



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIA EXATA E DE NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

CODJO OLIVIER SOSSA

**Teoria Assintótica de Alta Ordem nos Modelos Não Lineares Simétricos
Heteroscedásticos**

Recife

2023

CODJO OLIVIER SOSSA

**Teoria Assintótica de Alta Ordem nos Modelos Não Lineares Simétricos
Heteroscedásticos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de Doutor em Estatística.

Área de Concentração: Estatística-Matemática

Orientadora: Prof^a Dr^a Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S715t Sossa, Codjo Olivier
Teoria assintótica de alta ordem nos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos / Codjo Olivier Sossa. – 2023.
267 f.: il., fig, tab.

Orientadora: Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2023.
Inclui referências e apêndices.

1. Estatística matemática. 2. Correção de viés. 3. Verossimilhança. I. Cysneiros, Audrey Helen Mariz de Aquino (orientadora). II. Título.

519.5 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-65

CODJO OLIVIER SOSSA

**TEORIA ASSINTÓTICA DE ALTA ORDEM NOS MODELOS NÃO LINEARES
SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovado em: 28 de fevereiro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros
Presidente

Prof. Dr. Francisco Jose de Azevedo Cysneiros
Examinador Interno

Prof. Dr. Aldo William Medina Garay
Examinador Interno

Prof^a. Dr^a. Mariana Correia de Araújo
Examinadora Externa à Instituição

Prof. Dr. Miguel Angel Uribe Opazo
Examinador Externo à Instituição

Dedico a Deus e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao meu Deus, por ter me proporcionado mais esta conquista.

- À professora Audrey Helen Mariz de Aquino Cysneiros, pela confiança e por sua sublime orientação com que direcionou esse trabalho.
- Aos meus pais, Paul Sossa e Alice Djehoué, pela educação que a mim foi dada, pelo apoio e confiança que depositaram em mim.
- À toda minha família pelo apoio e incentivo, em especial, a Joél, Marc, Benoît e Charlotte.
- À minha companheira Elizângela Cardoso de Araújo Silva pelo apoio e toda a sua família, em especial, a Elizabeta, Carleilton, Pedrinho, Sara Helen e a Geni pelo acolhimento e carinho.
- Aos colegas de Doutorado do PPGEst, especialmente, Alexsandra Gomes, Marcelo dos Santos, Lucas David, Luan Portella, Alisson Silva e Anabeth Petry por compartilharmos momentos de dificuldades e superação.
- Aos meus amigos, Sourou, Nathanaël, Ezechiél, Faizath, Khalel e Cédric pelo incentivo.
- À todos os professores e funcionários do Departamento de Estatística da UFPE por seus trabalhos realizados.
- Ao professor Francisco Cysneiros pelas sugestões.
- Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões e correções na melhoria do trabalho.
- À Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco (FACEPE), pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta tese, estendemos a classe dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH) permitindo que as funções de ligação da média e da dispersão possam ser funções não lineares que dependem de um conjunto de parâmetros desconhecidos a serem estimados, tendo a heteroscedasticidade multiplicativa como um caso particular. Quatro linhas de pesquisa são abordadas neste trabalho. A primeira, trata da derivação de expressões analíticas que permitam calcular os vieses dos estimadores de máxima verossimilhança via Cox e Snell (1968) na classe dos MNLSH, possibilitando a obtenção de estimadores corrigidos, que, em princípio, são mais precisos que os não corrigidos. Estimadores com vieses corrigidos por bootstrap também foram considerados. Adicionalmente, apresentamos diferentes tipos de intervalos de confiança. Na segunda e a terceira linha de pesquisa derivamos expressões matriciais para os fatores de correção Bartlett e tipo-Bartlett às estatísticas de testes da razão de verossimilhanças e escore, respectivamente, com o objetivo de melhorar a qualidade das inferências acerca dos parâmetros de regressão da média e da dispersão nos MNLSH. Os desempenhos dos estimadores e testes de hipóteses foram avaliados numericamente e comparados às suas versões não corrigidas através de estudos de simulação de Monte Carlo, no que tange ao tamanho e ao poder, em amostras finitas. A quarta linha de pesquisa trata de técnicas de diagnóstico para os MNLSH, a saber: alavancagem generalizada, influência local e global. Finalmente, um conjunto de dados é utilizado para avaliar os nossos resultados teóricos.

Palavras-chaves: bootstrap; correção de Bartlett; correção tipo-Bartlett; correção de viés; diagnóstico; estatística da razão de verossimilhanças.

ABSTRACT

In this thesis, we extend the class of symmetric heteroscedastic nonlinear models (MNLSH) by allowing the link functions of the mean and dispersion to be nonlinear functions that depend on a set of unknown parameters to be estimated, with multiplicative heteroscedasticity as a particular case. Four lines of research are addressed in this work. The first one deals with the derivation of analytical expressions that allow calculating the biases of maximum likelihood estimators via Cox e Snell (1968) in the class of MNLSH, making it possible to obtain corrected estimators, which, in principle, are more accurate than the uncorrected ones. Estimators with bootstrap corrected biases were also considered. Additionally, we present different types of confidence intervals. In the second and third line of research we derived matrix expressions for the Bartlett and type-Bartlett correction factors to the likelihood ratio and score test statistics, respectively, in order to improve the quality of inferences about the regression parameters of the mean and dispersion in MNLSH. The performances of the estimators and hypothesis tests were numerically evaluated and compared to their uncorrected versions through Monte Carlo simulation Monte Carlo simulation studies, with respect to size and power, on finite samples. The fourth line of research deals with diagnostic techniques for MNLSHs, namely generalized leverage, local and global influence. Finally, a dataset is used to evaluate our theoretical results.

Keywords: bootstrap; bartlett correction; bartlett-type correction; bias correction. diagnostic; likelihood ratio statistic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Discrepância relativa de quantis para o modelo exponencial potência com $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, p = 3, \kappa = 3 (\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0)$.	98
Figura 2 – Discrepância relativa de quantis para o modelo t_4 , considerando $n = 35, p = 3, k = 3 (\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0)$.	98
Figura 3 – Discrepância relativa de quantis para o modelo exponencial potência com $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, p = 5, k = 3 (\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0)$.	99
Figura 4 – Discrepância relativa de quantis para o modelo t_4 , considerando $n = 35, p = 5, k = 3 (\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0)$.	99
Figura 5 – Gráfico de alavancagem generalizada referente ao submodelo da média da Exponencial Potência	157
Figura 6 – Gráfico de alavancagem generalizada referente ao submodelo da média t-Student	157
Figura 7 – Gráfico de influência global referente ao submodelo da média da Exponencial Potência	158
Figura 8 – Gráfico de influência global referente ao submodelo da média da t-Student	158
Figura 9 – Gráfico Gráfico de $\hat{h}_{ii}$ por valor ajustado referente ao submodelo da média da Exponencial Potência	159
Figura 10 – Gráfico Gráfico de $\hat{h}_{ii}$ por valor ajustado referente ao submodelo da média t-Student	159
Figura 11 – Gráfico de resíduo por valor ajustado referente ao submodelo da média da Exponencial Potência	160
Figura 12 – Gráfico de resíduo por valor ajustado referente ao submodelo da média da t-Student	160
Figura 13 – Gráfico de alavancagem generalizada referente ao submodelo da dispersão da Exponencial Potência	161
Figura 14 – Gráfico de alavancagem generalizada referente ao submodelo da dispersão t-Student	161
Figura 15 – Gráfico de influência global referente ao submodelo da dispersão da Exponencial Potência	162
Figura 16 – Gráfico de influência global referente ao submodelo da dispersão da t-Student	162

Figura 17 – Gráfico Gráfico de $\hat{h}_{ii}$ por valor ajustado referente ao submodelo da dispersão da Exponencial Potência	163
Figura 18 – Gráfico Gráfico de $\hat{p}_{ii}$ por valor ajustado referente ao submodelo da dispersão da t-Student	163
Figura 19 – Gráfico de resíduo por valor ajustado referente ao submodelo da dispersão da Exponencial Potência	164
Figura 20 – Gráfico de resíduo por valor ajustado referente ao submodelo da dispersão da t-Student	164
Figura 21 – Gráfico de índice do C_i com perturbação aditiva na resposta referente ao modelo da Exponencial Potência	165
Figura 22 – Gráfico de índice do C_i com perturbação aditiva na resposta referente ao modelo da t-Student	165
Figura 23 – Gráfico de índice do C_i com perturbação aditiva nos preditores referente ao modelo da Exponencial Potência	166
Figura 24 – Gráfico de índice do C_i com perturbação aditiva nos preditores referente ao modelo da t-Student	166
Figura 25 – Gráfico de índice do C_i com perturbação ponderada referente ao modelo da Exponencial Potência	167
Figura 26 – Gráfico de índice do C_i com perturbação ponderada referente ao modelo da t-Student	167

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estimação pontual de β no modelo t-Student ($\nu = 4$)	31
Tabela 2 – Estimação pontual de δ no modelo t-Student ($\nu = 4$)	32
Tabela 3 – Estimação pontual de β no modelo Logístico tipo II	33
Tabela 4 – Estimação pontual de δ no modelo Logístico tipo II	34
Tabela 5 – Estimação pontual de β no modelo Exponencial Potência ($k = 0.3$)	35
Tabela 6 – Estimação pontual de δ no modelo Exponencial Potência ($k = 0.3$)	36
Tabela 7 – Estimação intervalar de β no modelo t-Student ($\nu = 4$)	39
Tabela 8 – Estimação intervalar de β no modelo Logístico tipo II	41
Tabela 9 – Estimação intervalar de β no modelo Exponencial potência ($k = 0.3$) . . .	43
Tabela 10 – Estimação intervalar de δ no modelo t-Student ($\nu = 4$)	46
Tabela 11 – Estimação intervalar de δ no modelo Logística tipo II	48
Tabela 12 – Estimação intervalar de δ -Modelo Exponencial potência ($k = 0.3$)	50
Tabela 13 – Estimação pontual de δ no modelo t_4 para $n = 30$	52
Tabela 14 – Estimação pontual de δ no modelo Logístico tipo II para $n = 30$	53
Tabela 15 – Estimação pontual de δ do modelo Exponencial potência $k = 0.3$ para $n = 30$	54
Tabela 16 – Estimativas de máxima verossimilhanças (erro-padrão aproximado) e cor- rigidas pelo Cox-Snell para alguns modelos simétricos ajustados aos dados simulados de Gallant.	57
Tabela 17 – Resultado da estimação pontual e intervalar dos parâmetros do modelo t-Student ajustados aos dados dos coelhos europeus.	60
Tabela 18 – Resultado da estimação pontual e intervalar dos parâmetros do modelo Exponencial Potência ($\kappa = 0.31$) ajustados aos dados dos coelhos europeus. 61	
Tabela 19 – Resultado da estimação pontual e intervalar dos parâmetros do modelo Logístico Tipo II (LII) ajustados aos dados dos coelhos europeus.	62
Tabela 20 – Resultado da estimação pontual e intervalar dos parâmetros do modelo Normal ajustados aos dados dos coelhos europeus.	63
Tabela 21 – Tamanho dos testes conjunto considerando o Modelo t_4 , com $k_1 = p - 1 =$ $3, k_2 = q - 1 = 2, k_1 = p - 1 = 4, k_2 = q - 1 = 3$ e diversos valores para $n (\mathcal{H}_0^1 : \beta_1 = 0, \delta_1 = 0)$	84

Tabela 22 – Tamanho dos testes conjunto considerando o modelo Exponencial Potência $\kappa = 0.3$, com $k_1 = p-1 = 3, k_2 = q-1 = 2, k_1 = p-1 = 4, k_2 = q-1 = 3$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^1 : \beta_1 = 0, \delta_1 = 0$)	85
Tabela 23 – Tamanho dos testes para os betas considerando o modelo t_4 , com $p_1 = p - 1 = 3, q = 3, 5$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0$)	87
Tabela 24 – Tamanho dos testes para os betas considerando o Modelo Exponencial Potência $\kappa = 0.3$, com $p_1 = p - 1 = 3, q = 3, 5$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0$)	88
Tabela 25 – Tamanho dos testes para os betas considerando os modelos t_4 e exponencial potência com $\kappa = 0.3, n = 35, q = 3$ e diversos valores para p_1 ($\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0$)	89
Tabela 26 – Tamanho dos testes para os betas considerando os modelos t_4 e exponencial potência com $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, p_1 = 3$ e diversos valores para q ($\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0$)	91
Tabela 27 – Tamanho dos testes considerando o modelo t_4 com $p = 3, 5, k = 3$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).	92
Tabela 28 – Tamanho dos testes considerando o modelo exponencial potência $\kappa = 0.3$ com $p = 3, 5, k = 3$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).	93
Tabela 29 – Tamanho dos testes considerando os modelos t_4 e exponencial Potência $\kappa = 0.3$ com $p = 3, k = 2$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).	94
Tabela 30 – Tamanho dos testes considerando os modelos t_4 e exponencial potência com $\kappa = 0.3, n = 35, p = 3$ e diversos valores para k ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).	95
Tabela 31 – Tamanho dos testes considerando os modelos t_4 e exponencial potência com $\kappa = 0.3, n = 35, k = 3$ e diversos valores para p ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).	96
Tabela 32 – Poder dos testes-Modelo Exponencial potência com $\kappa = 0.3, n = 35, q_1 = 3$ e $\alpha = 10\%$	100
Tabela 33 – Poder dos testes-Modelo t_4 com $n = 35, q_1 = 3$ e $\alpha = 10\%$	101
Tabela 34 – Tamanho dos testes S_R dos gamas para o Modelo Exponencial Potência $k = 0.3$, com $q_1 = q - 1 = 3, p = 3, 5$ e diversos valores para n	126
Tabela 35 – Tamanho dos testes S_R dos gamas para o t_4 , com $q_1 = q - 1 = 3, p = 3, 5$ e diversos valores para n	127
Tabela 36 – Tamanho dos testes S_R dos gamas para o t_4 e exponencial potência $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, q_1 = 3$ e diversos valores para p	128

Tabela 37 – Tamanho dos testes S_R dos gamas para o t_4 e exponencial potência $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, p = 3$ e diversos valores para q_1	129
Tabela 38 – Tamanho dos testes S_R dos betas para o Modelo t_4 , com $p_1 = p - 1 = 3, q = 3, 5$ e diversos valores para n	130
Tabela 39 – Tamanho dos testes S_R dos betas para o Modelo Exponencial $\kappa = 0.3$, com $p_1 = p - 1 = 3, q = 3, 5$ e diversos valores para n	131
Tabela 40 – Tamanho dos testes S_R dos betas para os modelos t_4 e exponencial potência $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, q = 3$ e diversos valores para p_1	132
Tabela 41 – Tamanho dos testes conjunto para o Modelo Exponencial Potência $\kappa = 0.3$, com $k_1 = p - 1 = 1, k_2 = q - 1 = 1, k_1 = p - 1 = 3, k_2 = q - 1 = 2$ e diversos valores para n	133
Tabela 42 – Tamanho dos testes conjunto para o Modelo t_4 , com $k_1 = p - 1 = 1, k_2 = q - 1 = 1, k_1 = p - 1 = 3, k_2 = q - 1 = 2$ e diversos valores para n	134
Tabela 43 – Poder dos testes-Modelo Exponencial Potência com $n = 35, q_1 = 3$ e $\alpha = 10\%$	134
Tabela 44 – Poder dos testes-Modelo t_4 com $n = 35, q_1 = 3$ e $\alpha = 10\%$	135
Tabela 45 – Análise de sensibilidade ao remover as observações influentes no Modelo t_4	156
Tabela 46 – Peso das lentes dos olhos de coelhos europeus (y), em miligramas, e a idade (x), em dias, numa amostra contendo 71 observações (Wei (1998), Exemplo 6.8).	264
Tabela 47 – Solução de cálcio durante um determinado tempo x (em minutos) e a quantidade de cálcio absorvida pelas células y (em $nmol/mg$), numa amostra de 27 observações (RAWLINGS, 1988; BRAZZALE, 2000)	265
Tabela 48 – Média dos erros cometidos pelos ratos isquêmicos (lesionados).	266
Tabela 49 – Média dos erros cometidos pelos ratos não lesionados.	266
Tabela 50 – Expressão para $g(z^2), \frac{g'(z^2)}{g(z^2)}$ e $v = -2\frac{g'(z^2)}{g(z^2)}$ para algumas distribuições simétricas	267

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	CORREÇÕES DE VIÉS NA CLASSE DOS MODELOS DE REGRESSÃO NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS	18
2.1	INTRODUÇÃO	18
2.2	MODELOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS	20
2.2.1	Viés dos EMV para β e δ	23
2.2.1.1	<i>Viés de β</i>	24
2.2.1.2	<i>Viés de δ</i>	25
2.2.1.3	<i>Estimador corrigido via Bootstrap</i>	27
2.2.1.4	<i>Estimação intervalar</i>	28
2.2.2	Resultados Numéricos	29
2.3	APLICAÇÃO	58
2.4	CONCLUSÃO	64
3	CORREÇÃO DE BARTLETT NA CLASSE DOS MODELOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS	65
3.1	INTRODUÇÃO	65
3.1.1	Modelos Não Lineares Simétricos Heteroscedásticos	67
3.1.2	Teste da Razão de Verossimilhanças	69
3.1.3	Teste da razão de verossimilhanças bootstrap	71
3.1.4	Correção de Bartlett para a estatística LR	72
3.1.4.1	<i>Teste conjunto para o vetor de parâmetros da média e da dispersão</i>	74
3.1.4.2	<i>Teste separado para o vetor de parâmetros da média</i>	78
3.1.4.3	<i>Teste separado para o vetor de parâmetros da dispersão</i>	80
3.1.5	Resultados Numéricos	81
3.2	APLICAÇÃO 1	101
3.3	APLICAÇÃO 2	102
3.4	CONCLUSÃO	103
4	REFINAMENTO DE TESTES ESCORE NA CLASSE DOS MODELOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS	104
4.1	INTRODUÇÃO	104

4.1.1	Especificação dos Modelos Não Lineares Simétricos Heteroscedásticos	105
4.1.2	Testes de hipótese para a estatística escore em MNLSH	107
4.1.2.1	<i>Testes simultâneo sobre o subconjunto da média e da dispersão</i>	107
4.1.2.2	<i>Testes separado para o vetor de parâmetro da média</i>	109
4.1.2.3	<i>Testes separado para o vetor de parâmetro da dispersão</i>	110
4.1.3	Estatística escore refinada	111
4.1.3.1	<i>Correção Tipo-Bartlett para a estatística escore (S_R)</i>	112
4.1.3.2	<i>Correção Tipo-Bartlett à estatística escore para teste conjunto em MNLSH</i>	114
4.1.3.3	<i>Correção Tipo-Bartlett à estatística escore para teste da média em MNLSH</i>	120
4.1.3.4	<i>Correção Tipo-Bartlett à estatística escore para teste da dispersão em MNLSH</i>	121
4.2	RESULTADOS NUMÉRICOS	123
4.3	APLICAÇÃO 1	135
4.4	APLICAÇÃO 2	136
4.5	CONCLUSÃO	137
5	TÉCNICAS DE DIAGNÓSTICO EM MODELOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS	138
5.1	INTRODUÇÃO	138
5.1.1	Modelos Não Lineares Simétricos Heteroscedásticos	140
5.2	ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO EM MNLSH	141
5.2.1	Alavancagem Generalizada	141
5.2.2	Influência Global	145
5.2.3	Influência Local	148
5.2.3.1	<i>Perturbação Aditiva na Resposta nos MNLSH</i>	150
5.2.3.2	<i>Perturbação Aditiva nos Preditores nos MNLSH</i>	151
5.2.3.3	<i>Perturbação de Casos Ponderados nos MNLSH</i>	153
5.3	APLICAÇÃO 1	154
5.4	CONCLUSÃO	168
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PROPOSTAS PARA PESQUISAS FUTURAS	169
	REFERÊNCIAS	172
	APÊNDICE A – CUMULANTES NO MODELO NÃO LINEAR SIMÉTRICO HETEROSCEDÁSTICO	177

APÊNDICE B – PRINCIPAIS QUANTIDADES NECESSÁRIAS AOS CÁLCULOS DA CORREÇÃO DE VIÉS DO ES- TIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA NOS MNLSH	190
APÊNDICE C – FATOR DE CORREÇÃO DE BARTLETT PARA ESTATÍSTICA DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA NO MODELO MNLSH	196
APÊNDICE D – EXPRESSÃO DE ϵ EM RELAÇÃO AO COMPO- NENTE β	210
APÊNDICE E – CÁLCULO DE ϵ EM RELAÇÃO AOS PARÂME- TROS β E δ	245
APÊNDICE F – COELHOS EUROPEUS NA AUSTRÁLIA	264
APÊNDICE G – SOLUÇÃO DE CÁLCIO	265
APÊNDICE H – DADOS DE RATOS	266
APÊNDICE I – DERIVADAS PARA ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES SIMÉTRICAS	267

1 INTRODUÇÃO

Nesta tese, tratamos de refinamentos de mais alta ordem nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH) em que serão apresentados quatro trabalhos distintos. O primeiro deles com o foco na obtenção de expressões analíticas para os vieses dos estimadores de máxima verossimilhanças (EMV) dos parâmetros dos MNLSH, enquanto os outros dois trabalhos seguintes são dedicados à obtenção de ajustes as estatísticas de teste (razão de verossimilhanças e escore), com o objetivo de melhorar a qualidade das inferências feitas sobre os parâmetros de interesse nos MNLSH por fim as técnicas de diagnósticos para os MNLSH com intuito de detectar observações extremas nos dados normais. Por esse motivo, esta tese foi escrita de tal forma que os Capítulos 2, 3, 4 e 5 são independentes, apresentados em formato de artigo, significando que alguns resultados básicos e notações são apresentados mais de uma vez, porém, deste modo, cada capítulo pode ser lido separadamente, em qualquer ordem.

O Capítulo 2 consideramos a forma geral de modelar a heteroscedasticidade nos modelos MNLSH na obtenção dos EMV corrigidos, que são aproximadamente não viesados, para os parâmetros dos MNLSH. Estimadores com vieses corrigidos via Cox e Snell (1968) e por bootstrap Efron (1979) são apresentados como alternativas mais precisas para os EMV dos parâmetros do MNLSH. Adicionalmente, diferentes tipos de intervalos de confiança são obtidos. Os desempenhos dos estimadores pontuais e intervalares foram avaliados através de estudos de simulação de Monte Carlo. Aplicações com conjuntos de dados reais ilustram a utilidade das correções propostas. Ao final do capítulo, algumas conclusões são apresentadas. Os resultados do artigo generalizam o artigo de Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010), uma vez que eles utilizaram a estrutura de heteroscedasticidade multiplicativa para o componente sistemático da dispersão.

No Capítulo 3, consideramos a forma geral de modelar a heteroscedasticidade nos modelos MNLSH e derivamos uma expressão matricial para a correção de Bartlett à estatística da razão de verossimilhanças para testar conjuntamente e/ou separadamente o efeito da média e da dispersão. Consideramos também os testes da razão de verossimilhanças baseados em bootstrap paramétrico Efron (1979) e corrigido via Rocke (1989). Realizamos diversas simulações de Monte Carlo com o intuito de comparar a eficácia dos testes da razão de verossimilhanças usual e bootstrap com suas respectivas versões corrigidas, no que tange ao tamanho e poder

dos testes, em amostras finitas. Aplicações com conjuntos de dados reais ilustram a utilidade das correções propostas. Ao final do capítulo, algumas conclusões são apresentadas. Os resultados deste capítulo generalizam o artigo de ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022), uma vez que eles utilizaram a estrutura de heteroscedasticidade multiplicativa.

No Capítulo 4, consideramos a forma geral de modelar a heteroscedasticidade nos modelos MNLSH e derivamos uma expressão matricial para a correção tipo-Bartlett à estatística escore para testar conjuntamente e/ou separadamente o efeito da média e da dispersão nos MNLSH. Resultados numéricos são apresentados com o intuito de comparar a eficácia do teste escore usual com suas respectivas versões corrigidas, em relação ao tamanho e poder dos testes, em amostras finitas. Aplicações com conjuntos de dados reais ilustram a utilidade das correções propostas. Ao final do capítulo, algumas conclusões são apresentadas. Os resultados deste capítulo generalizam o artigo de Cysneiros et al. (2010), uma vez que eles utilizaram a estrutura de heteroscedasticidade multiplicativa.

No Capítulo 5 desenvolvemos técnicas de diagnóstico considerando a forma geral de modelar a heteroscedasticidade nos modelos MNLSH, a saber: Alavancagem Generalizada, influência Global, influência Local, Perturbação Aditiva na resposta e nos preditores e por fim Perturbação de casos Ponderados. Uma aplicação é apresentada para avaliar nossos resultados teóricos. Os resultados deste capítulo generalizam o artigo de Vanegas e Cysneiros (2010), uma vez que eles consideraram o MLSH e utilizaram a estrutura de heteroscedasticidade multiplicativa.

Os desenvolvimentos teóricos dos capítulos supracitados e os conjuntos de dados reais considerados nesta tese encontram-se nos Apêndices de A a E e de F a I, respectivamente.

Todos os procedimentos inferenciais derivados dos resultados teóricos obtidos nos capítulos 2,3 e 4 da tese são avaliados e comparados através de simulação de Monte Carlo. Todas as simulações apresentadas foram desenvolvidas a partir de programas construídos usando a linguagem de programação matricial Ox Doornik (2009) para o sistema operacional Linux-Ubuntu. Os gráficos foram produzidos no ambiente de programação RStudio, tendo sido utilizada a versão 1.2.5019 para Linux-64bit.

2 CORREÇÕES DE VIÉS NA CLASSE DOS MODELOS DE REGRESSÃO NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS

Resumo

Neste capítulo, derivamos uma fórmula matricial geral para os vieses de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhanças dos parâmetros da média e da dispersão nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos. Nesta classe de modelos, abordamos a situação em que os parâmetros de dispersão não são constantes para todas as observações, havendo assim uma estrutura heteroscedástica. Admitimos a determinação de uma forma funcional que relaciona os parâmetros de dispersão com alguns parâmetros desconhecidos, que não dependem do vetor de parâmetros de regressão, e algumas variáveis auxiliares. Salientamos aqui que utilizamos qualquer estrutura heteroscedástica, tendo a heteroscedasticidade multiplicativa como caso particular, generalizando assim os resultados de Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010). Além disso, calculamos os intervalos de confiança do tipo assintótico, bootstrap percentil e bootstrap-t. Através de simulação de Monte Carlo, avaliamos os desempenhos dos estimadores pontuais, a saber: estimadores de máxima verossimilhanças, suas versões corrigidas via Cox e Snell (1968) e a técnica de bootstrap (Efron (1979)) e estimadores intervalares propostos. Adicionalmente, apresentamos uma aplicação para ilustrar tudo o que foi desenvolvido.

Palavras-chaves: bootstrap; correção de Bartlett; correção de viés; intervalos; razão de verossimilhanças.

2.1 INTRODUÇÃO

A classe simétrica de distribuições fornece uma extensão da distribuição normal e engloba outras distribuições com caudas mais pesadas e mais leve do que as da distribuição normal. Distribuições com caudas mais pesadas acomodam melhor as observações aberrantes, reduzindo a influência exercida por tais observações sob as estimativas dos parâmetros do modelo, tornando-as menos sensíveis. Algumas distribuições interessantes pertencentes a família de distribuições simétricas são: normal, Cauchy, t-Student, t-Student generalizada, logística tipo I, logística tipo II, logística generalizada, exponencial potência, Kotz, Kotz generalizada, normal contaminada, entre outras. Uma revisão de diferentes áreas em que as distribuições simétricas

são aplicadas é descrita em Chmielewski (1981), Fang e Anderson (1990) e Anderson e Fang (1990).

Os modelos de regressão não lineares simétricos heterocedásticos são definidos por um conjunto de variáveis aleatórias independentes que seguem distribuição simétrica e admitem que uma função monótona da média da variável resposta seja definida por um preditor não linear envolvendo regressores e parâmetros desconhecidos. É admitido a determinação de uma forma funcional não linear que relaciona os parâmetros de dispersão com alguns parâmetros desconhecidos, que não dependem do vetor de parâmetros de regressão, e algumas variáveis auxiliares.

Nesta classe de modelos, os parâmetros de dispersão não são constantes para todas as observações, havendo assim uma estrutura heteroscedástica. Dizemos que o modelo é homoscedástico quando os parâmetros de dispersão forem todos iguais; caso contrário, dizemos que o modelo é heteroscedástico.

Os estimadores de máxima verossimilhanças (EMV) são tipicamente viesados para os verdadeiros valores dos parâmetros quando o tamanho da amostra é pequeno ou mesmo moderado. Assim, a derivação de expressões que possibilitem reduzir o viés é de suma importância para a obtenção de estimadores mais precisos. Cox e Snell (1968) derivaram expressões para vieses de segunda ordem dos EMV dos parâmetros do modelo. Também é possível considerar uma abordagem numérica para a correção dos vieses dos EMV com base na metodologia bootstrap paramétrica. Esta técnica não requer derivação explícita das expressões dos vieses dos estimadores.

Muitas vezes temos também interesse em realizar estimativas intervalares. Uma abordagem usual é empregar um intervalo de confiança assintótico (ICA), que resulta da distribuição assintótica dos EMV. Vale ressaltar que este intervalo é baseado em aproximações de grandes amostras, o que pode torná-lo impreciso em amostras pequenas. Uma alternativa consiste na utilização de reamostragem bootstrap. Diferentes intervalos de confiança baseados no método bootstrap podem ser construídos, tais como: o intervalo de confiança bootstrap percentil e intervalo de confiança bootstrap-t (ver Davison e Hinkley (1997), Tibshirani e Efron (1993)).

Na literatura, diversos autores têm trabalhado com correção de viés. Paula (1992) desenvolveu um fator de correção de viés nos modelos não lineares da família exponencial. Cordeiro (1992) desenvolveu fórmulas gerais para correção de Bartlett e do viés de segunda ordem dos EMV para dois modelos de regressão heterocedásticos. Cordeiro e Vasconcellos (1997) propuseram fórmulas gerais para viés de segunda ordem dos EMV na classe de modelos de regressão

não lineares multivariados, mas considerando constante o parâmetro da dispersão. Cordeiro et al. (2000) apresentaram fórmulas gerais para o viés de segunda ordem dos EMV na classe de modelos de regressão não lineares simétricos. Nesta mesma linha, Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010) obtiveram fórmulas matriciais gerais para os vieses de segunda ordem dos EMV na classe de modelos de regressão não lineares simétricos heterocedásticos considerando para a dispersão uma estrutura heteroscedástica multiplicativa. Adicionalmente, Silva, Cysneiros e Cordeiro (2017) derivaram uma fórmula matricial geral para a correção de viés dos EMV nos modelos de regressão em séries de potência não lineares generalizados. Pires, Cysneiros e Cribari-Neto (2018) obtiveram uma expressão analítica para os vieses dos EMV dos parâmetros da distribuição gaussiana inversa tripamétrica e recentemente Medeiros, Araújo e Bourguignon (2021) propuseram um fator de correção para o viés dos EMV nos modelos de regressão lineares beta prime.

O principal objetivo deste capítulo reside em derivar uma fórmula matricial geral para os vieses de segunda ordem dos EMV dos parâmetros da média e da dispersão nos MNLSH considerando qualquer estrutura heteroscedástica.

O capítulo é organizado da seguinte forma: a primeira Seção é introdutória, na Seção 2.2 introduzimos o modelo não linear simétrico heteroscedástico (MNLSH), bem como seus aspectos inferenciais. Na Seção 2.2.1 desenvolvemos uma expressão via Cox e Snell (1968) dos EMV dos parâmetros (média e dispersão) do MNLSH. Além disso, discorremos sobre a obtenção da correção de viés via a metodologia bootstrap (EFRON, 1979) e a obtenção de estimadores intervalares. Na Seção 2.2.2 apresentamos os resultados numéricos sobre o desempenho dos estimadores pontuais e intervalares em amostras finitas. Na Seção 2.3 uma aplicação a dados reais é apresentada e na Seção 2.4 alguns comentários são feitos.

2.2 MODELOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS

Consideremos n variáveis aleatórias independentes $y_1, \dots, y_n$, cada y_l tem uma densidade simétrica com parâmetros de locação $\mu_l \in \mathbb{R}$ e de dispersão $\phi_l > 0$ dada da seguinte forma:

$$\pi(y_l, \mu_l, \phi_l) = \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} g(u_l), \quad y_l \in \mathbb{R}, l = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

para alguma função $g(\cdot)$, usualmente denominada de função geradora de densidade, com $g(u_l) > 0$, $u_l > 0$ sendo $u_l = \phi_l^{-1}(y_l - \mu_l)^2$ e $\int_0^\infty u_l^{-1/2} g(u_l) du_l = 1$, $l = 1, \dots, n$. Algumas funções geradoras de densidades, $g(\cdot)$, para as distribuições simétricas podem ser encontra-

das em Araújo, Cysneiros e Montenegro (2020). Denotamos a variável aleatória simétrica por $Y_l \sim S(\mu_l, \phi_l, g)$, para $l = 1, \dots, n$. Cysneiros, Paula e Galea (2005) apresentam as principais propriedades das distribuições mais conhecidas contempladas na classe de distribuições simétricas.

O modelo não linear simétrico heteroscedástico é definido como segue:

$$y_l = \mu_l + \sqrt{\phi_l} \epsilon_l, \quad (2.2)$$

tendo $\epsilon_l \sim S(0, 1, g)$, $l = 1, \dots, n$ e estimado pelos componentes sistemáticos que são funções não lineares para os parâmetros da média e da dispersão da seguinte forma:

$$g(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta} = \Omega_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{e} \quad h(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\tau} = \Omega_2(\mathbf{S}, \boldsymbol{\delta}),$$

respectivamente, em que $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ representam as funções de ligação da média e da dispersão, conhecidas e biunívocas, sendo $\mathbf{X} = (x_{l1}, \dots, x_{lp})^\top$ e $\mathbf{S} = (s_{l1}, \dots, s_{lq})^\top$ matrizes conhecidas de covariáveis, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ e $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_q)^\top$, são vetores de p e q parâmetros desconhecidos a serem estimados, com $p < n$ e $q < n$ observações, Ω_1 e Ω_2 são funções contínuas e diferenciáveis com respeito aos componentes de $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\delta}$ tal que as matrizes de derivadas $\tilde{\mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ e $\tilde{\mathbf{S}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\delta}}$ tenham posto completo.

O logaritmo da função de verossimilhança (log-verossimilhança) do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\delta}^\top)^\top$ dado o vetor de observações $(y_1, \dots, y_n)^\top$ dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos dado em 2.1 e 2.2 pode ser expresso na forma:

$$\ell = \ell(\boldsymbol{\theta}) = \log f(y, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \log(\phi_l) + \sum_{l=1}^n t(z_l), \quad (2.3)$$

em que $t(z_l) = \log\{g(u_l)\}$, $u_l = z_l^2 = (y_l - \mu_l)^2 / \phi_l$ e $l = 1, \dots, n$. Assumimos que a função ℓ é regular com respeito às derivadas em relação aos componentes de $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\delta}$ até a quarta ordem (COX; HINKLEY, 1974; SERFLING, 1980).

Para a obtenção dessas derivadas, utilizamos a notação: $\varphi_{abcde} = E(t_{(z_l)}^{(1)a} t_{(z_l)}^{(2)b} t_{(z_l)}^{(3)c} t_{(z_l)}^{(4)d} z^e)$ em que $a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $t^{(i)}(z_l) = \partial^i t(z_l) / \partial z_l^i$, $i = 1, 2, 3, 4$ e $l = 1, \dots, n$. Pelas condições de regularidade (COX; HINKLEY, 1974), tem-se que: $\varphi_{01001} = \varphi_{10000} = 0$, $\varphi_{20000} = -\varphi_{10000}$, $\varphi_{11001} = -(\varphi_{01000} + \varphi_{00101})$, $\varphi_{00010} = -\varphi_{10100}$, $\varphi_{11001} + \varphi_{00101} + \varphi_{01000} = 0$, $\varphi_{01002} = 2 - \varphi_{20002}$ e $\varphi_{40000} = -3\varphi_{21000}$. Os valores dos φ 's correspondentes a algumas distribuições simétricas podem ser encontrados em Uribe-Opazo, Ferrari e Cordeiro (2008).

Definimos também as seguintes matrizes diagonais de dimensão $n \times n$, a saber: $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Delta} = \text{diag}(1/\phi_1, \dots, 1/\phi_n)$, $\mathbf{M}_i = \text{diag}(m_{i1}, \dots, m_{in})$ com elementos dados por $m_{il} = d^i \mu_l / d\eta_l^i$ é

a i -ésima derivada de $\mu_l = g^{-1}(\eta_l)$ e $\mathbf{H}_i = \text{diag}(h_{i1}, \dots, h_{in})$ com elementos $h_{il} = d^i \phi_l / d\tau_l^i$ é a i -ésima derivada de $\phi_l = g^{-1}(\tau_l)$ para $i = 1, \dots, n$.

A função escore total $U(\boldsymbol{\theta}) = U(\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\delta}^\top)^\top$ e a matriz de informação total de Fisher são dadas, em notação matricial, por:

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\beta} \\ \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{M}_1 \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \\ -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{S}}^\top \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\Delta} (\boldsymbol{\iota} - \mathbf{V} \mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_\beta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\delta \end{pmatrix}$$

respectivamente, em que $(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) = (y_1 - \mu_1, \dots, y_n - \mu_n)^\top$, $\mathbf{V} = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)^\top$ sendo $v_i = \frac{-2g'(z^2)}{g(z^2)}$, $g'(z^2) = \frac{\partial g(z^2)}{\partial z^2}$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\boldsymbol{\iota}$ um vetor $n \times 1$ de uns, $\mathbf{K}_\beta = -(\varphi_{(0,1,0,0,0)}) (\tilde{\mathbf{X}}^\top \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{\mathbf{X}})$ e $\mathbf{K}_\delta = \frac{1}{4} (1 - \varphi_{(0,1,0,0,2)}) (\tilde{\mathbf{S}}^\top \boldsymbol{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \tilde{\mathbf{S}})$. Globalmente, os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\delta}$ são ortogonais e seus estimadores de máxima verossimilhanças $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\delta}}$, respectivamente, são assintoticamente independentes. Por mais detalhes os v 's são encontrados no Apêndice I.

O método de otimização não linear como o algoritmo Scoring de Fisher ou o algoritmo Newton-Raphson pode ser usado à obtenção dos EMV do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Usamos o processo iterativo Scoring de Fisher, o qual é definido como

$$\boldsymbol{\theta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(m)} + \mathbf{K}_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}}^{-1} U_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}}, m = 0, 1, \dots$$

Esse processo pode ser reescrito como um processo de mínimos quadrados ponderados, como se segue:

$$\boldsymbol{\beta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(m)} + \left\{ \tilde{\mathbf{X}}^{(m)\top} \boldsymbol{\Lambda}^{(m)} \mathbf{M}_1^{2(m)} \tilde{\mathbf{X}}^{(m)} \right\}^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{(m)\top} \boldsymbol{\Lambda}^{(m)} \mathbf{M}_1^{2(m)} \boldsymbol{\zeta}_1^{(m)} \quad (2.4)$$

e

$$\boldsymbol{\delta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(m)} + \left\{ \tilde{\mathbf{S}}^{(m)\top} \boldsymbol{\Delta}^{2(m)} \mathbf{H}_1^{2(m)} \tilde{\mathbf{S}}^{(m)} \right\}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{(m)\top} \boldsymbol{\Delta}^{(m)2} \mathbf{H}_1^{2(m)} \boldsymbol{\zeta}_2^{(m)} \quad (2.5)$$

em que $m = 0, 1, \dots$, $\boldsymbol{\zeta}_1 = -\frac{1}{\varphi_{(0,1,0,0,0)}} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{V} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$ e $\boldsymbol{\zeta}_2 = \frac{(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1)}{8} \mathbf{H}_1^{-1} \boldsymbol{\Delta}^{-1} (\boldsymbol{\iota} - \mathbf{V} \mathbf{u})$ desempenham o papel de variáveis dependentes modificadas, enquanto que, $\boldsymbol{\Lambda}^{(m)} \mathbf{M}_1^{2(m)}$ e $\boldsymbol{\Delta}^{2(m)} \mathbf{H}_1^{2(m)}$ são matrizes de pesos que mudam a cada passo iterativo. Essas equações podem ser implementadas em qualquer software com uma rotina de regressão linear ponderada para calcular os EMV do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ iterativamente. Assintoticamente, os EMV de $\boldsymbol{\theta}$ têm distribuição normal com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariâncias $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$.

Introduziremos a seguinte notação de derivadas: $U_r = \partial\ell/\partial\beta_r$, $U_{rS} = \partial^2\ell/(\partial\beta_r\partial\delta_S)$, $U_{rsT} = \partial^3\ell/(\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\delta_T)$ e assim por diante, em que ℓ é a log-verossimilhanças e r, s, t são indexadores do espaço paramétrico. Consideramos os subscritos em minúsculo r, s, t, u para o componente do vetor β e os subscritos maiúsculo R, S, T, U para o componente do vetor δ . Os cumulantes conjuntos das derivadas da log-verossimilhanças são definidos como em Lawley (1956): $\kappa_{rs} = E(U_{rs})$, $\kappa_{r,s} = E(U_r U_s)$, $\kappa_{rsT} = E(U_{rsT})$, e assim por diante. Os cumulantes κ' s referem-se a um total sobre a amostra e, em geral, são de ordem $O(n)$. Denotamos as derivadas dos cumulantes em relação aos componentes do vetor β por $\kappa_{rs}^{(t)} = \partial\kappa_{rs}/\partial\beta_t$, $\kappa_{rs}^{(T)} = \partial\kappa_{rs}/\partial\delta_T$, e assim por diante. Por fim, adotaremos a notação proposta por Cordeiro e Paula (1989): $(r)_l = \partial\eta_l/\partial\beta_r$, $(rs)_l = \partial^2\eta_l/(\partial\beta_r\partial\beta_s)$, $(rs, t)_l = \partial^2\eta_l/(\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\eta_l/\partial\beta_t)$ e $(rs, T)_l = \partial^2\eta_l/(\partial\beta_r\partial\beta_s\partial\eta_l/\partial\delta_T)$, e assim por diante. Note que $\kappa^{r,s} = -\kappa^{rs}$ e $\kappa^{R,S} = -\kappa^{RS}$ em que cada κ sobrescritos corresponde ao elemento $\mathbf{K}_\beta^{-1}$ e $\mathbf{K}_\delta^{-1}$ da inversa da matriz de informação de Fisher respectivamente.

2.2.1 Viés dos EMV para β e δ

O viés é uma medida de qualidade de um estimador e é calculado como a diferença entre o verdadeiro valor do parâmetro e o valor esperado do estimador em consideração. Geralmente, o método de máxima verossimilhanças fornece estimadores viesados em modelos não lineares quando o tamanho da amostra n é pequeno ou quando a matriz de informação total de Fisher é reduzida (CORDEIRO, 1999). Sabe-se que, sob condições gerais de regularidade, os EMV são consistentes, assintoticamente eficientes e têm distribuição assintótica normal. Além disso, estes estimadores apresentam viés de ordem $O(n^{-1})^1$ quando n é grande são desprezíveis quando comparados com os erros padrão dos estimadores que são de $O(n^{-1/2})$. Mas, para alguns modelos não lineares, o viés em pequenas amostras ou mesmo em amostras de tamanho moderado pode ser apreciável e ter magnitude comparável ao erro padrão do EMV correspondentes. Encontrar estimadores corrigidos pelo viés de $O(n^{-2})$ pode melhorar a qualidade das estimativas, principalmente, em amostras pequenas.

Estamos interessado em obter fórmulas gerais para o viés de segunda ordem dos EMV nos MNLSH. Para obter o viés dos estimadores, utilizaremos o trabalho de Cox e Snell (1968)

¹ Sejam $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ duas sequências de constantes. Dizemos que a ordem de magnitude de u_n é menor que v_n , denotando por $u_n = o(v_n)$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n/v_n = 0$. Dizemos que u_n é de ordem, *máximo igual* a v_n , denotamos por $u_n = O(v_n)$ se a razão $|u_n/v_n|$ for limitada para todo n suficientemente grande, isto é, se existirem $F \in \mathbb{R}^+$ e $n_0(F)$ tal que $|u_n/v_n| \leq F$, $\forall n \geq n_0(F)$.

em que eles mostraram que para observações independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas, o viés de $O(n^{-1})$ de $\hat{\theta}_r$, para $r = 1, \dots, p + q$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$B(\hat{\theta}_r) = \sum_{\beta, \delta} \kappa^{ri} \kappa^{tu} \left(\kappa_{rj}^{(l)} - \frac{1}{2} \kappa_{ijl} \right). \quad (2.6)$$

Esta metodologia já foi utilizada em vários modelos de regressão na literatura. Por exemplo, os vieses de segunda ordem já foram obtidos por Cordeiro et al. (2000) nos modelos de regressão não lineares simétricos, Cordeiro e Botter (2001) nos modelos de regressão lineares generalizados superdispersados, Cordeiro, Previdelli e Samohyl (2008) modelos de regressão não lineares generalizados superdispersados, Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010) na classe de modelos de regressão não lineares simétricos heterocedásticos em que foi considerado somente a estrutura de heteroscedasticidade multiplicativa, Silva, Cysneiros e Cordeiro (2017) nos modelos não lineares séries de potência generalizados e Medeiros, Araújo e Bourguignon (2021) nos modelos de regressão linear beta prime.

2.2.1.1 Viés de β

Devido à ortogonalidade entre o vetor de parâmetros β e δ , o viés de primeira ordem do EMV da r -ésima componente de β na equação (2.6), para $r = 1, \dots, p$, é dado por:

$$B(\hat{\beta}_r) = \sum_{\beta} \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left(\kappa_{rt}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{stu} \right) + \sum_{\beta, \delta} \kappa^{rs} \kappa^{TU} \left(\kappa_{sT}^{(U)} - \frac{1}{2} \kappa_{sTU} \right), \quad (2.7)$$

sendo

$$\begin{aligned} \kappa_{st}^{(u)} &= 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} (s, t, u)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{ (su, t)_l + (s, tu)_l \}, \\ \kappa_{stu} &= 3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} (s, t, u)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{ (st, u)_l + (su, t)_l + (s, tu)_l \} e \\ \kappa_{sT} &= \kappa_{sTU} = \kappa_{sT}^{(U)} = 0. \end{aligned}$$

Logo, substituindo as expressões acima na equação (2.7) e após algumas manipulações algébricas, temos que:

$$\begin{aligned} B(\hat{\beta}_r) &= \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \left(\sum_s \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum_{t,u} (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left[\left(\sum_s \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum_{t,u} \kappa^{tu}(tu)_l \right) \right]. \end{aligned}$$

Introduzimos as seguintes notações para facilitar o cálculo matricial do viés. Definimos as matrizes diagonais $\mathbf{D}_\beta = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ em que $d_l = -(\varphi_{(0,1,0,0,0)})^{-1} \text{tr}\left\{\left(\tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{\mathbf{X}}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{X}}_l\right\}$, para $l = 1, \dots, n$, e $\mathbf{Z}_{\beta d} = \text{diag}\{z_{\beta 11}, \dots, z_{\beta nn}\}$. Também definimos a matriz $\mathbf{Z}_\beta = \tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{K}_\beta^{-1} \tilde{\mathbf{X}}$, em que $\mathbf{K}_\beta^{-1} = -(\varphi_{(0,1,0,0,0)})^{-1} \left(\tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{\mathbf{X}}\right)^{-1}$. Em notação matricial, o viés dos EMV para o vetor β é dado por:

$$B(\hat{\beta}) = \left[\tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{\mathbf{X}}\right]^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \zeta \iota, \quad (2.8)$$

em que $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ com $\zeta_1 = -\frac{1}{2} \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2$, $\zeta_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{D}_\beta$ e ι representa o vetor de uns. Aqui ζ_2 representa a parte não linear do modelo em estudo. Observamos, portanto, que $B(\hat{\beta})$ pode ser obtido através de uma regressão de mínimos quadrados ponderados. É fácil ver quando $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ em que $\mathbf{D}_\beta = \mathbf{0}$, recaímos no modelo linear que representa a primeira parcela.

2.2.1.2 Viés de δ

De maneira análoga ao cálculo do viés para β , o viés de ordem $O(n^{-1})$ do EMV da R -ésima componente de δ , $R = 1, \dots, q$, é dado por:

$$B(\hat{\delta}_R) = \sum_{\delta} \kappa^{RS} \kappa^{TU} \left(\kappa_{ST}^{(U)} - \frac{1}{2} \kappa_{STU} \right) + \sum_{\beta, \delta} \kappa^{RS} \kappa^{tu} \left(\kappa_{St}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{Stu} \right), \quad (2.9)$$

em que

$$\begin{aligned} \kappa_{ST} &= \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} (S, T)_l, \\ \kappa_{STU} &= \frac{1}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, T, U)_l + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, T, U)_l \\ &\quad + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (ST, U)_l + (SU, T)_l + (S, TU)_l \right\}, \\ \kappa_{ST}^{(U)} &= \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, T, U)_l + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (SU, T)_l + (S, TU)_l \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, T, U)_l, \\ \kappa_{Stu} &= -\frac{1}{2} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (S, t, u)_l \text{ e} \\ \kappa_{St} &= \kappa_{St}^{(u)} = 0. \end{aligned}$$

Substituindo os respectivos cumulantes acima na equação (2.9), temos que:

$$\begin{aligned}
B(\hat{\delta}_R) = & \frac{1}{16}(\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left(\sum_S \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum_{T,U} (T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& + \frac{1}{8}(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left(\sum_{S,T,U} \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum_{T,U} \kappa^{TU}(T)_l \right) \\
& + \frac{1}{8}(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left[\left(\sum_{S,T,U} \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_l \right) \right. \\
& + \left. \left(\sum_S \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum_{T,U} \kappa^{TU}(TU)_l \right) - \left(\sum_{S,T,U} \kappa^{RS}(ST)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \right] \\
& + \frac{1}{4}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} \left(\sum_{S,T,U} \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum_{t,u} (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \right).
\end{aligned}$$

Adotamos também as seguintes notações para facilitar a escrita da expressão do viés, em notação matricial: $\tilde{\mathbf{S}} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial \delta \partial \delta^\top}$, as matrizes diagonais $\mathbf{D}_\delta = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, em que $d_l = \text{tr}\{K_\delta^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_l\}$, sendo $\mathbf{K}_\delta^{-1} = -\frac{4}{(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1)} (\tilde{\mathbf{S}}^\top \mathbf{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \tilde{\mathbf{S}})^{-1}$ e $\mathbf{Z}_{\delta d} = \text{diag}\{z_{\delta 11}, \dots, z_{\delta nn}\}$ com elementos $z_{\delta l} = \tilde{\mathbf{S}} K_\delta^{-1} \tilde{\mathbf{S}}$, $l = 1, \dots, n$. Em notação matricial, o viés dos EMV para o vetor δ é dado por:

$$B(\hat{\delta}) = (\tilde{\mathbf{S}}^\top \mathbf{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \tilde{\mathbf{S}})^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^\top \mathbf{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \boldsymbol{\xi}, \quad (2.10)$$

em que $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$ sendo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_1 = & -4(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1)^{-1} \left[\frac{1}{16}(\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1) \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{\Delta} \mathbf{H}_1 \right. \\
& + \frac{1}{8}(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1) \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{H}_2 + \left. \frac{1}{4}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{M}_1^2 \right] \boldsymbol{\iota} \quad \text{e} \\
\boldsymbol{\xi}_2 = & -\frac{1}{2} \mathbf{D}_\delta.
\end{aligned}$$

É fácil ver quando $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$ em que $\mathbf{D}_\delta = \mathbf{0}$, recaímos no modelo linear que representa a primeira parcela. Salientamos aqui que as equações (2.8) e (2.10) representam os principais resultados deste capítulo. Essas expressões generalizam as expressões (4) e (5) obtidas em Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010). Os cálculos dos cumulantes e as derivadas dos cumulantes e das expressões (2.7) e (2.9) estão apresentados com maiores detalhes no Apêndice A.

A partir dessas equações, definimos um estimador de máxima verossimilhanças corrigido $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ para o vetor de parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ da seguinte forma: $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\mathbf{B}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$, para o vetor de parâmetro $\boldsymbol{\beta}$ e $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \hat{\boldsymbol{\delta}} - \hat{\mathbf{B}}(\hat{\boldsymbol{\delta}})$, para o vetor de $\boldsymbol{\delta}$ em que $\hat{\mathbf{B}}(\cdot)$ denota os EMV de $B(\cdot)$ avaliado no ponto $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top, \hat{\boldsymbol{\delta}}^\top)^\top$. Esses vieses dos EMV corrigidos passam a ter viés de ordem $O(n^{-2})$ pois $\mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\boldsymbol{\beta}} + O(n^{-2})$ e $\mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}) = \hat{\boldsymbol{\delta}} + O(n^{-2})$ (CORDEIRO; VASCONCELLOS, 1997). Espera-se que os estimadores corrigidos tenham propriedades melhores do que os EMV $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top, \hat{\boldsymbol{\delta}}^\top)^\top$ cujo viés é de ordem $O(n^{-1})$ em amostras finitas.

2.2.1.3 Estimador corrigido via Bootstrap

Uma forma alternativa de se obter o viés corrigido é através da técnica bootstrap, introduzido por Efron (1979) e capaz de responder a questões reais sem a necessidade de fazer suposições fortes ou de realizar cálculos analíticos complexos, mas com alta custo computacional. O método bootstrap é aplicado a diversos problemas estatísticos e permite a estimação de variâncias, intervalos de confiança, p-valores, a correção de viés, teste de hipóteses e outras quantidades de interesse da inferência estatística através da reamostragem direta dos dados, os quais são tratados como se fossem a própria população (ver Tibshirani e Efron (1993), Davison e Hinkley (1997) para mais detalhes). Existem duas versões do método bootstrap: a primeira é o método bootstrap não-paramétrico e a segunda, o método bootstrap paramétrico. No nosso trabalho o foco é dado no método paramétrico.

Considere uma amostra aleatória $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ de tamanho n de uma variável aleatória Y com função de distribuição acumulada F e $\theta = t(F)$ um parâmetro que será estimado e denominado por $\hat{\theta} = s(\mathbf{y})$.

Denotamos por $B_F(\hat{\theta}, \theta)$, o viés do estimador $\hat{\theta} = s(\mathbf{y})$ e definido como segue:

$$B_F(\hat{\theta}, \theta) = E_F[s(\mathbf{y})] - t(F), \quad (2.11)$$

em que o subscrito F indica que a esperança matemática é calculada com base em F . O estimador de bootstrap do viés na versão paramétrica é definido substituindo a verdadeira distribuição F , que gerou a amostra original, pela distribuição estimada $F_{\hat{\theta}}$ na expressão (2.11). Assim, o viés bootstrap paramétrico é dado por

$$B_{F_{\hat{\theta}}}(\hat{\theta}, \theta) = E_{F_{\hat{\theta}}}[s(\mathbf{y})] - t(F).$$

Suponha que as B amostras bootstrap $(\mathbf{y}_1^{*1}, \mathbf{y}_2^{*2}, \dots, \mathbf{y}_n^{*B})$ são geradas de forma independente a partir da amostra original $\mathbf{y}$ e são calculadas as respectivas réplicas bootstrap $(\hat{\theta}^{*1}, \hat{\theta}^{*2}, \dots, \hat{\theta}^{*B})$ em que $\hat{\theta}^{*b} = s(\mathbf{y}^{*b})$ para $b = 1, 2, \dots, B$. Portanto, é possível aproximar a esperança bootstrap $E_{F_{\hat{\theta}}}[s(\mathbf{y})]$ pela média

$$\hat{\theta}^{*(\cdot)} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}^{*b} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B s(\mathbf{y})$$

Assim, a estimativa bootstrap paramétrico do viés baseada nas B réplicas bootstrap de $\hat{\theta}$ é dada por

$$B_{F_{\hat{\theta}}}(\hat{\theta}, \theta) = \hat{\theta}^{*(\cdot)} - s(\mathbf{y})$$

e utilizando a estimativa bootstrap paramétrico do viés, define-se o estimador corrigido até segunda ordem por bootstrap da forma

$$\check{\theta} = s(\mathbf{y}) - B_{F_\xi} = 2s(\mathbf{y}) - \hat{\theta}^{*(\cdot)}$$

em que $\check{\theta}$ é denominado CBC (Constant-Bias-Correcting) por MacKinnon e Jr (1998).

2.2.1.4 Estimação intervalar

Muitas vezes temos também interesse em realizar estimativas intervalares. Uma abordagem usual é empregar um intervalo de confiança assintótico (ICA), que resulta da distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhanças. Para n grande, o intervalo de confiança assintótico para o parâmetro $\theta = (\beta^\top, \delta^\top)^\top$ com um nível de confiança $100(1 - \alpha)\%$ é definido por:

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\beta} - z_{(\frac{\alpha}{2})} \hat{K}_\beta^{-\frac{1}{2}}, \hat{\beta} + z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \hat{K}_\beta^{-\frac{1}{2}} \right) \\ & \left(\hat{\delta} - z_{(\frac{\alpha}{2})} \hat{K}_\delta^{-\frac{1}{2}}, \hat{\delta} + z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \hat{K}_\delta^{-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

em que $\hat{K}_\beta^{-\frac{1}{2}}$ e $\hat{K}_\delta^{-\frac{1}{2}}$ representam os erros padrão assintóticos de $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$ respectivamente e com $z_{(\frac{\alpha}{2})}$ e $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ os quantis da distribuição normal padrão.

Queremos também construir um intervalo de confiança através da metodologia bootstrap para o parâmetro θ denominado por bootstrap-t (ICBt), que é obtido a partir da estatística $\mathcal{T}$ de uma amostra original $\mathbf{y}$ definida como $\mathcal{T} = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\widehat{\text{ep}}(\hat{\theta})}$, em que $\widehat{\text{ep}}(\hat{\theta})$ é o erro padrão estimado $\hat{\theta}$. Esta estatística pode ser estimada a partir das B amostras artificiais bootstrap geradas a partir de $\mathbf{y}$ como

$$\mathcal{T}^{*b} = \frac{\hat{\theta}^{*b} - \hat{\theta}}{\widehat{\text{ep}}^{*b}}$$

sendo $b = 1, 2, \dots, B$, em que $\hat{\theta} = s(\mathbf{y})$ é o valor estimado de θ a partir de $\mathbf{y}$ e $\hat{\theta}^{*b} = s(\mathbf{y}^{*b})$ e $\widehat{\text{ep}}^{*b}$ são valores estimados pelo bootstrap. Os percentis $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$ são estimados pelos valores $\hat{t}^{(\alpha/2)}$ e $\hat{t}^{(1-\alpha/2)}$ respectivamente de tal modo que

$$\frac{\#\{\mathcal{T}^{*b} \leq \hat{t}^{(\frac{\alpha}{2})}\}}{B} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\#\{\mathcal{T}^{*b} \leq \hat{t}^{(1-\frac{\alpha}{2})}\}}{B} = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (2.12)$$

Finalmente o intervalo de confiança bootstrap-t é dado por

$$\left(\hat{\beta} - \hat{t}^{(\alpha/2)} \widehat{\text{ep}}(\hat{\beta}), \hat{\beta} + \hat{t}^{(1-\alpha/2)} \widehat{\text{ep}}(\hat{\beta}) \right)$$

e

$$\left(\hat{\delta} - \hat{t}^{(\alpha/2)} \widehat{\text{ep}}(\hat{\delta}), \hat{\delta} + \hat{t}^{(1-\alpha/2)} \widehat{\text{ep}}(\hat{\delta}) \right),$$

respectivamente para β e δ , em que $\widehat{ep} \equiv \widehat{ep}(\hat{\theta})$. Um procedimento para obtenção das quantidades $\hat{t}^{(\alpha/2)}$ e $\hat{t}^{(1-\alpha/2)}$ consiste em ordenar as B réplicas bootstrap $\mathcal{T}^{*b}$, e as réplicas $B \times (\frac{\alpha}{2})$ e $B \times (\frac{1-\alpha}{2})$ são as quantidades $\hat{t}^{(\alpha/2)}$ e $\hat{t}^{(1-\alpha/2)}$ respectivamente, assumindo que $B \times (\frac{\alpha}{2})$ e $B \times (\frac{1-\alpha}{2})$ são inteiros. Caso $B \times (\frac{\alpha}{2})$ e $B \times (\frac{1-\alpha}{2})$ não forem inteiros, podemos utilizar o seguinte procedimento: assumindo que $0 < \alpha < 1/2$, seja $k = \lfloor (B + 1) \times \frac{\alpha}{2} \rfloor$ o maior inteiro $\leq (B + 1) \times \frac{\alpha}{2}$; então as quantidades $\hat{t}^{(\alpha/2)}$ e $\hat{t}^{(1-\alpha/2)}$ são dadas pelos k -ésimo e $(B + 1 - k)$ -ésimo elementos ordenados de $\mathcal{T}^{*b}$ respectivamente (LEMONTE, 2006; HALL, 1988). Podemos também construir o intervalo de confiança bootstrap percentil (ICP) com um nível de cobertura $1 - \alpha$, definidos pelos percentis $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$ e baseado na distribuição empírica de $\hat{F}$ de $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^\top, \hat{\delta}^\top)^\top$. Assim, podemos escrever o ICP para o vetor de parâmetro $\theta = (\beta^\top, \delta^\top)^\top$ como

$$\left(\hat{\beta}^{*(\alpha/2)}, \hat{\beta}^{*(1-\alpha/2)} \right) \text{ e } \left(\hat{\delta}^{*(\alpha/2)}, \hat{\delta}^{*(1-\alpha/2)} \right),$$

respectivamente para os vetores de parâmetros β e δ em que $\hat{\beta}^{*(\alpha/2)} = \hat{\delta}^{*(\alpha/2)} = \hat{F}^{-1}(\alpha/2)$ e $\hat{\beta}^{*(1-\alpha/2)} = \hat{\delta}^{*(1-\alpha/2)} = \hat{F}^{-1}(1 - \alpha/2)$. O procedimento para obtenção dos limites inferior e superior do intervalo percentil segue o mesmo que foi definido para o intervalo de confiança bootstrap-t.

2.2.2 Resultados Numéricos

Esta seção tem a finalidade de avaliar numericamente a qualidade das inferências feitas sobre o vetor de parâmetros θ nos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos, em amostras de tamanho finito e sob diferentes cenários. Os objetivos específicos podem ser resumidos como segue:

- i) Avaliar o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhanças ($\hat{\theta}$) e das suas versões corrigidas via Cox & Snell ($\tilde{\theta}$) e por bootstrap paramétrico ($\check{\theta}$), utilizando as seguintes medidas: viés, viés relativo (VR, definido como $100 \times (\text{viés}/\text{valor verdadeiro do parâmetro})\%$) e erro quadrático médio (EQM) (Tabelas 1 a 6 e 12 a 15);
- ii) Comparar as precisões das diferentes estimativas intervalares, em termos das coberturas empíricas (%) dos intervalos assintótico (ICA), bootstrap percentil (ICP) e bootstrap-t (ICB-t), aos níveis nominais 90%, 95% e 99% para o vetor de parâmetros θ (Tabelas 7 a 11).

A simulação de Monte Carlo é baseada no seguinte modelo de regressão:

$$y_l = \exp(\eta_l) + \varepsilon_l, \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

em que $\varepsilon_l \sim S(0, \exp(\tau_l), g)$, sendo os dois componentes sistemáticos definidos como: $\eta_l = \beta_0 + \beta_1 x_{l1} + \exp(\beta_2 x_{l2})$ e $\tau_l = \delta_0 + \delta_1 s_{l1} + \exp(\delta_2 s_{l2})$, $l = 1, 2, \dots, n$ com $p = 3$ e $q = 3$. Os valores verdadeiros do vetor de parâmetro β e δ da simulação são fixados em $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\delta_0 = 0, \delta_1 = 2, \delta_2 = 3$. Todas as covariadas x_{l1}, x_{l2} e s_{l1}, s_{l2} foram gerados a partir da distribuição uniforme $U(0, 1)$ e são fixadas durante todo o experimento. O número de réplicas de Monte Carlo e bootstrap foi fixado em 10.000 e 600, para os seguintes tamanhos de amostra $n = 20, 30, 40, 50$. Para o estudo de simulação foram consideradas três distribuições com erros simétricos, a saber: exponencial potência com parâmetro de forma $k = 0, 3$, t-Student com 4 graus de liberdade (ν , fixo) e Logística tipo II (LII). As simulações foram realizadas usando a versão 8.02 do Ox Doornik (2009).

Tabela 1 – Estimação pontual de β no modelo t-Student ($\nu = 4$)

n	Ests.	β_0			β_1			β_2		
		Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM
20	$\hat{\beta}$	-0.02806	-2.8055	0.00079	0.01327	1.3269	0.00018	-0.00398	-0.39771	0.00005
	$\tilde{\beta}$	-0.01601	-1.6009	0.00026	0.00733	0.73297	0.00005	-0.00196	-0.19556	0.00004
	$\check{\beta}$	-0.00978	-0.97833	0.00009	0.00402	0.40178	0.00001	-0.00056	-0.05589	0.00000
30	$\hat{\beta}$	-0.00864	-0.86404	0.00007	0.00582	0.58182	0.00003	-0.00442	-0.44164	0.00002
	$\tilde{\beta}$	-0.00433	-0.43325	0.00002	0.00245	0.24462	0.00001	-0.00187	-0.18716	0.00000
	$\check{\beta}$	-0.00208	-0.20844	0.00000	0.00044	0.04407	0.00000	-0.00088	-0.08843	0.00000
40	$\hat{\beta}$	-0.00550	-0.55030	0.00003	0.00044	0.04366	0.00000	0.00087	0.08655	0.00000
	$\tilde{\beta}$	-0.00244	-0.24374	0.00001	-0.00068	-0.06758	0.00000	0.00085	0.08518	0.00000
	$\check{\beta}$	-0.00145	-0.14488	0.00000	-0.00106	-0.10635	0.00000	0.00079	0.07903	0.00000
50	$\hat{\beta}$	-0.00426	-0.42613	0.00002	0.00394	0.39381	0.00001	-0.00244	-0.24408	0.00000
	$\tilde{\beta}$	-0.00191	-0.19141	0.00000	0.00211	0.21103	0.00000	-0.00099	-0.09909	0.00000
	$\check{\beta}$	-0.00104	-0.10429	0.00000	0.00095	0.09542	0.00000	-0.00051	-0.05087	0.00000

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 2 – Estimação pontual de δ no modelo t-Student ($\nu = 4$)

n	Ests.	δ_0			δ_1			δ_2		
		Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM
20	$\hat{\delta}$	-0.52113	-	0.27158	-0.05630	-2.81510	0.00317	0.02753	0.91781	0.00076
	$\tilde{\delta}$	-0.15783	-	0.02491	-0.04457	-2.22830	0.00198	0.01188	0.39613	0.00014
	$\check{\delta}$	-0.01139	-	0.00013	0.04941	2.47060	0.00244	-0.00002	-0.00076	0.00002
30	$\hat{\delta}$	-0.22299	-	0.49724	-0.19838	-9.91890	0.03935	0.01585	0.52820	0.00025
	$\tilde{\delta}$	-0.01562	-	0.00024	-0.12854	-6.42720	0.01652	0.00566	0.18858	0.00003
	$\check{\delta}$	-0.01659	-	0.00028	0.066711	3.33560	0.00445	-0.00019	-0.00635	0.00000
40	$\hat{\delta}$	-0.41425	-	0.17160	0.35031	17.5150	0.12271	0.01316	0.43861	0.00017
	$\tilde{\delta}$	-0.11574	-	0.01396	0.11749	5.87450	0.01380	0.00472	0.15733	0.00002
	$\check{\delta}$	0.010379	-	0.00011	-0.02194	-1.09680	0.00048	0.00048	0.01602	0.00000
50	$\hat{\delta}$	-0.34172	-	0.11677	0.31200	15.600	0.09734	0.01059	0.35331	0.00011
	$\tilde{\delta}$	-0.10141	-	0.01028	0.11395	5.69730	0.01298	0.00397	0.13247	0.00001
	$\check{\delta}$	0.00351	-	0.00000	-0.01499	-0.74967	0.00022	0.00027	0.00887	0.00000

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 3 – Estimação pontual de β no modelo Logístico tipo II

n	Est.	β_0			β_1			β_2		
		Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM
20	$\hat{\beta}$	-0.02193	-2.1934	0.00048	0.01077	1.07660	0.00012	-0.00768	-0.76783	0.00006
	$\tilde{\beta}$	-0.00775	-0.77463	0.00006	0.00368	0.36817	0.00001	-0.00516	-0.51572	0.00003
	$\breve{\beta}$	-0.01247	-1.2474	0.00016	0.00571	0.57052	0.00003	-0.00526	-0.52559	0.00003
30	$\hat{\beta}$	-0.0083	-0.83116	0.00007	0.00691	0.69054	0.00005	-0.00424	-0.42398	0.00002
	$\tilde{\beta}$	-0.00321	-0.32167	0.00001	0.00292	0.29240	0.00001	-0.00127	-0.12678	0.00000
	$\breve{\beta}$	-0.00467	-0.46742	0.00002	0.00398	0.39772	0.00001	-0.00231	-0.23117	0.00000
40	$\hat{\beta}$	-0.00658	-0.65836	0.00004	0.00195	0.19490	0.00000	0.00094	0.09409	0.00000
	$\tilde{\beta}$	-0.00288	-0.28871	0.00001	0.00057	0.05714	0.00000	0.00093	0.09289	0.00000
	$\breve{\beta}$	-0.00437	-0.43752	0.00002	0.00112	0.11211	0.00000	0.00097	0.09712	0.00000
50	$\hat{\beta}$	-0.00135	-0.13459	0.00000	-0.00011	-0.01059	0.00000	-0.00242	-0.24224	0.00000
	$\tilde{\beta}$	0.00149	0.14925	0.00000	-0.00235	-0.23534	0.00000	-0.00068	-0.06767	0.00000
	$\breve{\beta}$	0.00041	0.04138	0.00000	-0.00176	-0.17565	0.00000	-0.00127	-0.12736	0.00000

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 4 – Estimação pontual de δ no modelo Logístico tipo II

n	Est.	δ_0			δ_1			δ_2		
		Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM
20	$\hat{\delta}$	-1.05310	-	1.10901	-0.19579	-9.78970	0.03833	0.01868	0.62273	0.00035
	$\tilde{\delta}$	-0.70349	-	0.49489	-0.15198	-7.59890	0.02309	0.00543	0.18086	0.00003
	$\breve{\delta}$	0.01397	-	0.00019	0.01552	0.77604	0.00024	-0.00185	-0.06165	0.00000
30	$\hat{\delta}$	-0.83291	-	0.69734	-0.19188	-9.59390	0.36817	0.01069	0.35659	0.00011
	$\tilde{\delta}$	-0.63008	-	0.39700	-0.11626	-5.81320	0.01352	0.00251	0.08349	0.00001
	$\breve{\delta}$	-0.02419	-	0.00059	0.06945	3.47270	0.00482	0.00053	0.01767	0.00000
40	$\hat{\delta}$	-0.98044	-	0.96126	0.28800	14.4000	0.05235	0.00778	0.25928	0.00006
	$\tilde{\delta}$	-0.69633	-	0.48488	0.08018	4.00880	0.00643	0.00095	0.03178	0.00000
	$\breve{\delta}$	0.00989	-	0.00009	-0.01016	-0.50809	0.00010	-0.00006	-0.00201	0.00000
50	$\hat{\delta}$	-0.90867	-	0.82568	0.25339	12.6690	0.64206	0.00515	0.17165	0.00003
	$\tilde{\delta}$	-0.68305	-	0.46657	0.07744	3.87220	0.00599	0.00042	0.01416	0.00000
	$\breve{\delta}$	0.00518	-	0.00003	-0.01123	-0.56170	0.00012	0.00023	0.00762	0.00000

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 5 – Estimação pontual de β no modelo Exponencial Potência ($k = 0.3$)

n	Est.	β_0			β_1			β_2		
		Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM
20	$\hat{\beta}$	-0.02615	-2.61530	0.00068	0.01182	1.18290	0.00013	-0.00469	-0.46945	0.00005
	$\tilde{\beta}$	-0.01213	-1.21300	0.00014	0.00499	0.49947	0.00002	-0.00261	-0.26121	0.00000
	$\breve{\beta}$	-0.00794	-0.79400	0.00006	0.00295	0.29537	0.00000	-0.00155	-0.15552	0.00000
30	$\hat{\beta}$	-0.00855	-0.85537	0.00007	0.00752	0.75213	0.00005	-0.00499	-0.49967	0.00002
	$\tilde{\beta}$	-0.00359	-0.35901	0.00001	0.00360	0.36029	0.00001	-0.00209	-0.20942	0.00000
	$\breve{\beta}$	-0.00197	-0.19756	0.00000	0.00182	0.18219	0.00000	-0.00108	-0.10864	0.00000
40	$\hat{\beta}$	-0.00381	-0.38114	0.00001	0.00103	0.10305	0.00000	-0.00017	-0.01762	0.00000
	$\tilde{\beta}$	-0.00023	-0.02345	0.00000	-0.00026	-0.02615	0.00000	-0.00020	-0.02007	0.00000
	$\breve{\beta}$	0.00021	0.02186	0.00000	-0.00049	-0.04986	0.00000	-0.00012	-0.01260	0.00000
50	$\hat{\beta}$	-0.00436	-0.43639	0.00001	0.00343	0.34351	0.00001	-0.00149	-0.14902	0.00000
	$\tilde{\beta}$	-0.00165	-0.16594	0.00000	0.00133	0.13358	0.00000	0.00021	0.02191	0.00000
	$\breve{\beta}$	-0.00141	-0.14115	0.00000	0.00089	0.08909	0.00000	0.00069	0.06903	0.00000

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 6 – Estimação pontual de δ no modelo Exponencial Potência ($k = 0.3$)

n	Est.	δ_0			δ_1			δ_2		
		Viés	VR(%)	EQM	Bias	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM
20	$\hat{\delta}$	-0.46835	-	0.21935	-0.12540	-6.26980	0.01572	0.02280	0.76029	0.00052
	$\tilde{\delta}$	-0.11141	-	0.01241	-0.06885	-3.44290	0.00474	0.01114	0.37141	0.00012
	$\check{\delta}$	-0.00960	-	0.00009	0.03097	1.54900	0.00095	0.00116	0.03869	0.00000
30	$\hat{\delta}$	-0.23280	-	0.05419	-0.15991	-7.9956	0.02557	0.01136	0.37868	0.00012
	$\tilde{\delta}$	-0.02371	-	0.00056	-0.08226	-4.1132	0.00676	0.00449	0.14968	0.00002
	$\check{\delta}$	-0.01037	-	0.00010	0.019803	0.99017	0.00039	0.00007	0.00265	0.00000
40	$\hat{\delta}$	-0.35953	-	0.12926	0.27475	13.7380	0.07549	0.00859	0.28639	0.00007
	$\tilde{\delta}$	-0.07301	-	0.00533	0.07268	3.63410	0.00528	0.00283	0.09433	0.00000
	$\check{\delta}$	0.00847	-	0.00007	-0.01807	-0.90359	0.00032	-0.00009	-0.00321	0.00000
50	$\hat{\delta}$	-0.29158	-	0.00001	0.25073	12.5360	0.00001	0.00620	0.20691	0.00000
	$\tilde{\delta}$	-0.06463	-	0.00000	0.07748	3.87440	0.00000	0.00276	0.09212	0.00000
	$\check{\delta}$	0.00463	-	0.00000	-0.00650	-0.32515	0.00000	0.00002	0.00073	0.00000

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Nas Tabelas 1 a 6 apresentamos as estimativas pontuais para o vetor de parâmetros considerando os modelos t-Student, logístico tipo II e exponencial potência, respectivamente.

Nos três modelos, observamos que os estimadores $\tilde{\beta}$ e $\check{\beta}$ apresentaram, em módulo, vieses relativos consideravelmente menores do que o viés relativo do estimador $\hat{\beta}$ para quase todos os tamanhos amostrais. No entanto, o estimador $\tilde{\beta}$ foi menos eficaz em relação ao estimador $\check{\beta}$. Por exemplo, no modelo t_4 , para $n = 20$, o viés do estimador $\tilde{\beta}_0$ foi 1.6009, enquanto que, o viés do estimador $\check{\beta}_0$ foi 0.97833. Observe que em alguns casos tivemos o viés dos estimadores $\tilde{\beta}$ e $\check{\beta}$ maiores do que o do estimador $\hat{\beta}$. Isto é o caso por exemplo, do modelo t_4 no qual para $n = 40$, o estimador corrigido $\tilde{\beta}_1(0.00106)$ teve o viés maior do que o estimador $\hat{\beta}$. Esta particularidade também observa-se nos modelos exponencial potência e o modelo LII. Por exemplo, no modelo Logístico tipo II para $n = 50$, os estimadores $\tilde{\beta}_1$ (0.00235) e $\check{\beta}_1$ (0.00176) tiveram viés maior que o estimador $\hat{\beta}_1$ (0.00011). Além disso, o estimador $\tilde{\beta}_0$ (0.0149) teve viés maior que o estimador $\hat{\beta}_0$ (0.000135). Já no modelo exponencial, para $n = 40$, o estimador $\tilde{\beta}_2$ (0.0002) teve um viés maior que o estimador $\hat{\beta}_1$ (0.00017). Apesar de o estimador $\hat{\beta}$ ter apresentado o menor viés nesses três casos, ele permanece em geral, menos eficaz em relação aos demais. Como esperado, os vieses relativos diminuem à medida que aumentamos o tamanho da amostra. Por outro lado, não foi possível determinar o viés relativo dos estimadores $\hat{\delta}$, $\tilde{\delta}$ e $\check{\delta}$, pois o valor verdadeiro do parâmetro δ_0 foi fixado em 0 (zero). Em relação ao viés, todos os modelos e em todos os tamanhos amostrais, os estimadores $\tilde{\delta}$ e $\check{\delta}$ apresentaram, em módulo, vieses consideravelmente menores quando comparar com o viés do estimador $\hat{\delta}$. Todavia, o estimador $\tilde{\delta}$ foi o menos eficaz em módulo em relação ao $\check{\delta}$ em todos os tamanhos amostrais, com uma exceção detectada no modelo t_4 para $n = 30$, o viés do estimador $\tilde{\delta}_0$ (0.01562) foi menor do que o viés do estimador $\check{\delta}_0$ (0.01659). Os estimadores $\hat{\beta}$, $\tilde{\beta}$ e $\check{\beta}$ apresentaram EQM similares. Por exemplo no modelo t_4 para $n = 40$, os estimadores $\hat{\beta}$, $\tilde{\beta}$ e $\check{\beta}$ apresentaram EQM dados por 0.000013, 0.00000, 0.00000, respectivamente, para $\hat{\beta}_0$, $\tilde{\beta}_1$ e $\check{\beta}_2$. Note que esta quase estabilidade se mantém em todos os tamanhos amostrais. Já os EQM dos estimadores $\hat{\delta}$, $\tilde{\delta}$ e $\check{\delta}$ diferem um pouco em alguns casos e nulas em outros.

Na sequência, com respeito às taxas de coberturas empíricas dos intervalos ICA, ICP e bootstrap-t para o vetor de parâmetros $\theta = (\beta^\top, \delta^\top)^\top$, novamente consideramos os modelos exponencial potência com $k = 0.3$, t_4 e modelo Logístico tipo II. Para isto, foram construídos 648 intervalos com níveis nominais de cobertura iguais a 90%, 95%, 99% para os tamanhos amostrais $n = 20, 30, 40, 50$, fixando $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 2$ e $\delta_2 = 3$. Todos os intervalos de confiança foram construídos de tal modo que contivessem o valor verdadeiro

do parâmetro com probabilidade $1 - \alpha$, com probabilidade $\alpha/2$ do limite inferior do intervalo ser maior que o verdadeiro valor de parâmetro e com $\alpha/2$ do limite superior do intervalo ser menor que o valor verdadeiro do parâmetro, para $0 < \alpha < 1/2$.

Tabela 7 – Estimação intervalar de β no modelo t-Student ($\nu = 4$)

α	Est.	Intervalos	Lim. inf				Lim. sup				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
10%	β_0	ICA	0.6232	0.8087	0.8441	0.8011	1.3206	1.1740	1.1449	1.1904	74.850	76.600	77.520	77.070
		ICP	0.5271	0.7378	0.8001	0.7421	1.3230	1.2091	1.1671	1.2321	74.680	84.200	82.850	84.040
		ICB-t	0.6289	0.7753	0.8234	0.7609	1.4257	1.2465	1.1905	1.2507	75.170	84.480	83.050	84.410
	β_1	ICA	0.8220	0.7885	0.8249	0.7952	1.2045	1.2231	1.1760	1.2127	74.840	75.290	77.220	77.270
		ICP	0.7935	0.7321	0.7827	0.7467	1.2626	1.3000	1.2228	1.2729	79.000	83.850	84.290	85.060
		ICB-t	0.7657	0.7116	0.7781	0.7349	1.2345	1.2796	1.2181	1.2611	79.800	84.420	84.630	84.700
	β_2	ICA	0.7514	0.8946	0.9438	0.9162	1.2406	1.0965	1.0579	1.0789	74.770	74.840	76.180	76.830
		ICP	0.7082	0.8538	0.9287	0.8885	1.2644	1.1157	1.0706	1.0953	76.020	82.230	83.310	84.470
		ICB-t	0.6534	0.8587	0.9249	0.8899	1.2173	1.1166	1.0669	1.0953	75.650	82.080	83.520	83.910
5%	β_0	ICA	0.5244	0.7569	0.8014	0.7458	1.4195	1.2258	1.1875	1.2456	84.770	86.550	87.160	86.940
		ICP	0.4071	0.6739	0.7540	0.6836	1.396	1.2528	1.2022	1.2813	82.710	90.270	89.040	90.670
		ICB-t	0.5596	0.7324	0.7888	0.7124	1.5509	1.3111	1.2373	1.3099	82.340	90.610	89.140	90.410
	β_1	ICA	0.7678	0.7269	0.7751	0.7361	1.2587	1.2847	1.2257	1.2718	84.700	85.490	87.010	87.340
		ICP	0.7406	0.6710	0.7337	0.6908	1.3241	1.3686	1.2726	1.3329	86.550	90.320	90.310	91.110
		ICB-t	0.7051	0.6430	0.7282	0.6749	1.2881	1.3406	1.2672	1.3170	87.240	90.980	91.030	91.160
	β_2	ICA	0.6820	0.8660	0.9277	0.8931	1.3100	1.1251	1.0740	1.1019	85.240	85.330	86.050	86.570
		ICP	0.6329	0.8157	0.9115	0.8623	1.3246	1.1409	1.0851	1.1152	83.970	89.140	89.220	90.590
		ICB-t	0.5529	1.3111	0.9075	0.8654	1.2562	1.1427	1.0808	1.1157	82.790	88.700	89.760	90.110

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

continuação...														
α	Est.	Intervalos	Lim. inf				Lim. sup				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
β_0	ICA		0.3389	0.6598	0.7214	0.6423	1.6049	1.3229	1.2675	1.3491	94.090	95.800	95.690	96.110
	ICP		0.0835	0.5045	0.6386	0.5433	1.5502	1.3419	1.2730	1.3824	92.620	96.800	96.180	97.000
	ICB-t		0.6289	0.7753	0.8234	0.6137	1.4257	1.2465	1.1905	1.4524	75.170	84.480	83.050	96.760
1%	ICA		0.6662	0.6114	0.6818	0.6251	1.3603	1.4002	1.3191	1.3828	94.010	95.380	95.530	96.450
	ICP		0.6032	0.5258	0.6177	0.5619	1.4707	1.5227	1.3808	1.4609	94.930	96.990	96.660	97.110
	ICB-t		0.7657	0.71168	0.7781	0.5469	1.2345	1.2796	1.2181	1.4459	79.800	84.420	84.630	97.230
β_2	ICA		0.5519	0.8123	0.8974	0.8499	1.4401	1.1788	1.1043	1.1452	93.820	95.020	95.190	95.890
	ICP		0.4116	0.7095	0.8668	0.7968	1.4546	1.1944	1.1151	1.1547	93.360	96.220	96.220	97.180
	ICB-t		0.6534	0.8587	0.9249	0.8141	1.2173	1.1166	1.0669	1.1617	75.650	82.080	83.520	96.770

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 8 – Estimação intervalar de β no modelo Logístico tipo II

α	Est.	Intervalos	Lim. inf				Lim. sup				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
10%	β_0	ICA	0.4675	0.7243	0.7732	0.7136	1.4886	1.2591	1.2136	1.2836	88.960	90.280	91.030	90.490
		ICP	0.6585	0.8043	0.8470	0.8064	1.2469	1.1582	1.1271	1.1806	62.830	72.120	71.760	72.360
		ICB-t	0.7137	0.8260	0.8606	0.8176	1.3025	1.1799	1.1407	1.1917	63.490	73.050	72.070	72.310
	β_1	ICA	0.7309	0.6888	0.7450	0.6943	1.2906	1.3250	1.2589	1.3054	88.600	88.680	90.010	90.530
		ICP	0.8409	0.7983	0.8347	0.8022	1.1963	1.2262	1.1711	1.2036	67.770	71.070	72.260	72.500
		ICB-t	0.8261	0.7876	0.8327	0.7961	1.1814	1.2155	1.1692	1.1976	68.320	71.550	72.760	72.800
	β_2	ICA	0.6334	0.8480	0.9175	0.8785	1.3512	1.1435	1.0844	1.1166	89.590	88.620	89.820	90.290
		ICP	0.7775	0.8909	0.9459	0.9154	1.1929	1.0881	1.0541	1.0728	63.820	71.480	71.440	72.710
		ICB-t	0.7514	0.8935	0.9442	0.9165	1.1687	1.0890	1.0523	1.0733	63.520	71.470	71.500	72.430
5%	β_0	ICA	0.3227	0.6485	0.7108	0.6328	1.6334	1.3349	1.2760	1.3644	94.510	95.680	96.200	96.220
		ICP	0.5719	0.7569	0.8114	0.7621	1.3070	1.1936	1.1554	1.2192	72.500	81.360	80.230	81.230
		ICB-t	0.6561	0.7912	0.8326	0.7794	1.3919	1.2278	1.1767	1.2364	72.210	81.400	80.790	81.400
	β_1	ICA	0.6516	0.5986	0.6721	0.6077	1.3699	1.4151	1.3317	1.3920	94.660	94.970	95.910	96.070
		ICP	0.8006	0.7508	0.7961	0.7583	1.2409	1.2778	1.2101	1.2491	76.300	79.630	80.610	80.980
		ICB-t	0.7820	0.7359	0.7938	0.7506	1.2222	1.2630	1.2078	1.2415	76.660	80.320	81.240	81.310
	β_2	ICA	0.5316	0.8061	0.8938	0.8447	1.4530	1.1854	1.1080	1.1504	94.410	94.880	95.490	96.310
		ICP	0.7205	0.8632	0.9330	0.8956	1.2391	1.1085	1.0652	1.0886	73.400	80.030	79.470	81.320
		ICB-t	0.6831	0.8682	0.9313	0.8980	1.2036	1.1100	1.0634	1.0896	72.690	79.600	79.960	80.740

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

continuação...														
α	Est.	Intervalos	Lim. inf				Lim. sup				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
β_0	ICA	0.0512	0.5063	0.5937	0.4813	1.9049	1.4770	1.3931	1.5160	98.400	98.980	99.340	99.460	
	ICP	0.3476	0.6347	0.7261	0.6600	1.4335	1.2652	1.2119	1.2964	85.890	91.940	90.900	91.380	
	ICB-t	0.5368	0.7207	0.7771	0.7034	1.6263	1.3514	1.2635	1.3397	84.750	91.810	91.480	91.480	
1%	ICA	0.5028	0.4295	0.5355	0.4452	1.5187	1.5843	1.4684	1.5545	98.740	98.880	99.090	99.390	
	ICP	0.7055	0.6402	0.7067	0.6603	1.3384	1.3905	1.2932	1.3435	88.290	91.110	91.930	91.800	
	ICB-t	0.6857	0.6233	0.7107	0.6562	1.3186	1.3736	1.2972	1.3394	89.180	91.940	92.290	91.760	
β_2	ICA	0.3408	0.7275	0.8494	0.7814	1.6438	1.2639	1.1524	1.2137	97.390	98.860	99.120	99.380	
	ICP	0.5672	0.7925	0.9020	0.8489	1.3374	1.1508	1.0877	1.1193	86.660	90.620	90.580	91.850	
	ICB-t	0.5178	0.8120	0.9044	0.8603	1.2762	1.1572	1.0884	1.1256	85.140	89.820	90.880	91.610	

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 9 – Estimação intervalar de β no modelo Exponencial potência ($k = 0.3$)

α	Est.	Intervalos	Lim. inf				Lim. sup				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
10%	β_0	ICA	0.5991	0.7951	0.8345	0.7864	1.3486	1.1877	1.1578	1.2048	75.530	77.340	77.220	77.790
		ICP	0.5045	0.7276	0.7905	0.7305	1.3441	1.2173	1.1785	1.2438	75.460	83.090	82.620	84.700
		ICB-t	0.6122	0.7673	0.8154	0.7491	1.4529	1.2569	1.2036	1.2623	74.730	84.260	82.730	84.840
	β_1	ICA	0.8064	0.7740	0.8124	0.7791	1.2173	1.2410	1.1896	1.2277	76.670	76.760	77.760	77.870
		ICP	0.7902	0.7277	0.7728	0.7328	1.2617	1.3094	1.2345	1.2845	78.680	83.940	84.390	84.510
		ICB-t	0.7639	0.7056	0.7675	0.7223	1.2352	1.2873	1.2293	1.2740	79.820	84.870	85.080	84.940
	β_2	ICA	0.7323	0.8864	0.9385	0.9111	1.2583	1.1035	1.0612	1.0858	76.960	76.340	77.770	77.620
		ICP	0.6968	0.8478	0.9243	0.8842	1.2756	1.1185	1.0723	1.1005	76.350	82.640	83.420	85.210
		ICB-t	0.6363	0.8540	0.9207	0.8858	1.2246	1.1204	1.0687	1.1006	75.370	82.140	83.770	84.470
5%	β_0	ICA	0.4928	0.7395	0.7887	0.7271	1.4548	1.2434	1.2037	1.2641	85.680	86.950	87.650	88.690
		ICP	0.3844	0.6653	0.7444	0.6747	1.4151	1.2599	1.2129	1.2919	83.080	89.900	89.050	90.730
		ICB-t	0.5452	0.7255	0.7817	0.7017	1.5783	1.3199	1.2504	1.3186	81.490	90.230	89.130	90.690
	β_1	ICA	0.7481	0.7078	0.7589	0.7155	1.2755	1.3072	1.2431	1.2913	86.850	87.330	87.900	88.070
		ICP	0.7440	0.6709	0.7255	0.6785	1.3152	1.3748	1.2830	1.3421	85.990	90.090	90.240	90.890
		ICB-t	0.7116	0.6402	0.7190	0.6647	1.2821	1.3441	1.2765	1.3283	86.800	90.890	91.100	90.870
	β_2	ICA	0.6577	0.8557	0.9211	0.8864	1.3329	1.1343	1.0785	1.1106	86.470	86.720	88.070	88.180
		ICP	0.6270	0.8118	0.9081	0.8590	1.3354	1.1420	1.0862	1.1197	83.560	88.830	89.380	91.070
		ICB-t	0.5358	0.8231	0.9040	0.8621	1.2611	1.1450	1.0819	1.1201	82.250	88.190	89.900	90.540

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

continuação...													
α	Est.	Intervalos	Lim. inf			Lim. sup			Cobertura				
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
β_0	ICA	0.2936	0.6351	0.7027	0.6159	1.6541	1.3477	1.2896	1.3754	94.810	96.330	96.450	96.890
	ICP	0.0819	0.5124	0.6398	0.5531	1.5552	1.3407	1.2772	1.3839	91.910	96.580	95.950	96.570
	ICB-t	0.4163	0.6468	0.7189	0.6116	1.8979	1.4752	1.3574	1.4421	90.380	96.140	95.540	96.490
1%	ICA	0.6389	0.5837	0.6586	0.5963	1.3848	1.4313	1.3434	1.4106	95.940	95.970	96.570	96.940
	ICP	0.6452	0.5479	0.6236	0.5635	1.4250	1.5125	1.3798	1.4547	93.910	96.470	96.260	96.500
	ICB-t	0.6047	0.5026	0.6223	0.5521	1.3830	1.4672	1.3784	1.4432	94.420	97.020	96.820	96.400
β_2	ICA	0.5178	0.7980	0.8885	0.8400	1.4727	1.1920	1.1111	1.1570	94.090	96.010	96.760	96.960
	ICP	0.4509	0.7234	0.8726	0.8025	1.4585	1.1866	1.1127	1.1558	92.670	95.370	96.170	96.970
	ICB-t	0.2962	0.7599	0.8705	0.8151	1.3290	1.1961	1.1087	1.1598	90.620	94.920	96.340	96.590

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

As Tabelas 7, 8 e 9 apresentam os intervalos de confiança dos β para os modelos fixando $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$. Percebe-se que todos os intervalos de confiança considerados contém o valor do espaço paramétrico de β e isto, independentemente do tamanho amostral e do valor de α . Observe que os limites inferior e limites superior nos modelos estão próximos entre si independentemente também do tamanho da amostra e do nível α . O intervalo de confiança de tipo assintótico no modelo *LII* apresentou as melhores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos da amostra e níveis nominais de cobertura, enquanto nos modelos exponencial potência e t_4 os intervalos de confiança bootstrap percentil (ICP) e bootstrap-t (ICB-t) apresentaram as melhores probabilidades de cobertura em todos os tamanhos amostrais e níveis nominais de cobertura seguido por ICA.

Tabelas 10, 11 e 12 apresentam os intervalos de confiança dos δ para os modelos em estudo fixando $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 2$ e $\delta_2 = 3$. Os resultados apontam para os modelos que nenhum intervalo abrangeu valores fora do espaço paramétrica de δ . O intervalo de confiança bootstrap-t apresentou as melhores probabilidades de cobertura e níveis nominais de cobertura. Por exemplo no modelo exponencial potência para $n = 50$ e um nível de $\alpha = 1\%$, a probabilidade de cobertura observada foi de 99.230%, 99.150% e 98.680% respectivamente para $\hat{\delta}_0$, $\hat{\delta}_1$ e $\hat{\delta}_2$. Neste mesmo cenário considerando $n = 30$, a cobertura observada foi de 99.340%, 99.080% e 98.970% respectivamente para $\hat{\delta}_0$, $\hat{\delta}_1$ e $\hat{\delta}_2$.

Entretanto, no modelo *LII* fixando $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 2$ e $\delta_2 = 3$, o ICP apresentou os piores resultados de cobertura para $n = 50$ que são de 22%, 30%, 49% respectivamente para $\alpha = 10\%$, 5% e 1%.

Além desses resultados, outro estudo de simulação foi realizado para avaliar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhanças e suas versões corrigidas pelo método Cox-Snell e Bootstrap para os três modelos considerando o submodelo da dispersão. Para isto, foram considerados fixos os parâmetros $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 2$, o tamanho da amostra $n = 30$ e assim, variando somente o terceiro parâmetro da dispersão δ_2 . Vale ressaltar que isto é uma das contribuições fundamentais desse artigo para classe dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos.

Tabela 10 – Estimação intervalar de δ no modelo t-Student ($\nu = 4$)

α	Est.	Int.	Lim. inf				Lim. sup				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
10%	δ_0	ICA	-1.5673	-1.0859	-1.2691	-1.1009	0.5251	0.6399	0.4405	0.4174	63.750	69.540	65.450	65.990
		ICP	-2.8937	-1.8501	-2.2284	-1.8900	0.6568	0.9269	0.4518	0.4603	71.150	81.400	69.540	71.100
		ICB-t	-1.6989	-1.3724	-1.2801	-1.1428	1.8547	1.4061	1.4012	1.2094	93.250	93.200	91.600	91.750
	δ_1	ICA	-0.1522	0.3056	0.9929	1.1721	4.0396	3.2976	3.7076	3.4519	63.350	65.510	69.060	68.620
		ICP	-2.2592	-1.3534	0.5833	0.8405	5.5571	4.1005	4.8177	4.3750	83.790	83.020	80.690	79.740
		ICB-t	-1.6697	-0.4973	-0.1170	0.2489	6.1465	4.9566	4.1174	3.7835	95.210	94.280	92.460	92.270
5%	δ_2	ICA	2.9523	2.9479	2.9499	2.9487	3.1027	3.0838	3.0764	3.0725	69.190	74.300	74.470	75.810
		ICP	2.9434	2.9346	2.9369	2.9330	3.1581	3.1204	3.1065	3.1001	77.300	84.000	85.050	86.810
		ICB-t	2.8791	2.9000	2.9108	2.9128	3.1050	3.0909	3.0839	3.0824	89.620	89.940	89.370	90.180
	δ_0	ICA	-1.8639	-1.3306	-1.5114	-1.3161	0.8216	0.8845	0.6829	0.6326	74.650	80.880	77.330	78.020
		ICP	-3.3204	-2.1548	-2.5332	-2.1417	0.9759	1.1932	0.6895	0.6734	79.240	88.070	78.090	79.970
		ICB-t	-2.0178	-1.6385	-1.5176	-1.3554	2.2826	1.7116	1.7064	1.4620	97.250	96.680	95.910	96.020
δ_1	ICA	-0.7463	-0.1184	0.6082	0.8489	4.6337	3.7217	4.0924	3.7751	75.230	77.060	80.800	80.370	
	ICP	-3.3238	-2.0748	0.1329	0.4666	6.2743	4.5622	5.2305	4.7067	90.460	89.500	88.140	87.750	
	ICB-t	-2.3869	-0.9589	-0.5299	-0.0826	7.2111	5.6780	4.5677	4.1573	97.670	96.930	96.000	96.270	
δ_2	ICA	2.9310	2.9286	2.9320	2.9311	3.1240	3.1031	3.0943	3.0901	80.350	84.720	85.770	86.730	
	ICP	2.9179	2.9126	2.9168	2.9129	3.1773	3.1362	3.1208	3.1140	86.430	91.680	92.190	93.310	
	ICB-t	2.8540	2.8804	2.8936	2.8960	3.1259	3.1091	3.1008	3.0992	94.630	94.750	94.320	94.930	

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

continuação...														
α	Est.	Int.	Lim. inf				Lim. sup				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
δ_0	ICA		-2.4203	-1.7895	-1.9660	-1.7198	1.3780	1.3435	1.1375	1.0363	88.270	92.930	90.940	91.490
	ICP		-4.2742	-2.8217	-3.1922	-2.6843	1.6282	1.7240	1.1411	1.0712	90.310	95.050	89.530	90.540
	ICB-t		-2.6699	-2.1688	-1.9688	-1.7519	3.2396	2.3805	2.3666	2.0072	99.520	99.240	99.100	99.080
1%	ICA		-1.8609	-0.9140	-0.1136	0.2427	5.7483	4.5172	4.8142	4.3813	89.170	90.310	93.100	93.510
	ICP		-6.1476	-3.7850	-0.8703	-0.3460	7.6709	5.4386	6.0189	5.3345	97.070	95.930	96.100	96.030
	ICB-t		-3.7835	-1.8353	-1.3183	-0.7105	10.035	7.3882	5.5710	4.9700	99.480	99.060	99.050	98.960
δ_2	ICA		2.8910	2.8924	2.8984	2.8982	3.1640	3.1393	3.1280	3.1230	92.700	95.470	95.980	96.500
	ICP		2.8601	2.8632	2.8719	2.8682	3.2144	3.16570	3.1471	3.1397	96.390	98.170	98.490	98.760
	ICB-t		2.8027	2.8422	2.8604	2.8638	3.1692	3.1471	3.1360	3.1340	98.830	98.790	98.790	98.880
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)														

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 11 – Estimação intervalar de δ no modelo Logística tipo II

α	Est.	Intervalos	Lim. inf				Lim. sup				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
10%	δ_0	ICA	-1.9886	-1.6045	-1.7447	-1.5875	-0.1176	-0.0613	-0.2161	-0.2298	45.020	45.630	39.490	37.650
		ICP	-4.0422	-3.1322	-3.4259	-3.0923	-0.3883	-0.2419	-0.6388	-0.6368	38.080	41.110	24.660	22.180
		ICB-t	-1.7177	-1.4235	-1.3219	-1.1801	1.9398	1.4691	1.4666	1.2788	92.830	92.560	91.550	90.960
	δ_1	ICA	-0.0694	0.4707	1.0746	1.2343	3.6779	3.1455	3.5014	3.2725	56.110	58.970	62.280	61.980
		ICP	-2.6809	-1.4403	0.3355	0.6396	5.4319	4.1896	4.7858	4.3483	84.620	84.360	83.800	82.940
		ICB-t	-1.8234	-0.5733	-0.2098	0.1585	6.2893	5.0566	4.2405	3.8671	95.060	93.400	92.340	91.910
	δ_2	ICA	2.9509	2.9496	2.9509	2.9495	3.0865	3.0718	3.0646	3.0608	63.620	66.290	67.490	67.120
		ICP	2.9157	2.9136	2.9176	2.9128	3.1500	3.1162	3.1024	3.0952	84.920	87.950	88.410	88.790
		ICB-t	2.8692	2.8937	2.9040	2.9067	3.1117	3.0989	3.0903	3.0894	90.370	89.750	89.510	89.290
5%	δ_0	ICA	-2.2538	-1.8232	-1.9614	-1.7799	0.1475	0.1573	0.0004	-0.0374	55.590	56.710	50.820	48.260
		ICP	-4.4759	-3.4518	-3.7443	-3.3602	-0.0683	0.0251	-0.4023	-0.4251	48.690	52.250	33.450	30.890
		ICB-t	-2.0375	-1.6904	-1.5582	-1.3913	2.3749	1.7895	1.7856	1.5479	97.100	96.390	95.920	95.520
	δ_1	ICA	-0.6006	0.0915	0.7305	0.9454	4.2091	3.5247	3.8454	3.5614	68.060	71.250	74.310	73.920
		ICP	-3.7880	-2.1800	-0.1387	0.2548	6.1487	4.6655	5.2139	4.6968	91.160	90.120	90.650	89.870
		ICB-t	-2.5403	-1.0493	-0.6379	-0.1900	7.3963	5.7963	4.7147	4.2520	97.680	96.310	96.240	95.900
	δ_2	ICA	2.9316	2.9323	2.9348	2.9337	3.1057	3.0891	3.0807	3.0766	75.560	78.240	79.520	79.020
		ICP	2.8870	2.8888	2.8951	2.8902	3.1700	3.1326	3.1171	3.1094	91.930	93.850	94.400	94.580
		ICB-t	2.8430	2.8733	2.8861	2.8895	3.1343	3.1188	3.1086	3.1077	95.190	94.960	94.670	94.550

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

continuação...																	
α	Est.	Intervalos	Lim. inf				Lim. sup				Cobertura						
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$			
δ_0	ICA		-2.7513	-2.2335	-2.3678	-2.1409	0.6450	0.5676	0.4069	0.3235	72.850	74.550	69.320	67.260			
	ICP		-5.4266	-4.1424	-4.4345	-3.9305	0.5915	0.5529	0.0445	-0.0355	67.620	71.660	53.270	49.680			
	ICB-t		-2.6973	-2.2176	-2.0048	-1.7797	3.3290	2.4828	2.4772	2.1212	99.650	99.140	99.140	98.960			
1%	ICA		-1.5970	-0.6196	0.0852	0.4034	5.2054	4.2359	4.4907	4.1033	83.980	85.900	88.740	88.710			
	ICP		-6.7230	-3.9120	-1.1930	-0.5646	7.5393	5.5607	6.0313	5.3576	97.170	96.380	97.400	97.120			
	ICB-t		-3.9308	-1.9444	-1.4553	-0.8508	10.331	7.5282	5.7690	5.0715	99.620	99.100	99.250	98.990			
δ_2	ICA		2.8956	2.8998	2.9046	2.9041	3.1418	3.1216	3.1110	3.1062	89.730	91.820	92.480	92.490			
	ICP		2.8218	2.8335	2.8448	2.8393	3.2083	3.1626	3.1439	3.1354	98.310	98.840	99.020	98.800			
	ICB-t		2.7900	2.8343	2.8521	2.8569	3.1805	3.1594	3.1465	3.1456	98.840	98.830	98.850	98.620			

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 12 – Estimação intervalar de δ -Modelo Exponencial potência ($k = 0.3$)

α	Est.	Intervalos	Lim. inf				Lim. inf				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
10%	δ_0	ICA	-1.3702	-0.9766	-1.0963	-0.9459	0.4334	0.5110	0.3772	0.3628	64.330	68.750	66.260	67.220
		ICP	-2.5733	-1.7061	-1.9418	-1.6393	0.5107	0.6917	0.3583	0.3784	71.150	79.260	69.040	71.640
		ICB-t	-1.4473	-1.1569	-1.0772	-0.9608	1.6391	1.2421	1.2237	1.0582	92.300	92.760	90.910	91.150
	δ_1	ICA	0.0681	0.5507	1.1049	1.2682	3.6810	3.1295	3.4446	3.2332	62.950	65.670	69.510	69.360
		ICP	-1.9085	-0.7791	0.7194	0.9673	4.9875	3.8550	4.3896	4.0120	84.380	84.470	82.430	81.550
		ICB-t	-1.2383	-0.1747	0.1599	0.4894	5.6577	4.4593	3.8301	3.5342	93.170	93.410	91.630	92.330
	δ_2	ICA	2.9577	2.9525	2.9539	2.9526	3.0879	3.0702	3.0633	3.0598	68.050	73.830	75.030	75.000
		ICP	2.9424	2.9346	2.9372	2.9329	3.1369	3.1008	3.0879	3.0816	79.760	86.480	87.630	88.370
		ICB-t	2.8952	2.9138	2.9229	2.9249	3.0971	3.0825	3.0751	3.0743	89.690	89.840	89.800	89.160
5%	δ_0	ICA	-1.6258	-1.1875	-1.3052	-1.1315	0.6891	0.7219	0.5861	0.5483	75.370	79.590	77.340	78.840
		ICP	-2.9620	-1.9845	-2.2153	-1.8677	0.7675	0.9077	0.5484	0.5503	78.630	86.030	77.080	79.570
		ICB-t	-1.7039	-1.3727	-1.2672	-1.1324	2.0287	1.5210	1.4975	1.2873	96.370	96.560	95.520	96.000
	δ_1	ICA	-0.4439	0.1851	0.7732	0.9897	4.1931	3.4950	3.7763	3.5117	74.320	77.450	80.810	81.090
		ICP	-2.8325	-1.3835	0.3270	0.6440	5.6221	4.2639	4.7540	4.3051	91.050	90.910	89.310	89.110
		ICB-t	-1.8729	-0.5837	-0.2044	0.1963	6.5816	5.0636	4.2224	3.8574	96.930	96.600	95.860	96.470
	δ_2	ICA	2.9393	2.9358	2.9383	2.9374	3.1063	3.0869	3.0788	3.0750	78.930	84.600	86.270	85.850
		ICP	2.9184	2.9140	2.9186	2.9141	3.1539	3.1145	3.1000	3.0933	88.870	93.180	93.820	94.000
		ICB-t	2.8736	2.8973	2.9086	2.9113	3.1169	3.0998	3.0910	3.0902	94.800	94.860	94.460	94.530

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

continuação...														
α	Est.	Intervalos	Lim. inf				Lim. inf				Cobertura			
			$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
δ_0	ICA		-2.1054	-1.5831	-1.6970	-1.4795	1.1687	1.1175	0.9779	0.8963	88.520	92.260	90.750	91.690
	ICP		-3.8268	-2.5996	-2.8153	-2.3591	1.2817	1.3401	0.9071	0.8715	89.090	93.510	87.620	89.530
	ICB-t		-2.2180	-1.8047	-1.6257	-1.4526	2.8962	2.1379	2.0985	1.7808	99.470	99.340	99.130	99.230
1%	ICA		-1.4045	-0.5004	0.1511	0.4672	5.1537	4.1807	4.3984	4.0342	88.380	90.610	92.780	93.750
	ICP		-5.1554	-2.8161	-0.5622	-0.0656	6.8798	5.0523	5.4616	4.8635	97.220	96.970	96.710	96.990
	ICB-t		-3.1306	-1.3721	-0.9121	-0.3620	8.9045	6.4963	5.1118	4.5671	99.300	99.080	99.110	99.150
δ_2	ICA		2.9047	2.9045	2.9092	2.9089	3.1409	3.1182	3.1080	3.1035	92.150	95.590	96.400	96.190
	ICP		2.8634	2.8676	2.8768	2.8715	3.1866	3.1399	3.1223	3.1146	97.490	98.880	98.850	98.830
	ICB-t		2.8303	2.8656	2.8815	2.8855	3.1588	3.1360	3.1243	3.1239	98.710	98.970	98.840	98.680

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 13 – Estimação pontual de δ no modelo t_4 para $n = 30$

δ_2	Est.	δ_0			δ_1			δ_2		
		Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM
2	$\hat{\delta}$	-0.26249	-	0.06890	-0.12894	-6.44720	0.01662	0.03106	1.55320	0.00096
	$\tilde{\delta}$	-0.03776	-	0.00143	0.08688	-4.34420	0.00755	0.01149	0.57475	0.00013
	$\check{\delta}$	-0.02989	-	0.00089	0.07549	3.77480	0.00569	0.00136	0.06816	0.00000
2.25	$\hat{\delta}$	-0.25996	-	0.06758	-0.13770	-6.8850	0.01896	0.02866	1.2740	0.00082
	$\tilde{\delta}$	-0.03784	-	0.00143	-0.08448	-4.2244	0.00713	0.00995	0.44250	0.00009
	$\check{\delta}$	-0.03255	-	0.00105	0.09279	4.6396	0.00861	-0.00077	-0.03437	0.00000
2.5	$\hat{\delta}$	-0.25789	-	0.06650	-0.14064	-7.0321	0.01978	0.02514	1.0059	0.00063
	$\tilde{\delta}$	-0.03957	-	0.00156	-0.08265	-4.1329	0.00683	0.00938	0.37531	0.00000
	$\check{\delta}$	-0.03615	-	0.00131	0.10079	5.0394	0.01015	0.00036	0.01456	0.00000
3	$\hat{\delta}$	-0.22299	-	0.49162	-0.19838	-9.91890	0.03935	0.01585	0.52820	0.00025
	$\tilde{\delta}$	-0.01562	-	0.00024	-0.12854	-6.42720	0.01652	0.00566	0.18858	0.00003
	$\check{\delta}$	0.01659	-	0.00028	0.06671	3.33560	0.00445	-0.00019	-0.00635	0.00000

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 14 – Estimação pontual de δ no modelo Logístico tipo II para $n = 30$

δ_2	Est.	δ_0			δ_1			δ_2		
		Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM
2	$\hat{\delta}$	-0.86051	-	0.74047	-0.13181	-6.59070	0.01737	0.01737	0.86848	0.00030
	$\tilde{\delta}$	-0.64191	-	0.41204	-0.08077	-4.03880	0.00652	0.00132	0.06639	0.00000
	$\check{\delta}$	-0.03362	-	0.00113	0.07981	3.99100	0.00636	0.00420	0.21003	0.00001
2.25	$\hat{\delta}$	-0.84340	-	0.71132	-0.18604	-9.30220	0.03461	0.01845	0.82030	0.00034
	$\tilde{\delta}$	-0.62871	-	0.39527	-0.12093	-6.04670	0.01462	0.00297	0.13209	0.00001
	$\check{\delta}$	-0.02237	-	0.00050	0.05559	2.77980	0.00309	0.00124	0.05514	0.00000
2.5	$\hat{\delta}$	-0.83094	-	0.69046	-0.19118	-9.55910	0.03655	0.01427	0.57095	0.00020
	$\tilde{\delta}$	-0.61992	-	0.38430	-0.12148	-6.07420	0.01475	0.00128	0.05154	0.00000
	$\check{\delta}$	-0.01402	-	0.00019	0.06028	3.01400	0.00363	-0.00108	-0.04335	0.00000
3	$\hat{\delta}$	-0.22299	-	0.49162	-0.19838	-9.91890	0.03935	0.01585	0.52820	0.00025
	$\tilde{\delta}$	-0.01562	-	0.00024	-0.12854	-6.42720	0.01652	0.00566	0.18858	0.00003
	$\check{\delta}$	0.01659	-	0.00028	0.066710	3.33560	0.00445	-0.00019	-0.00635	0.00000

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 15 – Estimação pontual de δ do modelo Exponencial potência $k = 0.3$ para $n = 30$

δ_2	Est.	δ_0			δ_1			δ_2		
		Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM	Viés	VR(%)	EQM
2	$\hat{\delta}$	-0.26277	-	0.06904	-0.10532	-5.26610	0.01109	0.02353	1.17660	0.00055
	$\tilde{\delta}$	-0.03834	-	0.00147	-0.04889	-2.44460	0.00239	0.00957	0.47865	0.00009
	$\check{\delta}$	-0.01847	-	0.00034	0.03285	1.64250	0.00107	0.00168	0.08443	0.00000
2.25	$\hat{\delta}$	-0.24652	-	0.06077	-0.13863	-6.93170	0.01921	0.02133	0.94832	0.00045
	$\tilde{\delta}$	-0.02544	-	0.00064	-0.07136	-3.56810	0.00509	0.00807	0.35901	0.00006
	$\check{\delta}$	-0.00791	-	0.00006	0.02114	1.05750	0.00044	-0.00006	-0.00268	0.00000
2.5	$\hat{\delta}$	-0.24510	-	0.06007	-0.12686	-6.34280	0.01609	0.01776	0.71075	0.00031
	$\tilde{\delta}$	-0.02696	-	0.00072	-0.05728	-2.86440	0.00328	0.00675	0.27030	0.00004
	$\check{\delta}$	-0.01024	-	0.00010	0.03751	1.87590	0.00140	-0.00005	-0.00212	0.00000
3	$\hat{\delta}$	-0.23280	-	0.05419	-0.15991	-7.9956	0.02557	0.01136	0.37868	0.00012
	$\tilde{\delta}$	-0.02371	-	0.00056	-0.08226	-4.1132	0.00676	0.00449	0.14968	0.00002
	$\check{\delta}$	-0.01037	-	0.00010	0.019803	0.99017	0.00039	0.00007	0.00265	0.00000

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

As Tabelas 13, 14 e 15 apresentam os resultados dessa simulação para $\delta_2 = 2.0, 2.25, 2.50$ e 3 para cada um dos três modelos. Percebe-se que para os modelos considerados as estimativas $\check{\delta}$ possuem vieses menores em relação a estimativa $\hat{\delta}$. Por exemplo no modelo Exponencial Potência (Tabela 15) para $n = 30$ e $\delta_2 = 2.25$, os vieses $\check{\delta}$ em módulo, são respectivamente de $0.00791, 0.02114, 0.00006$ para $\hat{\delta}_0, \hat{\delta}_1$ e $\hat{\delta}_2$ enquanto os vieses do estimador $\hat{\delta}$ dos mesmos, em módulo, são de $0.24652, 0.133863, 0.02133$ e para $\tilde{\delta}$, esses vieses estão na ordem de $0.02544, 0.07136, 0.00807$. Observa-se na Tabela 13 para o modelo t_4 e considerando $n = 30$ e $\delta_2 = 2.25$, os vieses $\check{\delta}$ em módulo, são respectivamente de $0.03255, 0.09279, 0.00077$ para δ_0, δ_1 e δ_2 enquanto os vieses do estimador $\hat{\delta}$ dos mesmos, em módulo, são de $0.25996, 0.13770, 0.02866$ e para $\tilde{\delta}$, esses vieses estão na ordem de $0.03784, 0.08448, 0.00995$. Mesma observação na Tabela 14 considerando o modelo LII para $n = 30$ e $\delta_2 = 2.25$, os vieses $\check{\delta}$ em módulo, são respectivamente de $0.02237, 0.05559, 0.00124$ para δ_0, δ_1 e δ_2 enquanto os vieses do estimador $\hat{\delta}$ dos mesmos, em módulo, são de $0.84340, 0.18604, 0.01845$ e para $\tilde{\delta}$, esses vieses estão na ordem de $0.62871, 0.12093, 0.00297$.

Note que o estimador $\hat{\delta}$ tende a subestimar δ_0 e δ_1 e superestimar δ_2 e suas respectivas estimativas corrigidas produzem tendências semelhantes que $\hat{\delta}$. Da mesma forma, $\check{\delta}$ tende a subestimar $\hat{\delta}_0$ e $\hat{\delta}_2$ e superestimar $\hat{\delta}_1$. Em todos os modelos, os estimadores $\hat{\delta}, \tilde{\delta}$ e $\check{\delta}$ produzem tendências negativas para $\hat{\delta}_0$ e efeitos opostos entre δ_1 e δ_2 . Observa-se que a medida que o valor de δ_2 aumenta, os vieses dos estimadores de máxima verossimilhanças $\hat{\delta}$, em módulo, diminuem respectivamente para δ_0 e δ_2 , porém aumentam para δ_1 com um tamanho de amostra fixado em $n = 30$. Portanto, δ_2 pode ser considerado como uma variável moderadora na variabilidade para o submodelo da dispersão do modelo exponencial potência, modelo t_4 e modelo LII . Importante ressaltar que esses resultados não se generalizam para todos os tamanho em estudo pois fixamos especificamente $n = 30$. Adicionalmente vários valores dos EQM nas tabelas analisados aparecem nulos que, na verdade, não são por não considerar a raiz quadrada dos EQM.

Outro estudo de simulação foi considerado. Gallant (1975) analisou o conjunto de dados multivariados de 50 observações composto por três variáveis explicativas e duas respostas. Aqui nós propomos o modelo cuja resposta é exponencial com dois componentes sistemáticos definidos por duas funções de ligação logarítmica não lineares para a média e dispersão e

definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\log(\mu_l) &= \eta = \beta_0 + \beta_1 x_{l1} + \beta_2 \exp(\beta_3 x_{l2}) \quad \text{e} \\ \log(\phi_l) &= \tau = \delta_0 \exp(\delta_1 x_{l2}), \quad l = 1, 2, \dots, 50.\end{aligned}$$

Os verdadeiros valores do vetor de parâmetros β e δ são fixados em $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = -1$ e $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ para submodelo da média e da dispersão respectivamente. Para este conjunto de dados, foram considerados os seguintes modelos: t-Student com ($\nu = 4$), exponencial potência com ($k = 0.3$), logístico tipo II e o modelo Normal. Os resultados, apresentados na Tabela 16 mostram que os estimadores de máxima verossimilhanças e suas versão corrigidas estão próximos entre si nos modelos. O estimador corrigido tende a sobrestimar os parâmetros β_0 e β_3 do submodelo da média e δ_0 da dispersão e tende a subestimar β_2 nos modelos considerados. Importante ressaltar que os erros padrão do submodelo da média do modelo normal são maiores em relação aos outros modelos considerados. Dentre os modelos estudados, o modelo t_4 teve um AIC inferior seguido do modelo logístico tipo II, exponencial de potência com ($k = 0.3$) e modelo normal respectivamente.

Tabela 16 – Estimativas de máxima verossimilhanças (erro-padrão aproximado) e corrigidas pelo Cox-Snell para alguns modelos simétricos ajustados aos dados simulados de Gallant.

Models	$\hat{\beta}$				$\tilde{\beta}$			
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$	$\tilde{\beta}_3$
t-Student $\nu = 4$	0.91708 (0.09351)	1.00650 (0.01192)	1.07260 (0.09026)	-0.87115 (0.11370)	0.92917 (0.09997)	1.00640 (0.01272)	1.06060 (0.09652)	-0.87082 (0.12280)
Power-Exponencial $k = 0.3$	0.95093 (0.11758)	1.02520 (0.01620)	1.02250 (0.11066)	-0.92403 (0.17301)	0.97437 (0.12754)	1.02560 (0.01788)	0.99894 (0.12033)	-0.92548 (0.19145)
Logistic II	0.93818 (0.10498)	1.01760 (0.01448)	1.04380 (0.09980)	-0.90435 (0.14298)	0.95486 (0.11204)	1.01760 (0.01548)	1.02710 (0.10662)	-0.90413 (0.15466)
Normal	0.97965 (0.12386)	1.03810 (0.01795)	0.98488 (0.11615)	-0.97735 (0.20821)	1.00660 (0.13849)	1.03810 (0.02123)	0.95806 (0.13056)	-0.97703 (0.23580)

Models	$\hat{\delta}$		$\tilde{\delta}$		$AIC - Modelos$
	$\hat{\delta}_0$	$\hat{\delta}_1$	$\tilde{\delta}_0$	$\tilde{\delta}_1$	
t-Student $\nu = 4$	-2.52460 (0.42488)	0.40701 (0.24330)	-2.40050 (0.42409)	0.41604 (0.25479)	32.33
Power-Exponencial $k = 0.3$	-1.25180 (0.30186)	1.18030 (0.29723)	-1.17060 (0.30225)	1.17600 (0.31848)	57.97
Logistic II	-2.45190 (0.36185)	0.62973 (0.20191)	-2.35250 (0.36171)	0.63140 (0.21028)	47.38
Normal	-0.45907 (0.19367)	2.05900 (0.47197)	-0.39842 (0.19463)	2.04710 (0.54701)	73.10

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

2.3 APLICAÇÃO

O conjunto de dados reais analisado neste artigo refere-se ao peso das lentes dos olhos de coelhos europeus na Austrália (*OryctolagusCuniculus*), y , em mg , e à idade do animal, x , em dias, numa amostra contendo 71 observações. O conjunto de dados encontra-se no Apêndice F. Esses dados foram analisados por Ratkowsky (1983) como um exemplo para ajuste de modelos de rendimento. Wei (1998) analisou o mesmo conjunto de dados e detectou a presença de observação aberrantes sob a estimação dos mínimos quadrados confirmando a evidência de heteroscedasticidade nos dados. O mesmo conjunto de dados foi reanalisado por Cysneiros, Paula e Galea (2005) considerando que a componente aleatória segue uma distribuição simétrica e ajustou a distribuição t-Student com $\nu = 4$ e adotando uma ligação identidade nos dois componentes sistemáticos. Assim, propusemos um modelo mais geral com funções logarítmicas de ligação tanto na média quanto na dispersão para reanalisarmos este conjunto de dados. Os componentes sistemáticos do modelo são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\log(\mu_l) &= \eta_l = \beta_0 - \beta_1(x_l + \beta_2)^{-1} \quad \text{e} \\ \log(\phi_l) &= \tau_l = \delta_0 \exp(\delta_1/s_l),\end{aligned}$$

em que $s_l = (x_l - \bar{x})$, $l = 1, 2, \dots, 71$. Foram ajustados para este conjunto de dados, os seguintes modelos: t-Student ($\nu = 4$) (modelo t_4), exponencial potência ($\kappa = 0.31$), logístico tipo II (modelo LII) e Normal. Os resultados das estimativas pontuais e intervalares, segundo o intervalo de confiança Bootstrap-t (ICB-t) dos parâmetros são apresentados nas Tabelas 17 a 20. Percebe-se que tanto os estimadores de máxima verossimilhanças quanto os estimadores corrigidos estão próximos entre si em todos os modelos. O estimador corrigido tende a superestimar os parâmetros β_2 e δ_1 nos modelos considerados, um comportamento esperado quando se referir às estimativas encontradas para o submodelo da média por Cysneiros, Paula e Galea (2005), que são de $\hat{\beta}_2 = 37,60$, $\hat{\beta}_2 = 35,86$ e $\hat{\beta}_2 = 35,29$ respectivamente para o modelo normal, LII e t_4 . Este comportamento também é observado nas simulações do presente artigo e também no artigo de Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010). Cabe salientar que os erros padrão do submodelo da média do modelo normal são maiores em relação aos outros modelos considerados. Dentre os modelos estudados, o modelo exponencial potência teve um Critério de Informação de Akaike (AIC=499.759) menor, seguido pelos modelos LII (AIC=499.934), t_4 (AIC=500.614) e normal (AIC=501.257) respectivamente. Esses resultados corroboram também com os encontrados por Cysneiros, Paula e Galea (2005) ao ajustar

três modelos (normal, t-Student ou t_4 e logística II) ao mesmo conjuntos de dados e concluiu que os modelos t_4 e logística II se ajustaram melhor a este conjunto de dados do que o modelo da normal.

Tabela 17 – Resultado da estimação pontual e intervalar dos parâmetros do modelo t-Student ajustados aos dados dos coelhos europeus.

Parâmetros	Estimação Pontual (Erros Padrão)			Intervalos de confiança Bootstrap-t			AIC
	$\hat{\theta}$	$\tilde{\theta}$	$\hat{\theta}$	ICB-t(90%)	ICB-t(95%)	ICB-t(99%)	
β_0	5.6381 (0.00428)	5.6386 (0.00430)	5.6375 (0.00427)	(5.6160;5.6632)	(5.6081;5.6667)	(5.5980;5.6764)	500.614
β_1	130.51 (1.86190)	130.86 (1.88390)	130.19 (1.85700)	(120.44;141.60)	(119.38;144.21)	(116.13;148.27)	
β_2	37.901 (1.16810)	38.529 (1.18900)	37.761 (1.16550)	(31.611;45.065)	(30.641;46.774)	(29.494;50.105)	
δ_0	3.5330 (0.22914)	3.6044 (0.22899)	3.5971 (0.22915)	(3.1964;3.9679)	(3.1326;4.0717)	(3.0644;4.2418)	500.614
δ_1	-2.5555 (1.55630)	-2.4952 (1.52590)	-2.5556 (1.52860)	(-5.4629;-0.26493)	(-6.2910;0.5209)	(-7.1142;1.1385)	

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 18 – Resultado da estimação pontual e intervalar dos parâmetros do modelo Exponencial Potência ($\kappa = 0.31$) ajustados aos dados dos coelhos europeus.

Parâmetros do Modelo Exponencial ($\kappa = 0.31$)	Estimação Pontual (Erros Padrão)		Intervalos de confiança Bootstrap-t			<i>AIC</i>
	$\hat{\theta}$	$\tilde{\theta}$	$\hat{\theta}$	ICB-t(90%)	ICB-t(95%)	ICB-t(99%)
β_0	5.6356 (0.004579)	5.6362 (0.004608)	5.6352 (0.004569)	(5.6108;5.6611)	(5.6051;5.6680)	(5.5981;5.6813)
β_1	128.48 (1.9631)	128.86 (1.9888)	128.13 (1.9544)	(117.47;140.25)	(116.05;142.52)	(114.02;150.11)
β_2	36.512 (1.2264)	37.191 (1.2509)	36.281 (1.2202)	(30.123;44.353)	(29.349;46.048)	(26.773;49.596)
δ_0	3.4641 (0.19673)	3.5406 (0.19647)	3.5326 (0.19642)	(3.2058;3.8714)	(3.1563;3.9328)	(3.0752;4.0636)
δ_1	-1.9482 (1.3592)	-1.8525 (1.3238)	-1.8362 (1.3257)	(-4.3353;0.34641)	(-4.7847;0.91870)	(-5.8954;1.6886)

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 19 – Resultado da estimação pontual e intervalar dos parâmetros do modelo Logístico Tipo II (*LII*) ajustados aos dados dos coelhos europeus.

Parâmetros do Modelo Logístico Tipo II	Estimação Pontual (Erros Padrão)		Intervalos de confiança Bootstrap-t		<i>AIC</i>
	$\hat{\theta}$	$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}$	ICB-t(90%) ICB-t(95%) ICB-t(99%)	
β_0	5.6370 (0.02173)	5.6375 (0.02187)	5.6367 (0.02171)	(5.6206; 5.6551) (5.6165; 5.6586) (5.6104; 5.6643)	
β_1	129.67 (9.4352)	130.06 (9.5541)	129.50 (9.4146)	(122.59; 137.33) (120.99; 138.45) (118.83; 142.45)	499.934
β_2	37.400 (5.9053)	38.081 (6.0200)	37.282 (5.8901)	(32.762; 42.446) (31.689; 43.452) (30.469; 45.714)	
δ_0	2.8483 (0.20504)	2.9174 (0.20514)	3.5209 (0.2033)	(3.1004; 3.9190) (3.0477; 4.0245) (2.9470 ; 4.1533)	
δ_1	-2.6358 (1.7245)	-2.6826 (1.6826)	-1.9681 (1.3829)	(-5.3553; 1.4084) (-6.3934; 2.0070) (-8.0346; 3.8364)	

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 20 – Resultado da estimação pontual e intervalar dos parâmetros do modelo Normal ajustados aos dados dos coelhos europeus.

Parâmetros do Modelo		Estimação Pontual (Erros Padrão)		Intervalos de confiança Bootstrap-t			AIC
		$\hat{\theta}$	$\tilde{\theta}$	$\hat{\theta}$	ICB-t(90%)	ICB-t(95%)	
Normal							
β_0		5.6347 (0.01248)	5.6353 (0.01256)	6.9057 (0.01246)	(5.6078; 5.6744)	(5.6051; 29.776)	(5.5957; 61.523)
β_1		128.29 (5.3668)	128.72 (5.4420)	128.11 (5.3519)	(117.77; 140.61)	(116.19; 143.85)	(112.37; 153.15)
β_2		36.490 (3.3445)	37.234 (3.4169)	36.343 (3.3328)	(29.917; 44.886)	(28.855; 47.175)	(26.291; 53.335)
δ_0		4.0510 (0.17068)	4.1290 (0.17026)	3.9252 (0.17039)	(3.7668; 4.4324)	(-2.105; 4.5044)	(-2.1098; 4.6171)
δ_1		-1.4509 (0.98244)	-1.2716 (0.94664)	-1.3272 (1.0017)	(-3.5637; 0.30294)	(-6.5256; 0.62917)	(-6.6331; 1.4981)
							501.257

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

2.4 CONCLUSÃO

Este artigo investigou o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhanças e suas versões corrigidas através dos métodos Cox-Snell e bootstrap nos modelos t_4 , LII e exponencial potência ($k = 0.3$) pertencente à classe dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos. Os resultados apontam para todos os modelos que os estimadores de máxima verossimilhanças corrigidos pelo método Cox-Snell ($\tilde{\beta}, \tilde{\delta}$) e bootstrap ($\check{\beta}, \check{\delta}$) apresentaram vieses consideravelmente menores que o viés dos estimadores $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$ em todos os tamanhos amostrais. Entretanto, dentre esses estimadores corrigidos, ($\check{\beta}, \check{\delta}$) se revelou ser mais eficaz que o estimador $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\delta}$ em praticamente todos os tamanhos amostrais considerados. Desta forma, as correções analíticas de Cox e Snell (1968) e por bootstrap são altamente eficazes apresentando desempenho favoráveis para reduzir o viés dos estimadores de máxima verossimilhanças dos vetores de parâmetros β e δ .

Como o esperado, quando aumentarmos o tamanho da amostra, os vieses e os erros quadráticos médios dos estimadores $\hat{\beta}, \tilde{\beta}, \check{\beta}$ e $\hat{\delta}, \tilde{\delta}, \check{\delta}$ diminuem. Portanto, as simulações indicam que a correção de viés em MNLSH com dispersão variável não linear, pode então ser usada para obter estimativas melhoradas em amostras de tamanho pequeno ou moderado.

No que tange ao comportamento das estimativas intervalares dos três modelos em estudo, percebe-se que, em geral, os intervalos de confiança bootstrap-t (ICB-t) e assintótico (ICA) apresentaram probabilidades de cobertura estimadas mais próximas dos níveis nominais de cobertura consideradas, seguido por intervalo de confiança bootstrap percentil (ICP). Os resultados da aplicação corroboram com os resultados da simulação para os três modelos especificamente em termo de correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhanças e de intervalo de confiança bootstrap-t. O modelo que representa melhor o conjunto de dados analisado é o modelo Exponencial Potência ($k = 0,31$) seguido por LII e t_4 .

3 CORREÇÃO DE BARTLETT NA CLASSE DOS MODELOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS

Resumo

Neste capítulo, derivamos uma fórmula matricial geral para o fator de correção de Bartlett à estatística da razão de verossimilhanças para testar conjuntamente e/ou separadamente o efeito da média e da dispersão nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH). Nesta classe de modelos, admitimos que a média e a dispersão não são constantes, assumindo para a dispersão qualquer estrutura heteroscedástica, tendo como caso particular, a heteroscedasticidade multiplicativa. Para o teste de heteroscedasticidade, o nosso trabalho generaliza os resultados apresentados em ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022) e em Cordeiro (2004). Através de simulação de Monte Carlo, avaliamos os desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças e razão de verossimilhanças bootstrap com suas respectivas versões corrigidas, em termos de tamanho e poder, em amostras finitas. Por fim, apresentamos uma aplicação empírica.

Palavras chaves: bootstrap; heteroscedasticidade; modelos simétrico; teste de razão verossimilhanças; poder.

3.1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a classe de distribuições simétricas tem recebido bastante atenção na literatura e abrange as distribuições tanto com caudas leves quanto caudas pesadas. As distribuições mais comuns pertencentes a essa família de distribuições são: normal, Cauchy, t-Student, t-Student generalizada, logística tipo I, logística tipo II, logística generalizada, exponencial potência, Kotz, Kotz generalizada, normal contaminada, entre outras.

Os modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos propostos por Cysneiros, Paula e Galea (2005) são definidos por um conjunto de variáveis aleatórias independentes tendo distribuição simétrica e admitem que tanto os parâmetros da média quanto os parâmetros da dispersão não são constantes para todas as observações. Para os parâmetros de dispersão admitimos que há uma estrutura heteroscedástica qualquer, tendo como caso particular, a heteroscedasticidade multiplicativa. Dizemos que o modelo é homoscedástico quando os parâmetros de dispersão forem todos iguais; caso contrário, dizemos que o modelo hete-

roscedástico. Nosso interesse é testar conjuntamente e/ou separadamente o efeito da média e da dispersão nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos.

Os testes mais comuns para verificar a presença de heteroscedasticidade nos dados são baseados nas estatísticas: razão de verossimilhanças (LR), escore (SR), wald (W) e gradiente (G). Geralmente, a distribuição exata dessas estatísticas, em amostras finitas, é desconhecida, então os testes derivados nas estatísticas LR , SR , W e G são baseados em aproximações assintóticas. Sob a hipótese nula $\mathcal{H}_0$, a distribuição de referência utilizada é a qui-quadrado (χ_q^2), em que q é o número de restrições impostas sob $\mathcal{H}_0$, com erro de ordem n^{-1} . Contudo, em amostras pequenas essas aproximações por χ_q^2 pode não ser muito satisfatórias, conduzindo a testes com taxas de rejeição distorcidas. Desse modo, faz-se necessário desenvolver técnicas de aperfeiçoamento das estatísticas de tal forma que melhore a aproximação dessas distribuições produzindo inferências mais precisas. Essa linha de pesquisa é denominada teoria assintótica de alta ordem, que tem como objetivo o refinamento de métodos inferenciais a fim de torná-los mais precisos em amostras finitas e principalmente de tamanho pequeno ou moderado. Um fator de correção foi introduzido por Bartlett (1937) cuja a ideia consiste em modificar a estatística por um fator produzindo uma estatística corrigida com o primeiro momento igual ao da distribuição χ_q^2 , com erro de ordem n^{-2} . Lawley (1956) obteve uma fórmula geral para a constante que compõe o fator de correção de Bartlett, esta fórmula envolve cumulantes conjuntos do logaritmo da função de verossimilhança.

Diversos trabalhos na literatura têm abordado a correção de Bartlett. Por exemplo, as correções de Bartlett e tipo-Bartlett já foram obtidas em Cordeiro (2004) na classe dos modelos de regressão simétricos, Melo, Ferrari e Cribari-Neto (2009), Stein, Silva e Duczmal (2014) nos modelos de regressão lineares, Lemonte, Cordeiro e Moreno (2012) nos modelos de regressão não lineares, Bayer e Cribari-Neto (2013) nos modelos de regressão beta, Medeiros, Ferrari e Lemonte (2017) na classe dos modelos de dispersão, Medeiros e Ferrari (2017) em modelos de regressão lineares simétricos e logo-simétricos, Araújo, Cysneiros e Montenegro (2020) e ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022) na classe dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos.

Neste capítulo iremos derivar uma fórmula matricial geral para o fator de correção de Bartlett à estatística da razão de verossimilhanças para testar conjuntamente e/ou separadamente o efeito da média e da dispersão nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos admitindo para a dispersão qualquer estrutura heteroscedástica.

3.1.1 Modelos Não Lineares Simétricos Heteroscedásticos

Seja y uma variável aleatória contínua com distribuição simétrica. Sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(y, \mu, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\phi}} g(u), \quad y \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \phi > 0, \quad (3.1)$$

em que μ representa o parâmetros de locação, ϕ o parâmetros de dispersão e $g(\cdot)$ a função geradora de densidade com $g(u) > 0$, $u > 0$ sendo $u = \phi^{-1}(y - \mu)^2$ e $\int_0^\infty u^{-1/2} g(u) du = 1$. Diferentes opções para a função g levam a diferentes distribuições simétricas com suas propriedades apresentadas por Cysneiros, Paula e Galea (2005). Note que g pode depender de parâmetros extras, ν , que é o caso do parâmetro de graus de liberdade da distribuição t-Student. Sempre que este for o caso, presume-se que tais parâmetros sejam fixos.

Assumimos que $y_1, \dots, y_n$ são variáveis aleatórias independentes em que cada y_l tem uma distribuição simétrica definida em (4.1) com μ_l o parâmetro de locação e ϕ_l o da dispersão. Adicionalmente, considere que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$ e $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)^\top$ variam entre observações através de estruturas não lineares de regressão. O modelo não linear simétrico heteroscedástico de regressão $y_l \sim S(\mu_l, \phi_l, g)$, $l = 1, \dots, n$, proposto por Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010) é definido por (4.1) e pelos componentes sistemáticos para o vetor de parâmetro da média $\boldsymbol{\mu}$ e o vetor do parâmetro da dispersão $\boldsymbol{\phi}$ descrito por

$$g(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\eta} = f_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{e} \quad h(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\tau} = f_2(\mathbf{S}, \boldsymbol{\delta}),$$

respectivamente, em que $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ representam as funções de ligação da média e da dispersão, conhecidas e biunívocas, sendo $\mathbf{X} = (x_{l1}, \dots, x_{lp})^\top$ e $\mathbf{S} = (s_{l1}, \dots, s_{lq})^\top$ matrizes conhecidas de covariáveis, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ e $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_q)^\top$, são vetores de p e q parâmetros desconhecidos a serem estimados, com $p < n$ e $q < n$ observações, f_1 e f_2 são funções contínuas e diferenciáveis com respeito aos componentes de $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\delta}$ tal que as matrizes de derivadas $\tilde{\mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ e $\tilde{\mathbf{S}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\delta}}$ tenham posto completos.

O logaritmo da função de verossimilhança (log-verossimilhança) do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\delta}^\top)^\top$ dado o vetor de observações $(y_1, \dots, y_n)^\top$ dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos pode ser expresso na forma:

$$\ell = \ell(\boldsymbol{\theta}) = \log f(y, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \log(\phi_l) + \sum_{l=1}^n t(z_l), \quad (3.2)$$

em que $t(z_l) = \log\{g(u_l)\}$, $u_l = z_l^2 = (y_l - \mu_l)^2/\phi_l$ e $l = 1, \dots, n$. Assumimos que a função ℓ é regular com respeito às derivadas em relação aos componentes de β e δ até a quarta ordem (COX; HINKLEY, 1974; SERFLING, 1980).

Para a obtenção dessas derivadas, utilizamos a notação: $\varphi_{abcde} = E(t_{(z_l)}^{(1)a} t_{(z_l)}^{(2)b} t_{(z_l)}^{(3)c} t_{(z_l)}^{(4)d} z^e)$ em que $a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $t^{(i)}(z_l) = \partial^i t(z_l)/\partial z_l^i$, $i = 1, 2, 3, 4$ e $l = 1, \dots, n$. Pelas condições de regularidade (COX; HINKLEY, 1974), tem-se que: $\varphi_{01001} = \varphi_{10000} = 0$, $\varphi_{20000} = -\varphi_{10000}$, $\varphi_{11001} = -(\varphi_{01000} + \varphi_{00101})$, $\varphi_{00010} = -\varphi_{10100}$, $\varphi_{11001} + \varphi_{00101} + \varphi_{01000} = 0$, $\varphi_{01002} = 2 - \varphi_{20002}$ e $\varphi_{40000} = -3\varphi_{21000}$. Os valores dos φ 's correspondentes a algumas distribuições simétricas podem ser encontrados em Uribe-Opazo, Ferrari e Cordeiro (2008) e as derivadas de algumas distribuições simétricas encontram-se no Apêndice I.

Definimos também as matrizes diagonais de dimensão $n \times n$, a saber: $\Lambda_l = \Delta_l = \text{diag}(1/\phi_1, \dots, 1/\phi_n)$, $M_i = \text{diag}(m_{i1}, \dots, m_{in})$ com elementos dados por $m_{il} = d^i \mu_l / d\eta_l^i$ é a i -ésima derivada de $\mu_l = g^{-1}(\eta_l)$ e $H_i = \text{diag}(h_{i1}, \dots, h_{in})$ com elementos $h_{il} = d^i \phi_l / d\tau_l^i$ é a i -ésima derivada de $\phi_l = g^{-1}(\tau_l)$ para $i = 1, \dots, n$.

A função escore total $U(\theta) = U(\beta^\top, \delta^\top)^\top$ e a matriz de informação total de Fisher são dadas, em notação matricial, por:

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} U_\beta(\theta) \\ U_\delta(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \ell(\theta) / \partial \beta \\ \partial \ell(\theta) / \partial \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^\top M_1 V \Lambda (y - \mu) \\ -\frac{1}{2} \tilde{S}^\top H_1 \Delta (\iota - V u) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

e

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} K_\beta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_\delta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

respectivamente, em que $(y - \mu) = (y_1 - \mu_1, \dots, y_n - \mu_n)^\top$, $V = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)^\top$ sendo $v_l = \frac{-2g'(z_l^2)}{g(z_l^2)}$, $g'(z_l^2) = \frac{\partial g(z_l^2)}{\partial z_l^2}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, ι um vetor $n \times 1$ de uns, $K_\beta = -(\varphi_{(0,1,0,0,0)}) (\tilde{X}^\top \Lambda M_1^2 \tilde{X})$ e $K_\delta = \frac{1}{4} (1 - \varphi_{(0,1,0,0,2)}) (\tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 \tilde{S})$. Os parâmetros β e δ são globalmente ortogonais e seus estimadores de máxima verossimilhanças $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$, respectivamente, são assintoticamente independentes.

O método de otimização não linear como o algoritmo Scoring de Fisher ou o algoritmo Newton-Raphson pode ser usado à obtenção dos EMV do vetor de parâmetros θ . Usamos o

processo iterativo Scoring de Fisher, o qual é definido como

$$\boldsymbol{\theta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(m)} + K_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}}^{-1} U_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}}, m = 0, 1, \dots$$

Esse processo pode ser reescrito como um processo de mínimos quadrados ponderados, como se segue:

$$\boldsymbol{\beta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(m)} + \left\{ \tilde{\mathbf{X}}^{(m)\top} \boldsymbol{\Lambda}^{(m)} \mathbf{M}_1^{2(m)} \tilde{\mathbf{X}}^{(m)} \right\}^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{(m)\top} \boldsymbol{\Lambda}^{(m)} \mathbf{M}_1^{2(m)} \boldsymbol{\zeta}_1^{(m)}, \quad (3.5)$$

e

$$\boldsymbol{\delta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(m)} + \left\{ \tilde{\mathbf{S}}^{(m)\top} \boldsymbol{\Delta}^{2(m)} \mathbf{H}_1^{2(m)} \tilde{\mathbf{S}}^{(m)} \right\}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{(m)\top} \boldsymbol{\Delta}^{(m)2} \mathbf{H}_1^{2(m)} \boldsymbol{\zeta}_2^{(m)} \quad (3.6)$$

em que $m = 0, 1, \dots$, $\boldsymbol{\zeta}_1 = -\frac{1}{\varphi_{(0,1,0,0,0)}} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{V}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$ e $\boldsymbol{\zeta}_2 = \frac{2}{(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1)} \mathbf{H}_1^{-1} \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\boldsymbol{\iota} - \mathbf{V}\mathbf{u})$ desempenham o papel de variáveis dependentes modificadas, enquanto que, $\boldsymbol{\Lambda}^{(m)} \mathbf{M}_1^{2(m)}$ e $\boldsymbol{\Delta}^{2(m)} \mathbf{H}_1^{2(m)}$ são matrizes de pesos que mudam a cada passo iterativo. Essas equações podem ser implementadas em qualquer software com uma rotina de regressão linear ponderada para calcular os EMV do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ iterativamente. Assintoticamente, os EMV de $\boldsymbol{\theta}$ têm distribuição normal com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariâncias $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$.

Introduzimos as seguintes notações de derivadas: $U_r = \partial \ell / \partial \beta_r$, $U_{rs} = \partial^2 \ell / (\partial \beta_r \partial \delta_s)$, $U_{rsT} = \partial^3 \ell / (\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \delta_T)$ e assim por diante, em que ℓ é a log-verossimilhanças e r, s, t são indexadores do espaço paramétrico. Consideramos os subscritos em minúsculo r, s, t, u para o componente do vetor $\boldsymbol{\beta}$ e os subscritos maiúsculo R, S, T, U para o componente do vetor $\boldsymbol{\delta}$. Os cumulantes conjuntos das derivadas da log-verossimilhanças são definidos como em Lawley (1956): $\kappa_{rs} = E(U_{rs})$, $\kappa_{r,s} = E(U_r U_s)$, $\kappa_{rsT} = E(U_{rsT})$, e assim por diante. Os cumulantes κ' s referem-se a um total sobre a amostra e, em geral, são de ordem $O(n)$. Denotamos as derivadas dos cumulantes em relação aos componentes do vetor $\boldsymbol{\beta}$ por $\kappa_{rs}^{(t)} = \partial \kappa_{rs} / \partial \beta_t$, $\kappa_{rs}^{(T)} = \partial \kappa_{rs} / \partial \delta_T$, e assim por diante. Por fim, adotaremos a notação proposta por Cordeiro e Paula (1989): $(r)_l = \partial \eta_l / \partial \beta_r$, $(rs)_l = \partial^2 \eta_l / (\partial \beta_r \partial \beta_s)$, $(rs, t)_l = \partial^2 \eta_l / (\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \eta_l / \partial \beta_t)$ e $(rs, T)_l = \partial^2 \eta_l / (\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \tau_l / \partial \delta_T)$, e assim por diante. Note que $\kappa^{r,s} = -\kappa^{rs}$ e $\kappa^{R,S} = -\kappa^{RS}$ em que cada κ sobrescritos corresponde ao elemento $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\beta}}^{-1}$ e $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\delta}}^{-1}$ da inversa da matriz de informação de Fisher respectivamente.

3.1.2 Teste da Razão de Verossimilhanças

Seja $\ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta})$ a log-verossimilhança dada em (3.2) que depende dos vetores de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1^\top, \boldsymbol{\beta}_2^\top)^\top$ e $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_1^\top, \boldsymbol{\delta}_2^\top)^\top$ sendo $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{p_1})^\top$, $\boldsymbol{\beta}_2 =$

$(\beta_{p_1+1}, \dots, \beta_p)^\top$, $\delta_1 = (\delta_1, \dots, \delta_{q_1})^\top$, $\delta_2 = (\delta_{q_1+1}, \dots, \delta_q)^\top$, com $p_1 \leq p$ e $q_1 \leq q$. Assumimos que $\ell(\beta, \delta)$ é regular com respeito às derivadas em relação aos componentes dos vetores β e δ até a quarta ordem. As condições de regularidades podem ser encontradas em (COX; HINKLEY, 1974).

Essas decomposições induzem às correspondentes partições das matrizes $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ e $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ em que $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ são sub-matrizes conhecidas de posto reduzido e de dimensões $n \times p_1$, $n \times p - p_1$, $n \times q_1$, $n \times q - q_1$, respectivamente.

Estamos interessados em testar as seguintes hipóteses:

(i) $\mathcal{H}_0^1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}, \delta_1 = \delta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^1$: pelo menos uma das igualdades é violada, ou seja, testar conjuntamente uma parte do vetor de parâmetros de interesse, enquanto que, o vetor de parâmetros $(\beta_2^\top, \delta_2^\top)^\top$ é considerado vetor de parâmetros de perturbação;

(ii) $\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^2$: pelo menos uma das igualdades é violada, ou seja, testar isoladamente uma parte do vetor de parâmetros de interesse, enquanto que, o vetor de parâmetros $(\beta_2^\top, \delta^\top)^\top$ é considerado vetor de parâmetros de perturbação;

(iii) $\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = \delta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^3$: pelo menos uma das igualdades é violada, ou seja, testar isoladamente uma parte do vetor de parâmetros de interesse, enquanto que, o vetor de parâmetros $(\delta_2^\top, \beta^\top)^\top$ é considerado vetor de parâmetros de perturbação. Note que $\beta_1^{(0)}$ e $\delta_1^{(0)}$ são vetores de valores nominais.

A estatística da razão de verossimilhanças para testar $\mathcal{H}_0^1$ versus $\mathcal{H}_1^1$ é dada por

$$LR^1 = 2[\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\delta}_1, \hat{\beta}_2) - \ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \delta_1^{(0)}, \tilde{\delta}_2)], \quad (3.7)$$

em que $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^\top$ e $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2)^\top$ são os vetores de estimadores de máxima verossimilhanças irrestritos de β e δ , sendo $\tilde{\beta}_2$ e $\tilde{\delta}_2$ os vetores de estimadores de máxima verossimilhanças restritos de β_2 e δ_2 , respectivamente.

A estatística da razão de verossimilhanças para testar $\mathcal{H}_0^2$ versus $\mathcal{H}_1^2$ é dada por

$$LR^2 = 2[\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\delta}) - \ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \tilde{\delta})], \quad (3.8)$$

em que $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^\top$ e $\hat{\delta}$ são os vetores de estimadores de máxima verossimilhanças irrestrito de β e δ , sendo $\tilde{\beta}_2$ e $\tilde{\delta}$ os vetores de estimadores de máxima verossimilhanças restritos de β_2 e δ , respectivamente.

A estatística da razão de verossimilhanças para testar $\mathcal{H}_0^3$ versus $\mathcal{H}_1^3$ é dada por

$$LR^3 = 2[\ell(\hat{\beta}, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2) - \ell(\tilde{\beta}, \delta_1^{(0)}, \tilde{\delta}_2)], \quad (3.9)$$

em que $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2$ são os vetores de estimadores de máxima verossimilhanças irrestritos de β , δ_1 e δ_2 , sendo $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\delta}_2$ o vetor de estimadores de máxima verossimilhanças restritos para β e δ_2 respectivamente.

Assintoticamente e sob $\mathcal{H}_0^1$, $\mathcal{H}_0^2$ e $\mathcal{H}_0^3$ as estatísticas LR^1, LR^2 e LR^3 (chamamos de $\mathcal{T}$) têm uma distribuição aproximadamente χ^2 com $p_1 + q_1$, p_1 e q_1 graus de liberdade, respectivamente. No entanto, quando o tamanho da amostra é pequeno, ou mesmo de tamanho moderado, estas aproximações para a distribuição χ^2 podem não ser precisas. Por esse motivo, se faz necessário, o uso de técnicas estatísticas para melhorar essa aproximação.

3.1.3 Teste da razão de verossimilhanças bootstrap

Uma técnica alternativa para melhorar testes baseados na estatística da razão de verossimilhanças, e outras estatísticas conhecidas na literatura (Wald, escore e gradiente), consiste em estimar a distribuição da estatística de teste através do método de reamostragem bootstrap paramétrico. Esta técnica foi introduzida por Efron (1979) e mais detalhada para testes de hipóteses em Efron e Tibshirani (1994) e utiliza um valor crítico a partir da distribuição nula da estatística de teste estimada pela reamostragem bootstrap.

Seja o vetor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ que contém n variáveis aleatórias independentes e suponha que $y_l \sim S(\mu_l, \phi_l)$, com $l = 1, \dots, n$. Como nosso interesse reside em realizar testes das hipóteses nulas definidas na Seção 3.1.2, o procedimento de teste bootstrap paramétrico é adotado nas avaliações numéricas e pode ser descrita através dos seguintes passos como apresentados em Queiroz (2011) :

- 1 Calcular a estatística de teste de interesse, $\mathcal{T}$, como descrito na Seção 3.1.2;
- 2 Construir a amostra de bootstrap $\mathbf{y}^*$, em que $y_l^* \sim S(\tilde{\mu}_l, \tilde{\phi}_l)$, com $\tilde{\mu}_l = \mu(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\beta})$ e $\tilde{\phi}_l = \phi(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\delta})$, em que $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\delta}$ são os vetores de estimativas restritas de máxima verossimilhanças, ou seja, sob a hipótese nula;
- 3 Estimar o modelo usando $\mathbf{y}^*$ como variável resposta, a fim de obter os estimadores de máxima verossimilhanças irrestritos e restritos de bootstrap e calcular a estatística $\mathcal{T}^*$;
- 4 Repetir os passos 2 e 3 um número grande de vezes, denotamos de B;
- 5 Calcular o quantil de interesse, $\hat{q}_{(1-\alpha)}$, da distribuição empírica das B realizações da estatística $\mathcal{T}^*$ obtidas usando os passos 2 até 4;

- 6 Realizar o teste utilizando a estatística $\mathcal{T}$ calculada no passo 1 junto com o valor crítico de bootstrap obtido no passo 5.

Importante ressaltar que o teste da razão de verossimilhanças bootstrap não usa um valor crítico obtido da distribuição nula assintótica, ele utiliza o valor crítico estimado da distribuição nula de $\mathcal{T}^*$. Assim, para o teste da razão de verossimilhanças bootstrap a estatística de teste bootstrap é dada por:

$$LR_{boot} = 2\{\ell(\hat{\theta}^{*b}, \mathbf{y}^{*b}) - \ell(\tilde{\theta}^{*b}, \mathbf{y}^{*b})\},$$

em que $\hat{\theta}^{*b}$ e $\tilde{\theta}^{*b}$ representa os EMV irrestrito e restrito do vetor $\theta^* = (\beta^*, \delta^*)^\top$, respectivamente, na b -ésima réplica bootstrap, com $b = 1, \dots, B$. Portanto, rejeita-se $\mathcal{H}_0$ se $LR_{boot} \geq \hat{q}_{(1-\alpha)}$. A regra de decisão pode ser expressa, também, em termos do valor- p aproximado por bootstrap, dado por

$$p^* = \frac{\#\{\mathcal{T}_b^* > \mathcal{T}\}}{B},$$

em que $\#$ denota a cardinalidade de um conjunto, $\mathcal{T}_b^*$ é a estatística de interesse obtida na b -ésima amostra bootstrap e $\mathcal{T}$ é a estatística de interesse obtida da amostra original $\mathbf{y}$. Aqui rejeita-se $\mathcal{H}_0$ se p^* for menor que do que o tamanho nominal selecionado.

3.1.4 Correção de Bartlett para a estatística LR

A estatística da razão de verossimilhanças (LR) tem, sob a hipótese nula, distribuição assintótica χ_k^2 em que k é o número de restrições imposta sob a hipótese nula e o erro de aproximação é de ordem n^{-1} . A aproximação da distribuição nula da estatística LR pode não ser muito satisfatória, em amostras finitas de tamanho pequeno ou mesmo moderado. Portanto, faz-se necessário o uso de alguns métodos estatísticos a fim de tornar essas estatísticas mais precisas em amostras finitas e principalmente de tamanho pequeno ou moderado.

Com o objetivo de melhorar essa aproximação, Bartlett (1937) desenvolveu um fator de correção dado por $c = (1 + d/k)$ para melhorar a distribuição da estatística LR de tal modo que a distribuição da estatística corrigida, digamos LR^* , tenha média mais próxima da distribuição qui-quadrado de referência do que a média de LR . A estatística da razão de verossimilhanças corrigida é, então, definida como segue:

$$LR^* = LR/(1 + d/k), \quad (3.10)$$

em que o fator d foi desenvolvido por Lawley (1956) e que será apresentado especificamente para cada teste em diante e k o número de restrição sob a hipótese nula. Este fator d envolve derivadas da log-verossimilhança até quarta ordem, é função dos cumulantes e derivadas dos cumulantes, é de ordem n^{-1} e sob a hipótese nula, $\mathbb{E}(LR^*) = k + O(n^{-3/2})$ sendo n o tamanho da amostra. LR^* tem distribuição assintótica χ_k^2 com erro de aproximação de ordem n^{-2} . Existem outras definições alternativas para a correção de Bartlett (LEMONTE; FERRARI; CRIBARI-NETO, 2010) que são equivalentes, tais como:

$$LR^{**} = LR \exp(-d/k) \quad \text{e} \quad LR^{***} = LR(1 - d/k),$$

quando termos de ordem menor do que n^{-1} são ignorados. Observe que a estatística LR^{**} tem a vantagem de sempre ser não negativa.

As derivadas da log-verossimilhança, os cumulantes e derivadas dos cumulantes para os componentes sistemáticos de vetor de parâmetro da média e da dispersão encontram-se no Apêndice A.

De acordo com Lawley (1956), podemos escrever o valor esperado da estatística da razão de verossimilhanças até a ordem $O(n^{-1})$ como segue:

$$\mathbb{E}[2\{\ell(\hat{\beta}, \hat{\delta}) - \ell(\beta, \delta)\}] = p + q + \epsilon_{p+q} + O(n^{-2}), \quad (3.11)$$

em que o termo ϵ_{p+q} é de ordem $O(n^{-1})$ e pode ser definido como:

$$\epsilon_{p+q} = \sum_{\beta, \delta} (\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}), \quad (3.12)$$

em que $\sum_{\beta, \delta}$ varia sob todas as combinações de $p + q$ vetores de parâmetros de $(\beta^\top, \delta^\top)^\top$ e os índices r, s, t, u, v e w variam em ambos os vetores de parâmetros β e δ . A notação do lado direito da equação (3.12), isto é, os λ 's são obtidos como segue:

$$\lambda_{rstu} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left(\frac{\kappa_{rstu}}{4} - \kappa_{rst}^{(u)} - \kappa_{rt}^{(su)} \right) \quad (3.13)$$

e

$$\lambda_{rstuvw} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{vw} \left\{ \kappa^{rtv} \left(\frac{\kappa_{suw}}{6} - \kappa_{sw}^{(u)} \right) + \kappa^{rtu} \left(\frac{\kappa_{svw}}{4} - \kappa_{sw}^{(v)} \right) + \kappa_{rt}^{(v)} \kappa_{sw}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} \right\}. \quad (3.14)$$

De acordo com Botter e Cordeiro (1997), o termo ϵ_{p+q} pode ser decomposto como segue:

$$\epsilon_{p+q} = \epsilon_p(\beta) + \epsilon_q(\delta) + \epsilon_{p,q}(\beta, \delta), \quad (3.15)$$

em que $\epsilon_p(\beta)$ depende apenas do componente sistemático para média, $\epsilon_q(\delta)$ depende apenas do componente sistemático para dispersão e $\epsilon_{p,q}(\beta, \delta)$ de ambos os componentes sistemáticos. Além disso, Lawley (1956) também demonstrou que:

$$\mathbb{E}[2\{\ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2) - \ell(\beta_1, \beta_2, \delta)\}] = (p+q) - (p_1 + q_1) + \epsilon_{(p+q)-(p_1+q_1)} + O(n^{-2}), \quad (3.16)$$

sendo o termo $\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)]}$ de ordem n^{-1} obtido analogamente ao termo ϵ_{p+q} dado na equação (3.12) com o $\sum$ estendendo-se apenas sobre os componentes dos vetores $(\beta_2^\top, \delta_2^\top)^\top$, ou seja, sobre os $(p+q) - (p_1 + q_1)$ parâmetros de perturbação.

Os cumulantes satisfazem as identidades de Bartlett, que facilitam muito os cálculos do termo ϵ_{p+q} . As identidades mais utilizadas são: $\kappa_{r,s} = -\kappa_{rs}$, $\kappa_{rst}^u = \kappa_{rstu} + \kappa_{rst,u}$, $\kappa_{r,s,t} = -\kappa_{rst} - \sum_{(3)} \kappa_{r,st}$, $\kappa_{rst}^{(u)} = \kappa_{rstu} + \kappa_{u,rst}$, $\kappa_{r,s,t} = 2\kappa_{rst} + \sum_{(3)} \kappa_{rs}^{(t)}$, $\kappa_{r,s,t,u} = -3\kappa_{rstu} + 2\sum_{(4)} \kappa_{rst}^{(u)} - \sum_{(6)} \kappa_{rs}^{(tu)} + \sum_{(3)} \kappa_{rs,tu}$ e $\kappa_{r,s,tu} = \kappa_{rstu} - 2\kappa_{rst}^{(u)} + \kappa_{tu}^{(rs)} - \kappa_{rs,tu}$.

3.1.4.1 Teste conjunto para o vetor de parâmetros da média e da dispersão

Nosso interesse é testar as seguintes hipóteses: $\mathcal{H}_0^1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}, \delta_1 = \delta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^1$: pelo menos uma das igualdades é violada, em que $(\beta_1^{(0)\top}, \delta_1^{(0)\top})^\top$ é o vetor de parâmetros de interesse, de dimensões $p_1 \times 1$ e $q_1 \times 1$, respectivamente. Aqui, $(\beta_2^\top, \delta_2^\top)^\top$ é o vetor de parâmetros de perturbação, de dimensões $(p - p_1) \times 1$ e $(q - q_1) \times 1$, respectivamente.

A estatística LR definida na equação (3.7) para testar $\mathcal{H}_0^1$ versus $\mathcal{H}_1^1$ pode ser reescrita como:

$$LR^1 = 2 \left[\{\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\delta}_1, \hat{\beta}_2) - \ell(\beta_1, \beta_2, \delta_1, \beta_2)\} - \{\ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \delta_1^{(0)}, \tilde{\delta}_2) - \ell(\beta_1, \beta_2, \delta_1, \beta_2)\} \right], \quad (3.17)$$

em que $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1^\top, \hat{\beta}_2^\top)^\top$ e $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1^\top, \hat{\delta}_2^\top)^\top$ são os estimadores de máxima verossimilhanças irrestritos de $(\beta^\top, \delta^\top)^\top$, sendo $(\tilde{\beta}_2^\top, \tilde{\delta}_2^\top)^\top$ os estimadores de máxima verossimilhanças restritos de $(\beta_2^\top, \delta_2^\top)^\top$, respectivamente. A partir das equações (3.11) e (3.16), segue que, sob $\mathcal{H}_0$, o valor esperado de LR^1 é dado por:

$$\mathbb{E}(LR^1) = (p_1 + q_1) \left(1 + \frac{\epsilon_p(\beta) - \epsilon_{p_2}(\beta_2) + \epsilon_q(\delta) - \epsilon_{q_2}(\delta_2) + \epsilon_{p,q}(\beta, \delta) - \epsilon_{p_2,q_2}(\beta_2, \delta_2)}{p_1 + q_1} \right) + O(n^{-2}).$$

Desse modo, a aproximação da distribuição pela distribuição $\chi^2_{p_1+q_1}$ pode ser melhorada pela estatística da razão de verossimilhanças modificada LR^* dada por:

$$LR^{1*} = LR^1/c_1, \quad (3.18)$$

em que o fator de correção de Bartlett $c_1 = (1 + d/k)$, é determinado através de:

$$d = \epsilon_p(\beta) - \epsilon_{p_2}(\beta_2) + \epsilon_q(\delta) - \epsilon_{q_2}(\delta_2) + \epsilon_{p,q}(\beta, \delta) - \epsilon_{p_2,q_2}(\beta_2, \delta_2) \quad \text{e} \quad k = p_1 + q_1. \quad (3.19)$$

A estatística LR^{1*} tem distribuição $\chi^2_{p_1+q_1}$ até ordem n^{-1} , sob $\mathcal{H}_0$. Um teste da razão de verossimilhanças modificado compara a estatística LR^{1*} com a distribuição $\chi^2_{p_1+q_1}$. Deve-se destacar que a correção não depende do valor da estatística LR , mas pode depender de parâmetros desconhecidos e, neste caso, estes devem ser substituídos por suas respectivas estimativas de máxima verossimilhanças sob $\mathcal{H}_0$, o que não afeta a ordem de aproximação resultante. Outras formas assintoticamente equivalentes para a estatística da razão de verossimilhanças corrigida, para o teste LR^1 são dadas respectivamente por:

$$LR^{1**} = LR^1 \cdot \exp(-d_1/k_1) \quad \text{e} \quad LR^{1***} = LR^1(1 - d_1/k_1), \quad (3.20)$$

em que $d_1 = d$ e $k_1 = k = p_1 + q_1$ são dados na equação (3.19), e sob $\mathcal{H}_0^1$, as estatísticas corrigidas LR^{1**} e LR^{1***} têm distribuição assintoticamente $\chi^2_{p_1+q_1}$.

Para o MNLSH, os termos na equação (3.12) são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned} \epsilon_p(\beta) = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1^2 \mathbf{Z}_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{Z}_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{2} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_3 [\mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{D}_\beta - 2\mathbf{C}_{\beta d}] \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 [\mathbf{D}_\beta^{(2)} - 2\mathbf{B}_{\beta d}] \boldsymbol{\iota} \\ & - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\frac{1}{2} \mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_\beta^{(3)} \mathbf{W}_3 - \frac{1}{4} \mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_\beta \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{W}_3 - \frac{1}{4} \mathbf{D}_\beta \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_\beta \{ \mathbf{W}_1 \mathbf{D}_\beta + 2\mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{W}_3 \} \right. \\ & \left. + \text{tr} \{ [\mathbf{W}_3 \mathbf{C}_\beta + \frac{1}{2} \mathbf{W}_1 \mathbf{B}_\beta] \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_\beta \} \right] \boldsymbol{\iota}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_q(\delta) = & \frac{1}{16} Q_{12}^2 \left\{ \boldsymbol{\iota}^\top [Q_1 \Delta_1^4 \mathbf{Z}_{\delta d}^2 + Q_2 \Delta_3 \mathbf{Z}_{\delta d}^2 + Q_3 \Delta_2 \mathbf{Z}_{\delta d}^2] \boldsymbol{\iota} \right. \\ & + \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 [Q_4 \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{D}_\delta + (2Q_4 + Q_7) \mathbf{C}_{\delta d}] \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{\iota}^\top Q_8 \Delta_1^2 [\mathbf{D}_\delta^2 - 2\mathbf{B}_{\delta d}] \boldsymbol{\iota} \\ & + \boldsymbol{\iota}^\top Q_9 \Delta_4 [2\mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{D}_\delta - 4\mathbf{C}_{\delta d}] \boldsymbol{\iota} \left. \right\} + \frac{Q_{12}^3}{64} [Q_{14} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta^3 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} \\ & + Q_{15} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} - \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 \mathbf{Z}_\delta^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + Q_{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d}^2 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{17} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + Q_{18} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{D}_\delta \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{D}_\delta \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{D}_\delta^2 \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \text{tr} \{ [(Q_{15} \Delta_1^3 - \frac{Q_{12}^2}{16} \Delta_4) \mathbf{C}_\delta - \frac{Q_{12}^2}{32} \Delta_1^2 \mathbf{B}_\delta] \Delta_1^2 \mathbf{Z}_\delta \} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_{p,q}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}) = & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{Z}_{\beta d} \right. \\
& + \frac{Q_{20}}{4} \boldsymbol{\Delta}_6 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{Z}_{\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{D}_\delta \mathbf{Z}_{\beta d} \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_{\delta d} \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d} \boldsymbol{\Delta}_4 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{D}_\delta \mathbf{Z}_{\beta d} \boldsymbol{\Delta}_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_\beta \mathbf{Z}_\beta \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_{\beta d} \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota}, \tag{3.23}
\end{aligned}$$

em que $\mathbf{Z}_\beta = \tilde{X}^\top K_\beta^{-1} \tilde{X}$ tem elementos dados por $z_{\beta_{il}} = \tilde{x}_i^\top K_\beta^{-1} \tilde{x}_l$, $\mathbf{Z}_\delta = \tilde{S}^\top K_\delta^{-1} \tilde{S}$, tem elementos dados por $z_{\delta_{il}} = \tilde{s}_i^\top K_\delta^{-1} \tilde{s}_l$, são matrizes de dimensão $n \times n$ positivas definidas de posto completo, $\boldsymbol{\iota}$ o vetor $n \times 1$ de uns, $\mathbf{Z}_\beta^{(3)} = \mathbf{Z}_\beta^{(2)} \odot \mathbf{Z}_\beta$, $\mathbf{Z}_\beta^{(2)} = \mathbf{Z}_\beta \odot \mathbf{Z}_\beta$ em que $\odot$ denota o produto Hadamard Rao (1973), ou seja, o elemento $(i - l)$ de $\mathbf{Z}_\beta^{(2)} = z_{\beta_{il}}^2$. Analogamente, o elemento $(i - l)$ de $\mathbf{Z}_\delta^{(2)}$ é $z_{\delta_{il}}^2$. Utilizamos a notação $\mathbf{Z}_{\beta d}$ e $\mathbf{Z}_{\delta d}$ para representar matrizes diagonais formadas pelos correspondentes elementos das diagonais das matrizes $\mathbf{Z}_\beta$ e $\mathbf{Z}_\delta$, respectivamente. As inversas das matrizes de informação de K_β e K_δ são, respectivamente, dadas por: $\mathbf{K}_\beta^{-1} = -\left(\varphi_{(0,1,0,0,0)}\right)^{-1} \left(\tilde{X}^\top \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{X}\right)^{-1}$ e $\mathbf{K}_\delta^{-1} = -4Q_{12}^{-1} \left(\tilde{S}^\top \boldsymbol{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \tilde{S}\right)^{-1}$. As matrizes $\tilde{X}_l$ e $\tilde{S}_l$ de dimensão $p \times p$ e $q \times q$, respectivamente, têm os (r, s) e (R, S) elementos dados por: $\tilde{x}_l = \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial \beta \partial \beta^\top}$ e $\tilde{s}_l = \frac{\partial^2 \tau_l}{\partial \delta \partial \delta^\top}$, respectivamente. Definimos também as matrizes quadradas $\mathbf{B}_\beta$ e $\mathbf{B}_\delta$ formadas pelos correspondentes elementos: $b_{\beta_{il}} = \text{tr}\left(K_\beta^{-1} \tilde{X}_i K_\beta^{-1} \tilde{X}_l\right)$ e $b_{\delta_{il}} = \text{tr}\left(K_\delta^{-1} \tilde{S}_i K_\delta^{-1} \tilde{S}_l\right)$. Além disso, as matrizes quadradas $\mathbf{C}_\beta$ e $\mathbf{C}_\delta$ são formadas pelos correspondentes elementos: $c_{\beta_{il}} = \text{tr}\left(\tilde{x}_l^\top K_\beta^{-1} \tilde{X}_i K_\beta^{-1} \tilde{x}_l\right)$ e $c_{\delta_{il}} = \text{tr}\left(\tilde{s}_l^\top K_\delta^{-1} \tilde{S}_i K_\delta^{-1} \tilde{s}_l\right)$ respectivamente. As matrizes diagonais $\mathbf{D}_\beta$ e $\mathbf{D}_\delta$ são formadas pelos correspondentes elementos: $d_{\beta_l} = \text{tr}\left(K_\beta^{-1} \tilde{x}_l\right)$ e $d_{\delta_l} = \text{tr}\left(K_\delta^{-1} \tilde{s}_l\right)$, respectivamente. Os escalares Q_1 a Q_{22} são expressos

por:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{\varphi_{(0,0,0,1,4)} - 6\varphi_{(0,0,1,0,3)} - 33\varphi_{(0,1,0,0,2)} + 15}{64}; Q_2 = \frac{11\varphi_{(0,1,0,0,2)} + 3\varphi_{(0,0,1,0,3)} - 5}{16}; \\
Q_3 &= -\frac{\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1}{16}; Q_4 = \frac{\varphi_{(0,0,1,0,3)} + \varphi_{(0,1,0,0,2)} + 1}{16}; Q_5 = \frac{Q_2}{2}; \\
Q_6 &= \frac{7 - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)}}{32}; Q_7 = -8Q_3; Q_8 = -Q_3; Q_9 = Q_8; Q_{10} = 32Q_6; \\
Q_{11} &= 15\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 17; Q_{12} = \varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1; Q_{13} = 7\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 9; \\
Q_{14} &= \frac{Q_{10}Q_{11}}{384} + \frac{Q_{12}^2}{4}; Q_{15} = \frac{3Q_{11}Q_{12}}{192} - \frac{9Q_{10}Q_{12}}{192} - \frac{Q_{12}^2}{2}; Q_{16} = \frac{Q_{10}Q_{13}}{256} + \frac{Q_{12}^2}{4}; \\
Q_{17} &= \frac{3Q_{12}Q_{13}}{128} - \frac{5Q_{10}Q_{12}}{128} - \frac{Q_{12}^2}{2}; Q_{18} = \frac{Q_{12}Q_{13}}{128} - \frac{3Q_{10}Q_{12}}{128} - \frac{Q_{12}^2}{4}; \\
Q_{19} &= \varphi_{(0,0,0,1,2)} + 7\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 8\varphi_{(0,1,0,0,0)}; Q_{20} = \varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}; \\
Q_{21} &= \varphi_{(0,0,0,1,2)} - 9\varphi_{(0,0,1,0,1)} - 24\varphi_{(0,1,0,0,0)}
\end{aligned}$$

e $Q_{22} = Q_{20}(12\varphi_{(0,1,0,0,0)} - Q_{20})$. Por fim, definimos também as matrizes diagonais $\mathbf{W}_1$ a $\mathbf{W}_3$ com seus respectivos elementos, dados por: $w_{1l} = \frac{m_{1l}^2}{\phi_l}$, $w_{2l} = \frac{m_{2l}^2}{\phi_l}$ e $w_{3l} = \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l}$. Definimos também as matrizes diagonais $\Delta_1 = \text{diag}\left\{\frac{h_{1l}}{\phi_l}, \dots, \frac{h_{1n}}{\phi_l}\right\}$, $\Delta_2 = \text{diag}\left\{\frac{h_{2l}}{\phi_l^2}, \dots, \frac{h_{2n}}{\phi_l}\right\}$, $\Delta_3 = \text{diag}\left\{\frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3}, \dots, \frac{h_{1n}^2 h_{2n}}{\phi_l^3}\right\}$, $\Delta_4 = \text{diag}\left\{\frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2}, \dots, \frac{h_{1n} h_{2n}}{\phi_l^2}\right\}$, $\Delta_5 = \text{diag}\left\{\frac{h_{1l} h_{3l}}{\phi_l^2}, \dots, \frac{h_{1n} h_{3n}}{\phi_l^2}\right\}$ e $\Delta_6 = \text{diag}\left\{\frac{h_{2l}}{\phi_l}, \dots, \frac{h_{2n}}{\phi_l}\right\}$.

Importante ressaltar que no modelo linear simétrico heteroscedástico, temos que:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{D}_\beta = \mathbf{D}_\delta = \mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}_\delta = \mathbf{C}_\beta = \mathbf{C}_\delta = \mathbf{0},$$

portanto, os termos da correção de Bartlett são dados por:

$$\begin{aligned}
\epsilon_p(\beta) &= \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1^2 \mathbf{Z}_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{Z}_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\
&\quad - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\frac{1}{2} \mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_\beta^{(3)} \mathbf{W}_3 - \frac{1}{4} \mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_\beta \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{W}_3 \right] \boldsymbol{\iota}, \\
\epsilon_q(\delta) &= \frac{1}{16} Q_{12}^2 \left\{ \boldsymbol{\iota}^\top \left[Q_1 \Delta_1^4 \mathbf{Z}_{\delta d}^2 + Q_2 \Delta_3 \mathbf{Z}_{\delta d}^2 + Q_3 \Delta_2 \mathbf{Z}_{\delta d}^2 \right] \boldsymbol{\iota} \right\} \\
&\quad + \frac{Q_{12}^3}{64} \left[Q_{14} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta^3 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{15} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} - \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 \mathbf{Z}_\delta^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \right. \\
&\quad \left. + Q_{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d}^2 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{17} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \right] \text{ e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{p,q}(\beta, \delta) = & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{Z}_{\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{Z}_{\beta d} \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_{\delta d} \Delta_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_\beta \mathbf{Z}_\beta \Delta_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_\delta \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_{\beta d} \Delta_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota}.
\end{aligned}$$

A fórmula de $\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)]}$ é definida analogamente à de $\epsilon_{(p+q)}$ dada em (3.12) com $\tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{\mathbf{S}}$, $\tilde{\mathbf{S}}$, $\mathbf{K}_\beta$ e $\mathbf{K}_\delta$ substituídos por $\tilde{\mathbf{X}}_2$, $\tilde{\mathbf{X}}_2$, $\tilde{\mathbf{S}}_2$, $\tilde{\mathbf{S}}_2$, $\mathbf{K}_{\beta_2}$ e $\mathbf{K}_{\delta_2}$, sendo $\tilde{\mathbf{X}}_2 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta_2 \partial \beta_2^\top}$ e $\tilde{\mathbf{S}}_2 = \frac{\partial^2 \tau_l}{\partial \delta_2 \partial \delta_2^\top}$, respectivamente.

Os fatores de correção de Bartlett para o teste da razão de verossimilhanças são obtidos da equação (3.19) com as quantidades $\epsilon_{(p+q)}$ e $\epsilon_{[(p+q)-(p_1+q_1)]}$ deduzidas de (3.12). É importante salientar aqui que a fórmula dada em (3.12) somente envolve operações simples de matrizes e pode ser facilmente implementadas em pacotes de computação simbólica e linguagens que permitam executar operações simples de álgebra linear tais como Ox, R, etc. Para obtermos as matrizes $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_d$, $\mathbf{Z}_d$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, precisamos da matriz modelo $\tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{\mathbf{S}}$ e das matrizes quadradas $\tilde{\mathbf{X}}$ e $\tilde{\mathbf{S}}$. Uma vez calculadas as matrizes acima, o cálculo de $\epsilon_{(p+q)}$ na equação (3.12) é imediato. A obtenção do fator de correção de Bartlett encontram-se no Apêndice C.

3.1.4.2 Teste separado para o vetor de parâmetros da média

Nosso interesse aqui é testar as seguinte hipóteses: $\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^2$: pelo menos uma das igualdades é violada, em que $\beta_1^{(0)}$ representa o vetor de parâmetros de interesse e $(\beta_2^\top, \delta^\top)^\top$ é considerado vetor de parâmetros de perturbação, de dimensões $p - p_1 \times 1$ e $q - q_1 \times n$. A estatística de teste LR definida na equação (3.8) para testar $\mathcal{H}_0^2$ versus $\mathcal{H}_1^2$ pode ser reescrita como:

$$LR^2 = 2[\ell(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\delta}) - \ell(\beta_1, \beta_2, \delta) - \{\ell(\beta_1^{(0)}, \tilde{\beta}_2, \tilde{\delta}) - \ell(\beta_1, \beta_2, \delta)\}], \quad (3.24)$$

em que $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ e $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1^\top, \hat{\delta}_2^\top)^\top$ são os estimadores de máxima verossimilhanças irrestritos de β_1 , β_2 e δ sendo $\tilde{\beta}_2$ e $\tilde{\delta}$ os estimadores de máxima verossimilhanças restritos para β_2 e δ . A partir da equações (3.11) e (3.16), segue que, sob $\mathcal{H}_0^2$, o valor esperado de LR^2 é dado

por:

$$\mathbb{E}(LR^2) = p_1 \left(1 + \frac{\epsilon_p(\beta) - \epsilon_{p_2}(\beta_2) + \epsilon_{p,q}(\beta, \delta) - \epsilon_{p_2,q}(\beta_2, \delta)}{p_1} \right) + O(n^{-2}).$$

Desse modo, a aproximação da distribuição pela distribuição $\chi_{p_1}^2$ pode ser melhorada pela estatística da razão de verossimilhanças modificada LR^{2*} dada por:

$$LR^{2*} = LR^2 / c_2, \quad (3.25)$$

em que o fator de correção de Bartlett $c_2 = (1 + d/k)$ é determinado através de:

$$d = \epsilon_p(\beta) - \epsilon_{p_2}(\beta_2) + \epsilon_{p,q}(\beta, \delta) - \epsilon_{p_2,q}(\beta_2, \delta) \quad \text{e} \quad k = p_1, \quad (3.26)$$

em que a estatística LR^{2*} tem uma distribuição $\chi_{p_1}^2$ até ordem n^{-1} , sob $\mathcal{H}_0$. Outras formas assintoticamente equivalentes para a estatística da razão de verossimilhanças corrigida, para o teste LR^2 são dadas respectivamente por:

$$LR^{2**} = LR^2 \cdot \exp(-d_2/k_2) \quad \text{e} \quad LR^{2***} = LR^2(1 - d_2/k_2), \quad (3.27)$$

em que $d_2 = d, k_2 = p_1$ são dados na equação (3.26), e sob $\mathcal{H}_0^2$, as estatísticas corrigidas LR^{2**} e LR^{2***} têm distribuição assintoticamente $\chi_{p_1}^2$.

Temos então que os termos $\epsilon_{p_2}(\beta_2)$ e $\epsilon_{p_2,q}(\beta_2, \delta)$ na equação (3.26) são dados por:

$$\begin{aligned} \epsilon_{p_2}(\beta_2) &= \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1^2 \mathbf{Z}_{2\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{Z}_{2\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\ &\quad - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\frac{1}{2} \mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{2\beta}^{(3)} \mathbf{W}_3 - \frac{1}{4} \mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{Z}_{2\beta} \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{W}_3 \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_{p_2,q}(\beta_2, \delta) &= \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{Z}_{2\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\delta d} \mathbf{Z}_{2\beta d} \right] \boldsymbol{\iota} \\ &\quad - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_{\delta} \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{Z}_{\delta d} \Delta_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota} \\ &\quad + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^3}{16} \frac{Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{Z}_{\delta} \mathbf{Z}_{\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\ &\quad + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\delta} \mathbf{Z}_{2\beta} \mathbf{Z}_{2\beta} \Delta_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota} \\ &\quad + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\delta} \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{Z}_{2\beta d} \Delta_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota}, \end{aligned}$$

respectivamente. As fórmulas acima são obtidas com $\tilde{X}$, $\tilde{\tilde{X}}$, $\tilde{S}$, $\tilde{\tilde{S}}$, K_β , K_δ , Z_β e Z_δ substituídos por $\tilde{X}_2$, $\tilde{\tilde{X}}_2$, $\tilde{S}_2$, $\tilde{\tilde{S}}_2$, K_{β_2} , K_{δ_2} , $Z_{2\beta}$ e $Z_{2\delta}$, sendo $\tilde{X}_2 = \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial \beta_2 \partial \beta_2^\top}$ e $\tilde{\tilde{S}}_2 = \frac{\partial^2 \tau_l}{\partial \delta_2 \partial \delta_2^\top}$, respectivamente.

3.1.4.3 Teste separado para o vetor de parâmetros da dispersão

Aqui, nosso interesse reside em testar as seguintes hipóteses: $\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = \delta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^3$: pelo menos uma das igualdades é violada, em que $\delta_1^{(0)}$ representa o vetor de parâmetros de interesse e $(\delta_2^\top, \beta^\top)^\top$ é considerado vetor de parâmetros de perturbação, de dimensões $(q - q_1) \times 1$ e $p \times p$. A estatística de teste LR definida na equação (3.9) para testar $\mathcal{H}_0^3$ versus $\mathcal{H}_1^3$ pode ser reescrita como:

$$LR^3 = 2[\ell(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\beta}) - \ell(\delta_1, \delta_2, \beta) - \{\ell(\delta_1^{(0)}, \tilde{\delta}_2, \tilde{\beta}) - \ell(\delta_1, \delta_2, \beta)\}], \quad (3.28)$$

em que $\hat{\delta}_1$, $\hat{\delta}_2$ e $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1^\top, \hat{\beta}_2^\top)^\top$ são os estimadores de máxima verossimilhanças irrestritos de δ_1 , δ_2 e $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ sendo $\tilde{\delta}_2$ o estimador de máxima verossimilhanças restrito para δ_2 . A partir das equações (3.11) e (3.16), segue que, sob $\mathcal{H}_0^3$, o valor esperado de LR^3 é dado por:

$$\mathbb{E}(LR^3) = q_1 \left(1 + \frac{\epsilon_q(\delta) - \epsilon_{q_2}(\delta_2) + \epsilon_{p,q}(\beta, \delta) - \epsilon_{p,q_2}(\beta, \delta_2)}{p_1} \right) + O(n^{-2}).$$

Desse modo, a aproximação da distribuição pela distribuição $\chi_{q_1}^2$ pode ser melhorada pela estatística da razão de verossimilhanças modificada LR^{3*} dada por:

$$LR^{3*} = LR^3 / c_3, \quad (3.29)$$

em que o fator de correção de Bartlett $c_3 = (1 + d/k)$ é determinado através de:

$$d = \epsilon_q(\delta) - \epsilon_{q_2}(\delta_2) + \epsilon_{p,q}(\beta, \delta) - \epsilon_{p,q_2}(\beta, \delta_2) \quad \text{e} \quad k = q_1. \quad (3.30)$$

A estatística LR^{3*} tem uma distribuição $\chi_{q_1}^2$ até ordem n^{-1} , sob $\mathcal{H}_0^3$.

Temos então, que os termos $\epsilon_{q_2}(\delta_2)$ e $\epsilon_{p,q_2}(\beta, \delta_2)$ na equação (43) são dados por:

$$\begin{aligned} \epsilon_{q_2}(\delta_2) = & \frac{1}{16} Q_{12}^2 \left\{ \iota^\top [Q_1 \Delta_1^4 Z_{2\delta d}^2 + Q_2 \Delta_3 Z_{2\delta d}^2 + Q_3 \Delta_2 Z_{2\delta d}^2] \iota \right. \\ & + \iota^\top \Delta_1^3 [Q_4 Z_{2\delta d} D_{2\delta} + (2Q_4 + Q_7) C_{2\delta d}] \iota + \iota^\top Q_8 \Delta_1^2 [D_{2\delta}^2 - 2B_{2\delta d}] \iota \\ & + \iota^\top Q_9 \Delta_4 [2Z_{2\delta d} D_{2\delta} - 4C_{2\delta d}] \iota \left. \right\} + \frac{Q_{12}^3}{64} \left[Q_{14} \iota^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta}^3 \Delta_1^3 \iota + Q_{15} \iota^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta}^3 \Delta_4 \iota \right. \\ & - \frac{Q_{12}^2}{32} \iota^\top \Delta_4 Z_{2\delta}^3 \Delta_4 \iota + Q_{16} \iota^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2 \Delta_1^3 \iota + Q_{17} \iota^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2 \Delta_4 \iota \\ & + \frac{Q_{12}^2}{64} \iota^\top \Delta_4 Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2 \Delta_4 \iota + Q_{18} \iota^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\delta d} D_{2\delta} \Delta_1^2 \iota + \frac{Q_{12}^2}{32} \iota^\top \Delta_4 Z_{2\delta} Z_{2\delta d} D_{2\delta} \Delta_1^2 \iota \\ & \left. + \frac{Q_{12}^2}{64} \iota^\top \Delta_1^2 Z_{2\delta} D_{2\delta}^2 \Delta_1^2 \iota + tr \left\{ \left[(Q_{15} \Delta_1^3 - \frac{Q_{12}^2}{16} \Delta_4) C_{2\delta} - \frac{Q_{12}^2}{32} \Delta_1^2 B_{2\delta} \right] \Delta_1^2 Z_{2\delta} \right\} \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_{p,q_2}(\beta, \delta_2) = & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{2\delta d} \mathbf{Z}_{\beta d} \right. \\
& + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{2\delta d} \mathbf{Z}_{\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{D}_{2\delta} \mathbf{Z}_{\beta d} \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_{2\delta d} \Delta_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^3 Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{Z}_{2\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^3 Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{D}_{2\delta} \mathbf{Z}_{\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{Z}_{\beta} \mathbf{Z}_{\beta} \Delta_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{20}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{Z}_{\beta d} \mathbf{Z}_{\beta d} \Delta_1 \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\iota},
\end{aligned}$$

respectivamente. As fórmulas acima são obtidas com $\tilde{X}$, $\tilde{\tilde{X}}$, $\tilde{S}$, $\tilde{\tilde{S}}$, $\mathbf{K}_\beta$, $\mathbf{K}_\delta$, $\mathbf{Z}_\beta$ e $\mathbf{Z}_\delta$ substituídos por $\tilde{X}_2$, $\tilde{\tilde{X}}_2$, $\tilde{S}_2$, $\tilde{\tilde{S}}_2$, $\mathbf{K}_{\beta_2}$, $\mathbf{K}_{\delta_2}$, $\mathbf{Z}_{2\beta}$ e $\mathbf{Z}_{2\delta}$, sendo $\tilde{X}_2 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta_2 \partial \beta_2^\top}$ e $\tilde{\tilde{S}}_2 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \delta_2 \partial \delta_2^\top}$, respectivamente. Vale salientar aqui que a expressão que nós obtivemos para o teste de heteroscedasticidade é mais geral e generaliza os resultados apresentados em Araújo, Cysneiros e Montenegro (2020), quando é considerada a heteroscedasticidade multiplicativa. Outras formas assintoticamente equivalentes para a estatística da razão de verossimilhanças corrigida, para o teste LR^3 são dadas respectivamente por:

$$LR_3^{**} = LR^3 \exp(-d_3/k_3) \quad \text{e} \quad LR_3^{***} = LR^3(1 - d_3/k_3), \quad (3.31)$$

em que $d_3 = d$ e $k_3 = q_1$ são dados na equação (3.30), e sob $\mathcal{H}_0^3$, as estatísticas corrigidas LR^{3**} , LR^{3***} têm distribuição assintoticamente $\chi_{q_1}^2$.

3.1.5 Resultados Numéricos

A fim de avaliar a eficácia da correção de Bartlett à estatística da razão de verossimilhanças nos modelos MNLSH, foram realizadas simulações de Monte Carlo e bootstrap para os diferentes testes, a saber: razão de verossimilhanças (LR), razão de verossimilhanças bootstrap (LR_{boot}), seguidos pelas suas respectivas versões corrigidas via Bartlett (LR^* , LR^{**} , LR^{***} e LR_{boot}^*) considerando diferentes tamanhos de amostras: $n = 30, 40, 50$ e 100 . Consideramos

os seguintes preditores não lineares:

$$\eta_l = \beta_0 + \exp(\beta_1 x_{l1}) + \sum_{i=2}^{p-1} \beta_i x_{li}$$

e

$$\tau_l = \delta_0 \exp(\delta_1 s_{l1}) + \sum_{j=2}^{q-1} \delta_j s_{lj}$$

para $l = 1, 2, \dots, n$ e $j = 2, \dots, p-1$. Os componentes sistemáticos do modelo são definidos por duas funções de ligação não lineares logarítmicas tanto para a média quanto para a dispersão. Isto é, $\mu_l = \exp(\eta_l)$ e $\phi_l = \exp(\tau_l)$, $l = 1, 2, \dots, n$. Os valores verdadeiros do vetor de parâmetro β e δ da simulação são fixados em $\beta_0 = \beta_1 = \dots, \beta_{p-1} = 1$, $\delta_0 = 1.5$, $\delta_1 = 2$ e $\delta_2 = \dots, \delta_{q-1} = 1$. Todas as variáveis explicativas $x_1, \dots, x_{p-1}$ e $s_1, \dots, s_q$ foram gerados a partir da distribuição uniforme $U(0, 1)$ e são fixadas durante todo o experimento com seguintes tamanhos de amostra $n \in \{30, 40, 50, 100\}$. O número de réplicas de Monte Carlo e de Bootstrap foi fixado em 10.000 e 500, respectivamente. Consideramos duas distribuições para a variável resposta, a saber: a exponencial potência com $\kappa = 0.3$ e a t-Student com $\nu = 4$. Todas as simulações são realizadas considerando os seguintes níveis nominais: $\alpha = 10\%, 5\%$ e 1% . Interessamos no modelo não linear simétrico heteroscedástico definido da seguinte forma:

$$y_l = \exp(\eta_l) + \epsilon_l,$$

em que $\epsilon_l \sim S(0, \exp(\tau_l), g)$. Consideramos, para as simulações, as seguintes hipóteses nulas:

$$\mathcal{H}_0^1 : \beta_1 = 0, \delta_1 = 0, \mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0,$$

contra suas respectivas hipóteses alternativas bilaterais. Importante ressaltar que os estudos de discrepâncias de quantis e poder de teste foram feitos considerando a hipótese $\mathcal{H}_0^3$.

Para cada tamanho da amostra e cada nível nominal considerado, calculamos as taxas de rejeição para cada teste supracitados acima. Isto é, estimamos via simulação, $\mathbb{P}(LR \geq \chi_{\alpha,k}^2)$, $\mathbb{P}(LR^* \geq \chi_{\alpha,k}^2)$, $\mathbb{P}(LR^{**} \geq \chi_{\alpha,k}^2)$, $\mathbb{P}(LR^{***} \geq \chi_{\alpha,k}^2)$ e $\mathbb{P}(LR_{boot}^* \geq \chi_{\alpha,k}^2)$ em que $\chi_{\alpha,k}^2$ é o percentil $(1 - \alpha)$ da distribuição χ^2 e $k = q_1$ é o número de parâmetros a serem testados ou simplesmente o número de restrição imposta sob a hipótese nula. Para o teste bootstrap, a taxa de rejeição foi obtida a partir do cálculo da probabilidade $\mathbb{P}(LR_{boot} \geq \hat{q}_{(1-\alpha)})$ em que $\hat{q}_{(1-\alpha)}$ é o percentil $(1 - \alpha)$ da distribuição empírica de LR_{boot} . Vale ressaltar que todas as entradas das Tabelas apresentadas são percentagens. As simulações foram realizadas usando a versão 8.02 da linguagem de programação do Ox Doornik (2009) e os gráficos foram realizados usando o software estatístico R.

Como intuito de analisar a eficácia do fator de correção de Bartlett em MNLSH, interessamos primeiramente em testar simultaneamente os efeitos da média e da dispersão considerando a hipótese $\mathcal{H}_0^1$. Assim, fixamos $p_1 = 3, q_1 = 2$ e $p_1 = 4, q_1 = 3$ para diferentes tamanhos amostrais. Aqui, $p_1 = p - 1$ e $q_1 = q - 1$ com p_1 e q_1 o número de parâmetros dos vetores β_1 e δ_1 a serem testado sob a hipótese nula. Nas Tabelas 21 e 22 apresentamos as taxas de rejeição dos diferentes testes para os modelos t_4 e exponencial potência com parâmetro de forma $\kappa = 0.3$, respectivamente. Percebe-se que o teste da razão de verossimilhanças é liberal apresentando taxas de rejeição empíricas distorcidas. Por exemplo, considerando a Tabela 21 do modelo t_4 , para $p_1 = 3, q_1 = 2, \alpha = 5\%$ e diferentes tamanhos de amostra, $n \in \{30, 40, 50, 100\}$, as taxas de rejeição do teste LR são iguais a 11.8%, 9.8%, 8.8%, 6.7%. Observe que os testes corrigidos via Bartlett com suas formas alternativas assintóticas (LR^*, LR^{**}, LR^{***}) apresentam distorções bem reduzidas em relação ao teste usual. Por exemplo, para $n = 30$ e $p_1 = 3, q_1 = 2, \alpha = 10\%$, as taxas de rejeição empírica dos testes (LR^*, LR^{**}, LR^{***}) foram de 14.1%, 13.9%, 13.6%. Conforme aumentamos o número de parâmetro de interesse mais distorcidas foram as taxas de rejeição de testes baseadas na estatística da razão de verossimilhanças usual (LR) e corrigida (LR^*, LR^{**}, LR^{***}) considerando o mesmo modelo t_4 . Por exemplo, para $p_1 = 4, q_1 = 3, \alpha = 10\%$ e diferentes tamanhos de amostra ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste LR são iguais a 31.3%, 21.7%, 17.4%, 13.7%. Observe neste cenário que quando $n = 30$, a taxa de rejeição de teste foi de 31.3%, mais que o triplo do nível de significância estipulado. Note que esta grande distorção nas taxas de rejeição dos testes foi atenuada pela correção de Bartlett de tal forma que os testes corrigidos apresentam taxas de rejeição mais próximas do nível nominal considerado. Nesta situação, as taxas de rejeição para o teste corrigido (LR^*, LR^{**}, LR^{***}) foram de 20.3%, 19.9%, 19.4% para $n = 30$. Notamos também que os testes corrigidos por Bartlett bootstrap tiveram um bom desempenho em comparação aos outros testes corrigidos por Bartlett, pois as taxas de rejeição de teste bootstrap, em todos os cenários analisados, encontram-se mais próximas ao nível nominal considerado. Por exemplo, no primeiro cenário, para $p_1 = 3, q_1 = 2, \alpha = 5\%$ e diferentes tamanhos de amostra ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste LR_{boot}^* são iguais a 4.8%, 5.1%, 5.1%, 5.1%, mais próximas do nível de significância $\alpha = 5\%$. Da mesma forma, no segundo cenário, quando aumentarmos o número de regressores presente no modelo, ou seja, $p_1 = 4, q_1 = 3, \alpha = 5\%$ e diferentes tamanhos de amostra ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste LR_{boot}^* são iguais a 4.7%, 5.0%, 5.4%, 5.3%. Vale ressaltar que o aumento de número de regressores não altera

muito as taxas de rejeição do teste corrigido de Bartlett bootstrap.

Tabela 21 – Tamanho dos testes conjunto considerando o Modelo t_4 , com $k_1 = p - 1 = 3, k_2 = q - 1 = 2$, $k_1 = p - 1 = 4, k_2 = q - 1 = 3$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^1: \beta_1 = \mathbf{0}, \delta_1 = \mathbf{0}$)

α	$Teste$	$p = 4, q = 3$				$p = 5, q = 4$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	LR	20.2	17.1	16.0	12.6	31.3	21.7	17.4	13.7
	LR^*	14.1	11.7	11.6	11.0	20.3	16.4	13.1	11.9
	LR^{**}	13.9	11.6	11.6	11.0	19.9	16.2	13.0	11.8
	LR^{***}	13.6	11.5	11.3	10.9	19.4	16.2	12.9	11.7
	LR_{boot}	10.1	10.0	10.4	10.2	9.8	9.9	10.2	10.3
	LR_{boot}^*	9.6	9.9	10.5	10.2	9.9	10.0	10.3	10.4
$\alpha = 5\%$	LR	11.8	9.8	8.8	6.7	20.9	13.4	10.4	7.6
	LR^*	7.8	6.7	6.3	6.3	13.2	9.9	7.7	6.5
	LR^{**}	7.7	6.6	6.2	6.2	12.8	9.9	7.6	6.4
	LR^{***}	7.6	6.6	6.1	6.1	12.6	9.8	7.5	6.3
	LR_{boot}	5.1	5.2	5.1	5.1	4.7	4.9	5.5	5.4
	LR_{boot}^*	4.8	5.1	5.1	5.1	4.7	5.0	5.4	5.3
$\alpha = 1\%$	LR	3.3	2.7	2.2	1.8	8.1	4.3	3.2	1.8
	LR^*	2.0	1.8	1.5	1.5	5.0	3.1	2.3	1.4
	LR^{**}	2.0	1.8	1.5	1.5	4.9	3.0	2.3	1.4
	LR^{***}	2.0	1.8	1.5	1.5	4.8	3.2	2.3	1.4
	LR_{boot}	1.2	1.2	1.1	1.4	1.3	1.1	1.3	1.2
	LR_{boot}^*	0.9	1.1	0.9	1.1	1.2	1.0	1.3	1.2

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Por outro lado, na Tabela 22, apresentamos as taxas de rejeição dos diferentes testes para o modelo exponencial potência com parâmetro de forma $\kappa = 0.3$. Nesta Tabela, observe que o teste da razão de verossimilhanças é liberal apresentando taxas de rejeição empíricas distorcidas. Por exemplo, para $p_1 = 3, q_1 = 2, \alpha = 5\%$ e diferentes tamanhos de amostra ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste LR são iguais a 10.2%, 8.6%, 8.3%, 5.8%, respectivamente. Percebe-se que os testes corrigidos via Bartlett (LR^*, LR^{**}, LR^{***}) apresentam taxas de rejeição dos testes mais próximas do nível nominal. Por exemplo, para $n = 30$ e $p_1 = 3, q_1 = 2, \alpha = 5\%$, as taxas de rejeição empírica dos testes corrigidos foram de 6.3%, 6.2%, 6.1%. Considerando o cenário em que o número de regressores aumenta, ou seja,

para $p_1 = 4, q_1 = 3, \alpha = 10\%$ e diferentes tamanhos de amostra ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste LR são iguais a 27.4%, 20.3%, 18.7%, 13.0%. Por exemplo, considerando $n = 30$ neste cenário, as taxas de rejeição de teste corrigido foram de 15.9%, 15.5%, 15.2% para $(LR^*, LR^{**}, LR^{***})$, respectivamente. É possível notar também a eficácia da correção de Bartlett bootstrap no desempenho dos testes. Por exemplo, para $p_1 = 3, q_1 = 2, \alpha = 5\%$ e diferentes tamanhos de amostra ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste corrigido foram de 4.7%, 4.8%, 4.9%, 4.9%.

Tabela 22 – Tamanho dos testes conjunto considerando o modelo Exponencial Potência $\kappa = 0.3$, com $k_1 = p - 1 = 3, k_2 = q - 1 = 2, k_1 = p - 1 = 4, k_2 = q - 1 = 3$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^1: \beta_1 = \mathbf{0}, \delta_1 = \mathbf{0}$)

α	$Teste$	$p = 4, q = 3$				$p = 5, q = 4$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	LR	18.0	15.8	14.6	11.7	27.4	20.3	18.7	13.0
	LR^*	11.7	10.2	10.1	11.0	15.9	14.3	12.8	11.2
	LR^{**}	11.5	10.1	9.9	10.9	15.5	14.1	12.5	11.1
	LR^{***}	11.2	9.9	9.9	10.9	15.2	13.9	12.4	11.1
	LR_{boot}	9.9	9.9	10.4	9.8	10.2	9.9	9.9	10.2
	LR_{boot}^*	9.5	9.6	10.5	10.0	9.8	9.8	9.7	10.1
$\alpha = 5\%$	LR	10.2	8.6	8.3	5.8	16.8	12.1	10.6	7.0
	LR^*	6.3	5.4	5.3	5.3	9.7	8.3	6.9	5.7
	LR^{**}	6.2	5.3	5.3	5.3	9.4	8.3	6.8	5.7
	LR^{***}	6.1	5.3	5.2	5.3	9.3	8.2	6.7	5.6
	LR_{boot}	5.3	4.9	5.1	4.9	5.1	4.8	4.8	5.1
	LR_{boot}^*	4.7	4.8	4.9	4.9	4.8	4.7	4.7	5.0
$\alpha = 1\%$	LR	2.9	2.1	1.9	1.3	5.9	3.3	2.7	1.8
	LR^*	1.8	1.3	1.1	1.1	3.3	2.1	1.8	1.3
	LR^{**}	1.8	1.3	1.1	1.1	3.2	2.0	1.8	1.3
	LR^{***}	1.7	1.3	1.1	1.1	3.2	2.0	1.8	1.3
	LR_{boot}	1.3	0.9	1.1	1.2	1.3	1.0	1.1	1.2
	LR_{boot}^*	1.0	0.9	1.0	1.0	1.0	0.8	0.9	1.1

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Considerando o segundo cenário em que aumentamos o número de parâmetro ($p = 5$ e $q = 4$, para $\alpha = 5\%$), essas taxas foram de 4.8%, 4.7%, 4.7%, 5.0%. No entanto, percebemos que as taxas de rejeição apresentadas pelo teste da razão de verossimilhanças corrigido foram

próximas aos níveis nominais, mas não corrige completamente o caráter liberal do teste LR enquanto o teste corrigido de Bartlett via bootstrap corrige esse caráter liberal dos teste LR , pois apresenta taxas de rejeição muito próximas aos níveis de significância de teste estipulado em todos os cenários analisados.

Agora, interessamos em testar separadamente o efeito da média em MNLSH considerando a hipótese $\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0$. Assim, fixamos $p_1 = 3$ e variamos $q = 3, 5$, para diferentes tamanhos amostrais, sendo $p_1 = 3$ o número de parâmetros do vetor β_1 a serem testado sob a hipótese nula. Nas Tabelas 23 e 24, apresentamos as taxas de rejeição dos diferentes testes considerando os modelos t_4 e exponencial potência com parâmetro de forma $\kappa = 0.3$, respectivamente. Analisando essas Tabelas, é possível notar que, assim como no teste conjunto, o teste razão de verossimilhanças permanece notavelmente liberal. Por exemplo, considerando a Tabela 23, para $q = 3, \alpha = 5\%$ e considerando todos os tamanhos amostrais ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste LR são iguais a 17.4%, 13.7%, 10.2%, 7.4%. No entanto, para o teste LR corrigido (LR^*, LR^{**}, LR^{***}) considerando $n = 30, q = 3, \alpha = 5\%$, as taxas de rejeição dos testes foram de 12.6%, 12.5%, 12.2%, respectivamente. A taxa de rejeição de teste corrigida de Bartlett via Bootstrap, neste contexto por exemplo, coincide com o nível nominal ($LR_{boot}^* = 5.0\%$). Quando passamos de $q = 3$ a $q = 5$ com $\alpha = 10\%$ e considerando $n = 30$, as taxas de rejeição de teste LR e suas versões corrigidas foram de 40.9%, 24.4%, 25.9%, 25.3%, respectivamente. Neste contexto, a taxa de rejeição de teste corrigido de Bartlett via Bootstrap é de 10.0%, igual ao nível nominal considerado. Da mesma forma apresentamos na Tabela 24, as taxas de rejeição dos diferentes testes para o modelo exponencial potência com parâmetro de forma $\kappa = 0.3$. Percebe-se, nesta Tabela, que o teste razão de verossimilhanças, assim como no modelo anterior, continue ser notavelmente liberal. Por exemplo, considerando a Tabela 24, para $q = 3, \alpha = 10\%$ e considerando todos os tamanhos amostrais ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste LR são iguais a 25.3%, 20.8%, 16.9%, 13.1%. O teste corrigido (LR^*, LR^{**}, LR^{***}) considerando $n = 30, q = 3, \alpha = 10\%$, as taxas de rejeição de teste foram de 19.0%, 18.7%, 18.3%, respectivamente enquanto o teste corrigido via bootstrap LR_{boot}^* foi de 10.5. Quando aumentarmos o número de parâmetro no modelo, ou seja, passando de $q = 3$ para $q = 5$, notamos que o teste LR fica mais liberal ainda. Por exemplo, para $q = 5, \alpha = 10\%$ e considerando todos os tamanhos amostrais ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste LR foram de 36.6%, 30.0%, 26.9%, 16.9%. Para os testes corrigidos (LR^*, LR^{**}, LR^{***}), considerando $n = 40, q = 5, \alpha = 10\%$, as taxas de rejeição de testes foram de 15.1%, 15.7%, 14.9%, respectivamente. Por outro lado, o teste

bootstrap e sua versão corrigida por Bartlett considerando $n = 50$ para $\alpha = 10$ apresenta as respectivas taxas de rejeição $LR_{boot} = 10.7$ e $LR_{boot}^* = 9.7$

Tabela 23 – Tamanho dos testes para os betas considerando o modelo t_4 , com $p_1 = p - 1 = 3$, $q = 3, 5$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = \mathbf{0}$)

α	$Teste$	$q = 3$				$q = 5$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	LR	26.9	22.0	17.8	13.7	40.9	33.0	27.7	17.2
	LR^*	20.5	15.8	14.0	12.8	24.4	17.8	16.1	14.3
	LR^{**}	20.2	15.4	13.7	12.8	25.9	17.8	16.5	14.1
	LR^{***}	19.7	14.9	13.5	12.8	25.3	17.2	15.7	13.9
	LR_{boot}	11.2	10.2	9.6	10.0	11.3	10.4	10.4	10.2
	LR_{boot}^*	10.7	10.0	9.3	9.9	10.0	9.8	10.4	10.1
$\alpha = 5\%$	LR	17.4	13.7	10.2	7.4	29.6	22.4	18.2	9.8
	LR^*	12.6	9.1	7.6	6.9	17.7	11.6	10.0	8.0
	LR^{**}	12.5	8.9	7.5	6.9	19.6	11.9	10.7	8.0
	LR^{***}	12.2	8.7	7.3	6.9	19.1	11.6	10.3	7.9
	LR_{boot}	5.7	5.4	4.8	5.1	5.8	5.3	5.4	5.3
	LR_{boot}^*	5.0	4.9	4.5	5.0	4.8	4.5	5.1	5.1
$\alpha = 1\%$	LR	6.1	4.3	2.9	2.0	13.2	8.7	6.9	2.7
	LR^*	4.4	2.5	2.1	1.9	8.4	4.7	3.5	2.1
	LR^{**}	4.4	2.5	2.1	1.9	10.3	5.1	4.4	2.1
	LR^{***}	4.3	2.5	2.1	1.9	10.2	5.0	4.2	2.0
	LR_{boot}	1.3	1.4	1.0	1.2	1.4	1.2	1.3	1.2
	LR_{boot}^*	0.8	0.9	0.8	1.0	0.9	0.7	1.0	0.9

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

De forma geral, a tendencia do teste LR em rejeitar com maior frequência a hipótese nula é atenuada pela correção de Bartlett e bootstrap-Bartlett em todos os cenários analisados, gerando assim taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais considerados.

Na Tabela 25, analisamos o efeito do número de parâmetros de interesse no desempenho dos testes, fixando o tamanho amostral ($n = 35$), o número de parâmetros de perturbação ($q = 3$) e variando o número de parâmetros de interesse ($p_1 = 2, 3, 4, 5$) para os modelos t_4 e exponencial potência $\kappa = 0.3$. Notamos, para ambos os modelos, que os testes usuais e suas versões corrigidas são bastante distorcidos conforme o número de parâmetros de interesse

aumenta. Por outro lado, o aumento de número de parâmetros de interesse não interfere no desempenho do teste baseado em (LR_{boot}^*) . Por exemplo, para o modelo t_4 e considerando o cenário em que $p_1 = 3, \alpha = 5\%$, temos que as taxas de rejeição dos testes são iguais a $13.6\%(LR)$, $7.8\%(LR^*)$, $7.7\%(LR^{**})$, $7.5\%(LR^{***})$, $4.9\%(LR_{boot})$ e $4.7\%(LR_{boot}^*)$, respectivamente. Considerando o mesmo cenário, temos para o modelo exponencial potência as taxas de rejeição de todos os testes foram de $13.1\%(LR)$, $7.4\%(LR^*)$, $7.2\%(LR^{**})$, $7.0\%(LR^{***})$, $5.6\%(LR_{boot})$, $5.0\%(LR_{boot}^*)$, respectivamente.

Na Tabela 26, analisamos o efeito do número de parâmetros de perturbação no desempenho dos testes, fixando o tamanho amostral ($n = 35$), o número de parâmetros de interesse ($p_1 = 3$) e variando o número de parâmetros de perturbação ($q = 2, 3, 4, 5$) para os modelos t_4 e exponencial potência ($\kappa = 0.3$).

Tabela 24 – Tamanho dos testes para os betas considerando o Modelo Exponencial Potência $\kappa = 0.3$, com $p_1 = p - 1 = 3, q = 3, 5$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0$)

α	$Teste$	$q = 3$				$q = 5$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	LR	25.3	20.8	16.9	13.1	36.6	30.0	26.9	16.9
	LR^*	19.0	14.9	13.2	12.3	16.0	15.1	13.4	14.4
	LR^{**}	18.7	14.6	13.0	12.3	21.8	15.7	13.2	14.2
	LR^{***}	18.3	14.2	12.8	12.3	21.1	14.9	12.6	14.1
	LR_{boot}	11.1	10.8	9.4	10.0	11.2	10.3	10.7	10.5
	LR_{boot}^*	10.5	10.2	9.2	9.9	9.2	9.2	9.7	10.2
$\alpha = 5\%$	LR	15.8	12.3	9.3	6.8	24.7	19.3	17.0	10.0
	LR^*	11.7	8.3	7.1	6.5	11.0	9.6	8.1	8.1
	LR^{**}	11.6	8.2	7.0	6.5	17.0	10.6	8.2	8.1
	LR^{***}	11.3	8.0	6.9	6.5	16.5	10.2	7.8	8.0
	LR_{boot}	5.4	5.5	4.8	5.1	5.8	5.3	5.4	5.2
	LR_{boot}^*	4.8	4.9	4.5	4.9	3.8	4.0	4.3	4.7
$\alpha = 1\%$	LR	4.8	3.5	2.5	1.8	9.3	6.8	5.5	2.4
	LR^*	3.5	2.1	1.7	1.7	4.9	3.5	2.6	1.8
	LR^{**}	3.5	1.9	1.7	1.7	4.9	4.6	2.9	1.8
	LR^{***}	3.5	1.9	1.7	1.7	4.8	4.6	2.8	1.8
	LR_{boot}	1.2	1.2	0.9	1.4	1.4	1.3	1.2	0.9
	LR_{boot}^*	0.7	0.9	0.8	1.0	0.5	0.6	0.7	0.7

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Percebe-se que, para ambos os modelos, o teste LR é bastante distorcido e conforme o número de parâmetros de perturbação aumenta, a distorção dos testes LR aumentam quase na mesma proporção, um comportamento semelhante a da Tabela 25. As taxas de rejeição dos testes corrigidos LR^* , LR^{**} e LR^{***} em quase todos os cenários analisados foram próximas dos níveis nominais. O teste (LR_{boot}^*) teve um desempenho melhor em relação aos demais testes. Por exemplo, considerando $(q = 2, 3, 4, 5), \alpha = 1\%$, as taxas de rejeição nulas dos testes corrigidos via Bartlett-Bootstrap (LR_{boot}^*) foram de 1.1%, 0.9%, 1.0%, 1.0%, para o modelo t_4 e de 1.0%, 0.9%, 0.8%, 0.9% para o modelo exponencial potência com $\kappa = 0.3$, respectivamente.

Tabela 25 – Tamanho dos testes para os betas considerando os modelos t_4 e exponencial potência com $\kappa = 0.3$, $n = 35$, $q = 3$ e diversos valores para p_1 ($\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0$)

α	<i>Teste</i>	Modelo t_4				Exponencial potência			
		p_1				p_1			
		2	3	4	5	2	3	4	5
$\alpha = 10\%$	LR	18.9	22.3	30.2	36.9	17.4	21.2	27.6	32.9
	LR^*	14.8	13.4	23.0	29.0	14.1	12.4	20.8	18.7
	LR^{**}	14.4	13.0	22.5	28.4	13.7	12.1	20.5	17.8
	LR^{***}	14.2	12.6	21.9	27.8	13.4	11.8	20.2	16.7
	LR_{boot}	11.0	10.1	10.6	10.1	10.7	10.8	10.6	10.4
	LR_{boot}^*	10.2	9.6	9.9	9.8	10.4	10.2	9.7	9.5
$\alpha = 5\%$	LR	11.4	13.6	19.9	26.1	10.4	13.1	16.8	21.7
	LR^*	8.5	7.8	14.7	20.2	7.9	7.4	12.9	12.0
	LR^{**}	8.3	7.7	14.4	19.8	7.8	7.2	12.8	11.4
	LR^{***}	8.3	7.5	14.1	19.5	7.6	7.0	12.5	10.8
	LR_{boot}	5.6	4.9	5.4	5.3	5.2	5.6	5.5	5.5
	LR_{boot}^*	5.1	4.7	4.8	4.7	4.9	5.0	4.5	4.5
$\alpha = 1\%$	LR	3.4	4.2	7.2	11.2	2.9	4.0	5.4	8.1
	LR^*	2.4	2.5	4.8	8.5	2.1	2.1	4.0	4.4
	LR^{**}	2.4	2.5	4.7	8.5	2.0	2.1	3.9	4.3
	LR^{***}	2.3	2.5	4.6	8.3	2.0	2.1	3.9	4.1
	LR_{boot}	1.3	1.3	1.2	1.2	1.1	2.1	1.2	1.2
	LR_{boot}^*	0.9	0.9	0.8	0.9	0.9	0.9	0.8	0.7

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Com o objetivo de analisar a influência do tamanho da amostra, no desempenho dos testes,

fixamos $p = 3, 5$, $\kappa = 3$ e variamos o tamanho amostral. Nas Tabelas 27 e 28, apresentamos as taxas de rejeição dos diferentes testes para os modelos t_4 e exponencial potência com parâmetro de forma $\kappa = 0.3$, respectivamente. Analisando essas Tabelas, notamos que o teste razão de verossimilhanças é notavelmente liberal, por exemplo considerando a Tabela 27, para $p = 3, \alpha = 5\%$ e considerando todos os tamanhos amostrais ($n = 30, 40, 50, 100$), as taxas de rejeição do teste LR são iguais a 12.3%, 7.8%, 7.6%, 6.1%. Por outro lado, os testes baseados nas estatísticas de razão de verossimilhanças corrigidas, o fator de correção de Bartlett, aplicado à estatística da razão de verossimilhanças, atenua a distorção do teste usual, mas não corrige sua tendência liberal completamente. Por exemplo, as taxas de rejeição de testes baseados nas estatísticas da razão de verossimilhanças corrigidas (LR^*, LR^{**}, LR^{***}) considerando o mesmo cenário em que $p = 3, \alpha = 5$, são de (8.4%, 5.7%, 5.5%, 5.3%), (8.0%, 5.5%, 5.5%, 5.2%), (7.4%, 5.5%, 5.3%, 5.2%) respectivamente.

Tabela 26 – Tamanho dos testes para os betas considerando os modelos t_4 e exponencial potência com $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35$, $p_1 = 3$ e diversos valores para q ($\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0$)

α	$Teste$	Modelo t_4				Exponencial potência			
		q				q			
		2	3	4	5	2	3	4	5
$\alpha = 10\%$	LR	18.6	22.3	29.8	32.1	16.7	21.2	28.4	30.4
	LR^*	13.2	13.4	21.5	14.1	11.5	12.4	19.8	13.5
	LR^{**}	12.9	13.0	21.8	16.6	11.2	12.1	19.9	16.1
	LR^{***}	12.7	12.6	21.3	15.8	10.9	11.8	19.5	15.3
	LR_{boot}	10.4	10.1	10.7	10.7	10.3	10.8	10.5	11.0
	LR_{boot}^*	10.2	9.6	10.2	10.2	10.0	10.2	9.9	10.3
$\alpha = 5\%$	LR	10.8	13.6	20.2	21.9	9.8	13.1	18.6	20.0
	LR^*	7.4	7.8	14.2	9.7	6.4	7.4	12.9	8.8
	LR^{**}	7.3	7.7	14.6	12.6	6.2	7.2	13.2	11.5
	LR^{***}	7.2	7.5	14.3	12.1	6.2	7.0	12.9	11.1
	LR_{boot}	5.5	4.9	5.5	5.5	5.3	5.6	5.4	5.7
	LR_{boot}^*	5.1	4.7	5.1	5.0	4.9	5.0	4.8	5.1
$\alpha = 1\%$	LR	3.1	4.2	7.6	9.1	2.5	4.0	7.1	7.7
	LR^*	2.0	2.5	5.5	4.2	1.5	2.1	4.8	3.7
	LR^{**}	2.0	2.5	6.1	7.3	1.5	2.1	5.4	6.6
	LR^{***}	2.0	2.5	5.9	7.1	1.5	2.1	5.3	6.4
	LR_{boot}	1.3	1.3	1.3	1.5	1.2	2.1	1.2	1.4
	LR_{boot}^*	1.1	0.9	1.0	1.0	1.0	0.9	0.8	0.9

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Percebe-se que conforme o tamanho da amostra aumenta, as distorções dos diferentes testes em estudo diminuem enquanto as taxas de rejeição dos testes corrigidos permanecem mais estáveis em relação aos respectivos níveis nominais se comparadas às taxas de rejeição do teste baseado em LR . De forma geral, os resultados obtidos na Tabela 27 apontam que o teste baseado na estatística LR_{boot}^* apresenta um melhor desempenho em relação aos demais testes. Considerando o cenário $p = 5$, $\alpha = 5\%$ e considerando todos os tamanhos amostrais, as taxas de rejeição do teste LR são iguais a 15.4%, 12.2%, 10.1%, 7.0%. Os teste da razão verossimilhanças corrigidos atenuam a distorção do teste usual, mas apresentam taxas de rejeição maiores do que os níveis nominais estipulados. Por exemplo as taxas de rejeição dos testes (LR^* , LR^{**} , LR^{***}) no cenário em que $p = 5$, $\alpha = 5\%$, $n = 30$ são respectivamente de

9.6%, 9.4%, 8.4% enquanto a taxa de rejeição do teste LR_{boot}^* é igual a 5.0%.

Tabela 27 – Tamanho dos testes considerando o modelo t_4 com $p = 3, 5$, $k = 3$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).

α	$Teste$	$p = 3$				$p = 5$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	LR	19.4	14.4	13.8	11.8	24.0	20.0	17.3	12.9
	LR^*	14.6	11.2	10.7	10.5	16.5	15.2	13.7	11.9
	LR^{**}	14.2	11.1	10.5	10.5	15.8	14.8	13.5	11.9
	LR^{***}	13.6	10.9	10.3	10.4	15.0	14.4	13.2	11.9
	LR_{boot}	10.6	9.7	10.3	10.9	9.8	11.0	10.6	10.4
	LR_{boot}^*	11.2	10.2	10.4	11.0	10.1	10.9	10.6	10.6
$\alpha = 5\%$	LR	12.3	7.8	7.6	6.1	15.4	12.2	10.1	7.0
	LR^*	8.4	5.7	5.5	5.3	9.6	8.8	7.5	6.2
	LR^{**}	8.0	5.5	5.5	5.2	9.0	8.6	7.3	6.2
	LR^{***}	7.4	5.5	5.3	5.2	8.4	8.2	7.1	6.2
	LR_{boot}	5.5	4.8	5.3	5.4	4.9	5.5	5.5	5.2
	LR_{boot}^*	5.8	5.1	5.2	5.5	5.0	5.5	5.6	5.2
$\alpha = 1\%$	LR	4.0	1.8	1.8	1.2	5.4	3.6	2.8	1.6
	LR^*	2.2	1.2	1.1	0.9	2.9	2.1	1.8	1.4
	LR^{**}	2.1	1.2	1.1	0.9	2.7	2.1	1.8	1.4
	LR^{***}	2.0	1.2	1.0	0.9	2.5	1.9	1.7	1.4
	LR_{boot}	1.4	1.1	1.0	1.2	1.2	1.2	1.3	1.1
	LR_{boot}^*	1.4	1.1	1.0	1.1	1.2	1.2	1.2	1.1

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Na Tabela 28 são apresentados os resultados para o modelo exponencial potência, em que podemos notar que dentro os testes corrigidos, o teste LR_{boot}^* apresenta melhor desempenho em relação aos demais testes corrigidos. Por exemplo, para $p = 3, \alpha = 10\%$, as taxas de rejeição nulas de teste baseado na razão de verossimilhanças bootstrap corrigido para os quatro tamanhos amostrais são de 10.7%, 10.6%, 10.2%, 10.2%, respectivamente. No cenário em que $p = 5, \alpha = 10\%, 5\%, 1\%, n = 30$, as taxas de rejeição nulas de teste bootstrap corrigido são de 10.3%, 5.3%, 1.1% respectivamente para cada nível nominal fixado de teste.

Tabela 28 – Tamanho dos testes considerando o modelo exponencial potência $\kappa = 0.3$ com $p = 3, 5$, $k = 3$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).

α	$Teste$	$p = 3$				$p = 5$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	LR	17.3	13.8	13.0	10.8	21.5	15.6	13.6	10.3
	LR^*	12.5	11.1	9.9	9.7	13.5	11.3	10.5	9.5
	LR^{**}	12.1	10.9	9.8	9.7	13.0	11.2	10.4	9.5
	LR^{***}	11.6	10.8	9.6	9.6	12.2	10.8	10.2	9.5
	LR_{boot}	10.6	10.2	10.2	10.1	10.2	10.3	10.1	9.5
	LR_{boot}^*	10.7	10.6	10.2	10.2	10.3	10.6	10.3	10.7
$\alpha = 5\%$	LR	10.1	7.7	6.7	5.4	13.2	8.7	7.5	5.2
	LR^*	6.7	5.8	4.7	4.7	7.3	5.9	5.6	4.7
	LR^{**}	6.4	5.7	4.7	4.7	6.9	5.9	5.5	4.7
	LR^{***}	6.0	5.6	4.6	4.7	6.4	5.7	5.4	4.7
	LR_{boot}	5.3	5.3	5.0	5.1	5.3	5.4	5.1	4.6
	LR_{boot}^*	5.5	5.6	4.9	4.9	5.2	5.5	5.3	5.3
$\alpha = 1\%$	LR	2.7	2.0	1.7	1.0	4.0	2.5	2.1	1.0
	LR^*	1.4	1.3	1.7	0.9	1.9	1.4	1.4	0.9
	LR^{**}	1.3	1.3	1.0	0.9	1.7	1.3	1.4	0.9
	LR^{***}	1.2	1.3	1.0	0.9	1.6	1.1	1.3	0.9
	LR_{boot}	1.0	1.1	1.1	1.1	1.4	1.1	1.3	0.9
	LR_{boot}^*	1.0	1.1	1.1	0.9	1.1	1.2	1.4	1.1

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Os resultados apresentados na Tabela 29 para o t_4 e o modelo exponencial potência, apontam que as taxas de rejeição de teste baseado na verossimilhanças usual para ambos os modelos considerados permanecem com caráter liberal apesar da redução da distorção pelas suas diferentes versões corrigidas de teste. Por exemplo, para $p = 3, k = 2, \alpha = 10\%$, as taxas de rejeição nulas de teste baseado na razão de verossimilhanças corrigido para os quatro tamanhos amostrais são de 13.5%, 11.9%, 10.9%, 10.6%, para o modelo t_4 e de 12.2%, 10.8%, 10.4%, 10.3% para o modelo exponencial potência. Dentro os testes corrigidos, o teste LR_{boot}^* apresentam melhor desempenho em ambos os modelos seguido de LR_{boot}^* , LR^{***} , LR^{**} e de LR^* .

Tabela 29 – Tamanho dos testes considerando os modelos t_4 e exponencial Potência $\kappa = 0.3$ com $p = 3$, $k = 2$ e diversos valores para n ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = \mathbf{0}$).

α	$Teste$	Modelo t_4				Exponencial			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	LR	17.4	14.1	13.1	11.7	15.9	12.9	12.7	11.2
	LR^*	13.9	12.1	11.0	10.7	12.8	11.0	10.6	10.4
	LR^{**}	13.8	11.7	10.9	10.6	12.5	10.9	10.5	10.3
	LR^{***}	13.5	11.9	10.9	10.6	12.2	10.8	10.4	10.3
	LR_{boot}	9.8	10.4	10.2	10.2	10.6	9.9	10.4	10.2
	LR_{boot}^*	10.1	10.5	10.2	10.0	10.5	10.1	10.3	10.0
$\alpha = 5\%$	LR	10.4	8.2	7.1	5.9	9.3	7.2	6.9	6.1
	LR^*	8.0	6.7	5.8	5.3	7.0	5.8	5.5	5.5
	LR^{**}	7.8	6.3	5.7	5.3	6.9	5.7	5.4	5.5
	LR^{***}	7.6	6.6	5.6	5.3	6.7	5.7	5.3	5.4
	LR_{boot}	4.8	5.3	5.3	5.1	5.3	5.0	5.6	5.3
	LR_{boot}^*	5.0	5.6	5.2	4.9	5.1	5.2	5.4	5.1
$\alpha = 1\%$	LR	3.1	2.0	1.9	1.4	2.6	1.8	1.7	1.3
	LR^*	2.2	1.5	1.4	1.2	1.7	1.7	1.1	1.1
	LR^{**}	2.2	1.3	1.3	1.2	1.7	1.1	1.1	1.1
	LR^{***}	2.1	1.5	1.4	1.2	1.7	1.7	1.1	1.1
	LR_{boot}	1.2	1.2	1.3	1.2	1.3	1.2	1.3	1.3
	LR_{boot}^*	1.2	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Na Tabela 30, avaliamos o efeito do número de parâmetros de interesse no desempenho dos testes, fixando o tamanho amostral ($n = 35$), o número de parâmetros de perturbação ($p = 3$) e variando o número de parâmetros de interesse ($k = 2, 3, 4, 5$) para os modelos t_4 e exponencial potência $\kappa = 0.3$. Percebe-se que para ambos os modelos, os testes usuais e suas versões corrigidas são bastante distorcidos e conforme o número de parâmetros de interesse aumenta, a distorção dos testes LR e suas versões corrigidas LR^* , LR^{**} e LR^{***} aumenta quase na mesma proporção. Por outro lado, o aumento de número de parâmetros de interesse não interfere no desempenho do teste baseado em (LR_{boot}^*). Por exemplo, para o modelo t_4 e considerando o cenário em que $p = 5$, $\alpha = 5\%$, temos que as taxas de rejeição dos testes são iguais a $11.7\%(LR^*)$, $7.2\%(LR^{**})$, $7.0\%(LR)$, $6.7\%(LR^{***})$, $5.2\%(LR_{boot})$ e $5.3\%(LR_{boot}^*)$,

respectivamente. Considerando o mesmo cenário, temos para o modelo exponencial potência as taxas de rejeição de todos os testes são as seguintes: 11.2%(LR^*), 7.2%(LR^{**}), 7.0%(LR), 6.8%(LR^{***}), 5.7%(LR_{boot}), 5.8%(LR_{boot}^*), respectivamente.

Tabela 30 – Tamanho dos testes considerando os modelos t_4 e exponencial potência com $\kappa = 0.3$, $n = 35$, $p = 3$ e diversos valores para k ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = \mathbf{0}$).

α	$Teste$	Modelo t_4				Exponencial potência			
		k				k			
		2	3	4	5	2	3	4	5
$\alpha = 10\%$	LR	14.8	15.7	17.2	19.3	13.9	14.3	16.5	18.4
	LR^*	12.2	12.1	13.0	13.3	11.3	11.0	12.9	13.1
	LR^{**}	12.0	11.8	12.8	12.8	11.1	10.8	12.7	12.8
	LR^{***}	11.9	11.6	12.5	12.3	11.0	10.4	12.4	12.4
	LR_{boot}	10.2	10.2	10.0	9.9	10.5	9.8	10.8	10.7
	LR_{boot}^*	10.2	10.9	11.4	10.2	10.6	10.7	12.2	11.1
$\alpha = 5\%$	LR	8.2	9.0	10.0	11.7	7.8	8.0	9.7	11.2
	LR^*	6.3	6.2	7.1	7.2	6.1	5.8	7.0	7.2
	LR^{**}	6.2	6.0	7.0	7.0	6.0	5.7	6.9	7.0
	LR^{***}	6.1	5.8	6.8	6.7	5.8	5.5	6.7	6.8
	LR_{boot}	5.2	4.8	5.1	5.1	5.3	5.0	5.5	5.7
	LR_{boot}^*	5.2	5.4	5.9	5.2	5.2	5.4	6.5	5.8
$\alpha = 1\%$	LR	2.0	2.4	2.9	3.5	1.9	2.1	2.9	3.3
	LR^*	1.4	1.5	1.7	1.8	1.4	1.2	1.6	1.7
	LR^{**}	1.4	1.4	1.6	1.8	1.4	1.2	1.5	1.6
	LR^{***}	1.4	1.4	1.6	1.6	1.3	1.2	1.5	1.5
	LR_{boot}	1.1	1.1	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.3
	LR_{boot}^*	1.1	1.1	1.4	1.2	1.1	1.2	1.5	1.4

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Na Tabela 31, analisamos o efeito do número de parâmetros de perturbação no desempenho dos testes, fixando o tamanho amostral ($n = 35$), o número de parâmetros de interesse ($k = 3$) e variando o número de parâmetros de perturbação ($p = 2, 3, 4, 5$) para os modelos t_4 e exponencial potência ($\kappa = 0.3$). Observe-se que, para ambos os modelos, os testes usuais e suas versões corrigidas são bastante distorcidos e conforme o número de parâmetros de perturbação aumenta, a distorção dos testes LR e suas versões corrigidas LR^* , LR^{**} e LR^{***} aumenta,

um comportamento semelhante a da Tabela 30. O teste (LR_{boot}^*) teve um desempenho melhor em relação aos demais testes. Por exemplo, considerando o cenário em que $p = 5$ e $\alpha = 10\%$, temos as taxas de rejeição nulas dos testes iguais a $21.7\%(LR^*)$, $16.4\%(LR^{**})$, $15.9\%(LR)$, $15.4\%(LR^{***})$, $10.4\%(LR_{boot})$, $10.5\%(LR_{boot}^*)$ para o modelo t_4 e iguais a $18.5\%(LR^*)$, $13.7\%(LR^{**})$, $13.4\%(LR)$, $13.1\%(LR^{***})$, $10.0\%(LR_{boot})$, $10.1\%(LR_{boot}^*)$ para o modelo exponencial potência com $\kappa = 0.3$, respectivamente.

Tabela 31 – Tamanho dos testes considerando os modelos t_4 e exponencial potência com $\kappa = 0.3$, $n = 35$, $k = 3$ e diversos valores para p ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).

α	<i>Testes</i>	Modelo t_4				Exponencial potência			
		p				p			
		2	3	4	5	2	3	4	5
$\alpha = 10\%$	LR	13.8	15.7	18.5	21.7	12.5	14.3	16.8	18.5
	LR^*	10.1	12.1	12.5	16.4	9.3	11.0	11.0	13.7
	LR^{**}	9.9	11.8	12.1	15.9	9.2	10.8	10.6	13.4
	LR^{***}	9.7	11.6	11.3	15.4	9.0	10.4	10.1	13.1
	LR_{boot}	10.2	10.2	10.1	10.4	9.7	9.8	9.6	10.0
	LR_{boot}^*	10.9	10.9	10.5	10.5	10.7	10.7	10.1	10.1
$\alpha = 5\%$	LR	7.8	9.0	11.0	13.6	6.5	8.0	9.6	10.8
	LR^*	5.3	6.2	6.7	9.4	4.6	5.8	6.1	7.8
	LR^{**}	5.2	6.0	6.4	9.1	4.5	5.7	5.8	7.6
	LR^{***}	4.9	5.8	6.0	8.8	4.3	5.5	5.5	7.4
	LR_{boot}	5.3	4.8	5.1	5.4	4.9	5.0	5.3	5.2
	LR_{boot}^*	5.8	5.4	5.6	5.4	5.3	5.4	5.7	5.3
$\alpha = 1\%$	LR	2.1	2.4	3.2	4.6	1.8	2.1	2.9	3.5
	LR^*	1.0	1.5	1.6	2.8	1.0	1.2	1.5	2.1
	LR^{**}	0.9	1.4	1.5	2.6	0.9	1.2	1.4	2.0
	LR^{***}	0.8	1.4	1.3	2.5	0.9	1.2	1.3	1.9
	LR_{boot}	1.2	1.1	1.1	1.2	1.3	1.2	1.1	1.2
	LR_{boot}^*	1.2	1.1	1.2	1.1	1.4	1.2	1.2	1.1

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

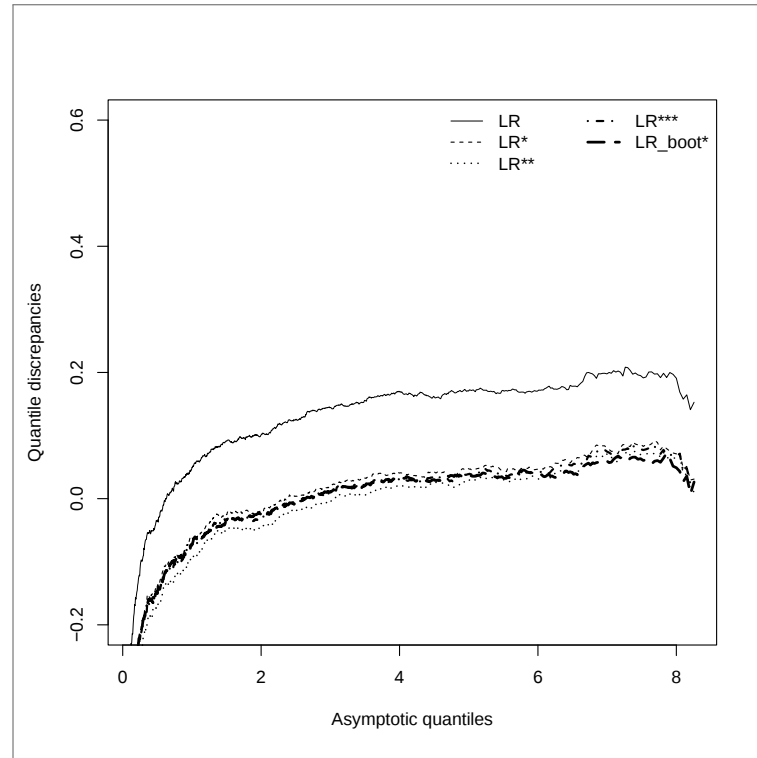
Nas Figuras 1-4 são apresentados os gráficos de discrepâncias relativas de quantis . Esta discrepância relativa é definida como segue:

$$\frac{ST(1 - \alpha) - \chi_k^2(1 - \alpha)}{\chi_k^2(1 - \alpha)},$$

em que $ST(1 - \alpha)$ representa o quantil amostral de ordem $(1 - \alpha)$ do conjunto de valores simulados da estatística do teste, sendo ST a estatística do teste $(LR, LR^*, LR^{**}, LR^{***}, LR_{boot}^*)$, e $\chi_k^2(1 - \alpha)$ o quantil correspondente. Importante frisar que quanto mais próxima da ordenada zero a curva de discrepância estiver, melhor aproximada está a distribuição nula da estatística de teste pela distribuição assintótica χ_k^2 de referência. Como já foi mencionado, os estudos de discrepâncias de quantis e poder de testes foram feitos considerando somente a hipótese $\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$.

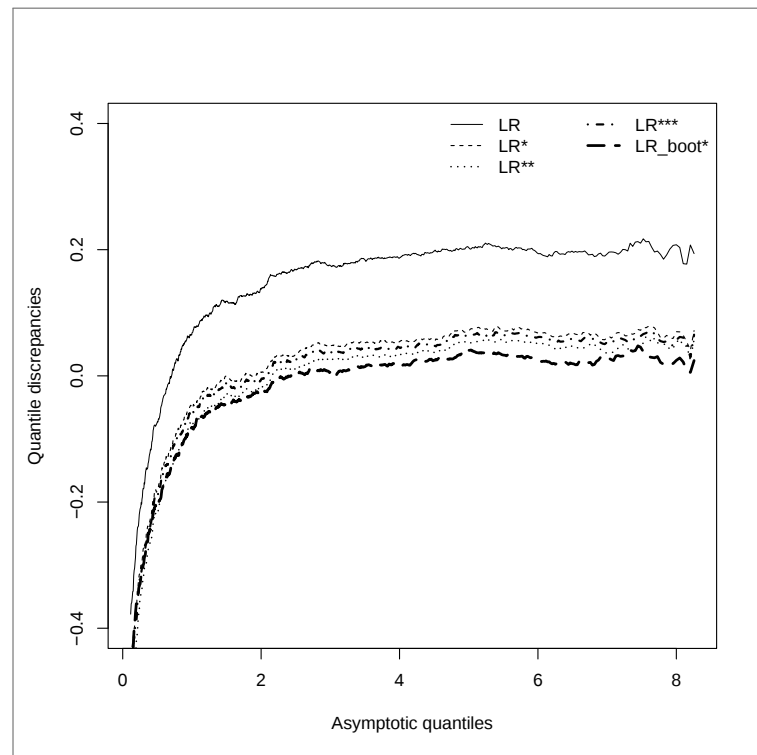
Nas Figuras 1-4 construímos o gráfico de discrepâncias para os modelos t_4 (Figuras 2-4) e exponencial potência (Figuras 1-3), considerando o cenário em que $n = 35, p = 3, 5$ e $k = 3$. Observando as Figura 1-4 percebemos que a distribuição nula de LR não é bem aproximada pela distribuição χ^2 de referência, uma vez que sua curva de discrepância está bem acima da ordenada nula em todos os cenários, o que ratifica o caráter liberal de teste baseado na estatística LR já observado na simulação para o tamanho do mesmo teste. De modo geral, as curvas das estatísticas corrigidas aproximaram-se bem da ordenada nula (indicando boa aproximação de suas respectivas distribuições nula pela distribuição χ^2 de referência) quando comparados à estatística LR para ambos os modelos considerados. Tais discrepâncias permanecem, portanto, aproximadamente estáveis, mas em patamares diferentes. Considerando o cenário em que $p = 3$ (Figuras 1 e 2), as estatísticas de testes corrigidos LR^*, LR^{**}, LR^{***} e LR_{boot}^* apresentaram taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais, o que foi refletido no desempenho dos testes apresentados nas simulações. Da mesma forma considerando o cenário em que $p = 5$ (Figuras 3 e 4), as estatísticas de testes corrigidos têm também suas curvas melhor aproximadas pela χ^2 de referencia. Podemos observar que nos modelos considerados, as curvas do modelo t_4 tem uma boa aproximação da ordenada nula e dentre os testes corrigidos, a estatística de teste bootstrap LR_{boot}^* apresenta curva mais próxima à ordenada nula.

Figura 1 – Discrepância relativa de quantis para o modelo exponencial potência com $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, p = 3, \kappa = 3$ ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).



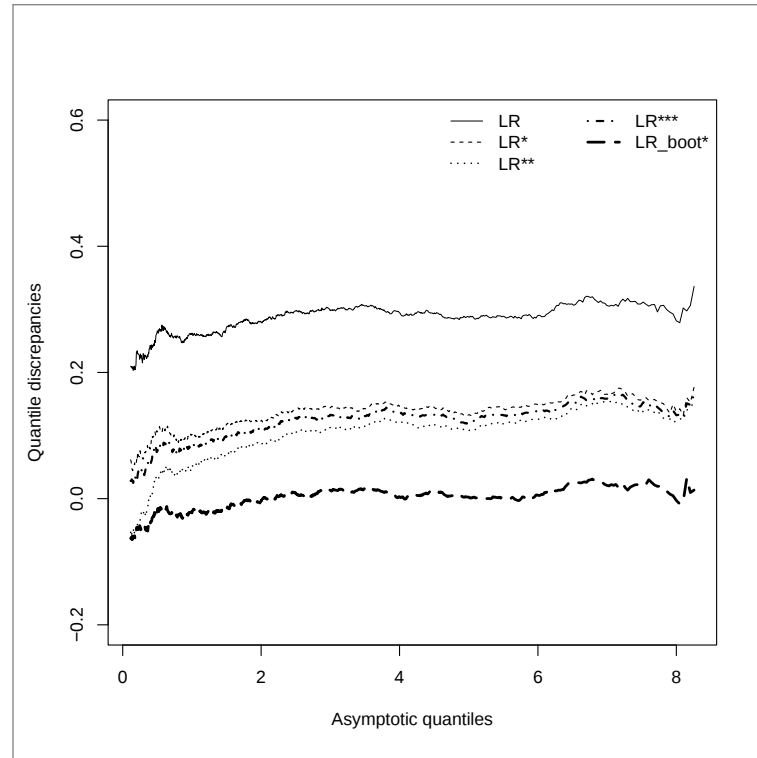
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 2 – Discrepância relativa de quantis para o modelo t_4 , considerando $n = 35, p = 3, k = 3$ ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).



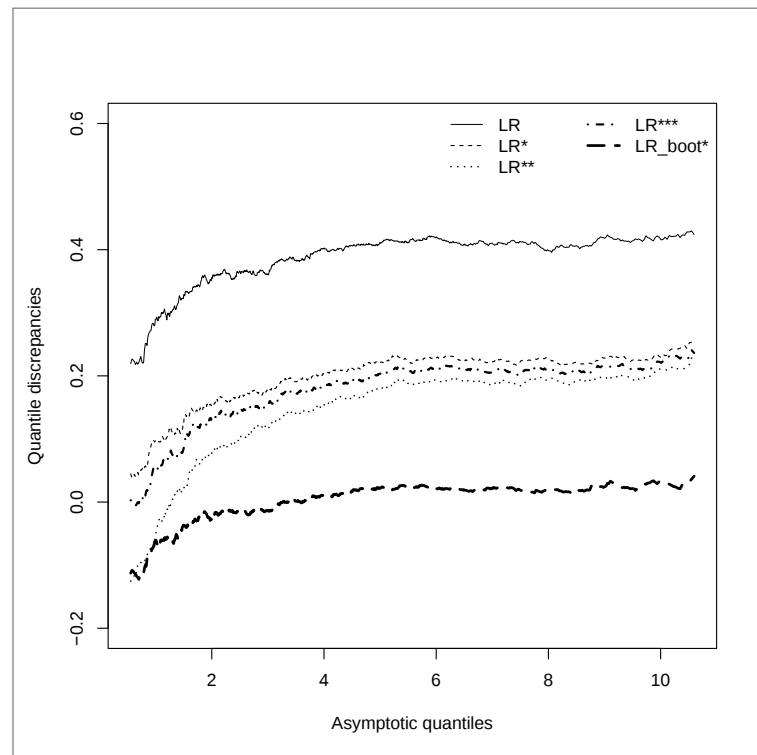
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 3 – Discrepância relativa de quantis para o modelo exponencial potência com $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, p = 5, k = 3$ ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).



Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 4 – Discrepância relativa de quantis para o modelo t_4 , considerando $n = 35, p = 5, k = 3$ ($\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0$).



Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 32 – Poder dos testes-Modelo Exponencial potência com $\kappa = 0.3, n = 35, q_1 = 3$ e $\alpha = 10\%$

δ	$p = 3$			$p = 5$		
	LR^*	LR^{**}	LR^{***}	LR^*	LR^{**}	LR^{***}
0,2	13.6	13.7	13.6	10.3	10.3	10.3
0,4	20.5	20.9	20.7	16.3	16.7	16.4
0,6	31.4	32.0	31.6	28.7	29.2	28.9
0,8	51.8	52.3	52.0	49.4	49.9	49.6
1,0	75.2	75.4	75.3	78.8	79.1	78.9
1,2	94.5	94.6	94.5	94.7	94.8	94.7
1,4	99.2	99.3	99.2	99.3	99.3	99.3

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Nas Tabelas 32 e 33 apresentamos os resultados de simulação para as taxas de rejeição não-nula (poder) dos testes LR^*, LR^{**}, LR^{***} para o modelo exponencial potência $\kappa = 0.3$ e t_4 , respectivamente. Para esta simulação consideramos somente a seguinte hipótese alternativa $\mathcal{H}_1^3$ (heteroscedasticidade) para $q_1 = 3, p = 3, 5$ fixados e valores diferentes para $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta \neq 0$ foram considerados ao nível nominal $\alpha = 10\%$. Dos resultados da simulação percebe-se, para ambos os modelos considerando $p = 3$, que os poderes dos testes aumentam e se aproximam da unidade à medida que δ aumenta, o que era de se esperar. É importante observar que o aumento de número de parâmetro de perturbação de $p = 3$ para $p = 5$ não interfere muito nos resultados dos testes de poder. Portanto, os dois testes são semelhantes diante do aumento de p . Devido a sua grande distorção do teste, a estatística LR não foi considerada para o estudo de poder. Note que entre os testes corrigido LR^{**} apresentou um desempenho levemente superior aos demais testes corrigidos.

Os resultados apontam que não há nenhuma perda de poder derivada do fato de usar o fator de correção de Bartlett.

Tabela 33 – Poder dos testes-Modelo t_4 com $n = 35$, $q_1 = 3$ e $\alpha = 10\%$

δ	$p = 3$			$p = 5$		
	LR^*	LR^{**}	LR^{***}	LR^*	LR^{**}	LR^{***}
0,2	11.2	11.3	11.2	14.8	14.9	14.8
0,4	15.2	15.6	15.3	19.6	19.8	19.6
0,6	25.0	25.4	25.1	29.4	29.8	29.5
0,8	40.5	40.8	40.6	44.3	44.6	44.4
1,0	63.0	63.4	63.2	64.8	65.2	65.0
1,2	86.0	86.2	86.1	85.2	85.4	85.3
1,4	97.6	97.7	97.6	96.9	97.0	97.0

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

3.2 APLICAÇÃO 1

No Apêndice F encontra-se o conjunto de dados reais utilizado para aplicarmos a metodologia de testes apresentado nesse capítulo. Os dados referem-se ao peso das lentes dos olhos de coelhos europeus na Austrália (*OryctolagusCuniculus*), y , em mg , e à idade do animal, x , em dias, numa amostra contendo 71 observações. Esses dados foram analisados por Ratkowsky (1983), que verificaram a suspeita de dois pontos aberrantes sob estimação de mínimos quadrados, assim, indicando que tal conjunto de dados suporta erros com caudas mais pesadas que as da normal. Wei (1998) analisou o mesmo conjunto de dados e detectou a presença de observação aberrantes sob a estimação dos mínimos quadrados confirmando a evidência de heteroscedasticidade nos dados. O mesmo conjunto de dados foi reanalisado por Cysneiros, Paula e Galea (2005) e adotaram erros seguindo distribuições simétricas, dentre elas, a distribuição t-Student com $\nu = 4$ graus de liberdade (seguindo o critério AIC) e consideraram uma ligação identidade nos dois componentes sistemáticos. Assim, propusemos um modelo introduzindo funções logarítmicas de ligação tanto na média quanto na dispersão e definido da seguinte forma:

$$y_l = \exp\left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{(x_l + \beta_2)}\right) + \epsilon_l.$$

Assumimos que $\epsilon_l \sim S(0, \exp\{\delta_0 \exp(\delta_1/x_l)\})$ e $l = 1, 2, \dots, 71$. Nosso interesse é testar a seguinte hipótese: $\mathcal{H}_0 : \delta_1 = 0$ versus: $\mathcal{H}_1 : \delta_1 \neq 0$. Para este teste percebe-se que as estatísticas de teste são: $LR = 11.151$ (p -valor: 0.001); $LR^* = 8.901$ (p -valor: 0.003); $LR^{**} = 8.332$ (p -valor: 0.004); $LR^{***} = 8.660$ (p -valor: 0.003); $LR_{boot}^* = 4.700$ (p -valor: 0.03). Podemos

observar que para a estatística de razão de verossimilhanças bootstrap corrigido leva a não rejeição da hipótese nula $\mathcal{H}_0$ ao nível de significância de 1%, ou seja, a dispersão é constante para todas as observações (homoscedasticidade). No entanto, a estatística da razão de verossimilhanças e suas versões corrigidas levam a rejeição da hipótese nula a este nível, evidenciando que o modelo é heteroscedástico (dispersão variável). Note que ao nível de significância de 5% todas as estatísticas de testes ($LR, LR^*, LR^{**}, LR^{***}, LR_{boot}^*$) levam a rejeição da hipótese nula $\mathcal{H}_0$.

3.3 APLICAÇÃO 2

Neste exemplo, o conjunto de dados reais analisado refere-se a um experimento com intuito a realização de análises bioquímicas de armazenamento intracelular e transporte de cálcio através da membrana plasmática. As células em estudo foram colocadas numa solução de cálcio durante um determinado tempo x (em minutos), após o qual foi medida a quantidade de cálcio absorvida pelas células y (em $nmol/mg$), numa amostra de 27 observações (ver Apêndice G). Esses dados foram analisados por RAWLINGS (1988) e BRAZZALE (2000). Recentemente o mesmo conjunto de dado foi analisado por ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022) com presença de heteroscedasticidade nos dados. Considerando o modelo assumido por ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022) introduzimos uma função de ligação logarítmica na média e na dispersão para reanalisarmos o conjunto de dados. Isto é, consideramos o seguinte modelo heteroscedástico:

$$y_l = \exp\{\beta_0(1 - \exp(-\beta_1 x_l))\} + \epsilon_l.$$

Assumimos que $\epsilon_l \sim S(0, \exp\{\delta_0 \exp(\delta_1/x_l)\})$ e $l = 1, 2, \dots, 27$. Nosso interesse é testar a seguinte hipótese: $\mathcal{H}_0 : \delta_1 = 0$ versus: $\mathcal{H}_1 : \delta_1 \neq 0$. Para este teste, os valores observados para as estatísticas são: $LR = 10.532$ (p -valor: 0.001); $LR^* = 10.252$ (p -valor: 0.001); $LR^{**} = 10.244$ (p -valor: 0.001); $LR^{***} = 10.248$ (p -valor: 0.001); $LR_{boot}^* = 2.857$ (p -valor: 0.091). Podemos observar que para a estatística de razão de verossimilhanças bootstrap corrigida leva a não rejeição da hipótese nula $\mathcal{H}_0$ ao nível de significância de 5%, ou seja, a dispersão é constante para todas as observações, mas rejeita a hipótese nula a 10%. Por outro lado, a estatística da razão de verossimilhanças e suas versões corrigidas conduzem à mesma conclusão, ou seja, levam à rejeição da hipótese nula aos níveis de significância usuais, sugerindo evidência marginal de heteroscedasticidade.

3.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo derivamos o fator de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças na classe dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH) cujo interesse foi de testar conjuntamente o efeito da média e da dispersão e testar separadamente o efeito da média e o efeito da dispersão. Salientamos aqui que utilizamos qualquer estrutura heteroscedástica. Além disso, o nosso principal resultado obtido neste capítulo generaliza os resultados apresentados em Cordeiro (2004) (em que foi obtido o fator de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças no modelo não linear simétrico (MNLS), considerando o parâmetro de dispersão constante) e em ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTE-NEGRO (2022) (em que foram obtidos fatores de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças e tipo-Bartlett para as estatísticas escore e gradiente nos MNLSH considerando a estrutura de heteroscedasticidade multiplicativa como caso particular).

Com o intuito de avaliar o desempenho dos testes baseados nas estatísticas da razão de verossimilhanças (LR), razão de verossimilhanças bootstrap (LR_{boot}) e suas versões corrigidas LR^* , LR^{**} , LR^{***} e LR_{boot}^* , os resultados de simulação foram obtidos para os MNLSH em que as distribuições t-Student com $\nu = 4$ (fixo) e exponencial potência com parâmetro de forma $k = 0.3$ foram consideradas. Os resultados numéricos conduziram a diversas conclusões importantes a respeito do teste de heteroscedasticidade em amostras pequenas e de tamanho moderado. Concluímos destes resultados que o teste LR é bastante liberal e sua versão corrigida, embora atenuar tal tendência, ainda apresenta taxas de rejeição distorcidas conforme aumentamos o número de parâmetros de interesse e de perturbação. Considerando os testes LR_{boot} e LR_{boot}^* , podemos observar que têm melhores desempenhos e apresentam taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais considerados, em quase todos os cenários analisados, em amostra de tamanho pequeno e moderado. Em suma, recomendamos o uso destas ferramentas no refinamento de testes.

No que tange ao Poder de testes corrigidos LR para amostras de tamanho pequeno ou moderado, o teste corrigido LR^{**} foi o que apresentou o melhor desempenho dentre dos testes corrigidos em estudo para ambos os modelos considerados.

4 REFINAMENTO DE TESTES ESCORE NA CLASSE DOS MODELOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS

Resumo

Neste capítulo derivamos uma fórmula matricial geral para o fator de correção tipo-Bartlett para a estatística escore para testar conjuntamente e/ou separadamente o efeito da média e da dispersão, nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH). Nesta classe de modelos, consideramos que a média e a dispersão não são constantes, admitindo para a dispersão qualquer estrutura heteroscedástica. Para o teste de heteroscedasticidade, os resultados do nosso trabalho generalizam os apresentados em Cordeiro (2004), ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022). Através de simulação de Monte Carlo avaliamos os desempenhos dos testes escore com suas respectivas versões corrigidas, em termos de tamanho e poder, em amostras finitas. Por fim, apresentamos uma aplicação empírica.

Palavras chaves: correção Tipo-Bartlett; teste escore; poder.

4.1 INTRODUÇÃO

O teste escore é baseado em aproximação assintótica de primeira ordem e podem ser menos preciso quando o tamanho da amostra é pequeno ou moderado, como é o caso do teste da razão de verossimilhanças visto no capítulo 3. Assim como o teste da razão de verossimilhança, o teste escore pode ser aprimorado, conferindo um teste cuja distribuição nula é melhor aproximada pela qui-quadrado de referência. A estatística escore é aperfeiçoada pelo um fator de correção conhecido como fator de correção tipo-Bartlett de tal modo que essa estatística tenha distribuições χ_k^2 até ordem $O(n^{-1})$ sob a hipótese nula ($\mathcal{H}_0$), sendo os graus de liberdade k iguais ao número de restrições impostas à $\mathcal{H}_0$. O fator de correção tipo-Bartlett para a estatística escore S_R foi obtido por Cordeiro e Ferrari (1991) através de em uma transformação polinomial da estatística original. Vale salientar que essa transformação não foi monótona, uma dificuldade que é superada através dos resultados obtidos dos trabalhos de Kakizawa (1996), Cordeiro, Ferrari e Cysneiros (1998). A estatística escore corrigida (S_R^*) sob a hipótese nula tem distribuição χ_k^2 até ordem $O(n^{-1})$ enquanto a estatística original tem erro de ordem até $O(n^{-1/2})$. Isto é, o fator de correção tipo-Bartlett faz com que o erro de aproximação seja reduzido de $O(n^{-1/2})$ para $O(n^{-1})$.

Vários trabalhos e artigos produzidos na literatura têm abordado a correção tipo-Bartlett para as estatísticas score em modelos específicos. Cordeiro et al. (2003) derivaram um fator de correção para a estatística S_R para modelos lineares com covariadas na dispersão, Uribe-Opazo, Ferrari e Cordeiro (2008) e Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010) derivaram fator de correção tipo Bartlett para a estatística S_R na classe dos modelos lineares e não lineares simétricos, respectivamente. Nascimento e Cysneiros (2010) aprimoraram o teste score para os modelos não lineares simétricos heteroscedásticos. Lagos, Morettin e Barroso (2010) derivaram o fator de correção tipo-Bartlett para a estatística score em modelos de séries temporais, Lemonte, Cordeiro e Moreno-Arenas (2016) derivaram o fator de correção tipo-Bartlett para a estatística score em modelo de regressão não lineares Birnbaum–Saunders. Adicionalmente, Cavalcanti et al. (2021) obtiveram o fator de correção tipo-Bartlett para a estatística score em modelos não lineares de família exponencial. Recentemente, ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022) derivaram expressões gerais para fatores de correção Bartlett e Tipo Bartlett para as estatísticas de razão de verossimilhanças e gradiente para testar o vetor de parâmetro da dispersão em modelos não lineares simétricos heteroscedásticos.

Neste capítulo, nosso objetivo é derivar uma fórmula matricial geral para o fator de correção tipo-Bartlett para a estatística score nos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH), admitindo para a dispersão qualquer estrutura heteroscedástica, tendo como caso particular, a heteroscedasticidade multiplicativa.

Este capítulo se divide como segue. Na seção seguinte, discorreremos sobre as correções tipo-Bartlett para a estatística score, obtendo expressões em notação matricial para o fator de correção tipo-Bartlett para o teste de heteroscedasticidade na classe dos MNLSH. Também, consideramos estatísticas de teste alternativas à estatística score corrigida. Na Seção 4.2 será realizado um estudo de simulação de Monte Carlo sob diversos cenários afim de avaliar o desempenho dos testes em estudo. Para efeito de comparação, consideramos o estudo de simulação dos testes da razão de verossimilhanças usual e corrigido, desenvolvido no capítulo 3 na classe dos MNLSH. Na Seção 4.3 e 4.4 apresentamos duas aplicações a dados reais. Considerações sobre os resultados obtidos são apresentados na Seção 4.5.

4.1.1 Especificação dos Modelos Não Lineares Simétricos Heteroscedásticos

Suponha que $y_1, \dots, y_n$ são variáveis aleatórias contínuas e independentes em que cada $y_l, l = 1, \dots, n$ segue uma distribuição simétrica com parâmetro de locação $\mu_l \in \mathbb{R}$ e de

dispersão $\phi_l^* > 0$. A função de densidade de probabilidade associada a y_l pode ser escrita como segue

$$f(y_l, \mu_l, \phi_l^*) = \frac{1}{\sqrt{\phi_l^*}} g(u_l), \quad y_l \in \mathbb{R}, \mu_l \in \mathbb{R}, \phi_l^* > 0, \quad (4.1)$$

em que $g(\cdot)$ representa a função geradora de densidade com $g(u_l) > 0$, $u_l > 0$ sendo $u_l = \phi_l^{*-1}(y_l - \mu_l)^2$ e $\int_0^\infty u_l^{-1/2} g(u_l) du_l = 1$. Ressalta-se que a função $g(\cdot)$ pode depender de parâmetros extras, digamos ν , como é o caso do parâmetro de graus de liberdade da distribuição t-Student. Neste caso, assume-se que tais parâmetros sejam constantes. Para definir nosso modelo não linear simétrico heteroscedástico de regressão, duas estruturas de regressão não lineares foram introduzidas ao modelo definido em 4.1. Supomos para a resposta média $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$ a seguinte estrutura

$$g(\boldsymbol{\mu}_l) = \boldsymbol{\eta} = f_1(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}), \quad (4.2)$$

em que $g(\boldsymbol{\mu}_l)$ representa a função de ligação da média, uma função não linear, contínua e duplamente diferenciável com respeito aos componentes de $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$, vetores de p parâmetros desconhecidos a serem estimados, com $p < n$ e $\mathbf{X} = (x_{l1}, \dots, x_{ln})^\top$ o vetor de n variáveis explicativas associadas a l -ésima observação. Também assumimos uma componente sistemática para o vetor da dispersão $\boldsymbol{\phi}^* = (\phi_1^*, \dots, \phi_n^*)^\top$ definida por

$$h(\boldsymbol{\phi}_l^*) = \boldsymbol{\tau} = f_2(\mathbf{S}, \boldsymbol{\delta}), \quad (4.3)$$

em que $h(\boldsymbol{\phi}_l^*)$ representa a função de ligação da dispersão que é uma função não linear, contínua e duplamente diferenciável com respeito aos componentes de $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_q)^\top$, vetores de p parâmetros desconhecidos a serem estimados, com $q < n$ e $\mathbf{S} = (s_{l1}, \dots, s_{ln})^\top$ o vetor de n variáveis explicativas que pode ter componentes comuns associadas a l -ésima observação. Assim, os modelos simétricos de regressão são definidos pela componente aleatória 4.1 e pelas componentes sistemáticas definidas em 4.2 e 4.3. Entretanto, é possível formular o modelo descrito acima usando as propriedades das distribuições pertencentes à classe simétrica. Logo, o modelo não linear simétrico heteroscedástico pode ser escrito como segue

$$y_l = \mu_l + \sqrt{\phi_l^*} \epsilon_l; \quad l = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

em que $\epsilon_l \sim S(0, 1, g)$, sendo μ_l e ϕ_l^* as componentes sistemáticas da média e da dispersão e definidas em 4.2 e 4.3, respectivamente.

4.1.2 Testes de hipótese para a estatística escore em MNLSH

Nesta seção, apresentaremos a estatística de teste escore (S_R) para testar conjuntamente os efeitos da média e da dispersão em MNLSH. Isto é, considerar o vetor de parâmetro $(\beta_1^\top, \delta_1^\top)^\top$ como o de interesse. Considerando o logaritmo da função de verossimilhança (log-verossimilhança) do vetor de parâmetros $\theta = (\beta^\top, \delta^\top)^\top$ dado o vetor de observações $(y_1, \dots, y_n)^\top$ do modelo não linear simétrico heteroscedásticos definido em 4.4, temos que

$$\ell = \ell(\theta) = \log f(y, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \log(\phi_l^*) + \sum_{l=1}^n t(z_l), \quad (4.5)$$

em que $t(z_l) = \log\{g(u_l)\}$, $u_l = z_l^2 = (y_l - \mu_l)^2 / \phi_l^*$ e $l = 1, \dots, n$. Assumimos que a função de log-verossimilhanças $\ell(\beta, \delta)$ dada em (4.5) é regular com respeito às derivadas em relação aos componentes dos vetores β e δ até a quarta ordem. Por mais detalhes, as condições de regularidades podem ser encontradas em (COX; HINKLEY, 1974). Introduzimos na obtenção das derivadas a seguinte notação: $\varphi_{abcde} = E(t_{(z_l)}^{(1)a} t_{(z_l)}^{(2)b} t_{(z_l)}^{(3)c} t_{(z_l)}^{(4)d} z^e)$ em que $a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $t^{(i)}(z_l) = \partial^i t(z_l) / \partial z_l^i$, $i = 1, 2, 3, 4$ e $l = 1, \dots, n$. Maiores detalhes sobre as derivadas de algumas distribuições simétricas encontram-se no Apêndice I. Consideremos as seguinte partições para os vetores de parâmetros desconhecidos $\beta = (\beta_1^\top, \beta_2^\top)^\top$ e $\delta = (\delta_1^\top, \delta_2^\top)^\top$ em que $\beta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{p_1})^\top$, $\beta_2 = (\beta_{p_1+1}, \dots, \beta_p)^\top$, $\delta_1 = (\delta_1, \dots, \delta_{q_1})^\top$, $\delta_2 = (\delta_{q_1+1}, \dots, \delta_q)^\top$, com $p_1 \leq p$ e $q_1 \leq q$. Neste capítulo adotamos a mesma parametrização que a do capítulo anterior.

4.1.2.1 Testes simultâneo sobre o subconjunto da média e da dispersão

Muita vezes estamos interessado em fazer testes sobre um subconjunto dos parâmetros β e δ . Assim, queremos testar as seguintes hipóteses: $\mathcal{H}_0^1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}, \delta_1 = \delta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^1 : \text{pelo menos uma das igualdades é violada}$, em que $(\beta_1^{(0)\top}, \delta_1^{(0)\top})^\top$ é o vetor de parâmetros de interesse, de dimensões $p_1 \times 1$ e $q_1 \times 1$, respectivamente. Aqui, $(\beta_2^\top, \delta_2^\top)^\top$ é o vetor de parâmetros de perturbação, de dimensões $(p - p_1) \times 1$ e $(q - q_1) \times 1$, respectivamente.

Essas decomposições induzem as correspondentes partições das matrizes $X = (X_1, X_2)$ e $S = (S_1, S_2)$ em que X_1, X_2, S_1 e S_2 são sub-matrizes conhecidas de posto reduzido e de dimensões $n \times p_1$, $n \times (p - p_1)$, $n \times q_1$, $n \times (q - q_1)$, respectivamente.

Considerando a função de log-verossimilhanças dada em (4.5), a função escore total asso-

ciada é definida como segue: $U(\boldsymbol{\theta}) = (U_1(\boldsymbol{\theta})^\top, U_2(\boldsymbol{\theta})^\top)^\top$ em que

$$U_1(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} U_{\beta_1}(\boldsymbol{\theta}) \\ U_{\delta_1}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \beta_1 \\ \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \delta_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U_2(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} U_{\beta_2}(\boldsymbol{\theta}) \\ U_{\delta_2}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \beta_2 \\ \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \delta_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

cujo elementos são dados por

$$\begin{aligned} \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \beta_1 &= \mathbf{X}_1^\top \mathbf{M}_1 \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \\ \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \delta_1 &= -\frac{1}{2} \mathbf{S}_1^\top \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\Delta} (\boldsymbol{\iota} - \mathbf{V} \mathbf{u}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \beta_2 &= \mathbf{X}_2^\top \mathbf{M}_1 \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \\ \partial \ell(\boldsymbol{\theta}) / \partial \delta_2 &= -\frac{1}{2} \mathbf{S}_2^\top \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\Delta} (\boldsymbol{\iota} - \mathbf{V} \mathbf{u}), \end{aligned}$$

respectivamente. As matrizes diagonais de dimensão $n \times n$ associadas são dadas por: $\boldsymbol{\Lambda}_i = \boldsymbol{\Delta}_i = \text{diag}(1/\phi_1^*, \dots, 1/\phi_n^*)$, $\mathbf{M}_i = \text{diag}(m_{i1}, \dots, m_{in})$ com elementos dados por $m_{il} = d^i \mu_l / d\eta_l^i$ é a i -ésima derivada de $\mu_l = g^{-1}(\eta_l)$ e $\mathbf{H}_i = \text{diag}(h_{i1}, \dots, h_{in})$ com elementos $h_{il} = d^i \phi_l^* / d\tau_l^{i*}$ é a i -ésima derivada de $\phi_l^* = g^{-1}(\tau_l^*)$ para $i = 1, \dots, n$. As funções η e τ^* são consideradas como funções de ligação e definidas através de funções diferenciáveis g e h , respectivamente.

A matriz de informação total de Fisher particionada correspondente pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

em que

$$\mathbf{K}_{11} = \text{diag}\{\mathbf{K}_{\beta_{11}}, \mathbf{K}_{\delta_{11}}\}, \mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^\top = \text{diag}\{\mathbf{K}_{\beta_{12}}, \mathbf{K}_{\delta_{12}}\}, \mathbf{K}_{22} = \text{diag}\{\mathbf{K}_{\beta_{22}}, \mathbf{K}_{\delta_{22}}\}$$

sendo,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\beta_{11}} &= -(\varphi_{(0,1,0,0,0)}) (\tilde{\mathbf{X}}_1^\top \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{\mathbf{X}}_1), \quad \mathbf{K}_{\beta_{12}} = \mathbf{K}_{\beta_{21}}^\top = -(\varphi_{(0,1,0,0,0)}) (\tilde{\mathbf{X}}_1^\top \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{\mathbf{X}}_2), \\ \mathbf{K}_{\beta_{22}} &= -(\varphi_{(0,1,0,0,0)}) (\tilde{\mathbf{X}}_2^\top \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{\mathbf{X}}_2), \quad \mathbf{K}_\beta = -(\varphi_{(0,1,0,0,0)}) (\tilde{\mathbf{X}}^\top \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{\mathbf{X}}), \\ \mathbf{K}_{\delta_{11}} &= \frac{1}{4} (1 - \varphi_{(0,1,0,0,2)}) (\tilde{\mathbf{S}}_1^\top \boldsymbol{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \tilde{\mathbf{S}}_1), \quad \mathbf{K}_{\delta_{12}} = \mathbf{K}_{\delta_{21}}^\top = \frac{1}{4} (1 - \varphi_{(0,1,0,0,2)}) (\tilde{\mathbf{S}}_1^\top \boldsymbol{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \tilde{\mathbf{S}}_2) \\ \mathbf{K}_{\delta_{22}} &= \frac{1}{4} (1 - \varphi_{(0,1,0,0,2)}) (\tilde{\mathbf{S}}_2^\top \boldsymbol{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \tilde{\mathbf{S}}_2), \quad \mathbf{K}_\delta = \frac{1}{4} (1 - \varphi_{(0,1,0,0,2)}) (\tilde{\mathbf{S}}^\top \boldsymbol{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \tilde{\mathbf{S}}). \end{aligned}$$

Os φ 's podem ser encontrados em Uribe-Opazo, Ferrari e Cordeiro (2008). A inversa da matriz de informação total de Fisher associada é dada por

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

em que

$$\mathbf{K}^{11} = \text{diag}\{\mathbf{K}_{\beta}^{11}, \mathbf{K}_{\delta}^{11}\}, \mathbf{K}^{12} = \mathbf{K}^{21\top} = \text{diag}\{\mathbf{K}_{\beta}^{12}, \mathbf{K}_{\delta}^{12}\}, \mathbf{K}^{22} = \text{diag}\{\mathbf{K}_{\beta}^{22}, \mathbf{K}_{\delta}^{22}\},$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\beta}^{11} &= [\mathbf{K}_{\beta_{11}} - \mathbf{K}_{\beta_{12}} \mathbf{K}_{\beta_{22}}^{-1} \mathbf{K}_{\beta_{21}}]^{-1}, \mathbf{K}_{\beta}^{12} = \mathbf{K}_{\beta}^{12\top} = -\mathbf{K}_{\beta}^{11} \mathbf{K}_{\beta_{12}} \mathbf{K}_{\beta_{22}}^{-1}, \\ \mathbf{K}_{\delta}^{11} &= [\mathbf{K}_{\delta_{11}} - \mathbf{K}_{\delta_{12}} \mathbf{K}_{\delta_{22}}^{-1} \mathbf{K}_{\delta_{21}}]^{-1}, \mathbf{K}_{\delta}^{12} = \mathbf{K}_{\delta}^{12\top} = -\mathbf{K}_{\delta}^{11} \mathbf{K}_{\delta_{12}} \mathbf{K}_{\delta_{22}}^{-1}, \\ \mathbf{K}_{\beta}^{22} &= \mathbf{K}_{\beta_{22}}^{-1} + \mathbf{K}_{\beta_{22}}^{-1} \mathbf{K}_{\beta_{21}} \mathbf{K}_{\beta}^{11} \mathbf{K}_{\beta_{12}} \mathbf{K}_{\beta_{22}}^{-1}, \mathbf{K}_{\delta}^{22} = \mathbf{K}_{\delta_{22}}^{-1} + \mathbf{K}_{\delta_{22}}^{-1} \mathbf{K}_{\delta_{21}} \mathbf{K}_{\delta}^{11} \mathbf{K}_{\delta_{12}} \mathbf{K}_{\delta_{22}}^{-1}. \end{aligned}$$

Maiores detalhes sobre a inversa podem ser encontrados Rao (1973).

A estatística escore (S_R) para testar (i) $\mathcal{H}_0^1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}, \delta_1 = \delta_1^{(0)}$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$S_R = \mathbf{U}_{\beta_1}^{\top}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{K}_{\beta}^{11}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{U}_{\beta_1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{U}_{\delta_1}^{\top}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{K}_{\delta}^{11}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{U}_{\delta_1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}),$$

em que $\mathbf{U}^{\top}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ e $\mathbf{K}^{11}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ representam, respectivamente, a função escore e a inversa da matriz de informação total de Fisher para β e δ avaliados sob a hipótese nula com $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\beta}^{\top}, \tilde{\delta}^{\top})^{\top} = (\beta_1^{(0)\top}, \tilde{\beta}_2^{\top}, \delta_1^{(0)\top}, \tilde{\delta}_2^{\top})^{\top}$, sendo $\tilde{\beta}_2$ e $\tilde{\delta}_2$ os EMV restrita de β_2 e δ_2 respectivamente, sob $\mathcal{H}_0^1$. Os EMV irrestritas são representados pelo vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}^{\top}, \hat{\delta}^{\top})^{\top} = (\beta_1^{\top}, \hat{\beta}_2^{\top}, \delta_1^{\top}, \hat{\delta}_2^{\top})^{\top}$. Assintoticamente e sob a hipótese nula, a estatísticas escore (S_R) tem uma distribuição $\chi_{p_1+q_1}^2$ com $p_1 + q_1$ grau de liberdade. Rejeitamos a hipótese nula $\mathcal{H}_0$ se a estatística de teste $ST > k_{(1-\alpha)}$, com $ST = S_R$, sendo $k_{(1-\alpha)}$ representa o quantil $1 - \alpha$ da distribuição χ_k^2 e α o nível de significância adotado no teste com $0 < \alpha < 1$.

4.1.2.2 Testes separado para o vetor de parâmetro da média

Nosso interesse agora reside em testar um subconjunto do vetor de parâmetro β . Isto é testar (ii) $\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^2$: pelo menos uma das igualdades é violada, ou seja, testar isoladamente uma parte do vetor de parâmetros de interesse, enquanto que, o vetor de parâmetros $(\beta_2^{\top}, \delta^{\top})^{\top}$ é considerado vetor de parâmetros de perturbação. A partição do

vetor $\beta = (\beta_1^\top, \beta_2^\top)^\top$ induz a da matriz de planejamento (co-variada) $X = (X_1, X_2)$. A função escore total também pode ser particionada conforme a partição de β . Isto é, $U(\theta) = (U_1(\theta)^\top, U_2(\theta)^\top)^\top$ em que $U_1(\theta)^\top = U_{\beta_1}$, $U_2(\theta) = (U_{\beta_2}, U_\delta)^\top$, sendo U_{β_1}, U_{β_2} são definidas em (4.6) e U_δ em (3.3). Considerando a partição do β , a matriz de informação total de Fisher particionada pode ser expressa como segue

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} K_{\beta_{11}} & K_{\beta_{12}} & 0 \\ K_{\beta_{21}} & K_{\beta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & K_\delta \end{pmatrix},$$

em que as submatrizes $K_{\beta_{11}}, K_{\beta_{12}}, K_{\beta_{22}}, K_\delta$ são definidas em (4.7) e 0 representa matrizes ou vetores de zeros de dimensões apropriadas. A inversa da matriz de informação total particionada é dado como segue:

$$K(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} K_\beta^{11} & K_\beta^{12} & 0 \\ K_\beta^{21} & K_\beta^{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_\delta^{-1} \end{pmatrix},$$

em que as submatrizes $K_\beta^{11}, K_\beta^{12}, K_\beta^{22}$ são definidas em (4.8). Assim, definimos a estatística escore S_R para testar $\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^2$, da seguinte forma:

$$S_R = U_{\beta_1}^\top(\tilde{\theta}) K_\beta^{11}(\tilde{\theta}) U_{\beta_1}(\tilde{\theta}),$$

em que $U_{\beta_1}^\top(\tilde{\theta})$ e $K_\beta^{11}(\tilde{\theta})$ representam, respectivamente, a função escore e a inversa da matriz de informação total de Fisher para β avaliados sob a hipótese nula com $\tilde{\theta} = (\tilde{\beta}^\top, \tilde{\delta}^\top)^\top = (\beta_1^{(0)\top}, \tilde{\beta}_2^\top, \tilde{\delta}^\top)^\top$, sendo $\tilde{\beta}_2$ o EMV restrito de β_2 sob $\mathcal{H}_0^2$. Os EMV irrestritos são representados pelo vetor $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^\top, \hat{\delta}^\top)^\top = (\hat{\beta}_1^\top, \hat{\beta}_2^\top, \hat{\delta}^\top)^\top$. Assintoticamente e sob a hipótese nula, a estatística escore (S_R) tem uma distribuição $\chi_{p_1}^2$ com p_1 grau de liberdade.

4.1.2.3 Testes separado para o vetor de parâmetro da dispersão

Nosso interesse agora reside em testar um subconjunto do vetor de parâmetro δ . Isto é testar (iii) $\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = \delta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^3$: pelo menos uma das igualdades é violada, ou seja, testar isoladamente uma parte do vetor de parâmetros de interesse, enquanto que o vetor de parâmetros $(\beta^\top, \delta_2^\top)^\top$ é considerado vetor de parâmetros de perturbação. A partição do

vetor $\delta = (\delta_1^\top, \delta_2^\top)^\top$ induz a da matriz de planejamento (co-variada) $S = (S_1, S_2)$. A função escore total também pode ser particionada conforme a partição de δ . Isto é, $U(\theta) = (U_1(\theta)^\top, U_2(\theta)^\top)^\top$ em que $U_1(\theta)^\top = U_\beta$, $U_2(\theta) = (U_{\delta_1}, U_{\delta_2})^\top$, sendo $U_{\delta_1}, U_{\delta_2}$ são definidas em (4.6) e U_β em (3.3). Considerando a partição do δ , a matriz de informação total de Fisher particionada pode ser expressa como segue

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} K_{\delta_{11}} & K_{\delta_{12}} & 0 \\ K_{\delta_{21}} & K_{\delta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & K_\beta \end{pmatrix},$$

em que as submatrizes $K_{\delta_{11}}, K_{\delta_{12}}, K_{\delta_{22}}, K_\beta$ são definidas em (4.7) e 0 representa matrizes ou vetores de zeros de dimensões apropriadas. A inversa da matriz de informação total particionada é dado como segue:

$$K(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} K_\delta^{11} & K_\delta^{12} & 0 \\ K_\delta^{21} & K_\delta^{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_\beta^{-1} \end{pmatrix},$$

em que as submatrizes $K_\delta^{11}, K_\delta^{12}, K_\delta^{22}$ são definidas em (4.8). Assim, definimos as estatísticas escore S_R para testar $\mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = \delta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^3$, da seguinte forma:

$$S_R = U_{\delta_1}^\top(\tilde{\theta}) K_\delta^{11}(\tilde{\theta}) U_{\delta_1}(\tilde{\theta}),$$

em que $U_{\delta_1}^\top(\tilde{\theta})$ e $K_\delta^{11}(\tilde{\theta})$ representam, respectivamente, a função escore e a inversa da matriz de informação total de Fisher para δ avaliados sob a hipótese nula com $\tilde{\theta} = (\tilde{\beta}^\top, \tilde{\delta}^\top)^\top = (\tilde{\beta}^\top, \delta_1^{(0)\top}, \tilde{\delta}_2^\top)^\top$, sendo $\tilde{\delta}_2$ o EMV restrito de δ_2 sob $\mathcal{H}_0^3$. Os EMV irrestritos do parâmetro θ são representados pelo vetor $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^\top, \hat{\delta}^\top)^\top = (\hat{\beta}^\top, \hat{\delta}_1^\top, \hat{\delta}_2^\top)^\top$. Assintoticamente e sob a hipótese nula, a estatística escore (S_R) converge em distribuição para a distribuição $\chi_{q_1}^2$ com q_1 grau de liberdade.

Na próxima Seção desenvolvemos um fator de correção Tipo-Bartlett, em notação matricial, para as estatísticas escore, conforme os resultados obtidos em Cordeiro e Ferrari (1991)

4.1.3 Estatística escore refinada

A aproximação da distribuição nula da estatística escore (S_R) pela qui-quadrado de referência pode não ser satisfatória em pequenas amostras, podendo conduzir as taxas de rejeição sob

a hipótese nula bastante distorcidas. Desta forma, foram obtidos alguns refinamentos como objetivo de melhorar a aproximação pela qui-quadrado. Assim como Bartlett (1937) propôs um fator de correção Bartlett para melhorar o teste da razão de verossimilhanças, Cordeiro e Ferrari (1991) desenvolveu um fator de correção denominado tipo-Bartlett para aprimorar a estatística do teste escore. Nesta Seção utilizaremos essa metodologia proposta na literatura para obtermos um fator de correção tipo-Bartlett, em notação matricial, para a estatística escore para testar conjuntamente e/ou separadamente o efeito da média e da dispersão, nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos proposto por Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010). Generalizamos, portanto, os resultados de ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022), Araújo, Cysneiros e Montenegro (2020).

4.1.3.1 Correção Tipo-Bartlett para a estatística escore (S_R)

Os resultados obtidos em Cordeiro e Ferrari (1991) apontaram que, em problema regular, a estatística escore pode ser aprimorada por um fator produzindo uma estatística modificada ajustada e que segue a distribuição qui-quadrado com k grau de liberdade (χ_k^2) até ordem $O(n^{-1})$. A estatística escore modificada S_R^* proposta por Cordeiro e Ferrari (1991) é dada como segue:

$$S_R^* = S_R \{1 - (c + bS_R + aS_R^2)\},$$

em que o termo entre chave é denominado fator de correção tipo-Bartlett e é função da própria estatística S_R , sendo os coeficientes a, b, c são definidos como segue:

$$a = \frac{A_3}{12k(k+2)(k+4)}, b = \frac{A_2 - 2A_3}{12k(k+2)}, c = \frac{A_1 - A_2 + A_3}{12k}.$$

As quantidades A_1, A_2 e A_3 são funções de cumulantes conjuntos de derivadas do logaritmo da função de verossimilhanças. Essas quantidades, em forma matricial, são dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= 3 \sum_{\beta, \delta} (\kappa_{rst} + 2\kappa_{r,st}) (\kappa_{uvw} + 2\kappa_{uv,w}) a^{rs} a^{vw} m^{tu} \\ &\quad - 6 \sum_{\beta, \delta} (\kappa_{rst} + 2\kappa_{r,st}) \kappa_{u,v,w} a^{rs} a^{tu} m^{vw} \\ &\quad + 6 \sum_{\beta, \delta} (\kappa_{r,st} - \kappa_{r,s,t}) (\kappa_{uvw} + 2\kappa_{uv,w}) a^{sv} a^{tw} m^{ru} \\ &\quad - 6 \sum_{\beta, \delta} (\kappa_{r,s,t,u} + \kappa_{r,s,tu}) a^{tu} m^{rs} \\ &= A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= -3 \sum_{\beta, \delta} \kappa_{r,s,t} \kappa_{u,v,w} a^{tu} m^{rs} m^{vw} \\
&\quad + 6 \sum_{\beta, \delta} (\kappa_{rst} + 2\kappa_{r,st}) \kappa_{u,v,w} a^{rs} m^{tu} m^{vw} \\
&\quad - 6 \sum_{\beta, \delta} \kappa_{r,s,t} \kappa_{u,v,w} a^{tw} m^{ru} m^{sv} \\
&\quad + 3 \sum_{\beta, \delta} \kappa_{r,s,t,u} m^{rs} m^{tu} \\
&= A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= 3 \sum_{\beta, \delta} \kappa_{r,s,t} \kappa_{u,v,w} m^{rs} m^{tu} m^{vw} \\
&\quad + 2 \sum_{\beta, \delta} \kappa_{r,s,t} \kappa_{u,v,w} m^{ru} m^{sv} m^{tw} \\
&= A_{31} + A_{32},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

sendo que a^{rs}, m^{rs} os elementos (r, s) das matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{e } \mathbf{M} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1} - \mathbf{A},$$

respectivamente e $\mathbf{0}$ representa matrizes ou vetores nulos de dimensões apropriadas. Os índices r, s, t, u, v, w variam sobre todos os componentes do vetor $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\delta}$. Sob a hipótese nula, a estatística corrigida S_R^* tem distribuição qui-quadrado com k grau de liberdade com erro de aproximação de $O(n^{-2})$. Já que a estatística corrigida é função da própria estatística S_R é obvio que depende de parâmetros desconhecidos. Neste caso, esses parâmetros podem ser substituídos pela suas respectivas EMV sob a hipótese nula e isto não altera a ordem de aproximação Cordeiro e Ferrari (1991). Outras formas alternativas equivalente a estatística corrigida S_R^* até ordem $O(n^{-1})$ foram propostas e definidas como segue:

$$S_{R_1}^* = \frac{S_R}{1 + C(S_R, A_1, A_2, A_3, k)}, S_{R_2}^* = S_R \exp\{-C(S_R, A_1, A_2, A_3, k)\}$$

em que $C(S_R, A_1, A_2, A_3, k) = (c + bS_R + aS_R^2)$. Kakizawa (1996) propos uma transformação monótona da estatística corrigida S_R^* em Cordeiro e Ferrari (1991) por não ser sempre monótona. Esta transformação é dada por $S_{R_3}^* = S_R^* + P(S_R)$, em que

$$P(S_R) = \frac{1}{4} \left\{ c^2 S_R + 2bc S_R^2 + \left(2ac + \frac{4}{3}b^2 \right) S_R^3 + 3ab S_R^4 + \frac{9}{5}a^2 S_R^5 \right\}.$$

Também Cordeiro, Ferrari e Cysneiros (1998) propuseram uma estatística modificada ($S_{R_4}^*$) para melhorar a estatística escore através de uma transformação monótona de S_R . A estatística

alternativa ($S_{R_4}^*$) que envolve a função de distribuição da normal padrão pode ser escrita de seguinte forma:

$$S_{R_4}^* = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{3a}} \exp\left(\frac{b^2}{3a} - c\right) \left\{ \Phi\left(\sqrt{6a}S_R + \sqrt{\frac{2}{3a}b}\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{2}{3a}b}\right) \right\}, & \text{se } a \geq 0 \\ \frac{1}{2b} \exp(-c) \{1 - \exp(-2b)S_R\}, & \text{se } a = 0 \text{ e } b \neq 0. \end{cases}$$

4.1.3.2 Correção Tipo-Bartlett à estatística escore para teste conjunto em MNLSH

Nesta Subseção, iremos obter o fator de correção tipo-Bartlett para teste de hipótese envolvendo os parâmetros da média e da dispersão em MNLSH. Isto é testar (i); $\mathcal{H}_0^1 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}, \delta_1 = \delta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^1$: pelo menos uma das igualdades é violada, em que $(\beta_1^{(0)\top}, \delta_1^{(0)\top})^\top$ é o vetor de parâmetros de interesse, de dimensões $p_1 \times 1$ e $q_1 \times 1$, respectivamente. As partições dos parâmetros β e δ induzem também as das matrizes modelo $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ e $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$. Considerando as partições das matrizes escore e as definições feitas em (4.1.2.1) e (4.8), a inversa da matriz de informação de Fisher é definida como segue:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

em que

$$\mathbf{K}^{11} = \text{diag}\{\mathbf{K}_\beta^{11}, \mathbf{K}_\delta^{11}\}, \mathbf{K}^{12} = \mathbf{K}^{21\top} = \text{diag}\{\mathbf{K}_\beta^{12}, \mathbf{K}_\delta^{12}\}, \mathbf{K}^{22} = \text{diag}\{\mathbf{K}_\beta^{22}, \mathbf{K}_\delta^{22}\},$$

sendo os elementos são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\beta^{11} &= \alpha_0 (\mathbf{R}^\top \boldsymbol{\Lambda}_0 \mathbf{R})^{-1}, \\ \mathbf{K}_\beta^{12} &= \mathbf{K}_\beta^{21\top} = -\alpha_0 \mathbf{C} (\mathbf{R}^\top \boldsymbol{\Lambda}_0 \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C}^\top, \\ \mathbf{K}_\beta^{22} &= \alpha_0 \left[(\tilde{\mathbf{X}}_2^\top \boldsymbol{\Lambda}_0 \tilde{\mathbf{X}}_2)^{-1} + \mathbf{C} (\mathbf{R} \boldsymbol{\Lambda}_0 \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C}^\top \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\delta^{11} &= \alpha_1 (\mathbf{T}^\top \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{T})^{-1}, \\ \mathbf{K}_\delta^{12} &= \mathbf{K}_\delta^{12\top} = -\alpha_1 \mathbf{N} (\mathbf{T}^\top \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{T})^{-1} \mathbf{N}^\top, \\ \mathbf{K}_\delta^{22} &= \alpha_1 \left[(\tilde{\mathbf{S}}_2^\top \boldsymbol{\Lambda}_1 \tilde{\mathbf{S}}_2)^{-1} + \mathbf{N} (\mathbf{T}^\top \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{T})^{-1} \mathbf{N}^\top \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 \mathbf{C}, \mathbf{C} = \left[(\mathbf{X}_2^\top \boldsymbol{\Lambda}_0 \mathbf{X}_2)^{-1} (\mathbf{X}_2^\top \boldsymbol{\Lambda}_0 \mathbf{X}_1) \right], \mathbf{T} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 \mathbf{N}, \\ \mathbf{N} &= \left[(\mathbf{S}_2^\top \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_2)^{-1} (\mathbf{S}_2^\top \boldsymbol{\Lambda}_1 \mathbf{S}_1) \right], \boldsymbol{\Lambda}_0 = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{M}_1^2, \boldsymbol{\Lambda}_1 = \boldsymbol{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2, \alpha_0 = -\varphi_{(0,1,0,0,0)}^{-1}, \\ \alpha_1 &= 4/(1 - \varphi_{(0,1,0,0,2)}), \end{aligned}$$

sendo os vetores $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{M}_1$ e $\mathbf{H}_1$. são definidos na Seção 3.1.1. Assim, a estatística escore S_R para testar conjuntamente o efeito da média e da dispersão pode ser escrita da seguinte forma

$$S_R = \tilde{\omega}^\top \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0^{1/2} \mathbf{X}_1 (\tilde{\mathbf{R}}^\top \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 \tilde{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{X}_1^\top \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0^{1/2} \tilde{\omega} + \frac{1}{4} \tilde{\rho}^\top \tilde{\mathbf{\Lambda}}_1^{1/2} \mathbf{S}_1 (\tilde{\mathbf{T}}^\top \tilde{\mathbf{\Lambda}}_1 \tilde{\mathbf{T}})^{-1} \mathbf{S}_1^\top \tilde{\mathbf{\Lambda}}_1^{1/2} \tilde{\rho},$$

em que $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^\top$ com $\omega_l = \alpha_0^{1/2} v_l z_l$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)^\top$ sendo $\rho_l = \alpha_1^{1/2} (v_l u_l - \iota)$. O vetor z_l foi definido na Seção 3.1.1. Assintoticamente e sob a hipótese nula, a estatística S_R converge em distribuição para qui-quadrado χ_k^2 com k grau de liberdade. Rejeitamos a hipótese nula $\mathcal{H}_0^1$ se a estatística de teste $S_R > k_{(1-\alpha)}$, com $k_{(1-\alpha)}$ representando o quantil $(1 - \alpha)$ da distribuição χ_k^2 e α o nível de significância adotado no teste, com $0 < \alpha < 1$. Aqui $k = p_1 + q_1$, em que q_1 e q_1 representam o número de parâmetros a serem testado sob a hipótese nula para o subconjunto de β e δ , respectivamente. Além das matrizes definidas em (4.1.2.1), definimos também as seguintes matrizes necessárias para o cálculo do fator de correção de tipo-Bartlett a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \text{ e } \mathbf{M} = \mathbf{K}(\theta)^{-1} - \mathbf{A},$$

em que

$$\mathbf{K}_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_\beta^{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\delta^{22} \end{pmatrix}$$

sendo $\mathbf{K}(\theta)^{-1}$, $\mathbf{K}_\beta^{22}$ e $\mathbf{K}_\delta^{22}$ são dados em (4.8). No MNLSH, após tediosa manipulação algébrica, as quantidades A_{11} a A_{14} , A_{21} a A_{24} e A_{31} a A_{32} necessárias para o cálculo do fator de

correção Tipo-Bartlett para a estatística escore são dadas como segue:

$$\begin{aligned}
A_{11} = & -3Q_0^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{D}_{2\beta} \mathbf{W}_1 \right. \\
& + \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{D}_{2\beta} \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_1 \mathbf{D}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{D}_{2\beta} \mathbf{W}_1 \left. \right] \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{4} Q_0^2 Q_{71} Q_{23} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \\
& \times \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16} Q_0 Q_{71}^2 Q_{24} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta d} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{8} Q_0 Q_{71}^2 Q_{25} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta d} \boldsymbol{\Delta}_4 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8} Q_0 Q_{71}^2 Q_{25} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\beta d} \\
& \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{D}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^2 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16} Q_0 Q_{71}^2 Q_{24} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{8} Q_0 Q_{71}^2 Q_{25} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8} Q_0 Q_{71}^2 Q_{25} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{Z}_{2\beta d} \\
& \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{D}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{64} Q_{71}^3 Q_{26}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta d} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{32} Q_{71}^3 Q_{26} Q_{27} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta d} \boldsymbol{\Delta}_4 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{32} Q_{71}^3 Q_{26} Q_{27} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \\
& \times \mathbf{D}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^2 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{32} Q_{71}^3 Q_{26} Q_{27} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta d} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{27}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4 \mathbf{Z}_{2\delta d} \\
& \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta d} \boldsymbol{\Delta}_4 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{27}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{D}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{32} Q_{71}^3 Q_{26} Q_{27} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{D}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{27}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{D}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_4 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{27}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{D}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{D}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^2 \boldsymbol{\iota}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} = & -\frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{28} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{8} Q_0 Q_{71}^2 Q_{29} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\beta d} \\
& \times (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8} Q_0 Q_{71}^2 Q_{30} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{4} Q_0 Q_{71}^2 Q_{31} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{4} Q_0 Q_{71}^2 Q_{31} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \\
& \times \mathbf{D}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{32} Q_{71}^3 Q_{32} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{33} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4 \mathbf{Z}_{2\delta d} \\
& \times (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{33} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \mathbf{D}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} = & 6Q_0^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{Z}_{2\beta} \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_3 \mathbf{C}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1 \mathbf{C}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_3 \right. \\
& + \left. \mathbf{W}_1 \mathbf{B}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_1 \right] \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{34} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\beta} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{35} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{36} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \\
& \times \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{32} Q_{71}^3 Q_{37} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{38} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \\
& \times \mathbf{Z}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{38} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{C}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^2 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{39} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{8} Q_{71}^3 Q_{40}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8} Q_{71}^3 Q_{40}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1 \mathbf{C}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{39} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{C}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8} Q_{71}^3 Q_{40}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{C}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{8} Q_{71}^3 Q_{40}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \mathbf{C}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^2 \boldsymbol{\iota}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{14} = & -6Q_0^2Q_{41}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1^2\mathbf{Z}_{2\beta d}(\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d})\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{2}Q_0Q_{71}Q_{42}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\Delta_1^2\mathbf{Z}_{2\beta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{2}Q_0Q_{71}Q_{43}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\Delta_1^2\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d})\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8}Q_{71}^2Q_{45}\boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^4\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\boldsymbol{\iota} \\
& + 3Q_0Q_{71}Q_{44}\boldsymbol{\iota}^\top \left[\mathbf{W}_1\Delta_1(\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d})\mathbf{D}_{2\delta} + \mathbf{W}_1\Delta_6\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{4}Q_{71}^2Q_{46}\boldsymbol{\iota}^\top \left[\Delta_1^3(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\mathbf{D}_{2\delta} + \Delta_3\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \right] \boldsymbol{\iota}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{21} = & \frac{3}{4} Q_0^2 Q_{71} Q_{47} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{16} Q_0 Q_{71}^2 Q_{48} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{16} Q_0 Q_{71}^2 Q_{48} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{3}{64} Q_{71}^3 Q_{49} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} = & \frac{3}{2}Q_0^2Q_{71}Q_{50}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\beta d}(\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d})\mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8}Q_0Q_{71}^2Q_{51}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1 \\
& \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\beta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} + \frac{3}{8}Q_0Q_{71}^2Q_{30}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d})(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \\
& \times \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\boldsymbol{\iota} + \frac{3}{4}Q_0Q_{71}^2Q_{31}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d})(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\boldsymbol{\iota} + \frac{3}{4}Q_0Q_{71}^2Q_{31}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 \\
& \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})(\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d})D_{2\delta}\mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{32}Q_{71}^3Q_{32}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \\
& \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{33}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{33}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})D_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23} &= 3Q_0^2 Q_{71} Q_{47} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{47} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \\
&\quad \times (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{32} Q_{71}^3 Q_{46}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta} \\
&\quad \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota}. \\
A_{24} &= 3Q_0^2 Q_{52} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1^2 (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \odot (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{2} Q_0 Q_{71} Q_{53} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \\
&\quad \times (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \boldsymbol{\iota} + \frac{3}{16} Q_{71}^2 Q_{54} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^4 (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \odot (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \boldsymbol{\iota}. \\
A_{31} &= -\frac{3}{4} Q_0^2 Q_{71} Q_{47} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} \\
&\quad + \frac{3}{16} Q_0 Q_{71}^2 Q_{48} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} \\
&\quad + \frac{3}{16} Q_0 Q_{71}^2 Q_{48} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} \\
&\quad - \frac{3}{64} Q_{71}^3 Q_{49} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota}. \\
A_{32} &= -\frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{47} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 \boldsymbol{\iota} \\
&\quad - \frac{1}{32} Q_{71}^3 Q_{49} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \odot (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \odot (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota},
\end{aligned}$$

em que $\mathbf{Z}_\beta = \tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{K}_\beta^{-1} \tilde{\mathbf{X}}$ com elementos dados por $z_{\beta il} = \tilde{x}_i^\top \mathbf{K}_\beta^{-1} \tilde{x}_l$, $\mathbf{Z}_\delta = \tilde{\mathbf{S}}^\top \mathbf{K}_\delta^{-1} \tilde{\mathbf{S}}$, tem elementos dados por $z_{\delta il} = \tilde{s}_i^\top \mathbf{K}_\delta^{-1} \tilde{s}_l$ são matrizes de dimensão $n \times n$ positivas definidas de posto completo, $\boldsymbol{\iota}$ o vetor $n \times 1$ de uns, $\mathbf{Z}_\beta^{(3)} = \mathbf{Z}_\beta^{(2)} \odot \mathbf{Z}_\beta$, $\mathbf{Z}_\beta^{(2)} = \mathbf{Z}_\beta \odot \mathbf{Z}_\beta$ em que $\odot$ denota o produto Hadamard Rao (1973), ou seja, o elemento il de $\mathbf{Z}_\beta^{(2)} = z_{\beta il}^2$. Analogamente, o elemento il de $\mathbf{Z}_\delta^{(2)}$ é $z_{\delta il}^2$. Utilizamos a notação $\mathbf{Z}_{\beta d}$ e $\mathbf{Z}_{\delta d}$ para representar matrizes diagonais formadas pelos correspondentes elementos das diagonais das matrizes $\mathbf{Z}_\beta$ e $\mathbf{Z}_\delta$, respectivamente. As inversas das matrizes de informação de $\mathbf{K}_\beta$ e $\mathbf{K}_\delta$ são, respectivamente, dadas por: $\mathbf{K}_\beta^{-1} = -(\varphi_{(0,1,0,0,0)})^{-1} (\tilde{\mathbf{X}}^\top \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{M}_1^2 \tilde{\mathbf{X}})^{-1}$ e $\mathbf{K}_\delta^{-1} = -4Q_{12}^{-1} (\tilde{\mathbf{S}}^\top \boldsymbol{\Delta}^2 \mathbf{H}_1^2 \tilde{\mathbf{S}})^{-1}$. As matrizes $\tilde{\mathbf{X}}$ e $\tilde{\mathbf{S}}$ de dimensão $p \times p$ e $q \times q$, respectivamente, têm os (r, s) e (R, S) elementos dados por: $\tilde{x}_l = \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial \beta \partial \beta^\top}$ e $\tilde{s}_l = \frac{\partial^2 \tau_l}{\partial \delta \partial \delta^\top}$, respectivamente. Definimos também as matrizes quadradas $\mathbf{B}_\beta$ e $\mathbf{B}_\delta$ formadas pelos correspondentes elementos: $b_{\beta il} = \text{tr}(\mathbf{K}_\beta^{-1} \tilde{\mathbf{X}}_i \mathbf{K}_\beta^{-1} \tilde{\mathbf{X}}_l)$ e $b_{\delta il} = \text{tr}(\mathbf{K}_\delta^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_i \mathbf{K}_\delta^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_l)$. Além disso, as matrizes quadradas $\mathbf{C}_\beta$ e $\mathbf{C}_\delta$ são formadas pelos correspondentes elementos: $c_{\beta il} = \text{tr}(\tilde{x}_l^\top \mathbf{K}_\beta^{-1} \tilde{\mathbf{X}}_i \mathbf{K}_\beta^{-1} \tilde{x}_l)$ e $c_{\delta il} = \text{tr}(\tilde{s}_l^\top \mathbf{K}_\delta^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_i \mathbf{K}_\delta^{-1} \tilde{s}_l)$ respectivamente. As matrizes diagonais $\mathbf{D}_\beta$ e $\mathbf{D}_\delta$ são formadas pelos correspondentes elementos:

$d_{\beta_l} = \text{tr}(K_{\beta}^{-1} \tilde{x}_l)$ e $d_{\delta_l} = \text{tr}(K_{\delta}^{-1} \tilde{s}_l)$, respectivamente. Os escalares são definidos com segue:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \varphi(0,1,0,0,0); Q_{23} = \left(\varphi(0,0,1,0,1) + 2\varphi(0,1,0,0,0) \right)^2; \\
Q_{24} &= \left(\varphi(0,0,1,0,1) + 2\varphi(0,1,0,0,0) \right) \left(1 - 5\varphi(0,1,0,0,2) - 2\varphi(1,1,0,0,3) - \varphi(0,0,1,0,3) \right) \\
Q_{25} &= \left(\varphi(0,0,1,0,1) + 2\varphi(0,1,0,0,0) \right) \left(\varphi(0,1,0,0,2) - 1 \right); \\
Q_{26} &= \left(1 - 5\varphi(0,1,0,0,2) - 2\varphi(1,1,0,0,3) - \varphi(0,0,1,0,3) \right); Q_{27} = \left(\varphi(0,1,0,0,2) - 1 \right); \\
Q_{28} &= \left(\varphi(0,0,1,0,1) + 2\varphi(0,1,0,0,0) \right) \left(\varphi(2,0,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right); \\
Q_{29} &= \left(\varphi(0,0,1,0,1) + 2\varphi(0,1,0,0,0) \right) \left(2 - 3\varphi(2,0,0,0,2) - \varphi(3,0,0,0,3) \right); \\
Q_{30} &= \left(1 - 5\varphi(0,1,0,0,2) - 2\varphi(1,1,0,0,3) - \varphi(0,0,1,0,3) \right) \left(\varphi(2,0,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right); \\
Q_{31} &= \left(\varphi(0,1,0,0,2) - 1 \right) \left(\varphi(2,0,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right); \\
Q_{32} &= \left(1 - 5\varphi(0,1,0,0,2) - 2\varphi(1,1,0,0,3) - \varphi(0,0,1,0,3) \right) \left(2 - 3\varphi(2,0,0,0,2) - \varphi(3,0,0,0,3) \right); \\
Q_{33} &= \left(\varphi(0,1,0,0,2) - 1 \right) \left(2 - 3\varphi(2,0,0,0,2) - \varphi(3,0,0,0,3) \right); \\
Q_{34} &= \left(\varphi(0,0,1,0,1) + \varphi(2,0,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right) \left(\varphi(0,0,1,0,1) + 2\varphi(0,1,0,0,0) \right); \\
Q_{35} &= \left(\varphi(0,0,1,0,1) + \varphi(0,1,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right) \left(2\varphi(0,1,0,0,0) - \varphi(0,0,1,0,1) \right); \\
Q_{36} &= \left(\varphi(0,0,1,0,1) + \varphi(0,1,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right) \left(2\varphi(0,1,0,0,0) + \varphi(0,0,1,0,1) \right); \\
Q_{37} &= \left(\varphi(0,1,0,0,2) + \varphi(1,1,0,0,3) - \varphi(3,0,0,0,3) - 1 \right) \left(1 - 5\varphi(0,1,0,0,2) - 2\varphi(1,1,0,0,3) - \varphi(0,0,1,0,3) \right); \\
Q_{38} &= \left(\varphi(0,1,0,0,2) + \varphi(1,1,0,0,3) - \varphi(3,0,0,0,3) - 1 \right) \left(\varphi(0,1,0,0,2) - 1 \right); \\
Q_{39} &= \left(1 - 5\varphi(0,1,0,0,2) - 2\varphi(1,1,0,0,3) - \varphi(0,0,1,0,3) \right) \left(\varphi(0,1,0,0,2) - 1 \right); Q_{40} = \left(\varphi(0,1,0,0,2) - 1 \right)^2; \\
Q_{41} &= \left(\varphi(4,0,0,0,0) - 3\varphi_{(2,0,0,0,0)}^2 + \varphi(2,1,0,0,0) + \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \right); \\
Q_{42} &= \left(\varphi(2,0,0,0,0) + 2\varphi(3,0,0,0,1) + \varphi(4,0,0,0,2) + \varphi(2,1,0,0,2) - 2\varphi(0,0,1,0,1) \right) \\
Q_{43} &= \left(3\varphi(2,0,0,0,0) + \varphi(2,1,0,0,2) + 5\varphi(3,0,0,0,1) + \varphi(4,0,0,0,2) \right); Q_{44} = \left(\varphi(2,0,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right); \\
Q_{45} &= \left(14\varphi(2,0,0,0,2) + 7\varphi(3,0,0,0,3) + \varphi(4,0,0,0,4) + 2\varphi(1,1,0,0,3) + \varphi(2,1,0,0,4) - 2\varphi_{(0,1,0,0,2)}^2 \right. \\
&\quad \left. + 5\varphi(0,1,0,0,2) - 10 \right); Q_{46} = \left(2 - 3\varphi(2,0,0,0,2) - \varphi(3,0,0,0,3) \right); Q_{47} = \left(\varphi(2,0,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right)^2; \\
Q_{48} &= \left(\varphi(2,0,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right) \left(2 - 3\varphi(2,0,0,0,2) - \varphi(3,0,0,0,3) \right); \\
Q_{49} &= \left(2 - 3\varphi(2,0,0,0,2) - \varphi(3,0,0,0,3) \right)^2; \\
Q_{50} &= \left(\varphi(0,0,1,0,1) + 2\varphi(0,1,0,0,0) \right) \left(\varphi(2,0,0,0,0) + \varphi(3,0,0,0,1) \right); \\
Q_{51} &= \left(\varphi(0,0,1,0,1) + 2\varphi(0,1,0,0,0) \right) \left(2 - 3\varphi(2,0,0,0,2) - \varphi(3,0,0,0,3) \right); \\
Q_{52} &= \left(\varphi(4,0,0,0,0) - 3\varphi_{(2,0,0,0,0)}^2 \right); \\
Q_{53} &= \left(2\varphi(2,0,0,0,0) - \varphi(2,0,0,0,0)\varphi(2,0,0,0,2) + 2\varphi(3,0,0,0,1) + \varphi(4,0,0,0,2) \right); \\
Q_{54} &= \left(6\varphi(2,0,0,0,2) + 4\varphi(3,0,0,0,3) + \varphi(4,0,0,0,4) - 3(\varphi(0,1,0,0,2) - 1)^2 - 3 \right); Q_{71} = Q_{12}/4.
\end{aligned}$$

Os $A's$ são apresentados com maiores detalhes nos Apêndices C-E.

4.1.3.3 Correção Tipo-Bartlett à estatística escore para teste da média em MNLSH

Nesta Subseção, nosso objetivo é encontrar o fator de correção tipo-Bartlett para a estatística escore definida em (4.1.2.2), necessário para testarmos o parâmetro da média em MNLSH. Isto é, testar (ii) $\mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^2$: pelo menos uma das igualdades é violada, ou seja, testar isoladamente uma parte do vetor de parâmetros de interesse, enquanto que, o vetor de parâmetros $(\beta_2^\top, \delta^\top)^\top$ é considerado vetor de parâmetros de perturbação. A estatística escore para testar um subconjunto do vetor de parâmetro de β pode ser escrita como segue

$$S_R = \tilde{\omega}^\top \tilde{\Lambda}_0^{1/2} \mathbf{X}_1 (\tilde{\mathbf{R}}^\top \tilde{\Lambda}_0 \tilde{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{X}_1^\top \tilde{\Lambda}_0^{1/2} \tilde{\omega}$$

em que ω , $\mathbf{R}$ e Λ_0 estão definidos na Seção 4.1.3.2. Assintoticamente e sob a hipótese nula, a estatística S_R converge em distribuição para qui-quadrado $\chi_{p_1}^2$ com p_1 grau de liberdade. Portanto rejeitamos a hipótese nula $\mathcal{H}_0^2$ se a estatística de teste $S_R > p_{1(1-\alpha)}$. As quantidades $A's$ são obtidos substituindo $\mathbf{Z}_\delta = \mathbf{Z}_{\delta d}$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} A_{11} = & -3Q_0^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{Z}_{2\beta d} \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{D}_{2\beta} \mathbf{W}_1 \right. \\ & \left. + \mathbf{W}_1 \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{D}_{2\beta} \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_1 \mathbf{D}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{D}_{2\beta} \mathbf{W}_1 \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} = & -\frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{28} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \Delta_1 \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \Delta_1 \boldsymbol{\iota} \\ & - \frac{3}{8} Q_0 Q_{71}^2 Q_{30} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \Delta_1 \boldsymbol{\iota} \\ & - \frac{3}{4} Q_0 Q_{71}^2 Q_{31} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \Delta_1 \boldsymbol{\iota} \\ & - \frac{3}{4} Q_0 Q_{71}^2 Q_{31} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{D}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \Delta_1 \boldsymbol{\iota}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{13} = & 6Q_0^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\mathbf{W}_3 \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{Z}_{2\beta} \mathbf{W}_3 + \mathbf{W}_3 \mathbf{C}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1 \mathbf{C}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_3 \right. \\ & \left. + \mathbf{W}_1 \mathbf{B}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_1 \right] \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{35} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \Delta_1 \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \Delta_1 \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{36} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \Delta_1 \mathbf{Z}_{2\beta} (\mathbf{Z}_\beta - \mathbf{Z}_{2\beta}) \\ & \times \mathbf{Z}_{2\delta} \mathbf{W}_1 \Delta_1 \boldsymbol{\iota}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{14} = & -6Q_0^2 Q_{41} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1^2 \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{3}{2} Q_0 Q_{71} Q_{43} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \Delta_1^2 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \boldsymbol{\iota} \\
& + 3Q_0 Q_{71} Q_{44} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\mathbf{W}_1 \Delta_1 (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{D}_{2\delta} + \mathbf{W}_1 \Delta_6 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \right] \boldsymbol{\iota}.
\end{aligned}$$

$$A_{21} = \frac{3}{4} Q_0^2 Q_{71} Q_{47} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \Delta_1 (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \mathbf{W}_1 \Delta_1 \boldsymbol{\iota}.$$

$$A_{22} = 0.$$

$$A_{23} = \frac{3}{2} Q_0^2 Q_{71} Q_{47} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \Delta_1 (\mathbf{Z}_{\beta} - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\beta} - \mathbf{Z}_{2\beta}) \mathbf{W}_1 \Delta_1 \boldsymbol{\iota}.$$

$$A_{24} = 3Q_0^2 Q_{52} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1^2 (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \odot (\mathbf{Z}_{\beta d} - \mathbf{Z}_{2\beta d}) \boldsymbol{\iota}.$$

$$A_{31} = 0.$$

$$A_{32} = 0.$$

Importante notar que o fator de correção tipo-Bartlett passa a ser uma equação de reta em S_R , uma vez que a quantidade $A_3 = 0$.

4.1.3.4 Correção Tipo-Bartlett à estatística escore para teste da dispersão em MNLSH

Nesta Subseção, estamos interessado em obter o fator de correção tipo-Bartlett para a estatística escore definida em (4.1.2.3) para testar separadamente o efeito da dispersão em MNLSH. Isto é testar (iii) $\mathcal{H}_0^3 : \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta}_1^{(0)}$ contra $\mathcal{H}_1^3$: pelo menos uma das igualdades é violada, ou seja, testar isoladamente uma parte do vetor de parâmetros de interesse, enquanto que, o vetor de parâmetros $(\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\delta}_2^\top)^\top$ é considerado vetor de parâmetros de perturbação. A estatística escore para testar um subconjunto do vetor de parâmetro de $\boldsymbol{\delta}$ pode ser escrita como segue

$$S_R = \frac{1}{4} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^\top \tilde{\Lambda}_1^{1/2} \mathbf{S}_1^\top (\tilde{\mathbf{T}}^\top \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\mathbf{T}})^{-1} \mathbf{S}_1^\top \tilde{\Lambda}_1^{1/2} \tilde{\boldsymbol{\rho}},$$

em que $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{T}$ e Λ_1 estão definidos na Seção 4.1.3.2. Assintoticamente e sob a hipótese nula, a estatística S_R converge em distribuição para qui-quadrado $\chi_{q_1}^2$ com q_1 grau de liberdade.

Assim rejeitamos a hipótese nula $\mathcal{H}_0^3$ se a estatística de teste $S_R > q_{1(1-\alpha)}$. Os coeficientes A' s necessários para a obtenção do fator de correção de tipo-Bartlett são obtidos considerando $\mathbf{Z}_\beta = \mathbf{Z}_{\beta d}$. Então, os A' s são dadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 A_{11} = & -\frac{3}{4}Q_0^2Q_{71}Q_{23}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\mathbf{Z}_{2\beta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\beta d}\mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\boldsymbol{\iota} \\
 & -\frac{3}{16}Q_0Q_{71}^2Q_{24}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\mathbf{Z}_{2\beta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\delta d}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} \\
 & -\frac{3}{8}Q_0Q_{71}^2Q_{25}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\mathbf{Z}_{2\beta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\delta d}\boldsymbol{\Delta}_4\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8}Q_0Q_{71}^2Q_{25}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\mathbf{Z}_{2\beta d} \\
 & \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{D}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^2\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16}Q_0Q_{71}^2Q_{24}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\beta d}\mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\boldsymbol{\iota} \\
 & -\frac{3}{8}Q_0Q_{71}^2Q_{25}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\beta d}\mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8}Q_0Q_{71}^2Q_{25}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2\mathbf{Z}_{2\beta d} \\
 & \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{D}_{2\delta}\mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{64}Q_{71}^3Q_{26}^2\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\delta d}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} \\
 & -\frac{3}{32}Q_{71}^3Q_{26}Q_{27}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\delta d}\boldsymbol{\Delta}_4\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{32}Q_{71}^3Q_{26}Q_{27}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \\
 & \times \mathbf{D}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^2\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{32}Q_{71}^3Q_{26}Q_{27}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\delta d}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{27}^2\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{Z}_{2\delta d} \\
 & \times (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\delta d}\boldsymbol{\Delta}_4\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{27}^2\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{D}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^2\boldsymbol{\iota} \\
 & -\frac{3}{32}Q_{71}^3Q_{26}Q_{27}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{D}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{27}^2\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{D}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_4\boldsymbol{\iota} \\
 & -\frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{27}^2\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2\mathbf{D}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{D}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^2\boldsymbol{\iota},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} = & \frac{3}{8}Q_0Q_{71}^2Q_{29}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\mathbf{Z}_{2\beta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\mathbf{Z}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} \\
 & +\frac{3}{32}Q_{71}^3Q_{32}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\mathbf{Z}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} + \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{33}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{Z}_{2\delta d} \\
 & \times (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\mathbf{Z}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} + \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{33}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2\mathbf{Z}_{2\delta}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\mathbf{D}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{13} = & -\frac{3}{2}Q_0^2Q_{71}Q_{34}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\mathbf{Z}_{2\beta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\beta}\mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1\boldsymbol{\iota} \\
 & +\frac{3}{32}Q_{71}^3Q_{37}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{Z}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} + \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{38}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{Z}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \\
 & \times \mathbf{Z}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_4\boldsymbol{\iota} + \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{38}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3\mathbf{C}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\boldsymbol{\Delta}_1^2\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{39}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{Z}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} \\
 & -\frac{3}{8}Q_{71}^3Q_{40}^2\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{Z}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\mathbf{Z}_{2\delta}\boldsymbol{\Delta}_4\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8}Q_{71}^3Q_{40}^2\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4\mathbf{C}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\boldsymbol{\Delta}_1^2\boldsymbol{\iota} \\
 & -\frac{3}{16}Q_{71}^3Q_{39}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2\mathbf{C}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\boldsymbol{\Delta}_1^3\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8}Q_{71}^3Q_{40}^2\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2\mathbf{C}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\boldsymbol{\Delta}_4\boldsymbol{\iota} \\
 & -\frac{3}{8}Q_{71}^3Q_{40}^2\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2\mathbf{C}_{2\delta}(\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta})\boldsymbol{\Delta}_1^2\boldsymbol{\iota},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{14} = & -\frac{3}{2}Q_0Q_{71}Q_{42}\boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1\boldsymbol{\Delta}_1^2\mathbf{Z}_{2\beta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\boldsymbol{\iota} - \frac{3}{8}Q_{71}^2Q_{45}\boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^4\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\boldsymbol{\iota} \\
 & +\frac{3}{4}Q_{71}^2Q_{46}\boldsymbol{\iota}^\top \left[\boldsymbol{\Delta}_1^3(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d})\mathbf{D}_\delta + \boldsymbol{\Delta}_3\mathbf{Z}_{2\delta d}(\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \right] \boldsymbol{\iota},
 \end{aligned}$$

$$A_{21} = \frac{3}{64} Q_{71}^3 Q_{49} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota},$$

$$\begin{aligned} A_{22} = & -\frac{3}{8} Q_0 Q_{71}^2 Q_{51} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\beta d} (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} \\ & - \frac{3}{32} Q_{71}^3 Q_{32} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} \\ & - \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{33} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_4 \mathbf{Z}_{2\delta d} (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} \\ & - \frac{3}{16} Q_{71}^3 Q_{33} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^2 (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \mathbf{D}_{2\delta} \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota}, \end{aligned}$$

$$A_{23} = \frac{3}{32} Q_{71}^3 Q_{46}^2 \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \mathbf{Z}_{2\delta} (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota},$$

$$A_{24} = \frac{3}{16} Q_{71}^2 Q_{54} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^4 (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \odot (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) \boldsymbol{\iota},$$

$$A_{31} = -\frac{3}{64} Q_{71}^3 Q_{49} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{2\delta d}) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) (\mathbf{Z}_{\delta d} - \mathbf{Z}_{\delta d}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota} \quad \text{e}$$

$$A_{32} = -\frac{1}{32} Q_{71}^3 Q_{49} \boldsymbol{\iota}^\top \boldsymbol{\Delta}_1^3 (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_\delta) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) (\mathbf{Z}_\delta - \mathbf{Z}_{2\delta}) \boldsymbol{\Delta}_1^3 \boldsymbol{\iota}.$$

4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com intuito de avaliar a eficácia da correção tipo-Bartlett à estatística escore nos modelos MNLSH, foram realizadas simulações de Monte Carlo para o teste Escore (S_R) seguidos pelas suas respectivas versões corrigidas pelo fator de correção tipo-Bartlett S_R^* considerando também para S_R^* quatro das suas versões assintoticamente equivalentes ($S_{R_1}^*, S_{R_2}^*, S_{R_3}^*, S_{R_4}^*$) com diferentes tamanhos de amostras: $n = 30, 40, 50$ e 100 . Avaliamos o desempenho de cada teste em função da proximidade da probabilidade de rejeição da hipótese nula, sendo esta verdadeira (probabilidade do erro tipo I), aos respectivos níveis nominais. Consideramos os seguintes preditores não lineares:

$$\begin{aligned} \eta_l &= \beta_0 + \exp(\beta_1 x_{l1}) + \sum_{i=2}^{p-1} \beta_i x_{li} \\ \tau_l &= \delta_0 \exp(\delta_1 s_{l1}) + \sum_{j=2}^{q-1} \delta_j s_{lj}, \end{aligned}$$

para $l = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, p-1$ e $j = 2, \dots, q-1$. Os componentes sistemáticos do modelo são definidos por duas funções de ligação não lineares logarítmicas tanto para a

média quanto para a dispersão. Isto é, $\mu_l = \exp(\eta_l)$ e $\phi_l = \exp(\tau_l)$. Os valores verdadeiros do vetor de parâmetro β e δ da simulação são fixados em $\beta_0 = \beta_1 = \dots, \beta_{p-1} = 1$, $\delta_0 = 1.5$, $\delta_1 = 2$ e $\delta_2 = \dots, \delta_{q-1} = 1$. Todas as variáveis explicativas $x_1, \dots, x_{p-1}$ e $s_1, \dots, s_q$ foram gerados a partir da distribuição uniforme $U(0, 1)$ e são fixadas durante todo o experimento com seguintes tamanhos de amostra $n = 30, 40, 50, 100$. O número de réplicas de Monte Carlo foi fixado em 10.000. Assim, consideramos duas distribuições para a variável resposta: a exponencial potência com $\kappa = 0.3$ e a t-Student com $\nu = 4$. Todas as simulações são realizadas considerando os seguintes níveis nominais: $\alpha = 10\%, 5\%$ e 1% . Interessamos no seguinte modelo não linear simétrico heteroscedástico definido da seguinte forma:

$$y_l = \exp(\eta_l) + \epsilon_l,$$

em que $\epsilon_l \sim S(0, \exp(\tau_l), g)$. Consideramos, para as simulações, as seguintes hipóteses nulas:

$$\mathcal{H}_0^1 : \beta_1 = 0, \delta_1 = 0, \mathcal{H}_0^2 : \beta_1 = 0, \mathcal{H}_0^3 : \delta_1 = 0,$$

contra suas respectivas hipóteses alternativas bilaterais. As dimensões de β_1 e δ_1 são p_1 e q_1 , respectivamente, e $\mathbf{0}$ representa vetores nulos de dimensões apropriadas. Importante ressaltar que os estudo de discrepâncias de quantis e poder de teste foram feito considerando a hipótese $\mathcal{H}_0^3$.

Para cada tamanho da amostra e cada nível nominal considerado, calculamos as taxas de rejeição para cada teste supracitados acima. Isto é, estimamos via simulação, $\mathbb{P}(S_R \geq \chi_{\alpha,k}^2)$, $\mathbb{P}(S_R^* \geq \chi_{\alpha,k}^2)$, $\mathbb{P}(S_{R_1}^* \geq \chi_{\alpha,k}^2)$, $\mathbb{P}(S_{R_2}^* \geq \chi_{\alpha,k}^2)$, $\mathbb{P}(S_{R_3}^* \geq \chi_{\alpha,k}^2)$ e $\mathbb{P}(S_{R_4}^* \geq \chi_{\alpha,k}^2)$ em que $\chi_{\alpha,k}^2$ é o percentil $(1 - \alpha)$ da distribuição χ^2 de referencia e k é o número de parâmetros a serem testados ou simplesmente o número de restrição imposta sob a hipótese nula. Vale salientar que todas as entradas das Tabelas apresentadas são percentagens. As simulações foram realizadas usando a versão 8.02 da linguagem de programação do Ox Doornik (2009) e os gráficos foram realizados usando o software estatístico R.

Inicialmente interessamos em testar os efeitos da dispersão nos MNLSH considerando a hipótese $\mathcal{H}_0^3$. Assim, fixamos de forma geral $q_1 = 3, q_1 = 2$ e $q_1 = 4, q_1 = 5$ para diferentes tamanhos amostrais. Aqui, $p_1 = p - 1$ e $q_1 = q - 1$ com p_1 e q_1 o número de parâmetros dos vetores β_1 e δ_1 a serem testados sob a hipótese nula. Na Tabela 34, apresentamos as taxas de rejeição empírica dos testes considerando o modelo exponencial Potência ($\kappa = 0.3$) com $q_1 = 3, p = 3, 5$ e diversos valores para n . Percebe-se que o teste escore usual, S_R , apresenta leve distorções de tamanho. Por exemplo, quando $n = 30$ e $\alpha = 10\%$ para $p = 3$,

a taxa de rejeição do teste S_R é de 9.3% enquanto o teste corrigido apresenta uma taxa um pouco melhor (9.4%) que o teste usual demonstrando seu caráter conservativo de teste neste caso. Quando aumentamos o número de parâmetros de perturbação no modelo, o teste S_R passa a ser um pouco liberal. Por exemplo, considerando a mesma situação anterior e fixando $p = 5$, a taxa de rejeição do teste S_R é de 10.5%, enquanto suas versões corrigidas levam a taxa de rejeição mais próxima do nível nominal (10.1%). Da mesma forma, apresentamos na Tabela 35 a taxa de rejeição de teste S_R para o modelo t_4 . Considerando o mesmo cenário, $n = 30$ e $\alpha = 10\%$ para $p = 3$, a taxa de rejeição do teste S_R é de 10.1% enquanto o teste corrigido apresenta uma taxa de (9.9%). As taxas de rejeição de teste não corrigido e corrigido estão próximas entre si e também do nível nominal estipulado. No entanto, quando aumentamos o número de parâmetros de perturbação do modelo, ou seja $p = 5$, a taxa de rejeição do teste é de 11.9% enquanto sua versão corrigida e suas versões assintoticamente equivalentes levam essa taxa próxima do nível nominal (11.4%). Na Tabela 36 apresentamos o teste S_R para ambos os modelos e fixamos $n = 35, q_1 = 3$ e variamos p . Percebe-se a partir desta Tabela que o aumento de número de parâmetros de perturbação para ambos os modelos não altera muito o comportamento dos testes. Por exemplo, para $\alpha = 1\%$, $p = 2, 3, 4, 5$, as taxas de rejeição dos testes para o modelo exponencial e t_4 são de 1.0%, 0.9%, 1.0%, 1.2% e de 1.0%, 1.3%, 1.3%, 1.3%, respectivamente. Por outro lado, as suas versões corrigidas são de 0.9%, 0.9%, 0.9%, 1.1% e de 0.7%, 1.0%, 1.0%, 0.9%, respectivamente. Considerando o mesmo cenário que anterior mas mudando o número de parâmetros de interesse e $\alpha = 5\%$, percebe-se, na Tabela 37 que as taxas de rejeição dos testes para o modelo exponencial e t_4 são de 5.2%, 4.9%, 5.6%, 5.4% e de 4.7%, 4.8%, 5.0%, 5.5%, respectivamente. Por outro lado, as suas versões corrigidas são de 5.0%, 4.8%, 5.3%, 5.1% e de 4.8%, 4.8%, 4.8%, 5.0%, respectivamente. Todos os testes considerados têm desempenhos semelhantes.

Tabela 34 – Tamanho dos testes S_R dos gamas para o Modelo Exponencial Potência $k = 0.3$, com $q_1 = q - 1 = 3, p = 3, 5$ e diversos valores para n

α	$Teste$	$p = 3$				$p = 5$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	S_R	9.3	9.7	9.7	9.2	10.5	10.3	10.0	9.6
	S_R^*	9.4	9.8	9.7	9.3	10.1	10.1	9.8	9.4
	$S_{R_1}^*$	9.4	9.8	9.7	9.3	10.1	10.1	9.8	9.4
	$S_{R_2}^*$	9.4	9.8	9.7	9.3	10.1	10.1	9.8	9.4
	$S_{R_3}^*$	9.4	9.8	9.7	9.3	10.1	10.1	9.8	9.4
	$S_{R_4}^*$	9.4	9.8	9.7	9.3	10.1	10.1	9.8	9.4
$\alpha = 5\%$	S_R	4.7	4.7	4.7	4.7	5.1	5.4	5.2	4.6
	S_R^*	4.6	4.8	4.7	4.7	4.6	5.0	4.9	4.5
	$S_{R_1}^*$	4.6	4.8	4.7	4.7	4.7	5.0	4.9	4.5
	$S_{R_2}^*$	4.6	4.8	4.7	4.7	4.6	5.0	4.9	4.5
	$S_{R_3}^*$	4.6	4.8	4.7	4.7	4.6	5.0	4.9	4.5
	$S_{R_4}^*$	4.7	4.8	4.7	4.7	4.7	5.0	4.9	4.5
$\alpha = 1\%$	S_R	1.0	1.1	1.1	0.8	1.2	1.3	1.1	1.0
	S_R^*	0.8	0.9	1.1	0.8	0.9	1.0	0.9	0.9
	$S_{R_1}^*$	0.8	0.9	1.1	0.8	0.9	1.0	0.9	0.9
	$S_{R_2}^*$	0.8	0.9	1.1	0.8	0.9	1.0	0.9	0.9
	$S_{R_3}^*$	0.8	0.9	1.1	0.8	0.9	1.0	0.9	0.9
	$S_{R_4}^*$	0.8	0.9	1.1	0.8	0.9	1.0	0.9	0.9

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 35 – Tamanho dos testes S_R dos gamas para o t_4 , com $q_1 = q - 1 = 3, p = 3, 5$ e diversos valores para n

α	$Teste$	$p = 3$				$p = 5$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	S_R	10.1	10.5	10.1	10.0	11.9	11.4	9.9	9.8
	S_R^*	9.9	10.4	10.0	9.9	11.4	11.1	9.7	9.8
	$S_{R_1}^*$	9.9	10.4	10.0	9.9	11.4	11.1	9.7	9.8
	$S_{R_2}^*$	9.9	10.4	10.0	9.9	11.4	11.1	9.7	9.8
	$S_{R_3}^*$	9.9	10.4	10.0	9.9	11.4	11.1	9.7	9.8
	$S_{R_4}^*$	9.9	10.4	10.0	9.9	11.4	11.1	9.7	9.8
$\alpha = 5\%$	S_R	5.0	5.0	4.9	5.0	6.0	5.9	5.1	4.9
	S_R^*	4.9	4.9	4.9	4.9	5.7	5.6	5.0	4.9
	$S_{R_1}^*$	4.9	4.9	4.9	4.9	5.7	5.6	5.0	4.9
	$S_{R_2}^*$	4.9	4.9	4.9	4.9	5.7	5.6	5.0	4.9
	$S_{R_3}^*$	4.9	4.9	4.9	4.9	5.7	5.6	5.0	4.9
	$S_{R_4}^*$	4.9	4.9	4.9	4.9	5.7	5.6	5.0	4.9
$\alpha = 1\%$	S_R	0.7	0.9	0.9	1.0	1.1	0.9	0.9	0.9
	S_R^*	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9
	$S_{R_1}^*$	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9
	$S_{R_2}^*$	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9
	$S_{R_3}^*$	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9
	$S_{R_4}^*$	0.7	0.9	0.9	1.0	1.0	0.9	0.9	0.9

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 36 – Tamanho dos testes S_R dos gamas para o t_4 e exponencial potência $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, q_1 = 3$ e diversos valores para p

α	$Teste$	Modelo t_4				Modelo Exponencial			
		p				p			
		2	3	4	5	2	3	4	5
$\alpha = 10\%$	S_R	10.8	10.4	11.7	11.1	9.7	9.7	11.1	10.1
	S_R^*	10.4	10.2	11.4	10.7	9.7	9.8	10.8	9.8
	$S_{R_1}^*$	10.4	10.2	11.4	10.7	9.7	9.8	10.8	9.8
	$S_{R_2}^*$	10.4	10.2	11.4	10.7	9.7	9.8	10.8	9.8
	$S_{R_3}^*$	10.4	10.2	11.4	10.7	9.7	9.8	10.8	9.8
	$S_{R_4}^*$	10.4	10.2	11.4	10.7	9.7	9.8	10.8	9.8
$\alpha = 5\%$	S_R	5.3	4.9	5.6	5.6	4.7	4.8	5.8	5.3
	S_R^*	5.2	4.8	5.3	5.4	4.5	4.8	5.3	5.0
	$S_{R_1}^*$	5.2	4.8	5.3	5.4	4.5	4.8	5.3	5.0
	$S_{R_2}^*$	5.2	4.8	5.3	5.4	4.5	4.8	5.3	5.0
	$S_{R_3}^*$	5.2	4.8	5.3	5.4	4.5	4.8	5.3	5.0
	$S_{R_4}^*$	5.2	4.8	5.3	5.4	4.5	4.8	5.3	5.0
$\alpha = 1\%$	S_R	1.0	0.9	1.0	1.2	1.0	1.3	1.3	1.3
	S_R^*	0.9	0.9	0.9	1.1	0.7	1.0	1.0	0.9
	$S_{R_1}^*$	0.9	0.9	0.9	1.1	0.7	1.0	1.1	0.9
	$S_{R_2}^*$	0.9	0.9	0.9	1.1	0.7	1.0	1.1	0.9
	$S_{R_3}^*$	0.9	0.9	0.9	1.1	0.7	1.0	1.1	0.9
	$S_{R_4}^*$	0.9	0.9	0.9	1.1	0.7	1.0	1.1	0.9

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 37 – Tamanho dos testes S_R dos gamas para o t_4 e exponencial potência $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, p = 3$ e diversos valores para q_1

α	$Teste$	Modelo t_4				Modelo Exponencial			
		q_1				q_1			
		2	3	4	5	2	3	4	5
$\alpha = 10\%$	S_R	10.0	10.4	11.5	11.2	9.6	9.7	9.9	10.4
	S_R^*	9.9	10.2	11.1	10.8	9.6	9.8	9.8	10.3
	$S_{R_1}^*$	9.9	10.2	11.1	10.8	9.6	9.8	9.8	10.3
	$S_{R_2}^*$	9.9	10.2	11.1	10.8	9.6	9.8	9.8	10.3
	$S_{R_3}^*$	9.9	10.2	11.1	10.8	9.6	9.8	9.8	10.3
	$S_{R_4}^*$	9.9	10.2	11.1	10.8	9.6	9.8	9.8	10.3
$\alpha = 5\%$	S_R	5.2	4.9	5.6	5.4	4.7	4.8	5.0	5.5
	S_R^*	5.0	4.8	5.3	5.1	4.8	4.8	4.8	5.0
	$S_{R_1}^*$	5.0	4.8	5.3	5.1	4.7	4.8	4.8	5.1
	$S_{R_2}^*$	5.0	4.8	5.3	5.1	4.7	4.8	4.8	5.0
	$S_{R_3}^*$	5.0	4.8	5.3	5.1	4.7	4.8	4.8	5.1
	$S_{R_4}^*$	5.0	4.8	5.3	5.1	4.7	4.8	4.8	5.1
$\alpha = 1\%$	S_R	0.8	0.9	1.0	0.9	0.9	1.3	1.2	1.4
	S_R^*	0.8	0.9	0.9	0.9	0.8	1.0	0.9	0.9
	$S_{R_1}^*$	0.8	0.9	0.9	0.9	0.8	1.0	0.9	0.9
	$S_{R_2}^*$	0.8	0.9	0.9	0.9	0.8	1.0	0.9	0.9
	$S_{R_3}^*$	0.8	0.9	0.9	0.9	0.8	1.0	0.9	0.9
	$S_{R_4}^*$	0.8	0.9	0.9	0.9	0.8	1.0	0.9	0.9

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Interessamos agora em testar os efeitos da média nos MNLSH considerando a hipótese $\mathcal{H}_0^2$. Assim, fixamos de forma geral $p_1 = 3$ para diferentes tamanhos amostrais. Note que, $p_1 = p - 1$ com p_1 o número de parâmetros do vetor β_1 a ser testado sob a hipótese nula. Nas Tabelas 38 e 39 apresentamos as taxas de rejeição empírica considerando o modelo t_4 e exponencial potência ($\kappa = 0.3$), respectivamente. Observa-se que o teste S_R apresenta uma distorção de tamanho em ambos os modelos considerados. Por exemplo no modelo t_4 , para $n = 30, q = 3$ ao nível nominal de 10% temos que a taxa de rejeição do teste S_R é de 12.4 praticamente igual a suas versões corrigidas. Mesmo cenário acontece na Tabela 39 para o modelo exponencial, para $n = 30, q = 3$ ao nível nominal de 10% temos que a taxa de rejeição do teste S_R é de 12.1 praticamente igual a suas versões corrigidas (12.0). As taxas

de rejeição de teste S_R e suas versões corrigidas estão muito próxima entre si mesmo com o aumento de parâmetros de perturbação. Por exemplo nos modelo t_4 e exponencial Potência, para $n = 30, q = 5$ ao nível nominal de 1% as taxas de rejeição do teste S_R e suas versões corrigidas são iguais a 1.0%, o nível nominal, para ambos os modelos.

Tabela 38 – Tamanho dos testes S_R dos betas para o Modelo t_4 , com $p_1 = p - 1 = 3, q = 3, 5$ e diversos valores para n

α	$Teste$	$q = 3$				$q = 5$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	S_R	12.4	12.0	10.6	11.9	12.6	12.5	11.4	11.5
	S_R^*	12.3	11.9	10.5	11.8	12.5	12.4	11.3	11.4
	$S_{R_1}^*$	12.3	11.9	10.6	11.8	12.5	12.4	11.3	11.4
	$S_{R_2}^*$	12.3	11.9	10.6	11.8	12.5	12.4	11.3	11.4
	$S_{R_3}^*$	12.3	11.9	10.6	11.8	12.5	12.4	11.3	11.4
	$S_{R_4}^*$	12.3	11.9	10.6	11.8	12.5	12.4	11.3	11.4
$\alpha = 5\%$	S_R	5.8	5.9	5.3	6.2	6.4	6.3	5.7	5.9
	S_R^*	5.8	5.9	5.3	6.2	6.3	6.3	5.7	5.8
	$S_{R_1}^*$	5.7	5.9	5.3	6.2	6.3	6.2	5.7	5.8
	$S_{R_2}^*$	5.7	5.9	5.3	6.2	6.3	6.2	5.7	5.8
	$S_{R_3}^*$	5.7	5.9	5.3	6.2	6.3	6.2	5.7	5.8
	$S_{R_4}^*$	5.7	5.9	5.3	6.2	6.3	6.2	5.7	5.8
$\alpha = 1\%$	S_R	0.8	1.0	0.8	1.2	1.0	1.2	0.9	1.3
	S_R^*	0.9	1.0	0.9	1.2	1.0	1.2	0.9	1.3
	$S_{R_1}^*$	0.9	1.0	0.9	1.2	1.0	1.2	0.9	1.3
	$S_{R_2}^*$	0.9	1.0	0.9	1.2	1.0	1.2	0.9	1.3
	$S_{R_3}^*$	0.9	1.0	0.9	1.2	1.0	1.2	0.9	1.3
	$S_{R_4}^*$	0.8	1.0	0.9	1.2	1.0	1.2	0.9	1.3

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 39 – Tamanho dos testes S_R dos betas para o Modelo Exponencial $\kappa = 0.3$, com $p_1 = p - 1 = 3$, $q = 3, 5$ e diversos valores para n

α	$Teste$	$q = 3$				$q = 5$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	S_R	12.1	12.2	10.4	11.1	11.6	11.5	10.3	11.3
	S_R^*	12.0	12.1	10.4	11.0	11.5	11.4	10.2	11.2
	$S_{R_1}^*$	12.0	12.1	10.4	11.0	11.5	11.4	10.2	11.2
	$S_{R_2}^*$	12.0	12.1	10.4	11.0	11.5	11.4	10.2	11.2
	$S_{R_3}^*$	12.0	12.1	10.4	11.0	11.5	11.4	10.2	11.2
	$S_{R_4}^*$	12.0	12.1	10.4	11.0	11.5	11.4	10.2	11.2
$\alpha = 5\%$	S_R	5.7	6.1	4.7	5.6	5.7	5.6	4.8	5.7
	S_R^*	5.6	6.1	4.7	5.6	5.6	5.6	4.8	5.7
	$S_{R_1}^*$	5.6	6.1	4.7	5.6	5.6	5.6	4.8	5.7
	$S_{R_2}^*$	5.6	6.1	4.7	5.6	5.6	5.6	4.8	5.7
	$S_{R_3}^*$	5.6	6.1	4.7	5.6	5.6	5.6	4.8	5.7
	$S_{R_4}^*$	5.6	6.1	4.7	5.6	5.6	5.6	4.8	5.7
$\alpha = 1\%$	S_R	0.8	1.1	0.8	1.1	1.0	1.0	0.7	1.1
	S_R^*	0.8	1.1	0.8	1.1	1.0	1.0	0.7	1.1
	$S_{R_1}^*$	0.8	1.1	0.8	1.1	1.0	1.0	0.7	1.1
	$S_{R_2}^*$	0.8	1.1	0.8	1.1	1.0	1.0	0.7	1.1
	$S_{R_3}^*$	0.8	1.1	0.8	1.1	1.0	1.0	0.7	1.1
	$S_{R_4}^*$	0.8	1.1	0.8	1.1	1.0	1.0	0.7	1.1

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Na Tabela 40 percebe-se considerando o modelo t_4 e exponencial potência que as taxas de rejeição de teste S_R e suas versões corrigidas (S_R^* , $S_{R_1}^*$, $S_{R_2}^*$, $S_{R_3}^*$, $S_{R_4}^*$) estão próximas entre si mesmo quando aumentamos o número de parâmetros de interesse.

Tabela 40 – Tamanho dos testes S_R dos betas para os modelos t_4 e exponencial potência $\kappa = 0.3$, considerando $n = 35, q = 3$ e diversos valores para p_1

α	$Teste$	Modelo t_4				Modelo Exponencial			
		p_1				p_1			
		2	3	4	5	2	3	4	5
$\alpha = 10\%$	S_R	13.4	12.2	10.7	13.1	12.8	11.6	10.8	12.1
	S_R^*	13.4	12.1	10.6	13.0	12.7	11.5	10.7	12.0
	$S_{R_1}^*$	13.4	12.1	10.6	13.0	12.7	11.5	10.7	12.0
	$S_{R_2}^*$	13.4	12.1	10.6	13.0	12.7	11.5	10.7	12.0
	$S_{R_3}^*$	13.4	12.1	10.6	13.0	12.7	11.5	10.7	12.0
	$S_{R_4}^*$	13.4	12.1	10.6	13.0	12.7	11.5	10.7	12.0
$\alpha = 5\%$	S_R	7.2	5.9	4.8	6.0	7.0	5.7	4.7	5.4
	S_R^*	7.2	5.8	4.8	6.0	7.0	5.7	4.7	5.4
	$S_{R_1}^*$	7.2	5.8	4.8	6.0	7.0	5.7	4.7	5.4
	$S_{R_2}^*$	7.2	5.8	4.8	6.0	7.0	5.7	4.7	5.4
	$S_{R_3}^*$	7.2	5.8	4.8	6.0	7.0	5.7	4.7	5.4
	$S_{R_4}^*$	7.2	5.8	4.8	6.0	7.0	5.7	4.7	5.4
$\alpha = 1\%$	S_R	1.6	1.0	0.5	1.2	1.5	0.8	0.6	0.8
	S_R^*	1.6	1.0	0.6	1.2	1.4	0.8	0.6	0.8
	$S_{R_1}^*$	1.6	1.0	0.6	1.2	1.4	0.8	0.6	0.8
	$S_{R_2}^*$	1.6	1.0	0.6	1.2	1.4	0.8	0.6	0.8
	$S_{R_3}^*$	1.6	1.0	0.6	1.2	1.4	0.8	0.6	0.8
	$S_{R_4}^*$	1.6	1.0	0.6	1.2	1.4	0.8	0.6	0.8

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Por fim estamos interessados em testar os efeitos simultâneo da média e da dispersão nos MNLSH considerando a hipótese $\mathcal{H}_0^1$. Nas Tabelas 41 e 42 são apresentados as taxas de rejeição empírica dos testes conjunto para o Modelo Exponencial Potência $\kappa = 0.3$ e t_4 , respectivamente com $k_1 = p-1 = 1, k_2 = q-1 = 1, k_1 = p-1 = 3, k_2 = q-1 = 2$ e diversos valores para n . Percebe-se que as taxas de rejeição do teste S_R estão ligeiramente distorcidas, mas continuam próximas do nível nominal. Por exemplo no modelo t_4 , para $n = 30, p = q = 2$ ao nível nominal $\alpha = 1\%$, a taxa de rejeição do teste S_R é de 1.1% , próxima a 1.0% . Considerando o mesmo cenário no modelo exponencial, a taxa de rejeição de teste S_R é de 0.9% e sua versão corrigida foi de 1.0% .

Tabela 41 – Tamanho dos testes conjunto para o Modelo Exponencial Potência $\kappa = 0.3$, com $k_1 = p - 1 = 1, k_2 = q - 1 = 1, k_1 = p - 1 = 3, k_2 = q - 1 = 2$ e diversos valores para n

α	$Teste$	$p = 2, q = 2$				$p = 4, q = 3$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	S_R	11.4	12.3	11.9	13.2	11.6	11.8	11.5	12.4
	S_R^*	11.5	12.3	11.8	13.0	11.4	11.7	11.5	12.4
	$S_{R_1}^*$	11.4	12.3	11.8	13.0	11.6	11.7	11.5	12.4
	$S_{R_2}^*$	11.4	12.3	11.8	13.0	11.6	11.7	11.5	12.4
	$S_{R_3}^*$	11.4	12.3	11.8	13.0	11.6	11.7	11.5	12.4
	$S_{R_4}^*$	11.4	12.3	11.8	13.0	11.6	11.7	11.5	12.4
$\alpha = 5\%$	S_R	5.5	6.4	6.0	7.1	5.6	5.9	6.0	6.5
	S_R^*	5.5	6.4	6.0	7.0	5.6	5.8	6.0	6.5
	$S_{R_1}^*$	5.5	6.4	6.0	7.0	5.6	5.8	6.0	6.5
	$S_{R_2}^*$	5.5	6.4	6.0	7.0	5.6	5.8	6.0	6.5
	$S_{R_3}^*$	5.5	6.4	6.0	7.0	5.6	5.8	6.0	6.5
	$S_{R_4}^*$	5.5	6.4	6.0	7.0	5.6	5.8	6.0	6.5
$\alpha = 1\%$	S_R	0.9	1.1	1.3	1.7	1.0	1.3	1.3	1.4
	S_R^*	1.0	1.1	1.3	1.7	1.0	1.3	1.3	1.4
	$S_{R_1}^*$	1.0	1.1	1.3	1.7	1.0	1.3	1.3	1.4
	$S_{R_2}^*$	1.0	1.1	1.3	1.7	1.0	1.3	1.3	1.4
	$S_{R_3}^*$	1.0	1.1	1.3	1.7	1.0	1.3	1.3	1.4
	$S_{R_4}^*$	1.0	1.1	1.3	1.7	1.0	1.3	1.3	1.4

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 42 – Tamanho dos testes conjunto para o Modelo t_4 , com $k_1 = p - 1 = 1, k_2 = q - 1 = 1, k_1 = p - 1 = 3, k_2 = q - 1 = 2$ e diversos valores para n

α	$Teste$	$p = 2, q = 2$				$p = 4, q = 3$			
		n				n			
		30	40	50	100	30	40	50	100
$\alpha = 10\%$	S_R	11.9	12.2	12.7	13.2	13.2	12.9	13.0	12.6
	S_R^*	11.8	12.0	12.6	13.0	13.0	12.8	13.0	12.5
	$S_{R_1}^*$	11.8	12.0	12.6	13.0	13.0	12.8	13.0	12.5
	$S_{R_2}^*$	11.8	12.0	12.6	13.0	13.0	12.8	13.0	12.5
	$S_{R_3}^*$	11.8	12.0	12.6	13.0	13.0	12.8	13.0	12.5
	$S_{R_4}^*$	11.8	12.0	12.6	13.0	13.0	12.8	13.0	12.5
$\alpha = 5\%$	S_R	5.8	6.3	6.2	7.1	6.8	6.8	6.9	6.7
	S_R^*	5.7	6.3	6.2	7.1	6.7	6.8	6.9	6.7
	$S_{R_1}^*$	5.7	6.3	6.2	7.1	6.7	6.8	6.9	6.7
	$S_{R_2}^*$	5.7	6.3	6.2	7.1	6.7	6.8	6.9	6.7
	$S_{R_3}^*$	5.7	6.3	6.2	7.1	6.7	6.8	6.9	6.7
	$S_{R_4}^*$	5.4	6.3	6.2	7.1	6.7	6.8	6.9	6.7
$\alpha = 1\%$	S_R	1.1	1.3	1.3	1.6	1.3	1.3	1.6	1.3
	S_R^*	1.1	1.3	1.3	1.6	1.3	1.3	1.6	1.3
	$S_{R_1}^*$	1.1	1.3	1.3	1.6	1.3	1.3	1.6	1.3
	$S_{R_2}^*$	1.1	1.3	1.3	1.6	1.3	1.3	1.6	1.3
	$S_{R_3}^*$	1.1	1.3	1.3	1.6	1.3	1.3	1.6	1.3
	$S_{R_4}^*$	1.1	1.3	1.3	1.6	1.3	1.3	1.6	1.3

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 43 – Poder dos testes-Modelo Exponencial Potência com $n = 35, q_1 = 3$ e $\alpha = 10\%$

δ	$p = 3$				$p = 5$			
	$S_{R_1}^*$	$S_{R_2}^*$	$S_{R_3}^*$	$S_{R_4}^*$	$S_{R_1}^*$	$S_{R_2}^*$	$S_{R_3}^*$	$S_{R_4}^*$
0,2	9.0	9.0	9.0	9.0	10.7	10.7	10.7	10.7
0,4	13.8	13.8	13.8	13.8	14.9	14.9	14.9	14.9
0,6	24.5	24.5	24.5	24.5	23.6	23.6	23.6	23.6
0,8	41.4	41.6	41.5	41.3	41.9	41.8	41.9	41.9
1,0	47.7	48.1	49.3	48.6	60.7	60.7	60.7	60.7
1,2	62.2	63.0	63.2	63.0	69.0	69.0	69.0	69.0
1,4	87.3	87.3	87.3	87.3	89.1	89.1	89.1	89.1

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Tabela 44 – Poder dos testes-Modelo t_4 com $n = 35, q_1 = 3$ e $\alpha = 10\%$

δ	$p = 3$				$p = 5$			
	$S_{R_1}^*$	$S_{R_2}^*$	$S_{R_3}^*$	$S_{R_4}^*$	$S_{R_1}^*$	$S_{R_2}^*$	$S_{R_3}^*$	$S_{R_4}^*$
0,2	11.9	11.9	11.9	11.9	11.3	11.3	11.3	11.4
0,4	17.0	17.0	17.0	17.0	13.9	13.9	13.9	13.9
0,6	27.8	27.8	27.8	27.8	20.7	20.7	20.7	20.7
0,8	46.3	46.3	46.3	46.3	33.7	33.7	33.7	33.7
1,0	68.3	68.3	68.3	68.3	53.0	53.0	53.0	53.0
1,2	82.1	82.1	82.1	82.1	75.9	75.9	75.9	75.9
1,4	84.8	85.0	84.9	85.1	88.8	88.9	88.9	88.9

Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Com intuito de avaliar o poder do teste S_R para amostras de tamanho pequeno e moderado, simulamos as taxas de rejeição levando em consideração a hipótese alternativa $\mathcal{H}_1^3 : \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta \neq 0$ para os modelos t_4 e exponencial potência ($\kappa = 0.3$), com $n = 35, q_1 = 3, \alpha = 10\%$ e variando o δ . Consideramos somente o estudo de poder de teste para o componente da dispersão (Heteroscedasticidade). Nas Tabelas 43 e 44 apresentamos as taxas de rejeição não nula de teste para os modelos t_4 e exponencial potência ($\kappa = 0.3$). Percebe-se que os poderes dos testes se aproximam da 1 conforme o aumento de δ . Os resultados apontam que não há nenhuma perda de poder derivada do fato de usar o fator de correção de tipo-Bartlett.

4.3 APLICAÇÃO 1

Nesta seção utilizamos o mesmo conjunto de dados do capítulo anterior (ver Apêndice F) para realizar o teste escore S_R na classe dos modelos MNLSH como foi o caso do teste LR . Considerando os dados do peso das lentes dos olhos de coelhos europeus na Austrália (*OryctolagusCuniculus*) analisado por Ratkowsky (1983) e reanalisado por Wei (1998) e Cysneiros, Paula e Galea (2005) através do seguinte modelo heteroscedástico:

$$y_l = \exp\left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{(x_l + \beta_2)}\right) + \epsilon_l.$$

Assumimos que $\epsilon_l \sim S(0, \exp\{\delta_0 \exp(\delta_1/x_l)\})$ e $l = 1, 2, \dots, 71$. Nosso interesse é testar a seguinte hipótese: $\mathcal{H}_0 : \delta_1 = 0$ versus: $\mathcal{H}_1 : \delta_1 \neq 0$. Para este teste percebe-se que as estatísticas de teste são: $S_R = 2.916$ (p -valor: 0.088); $S_R^* = 3.287$ (p -valor: 0.070); $S_{R_1}^* = 3.342$ (p -valor: 0.068); $S_{R_2}^* = 3.312$ (p -valor: 0.069); $S_{R_3}^* = 3.302$ (p -valor: 0.069); $S_{R_4}^* =$

3.317 (p -valor: 0.069); $S_{R_{boot}}^* = 3.104$ (p -valor: 0.078), em que $S_{R_{boot}}^*$ representa a estatística escore bootstrap corrigido. Assim, todos os testes considerados levam à rejeição da hipótese nula $\mathcal{H}_0$ ao nível nominal de 10% mas não rejeitam $\mathcal{H}_0$ ao nível de 5%, sugerindo evidência marginal de heteroscedasticidade.

4.4 APLICAÇÃO 2

O segundo exemplo trata dos dados de experimento que consiste na análise bioquímica das células suspensas numa solução de cálcio durante um determinado tempo x (em minutos) e a quantidade de cálcio absorvida pelas células y ($nmol/mg$), numa amostra de 27 observações. Os dados encontram-se no Apêndice G. Esses dados foram analisados por RAWLINGS (1988) e BRAZZALE (2000). Recentemente o mesmo conjunto de dado foi analisado por ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022) com presença de heteroscedasticidade nos dados. Foi considerado o seguinte modelo heteroscedástico:

$$y_l = \exp\{\beta_0(1 - \exp(-\beta_1 x_l))\} + \epsilon_l.$$

Assumimos que $\epsilon_l \sim S(0, \exp\{\delta_0 \exp(\delta_1/x_l)\})$ e $l = 1, 2, \dots, 27$. Nosso interesse é testar a seguinte hipótese: $\mathcal{H}_0 : \delta_1 = 0$ versus: $\mathcal{H}_1 : \delta_1 \neq 0$. Para este teste, os valores observados para as estatísticas são: $S_R = 8.363$ (p -valor: 0.004); $S_R^* = 7.989$ (p -valor: 0.005); $S_{R_1}^* = 8.005$ (p -valor: 0.005); $S_{R_2}^* = 7.997$ (p -valor: 0.005); $S_{R_3}^* = 7.993$ (p -valor: 0.005); $S_{R_4}^* = 7.998$ (p -valor: 0.005); $S_{R_{boot}}^* = 2.982$ (p -valor: 0.084). Podemos observar que o teste escore bootstrap corrigido ($S_{R_{boot}}^*$) leva a não rejeição da hipótese nula $\mathcal{H}_0$ ao nível de significância de 5%, ou seja, a dispersão é constante para todas as observações, mas rejeita $\mathcal{H}_0$ ao nível nominal de 10%. Por outro lado, o teste escore e suas versões modificadas levam a rejeição da hipótese nula a este nível (5%), sugerindo evidência marginal de heteroscedasticidade.

4.5 CONCLUSÃO

Neste capítulo derivamos o fator de correção tipo-Bartlett para a estatística escore na classe dos modelos MNLSH com intuito de realizar testes de hipótese considerando qualquer estrutura heteroscedástica. Nosso principal resultado obtido generaliza os resultados obtidos em ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022) (que foram obtidos fatores de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças e tipo-Bartlett para a estatística gradiente nos MNLSH, em que utiliza a estrutura de heteroscedasticidade multiplicativa como caso particular). Os resultados das simulações considerando os erros simétricos exponencial potência ($\kappa = 0.3$) e t-Student com $\nu = 4$ (fixo) mostraram que os testes escore usual e corrigidos têm desempenho semelhante, de modo geral em todos os tamanho de amostra considerados para o teste de heteroscedasticidade. Para o teste conjunto e da média, as taxas de rejeição do teste S_R e suas versões corrigidas estão pouco distorcidas, mas permanece próximas dos teste entre si. No que tange ao estudo de simulação do poder de teste S_R , os resultados apontam que não há nenhuma perda de poder derivada do fato de usar o fator de correção de tipo-Bartlett.

5 TÉCNICAS DE DIAGNÓSTICO EM MODELOS NÃO LINEARES SIMÉTRICOS HETEROSCEDÁSTICOS

Resumo

Neste capítulo, derivamos alguns procedimentos de diagnósticos na classe dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH). Nesta classe de modelos consideramos que a média e a dispersão não são constantes, admitindo para a dispersão qualquer estrutura heteroscedástica, tendo como caso particular, a heteroscedasticidade multiplicativa. Desta forma, nosso trabalho generaliza os resultados apresentados em Vanegas e Cysneiros (2010) uma vez que os autores consideram constante a dispersão. A verificação da presença de observações extremas na variável resposta e os métodos de diagnósticos são instrumentos fundamentais para seleção de modelo adequado ao conjunto de dados em estudo. Para isto, avaliamos alguns dos modelos pertencente à família simétrica com a presença de outliers e derivamos alguns métodos de diagnóstico, tais como a alavancagem generalizada e a influência local, e por fim avaliamos a robustez contra observações aberrantes apresentando uma aplicação a dados reais considerando os modelos t-Student e Exponencial Potência. Os resultados da análise de diagnóstico mostraram-se eficientes em detectar observações influentes. Além disso, percebemos que o modelo t-Student se ajusta melhor aos dados do que o modelo Exponencial Potência ($\kappa = 0.3$) de regressão não linear baseando na sua robustez de lidar com observações extremas.

Palavras chaves: alavancagem generalizada; influência local; observação extrema; seleção de modelo.

5.1 INTRODUÇÃO

A modelagem estatística sob a suposição de normalidade dos erros pode ser influenciada por observações extremas nos dados. A presença de uma única ou mais observações aberrantes podem provocar no ajuste de regressão algumas distorções na interpretação do coeficiente de regressão e assim levando muitas vezes a conclusões errôneas. Uma alternativa para contornar esse problema consiste em considerar modelos em que a distribuição pertencente a família simétrica por conseguir lidar com distribuições com caudas mais pesadas do que as da normal.

Esta família inclui as seguintes distribuições: Student-t, Logística-Tipo I e -II, Exponencial potência, Student-t generalizado, logística generalizada e contaminada normal, entre outros.

Considerando que o modelo de regressão simétrico pode ser um candidato plausível para a modelagem de conjuntos de dados com observações extremas, é importante analisar a adequabilidade ou a robustez deste tipo de modelo na presença de tais observações. Tal procedimento conhecido como análise de diagnóstico teve seu início com a análise de resíduos para avaliar a adequação da distribuição proposta da variável resposta, assim como detectar pontos extremos entre o conjunto de dados.

A literatura sobre diagnósticos é dominada por estudos de métodos para a detecção de observações influentes (COOK; WEISBERG, 1982). Estas observações influentes são aqueles pontos que exercem um peso desproporcional nas estimativas dos parâmetros do modelo quando as retiramos do conjunto de dados ou quando elas são submetidas a perturbações. São considerados pontos de alavanca observações cuja sua retirada do conjunto de dados interfere na variância dos valores ajustados.

Neste Capítulo são apresentadas algumas técnicas de diagnósticos para os modelos não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH) considerando que a média e a dispersão não são constantes para todas as observações e assumindo qualquer estrutura heteroscedástica para a dispersão, tendo como caso particular, a heteroscedasticidade multiplicativa. Desta forma, nosso trabalho generaliza os resultados apresentados em Vanegas e Cysneiros (2010) uma vez que os autores consideram constante a dispersão sendo a principal contribuição desse capítulo na literatura. Inicialmente, na Seção 5.2.1, abordamos o conceito de alavancagem generalizada sob a ótica de Wei, Hu e Fung (1998) em que eles generalizam a definição de pontos de alavanca para modelos gerais. Na Seção 5.2.2 discutiremos sobre a influência global considerando a metodologia de Wei, Hu e Fung (1998) e na Seção 5.2.3 abordamos a metodologia de influência local proposta por Cook (1986), em que a ideia básica consiste em avaliar a influência conjunta das observações sob pequenas perturbações nos dados ou no próprio modelo ao invés da avaliação pela retirada individual ou conjunta de pontos. Na Seção 5.3 aplicamos estas técnicas a conjuntos de dados reais sob modelos t-Student e Exponencial potência de regressão não-linear e por fim vem a conclusão na seção 5.4.

5.1.1 Modelos Não Lineares Simétricos Heteroscedásticos

Sejam $y_1, \dots, y_n$, n variáveis aleatórias contínuas e independentes em que cada $y_l, l = 1, \dots, n$ segue uma distribuição simétrica. A função de densidade de probabilidade associada pode ser escrita da seguinte forma

$$f(y_l, \mu_l, \phi_l) = \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} g(u_l), \quad y_l \in \mathbb{R}, \mu_l \in \mathbb{R}, \phi_l > 0, \quad (5.1)$$

em que $\mu_l \in \mathbb{R}$ representa o parâmetro de locação e $\phi_l > 0$ o parâmetro da dispersão. Adicionalmente $g(\cdot)$ representa a função geradora de densidade com $g(u_l) > 0$, $u_l > 0$ sendo $u_l = \phi_l^{-1/2}(y_l - \mu_l)$ e $\int_0^\infty u_l^{-1/2} g(u_l) du_l = 1$. A função $g(\cdot)$ pode depender de parâmetros extras, digamos ν que na literatura são considerados fixo. Definimos nosso modelo não linear simétrico heteroscedástico de regressão incorporando duas estruturas de regressão não lineares ao modelo definido em 5.1. Supomos para a resposta média $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$ a seguinte estrutura

$$g(\boldsymbol{\mu}_l) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}), \quad (5.2)$$

em que $g(\boldsymbol{\mu}_l)$ representa a função não linear, contínua e duplamente diferenciável com respeito aos componentes de $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$, vetores de p parâmetros desconhecidos a serem estimados, com $p < n$ e $\mathbf{X} = (x_{l1}, \dots, x_{ln})^\top$ o vetor de n variáveis explicativas associadas a l -ésima observação. Também assumimos uma componente sistemática para o vetor da dispersão $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)^\top$ definida por

$$h(\phi_l) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\delta}), \quad (5.3)$$

em que $h(\phi_l)$ representa a função não linear, contínua e duplamente diferenciável com respeito aos componentes de $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_q)^\top$, vetores de p parâmetros desconhecidos a serem estimados, com $q < n$ e $\mathbf{S} = (s_{l1}, \dots, s_{ln})^\top$, o vetor de n variáveis explicativas que pode ter componentes comuns associadas a l -ésima observação. Assim, os modelos simétricos de regressão são definidos pela componente aleatória 5.1 e pelas componentes sistemáticas definidas em 5.2 e 5.3. Entretanto, é possível formular o modelo descrito acima usando as propriedades das distribuições pertencentes à classe simétrica. Logo, o modelo não linear simétrico heteroscedástico pode ser escrito como segue

$$y_l = \mu_l + \sqrt{\phi_l} \epsilon_l; \quad l = 1, \dots, n, \quad (5.4)$$

em que $\epsilon_l = \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ são variáveis aleatórias independentes seguindo a distribuição $S(0, 1, g)$ e podem ser interpretados como erros aleatórios. Considerando o logaritmo da função de verossimilhança (log-verossimilhança) do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\delta}^\top)^\top$ dado o vetor de observações $(y_1, \dots, y_n)^\top$ do modelo não linear simétrico heteroscedásticos definido em 5.4, temos que

$$\ell = \ell(\boldsymbol{\theta}) = \log f(y, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \log(\phi_l) + \sum_{l=1}^n t(z_l), \quad (5.5)$$

em que $t(z_l) = \log\{g(u_l)\}$, $u_l = z_l^2 = (y_l - \mu_l)^2 / \phi_l$ e $l = 1, \dots, n$.

5.2 ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO EM MNLSH

Nesta seção abordamos a análise de diagnóstico para os modelos não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH). Este procedimento consiste na identificação de observações que exercem um peso desproporcional nas estimativas dos parâmetros de uma componente fundamental do processo de validação do modelo. Geralmente são pontos afastados com perfis totalmente diferentes dos demais no que diz respeito aos valores da matriz modelo $\mathbf{X}$. Considerando que os estudos de medidas de influências nos MNLSH de regressão possibilitem a caracterização de observações influentes nos dados, é importante realizar um exame de alavancagem generalizada e de influência local para esta classe de modelos admitindo para a dispersão qualquer estrutura heteroscedástica.

5.2.1 Alavancagem Generalizada

No contexto de regressão, o conceito de alavancagem é um dos componentes chaves da análise de diagnóstico. Os pontos de alavanca são aqueles pontos no conjunto de dados que exercem uma influência nas estimativas da variância dos coeficientes de regressão. Para medir esta influência, Wei, Hu e Fung (1998) desenvolveram uma expressão explícita para alavancagem através da derivada $h_{ii} = \partial \hat{y}_i / \partial y_i$. O elemento h_{ii} representa o i -ésimo elemento da diagonal principal da matriz de projeção $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$ considerada simétrica e idempotente. Para medir o efeito de cada variável do vetor $\mathbf{y} = (y_1 \cdots y_n)^\top$ sobre o próprio valor ajustado $\hat{\mathbf{y}}$, a matriz $\partial \hat{\mathbf{y}} / \partial \mathbf{y}$ segundo Wei, Hu e Fung (1998) pode ser definida da seguinte forma

$$GL(\theta) = \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = \left\{ D_\theta \left(-\ddot{L}_{\theta\theta} \right)^{-1} \ddot{L}_{y\theta} \right\} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}, \quad (5.6)$$

em que $D_\theta = \frac{\partial \mu}{\partial \theta^\top}$, $\ddot{L}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top}$ e $\ddot{L}_{y\theta} = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial y^\top}$, sendo $\ell(\theta) = \ell(\beta, \delta)$ o logaritmo da função verossimilhanças definida em (5.5). Além disso, a matriz de informação observada dada por $\ddot{L}_{\theta\theta}|_{\theta=\hat{\theta}}$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ddot{L}_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} \ddot{L}_{\beta\beta} & \ddot{L}_{\beta\delta} \\ \ddot{L}_{\delta\beta} & \ddot{L}_{\delta\delta} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

em que

$$\begin{aligned} \ddot{L}_{\beta\beta} &= X^\top M_2 V \Lambda (y - \mu) X - X^\top M_1^2 V' \Lambda^{1/2} (y - \mu) X - X^\top M_1^2 V \Lambda X \\ &\quad + M_1 V \Lambda (y - \mu) \tilde{X}, \\ \ddot{L}_{\beta\delta} &= -\frac{1}{2} X^\top M_1 \Phi_1 V' u \Lambda^{3/2} S - X^\top M_1 \Phi_1 V \Lambda^2 (y - \mu) S, \\ \ddot{L}_{\delta\beta} &= -\frac{1}{2} S^\top M_1 \Phi_1 V' u \Lambda^{3/2} X - S^\top M_1 \Phi_1 V \Lambda^2 (y - \mu) X \quad \text{e} \\ \ddot{L}_{\delta\delta} &= -\frac{1}{2} S^\top \Phi_2 \Lambda (\iota - V u) S + \frac{1}{2} S^\top \Phi_1 \Lambda^2 (\iota - V u) S - \frac{1}{4} S^\top \Phi_1^2 \Lambda^2 u^{3/2} V' S \\ &\quad - \frac{1}{2} S^\top \Phi_1^2 \Lambda^2 u V S - \frac{1}{2} \Phi_1^2 \Lambda (\iota - V u) \tilde{S}, \end{aligned}$$

em que Φ , V , Λ e M são matrizes diagonais de dimensão $n \times n$, com elementos dados por $h_{il} = d^i \phi_l / d\tau_l^i$ (representa a i -ésima derivada de $\phi_l = g^{-1}(\tau_l)$), $v_l = -2t_{(z_l)}^{(1)}$, $1/\phi_l$ e $m_{il} = d^i \mu_l / d\eta_l^i$ (corresponde a i -ésima derivada de $\mu_l = g^{-1}(\eta_l)$), respectivamente para $i, l = 1, \dots, n$. Maiores detalhes dos v 's encontram-se no Apêndice I.

Definimos também a matriz D_θ^μ da seguinte forma:

$$D_\theta^\mu = (D_\beta^\mu, D_\delta^\mu),$$

sendo

$$\frac{\partial \mu_l}{\partial \beta_r} = \frac{\partial \mu_l}{\partial \eta_l} \cdot \frac{\partial \eta_l}{\partial \beta_r} = m_{1l}(r)_l \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mu_l}{\partial \delta_R} = \frac{\partial \mu_l}{\partial \eta_l} \cdot \frac{\partial \eta_l}{\partial \delta_R} = 0,$$

em que $r = 1, \dots, p$, $R = 1, \dots, q$ e $l = 1, \dots, n$. Portanto, a forma matricial de D_θ^μ pode ser escrita como segue:

$$D_\theta^\mu = (M_1 X, 0). \quad (5.8)$$

Analogamente, é possível observar a influência de y em $\hat{\phi}_l$. Assim, D_θ^ϕ pode ser escrita da seguinte forma:

$$D_\theta^\phi = (D_\beta^\phi, D_\delta^\phi),$$

sendo

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial \beta_r} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \tau_l} \cdot \frac{\partial \tau_l}{\partial \beta_r} = 0 \text{ e } \frac{\partial \phi_l}{\partial \delta_R} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \tau_l} \cdot \frac{\partial \tau_l}{\partial \delta_R} = h_{1l}(R)_l,$$

em que $r = 1, \dots, p$, $R = 1, \dots, q$ e $l = 1, \dots, n$. Portanto, a forma matricial de D_θ^ϕ pode ser escrita como segue:

$$D_\theta^\phi = (\mathbf{0}, \Phi_1 \mathbf{S}), \quad (5.9)$$

em que $\Phi_1 = \text{diag}\{h_{11} \cdots h_{1n}\}$, com $h_{1l} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \tau_l}$ e $l = 1, \dots, n$. A matriz $\ddot{L}_{\theta y}$ é definida como segue

$$\ddot{L}_{\theta y} = \begin{pmatrix} \ddot{L}_{\beta y} \\ \ddot{L}_{\delta y} \end{pmatrix},$$

em que $\ddot{L}_{\beta y} = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta \partial \mathbf{y}^\top}$ e $\ddot{L}_{\delta y} = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \delta \partial \mathbf{y}^\top}$ sendo $\ell(\theta) = \ell(\beta, \delta)$. Da equação (3.3) temos que o (rl) -ésimo elemento de $\ddot{L}_{\beta y}$ é dada como segue

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta \partial \mathbf{y}^\top} = \sum_{l=1}^n \left\{ m_{1l} v_l \wedge_l (r)_l + 2m_{1l} v'_l \wedge_l^2 (y_l - \mu_l)^2 (r)_l \right\},$$

em que $m_{1l} = \partial \mu_l / \partial \eta_l$ e $(r)_l = \partial \eta / \partial \beta_r$, $\wedge_l = \text{diag}\{1/\phi_{1l} \cdots 1/\phi_{1n}\}$ e $v_l = -2t_{(z_l)}^{(1)}$, $l = 1, \dots, n$.

Analogamente, temos que

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \delta \partial \mathbf{y}^\top} = \sum_{l=1}^n \left\{ h_{1l} v_l \wedge_l^2 (y_l - \mu_l)(R)_l + h_{1l} v'_l \wedge_l^2 (y_l - \mu_l) u_l(R)_l \right\},$$

em que $h_{1l} = \partial \phi_l / \partial \tau_l$ e $(R)_l = \partial \tau / \partial \delta_R$, $\wedge_l = \text{diag}\{1/\phi_{1l} \cdots 1/\phi_{1n}\}$, $v_l = -2t_{(z_l)}^{(1)}$ e $v'_l = -2t_{(z_l)}^{(2)}$ sendo $l = 1, \dots, n$. Logo, temos que

$$\ddot{L}_{\theta y} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\top \mathbf{M}_1 \Lambda [\mathbf{V} + 2\mathbf{V}'\mathbf{u}] \\ \mathbf{S}^\top \Phi_1 \Lambda^2 (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) [\mathbf{V} + \mathbf{V}'\mathbf{u}] \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

A partir das equações (5.7), (5.8) e (5.10) podemos reescrever a equação (5.6) de ponto de alavanca da seguinte forma:

$$\begin{aligned} GL^\mu(\theta) &= [M_1 X, 0] \begin{pmatrix} -\ddot{L}_{\beta\beta} & -\ddot{L}_{\beta\delta} \\ -\ddot{L}_{\delta\beta} & -\ddot{L}_{\delta\delta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X^\top M_1 \Lambda [V + 2V'u] \\ S^\top \Phi_1 \Lambda^2 (y - \mu) [V + V'u] \end{pmatrix} \\ &= [M_1 X, 0] \begin{pmatrix} -\ddot{L}_{\beta\beta}^{-1} + F E^{-1} F^\top & -F E^{-1} \\ -E^{-1} F^\top & E^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\top M_1 \Lambda [V + 2V'u] \\ S^\top \Phi_1 \Lambda^2 (y - \mu) [V + V'u] \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

em que $F = \ddot{L}_{\beta\beta}^{-1} \ddot{L}_{\beta\delta}$, $F^\top = \ddot{L}_{\delta\beta} \ddot{L}_{\beta\beta}^{-1}$ e $E^{-1} = (-\ddot{L}_{\delta\delta} + \ddot{L}_{\delta\beta} \ddot{L}_{\beta\beta}^{-1} \ddot{L}_{\beta\delta})^{-1}$. As matrizes $\ddot{L}_{\beta\beta}$, $\ddot{L}_{\beta\delta}$, $\ddot{L}_{\delta\delta}$ são definidas em (5.7). Maiores detalhes para a inversa da matriz $\ddot{L}_{\theta\theta}$ podem ser encontrados em Rao (1973). Logo, temos que

$$\begin{aligned} GL^\mu(\theta) &= \begin{pmatrix} M_1 X (-\ddot{L}_{\beta\beta}^{-1} + F E^{-1} F^\top) & -M_1 X F E^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\top M_1 \Lambda [V + 2V'u] \\ S^\top \Phi_1 \Lambda^2 (y - \mu) [V + V'u] \end{pmatrix} \\ &= M_1 X (-\ddot{L}_{\beta\beta}^{-1} + F E^{-1} F^\top) X^\top M_1 \Lambda [V + 2V'u] \\ &\quad - M_1 X F E^{-1} S^\top \Phi_1 \Lambda^2 (y - \mu) [V + V'u]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Assim, podemos reescrever $GL^\mu(\theta)$ da seguinte forma

$$GL^\mu(\theta) = GL_\beta^\mu(\theta) + GL_\delta^\mu(\theta)$$

em que

$$GL_\beta^\mu(\theta) = -M_1 X \ddot{L}_{\beta\beta}^{-1} X^\top M_1 \Lambda [V + 2V'u]$$

e

$$\begin{aligned} GL_\delta^\mu(\theta) &= M_1 X F E^{-1} F^\top X^\top M_1 \Lambda [V + 2V'u] \\ &\quad - M_1 X F E^{-1} S^\top \Phi_1 \Lambda^2 (y - \mu) [V + V'u]. \end{aligned}$$

Similarmente a $GL^\mu(\theta)$, substituindo as equações (5.9), (5.7) e (5.10) em (5.6), a matriz generalizada de pontos de alavanca $\partial\phi/\partial y$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} GL^\phi(\theta) &= -\Phi_1 S E^{-1} F^\top M_1 \Lambda [V + 2V'u] \\ &\quad + \Phi_1 S E^{-1} S^\top \Phi_1 \Lambda^2 (y - \mu) [V + V'u], \end{aligned} \quad (5.12)$$

em que $\mathbf{F}^\top = \ddot{\mathbf{L}}_{\delta\beta} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta}^{-1}$ e $\mathbf{E}^{-1} = (-\ddot{\mathbf{L}}_{\delta\delta} + \ddot{\mathbf{L}}_{\delta\beta} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta}^{-1} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\delta})^{-1}$. A matriz generalizada de pontos de alavanca para ϕ dada em (5.12) pode ainda ser reescrita na forma

$$GL^\phi(\boldsymbol{\theta}) = GL_\beta^\phi(\boldsymbol{\theta}) + GL_\delta^\phi(\boldsymbol{\theta})$$

em que

$$GL_\beta^\phi(\boldsymbol{\theta}) = -\Phi_1 \mathbf{S} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{M}_1 \Lambda [\mathbf{V} + 2\mathbf{V}'\mathbf{u}] \\ - \Phi_1 \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^\top \{ \mathbf{S}^\top \Phi_1 \Lambda^2 (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) [\mathbf{V} + \mathbf{V}'\mathbf{u}] \}$$

e

$$GL_\delta^\phi(\boldsymbol{\theta}) = \Phi_1 \mathbf{S} (-\ddot{\mathbf{L}}_{\delta\delta})^{-1} \{ \mathbf{S}^\top \Phi_1 \Lambda^2 (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) [\mathbf{V} + \mathbf{V}'\mathbf{u}] \},$$

sendo $\mathbf{F}^\top = \ddot{\mathbf{L}}_{\delta\beta} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta}^{-1}$ e $\mathbf{E}^{-1} = (-\ddot{\mathbf{L}}_{\delta\delta} + \ddot{\mathbf{L}}_{\delta\beta} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta}^{-1} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\delta})^{-1}$, $\mathbf{C} = (-\ddot{\mathbf{L}}_{\delta\delta})^{-1} \ddot{\mathbf{L}}_{\delta\beta}$, $\mathbf{C}^\top = \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\delta} (-\ddot{\mathbf{L}}_{\delta\delta})^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1} = [\ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta} - \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\delta} (\ddot{\mathbf{L}}_{\delta\delta})^{-1} \ddot{\mathbf{L}}_{\delta\beta}]^{-1}$. As submatrizes $\ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta}$, $\ddot{\mathbf{L}}_{\beta\delta}$, $\ddot{\mathbf{L}}_{\delta\beta}$ e $\ddot{\mathbf{L}}_{\delta\delta}$ da matriz de informação observada, $\ddot{\mathbf{L}}_{\theta\theta}$, estão definidas em (5.7). Também as matrizes diagonais Λ , $\mathbf{M}$ e $\mathbf{V}$ estão definidas na Seção 5.2.1.

Portanto os gráficos de detecção de pontos de alavancagem $GL^\phi(\boldsymbol{\theta})_{ll}$ e $GL^\phi(\boldsymbol{\theta})_{ll}$ versus índice podem ser sugeridos para identificar observações com alta grau de alavancagem.

5.2.2 Influência Global

Uma etapa mais importante na análise de diagnóstico é conhecida como detecção de pontos influentes nos dados. Tais pontos possuem características diferentes dos demais pontos exercendo um peso desproporcional nas estimativas do coeficiente do modelo de tal forma que as suas retiradas do conjunto de dados interferem significativamente nas estimativas do modelo. A técnica de deleção de ponto foi introduzido por Cook (1977) para avaliar o efeito da retirada de uma observação nas estimativas do modelo. Para avaliar a i -ésima observação nas estimativas de $\boldsymbol{\theta}$ é comum usar a medida de afastamento da verossimilhanças proposto por Cook e Weisberg (1982) e pode ser expressa da seguinte forma

$$LD_{(i)} = 2\{\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(i)})\},$$

sendo $\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ representa o logaritmo da função verossimilhança dado em (5.5) avaliada em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(i)}$, que corresponde à estimativa de $\boldsymbol{\theta}$ quando a i -ésima observação é excluída do conjunto de

dado. Já que $LD_{(i)}$ não possui uma forma analítica, é possível usar a aproximação de segunda ordem de Taylor em torno de $\hat{\theta}$. O resultado dessa aproximação é dado com segue

$$LD_{(i)} \cong (\theta - \hat{\theta})^\top \{-\ddot{L}_{\theta\theta}(\hat{\theta})\}(\theta - \hat{\theta}).$$

Assim, substituindo a matriz de informação observada pelo seu valor esperado $K(\hat{\theta})$ e θ pelo $\hat{\theta}_{(i)}$, temos que

$$LD_{(i)}^\beta \cong -\varphi_{(0,1,0,0,0)}(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)})^\top (\mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta} \mathbf{X})(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)}) \quad (5.13)$$

e

$$LD_{(i)}^\delta \cong -\frac{1}{4}(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1)(\hat{\delta} - \hat{\delta}_{(i)})^\top (\mathbf{S}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta} \mathbf{S})(\hat{\delta} - \hat{\delta}_{(i)}), \quad (5.14)$$

em que $\mathbf{W}_{\beta\beta} = \Lambda M_1^2$ e $\mathbf{W}_{\delta\delta} = \Delta^2 H_1^2$.

Como $\hat{\delta}_{(i)}$ não possui uma forma fechada, Pregibon (1981) propôs uma aproximação em um passo que consiste em tomar a primeira iteração do processo iterativo pelo método de Scoring de Fisher, iniciando em $\hat{\delta}$. Esta aproximação é dada por:

$$\hat{\theta}_{(i)}^1 = \hat{\theta} + \{-\ddot{L}_{\theta\theta}(\hat{\theta})\}^{-1} \ell_{(i)}(\hat{\theta}),$$

em que $\ell_{(i)}(\hat{\theta})$ corresponde ao logaritmo da função verossimilhança sem a i -ésima observação.

Substituindo a matriz de informação observada $-\ddot{L}_{\theta\theta}(\hat{\theta})$ por $K(\hat{\theta})$, temos que

$$\hat{\beta}_{(i)} = \hat{\beta} - \frac{\hat{r}_{(i)}^\beta}{(1 - \hat{h}_{ii})} (\mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_i \hat{\mathbf{w}}_{\beta\beta i}^{1/2} \quad (5.15)$$

e

$$\hat{\delta}_{(i)} = \hat{\delta} - \frac{\hat{r}_{(i)}^\delta}{(1 - \hat{n}_{ii})} (\mathbf{S}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{s}_i \hat{\mathbf{w}}_{\delta\delta i}^{1/2}, \quad (5.16)$$

em que $\hat{h}_{ii}$ representa o i -ésimo elemento da diagonal principal da matriz de projeção $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{1/2} (\mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{1/2}$ e $\hat{n}_{ii}$ corresponde ao i -ésimo elemento da diagonal principal da matriz de projeção $\mathbf{N} = \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta}^{1/2} (\mathbf{S}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta}^{1/2}$. Lembrando que podemos reescrever as equações (3.5) e (3.6) da seguinte forma

$$\beta^{(m+1)} = \left(\tilde{\mathbf{X}}^{(m)\top} \mathbf{W}_{\beta\beta}^{(m)} \tilde{\mathbf{X}}^{(m)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{(m)\top} \mathbf{W}_{\beta\beta}^{(m)} [\mathbf{X} \beta^{(m)} + \zeta_1^{(m)}]$$

e

$$\delta^{(m+1)} = \left(\tilde{\mathbf{S}}^{(m)\top} \mathbf{W}_{\delta\delta}^{(m)} \tilde{\mathbf{S}}^{(m)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^{(m)\top} \mathbf{W}_{\delta\delta}^{(m)} [\mathbf{S} \delta^{(m)} + \zeta_2^{(m)}].$$

A partir da convergência do processo iterativo temos que

$$\hat{\beta} = \left(\tilde{\mathbf{X}}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta} \tilde{\mathbf{X}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta} \hat{\xi}_1$$

e

$$\hat{\delta} = \left(\tilde{\mathbf{S}}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta} \tilde{\mathbf{S}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta} \hat{\xi}_2$$

em que $\xi_1 = [\mathbf{X}\hat{\beta} + \hat{\zeta}_1]$ e $\xi_2 = [\mathbf{S}\hat{\delta} + \hat{\zeta}_2]$. Assim definimos $\hat{r}_i^\beta$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{r}_i^\beta &= \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{1/2} [\hat{\xi}_1 - \mathbf{X}\hat{\beta}] \\ &= \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{1/2} \hat{\zeta}_1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \hat{r}_i^\delta &= \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta}^{1/2} [\hat{\xi}_2 - \mathbf{S}\hat{\delta}] \\ &= \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta}^{1/2} \hat{\zeta}_2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

em que $m = 0, 1, \dots, n$, sendo $\hat{\zeta}_1 = -\frac{1}{\varphi_{(0,1,0,0,0)}} \hat{\mathbf{M}}_1^{-1} \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{y} - \hat{\mu})$ e $\hat{\zeta}_2 = \frac{2}{(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1)} \hat{\mathbf{H}}_1^{-1} \hat{\Delta}^{-1} (\iota - \hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{u}})$. Note que

$$\hat{\mathbf{M}}_1^{-1} = \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{-1/2} \hat{\Lambda}^{1/2}$$

e

$$\hat{\mathbf{H}}_1^{-1} = \hat{\mathbf{W}}_{\delta\delta}^{-1/2} \hat{\Delta}.$$

Substituindo $\hat{\mathbf{M}}_1^{-1}$ e $\hat{\mathbf{H}}_1^{-1}$ em (5.17) e (5.18), respectivamente, temos que

$$\hat{r}_i^\beta = -\frac{1}{\varphi_{(0,1,0,0,0)}} \hat{\Lambda}^{1/2} \hat{v}_i (y_i - \hat{\mu}_i) \quad (5.19)$$

e

$$\hat{r}_i^\delta = \frac{2}{(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1)} (\iota - \hat{v}_i \hat{u}_i). \quad (5.20)$$

Dados os resíduos e substituindo as equações (5.15) e (5.16) respectivamente em (5.13) e (5.14), temos que

$$LD_{(i)}^\beta \cong \frac{\hat{h}_{ii}}{(1 - \hat{h}_{ii})} t_{S_{\beta i}}^2$$

e

$$LD_{(i)}^{\delta} \cong \frac{\hat{n}_{ii}}{(1 - \hat{n}_{ii})} t_{S_{\delta i}}^2,$$

em que $t_{S_{\beta i}}^2 = (\hat{r}_i^{\beta})^2 / (1 - \hat{h}_{ii})$ e $t_{S_{\delta i}}^2 = (\hat{r}_i^{\delta})^2 / (1 - \hat{n}_{ii})$. No entanto, nem sempre esses resíduos atendem as propriedades desejadas (média zero e variância 1) (CYSNEIROS; PAULA; GALEA, 2005). Os autores propuseram um resíduo padronizado na classe dos modelos MNLSH que atendem as propriedades desejadas. Este resíduo é definido como segue:

$$\begin{aligned} t_{S_{\beta i}} &= \frac{r_i^{\beta}}{(\xi \phi_i)^{\frac{1}{2}} \{1 - (4d_g \xi)^{-1} \hat{h}_{ii}\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{(\xi \phi_i)^{\frac{1}{2}} \{1 - (4d_g \xi)^{-1} \hat{h}_{ii}\}^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

em que d_g e ξ estão definidos em Cysneiros, Paula e Galea (2005). Aproximando os resíduos obtidos em (5.19) e (5.20) ao obtido em Cysneiros, Paula e Galea (2005), temos que

$$LD_{(i)}^{\beta} \cong \frac{\hat{h}_{ii}}{(1 - \hat{h}_{ii})} \tilde{t}_{S_{\beta i}}^2 \quad (5.21)$$

e

$$LD_{(i)}^{\delta} \cong \frac{\hat{n}_{ii}}{(1 - \hat{n}_{ii})} \tilde{t}_{S_{\delta i}}^2, \quad (5.22)$$

em que $\tilde{t}_{S_{\delta i}} = t_{S_{\delta i}}$ e $t_{S_{\delta i}} = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{(\xi \phi_i)^{\frac{1}{2}} \{1 - (4d_g \xi)^{-1} \hat{n}_{ii}\}^{\frac{1}{2}}}$.

5.2.3 Influência Local

Um método de diagnóstico para verificar o efeito de pequenas perturbações no modelo ou dados que podem causar uma influência desproporcional nas estimativas dos parâmetros é conhecido como método de influência local. Esta metodologia foi desenvolvida por Cook (1986) para avaliar o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhanças sob pequenas perturbações nos dados/ modelos. Essas perturbações ou modificações podem ocorrer em varias partes do modelo cujas principais são: perturbação de casos ponderados, perturbação aditiva na resposta, perturbação aditiva no preditor.

Seja $\ell(\theta)$ o logaritmo da função verossimilhança dada em (3.2) em que θ é o vetor coluna de dimensão $(p + q) \times 1$ parâmetros desconhecidos a serem estimados pelo modelo. Assim introduzimos o vetor de perturbação denotado por $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^{\top}$ restrito em algum subconjunto Ω de $\mathbb{R}$ e denotamos por $\ell(\theta_{\omega})$, o logaritmo da função verossimilhança perturbada,

a qual será avaliado os efeitos das perturbações nas estimativas fornecidas pelo modelo. O afastamento de verossimilhanças $LD(\omega)$ proposto por Cook (1986), conhecido também como desvio local mede a diferença das verossimilhanças avaliadas em seus estimadores $(\hat{\theta}, \hat{\theta}_\omega)$. Esta medida é definida como segue

$$LD(\omega) = 2\{\ell(\hat{\theta}) - \ell(\hat{\theta}_\omega)\}.$$

As estimações serão altamente sensíveis à perturbação quando $LD(\omega)$ for muito grande. A ideia de Cook (1986) é estudar o comportamento do gráfico $LD(\omega)$ versus ω (denotado por $\alpha(\omega)$) em torno de ω_0 , vetor de não perturbação tal que $\ell(\hat{\theta}) = \ell(\hat{\theta}_\omega)$. Podemos fazer esta análise estudando-se as curvaturas das seções normais à superfície $\alpha(\omega)$ em ω_0 tal sugerido por Cook (1986). Para construirmos uma seção normal consideremos uma linha aumentada em ω em torno de ω_0 e representada pela seguinte equação linear dada por

$$\omega(a) = \omega_0 + at,$$

em que $a \in \mathbb{R}$ e t , um vetor unitário. Cook (1986) mostrou que esta curvatura normal pode ser expressa de forma geral como segue

$$C_t(\theta) = 2|t^\top \Delta^\top \ddot{L}_{\theta\theta}^{-1} \Delta t|,$$

em que $\ddot{L}_{\theta\theta}^{-1} = \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top}$, Δ é a matriz $(p+q) \times n$ com elementos dados por $\Delta_{ij} = \frac{\partial^2 \ell(\theta|\omega)}{\partial \theta_i \partial \omega_j^\top}$, sendo $i = 1, \dots, p+q$ e $j = 1, \dots, n$ avaliados em $\theta = \hat{\theta}$ e $\omega = \omega_0$. (COOK, 1986) sugeriu utilizar t_{max} , o autovetor correspondente ao maior autovalor $C_{t_{max}}$ da matriz $\ddot{G} = \Delta^\top (-\ddot{L}_{\theta\theta})^{-1} \Delta$. O gráfico do vetor $|t_{max}|$ contra a ordem das observações pode revelar quais pontos que, sob pequenas perturbações, exercem um efeito desproporcional em $LD(\omega)$ em torno de ω_0 . Escobar e Jr (1992) sugerem tomar como medida de influência os elementos da diagonal principal da matriz $\ddot{G}$. Por outro lado, Lesaffre e Verbeke (1998) sugerem que a curvatura normal seja avaliada na direção da i -ésima observação, que consiste em avaliar $C_t(\theta)$ no vetor t_i de dimensão $n \times 1$, composta de um na i -ésima posição e zeros nas demais. Denotamos por C_i esta curvatura tal que $C_i = 2|g_{ii}|$, em que g_{ii} representa os elementos da diagonal principal da matriz $\ddot{G}$. Um gráfico de C_i versus índice é sugerido em que observações com $C_i > 2\bar{C}$, $\bar{C} = \sum_{j=1}^n C_j/n$, merecem atenção particular.

Apresentaremos a seguir os três esquemas mais conhecidos de perturbação em MNLSH considerando o logaritmo da função verossimilhança definida em (3.2). Importante ressaltar

que para cada esquema de perturbação, estaremos interessado em derivar a matriz Δ definida como segue

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_\omega)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right)$$

no qual apresentamos sua forma mais geral como segue

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_\beta \\ \Delta_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_\omega) / \partial \beta \partial \boldsymbol{\omega}^\top \\ \partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_\omega) / \partial \delta \partial \boldsymbol{\omega}^\top \end{pmatrix}$$

em que os elementos $\Delta_{ij} = \partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\omega}) / \partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\omega}_j^\top$, sendo $i = 1, \dots, p + q$ e $j = 1, \dots, n$ avaliados em $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$.

5.2.3.1 Perturbação Aditiva na Resposta nos MNLSH

Considere uma perturbação aditiva na i -ésima resposta, ou seja,

$$y_{iw} = y_i + w_i,$$

em que w_i pode ser interpretado como a estimativa do desvio padrão de y_i . Temos portanto nos MNLSH perturbados

$$f_{y_i}(y_i | w_i) = \frac{1}{\sqrt{\phi_i}} g(u_{w_i}) = \frac{1}{\sqrt{\phi_i}} g\{(y_i + w_i - \mu_i)^2 / \phi_i\}$$

em que $u_{iw} = (y_i + w_i - \mu_i)^2 / \phi_i = \epsilon^2 / \phi_i$, $i = 1, \dots, n$. Então o logaritmo da função verossimilhança pode ser expressa da seguinte forma

$$\ell(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\phi_i) + \sum_{i=1}^n \log(g(u_{iw})).$$

Logo, os elementos da matriz Δ podem ser expresso como segue

$$\begin{aligned} \Delta_\beta &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\omega})}{\partial \beta \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ m_{1i} v_i \wedge_i (r)_i + 2m_{1i} v_i' \wedge_i^2 (y_i - \mu_i)^2 (r)_i \right\}, \end{aligned}$$

em que $m_{1i} = \partial \mu_i / \partial \eta_i$ e $(r)_i = \partial \eta_i / \partial \beta_r$, $\wedge_i = \text{diag}\{1/\phi_{1i} \cdots 1/\phi_{1n}\}$ e $v_i = -2t_{(z_i)}^{(1)}$, $i = 1 \cdots n$.

Analogamente, temos que

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\omega})}{\partial \delta \partial \boldsymbol{\omega}^\top} = \sum_{l=1}^n \left\{ h_{1i} v_i \wedge_i^2 (y_i - \mu_i)(R)_i + h_{1i} v_i' \wedge_i^2 (y_i - \mu_i) u_i(R)_i \right\},$$

em que $h_{1i} = \partial\phi_i/\partial\tau_i$ e $(R)_i = \partial\tau/\partial\delta_R$, $\Lambda_i = \text{diag}\{1/\phi_{1i} \cdots 1/\phi_{1n}\}$, $v_i = -2t_{(z_i)}^{(1)}$ e $v'_i = -2t_{(z_i)}^{(2)}$ sendo $i = 1 \cdots n$. Logo, temos que

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\top \mathbf{M}_1 \Lambda [\mathbf{V} + 2\mathbf{V}'\mathbf{u}] \\ \mathbf{S}^\top \Phi_1 \Lambda^2 (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) [\mathbf{V} + \mathbf{V}'\mathbf{u}] \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

respectivamente, em que $(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) = (y_1 - \mu_1, \dots, y_n - \mu_n)^\top$, $\mathbf{V} = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)^\top$ sendo $v_i = \frac{-2g'(z^2)}{g(z^2)}$, $g'(z^2) = \frac{\partial g(z^2)}{\partial z^2}$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{u}$ um vetor $n \times 1$ de uns.

5.2.3.2 Perturbação Aditiva nos Preditores nos MNLSH

Aqui estamos interessado em avaliar a perturbação aditiva na i -ésima observação dos preditores p e q no submodelo da média e da dispersão, respectivamente. Isto, é $x_{ipw} = x_{ip} + w_i$ e $s_{iqw} = s_{iq} + w_i$, $i = 1, \dots, n$. Tais tipos de perturbações conduzem ao seguinte modelo não linear simétrico heteroscedástico perturbado:

$$f_{y_i}(y_i|w_i) = \frac{1}{\sqrt{\phi_{iw}}} g(u_{iw}) = \frac{1}{\sqrt{\phi_{iw}}} g\{(y_i - \mu_{iw})^2 / \phi_{iw}\}$$

em que $u_{iw} = (y_i - \mu_{iw})^2 / \phi_i = \epsilon_i^2 / \phi_i$, $i = 1, \dots, n$

Neste caso, o logaritmo da função verossimilhança é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\phi_{iw}) + \sum_{i=1}^n \log\{g(u_{iw})\}.$$

Considerando os dois componentes sistemáticos dos MNLSH é possível perturbar conjuntamente nos preditores do modelo, ou separadamente, ou seja, perturbar somente a coluna $\mathbf{X}$ no submodelo da média e depois perturbar também a coluna $\mathbf{S}$ do submodelo da dispersão. Importante ressaltar que em cada caso, pode ocorrer que a coluna $\mathbf{X}$ pode ser igual ou diferente a do $\mathbf{S}$. Assim definimos em cada um dos casos a estrutura da matriz Δ .

▪ Caso 1: Perturbação conjunta com $\mathbf{X} \neq \mathbf{S}$

Neste caso o logaritmo da função verossimilhança é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\phi_{iw}) + \sum_{i=1}^n \log\{g(u_{iw})\}.$$

A matriz Δ_β pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{w}^\top} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ [m_{2iw} v_i \wedge_{iw} (y_i - \mu_{iw}) f_{1iw} - 2v'_{iw} m_{1iw}^2 f_{1iw} \wedge_{iw} u_{iw} \right. \\ &\quad - v'_{iw} h_{1iw} g_{1iw} m_{1iw} \wedge_{iw}^2 u_{iw} (y_i - \mu_{iw}) - m_{1iw} h_{1iw} g_{1iw} v_{iw} \wedge_{iw}^2 (y_i - \mu_{iw}) \\ &\quad \left. - m_{1iw}^2 v_{iw} f_{1iw} \wedge_{iw} (r)_{iw} + m_{1iw} v_{iw} \wedge_{iw} (y_i - \mu_{iw}) f_{2iw} \right\},\end{aligned}$$

Em forma matricial, temos

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= \boldsymbol{X}_w^\top \boldsymbol{M}_{2w} \boldsymbol{V}_w \boldsymbol{\Lambda}_w (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_w) F_1 - 2 \boldsymbol{X}_w^\top \boldsymbol{V}_w' \boldsymbol{M}_{1w}^2 \boldsymbol{\Lambda}_w \boldsymbol{u}_w F_1 \\ &\quad - \boldsymbol{X}_w^\top \boldsymbol{V}_w' \boldsymbol{\Phi}_{1w} \boldsymbol{M}_{1w} \boldsymbol{\Lambda}_w^2 \boldsymbol{u}_w (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_w) G_1 - \boldsymbol{X}_w^\top \boldsymbol{M}_{1w} \boldsymbol{\Phi}_{1w} \boldsymbol{V}_w \boldsymbol{\Lambda}_w^2 (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_w) G_1 \\ &\quad - \boldsymbol{X}_w^\top \boldsymbol{M}_{1w}^2 \boldsymbol{V}_w \boldsymbol{\Lambda}_w F_1 + \boldsymbol{M}_{1w} \boldsymbol{V}_w \boldsymbol{\Lambda}_w (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_w) F_2,\end{aligned}$$

em que $F_1 = \frac{\partial \eta_{iw}}{\partial w_i} = \frac{\partial \eta_{iw}}{\partial X_w} \frac{\partial X_w}{\partial w_i}$, $F_2 = \frac{\partial^2 \eta_{iw}}{\partial \beta_i \partial w_i}$ e $G_1 = \frac{\partial \tau_{iw}}{\partial w_i} = \frac{\partial \tau_{iw}}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial w_i}$, $G_2 = \frac{\partial^2 \tau_{iw}}{\partial \delta_i \partial w_i}$.

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}\Delta_\delta &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\delta} \partial \boldsymbol{w}^\top} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ (v_{iw} u_{iw} - 1) [h_{2iw} g_{1iw} (R)_i - h_{1iw}^2 \wedge_{iw} g_{1iw} (R)_i + h_{1iw} g_{2iw}] \right. \\ &\quad \left. + h_{1iw} \wedge_{iw} (R)_i [-2m_{1iw} \wedge_{iw} f_{1iw} (y - \mu_w) - h_{1iw} \wedge_{iw} u_{iw}] (v'_{iw} u_{iw} + v) \right\}.\end{aligned}$$

Em forma matricial, temos

$$\begin{aligned}\Delta_\delta &= \frac{1}{2} \left\{ (\boldsymbol{V}_w \boldsymbol{u}_w - \boldsymbol{\iota}) [\boldsymbol{S}_w^\top \boldsymbol{\Phi}_{2w} G_1 - \boldsymbol{S}_w^\top \boldsymbol{\Phi}_{1w}^2 \boldsymbol{\Lambda} G_1 + \boldsymbol{\Phi}_{1w} G_2] \right. \\ &\quad \left. - \boldsymbol{S}_w^\top \boldsymbol{\Phi}_{1w} \boldsymbol{\Lambda}_w [2\boldsymbol{M}_{1w} \boldsymbol{\Lambda}_w (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_w) F_1 + \boldsymbol{\Phi}_{1w} \boldsymbol{\Lambda}_w \boldsymbol{u}_w] (\boldsymbol{V}_w' \boldsymbol{u}_w + \boldsymbol{V}) \right\},\end{aligned}$$

em que $\Phi_2 = \text{diag}(h_{21}, \dots, h_{2l})$ com elementos dados por $h_{2l} = \partial h_{1l} / \partial \tau_l$.

▪ Perturbação somente na média

Neste caso o logaritmo da função verossimilhança é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\phi_i) + \sum_{i=1}^n \log\{g(u_{iw})\}.$$

A matriz Δ_β pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{w}^\top} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ [m_{2iw} v_i \wedge_i f_{1iw} + v'_{iw} (-2m_{1iw}^2 f_{1iw} \wedge_i (y_i - \mu_{iw})) (y_i - \mu_{iw}) (r)_{iw} \right. \\ &\quad \left. + [-m_{1iw} f_{1iw} (r)_{iw} + f_{2iw} (y_i - \mu_{iw})] (\wedge_i m_{1iw} v_{iw}) \right\},\end{aligned}$$

Em forma matricial, temos

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= \mathbf{X}_w^\top \mathbf{M}_{2w} \mathbf{V}_w \Lambda (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_w) F_1 - 2 \mathbf{X}_w^\top \mathbf{M}_{1w}^2 \mathbf{V}_w' \mathbf{u}_w - \mathbf{X}_w^\top \mathbf{M}_{1w}^2 \mathbf{V}_w \Lambda F_1 \\ &\quad + \mathbf{M}_{1w} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_w) F_2.\end{aligned}$$

▪ Perturbação somente na dispersão

Neste caso o logaritmo da função verossimilhança é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log(\phi_{iw}) + \sum_{i=1}^n \log\{g(u_{iw})\}.$$

A matriz Δ_δ pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta_\delta &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\delta} \partial \mathbf{w}^\top} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ [h_{2iw} v_i \wedge_i g_{1iw}(R)_{iw} + h_{1iw}^2 g_{1iw} \wedge_{iw}^2 (R)_{iw} + (v_{iw} u_{iw} - 1) \right. \\ &\quad \left. - [v'_{iw} u_{iw} + v_{iw}] (\wedge_{iw} h_{1iw}^2 u_{iw}(R)_{iw}) \right\}.\end{aligned}$$

Em forma matricial, temos que

$$\begin{aligned}\Delta_\delta &= \frac{1}{2} [\mathbf{V}_w \mathbf{u}_w - \boldsymbol{\iota}] (\mathbf{S}_w^\top \boldsymbol{\Phi}_{2w} \Lambda_w G_1 - \mathbf{S}_w^\top \boldsymbol{\Phi}_{1w}^2 \Lambda_w^2 G_1 + \boldsymbol{\Phi}_{1w} \Lambda_w G_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{S}_w^\top \boldsymbol{\Phi}_{1w}^2 \Lambda_w^2 \mathbf{u}_w [\mathbf{V}_w' \mathbf{u}_w + \mathbf{V}_w].\end{aligned}$$

5.2.3.3 Perturbação de Casos Ponderados nos MNLSH

Nosso interesse aqui reside em avaliar como a contribuição das observações com ponderações afetam o estimador de máxima verossimilhanças. O logaritmo da função de verossimilhança do modelo não linear simétrico heteroscedástico perturbado é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \log(\phi_i) + \sum_{i=1}^n w_i \log\{g(u_i)\},$$

em que $0 \leq w_i \leq 1$.

Assim temos que

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \mathbf{w}^\top} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ m_{1i} v_i \wedge_i (y_i - \mu_i)(r)_i \right\},\end{aligned}$$

em que $m_{1i} = \partial\mu_i/\partial\eta_i$ e $(r)_i = \partial\eta/\partial\beta_r$, $\Lambda_i = \text{diag}\{1/\phi_{1i} \cdots 1/\phi_{1n}\}$ e $v_i = -2t_{(z_i)}^{(1)}$, $i = 1 \cdots n$.

Podemos escrever a forma matricial de Δ_β da seguinte forma

$$\Delta_\beta = \tilde{X}^\top M_1 V \Lambda (y - \mu).$$

Analogamente, para o submodelo da dispersão, temos que

$$\begin{aligned} \Delta_\delta &= \frac{\partial^2 \ell(\theta|\omega)}{\partial \delta \partial \omega^\top} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ h_{1i} \wedge_i (v_i u_i - 1) (R)_i \right\}. \end{aligned}$$

Em notação matricial temos que

$$\Delta_\delta = \frac{1}{2} \tilde{S}^\top \Phi_1 \Lambda (V u - \iota).$$

em que ι é a matriz de uns.

De forma geral, dada a matriz Δ em cada esquema de perturbação apresentado, é possível calcular a curvatura e detectar os pontos influentes no modelo proposto em relação a cada esquema de perturbação através da representação gráfica de C_t versus seu índice.

5.3 APLICAÇÃO 1

Para ilustrar as técnicas de diagnóstico desenvolvidas neste capítulo, foram considerados dados experimentais de um teste de aprendizagem e memória espaciais aplicado em ratos portadores de lesão cerebral isquêmica, ou seja, pela falta de sangue no cérebro. Neste conjunto de dados de 255 observação, Cordeiro, Previdelli e Samohyl (2008) analisaram esse conjunto de dados considerando o modelo de regressão não linear generalizado super-dispersado em que a variável resposta (y) segue uma distribuição Poisson dupla. A função de ligação escolhida para o parâmetro de locação é a função identidade definida como segue:

$$\eta_i = \beta_0 x_{0i} + x_{1i} \exp(\beta_1 x_{2i}) + x_{0i} \exp(\beta_2 x_{2i}), \quad i = 1, \dots, 255$$

e uma ligação exponencial para o parâmetro de dispersão, que é estimado pela componente sistemática dada por

$$\phi_i = \exp(\delta_0 + \delta_1 x_{2i}), \quad i = 1, \dots, 255,$$

sendo

$$x_{0i} = \begin{cases} 1 & \text{se o i-rato for não lesionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$x_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{se o i-rato for lesionado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e x_2 que corresponde ao tempo representado em cinco blocos de três dias cada, conforme as Tabelas 48 e 49, e a variável resposta y representa a média dos erros cometidos pelos ratos. Assumimos dois modelos com erros simétricos (t-Student t_4 e Exponencial Potência com $\kappa = 0.3$) para ajustá-los a esse conjunto de dados. As EMV (com os respectivos erros padrão em parênteses) foram de $\hat{\beta}_0 = -0.0170(0.0499)$, $\hat{\beta}_1 = -0.7461(0.0023)$, $\hat{\beta}_2 = -0.3338(0.0172)$, $\hat{\delta}_0 = 0.7980(0.0064)$, $\hat{\delta}_1 = -1.0150(0.0065)$ e de $\hat{\beta}_0 = -0.10025(0.0118)$, $\hat{\beta}_1 = -0.7565(0.0020)$, $\hat{\beta}_2 = -0.3365(0.0114)$, $\hat{\delta}_0 = 0.9091(0.0007)$, $\hat{\delta}_1 = -1.1797(0.0012)$ para o modelo exponencial potência e modelo t_4 , respectivamente. Percebe-se que o estimador $\hat{\beta}_0$ do modelo exponencial potência não foi significativo por ter um desvio padrão muito alto (três vezes maior que o valor estimado). Por outro lado, $\hat{\beta}_1$ corresponde ao deficit de aprendizagem para os ratos não lesionados e $\hat{\beta}_2$ para o ratos lesionados nos dois modelos. Apresentamos a seguir as Figuras 5 a 20 para o modelo Exponencial potência e o modelo t_4 referentes às técnicas de diagnósticos nos MNLSH. Analisando as Figuras 5 e 6 de alavancagem generalizada contra valores ajustados referente ao submodelo da média dos modelos Exponencial potência e modelo t_4 , respectivamente. Identificamos para o modelo exponencial potência 1 ponto (observação 169) e dois pontos (observação 103 e 116) para o modelo t_4 , respectivamente. Para as Figuras 7 e 8 que ilustram a influência global contra os valores ajustados e referente ao submodelo da média para os modelos Exponencial potência e modelo t_4 , respectivamente, destacamos 5 pontos (observação 5, 24, 64, 106 e 132) e três pontos (observação 64, 106 e 117) para o modelo exponencial potência e t_4 , respectivamente. Seguindo a mesma análise para a média, há 1 ponto em destaque na Figura 9 (observação 101) para o modelo exponencial Potência e nenhum ponto foi identificado na Figura 10. Já a partir das Figuras 11 e 12 dos resíduos $t_{S\beta_i}$ para média percebe-se que vários pontos estão fora do intervalo $[-2, 2]$. Dentre esses pontos se destacam as observações 64 e 106 para ambos os modelos em estudo.

Considerando as Figuras 13 e 14 de alavancagem generalizada contra valores ajustados referente ao submodelo da dispersão, para os respectivos modelos em estudo tem-se que nenhum ponto foi destacado para ambos os modelos. No entanto, nas Figura 15 e 16 anotamos

7 pontos em destaques (observação 39, 44, 64, 69, 166, 170, 171) e 6 pontos (observação 39, 44, 166, 169, 170, 171) para o modelo Exponencial Potência e t_4 , respectivamente. Mas nas Figuras 17 e 18 nenhum ponto foi detectado para ambos os modelos considerados. Percebe-se nas Figuras 19 e 20 que vários pontos do resíduo $t_{S_{\delta_i}}$ para a dispersão não pertencem ao intervalo $[-2.2]$ com 1 ponto em destaque, a observação 39 para ambos os modelos considerados.

Diante dessas análises de alavancagem generalizada e de influência global para os dois modelos em estudo, observamos que a parte afetada do cérebro dos ratos tem alguma influência na memória e aprendizagem dos mesmos. Afim de verificar se estas observações são valores aberrantes realizamos uma análise de sensibilidade destas observações. Esta análise consiste em remover uma determinada observação, reajustar o modelo e, em seguida, calcular as taxas de variação das estimativas dos parâmetros do modelo. Estas taxas são dadas pela seguinte expressão:

$$\text{taxa}(\theta) = \left| \frac{\hat{\theta}^{*(i)} - \hat{\theta}}{\hat{\theta}} \right| \times 100,$$

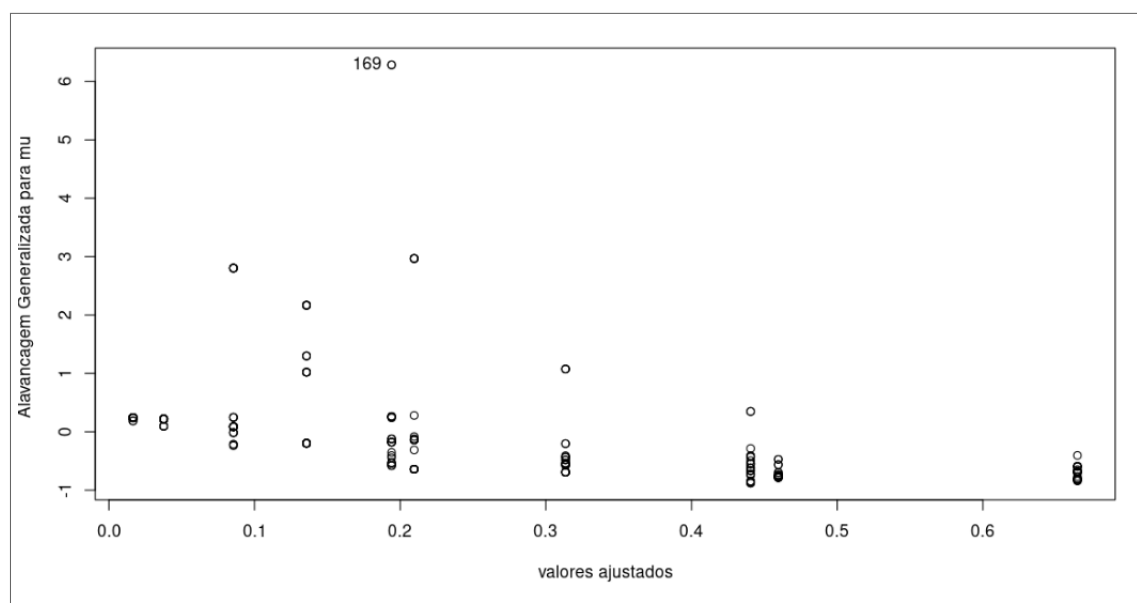
em que $\hat{\theta}$ e $\hat{\theta}^{*(i)}$ são os EMV no modelo completo e no modelo sem a i -ésima observação, respectivamente. Os resultados dessa análise estão apresentados na Tabela 45. A presente análise é feita considerando o modelo t_4 já que ele foi escolhido como modelo que se ajustou melhor ao conjunto de dados em estudo. Percebe-se que ao retirarmos todas as observações destacados pelas Figuras de diagnóstico, uma de cada vez, houve um impacto nas estimativas dos parâmetros da regressão. Por exemplo, a retirada das observações 117 e 166 causou mudanças significativas nas estimativas do modelo proposto como podemos observar no gráfico de influência global na Figura 8.

Tabela 45 – Análise de sensibilidade ao remover as observações influentes no Modelo t_4

Observações	5	39	44	64	117	166	171
β_0	1,74	0,23	0,23	1,14	14,54	0,29	0,34
β_1	0,18	0,04	0,04	0,42	1,62	0,04	0,61
β_2	0,32	0,44	0,44	0,54	1,42	0,01	0,15
δ_0	3,99	5,48	5,48	1,91	12,53	6,68	5,77
δ_1	0,85	0,75	0,75	0,59	4,70	1,59	0,81

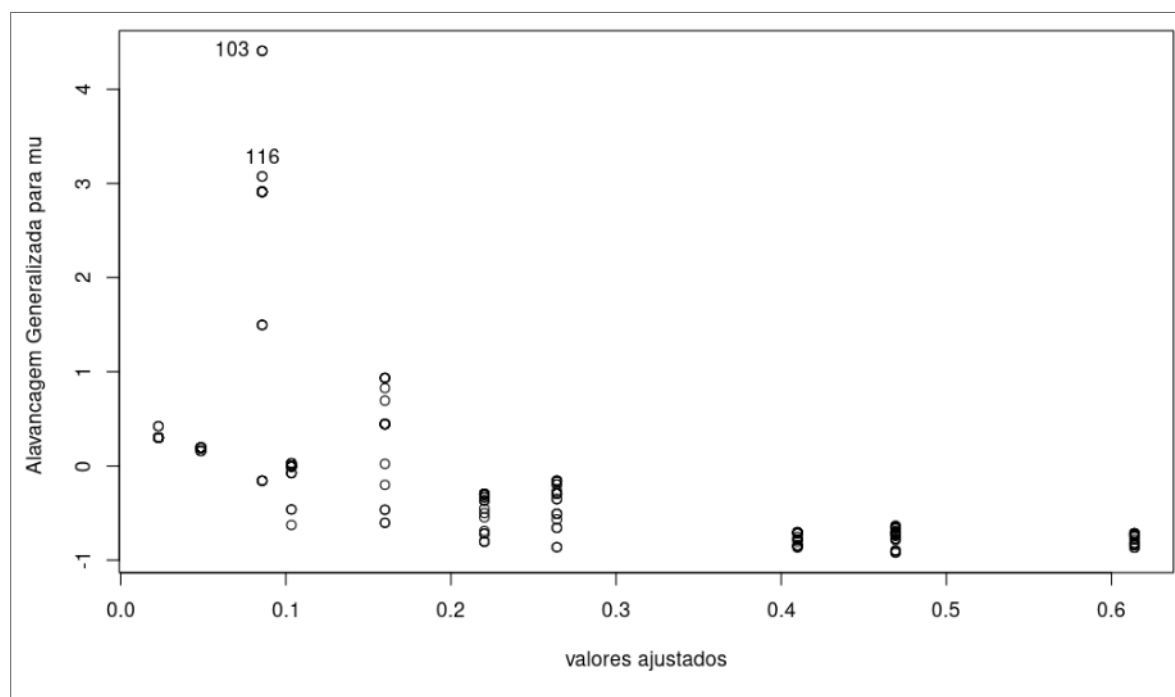
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 5 – Gráfico de alavancagem generalizada referente ao submodelo da média da Exponencial Potência



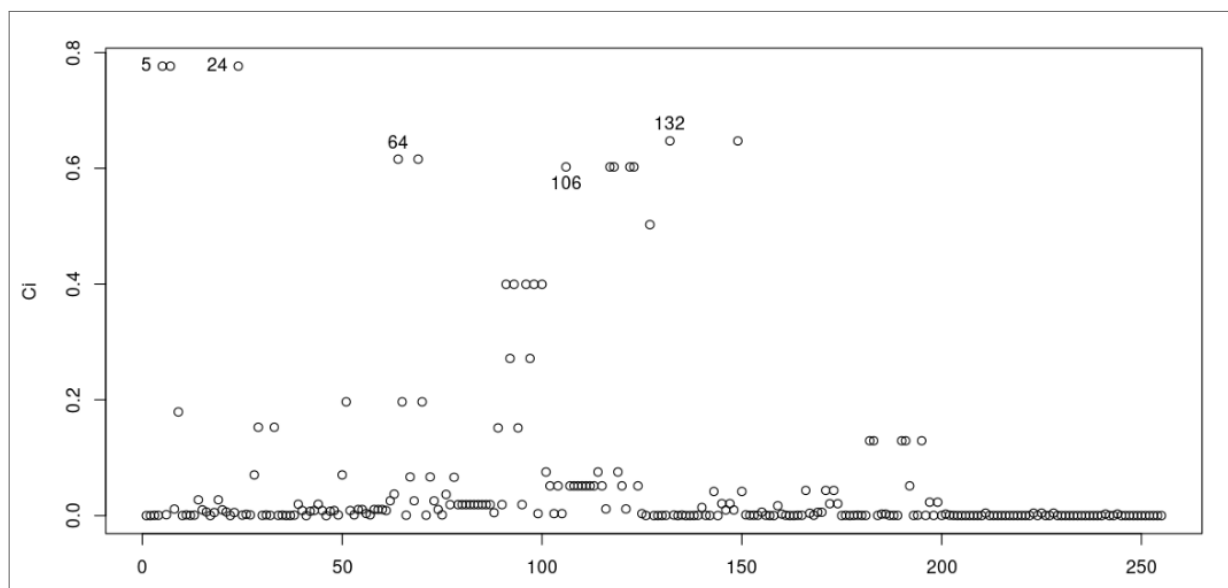
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 6 – Gráfico de alavancagem generalizada referente ao submodelo da média t-Student



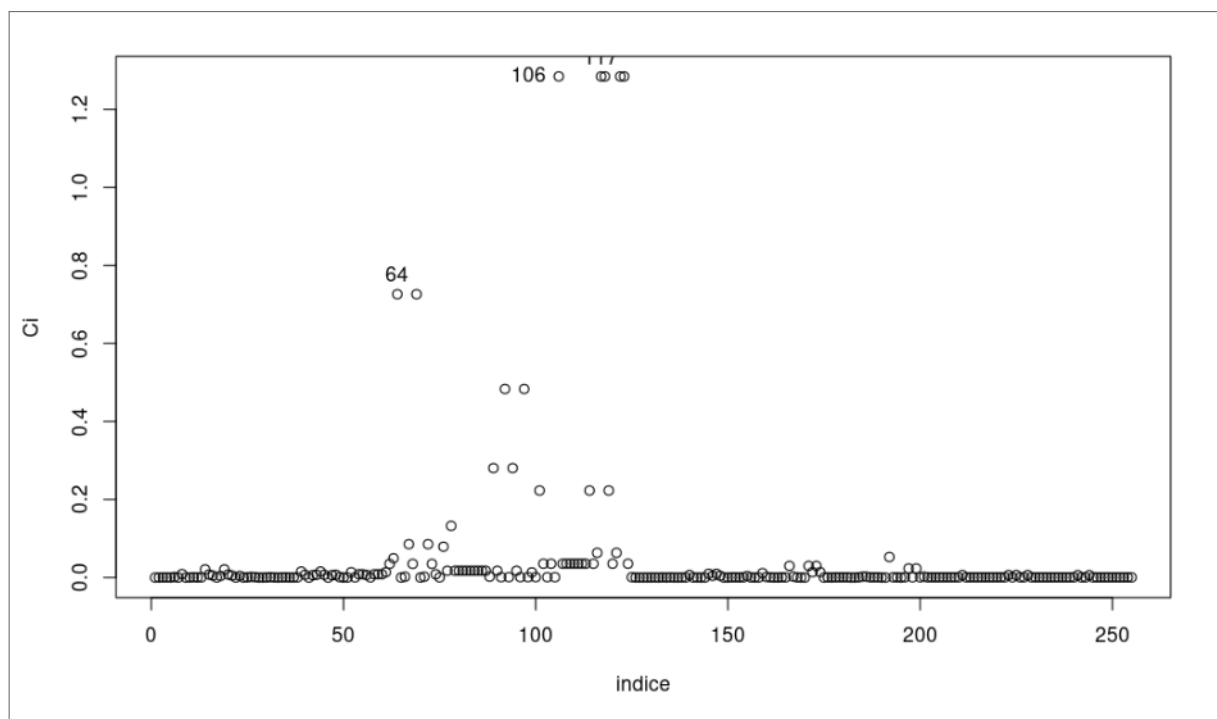
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 7 – Gráfico de influência global referente ao submodelo da média da Exponencial Potência



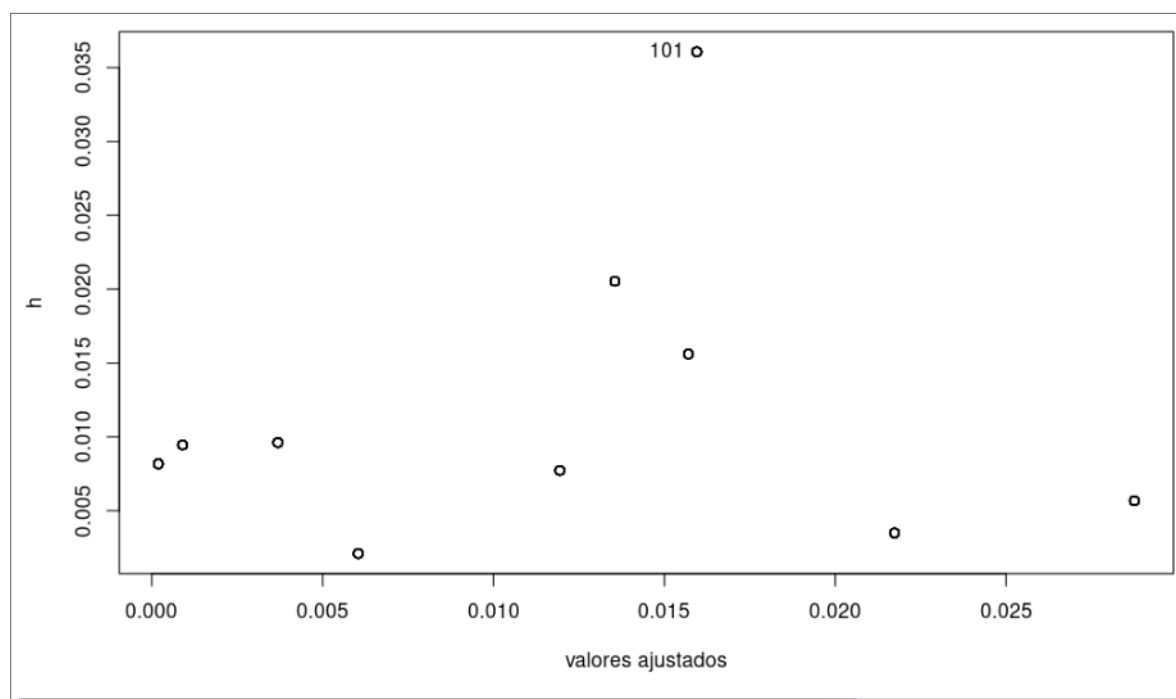
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 8 – Gráfico de influência global referente ao submodelo da média da t-Student



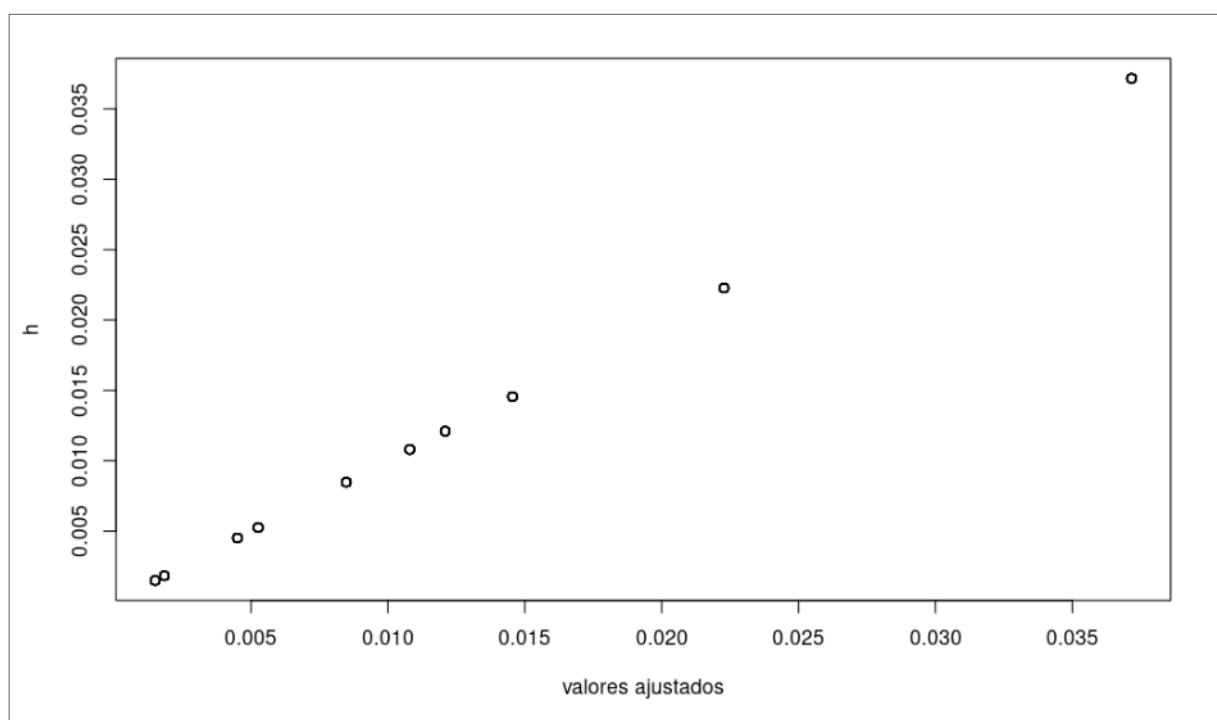
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 9 – Gráfico Gráfico de $\hat{h}_{ii}$ por valor ajustado referente ao submodelo da média da Exponencial Potência



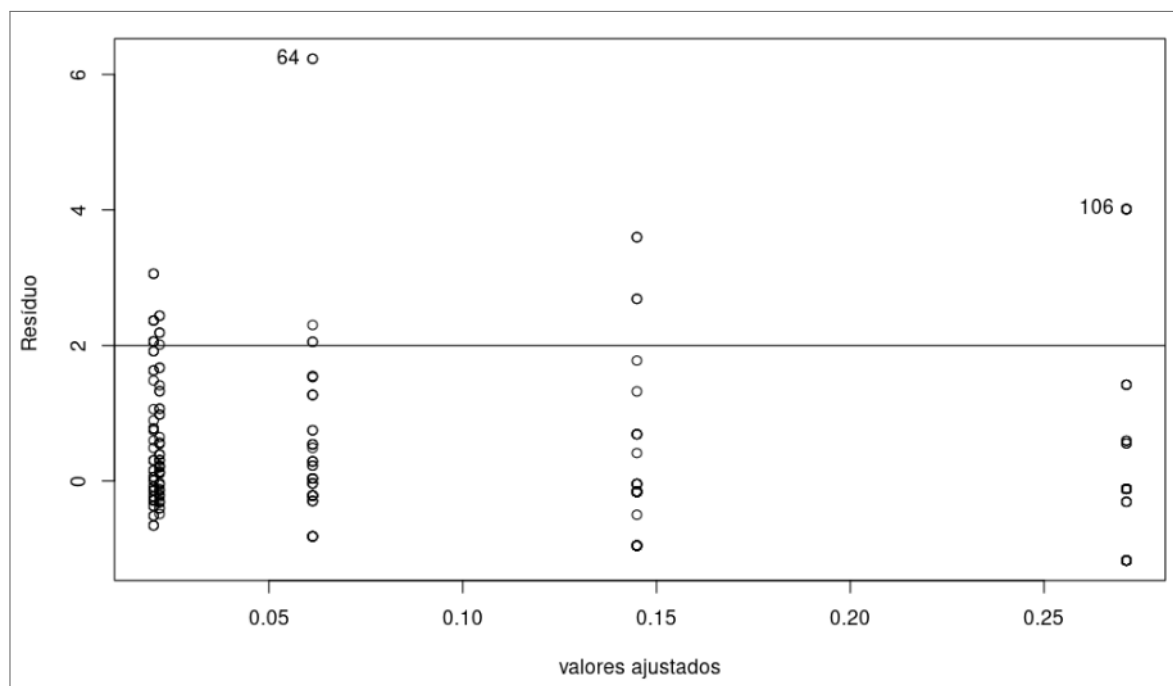
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 10 – Gráfico Gráfico de $\hat{h}_{ii}$ por valor ajustado referente ao submodelo da média t-Student



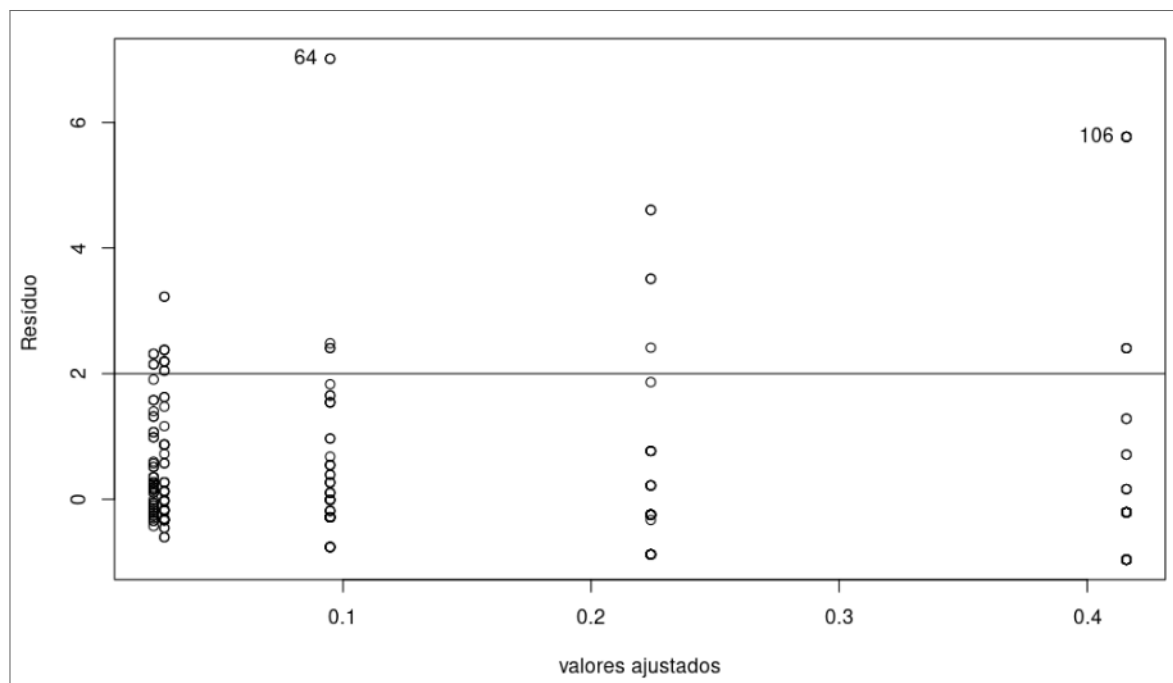
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 11 – Gráfico de resíduo por valor ajustado referente ao submodelo da média da Exponencial Potência



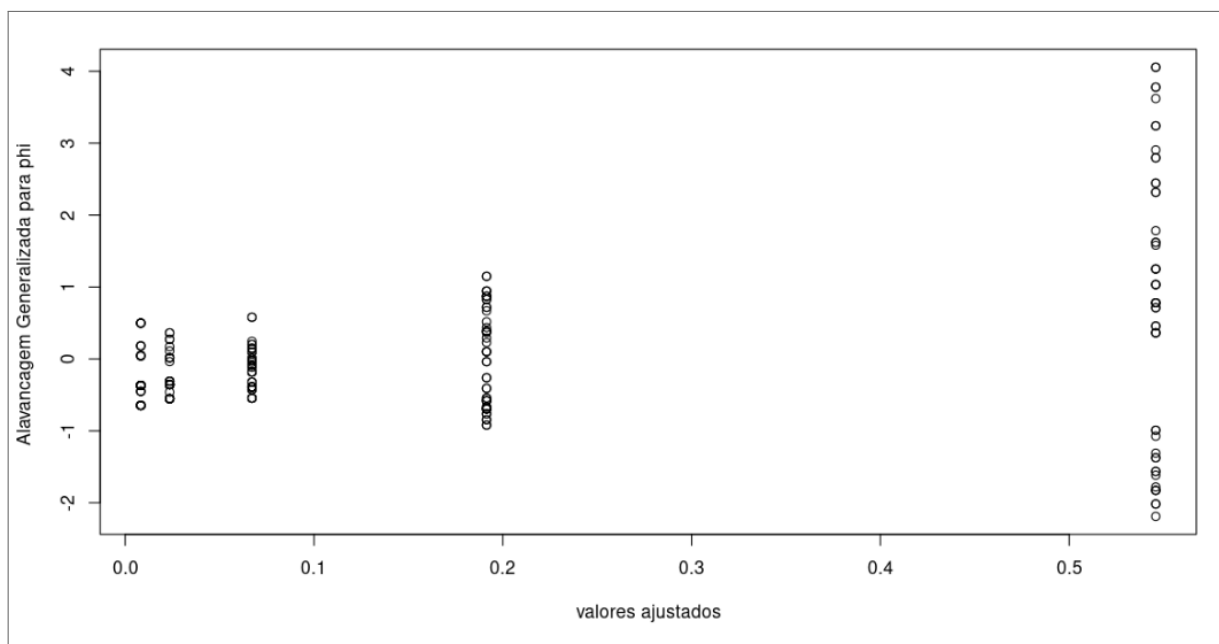
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 12 – Gráfico de resíduo por valor ajustado referente ao submodelo da média da t-Student



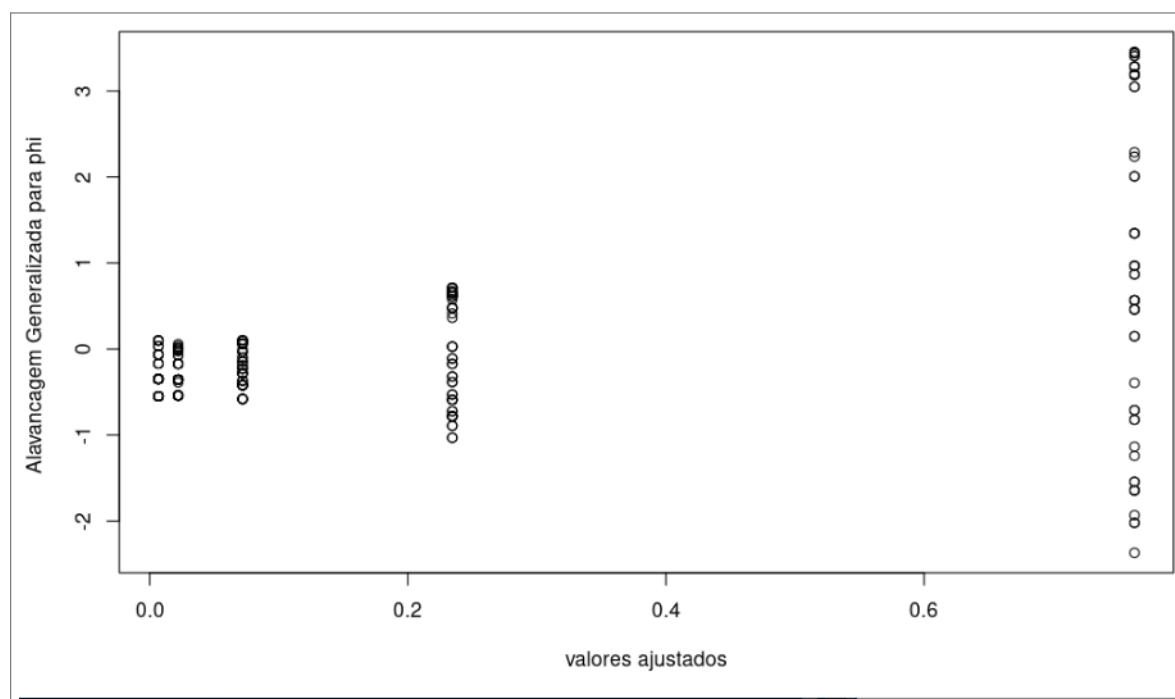
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 13 – Gráfico de alavancagem generalizada referente ao submodelo da dispersão da Exponencial Potência



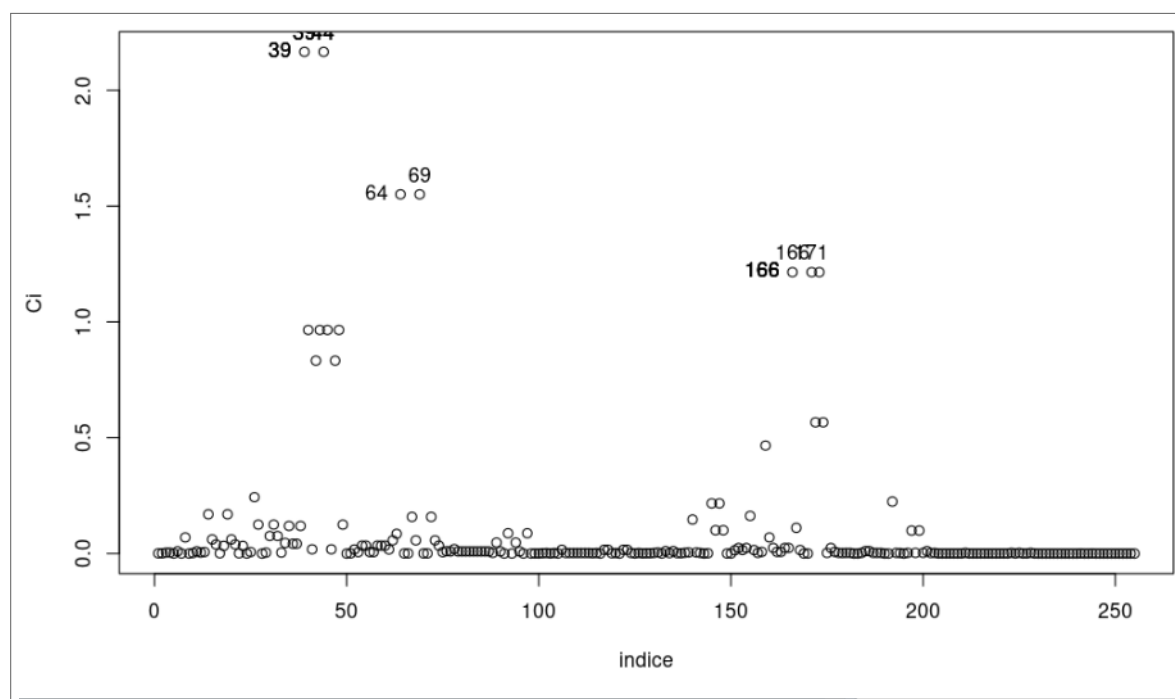
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 14 – Gráfico de alavancagem generalizada referente ao submodelo da dispersão t-Student



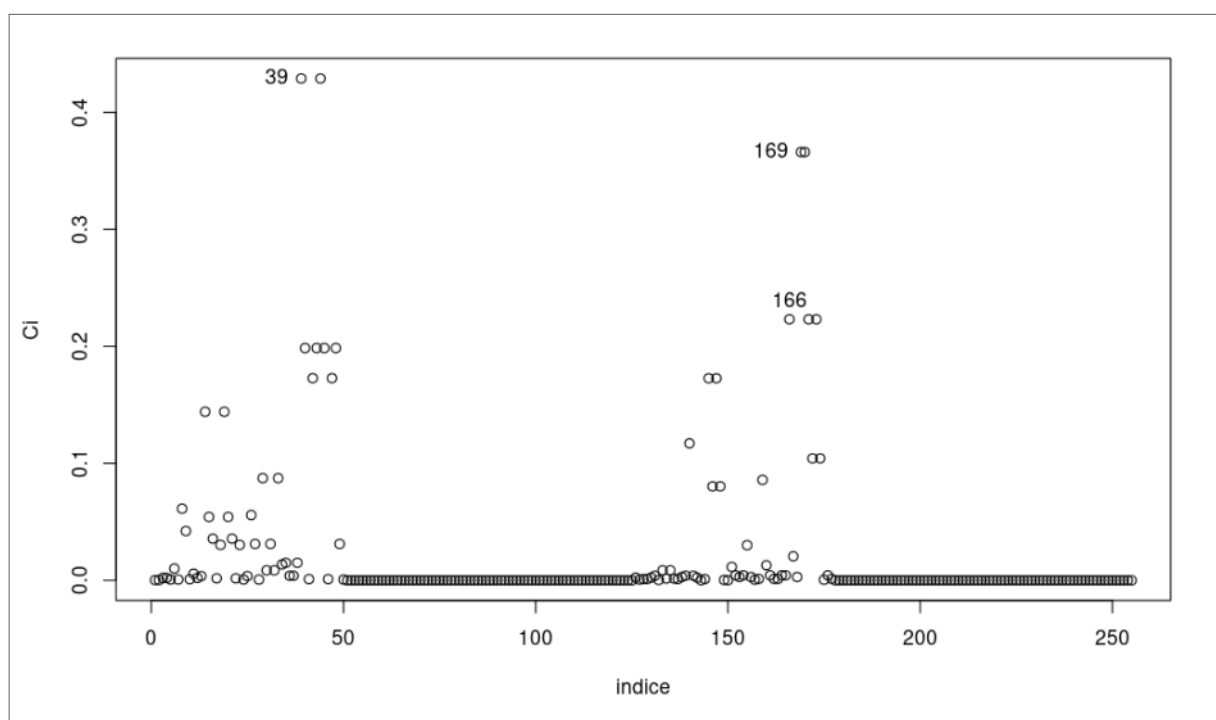
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 15 – Gráfico de influência global referente ao submodelo da dispersão da Exponencial Potência



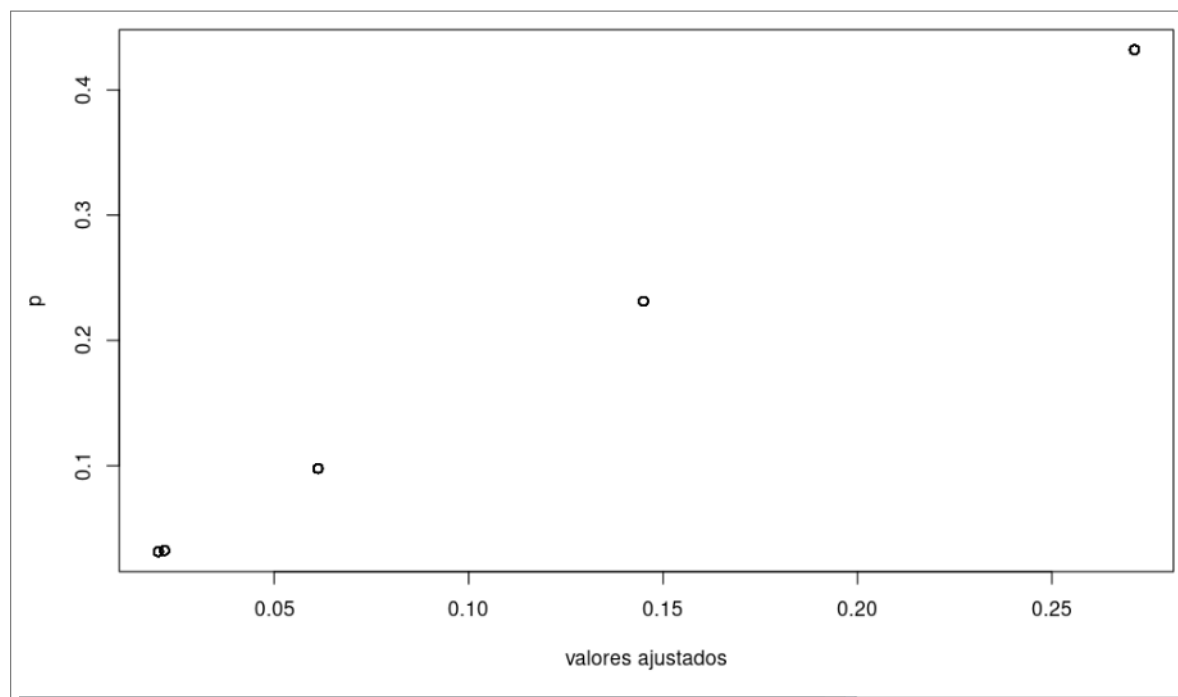
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 16 – Gráfico de influência global referente ao submodelo da dispersão da t-Student



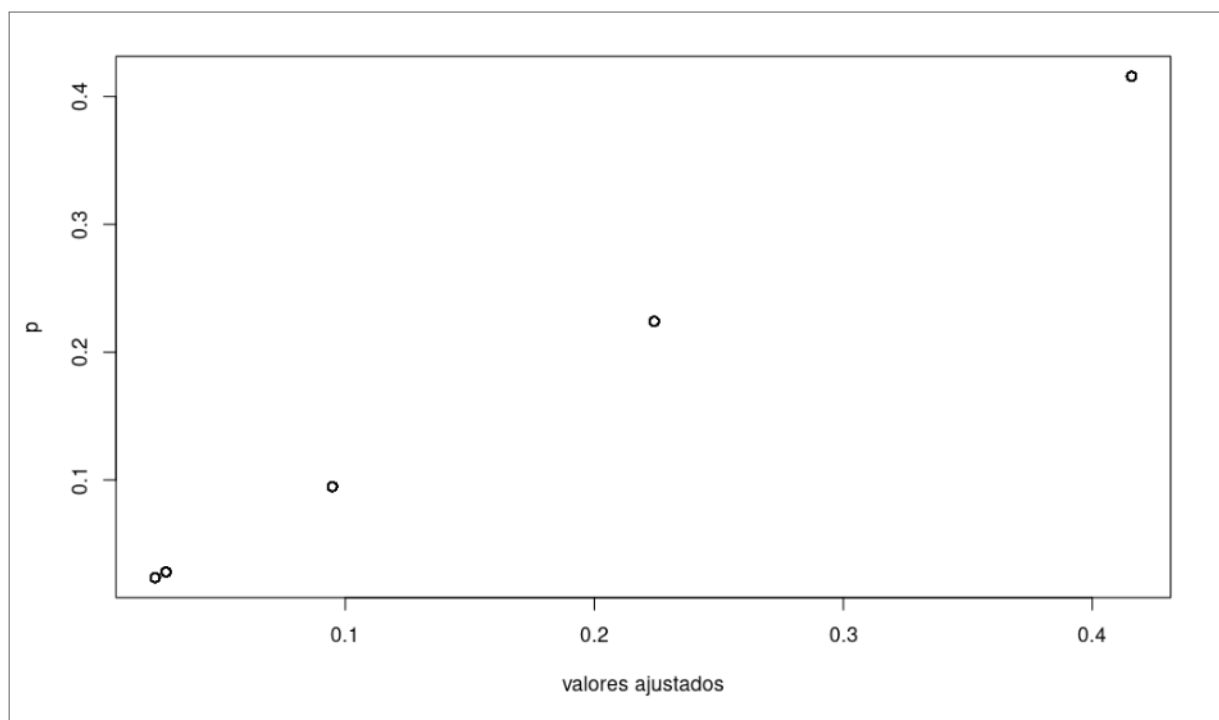
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 17 – Gráfico Gráfico de $\hat{h}_{ii}$ por valor ajustado referente ao submodelo da dispersão da Exponencial Potência



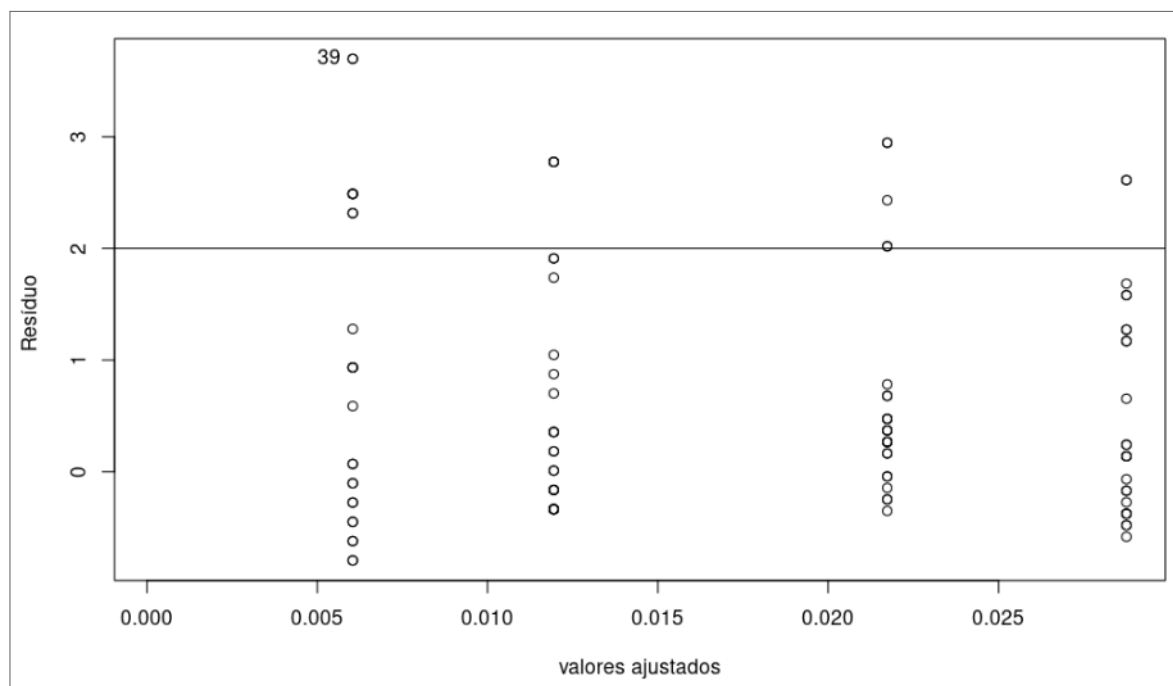
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 18 – Gráfico Gráfico de $\hat{p}_{ii}$ por valor ajustado referente ao submodelo da dispersão da t-Student



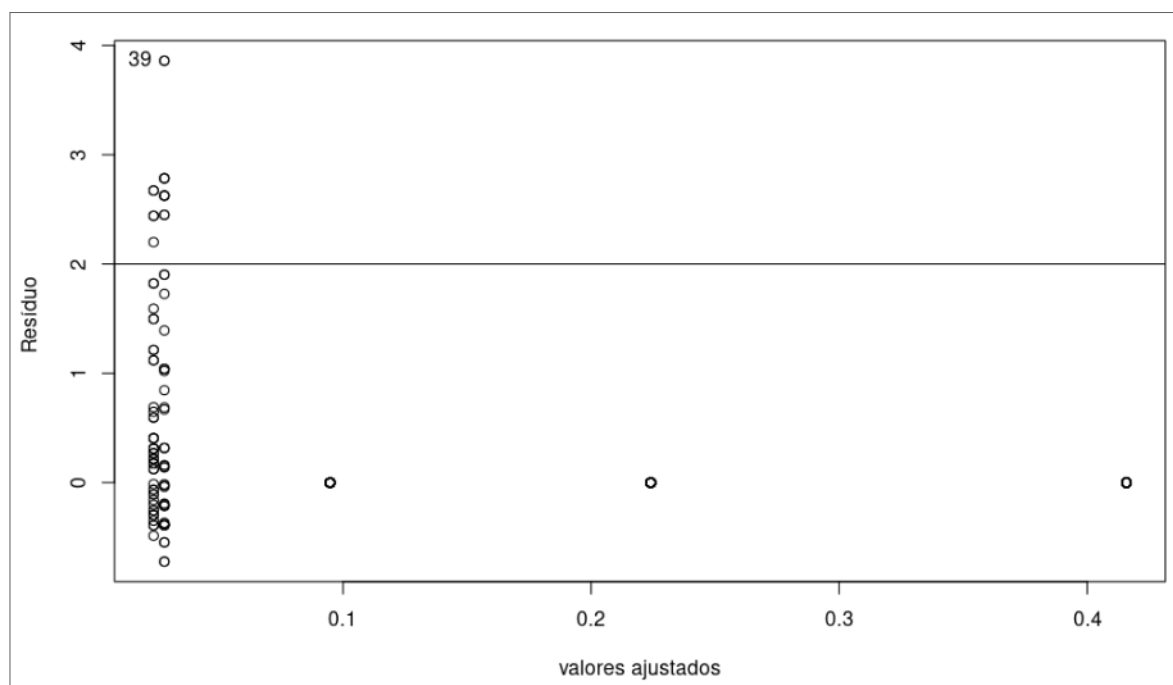
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 19 – Gráfico de resíduo por valor ajustado referente ao submodelo da dispersão da Exponencial Potência



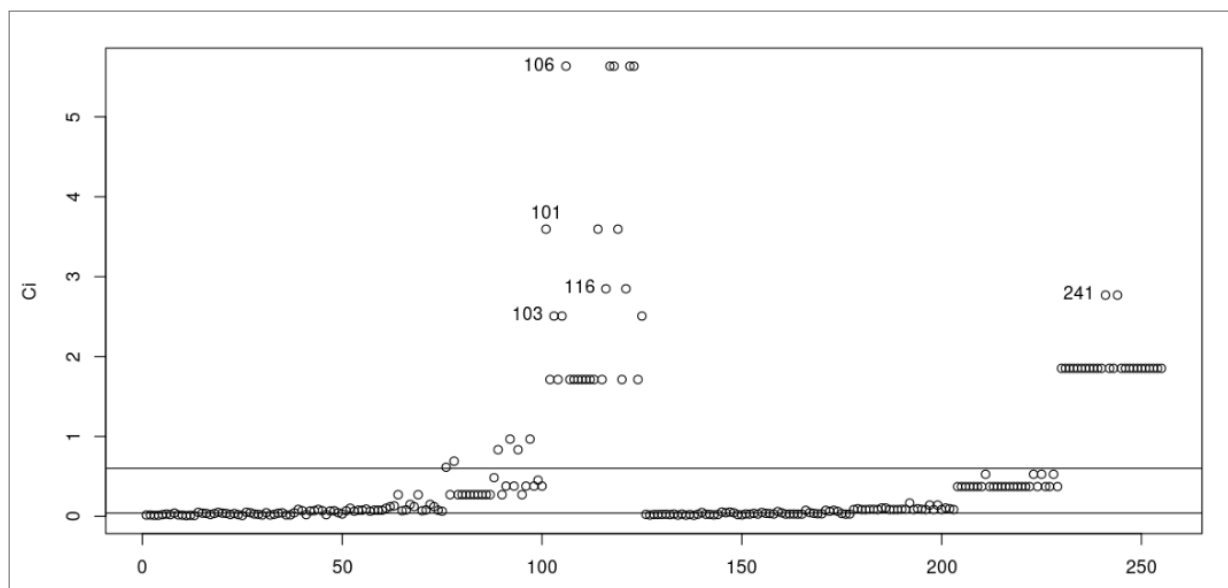
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 20 – Gráfico de resíduo por valor ajustado referente ao submodelo da dispersão da t-Student



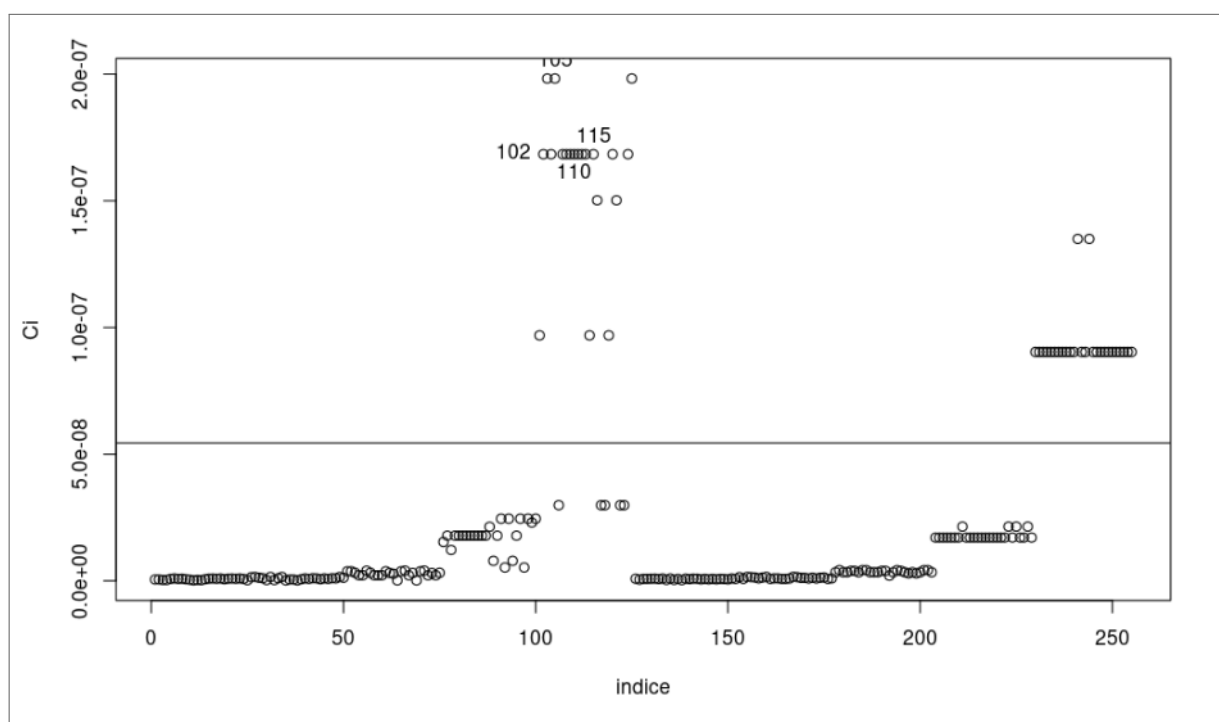
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 21 – Gráfico de índice do C_i com perturbação aditiva na resposta referente ao modelo da Exponencial Potência



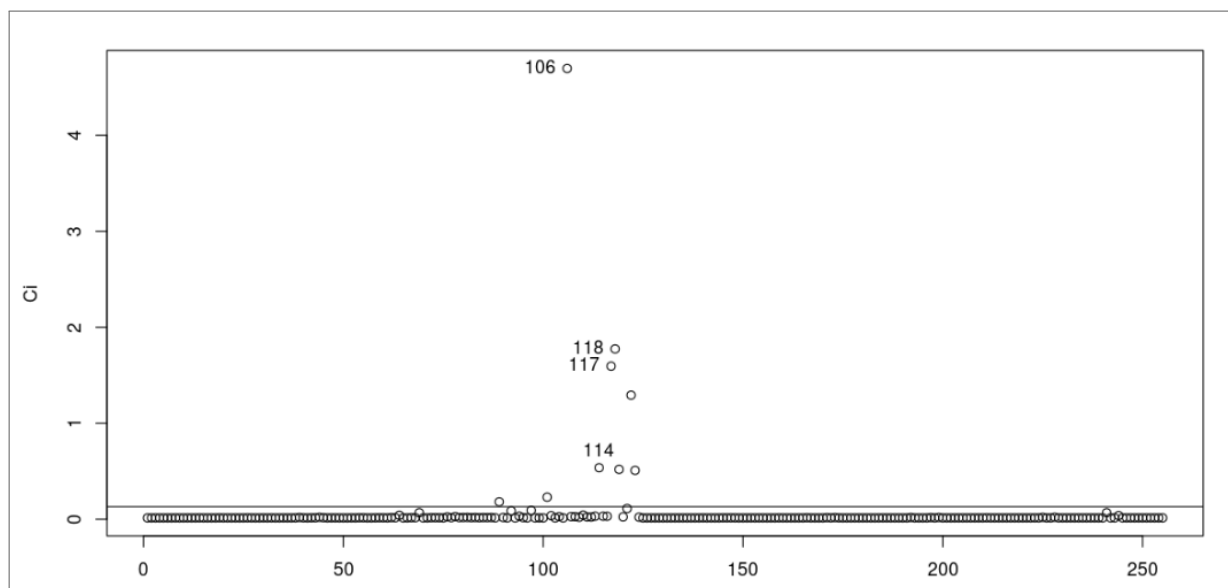
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 22 – Gráfico de índice do C_i com perturbação aditiva na resposta referente ao modelo da t-Student



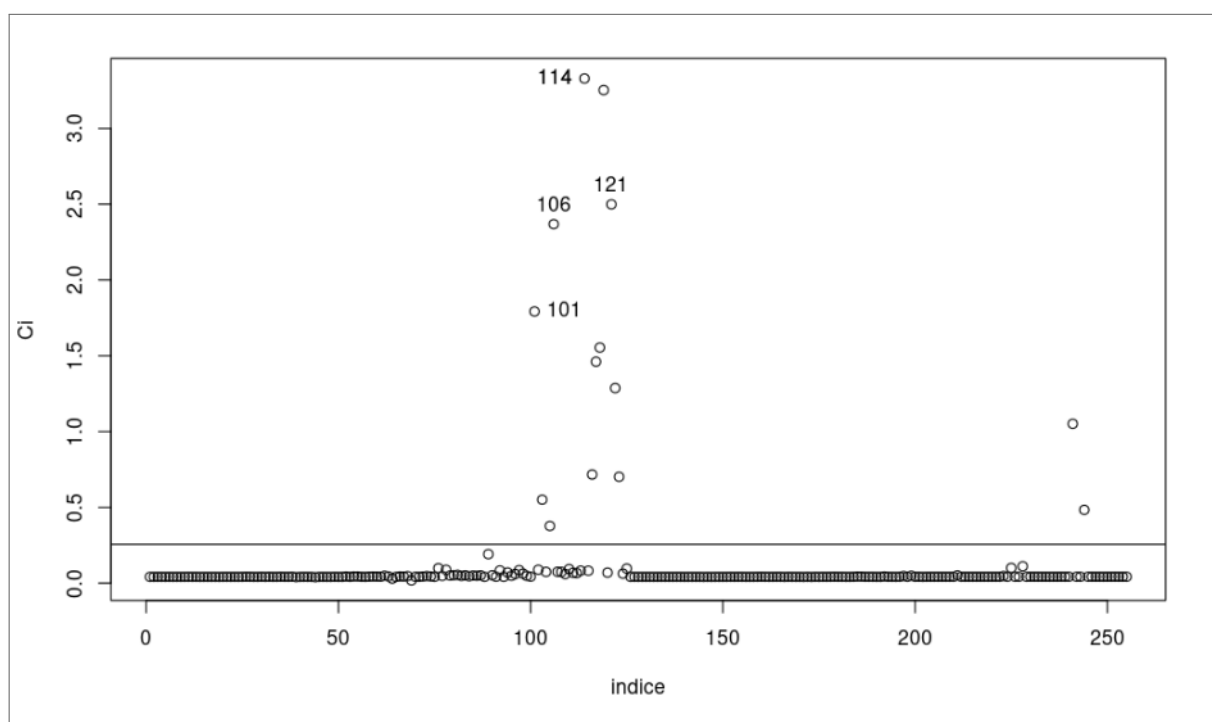
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 23 – Gráfico de índice do C_i com perturbação aditiva nos preditores referente ao modelo da Exponencial Potência



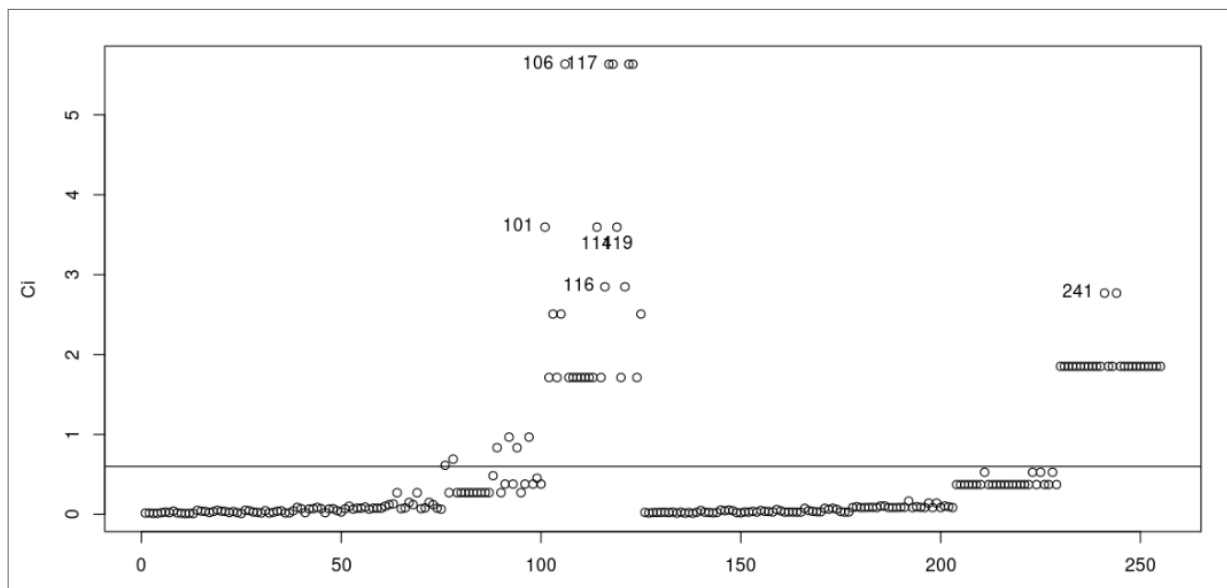
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 24 – Gráfico de índice do C_i com perturbação aditiva nos preditores referente ao modelo da t-Student



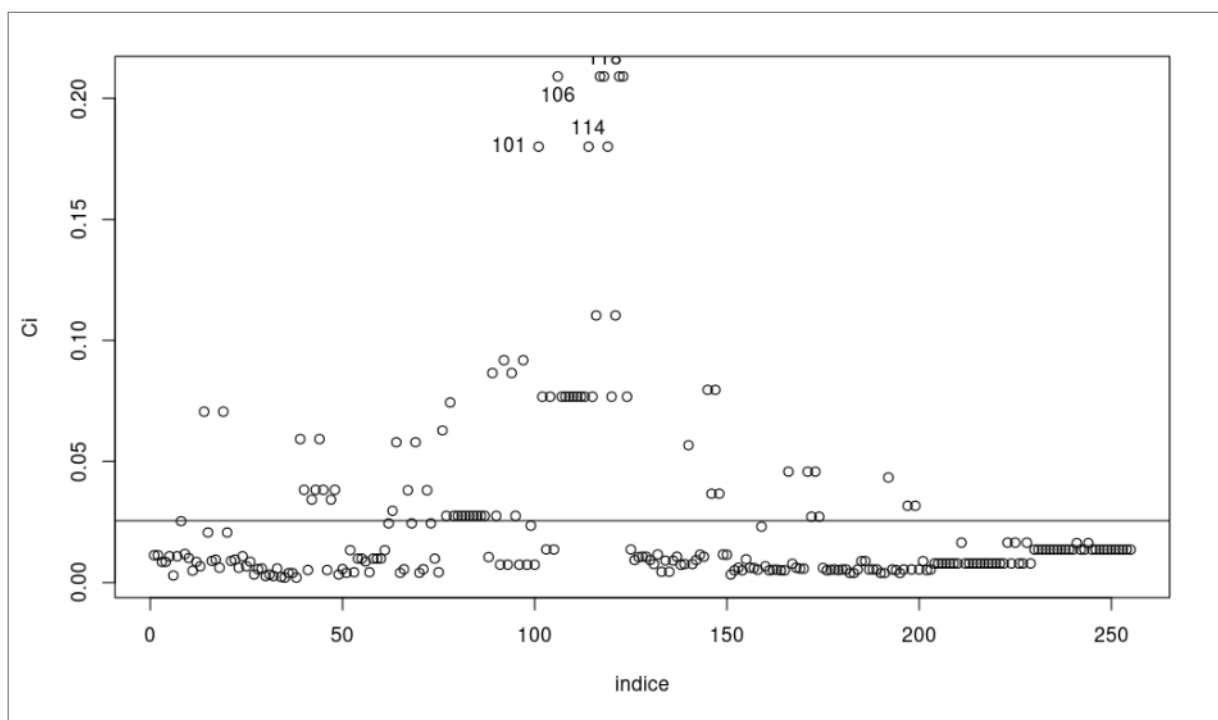
Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 25 – Gráfico de índice do C_i com perturbação ponderada referente ao modelo da Exponencial Potência



Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Figura 26 – Gráfico de índice do C_i com perturbação ponderada referente ao modelo da t-Student



Fonte: Elaborada pelo autor (2023)

Nas figuras 21 e 26 apresentamos os gráficos de curvaturas para o ajuste do modelo com os três tipos de perturbação. Considerando a perturbação aditiva na resposta e o ponto de corte de $2\bar{C}$ (Figuras 21 e 22), ambos os ratos lesionados e não lesionados apresentam curvatura acima do limite de corte estabelecido para ambos os modelos em estudo. Já nas

Figuras 23 e 24, considerando o esquema de perturbação aditiva no preditor, percebe-se que no modelo Exponencial Potência somente os ratos lesionados apresentam curvatura acima do limite de corte. Já no modelo t-Student ambos os ratos lesionados e não lesionados apresentam curvatura acima do limite de corte com em destaque os ratos lesionados (12 observação acima do corte para os ratos lesionados contra 2 dos ratos não lesionados). Seguindo o mesmo raciocínio, nas Figuras 25 e 26 considerando o esquema de perturbação ponderado, observe-se que ambos os ratos lesionados e não lesionados apresentam corte acima do limite estabelecido com em destaque os ratos lesionados apresentando grupo com curvatura acima dos demais da t-Student (observação 101, 106, 114 e 116 como observações potencialmente influentes).

Ao removermos todas as observações presentes nos gráficos de curvaturas, uma de cada vez, não interfere significativamente nas estimativas dos modelos considerados. Em termo de adequabilidade dos modelos propostos para os dados e avaliando pelo critério de informação d'Akaike (AIC) tem-se uma leve vantagem do t-Student t_4 (AIC=262.186) contra 298.162 para o modelo Exponencial Potência com $\kappa = 0.3$. Esta vantagem se reflete também na aplicação das técnicas de diagnósticos nesse capítulo.

5.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo derivamos alguns procedimentos de diagnóstico na classe dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH) considerando as seguintes medidas avaliadas para o Exponencial potência e Student-t: alavancagem generalizada, influência global e influência local. A metodologia de Cook (1977) foi considerada para a influência local sob perturbação na resposta, de casos ponderados e no preditor.

Os resultados da aplicação da técnica de diagnóstico para os modelos considerados apontaram a eficiência de cada técnica em detectar observações influentes no conjunto de dados analisado. Além disso percebemos que o modelo Student t_4 se ajusta melhor aos dados do que o modelo Exponencial Potência de regressão não linear baseado na sua robustez de lidar com observações extremas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PROPOSTAS PARA PESQUISAS FUTURAS

Apresentamos nesta seção as principais contribuições teóricas e conclusões desta tese como segue:

- No capítulo 2 derivamos uma fórmula matricial geral para os vieses de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhanças dos parâmetros da média e da dispersão nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos. Nesta classe de modelos abordamos a situação em que os parâmetros de dispersão não são constantes para todas as observações, permitindo assim o uso de qualquer estrutura heteroscedástica, tendo a heteroscedasticidade multiplicativa como caso particular, generalizando assim os resultados de Cysneiros, Cordeiro e Cysneiros (2010). Além disso, calculamos os intervalos de confiança do tipo assintótico, bootstrap percentil e bootstrap-t. Através de simulação de Monte Carlo avaliamos os desempenhos dos estimadores pontuais, a saber: de máxima verossimilhanças, suas versões corrigidas via Cox e Snell (1968) e a técnica de bootstrap (Efron (1979)) e estimadores intervalares propostos. Os resultados apontaram que as correções analítica de Cox e Snell (1968) e por Efron (1979) são altamente eficazes apresentando desempenho favoráveis para reduzir o viés dos estimadores de máxima verossimilhanças dos vetores de parâmetros β e δ . Os intervalos de confiança bootstrap-t e assintótico apresentaram probabilidades de cobertura estimadas mais próximas dos níveis nominais de cobertura consideradas. Os resultados da aplicação corroboraram com os da simulação.
- No capítulo 3 derivamos uma fórmula matricial geral para o fator de correção de Bartlett à estatística da razão de verossimilhanças para testar conjuntamente e/ou separadamente o efeito da média e da dispersão nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos. Nesta classe de modelos admitimos que a média e a dispersão não são constantes, considerando para a dispersão qualquer estrutura heteroscedástica, tendo como caso particular a heteroscedasticidade multiplicativa. Para o teste de heteroscedasticidade, o nosso trabalho generaliza os resultados apresentados em ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022). Além disso, os nossos resultados generalizam os resultados apresentados em Cordeiro (2004). Através de estudo de simulação de Monte Carlo, avaliamos os desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças e razão de verossimilhanças bootstrap com suas respectivas versões corrigidas, em termos de tama-

nho e poder, em amostras finitas. Os resultados apontaram que o teste LR é bastante liberal e sua versão corrigida, embora atenuar tal tendência, ainda apresenta taxas de rejeição distorcidas conforme aumentamos o número de parâmetros de interesse e de perturbação enquanto o teste bootstrap apresentou taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais. No que tange ao Poder o teste corrigido de LR^{**} apresentou melhor desempenho dentre os testes corrigidos considerados.

- No capítulo 4 derivamos uma fórmula matricial geral para o fator de correção Tipo-Bartlett para a estatística escore para testar conjuntamente e/ou separadamente o efeito da média e da dispersão, nos modelos de regressão não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH). Nesta classe de modelos, consideramos que a média e a dispersão não são constantes, admitindo para a dispersão qualquer estrutura heteroscedástica. Para o teste de heteroscedasticidade, os resultados do nosso trabalho generalizam os apresentados em Cordeiro (2004), ARAÚJO, CYSNEIROS e MONTENEGRO (2022). Através de simulação de Monte Carlo, avaliamos os desempenhos dos testes escore com suas respectivas versões corrigidas, em termos de tamanho e poder, em amostras finitas. Os resultados das simulações considerando os erros simétricos exponencial ($\kappa = 0.3$) e t-Student $\nu = 4$ (fixo) evidenciaram que teste escore e suas versões corrigidas têm desempenho semelhante em todos os cenários analisados. Fica difícil apontar qual tem um desempenho superior ao outro. No que tange ao estudo de simulação do poder de teste S_R , os resultados apontam que não há nenhuma perda de poder derivada do fato de usar o fator de correção de tipo-Bartlett.
- No capítulo 5 derivamos alguns procedimentos de diagnósticos na classe dos modelos não lineares simétricos heteroscedásticos (MNLSH). Nesta classe de modelos consideramos que a média e a dispersão não são constantes, admitindo para a dispersão qualquer estrutura heteroscedástica, tendo como caso particular, a heteroscedasticidade multiplicativa. Desta forma, nosso trabalho generaliza os resultados apresentados em Vanegas e Cysneiros (2010) uma vez que os autores consideraram constante a dispersão. Assim, a verificação de presença de observação extrema na variável resposta e os métodos de diagnósticos tornam-se instrumentos fundamentais para seleção de modelo adequado ao conjunto de dados em estudo. Para isto, avaliamos alguns dos modelos pertencente à família simétrica com a presença de outliers e derivamos alguns métodos de diagnóstico tais como a alavancagem generalizada e a influência global e local e por fim, avaliamos

a robustez contra observações aberrantes apresentando uma aplicação a dados reais considerando os modelos t-Student e Exponencial Potência. Os resultados da análise de diagnóstico para esses modelos mostraram-se eficientes em detectar observações influentes nos dados analisados. Além disso o modelo t-Student se ajusta melhor aos dados do que o modelo Exponencial Potência de regressão não linear baseando na sua robustez de lidar com observações aberrantes.

Considerando a classe de modelo não linear simétrico heteroscedástico, várias linhas de pesquisa devem ser desenvolvidas no futuro, tais como:

- 1- Obter a correção de viés usando a metodologia de Firth (1993) nessa classe de modelo MNLSH;
- 2- Obter ajustes para teste de heteroscedasticidade baseado na estatística da razão de verossimilhanças perfiladas modificadas na classe dos MNLSH estendida.
- 3- Obter ajustes de Skovgaard (2001) para teste da razão de verossimilhanças na mesma classe.
- 4- Obter resíduos padronizados para o método de diagnóstico na classe dos MNLSH.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, T. W.; FANG, K.-T. Theory and applications of elliptically contoured and related distributions. STANFORD UNIV CA DEPT OF STATISTICS, 1990.
- ARAÚJO, M. C.; CYSNEIROS, A. H.; MONTENEGRO, L. C. Improved heteroskedasticity likelihood ratio tests in symmetric nonlinear regression models. *Statistical Papers*, Springer, v. 61, n. 1, p. 167–188, 2020.
- ARAÚJO, M. C.; CYSNEIROS, A. H.; MONTENEGRO, L. C. Bartlett and bartlett-type corrections in heteroscedastic symmetric nonlinear regression models. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, Academia Brasileira de Ciências, v. 94, n. An. Acad. Bras. Ciênc., 2022 94 suppl 3, p. e20200568, 2022. ISSN 0001-3765. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/0001-3765202220200568>>.
- BARTLETT, M. S. Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 160, n. 901, p. 268–282, 1937.
- BAYER, F. M.; CRIBARI-NETO, F. Bartlett corrections in beta regression models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Elsevier, v. 143, n. 3, p. 531–547, 2013.
- BOTTER, D. A.; CORDEIRO, G. M. Bartlett corrections for generalized linear models with dispersion covariates. *Communications in statistics-theory and methods*, Taylor & Francis, v. 26, n. 2, p. 279–307, 1997.
- BRAZZALE, A. Practical small-sample parametric inference. ph.d. thesis. unpublished phd dissertation. *Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology Lausanne*, 2000.
- CAVALCANTI, A. B.; BOTTER, D. A.; BARROSO, L. P.; SANTOS-NETO, M.; CORDEIRO, G. M. Improved score tests for exponential family nonlinear models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 50, n. 15, p. 3731–3745, 2021.
- CHMIELEWSKI, M. Elliptically symmetric distributions: A review and bibliography. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, JSTOR, p. 67–74, 1981.
- COOK, R. D. Detection of influential observation in linear regression. *Technometrics*, Taylor & Francis, v. 19, n. 1, p. 15–18, 1977.
- COOK, R. D. Assessment of local influence. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, Wiley Online Library, v. 48, n. 2, p. 133–155, 1986.
- COOK, R. D.; WEISBERG, S. *Residuals and influence in regression*. [S.l.]: New York: Chapman and Hall, 1982.
- CORDEIRO, G. M. Bartlett corrections and bias correction for two heteroscedastic regression models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 22, n. 1, p. 169–188, 1992.
- CORDEIRO, G. M. *Introdução a teoria assintótica*. [S.l.]: IMPA, 1999.

- CORDEIRO, G. M. Corrected likelihood ratio tests in symmetric nonlinear regression models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 74, n. 8, p. 609–620, 2004.
- CORDEIRO, G. M.; BOTTER, D. A. Second-order biases of maximum likelihood estimates in overdispersed generalized linear models. *Statistics & probability letters*, Elsevier, v. 55, n. 3, p. 269–280, 2001.
- CORDEIRO, G. M.; BOTTER, D. A.; BARROSO, L. P.; FERRARI, S. L. Three corrected score tests for generalized linear models with dispersion covariates. *Statistica Neerlandica*, Wiley Online Library, v. 57, n. 4, p. 391–409, 2003.
- CORDEIRO, G. M.; FERRARI, S. L.; CYSNEIROS, A. H. M. A formula to improve score test statistics. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 62, n. 1-2, p. 123–136, 1998.
- CORDEIRO, G. M.; FERRARI, S. L.; URIBE-OPAZO, M. A.; VASCONCELLOS, K. L. Corrected maximum-likelihood estimation in a class of symmetric nonlinear regression models. *Statistics & probability letters*, Elsevier, v. 46, n. 4, p. 317–328, 2000.
- CORDEIRO, G. M.; FERRARI, S. L. de P. A modified score test statistic having chi-squared distribution to order $n-1$. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 78, n. 3, p. 573–582, 1991.
- CORDEIRO, G. M.; PAULA, G. A. Improved likelihood ratio statistics for exponential family nonlinear models. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 76, n. 1, p. 93–100, 1989.
- CORDEIRO, G. M.; PREVIDELLI, I.; SAMOBYL, R. W. Bias corrected maximum likelihood estimators in nonlinear overdispersed models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, JSTOR, p. 105–118, 2008.
- CORDEIRO, G. M.; VASCONCELLOS, K. L. Bias correction for a class of multivariate nonlinear regression models. *Statistics & probability letters*, Elsevier, v. 35, n. 2, p. 155–164, 1997.
- COX, D.; HINKLEY, D. Theoretical statistics chapman and hall, london. *See Also*, 1974.
- COX, D. R.; SNELL, E. J. A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 30, n. 2, p. 248–265, 1968.
- CYSNEIROS, A. H.; RODRIGUES, K. S.; CORDEIRO, G. M.; FERRARI, S. L. Three bartlett-type corrections for score statistics in symmetric nonlinear regression models. *Statistical papers*, Springer, v. 51, n. 2, p. 273–284, 2010.
- CYSNEIROS, F.; CORDEIRO, G.; CYSNEIROS, A. Corrected maximum likelihood estimators in heteroscedastic symmetric nonlinear models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 80, n. 4, p. 451–461, 2010.
- CYSNEIROS, F. J. A.; PAULA, G. A.; GALEA, M. Modelos simétricos aplicados. *Escola de Modelos de Regressao*, v. 9, 2005.
- DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. *Bootstrap methods and their application*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997.
- DOORNIK, J. A. An object-oriented matrix programming language ox 6. 2009.

- EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7 (1): 1–26. URL <http://www.jstor.org/stable/2958830>, 1979.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. *An introduction to the bootstrap*. [S.l.]: CRC press, 1994.
- ESCOBAR, L. A.; JR, W. Q. M. Assessing influence in regression analysis with censored data. *Biometrics*, JSTOR, p. 507–528, 1992.
- FANG, K.-T.; ANDERSON, T. W. *Statistical inference in elliptically contoured and related distributions*. [S.l.]: Allerton Press New York, 1990.
- FIRTH, D. Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 80, n. 1, p. 27–38, 1993.
- GALLANT, A. R. Seemingly unrelated nonlinear regressions. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 35–50, 1975.
- HALL, P. Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals. *The Annals of Statistics*, JSTOR, p. 927–953, 1988.
- KAKIZAWA, Y. Higher order monotone bartlett-type adjustment for some multivariate test statistics. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 83, n. 4, p. 923–927, 1996.
- LAGOS, B. M.; MORETTIN, P. A.; BARROSO, L. P. Some corrections of the score test statistic for gaussian arma models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Brazilian Statistical Association, v. 24, n. 3, p. 434–456, 2010.
- LAWLEY, D. N. A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. *Biometrika*, JSTOR, v. 43, n. 3/4, p. 295–303, 1956.
- LEMONTE, A. J. *Inferência sobre os parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders bi-paramétrica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2006.
- LEMONTE, A. J.; CORDEIRO, G. M.; MORENO-ARENAS, G. Improved likelihood-based inference in birnbaum–saunders nonlinear regression models. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 40, n. 19-20, p. 8185–8200, 2016.
- LEMONTE, A. J.; CORDEIRO, G. M.; MORENO, G. Bartlett corrections in birnbaum–saunders nonlinear regression models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 82, n. 6, p. 927–935, 2012.
- LEMONTE, A. J.; FERRARI, S. L.; CRIBARI-NETO, F. Improved likelihood inference in birnbaum–saunders regressions. *Computational statistics & data analysis*, Elsevier, v. 54, n. 5, p. 1307–1316, 2010.
- LESAFFRE, E.; VERBEKE, G. Local influence in linear mixed models. *Biometrics*, JSTOR, p. 570–582, 1998.
- MACKINNON, J. G.; JR, A. A. S. Approximate bias correction in econometrics. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 85, n. 2, p. 205–230, 1998.
- MEDEIROS, F. M.; ARAÚJO, M. C.; BOURGUIGNON, M. Improved estimators in beta prime regression models. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Taylor & Francis, p. 1–14, 2021.

- MEDEIROS, F. M.; FERRARI, S. L. Small-sample testing inference in symmetric and log-symmetric linear regression models. *Statistica Neerlandica*, Wiley Online Library, v. 71, n. 3, p. 200–224, 2017.
- MEDEIROS, F. M.; FERRARI, S. L.; LEMONTE, A. J. Improved inference in dispersion models. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 51, p. 317–328, 2017.
- MELO, T. F.; FERRARI, S. L.; CRIBARI-NETO, F. Improved testing inference in mixed linear models. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 53, n. 7, p. 2573–2582, 2009.
- NASCIMENTO, K. P. do; CYSNEIROS, A. H. M. de A. Correção tipo-bartlett em modelos não lineares simétricos heteroscedásticos. 2010.
- PAULA, G. A. Bias correction for exponential family nonlinear models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 40, n. 1-2, p. 43–54, 1992.
- PIRES, J. F.; CYSNEIROS, A. H.; CRIBARI-NETO, F. Improved inference for the generalized pareto distribution. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, JSTOR, v. 32, n. 1, p. 69–85, 2018.
- PREGIBON, D. Logistic regression diagnostics. *The annals of statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 9, n. 4, p. 705–724, 1981.
- QUEIROZ, M. P. F. *Testes de hipóteses em regressão baseados em Verossimilhanças Perfilada Ajustada e em Bootstrap*. 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/6248/1/arquivo621_1.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2023.
- RAO, C. Linear statistical inference and its applications 2nd ed wiley. *New york*, v. 1, p. 973, 1973.
- RATKOWSKY, D. Nonlinear regression modelling. New York, Marcel Dekker, 1983.
- RAWLINGS, J. Applied regression analysis. *Wadsworth and Brooks/Probability series*, 1988.
- ROCKE, D. M. Bootstrap bartlett adjustment in seemingly unrelated regression. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 84, n. 406, p. 598–601, 1989.
- SERFLING, R. Approximation theorems of mathematical statistics. In: . [S.l.: s.n.], 1980.
- SILVA, P. G.; CYSNEIROS, A. H.; CORDEIRO, G. M. Bias correction in power series generalized nonlinear models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Brazilian Statistical Association, v. 31, n. 3, p. 542–560, 2017.
- SKOVGAARD, I. M. Likelihood asymptotics. *Scandinavian Journal of Statistics*, Wiley Online Library, v. 28, n. 1, p. 3–32, 2001.
- STEIN, M. C.; SILVA, M. F. D.; DUCZMAL, L. H. Alternatives to the usual likelihood ratio test in mixed linear models. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 69, p. 184–197, 2014.
- TIBSHIRANI, R. J.; EFRON, B. An introduction to the bootstrap. *Monographs on statistics and applied probability*, Chapman and Hall New York, v. 57, p. 1–436, 1993.

URIBE-OPAZO, M. A.; FERRARI, S. L.; CORDEIRO, G. M. Improved score tests in symmetric linear regression models. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 37, n. 2, p. 261–276, 2008.

VANEGAS, L. H.; CYSNEIROS, F. J. A. Assessment of diagnostic procedures in symmetrical nonlinear regression models. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 54, n. 4, p. 1002–1016, 2010.

WEI, B.-C.; HU, Y.-Q.; FUNG, W.-K. Generalized leverage and its applications. *Scandinavian Journal of statistics*, Wiley Online Library, v. 25, n. 1, p. 25–37, 1998.

WEI, B.-L. Exponential family nonlinear models. Springer-Verlag, Singapore., 1998.

APÊNDICE A – CUMULANTES NO MODELO NÃO LINEAR SIMÉTRICO HETEROSCEDÁSTICO

Neste apêndice, apresentamos a obtenção de alguns cumulantes conjuntos de derivadas do logaritmo da função de verossimilhança do modelo não linear simétrico heteroscedástico, necessários ao cálculo da quantidade d que define a correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças LR e os termos A_1 , A_2 e A_3 que define correção tipo- Bartlett para a estatística Escore.

Sejam $Y_1, \dots, Y_n$, variáveis aleatórias contínuas independentes de um modelo não linear simétrico heteroscedástico (MNLSH). O logaritmo da função de verossimilhança do modelo não linear simétrico heteroscedástico definido por 2.1 dado o vetor de parâmetros $\theta = (\beta, \delta)^\top$ é dado por

$$\ell = \ell(\theta) = \log f(y, \theta) = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \log(\phi_l) + \sum_{l=1}^n t(z_l), \quad (\text{A.1})$$

em que $t(z_l) = \log\{g(u_l)\}$ e $u_l = z^2 = (y_l - \mu_l)^2 / \phi_l$.

Por simples diferenciação em relação aos componentes do vetor de parâmetro β , temos que para $l = 1, \dots, n$, $r = 1, \dots, p$ e $i = 1, \dots, 4$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r} = \frac{\partial t_{(z_l)}}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial \mu_l} \frac{\partial \mu_l}{\partial \eta_l} \frac{\partial \eta_l}{\partial \beta_r}, \quad \frac{\partial \eta_l}{\partial \beta_r} = (r)_l, \quad \frac{\partial^i \mu_l}{\partial \eta_l^i} = m_{il}, \quad \frac{\partial z_l}{\partial \mu_l} = -\frac{1}{\sqrt{\phi_l}}.$$

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta_r} = \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left[-\frac{1}{2} \log \phi_l + \sum_{l=1}^n t_{(z_l)} \right] \\ &= \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(1)} m_{1l} \left(-\frac{1}{\sqrt{\phi_l}} \right) (r)_l \\ &= - \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(1)} \frac{m_{1l}}{\sqrt{\phi_l}} (r)_l. \end{aligned}$$

De forma análoga, temos que para $r, s, t, u = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned}
U_{rs} &= \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s} = \frac{\partial U_r}{\partial \beta_s} = \frac{\partial}{\partial \beta_s} \left[\sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(1)} m_{1l} \left(-\frac{1}{\sqrt{\phi_l}} \right) (r)_l \right] \\
&= - \sum_{l=1}^n \left[t_{(z_l)}^{(2)} m_{1l} \left(-\frac{1}{\sqrt{\phi_l}} \right) (s)_l m_{1l}(r)_l + t_{(z_l)}^{(1)} \{m_{2l}(s)_l(r)_l + m_{1l}(rs)_l\} \right] \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} \\
&= \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(2)} \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} (r, s)_l - \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(1)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} \{m_{2l}(r, s)_l + m_{1l}(rs)_l\}, \\
U_{rst} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t} = \frac{\partial U_{rs}}{\partial \beta_t} \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta_t} \left[\sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(2)} \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} (r, s)_l - \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(1)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} \{m_{2l}(r, s)_l + m_{1l}(rs)_l\} \right] \\
&= - \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(3)} \frac{m_{1l}^3}{\phi_l^{3/2}} (r, s, t)_l + \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(2)} \frac{m_{1l}}{\phi_l} \left\{ 3m_{2l}(r, s, t)_l + m_{1l}[(rt, s)_l + (rt, s)_l \right. \\
&\quad \left. + (r, st)_l] \right\} - \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(1)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} \left\{ m_{3l}(r, s, t)_l + m_{1l}(rst)_l \right. \\
&\quad \left. + m_{2l}[(rt, s)_l + (rt, s)_l + (r, st)_l] \right\} e \\
U_{rstu} &= \frac{\partial^4 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t \partial \beta_u} \\
&= \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(4)} \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} (r, s, t, u)_l - \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(3)} \frac{1}{\phi_l^{3/2}} \left\{ 3m_{2l}m_{1l}^2(r, s, t, u)_l \right. \\
&\quad \left. + m_{1l}^3[(ru, s, t)_l + (r, su, t)_l + (r, s, tu)_l] + m_{1l}^2[3m_{2l}(r, s, t, u)_l \right. \\
&\quad \left. + m_{1l} \{ (rt, s, u)_l + (rs, t, u)_l + (r, st, u)_l \}] \right\} \\
&\quad + \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(3)} \left(\frac{1}{\phi_l} \right) \left\{ m_{2l} [3m_{2l}(r, s, t)_l + m_{1l}(rt, s, u)_l + (rs, t, u)_l + (r, st, u)_l] \right. \\
&\quad \left. + m_{1l} [3m_{3l}(r, s, t, u)_l + 3m_{2l} \{ (ru, s, t)_l + (r, su, t)_l + (r, s, tu)_l \} \right. \\
&\quad \left. + m_{2l} \{ (rt, s, u)_l + (rs, t, u)_l + (r, st, u)_l \} \right. \\
&\quad \left. + m_{1l} \{ (rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (rtu, s)_l + (rt, su)_l + (ru, st)_l + (r, stu)_l \} \right. \\
&\quad \left. + m_{1l} [m_{3l}(r, s, t, u)_l + m_{1l}(rst, u)_l + m_{2l} \{ (rs, t, u)_l + (rt, s, u)_l + (r, st, u)_l \}] \right\} \\
&\quad - \sum_{l=1}^n t_{(z_l)}^{(1)} \frac{1}{\sqrt{\phi_l}} \left\{ m_{4l}(r, s, t, u)_l + m_{3l}[(rs, t, u)_l \right. \\
&\quad \left. + (rt, s, u)_l + (r, st, u)_l + (ru, s, t)_l + (r, su, t)_l + (r, s, tu)_l] + m_{2l}[(rst, u)_l + (rs, tu)_l \right. \\
&\quad \left. + (rtu, s)_l + (rt, su)_l + (ru, st)_l + (r, stu)_l] + m_{1l}(rstu)_l \right\}.
\end{aligned}$$

Tomando as esperanças das quatro expressões acima, encontram-se os cumulantes:

$$\begin{aligned}\kappa_r &= \mathbb{E}(U_r) = 0, \\ \kappa_{rs} &= \mathbb{E}(U_{rs}) = \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} (r, s)_l, \\ \kappa_{rst} &= \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}}{\phi_l} \left\{ 3m_{2l}(r, s, t)_l + m_{1l}[(rs, t)_l + (rt, s)_l + (r, st)_l] \right\}, \\ \kappa_{rstu} &= \varphi_{(0,0,0,1,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} (r, s, t, u)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{1}{\phi_l} \left\{ (3m_{2l}^2 + 4m_{1l}m_{3l})(r, s, t, u)_l \right. \\ &\quad \left. + 3m_{1l}m_{2l}[(rs, t, u)_l + (rt, s, u)_l + (r, st, u)_l + (ru, s, t)_l + (r, su, t)_l + (r, s, tu)_l] \right. \\ &\quad \left. + m_{1l}^2[(rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (ru, st)_l + (r, stu)_l + (rt, su)_l + (rtu, s)_l + (rst, u)_l] \right\}.\end{aligned}$$

Diferenciando κ_{rs} em relação a β_t , κ_{rs} em relação a β_{tu} e κ_{rst} em relação a β_u , verificamos, respectivamente, que:

$$\begin{aligned}\kappa_{rs}^{(t)} &= 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (r, s, t)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(rt, s)_l + (r, st)_l\}; \\ \kappa_{rs}^{(tu)} &= 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \left(\frac{m_{2l}^2 + m_{1l}m_{3l}}{\phi_l} \right) (r, s, t, u)_l + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \{(ru, s, t)_l + (r, su, t)_l \\ &\quad + (r, s, tu)_l + (rt, s, u)_l + (r, st, u)_l\} + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(rtu, s)_l + (rt, su)_l + (ru, st)_l \\ &\quad + (r, stu)_l\}; \\ \kappa_{rst}^{(u)} &= 3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \left(\frac{m_{2l}^2 + m_{1l}m_{3l}}{\phi_l} \right) (r, s, t, u)_l + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \{(rs, t, u)_l + (rt, s, u)_l \\ &\quad + (r, st, u)_l\} + 3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \{(ru, s, t)_l + (r, su, t)_l + (r, s, tu)_l\} \\ &\quad + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (rtu, s)_l + (rt, su)_l + (ru, st)_l + (r, stu)_l\}.\end{aligned}$$

Por simples diferenciação em relação aos componentes do parâmetro δ , temos que para $l = 1, \dots, n$, $R = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, 4$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \delta_R} = \frac{\partial t_{(z_l)}}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial \phi_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial \tau_l} \frac{\partial \tau_l}{\partial \delta_R}, \quad \frac{\partial \tau_l}{\partial \delta_R} = (R)_l, \quad \frac{\partial^i \phi_l}{\partial \tau_l^i} = h_{il}, \quad \frac{\partial z_l}{\partial \phi_l} = -\frac{1}{2} \frac{z_l}{\phi_l}.$$

$$\begin{aligned}
U_R &= \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \delta_R} = \frac{\partial}{\partial \delta_R} \left[-\frac{1}{2} \log \phi_l + \sum_{l=1}^n t_{(z_l)} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}}{\phi_l} (R)_l + \sum_{l=1}^n \left\{ t_{z_l}^{(1)} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{z_l}{\phi_l} h_{1l} (R)_l \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}}{\phi_l} (R)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{z_l}{\phi_l} h_{1l} (R)_l; \\
U_{RS} &= \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \delta_R \partial \delta_S} = \frac{\partial U_R}{\partial \delta_S} = \frac{\partial}{\partial \delta_S} \left[-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}}{\phi_l} (R)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{z_l}{\phi_l} h_{1l} (R)_l \right] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}}{\phi_l} (R, S)_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} (R, S)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}}{\phi_l} (RS)_l + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} (R, S)_l \\
&\quad + \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} (R, S)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{2l}}{\phi_l} (R, S)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}}{\phi_l} (RS)_l; \\
U_{RST} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \delta_R \partial \delta_S \partial \delta_T} = \frac{\partial U_{RS}}{\partial \delta_T} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{3l}}{\phi_l} (R, S, T)_l + \frac{3}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (R, S, T)_l - \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (R, S, T)_l \\
&\quad - \frac{1}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^3 \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (R, S, T)_l - \frac{9}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (R, S, T)_l + \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l} h_2}{\phi_l^2} (R, S, T)_l \\
&\quad - \frac{15}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (R, S, T)_l + \frac{9}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l} h_2}{\phi_l^2} (R, S, T)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{3l}}{\phi_l} (R, S, T)_l \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}}{\phi_l} (RST)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}}{\phi_l} \left\{ (RS, T)_l + (RT, S)_l + (R, ST)_l \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RS, T)_l + (RT, S)_l + (R, ST)_l \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RS, T)_l + (RT, S)_l + (R, ST)_l \right\} \\
&\quad + \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RS, T)_l + (RT, S)_l + (R, ST)_l \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{2l}}{\phi_l} \left\{ (RS, T)_l + (RT, S)_l + (R, ST)_l \right\} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}}{\phi_l} (RST)_l; \\
U_{RSTU} &= \frac{\partial^4 \ell(\theta)}{\partial \delta_R \partial \delta_S \partial \delta_T \partial \delta_U}
\end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}
U_{RSTU} = & -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{4l}}{\phi_l} (R, S, T, U)_l + 2 \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{3l}}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l + \frac{3}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l \\
& - 6 \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l + 3 \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l + \frac{1}{16} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(4)} z_l^4 \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l \\
& + \frac{9}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^3 \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l - \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^3 \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l \\
& + \frac{87}{16} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l - \frac{27}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l \\
& + \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l + \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l} h_{3l}}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l \\
& + \frac{105}{16} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l - \frac{45}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l \\
& + \frac{9}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l + 3 \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l} h_{3l}}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{4l}}{\phi_l} (R, S, T, U)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}}{\phi_l} (RSTU)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}}{\phi_l} \left\{ (RST, U)_l \right. \\
& \left. + (RSU, T)_l + (RS, TU)_l + (RTU, S)_l + (RT, SU)_l + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \right\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{3l}}{\phi_l} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l \right. \\
& \left. + (R, ST, U)_l \right\} + \frac{3}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l \right. \\
& \left. + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \right\} - \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l \right. \\
& \left. + (R, S, TU)_l + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \right\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RST, U)_l + (RSU, T)_l + (RS, TU)_l + (RTU, S)_l + (RT, SU)_l \right. \\
& \left. + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \right\} - \frac{1}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^3 \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l \right. \\
& \left. + (R, S, TU)_l + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{9}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l + (RS, T, U)_l \right. \\
& + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \left. \right\} + \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left\{ (RU, S, T)_l \right. \\
& + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \left. \right\} \\
& + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l^2 \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RST, U)_l + (RSU, T)_l + (RS, TU)_l + (RTU, S)_l + (RT, SU)_l \right. \\
& + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \left. \right\} - \frac{15}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left\{ (RU, S, T)_l \right. \\
& + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \left. \right\} \\
& + \frac{9}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l \right. \\
& + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \left. \right\} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{3l}}{\phi_l} \left\{ (RU, S, T)_l \right. \\
& + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \left. \right\} \\
& + \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RST, U)_l + (RSU, T)_l + (RS, TU)_l + (RTU, S)_l \right. \\
& + (RT, SU)_l + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \left. \right\} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{2l}}{\phi_l} \left\{ (RST, U)_l \right. \\
& + (RSU, T)_l + (RS, TU)_l + (RTU, S)_l + (RT, SU)_l + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \left. \right\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} z_l \frac{h_{1l}}{\phi_l} (RSTU)_l.
\end{aligned}$$

Tomando as esperanças das quatro expressões acima, encontram-se os cumulantes:

$$\begin{aligned}
\kappa_{RS} &= \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} (R, S)_l; \\
\kappa_{RST} &= \frac{1}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (R, S, T)_l \\
&\quad + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (R, S, T)_l \\
&\quad + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RS, T)_l + (RT, S)_l + (R, ST)_l \right\}; \\
\kappa_{RSTU} &= \frac{1}{16} \left(\varphi_{(0,0,0,1,4)} + 18\varphi_{(0,0,1,0,3)} + 87\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 57 \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l \\
&\quad + \frac{3}{4} \left(7 - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l \\
&\quad + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l + Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{3l}}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l \\
&\quad + \frac{1}{8} \left(7 - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l \right. \\
&\quad \left. + (R, S, TU)_l + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \right\} \\
&\quad + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l \right. \\
&\quad \left. + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RST, U)_l + (RSU, T)_l + (RS, TU)_l \right. \\
&\quad \left. + (RTU, S)_l + (RT, SU)_l + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \right\}.
\end{aligned}$$

Diferenciando κ_{RS} em relação a δ_T , κ_{RS} em relação a δ_{TU} e κ_{RST} em relação a δ_U , verificamos, respectivamente, que:

$$\begin{aligned}
\kappa_{RS}^{(T)} &= \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{2l}}{\phi_l^2} (R, S, T)_l \\
&+ \frac{1}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RT, S)_l + (R, ST)_l \right\} \\
&- \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (R, S, T)_l \\
\kappa_{RS}^{(TU)} &= -\frac{5}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l \\
&+ \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l \\
&+ \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{3l}}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l + \frac{3}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l \\
&- \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l + (RT, S, U)_l \right. \\
&+ (R, ST, U)_l \left. \right\} + \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{2l}}{\phi_l^2} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l \right. \\
&+ (R, S, TU)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \left. \right\} + \frac{1}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RTU, S)_l \right. \\
&+ (RT, SU)_l + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \left. \right\}, \\
\kappa_{RST}^{(U)} &= -\frac{3}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l \\
&+ \frac{3}{8} \left(11 - 13\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l \\
&+ \frac{3}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l \\
&+ \frac{3}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{3l}}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l \\
&+ \frac{1}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l \right\} \\
&+ \frac{3}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{2l}}{\phi_l^2} \left\{ (RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l \right\} \\
&- \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left\{ (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \right\} \\
&+ \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{2l}}{\phi_l^3} \left\{ (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \right\} \\
&+ \frac{1}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (RSU, T)_l + (RS, TU)_l + (RTU, S)_l \right. \\
&+ (RT, SU)_l + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Para obter os cumulantes mistos, observamos que $r, s, t, u = 1, \dots, p$ e $R, S, T, U = 1, \dots, q$,

$$\begin{aligned}
 U_{Rs} &= \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \delta_R \partial \beta_s} = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left\{ \left[\frac{\partial t_{z_l}^{(1)}}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial \mu_l} \frac{\partial \mu_l}{\partial \eta_l} \frac{\partial \eta_l}{\partial \beta_s} z_l + \frac{\partial z_l}{\partial \mu_l} \frac{\partial \mu_l}{\partial \eta_l} \frac{\partial \eta_l}{\partial \beta_s} t_{z_l}^{(1)} \right] \frac{h_{1l}}{\phi_l} (R)_l \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left\{ t_{z_l}^{(2)} \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(s)_l z_l + \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(s)_l t_{z_l}^{(1)} \right\} \frac{h_{1l}}{\phi_l} (R)_l \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} \frac{z_l}{\phi_l^{3/2}} h_{1l} m_{1l}(R, s)_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{1}{\phi_l^{3/2}} h_{1l} m_{1l}(R, s)_l, \\
 U_{RSt} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \delta_R \partial \delta_S \partial \beta_t} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n \left\{ t_{z_l}^{(3)} \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(t)_l z_l^2 + 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(t)_l t_{z_l}^{(1)} z_l \right\} \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} (R, S)_l \\
 &\quad + \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n \left\{ t_{z_l}^{(2)} \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(t)_l z_l + \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(t)_l t_{z_l}^{(1)} \right\} \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} (R, S)_l \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left\{ t_{z_l}^{(2)} \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(t)_l z_l + \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(t)_l t_{z_l}^{(1)} \right\} \frac{h_{2l}}{\phi_l} (R, S)_l \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left\{ t_{z_l}^{(2)} \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(t)_l z_l + \left(\frac{-1}{\sqrt{\phi_l}} \right) m_{1l}(t)_l t_{z_l}^{(1)} \right\} \frac{h_{1l}}{\phi_l} (R, S)_l \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^2 \frac{m_{1l} h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} (R, S, t)_l - \frac{5}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} (R, S, t)_l \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{2l}}{\phi_l^{3/2}} (R, S, t)_l - \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{m_{1l} h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} (R, S, t)_l \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{m_{1l} h_{2l}}{\phi_l^{3/2}} (R, S, t)_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{1l}}{\phi_l^{3/2}} (R, S, t)_l, \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{m_{1l} h_{1l}}{\phi_l^{3/2}} (RS, t)_l \\
 U_{rsT} &= \frac{\partial^3 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \delta_T} \\
 &= \sum_{l=1}^n \left\{ \left[t_{z_l}^{(3)} \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{z_l}{\phi_l} h_{1l}(T)_l \phi_l - h_{1l}(T)_l t_{z_l}^{(2)} \right] \frac{1}{\phi_l^2} \right\} m_{1l}^2(r, s)_l \\
 &\quad - \sum_{l=1}^n \left\{ \left[t_{z_l}^{(2)} \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{z_l}{\phi_l} h_{1l}(T)_l \phi_l^{1/2} - \left(\frac{1}{2} \right) h_{1l}(T)_l \phi_l^{-1/2} t_{z_l}^{(1)} \right] \frac{1}{\phi_l} \right\} m_{2l} \{ m_{2l}(r, s)_l + m_{1l}(rs)_l \} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l \frac{m_{1l}^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (r, s, T)_l - \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} \frac{m_{1l}^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (r, s, T)_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{h_{1l}}{\phi_l^{3/2}} \left\{ m_{2l}(r, s, T)_l \right. \\
 &\quad \left. + m_{1l}(rs, T)_l \right\} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{h_{1l}}{\phi_l^{3/2}} \left\{ m_{2l}(r, s, T)_l + m_{1l}(rs, T)_l \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{rstU} &= \frac{\partial^4 \ell(\theta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t \partial \delta_U} = \frac{\partial U_{rst}}{\partial \delta_U} \\
&= - \sum_{l=1}^n \left\{ \left[t_{z_l}^{(4)} \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{z_l}{\phi_l} h_{1l}(U)_l \phi_l^{3/2} - \left(\frac{3}{2} \right) h_{1l}(U)_l \phi_l^{1/2} t_{z_l}^{(3)} \right] \frac{1}{\phi_l^3} \right\} \\
&\quad \times m_{1l}^3(r, s, t)_l + \sum_{l=1}^n \left\{ \left[t_{z_l}^{(3)} \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{z_l}{\phi_l} h_{1l}(U)_l \phi_l - h_{1l}(U)_l t_{z_l}^{(2)} \right] \frac{1}{\phi_l^2} \right\} \\
&\quad \times m_{1l} \left\{ 3m_{2l}(r, s, t)_l + m_{1l}[(rs, t)_l + (rt, s)_l + (r, st)_l] \right\} \\
&\quad - \sum_{l=1}^n \left\{ \left[t_{z_l}^{(2)} \left(\frac{-1}{2} \right) \frac{z_l}{\phi_l} h_{1l}(U)_l \phi_l^{1/2} - \left(\frac{1}{2} \right) h_{1l}(U)_l \phi_l^{-1/2} t_{z_l}^{(1)} \right] \frac{1}{\phi_l} \right\} \\
&\quad \times \left\{ m_{3l}(r, s, t)_l + m_{1l}(rst)_l + m_{2l}[(rs, t)_l + (rt, s)_l + (r, st)_l] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(4)} z_l^2 \frac{m_{1l}^2 h_{1l}^2}{\phi_l^3}(r, s, T, U)_l + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l \frac{m_{1l}^2 h_{1l}^2}{\phi_l^3}(r, s, T, U)_l \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l \frac{m_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^2}(r, s, T, U)_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l \frac{m_{1l}^2 h_{1l}}{\phi_l^2}(r, s, TU)_l \\
&\quad + \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l \frac{m_{1l}^2 h_{1l}^2}{\phi_l^3}(r, s, T, U)_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l \frac{m_{1l}^2 h_{1l}}{\phi_l^3}(r, s, T, U)_l \\
&\quad - \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} \frac{m_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^2}(r, s, T, U)_l - \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} \frac{m_{1l}^2 h_{1l}}{\phi_l^2}(r, s, TU)_l \\
&\quad + 2 \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} \frac{m_{1l}^2 h_{1l}^2}{\phi_l^3}(r, s, T, U)_l - \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^2 \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} \left\{ m_{2l}(r, s, T, U)_l + m_{1l}(rs, T, U)_l \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} \left\{ m_{2l}(r, s, T, U)_l + m_{1l}(rs, T, U)_l \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} \frac{z_l}{\phi_l^{3/2}} \left\{ h_{2l} \left[m_{2l}(r, s, T, U)_l + m_{1l}(rs, T, U)_l \right] \right. \\
&\quad \left. + h_{1l} \left[m_{2l}(r, s, TU)_l + m_{1l}(rs, TU)_l \right] \right\} \\
&\quad - \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} \left\{ m_{2l}(r, s, T, U)_l + m_{1l}(rs, T, U)_l \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} \left\{ m_{2l}(r, s, T, U)_l + m_{1l}(rs, T, U)_l \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{h_{2l}}{\phi_l^{3/2}} \left\{ m_{2l}(r, s, T, U)_l + m_{1l}(rs, T, U)_l \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{h_{1l}}{\phi_l^{3/2}} \left\{ m_{2l}(r, s, T, U)_l + m_{1l}(rs, T, U)_l \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} \left\{ m_{2l}(r, s, T, U)_l + m_{1l}(rs, T, U)_l \right\} \\
U_{RSTu} &= \frac{\partial^4 \ell(\theta)}{\partial \delta_R \partial \delta_S \partial \delta_T \partial \beta_u} = \frac{\partial U_{RST}}{\partial \beta_u} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(4)} z_l^3 \frac{m_{1l} h_{1l}^3}{\phi_l^{7/2}} (R, S, T, u)_l + \frac{3}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^2 \frac{m_{1l} h_{1l}^3}{\phi_l^{7/2}} (R, S, T, u)_l \\
&+ \frac{9}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^2 \frac{m_{1l} h_{1l}^3}{\phi_l^{7/2}} (R, S, T, u)_l + \frac{9}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{1l}^3}{\phi_l^{7/2}} (R, S, T, u)_l \\
&- \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^2 \frac{m_{1l} h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^{5/2}} (R, S, T, u)_l - \frac{3}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^{5/2}} (R, S, T, u)_l \\
&+ \frac{15}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{1l}^3}{\phi_l^{7/2}} (R, S, T, u)_l + \frac{15}{8} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{m_{1l} h_{1l}^3}{\phi_l^{7/2}} (R, S, T, u)_l \\
&- \frac{9}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^{5/2}} (R, S, T, u)_l - \frac{9}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{m_{1l} h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^{5/2}} (R, S, T, u)_l \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{3l}}{\phi_l^{3/2}} (R, S, T, u)_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{m_{1l} h_{3l}}{\phi_l^{3/2}} (R, S, T, u)_l \\
&- \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(3)} z_l^2 \frac{m_{1l} h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} \left\{ (RS, T, u)_l + (RT, S, u)_l + (R, ST, u)_l \right\} \\
&- \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} \left\{ (RS, T, u)_l + (RT, S, u)_l + (R, ST, u)_l \right\} \\
&- \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} \left\{ (RS, T, u)_l + (RT, S, u)_l + (R, ST, u)_l \right\} \\
&- \frac{3}{4} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{m_{1l} h_{1l}^2}{\phi_l^{5/2}} \left\{ (RS, T, u)_l + (RT, S, u)_l + (R, ST, u)_l \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{2l}}{\phi_l^{3/2}} \left\{ (RS, T, u)_l + (RT, S, u)_l + (R, ST, u)_l \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{m_{1l} h_{2l}}{\phi_l^{3/2}} \left\{ (RS, T, u)_l + (RT, S, u)_l + (R, ST, u)_l \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(2)} z_l \frac{m_{1l} h_{1l}}{\phi_l^{3/2}} (RST, u)_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n t_{z_l}^{(1)} \frac{m_{1l} h_{1l}}{\phi_l^{3/2}} (RST, u)_l.
\end{aligned}$$

Tomando as esperanças das cinco expressões acima, encontram-se os cumulantes: Sabemos que $\varphi_{(1,0,0,0,0)} = \varphi_{(0,0,1,0,0)} = \varphi_{(0,1,0,0,1)} = \varphi_{(3,0,0,0,0)} = 0$.

$$\begin{aligned}
\kappa_{rsT} &= -\frac{1}{2}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (r, s, T)_l, \\
\kappa_{rstU} &= -\frac{3}{2}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1 h_{1l}}{\phi_l^2} (r, s, t, U)_l, \\
&\quad - \frac{1}{2}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} \left\{ (rs, t, U)_l + (rt, s, U)_l + (r, st, U)_l \right\}, \\
\kappa_{rsTU} &= \frac{1}{4}(\varphi_{(0,0,0,1,2)} + 7\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 8\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}^2}{\phi_l^3} (r, s, T, U)_l \\
&\quad - \frac{1}{2}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{2l}}{\phi_l^2} (r, s, T, U)_l \\
&\quad - \frac{1}{2}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (r, s, TU)_l \\
\kappa_{Rs} &= \kappa_{RSt} = \kappa_{RSTu} = 0.
\end{aligned}$$

Diferenciando κ_{Rs} em relação a β_t , κ_{rs} em relação a δ_T , κ_{RSt} em relação a β_u , κ_{rsT} em relação a δ_U , verificamos, respectivamente, que:

$$\begin{aligned}
\kappa_{rs}^{(T)} &= -(\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} m_{1l}^2}{\phi_l^2} (r, s, T)_l \\
\kappa_{rsT}^{(u)} &= -(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} m_{1l} m_{2l}}{\phi_l^2} (r, s, T, u)_l \\
&\quad - \frac{1}{2}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} m_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (ru, s, T)_l + (r, su, T)_l \right\} \\
\kappa_{rsT}^{(U)} &= -\frac{1}{2}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l} m_{1l}^2}{\phi_l^2} (r, s, T, U)_l \\
&\quad - \frac{1}{2}(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} m_{1l}^2}{\phi_l^2} (r, s, TU)_l \\
&\quad + (\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2 m_{1l}^2}{\phi_l^3} (r, s, T, U)_l \\
\kappa_{rs}^{(Tu)} &= -2(\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} m_{1l} m_{2l}}{\phi_l^2} (r, s, T, u)_l \\
&\quad - (\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} m_{1l} m_{2l}}{\phi_l^2} \left\{ (ru, s, T)_l + (r, su, T)_l \right\} \\
\kappa_{rs}^{(TU)} &= -(\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l} m_{1l}^2}{\phi_l^2} (r, s, T, U)_l + (\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2 m_{1l}^2}{\phi_l^3} (r, s, T, U)_l \\
&\quad - (\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} m_{1l}^2}{\phi_l^2} (r, s, TU)_l
\end{aligned}$$

$$\kappa_{rst}^{(U)} = -\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}m_{1l}}{\phi_l^2} \left\{ 3m_{2l}(r, s, t, U)_l + m_{1l}[(rs, t, U)_l + (rt, s, U)_l + (r, st, U)_l] \right\}$$

$$\kappa_{Rs}^{(t)} = \kappa_{RS}^{(u)} = \kappa_{RS}^{(t)} = \kappa_{RS}^{(tu)} = \kappa_{RS}^{(U)} = \kappa_{Rs}^{(tu)} = \kappa_{Rs}^{(T)} = \kappa_{Rs}^{(TU)} = \kappa_{RS}^{(Tu)} = \kappa_{RST}^{(u)} = 0.$$

APÊNDICE B – PRINCIPAIS QUANTIDADES NECESSÁRIAS AOS CÁLCULOS DA CORREÇÃO DE VIÉS DO ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA NOS MNLSH

Neste apêndice, apresentamos as principais quantidades necessárias aos cálculos da correção de viés do estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\theta}$ do vetor de parâmetro θ que indexa o MNLSH, apresentada no Capítulo 2. Segundo Cox e Snell (1968), o viés de ordem n^{-1} é dado por:

$$B(\hat{\theta}_r) = \sum_{\beta, \delta} \kappa^{ri} \kappa^{tu} \left(\kappa_{rj}^{(l)} - \frac{1}{2} \kappa_{ijl} \right), \quad (\text{B.1})$$

em que i, j, l variam sobre todos os $(p + q)$ parâmetros de β e δ para encontrar a formula do viés de primeira ordem dos EMV e consequentemente o viés de segunda ordem nos MNLSH.

B.0.1 Cálculo de Viés de $\hat{\beta}$

O viés de ordem n^{-1} dos EMV $\hat{\beta}$ de β para $r = 1, \dots, p$, segundo Cox e Snell (1968), pode ser expressa da seguinte forma:

$$B(\hat{\beta}_r) = \sum_{s, t, u}^p \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left(\kappa_{st}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{stu} \right), \quad (\text{B.2})$$

em que:

$$\begin{aligned} \kappa_{st}^{(u)} &= 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} (s, t, u)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left\{ (su, t)_l + (s, tu)_l \right\} \quad \text{e} \\ \kappa_{stu} &= 3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} (s, t, u)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left\{ (st, u)_l + (su, t)_l + (s, tu)_l \right\}. \end{aligned}$$

Logo, substituindo essas expressões em B.2, temos que

$$\begin{aligned}
B(\hat{\beta}_r) &= \sum_{s,t,u}^p \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left[2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} (s,t,u)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{ (su,t)_l + (s,tu)_l \} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ 3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} (s,t,u)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} [st,u)_l + (su,t)_l + (s,tu)_l] \right\} \right] \\
&= \sum_{s,t,u}^p \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left[\frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} (s,t,u)_l \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{ (su,t)_l + (s,tu)_l - (st,u)_l \} \right] \\
&= \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \left(\sum_s \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum_{t,u} (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left[\left(\sum_{s,t,u} \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_l \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_s \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum_{t,u} \kappa^{tu}(tu)_l \right) - \left(\sum_{s,t,u} \kappa^{rs}(st)_l \kappa^{tu}(u)_l \right) \right] \\
\\
B(\hat{\beta}_r) &= \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \left(\sum_s \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum_{t,u} (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left[\left(\sum_s \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum_{t,u} \kappa^{tu}(tu)_l \right) \right].
\end{aligned}$$

Introduzimos as seguintes anotações para facilitar o cálculo matricial do viés:

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= \frac{\partial \eta}{\partial \beta}, \tilde{\tilde{X}} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta \partial \beta^\top}, M_l = \text{diag}\{m_{1l}, \dots, m_{nl}\}, \\
d_l &= -(\varphi_{(0,1,0,0,0)})^{-1} \text{tr}\{(\tilde{X}^\top \wedge M_1^2 \tilde{X})^{-1} \tilde{\tilde{X}}_l\}, D_\beta = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \\
\wedge &= \text{diag}\{1/\phi_1, \dots, 1/\phi_n\}, K_\beta^{-1} = -(\varphi_{(0,1,0,0,0)})^{-1} (\tilde{X}^\top \wedge M_1^2 \tilde{X})^{-1} \\
Z_\beta &= \tilde{X}^\top K_\beta^{-1} \tilde{X}, Z_{\beta d} = \text{diag}\{z_{\beta 11}, \dots, z_{\beta nn}\}.
\end{aligned}$$

Temos então, em notação matricial, que:

$$\begin{aligned}
B(\hat{\beta}_r) &= \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} K_\beta^{-1} \tilde{X}^\top \tilde{X}^\top K_\beta^{-1} \tilde{X}^\top \wedge M_1 M_2 + \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} K_\beta^{-1} \tilde{X}^\top K_\beta^{-1} \tilde{\tilde{X}}^\top \wedge M_1^2 \\
&= \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} K_\beta^{-1} \tilde{X}^\top \wedge [\tilde{X} K_\beta^{-1} \tilde{X}^\top M_1 M_2 + K_\beta^{-1} \tilde{\tilde{X}}^\top M_1^2] \\
&= \frac{1}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} K_\beta^{-1} \tilde{X}^\top \wedge [Z_{\beta d} M_1 M_2 + D_\beta M_1^2]
\end{aligned}$$

Podemos reescrever então a expressão do viés acima como uma regressão linear ponderada, como em Cordeiro e Botter (2001), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 B(\hat{\beta}) &= -\frac{1}{2}\varphi_{(0,1,0,0,0)}\frac{1}{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}\left[\tilde{X}^\top \wedge M_1^2\tilde{X}\right]^{-1}\tilde{X} \wedge M_1M_1M_1^{-1}Z_{\beta d}M_2 \\
 &\quad -\frac{1}{2}\varphi_{(0,1,0,0,0)}\frac{1}{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}\left[\tilde{X}^\top \wedge M_1^2\tilde{X}\right]^{-1}\tilde{X} \wedge D_\beta M_1^2. \\
 &= -\frac{1}{2}\left[\tilde{X}^\top \wedge M_1^2\tilde{X}\right]^{-1}\tilde{X} \wedge M_1M_1M_1^{-1}Z_{\beta d}M_2 - \frac{1}{2}\left[\tilde{X}^\top \wedge M_1^2\tilde{X}\right]^{-1}\tilde{X} \wedge D_\beta M_1^2 \\
 &= \left[\tilde{X}^\top \wedge M_1^2\tilde{X}\right]^{-1}\tilde{X}^\top \wedge M_1^2\left\{-\frac{1}{2}Z_{\beta d}M_1^{-1}M_2 - \frac{1}{2}D_\beta\right\}\mathbf{1} \\
 &= \left[\tilde{X}^\top \wedge M_1^2\tilde{X}\right]^{-1}\tilde{X}^\top \wedge M_1^2\zeta\mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

em que $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 =$ com $\zeta_1 = -\frac{1}{2}Z_{\beta d}M_1^{-1}M_2$, $\zeta_2 = -\frac{1}{2}D_\beta$ e $\mathbf{1}$ representa o vetor de uns. Aqui ζ_2 representa a parte não linear do modelo em estudo.

B.0.2 Cálculo do Viés de $\hat{\delta}$

Analogamente, o viés de ordem n^{-1} dos EMV $\hat{\delta}$ de δ para $R = 1, \dots, q$, segundo Cox e Snell (1968), pode ser expressa da seguinte forma:

$$B(\hat{\delta}_R) = \sum_{S,T,U}^q \kappa^{RS} \kappa^{TU} \left(\kappa_{ST}^{(U)} - \frac{1}{2} \kappa_{STU} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\beta, \delta} \kappa^{RS} \kappa^{tu} \kappa_{Stu}$$

em que

$$\begin{aligned}
 \kappa_{ST} &= \frac{1}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2}(S, T)_l, \\
 \kappa_{STU} &= \frac{1}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3}(S, T, U)_l + \frac{3}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{2l}}{\phi_l^2}(S, T, U)_l \\
 &\quad + \frac{1}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (ST, U)_l + (SU, T)_l + (S, TU)_l \right\}, \\
 \kappa_{ST}^{(U)} &= \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{2l}}{\phi_l^2}(S, T, U)_l + \frac{1}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left\{ (SU, T)_l + (S, TU)_l \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3}(S, T, U)_l, \\
 \kappa_{Stu} &= -\frac{1}{2} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2}(S, t, u)_l.
 \end{aligned}$$

Substituindo os respectivos cumulantes na expressão do viés, temos que

$$\begin{aligned}
B(\hat{\delta}_R) = & \sum_{S,T,U}^q \kappa^{RS} \kappa^{TU} \left\{ \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, T, U)_l \right. \\
& + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \{ (SU, T)_l + (S, TU)_l \} \\
& - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, T, U)_l \\
& - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} (7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)}) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, T, U)_l \right. \\
& + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, T, U)_l \\
& + \left. \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \{ (ST, U)_l + (SU, T)_l + (S, TU)_l \} \right] \Big\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\beta, \delta} \kappa^{RS} \kappa^{tu} \left\{ - \frac{1}{2} (\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^3} (S, t, u)_l \right\},
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
B(\hat{\delta}_R) = & \sum_{S,T,U}^q \kappa^{RS} \kappa^{TU} \left\{ \frac{1}{16} (\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, T, U)_l \right. \\
& + \frac{1}{8} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, T, U)_l \\
& + \left. \frac{1}{8} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} [(SU, T)_l + (S, TU)_l - (ST, U)_l] \right\} \\
& + \sum_{\beta, \delta} \kappa^{RS} \kappa^{tu} \left[\frac{1}{4} (\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^3} (S, t, u)_l \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\hat{\delta}_R) = & \frac{1}{16} (\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left(\sum_S \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum_{T,U} (T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& + \frac{1}{8} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left(\sum_{S,T,U} \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum_{T,U} \kappa^{TU}(T)_l \right) \\
& + \frac{1}{8} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left[\left(\sum_{S,T,U} \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_l \right) \right. \\
& + \left(\sum_S \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum_{T,U} \kappa^{TU}(TU)_l \right) - \left(\sum_{S,T,U} \kappa^{RS}(ST)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \Big] \\
& + \frac{1}{4} (\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^3} \left(\sum_{S,T,U} \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum_{t,u} (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \right)
\end{aligned}$$

Adotamos as seguintes anotações para facilitar o cálculo matricial do viés:

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \frac{\partial \tau}{\partial \delta}, \tilde{\tilde{S}} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial \delta \partial \delta^\top}, H_l = \text{diag}\{h_{1l}, \dots, h_{nl}\}, \\ \Delta &= \text{diag}\{1/\phi_1, \dots, 1/\phi_n\}, D_\delta = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \\ d_l &= -4(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1)^{-1} \text{tr}\left\{\left(\tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 \tilde{S}\right)^{-1} \tilde{\tilde{S}}_l\right\} \\ K_\delta &= -\frac{1}{4} Q_{12} \left(\tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 \tilde{S}\right) \\ Z_\delta &= \tilde{S}^\top K_\delta^{-1} \tilde{S}, Z_{\delta d} = \text{diag}\{z_{\delta 11}, \dots, z_{\delta nn}\}\end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned}B(\hat{\delta}) &= \frac{1}{16} \left(\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1 \right) K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top \Delta^3 H_1^3 \tilde{S}^\top K_\delta^{-1} \tilde{S} \\ &+ \frac{1}{8} Q_{12} K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top \Delta^2 H_1 H_2 \tilde{S}^\top K_\delta^{-1} \tilde{S} \\ &+ \frac{1}{8} Q_{12} K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 K_\delta^{-1} \tilde{\tilde{S}}_l \\ &+ \frac{1}{4} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top \Delta^2 H_1 M_1^2 \tilde{X}^\top K_\beta^{-1} \tilde{X} \\ &= \frac{1}{16} \left(\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1 \right) K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top Z_{\delta d} \Delta^3 H_1^3 \\ &+ \frac{1}{8} Q_{12} K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top Z_{\delta d} \Delta^2 H_1 H_2 \\ &+ \frac{1}{8} Q_{12} K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top D_\delta \Delta^2 H_1^2 \\ &+ \frac{1}{4} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top Z_{\beta d} \Delta^2 H_1 M_1^2 \\ &= K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 \left[\frac{1}{16} \left(\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1 \right) Z_{\delta d} \Delta H_1 \right. \\ &+ \frac{1}{8} Q_{12} Z_{\delta d} H_1^{-1} H_2 + \frac{1}{8} Q_{12} D_\delta \\ &+ \left. \frac{1}{4} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) Z_{\beta d} H_1^{-1} M_1^2 \right] \\ &= -4(\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 1)^{-1} \left(\tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 \tilde{S} \right)^{-1} \tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 \left[\frac{1}{16} \left(\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1 \right) \right. \\ &\times Z_{\delta d} \Delta H_1 + \frac{1}{8} Q_{12} Z_{\delta d} H_1^{-1} H_2 + \frac{1}{8} Q_{12} D_\delta \\ &+ \left. \frac{1}{4} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) Z_{\beta d} H_1^{-1} M_1^2 \right] \\ &= \left(\tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 \tilde{S} \right)^{-1} \tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 \xi.\end{aligned}$$

em que $\xi = \xi_1 + \xi_2$ e

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -4(\varphi_{(0,1,0,0,2)-1})^{-1} \left[\frac{1}{16} (\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1) Z_{\delta d} \Delta H_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} Q_{12} Z_{\delta d} H_1^{-1} H_2 + \frac{1}{4} (\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) Z_{\beta d} H_1^{-1} M_1^2 \right] \mathbf{1}, \quad e \\ \xi_2 &= -\frac{1}{2} D_\delta.\end{aligned}$$

APÊNDICE C – FATOR DE CORREÇÃO DE BARTLETT PARA ESTATÍSTICA DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA NO MODELO MNLSH

Definimos as seguintes matrizes de dimensão $n \times n$ positivas semi-definidas por

$$\begin{aligned} Z_\beta &= \tilde{X} K_\beta^{-1} \tilde{X}^\top, & Z_{2\beta} &= \tilde{X}_2 K_\beta^{-1} \tilde{X}_2^\top \\ Z_\delta &= \tilde{S} K_\delta^{-1} \tilde{S}^\top, & Z_{2\delta} &= \tilde{S}_2 K_\delta^{-1} \tilde{S}_2^\top \end{aligned}$$

em que $K_\beta^{-1} = -(\varphi_{(0,1,0,0,0)})^{-1}(\tilde{X}^\top \wedge M_1^2 \tilde{X})^{-1}$ e $K_\delta = -\frac{1}{4}Q_{12}(\tilde{S}^\top \Delta^2 H_1^2 \tilde{S})$. As matrizes Z_β e Z_δ são de posto completos p e q respectivamente para o vetor de parâmetro β e δ . Da mesma forma, as matrizes $Z_{2\beta}$ e $Z_{2\delta}$ são de postos reduzidos $p - p_1$ e $q - q_1$ de $Z_{2\beta}$ e $Z_{2\delta}$ respectivamente para o vetor de parâmetro β e δ . Definimos também as matrizes diagonais $Z_{\beta d} = \text{diag}(z_{\beta d1n}, \dots, z_{\beta dnn})$, $Z_{2\beta d} = \text{diag}(z_{2\beta d1n}, \dots, z_{2\beta dnn})$, $Z_{\delta d} = \text{diag}(z_{\delta d1n}, \dots, z_{\delta dnn})$, $Z_{2\delta d} = \text{diag}(z_{2\delta d1n}, \dots, z_{2\delta dnn})$, respectivamente para $Z_\beta, Z_{2\beta}, Z_\delta, Z_{2\delta}$. A matriz $\tilde{X}_k$ de dimensão $p \times p$ cujo o (r, s) ésimo elemento é dado por $(rs)_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, as matrizes B, C, E, F, G de dimensão $n \times n$ com os (i, l) -ésimo elementos relacionados ao componente β são dados por

$$\begin{aligned} b_{il} &= \text{tr}((\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_i (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_l) \\ c_{il} &= \tilde{X}_i (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_l (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_i \\ e_{il} &= \tilde{X}_i (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_l (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_l \\ f_{il} &= \tilde{X}_i (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_i (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_l (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_l \\ g_{il} &= \tilde{X}_i (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_l (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_i (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_l \\ n_{ii} &= \tilde{X}_i (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \tilde{X}_i (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1} \end{aligned}$$

em que $\tilde{X}_l$ representa a l -ésima linha de $\tilde{X}$, e $\tilde{X}_i$ o i -ésima linha da matriz de segunda derivada de X e $W = \wedge M_1^2$ denota a matriz de peso para o componente β . A matriz D representa a matriz diagonal de dimensão $n \times n$ em que seu (l, l) -ésimo elemento é dado por $d_{ll} = \text{tr}(\tilde{X}_l (\tilde{X}^\top W \tilde{X})^{-1})$ para o vetor de parâmetro β e tr representa o traço. Para o componente δ , os elementos das matrizes B, C, E, F, G supra-definidos são os mesmos só precisar substituir a matriz X pela matriz S no qual seu peso será representado por $\Delta = \Delta^2 H_1^2$. No decorrente dos cálculos do termo que envolve o fator de correção de Bartlett, surgirão as

seguintes expressões

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (r)_i \kappa^{rs}(s)_i, \sum_{l=1}^n (rs)_i \kappa^{rs}, \sum_{l=1}^n (r)_i \kappa^{rs}(s)_l, \sum_{l=1}^n (R)_i \kappa^{RS}(S)_i, \sum_{l=1}^n (R)_i \kappa^{RS}(S)_l, \\ & \sum_{l=1}^n (rt)_i \kappa^{rs} \kappa^{tu}(su)_l, \sum_{l=1}^n (rst)_i \kappa^{rs} \kappa^{tu}(u)_i, \sum_{l=1}^n (r)_i \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_i. \end{aligned}$$

em que κ^{ij} representa o (i, j) -ésimo elemento da matriz de informação de Fisher K_β^{-1} com $i, j = 1, 2, \dots, p$ ou (i, j) -ésimo elemento da matriz de informação de Fisher K_δ^{-1} com $i, j = 1, 2, \dots, q$. Podemos observar que esses somatórios representam os elementos das matrizes

$$\begin{aligned} & -\varphi_{(0,1,0,0,0)} Z_{\beta d}, -\varphi_{(0,1,0,0,0)} D, -\varphi_{(0,1,0,0,0)} Z_\beta, -\frac{\varphi_{((0,1,0,0,2))-1}}{4} Z_{\delta d}, -\frac{\varphi_{((0,1,0,0,2))-1}}{4} Z_\delta, \\ & \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 B_\beta, \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 N_{\beta d}, \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 C_\beta. \end{aligned}$$

C.1 EXPRESSÃO DE ϵ EM RELAÇÃO AO COMPONENTE β

Neste apêndice apresentaremos os cálculos de obtenção de λ' s com 4 índices e 6 índices, e mostraremos também para os ϵ' s e $d_{p1,\beta}$.

- Cálculo de λ_{rstu}

Sabemos por definição que $\lambda_{rstu} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left(\frac{\kappa_{rstu}}{4} - \kappa_{rst}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(su)} \right)$, portanto, substituindo os respectivos valores dos cumulantes na fórmula de λ_{rstu} , temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{rstu} = & \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left[\frac{1}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} (r, s, t, u)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{1}{4\phi_l} \left\{ (3m_{2l}^2 + 4m_{1l}m_{3l}) \right. \right. \\ & \times (r, s, t, u)_l + 3m_{1l}m_{2l} \left[(rs, t, u)_l + (rt, s, u)_l + (r, st, u)_l + (ru, s, t)_l + (r, su, t)_l \right. \\ & \left. \left. + (r, s, tu)_l \right] + m_{1l}^2 \left[(rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (ru, st)_l + (r, stu)_l + (rt, su)_l + (rtu, s)_l \right. \right. \\ & \left. \left. + (rst, u)_l \right\} - \left[3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \left(\frac{m_{2l}^2 + m_{1l}m_{3l}}{\phi_l} \right) (r, s, t, u)_l + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \right. \right. \\ & \times \left\{ (rs, t, u)_l + (rt, s, u)_l + (r, st, u)_l \right\} + 3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \left\{ (ru, s, t)_l + (r, su, t)_l \right. \\ & \left. \left. + (r, s, tu)_l \right\} + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left\{ (rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (rtu, s)_l + (rt, su)_l \right. \right. \\ & \left. \left. + (ru, st)_l + (r, stu)_l \right\} \right] + \left[2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \left(\frac{m_{2l}^2 + m_{1l}m_{3l}}{\phi_l} \right) (r, s, t, u)_l \right. \\ & \left. + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \left\{ (ru, s, t)_l + (r, tu, s)_l + (r, t, su)_l + (rs, t, u)_l + (r, st, u)_l \right\} \right. \\ & \left. \left. + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left\{ (rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (ru, st)_l + (r, stu)_l \right\} \right] \right] \end{aligned}$$

simplificando e rearrumando termo a termo, temos que

$$\begin{aligned}\lambda_{rstu} = & \kappa^{rs}\kappa^{tu} \left[\frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} (r, s, t, u)_l - \frac{5\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} (rt, s, u)_l \right. \\ & + \frac{3\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} [(rs, t, u)_l + (r, st, u)_l] \\ & - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} [(ru, s, t)_l + (r, su, t)_l + (r, s, tu)_l] \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} [(rst, u)_l + (rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (r, stu)_l] \\ & \left. - \frac{3\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} [(rt, su)_l + (rtu, s)_l] - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}^2}{\phi_l} [(r, s, t, u)_l] \right]\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lambda_{rstu} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} (r)_l \kappa^{rs}(s)_l (t)_l \kappa^{tu}(u)_l - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}^2}{\phi_l} (r)_l \kappa^{rs}(s)_l (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} [3(rs)_l \kappa^{rs}(t)_l \kappa^{tu}(u)_l + 3(r)_l \kappa^{rs}(st)_l \kappa^{tu}(u)_l \\ & - 5(s)_l \kappa^{rs}(rt)_l \kappa^{tu}(u)_l - (s)_l \kappa^{rs}(ru)_l \kappa^{tu}(t)_l - (r)_l \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_l - (r)_l \kappa^{rs}(s)_l \kappa^{tu}(tu)_l] \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} [(rst)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(u)_l + (rsu)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(t)_l + (rs)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(tu)_l \\ & + (stu)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(r)_l + (ru)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(st)_l - 3(rt)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(su)_l - 3(rtu)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(s)_l]\end{aligned}$$

▪ Cálculo de $\sum' \lambda_{rstu}$

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{rstu} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} (\sum' (r)_l \kappa^{rs}(s)_l) (\sum' (t)_l \kappa^{tu}(u)_l) \\ & - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}^2}{\phi_l} (\sum' (r)_l \kappa^{rs}(s)_l) (\sum' (t)_l \kappa^{tu}(u)_l) \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} [3(\sum' (rs)_l \kappa^{rs}) (\sum' (t)_l \kappa^{tu}(u)_l) \\ & + 3(\sum' (r)_l \kappa^{rs}(st)_l \kappa^{tu}(u)_l) - 5(\sum' (s)_l \kappa^{rs}(rt)_l \kappa^{tu}(u)_l) \\ & - (\sum' (s)_l \kappa^{rs}(ru)_l \kappa^{tu}(t)_l) - (\sum' (r)_l \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_l) \\ & - (\sum' (r)_l \kappa^{rs}(s)_l) (\sum' \kappa^{tu}(tu)_l)] + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} [(\sum' (rst)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(u)_l) \\ & + (\sum' (rsu)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(t)_l) + (\sum' (rs)_l \kappa^{rs}) (\sum' \kappa^{tu}(tu)_l) + (\sum' (stu)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(r)_l) \\ & + (\sum' (ru)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(st)_l) - 3(\sum' (rt)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(su)_l) - 3(\sum' (rtu)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(s)_l)]\end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo, temos que

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{rstu} &= \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n w_{1l}^2 z_{\beta d_{ll}} z_{\beta d_{ll}} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n w_{2l} z_{\beta d_{ll}} z_{\beta d_{ll}} \\ &+ \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n w_{3l} [3d_{ll} z_{\beta d_{ll}} + 3c_{\beta d_{ll}} - 5c_{\beta d_{ll}} - c_{\beta d_{ll}} - c_{\beta d_{ll}} - z_{\beta d_{ll}} d_{ll}] \\ &+ \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n w_{1l} [n_{\beta d_{ll}} + n_{\beta d_{ll}} + d_{ll} d_{ll} + b_{\beta d_{ll}} + n_{\beta d_{ll}} - 3b_{\beta d_{ll}} - 3n_{\beta d_{ll}}]\end{aligned}$$

Portanto, colocando na forma matricial, temos que

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{rstu} &= \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1^2 Z_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_2 Z_{2\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\ &+ \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{2} \boldsymbol{\iota}^\top W_3 [Z_{\beta d} D_\beta - 2C_{\beta d}] \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1 [D_\beta^{(2)} - 2B_{\beta d}] \boldsymbol{\iota}\end{aligned}$$

em que $w_{1l} = \frac{m_{1l}^2}{\phi_l}$, $w_{2l} = \frac{m_{2l}^2}{\phi_l}$, $w_{3l} = \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l}$, $\boldsymbol{\iota}$ a matriz identidade e $\boldsymbol{\iota}^\top$ sua transposta.

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{rstu}$

Utilizamos a seguinte partição da matriz X a seguir $\tilde{X} = (\tilde{X}_1 \tilde{X}_2)$ de tal forma que $\tilde{X}_{1(n \times p_1)}$ e $\tilde{X}_{2(n \times (p-p_1))}$ sejam de postos reduzidos e então substituindo a matriz $\tilde{X}$ pela matriz $\tilde{X}_2$.

Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\begin{aligned}\sum'' \lambda_{rstu} &= \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1^2 Z_{2\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_2 Z_{2\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\ &+ \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{2} \boldsymbol{\iota}^\top W_3 [Z_{2\beta d} D_{2\beta} - 2C_{2\beta d}] \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1 [D_{2\beta}^{(2)} - 2B_{2\beta d}] \boldsymbol{\iota}\end{aligned}$$

- Cálculo de λ_{rstuvw}

Sabemos por definição que $\lambda_{rstuvw} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{vw} \left\{ \kappa_{rtv} \left(\frac{\kappa_{suw}}{6} - \kappa_{sw}^{(u)} \right) + \kappa_{rtu} \left(\frac{\kappa_{svw}}{4} - \kappa_{sw}^{(v)} \right) + \kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} + \kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} \right\}$, em que

$$\begin{aligned}\kappa_{rtv} \left(\frac{\kappa_{suw}}{6} - \kappa_{sw}^{(u)} \right) &= \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}}{\phi_l} \left\{ 3m_{2l}(r, t, v)_i + m_{1l} [(rt, v)_i + (rv, t)_i + (r, vt)_i] \right\} \\ &\left[\frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}}{\phi_l} \{ 3m_{2l}(s, u, w)_l + m_{1l} [(su, w)_l + (sw, u)_i \right. \\ &+ (s, wu)_l] \} - 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l} m_{1l}}{\phi_l} (s, w, u)_l \\ &- \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{ (su, w)_l + (s, wu)_l \} \Big] \\ &= \left[3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} (r, t, v)_i + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{ (rt, v)_i + (rv, t)_i \right. \\ &+ (r, vt)_i \} \Big] \left[-\frac{3}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l} m_{1l}}{\phi_l} (s, w, u)_l - \frac{5}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \right. \\ &\times \{ (su, w)_l + (s, wu)_l \} + \frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} (sw, u)_l \Big];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rtu}(\frac{\kappa_{svw}}{4} - \kappa_{sw}^{(v)}) &= \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}}{\phi_l} \{3m_{2l}(r, t, u)_i + m_{1l}[(rt, u)_i + (ru, t)_i + (r, tu)_i]\} \\
&\quad \left[\frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}}{\phi_l} \{3m_{2l}(s, v, w)_l + m_{1l}[(sv, w)_l + (sw, v)_i \right. \\
&\quad \left. + (s, wv)_l]\} - 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, v)_l \right. \\
&\quad \left. - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(sv, w)_l + (s, wv)_l\} \right] \\
&= \left[3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} (r, t, u)_i + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(rt, u)_i + (ru, t)_i \right. \\
&\quad \left. + (r, tu)_i\} \right] \left[-\frac{5}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, u)_l \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(sv, w)_l + (s, wv)_l\} + \frac{1}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} (sw, v)_l \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt}^{(v)} \kappa_{sw}^{(u)} &= \left[-2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (r, t, v)_i - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(rv, t)_i + (r, vt)_i\} \right] \times \\
&\quad \left[-2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, u)_l - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(su, w)_l + (s, wu)_l\} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} &= \left[-2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (r, t, u)_i - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(ru, t)_i + (r, tu)_i\} \right] \times \\
&\quad \left[-2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, v)_l - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(sv, w)_l + (s, wv)_l\} \right];
\end{aligned}$$

portanto, efetuando as operações e substituindo os respectivos valores simplificados dos cu-
mulantes na fórmula de λ_{rstuvw} , temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_{rstuvw} = & -\frac{1}{6}\varphi_{(0,1,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[27 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left((v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_i \right) \left((v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(uw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - 3 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_l \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((s)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((u)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((rt)_i \kappa^{rs} \kappa^{tu}(su)_l \right) \left((v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((v)_i \kappa^{vw}(wu)_l \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(wu)_l \kappa^{vw}(rv)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((tv)_i \kappa^{tu} \kappa^{vw}(wu)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((v)_i \kappa^{vw}(sw)_l \kappa^{rs}(rt)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left((rv)_i \kappa^{rs} \kappa^{vw}(sw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(tv)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& - \frac{1}{4}\varphi_{(0,1,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 9 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - 3 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_i \kappa^{tu} (rt)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((v)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (ru)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((v)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left(\kappa^{tu} (tu)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_i \kappa^{tu} (rt)_i \kappa^{rs} (sv)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_i \kappa^{tu} (rt)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left(\kappa^{vw} (vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (ru)_i \kappa^{rs} (sv)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (ru)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left(\kappa^{vw} (vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (sv)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \left(\kappa^{tu} (tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left(\kappa^{tu} (tu)_i \right) \left(\kappa^{vw} (vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_i \kappa^{tu} (rt)_i \kappa^{rs} (sw)_l \kappa^{vw} (v)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (ru)_i \kappa^{rs} (sw)_l \kappa^{vw} (v)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (sw)_l \kappa^{vw} (v)_l \right) \left(\kappa^{tu} (tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& + \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu} (u)_l \right) \left((v)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (su)_l \kappa^{tu} (t)_i \right) \left((v)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu} (uw)_l \kappa^{vw} (v)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (u)_l \right) \left((s)_l \kappa^{rs} (rv)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((u)_l \kappa^{tu} (vt)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (su)_l \kappa^{rs} (rv)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (uw)_l \kappa^{vw} (rv)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (su)_l \kappa^{tu} (tv)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& \left. + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((tv)_i \kappa^{tu} \kappa^{vw} (wu)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 2 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\kappa^{vw}(wv)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\kappa^{tu}(tu)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\kappa^{vw}(wv)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\kappa^{tu}(tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& \left. + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\kappa^{tu}(tu)_i \right) \left(\kappa^{vw}(wv)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \right]
\end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum' \lambda_{rstuvw}$

$$\begin{aligned}
\lambda_{rstuvw} = & -\frac{1}{6}\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[27 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \right. \\
& \times \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_i \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(uw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - 3 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_l \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (s)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{wu}(w)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (u)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (rt)_i \kappa^{rs} \kappa^{tu}(su)_l \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(wu)_l \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(wu)_l \kappa^{vw}(rv)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (tv)_i \kappa^{tu} \kappa^{vw}(wu)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(sw)_l \kappa^{rs}(rt)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left(\sum' (rv)_i \kappa^{rs} \kappa^{vw}(sw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(tv)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& - \frac{1}{4}\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \right. \\
& \times \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 9 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - 3 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_i \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_i \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_i \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_i \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& + \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 2 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_i \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(uw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left(\sum' (s)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (u)_l \kappa^{tu}(vt)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(uw)_l \kappa^{vw}(rv)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((tv)_i \kappa^{tu} \kappa^{vw}(wu)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& + \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \times \right. \\
& \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(wv)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(wv)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(wv)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big]
\end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo, temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{rstuvw} = & \frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[27w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 15w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} + 15w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} \right. \\
& - 3w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} + 9w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 9w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 9w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} \\
& + 5w_{1i}b_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} + 5w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + 5w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + 5w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + 5w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} \\
& \left. + 5w_{1i}b_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}b_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} \right] \\
& + \frac{1}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[15w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 9w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 9w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}d_lw_{1l} \right. \\
& - 3w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 5w_{1i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 5w_{1i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 5w_{1i}z_{\beta_{il}}d_i z_{\beta_{d_i}}w_{3l} \\
& + 3w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} + 3w_{1i}e_{\beta_{il}}d_lw_{1l} + 3w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} + 3w_{1i}e_{\beta_{il}}d_lw_{1l} \\
& + 3w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} + 3w_{1i}z_{\beta_{il}}d_id_lw_{1l} - w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} \left. \right] \\
& - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 2w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} + 2w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} \right. \\
& + 2w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 2w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} \\
& \left. + w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + w_{1i}z_{\beta_{il}}b_{\beta_{il}}w_{1l} \right] \\
& - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 2w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 2w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}d_lw_{1l} \right. \\
& + 2w_{1i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 2w_{1i}z_{\beta_{il}}d_i z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} \\
& \left. + w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} + w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} + w_{1i}z_{\beta_{il}}d_id_lw_{1l} \right]
\end{aligned}$$

Simplificando os elementos das matrizes, temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{rstuvw} = & \frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[27w_{3i}z_{\beta_{il}}^3 w_{3l} + 54w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 9w_{1i}b_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} \right. \\
& + 18w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} \left. \right] + \frac{1}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[15w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 16w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} \right. \\
& + 14w_{1i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}d_lw_{3l} + 5w_{1i}z_{\beta_{il}}d_i z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 4w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} + 8w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} \left. \right] \\
& - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4w_{3i}z_{\beta_{il}}^3 w_{3l} + 8w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 2w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} \right. \\
& + 2w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 3w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + w_{1i}z_{\beta_{il}}b_{\beta_{il}}w_{1l} \left. \right] \\
& - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 4w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 4w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}d_lw_{1l} \right. \\
& \left. + w_{1i}z_{\beta_{il}}d_id_lw_{1l} + w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} + 2w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} \right]
\end{aligned}$$

Finalmente temos que

$$\begin{aligned} \sum' \lambda_{rstuvw} = \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} & \left[\frac{1}{2} w_{3i} z_{\beta il}^3 w_{3l} - \frac{1}{4} w_{3i} z_{\beta il} z_{\beta di} z_{\beta dl} w_{3l} \right. \\ & - \frac{1}{4} w_{1i} z_{\beta il} d_i d_l w_{1l} - \frac{1}{2} w_{1i} z_{\beta il} z_{\beta di} d_l w_{3l} \\ & \left. + \frac{1}{2} w_{1i} b_{\beta il} z_{\beta il} w_{1l} + w_{1i} c_{\beta li} z_{\beta il} w_{3l} \right] \end{aligned}$$

Portanto, colocando na sua forma matricial, temos que

$$\begin{aligned} \sum' \lambda_{rstuvw} = \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top & \left[\frac{1}{2} W_3 Z_\beta^{(3)} W_3 - \frac{1}{4} W_3 Z_{\beta d} Z_\beta Z_{\beta d} W_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} D_\beta W_1 Z_\beta \{W_1 D_\beta + 2 Z_{\beta d} W_3\} + \text{tr} \left\{ \left[W_3 C_\beta + \frac{1}{2} W_1 B_\beta \right] W_1 Z_\beta \right\} \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{rstuvw}$

Utilizando a mesma partição no cálculo de $\sum' \lambda_{rstu}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum'' \lambda_{rstuvw} = \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top & \left[\frac{1}{2} W_3 Z_{2\beta}^{(3)} W_3 - \frac{1}{4} W_3 Z_{2\beta d} Z_{2\beta} Z_{2\beta d} W_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} D_{2\beta} W_1 Z_\beta \{W_1 D_{2\beta} + 2 Z_{2\beta d} W_3\} + \text{tr} \left\{ \left[W_3 C_{2\beta} + \frac{1}{2} W_1 B_{2\beta} \right] W_1 Z_{2\beta} \right\} \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

C.1.1 Expressão do termo $\epsilon_{p,\beta}$

Sabemos que $\epsilon_{p,\beta} = \sum' (\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}) = \sum' \lambda_{rstu} - \sum' \lambda_{rstuvw}$, logo substituindo, temos que

$$\begin{aligned} \epsilon_{p,\beta} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1^2 Z_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_2 Z_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{2} \boldsymbol{\iota}^\top W_3 [Z_{\beta d} D_\beta - 2 C_{\beta d}] \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1 [D_\beta^{(2)} - 2 B_{\beta d}] \boldsymbol{\iota} \\ & - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\frac{1}{2} W_3 Z_\beta^{(3)} W_3 - \frac{1}{4} W_3 Z_{\beta d} Z_\beta Z_{\beta d} W_3 - \frac{1}{4} D_\beta W_1 Z_\beta \{W_1 D_\beta + 2 Z_{\beta d} W_3\} \right. \\ & \left. + \text{tr} \left\{ \left[W_3 C_\beta + \frac{1}{2} W_1 B_\beta \right] W_1 Z_\beta \right\} \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

C.1.2 Expressão do termo $\epsilon_{p-p_1,\beta}$

Sabemos que $\epsilon_{p-p_1,\beta} = \sum'' (\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}) = \sum'' \lambda_{rstu} - \sum'' \lambda_{rstuvw}$, logo substituindo, temos que

$$\begin{aligned} \epsilon_{p-p_1,\beta} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1^2 Z_{2\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_2 Z_{2\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{2} \boldsymbol{\iota}^\top W_3 [Z_{2\beta d} D_{2\beta} - 2C_{2\beta d}] \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1 [D_{2\beta}^{(2)} - 2B_{2\beta d}] \boldsymbol{\iota} \\ & - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\frac{1}{2} W_3 Z_{2\beta}^{(3)} W_3 - \frac{1}{4} W_3 Z_{2\beta d} Z_{2\beta} Z_{2\beta d} W_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} D_{2\beta} W_1 Z_{2\beta} \{W_1 D_{2\beta} + 2Z_{2\beta d} W_3\} + tr \left\{ [W_3 C_{2\beta} + \frac{1}{2} W_1 B_{2\beta}] W_1 Z_{2\beta} \right\} \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

APÊNDICE D – EXPRESSÃO DE ϵ EM RELAÇÃO AO COMPONENTE β

Neste apêndice apresentaremos os cálculos de obtenção de $\lambda's$ com 4 índices e 6 índices, e mostraremos também para os $\epsilon's$ e $d_{p1,\beta}$.

▪ Cálculo de λ_{rstu}

Sabemos por definição que $\lambda_{rstu} = \kappa^{rs}\kappa^{tu}\left(\frac{\kappa_{rstu}}{4} - \kappa_{rst}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(su)}\right)$, portanto, substituindo os respectivos valores dos cumulantes na fórmula de λ_{rstu} , temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{rstu} = \kappa^{rs}\kappa^{tu} & \left[\frac{1}{4}\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} (r, s, t, u)_l + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{1}{4\phi_l} \left\{ (3m_{2l}^2 + 4m_{1l}m_{3l}) \right. \right. \\ & \times (r, s, t, u)_l + 3m_{1l}m_{2l} \left[(rs, t, u)_l + (rt, s, u)_l + (r, st, u)_l + (ru, s, t)_l + (r, su, t)_l \right. \\ & \left. \left. + (r, s, tu)_l \right] + m_{1l}^2 \left[(rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (ru, st)_l + (r, stu)_l + (rt, su)_l + (rtu, s)_l \right. \right. \\ & \left. \left. + (rst, u)_l \right\} - \left[3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \left(\frac{m_{2l}^2 + m_{1l}m_{3l}}{\phi_l} \right) (r, s, t, u)_l + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \right. \right. \\ & \times \left\{ (rs, t, u)_l + (rt, s, u)_l + (r, st, u)_l \right\} + 3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \left\{ (ru, s, t)_l + (r, su, t)_l \right. \\ & \left. \left. + (r, s, tu)_l \right\} + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left\{ (rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (rtu, s)_l + (rt, su)_l \right. \right. \\ & \left. \left. + (ru, st)_l + (r, stu)_l \right\} \right] + \left[2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \left(\frac{m_{2l}^2 + m_{1l}m_{3l}}{\phi_l} \right) (r, s, t, u)_l \right. \\ & \left. + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \left\{ (ru, s, t)_l + (r, tu, s)_l + (r, t, su)_l + (rs, t, u)_l + (r, st, u)_l \right\} \right. \\ & \left. \left. + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left\{ (rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (ru, st)_l + (r, stu)_l \right\} \right] \right] \end{aligned}$$

simplicando e rearrumando termo a termo, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{rstu} = \kappa^{rs}\kappa^{tu} & \left[\frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} (r, s, t, u)_l - \frac{5\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} (rt, s, u)_l \right. \\ & + \frac{3\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \left[(rs, t, u)_l + (r, st, u)_l \right] \\ & - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \left[(ru, s, t)_l + (r, su, t)_l + (r, s, tu)_l \right] \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left[(rst, u)_l + (rsu, t)_l + (rs, tu)_l + (r, stu)_l \right] \\ & \left. - \frac{3\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left[(rt, su)_l + (rtu, s)_l \right] - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}^2}{\phi_l} \left[(r, s, t, u)_l \right] \right] \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lambda_{rstu} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} (r)_l \kappa^{rs}(s)_l (t)_l \kappa^{tu}(u)_l - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}^2}{\phi_l} (r)_l \kappa^{rs}(s)_l (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \left[3(rs)_l \kappa^{rs}(t)_l \kappa^{tu}(u)_l + 3(r)_l \kappa^{rs}(st)_l \kappa^{tu}(u)_l \right. \\ & - 5(s)_l \kappa^{rs}(rt)_l \kappa^{tu}(u)_l - (s)_l \kappa^{rs}(ru)_l \kappa^{tu}(t)_l - (r)_l \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_l - (r)_l \kappa^{rs}(s)_l \kappa^{tu}(tu)_l \left. \right] \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left[(rst)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(u)_l + (rsu)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(t)_l + (rs)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(tu)_l \right. \\ & \left. + (stu)_l \kappa^{tu} \kappa^{rs}(r)_l + (ru)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(st)_l - 3(rt)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(su)_l - 3(rtu)_l \kappa^{tu} \kappa^{rs}(s)_l \right]\end{aligned}$$

▪ Cálculo de $\sum' \lambda_{rstu}$

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{rstu} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^4}{\phi_l^2} \left(\sum' (r)_l \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \right) \\ & - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}^2}{\phi_l} \left(\sum' (r)_l \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \right) \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \left[3 \left(\sum' (rs)_l \kappa^{rs} \right) \left(\sum' (t)_l \kappa^{tu}(u)_l \right) \right. \\ & + 3 \left(\sum' (r)_l \kappa^{rs}(st)_l \kappa^{tu}(u)_l \right) - 5 \left(\sum' (s)_l \kappa^{rs}(rt)_l \kappa^{tu}(u)_l \right) \\ & - \left(\sum' (s)_l \kappa^{rs}(ru)_l \kappa^{tu}(t)_l \right) - \left(\sum' (r)_l \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_l \right) \\ & - \left(\sum' (r)_l \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_l \right) \left. \right] + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \left[\left(\sum' (rst)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(u)_l \right) \right. \\ & + \left(\sum' (rsu)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(t)_l \right) + \left(\sum' (rs)_l \kappa^{rs} \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_l \right) + \left(\sum' (stu)_l \kappa^{tu} \kappa^{rs}(r)_l \right) \\ & \left. + \left(\sum' (ru)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(st)_l \right) - 3 \left(\sum' (rt)_l \kappa^{rs} \kappa^{tu}(su)_l \right) - 3 \left(\sum' (rtu)_l \kappa^{tu} \kappa^{rs}(s)_l \right) \right]\end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo, temos que

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{rstu} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n w_{1l}^2 z_{\beta d_{ll}} z_{\beta d_{ll}} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n w_{2l} z_{\beta d_{ll}} z_{\beta d_{ll}} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n w_{3l} \left[3d_{ll} z_{\beta d_{ll}} + 3c_{\beta d_{ll}} - 5c_{\beta d_{ll}} - c_{\beta d_{ll}} - c_{\beta d_{ll}} - z_{\beta d_{ll}} d_{ll} \right] \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}}{4} \sum_{l=1}^n w_{1l} \left[n_{\beta d_{ll}} + n_{\beta d_{ll}} + d_{ll} d_{ll} + b_{\beta d_{ll}} + n_{\beta d_{ll}} - 3b_{\beta d_{ll}} - 3n_{\beta d_{ll}} \right]\end{aligned}$$

Portanto, colocando na forma matricial, temos que

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{rstu} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1^2 Z_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_2 Z_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{2} \boldsymbol{\iota}^\top W_3 \left[Z_{\beta d} D_\beta - 2C_{\beta d} \right] \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1 \left[D_\beta^{(2)} - 2B_{\beta d} \right] \boldsymbol{\iota}\end{aligned}$$

em que $w_{1l} = \frac{m_{1l}^2}{\phi_l}$, $w_{2l} = \frac{m_{2l}^2}{\phi_l}$, $w_{3l} = \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l}$, $\boldsymbol{\iota}$ a matriz identidade e $\boldsymbol{\iota}^\top$ sua transposta.

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{rstu}$

Utilizamos a seguinte partição da matriz X a seguir $\tilde{X} = (\tilde{X}_1 \tilde{X}_2)$ de tal forma que $\tilde{X}_{1(n \times p_1)}$ e $\tilde{X}_{2(n \times (p-p_1))}$ sejam de postos reduzidos e então substituindo a matriz $\tilde{X}$ pela matriz $\tilde{X}_2$.

Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\begin{aligned} \sum'' \lambda_{rstu} &= \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \mathbf{l}^\top W_1^2 Z_{2\beta d}^{(2)} \mathbf{l} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \mathbf{l}^\top W_2 Z_{2\beta d}^{(2)} \mathbf{l} \\ &\quad + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{2} \mathbf{l}^\top W_3 [Z_{2\beta d} D_{2\beta} - 2C_{2\beta d}] \mathbf{l} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \mathbf{l}^\top W_1 [D_{2\beta}^{(2)} - 2B_{2\beta d}] \mathbf{l} \end{aligned}$$

- Cálculo de λ_{rstuvw}

Sabemos por definição que $\lambda_{rstuvw} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{vw} \left\{ \kappa_{rtv} \left(\frac{\kappa_{suw}}{6} - \kappa_{sw}^{(u)} \right) + \kappa_{rtu} \left(\frac{\kappa_{svw}}{4} - \kappa_{sw}^{(v)} \right) + \kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} + \kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} \right\}$, em que

$$\begin{aligned} \kappa_{rtv} \left(\frac{\kappa_{suw}}{6} - \kappa_{sw}^{(u)} \right) &= \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}}{\phi_l} \left\{ 3m_{2l}(r, t, v)_i + m_{1l}[(rt, v)_i + (rv, t)_i + (r, vt)_i] \right\} \\ &\quad \left[\frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}}{\phi_l} \{ 3m_{2l}(s, u, w)_l + m_{1l}[(su, w)_l + (sw, u)_l \right. \\ &\quad \left. + (s, wu)_l] \} - 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, u)_l \right. \\ &\quad \left. - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{ (su, w)_l + (s, wu)_l \} \right] \\ &= \left[3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} (r, t, v)_i + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{ (rt, v)_i + (rv, t)_i \right. \\ &\quad \left. + (r, vt)_i \} \right] \left[-\frac{3}{2} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, u)_l - \frac{5}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \right. \\ &\quad \left. \times \{ (su, w)_l + (s, wu)_l \} + \frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} (sw, u)_l \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rtu}(\frac{\kappa_{svw}}{4} - \kappa_{sw}^{(v)}) &= \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}}{\phi_l} \{3m_{2l}(r, t, u)_i + m_{1l}[(rt, u)_i + (ru, t)_i + (r, tu)_i]\} \\
&\quad \left[\frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}}{\phi_l} \{3m_{2l}(s, v, w)_l + m_{1l}[(sv, w)_l + (sw, v)_l \right. \\
&\quad \left. + (s, wv)_l]\} - 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, v)_l \right. \\
&\quad \left. - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(sv, w)_l + (s, wv)_l\} \right] \\
&= \left[3\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} (r, t, u)_i + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(rt, u)_i + (ru, t)_i \right. \\
&\quad \left. + (r, tu)_i\} \right] \left[-\frac{5}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, u)_l \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(sv, w)_l + (s, wv)_l\} + \frac{1}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} (sw, v)_l \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt}^{(v)} \kappa_{sw}^{(u)} &= \left[-2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (r, t, v)_i - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(rv, t)_i + (r, vt)_i\} \right] \times \\
&\quad \left[-2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, u)_l - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(su, w)_l + (s, wu)_l\} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} &= \left[-2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (r, t, u)_i - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(ru, t)_i + (r, tu)_i\} \right] \times \\
&\quad \left[-2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{2l}m_{1l}}{\phi_l} (s, w, v)_l - \varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \{(sv, w)_l + (s, wv)_l\} \right];
\end{aligned}$$

portanto, efetuando as operações e substituindo os respectivos valores simplificados dos cu-

mulantes na fórmula de λ_{rstuvw} , temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_{rstuvw} = & -\frac{1}{6}\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[27 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left((v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_i \right) \left((v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(uw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - 3 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_l \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((s)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((u)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((rt)_i \kappa^{rs} \kappa^{tu}(su)_l \right) \left((v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((v)_i \kappa^{vw}(wu)_l \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(wu)_l \kappa^{vw}(rv)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((tv)_i \kappa^{tu} \kappa^{vw}(wu)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((v)_i \kappa^{vw}(sw)_l \kappa^{rs}(rt)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left((rv)_i \kappa^{rs} \kappa^{vw}(sw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(tv)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& - \frac{1}{4}\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 9 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - 3 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_i \kappa^{tu} (rt)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((v)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (ru)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((v)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left(\kappa^{tu} (tu)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_i \kappa^{tu} (rt)_i \kappa^{rs} (sv)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_i \kappa^{tu} (rt)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left(\kappa^{vw} (vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (ru)_i \kappa^{rs} (sv)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (ru)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left(\kappa^{vw} (vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (sv)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \left(\kappa^{tu} (tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left(\kappa^{tu} (tu)_i \right) \left(\kappa^{vw} (vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((u)_i \kappa^{tu} (rt)_i \kappa^{rs} (sw)_l \kappa^{vw} (v)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (ru)_i \kappa^{rs} (sw)_l \kappa^{vw} (v)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (sw)_l \kappa^{vw} (v)_l \right) \left(\kappa^{tu} (tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& + \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu} (u)_l \right) \left((v)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (su)_l \kappa^{tu} (t)_i \right) \left((v)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu} (uw)_l \kappa^{vw} (v)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (u)_l \right) \left((s)_l \kappa^{rs} (rv)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((u)_l \kappa^{tu} (vt)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (su)_l \kappa^{rs} (rv)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu} (uw)_l \kappa^{vw} (rv)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (su)_l \kappa^{tu} (tv)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& \left. + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs} (s)_l \right) \left((tv)_i \kappa^{tu} \kappa^{vw} (wu)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 2 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\kappa^{vw}(wv)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\kappa^{tu}(tu)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\kappa^{vw}(wv)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\kappa^{tu}(tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& \left. + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\kappa^{tu}(tu)_i \right) \left(\kappa^{vw}(wv)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \right]
\end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum' \lambda_{rstuvw}$

$$\begin{aligned}
\lambda_{rstuvw} = & -\frac{1}{6}\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[27 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \right. \\
& \times \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_i \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(uw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - 3 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_l \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (s)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{wu}(w)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (u)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (rt)_i \kappa^{rs} \kappa^{tu}(su)_l \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(wu)_l \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(wu)_l \kappa^{vw}(rv)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (tv)_i \kappa^{tu} \kappa^{vw}(wu)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(sw)_l \kappa^{rs}(rt)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left(\sum' (rv)_i \kappa^{rs} \kappa^{vw}(sw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(tv)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& - \frac{1}{4}\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[15 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \right. \\
& \times \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 9 \frac{m_{1i}m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 9 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - 3 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_i \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 5 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \left((v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_i \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_i \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 3 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(vw)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (u)_i \kappa^{tu}(rt)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& - \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sw)_l \kappa^{vw}(v)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& + \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \right. \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(t)_i \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(uw)_l \kappa^{vw}(v)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left(\sum' (s)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (u)_l \kappa^{tu}(vt)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(su)_l \kappa^{rs}(rv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(uw)_l \kappa^{vw}(rv)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(su)_l \kappa^{tu}(tv)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((tv)_i \kappa^{tu} \kappa^{vw}(wu)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big] \\
& + \varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \times \right. \\
& \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i} m_{2i}}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(wv)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + 2 \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l} m_{2l}}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(ru)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(wv)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(sv)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \\
& + \frac{m_{1i}^2}{\phi_i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{tu}(tu)_i \right) \left(\sum' \kappa^{vw}(wv)_l \right) \frac{m_{1l}^2}{\phi_l} \Big]
\end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo, temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{rstuvw} = & \frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[27w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 15w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} + 15w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} \right. \\
& - 3w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} + 9w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 9w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 9w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} \\
& + 5w_{1i}b_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} + 5w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + 5w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + 5w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + 5w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} \\
& \left. + 5w_{1i}b_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}b_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} \right] \\
& + \frac{1}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[15w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 9w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 9w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}d_lw_{1l} \right. \\
& - 3w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 5w_{1i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 5w_{1i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 5w_{1i}z_{\beta_{il}}d_i z_{\beta_{d_i}}w_{3l} \\
& + 3w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} + 3w_{1i}e_{\beta_{il}}d_lw_{1l} + 3w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} + 3w_{1i}e_{\beta_{il}}d_lw_{1l} \\
& + 3w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} + 3w_{1i}z_{\beta_{il}}d_id_lw_{1l} - w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} - w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} \left. \right] \\
& - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 2w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} + 2w_{3i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} \right. \\
& + 2w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 2w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} \\
& \left. + w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + w_{1i}z_{\beta_{il}}b_{\beta_{il}}w_{1l} \right] \\
& - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 2w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 2w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}d_lw_{1l} \right. \\
& + 2w_{1i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 2w_{1i}z_{\beta_{il}}d_i z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} \\
& \left. + w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} + w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} + w_{1i}z_{\beta_{il}}d_id_lw_{1l} \right]
\end{aligned}$$

Simplificando os elementos das matrizes, temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{rstuvw} = & \frac{1}{6} \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[27w_{3i}z_{\beta_{il}}^3 w_{3l} + 54w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 9w_{1i}b_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{1l} \right. \\
& + 18w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} \left. \right] + \frac{1}{4} \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[15w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 16w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} \right. \\
& + 14w_{1i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}d_lw_{3l} + 5w_{1i}z_{\beta_{il}}d_i z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 4w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} + 8w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} \left. \right] \\
& - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4w_{3i}z_{\beta_{il}}^3 w_{3l} + 8w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 2w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} \right. \\
& + 2w_{1i}c_{\beta_{il}}z_{\beta_{il}}w_{3l} + 3w_{1i}g_{\beta_{il}}w_{1l} + w_{1i}z_{\beta_{il}}b_{\beta_{il}}w_{1l} \left. \right] \\
& - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}z_{\beta_{d_i}}w_{3l} + 4w_{3i}e_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}w_{1l} + 4w_{3i}z_{\beta_{il}}z_{\beta_{d_i}}d_lw_{1l} \right. \\
& \left. + w_{1i}z_{\beta_{il}}d_id_lw_{1l} + w_{1i}f_{\beta_{il}}w_{1l} + 2w_{1i}e_{\beta_{il}}d_iw_{1l} \right]
\end{aligned}$$

Finalmente temos que

$$\begin{aligned} \sum' \lambda_{rstuvw} = \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \sum_{i,l=1}^{n,n} & \left[\frac{1}{2} w_{3i} z_{\beta il}^3 w_{3l} - \frac{1}{4} w_{3i} z_{\beta il} z_{\beta di} z_{\beta dl} w_{3l} \right. \\ & - \frac{1}{4} w_{1i} z_{\beta il} d_i d_l w_{1l} - \frac{1}{2} w_{1i} z_{\beta il} z_{\beta di} d_l w_{3l} \\ & \left. + \frac{1}{2} w_{1i} b_{\beta il} z_{\beta il} w_{1l} + w_{1i} c_{\beta li} z_{\beta il} w_{3l} \right] \end{aligned}$$

Portanto, colocando na sua forma matricial, temos que

$$\begin{aligned} \sum' \lambda_{rstuvw} = \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top & \left[\frac{1}{2} W_3 Z_\beta^{(3)} W_3 - \frac{1}{4} W_3 Z_{\beta d} Z_\beta Z_{\beta d} W_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} D_\beta W_1 Z_\beta \{W_1 D_\beta + 2 Z_{\beta d} W_3\} + \text{tr} \left\{ \left[W_3 C_\beta + \frac{1}{2} W_1 B_\beta \right] W_1 Z_\beta \right\} \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{rstuvw}$

Utilizando a mesma partição no cálculo de $\sum' \lambda_{rstu}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum'' \lambda_{rstuvw} = \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top & \left[\frac{1}{2} W_3 Z_{2\beta}^{(3)} W_3 - \frac{1}{4} W_3 Z_{2\beta d} Z_{2\beta} Z_{2\beta d} W_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} D_{2\beta} W_1 Z_\beta \{W_1 D_{2\beta} + 2 Z_{2\beta d} W_3\} + \text{tr} \left\{ \left[W_3 C_{2\beta} + \frac{1}{2} W_1 B_{2\beta} \right] W_1 Z_{2\beta} \right\} \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

D.0.1 Expressão do termo $\epsilon_{p,\beta}$

Sabemos que $\epsilon_{p,\beta} = \sum' (\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}) = \sum' \lambda_{rstu} - \sum' \lambda_{rstuvw}$, logo substituindo, temos que

$$\begin{aligned} \epsilon_{p,\beta} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1^2 Z_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_2 Z_{\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{2} \boldsymbol{\iota}^\top W_3 [Z_{\beta d} D_\beta - 2 C_{\beta d}] \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1 [D_\beta^{(2)} - 2 B_{\beta d}] \boldsymbol{\iota} \\ & - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\frac{1}{2} W_3 Z_\beta^{(3)} W_3 - \frac{1}{4} W_3 Z_{\beta d} Z_\beta Z_{\beta d} W_3 - \frac{1}{4} D_\beta W_1 Z_\beta \{W_1 D_\beta + 2 Z_{\beta d} W_3\} \right. \\ & \left. + \text{tr} \left\{ \left[W_3 C_\beta + \frac{1}{2} W_1 B_\beta \right] W_1 Z_\beta \right\} \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

D.0.2 Expressão do termo $\epsilon_{p-p_1,\beta}$

Sabemos que $\epsilon_{p-p_1,\beta} = \sum''(\lambda_{rstu} - \lambda_{rstuvw}) = \sum''\lambda_{rstu} - \sum''\lambda_{rstuvw}$, logo substituindo, temos que

$$\begin{aligned}\epsilon_{p-p_1,\beta} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1^2 Z_{2\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_2 Z_{2\beta d}^{(2)} \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{2} \boldsymbol{\iota}^\top W_3 [Z_{2\beta d} D_{2\beta} - 2C_{2\beta d}] \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^3}{4} \boldsymbol{\iota}^\top W_1 [D_{2\beta}^{(2)} - 2B_{2\beta d}] \boldsymbol{\iota} \\ & - \varphi_{(0,1,0,0,0)}^5 \boldsymbol{\iota}^\top \left[\frac{1}{2} W_3 Z_{2\beta}^{(3)} W_3 - \frac{1}{4} W_3 Z_{2\beta d} Z_{2\beta} Z_{2\beta d} W_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} D_{2\beta} W_1 Z_{2\beta} \{W_1 D_{2\beta} + 2Z_{2\beta d} W_3\} + tr\{[W_3 C_{2\beta} + \frac{1}{2} W_1 B_{2\beta}] W_1 Z_{2\beta}\} \right] \boldsymbol{\iota}\end{aligned}$$

D.1 EXPRESSÃO DE $\epsilon_{q,\delta}$ E $\epsilon_{q-q_1,\delta}$ PARA O COMPONENTE δ

Nesta seção, vamos calcular λ_{RSTU} , $\sum'\lambda_{RSTU}$, $\sum''\lambda_{RSTU}$ e λ_{RSTUVW} , $\sum'\lambda_{RSTUVW}$, $\sum''\lambda_{RSTUVW}$ na sequencia afim de avaliar o valor do termo $\epsilon_{q,\delta}$ e $\epsilon_{q-q_1,\beta}$ para o componente δ .

- Cálculo de λ_{RSTU}

Sabemos que $\lambda_{RSTU} = \kappa^{RS} \kappa^{TU} \left(\frac{\kappa_{RSTU}}{4} - \kappa_{RST}^{(U)} + \kappa_{RT}^{(SU)} \right)$, portanto, substituindo os respectivos valores dos cumulantes na fórmula de λ_{RSTU} , temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_{RSTU} = & \kappa^{RS} \kappa^{TU} \left\{ \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{16} \left(\varphi_{(0,0,0,1,4)} + 18\varphi_{(0,0,1,0,3)} + 87\varphi_{(0,1,0,0,2)} - 57 \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l \right. \right. \right. \\
& + \frac{3}{4} \left(7 - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l \\
& + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l + Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{3l}}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l \\
& + \frac{1}{8} \left(7 - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left[(RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l \right. \\
& + (R, S, TU)_l + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \Big] \\
& + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left[(RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l \right. \\
& + (RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \Big] \\
& + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left[(RST, U)_l + (RSU, T)_l + (RS, TU)_l \right. \\
& + (RTU, S)_l + (RT, SU)_l + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \Big] \Big] \\
& - \left(-\frac{3}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l \right. \\
& + \frac{3}{8} \left(11 - 13\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l \\
& + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{3l}}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l \\
& + \frac{1}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left[(RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l \right] \\
& + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left[(RU, S, T)_l + (R, SU, T)_l + (R, S, TU)_l \right] \\
& - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left[(RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \right] \\
& + \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left[(RS, T, U)_l + (RT, S, U)_l + (R, ST, U)_l \right] \\
& + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left[(RSU, T)_l + (RS, TU)_l \right. \\
& + (RTU, S)_l + (RT, SU)_l + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \Big] \Big] \\
& - \frac{5}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3} (R, S, T, U)_l + \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{3l}}{\phi_l^2} (R, S, T, U)_l + \frac{3}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} (R, S, T, U)_l \\
& - \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left[(RU, S, T)_l + (R, S, TU)_l \right. \\
& + (R, SU, T)_l + (RS, T, U)_l + (R, ST, U)_l \left. \right] \\
& + \frac{1}{2}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}h_{2l}}{\phi_l^2} \left[(RU, S, T)_l + (R, S, TU)_l \right. \\
& + (R, SU, T)_l + (RS, T, U)_l + (R, ST, U)_l \left. \right] \\
& + \frac{1}{4}Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left[(RSU, T)_l + (RS, TU)_l + (RU, ST)_l + (R, STU)_l \right] \Big\}
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_{RSTU} = & \frac{1}{64} \left(\varphi_{(0,0,0,1,4)} - 6\varphi_{(0,0,1,0,3)} - 33\varphi_{(0,1,0,0,2)} + 15 \right) \times \\
& \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^4}{\phi_l^4} \left((R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& + \frac{1}{16} \left(11\varphi_{(0,1,0,0,2)} + 3\varphi_{(0,0,1,0,3)} - 5 \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3} \left((R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& - \frac{1}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2} \left((R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& + \frac{1}{32} \left(11\varphi_{(0,1,0,0,2)} + 3\varphi_{(0,0,1,0,3)} - 5 \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left[(S)_l \kappa^{RS}(RU)_l \kappa^{TU}(T)_l \right. \\
& + (R)_l \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_l + \left. \left((R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\kappa^{TU}(TU)_l \right) \right] \\
& + \frac{1}{32} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} \left[\left((RS)_l \kappa^{RS} \right) \left((T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \right. \\
& + (S)_l \kappa^{RS}(RT)_l \kappa^{TU}(U)_l + (R)_l \kappa^{RS}(ST)_l \kappa^{TU}(U)_l \left. \right] \\
& + \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S)_l \kappa^{RS}(RT)_l \kappa^{TU}(U)_l \\
& + \frac{1}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left[(RSU)_l \kappa^{RS} \kappa^{TU}(T)_l \right. \\
& + \left. \left((RS)_l \kappa^{RS} \right) \left(\kappa^{TU}(TU)_l \right) + (RU)_l \kappa^{RS}(ST)_l \kappa^{TU} \right. \\
& + (STU)_l \kappa^{TU} \kappa^{RS}(R)_l + (RST)_l \kappa^{RS} \kappa^{TU}(U)_l - 3(RTU)_l \kappa^{RS} \kappa^{TU}(S)_l \\
& - \left. 3(RT)_l \kappa^{RS} \kappa^{TU}(SU)_l \right] \\
& + \frac{1}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} \left[- (S)_l \kappa^{RS}(RU)_l \kappa^{TU}(T)_l \right. \\
& - (R)_l \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_l - \left. \left((R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\kappa^{TU}(TU)_l \right) \right. \\
& + \left. \left(3(RS)_l \kappa^{RS} \right) \left((T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) + 3(R)_l \kappa^{RS}(ST)_l \kappa^{TU}(U)_l \right. \\
& - \left. 5(S)_l \kappa^{RS}(RT)_l \kappa^{TU}(U)_l \right]
\end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum' \lambda_{RSTU}$

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RSTU} = & Q_1 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^4 \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& + Q_2 \sum_{l=1}^n \Delta_{3l} \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& + Q_3 \sum_{l=1}^n \Delta_{2l} \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& + Q_5 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^3 \left[\left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RU)_l \kappa^{TU}(T)_l \right) \right. \\
& + \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_l \right) + \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' \kappa^{TU}(TU)_l \right) \Big] \\
& + Q_6 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^3 \left[\left(\sum' (RS)_l \kappa^{RS} \right) \left(\sum' (T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \right. \\
& + \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RT)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) + \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(ST)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \Big] \\
& + Q_7 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^3 \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RT)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& + Q_8 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2 \left[\left(\sum' (RSU)_l \kappa^{RS} \kappa^{TU}(T)_l \right) \right. \\
& + \left(\sum' (RS)_l \kappa^{RS} \right) \left(\sum' \kappa^{TU}(TU)_l \right) + \left(\sum' (RU)_l \kappa^{RS}(ST)_l \kappa^{TU} \right) \\
& + \left(\sum' (STU)_l \kappa^{TU} \kappa^{RS}(R)_l \right) + \left(\sum' (RST)_l \kappa^{RS} \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& - 3 \left(\sum' (RTU)_l \kappa^{RS} \kappa^{TU}(S)_l \right) - 3 \left(\sum' (RT)_l \kappa^{RS} \kappa^{TU}(SU)_l \right) \Big] \\
& + Q_9 \sum_{l=1}^n \Delta_{4l} \left[- \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RU)_l \kappa^{TU}(T)_l \right) \right. \\
& - \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_l \right) - \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' \kappa^{TU}(TU)_l \right) \\
& + 3 \left(\sum' (RS)_l \kappa^{RS} \right) \left(\sum' (T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) + 3 \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(ST)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\
& \left. - 5 \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RT)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \right]
\end{aligned}$$

em que $Q_1 = \frac{1}{64}(\varphi_{(0,0,0,1,4)} - 6\varphi_{(0,0,1,0,3)} - 33\varphi_{(0,1,0,0,2)} + 15)$, $Q_2 = \frac{1}{16}(11\varphi_{(0,1,0,0,2)} + 3\varphi_{(0,0,1,0,3)} - 5)$, $Q_3 = -\frac{1}{16}Q_{12}$, $Q_4 = \frac{1}{16}(\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1) = Q_5 + Q_6$, $Q_5 = \frac{1}{32}(11\varphi_{(0,1,0,0,2)} + 3\varphi_{(0,0,1,0,3)} - 5)$, $Q_6 = \frac{1}{32}(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)})$, $Q_7 = \frac{1}{2}Q_{12}$, $Q_8 = Q_9 = -Q_3$ e $\Delta_1 = \frac{h_{1l}}{\phi_l}$, $\Delta_{2l} = \frac{h_{2l}^2}{\phi_l^2}$, $\Delta_{3l} = \frac{h_{1l}^2 h_{2l}}{\phi_l^3}$, $\Delta_{4l} = \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2}$, $\Delta_{5l} = \frac{h_{1l} h_{3l}}{\phi_l^2}$, $\Delta_{6l} = \frac{h_{2l}}{\phi_l}$.

Identificando as matrizes e substituindo, temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RSTU} = & Q_1 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^4 (z_{\delta d_l}) (z_{\delta d_l}) + Q_2 \sum_{l=1}^n \Delta_{3l} (z_{\delta d_l}) (z_{\delta d_l}) + Q_3 \sum_{l=1}^n \Delta_{2l} (z_{\delta d_l}) (z_{\delta d_l}) \\
& + Q_5 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^3 [(c_{\delta d_l}) + (c_{\delta d_l}) + (z_{\delta d_l}) (d_{\delta_l})] \\
& + Q_6 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^3 [(z_{\delta d_l}) (d_{\delta_l}) + (c_{\delta d_l}) + (c_{\delta d_l})] + Q_7 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^3 (c_{\delta d_l}) \\
& + Q_8 \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2 [(n_{\delta d_l}) + (d_{\delta_l}) (d_{\delta_l}) + (b_{\delta d_l}) + (n_{\delta d_l}) + (n_{\delta d_l}) \\
& - 3(n_{\delta d_l}) - 3(b_{\delta d_l})] + Q_9 \sum_{l=1}^n \Delta_{4l} [- (c_{\delta d_l}) - (c_{\delta d_l}) - (z_{\delta d_l}) (d_{\delta_l}) \\
& + 3(d_{\delta_l}) (z_{\delta d_l}) + 3(c_{\delta d_l}) - 5(c_{\delta d_l})]
\end{aligned}$$

Logo simplificando a expressão e colocando na sua forma matricial, temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RSTU} = & \frac{1}{16} Q_{12}^2 \left\{ \boldsymbol{\iota}^\top [Q_1 \Delta_1^4 Z_{\delta d}^2 + Q_2 \Delta_3 Z_{\delta d}^2 + Q_3 \Delta_2 Z_{\delta d}^2] \boldsymbol{\iota} \right. \\
& + \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 [Q_4 Z_{\delta d} D_\delta + (2Q_4 + Q_7) C_{\delta d}] \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{\iota}^\top Q_8 \Delta_1^2 [D_\delta^2 - 2B_{\delta d}] \boldsymbol{\iota} \\
& \left. + \boldsymbol{\iota}^\top Q_9 \Delta_4 [2Z_{\delta d} D_\delta - 4C_{\delta d}] \boldsymbol{\iota} \right\}
\end{aligned}$$

em que $Q_4 = Q_5 + Q_6 = \frac{1}{16} (\varphi_{(0,1,0,0,2)} + \varphi_{(0,0,1,0,3)} + 1)$.

▪ Cálculo de $\sum'' \lambda_{RSTU}$

Utilizamos a seguinte partição da matriz S a seguir $\tilde{S} = (\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$ de tal forma que $\tilde{S}_{1(n \times q_1)}$ e $\tilde{S}_{2(n \times (q-q_1))}$ sejam de postos reduzidos e substituindo a matriz $\tilde{S}$ pela matriz $\tilde{S}_2$. Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\begin{aligned}
\sum'' \lambda_{RSTU} = & \frac{1}{16} Q_{12}^2 \left\{ \boldsymbol{\iota}^\top [Q_1 \Delta_1^4 Z_{2\delta d}^2 + Q_2 \Delta_3 Z_{2\delta d}^2 + Q_3 \Delta_2 Z_{2\delta d}^2] \boldsymbol{\iota} \right. \\
& + \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 [Q_4 Z_{2\delta d} D_{2\delta} + (2Q_4 + Q_7) C_{2\delta d}] \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{\iota}^\top Q_8 \Delta_1^2 [D_{2\delta}^2 - 2B_{2\delta d}] \boldsymbol{\iota} \\
& \left. + \boldsymbol{\iota}^\top Q_9 \Delta_4 [2Z_{2\delta d} D_{2\delta} - 4C_{2\delta d}] \boldsymbol{\iota} \right\}
\end{aligned}$$

▪ Cálculo de λ_{RSTUVW}

Sabemos por definição que $\lambda_{RSTUVW} = \kappa^{RS} \kappa^{TU} \kappa^{VW} \left\{ \kappa_{RTV} \left(\frac{\kappa_{SUW}}{6} - \kappa_{SW}^{(U)} \right) + \kappa_{RTU} \left(\frac{\kappa_{SVW}}{4} - \kappa_{SW}^{(V)} \right) + \kappa_{RT}^{(V)} \kappa_{SW}^{(U)} + \kappa_{RT}^{(U)} \kappa_{SW}^{(V)} \right\}$, em que

$$\begin{aligned} \kappa_{RTV} \left(\frac{\kappa_{SUW}}{6} - \kappa_{SW}^{(U)} \right) &= \frac{1}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^3}{\phi_i^3} (R, T, V)_i \\ &\quad + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i} h_{2i}}{\phi_i^2} (R, T, V)_i \\ &\quad + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^2}{\phi_i^2} \left[(RT, V)_i + (RV, T)_i + (R, VT)_i \right] \\ &\quad \left\{ \frac{1}{6} \left[\frac{1}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, U, W)_l \right. \right. \\ &\quad + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, U, W)_l \\ &\quad + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left[(SU, W)_l + (SW, U)_l + (S, WU)_l \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, W, U)_l \\ &\quad - \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left[(SU, W)_l + (S, WU)_l \right] \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, W, U)_l \right] \right\} \end{aligned}$$

Simplificando a expressão, temos que

$$\begin{aligned} \kappa_{RTV} \left(\frac{\kappa_{SUW}}{6} - \kappa_{SW}^{(U)} \right) &= \left\{ \frac{1}{8} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^3}{\phi_i^3} (R, T, V)_i \right. \\ &\quad + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i} h_{2i}}{\phi_i^2} (R, T, V)_i \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^2}{\phi_i^2} \left[(RT, V)_i + (RV, T)_i + (R, VT)_i \right] \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{1}{48} \left(15\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 17 \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, U, W)_l \right. \\ &\quad - \frac{9}{24} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, U, W)_l \\ &\quad - \frac{5}{24} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left[(SU, W)_l + (S, WU)_l \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} (SW, U)_l \right\} \end{aligned}$$

Da mesma forma temos

$$\begin{aligned} \kappa_{RTU}(\frac{\kappa_{SVW}}{4} - \kappa_{SW}^{(V)}) &= \left\{ \frac{1}{8} (7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)}) \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^3}{\phi_i^3} (R, T, U)_i \right. \\ &\quad + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i} h_{2i}}{\phi_i^2} (R, T, U)_i \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^2}{\phi_i^2} [(RT, U)_i + (RU, T)_i + (R, TU)_i] \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{1}{32} (7\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 9) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, V, W)_l \right. \\ &\quad - \frac{5}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, V, W)_l \\ &\quad - \frac{3}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} [(SV, W)_l + (S, WV)_l] \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} (SW, V)_l \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{RT}^{(V)} \kappa_{SW}^{(U)} &= \left[\frac{1}{2} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i} h_{2i}}{\phi_i^2} (R, T, V)_i \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^3}{\phi_i^3} (R, T, V)_i \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^2}{\phi_i^2} [(RV, T)_i + (R, TV)_i] \right] \times \\ &\quad \left[\frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, W, U)_l \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, W, U)_l \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} [(SU, W)_l + (S, WU)_l] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{RT}^{(U)} \kappa_{SW}^{(V)} &= \left[\frac{1}{2} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i} h_{2i}}{\phi_i^2} (R, T, U)_i \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^3}{\phi_i^3} (R, T, U)_i \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^2}{\phi_i^2} [(RU, T)_i + (R, TU)_i] \right] \times \\ &\quad \left[\frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, W, V)_l \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, W, V)_l \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} [(SV, W)_l + (S, WV)_l] \right] \end{aligned}$$

Para simplificar mais a expressão, adotamos os seguintes escalares

$$Q_{10} = (7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)}), \quad Q_{11} = (15\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 17)$$

$$Q_{12} = Q_{12}, \quad Q_{13} = (7\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} - 9) = Q_{10} + 16Q_{12}.$$

$$\begin{aligned} \lambda_{RSTUVW} = & \frac{1}{384} Q_{10} Q_{11} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 ((R)_i \kappa^{RS}(S)_l) ((T)_i \kappa^{TU}(U)_l) ((V)_i \kappa^{VW}(W)_l) \Delta_{1l}^3 \\ & - \frac{9}{192} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 ((R)_i \kappa^{RS}(S)_l) ((T)_i \kappa^{TU}(U)_l) ((V)_i \kappa^{VW}(W)_l) \Delta_{4l} \\ & - \frac{5}{192} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^3 ((R)_i \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_i) ((V)_i \kappa^{VW}(W)_l) \Delta_{1l}^2 \right. \\ & \left. + \Delta_{1i}^3 ((R)_i \kappa^{RS}(S)_l) ((T)_i \kappa^{TU}(UW)_l \kappa^{VW}(V)_i) \Delta_{1l}^2 \right] \\ & + \frac{1}{192} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 ((R)_i \kappa^{RS}(SW)_l \kappa^{VW}(V)_i) ((T)_i \kappa^{TU}(U)_l) \Delta_{1l}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{192} Q_{11} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - \frac{27}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& - \frac{15}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_i \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \left. \Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(UW)_l \kappa^{VW}(V)_i \right) \Delta_{1l}^2 \right] \\
& + \frac{3}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(SW)_l \kappa^{VW}(V)_i \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \frac{1}{192} Q_{11} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2 \left((S)_l \kappa^{RS}(RT)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \right. \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((S)_l \kappa^{RS}(RV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& + \left. \Delta_{1i}^2 \left((U)_l \kappa^{TU}(TV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^3 \right] \\
& - \frac{9}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2 \left((S)_l \kappa^{RS}(RT)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \right. \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((S)_l \kappa^{RS}(RV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + \left. \Delta_{1i}^2 \left((U)_l \kappa^{TU}(TV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{4l} \right] \\
& - \frac{5}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2 \left((RT)_i \kappa^{RS} \kappa^{TU}(SU)_l \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((V)_i \kappa^{VW}(WU)_l \kappa^{TU}(RT)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((T)_i \kappa^{TU}(SU)_l \kappa^{RS}(RV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((T)_i \kappa^{TU}(WU)_l \kappa^{VW}(RV)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(TV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \left. \Delta_{1i}^2 \left((TV)_i \kappa^{TU} \kappa^{VW}(WU)_l \right) \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \right] \\
& + \frac{1}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2 \left((V)_i \kappa^{VW}(SW)_l \kappa^{RS}(RT)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((RV)_i \kappa^{RS} \kappa^{VW}(SW)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \left. \Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS}(SW)_l \kappa^{VW}(TV)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \Delta_{1l}^2 \right] \\
& + \frac{1}{256} Q_{10} Q_{13} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - \frac{5}{128} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{128}Q_{10}Q_{12}\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^3((R)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l)((T)_i\kappa^{TU}(U)_i)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\Delta_{1i}^3((R)_i\kappa^{RS}(S)_l)((T)_i\kappa^{TU}(U)_i)(\kappa^{VW}(VW)_l)\Delta_{1l}^2\left. \right] \\
& +\frac{1}{128}Q_{10}Q_{12}\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^3((R)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l)((T)_i\kappa^{TU}(U)_i)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\frac{3}{128}Q_{12}Q_{13}\sum_{i,l=1}^{n,n}\Delta_{4i}((R)_i\kappa^{RS}(S)_l)((T)_i\kappa^{TU}(U)_i)((V)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{1l}^3 \\
& -\frac{15}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\Delta_{4i}((R)_i\kappa^{RS}(S)_l)((T)_i\kappa^{TU}(U)_i)((V)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{4l} \\
& -\frac{9}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{4i}((R)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l)((T)_i\kappa^{TU}(U)_i)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\Delta_{4i}((R)_i\kappa^{RS}(S)_l)(\kappa^{VW}(VW)_l)((T)_i\kappa^{TU}(U)_i)\Delta_{1l}^2\left. \right] \\
& +\frac{3}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\Delta_{4i}((R)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l)((T)_i\kappa^{TU}(U)_i)\Delta_{1l}^2 \\
& +\frac{1}{128}Q_{13}Q_{12}\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^2((U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(S)_l)((V)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{1l}^3\right. \\
& +\Delta_{1i}^2((T)_i\kappa^{TU}(RU)_i\kappa^{RS}(S)_l)((V)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{1l}^3 \\
& +\Delta_{1i}^2((R)_i\kappa^{RS}(S)_l)((TU)_i\kappa^{TU})(V)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{1l}^3\left. \right] \\
& -\frac{5}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^2((U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(S)_l)((V)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{4l} \right. \\
& +\Delta_{1i}^2((T)_i\kappa^{TU}(RU)_i\kappa^{RS}(S)_l)((V)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{4l} \\
& +\Delta_{1i}^2((R)_i\kappa^{RS}(S)_l)((TU)_i\kappa^{TU})(V)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{4l}\left. \right] \\
& -\frac{3}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^2((U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\Delta_{1i}^2((U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(S)_l)(\kappa^{VW}(VW)_l)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2((T)_i\kappa^{TU}(RU)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2((S)_l\kappa^{RS}(RU)_i\kappa^{TU}(T)_i)(\kappa^{VW}(VW)_l)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2((R)_i\kappa^{RS}(S)_l)((TU)_i\kappa^{TU})(\kappa^{VW}(VW)_l)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2((R)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l)(\kappa^{TU}(TU)_i)\Delta_{1l}^2\left. \right] \\
& +\frac{1}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^2((U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\Delta_{1i}^2((T)_i\kappa^{TU}(RU)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2((R)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l)(\kappa^{TU}(TU)_i)\Delta_{1l}^2\left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4\Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \right. \\
& - 4\Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& + 2\Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_i \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{4i} \left((T)_i \kappa^{TU}(WU)_l \kappa^{VW}(V)_i \right) \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& - 4\Delta_{1i}^3 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + 4\Delta_{1i}^3 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^3 \left((R)_i \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_i \right) \left((V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& - 2\Delta_{1i}^3 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(UW)_l \kappa^{VW}(V)_i \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{1i}^2 \left((S)_l \kappa^{RS}(RV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + 2\Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((U)_l \kappa^{TU}(TV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& - 2\Delta_{1i}^2 \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((S)_l \kappa^{RS}(RV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((U)_l \kappa^{TU}(TV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((T)_i \kappa^{TU}(SU)_l \kappa^{RS}(RV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(TV)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((T)_i \kappa^{TU}(WU)_l \kappa^{VW}(RV)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((TV)_i \kappa^{TU} \kappa^{VW}(WU)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 4\Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& - 4\Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& + 2\Delta_{4i} \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left((R)_i \kappa^{RS}(SV)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{4i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\kappa^{VW}(WV)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& - 4\Delta_{1i}^3 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + 4\Delta_{1i}^3 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^3 \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left((R)_i \kappa^{RS}(SV)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& - 2\Delta_{1i}^3 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\kappa^{VW}(WV)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{1i}^2 \left((S)_l \kappa^{RS}(RU)_i \kappa^{TU}(T)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + 2\Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\kappa^{TU}(TU)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& - 2\Delta_{1i}^2 \left((S)_l \kappa^{RS}(RU)_i \kappa^{TU}(T)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\kappa^{TU}(TU)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta_{1i}^2 \left((T)_i \kappa^{TU} (RU)_i \kappa^{RS} (SV)_l \kappa^{VW} (W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((T)_i \kappa^{TU} (RU)_i \kappa^{RS} (S)_l \right) \left(\kappa^{VW} (VW)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS} (SV)_l \kappa^{VW} (W)_l \right) \left((TU)_i \kappa^{TU} \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left((R)_i \kappa^{RS} (S)_l \right) \left(\kappa^{TU} (TU)_i \right) \left(\kappa^{VW} (WV)_l \right) \Delta_{1l}^2 \Big]
\end{aligned}$$

■ Cálculo de $\sum' \lambda_{RSTUVW}$

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RSTUVW} &= \frac{1}{384} Q_{10} Q_{11} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS} (S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU} (U)_l \right) \\
&\times \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW} (W)_l \right) \Delta_{1l}^3 - \frac{9}{192} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS} (S)_l \right) \\
&\left(\sum' (T)_i \kappa^{TU} (U)_l \right) \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW} (W)_l \right) \Delta_{4l} \\
&- \frac{5}{192} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS} (SU)_l \kappa^{TU} (T)_i \right) \right. \\
&\times \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW} (W)_l \right) \Delta_{1l}^2 + \Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS} (S)_l \right) \\
&\times \left. \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU} (UW)_l \kappa^{VW} (V)_i \right) \Delta_{1l}^2 \right] \\
&+ \frac{1}{192} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS} (SW)_l \kappa^{VW} (V)_i \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU} (U)_l \right) \Delta_{1l}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{192} Q_{11} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i} \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - \frac{27}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i} \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& - \frac{15}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{4i} \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_i \right) \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \Delta_{4i} \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(UW)_l \kappa^{VW}(V)_i \right) \Delta_{1l}^2 \left. \right] \\
& + \frac{3}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i} \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(SW)_l \kappa^{VW}(V)_i \right) \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \frac{1}{192} Q_{11} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RT)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \right. \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RV)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (U)_l \kappa^{TU}(TV)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \Delta_{1l}^3 \left. \right] \\
& - \frac{9}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RT)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{4l} \right. \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RV)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (U)_l \kappa^{TU}(TV)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \Delta_{4l} \left. \right] \\
& - \frac{5}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (RT)_{i\kappa^{RS}} \kappa^{TU}(SU)_l \right) \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(WU)_l \kappa^{TU}(RT)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(SU)_l \kappa^{RS}(RV)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(WU)_l \kappa^{VW}(RV)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(SU)_l \kappa^{TU}(TV)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (TV)_{i\kappa^{TU}} \kappa^{VW}(WU)_l \right) \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \left. \right] \\
& + \frac{1}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(SW)_l \kappa^{RS}(RT)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (RV)_{i\kappa^{RS}} \kappa^{VW}(SW)_l \right) \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(SW)_l \kappa^{VW}(TV)_{i\kappa^{TU}}(U)_l \right) \Delta_{1l}^2 \left. \right] \\
& + \frac{1}{256} Q_{10} Q_{13} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(U)_i \right) \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - \frac{5}{128} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_{i\kappa^{RS}}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_{i\kappa^{TU}}(U)_i \right) \left(\sum' (V)_{i\kappa^{VW}}(W)_l \right) \Delta_{4l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{128}Q_{10}Q_{12}\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^3\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(U)_i\right)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\Delta_{1i}^3\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(U)_i\right)\left(\sum'\kappa^{VW}(VW)_l\right)\Delta_{1l}^2\Big] \\
& +\frac{1}{128}Q_{10}Q_{12}\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^3\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l\right)\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(U)_i\right)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\frac{3}{128}Q_{12}Q_{13}\sum_{i,l=1}^{n,n}\Delta_{4i}\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(U)_i\right)\left(\sum'(V)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{1l}^3 \\
& -\frac{15}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\Delta_{4i}\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(U)_i\right)\left(\sum'(V)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{4l} \\
& -\frac{9}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{4i}\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(U)_i\right)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\Delta_{4i}\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'\kappa^{VW}(VW)_l\right)\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(U)_i\right)\Delta_{1l}^2\Big] \\
& +\frac{3}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\Delta_{4i}\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l\right)\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(U)_i\right)\Delta_{1l}^2 \\
& +\frac{1}{128}Q_{13}Q_{12}\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^2\left(\sum'(U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(V)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{1l}^3\right. \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(RU)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(V)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{1l}^3 \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(TU)_i\kappa^{TU}\right)\left(\sum'(V)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{1l}^3\Big] \\
& -\frac{5}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^2\left(\sum'(U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(V)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{4l}\right. \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(RU)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(V)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{4l} \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(TU)_i\kappa^{TU}\right)\left(\sum'(V)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{4l}\Big] \\
& -\frac{3}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^2\left(\sum'(U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'\kappa^{VW}(VW)_l\right)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(RU)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(S)_l\kappa^{RS}(RU)_i\kappa^{TU}(T)_i\right)\left(\sum'\kappa^{VW}(VW)_l\right)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(S)_l\right)\left(\sum'(TU)_i\kappa^{TU}\right)\left(\sum'\kappa^{VW}(VW)_l\right)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(SV)_l\kappa^{VW}(W)_l\right)\left(\sum'\kappa^{TU}(TU)_i\right)\Delta_{1l}^2\Big] \\
& +\frac{1}{64}Q_{12}^2\sum_{i,l=1}^{n,n}\left[\Delta_{1i}^2\left(\sum'(U)_i\kappa^{TU}(RT)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l\right)\Delta_{1l}^2\right. \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(T)_i\kappa^{TU}(RU)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l\right)\Delta_{1l}^2 \\
& +\Delta_{1i}^2\left(\sum'(R)_i\kappa^{RS}(SW)_l\kappa^{VW}(V)_l\right)\left(\sum'\kappa^{TU}(TU)_i\right)\Delta_{1l}^2\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[4\Delta_{4i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \right. \\
& - 4\Delta_{4i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& + 2\Delta_{4i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_i \right) \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{4i} \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(WU)_l \kappa^{VW}(V)_i \right) \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& - 4\Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + 4\Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(T)_i \right) \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& - 2\Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(UW)_l \kappa^{VW}(V)_i \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + 2\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (U)_l \kappa^{TU}(TV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& - 2\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (U)_l \kappa^{TU}(TV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(SU)_l \kappa^{RS}(RV)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(SU)_l \kappa^{TU}(TV)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(WU)_l \kappa^{VW}(RV)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (TV)_i \kappa^{TU} \kappa^{VW}(WU)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 4\Delta_{4i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& - 4\Delta_{4i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& + 2\Delta_{4i} \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(SV)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{4i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' \kappa^{VW}(WV)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& - 4\Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + 4\Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^3 \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(SV)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& - 2\Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' \kappa^{VW}(WV)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RU)_i \kappa^{TU}(T)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + 2\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' \kappa^{TU}(TU)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& - 2\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RU)_i \kappa^{TU}(T)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' \kappa^{TU}(TU)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU} (RU)_i \kappa^{RS} (SV)_l \kappa^{VW} (W)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU} (RU)_i \kappa^{RS} (S)_l \right) \left(\sum' \kappa^{VW} (VW)_l \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS} (SV)_l \kappa^{VW} (W)_l \right) \left(\sum' (TU)_i \kappa^{TU} \right) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS} (S)_l \right) \left(\sum' \kappa^{TU} (TU)_i \right) \left(\sum' \kappa^{VW} (WV)_l \right) \Delta_{1l}^2 \Big]
\end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RSTUVW} = & \frac{1}{384} Q_{10} Q_{11} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^3 \\
& - \frac{9}{192} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{4l} \\
& - \frac{5}{192} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^3(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(c_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right] \\
& + \frac{1}{192} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \\
& + \frac{3}{192} Q_{11} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^3 \\
& - \frac{27}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{4l} \\
& - \frac{15}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{4i}(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& \left. + \Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(c_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right] \\
& + \frac{3}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i}(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \\
& + \frac{1}{192} Q_{11} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^3 \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(c_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^3 \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^3 \right] \\
& - \frac{9}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{4l} \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(c_{\delta_{il}}) \Delta_{4l} \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{4l} \right] \\
& - \frac{5}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2(b_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(g_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(g_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(g_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(g_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(b_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{96} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2(g_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \Delta_{1i}^2(b_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \\
& \left. + \Delta_{1i}^2(g_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right] \\
& + \frac{1}{256} Q_{10} Q_{13} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{1l}^3 \\
& - \frac{5}{128} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{4l} \\
& - \frac{3}{128} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^3(e_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(d_{\delta_l}) \Delta_{1l}^2 \left. \right] \\
& + \frac{1}{128} Q_{10} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{1i}^3(e_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}}) \Delta_{1l}^2 \\
& + \frac{3}{128} Q_{12} Q_{13} \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{1l}^3 \\
& - \frac{15}{64} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{4l} \\
& - \frac{9}{64} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{4i}(e_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(d_{\delta_l}) \Delta_{1l}^2 \left. \right] \\
& + \frac{3}{64} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Delta_{4i}(e_{\delta_{ii}})(z_{\delta_{d_i}}) \Delta_{1l}^2 \\
& + \frac{1}{128} Q_{13} Q_{12} \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{1l}^3 \right. \\
& + \Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{1l}^3 \\
& + \Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(d_{\delta_i})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{1l}^3 \left. \right] \\
& - \frac{5}{64} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{4l} \right. \\
& + \Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{4l} \\
& + \Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(d_{\delta_i})(z_{\delta_{d_l}}) \Delta_{4l} \left. \right] \\
& - \frac{3}{64} Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \left[\Delta_{1i}^2(f_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2 \right. \\
& + \Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(d_{\delta_i}) \Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(f_{\delta_{il}}) \Delta_{1l}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(d_{\delta_l})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(d_{\delta_i})(d_{\delta_l})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(d_{\delta_i})\Delta_{1l}^2 \Big] \\
& + \frac{1}{64}Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Big[\Delta_{1i}^2(f_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(f_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(d_{\delta_i})\Delta_{1l}^2 \Big] \\
& + \frac{1}{16}Q_{12}^2 \sum_{i,l=1}^{n,n} \Big[4\Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})\Delta_{4l} \\
& - 4\Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^3 \\
& + 2\Delta_{4i}(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{4i}(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& - 4\Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})\Delta_{4l} \\
& + 4\Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^3(c_{\delta_{li}})(z_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& - 2\Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(c_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{1i}^2(c_{\delta_{il}})(z_{\delta_{il}})\Delta_{4l} \\
& + 2\Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(c_{\delta_{il}})\Delta_{4l} \\
& - 2\Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(c_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(c_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^3 \\
& + \Delta_{1i}^2(g_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(g_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(g_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(b_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + 4\Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(z_{\delta_{d_l}})\Delta_{4l} \\
& - 4\Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(z_{\delta_{d_l}})\Delta_{1l}^3 \\
& + 2\Delta_{4i}(z_{\delta_{d_i}})(e_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{4i}(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(d_{\delta_l})\Delta_{1l}^2 \\
& - 4\Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{d_i}})(z_{\delta_{d_l}})\Delta_{4l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{di}})(z_{\delta_{dl}})\Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^3(z_{\delta_{di}})(e_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& - 2\Delta_{1i}^3(z_{\delta_{il}})(z_{\delta_{di}})(d_{\delta_l})\Delta_{1l}^2 \\
& + 2\Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(z_{\delta_{dl}})\Delta_{4l} \\
& + 2\Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(d_{\delta_i})(z_{\delta_{dl}})\Delta_{4l} \\
& - 2\Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(z_{\delta_{dl}})\Delta_{1l}^3 \\
& - 2\Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(d_{\delta_i})(z_{\delta_{dl}})\Delta_{1l}^3 \\
& + \Delta_{1i}^2(f_{\delta_{il}})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(d_{\delta_{ll}})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(e_{\delta_{il}})(d_{\delta_i})\Delta_{1l}^2 \\
& + \Delta_{1i}^2(z_{\delta_{il}})(d_{\delta_i})(d_{\delta_l})\Delta_{1l}^2 \Big]
\end{aligned}$$

Após simplificação dos elementos das matrizes, temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RSTUVW} = & Q_{14}\Delta_{1i}^3 z_{\delta_{il}}^3 \Delta_{1l}^3 + Q_{15}\Delta_{1i}^3 z_{\delta_{il}}^3 \Delta_{4l} - \frac{Q_{12}^2}{32}\Delta_{4i} z_{\delta_{il}}^3 \Delta_{4l} \\
& + Q_{15}\Delta_{1i}^3 c_{\delta_{li}} z_{\delta_{il}} \Delta_{1l}^2 - \frac{Q_{12}^2}{16}\Delta_{4i} c_{\delta_{li}} z_{\delta_{il}} \Delta_{1l}^2 - \frac{Q_{12}^2}{32}\Delta_{1i}^2 b_{\delta_{il}} z_{\delta_{il}} \Delta_{1l}^2 \\
& + Q_{16}\Delta_{1i}^3 z_{\delta_{il}} z_{\delta_{di}}^2 \Delta_{1l}^3 + Q_{17}\Delta_{1i}^3 z_{\delta_{il}} z_{\delta_{di}}^2 \Delta_{4l} + \frac{Q_{12}^2}{64}\Delta_{4i} z_{\delta_{il}} z_{\delta_{di}}^2 \Delta_{4l} \\
& + Q_{18}\Delta_{1i}^3 z_{\delta_{il}} z_{\delta_{di}} d_{\delta_l} \Delta_{1l}^2 + \frac{Q_{12}^2}{32}\Delta_{4i} z_{\delta_{il}} z_{\delta_{di}} d_{\delta_l} \Delta_{1l}^2 + \frac{Q_{12}^2}{64}\Delta_{1i}^2 z_{\delta_{il}} d_{\delta_l}^2 \Delta_{1l}^2
\end{aligned}$$

em que $Q_{14} = \left(\frac{Q_{10}Q_{11}}{384} + \frac{Q_{12}^2}{4}\right)$, $Q_{15} = \left(\frac{3Q_{11}Q_{12}}{192} - \frac{9Q_{10}Q_{12}}{192} - \frac{Q_{12}^2}{2}\right)$, $Q_{16} = \left(\frac{Q_{10}Q_{13}}{256} + \frac{Q_{12}^2}{4}\right)$, $Q_{17} = \left(\frac{3Q_{12}Q_{13}}{128} - \frac{5Q_{10}Q_{12}}{128} - \frac{Q_{12}^2}{2}\right)$, $Q_{18} = \left(\frac{Q_{12}Q_{13}}{128} - \frac{3Q_{10}Q_{12}}{128} - \frac{Q_{12}^2}{4}\right)$. Logo, colocando a expressão acima na sua forma matricial após simplificação, temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RSTUVW} = & -\frac{Q_{12}^3}{64} \left[Q_{14} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta^3 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{15} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} - \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_\delta^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \right. \\
& + Q_{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\delta d}^2 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{17} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_\delta Z_{\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& + Q_{18} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\delta d} D_\delta \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_\delta Z_{\delta d} D_\delta \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 Z_\delta D_\delta^2 \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& \left. + tr \left\{ \left[\left(Q_{15} \Delta_1^3 - \frac{Q_{12}^2}{16} \Delta_4 \right) C_\delta - \frac{Q_{12}^2}{32} \Delta_1^2 B_\delta \right] \Delta_1^2 Z_\delta \right\} \right]
\end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{RSTUVW}$

Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\begin{aligned} \sum'' \lambda_{RSTUVW} = & -\frac{Q_{12}^3}{64} \left[Q_{14} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta}^3 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{15} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta}^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \right. \\ & - \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_{2\delta}^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + Q_{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{17} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + Q_{18} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\delta d} D_{2\delta} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_{2\delta} Z_{2\delta d} D_{2\delta} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 Z_{2\delta} D_{2\delta}^2 \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\ & \left. + \text{tr} \left\{ \left[\left(Q_{15} \Delta_1^3 - \frac{Q_{12}^2}{16} \Delta_4 \right) C_{2\delta} - \frac{Q_{12}^2}{32} \Delta_1^2 B_{2\delta} \right] \Delta_1^2 Z_{2\delta} \right\} \right] \end{aligned}$$

▪ Cálculo de $\epsilon_{q,\delta}$

Sabemos que $\epsilon_{q,\delta} = \sum' (\lambda_{RSTU} - \lambda_{RSTUVW}) = \sum' \lambda_{RSTU} - \sum' \lambda_{RSTUVW}$, então substituindo esses termos, temos que

$$\begin{aligned} \epsilon_{q,\delta} = & \frac{1}{16} Q_{12}^2 \left\{ \boldsymbol{\iota}^\top \left[Q_1 \Delta_1^4 Z_{\delta d}^2 + Q_2 \Delta_3 Z_{\delta d}^2 + Q_3 \Delta_2 Z_{\delta d}^2 \right] \boldsymbol{\iota} \right. \\ & + \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \left[Q_4 Z_{\delta d} D_\delta + (2Q_4 + Q_7) C_{\delta d} \right] \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{\iota}^\top Q_8 \Delta_1^2 \left[D_\delta^2 - 2B_{\delta d} \right] \boldsymbol{\iota} \\ & + \boldsymbol{\iota}^\top Q_9 \Delta_4 \left[2Z_{\delta d} D_\delta - 4C_{\delta d} \right] \boldsymbol{\iota} \left. \right\} + \frac{Q_{12}^3}{64} \left[Q_{14} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta^3 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{15} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \right. \\ & - \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_\delta^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + Q_{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\delta d}^2 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{17} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_\delta Z_{\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + Q_{18} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\delta d} D_\delta \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_\delta Z_{\delta d} D_\delta \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\ & \left. + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 Z_\delta D_\delta^2 \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \text{tr} \left\{ \left[\left(Q_{15} \Delta_1^3 - \frac{Q_{12}^2}{16} \Delta_4 \right) C_\delta - \frac{Q_{12}^2}{32} \Delta_1^2 B_\delta \right] \Delta_1^2 Z_\delta \right\} \right] \end{aligned}$$

▪ Cálculo de $\epsilon_{q-q_1,\delta}$

Sabemos que $\epsilon_{q-q_1,\delta} = \sum'' (\lambda_{RSTU} - \lambda_{RSTUVW}) = \sum'' \lambda_{RSTU} - \sum'' \lambda_{RSTUVW}$, então substituindo esses termos, temos que

$$\begin{aligned} \epsilon_{q-q_1,\delta} = & \frac{1}{16} Q_{12}^2 \left\{ \boldsymbol{\iota}^\top \left[Q_1 \Delta_1^4 Z_{2\delta d}^2 + Q_2 \Delta_3 Z_{2\delta d}^2 + Q_3 \Delta_2 Z_{2\delta d}^2 \right] \boldsymbol{\iota} \right. \\ & + \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \left[Q_4 Z_{2\delta d} D_{2\delta} + (2Q_4 + Q_7) C_{2\delta d} \right] \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{\iota}^\top Q_8 \Delta_1^2 \left[D_{2\delta}^2 - 2B_{2\delta d} \right] \boldsymbol{\iota} \\ & + \boldsymbol{\iota}^\top Q_9 \Delta_4 \left[2Z_{2\delta d} D_{2\delta} - 4C_{2\delta d} \right] \boldsymbol{\iota} \left. \right\} + \frac{Q_{12}^3}{64} \left[Q_{14} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta}^3 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} \right. \\ & + Q_{15} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta}^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} - \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_{2\delta}^3 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + Q_{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2 \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{17} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\ & \times \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2 \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + Q_{18} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\delta d} D_{2\delta} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_{2\delta} Z_{2\delta d} D_{2\delta} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\ & \left. + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 Z_{2\delta} D_{2\delta}^2 \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \text{tr} \left\{ \left[\left(Q_{15} \Delta_1^3 - \frac{Q_{12}^2}{16} \Delta_4 \right) C_{2\delta} - \frac{Q_{12}^2}{32} \Delta_1^2 B_{2\delta} \right] \Delta_1^2 Z_{2\delta} \right\} \right] \end{aligned}$$

▪ Cálculo de $d_{q_1, \delta}$

Sabemos que $d_{q_1, \delta} = \frac{(\epsilon_{q, \delta} - \epsilon_{q-q_1, \delta})}{q_1}$, então substituindo as expressões de $\epsilon_{q, \delta}$ e $\epsilon_{q-q_1, \delta}$ e depois de algumas álgebras, temos que

$$\begin{aligned}
 d_{q_1, \delta} = \frac{1}{q_1} \left\{ \frac{1}{16} Q_{12}^2 \left\{ \boldsymbol{\iota}^\top \left[Q_1 \Delta_1^4 (Z_{\delta d}^2 - Z_{2\delta d}^2) + Q_2 \Delta_3 (Z_{\delta d}^2 - Z_{2\delta d}^2) \right. \right. \right. \\
 + Q_3 \Delta_2 (Z_{\delta d}^2 - Z_{2\delta d}^2) \left. \right] \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 \left[Q_4 (Z_{\delta d} D_\delta - Z_{2\delta d} D_{2\delta}) + (2Q_4 + Q_7) (C_{\delta d} - C_{2\delta d}) \right] \boldsymbol{\iota} \\
 + \boldsymbol{\iota}^\top Q_8 \Delta_1^2 \left[D_\delta^2 - D_{2\delta}^2 - 2B_{\delta d} - 2B_{2\delta d} \right] \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{\iota}^\top Q_9 \Delta_4 \left[2Z_{\delta d} D_\delta - 2Z_{2\delta d} D_{2\delta} - 4C_{\delta d} \right. \\
 \left. \left. - 4C_{2\delta d} \right] \boldsymbol{\iota} \right\} + \frac{Q_{12}^3}{64} \left[Q_{14} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_\delta^3 - Z_{2\delta}^3) \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} + Q_{15} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_\delta^3 - Z_{2\delta}^3) \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \right. \\
 \left. - \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 (Z_\delta^3 - Z_{2\delta}^3) \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + Q_{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_\delta Z_{\delta d}^2 - Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2) \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} \right. \\
 + Q_{17} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_\delta Z_{\delta d}^2 - Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2) \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 (Z_\delta Z_{\delta d}^2 - Z_{2\delta} Z_{2\delta d}^2) \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
 + Q_{18} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_\delta Z_{\delta d} D_\delta - Z_{2\delta} Z_{2\delta d} D_\delta) \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} + \frac{Q_{12}^2}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 (Z_\delta Z_{\delta d} D_\delta - Z_{2\delta} Z_{2\delta d} D_{2\delta}) \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
 + \frac{Q_{12}^2}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 (Z_\delta D_\delta^2 - Z_{2\delta} D_{2\delta}^2) \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
 \left. + tr \left\{ \left[(Q_{15} \Delta_1^3 - \frac{Q_{12}^2}{16} \Delta_4) (C_\delta - C_{2\delta}) - \frac{Q_{12}^2}{32} \Delta_1^2 (B_\delta - B_{2\delta}) \right] \Delta_1^2 (Z_\delta - Z_{2\delta}) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE E – CÁLCULO DE ϵ EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS β E δ

Nesta seção, apresentaremos os cálculos de obtenção de λ' s com 4 índices e 6 índices e, também os ϵ' s e assim como os cálculos de obtenção de $\epsilon_{p_1+q_1, \beta\delta}$

▪ Cálculo de λ_{RStu}

Sabemos que $\lambda_{RStu} = \kappa^{RS} \kappa^{tu} \left(\frac{\kappa_{RStu}}{4} - \kappa_{RSt}^{(u)} + \kappa_{Rt}^{(Su)} \right)$. Logo, substituindo os cumulantes pelas suas respectivas expressões, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{RStu} = & \kappa^{RS} \kappa^{tu} \left[\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} \left(\varphi_{(0,0,0,1,2)} + 7\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 8\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}^2}{\phi_l^3} (R, S, t, u)_l \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{2l}}{\phi_l^2} (R, S, t, u)_l \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (RS, t, u)_l \right\} - 0 + 0 \right] \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_{RStu} = & \frac{1}{16} \left(\varphi_{(0,0,0,1,2)} + 7\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 8\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}^2}{\phi_l^3} \left((R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \\ & - \frac{1}{8} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{2l}}{\phi_l^2} \left((R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \\ & - \frac{1}{8} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} \left((RS)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_{RStu} = & \frac{Q_{19}}{16} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2 W_{1l} \left((R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \\ & - \frac{1}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{6l} W_{1l} \left((R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \\ & - \frac{1}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((RS)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \end{aligned}$$

em que $Q_{19} = \left(\varphi_{(0,0,0,1,2)} + 7\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 8\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right)$ e $Q_{20} = \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right)$

▪ Cálculo de $\sum' \lambda_{RStu}$

$$\begin{aligned} \lambda_{RStu} = & \frac{Q_{19}}{16} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2 W_{1l} \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \\ & - \frac{1}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{6l} W_{1l} \left(\sum' (R)_l \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \\ & - \frac{1}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left(\sum' (RS)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \end{aligned}$$

Identificando as matrizes, temos que

$$\begin{aligned} \sum' \lambda_{RStu} = \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{(\varphi_{(0,1,0,2,0)} - 1)}{4} & \left[\frac{Q_{19}}{16} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2 W_{1l} (z_{\delta d_{ll}}) (z_{\beta d_{ii}}) \right. \\ & - \frac{1}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{6l} W_{1l} (z_{\delta d_{ll}}) (z_{\beta d_{ii}}) \\ & \left. - \frac{1}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} (d_{\delta_{ll}}) (z_{\beta d_{ii}}) \right] \end{aligned}$$

Como todas as matrizes são diagonais, então podemos ainda escrever da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum' \lambda_{RStu} = \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{(\varphi_{(0,1,0,2,0)} - 1)}{4} \boldsymbol{\iota}^\top & \left[\frac{Q_{19}}{16} \Delta_1^2 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} Q_{20} \Delta_6 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} - \frac{1}{8} Q_{20} \Delta_1 W_1 D_{\delta} Z_{\beta d} \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{RStu}$

Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\begin{aligned} \sum'' \lambda_{RStu} = \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{(\varphi_{(0,1,0,2,0)} - 1)}{4} \boldsymbol{\iota}^\top & \left[\frac{Q_{19}}{16} \Delta_1^2 W_1 Z_{2\delta d} Z_{2\beta d} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} Q_{20} \Delta_6 W_1 Z_{2\delta d} Z_{2\beta d} - \frac{1}{8} Q_{20} \Delta_1 W_1 D_{2\delta} Z_{2\beta d} \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

- Cálculo de λ_{rsTU}

Sabemos que $\lambda_{rsTU} = \kappa^{rs} \kappa^{TU} \left(\frac{\kappa_{rsTU}}{4} - \kappa_{rsT}^{(U)} + \kappa_{rT}^{(sU)} \right)$. Logo, substituindo os cumulantes pelas suas respectivas expressões, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{rsTU} = \kappa^{rs} \kappa^{TU} & \left[\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} \left(\varphi_{(0,0,0,1,2)} + 7\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 8\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}^2}{\phi_l^3} (r, s, T, U)_l \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{2l}}{\phi_l^2} (r, s, T, U)_l \\ & - \frac{1}{2} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (r, s, TU)_l \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{2l} m_{1l}^2}{\phi_l^2} (r, s, T, U)_l \\ & + \frac{1}{2} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} m_{1l}^2}{\phi_l^2} (r, s, TU)_l \\ & \left. - \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2 m_{1l}^2}{\phi_l^3} (r, s, T, U)_l \right] \end{aligned}$$

Simplificando a expressão, temos que

$$\begin{aligned}\lambda_{rsTU} = & \frac{1}{16} \left(\varphi_{(0,0,0,1,2)} - 9\varphi_{(0,0,1,0,1)} - 24\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}^2}{\phi_l^3} (r, s, T, U) \\ & + \frac{3}{8} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{2l}}{\phi_l^2} (r, s, T, U)_l \\ & + \frac{3}{8} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (r, s, TU)_l\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lambda_{rsTU} = & Q_{21} \frac{1}{16} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2 W_{1l} \left((r)_l \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\ & + \frac{3}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{6l} W_{1l} \left((r)_l \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\ & + \frac{3}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((r)_l \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\kappa^{TU}(TU)_l \right)\end{aligned}$$

em que $Q_{20} = \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right)$ e $Q_{21} = \left(\varphi_{(0,0,0,1,2)} - 9\varphi_{(0,0,1,0,1)} - 24\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right)$.

- Cálculo de $\sum' \lambda_{rsTU}$

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{rsTU} = & Q_{21} \frac{1}{16} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2 W_{1l} \left(\sum' (r)_l \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\ & + \frac{3}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{6l} W_{1l} \left(\sum' (r)_l \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (T)_l \kappa^{TU}(U)_l \right) \\ & + \frac{3}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left(\sum' (r)_l \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' \kappa^{TU}(TU)_l \right)\end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{rsTU} = & Q_{21} \frac{1}{16} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2 W_{1l} \left(z_{\delta d_{ul}} \right) \left(z_{\beta d_{ul}} \right) \\ & + \frac{3}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{6l} W_{1l} \left(z_{\delta d_{ul}} \right) \left(z_{\beta d_{ul}} \right) \\ & + \frac{3}{8} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left(z_{\beta d_{ul}} \right) \left(d_{\delta u} \right)\end{aligned}$$

Colocando na sua forma matricial, temos que

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{rsTU} = & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{(\varphi_{(0,1,0,2,0)} - 1)}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[Q_{21} \frac{1}{16} \Delta_1^2 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} \right. \\ & \left. + \frac{3}{8} Q_{20} \Delta_6 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} + \frac{3}{8} Q_{20} \Delta_1 W_1 Z_{\beta d} D_\delta \right] \boldsymbol{\iota}\end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{rsTU}$

Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\sum'' \lambda_{rsTU} = \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{(\varphi_{(0,1,0,2,0)} - 1)}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[Q_{21} \frac{1}{16} \Delta_1^2 W_1 Z_{2\delta d} Z_{2\beta d} \right. \\ \left. + \frac{3}{8} Q_{20} \Delta_6 W_1 Z_{2\delta d} Z_{2\beta d} + \frac{3}{8} Q_{20} \Delta_1 W_1 Z_{2\beta d} D_{2\delta} \right] \boldsymbol{\iota}$$

▪ Cálculo de λ_{RSTUvw}

Sabemos por definição que $\lambda_{RSTUvw} = \kappa^{RS} \kappa^{TU} \kappa^{vw} \left\{ \kappa_{RTv} \left(\frac{\kappa_{SUw}}{6} - \kappa_{Sw}^{(U)} \right) + \kappa_{RTU} \left(\frac{\kappa_{Svw}}{4} - \kappa_{Sw}^{(v)} \right) + \kappa_{RT}^{(v)} \kappa_{Sw}^{(U)} + \kappa_{RT}^{(U)} \kappa_{Sw}^{(v)} \right\}$, em que $\kappa_{RTv} = 0$, $\kappa_{Sw}^{(v)} = 0$, $\kappa_{Sw}^{(U)} = 0$. Logo temos que

$$\lambda_{RSTUvw} = \frac{1}{4} \kappa^{RS} \kappa^{TU} \kappa^{vw} \kappa_{RTU} (\kappa_{Svw}) \\ = \frac{1}{4} \kappa^{RS} \kappa^{TU} \kappa^{vw} \left[\frac{1}{8} (7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)}) \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^3}{\phi_i^3} (R, T, U)_i \right. \\ \left. + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i} h_{2i}}{\phi_i^2} (R, T, U)_i \right. \\ \left. + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \frac{h_{1i}^2}{\phi_i^2} \{ (RT, U)_i + (RU, T)_i + (R, TU)_i \} \right] \\ \left[- \frac{1}{2} (\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)}) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (S, v, w)_l \right]$$

Assim,

$$\lambda_{RSTUvw} = \frac{1}{4} \kappa^{RS} \kappa^{TU} \kappa^{vw} \left[\frac{1}{8} Q_{10} \sum_{i=1}^n \Delta_{1i}^3 ((R)_i (T)_i (U)_i) \right. \\ \left. + \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \Delta_{4i} ((R)_i (T)_i (U)_i) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{i=1}^n \Delta_{1i}^2 \{ (RT)_i (U)_i + (RU)_i (T)_i + (R)_i (TU)_i \} \right] \\ \left[- \frac{1}{2} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} (S, v, w)_l \right]$$

Portanto,

$$\lambda_{RSTUvw} = -\frac{1}{64} Q_{10} Q_{20} \sum_{i=1}^n \Delta_{1i}^3 ((R)_i \kappa^{RS}(S)_l) ((T)_i \kappa^{TU}(U)_i) ((v)_l \kappa^{vw}(w)_l) \Delta_{1l} W_{1l} \\ - \frac{3}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{i=1}^n \Delta_{4i} ((R)_i \kappa^{RS}(S)_l) ((T)_i \kappa^{TU}(U)_i) ((v)_l \kappa^{vw}(w)_l) \Delta_{1l} W_{1l} \\ - \frac{1}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{i=1}^n \Delta_{1i}^2 \left[((S)_l \kappa^{RS}(RT)_i \kappa^{TU}(U)_i) ((v)_l \kappa^{vw}(w)_l) \right. \\ \left. + ((S)_l \kappa^{RS}(RU)_i \kappa^{TU}(T)_i) ((v)_l \kappa^{vw}(w)_l) \right. \\ \left. + ((R)_i \kappa^{RS}(S)_l) (\kappa^{TU}(TU)_i) ((v)_l \kappa^{vw}(w)_l) \right] \Delta_{1l} W_{1l}$$

- Cálculo de $\sum' \lambda_{RSTUvw}$

Calculando $\sum' \lambda_{RSTUvw}$, invertendo os somatórios e rearrumando os termos, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{RSTUvw} = & -\frac{1}{64} Q_{10} Q_{20} \sum_{i=1}^n \Delta_{1i}^3 \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \\ & \times \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l} - \frac{3}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{i=1}^n \Delta_{4i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \\ & \times \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l} \\ & - \frac{1}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{i=1}^n \Delta_{1i}^2 \left[\left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RT)_i \kappa^{TU}(U)_i \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \right. \\ & + \left(\sum' (S)_l \kappa^{RS}(RU)_i \kappa^{TU}(T)_i \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \\ & \left. + \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' \kappa^{TU}(TU)_i \right) \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \right] \Delta_{1l} W_{1l} \end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\begin{aligned} \sum' \lambda_{RSTUvw} = & -\frac{1}{64} Q_{10} Q_{20} \sum_{i=1}^n \Delta_{1i}^3 (z_{\delta_{il}}) (z_{\delta_{di}}) (z_{\beta_{dl}}) \Delta_{1l} W_{1l} \\ & - \frac{3}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{i=1}^n \Delta_{4i} (z_{\delta_{il}}) (z_{\delta_{di}}) (z_{\beta_{dl}}) \Delta_{1l} W_{1l} \\ & - \frac{1}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{i=1}^n \Delta_{1i}^2 \left[(e_{\delta_{dl}}) (z_{\beta_{dl}}) \right. \\ & + (e_{\delta_{di}}) (z_{\beta_{dl}}) \\ & \left. + (z_{\delta_{il}}) (d_{\delta_{ii}}) (z_{\beta_{dl}}) \right] \Delta_{1l} W_{1l} \end{aligned}$$

logo escrevendo na forma matricial temos que

$$\begin{aligned} \sum' \lambda_{RSTUvw} = & -\frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \left[-\frac{1}{64} Q_{10} Q_{20} \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} \Delta_1 W_1 \right. \\ & - \frac{3}{32} Q_{12} Q_{20} \Delta_4 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} \Delta_1 W_1 \\ & \left. - \frac{1}{32} Q_{12} Q_{20} \Delta_1^2 (E_\delta Z_{\beta d} + E_\delta Z_{\beta d} + Z_{\beta d} D_\delta Z_\delta) \Delta_1 W_1 \right] \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum' \lambda_{RSTUvw} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{10} Q_{20}}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{3 Q_{12} Q_{20}}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 E_\delta Z_{\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 Z_{\beta d} D_\delta Z_\delta \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{RSTUvw}$

Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\begin{aligned} \sum'' \lambda_{RSTUvw} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{10} Q_{20}}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\beta d} Z_{2\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{3Q_{12} Q_{20}}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_{2\delta} Z_{2\beta d} Z_{2\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 E_{2\delta} Z_{2\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 Z_{2\beta d} D_{2\delta} Z_{2\delta} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \end{aligned}$$

- Cálculo de λ_{RStuVW}

Sabemos por definição que $\lambda_{RStuVW} = \kappa^{RS} \kappa^{tu} \kappa^{VW} \left\{ \kappa_{RtV} \left(\frac{\kappa_{SuW}}{6} - \kappa_{SW}^{(u)} \right) + \kappa_{Rtu} \left(\frac{\kappa_{SVW}}{4} - \kappa_{SW}^{(V)} \right) + \kappa_{Rt}^{(V)} \kappa_{SW}^{(u)} + \kappa_{Rt}^{(u)} \kappa_{SW}^{(V)} \right\}$, em que $\kappa_{RtV} = 0$, $\kappa_{SW}^{(u)} = 0$, $\kappa_{Rt}^{(V)} = \kappa_{Rt}^{(u)} = 0$. Logo temos que $\lambda_{RStuVW} = \kappa^{RS} \kappa^{tu} \kappa^{VW} \left\{ \kappa_{Rtu} \left(\frac{\kappa_{SVW}}{4} - \kappa_{SW}^{(V)} \right) \right\}$. Assim temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{RStuVW} = & \kappa^{RS} \kappa^{tu} \kappa^{VW} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\varphi_{(0,0,1,0,1)} + 2\varphi_{(0,1,0,0,0)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{m_1^2 h_{1l}}{\phi_l^2} (R, t, u)_i \times \right. \\ & \left[\frac{1}{8} \frac{1}{4} \left(7 - 9\varphi_{(0,1,0,0,2)} - \varphi_{(0,0,1,0,3)} \right) \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, V, W)_l \right. \\ & + \frac{1}{4} \frac{3}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, V, W)_l \\ & + \frac{1}{4} \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left((SV, W)_l + (SW, V)_l + (S, VW)_l \right) \\ & - \left[\frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l} h_{2l}}{\phi_l^2} (S, V, W)_l \right. \\ & + \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^2}{\phi_l^2} \left((SV, W)_l + (S, VW)_l \right) \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \frac{h_{1l}^3}{\phi_l^3} (S, V, W)_l \right] \right\} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\lambda_{RStuVW} = & \kappa^{RS} \kappa^{tu} \kappa^{VW} \left\{ -\frac{1}{2} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i}(R, t, u)_i \times \right. \\ & \left[\frac{1}{32} Q_{10} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^3(S, V, W)_l + \frac{3}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \Delta_{4l}(S, V, W)_l \right. \\ & + \frac{1}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2((SV, W)_l + (SW, V)_l + (S, VW)_l) \\ & - \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \Delta_{4l}(S, V, W)_l \\ & - \frac{1}{4} Q_{12} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2((SV, W)_l + (S, VW)_l) \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} Q_{12} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^3(S, V, W)_l \right] \right\}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lambda_{RStuVW} = & \kappa^{RS} \kappa^{tu} \kappa^{VW} \left\{ -\frac{1}{2} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i}(R, t, u)_i \times \right. \\ & \left[\frac{1}{32} (Q_{10} + 16Q_{12}) \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^3(S, V, W)_l - \frac{5}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \Delta_{4l}(S, V, W)_l \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{16} Q_{12} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l}^2((SV, W)_l + (S, VW)_l - \frac{1}{3}(SW, V)_l) \right] \right\}\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}\lambda_{RStuVW} = & -\frac{1}{64} Q_{20} Q_{13} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\ & + \frac{5}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left((V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\ & + \frac{3}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left[\left((R)_i \kappa^{RS}(SV)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \right. \\ & + \left((R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\kappa^{VW}(VW)_l \right) \\ & \left. - \frac{1}{3} \left((R)_i \kappa^{RS}(SW)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \left((t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \right] \Delta_{1l}^2\end{aligned}$$

em que $Q_{13} = (Q_{10} + 16Q_{12})$.

- Cálculo de $\sum' \lambda_{RStuVW}$

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RStuVW} = & -\frac{1}{64} Q_{20} Q_{13} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \times \\
& \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l}^3 \\
& + \frac{5}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \times \\
& \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\sum' (V)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{4l} \\
& + \frac{3}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left[\left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(SV)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \right. \\
& + \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \left(\sum' \kappa^{VW}(VW)_l \right) \\
& \left. - \frac{1}{3} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(SW)_l \kappa^{VW}(W)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \right] \Delta_{1l}^2
\end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo temos

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RStuVW} = & -\frac{1}{64} Q_{20} Q_{13} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} (z_{\delta_{il}}) (z_{\beta_{d_{ii}}}) (z_{\delta_{dl}}) \Delta_{1l}^3 \\
& + \frac{5}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} (z_{\delta_{il}}) (z_{\beta_{d_{ii}}}) (z_{\delta_{dl}}) \Delta_{4l} \\
& + \frac{3}{32} Q_{12} Q_{20} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left[(e_{\delta_{il}}) (z_{\beta_{d_{ii}}}) \right. \\
& \left. + (z_{\delta_{il}}) (z_{\beta_{d_{ii}}}) (d_{\delta_{il}}) - \frac{1}{3} (e_{\delta_{il}}) (z_{\beta_{d_{ii}}}) \right] \Delta_{1l}^2
\end{aligned}$$

Logo, colocando na sua forma matricial, temos que

$$\begin{aligned}
\sum' \lambda_{RStuVW} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2 Q_{20} Q_{13}}{16 \cdot 64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{\beta d} Z_{\delta} Z_{\delta d} \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2 Q_{20}}{16 \cdot 32} 5 Q_{12} Q_{20} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{\beta d} Z_{\delta} Z_{\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2 Q_{20}}{16 \cdot 16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 E_{\delta} Z_{\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2 Q_{20}}{16 \cdot 32} 3 Q_{12} Q_{20} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{\delta} D_{\delta} Z_{\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota}
\end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{RStuVW}$

Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\begin{aligned}
\sum'' \lambda_{RStuVW} = & \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2 Q_{20} Q_{13}}{16 \cdot 64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\beta d} Z_{2\delta} Z_{2\delta d} \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2 Q_{20}}{16 \cdot 32} 5 Q_{12} Q_{20} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\beta d} Z_{2\delta} Z_{2\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2 Q_{20}}{16 \cdot 16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 E_{2\delta} Z_{2\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2 Q_{20}}{16 \cdot 32} 3 Q_{12} Q_{20} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} D_{2\delta} Z_{2\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota}
\end{aligned}$$

- Cálculo de λ_{rsTUVW}

Sabemos por definição que $\lambda_{rsTUVW} = \kappa^{rs} \kappa^{TU} \kappa^{VW} \left\{ \kappa_{rTV} \left(\frac{\kappa_{sUW}}{6} - \kappa_{sW}^{(U)} \right) + \kappa_{rTU} \left(\frac{\kappa_{sVW}}{4} - \kappa_{sW}^{(V)} \right) + \kappa_{rT}^{(V)} \kappa_{sW}^{(U)} + \kappa_{rT}^{(U)} \kappa_{sW}^{(V)} \right\}$, em que $\kappa_{rTV} = \kappa_{rTU} = 0$, $\kappa_{sW}^{(v)} = 0$, $\kappa_{sW}^{(U)} = 0$, $\kappa_{rT}^{(V)} = 0$ e $\kappa_{rT}^{(U)} = 0$.

Logo temos que

$$\lambda_{rsTUVW} = 0$$

- Cálculo de $\sum' \lambda_{rsTUVW}$

$$\sum' \lambda_{rsTUVW} = 0$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{rsTUVW}$

$$\sum'' \lambda_{rsTUVW} = 0$$

- Cálculo de λ_{RStuvw}

Sabemos por definição que $\lambda_{RStuvw} = \kappa^{RS} \kappa^{tu} \kappa^{vw} \left\{ \kappa_{Rtv} \left(\frac{\kappa_{Suv}}{6} - \kappa_{Sw}^{(u)} \right) + \kappa_{Rtu} \left(\frac{\kappa_{Svw}}{4} - \kappa_{Sw}^{(v)} \right) + \kappa_{Rt}^{(v)} \kappa_{Sw}^{(u)} + \kappa_{Rt}^{(u)} \kappa_{Sw}^{(v)} \right\}$, em que $\kappa_{Sw}^{(v)} = 0$, $\kappa_{Sw}^{(u)} = 0$, $\kappa_{Rt}^{(v)} = 0$ e $\kappa_{Rt}^{(u)} = 0$. Logo temos que

$$\lambda_{RStuvw} = \frac{1}{12} \kappa^{RS} \kappa^{tu} \kappa^{vw} \left\{ 2\kappa_{Rtv} \kappa_{Suv} + 3\kappa_{Rtu} \kappa_{Svw} \right\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_{RStuvw} = & \frac{1}{12} \kappa^{RS} \kappa^{tu} \kappa^{vw} \left[2 \left(-\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((R)_i(t)_i(v)_i \right) \times \right. \right. \\ & \left(-\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((S)_l(u)_l(w)_l \right) \right. \\ & \left. + 3 \left(-\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((R)_i(t)_i(u)_i \right) \right) \times \right. \\ & \left. \left. \left(-\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((S)_l(v)_l(w)_l \right) \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{RStuvw} = & \frac{Q_{20}^2}{24} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((R)_i \kappa^{RS} (S)_l(t)_i \kappa^{tu} (u)_l(v)_i \kappa^{vw} (w)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l} \\ & + \frac{Q_{20}^2}{16} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((R)_i \kappa^{RS} (S)_l(t)_i \kappa^{tu} (u)_i(v)_l \kappa^{vw} (w)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l} \end{aligned}$$

- Cálculo de $\sum' \lambda_{RStuvw}$

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{RStuvw} &= \frac{Q_{20}^2}{24} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \times \\ &\quad \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l} \\ &\quad + \frac{Q_{20}^2}{16} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left(\sum' (R)_i \kappa^{RS}(S)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_i \right) \times \\ &\quad \left(\sum' (v)_l \kappa^{vw}(w)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l}\end{aligned}$$

Identificando os elementos das matrizes e substituindo, temos que

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{RStuvw} &= \frac{Q_{20}^2}{24} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} (z_{\delta_{il}}) (z_{\beta_{il}}) (z_{\beta_{il}}) \Delta_{1l} W_{1l} \\ &\quad + \frac{Q_{20}^2}{16} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} (z_{\delta_{il}}) (z_{\beta_{di}}) (z_{\beta_{dl}}) \Delta_{1l} W_{1l}\end{aligned}$$

Escrevendo na sua forma matricial, temos então

$$\begin{aligned}\sum' \lambda_{RStuvw} &= -\frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{24} \mathbf{t}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_\beta Z_\beta \Delta_{1l} W_{1l} \mathbf{t} \\ &\quad - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \mathbf{t}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\beta d} \Delta_{1l} W_{1l} \mathbf{t}\end{aligned}$$

▪ Cálculo de $\sum'' \lambda_{RStuvw}$

$$\begin{aligned}\sum'' \lambda_{RStuvw} &= -\frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{24} \mathbf{t}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} Z_{2\beta} Z_{2\beta} \Delta_{1l} W_{1l} \mathbf{t} \\ &\quad - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \mathbf{t}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} Z_{2\beta d} Z_{2\beta d} \Delta_{1l} W_{1l} \mathbf{t}\end{aligned}$$

▪ Cálculo de λ_{rstuVW}

Sabemos por definição que $\lambda_{rstuVW} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{VW} \left\{ \kappa_{rtV} \left(\frac{\kappa_{suW}}{6} - \kappa_{sW}^{(u)} \right) + \kappa_{rtu} \left(\frac{\kappa_{sVW}}{4} - \kappa_{sW}^{(V)} \right) + \kappa_{rt}^{(V)} \kappa_{sW}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sW}^{(V)} \right\}$, em que $\kappa_{sW}^{(V)} = 0$, $\kappa_{sW}^{(u)} = 0$ e $\kappa_{sVW} = 0$. Logo temos que

$$\lambda_{rstuVW} = \frac{1}{6} \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{VW} \kappa_{rtV} \kappa_{suW}$$

Portanto, substituindo os respectivos cumulantes e com algumas álgebras, temos que

$$\lambda_{rstuVW} = \frac{1}{6} \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{VW} \left[-\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((r)_i (t)_i (V)_i \right) \left(-\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((s)_l (u)_l (W)_l \right) \right) \right]$$

Simplificando e rearrumando a expressão, temos que

$$\lambda_{rstuVW} = \frac{1}{6} \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{VW} \left[-\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((r)_i (t)_i (V)_i \right) \left(-\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((s)_l (u)_l (W)_l \right) \right) \right]$$

Logo,

$$\lambda_{rstuVW} = \frac{Q_{20}^2}{24} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l (t)_i \kappa^{tu}(u)_l (V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l}$$

- Cálculo de $\sum' \lambda_{rstuVW}$

$$\sum' \lambda_{rstuVW} = \frac{Q_{20}^2}{24} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left(\sum' (t)_i \kappa^{tu}(u)_l \right) \left(\sum' (V)_i \kappa^{VW}(W)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l}$$

Identificando os elementos das matrizes, temos que

$$\sum' \lambda_{rstuVW} = \frac{Q_{20}^2}{24} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} (z_{\beta_{il}}) (z_{\beta_{il}}) (z_{\delta_{il}}) \Delta_{1l} W_{1l}$$

Expressando na sua forma matricial, temos que

$$\sum' \lambda_{rstuVW} = -\frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{24} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{\beta} Z_{\beta} Z_{\delta} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota}$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{rstuVW}$

Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\sum'' \lambda_{rstuVW} = -\frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{24} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\beta} Z_{2\beta} Z_{2\delta} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota}$$

- Cálculo de λ_{rsTUvw}

Sabemos, por definição, que: $\lambda_{rsTUvw} = \kappa^{rs} \kappa^{TU} \kappa^{vw} \left\{ \kappa_{rTv} \left(\frac{\kappa_{sUw}}{6} - \kappa_{sw}^{(U)} \right) + \kappa_{rTU} \left(\frac{\kappa_{svw}}{4} - \kappa_{sw}^{(v)} \right) + \kappa_{rT}^{(v)} \kappa_{sw}^{(U)} + \kappa_{rT}^{(U)} \kappa_{sw}^{(v)} \right\}$, em que $\kappa_{rT}^{(v)} = 0$, $\kappa_{rT}^{(U)} = 0$ e $\kappa_{rTU} = 0$. Logo temos que

$$\lambda_{rsTUvw} = \kappa^{rs} \kappa^{TU} \kappa^{vw} \left\{ \kappa_{rTv} \left(\frac{\kappa_{sUw}}{6} - \kappa_{sw}^{(U)} \right) \right\}$$

Portanto, substituindo os respectivos cumulantes acima após algumas manipulações algébricas, temos que:

$$\begin{aligned} \lambda_{rsTUvw} = & \kappa^{rs} \kappa^{TU} \kappa^{vw} \left\{ -\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((r)_i (T)_i (v)_i \left[\frac{1}{6} \left(-\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((s)_l (U)_l (w)_l \right) \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \left(-\varphi_{(0,1,0,0,0)} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((s)_l (U)_l (w)_l \right) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_{rsTUvw} = & \kappa^{rs} \kappa^{TU} \kappa^{vw} \left\{ -\frac{Q_{20}}{2} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((r)_i (T)_i (v)_i \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left[\frac{(12\varphi_{(0,1,0,0,0)} - Q_{20})}{12} \sum_{l=1}^n \Delta_{1l} W_{1l} \left((s)_l (U)_l (w)_l \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lambda_{rsTUvw} = -\frac{Q_{22}}{24} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left((r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \left((T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left((v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l}$$

Em que $Q_{22} = Q_{20}(12\varphi_{(0,1,0,0,0)} - Q_{20})$

- Cálculo de $\sum' \lambda_{rsTUvw}$

$$\sum' \lambda_{rsTUvw} = -\frac{Q_{22}}{24} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} \left(\sum' (r)_i \kappa^{rs}(s)_l \right) \times \\ \left(\sum' (T)_i \kappa^{TU}(U)_l \right) \left(\sum' (v)_i \kappa^{vw}(w)_l \right) \Delta_{1l} W_{1l}$$

Identificando as matrizes, temos que

$$\sum' \lambda_{rsTUvw} = -\frac{Q_{22}}{24} \sum_{l=1}^n \Delta_{1i} W_{1i} (z_{\beta_{il}}) (z_{\delta_{il}}) (z_{\beta_{il}}) \Delta_{1l} W_{1l}$$

Logo, escrevendo na sua forma matricial, temos que

$$\sum' \lambda_{rsTUvw} = \frac{Q_{22}}{24} \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\beta Z_\delta Z_\beta \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota}$$

- Cálculo de $\sum'' \lambda_{rsTUvw}$

Identificando os elementos das matrizes e os substituindo, temos que

$$\sum'' \lambda_{rsTUvw} = \frac{Q_{22}}{24} \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\beta} Z_{2\delta} Z_{2\beta} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota}$$

- Expressão do termo $\epsilon_{p,q(\beta,\delta)}$

Sabemos que $\epsilon_{p,q(\beta,\delta)} = \sum' \lambda_{RStu} + \sum' \lambda_{rsTU} - \sum' \lambda_{RSTUvw} - \sum' \lambda_{RStuVW} - \sum' \lambda_{RStuvw} - \sum' \lambda_{rsTUVW} - \sum' \lambda_{rsTUvw} - \sum' \lambda_{rstuVW}$. Logo, substituindo cada quantidade pela sua expres-

são, temos que

$$\begin{aligned}
\epsilon_{p,q(\beta,\delta)} = & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{(\varphi_{(0,1,0,2,0)} - 1)}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\frac{Q_{19}}{16} \Delta_1^2 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} \right. \\
& \left. - \frac{1}{8} Q_{20} \Delta_6 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} - \frac{1}{8} Q_{20} \Delta_1 W_1 D_\delta Z_{\beta d} \right] \boldsymbol{\iota} \\
& + \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{(\varphi_{(0,1,0,2,0)} - 1)}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[Q_{21} \frac{1}{16} \Delta_1^2 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} \right. \\
& \left. + \frac{3}{8} Q_{20} \Delta_6 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} + \frac{3}{8} Q_{20} \Delta_1 W_1 Z_{\beta d} D_\delta \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \left(\frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{10} Q_{20}}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \right. \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{3 Q_{12} Q_{20}}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_4 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 E_\delta Z_{\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^2 Z_{\beta d} D_\delta Z_\delta \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \Big) \\
& - \left(\frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{20} Q_{13}}{64} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{\beta d} Z_\delta Z_{\delta d} \Delta_1^3 \boldsymbol{\iota} \right. \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{5 Q_{12} Q_{20}}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{\beta d} Z_\delta Z_{\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 E_\delta Z_{\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{3 Q_{12} Q_{20}}{32} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta D_\delta Z_{\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \Big) \\
& - \left(- \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2}{4} \frac{Q_{12}}{24} \frac{Q_{20}^2}{24} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_\beta Z_\beta \Delta_1 \boldsymbol{\iota} \right. \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2}{4} \frac{Q_{12}}{16} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \Big) \\
& - (0) \\
& - \left(\frac{Q_{22}}{24} \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2}{4} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\beta Z_\delta Z_\beta \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \right) \\
& - \left(- \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2}{4} \frac{Q_{12}}{24} \frac{Q_{20}^2}{24} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\beta Z_\beta Z_\delta \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{p,q(\beta,\delta)} = & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} \right. \\
& + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 D_\delta Z_{\beta d} \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{\beta d} Z_\delta Z_{\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta D_\delta Z_{\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_\beta Z_{\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota}
\end{aligned}$$

- Expressão do termo $\epsilon_{[(p-p_1),(q-q_1)],\beta\delta}$

Sabemos que $\epsilon_{[(p-p_1),(q-q_1)],\beta\delta} = \sum'' \lambda_{RStu} + \sum'' \lambda_{rsTU} - \sum'' \lambda_{RSTUvw} - \sum'' \lambda_{RStuVW} - \sum'' \lambda_{RStuvw} - \sum'' \lambda_{rsTUVW} - \sum'' \lambda_{rsTUvw} - \sum'' \lambda_{rstuVW}$. Logo, substituindo cada quantidade pela sua expressão, temos que

$$\begin{aligned}
\epsilon_{[(p-p_1),(q-q_1)],\beta\delta} = & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 Z_{2\delta d} Z_{2\beta d} \right. \\
& + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 Z_{2\delta d} Z_{2\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 D_{2\delta} Z_{2\beta d} \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\beta d} Z_{2\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\beta d} Z_{2\delta} Z_{2\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} D_{2\delta} Z_{2\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} Z_{2\beta} Z_{2\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} Z_{2\beta d} Z_{2\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota}
\end{aligned}$$

- Expressão do termo $d_{p_1,q_1}(\beta\delta)$

Por definição, $d_{p_1, q_1}(\beta\delta) = \frac{\epsilon_{p, q(\beta\delta)} - \epsilon_{[(p-p_1), (q-q_1)], \beta\delta}}{p_1 + q_1}$, então substituindo as expressões de $\epsilon_{p, q(\beta\delta)}$ e $\epsilon_{[(p-p_1), (q-q_1)], \beta\delta}$, temos que

$$\begin{aligned}
d_{p_1, q_1}(\beta\delta) = & \frac{1}{p_1 + q_1} \left\{ \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} \right. \right. \\
& + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 Z_{\delta d} Z_{\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 D_\delta Z_{\beta d} \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{\beta d} Z_\delta Z_{\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta D_\delta Z_{\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_\beta Z_{\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& - \left(\varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 Z_{2\delta d} Z_{2\beta d} \right. \right. \\
& + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 Z_{2\delta d} Z_{2\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 D_{2\delta} Z_{2\beta d} \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{2\beta d} Z_{2\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\beta d} Z_{2\delta} Z_{2\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} D_{2\delta} Z_{2\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} Z_{2\beta} Z_{2\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& \left. + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} Z_{2\beta d} Z_{2\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \right) \Big\}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
d_{p_1, q_1}(\beta\delta) = & \frac{1}{p_1 + q_1} \left\{ \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{2\delta d} Z_{2\beta d}) \right. \right. \\
& + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{2\delta d} Z_{2\beta d}) + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 (D_\delta Z_{\beta d} - D_{2\delta} Z_{2\beta d}) \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} - Z_{2\delta} Z_{2\beta d} Z_{2\delta d}) \\
& \times \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\beta d} Z_\delta Z_{\delta d} - Z_{2\beta d} Z_{2\delta} Z_{2\delta d}) \\
& \times \Delta_4 \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_\delta D_\delta Z_{\beta d} - Z_{2\delta} D_{2\delta} Z_{2\beta d}) \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_\delta Z_\beta Z_{\beta} - Z_{2\delta} Z_{2\beta} Z_{2\beta}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& \left. + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\beta d} - Z_{2\delta} Z_{2\beta d} Z_{2\beta d}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \right\}
\end{aligned}$$

- Expressão do termo $\epsilon_{[(p-p_1), q]}(\beta\delta)$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{[(p-p_1), q]}(\beta\delta) = & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 Z_{\delta d} Z_{2\beta d} \right. \\
& + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 Z_{\delta d} Z_{2\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 D_\delta Z_{2\beta d} \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
& - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_\delta Z_{2\beta d} Z_{\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\beta d} Z_\delta Z_{\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta D_\delta Z_{2\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_{2\beta} Z_{2\beta} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
& + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_\delta Z_{2\beta d} Z_{2\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota}
\end{aligned}$$

- Expressão do termo $d_{p_1, \beta\delta}$

Por definição, $d_{p_1, \beta\delta} = \frac{\epsilon_{p,q(\beta\delta)} - \epsilon_{[(p-p_1),q],\beta\delta}}{p_1}$, então substituindo as expressões de $\epsilon_{p,q(\beta\delta)}$ e $\epsilon_{[(p-p_1),q],\beta\delta}$, temos que

$$\begin{aligned}
 d_{p_1, \beta\delta} = & \frac{1}{p_1} \left\{ \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{\delta d} Z_{2\beta d}) \right. \right. \\
 & + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{\delta d} Z_{2\beta d}) + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 (D_\delta Z_{\beta d} - D_\delta Z_{2\beta d}) \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
 & - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} - Z_\delta Z_{2\beta d} Z_{\delta d}) \\
 & \times \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\beta d} Z_\delta Z_{\delta d} - Z_{2\beta d} Z_\delta Z_{\delta d}) \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
 & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_\delta D_\delta Z_{\beta d} - Z_\delta D_\delta Z_{2\beta d}) \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\
 & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_\delta Z_\beta Z_\beta - Z_\delta Z_{2\beta} Z_{2\beta}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
 & + \left. \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\beta d} - Z_\delta Z_{2\beta d} Z_{2\beta d}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \right\}
 \end{aligned}$$

A expressão acima pode ser decomposta por

$$d_{p_1, \beta\delta} = d_{p_1, \beta\delta}^{(L)} + d_{p_1, \beta\delta}^{(NL)}$$

em que

$$\begin{aligned}
 d_{p_1, \beta\delta}^{(L)} = & \frac{1}{p_1} \left\{ \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{\delta d} Z_{2\beta d}) \right. \right. \\
 & + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{\delta d} Z_{2\beta d}) \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\
 & - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\delta d} - Z_\delta Z_{2\beta d} Z_{\delta d}) \\
 & \times \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\beta d} Z_\delta Z_{\delta d} - Z_{2\beta d} Z_\delta Z_{\delta d}) \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
 & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_\delta Z_\beta Z_\beta - Z_\delta Z_{2\beta} Z_{2\beta}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
 & + \left. \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_\delta Z_{\beta d} Z_{\beta d} - Z_\delta Z_{2\beta d} Z_{2\beta d}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \right\}
 \end{aligned}$$

representa a parte linear do modelo e

$$\begin{aligned}
 d_{p_1, \beta\delta}^{(NL)} = & \frac{1}{p_1} \left\{ \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 (D_\delta Z_{\beta d} - D_\delta Z_{2\beta d}) \boldsymbol{\iota} \right. \\
 & + \left. \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_\delta D_\delta Z_{\beta d} - Z_\delta D_\delta Z_{2\beta d}) \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \right\}
 \end{aligned}$$

que pode ser interpretado como um termo devido à não linearidade na componente sistemática do modelo.

- Expressão do termo $\epsilon_{[p,(q-q_1)],\beta\delta}$

$$\begin{aligned}\epsilon_{[p,(q-q_1)],\beta\delta} = & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 Z_{2\delta d} Z_{\beta d} \right. \\ & + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 Z_{2\delta d} Z_{\beta d} + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 D_{2\delta} Z_{\beta d} \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\ & - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 Z_{2\delta} Z_{\beta d} Z_{2\delta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{\beta d} Z_{2\delta} Z_{2\delta d} \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} D_{2\delta} Z_{\beta d} \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} Z_{\beta} Z_{\beta} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 Z_{2\delta} Z_{\beta d} Z_{\beta d} \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota}\end{aligned}$$

- Expressão do termo $d_{q_1,\beta\delta}$

Por definição, $d_{q_1,\beta\delta} = \frac{\epsilon_{p,q(\beta\delta)} - \epsilon_{[p,(q-q_1)],\beta\delta}}{q_1}$, então substituindo as expressões de $\epsilon_{p,q(\beta\delta)}$ e $\epsilon_{[p,(q-q_1)],\beta\delta}$, temos que

$$\begin{aligned}d_{q_1,\beta\delta} = & \frac{1}{q_1} \left\{ \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{2\delta d} Z_{\beta d}) \right. \right. \\ & + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{2\delta d} Z_{\beta d}) + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 (D_{\delta} Z_{\beta d} - D_{2\delta} Z_{\beta d}) \left. \right] \boldsymbol{\iota} \\ & - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_{\delta} Z_{\beta d} Z_{\delta d} - Z_{2\delta} Z_{\beta d} Z_{2\delta d}) \\ & \times \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\beta d} Z_{\delta} Z_{\delta d} - Z_{\beta d} Z_{2\delta} Z_{2\delta d}) \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\delta} D_{\delta} Z_{\beta d} - Z_{2\delta} D_{2\delta} Z_{\beta d}) \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\delta} Z_{\beta} Z_{\beta} - Z_{2\delta} Z_{\beta} Z_{\beta}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\ & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\delta} Z_{\beta d} Z_{\beta d} - Z_{2\delta} Z_{\beta d} Z_{\beta d}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \left. \right\}\end{aligned}$$

A expressão de $d_{q_1,\beta\delta}$ pode ser decomposta em

$$d_{q_1,\beta\delta} = d_{q_1,\beta\delta}^{(L)} + d_{q_1,\beta\delta}^{(NL)}$$

em que $d_{q_1, \beta\delta}^{(L)}$ e $d_{q_1, \beta\delta}^{(NL)}$ têm as seguintes formas matriciais:

$$\begin{aligned}
 d_{q_1, \beta\delta}^{(L)} = \frac{1}{q_1} \Bigg\{ & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \left[\left(\frac{Q_{19} + Q_{21}}{16} \right) \Delta_1^2 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{2\delta d} Z_{\beta d}) \right. \\
 & + \frac{Q_{20}}{4} \Delta_6 W_1 (Z_{\delta d} Z_{\beta d} - Z_{2\delta d} Z_{\beta d}) \Big] \boldsymbol{\iota} \\
 & - \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \left(\frac{Q_{10} Q_{20} + Q_{20} Q_{13}}{64} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1^3 (Z_{\delta} Z_{\beta d} Z_{\delta d} - Z_{2\delta} Z_{\beta d} Z_{2\delta d}) \\
 & \times \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\beta d} Z_{\delta} Z_{\delta d} - Z_{\beta d} Z_{2\delta} Z_{2\delta d}) \Delta_4 \boldsymbol{\iota} \\
 & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \left(\frac{2Q_{20}^2 - Q_{22}}{24} \right) \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\delta} Z_{\beta} Z_{\beta} - Z_{2\delta} Z_{\beta} Z_{\beta}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \\
 & \left. + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)}^2 Q_{12}}{4} \frac{Q_{20}^2}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\delta} Z_{\beta d} Z_{\beta d} - Z_{2\delta} Z_{\beta d} Z_{\beta d}) \Delta_1 W_1 \boldsymbol{\iota} \right\}
 \end{aligned}$$

que representa a parte linear do modelo e

$$\begin{aligned}
 d_{q_1, \beta\delta}^{(NL)} = \frac{1}{q_1} \Bigg\{ & \varphi_{(0,1,0,0,0)} \frac{Q_{12}}{4} \boldsymbol{\iota}^\top \frac{Q_{20}}{4} \Delta_1 W_1 (D_{\delta} Z_{\beta d} - D_{2\delta} Z_{\beta d}) \boldsymbol{\iota} \\
 & + \frac{\varphi_{(0,1,0,0,0)} Q_{12}^2}{16} \frac{Q_{12} Q_{20}}{16} \boldsymbol{\iota}^\top \Delta_1 W_1 (Z_{\delta} D_{\delta} Z_{\beta d} - Z_{2\delta} D_{2\delta} Z_{\beta d}) \Delta_1^2 \boldsymbol{\iota} \Bigg\}
 \end{aligned}$$

que pode ser interpretado como um termo devido à não linearidade na componente sistemática do modelo.

APÊNDICE F – COELHOS EUROPEUS NA AUSTRÁLIA

Tabela 46 – Peso das lentes dos olhos de coelhos europeus (y), em miligramas, e a idade (x), em dias, numa amostra contendo 71 observações (Wei (1998), Exemplo 6.8).

x	y	x	y	x	y
15	21,66	98	104,30	285	189,66
15	22,75	125	134,90	300	186,09
15	22,30	142	130,68	301	186,70
18	31,25	142	140,58	305	186,80
28	44,79	147	155,30	312	195,10
29	40,55	147	152,20	317	216,41
37	50,25	150	144,50	338	203,23
37	46,88	159	142,15	347	188,38
44	52,03	165	139,81	354	189,70
50	63,47	183	153,22	357	195,31
50	61,13	192	145,72	375	202,63
60	81,00	195	161,10	394	224,82
61	73,09	218	174,18	513	203,30
64	79,09	218	173,03	535	209,70
65	79,51	219	173,54	554	233,90
65	65,31	224	178,86	591	234,70
72	71,90	225	177,68	648	244,30
75	86,10	227	173,73	660	231,00
75	94,60	232	159,98	705	242,40
82	92,50	232	161,29	723	230,77
85	105,00	237	187,07	756	242,57
91	101,70	246	176,13	768	232,12
91	102,90	258	183,40	860	246,70
97	110,00	276	186,26		

APÊNDICE G – SOLUÇÃO DE CÁLCIO

Tabela 47 – Solução de cálcio durante um determinado tempo x (em minutos) e a quantidade de cálcio absorvida pelas células y (em $nmol/mg$), numa amostra de 27 observações (RAWLINGS, 1988; BRAZZALE, 2000)

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	5.7	685	15	6.0	683
2	4.5	526	16	4.9	662
3	4.7	536	17	5.5	627
4	4.5	520	18	3.9	423
5	3.6	343	19	4.5	513
6	4.3	462	20	3.5	383
7	4.1	460	21	4.6	517
8	3.7	454	22	4.0	448
9	6.8	1076	23	7.1	970
10	5.7	722	24	5.4	681
11	6.3	814	25	6.4	800
12	6.0	782	26	5.4	775
13	5.5	689	27	5.7	731
14	8.2	1499			

APÊNDICE H – DADOS DE RATOS

Tabela 48 – Média dos erros cometidos pelos ratos isquêmicos (lesionados).

Ratos	Bl ₁	Bl ₂	Bl ₃	Bl ₄	Bl ₅	Ratos	Bl ₁	Bl ₂	Bl ₃	Bl ₄	Bl ₅
1	0.5	1.2	0.3	0.5	0.3	14	3.2	2.6	2.7	0.8	0.3
2	0.5	1.0	0.6	0.0	0.0	15	2.2	1.9	0.3	0.0	0.0
3	0.3	0.5	0.2	0.6	0.1	16	1.9	0.3	0.4	0.2	0.2
4	0.3	0.4	0.0	0.0	0.0	17	0.9	1.8	1.1	1.0	0.6
5	0.8	0.1	0.0	0.0	0.1	18	1.8	1.9	0.8	0.2	0.6
6	1.3	1.0	0.5	0.0	0.6	19	3.2	2.6	2.7	0.8	0.3
7	0.8	0.1	0.2	0.0	0.0	20	2.2	1.9	0.3	0.0	0.0
8	2.3	0.4	0.0	0.0	0.0	21	1.9	0.3	0.4	0.2	0.2
9	0.6	0.8	0.0	0.0	0.0	22	0.9	1.8	1.1	1.0	0.6
10	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	23	1.8	1.9	0.8	0.2	0.6
11	0.1	0.2	0.6	0.0	0.0	24	0.8	1.0	0.0	0.3	0.0
12	0.3	0.2	0.8	0.0	0.0	25	0.2	0.5	0.2	0.2	0.1
13	0.2	0.0	0.9	0.1	0.0						

Tabela 49 – Média dos erros cometidos pelos ratos não lesionados.

Ratos	Bl ₁	Bl ₂	Bl ₃	Bl ₄	Bl ₅	Ratos	Bl ₁	Bl ₂	Bl ₃	Bl ₄	Bl ₅
1	0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	14	0.9	0.0	0.1	0.0	0.0
2	0.3	0.4	0.2	0.0	0.0	15	2.8	1.8	1.0	0.0	0.1
3	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	16	0.9	0.7	0.0	0.0	0.0
4	0.7	0.8	0.0	0.0	0.0	17	0.8	0.4	0.2	0.0	0.0
5	0.8	0.4	0.1	0.0	0.0	18	0.4	0.2	0.1	0.0	0.0
6	0.9	0.3	0.1	0.0	0.0	19	0.7	0.2	0.0	0.0	0.0
7	0.6	0.1	0.0	0.0	0.0	20	3.3	1.8	0.7	0.2	0.0
8	1.1	1.2	0.3	0.2	0.0	21	2.4	1.3	0.0	0.0	0.0
9	0.2	0.6	0.3	0.0	0.0	22	3.3	1.8	0.7	0.2	0.0
10	1.1	0.0	0.0	0.0	0.0	23	2.4	1.3	0.0	0.0	0.0
11	0.2	0.1	0.0	0.0	0.0	24	0.6	0.3	0.3	0.0	0.0
12	0.7	0.1	0.0	0.0	0.1	25	0.4	0.0	0.2	0.2	0.0
13	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	26	1.2	0.1	0.0	0.0	0.0

APÊNDICE I – DERIVADAS PARA ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES SIMÉTRICAS

Tabela 50 – Expressão para $g(z^2)$, $\frac{g'(z^2)}{g(z^2)}$ e $v = -2\frac{g'(z^2)}{g(z^2)}$ para algumas distribuições simétricas

Distribuições	$g(z^2)$	$\frac{g'(z^2)}{g(z^2)}$	v
1. Normal	$\frac{\exp\{-\frac{1}{2}z^2\}}{\sqrt{(2\pi)}}$	$-\frac{1}{2}$	1
2. Cauchy	$\frac{1}{\pi}(1+z^2)^{-1}$	$-\frac{1}{1+z^2}$	$\frac{2}{1+z^2}$
3. t-Student	$\frac{\nu^{\frac{\nu}{2}}[\nu+z^2]^{-\frac{\nu+1}{2}}}{B(1/2,\nu/2)}$	$-\frac{\nu+1}{2(\nu+z^2)}$	$\frac{\nu+1}{(\nu+z^2)}$
4. t-Student Generalizada	$\frac{w^{\frac{r}{2}}[r+z^2]^{-\frac{r+1}{2}}}{B(1/2,r/2)}$	$-\frac{r+1}{2(w+z^2)}$	$\frac{r+1}{(w+z^2)}$
5. Logística Tipo I	$C \frac{\exp\{-z^2\}}{(1+\exp\{-z^2\})^2}$	$-\frac{1-\exp\{-z^2\}}{(1+\exp\{-z^2\})^2}$	$\frac{2(1-\exp\{-z^2\})}{(1+\exp\{-z^2\})}$
6. Logística Tipo II	$\frac{\exp\{-z\}}{(1+\exp\{-z\})^2}$	$-\frac{1}{2} \frac{(\exp\{ z \}-1)}{(z \exp\{ z \}+1)}$	$\frac{(\exp\{ z \}-1)}{(z \exp\{ z \}+1)}$
7. Exponencial Potência	$c(k) \exp\{-\frac{1}{2}z^{2/(1+k)}\}$	$-\frac{z^{-k/(1+k)}}{2(1+k)}$	$\frac{z^{-k/(1+k)}}{(1+k)}$