ é uma sequência na árvore e a mudança de s_{n-1} para s_n é o r -ésimo movimento do DM i nessa sequência, então essa sequência não é uma parte inicial de qualquer outra sequência na árvore.*

Recordadas as noções de políticas, sequência de movimentos, árvore metarracional e árvore metarracional regular, podemos recordar as definições de estabilidade Metarracional Generalizadas Alternativas estabelecidas em (RÊGO; VIEIRA, 2020a).

Definição 2.4.8 (RÊGO; VIEIRA, 2020a) *Um estado $s \in S$ é i -metarracionalmente estável com r rodadas para DM i , denotado por $s \in S_i^{MR_r^{new}}$, se houver um conjunto de políticas $\mathcal{P}_j$, para todos $j \in N_i$, e uma árvore metarracional regular, baseada em $\mathcal{P}_j, j \neq i$, com r*

rodadas tais que o resultado de cada i -sequência de r rodadas e de cada sequência terminal com menos de r rodadas não é preferível a s pelo DM i .

Definição 2.4.9 (RÊGO; VIEIRA, 2020a) Um estado $s \in S$ é $\bar{i}$ -metarracionalmente estável com r rodadas para DM i , denotado por $s \in \overline{MR}_r^{new}$, se existe um conjunto de políticas $\mathcal{P}_j$, para todo $j \in N_i$, e uma árvore metarracional, baseada em $\mathcal{P}_j$, $j \neq i$, com r rodadas de forma que o resultado de cada $\bar{i}$ -sequência de r rodadas, que não seja uma parte inicial de outra $\bar{i}$ -sequência de r rodadas, de cada $\bar{i}$ -sequência terminal de r rodadas e cada sequência terminal com menos de r rodadas não é preferível a s por DM i .

Com relação à estabilidade Maximin, para conflitos com múltiplos decisores, recordamos a seguir a abordagem apresentada em (SABINO, 2020). De acordo com o paradigma maximin, o DM i acredita que os DMs pertencentes ao conjunto N_i (a coalizão de seus oponentes) sempre terão interesse em mover o conflito para o pior cenário para o DM i , uma vez que o DM i sempre move o conflito para o melhor cenário considerando o horizonte h' menor que h .

Agora, seja $G_h^i(N_i, s)$, o estado que o DM i acredita ser o estado final do conflito considerando um horizonte h , onde qualquer um dos oponentes do DM i pode fazer o movimento inicial a partir do estado s . Por convenção, é assumido que $G_0^i(\cdot, s) = s$. Portanto define-se $G_h^i(i, s)$ indutivamente da seguinte maneira:

$$G_h^i(i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset \\ s, & \text{se } K_i(s) \geq A_h^i(i, s) \\ G_{h-1}^i(N_i, M_h^i(i, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que o estado $M_h^i(i, s)$ é algum estado $s_1^* \in R_i(s)$ que satisfaz $K_i(G_{h-1}^i(N_i, s_1^*)) = \max\{K_i(G_{h-1}^i(N_i, s_1)) : s_1 \in R_i(s)\}$ e $A_h^i(i, s) = K_i(G_{h-1}^i(N_i, M_h^i(i, s)))$.

Note que quando é a vez do DM i se mover e o horizonte do conflito é h , ele decide entre permanecer no estado atual ou levar o conflito para um dos estados acessíveis. Dessa maneira, DM i antecipa qual estado o dará melhor resultado considerando que a coalizão de seus oponentes N_i vai mover-se em seguida, isto é, com horizonte $h - 1$.

Por outro lado, tem-se que $G_h^i(N_i, s)$ é definido como:

$$G_h^i(N_i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_{N_i}(s) = \emptyset \\ s, & \text{se } K_i(s) \leq A_h^i(N_i, s) \\ G_{h-1}^i(i, M_h^i(N_i, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que o estado $M_h^i(N_i, s)$ é algum estado $s_1^* \in R_{N_i}(s)$ que satisfaz $K_i(G_{h-1}^i(i, s_1^*)) = \min\{K_i(G_{h-1}^i(i, s_1)) : s_1 \in R_{N_i}(s)\}$ e $A_h^i(N_i, s) = K_i(G_{h-1}^i(i, M_h^i(N_i, s)))$.

Note que quando a coalizão dos oponentes do DM i se move, e o horizonte é h , eles devem decidir entre permanecer no estado atual ou mover o conflito para um dos estados acessíveis. Dessa forma, o DM i antecipa o estado que resultará no pior cenário, de acordo com suas preferências, considerando os estados antecipados quando ele move o conflito subsequentemente no horizonte $h - 1$.

Dessa forma, a definição da estabilidade Maximin_h , generalizada para conflitos com n -DMs, apresentada em (SABINO, 2020) é a seguinte:

Definição 2.4.10 (SABINO, 2020) *Admita h um número inteiro positivo qualquer. Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é Maximin_h estável com horizonte h para o DM i se, e somente se, $G_h^i(i, s) = s$.*

Com respeito aos conceitos de estabilidade movimento limitado para conflitos envolvendo múltiplos decisores, (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993) apresentam duas possíveis generalizações da estabilidade L_h de (KILGOUR, 1985). Em uma delas, denominada (*Caso 1*), o DM focal pode fazer parte da sequência de movimentos que ocorre após seu movimento inicial, ou seja, ele pode participar da sanção realizada imediatamente após seu primeiro movimento. No (*Caso 2*), o DM focal não faz parte da sequência de movimentos que ocorre após seu movimento inicial. É importante destacar que de acordo com esses dois conceitos, cada movimento feito por qualquer DM no conflito aumenta o horizonte em 1. A seguir, recordamos esses dois conceitos.

Para a primeira generalização, o (*Caso 1*), seja $G_0(i, s) = s, \forall i \in N$ e $\forall s \in S$. De acordo com essa noção, assume-se que os DMs são pessimistas e consideram que o próximo DM a se mover é aquele que levará o conflito ao pior estado possível. Seja $G_h(N_i, s)$ o pior estado antecipado para DM i quando o horizonte é h e algum oponente de DM i sai de s . Formalmente, $G_h(N_i, s)$ é o único estado que satisfaz:

$$K_i(G_h(N_i, s)) = \min\{K_i(G_h(j, s)) : j \in N_i\}.$$

Assim, $G_h(i, s)$ pode ser definido indutivamente como:

$$G_h(i, s) = \begin{cases} s, \text{ se } R_i(s) = \emptyset \\ s, \text{ se } K_i(s) \geq A_h(i, s); \\ G_{h-1}(N_i, M_h(i, s)) \text{ se } R_i(s) \neq \emptyset \text{ e } K_i(s) < A_h(i, s), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $M_h(i, s)$ é algum estado $s' \in R_i(s)$ satisfazendo a: $K_i(G_{h-1}(N_i, s')) = \max\{K_i(G_{h-1}(N_i, s^*)); s^* \in R_i(s)\}$ e $A_h(i, s) = K_i(G_{h-1}(N_i, M_h(i, s)))$.

Uma vez definido $G_h(i, s)$, (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993) estabeleceu a seguinte definição para a estabilidade de L_h (Caso 1):

Definição 2.4.11 (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993) *Seja $i \in N$. Um estado $s \in S$ é L_h estável (caso 1), para DM i se, e somente se, $G_h(i, s) = s$.*

Agora, relembremos a segunda generalização da estabilidade Movimento Limitado para conflitos multilaterais definida em (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993), denominada (Caso 2). Seja $g_h^i(j, s)$ o estado do conflito antecipado pelo DM i quando DM j sai do estado s e o horizonte do conflito é h . Assuma que $g_0^i(j, s) = s, \forall i, j \in N, \forall s \in S$. Para qualquer coalizão H , seja $g_h^{(i,j)}(H, s)$ o estado antecipado pelo DM j quando DM i é o DM focal, assumindo que o DM em H que se moverá em s será aquele que moverá o conflito para o pior estado para o DM j . Formalmente, $g_h^{(i,j)}(H, s)$ é o único estado que satisfaz:

$$K_j(g_h^{(i,j)}(H, s)) = \min\{K_j(g_h^i(k, s)) : k \in H\}.$$

Assim, $g_h^i(j, s)$ pode ser definido pelo seguinte processo de indução:

$$g_h^i(j, s) = \begin{cases} s, \text{ se } R_j(s) = \emptyset \\ s, \text{ se } K_j(s) \geq a_h^i(j, s); \\ g_{h-1}^{(i,j)}(N - \{i, j\}, m_h^i(j, s)) \text{ se } R_j(s) \neq \emptyset \text{ e } K_j(s) < a_h^i(j, s), \end{cases} \quad (2.2)$$

em que $m_h^i(j, s)$ é algum estado $s' \in R_j(s)$ satisfazendo a condição: $K_j(g_{h-1}^{(i,j)}(N - \{i, j\}, s')) = \max\{K_j(g_{h-1}^{(i,j)}(N - \{i, j\}, s^*)); s^* \in R_j(s)\}$ e $a_h^i(j, s) = K_j(g_{h-1}^{(i,j)}(N - \{i, j\}, m_h^i(j, s)))$.

Uma vez determinado $g_h^i(j, s)$, a estabilidade L_h (Caso 2) é definida como segue.

Definição 2.4.12 (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993) *Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é L_h estável (Caso 2), com horizonte h , para DM i se, e somente se, $g_h^i(i, s) = s$.*

Mais a frente, especificamente no Capítulo 5, apresentamos o Exemplo 5.3.2 para ilustrar as diferenças no processo para se obter estabilidade de acordo com os conceitos L_h (*Caso 1*) e L_h (*Caso 2*). Além disso, argumentaremos que o conceito da estabilidade L_h (*Caso 2*) não é uma generalização do conceito L_h para conflitos bilaterais apresentado por (KILGOUR, 1985).

3 SOBRE A RELAÇÃO ENTRE A ESTABILIDADE Maximin_h E METARRACIONALIDADE GENERALIZADA

3.1 INTRODUÇÃO

A análise de estabilidade do GMCR tem ganhado atenção, ao longo dos últimos anos, de vários pesquisadores, sendo que diversas noções de estabilidade têm sido propostas para melhor capturar as particularidades dos diferentes tipos de comportamentos que podem surgir no curso de um conflito estratégico. Investigar estes conceitos, bem como, as relações entre eles tem sido uma preocupação de muitos autores. Por exemplo, (ZENG et al., 2006; ZENG et al., 2007) estabelecem as metarracionalidades generalizadas, as quais são generalizadas por (RÊGO; VIEIRA, 2020a). As estabilidades sequenciais de ordem superior são apresentadas por (RÊGO; OLIVEIRA, 2020), e (RÊGO; VIEIRA, 2020b) propõem seis definições, expandindo o equilíbrio de Berge (BERGE, 1958), para as configurações do GMCR.

Assim, tanto (ZENG et al., 2006), ao apresentarem o conceito da estabilidade MR_h , quanto (RÊGO; VIEIRA, 2020c), ao apresentarem a estabilidade Maximin_h , mostram relações entre os respectivos conceitos e alguns dos conceitos de estabilidade clássicos existentes na literatura. O que sugere-se haver algum tipo de conexão entre os conceitos. No entanto, no conceito MR_h , os DMs adversários devem utilizar uma política que o restrinja a realizar o mesmo movimento sempre que o conflito estiver em um determinado estado, independentemente do horizonte remanescente de análise do conflito. Por outro lado, no conceito Maximin_h , o DM oponente tem a flexibilidade de realizar diferentes movimentos do mesmo estado dependendo do horizonte remanescente do conflito.

Apesar dessa aparente diferença, neste capítulo, nosso primeiro objetivo é provar a equivalência entre os conceitos da estabilidade Maximin_h e da estabilidade MR_h , para conflitos envolvendo dois DMs. Este resultado, além de aprimorar a compreensão dos conceitos de estabilidade Maximin_h e Metaracionalidade Generalizada, esta abordagem simplifica o processo de identificação de estados que atendem aos requisitos da Metaracionalidade Generalizada. Isso se deve ao fato de que os estados Maximin_h estáveis podem ser determinados por meio de um processo de indução reversa, enquanto a Metaracionalidade Generalizada requer a análise de todas as possíveis políticas do oponente, cujo número aumenta exponencialmente com o número de estados de conflito. Embora a noção de estabilidade MR_h tenha sido proposta há mais de 15 anos, ela tem poucas aplicações práticas, embora esse conceito generalize conceitos

clássicos do GMCR, como Nash, Metaracionalidade Geral e Metaracionalidade Simétrica para conflitos bilaterais.

Nosso segundo objetivo, neste capítulo, é investigar a relação entre os conceitos Maximin_h e MR_h alternativa (MR_h^{new}) para conflitos com múltiplos decisores. Porém, diferentemente do que ocorre no caso de conflitos bilaterais, em que esses conceitos são equivalentes, no caso de conflitos com múltiplos decisores mostraremos que tal equivalência não é verdadeira.

Enfatizamos que para o caso de conflitos com múltiplos decisores, para estabelecer relações com Maximin_h , não estamos utilizando o conceito de metarracionalidade generalizada proposto por (ZENG et al., 2006), devido aos problemas que essa definição possui, conforme apontado no trabalho de (RÊGO; VIEIRA, 2018), mas sim o conceito de metarracionalidade alternativa generalizada proposto em (RÊGO; VIEIRA, 2020a). Assim, apresentamos que em conflitos com horizontes pares a estabilidade Maximin_{2r} implica a estabilidade $\overline{\text{MR}}_r^{\text{new}}$, já para conflitos com horizontes ímpares a estabilidade MR_r^{new} implica a estabilidade Maximin_{2r-1} . Bem como, mostramos, por meio de contra-exemplos, que as implicações contrárias não valem.

A seção referente a conflitos bilaterais deste capítulo foi submetida e encontra-se em avaliação no periódico *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems*. A totalidade do conteúdo capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 3.2 tratamos do conflitos que envolvem dois decisores. Mais especificamente, na Subseção 3.2.1, apresentamos alguns resultados sobre a estabilidade Maximin_h . Em seguida, na Subseção 3.2.2 apresentamos a definição de árvore Maximin, as árvores Maximin para horizontes ímpares e pares, e as políticas para o oponente do decisor focal. Na Subseção 3.2.3, apresentamos um Lema que estabelece a relação entre os estados que o decisor focal acredita ser os últimos acessados no conflito, quando o conflito segue de acordo com a árvore Maximin e quando o conflito segue de acordo a árvore metarracional na qual o oponente adota uma política. Para enfim, apresentarmos um teorema que estabelece a equivalência entre os conceitos das estabilidades Maximin_h e MR_h , além de apresentarmos, como exemplos, conflitos ilustrando a necessidade de existirem duas políticas diferentes, nos casos em que o horizonte é um inteiro ímpar e que o horizonte é um inteiro par, para garantir o fato de a estabilidade Maximin_h implicar a estabilidade Metarracional Generalizada.

Na Seção 3.3 tratamos de conflitos envolvendo múltiplos decisores. Mais especificamente, na Subseção 3.3.1 apresentamos as definições da árvore Maximin e das políticas para o oponente do decisor focal, nos casos de conflitos com horizontes pares. Na Subseção 3.3.2, apresentamos um teorema que estabelece que, para conflitos com horizonte par, a estabilidade

Maximin_{2r} implica a estabilidade $\overline{MR}_r^{new}$. Ainda nessa subseção, apresentamos como exemplo um conflito com horizonte ímpar no qual a estabilidade Maximin_{2r-1} não garante a estabilidade MR_r , e um conflito com horizonte par no qual a estabilidade $\overline{MR}_r^{new}$ não garante a estabilidade Maximin_{2r} . Em seguida, na Subseção 3.3.3, propomos uma pequena modificação na definição da estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa, para então apresentarmos um teorema que propõe que a estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa implica na estabilidade Maximin_h . Finalmente, na Seção 3.4 são apresentadas as principais conclusões obtidas.

3.2 CONFLITOS BILATERAIS

Nesta seção, nosso objetivo consistirá em estabelecer uma equivalência entre os conceitos de estabilidade Maximin_h e estabilidade Metarracional Generalizada considerando conflitos envolvendo dois DMs.

3.2.1 Alguns resultados sobre a a estabilidade Maximin_h

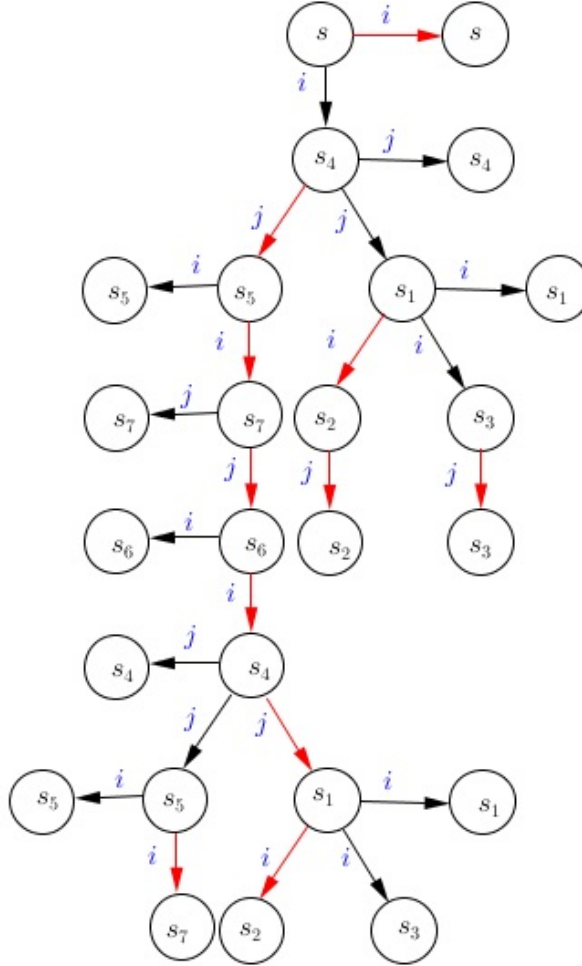
Diferente da definição dada em Seção 2, em (RÊGO; VIEIRA, 2020c), mais especificamente na definição do conceito de estabilidade Maximin_h , o estado $M_h^i(i, s)$ (resp., $M_h^i(j, s)$) foi definido como sendo o *único* estado acessível que maximiza (resp., minimiza) o retorno antecipado pelo DM i quando ele (resp., o oponente) se move a partir de um estado s com horizonte h . No entanto, o Exemplo 3.2.1 apresenta um conflito em que existe a possibilidade de um DM antecipar o mesmo estado em dois caminhos de diferentes movimentos, o que gera um problema nas definições originais de $M_h^i(i, s)$ e $M_h^i(j, s)$. Como o estado antecipado é o mesmo, este problema não influencia na validade da definição de estabilidade Maximin_h , pois para essa definição tudo o que importa é o estado final antecipado e não qual caminho leva a ele.

Exemplo 3.2.1 *Considere um conflito hipotético com dois DMs, i e j , e oito estados*

$\{s, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$. Sejam as acessibilidades dos DMs i e j dadas, respectivamente, por: $R_i(s) = \{s_4\}$, $R_i(s_1) = \{s_2, s_3\}$, $R_i(s_6) = \{s_4\}$, $R_i(s_5) = \{s_7\}$ e $R_j(s_4) = \{s_1, s_5\}$, $R_j(s_7) = \{s_6\}$. Além disso, considere que os conjuntos de acessibilidade de todos os DMs em todos os estados que não foram descritos anteriormente sejam iguais ao conjunto vazio. Considere ainda que a relação de preferência do DM i é dada por: $s_7 \succ_i s_4 \succ_i s \succ_i s_2 \succ_i s_1 \succ_i s_3 \succ_i s_6 \succ_i s_5$.

A Figura 7 exibe as escolhas feitas pelos DMs (seta vermelha) na análise de estabilidade Maximin_7 do estado s para o DM i .

Figura 7 – Análise de estabilidade Maximin_7 do estado s para o DM i no conflito descrito no Exemplo 4.2.1, onde as setas vermelhas indicam as escolhas feitas de acordo com o paradigma Maximin.



Fonte: O autor (2023).

Note que quando o DM j se move primeiro do estado s_4 , DM i antecipa o estado s_2 como o estado final do conflito, tanto se o DM j se mover para s_5 quanto para s_1 . Assim, não sabemos se $M_6^i(j, s_4) = s_1$ ou $M_6^i(j, s_4) = s_5$. Porém, como ambas as escolhas levam ao mesmo estado final s_2 , é possível determinar que o estado s é Maximin_7 estável para o DM i neste conflito.

Para provar a equivalência entre os conceitos de estabilidade Maximin_h e MR_h , precisamos definir um critério de decisão quando dois estados antecipados por um DM são iguais, mesmo que sejam acessados por sequências de movimentos diferentes. Vamos supor que para DM i (resp., j), este critério consistirá em escolher o movimento que leva o conflito para o estado com o maior (resp., menor) payoff para DM i .

Formalmente, definimos o estado $\mathcal{M}_h^i(j, s)$, como o estado s^* tal que:

- I. $s^* \in R_j(s)$ e $K_i(G_{h-1}^i(i, s^*)) = \min\{K_i(G_{h-1}^i(i, s_1)) : s_1 \in R_j(s), j \neq i\}$.
- II. Se $K_i(G_{h-1}^i(i, s^\#)) = K_i(G_{h-1}^i(i, s^*))$ para algum $s^\# \in R_j(s)$, então $K_i(s^*) < K_i(s^\#)$.

Analogamente, temos que $\mathcal{M}_h^i(i, s)$ é o estado s^* tal que:

- I. $s^* \in R_i(s)$ e $K_i(G_{h-1}^i(i, s^*)) = \max\{K_i(G_{h-1}^i(j, s_1)) : s_1 \in R_i(s), j \neq i\}$.
- II. Se $K_i(G_{h-1}^i(j, s^\#)) = K_i(G_{h-1}^i(j, s^*))$ para algum $s^\# \in R_i(s)$, então $K_i(s^*) > K_i(s^\#)$.

A intuição é que o estado $\mathcal{M}_h^i(i, s)$ é algum estado que maximiza o *payoff* do decisor focal, quando é a vez de DM j /dele se mover e o horizonte é h , dado que o próximo a se mover será ele/o DM j com horizonte é $h - 1$.

No Exemplo 3.2.1, temos que quando o DM j se move pela primeira vez no estado s_4 , então $G_5^i(i, s_5) = s_2 = G_5^i(i, s_1)$. Como $K_i(s_5) < K_i(s_1)$, temos que $\mathcal{M}_6^i(j, s_4) = s_5$.

Para provar que a estabilidade Maximin_h implica na estabilidade MR_h , precisaremos construir uma política para o oponente DM focal e uma árvore Metarracional. Assim, definiremos uma árvore Maximin_h , que será devidamente modificada, para estabelecermos a política do oponente, que será chamada de política Maximin, a qual será utilizada para definirmos uma árvore Metarracional.

3.2.2 A árvore Maximin_h

As sequências definidas a seguir formam uma árvore tendo como nó raiz s , na qual o DM i pode permanecer no estado, e a sequência encerra, ou se mover para qualquer estado acessível e, o DM j , sempre escolhe o pior entre permanecer no estado e encerrar a sequência ou se mover para o pior estado antecipado. Esta é a chamada árvore Maximin_h .

Definição 3.2.2 *Seja s um estado Maximin_h estável para DM i . Então, chamamos por árvore Maximin_h , o conjunto de todas as possíveis sequências alternadas de estados e DMs $(s_0, i_0, s_1, i_1, s_2, i_2, \dots, i_{k-1}, s_k)$, tais que:*

$$(1) \ s_0 = s.$$

$$(2) \ i_0 = i.$$

- (3) $i_{l+1} \neq i_l$, para $l = 0, 1, 2, \dots, k - 2$.
- (4) se $i_l = i$, $s_{l+1} \in R_i(s_l) \cup \{s_l\}$, se $i_l = j$, $s_{l+1} = \mathcal{M}_{h-l}^i(j, s_l)$, se $K_i(G_{h-l-1}^i(i, \mathcal{M}_{h-l}^i(j, s_l))) < K_i(s_l)$, e $s_{l+1} = s_l$, caso contrário.
- (5) $k \leq h$.
- (6) Se $s_{l+1} = s_l$, para algum $l = 0, 1, 2, \dots, k - 1$, então a sequência termina em s_{l+1} .

No conflito descrito no Exemplo 3.2.1, a árvore Maximin_7 para DM i , a partir do estado s , é uma subárvore da árvore exibida na Figura 7 que consiste em todos os movimentos do DM i e os movimentos vermelhos do DM j .

É importante notarmos que se o estado s é Maximin_h estável para o DM i todos os estados finais das sequências desta árvore são piores ou iguais a s para o DM i .

Outro ponto importante a ser observado é que as escolhas feitas pelo oponente do DM focal em uma árvore Maximin_h nem sempre podem fazer parte de uma política, pois conforme ilustrado no Exemplo 3.2.1, DM j toma duas decisões diferentes nesta árvore do estado s_4 . A primeira vez que ele se move neste estado ele vai para s_8 e na segunda vez ele vai para s_1 . Quando isso acontecer, precisaremos fazer uma alteração nas escolhas feitas pelo DM j na árvore Maximin_h para que possamos definir uma política maximin para este DM. Isso será feito na Subseção 3.2.2.1.

Antes de prosseguir para a definição da política maximin, recordaremos, a seguir, o Lema 3.2.3, apresentado em (RÊGO; VIEIRA, 2020c), o qual estabelece relações entre a estabilidade Maximin_h considerando diferentes horizontes. Tal resultado, será importante para nossos propósitos neste estudo, para estabelecermos uma relação entre os estados que DM i acredita que sejam os estados finais do conflito, para diferentes horizontes h .

Lema 3.2.3 (RÊGO; VIEIRA, 2020c) *Seja $s \in S$ e h qualquer número inteiro não negativo:*

- (1) *Se h for par, então*

$$K_i(G_h^i(i, s)) \leq K_i(G_{h+2}^i(i, s)) \leq K_i(G_{h+1}^i(i, s))$$

e

$$K_i(G_h^i(j, s)) \geq K_i(G_{h+2}^i(j, s)) \geq K_i(G_{h+1}^i(j, s))$$

- (2) *Se h for ímpar, então*

$$K_i(G_h^i(i, s)) \geq K_i(G_{h+2}^i(i, s)) \geq K_i(G_{h+1}^i(i, s))$$

e

$$K_i(G_h^i(j, s)) \leq K_i(G_{h+2}^i(j, s)) \leq K_i(G_{h+1}^i(j, s))$$

Prova: Veja (RÊGO; VIEIRA, 2020c). ■

Agora, provaremos no Teorema 3.2.4 que toda vez que o oponente DM focal se move duas vezes do mesmo estado, $s^\#$, em uma sequência de uma árvore Maximin_h para o DM focal, e fizer escolhas diferentes a partir deste estado, os estados antecipados pelo DM focal dessas duas escolhas na primeira vez que o oponente do DM focal se mover em $s^\#$ serão os mesmos.

Teorema 3.2.4 *Suponha que h seja um inteiro ímpar. Considere a seguinte sequência na árvore Maximin_h do DM i , a partir do estado $s \in S$, onde DM j se move para diferentes estados a partir do mesmo estado $s^\# \in S$:*

$$(s, i, s_1, j, s_2, \dots, s_{k-1}, i, s^\#, j, s', \\ i, s_{k+2}, \dots, s_{k+n-1}, i, s^\#, j, s'', \dots).$$

Devemos ter que $G_{h-(k+1)}^i(i, s') = G_{h-(k+1)}^i(i, s'')$.

Prova: Pelo fato de que o DM j , na primeira das duas vezes em que o estado $s^\#$ aparece na sequência, escolheu s' ao invés de s'' , temos que:

$$K_i(G_{h-(k+1)}^i(i, s')) \leq K_i(G_{h-(k+1)}^i(i, s'')).$$

Pela primeira desigualdade do caso 2 do Lema 3.2.3, temos que:

$$K_i(G_{h-(k+1)}^i(i, s'')) \leq K_i(G_{h-(k+n+1)}^i(i, s'')).$$

Finalmente, como ao se mover a partir de s' , com um horizonte $h - (k + 1)$ a frente, o DM i tem, após mais n movimentos dos DMs, a possibilidade de se mover no estado s'' com horizonte $h - (k + n + 1)$ e o DM i sempre antecipa o melhor estado na árvore Maximin_h , temos que:

$$K_i(G_{h-(k+n+1)}^i(i, s'')) \leq K_i(G_{h-(k+1)}^i(i, s')).$$

Juntando as três últimas desigualdades, segue que as mesmas devem ser satisfeitas na igualdade. Logo, $K_i(G_{h-(k+1)}^i(i, s')) = K_i(G_{h-(k+1)}^i(i, s''))$. Portanto, como estamos assumindo que a relação $\succ_i$ é completa, transitiva e assimétrica, segue que $G_{h-(k+1)}(i, s') = G_{h-(k+1)}(i, s'')$. ■

O Exemplo 3.2.7 demonstra que o Teorema 3.2.4 não é válido para h par. Nesse exemplo, temos que $s^\# = s_1$ e $G_4^i(i, s_2) = s_2 \neq s_4 = G_4^i(i, s_3)$.

3.2.2.1 A política Maximin

Como vimos na seção anterior, o oponente do DM focal, que se comporta de acordo com a estabilidade Maximin_h , nem sempre usa uma política, pois pode fazer escolhas diferentes a partir de um mesmo estado. Nesta seção, mostraremos como a partir das escolhas feitas pelo DM oponente em uma árvore Maximin_h , podemos construir políticas maximin. Como veremos, essas políticas dependem da paridade do horizonte do conflito e serão utilizadas na prova do Teorema 3.2.6, resultado principal desta seção, que estabelece a equivalência entre os conceitos da estabilidade Maximin_h e da estabilidade metarracional generalizada.

Mostramos também, por meio dos Exemplos 3.2.1 e 3.2.7, que ambas as políticas maximin são necessárias para justificar a equivalência entre as estabilidades Maximin_h e MR_h , pois cada uma delas garante apenas a estabilidade MR_h para o caso particular em que são propostas.

3.2.2.2 Política Maximin para conflitos com horizonte ímpar

Consideremos, inicialmente, o caso em que h ímpar. Assim, vamos particionar os estados de S de acordo com o maior número de estados que aparece em uma sequência alternada na árvore Maximin_h , da forma descrita anteriormente, iniciando em s e finalizando no estado em questão.

Formalmente, vamos particionar S em subconjuntos S_k , em que $k = 1, 3, 5, \dots, h$, de forma que:

- (1) S_k , para $k \leq h$ ímpar, é o subconjunto que consiste dos estados s^* para os quais existe uma sequência da árvore Maximin_h $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_{k-1}, i_{k-1}, s^*)$, em que s^* é diferente de s_{k-1} e não exista uma sequência $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_{l-1}, i_{l-1}, s^*)$, da árvore Maximin_h tal que, s^* é diferente de s_{l-1} , l é ímpar e $h \geq l > k$.

- (2) S_0 é o subconjunto de todos os estados que não pertencem a nenhum S_k , para k ímpar e menor ou igual a h .

Observe que se um estado não fizer parte da árvore Maximin_h , ele pertencerá a S_0 e a política do DM j indicará que ele permaneça neste estado. Além disso, estados em qualquer S_k , para $k \neq 0$ e $k \neq h$, são os estados em que DM j se move na árvore Maximin_h . Como DM j pode se mover mais de uma vez em um determinado estado s^* na árvore Maximin_h e ir para estados diferentes de s^* , caso h seja ímpar, modificamos as escolhas do DM j na árvore Maximin_h de forma que ele sempre vá para o mesmo estado que ele vai na última vez que ele se move de s^* na árvore Maximin_h .

Formalmente, seja s^* qualquer estado de conflito. Definimos a política maximin, $\mathcal{P}_j^*(s^*)$, da seguinte forma:

- (a) $\mathcal{P}_j^*(s^*) = s^*$, se s^* pertence a $S_0 \cup S_h$. (Ou seja, para estados que não são um estado onde DM j se move na árvore Maximin_h , DM j deve permanecer nestes estados).
- (b) $\mathcal{P}_j^*(s^*) = \mathcal{M}_{h-k}^i(j, s^*)$ para s^* em S_k , $0 < k < h$, se $K_i(G_{h-k-1}^i(i, \mathcal{M}_{h-k}^i(j, s^*))) < K_i(s^*)$ e $\mathcal{P}_j^*(s^*) = s^*$, caso contrário.

Como S_k 's formam uma partição de S , esta política $\mathcal{P}_j^*$ está bem definida, ou seja, cada estado em S está associado a apenas um único movimento. Em qualquer estado em que o oponente não se mova na árvore Maximin_h , a política maximin indica que o oponente deve permanecer nesses estados. Para os estados que aparecem na árvore Maximin_h , onde h é ímpar, a política maximin indica que o oponente deve sempre ir para o mesmo estado que ele vai na árvore Maximin_h , considerando a último vez que ele/ela se move deste estado.

3.2.2.3 Política Maximin para conflitos com horizonte par

Em conflitos com horizonte par, outra política maximin deve ser usada para garantir que todo estado s que seja Maximin_h estável para o DM i também satisfaça a estabilidade metar-racional generalizada. Mais tarde, o Exemplo 3.2.7 demonstra este fato.

Para definir a política maximin para conflitos de horizonte par, particionamos o conjunto de estados S de acordo com a primeira vez que um estado aparece em uma sequência alternada na árvore Maximin_h para DM i a partir de s .

Formalmente, vamos particionar S em subconjuntos S_k , onde $k = 1, 3, 5, \dots, h-1$, tal que:

- (1) S_k , para $k < h$, ímpar, é o subconjunto formado pelos estados s^* para os quais existe uma sequência na árvore Maximin_h $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_{k-1}, i_{k-1}, s^*)$, onde s^* é diferente de s_{k-1} e não há uma sequência na árvore Maximin_h tal que $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_{l-1}, i_{l-1}, s^*)$, s^* é diferente de s_{l-1} , l é ímpar e $l < k$.
- (2) S_0 é o subconjunto de todos os estados que não pertencem a nenhum S_k , para k ímpar e menor que h .

Como no caso anterior, se DM j não se mover em um estado na árvore Maximin_h , a política maximin indicará que DM j deve permanecer nesse estado. Por outro lado, para os estados em qualquer S_k , para $k \neq 0$, que são estados onde DM j se move na árvore Maximin_h , a política maximin para horizonte par indica que DM j deve fazer o mesmo movimento que faz na primeira vez que tal estado aparece na árvore.

Formalmente, seja s^* qualquer estado de conflito. Definimos a política $\mathcal{P}_j^\#(s^*)$ da seguinte forma:

- (a) $\mathcal{P}_j^\#(s^*) = s^*$, se s^* pertence a S_0 . (Ou seja, para estados que não são um estado onde DM j se move na árvore Maximin_h , DM j deve permanecer nestes estados).
- (b) $\mathcal{P}_j^\#(s^*) = \mathcal{M}_{h-k}^i(j, s^*)$ para s^* em S_k , se $K_i(G_{h-k-1}^i(i, \mathcal{M}_{h-k}^i(j, s^*))) < K_i(s^*)$ e $\mathcal{P}_j^\#(s^*) = s^*$, caso contrário.

Ambas as políticas maximin são usadas na seção a seguir para provar que a estabilidade Maximin_h implica na estabilidade MR_h .

3.2.3 A equivalência entre os conceitos Maximin_h e MR_h .

Como vimos, o conceito Maximin é baseado nos estados que os DMs antecipam que serão os estados finais do conflito após um determinado horizonte h , dado que eles seguem um comportamento maximin. Aqui apresentamos a definição da função $H_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s)$ (resp., $H_h^{i, \mathcal{P}_j}(j, s)$) que, intuitivamente, representa o estado antecipado pelo DM i quando ele (resp., DM j) se desloca inicialmente do estado s . Essa antecipação considera que DM j utiliza a política $\mathcal{P}_j$ e DM i sempre se move de forma a atingir o melhor estado antecipado considerando

um horizonte $h-1$ e que DM j se comporta de acordo com sua política, exceto quando nenhum estado antecipado for melhor que o estado atual, caso em que DM i permanece no estado atual.

Esta função será utilizada na prova do teorema principal apresentada aqui, que trata da equivalência entre as estabilidades Maximin_h e MR_h . Formalmente, $H_h^{i,\mathcal{P}_j}(\cdot, s)$ é definida da seguinte forma:

$$H_h^{i,\mathcal{P}_j}(j, s) = \begin{cases} H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(i, \mathcal{P}_j(s)), & \text{se } \mathcal{P}_j(s) \neq s \\ s, & \text{se } \mathcal{P}_j(s) = s, \end{cases}$$

e

$$H_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset, \text{ ou } K_i(s) \geq A_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s) \\ H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(j, M_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $M_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)$ é algum estado s^* em $R_i(s)$ tal que $K_i(H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(j, s^*)) = \max\{K_i(H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(j, s_1)) : s_1 \in R_i(s)\}$ e $A_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s) = K_i(H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(j, M_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)))$.

Agora provamos o Lema 3.2.5 que estabelece a relação entre os estados que o DM i acredita ser o último com horizonte h , quando o conflito segue a árvore Maximin_h e quando o conflito segue a árvore metarracional na qual o DM j adota alguma política $\mathcal{P}_j$.

Lema 3.2.5 *Seja $s \in S$, $i \in N$, $\mathcal{P}_j$ alguma política para DM j e h um inteiro positivo. Temos que:*

$$K_i(G_h^i(i, s)) \leq K_i(H_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s))$$

e

$$K_i(G_h^i(j, s)) \leq K_i(H_h^{i,\mathcal{P}_j}(j, s)).$$

Prova: A prova deste resultado se dará por meio de indução matemática sobre h . Para $h = 1$, segue-se, por definição das funções G_h^i e $H_h^{i,\mathcal{P}_j}$, que $G_1^i(i, s) = H_1^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)$, pois DM i buscará em ambas as situações ir para o melhor estado em $\{s\} \cup R_i(s)$ para ele/ela. Desta forma:

$$K_i(G_1^i(i, s)) = K_i(H_1^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)).$$

Da mesma forma, por definição das funções G_h^i e $H_h^{i,\mathcal{P}_j}$, conforme G_h^i DM j irá para o pior estado em $\{s\} \cup R_j(s)$ para DM i , e como $\mathcal{P}_j(s) \in \{s\} \cup R_j(s)$, segue que:

$$K_i(G_1^i(j, s)) \leq K_i(H_1^{i,\mathcal{P}_j}(j, s)).$$

Assim, assumiremos como hipótese de indução que,

$$K_i(G_{h-1}^i(i, s)) \leq K_i(H_{h-1}^{i, \mathcal{P}_j}(i, s))$$

e

$$K_i(G_{h-1}^i(j, s)) \leq K_i(H_{h-1}^{i, \mathcal{P}_j}(j, s)).$$

Temos, por definição, que o estado $G_h^i(j, s)$ é o estado que o DM i antecipa, com um horizonte h que lhe dá o pior resultado entre os estados que ele antecipa quando é sua vez de se mover e o horizonte é $h - 1$. Então,

$$\begin{aligned} K_i(G_h^i(j, s)) &= \\ &= \min\{\{K_i(s)\} \cup \{K_i(G_{h-1}^i(i, s_1) : s_1 \in R_j(s))\}\} \\ &\leq \min\{\{K_i(s)\} \cup \{K_i(H_{h-1}^{i, \mathcal{P}_j}(i, s_1) : s_1 \in R_j(s))\}\} \\ &\leq K_i(H_h^{i, \mathcal{P}_j}(j, s)) \end{aligned}$$

Agora, como $G_h^i(i, s)$ é o estado que DM i antecipa, com horizonte h que lhe dá o melhor resultado entre os estados que ele antecipa quando é o DM j que se movem e o horizonte é $h - 1$. Nós temos,

$$\begin{aligned} K_i(G_h^i(i, s)) &= \max\{K_i(s), K_i(G_{h-1}^i(j, M_h^i(i, s)))\} \\ &\leq \max\{K_i(s), K_i(H_{h-1}^{i, \mathcal{P}_j}(j, M_h^i(i, s)))\} \\ &\leq \max\{K_i(s), K_i(H_{h-1}^{i, \mathcal{P}_j}(j, M_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s)))\} \\ &= K_i(H_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s)), \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue do passo indutivo e a segunda da definição de $M_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s)$. ■

O Teorema 3.2.6, a seguir, estabelece o principal resultado deste capítulo, que é a equivalência entre as estabilidades Maximin_h e MR_h , em conflitos com dois DMs.

Teorema 3.2.6 *Seja $s \in S$, $\|N\| = 2$ e $i \in N$. O estado s é Maximin_h estável para DM i , se e somente se, s é MR_h estável para DM i .*

Prova: Inicialmente, mostramos que se s é Maximin_h estável para DM i , então é MR_h estável para DM i .

Vamos primeiro considerar o caso em que h é um inteiro ímpar. Conforme discutido na Subseção 3.2.2.2, quando há repetição de estados na árvore Maximin_h onde DM j se move,

a política maximin $\mathcal{P}_j^*$, do DM j , irá replicar o que ele/ela faz na última ocorrência daquele estado na árvore Maximin_h .

Portanto, em qualquer estado s_1 onde há uma replicação que forma uma nova ramificação que não pertence à árvore Maximin_h (porque DM j realiza ações diferentes em s_1 para diferentes níveis de profundidade na árvore Maximin_h), o estado para o qual DM j se move *após a replicação* é um estado s_2 que pertence à árvore Maximin_h em que DM i se move em maior profundidade.

Se este estado s_2 for igual a um estado correspondente ao último movimento de DM i na árvore Maximin_h , então como s é Maximin_h para DM i , s_2 e todos estados s_3 em $R_i(s_2)$ não são melhores que s para DM i . Por definição, esses estados s_3 pertencem a S_h . Assim, de acordo com a política maximin, $\mathcal{P}_j^*$, em todos esses estados s_3 , DM j permanecerá neste novo ramo.

Se este estado s_2 não for igual a um estado correspondente ao último movimento de DM i na árvore Maximin_h , então s_2 não pode ser melhor que s , pois pertence a árvore Maximin_h , e o DM i se move em s_2 (e há uma sequência com estado final em s_2 na árvore que corresponde ao caso em que DM i fica em s_2) e s é Maximin_h para DM i . Além disso, todos os estados em $R_i(s_2)$ também fazem parte da árvore Maximin_h em um nível mais profundo, então DM j irá replicar o que ele fará nesses estados, a partir dos novos ramos que não são parte da árvore Maximin_h , de acordo com o que ele faz na maior profundidade que esses estados aparecem na árvore Maximin_h . Portanto, cada nova ramificação leva a outro estado s_3 no qual DM i se move na árvore Maximin_h , que tem um nível de profundidade maior que o nível de profundidade s_2 na árvore Maximin_h . Se repetirmos este argumento, ou DM j permanece em um estado em S_h que é pior ou igual a s para DM i ou os estados do novo ramo correspondem aos estados da árvore Maximin_h com um nível de profundidade maior, e a profundidade máxima da árvore Maximin_h é limitada por h , temos que todos os estados desses novos ramos na árvore metarracional generalizada, com horizonte h , sempre terminam em estados que são piores ou iguais a s para DM i . Assim, s é MR_h estável para DM i .

Agora, vamos considerar o caso em que h é um inteiro par. Primeiro, observe que qualquer estado em qualquer sequência da árvore Maximin_h para o qual DM j se move deve ser um estado pior ou igual a s para DM i , porque se o movimento DM j for o último em uma sequência, o estado terminal não pode ser melhor que s para DM i porque s é Maximin_h para DM i e se DM i se move após o movimento de DM j , como o DM i sempre pode ficar e terminar a sequência, ele nunca pode se mover em um estado melhor que s , pois existe uma

sequência que termina nesse estado.

Se h for par, quando houver repetição de estados na árvore Maximin_h onde DM j se move, a política $P_j^\#$, de DM j irá replicar o que ele/ela faz na primeira vez que aparece na árvore Maximin_h . Assim, em qualquer estado s_1 em que há uma replicação que forma um novo ramo que não pertence à árvore Maximin_h (porque DM j realiza ações diferentes em s_1 para diferentes níveis de profundidade no tree Maximin_h) o estado para o qual DM j se move *após replicação* é um estado s_2 que pertence à árvore Maximin_h na qual DM i se move com um horizonte menor. Portanto, $K_i(s) \geq K_i(s_2)$ e, além disso, todos os estados em $R_i(s_2)$ também aparecem na árvore Maximin_h em um nível menor. Portanto, DM j poderá replicar nos estados dos novos ramos não pertencentes à árvore Maximin_h que seguem s_2 o que ele faz em um nível de profundidade menor na árvore Maximin_h nesses estados e, como argumentamos, isso leva a estados não preferíveis a s por DM i . Assim, repetindo esse argumento, para estados com maior profundidade nesses novos ramos, pois os ramos são limitados pela profundidade h na árvore metarracional geral com horizonte h e todos os estados desses novos ramos sempre terminam em estados que não são melhores que s para DM i , temos que s é MR_h estável para DM i .

Finalmente, vamos mostrar a outra direção, ou seja, se s é MR_h estável para DM i , então s é Maximin_h estável para DM i . Para isso, suponha que o estado s seja MR_h estável para DM i . Assim, existe uma política P'_j , para DM j , tal que $H_h^{i,P'_j}(i, s) = s$, pois todos estados terminais da árvore metarracional generalizada com horizonte h não são preferidos a s para DM i .

Pela definição de $G_h^i(i, s)$, temos que $K_i(G_h^i(i, s)) \geq K_i(s)$. E pelo Lema 3.2.5, segue que:

$$K_i(s) = K_i(H_h^{i,P'_j}(i, s)) \geq K_i(G_h^i(i, s)) \geq K_i(s).$$

Portanto, $K_i(G_h^i(i, s)) = K_i(s)$, o que implica que s é Maximin_h estável para DM i . ■

Finalmente, concluímos esta seção ilustrando, através de exemplos, que diferentes políticas são necessárias dependendo da paridade do horizonte de conflito.

Primeiramente, analisando o conflito apresentado no Exemplo 3.2.1, podemos ver que o estado s é Maximin_7 estável para DM i . Como esperado, quando impomos a política P_j^* do DM j definida na Subseção 3.2.2.2, para horizontes ímpares, que replica em estados com menor profundidade o movimento realizado em o mesmo estado com maior profundidade, ou seja, $P_j^*(s_4) = s_2$, então o estado s é MR_7 estável para DM i . No entanto, se tivéssemos imposto

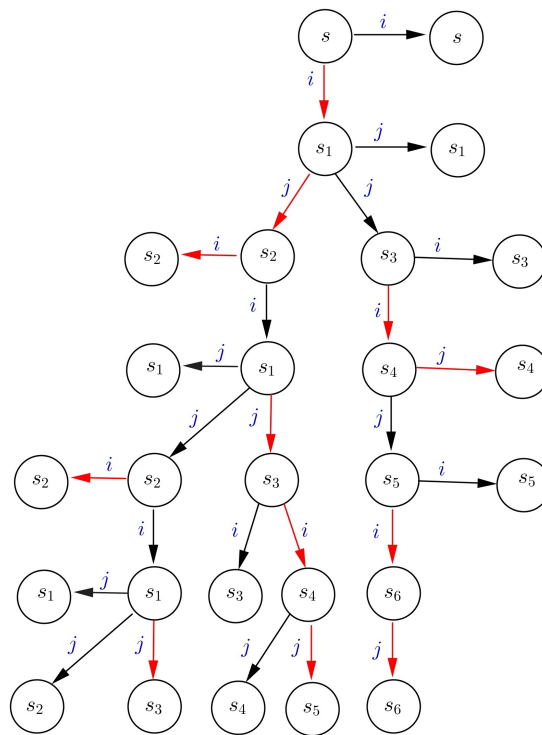
a política maximin definida na Subseção 3.2.2.3, para horizontes pares, que replica nos estados com maior profundidade o mesmo movimento realizado no mesmo estado com menor profundidade na árvore Maximin, ou seja, $\mathcal{P}_j^\#(s_4) = s_8$, poderíamos não justificar que o estado s seja MR_7 estável para DM i , pois haveria uma sequência $(s, i, s_4, j, s_8, i, s_7, j, s_6, i, s_4, j, s_8, i, s_8)$, cujo resultado é o estado s_8 , que é preferido a s pelo DM i .

Por outro lado, o Exemplo 3.2.7 ilustra um conflito onde o estado s é $Maximin_6$ estável para DM i e que, se DM j adota a política maximin definida para horizontes ímpares, esta política não justifica que o estado s seja MR_6 estável para DM i .

Exemplo 3.2.7 *Considere o seguinte conflito hipotético, com dois DMs, i e j , e sete estados $\{s, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$, de modo que os conjuntos de acessibilidade dos DMs i e j são dados, respectivamente, por: $R_i(s) = \{s_1\}$, $R_i(s_2) = \{s_1\}$, $R_i(s_3) = \{s_4\}$, $R_i(s_5) = \{s_6\}$ e $R_j(s_1) = \{s_2, s_3\}$, $R_j(s_4) = \{s_5\}$. Além disso, os conjuntos de acessibilidade de todos os DMs em todos os estados que não foram declarados são iguais ao conjunto vazio. Finalmente, a relação de preferência de DM i é dada por: $s_6 \succ_i s_4 \succ_i s \succ_i s_1 \succ_i s_2 \succ_i s_5 \succ_i s_3$. A Figura 8 mostra as escolhas feitas pelos DMs (seta vermelha) na análise de estabilidade $Maximin_6$ do estado s para o DM i .*

Observe primeiro que o estado s é $Maximin_6$ estável para DM i . Assim, se impormos a política $\mathcal{P}_j^\#$ do DM j definida na Subseção 3.2.2.3, para horizontes pares, que replica em estados com maior profundidade o movimento realizado no mesmo estado em uma profundidade menor na árvore $Maximin_6$, ou seja, $\mathcal{P}_j^\#(s_1) = s_2$, então o estado s é MR_6 estável para o DM i . No entanto, se tivéssemos imposto a política maximin definida para horizontes ímpares em Subseção 3.2.2.2, que replica nos estados com menor profundidade o movimento realizado no mesmo estado com maior profundidade, ou seja, $\mathcal{P}_j^*(s_1) = s_3$, então não seria possível justificar que o estado s é MR_6 estável para o DM i , pois haveria uma sequência terminada $(s, i, s_1, j, s_3, i, s_4, j, s_4)$ cujo resultado s_4 é preferido a s pelo DM i .

Figura 8 – Análise de estabilidade para o DM i no conflito descrito no Exemplo 3.2.7, onde as setas vermelhas indicam as escolhas feitas de acordo com o paradigma Maximin.



Fonte: O autor (2023).

3.3 CONFLITOS MULTILATERAIS

Nesta seção, nosso objetivo consistirá em investigar a relação entre os conceitos Maximin_h e MR_h alternativa (MR_h^{new}) para conflitos com múltiplos decisores. Diferentemente do que ocorre no caso apresentado na seção anterior, ou seja, o caso de conflitos com somente dois DMs, no caso de conflitos com múltiplos decisores veremos que tal equivalência não é verdadeira.

3.3.1 Árvore Maximin_h

Como o conceito de estabilidade Metarracional Generalizada está atrelado a uma árvore metarracional e a uma política para o oponente do DM focal, apresentamos, nesta subseção, a definição de uma árvore Maximin_h , que será apropriadamente modificada para que possamos estabelecer a política dos oponentes, que será chamada de política Maximin.

As sequências definidas a seguir formam uma árvore tendo como nó raiz o estado s , na qual o DM i pode permanecer no estado e a sequência encerra ou se mover para qualquer

estado acessível e a coalizão de oponentes, N_i , sempre escolhe o pior entre permanecer no estado e encerrar a sequência, caso este estado tenha sido acessado pelo DM i , ou se mover para o pior estado antecipado. Porém, um DM $j \in N_i$, não poderá permanecer em estados acessados por um outro DM diferente do DM i . Esta é a chamada árvore Maximin_h .

Seja s o estado que é Maximin_h estável para o DM i . E sejam todas as possíveis sequências alternadas de estados e DMs da forma:

$$(s_0; i; s_1; i_{1,1}; s_{1,1}; i_{1,2}; s_{1,2}; \dots; i_{1,n_1}; s_2; i; s_3; i_{3,1}; s_{3,1}; \dots; i_{3,n_3}; s_4; i; s_5; \dots; i_k; s^*),$$

tal que:

- (1) $s_0 = s$;
- (2) $i_{l,m} \neq i$;
- (3) $i_k = i$ e $s^* = s_l$, para $l \leq h$, ou $k = (l, m_l)$ e $s^* = s_{l,m}$ para $l < h$ e $m < n_l$, ou $k = (l, n_l)$ e $s^* = s_{l+1}$ para $l < h$;
- (4) $i_{l,m+1}$ é diferente de $i_{l,m}$, para $l < h$ e $m = 1, 2, \dots, n_l - 1$;
- (5) Para l par, temos que $s_{l+1} \in R_i(s_l) \cup \{s_l\}$. Para l ímpar, temos $s_{l+1} = M_{h-l}^i(N_i, s_l)$, se $K_i(G_{h-l-1}^i(i, M_{h-l}^i(N_i, s_l))) < K_i(s_l)$, e $s_{l+1} = s_l$, caso contrário, sendo neste último caso $n_l = 1$;
- (6) $s_{l,m+1} \neq s_{l,m}$ para $1 \leq m \leq n_l - 2$ e $s_{l+1} \neq s_{l,n_l-1}$;
- (7) Para l ímpar, tal que $(s_l; j_{l,1}; s'_{l,1}; j_{l,2}; s'_{l,2}; \dots; j_{l,m_l}; s_{l+1})$, em que $j_{l,m} \in N_i$, é uma sequência legal de movimentos da coalizão N_i que se inicia em s_l e termina em s_{l+1} , então $m_l \geq n_l$. Além disso, se $m_l = n_l$, então existe $1 \leq m^* < n_l$ tal que $s_{l,m} = s'_{l,m}$, para $m < m^*$, e $K_i(s_{l,m^*}) < K_i(s'_{l,m^*})$;
- (8) Para cada $s_{l,m}$, temos que l indica em qual das subsequências legais de movimentos dos oponentes do DM focal ocorre este estado. Além disso, se $l_1 < l_2$, diremos que o estado $s_{l_1,m}$ possui uma profundidade menor que o estado $s_{l_2,m'}$.

Intuitivamente, temos que a condição (1) estabelece que o estado inicial é o estado s . Já, a condição (2), estabelece que o DM focal não se movimenta durante uma subsequência legal de movimentos da coalizão de seus oponentes. De acordo com a condição (3) o DM focal, ou permanece no estado atual, ou se move para um estado a partir do qual a coalizão de seus

oponentes iniciará uma subsequência legal de movimentos. Já quando um DM pertencente a coalizão de oponentes do DM focal se movimenta, ele acessa um estado a partir do qual outro DM pertencente a coalizão de oponentes deve se movimentar, ou então ele encerra o movimento da coalizão, e assim, a vez de se movimentar é do DM focal. A condição (4) estabelece que o mesmo DM não pode se mover duas vezes consecutivas em uma subsequência legal de movimentos. A condição (5) estabelece que o DM focal se move nos estados do tipo s_l , em que l é par, e nos estados do tipo s_l , em que l é ímpar, a coalizão de oponentes do DM focal realiza uma subsequência legal de movimentos. A condição (6) estabelece que os oponentes do DM focal não podem permanecer em um estado para o qual algum outro oponente do DM focal tenha se movido em um sequência legal de movimentos. De acordo com a condição (7), a subsequência legal de movimentos da coalizão de oponentes do DM focal é sempre a menor subsequência legal que liga o estado s_l ao estado s_{l+1} . Finalmente, a condição (8) estabelece que o índice l indica em qual das subsequências legais de movimentos dos oponentes do DM focal ocorre o estado $s_{l,m}$.

3.3.1.1 Política Maximin

Diferente do que fizemos na seção anterior, não construiremos uma política para conflitos com horizonte ímpar, pois como veremos no Exemplo 3.3.2, alguns conflitos podem possuir a característica de existir um estado Maximin_h estável, mas que não seja possível construir políticas para todo decisor $j \in N_i$ que garantam que tal estado seja MR_h^{new} estável.

Entretanto, em conflitos com horizonte par, a partir das escolhas dos oponentes do DM focal, os quais se comportam de acordo com a estabilidade Maximin_h , podemos construir uma política Maximin, mesmo sabendo que, na árvore Maximin, eles nem sempre usam uma política, pois podem fazer escolhas diferentes a partir de um mesmo estado.

Nesta seção, mostraremos como a partir das escolhas feitas pelos decisores oponentes do decisor focal, em uma árvore Maximin_h com horizonte par, podemos construir a política Maximin. Como veremos, essa política será utilizada na prova do Teorema 3.3.1, o qual é um dos resultados desta seção e estabelece que, no caso de conflitos multilaterais a estabilidade Maximin_h implica a estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa.

3.3.1.2 A política $\mathcal{P}'_j$, do DM j , para o caso h par

Se h é um inteiro positivo par, então, para construirmos políticas para os oponentes do DM focal, iremos particionar os estados de S de acordo com o menor número de estados que aparece em uma sequência alternada da forma descrita acima iniciando em s e finalizando no estado em questão. Ou seja, vamos particionar S em subconjuntos $S_k^j, j \in N_i$, em que $k = 1, 3, 5, \dots, h-1$, de forma que:

- (1) S_k^j , para k ímpar e menor que h , consiste dos estados s^* para os quais existe uma sequência na árvore Maximin_h

$$(s_0; i; s_1; i_{1,1}; s_{1,1}; i_{1,2}; s_{1,2}; \dots; i_{1,n_1}; s_2; i; s_3; i_{3,1}; s_{3,1}; \dots; i_{3,n_3}; s_4; i; s_5; \dots; s_{k-1}; i_k; s^*; j)$$

ou

$$(s_0; i; s_1; i_{1,1}; s_{1,1}; i_{1,2}; s_{1,2}; \dots; i_{1,n_1}; s_2; i; s_3; i_{3,1}; s_{3,1}; \dots; i_{3,n_3}; s_4; i; s_5; i_{5,1}; s_{5,1}; \dots; i_{5,n_5}; s_6; i; s_7; \dots; s_{k-1,m}; i_{k-1,m+1}; s^*; j)$$

Com $1 \leq m \leq n_{k-1} - 1$. E, $s^* \neq s_{k-1}$, ou $s^* \neq s_{k-1,m}$, de modo que não exista nenhuma sequência da árvore Maximin_h do tipo:

$$(s_0; i; s_1; i_{1,1}; s_{1,1}; i_{1,2}; s_{1,2}; \dots; i_{1,n'_1}; s_2; i; s_3; i_{3,1}; s_{3,1}; \dots; i_{3,n'_3}; s_4; i; s_5; i_{5,1}; s_{5,1}; \dots; i_{5,n_5}; s_6; i; s_7; \dots; \dots; s_{q-1}; i_q; s^*; j)$$

nem também,

$$(s_0; i; s_1; i_{1,1}; s_{1,1}; i_{1,2}; s_{1,2}; \dots; i_{1,n'_1}; s_2; i; s_3; i_{3,1}; s_{3,1}; \dots; i_{3,n'_3}; s_4; i; s_5; i_{5,1}; s_{5,1}; \dots; i_{5,n_5}; s_6; i; s_7; \dots; s_{q-1,m}; i_{q-1,m+1}; s^*; j)$$

com $s^* \neq s_{q-1}$, ou $s^* \neq s_{q-1,m}$, e q ímpar de maneira que $h > q > k$, e $1 \leq m \leq n_{q-1} - 1$.

- (2) Seja S_0^j o conjunto de todos os estados que não pertencem a nenhum S_k , para k ímpar e menor que h .

Em qualquer S_k^j , para $k \neq 0$ e $k \neq h$, temos os estados em que algum DM $j \in N_i$ se move na árvore Maximin_h . Como o DM j pode se mover mais de uma vez em um determinado estado s^* na árvore Maximin_h e ir para estados diferentes de s^* , as políticas dos DMs $j \in N_i$ indica que ele sempre vá para o mesmo estado que ele iria na última vez que ele se moveria de s^* na árvore Maximin_h . Por outro lado, caso um estado não faça parte da árvore Maximin_h , ele pertencerá a S_0^j e a política dos DMs $j \in N_i$ indicará que eles permaneçam neste estado.

Formalmente, seja s^* um estado qualquer do conflito. Definimos a política $\mathcal{P}'_j(s^*)$, $j \in N_i$, como se segue:

- (1) $\mathcal{P}'_j(s^*) = s^*$, se s^* pertence a S_0^j . (Ou seja, para os estados que não são um estado em que o DM j se move na árvore Maximin_h , o DM j deve permanecer nestes estados).
- (2) Se s^* pertence a S_k^j , temos que $\mathcal{P}'_j(s^*) = s'$, em que s' é o único estado acessível, para o DM j na árvore Maximin , na k -ésima rodada, em que o DM j se move a partir de s^* , isto é, o estado para o qual existe uma sequência do tipo:

$$(s_0; i; s_1; i_{1,1}; s_{1,1}; i_{1,2}; s_{1,2}; \dots; i_{1,n_1}; s_2; i; s_3; i_{3,1}; s_{3,1}; \dots; i_{3,n_3}; s_4; i; s_5; \dots; s_{k-1}; i; s^*; j; s')$$

ou

$$(s_0; i; s_1; i_{1,1}; s_{1,1}; i_{1,2}; s_{1,2}; \dots; i_{1,n_1}; s_2; i; s_3; i_{3,1}; s_{3,1}; \dots; i_{3,n_3}; s_4; i; s_5; i_{5,1}; s_{5,1}; \dots; i_{5,n_5}; s_6; i; s_7; \dots; s_{k-1,m}; i_{k-1,m+1}; s^*; j; s'),$$

em que $1 \leq m \leq n_{k-1} - 1$.

É importante perceber que, dada uma subsequência qualquer pertencente a sequência de movimentos dos DMs na árvore Maximin , que chamaremos de subsequência legal de movimentos dos oponentes, na qual na k -ésima vez dos oponentes se moverem na árvore Maximin , se um mesmo decisor $j \in N_i$, estiver se movendo no mesmo estado s^* nessas diversas subsequências, então em todas elas a parte final do trajeto que se inicia como $(s^*; j)$ em uma k -ésima subsequência legal de movimentos dos oponentes na árvore maximin será igual. Uma vez que:

- (i) o conjunto de oponentes do DM focal é o mesmo;
- (ii) o horizonte de movimentos restantes para o focal e os oponentes é o mesmo;
- (iii) os oponentes sempre tem o objetivo de atingir como estado final da subsequência o estado que minimiza o estado antecipado pelo focal considerando o horizonte restante;

- (iv) os oponentes sempre fazem isso considerando a subsequência mais curta e no caso de mesmo comprimento vão pelo trajeto que atinge um estado de menor K_i mais rápido (condição 7 da definição da árvore maximin).

Note que as subsequências mencionadas acima podem até iniciarem em estados diferentes, mas se elas, em algum ponto, tiverem o mesmo DM se movendo no mesmo estado, a partir daí elas serão iguais, o que determina que o valor de $\mathcal{P}'_j(s^*)$ só depende do valor de k , ou seja, de quantos movimentos do DM focal e sequência legais de movimentos já foram feitos até atingir um ponto em que o DM j está se movendo em s^* .

3.3.2 A relação entre os conceitos de estabilidade Maximin_h e $\overline{MR}_r^{new}$

Definida a política $\mathcal{P}'_j$ do DM j apresentamos o Teorema 3.3.1 o qual estabelece que a estabilidade Maximin_h implica na estabilidade $\overline{MR}_r^{new}$, em casos de conflitos que envolvem múltiplos decisores e o horizonte é um número par.

Teorema 3.3.1 *Seja um conflito envolvendo $n \geq 2$ DMs. Se o estado $s \in S$ é Maximin_h estável para o DM i com horizonte $h = 2r$, então s é $\overline{MR}_r^{new}$ estável para o DM i .*

Prova:

Notemos que se houver repetição de estados na árvore Maximin_h em que algum DM pertencente a coalizão de oponentes do DM i faz um movimento, de acordo com as políticas $\mathcal{P}'_j, j \in N_i$, no estado de maior profundidade, um DM j replica o movimento feito no estado com menor profundidade, pois, como dito acima, cada um dos DMs pertencentes a coalizão busca que a subsequência legal atinja, em seu estado final, o estado que minimiza o estado antecipado pelo DM i , com relação as suas preferências, no horizonte restante.

Daí, em qualquer estado s_1 onde há uma replicação que forme um novo ramo, que não pertence a árvore Maximin_h (porque existe algum DM pertencente a coalizão de oponentes do DM i , a partir de algum estado na sequência legal de movimentos que se inicia em s_1 , acessa estados diferentes, em níveis de profundidade diferentes da árvore Maximin_h), este estado para o qual ele está se movendo também será um estado no qual o próximo DM fará uma replicação, e tal replicação pode ser igual ao movimento feito, ou na mesma subsequência, ou em outra subsequência diferente (ainda mais para trás). Daí, o estado final dessas replicações

de movimentos dos DMs, é um estado s_2 que pertencia a árvore Maximin_h no qual o DM i se move em uma profundidade menor.

Como as políticas $\mathcal{P}'_j$ dos DMs pertencentes a coalizão indicam que eles sempre irão replicar o movimento feito em um nível menor de profundidade na árvore Maximin , então após as replicações, ao longo do trajeto, ocorre que o horizonte vai sendo encurtado até que no caso mais extremo o DM irá replicar um movimento ocorrido na primeira subsequência de movimentos da coalizão. Portanto, todos os ramos da árvore Metarracional gerada pelas políticas $\mathcal{P}'_j$, dos DMs pertencentes a coalizão de oponentes do DM focal, são ramos originais da árvore Maximin , pois cada novo ramo, que não pertence originalmente a árvore Maximin , serão ramos que pertencem a árvore Maximin com uma profundidade menor. Assim, como as políticas $\mathcal{P}'_j$ só permitem que um DM j permaneça se o estado foi acessado pelo DM focal, a árvore Metarracional formada, também, mantém a regularidade existente na árvore Maximin e temos que o estado s é $\overline{MR}_r^{\text{new}}$ estável para o DM i . ■

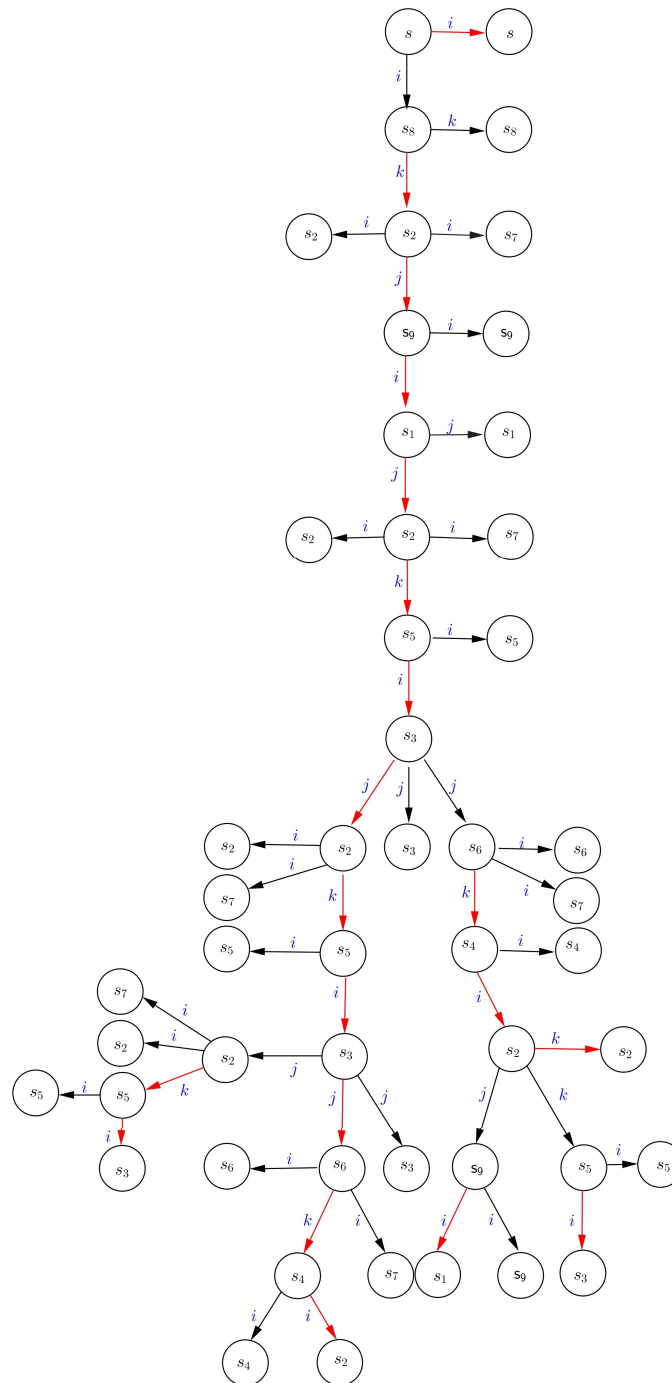
Os conflitos que possuem horizontes ímpares, isto é, conflitos que são encerrados por um movimento do DM focal, podem possuir a característica de ter um estado s que é Maximin_h estável, mas que não é $\overline{MR}_r^{\text{new}}$ estável. Para explicitar tal fato, apresentamos o Exemplo 3.3.2 abaixo.

Exemplo 3.3.2 *Considere um conflito hipotético envolvendo os DMs i, j e k , dez estados, digamos $s, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9$ de modo que os conjunto acessibilidades, respectivamente dos DMs i, j e k são: $R_i(s) = \{s_8\}, R_i(s_5) = \{s_3\}, R_i(s_4) = \{s_2\}, R_i(s_6) = \{s_7\}, R_i(s_2) = \{s_7\}, R_i(s_9) = \{s_1\}, R_j(s_1) = \{s_2\}, R_j(s_3) = \{s_2, s_6\}, R_j(s_2) = \{s_9\}, R_k(s_2) = \{s_5\}, R_k(s_6) = \{s_4\}, R_k(s_8) = \{s_2\}$. Além disso, os conjuntos de acessibilidade de todos os DMs em todos os estados que não foram declarados são iguais ao conjunto vazio. Finalmente, considere que as preferências do DM i são dadas por:*

$$s_8 \succ_i s_7 \succ_i s_1 \succ_i s_6 \succ_i s_3 \succ_i s \succ_i s_2 \succ_i s_5 \succ_i s_4 \succ_i s_9$$

Note que o estado s é Maximin_9 estável para o DM i , uma vez que ele não tem incentivo de se mover do estado s , pois antecipa que o resultado do conflito após $h = 9$ passos será o estado s_2 , como podemos observar na Figura 9, que é um estado pior que s , de acordo com suas preferências. Entretanto, não existe um conjunto de políticas $\mathcal{P}_j$ para todo $j \in N_i$, que

Figura 9 – Análise de estabilidade para o DM i no conflito descrito no Exemplo 3.3.2.



Fonte: O autor (2023).

garanta que as i -sequências com $r = 5$ rodadas, ou i -sequências terminadas com menos de $r = 5$ rodadas não tenham um resultado preferível a s , de acordo com as preferências do DM i .

De fato, note que a partir do estado s_8 , na primeira vez que ele aparece na árvore Maximin_h ,

o DM k acessa o estado s_2 , uma vez que s_8 é o melhor estado de acordo com as preferências do DM i , logo, se a política do DM k no estado s_8 for permanecer em s_8 , teremos a árvore metarracional que possui a sequência terminal (s, i, s_8, k, s_8) e $s_8 \succ_i s$. Daí, como DM j não pode encerrar o conflito no estado s_2 , para não ferir a regularidade da estabilidade MR_r^{new} , então fica sua política, necessariamente, definida como $\mathcal{P}_j(s_2) = s_9$, pois $R_j(s_2) = \{s_9\}$.

Assim, como $R_k(s_9) = \emptyset$, o DM i poderá acessar o estado s_1 , já que $s \succ_i s_9$. Daí se $\mathcal{P}_j(s_1) = s_1$ teremos a árvore metarracional que possui a sequência terminal $(s, i, s_8, k, s_2, j, s_9, i, s_1, j, s_1)$ e $s_1 \succ_i s$, logo, como $R_j(s_1) = \{s_2\}$, então podemos ter $\mathcal{P}_j(s_1) = s_2$. Daí, se o próximo DM a se mover for o DM focal, então ele poderá levar o conflito para o estado s_7 do qual, os adversários não podem sair e $s_7 \succ_i s$, portanto teremos a árvore metarracional que possui a sequência terminal $(s, i, s_8, k, s_2, j, s_9, i, s_1, j, s_2, i, s_7)$.

Dessa maneira, o DM k , que não pode encerrar o conflito no estado s_2 , para não ferir a regularidade da estabilidade MR_r^{new} , tem definida a política $\mathcal{P}_k(s_2) = s_5$. E, portanto, o DM i poderá acessar o estado s_3 , a partir do qual o DM k não pode se mover, pois $R_k(s_3) = \emptyset$ e o DM j pode dispor de três políticas: $\mathcal{P}_j(s_3) = s_3$, $\mathcal{P}_j(s_3) = s_2$ e $\mathcal{P}_j(s_3) = s_6$.

No primeiro caso, $\mathcal{P}_j(s_3) = s_3$, teremos a árvore metarracional que possui a sequência terminal $(s, i, s_8, k, s_2, j, s_9, i, s_1, j, s_2, k, s_5, i, s_3, j, s_3)$ e $s_3 \succ_i s$. Já se, $\mathcal{P}_j(s_3) = s_2$, temos que caso a vez de se movimentar passe para o DM i ele poderá acessar, a partir de s_2 , o estado s_7 , logo o DM k pode se movimentar utilizando sua política que já está fixada para o estado s_2 , $\mathcal{P}_k(s_2) = s_5$. Daí, o DM i pode acessar, novamente o estado s_3 , e como $\mathcal{P}_j(s_3) = s_2$ e $\mathcal{P}_k(s_2) = s_5$, então, teremos a árvore metarracional que possui a sequência terminal $(s, i, s_8, k, s_2, j, s_9, i, s_1, j, s_2, k, s_5, i, s_3, j, s_2, k, s_5, i, s_3, j, s_2, k, s_5, i, s_3, j, s_2, k, s_5, i, s_3)$ e $s_3 \succ_i s$.

Por fim, se a política do DM j for $\mathcal{P}_j(s_3) = s_6$, temos que caso o DM i possa se mover a partir de s_6 ele poderá acessar o estado s_7 , do qual, como observamos anteriormente, os oponentes não poderão se sair. Assim o DM k move o conflito a partir de s_6 , mas $R_k(s_6) = \{s_4\}$, então $\mathcal{P}_j(s_6) = s_4$ e, assim o DM i poderá levar o conflito do estado s_4 para o estado s_2 . Porém, no estado s_2 , temos que as políticas dos oponentes do DM focal já estão fixadas pelos seus movimentos anteriores, $\mathcal{P}_j(s_2) = s_9$ e $\mathcal{P}_k(s_2) = s_5$. Caso o movimento seja feito pelo DM j segue que teremos a árvore metarracional que possui a sequência terminal $(s, i, s_8, k, s_2, j, s_9, i, s_1, j, s_2, k, s_5, i, s_3, j, s_2, k, s_5, i, s_3, j, s_6, k, s_4, i, s_2, j, s_9, i, s_1)$ e $s_1 \succ_i s$. Já se o movimento for feito pelo DM k teremos a árvore metarracional que possui a sequência terminal $(s, i, s_8, k, s_2, j, s_9, i, s_1, j, s_2, k, s_5, i, s_3, j, s_2, k, s_5, i, s_3, j, s_6, k, s_4, i, s_2, k, s_5, i, s_3)$ e $s_3 \succ_i s$.

Já em conflitos com horizontes pares, $h = 2r$, caso em que os oponentes do DM focal se movem por último, um estado s ser $\overline{MR}_r^{new}$ pode não implicar em s ser Maximin_h para o DM i . O Exemplo 3.3.3 abaixo ilustra esse fato.

Exemplo 3.3.3 *Seja um conflito hipotético envolvendo os DMs i, j e k , quatro estados, digamos s, s_1, s_2, s_3 e os conjuntos de acessibilidades são: $R_i(s) = \{s_1\}$, $R_j(s_1) = \{s_2\}$, $R_k(s_1) = \{s_2\}$ e $R_i(s_2) = \{s_3\}$. Além disso, os conjuntos de acessibilidade de todos os DMs em todos os estados que não foram declarados são iguais ao conjunto vazio. Sejam as preferências do DM i descritas por:*

$$s_3 \succ_i s_1 \succ_i s \succ_i s_2$$

Por fim, considerando as seguintes políticas para o DM j e o DM k , respectivamente:

$$\mathcal{P}_j(s) = s, \mathcal{P}_j(s_1) = s_2, \mathcal{P}_j(s_2) = s_2, \mathcal{P}_j(s_3) = s_3;$$

$$\mathcal{P}_k(s) = s, \mathcal{P}_k(s_1) = s_2, \mathcal{P}_k(s_2) = s_2, \mathcal{P}_k(s_3) = s_3.$$

Considerando a seguinte árvore meterracional, formada pelas sequências terminais: (s, i, s) ; $(s, i, s_1, j, s_2, k, s_2)$. Temos que s é $\overline{MR}_r^{new}$ para todo r maior ou igual que 1. Porém, s não é Maximin_4 , pois a partir de s_2 , o DM i vai levar o conflito para s_3 e os oponentes não podem sair de s_3 .

3.3.3 Uma adaptação na definição da estabilidade $\overline{MR}_r^{new}$

No conceito de estabilidade $\overline{MR}_r^{new}$ proposto em (RÊGO; VIEIRA, 2020a), permite-se que se os oponentes possam encerrar o conflito antes de r rodadas. No Maximin , isto não é permitido.

Nesse sentido observamos que a definição apresentada por (RÊGO; VIEIRA, 2020a), para a estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa, considera somente a necessidade da regularidade da árvore Metarracional para as sequências que terminam com um movimento do DM i , isto é, os casos de árvores que possuem horizontes ímpares. Quando o horizonte é um inteiro par, os autores definem a estabilidade atrelada a apenas a uma árvore Metarracional, sem exigir a regularidade.

Faremos uma pequena modificação na definição proposta por (RÊGO; VIEIRA, 2020a), exigindo a regularidade na árvore Metarracional, também, nos casos em que o horizonte é um número inteiro par. A finalidade de tal modificação é a de fornecer um resultado (Teorema 3.3.6) que estabelece uma relação entre a estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa mo-

dificada e a estabilidade Maximin. A seguir, apresentamos a definição da estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa Modificada.

Definição 3.3.4 *Um estado $s \in S$ é $\bar{i}$ -metarracionalmente estável com r rodadas para DM i , denotado por $s \in \overline{MR}_r^{new*}$, se houver um conjunto de políticas $\mathcal{P}_j$, para todo $j \in N_i$, e uma árvore metarracional **regular**, com base nas políticas $\mathcal{P}_j$, $j \neq i$, com r rodadas de modo que o resultado de cada $\bar{i}$ -sequência de r rodadas, que não é uma parte inicial de outra $\bar{i}$ -sequência de r rodadas, de cada $\bar{i}$ -sequência terminal com r rodadas e cada sequência terminal com menos do que r rodadas não é preferível a s pelo DM i .*

O Teorema 3.3.5 estabelece que a estabilidade $\overline{MR}_r^{new*}$ implica a estabilidade $\overline{MR}_r^{new}$.

Teorema 3.3.5 *Seja um conflito envolvendo $n \leq 2$ DMs, e $s \in S$. Para $h = 2r$, se o estado s é $\overline{MR}_r^{new*}$ estável para o DM i , então s é $\overline{MR}_r^{new}$ estável para o DM i .*

Prova: Como toda árvore Metarracional regular é uma árvore Metarracional, decorre imediatamente, para $h = 2r$, que a estabilidade $\overline{MR}_r^{new*}$ implica a estabilidade $\overline{MR}_r^{new}$. ■

3.3.4 A relação entre a estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa Modificada e a estabilidade Maximin _{h}

Após fazermos tal modificação, temos que, em conflitos com n DMs, $n > 2$ e horizonte $h = 2r$, a estabilidade Metarracional Generalizada Alternativa Modificada passa a implicar a estabilidade Maximin _{h} , e pelos Teoremas 3.3.5 e 3.3.1, temos que a estabilidade Maximin _{h} implica a estabilidade $\overline{MR}_r^{new*}$, já para conflitos com horizonte $h = 2r - 1$ a estabilidade $\overline{MR}_r^{new}$ implica a estabilidade Maximin _{h} . O que formalizamos com o Teorema 3.3.6, abaixo.

Teorema 3.3.6 *Seja um conflito envolvendo $n \geq 2$ DMs, e $s \in S$. Para $h = 2r$, o estado s é $\overline{MR}_r^{new*}$ estável para o DM i , se e somente, se s é Maximin _{h} estável para o DM i . Já quando $h = 2r - 1$, se o estado s é $\overline{MR}_r^{new}$ estável para o DM i , então s é Maximin _{h} estável para o DM i .*

Prova: Sejam as funções $H_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s)$ (respectivamente, $H_h^{i, \mathcal{P}_j}(N_i, s)$) que representam o estado antecipado pelo DM i quando ele (respectivamente, um dos DM j pertencente a coalizão de oponentes do DM i) se move inicialmente a partir do estado s , em que cada um dos DM j

utiliza uma política $\mathcal{P}_j$ arbitrária, e o DM i sempre se move de maneira a atingir o melhor estado antecipado, em relação a suas preferências, considerando um horizonte $h - 1$ e que cada DM j se comportará de acordo com a sua política, $\mathcal{P}_j$, exceto quando nenhum estado antecipado for melhor que o estado atual, caso no qual o DM i permanecerá neste estado. As quais são definidas formalmente, da seguinte maneira:

$$H_h^{i,\mathcal{P}_j}(N_i, s) = \begin{cases} H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(i, \mathcal{P}_j(s)), & \text{se } \mathcal{P}_j(s) \neq s \\ s, & \text{se } \mathcal{P}_j(s) = s. \end{cases}$$

$$H_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset, \text{ ou } K_i(s) \geq A_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s) \\ H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(N_i, M_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em que $M_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)$ é um estado s^* em $R_i(s)$ tal que $K_i(H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(N_i, s^*)) = \max\{K_i(H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(j, s_1)) : s_1 \in R_i(s)\}$ e $A_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s) = K_i(H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(N_i, M_h^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)))$.

Daí, se $h = 1$, segue, por definição das funções G_h^i e $H_h^{i,\mathcal{P}_j}$, que $G_1^i(i, s) = H_1^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)$, pois o DM i sempre busca acessar o melhor estado em $\{s\} \cup R_i(s)$ para ele. Logo:

$$K_i(G_1^i(i, s)) = K_i(H_1^{i,\mathcal{P}_j}(i, s)).$$

Similarmente, por definição das funções G_h^i e $H_h^{i,\mathcal{P}_j}$, como de acordo com G_h^i , os opone-netes do DM i se movem de modo que a subsequência legal de movimentos atinja, em seu estado final, o estado que minimiza o estado antecipado pelo DM i , com relação ao horizonte restante, ou seja, o pior estado em $\{s\} \cup R_{N_i}(s)$, em relação as preferências do DM i , e como $\mathcal{P}_j(s) \in \{s\} \cup R_j(s)$, segue que:

$$K_i(G_1^i(N_i, s)) \leq K_i(H_1^{i,\mathcal{P}_j}(N_i, s)).$$

Assumindo, como hipótese indutiva, que

$$K_i(G_{h-1}^i(i, s)) \leq K_i(H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(i, s))$$

e

$$K_i(G_{h-1}^i(N_i, s)) \leq K_i(H_{h-1}^{i,\mathcal{P}_j}(N_i, s)),$$

temos, por definição, que o estado $G_h^i(N_i, s)$ é o estado que o DM i antecipa, com horizonte h que lhe dá o pior resultado entre os estados que ele antecipa quando é a sua vez de se mover

e o horizonte é $h - 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
 K_i(G_h^i(N_i, s)) &= \min\{\{K_i(s)\} \cup \{K_i(G_{h-1}^i(i, s_1) : s_1 \in R_{N_i}(s))\}\} \\
 &\leq \min\{\{K_i(s)\} \cup \{K_i(H_{h-1}^{i, \mathcal{P}_j}(i, s_1) : s_1 \in R_{N_i}(s))\}\} \\
 &\leq K_i(H_h^{i, \mathcal{P}_j}(N_i, s))
 \end{aligned}$$

Agora, como $G_h^i(i, s)$ é o estado que o DM i antecipa, com horizonte h , que lhe dá o melhor resultado entre os estados que ele antecipa quando é a vez da coalizão de oponentes do DM i se mover e o horizonte é $h - 1$, então

$$\begin{aligned}
 K_i(G_h^i(i, s)) &= \max\{K_i(s), K_i(G_{h-1}^i(N_i, M_h^i(i, s))\} \\
 &\leq \max\{K_i(s), K_i(H_{h-1}^{i, \mathcal{P}_j}(N_i, M_h^i(i, s))\} \\
 &\leq \max\{K_i(s), K_i(H_{h-1}^{i, \mathcal{P}_j}(N_i, M_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s))\} \\
 &= K_i(H_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s)),
 \end{aligned}$$

em que a primeira desigualdade decorre do passo indutivo e a segunda da definição de $M_h^{i, \mathcal{P}_j}(i, s)$.

Portanto, para $h = 2r$ ou $h = 2r - 1$, respectivamente, o estado s ser $\overline{MR}_r^{new*}$ estável ou MR_r^{new} estável, para o DM i , quando é fixado um conjunto de políticas $\mathcal{P}_j^*$ para os DMs pertencentes a coalizão de oponentes do DM focal, implica que $H_h^{i, \mathcal{P}_j^*}(i, s) = s$, pois todos os estados terminais da árvore Metarracional Generalizada com horizonte h são piores ou iguais a s em relação as preferências do DM i . Como $K_i(G_h^i(i, s)) \geq K_i(s)$, temos que,

$$K_i(s) = K_i(H_h^{i, \mathcal{P}_j^*}(i, s)) \geq K_i(G_h^i(i, s)) \geq K_i(s).$$

Isto é, s é Maximin_h estável para o DM i .

Já a prova de que, para conflitos com horizonte $h = 2r$, o estado s ser Maximin_h estável para o DM i implica em s ser $\overline{MR}_r^{new*}$ estável para o DM i é idêntica a do Teorema 3.3.1. ■

3.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo, provamos a equivalência entre dois conceitos de estabilidade MR_h e Maximin_h para conflitos bilaterais. Assim, apesar da aparente maior flexibilidade de movimento que o oponente do DM focal tem na estabilidade Maximin_h , já que não se restringe

ao uso de uma política, provamos que se um estado é Maximin_h estável, é sempre possível construir políticas para o oponente que justifiquem o estado satisfazendo a metarracionalidade generalizada.

Este resultado é de grande valia para a metodologia GMCR, uma vez que a determinação de estados estáveis de acordo com o conceito Maximin_h é mais simples quando comparada com a obtenção de estados estáveis de acordo com o conceito de metarracionalidade generalizada. Além disso, também apresentamos um resultado relacionado ao estado antecipado de acordo com a noção da estabilidade Maximin_h , que esclarece este conceito. E que nos levou a refletir sobre o estado antecipado de acordo com a noção da estabilidade L_h , como veremos no Capítulo 4.

Para conflitos multilaterais verificamos que para conflitos com horizontes ímpares, a estabilidade Maximin implica na Metarracionalidade Generalida Alternativa, o que não acontece para conflitos com horizonte par. E, que para conflitos com horizontes pares a Metarracionalidade Generalida Alternativa não implica a estabilidade Maximin , mas quando exigimos a regularidade na árvore Metarracional então conseguimos garantir que a noção de estabilidade Metarracionalidade Generalida Alternativa modificada obtida implica na estabilidade Maximin .

4 SOBRE ALGUMAS PROPRIEDADES DAS ESTABILIDADES MOVIMENTO LIMITADO, METARRACIONALIDADE GENERALIZADA E EQUILÍBRIOS POLÍTICOS

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, o nosso principal objetivo é esclarecer algumas propriedades de três noções de estabilidade com horizontes variáveis presentes na literatura sobre o GMCR, a saber: equilíbrio em políticas, metarracionalidade generalizada (MR_h) e estabilidade Movimento Limitado (L_h). No primeiro, assim como visto no Capítulo 3, de maneira semelhante ao que ocorre com a noção da estabilidade Maximin_h , apresentamos o fato de que o estado antecipado segundo o conceito L_h , também, não é necessariamente único. Em seguida, apontamos um erro no Corolário 1 apresentado em (ZENG et al., 2006), que aborda uma relação entre metarracionalidade generalizada e o conceito de equilíbrio em políticas. Por fim, a última contribuição é fornecer uma prova formal de que a estabilidade L_h implica na estabilidade MR_h , pois a justificativa atual, para esse resultado, apresentada em (ZENG et al., 2006) possui uma inconsistência conforme mostramos por meio de um contra-exemplo. Como veremos, a prova proposta neste capítulo segue uma linha similar a prova de Maximin_h implica na estabilidade MR_h , abordada no Capítulo 3.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 4.2, apresentamos, a partir de um exemplo, a possibilidade da existência de uma ambiguidade em relação ao estado para onde o DM vai se mover quando um conflito é analisado segundo a estabilidade de L_h , além de propor um critério para desambiguação. Na Seção 4.3, apresentamos um contra-exemplo que aponta para um problema em um dos resultados apresentados em (ZENG et al., 2006). Na Seção 4.4, apresentamos um problema em um argumento apresentado por (ZENG et al., 2006), para justificar o fato de que a estabilidade L_h implica a estabilidade MR_h , e fornecemos também uma justificativa plausível para garantir essa implicação. Adicionalmente, ainda nesta seção, apresentamos como exemplo dois conflitos que esclarecem que é realmente necessário definir duas políticas diferentes, uma para os casos em que o horizonte é um inteiro ímpar e outra para o caso em que o horizonte é um inteiro par, para garantir que a estabilidade de L_h implique a metarracionalidade generalizada. Por fim, na Seção 4.5, são feitas algumas considerações finais.

4.2 CORRIGINDO UM PROBLEMA NA DEFINIÇÃO DE ESTABILIDADE DE L_h

De acordo com a definição de estabilidade L_h , a cada passo que um DM é chamado a se mover, ele deve ter um estado definido exclusivamente para onde ele deve mudar o conflito, tendo em conta os estados antecipados de acordo com o horizonte remanescente considerado. Essa conjectura de que cada movimento é definido de forma única provavelmente foi devida à suposição de que todos os estados são estritamente ordenados para ambos os DMs, não sendo permitida a indiferença. Embora de fato não haja indiferença entre diferentes estados antecipados, no Exemplo 4.2.1, mostramos que a partir de dois estados diferentes um DM pode antecipar o mesmo estado final e, portanto, ser indiferente entre eles.

Exemplo 4.2.1 *Considere um conflito hipotético com dois decisores, DM i e DM j , e oito estados, a saber: $\{s, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$. Considere que as acessibilidades dos DMs i e j são, respectivamente, dadas por: $R_i(s) = \{s_4\}; R_i(s_5) = \{s_7\}; R_i(s_6) = \{s_4\}; R_i(s_1) = \{s_2, s_3\}$ e $R_j(s_4) = \{s_5, s_1\}; R_j(s_7) = \{s_6\}$, além disso, considere que os conjuntos de todas as acessibilidades dos DMs i e j em todos os estados que não foram declarados são iguais ao conjunto vazio. Considere ainda, que as relações de preferência dos DMs i e j são dadas, respectivamente, por: $s_7 \succ_i s_4 \succ_i s \succ_i s_2 \succ_i s_1 \succ_i s_3 \succ_i s_6 \succ_i s_5$ e $s_5 \succ_j s_2 \succ_j s_6 \succ_j s_4 \succ_j s \succ_j s_7 \succ_j s_3 \succ_j s_1$.*

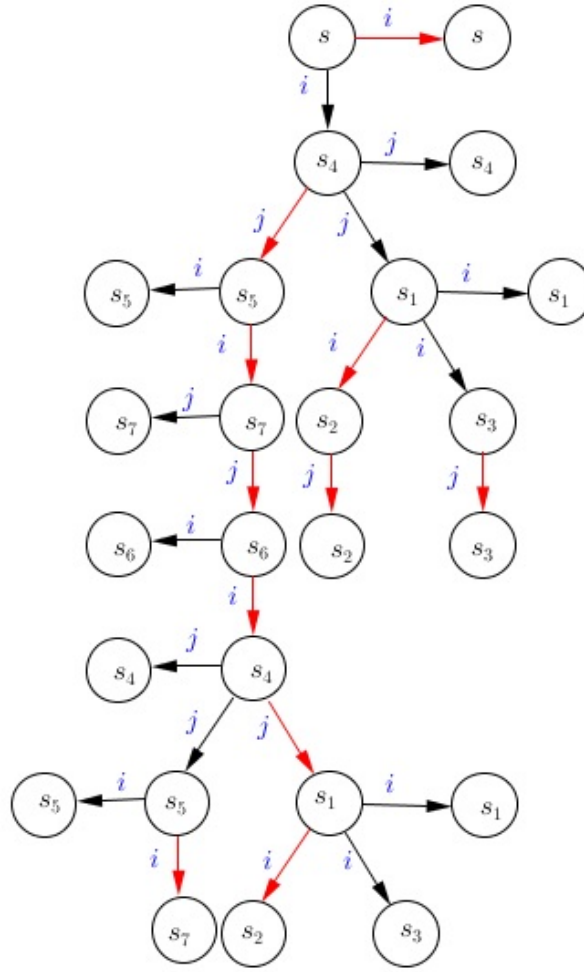
A Figura 10 ilustra como este conflito pode evoluir a partir de um movimento inicial do DM i do estado s , considerando um horizonte igual a 7. As setas vermelhas nesta figura indicam as escolhas previstas para os DMs de acordo com a estabilidade L_7 .

Nesse conflito, quando o DM j se move pela primeira vez a partir do estado s_4 , ele antecipa que o estado final com horizonte 6 será igual a s_2 tanto se ele passar de s_4 para s_1 ou para s_5 . Assim, não está claro se $M_6(j, s_4) = s_1$ ou $M_6(j, s_4) = s_5$.

Embora o Exemplo 4.2.1 mostre que pode haver ambiguidade de qual movimento um DM pode fazer, uma vez que o estado antecipado é o mesmo para todos aqueles movimentos para os quais há indiferença, como apontam as setas em vermelho na Figura 10, a estabilidade L_h do estado inicial não é afetada por essas escolhas. Apesar disso, definimos um critério de decisão a ser aplicado quando a partir de dois ou mais estados, os estados antecipados por um DM são os mesmos. Formalmente, definimos o estado $\mathcal{N}_h(j, s)$, como o estado s^* tal que:

$$I. \ s^* \in R_j(s) \text{ e } K_j(G_{h-1}(i, s^*)) = \max\{K_j(G_{h-1}(i, s_1)) : s_1 \in R_j(s), j \neq i\}.$$

Figura 10 – Análise de estabilidade L_h para o DM i no conflito descrito no Exemplo 4.2.1.



Fonte: O autor (2023).

- II. Se $K_j(G_{h-1}(i, s^\#)) = K_j(G_{h-1}(i, s^*))$ para alguns $s^\# \in R_j(s)$, então $K_j(s^*) > K_j(s^\#)$.

A intuição é que quando ocorrer de mais de um estado maximizar o *payoff* antecipado do oponente do decisor focal, então ele escolherá o estado que dá o maior *payoff* com um movimento.

A fim de ilustrar o critério de decisão acima, note que, no Exemplo 4.2.1, temos que quando o DM j se move pela primeira vez em s_4 , temos $G_5(i, s_5) = s_2 = G_5(i, s_1)$. De acordo com os critérios propostos, como $K_j(s_5) > K_j(s_1)$, temos que $\mathcal{N}_6(j, s_4) = s_5$.

Conforme observado no trabalho de (RÊGO; VIEIRA; KILGOUR, 2022), um problema semelhante existe na definição de estabilidade Maximin_h , proposta em (RÊGO; VIEIRA, 2020c). Como no caso da estabilidade L_h , a estabilidade Maximin_h dos estados não depende de como a ambiguidade é tratada.

Na próxima seção, nos voltamos para um problema na literatura sobre a relação entre equilíbrio em políticas e metarracionalidade generalizada.

4.3 FIXANDO A RELAÇÃO ENTRE O EQUILÍBRIO EM POLÍTICAS E A METARRACIONALIDADE GENERALIZADA

Em (ZENG et al., 2004) é apresentada a noção de equilíbrio em políticas a qual recordamos a seguir. Esse conceito será importante para apontarmos um problema em um resultado (Corolário 4.3.3) fornecido em (ZENG et al., 2006).

Definição 4.3.1 (ZENG et al., 2004) *As políticas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ formam um equilíbrio em políticas em relação ao estado de status quo s^* se:*

1. $\mathcal{P}_i(s^*) = s^*$ vale para ambos os DM $i = 1, 2$,
2. $\forall i = 1, 2, \forall \mathcal{P}'_i$ tais que $\mathcal{P}'_i(s^*) \neq s^*$, o resultado de qualquer sequência terminada ou qualquer sequência completa não é preferido a s^* pelo DM i .

Um estado s^* satisfazendo as duas condições acima é chamado de PSS. Denota-se o conjunto de todos os PSS por S^{PSS} .

Já em (ZENG et al., 2006), é apresentado o Teorema 4.3.2, abaixo, que estabelece relações entre os conceitos de resoluções de MR_h e PSS.

Teorema 4.3.2 (1) *Se $s \in S^{MR_{2h-1}}$ para um inteiro positivo h , então $s \in S^{PSS}$;*

(2) *Se $s \in S^{PSS}$, então $s \in S^{MR_{2h}}$ para todo inteiro positivo h .*

Prova: Ver (ZENG et al., 2006) ■.

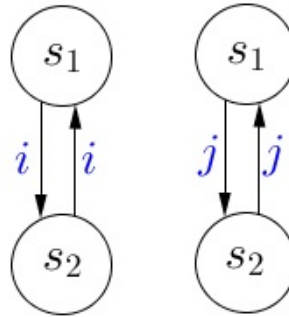
Em que S^{MR_h} representa o conjunto de estados que são equilíbrios de acordo com a estabilidade MR_h . De tal teorema, os autores afirmam decorrer o Corolário 4.3.3, que estabelece que se o conjunto de estados que são equilíbrios de acordo com PSS for igual ao conjunto de estados que é equilíbrio de acordo com MR_h , para algum h , então os conjuntos de estados que são equilíbrios, de acordo com a metarracionalidade generalizada, com horizontes h e $h+1$ são os mesmos. Abaixo recordamos o referido corolário.

Corolário 4.3.3 (ZENG et al., 2006) $S^{PSS} = S^{MR_{h^*}}$ para algum h^* se, e somente se, $S^{MR_{h^*}} = S^{MR_{h^*+1}}$.

Ilustramos que o resultado declarado no Corolário 4.3.3 está incorreto por meio do seguinte contra-exemplo.

Exemplo 4.3.4 (Contra-exemplo) Considere o conflito hipotético com dois DMs i e j e dois estados $\{s_1, s_2\}$, tais que os conjuntos de acessibilidade dos DMs i e j são dados, respectivamente, por: $R_i(s_1) = \{s_2\}$, $R_i(s_2) = \{s_1\}$, e $R_j(s_1) = \{s_2\}$, $R_j(s_2) = \{s_1\}$. E as relações de preferência dos DMs i e j são dadas, respectivamente, por: $s_1 \succ_i s_2$ e $s_2 \succ_j s_1$.

Figura 11 – Análise de estabilidade para o conflito descrito no Exemplo 4.3.4.



Fonte: O autor (2023).

Primeiro, temos que $S^{MR_2} = \{s_1, s_2\}$. Observe que, por um lado, s_1 é MR_2 para DM i , já que o estado s_1 é Nash estável para DM i . Além disso, como s_1 é GMR para DM j , também é MR_2 para DM j . Por outro lado, como s_2 é GMR para DM i , também é MR_2 para DM i . Finalmente, s_2 é MR_2 para DM j , já que s_2 é Nash estável para DM j .

Em segundo lugar, temos que $S^{PSS} = \{s_1, s_2\}$. Vamos argumentar que s_1 é PSS. Para isso, considere as políticas $\mathcal{P}_i(s_1) = s_1$, $\mathcal{P}_j(s_1) = s_1$, $\mathcal{P}_i(s_2) = s_1$, e $\mathcal{P}_j(s_2) = s_2$. Assim, se DM i mudar para qualquer política tal que $\mathcal{P}'_i(s_1) = s_2$, o conflito terminará em s_2 , o que é pior do que s_1 para DM i . Por outro lado, se DM j mudar para qualquer política tal que $\mathcal{P}'_j(s_1) = s_2$, o conflito irá alternar infinitamente sendo o primeiro estado repetido s_1 que não é preferível a s_2 pelo DM j . Um argumento semelhante mostra que s_2 também é PSS.

No entanto, o estado s_2 não é SMR para DM i , porque de s_2 DM i pode fazer uma UI para s_1 e a única sanção disponível para DM j é retornar o conflito para s_2 do qual DM i pode escapar da sanção movendo o conflito mais uma vez para s_1 . Como s_2 não é SMR para DM i , não é MR_3 para DM i , contradizendo o Corolário 4.3.3.

Porém, temos que o resultado é válido em uma das direções, e que fazendo uma pequena adaptação na outra direção o resultado, também, passa a ser válido, assim apresentamos o Corolário 4.3.5 abaixo.

Corolário 4.3.5 *Para algum h^* inteiro.*

- Se $S^{MR_{h^*}} = S^{MR_{h^*+1}}$ então, $S^{PSS} = S^{MR_{h^*}}$.
- Se $S^{PSS} = S^{MR_{h^*}}$ então, $S^{MR_{h^*}} = S^{MR_{h^*+2}}$.

Nossa última contribuição neste capítulo é corrigir um problema na prova de que o conceito de estabilidade L_h implica no conceito de estabilidade MR_h , o que faremos na próxima seção.

4.4 CORRIGINDO A PROVA DE QUE L_h IMPLICA EM MR_h

Zeng et al. (ZENG et al., 2006) afirmam que a estabilidade L_h implica na estabilidade MR_h em conflitos bilaterais. Embora esse resultado seja verdadeiro, como mostramos nesta seção, a justificativa original dada pelos autores é problemática.

Dado um estado s satisfazendo a estabilidade L_h para o DM i , a ideia da justificativa dada pelos autores para provar que s é MR_h para DM i é construir uma política para DM $j \neq i$ onde DM j faz exatamente os mesmos movimentos que faz em L_h , ou seja, maximiza seu ganho antecipando o estado final do conflito no máximo h passos à frente.

O Exemplo 4.2.1 apresenta um conflito onde os movimentos feitos pelo oponente do DM focal não podem formar uma política já que este DM faz dois movimentos diferentes a partir do mesmo estado no conflito. Em particular, de acordo com a estabilidade L_7 , o DM j não se move de acordo com uma política, pois ele se move duas vezes do estado s_4 acessando diferentes estados em cada um desses movimentos.

Para apresentar uma prova de que a estabilidade L_h implica estabilidade MR_h , será necessário definir uma árvore L_h , para que possamos definir uma política do oponente, a qual será chamada de política L_h .

4.4.1 A árvore L_h

A árvore L_h é definida por um conjunto de sequências alternadas de estados e DMs com raiz dada por algum estado s que é L_h estável para DM i . Em cada sequência, o DM i pode

ficar no estado atual ou mover-se para qualquer estado acessível para ele, enquanto que o DM j sempre escolhe o melhor estado para ele entre ficar ou alcançar um estado final de conflito após um horizonte de comprimento máximo h , movendo o conflito para um estado acessível, ou seja, DM j se comporta na árvore L_h conforme está seguindo o que é prescrito pela estabilidade L_h . Sempre que algum DM fica em um determinado estado, a sequência termina naquele estado. A seguir, damos a definição formal dessa árvore.

Definição 4.4.1 *Seja s um estado L_h estável para DM i . A árvore L_h para DM i do estado s consiste no conjunto de todas as possíveis sequências alternadas de estados e DMs $(s_0, i_0, s_1, i_1, s_2, i_2, \dots, i_{k-1}, s_k)$, tal que:*

- (1) $s_0 = s$.
- (2) $i_0 = i$.
- (3) $i_{l+1} \neq i_l$, para $l = 0, 1, 2, \dots, k-2$.
- (4) se $i_l = i$, $s_{l+1} \in R_i(s_l) \cup \{s_l\}$, enquanto se $i_l = j$, $s_{l+1} = \mathcal{N}_{h-l}(j, s_l)$, se $K_j(G_{h-l-1}(i, \mathcal{N}_{h-l}(j, s_l))) > K_j(s_l)$, e $s_{l+1} = s_l$, caso contrário.
- (5) $k \leq h$.
- (6) Se $s_{l+1} = s_l$, para algum $l = 0, 1, 2, \dots, k-1$, então a sequência termina em s_{l+1} .

É importante notar que se o estado s é L_h estável para DM i todos os estados finais das sequências desta árvore são piores ou iguais a s para DM i .

A árvore L_7 para DM i do estado s no Exemplo 4.2.1 é uma subárvore da árvore mostrada na Figura 9, consistindo de todos os movimentos do DM i e do DM j , movimentos que são exibidos em vermelho.

4.4.2 A política L_h

Como o oponente do DM focal, que se comporta de acordo com a estabilidade L_h , pode tomar decisões diferentes quando o mesmo estado aparece na árvore L_h , conforme ilustrado no Exemplo 4.2.1, assim, nem sempre pode usar uma política. Nesta seção, mostramos como a partir das escolhas feitas pelo decisor oponente, em uma árvore L_h , podemos construir políticas L_h . Essas políticas dependem da paridade do horizonte de conflito e serão utilizadas

na prova de que a estabilidade L_h implica na estabilidade MR_h em conflitos bilaterais. Tal dependência vem do fato de que para conflitos com horizonte ímpar, o último a se mover é o DM focal, enquanto para conflitos com horizonte par o oponente do DM focal é o último a se mover.

4.4.2.1 Política L_h para conflitos com horizonte ímpar

Consideremos inicialmente o caso em que h é ímpar. Assim, para estabelecermos a política L_h , primeiramente iremos particionar os estados de S de acordo com o maior número de estados que aparecem em uma sequência alternada da forma descrita acima começando em s e terminando em um determinado estado.

Isto é, vamos particionar S em subconjuntos S_t , onde $t = 1, 3, 5, \dots, h$, de forma que:

- (1) Seja S_t , para $t \leq h$ ímpar, o subconjunto que contém todos os estados s^* pertencentes à árvore L_h do DM i iniciada em s , que fazem parte de uma sequência da forma $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_{t-1}, i_{t-1}, s^*)$, com $s^* \neq s_{t-1}$, e que não há sequência na árvore L_h do DM i iniciada em s tal que $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_{l-1}, i_{l-1}, s^*)$, com $s^* \neq s_{l-1}$, onde l é ímpar e $h \geq l > t$.
- (2) Seja S_0 o subconjunto de todos os estados que não pertencem a nenhum S_t , para t ímpar e menor ou igual a h .

Se um estado não fizer parte da árvore L_h do DM i iniciada em s , ele pertencerá a S_0 e a política de DM j ditará que DM j permaneça neste estado. Além disso, os estados em qualquer subconjunto S_t , para $t \neq 0$ e $t \neq h$, são estados que pertencem à árvore L_h do DM i iniciada em s e DM j se move deles.

Para $s^* \in S$, definimos a política do DM j no estado s^* , ou seja, $\mathcal{P}_j^*(s^*)$, da seguinte forma:

- (a) $\mathcal{P}_j^*(s^*) = s^*$, se s^* pertence a $S_0 \cup S_h$. (Ou seja, para estados que não são um estado onde DM j se move na árvore L_h do DM i iniciada em s , o DM j deve permanecer nesses estados).
- (b) $\mathcal{P}_j^*(s^*) = \mathcal{N}_{h-t}(j, s^*)$ para s^* em S_t , $0 < t < h$, se $K_j(G_{h-t-1}(i, \mathcal{N}_{h-t}(j, s^*))) > K_j(s^*)$, e $\mathcal{P}_j^*(s^*) = s^*$, caso contrário.

Como os S_t 's são disjuntos e a união de todos os S_t 's forma o conjunto S , ou seja, os S_t 's formam uma partição de S , então a política $\mathcal{P}_j^*$ está bem definida, isto é, cada estado em S está associado a apenas um único movimento, que seria permanecer no mesmo estado ou mover-se como DM j se move em s^* na árvore L_h do DM i iniciada em s , considerando que o maior número de movimentos já foi feito até atingir o estado s^* nesta árvore.

4.4.2.2 Política L_h para conflitos com horizonte par

Em conflitos onde o horizonte é um número inteiro par, a política definida acima não garante estabilidade metarracional generalizada para um estado s que é estável de acordo com o conceito L_h para DM i . Mais adiante, apresentamos o Exemplo 4.5.2 no qual este fato é exposto. Assim, é necessário construir outra política em caso de conflitos com horizonte par. Na construção dessa nova política, particionamos os estados de S de acordo com o menor número de estados que aparecem em uma sequência alternada, conforme descrito acima, começando em s e terminando em um determinado estado. Ou seja, vamos particionar S em subconjuntos S_t , onde $t = 1, 3, 5, \dots, h-1$, tal que:

- (1) Seja S_t , para ímpar $t < h$, o subconjunto formado pelos estados s^* para os quais existe uma sequência na árvore L_h do DM i iniciada em s , ou seja, $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_{t-1}, i_{t-1}, s^*)$, onde s^* é diferente de s_{t-1} e não há sequência na árvore L_h do DM i iniciada em s tal que $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_{l-1}, i_{l-1}, s^*)$, s^* é diferente de s_{l-1} , l é ímpar e $l < t$.
- (2) Seja S_0 o subconjunto de todos os estados que não pertencem a nenhum S_t , para t ímpar e menor que h .

Observe que os estados em qualquer S_t , para $t \neq 0$, são estados nos quais o DM j se move na árvore L_h do DM i iniciada em s .

Para $s^* \in S$, definimos a política do DM j no estado s^* , ou seja, $\mathcal{P}_j^\#(s^*)$ como segue:

- (a) $\mathcal{P}_j^\#(s^*) = s^*$, se s^* pertence a S_0 . (Isto é, se um estado s não é um estado onde o DM j se move na árvore L_h de s para DM i , então o DM j permanece naquele estado).
- (b) $\mathcal{P}_j^\#(s^*) = \mathcal{N}_{h-t}(j, s^*)$ para s^* em S_t , se $K_j(G_{h-t-1}(i, \mathcal{N}_{h-t}(j, s^*))) > K_j(s^*)$, e $\mathcal{P}_j^\#(s^*) = s^*$, caso contrário.

4.5 A PROVA FORMAL

Definidas as políticas para conflitos com horizontes pares e ímpares, apresentamos uma prova formal da implicação.

Teorema 4.5.1 *Seja $s \in S$ e $N = \{i, j\}$. Se o estado s é L_h estável para DM i , então s é MR_h estável para DM i .*

Prova: Inicialmente, vamos considerar o caso onde h é um inteiro ímpar, nos casos onde há repetição de estados na árvore L_h do DM i iniciada em s em que o DM j se move, a política $\mathcal{P}_j^*$, do DM j , irá replicar o que ela faz no estado mais profundo da árvore L_h do DM i iniciada em s . Em qualquer estado s_1 onde houver uma replicação que forme um novo ramo que não pertença à árvore L_h do DM i iniciada em s (fato que ocorre porque o DM j acessa diferentes estados em s_1 para diferentes níveis de profundidade na árvore L_h do DM i iniciada em s), o estado para o qual DM j se move **após a replicação** é um estado s_2 que pertencia a L_h árvore do DM i iniciada em s em que DM i se move em maior profundidade.

Por um lado, se este estado s_2 é igual a um estado correspondente ao último movimento de DM i na árvore L_h do DM i iniciada em s , mas como s é L_h estável, s_2 e todos os estados s_3 em $R_i(s_2)$ não são melhores que s para DM i . Por definição, esses estados s_3 pertencem a S_h . Portanto, a política $\mathcal{P}_j^*$ indicará que em todos esses estados s_3 , DM j permanecerá neste novo ramo.

Por outro lado, se este estado s_2 não for igual a um estado correspondente ao último movimento de DM i na árvore L_h do DM i iniciada em s , então s_2 não pode ser melhor que s , pois pertence à árvore L_h do DM i iniciada em s , e o DM i se move em s_2 (e há uma sequência com estado final em s_2 na árvore que corresponde ao caso em que DM i fica em s_2) e s é L_h para DM i . Além disso, todos os estados em $R_i(s_2)$ também fazem parte da árvore L_h do DM i iniciada em s em um nível mais profundo e, portanto, DM j replicará o que ela fará nesses estados, dos novos ramos que não fazem parte da árvore L_h do DM i iniciada em s , de acordo com o que ela fizer a medida que esses estados aparecerem na árvore L_h do DM i iniciada em s . Portanto, cada novo ramo leva a outro estado s_3 em que o DM i se move na árvore L_h do DM i iniciada em s , que possui um nível de profundidade maior que o nível de profundidade s_2 na árvore L_h do DM i iniciada em s . Se repetirmos este argumento, como DM j permanece em um estado em S_h que é pior ou igual a s para DM i ou os estados da nova ramificação correspondem aos estados do L_h árvore do DM i iniciada em s com um nível

crescente de profundidade, e a profundidade máxima da árvore L_h para DM i de s é limitada a h , temos que todos os estados destes novos ramos na árvore metarracional generalizada com horizonte h sempre terminam em estados piores ou iguais a s para o DM i . Assim, s é MR_h estável para o DM i .

Se h é um inteiro par. Primeiro, observe que, como o estado s é L_h estável para DM i , todo estado em qualquer sequência da árvore L_h para DM i de s para o qual DM j se move deve ser um estado pior ou igual a s para o DM i , porque se o movimento de DM j for o último em uma sequência, o estado terminal não pode ser melhor que s para DM i e se DM i move-se após o movimento de DM j , pois DM i sempre pode ficar e terminar a sequência, DM j nunca pode acessar um estado melhor que s para DM i , já que o DM i terminaria a sequência neste estado.

Ou seja, se h for par, quando houver repetição de estados na árvore L_h do DM i iniciada em s em que DM j se move, a política $P_j^\#$, do DM j irá replicar o que ela faz no estado de menor profundidade na árvore L_h do DM i iniciada em s . Assim, em qualquer estado s_1 em que haja uma replicação que forme um novo ramo que não pertença à árvore L_h do DM i iniciada em s (porque o DM j realiza ações diferentes em s_1 para diferentes níveis de profundidade na árvore L_h do DM i iniciada em s) o estado para o qual DM j se move **após a replicação** é um estado s_2 que pertencia a árvore L_h do DM i iniciada em s em que o DM i se move em uma profundidade menor. Portanto, $K_i(s) \geq K_i(s_2)$ e, além disso, todos os estados em $R_i(s_2)$ também aparecem na árvore L_h do DM i iniciada em s em um nível inferior. Portanto, DM j poderá replicar nos estados dos novos ramos não pertencentes à árvore L_h do DM i iniciada em s que seguem s_2 o que ela fez em um nível de profundidade menor no Árvore L_h do DM i iniciada em s nesses estados, que como vimos leva a estados não preferíveis a s pelo DM i . Assim, repetindo esse argumento, para estados com maior profundidade nesses novos ramos, como os ramos são limitados com profundidade h na árvore metarracional generalizada com horizonte h e todos os estados desses novos ramos sempre terminam em estados que são não melhor que s para o DM i , temos que s é MR_h para o DM i . ■

Para concluir esta seção, ilustramos através de exemplos a necessidade de definir duas políticas distintas, que dependem da paridade do horizonte do conflito.

Inicialmente, analisando o conflito apresentado no Exemplo 4.2.1, notamos que o estado s é L_7 estável para o DM i . Se for imposta a política $\mathcal{P}_j^*$ do DM j definida acima, para horizontes ímpares, em que a replicação em estados iguais pertencentes à árvore L_7 do DM i iniciada em

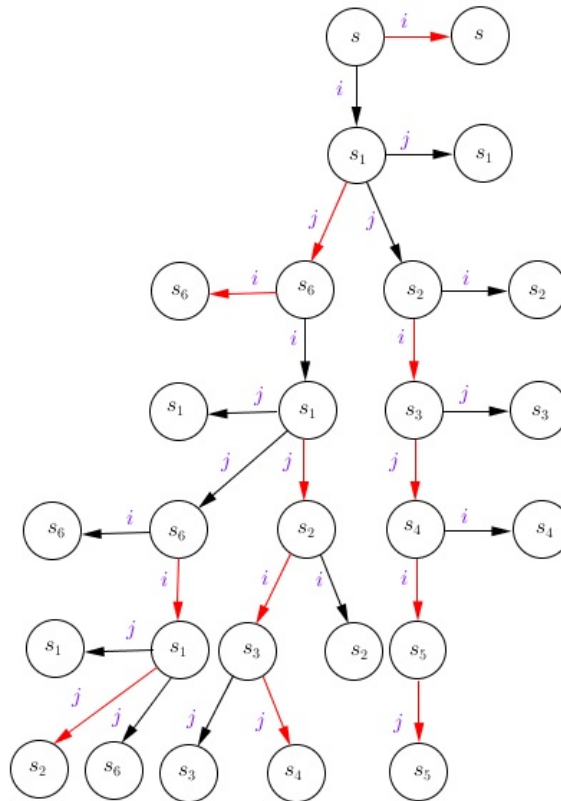
s , repete nos estados com menor profundidade o mesmo movimento realizado em um estado igual com maior profundidade, ou seja, $\mathcal{P}_j^*(s_4) = s_1$, então o estado s é MR_7 estável para o DM i . Porém, se for imposta a política $\mathcal{P}_j^\#$, na qual o DM j repete nos estados com maior profundidade o mesmo movimento realizado em um estado igual com menor profundidade da árvore L_7 para o DM i de s , ou seja, $\mathcal{P}_j^\#(s_4) = s_5$, verifica-se que esta política não justifica que o estado s seja MR_7 estável, pois haverá a sequência $(s, i, s_4, j, s_5, i, s_7, j, s_6, i, s_4, j, s_5, i, s_7)$, cujo resultado é o estado s_7 , que é preferível a s pelo DM i .

Exemplo 4.5.2 ilustra um conflito com o horizonte seis, no qual temos que o estado s é L_6 estável para o DM i . Além disso, se DM j adota a política $\mathcal{P}_j^*$, esta política não justifica s ser um estado MR_6 estável para o DM i .

Exemplo 4.5.2 Considere o seguinte conflito hipotético, com dois DMs i e j e sete estados $\{s, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$, de modo que os conjuntos de acessibilidade dos DMs i e j são dados, respectivamente, por: $R_i(s) = \{s_1\}$; $R_i(s_6) = \{s_1\}$; $R_i(s_2) = \{s_3\}$; $R_i(s_4) = \{s_5\}$ e $R_j(s_1) = \{s_2, s_6\}$; $R_j(s_3) = \{s_4\}$; $R_j(s_5) = \emptyset$. Além disso, os conjuntos de acessibilidade de todos os DMs em todos os estados que não foram declarados são iguais ao conjunto vazio. Por fim, as relações de preferência dos DMs i e j são dadas, respectivamente, por: $s_5 \succ_i s_3 \succ_i s \succ_i s_1 \succ_i s_6 \succ_i s_4 \succ_i s_2$ e $s_4 \succ_j s_2 \succ_j s_6 \succ_j s_5 \succ_j s_1 \succ_j s \succ_j s_3$.

Notemos primeiro que o estado s é L_6 estável para o DM i . Para verificar isso observe que se impusermos a política $\mathcal{P}_j^\#$ do DM j definida acima, para horizontes pares, em que ela replica nos estados com maior profundidade o mesmo movimento realizado em igual estado que tem uma profundidade menor na árvore L_6 do DM i iniciada no estado s , ou seja, $\mathcal{P}_j^\#(s_1) = s_6$, teremos esse s é MR_6 estável para DM i . Porém, se impusermos a política definida para horizontes ímpares, cuja replicação em estados iguais pertencentes à árvore L_6 para DM i do estado s , repete no estado com menor profundidade o movimento realizado no estado com maior profundidade, então esta política não justifica que o estado s seja MR_6 estável para DM i . Visto que se $\mathcal{P}_j^\#(s_1) = s_3$, haverá a sequência terminada $(s, i, s_1, j, s_2, i, s_3, j, s_4, i, s_5, j, s_5)$ com resultado igual a s_5 , que é preferível a s pelo DM i .

Figura 12 – Análise de estabilidade para o DM i no conflito descrito no Exemplo 4.5.2.



Fonte: O autor (2023).

4.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados referentes à estabilidade Movimento Limitado e estabilidade Metarracional Generalizada, que são exemplos de conceitos de estabilidade com horizonte variável no GMCR.

Primeiramente, apresentamos um exemplo de conflito em que há uma ambiguidade em relação à escolha de movimento feita por um DM na estabilidade movimento limitado, onde o mesmo estado pode ser antecipado a partir de diferentes estados iniciais. Embora essa ambiguidade não afete os resultados de estabilidade L_h , propomos uma regra de decisão para determinar qual movimento deve ser executado.

Em segundo lugar, apresentamos outro exemplo de conflito que ilustra um erro em um Corolário proposto por (ZENG et al., 2006) sobre equilíbrio em políticas e estabilidade metarracionalidade generalizada.

Por fim, formalizamos um resultado afirmado por (ZENG et al., 2006) de que a estabilidade movimento limitado implica estabilidade metarracionalidade generalizada em conflitos bilaterais. A prova formal deste resultado lança alguns esclarecimentos importantes sobre estes

conceitos, especialmente que embora em L_h os DMs não estejam restritos ao uso de políticas, seu comportamento pode ser alterado para o uso de uma política sem perder nenhum estado estável.

Este entendimento mais aprofundado sobre o conceito L_h nos levou a identificar uma lacuna no que se refere ao conceito L_h para conflitos multilaterais. Esta lacuna nos levou a propor duas extensões deste conceito a qual descreveremos no seguinte capítulo desta tese.

5 SOBRE AS ESTABILIDADES MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVAS

5.1 INTRODUÇÃO

Na análise de estabilidade do GMCR, a noção de estabilidade movimento limitado (L_h) (KILGOUR, 1985) é um importante conceito com horizonte variável, o qual serviu de inspiração para (RÊGO; VIEIRA, 2020c) e (ZENG et al., 2006) na construção das estabilidades Maximin_h e MR_h , respectivamente. Como enfatizado no referencial teórico e explorado no Capítulo 4 desta tese, na estabilidade L_h o decisor focal, que conhece as preferências de seus oponentes, decide escolher o estado que maximiza seu ganho acreditando que os oponentes, de maneira racional, também buscam maximizar seu próprio ganho.

Conforme mencionado, também, no referencial teórico desta tese, em (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993), são fornecidas duas possíveis generalizações, denominadas de (*Caso 1*) e (*Caso 2*), para o conceito L_h , em conflitos envolvendo múltiplos decisores. Porém, como mostraremos no Exemplo 5.3.2, o conceito L_h (*Caso 2*), não generaliza o conceito L_h para conflitos bilaterais. Ademais, tais generalizações tratam os oponentes do decisor focal como independentes, sem considerá-los como uma coalizão, o que não acontece com os demais conceitos de estabilidade para múltiplos decisores, ou seja, a contagem do horizonte ocorre de forma diferente dos demais conceitos de estabilidade que envolvem múltiplos decisores.

Nestas generalizações do conceito L_h , de forma conservadora, cada oponente do DM focal sempre agirá esperando que o próximo DM a se mover será o DM que fará o pior movimento possível para ele, como previsto pelo postulado do Mínimo. (Para saber mais sobre tal postulado, ver (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993).) Porém, caso o DM que se movimenta, de forma otimista, acreditasse que o próximo DM a se mover fosse aquele que faria o melhor movimento possível para ele, teríamos de forma semelhante, a ideia de um postulado do Máximo.

Neste capítulo, temos como principal objetivo apresentar generalizações alternativas, denotadas por L_h^{CC} e L_h^{CI} para o conceito L_h apresentado em (KILGOUR, 1985), considerando o cenário de conflitos com múltiplos decisores. Pois, ao investigarmos se as relações entre os conceitos de estabilidade Maximin_h , MR_h a estabilidade Movimento Limitado continuariam válidas no caso de conflitos multilaterais, acabamos nos convencendo da necessidade de apresentarmos definições alternativas para os conceitos L_h (*Caso 1*) e L_h (*Caso 2*). Ademais, fornecemos alguns resultados que estabelecem relações das estabilidades L_h^{CC} e L_h^{CI} com outros conceitos

de estabilidade do GMCR, como por exemplo, as equivalências entre as estabilidades L_1^{CC} , L_1^{CI} e a estabilidade de Nash, e o fato de que as estabilidades L_h^{CC} e L_h^{CI} implicam a estabilidade Maximin_h .

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 5.2 apresentamos o conceito de dominância de Pareto, adaptado às configurações do GMCR, o qual será utilizado nas definições de estabilidade Movimento Limitado Alternativas propostas. Na Seção 5.3, apresentamos a definição da estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão Cooperativa (L_h^{CC}). Na Seção 5.4 fornecemos alguns resultados referentes às relações da estabilidade L_h^{CC} com os conceitos de estabilidade clássicos do GMCR e, além disso, um resultado que estabelece a equivalência entre os conceitos de estabilidade L_h^{CC} e Maximin_h para conflitos nos quais a coalizão de oponentes tem preferências completamente opostas às do decisor focal. Já na seção 5.5, apresentamos a definição da estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão Individualista, (L_h^{CI}). Na seção 5.6, apresentamos alguns resultados que estabelecem relações do conceito de estabilidade L_h^{CI} com a estabilidade L_h^{CC} , bem como com outros conceitos de estabilidade consolidados do GMCR. Por fim, na Seção 5.7, apresentamos as principais conclusões obtidas.

5.2 DOMINÂNCIA DE PARETO

No estudo da otimização multiobjetivo, um dos objetivos é determinar um conjunto de soluções para um problema, denominado conjunto de Pareto ou conjunto Pareto-ótimo, que representa as soluções do problema. Em geral, nesses problemas estão envolvidas muitas funções objetivo, dentre as quais algumas devem ser maximizadas e/ou outras minimizadas. Porém, normalmente, não dá para melhorar uma característica de um problema sem piorar outra.

Por exemplo, em uma coalizão de DMs envolvidos em um conflito podem existir DMs com preferências bastante distintas, caracterizando assim um conflito de interesses dos DMs pertencentes à coalizão. Como neste caso não é possível chegar a uma solução ótima para todos os DM da coalizão, pode-se buscar um conjunto de soluções razoáveis. A dominância de Pareto procura capturar essa intuição de uma solução razoável. Intuitivamente, uma solução é não-dominada de Pareto se não houver outra solução que seja melhor para todos os DMs da coalizão. Em seguida, adaptamos a definição do conceito de dominância de Pareto apresentada em (PARETO, 1896), para as configurações do GMCR. Este conceito será

usado posteriormente para definir os conceitos das estabilidades L_h^{CC} e L_h^{CI} , alternativas, para conflitos com múltiplos DMs.

Definição 5.2.1 *Seja H uma coalizão de DMs. O estado $s^* \in S$ é Pareto dominado pelo estado $s' \in S$, para coalizão H se, e somente se, $s' \succ_i s^*$, para algum DM $i \in H$ e $s' \succeq_j s^*$ para cada DM $j \in H$.*

A intuição é que quando um estado s^* não é melhor que s' para todos os decisores da coalizão e, ainda é pior do que s' , para algum decisor pertencente a coalizão, o estado s^* é dominado pelo estado s' .

5.3 ESTABILIDADE MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVA COM COALIZÃO COOPERATIVA, L_h^{CC} .

Como DMs que fazem parte da coalizão de oponentes do DM focal podem ter preferências diferentes, escolher um critério para agregar suas preferências é um desafio. Assim, propomos um conceito de solução onde o DM focal é conservador no sentido que ele irá considerar que os oponentes irão se mover para o pior estado possível que pode ser alcançado e não é Pareto dominado para eles.

Para apresentar este conceito alternativo de estabilidade L_h para conflitos multilaterais, precisamos definir algumas notações. Seja $O_h^{CC}(i, s)$ o estado antecipado pelo DM i quando ele sai do estado s , o horizonte de conflito é h e os DMs se comportam de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CC} , que será definida formalmente nas Equações 5.1 e 5.2. Seja $R_h(N_i, s) = \{s\} \cup \{O_{h-1}^{CC}(i, s') : s' \in R_{N_i}(s)\}$ o conjunto formado pelo estado s e todos os estados finais antecipados do conflito quando algum oponente de DM i sai do estado s e o horizonte de conflito é h . Então considere:

$$R_h^{CC}(N_i, s) = \begin{cases} \{s\} \cup \{s' \in R_{N_i}(s) : O_{h-1}^{CC}(i, s') \text{ é não Pareto dominado no conjunto } R_h(N_i, s) \text{ para coalizão } N_i\}, & \text{se } s \text{ não for Pareto dominado no conjunto } R_h(N_i, s) \\ R_h(N_i, s) & \text{para a coalizão } N_i. \\ \{s' \in R_{N_i}(s) : O_{h-1}^{CC}(i, s') \text{ é não Pareto dominado no conjunto } R_h(N_i, s), & \\ \text{para a coalizão } N_i\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dessa forma, os estados pertencentes a $R_h^{CC}(N_i, s)$ são todos os estados que podem se caracterizar como o estado final de uma sequência legal de movimentos cujo estado antecipado a partir deles não são Pareto dominados dentro do conjunto $R_h(N_i, s)$, para a coalizão N_i . Além disso $R_h^{CC}(N_i, s)$ inclui o estado s , se este não for Pareto dominado para a coalizão N_i , no conjunto $R_h(N_i, s)$. Assim, definimos o estado antecipado $O_h^{CC}(i, s)$, em que, por convenção, $O_0^{CC}(\cdot, s) = s$, da seguinte maneira:

$$O_h^{CC}(i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset \\ s, & \text{se } K_i(s) \geq A_h^{CC}(i, s) \\ O_{h-1}^{CC}(N_i, Q_h^{CC}(i, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.1)$$

em que $Q_h^{CC}(i, s)$ é algum estado $s^* \in R_i(s)$ tal que $K_i(O_{h-1}^{CC}(N_i, s^*)) = \max\{K_i(O_{h-1}^{CC}(N_i, s')) : s' \in R_i(s)\}$ e $A_h^{CC}(i, s) = K_i(O_{h-1}^{CC}(N_i, Q_h^{CC}(i, s)))$. Por sua vez, $O_h^{CC}(N_i, s)$ é dado por:

$$O_h^{CC}(N_i, s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_{N_i}(s) = \emptyset \text{ ou } R_h^{CC}(N_i, s) = \{s\} \\ s, & \text{se } K_i(s) \leq A_h^{CC}(N_i, s) \text{ e } s \in R_h^{CC}(N_i, s) \\ O_{h-1}^{CC}(i, Q_h^{CC}(N_i, s)), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.2)$$

em que $Q_h^{CC}(N_i, s)$ é algum estado $s^* \in R_h^{CC}(N_i, s)$ tal que $K_i(O_{h-1}^{CC}(i, s^*)) = \min\{K_i(O_{h-1}^{CC}(i, s')) : s' \in R_h^{CC}(N_i, s)\}$ e $A_h^{CC}(N_i, s) = K_i(O_{h-1}^{CC}(i, Q_h^{CC}(N_i, s)))$.

Na Definição 5.3.1, apresentamos a estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão Cooperativa L_h^{CC} , para conflitos envolvendo múltiplos decisores.

Definição 5.3.1 *Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é L_h^{CC} estável para o DM i se, e somente se, $O_h^{CC}(i, s) = s$.*

Ao contrário da estabilidade L_h (Caso 1) e (Caso 2), onde cada movimento de um oponente aumenta o horizonte em 1, nesta definição alternativa, um movimento DM focal ou uma sequência legal de movimentos dos adversários é que aumenta o horizonte em 1. Ressaltamos que esta é a forma padrão pela qual o horizonte é contado em outros conceitos de estabilidade do GMCR, como a estabilidade Maximin _{h} e as estabilidades $\overline{MR}_r^{new}$ e MR_r^{new} .

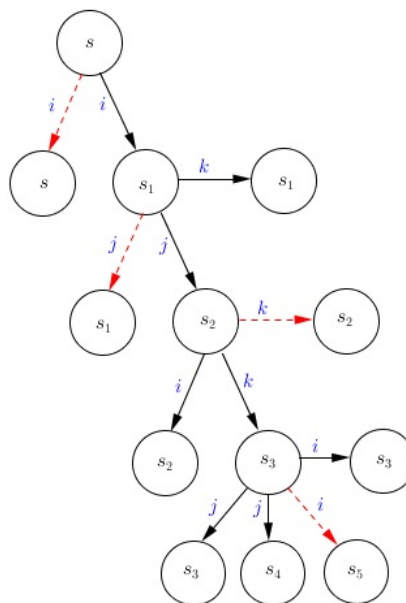
Provaremos que este conceito no caso em que existem somente dois DMs no conflito coincide com o conceito L_h , apresentado em (KILGOUR, 1985) para conflitos bilaterais. Contudo, é importante notar que o conceito L_h (Caso 2) para conflitos envolvendo múltiplos tomadores de decisão não generaliza o conceito L_h , apresentado em (KILGOUR, 1985) para conflitos

bilaterais. De acordo com o conceito de estabilidade L_h (Caso 2), se um conflito tem apenas dois tomadores de decisão, o focal e um oponente, já que o oponente não pode se mover duas vezes consecutivas e o focal não participa da sanção, então o conflito estaria limitado a um horizonte no máximo igual a $h = 2$, o que não é verdade no conceito L_h .

O Exemplo 5.3.2 abaixo, ilustra um conflito com o horizonte quatro, no qual temos que o estado s é L_4 (Caso 1) estável e L_4 (Caso 2) estável para o DM i . Apresentamos tal exemplo com objetivo de detalhar as diferenças entre os conceitos L_h (Caso 1) 2.4.11 e L_h (Caso 2) 2.4.12, buscando tornar mais claro como se obtém estabilidade a partir desses conceitos.

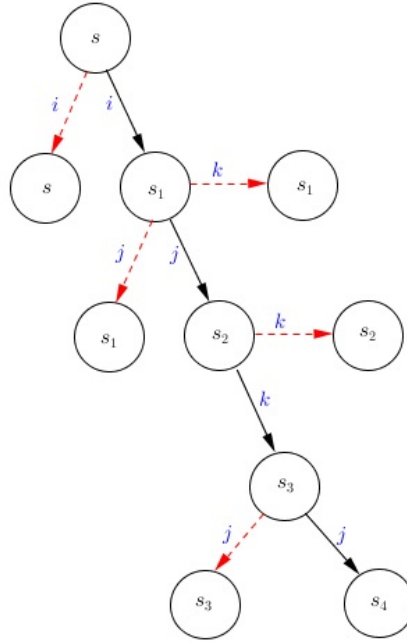
Exemplo 5.3.2 Considere o conflito hipotético a seguir, envolvendo três DMs, denotados por i, j e k , e seis estados $\{s, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$. Considere ainda que os conjuntos de acessibilidades dos DMs i, j e k sejam dados, respectivamente, por: $R_i(s) = \{s_1\}$, $R_i(s_3) = \{s_5\}$, $R_j(s_1) = \{s_2\}$, $R_j(s_3) = \{s_4\}$, $R_k(s_2) = \{s_3\}$, e os conjuntos de acessibilidades de todos os DMs em todos os estados que não foram declarados são iguais ao conjunto vazio. Suponha que as relações de preferências dos DMs são dadas por: $s_5 \succ_i s_4 \succ_i s \succ_i s_3 \succ_i s_2 \succ_i s_1$; $s_3 \succ_j s \succ_j s_1 \succ_j s_5 \succ_j s_2 \succ_j s_4$; $s_2 \succ_k s_1 \succ_k s \succ_k s_3 \succ_k s_4 \succ_k s_5$. As Figuras 13, 14 e 15 mostram como o conflito pode evoluir a partir do estado s com um movimento inicial de DM i , considerando a noção de estabilidade L_h (Caso 1), (Caso 2) e L_h^{CC} .

Figura 13 – Análise de estabilidade, de acordo com o conceito L_h (caso 1), do estado s , para o DM i no conflito descrito no Exemplo 5.3.2.



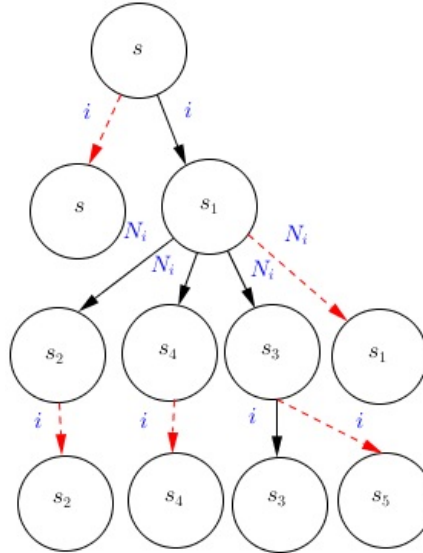
Fonte: O autor (2023).

Figura 14 – Análise de estabilidade L_4 , a partir do estado s , (caso 2) para o DM i no conflito descrito no Exemplo 5.3.2.



Fonte: O autor (2023).

Figura 15 – Análise de estabilidade L_3^{CC} para o DM i , a partir do estado s , no conflito descrito no Exemplo 5.3.2.



Fonte: O autor (2023).

Por meio da indução reversa, observe que se o conflito atingir o estado s_3 , então DM i pode se mover e levar o conflito para o estado s_5 , uma vez que $G_1(i, s_3) = s_5$, ou o DM j pode escolher ficar em s_3 , uma vez que $G_1(j, s_3) = s_3$. Como $K_k(s_5) < K_k(s_3)$, temos que $G_1(N_i, s_3) = s_5$ e DM k age como se DM i fosse o próximo a se mover. Dessa forma, no estado s_2 , DM k escolhe ficar em s_2 , uma vez que $K_k(s_2) > K_k(s_5)$ e, portanto, temos que

$G_2(k, s_2) = s_2$. Como o DM k ou o DM i encerrará o conflito no estado s_2 , se DM j o acessar do estado s_1 e como $s_1 \succ_j s_2$, então no estado s_1 o DM j escolherá ficar em s_1 , ou seja, temos que $G_3(j, s_1) = s_1$. Finalmente, como DM j ou DM k terminará o conflito no estado s_1 , o DM i prefere não sair do estado s , ou seja, $G_4(i, s) = s$. Portanto, o estado s é L_4 (Caso 1) estável para DM i .

Por outro lado, analisando o conflito de acordo com o conceito de estabilidade L_h (Caso 2), podemos ver que se o conflito atingir o estado s_3 , apenas o DM j pode sair dele, mas como $K_j(s_3) > K_j(s_4)$, temos que $g_1^{(i,k)}(\{j\}, s_3) = s_3$ e DM j opta por ficar em s_3 . Assim, no estado s_2 , apenas DM k pode se mover e, como $K_k(s_2) > K_k(s_3)$, temos que $g_2^{i,j}(\{k\}, s_2) = s_2$ e DM k escolhe ficar em s_2 . Sabendo disso, como DM j é o único que pode sair do estado s_1 e como $K_j(s_2) < K_j(s_1)$, então ele prefere ficar em s_1 e temos que $g_3^{(i,i)}(\{j, k\}, s_1) = s_1$. Por fim, como DM j ou DM k terminará o conflito no estado s_1 , DM i prefere não sair do estado s , ou seja, $g_4^i(i, s) = s$. Portanto, o estado s é L_4 (Caso 2) estável para o DM i .

Analisamos agora a estabilidade L_3^{CC} do estado s para DM i no conflito apresentado no Exemplo 5.3.2. A Figura 15 ilustra como o conflito pode evoluir de acordo com a noção da estabilidade de L_3^{CC} . De acordo com ela, a partir do estado s , DM i precisa decidir se permanece no estado s ou se move para o estado s_1 . Portanto, é necessário que ele determine $O_2^{CC}(N_i, s_1)$. Para tal, é necessário determinar $O_1^{CC}(i, s')$ para todo $s' \in R_{N_i}(s_1) = \{s_2, s_3, s_4\}$. Como o DM i não pode se mover a partir de s_2 ou s_4 , temos que $O_1^{CC}(i, s_2) = s_2$ e $O_1^{CC}(i, s_4) = s_4$. Finalmente, como $R_i(s_3) = \{s_5\}$ e $s_5 \succ_i s_3$, temos que $O_1^{CC}(i, s_3) = s_5$. Logo, $R_2(N_i, s_1) = \{s_1, s_2, s_4, s_5\}$. Como os estados s_4 e s_5 são Pareto Dominados pelo estado s_1 para a coalizão N_i , temos que $R_2^{CC}(i, s_1) = \{s_1, s_2\}$. Como $K_i(s_1) < K_i(s_2)$, temos que $O_2^{CC}(N_i, s_1) = s_1$, ou seja, entre todos os estados finais possíveis para o conflito, s_1 é o estado não Pareto dominado, para a coalizão N_i , que minimiza o *payoff* do DM i . Assim, como $s \succ_i s_1$, no estado s , o DM i não tem incentivo para mover o conflito do estado s para o estado s_1 , ou seja, $O_3^{CC}(i, s) = s$, então temos que o estado s é L_3^{CC} estável para DM i .

Alguns aspectos relacionados a esses conceitos são de grande relevância. Primeiramente, é importante observar que em conflitos envolvendo mais de três tomadores de decisão a análise referente ao conceito L_h (Caso 2), ocorreria utilizando o postulado do mínimo, de forma semelhante à do conceito de L_h (Caso 1). Entretanto, no Exemplo 5.3.2 a análise de estabilidade L_h (Caso 2) não considerou a necessidade de minimizar o ganho do decisor focal a cada movimento feito por um de seus oponentes, pois em cada um dos estados acessados o movimento alternava entre DM j e DM k , não sendo necessário realizar a minimização relativa

ao *payoff* do DM que se movia no instante imediatamente anterior.

5.4 ALGUNS RESULTADOS A RESPEITO DA ESTABILIDADE MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVA COM COALIZÃO COOPERATIVA

Nesta seção, apresentamos alguns resultados que estabelecem relações do conceito de estabilidade L_h^{CC} com outros conceitos de estabilidade consolidados do GMCR.

5.4.1 A relação entre as estabilidades L_h e L_h^{CC} em conflitos bilaterais

Provaremos a seguir que no caso particular em que há apenas dois DMs envolvidos no conflito, a estabilidade L_h^{CC} alternativa coincide com a estabilidade L_h padrão para conflitos bilaterais. Para provar este resultado, o Lema 5.4.1 estabelece uma equivalência entre o estado antecipado relativo ao conceito L_h , para dois DMs, com horizonte h , ou seja $G_h(i, s)$, e o estado antecipado relativo ao conceito L_h^{CC} , para dois DMs, com horizonte h , ou seja, $O_h^{CC}(i, s)$. Este resultado será usado para demonstrar que o conceito L_h^{CC} generaliza o conceito L_h para conflitos com múltiplos tomadores de decisão.

Lema 5.4.1 *Seja $N = \{i, j\}$, $s \in S$ e seja h um inteiro positivo. Temos que, $G_h(i, s) = O_h^{CC}(i, s)$ e $G_h(j, s) = O_h^{CC}(j, s)$.*

Prova: Note, inicialmente, que por definição $G_0(\cdot, s) = O_0^{CC}(\cdot, s) = s$, $\forall s \in S$. Agora, assuma, por hipótese de indução, que $G_{h-1}(i, s) = O_{h-1}^{CC}(i, s)$ e $G_{h-1}(j, s) = O_{h-1}^{CC}(j, s)$, $\forall s \in S$. Se $R_i(s) = \emptyset$, temos que $G_h(i, s) = O_h^{CC}(i, s) = s$. Se $R_i(s) \neq \emptyset$, temos que $\max\{K_i(O_{h-1}^{CC}(j, s')) : s' \in R_i(s)\} = \max\{K_i(G_{h-1}(j, s')) : s' \in R_i(s)\}$ e, consequentemente, temos:

$$O_{h-1}^{CC}(j, Q_h^{CC}(i, s)) = G_{h-1}(j, M_h(i, s))$$

e

$$A_h^{CC}(i, s) = K_i(O_{h-1}^{CC}(j, Q_h^{CC}(i, s))) = K_i(G_{h-1}(j, M_h(i, s))) = A_h(i, s).$$

Logo, $O_h^{CC}(i, s) = G_h(i, s)$.

Por outro lado, se $R_j(s) = \emptyset$, temos que $O_h^{CC}(j, s) = G_h(j, s) = s$. Se $R_j(s) \neq \emptyset$, como $N_i = \{j\}$, o único estado não Pareto dominado no conjunto $R_h(j, s)$ é aquele que maximiza a preferência do DM j neste conjunto. Deste modo:

$$R_h^{CC}(N_i, s) = \begin{cases} \{s\} \cup \{s' \in R_j(s) : O_{h-1}^{CC}(i, s') = s\} & \text{se } K_j(s) \geq K_j(O_{h-1}^{CC}(i, s')), \forall s' \in R_j(s), \\ \{s' \in R_j(s) : K_j(O_{h-1}^{CC}(i, s')) > K_j(s) \text{ e } K_j(O_{h-1}^{CC}(i, s')) \geq K_j(O_{h-1}^{CC}(i, s''))\}, & \\ \forall s'' \in R_j(s) - \{s'\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $s \in R_h^{CC}(N_i, s)$, então $O_h^{CC}(j, s) = s$ e $K_j(s) \geq K_j(O_{h-1}^{CC}(i, s')) = K_j(G_{h-1}(i, s')), \forall s' \in R_j(s)$. Logo, $G_h(j, s) = s$.

Se $s \notin R_h^{CC}(N_i, s)$, $s_1, s_2 \in R_h^{CC}(N_i, s)$ e $s_1 \neq s_2$, então $O_{h-1}^{CC}(i, s_1) = O_{h-1}^{CC}(i, s_2) = G_{h-1}(i, s_1) = G_{h-1}(i, s_2)$, em que a primeira igualdade decorre da definição de $R_h^{CC}(N_i, s)$ e a segunda e a terceira do passo indutivo. Logo, o conjunto $\{K_i(O_{h-1}^{CC}(i, s')) : s' \in R_h^{CC}(N_i, s)\}$ é unitário. Além disso, $s \notin R_h^{CC}(N_i, s)$ e $O_{h-1}^{CC}(i, Q_h^{CC}(j, s)) = G_{h-1}(i, Q_h^{CC}(j, s)) = G_{h-1}(i, M_h(j, s))$, em que a primeira igualdade decorre do passo indutivo e a segunda decorre do fato de que $Q_h^{CC}(j, s) \in R_h^{CC}(N_i, s)$ e que qualquer estado $s^* \in R_h^{CC}(N_i, s)$ pertence ao conjunto $\operatorname{argmax}\{K_j(O_{h-1}^{CC}(i, s')) : s' \in R_j(s)\} = \operatorname{argmax}\{K_j(G_{h-1}(i, s')) : s' \in R_j(s)\}$. Logo, $O_h^{CC}(j, s) = O_{h-1}^{CC}(i, Q_h^{CC}(j, s)) = G_{h-1}(i, M_h(j, s)) = G_h(j, s)$. ■

O Teorema 5.4.2 estabelece que a estabilidade de movimento limitada alternativa, L_h^{CC} , é uma generalização da estabilidade de movimento limitada proposta em (KILGOUR, 1985), para conflitos com múltiplos tomadores de decisão.

Teorema 5.4.2 *Seja um conflito envolvendo dois decisores. O estado s é L_h estável para o DM i se, e somente se, s é L_h^{CC} estável para o DM i .*

Prova: Inicialmente note que, pelo Lema 5.4.1, temos que $G_h(i, s) = O_h^{CC}(i, s)$. Daí, o estado s é L_h estável para o DM i se, e somente, se $G_h(i, s) = s$. O que ocorre se, e somente se, $O_h^{CC}(i, s) = s$, ou seja, se, e somente se, s for L_h^{CC} estável para o DM i . ■

5.4.2 As relações entre o conceito de estabilidade L_h^{CC} e outros conceitos de estabilidade do GMCR

O Teorema 5.4.3 estabelece a equivalência entre a estabilidade L_1^{CC} e a estabilidade de Nash.

Teorema 5.4.3 *Seja $s \in S$ e $i \in N$. O estado s é NASH estável para o DM i se, e somente se, s é L_1^{CC} estável para o DM i .*

Prova: Primeiro, temos que se s é NASH estável para o DM i , então ou $R_i(s) = \emptyset$, o que encerraria a prova, ou $R_i(s) \neq \emptyset$ e $R_i^+(s) = \emptyset$, logo $\forall s' \in R_i(s)$, temos que $s \succeq_i s'$. Assim, $O_1^{CC}(i, s) = s$, o que implica que o estado s é L_1^{CC} estável para o DM i .

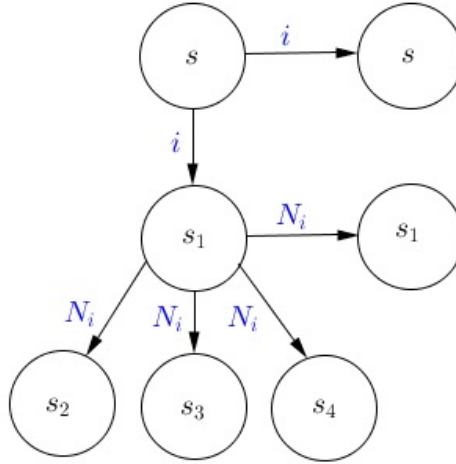
Agora, suponha que o estado s seja L_1^{CC} estável para o DM i . Também temos duas possibilidades, ou $R_i(s) = \emptyset$, o que, também, encerraria a prova, ou $R_i(s) \neq \emptyset$, mas $O_1^{CC}(i, s) = s$, daí como o DM i sempre busca maximizar seu ganho, então $\forall s' \in R_i(s)$, segue $s \succeq_i s'$, ou seja $R_i^+(s) = \emptyset$, portanto s é NASH estável para o DM i . ■

Em (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993), é estabelecido um resultado garantindo que os conceitos L_h (Casos 1 e 2) implicam na estabilidade SEQ. Porém, através do Exemplo 5.4.4, mostramos que este resultado não é válido se considerarmos a noção de estabilidade de L_h^{CC} .

Exemplo 5.4.4 *Considere um conflito hipotético envolvendo três DMs, digamos i, j e k , e cinco estados $\{s, s_1, s_2, s_3, s_4\}$, de modo que os conjuntos de acessibilidades dos DMs, i, j e k sejam dados, respectivamente, por: $R_i(s) = \{s_1\}$, $R_j(s_1) = \{s_2\}$, $R_k(s_2) = \{s_3, s_4\}$. Ademais, considere que os conjuntos de acessibilidades de todos os DMs em todos os estados que não foram declarados acima são iguais ao conjunto vazio. Suponha ainda que as relações de preferências dos DMs i, j e k sejam, respectivamente: $s_1 \succ_i s \succ_i s_2 \succ_i s_3 \succ_i s_4$; $s_3 \succ_j s \succ_j s_1 \succ_j s_2 \succ_j s_4$ e $s_1 \succ_k s_3 \succ_k s_2 \succ_k s_4 \succ_k s$.*

Observe que o estado s é L_2^{CC} estável para o DM i , porque se ele mover o conflito do estado s para o estado s_1 o DM j pode mover o conflito para o estado s_2 , e então o DM k levará o conflito para o estado s_3 , então o estado final será s_3 que não é um estado Pareto-dominado para a coalizão dos oponentes do DM i . Assim, como $s \succ_i s_3$, segue que o DM i prefere permanecer em s . Por outro lado, como $R_j^+(s_1) = R_k^+(s_1) = \emptyset$, segue que $R_{N_i}^+(s_1) = \emptyset$ e, conseqüentemente, s é não SEQ estável para o DM i , e conseqüentemente, também não é SSEQ estável para o DM i .

Figura 16 – Árvore de acessibilidades para os DMs no conflito descrito no Exemplo 5.4.4.



Fonte: O autor (2023).

O Lema 5.4.5 fornece resultados importantes para estabelecermos uma relação entre os conceitos de estabilidade L_h^{CC} e Maximin_h .

Lema 5.4.5 *Seja um conflito envolvendo n decisores, com $n \geq 2$. Seja $s \in S$, $i \in N$ e h um inteiro positivo qualquer. Temos que*

$$K_i(O_h^{CC}(i, s)) \geq K_i(G_h^i(i, s))$$

e

$$K_i(O_h^{CC}(N_i, s)) \geq K_i(G_h^i(N_i, s)).$$

Prova: Se $h = 1$, segue, por definição das funções $G_h^i(i, s)$ e $O_h^{CC}(i, s)$, que $G_1^i(i, s) = O_1^{CC}(i, s)$, pois o DM i buscará em ambas as situações ir para o melhor estado em $\{s\} \cup R_i(s)$ para ele. Logo:

$$K_i(O_1^{CC}(i, s)) = K_i(G_1^i(i, s))$$

Pela definição de $G_h^i(N_i, s)$, temos que o estado $G_h^i(N_i, s)$ é o estado que minimiza a utilidade do decisor focal, dentre os estados acessíveis para a coalizão de seus oponentes, $\{s\} \cup R_{N_i}(s)$. Portanto como $O_1^{CC}(N_i, s) \in \{s\} \cup R_{N_i}(s)$, temos que:

$$K_i(O_1^{CC}(N_i, s)) \geq K_i(G_1^i(N_i, s)).$$

Assim, assumiremos como hipótese indutiva que,

$$K_i(O_{h-1}^{CC}(i, s)) \geq K_i(G_{h-1}^i(i, s))$$

e

$$K_i(O_{h-1}^{CC}(N_i, s)) \geq K_i(G_{h-1}^i(N_i, s)).$$

Por um lado, a definição do estado $G_h^i(N_i, s)$ o apresenta como o estado que o DM i antecipa, com horizonte h que lhe dá o pior resultado, considerando que o conflito segue de acordo com o paradigma maximin. Logo,

$$\begin{aligned} K_i(G_h^i(N_i, s)) &= \min\{\{K_i(s)\} \cup \{K_i(G_{h-1}^i(i, s_1)) : s_1 \in R_{N_i}(s)\}\} \\ &\leq \min\{\{K_i(s)\} \cup \{K_i(O_{h-1}^{CC}(i, s_1)) : s_1 \in R_{N_i}(s)\}\} \\ &\leq \min\{\{K_i(s)\} \cup \{K_i(O_{h-1}^{CC}(i, s_1)) : s_1 \in R_h^{CC}(N_i, s)\}\} \\ &= K_i(O_h^{CC}(N_i, s)) \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade vem da hipótese de indução e a segunda do fato de que $R_h^{CC}(N_i, s) \subseteq \{s\} \cup R_{N_i}(s)$.

Por outro lado, como $G_h^i(i, s)$ é o estado que o DM i antecipa, com horizonte h que lhe dá o melhor resultado, considerando que o conflito segue de acordo com o paradigma maximin. Logo,

$$\begin{aligned} K_i(G_h^i(i, s)) &= \max\{\{K_i(s)\} \cup \{K_i(G_{h-1}^i(N_i, s_1)) : s_1 \in R_i(s)\}\} \\ &\leq \max\{\{K_i(s)\} \cup \{K_i(O_{h-1}^{CC}(N_i, s_1)) : s_1 \in R_i(s)\}\} \\ &= K_i(O_h^{CC}(i, s)), \end{aligned}$$

onde a desigualdade decorre do passo indutivo e a segunda igualdade da definição de $O_h^{CC}(i, s)$.

■

O Teorema 5.4.6 estabelece que a estabilidade L_h^{CC} implica a estabilidade Maximin_h .

Teorema 5.4.6 *Seja um conflito envolvendo n DMs, com $n \geq 2$. Seja $s \in S$ e h um inteiro positivo. Se o estado s é L_h^{CC} estável para o DM i , então s é Maximin_h estável para o DM i .*

Prova: Como s é L_h^{CC} estável, para o DM i , temos que $O_h^{CC}(i, s) = s$, mas pelo Lema 5.4.5 segue que $K_i(O_h^{CC}(i, s)) = K_i(s) \geq K_i(G_h^i(i, s))$, mas como $G_h^i(i, s)$ maximiza entre per-

manecer no estado s ou se mover para um estado acessível, temos que $K_i(s) = K_i(G_h^i(i, s))$. Portanto o estado s é Maximin_h estável para o DM i . ■

Daí, os resultados a seguir são imediatos, dada a relação entre os conceitos L_h^{CC} e L_h para conflitos bilaterais e a relação entre a estabilidade Maximin_h e os conceitos de solução GMR, SMR e $\overline{MR}_r^{new}$ (veja (RÊGO; VIEIRA, 2020c)).

Corolário 5.4.7 *Seja $N = \{i, j\}$ e $s \in S$. Se o estado s é L_h estável para o DM i , então o estado s é Maximin_h estável para o DM i .*

Corolário 5.4.8 *Seja um conflito envolvendo n DMs, $n \in N$, com $n \geq 2$, e $s \in S$:*

- (a) *Se s é L_2^{CC} estável, para o DM i , então s é GMR estável para o DM i ;*
- (b) *Se s é L_3^{CC} estável, para o DM i , então s é SMR estável para o DM i ;*
- (c) *Para $h = 2r$, se o estado s é L_h^{CC} estável para o DM i , então s é $\overline{MR}_r^{new}$ estável para o DM i .*

Consideramos agora um caso particular em que os conceitos de L_h^{CC} e Maximin_h são equivalentes. Como mostraremos a seguir, essa equivalência ocorre quando todos os oponentes do DM focal têm preferências completamente opostas às preferências do DM focal. Formalmente, duas relações de preferências, $\succ_i$ e $\succ_j$, são completamente opostas se $s \succ_i s'$ se e somente se $s' \succ_j s$. Intuitivamente, nessa situação particular como todos os oponentes têm a mesma relação de preferência, o único estado que não é Pareto-dominado é aquele que maximiza as preferências dos oponentes e, conseqüentemente, minimiza as preferências do DM focal. Para provar isso, primeiro consideramos o Lema 5.4.9 que estabelece uma equivalência entre os estados antecipados em ambos os conceitos de estabilidade.

Lema 5.4.9 *Considere um conflito envolvendo $n \geq 2$ DMs e que todos os DMs em N_i tenham preferências completamente opostas às preferências do DM i . Seja $s \in S$ e h um inteiro positivo. Segue que $G_h^i(i, s) = O_h^{CC}(i, s)$ e $G_h^i(N_i, s) = O_h^{CC}(N_i, s)$.*

Prova: Note primeiro que, por definição, $G_0^i(\cdot, s) = O_0^{CC}(\cdot, s)$, $\forall s \in S$. Agora, assumimos como hipótese de indução que $G_{h-1}^i(i, s) = O_{h-1}^{CC}(i, s)$ e $G_{h-1}^i(N_i, s) = O_{h-1}^{CC}(N_i, s)$, $\forall s \in S$. Assim, segue que $R_h(N_i, s) = \{s\} \cup \{G_{h-1}^i(i, s') : s' \in R_{N_i}(s)\}$. Portanto, o estado $G_h^i(N_i, s)$ pode ser definido em função do conjunto $R_h(N_i, s)$, como segue:

$$K_i(G_h^i(N_i, s)) = \min\{K_i(s') : s' \in R_h(N_i, s)\}.$$

Consideremos dois casos. Primeiro, se $R_i(s) = \emptyset$, então $G_h^i(i, s) = O_h^{CC}(i, s) = s$. Em segundo lugar, se $R_i(s) \neq \emptyset$, então temos que $\max\{K_i(O_{h-1}^{CC}(N_i, s')) : s' \in R_i(s)\} = \max\{K_i(G_{h-1}^i(N_i, s')) : s' \in R_i(s)\}$ e, conseqüentemente, segue que:

$$O_{h-1}^{CC}(N_i, Q_h^{CC}(i, s)) = G_{h-1}^i(N_i, M_h^i(i, s))$$

e

$$A_h^{CC}(i, s) = K_i(O_{h-1}^{CC}(N_i, Q_h^{CC}(i, s))) = K_i(G_{h-1}^i(N_i, M_h^i(i, s))) = A_h^i(i, s).$$

Portanto, $G_h^i(i, s) = O_h^{CC}(i, s)$

Em seguida, se $R_{N_i}(s) = \emptyset$, temos que $O_h^{CC}(N_i, s) = G_h^i(N_i, s) = s$. Por outro lado, se $R_{N_i}(s) \neq \emptyset$, como as preferências dos oponentes do DM i são completamente opostas às dele, elas são iguais para qualquer par de DMs $j, k \in N_i$. Assim, o único estado não Pareto dominado no conjunto $R_h(N_i, s)$ é aquele que maximiza a preferência dos oponentes de DM i neste conjunto. Desta forma, temos:

$$R_h^{CC}(N_i, s) = \begin{cases} \{s\} \cup \{s' \in R_{N_i}(s) : O_{h-1}^{CC}(i, s') = s\} \text{ se } K_j(s) \geq K_j(O_{h-1}^{CC}(i, s')), \\ \forall s' \in R_{N_i}(s) \text{ e } j \in N_i, \\ \{s' \in R_{N_i}(s) : O_{h-1}^{CC}(i, s') \text{ Pareto domina para } N_i \text{ todos outros estados do} \\ \text{conjunto } R_h(N_i, s)\}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Se $s \in R_h^{CC}(N_i, s)$, então $O_h^{CC}(j, s) = s$ e $K_j(s) \geq K_j(O_{h-1}^{CC}(i, s')) = K_j(G_{h-1}^i(i, s'))$, $\forall s' \in R_{N_i}(s)$. Logo, $G_h(j, s) = s$.

Agora, se $s \notin R_h^{CC}(N_i, s)$, $s_1, s_2 \in R_h^{CC}(N_i, s)$ e $s_1 \neq s_2$, então $O_{h-1}^{CC}(i, s_1) = O_{h-1}^{CC}(i, s_2) = G_{h-1}^i(i, s_1) = G_{h-1}^i(i, s_2)$, onde a primeira igualdade decorre da definição de $R_h^{CC}(N_i, s)$ e do segundo e o terceiro do passo indutivo. Portanto, o conjunto $\{K_i(O_{h-1}^{CC}(i, s')) : s' \in R_h^{CC}(N_i, s)\}$ é unitário. Além disso, $s \notin R_h^{CC}(N_i, s)$ e $O_{h-1}^{CC}(i, Q_h^{CC}(N_i, s)) = G_{h-1}^i(i, Q_h^{CC}(N_i, s)) = G_{h-1}^i(i, M_h^i(N_i, s))$, onde a primeira igualdade decorre do passo indutivo e a segunda decorre do fato de que $Q_h^{CC}(N_i, s) \in R_h^{CC}(i, s)$ e que qualquer estado $s^* \in R_h^{CC}(N_i, s)$ pertence ao conjunto $\argmax\{K_j(O_{h-1}^{CC}(i, s')) : s' \in R_{N_i}(s)\} = \argmax\{K_j(G_{h-1}^i(i, s')) : s' \in R_{N_i}(s)\}$

, para $j \in N_i$. Observe também que como as preferências dos oponentes do DM i são opostas a dele, $\operatorname{argmax}\{K_j(G_{h-1}^i(i, s')) : s' \in R_{N_i}(s)\} = \operatorname{argmin}\{K_i(G_{h-1}^i(i, s')) : s' \in R_{N_i}(s)\}$. Portanto, temos que $O_h^{CC}(N_i, s) = O_{h-1}^{CC}(i, Q_h^{CC}(N_i, s)) = G_{h-1}^i(i, M_h^i(N_i, s)) = G_h^i(N_i, s)$.

■

Teorema 5.4.10 *Considere um conflito envolvendo $n \geq 2$ DMs e que todos os oponentes do DM i tenham preferências completamente opostas às dele. Seja $s \in S$ e h um inteiro positivo. O estado s é L_h^{CC} estável para DM i se e somente se s é $\operatorname{Maximin}_h$ estável para DM i .*

Prova: Primeiro, note que o Teorema 5.4.6 garante que a estabilidade L_h^{CC} implica a estabilidade $\operatorname{Maximin}_h$. Agora, pelo Lema 5.4.9, temos que $G_h^i(i, s) = O_h^{CC}(i, s)$. Assim, como s é $\operatorname{Maximin}_h$ estável para DM i , temos que $G_h^i(i, s) = s$ e, conseqüentemente, $G_h^i(i, s) = O_h^{CC}(i, s) = s$. Portanto, o estado s é L_h^{CC} estável para DM i . ■

5.5 ESTABILIDADE MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVA COM COALIZÃO INDIVIDUALISTA, L_h^{CI} .

É possível que dentre os DMs que fazem parte da coalizão de oponentes do DM focal, existam DMs que não concordariam em se comportar de modo a atingir, como estado final do conflito, um estado que é não Pareto dominado no conjunto $R_{N_i}(s)$, pois pode acontecer de estes possíveis estados finais do conflito, não Pareto dominados, sejam piores do que o estado de *status quo* para algum dos DMs pertencentes a coalizão de oponentes. Assim, propomos uma segunda generalização para a estabilidade Movimento Limitado proposta por (KILGOUR, 1985), na qual o DM focal, também, é conservador no sentido que ele irá considerar que os oponentes irão se mover para o pior estado possível que pode ser alcançado, mas diferente da generalização anterior, tal estado não é um dos estados não Pareto dominados, mas um dos que Pareto dominam para a coalizão N_i o estado do qual a coalizão se move inicialmente.

Para apresentar esta outra generalização, definiremos o estado $O_h^{CI}(i, s)$ como o estado antecipado pelo DM i quando ele sai do estado s , o horizonte de conflito é h e os DMs se comportam de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CI} , que será definido formalmente nas Equações 5.3 e 5.4. Seja $R'_h(N_i, s) = \{s\} \cup \{O_{h-1}^{CI}(i, s^{**}) : s^{**} \in R_{N_i}(s) \text{ e } O_{h-1}^{CI}(i, s^{**}) \succ_j s, \forall j \in N_i\}$ o conjunto formado pelo estado s e pelos estados finais antecipados do conflito que Pareto dominam o estado s para a coalizão dos oponentes, quando algum oponente de

DM i sai do estado s e o horizonte de conflito é h . Então considere:

$$R_h^{CI}(N_i, s) = \begin{cases} \{s\}, \text{ se } s \text{ não for Pareto dominado no conjunto } R'_h(N_i, s), \text{ para a coalizão } N_i. \\ \{s' \in R_{N_i}(s) : O_{h-1}^{CI}(i, s') \text{ é não Pareto dominado no conjunto } R'_h(N_i, s), \\ \text{para a coalizão } N_i\}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Dessa forma, os estados pertencentes a $R_h^{CI}(N_i, s)$ são todos os estados que podem se caracterizar como o estado final de uma sequência legal de movimentos cujo estado antecipado a partir deles, Pareto domina algum estado dentro do conjunto $R'_h(N_i, s)$. Assim, definimos o estado antecipado $O_h^{CI}(i, s)$, em que, por convenção, $O_0^{CI}(\cdot, s) = s$, da seguinte maneira:

$$O_h^{CI}(i, s) = \begin{cases} s, \text{ se } R_i(s) = \emptyset \\ s, \text{ se } K_i(s) \geq A_h^{CI}(i, s) \\ O_{h-1}^{CI}(N_i, Q_h^{CI}(i, s)), \text{ caso contrário,} \end{cases} \quad (5.3)$$

em que $Q_h^{CI}(i, s)$ é algum estado $s^* \in R_i(s)$ tal que $K_i(O_{h-1}^{CI}(N_i, s^*)) = \max\{K_i(O_{h-1}^{CI}(N_i, s')) : s' \in R_i(s)\}$ e $A_h^{CI}(i, s) = K_i(O_{h-1}^{CI}(N_i, Q_h^{CI}(i, s)))$. Por sua vez, $O_h^{CI}(N_i, s)$ é dado por:

$$O_h^{CI}(N_i, s) = \begin{cases} s, \text{ se } R_{N_i}(s) = \emptyset \text{ ou } R_h^{CI}(N_i, s) = \{s\} \\ s, \text{ se } K_i(s) \leq A_h^{CI}(N_i, s) \\ O_{h-1}^{CI}(i, Q_h^{CI}(N_i, s)), \text{ caso contrário,} \end{cases} \quad (5.4)$$

em que $Q_h^{CI}(N_i, s)$ é algum estado $s^* \in R_h^{CI}(N_i, s)$ tal que $K_i(O_{h-1}^{CI}(i, s^*)) = \min\{K_i(O_{h-1}^{CI}(i, s')) : s' \in R_h^{CI}(N_i, s)\}$ e $A_h^{CI}(N_i, s) = K_i(O_{h-1}^{CI}(i, Q_h^{CI}(N_i, s)))$.

Na Definição 5.5.1, apresentamos a estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão Individualista L_h^{CI} , para conflitos envolvendo múltiplos decisores.

Definição 5.5.1 *Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é L_h^{CI} estável para o DM i se, e somente se, $O_h^{CI}(i, s) = s$.*

Retomando o conflito descrito no Exemplo 5.3.2, e o analisando de acordo com a noção da estabilidade L_3^{CI} , a partir do estado s para DM i . Temos que a Figura 15, também, ilustra como o conflito pode evoluir de acordo com a estabilidade de L_3^{CI} . Note que no estado s , DM i precisa decidir se permanece no estado s ou se move para o estado s_1 . Portanto, é necessário que ele determine $O_2^{CI}(N_i, s_1)$. O DM i acredita que a partir do estado s_1 a coalizão de

oponentes, N_i , escolherá encerrar o conflito no estado s_1 , pois $R_2^{CI}(i, s_1) = \{s_1\}$ pois, s_1 é não Pareto dominado, em $R'_2(N_i, s)$. Logo, no estado s , o DM i não tem incentivo para mover o conflito do estado s para o estado s_1 , ou seja, $O_3^{CC}(i, s) = s$, pois $K_i(s) > K_i(s_1)$. Então temos que o estado s é L_3^{CI} estável para DM i .

5.6 ALGUNS RESULTADOS A RESPEITO DA ESTABILIDADE MOVIMENTO LIMITADO ALTERNATIVA COM COALIZÃO INDIVIDUALISTA

Nesta seção, apresentamos alguns resultados que estabelecem relações do conceito de estabilidade L_h^{CI} com outros conceitos de estabilidade do GMCR.

5.6.1 A relação entre os conceitos de estabilidade L_h e L_h^{CI} em conflitos bilaterais

Os lemas 5.6.1 e 5.6.2 estabelecem as equivalência entre o estados antecipados relativos ao conceito L_h^{CI} , para conflitos bilaterais com horizonte h , respectivamente, com os estados antecipados relativos aos conceitos L_h^{CI} e L_h , para conflitos bilaterais, com horizonte h . Tais resultados serão usados para demonstrar que, assim como o conceito da estabilidade L_h^{CC} , o conceito L_h^{CI} generaliza o conceito L_h , no caso de conflito bilaterais.

Lema 5.6.1 *Seja $N = \{i, j\}$, $s \in S$ e seja h um inteiro positivo. Temos que, $R_h^{CC}(j, s) = R_h^{CI}(j, s)$, $O_h^{CC}(i, s) = O_h^{CI}(i, s)$ e $O_h^{CC}(j, s) = O_h^{CI}(j, s)$.*

Prova: Note que, por definição, $O_0^{CC}(\cdot, s) = O_0^{CI}(\cdot, s)$. Agora, note que se s for o melhor estado, para o DM j em $R_1(j, s)$, então s é o único estado no conjunto $R'_1(j, s)$ e $R_1^{CC}(j, s) = \{s\}$, pois todos os outros estados antecipados são dominados pelo estado s , logo pela definição de $R_1^{CI}(j, s)$, temos, $R_1^{CC}(j, s) = R_1^{CI}(j, s)$.

Agora suponha que existe $s^* \in R_1(j, s)$, tal que $s^* \succ_j s$. Como o conjunto $R_1(j, s)$ é formado pela união de $\{s\}$ com o conjunto de todos os estados que são acessíveis, a partir de s , para o decisor j , temos que:

$$\begin{aligned}
 R_1(j, s) &= \{s\} \cup \{O_0^{CC}(i, s') : s' \in R_j(s)\} \\
 &= \{s\} \cup \{O_0^{CI}(i, s') : s' \in R_j(s)\} \\
 &\supset \{s\} \cup \{O_0^{CI}(i, s') : s' \in R_j(s) \text{ e } O_0^{CI}(i, s') \succ_j s, \forall j \in N_i\} \\
 &= R'_1(j, s)
 \end{aligned}$$

Ou seja, $R'_1(j, s) \subset R_1(j, s)$, pois os estados de $R'_1(j, s)$ são aqueles estados finais antecipados pelo DM j a partir do estado s , que são melhores que o estado s para ele.

Note que, por um lado os estados de $R_1^{CC}(j, s)$ são aqueles acessíveis para o DM j que não são Pareto dominados para o DM j , dentre os estados de $R_1(j, s)$, mas como $N_i = \{j\}$ e as preferências do DM j são estritamente ordenadas, o único estado não Pareto dominado, para o DM j , em $R_1(j, s)$ é aquele que maximiza as preferências do DM j . Por outro lado, de maneira semelhante, os estados de $R_1^{CI}(j, s)$ são aqueles acessíveis para o DM j que não são Pareto dominados, para o DM j , no conjunto $R'_1(j, s)$, mas também pelo fato de, $N_i = \{j\}$ e as preferências do DM j serem estritamente ordenadas, o único estado que não é Pareto dominado, para o DM j , no conjunto $R'_1(j, s)$ é aquele que maximiza as preferências do DM j .

Suponha que $s^\# \in R_1^{CC}(j, s)$. Como existe $s^* \in R_1(j, s)$, tal que $s^* \succ_j s$ e $s^\#$ é o melhor estado em $R_1(j, s)$ para o DM j temos que $s^\# \succ_j s^* \succ_j s$. Logo, $s^\# \in R'_1(j, s) \subset R_1(j, s)$ e, consequentemente, $s^\# \in R_1^{CI}(j, s)$. Por outro lado, suponha que $s^\# \in R_1^{CI}(j, s)$. Então, $s^\#$ é o melhor estado para o DM j em $R'_1(j, s)$. Assuma, por contradição, que $s^\# \notin R_1^{CC}(j, s)$. Então, existe $s^{**} \in R_1(j, s) - R'_1(j, s)$ tal que $s^{**} \succ_j s^\#$. Porém, como $s^\# \in R'_1(j, s)$ e $s^{**} \notin R'_1(j, s)$, temos que $s^\# \succ_j s \succ_j s^{**}$, um absurdo pois viola a assimetria de $\succ_j$.

Daí, suponha, como hipótese de indução, que $R_{h-1}^{CC}(j, s) = R_{h-1}^{CI}(j, s)$, $O_{h-1}^{CC}(i, s) = O_{h-1}^{CI}(i, s)$ e $O_{h-1}^{CC}(j, s) = O_{h-1}^{CI}(j, s)$. Note que se s for o melhor estado, para o DM j em $R_h(j, s)$, então s é o único estado no conjunto $R'_h(j, s)$ e $R_h^{CC}(j, s) = \{s\}$, pois todos os outros estados antecipados são Pareto dominados pelo estado s , para o DM j . Logo pela definição de $R_h^{CI}(j, s)$, temos, $R_h^{CC}(j, s) = R_h^{CI}(j, s)$.

Agora suponha que existe $s^* \in R_h(j, s)$, tal que $s^* \succ_j s$. Como o conjunto $R_h(j, s)$ é formado pela união de $\{s\}$ com o conjunto de todos os estados finais antecipados, a partir de s , para o DM j , temos que:

$$\begin{aligned} R_h(N_i, s) &= \{s\} \cup \{O_{h-1}^{CC}(i, s') : s' \in R_{N_i}(s)\} \\ &= \{s\} \cup \{O_{h-1}^{CI}(i, s') : s' \in R_{N_i}(s)\} \\ &\supset \{s\} \cup \{O_{h-1}^{CI}(i, s') : s' \in R_{N_i}(s) \text{ e } O_{h-1}^{CI}(i, s') \succ_j s, \forall j \in N_i\} \\ &= R'_h(N_i, s) \end{aligned}$$

Ou seja, $R'_h(j, s) \subset R_h(j, s)$, pois os estados de $R'_h(j, s)$ são aqueles estados, que podem ser um estado final do conflito antecipados pelo DM j a partir do estado s , que são melhores que o estado s para ele.

Observe que, por um lado, os estados de $R_h^{CC}(j, s)$ são aqueles acessíveis para o DM j que não são Pareto dominados, para o DM j , dentre os estados de $R_h(j, s)$, mas como $N_i = \{j\}$ as preferências do DM j são estritamente ordenadas, o único estado não Pareto dominado em $R_h(j, s)$ é aquele que maximiza as preferências do DM j . Por outro lado, de maneira semelhante, os estados de $R_h^{CI}(j, s)$ são aqueles acessíveis para o DM j , a partir de uma sequência legal de movimentos, que não são Pareto dominados no conjunto $R'_h(j, s)$, para o DM j . Mas também pelo fato de, $N_i = \{j\}$ e as preferências do DM j serem estritamente ordenadas, o único estado que não é Pareto dominado no conjunto $R'_h(j, s)$, para o DM j , é aquele que maximiza suas preferências.

Suponha que $s^\# \in R_h^{CC}(j, s)$. Como existe $s^* \in R_h(j, s)$, tal que $s^* \succ_j s$ e $s^\#$ é o melhor estado em $R_h(j, s)$ para o DM j temos que $s^\# \succ_j s^* \succ_j s$. Logo, $s^\# \in R'_h(j, s) \subset R_h(j, s)$ e, conseqüentemente, $s^\# \in R_h^{CI}(j, s)$. Por outro lado, suponha que $s^\# \in R_h^{CI}(j, s)$. Então, $s^\#$ é o melhor estado para o DM j em $R'_h(j, s)$. Assuma, por contradição, que $s^\# \notin R_h^{CC}(j, s)$. Então, existe $s^{**} \in R_h(j, s) - R'_h(j, s)$ tal que $s^{**} \succ_j s^\#$. Porém, como $s^\# \in R'_h(j, s)$ e $s^{**} \notin R'_h(j, s)$, temos que $s^\# \succ_j s \succ_j s^{**}$, um absurdo pois viola a assimetria de $\succ_j$. ■

Lema 5.6.2 *Seja $N = \{i, j\}$, $s \in S$ e seja h um inteiro positivo. Temos que, $G_h(i, s) = O_h^{CI}(i, s)$ e $G_h(j, s) = O_h^{CI}(j, s)$.*

Prova: Pelo Lema 5.4.1, $G_h(i, s) = O_h^{CC}(i, s)$ e $G_h(j, s) = O_h^{CC}(j, s)$, já pelo Lema 5.6.1 temos $O_h^{CC}(i, s) = O_h^{CI}(i, s)$ e $O_h^{CC}(N_i, s) = O_h^{CI}(N_i, s)$, portanto $G_h(i, s) = O_h^{CI}(i, s)$ e $G_h(j, s) = O_h^{CI}(j, s)$. ■

O Teorema 5.6.3 estabelece que a estabilidade de movimento limitada alternativa, L_h^{CI} , é uma generalização da estabilidade L_h , para conflitos com múltiplos tomadores de decisão.

Teorema 5.6.3 *Seja um conflito envolvendo dois decisores. O estado s é L_h estável para o DM i se, e somente se, s é L_h^{CI} estável para o DM i .*

Prova: Inicialmente note que, pelo Lema 5.6.2, temos que $G_h(i, s) = O_h^{CI}(i, s)$. Daí, o estado s é L_h estável para o DM i se, e somente, se $G_h(i, s) = s$. O que ocorre se, e somente se, $O_h^{CI}(i, s) = s$, ou seja, se, e somente se, s for L_h^{CI} estável para o DM i . ■

5.6.2 As relações entre o conceito da estabilidade L_h^{CI} e outros conceitos de estabilidade em conflitos multilaterais.

Nesta seção apresentamos algumas relações entre o conceito da estabilidade L_h^{CI} e outros conceitos de estabilidades.

O Teorema 5.6.4 estabelece a equivalência entre a estabilidade L_h^{CI} e a estabilidade de Nash.

Teorema 5.6.4 *Seja $s \in S$ e $i \in N$. O estado s é NASH estável para o DM i se, e somente se, s é L_1^{CI} estável para o DM i .*

Prova: Análoga a prova do Teorema 5.4.3. ■

O Lema 5.6.5 fornece resultados importantes para estabelecermos uma relação entre os conceitos de estabilidade L_h^{CI} e Maximin_h .

Lema 5.6.5 *Seja um conflito envolvendo n decisores, com $n \geq 2$. Seja $s \in S$, $i \in N$ e h um inteiro positivo qualquer. Temos que*

$$K_i(O_h^{CI}(i, s)) \geq K_i(G_h^i(i, s))$$

e

$$K_i(O_h^{CI}(N_i, s)) \geq K_i(G_h^i(N_i, s)).$$

Prova: Semelhante a prova do Lema 5.4.5 trocando apenas O_h^{CC} por O_h^{CI} e $R_h^{CC}(N_i, s)$ por $R_h^{CI}(N_i, s)$. ■

O Teorema 5.6.6 estabelece que a estabilidade L_h^{CI} implica a estabilidade Maximin_h .

Teorema 5.6.6 *Seja um conflito envolvendo n DMs, com $n \geq 2$. Seja $s \in S$ e h um inteiro positivo. Se o estado s é L_h^{CI} estável para o DM i , então s é Maximin_h estável para o DM i .*

Prova: Como s é L_h^{CI} estável, para o DM i , temos que $O_h^{CI}(i, s) = s$, mas pelo Lema 5.6.5 segue que $K_i(O_h^{CI}(i, s)) = K_i(s) \geq K_i(G_h^i(i, s))$, mas como $G_h^i(i, s)$ maximiza entre permanecer no estado s ou se mover para um estado acessível, temos que $K_i(s) = K_i(G_h^i(i, s))$. Portanto o estado s é Maximin_h estável para o DM i . ■

Daí, temos que o resultado a seguir pode ser deduzido de maneira imediata.

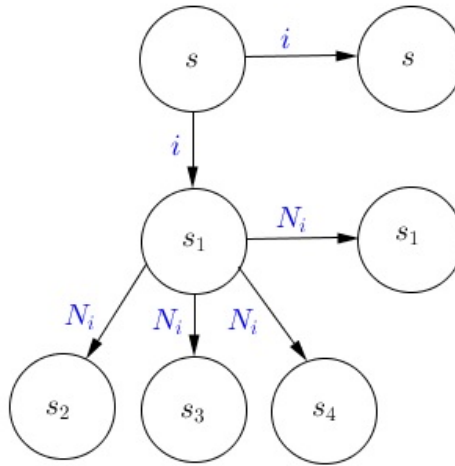
Corolário 5.6.7 *Seja um conflito envolvendo n DMs, $n \in N$, com $n \geq 2$, e $s \in S$:*

- (a) Se s é L_2^{CI} estável, para o DM i , então s é GMR estável para o DM i ;
- (b) Se s é L_3^{CI} estável, para o DM i , então s é SMR estável para o DM i ;
- (c) Para $h = 2r$, se o estado s é L_h^{CI} estável para o DM i , então s é $\overline{MR}_r^{new}$ estável para o DM i .

Assim como o que ocorre com a estabilidade L_h^{CC} , temos que a estabilidade L_h^{CI} , também, não tem relação com a estabilidade SEQ, o Exemplo 5.6.8 esclarece esta questão.

Exemplo 5.6.8 Considere um conflito hipotético com três DMs, i, j e k , e cinco estados $\{s, s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Sejam as acessibilidades dos DMs i, j e k dadas, respectivamente, por: $R_i(s) = \{s_1\}$, $R_j(s_1) = \{s_2\}$, $R_k(s_2) = \{s_3, s_4\}$. Além disso, considere que os conjuntos de acessibilidade de todos os DMs em todos os estados que não foram descritos anteriormente sejam iguais ao conjunto vazio. Considere ainda que as relações de preferência dos DMs i, j e k sejam dadas, respectivamente, por: $s_4 \succ_i s_1 \succ_i s \succ_i s_3 \succ_i s_2$; $s_3 \succ_j s_1 \succ_j s \succ_j s_2 \succ_j s_4$; $s_2 \succ_k s \succ_k s_4 \succ_k s_3 \succ_k s_1$. A Figura 17 ilustra a árvore de acessibilidades dos DMs no conflito apresentado neste exemplo.

Figura 17 – Árvore de acessibilidades para os DMs no conflito descrito no Exemplo 5.6.8



Fonte: O autor (2023).

Note que o estado s é L_2^{CI} estável para o DM i , pois se a partir do estado s ele decidir acessar o estado s_1 teremos $R_1^{CI}(N_i, s_1) = \{s_3\}$, pois o estado s_3 é o único que Pareto domina o estado s_1 , para a coalizão N_i no conjunto $R'_1(N_i, s)$, portanto $O_2^{CI}(i, s) = s_3$ e $s \succ_i s_3$. Mas, tanto $R_j^+(s_1) = \emptyset$, quanto $R_k^+(s_2) = \emptyset$, assim os DMs j e k não podem fazer movimentos de melhoria unilateral na sequência legal de movimento que se inicia no estado s_1 . Logo s não é SEQ estável para o DM i , e consequentemente, também não é SSEQ estável para o DM i .

O Lema 5.6.9, abaixo, estabelece que no caso de conflitos nos quais a coalizão de oponentes do decisor focal tem preferências iguais e totalmente opostas às dele, o estado antecipado de acordo com a noção da estabilidade Maximin_h coincide com o estado antecipado de acordo com a noção da estabilidade L_h^{CI} . Tal resultado, será utilizado na demonstração do Teorema 5.6.10.

Lema 5.6.9 *Considere um conflito envolvendo $n \geq 2$ DMs e que todos os DMs em N_i tenham preferências completamente opostas às preferências do DM i . Seja $s \in S$ e h um inteiro positivo. Segue que $G_h^i(i, s) = O_h^{CI}(i, s)$ e $G_h^i(N_i, s) = O_h^{CI}(N_i, s)$.*

Prova: Note que como as preferências de todos os DMs pertencentes a coalizão de oponentes do DM focal são iguais, podemos definir uma nova relação de preferências, $\succ_{N_i}$, para a coalizão. Assim, dados dois estados s_1^* e s_2^* , tais que $s_1^* \succ_j s_2^*$, para algum $j \in N_i$, denotaremos por $s_1^* \succ_{N_i} s_2^*$, que o estado s_1^* é preferível ao estado s_2^* para todos os DMs pertencentes a coalizão N_i .

Logo podemos considerar que a coalizão deve se comportar como se fosse um oponente único do DM i , uma vez que todos os DMs da coalizão tem interesse que o conflito atinja o melhor estado de acordo com suas preferências. Portanto, com um argumento semelhante ao dado na prova do Lema 5.6.1, podemos provar que $O_h^{CC}(i, s) = O_h^{CI}(i, s)$ e $O_h^{CC}(N_i, s) = O_h^{CI}(N_i, s)$. Já pelo Lema 5.4.9 temos que, no caso de conflitos em que todos os DMs pertencentes a coalizão de oponentes do DM focal possuem preferências iguais e opostas as do DM focal, $O_h^{CC}(i, s) = G_h^i(i, s)$ e $O_h^{CC}(N_i, s) = G_h^i(N_i, s)$. Portanto, para conflitos em que todos os DMs pertencentes a coalizão de oponentes do DM focal possuem preferências iguais e opostas as do DM focal, temos que $G_h^i(i, s) = O_h^{CI}(i, s)$ e $G_h^i(N_i, s) = O_h^{CI}(N_i, s)$. ■

O Teorema 5.6.10, abaixo, estabelece que para conflitos multilaterais, em que todos os oponentes do DM focal possuem preferências iguais e opostas as preferências do DM focal a estabilidade Maximin_h é equivalente a estabilidade L_h^{CI} .

Teorema 5.6.10 *Considere um conflito, envolvendo $n \geq 2$ DMs, no qual todos os oponentes do DM i tenham preferências completamente opostas às dele. Seja $s \in S$ e h um inteiro positivo. O estado s é L_h^{CI} estável para DM i se e somente se s é Maximin_h estável para DM i .*

Prova: A prova desse resultado é semelhante a prova apresentada no Teorema 5.4.10, substituindo apenas $O_h^{CC}(i, s)$ por $O_h^{CI}(i, s)$. ■

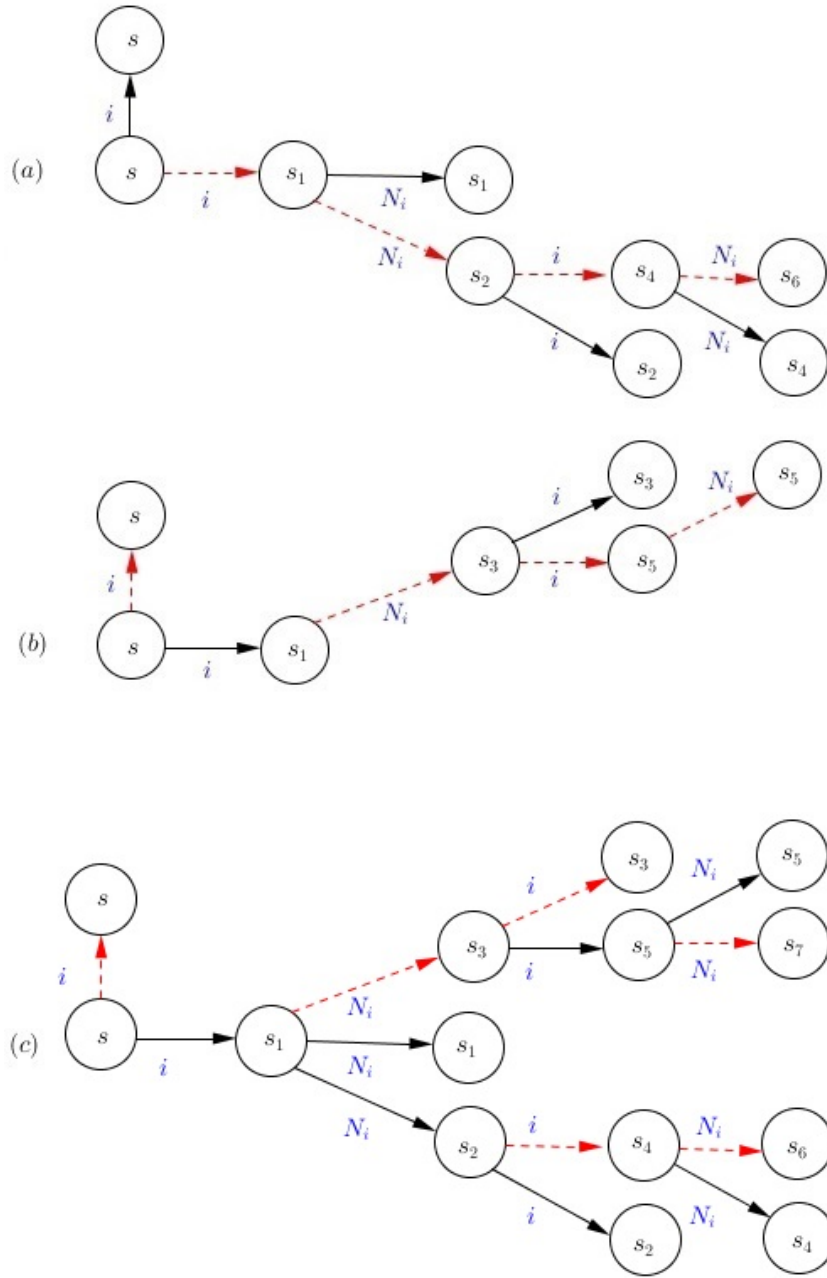
É razoável que se levante a suspeita de que $R'_h(N_i, s) \subset R_h(N_i, s)$, devido a uma restrição adicional presente no primeiro conjunto, com relação ao segundo. Essa restrição decorre do fato de que os estados que fazem parte de $R'_h(N_i, s)$ Pareto dominarem o estado s para a coalizão dos oponentes do DM focal. Mas os Exemplos 5.6.11 e 5.6.12 esclarecem que está suposição não é verdadeira, e conseqüentemente, não há relação entre os conceitos de estabilidade L_h^{CC} e L_h^{CI} . O Exemplo 5.6.11 esclarece que a estabilidade L_h^{CI} não implica a estabilidade L_h^{CC} .

Exemplo 5.6.11 Considere um conflito hipotético envolvendo três DMs, denotados por i, j e k e oito estados $s, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$. Considere, também, que os conjuntos de acessibilidades do DM i e da coalizão N_i , dos oponentes do DM i , sejam dados respectivamente, por: $R_i(s) = \{s_1\}, R_i(s_2) = \{s_4\}, R_i(s_3) = \{s_5\}, R_{N_i}(s_1) = \{s_2, s_3\}, R_{N_i}(s_4) = \{s_6\}, R_{N_i}(s_5) = \{s_7\}$, e os conjuntos de acessibilidades de todos os DMs em todos os estados que não foram declarados são iguais ao conjunto vazio. Suponha que as relações de preferências dos DMs são dadas por: $s_1 \succ_i s_4 \succ_i s_6 \succ_i s_2 \succ_i s \succ_i s_5 \succ_i s_3 \succ_i s_7; s_7 \succ_j s_5 \succ_j s_6 \succ_j s_2 \succ_j s \succ_j s_4 \succ_j s_1 \succ_j s_3; s_5 \succ_k s_1 \succ_k s_4 \succ_k s_2 \succ_k s \succ_k s_6 \succ_k s_3 \succ_k s_7$. A Figura 18 ilustra como o conflito evolui a partir do estado s com um movimento inicial do DM i , considerando as noções das estabilidades L_h^{CC}, L_h^{CI} e $Maximin_h$.

Analisando o conflito de acordo com a noção de estabilidade L_4^{CC} , observe que, caso o DM i decida acessar, a partir de s , o estado s_1 teremos $R_3(N_i, s_1) = \{s_1, s_3, s_6\}$, em que o s_3 é o estado final antecipado a partir de s_3 para a coalizão e o s_6 é o estado final antecipado a partir de s_2 para a coalizão. Como s_3 é Pareto Dominado por s_6 para a coalizão N_i , teremos $R_3^{CC}(N_i, s_1) = \{s_1, s_2\}$. Daí como $s_1 \succ_i s_6$, então $O_3^{CC}(N_i, s_1) = s_6$, portanto $O_4^{CC}(i, s) = s_6$. Finalmente, como $s_6 \succ_i s$, então o estado s não é L_4^{CC} estável para o DM i .

Por outro lado, ao analisarmos o conflito de acordo com a noção da estabilidade L_4^{CI} , caso o DM i decida acessar o estado s_1 , a partir do estado s , teremos $R'_3(N_i, s_1) = \{s_5\}$, em que o s_5 é o estado final antecipado a partir de s_3 para a coalizão. Para verificar isso note que se a coalizão se mover de s_1 para s_2 , na sequência o DM i vai querer se mover de s_2 para s_4 . Como não existe nenhum estado acessível para a coalizão a partir de s_4 que Pareto Domine s_4 , então no último movimento a coalizão deverá permanecer em s_4 . Como s_4 não Pareto Domina s_1 para a coalizão, temos que $s_4 \notin R'_3(N_i, s_1)$. Por outro lado, se a coalizão se mover de s_1 para s_3 , na sequência o DM i vai querer mover de s_3 para s_5 . Como não existe nenhum estado acessível para a coalizão a partir de s_5 que Pareto Domine s_5 , então no último movimento a coalizão deverá permanecer em s_5 . Como s_5 Pareto Domina s_1 para

Figura 18 – Análise de estabilidade L_4^{CC} , L_4^{CI} e Maximin_4 para o DM i , a partir do estado s , no conflito descrito Exemplo 5.6.11, ilustradas respectivamente, pelas árvores (a), (b) e (c).



Fonte: O autor (2023).

a coalizão, temos que $s_5 \in R'_3(N_i, s_1)$. Portanto, $R_3^{CI}(N_i, s_1) = \{s_3\}$ e $O_3^{CI}(N_i, s_1) = s_5$. Dessa maneira, $O_4^{CI}(i, s) = s_5$. Logo, o estado s é L_4^{CI} estável para o DM i , pois $s \succ_i s_5$.

Já ao analisarmos, a partir da noção da estabilidade Maximin_h teremos que, caso o conflito atinja o estado s_4 , o DM i antecipa o estado $G_1^i(s_4, N_i) = s_6$, pois $s_4 \succ_i s_6$. Assim, no estado s_2 o DM i antecipa o estado $G_2^i(i, s_2) = s_6$, pois $s_6 \succ_i s_2$. Por outro lado, caso o conflito atinja o estado s_5 , o DM i antecipa o estado $G_1^i(s_5, N_i) = s_7$, pois $s_5 \succ_i s_7$. Assim, no estado

s_3 o DM i antecipa o estado $G_2^i(i, s_3) = s_3$, pois $s_3 \succ_i s_7$. Portanto, caso o DM i decida mover o conflito do estado s para o estado s_1 , então ele antecipa o estado $G_3^i(N_i, s_1) = s_7$, pois $s_1 \succ_i s_6 \succ_i s_7$. Logo, no estado s o DM i antecipa o estado $G_4^i(i, s) = s$, pois $s \succ_i s_7$. Dessa maneira, o estado s é Maximin_4 estável para o DM i . Porém, este resultado já era esperado, uma vez que a estabilidade L_h^{CI} implica a estabilidade Maximin_h .

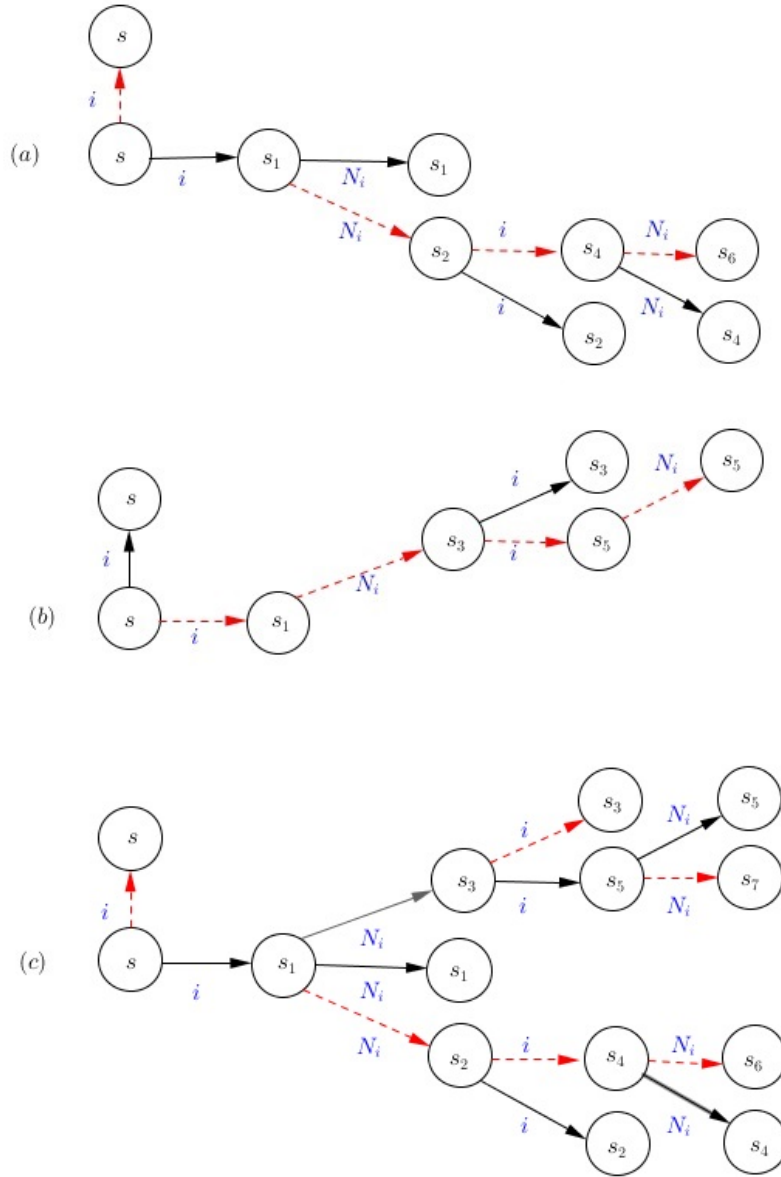
O Exemplo 5.6.12 esclarece que a estabilidade L_h^{CC} não implica na estabilidade L_h^{CI} .

Exemplo 5.6.12 Considere um conflito hipotético envolvendo três DMs, denotados por i, j e k e oito estados $s, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$. Considere, também, que os conjuntos de acessibilidades do DM i e da coalizão N_i , dos oponentes do DM i , sejam dados respectivamente, por: $R_i(s) = \{s_1\}$, $R_i(s_2) = \{s_4\}$, $R_i(s_3) = \{s_5\}$, $R_{N_i}(s_1) = \{s_2, s_3\}$, $R_{N_i}(s_4) = \{s_6\}$, $R_{N_i}(s_5) = \{s_7\}$, e os conjuntos de acessibilidades de todos os DMs em todos os estados que não foram declarados são iguais ao conjunto vazio. Suponha que as relações de preferências dos DMs são dadas por: $s_5 \succ_i s_3 \succ_i s_7 \succ_i s \succ_i s_1 \succ_i s_4 \succ_i s_6 \succ_i s_2$; $s_7 \succ_j s_5 \succ_j s_6 \succ_j s_2 \succ_j s \succ_j s_4 \succ_j s_1 \succ_j s_3$; $s_5 \succ_k s_1 \succ_k s_4 \succ_k s_2 \succ_k s \succ_k s_6 \succ_k s_3 \succ_k s_7$. A Figura 19 ilustra como o conflito evolui a partir do estado s com um movimento inicial do DM i , considerando as noções das estabilidades L_h^{CC} , L_h^{CI} e Maximin_h .

Analisando o conflito de acordo com a noção de estabilidade L_4^{CC} , observe que, caso o DM i decida acessar, a partir de s , o estado s_1 teremos $R_3(N_i, s_1) = \{s_1, s_3, s_6\}$, em que o s_3 é o estado final antecipado a partir de s_3 para a coalizão e o s_6 é o estado final antecipado a partir de s_2 para a coalizão. Como s_3 é Pareto Dominado por s_6 para a coalizão N_i , teremos $R_3^{CC}(N_i, s_1) = \{s_1, s_2\}$. Daí como $s_1 \succ_i s_6$, então $O_3^{CC}(N_i, s_1) = s_6$, portanto $O_4^{CC}(i, s) = s_6$. Finalmente, como $s \succ_i s_6$, então o estado s é L_4^{CC} estável para o DM i .

Por outro lado, ao analisarmos o conflito de acordo com a noção da estabilidade L_4^{CI} , caso o DM i decida acessar o estado s_1 , a partir do estado s , teremos $R'_3(N_i, s_1) = \{s_5\}$, em que o s_5 é o estado final antecipado a partir de s_3 para a coalizão. Para verificar isso note que se a coalizão se mover de s_1 para s_2 , na sequência o DM i vai querer se mover de s_2 para s_4 . Como não existe nenhum estado acessível para a coalizão a partir de s_4 que Pareto Domine s_4 , então no último movimento a coalizão deverá permanecer em s_4 . Como s_4 não Pareto Domina s_1 para a coalizão, temos que $s_4 \notin R'_3(N_i, s_1)$. Por outro lado, se a coalizão se mover de s_1 para s_3 , na sequência o DM i vai querer mover de s_3 para s_5 . Como não existe nenhum estado acessível para a coalizão a partir de s_5 que Pareto Domine s_5 , então no último movimento a coalizão deverá permanecer em s_5 . Como s_5 Pareto Domina s_1 para

Figura 19 – Análise de estabilidade L_4^{CC} , L_4^{CI} e Maximin_4 para o DM i , a partir do estado s , no conflito descrito Exemplo 5.6.12, ilustradas respectivamente, pelas árvores (a), (b) e (c).



Fonte: O autor (2023).

a coalizão, temos que $s_5 \in R'_3(N_i, s_1)$. Portanto, $R_3^{CI}(N_i, s_1) = \{s_3\}$ e $O_3^{CI}(N_i, s_1) = s_5$. Dessa maneira, $O_4^{CI}(i, s) = s_5$. Logo, o estado s não é L_4^{CI} estável para o DM i , pois $s_5 \succ_i s$.

Note que ao analisarmos o conflito, a partir da noção da estabilidade Maximin_4 teremos que, caso o conflito atinja o estado s_4 , o DM i antecipa o estado $G_1^i(s_4, N_i) = s_6$, pois $s_4 \succ_i s_6$. Assim, no estado s_2 o DM i antecipa o estado $G_2^i(i, s_2) = s_6$. Por outro lado, caso o conflito atinja o estado s_5 , o DM i antecipa o estado $G_1^i(s_5, N_i) = s_7$, pois $s_5 \succ_i s_7$. Assim, no estado s_3 o DM i antecipa o estado $G_2^i(i, s_3) = s_3$. Portanto, caso o DM i decida mover

o conflito do estado s para o estado s_1 , então ele antecipa o estado $G_3^i(N_i, s_1) = s_6$, pois $s_7 \succ_i s_1 \succ_i s_6$. Logo, no estado s o DM i antecipa o estado $G_4^i(i, s) = s$, pois $s \succ_i s_6$. Dessa maneira, o estado s é Maximin_4 estável para o DM i . Mas assim como no exemplo anterior, tal resultado, também já era esperado, uma vez que a estabilidade L_h^{CC} implica a estabilidade Maximin_h .

5.7 CONCLUSÃO

Neste capítulo, apresentamos as definições alternativas para a estabilidade de Movimento Limitado para conflitos multilaterais, denotadas por L_h^{CC} , estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão Cooperativa, e L_h^{CI} , estabilidade Movimento Limitado Alternativa com Coalizão Individualista. Estas definições alternativas têm a característica de tratar os oponentes do DM focal como uma coalizão, ao contrário das outras estabilidades de movimento limitado (*Caso 1*) e (*Caso 2*) existentes para conflitos multilaterais, que foram propostas em (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993). Por essa razão, cada sequência legal de movimentos dos oponentes do DM focal contará apenas como 1 para o horizonte de conflito, como ocorre em outros conceitos de estabilidade padrão para conflitos multilaterais dentro do GMCR. Neste capítulo, também fornecemos uma apresentação diferente das estabilidades de Movimento Limitado (*Caso 1*) e (*Caso 2*) para conflitos multilaterais na esperança de lançar mais luz na compreensão desses conceitos.

Para entender melhor as propriedades de nossos conceitos propostos, mostramos que as definições alternativas, L_h^{CC} e L_h^{CI} , coincidem com a estabilidade de movimento limitada, proposta em (KILGOUR, 1985), no caso de conflitos bilaterais. Além disso, mostramos que as estabilidades L_1^{CC} e L_1^{CI} são equivalentes à estabilidade Nash. Assim como as estabilidades L_h^{CC} e L_h^{CI} implicam a estabilidade Maximin_h . Além disso, no caso específico, onde os oponentes do DM focal têm preferências iguais e completamente opostas às do DM focal, provamos que a estabilidade L_h^{CC} é equivalente à estabilidade Maximin_h .

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese, apresentamos alguns avanços e correções no Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos. Dentre estes avanços, estabelecemos a equivalência entre dois conceitos de estabilidade que possuem horizonte variável, para conflitos bilaterais, a estabilidade Maximin e a estabilidade Metarracional Generalizada. Para tal, definimos a árvore Maximin, a qual é utilizada para construção de uma política Maximin.

É fato que aparentemente o decisor oponente do decisor focal dispõe de uma maior versatilidade de movimento na estabilidade Maximin_h , em comparação a estabilidade MR_h , uma vez que seu movimento não está restrito ao uso de uma política, que por definição exige que o decisor faça o mesmo movimento toda vez que um determinado aparecer no conflito. Porém, contrariamos esta intuição mostrando que dado um estado s , Maximin_h estável para o decisor focal, podemos construir uma política Maximin, para o oponente do decisor focal, de modo que justifique o estado s ser MR_h estável. É importante destacar que a política Maximin depende da paridade do horizonte de análise do conflito.

Ainda no contexto de conflitos bilaterais, destacamos que a justificativa dada por (ZENG et al., 2006), para argumentar que a estabilidade L_h implica a estabilidade MR_h não está correta, apesar da implicação ser verdadeira. Por esta razão, apresentamos uma justificativa correta baseada na construção de uma árvore L_h e de uma política L_h . Tal justificativa fornece alguns esclarecimentos importantes sobre estes conceitos, especialmente que embora em L_h os DMs não estejam restritos ao uso de políticas, seu comportamento pode ser alterado para o uso de uma política sem perder nenhum estado estável. A Figura 20 representa um grafo direcionado das relações obtidas nesta pesquisa entre os conceitos de estabilidade para conflitos bilaterais no GMCR, cujos vértices representam os conceitos de estabilidade e cada uma das arestas indica a implicação de um conceito no outro.

Além disso, estabelecemos a relação entre tais conceitos de estabilidades para conflitos multilaterais. Neste caso, provando que para conflitos com horizonte par a estabilidade Maximin_h , implica a estabilidade $\overline{MR}_r^{\text{new}}$, mas que para a estabilidade $\overline{MR}_r^{\text{new}}$ implique a estabilidade Maximin_h é preciso exigirmos a regularidade da árvore Metarracional relacionada com as políticas dos oponentes da coalizão. Por outro lado, para conflitos com horizontes ímpares provamos que a estabilidade MR_r^{new} implica a estabilidade Maximin_h .

Uma outra contribuição deste trabalho foi a proposta dos novos conceitos de estabilidade,

sobre qual movimento um decisor pode fazer, a partir de um determinado estado, o estado antecipado é o mesmo, seja qual for o caminho escolhido, assim a validade da definição da estabilidade L_h não é afetada.

De forma semelhante, também apresentamos um exemplo, no qual evidenciamos que pode existir a possibilidade de um decisor antecipar, de acordo com a estabilidade Maximin_h , o mesmo estado sendo acessado por duas sequências de movimentos diferentes, o que, também, gera um problema nas definições originais de $M_h^i(i, s)$ e $M_h^i(j, s)$, apresentadas em (RÊGO; VIEIRA, 2020c), mas que, também, não anula a validade da definição da estabilidade Maximin_h , uma vez que essa definição considera o estado final antecipado e não a sequência de movimentos utilizada para acessá-lo. Por fim, destacamos outro problema apresentado em (ZENG et al., 2006), o qual é o fato de o Corolário 1, o qual trata da relação entre equilíbrio em políticas e Metaracionalidade Generalizada, não ser verdadeiro.

Tais resultados, destacam a importância de se utilizar conceitos com horizontes variáveis em relação aos conceitos com horizontes fixos, dado sua maior flexibilidade e, portanto, a possibilidade de uma melhor compreensão sobre os aspectos da análise de estabilidade dos estados. Salientamos ainda, uma melhoria do entendimento sobre os conceitos de horizonte variável, além do esclarecimento de que o uso de políticas acaba por não afetar a estabilidade dos estados. Por fim, sublinhamos que a equivalência entre as estabilidades Maximin_h e MR_h em conflitos bilaterais aponta uma maior facilidade de encontrar estados MR_h estáveis.

6.1 DIRECIONAMENTOS PARA TRABALHOS FUTUROS

Em pesquisas futuras pretendemos:

- (1) Propor um conceito de estabilidade que generalize, simultaneamente, os conceitos L_h e Maximin_h , assumindo conhecimento parcial do decisor focal, sobre as preferências de seus oponentes.
- (2) Investigar como o paradigma maximin pode ser usado dentro do GMCR com outras estruturas de preferências.
- (3) Expandir ainda mais alguns resultados alcançados nesta pesquisa tanto analisando as relações entre outros conceitos de estabilidade do GMCR, quanto apresentando propostas de novos conceitos.

- (4) Investigar a possibilidade de introduzir conceitos de jogos cooperativos (MYERSON, 1991) nas análises de coalizão no contexto do GMCR.
- (5) Aplicar as noções das estabilidades Movimento Limitado Alternativas para analisar conflitos reais.
- (6) Analisar possíveis relações entre credible maximin stabilities (RÊGO; VIEIRA; KILGOUR, 2022) as metarracionalidades generalizadas credíveis (ZENG et al., 2007).

REFERÊNCIAS

- BERGE, C. Two theorems in graph theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 44, n. 9, p. 842–844, 1958.
- FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. *Interactive Decision Making: The Graph Model for Conflict Resolution*. [S.l.]: Wiley, 1993. v. 3.
- FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. Solving complex conflicts. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern*, v. 9, n. 12, p. 805–816, 1979.
- HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M.; FANG, L. The graph model for conflict resolution: Reflections on three decades of development. *Group Decision and Negotiation*, Springer, v. 29, p. 11–60, 2020.
- HOWARD, N. *Paradoxes of Rationality: Games, Metagames, and Political Behavior*. [S.l.]: Mit Press, 2003.
- KILGOUR, D. Anticipation and stability in two-person noncooperative games. *Dynamic models of international conflict*, Lynne Rienner Press Boulder, CO, p. 26–51, 1985.
- KILGOUR, D.; HIPEL, K. W.; FANG, L. The graph model for conflicts. *Automatica*, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 41–55, 1987.
- MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. D.; GREEN, J. R. *Microeconomic Theory*. [S.l.]: Oxford University Press, 1995.
- MYERSON, R. B. *Game Theory Analysis of Conflict*. [S.l.]: Harvard University Press, 1991.
- NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences-USA*, v. 36, n. 1, p. 48–49, 1950.
- NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1944.
- PARETO, V. *Cours d'economie politique*. [S.l.]: F. Rouge, 1896.
- RÊGO, L. C.; OLIVEIRA, F. de. Higher-order sequential stabilities in the graph model for conflict resolution for bilateral conflicts. *Group Decision and Negotiation*, v. 29, p. 601–626, 2020.
- RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Symmetric sequential stability in the graph model for conflict resolution with multiple decision makers. *Group Decision and Negotiation*, v. 26, n. 4, p. 775–792, 2017.
- RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. A note on policy equilibrium and generalized metarationalities for multiple decision-maker conflicts. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, Elsevier, p. 1–3, 2018.
- RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Alternative generalized metarationalities for multiple decision-maker conflicts. *Group Decision and Negotiation*, Springer, v. 29, n. 3, p. 461–490, 2020.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Berge solution concepts in the graph model for conflict resolution. *Group Decision and Negotiation*, Springer, v. 29, n. 1, p. 103–125, 2020.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Maximin_h stability in the graph model for conflict resolution for bilateral conflicts. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, v. 50, n. 10, p. 3760–3769, 2020.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A.; KILGOUR, D. M. The graph model for conflict resolution and credible maximin stability. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, p. 1–10, 2022.

SABINO, E. R. *Estabilidade do otimismo pessimismo: um novo conceito de solução para o modelo de grafo para resolução de conflito*. 87 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

SANTOS, A. M. dos. *Aplicações de Modelos de Grafos na Análise de Conflitos e de Redes Sociais*. 162 p. Dissertação (Doutorado em Estatística) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

VIEIRA, G. I. A. *Advances in the Graph Model for Conflict Resolution*. 164 p. Dissertação (Doutorado em Estatística) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.

XU, H.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W.; FANG, L. *Conflict resolution using the graph model: strategic interactions in competition and cooperation*. [S.l.]: Springer, 2018.

ZENG, D. Z.; FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Policy stable states in the graph model for conflict resolution. *Theory and Decision*, Springer, v. 57, n. 4, p. 345–365, 2004.

ZENG, D. Z.; FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Generalized metarationalities in the graph model for conflict resolution. *Discret Applied Mathematics*, Elsevier, v. 154, n. 16, p. 2430–2443, 2006.

ZENG, D. Z.; FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Policy equilibrium and generalized metarationalities for multiple decision-maker conflicts. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, Elsevier, v. 37, n. 4, p. 456–463, 2007.