



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS CONTÁBEIS E ATUARIAIS
CURSO DE CIÊNCIAS ATUARIAIS

HÉLDER NUNES FERRAZ BELO

**CÁLCULO DE PROVISÃO MATEMÁTICA DE UM PLANO DE BENEFÍCIO
DEFINIDO: UMA APLICAÇÃO EM PYTHON**

Recife
2023

HÉLDER NUNES FERRAZ BELO

**CÁLCULO DE PROVISÃO MATEMÁTICA DE UM PLANO DE BENEFÍCIO
DEFINIDO: UMA APLICAÇÃO EM PYTHON**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Ciências Atuariais do Campus Recife da Universidade Federal de Pernambuco, na modalidade de monografia, como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Ciências Atuariais.

Orientador: Filipe Costa de Souza

Recife
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Belo, Hélder Nunes Ferraz.

Cálculo de provisão matemática de um plano de benefício definido: uma aplicação em Python / Hélder Nunes Ferraz Belo. - Recife, 2023.

62p : il., tab.

Orientador(a): Filipe Costa de Souza

(Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Ciências Atuariais, 2023.

Inclui referências, apêndices.

1. Matemática atuarial. 2. Fundo de pensão. 3. Benefício definido. 4. Python. 5. Provisão matemática. I. Souza, Filipe Costa de. (Orientação). II. Título.

300 CDD (22.ed.)

HÉLDER NUNES FERRAZ BELO

**CÁLCULO DE PROVISÃO MATEMÁTICA DE UM PLANO DE BENEFÍCIO
DEFINIDO: UMA APLICAÇÃO EM PYTHON**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Ciências Atuariais do Campus Recife da Universidade Federal de Pernambuco, na modalidade de monografia, como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Ciências Atuariais.

Aprovada em: 24/04/2023

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 FILIPE COSTA DE SOUZA
Data: 25/04/2023 07:57:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Filipe Costa de Souza (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Documento assinado digitalmente
 WILTON BERNARDINO DA SILVA
Data: 25/04/2023 10:37:53-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Wilton Bernardino da Silva
Universidade Federal de Pernambuco

Documento assinado digitalmente
 VITOR EMANUEL DE LYRA SANTOS NAVARI
Data: 25/04/2023 10:14:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Vitor Emanuel de Lyra Santos Navarrete
Universidade Federal de Pernambuco

RESUMO

O objetivo central deste trabalho consiste em desenvolver uma aplicação prática em linguagem de programação *Python* para o cálculo de provisão matemática de benefícios concedidos em planos de previdência na modalidade Benefício Definido (BD), garantidos pelas Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC). A aplicação propõe fornecer suporte aos cálculos das provisões matemáticas nas avaliações atuariais dos planos que possuam benefícios semelhantes aos abordados neste trabalho, bem como auxiliar no gerenciamento dos ativos financeiros, permitindo analisar o impacto das premissas atuariais no cálculo das provisões. A metodologia de cálculo das anuidades é baseada em tábuas com múltiplos decrementos e funções de comutação, enquanto os algoritmos em *Python* utilizam-se da função *merge* da biblioteca *pandas* para associar a idade e o sexo dos participantes aos valores das anuidades e, assim, poder reduzir o tempo de processamento. Por fim, são apresentados os resultados das provisões matemáticas obtidos através da aplicação, assim como uma breve análise de sensibilidade dos resultados com alterações nas premissas atuariais.

Palavras-chave: Matemática atuarial; Fundo de pensão; Benefício definido; *Python*; Provisão matemática.

ABSTRACT

The main objective of this work is to develop a practical application in the Python programming language for calculating the mathematical reserve of benefits granted in defined benefit pension plans, guaranteed by closed entity of a complementary scheme. The application aims to provide support for the calculation of mathematical reserves in actuarial evaluations of plans that have similar benefits to those addressed in this work, as well as assist in the management of financial assets by allowing for the analysis of the impact of actuarial assumptions on the calculation of reserves. The annuity calculation methodology is based on tables with multiple decrements and commutation functions, while the Python algorithms use the merge function of the pandas library to associate the age and gender of the participants with the annuities values, in order to optimize processing time. Finally, the results of the mathematical reserves obtained through the application are presented, as well as a brief sensitivity analysis of the results with changes in actuarial assumptions.

Keywords: Actuarial mathematics; Pension fund; Defined benefit; Python; Mathematical reserve.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	7
2.	REGIME DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR	9
2.1.	TIPOS DE PLANOS PREVIDENCIÁRIOS	11
2.2.	INSTITUTOS.....	13
2.3.	REGIMES FINANCEIROS	15
2.4.	MÉTODOS DE FINANCIAMENTO.....	16
3.	CÁLCULO ATUARIAL	20
3.1.	HIPÓTESES E PREMISSAS ATUARIAIS.....	20
3.1.1.	Hipóteses Biométricas	22
3.1.2.	Hipóteses Demográficas	23
3.1.3.	Hipóteses Econômicas	24
3.1.4.	Hipótese Financeira	26
3.2.	ANUIDADES	27
3.3.	PROVISÕES MATEMÁTICAS	33
4.	METODOLOGIA	35
4.1.	BASE DE DADOS	35
4.2.	REGRAS GERAIS REGULAMENTARES	36
4.3.	HIPÓTESES ATUARIAIS E MÉTODOS DE FINANCIAMENTO	37
4.4.	PYTHON	38
4.5.	DESENVOLVIMENTO DA APLICAÇÃO	40
5.	RESULTADOS	50
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
	REFERÊNCIAS	56
	APÊNDICE A	61

1. INTRODUÇÃO

A previdência complementar tem se tornado uma alternativa de complementação de renda na aposentadoria dos brasileiros. O sistema de previdência do país está dividido em três tipos de esquemas de pensões: o Regime Geral da Previdência Social (RGPS), o Regime Próprio de Previdência dos Social (RPPS) e o Regime de Previdência Complementar (RPC), sendo este de caráter facultativo e composto por Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC) e Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC), também denominadas Fundos de Pensão (LOPES DA SILVA, 2021).

Os fundos de pensão têm como objetivo principal administrar os recursos vertidos pelos segurados (participantes ativos, aposentados e pensionistas) e empresas patrocinadoras de modo a garantir o pagamento dos benefícios assegurados conforme regulamento do plano. Desta forma, a busca permanente pela solvência e perenidade dos planos de benefícios é uma das principais atribuições e objetivos de seus gestores (VANZILLOTTA e SOARES, 2020).

Conforme Dias e Santos (2009), garantir a solvência futura é um grande desafio para os gestores dos fundos de pensão, pois estes estão sujeitos a diversos riscos, destacando-se os riscos biométricos e financeiros que impactam principalmente os resultados das provisões matemáticas dos planos de benefício definido. Sendo assim, para auxiliar nos cálculos de provisões e mensuração dos riscos de um plano de benefícios, faz-se necessário o emprego de programas computacionais que permitam otimizar o processamento de dados e operações aritméticas. Muito embora o Excel® seja uma ferramenta com ampla utilização no campo da Ciência Atuarial, ainda possui limitações em termos de desempenho computacional quanto ao processamento em grandes bases de dados (GOMES *et al.*, 2017). Segundo McGinley (2021), em seu artigo publicado pela *Society of Actuaries* (SOA), a linguagem de programação *Python* vem se tornando uma excelente ferramenta ao atuário, que se popularizou por ser uma linguagem de alto nível, fácil de aprender e fácil de usar, por ser robusta, rápida e projetada para produção, entre outras características.

O objetivo central deste trabalho consiste em desenvolver uma aplicação prática em linguagem *Python* para o cálculo de provisão matemática de benefícios oferecidos em um plano de previdência hipotético, que se baseia nos planos reais na

modalidade Benefício Definido (BD) garantidos pelas Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC). Trata-se, portanto, de uma aplicação que propõe dar suporte aos cálculos das provisões matemáticas das avaliações atuariais dos planos de benefícios das EFPCs que possuem nos seus regulamentos, benefícios semelhantes aos abordados neste trabalho, como também suporte no gerenciamento de seus recursos financeiros ao possibilitar analisar o fluxo de caixa futuro e nos estudos de sensibilidade de premissas atuariais.

Desta forma, para alcançar o objetivo proposto, o presente trabalho traz além deste capítulo introdutório, o Capítulo 2 que aborda a Previdência Complementar, relacionando os tipos de planos previdenciários e os benefícios ofertados por estes, como também os institutos previstos em legislação, os regimes financeiros e métodos de financiamento. O Capítulo 3 explana sobre cálculo atuarial, abordando as principais hipóteses atuariais para aferição das provisões matemáticas, indispensáveis para custear os benefícios concedidos e a conceder nos planos de benefícios, como também para determinação do custo e do passivo atuarial dos fundos de pensão. O Capítulo 4 trata sobre a metodologia apresentando os dados relacionados à base utilizada, como quantitativo de participantes (trabalhadores na ativa) e assistidos (aposentados e pensionistas), algumas regras gerais previstas em regulamentos, como alguns benefícios mais comuns e as respectivas metodologias de cálculos, população abrangida e cálculo das contribuições. Além disso, busca discorrer sobre o uso da linguagem *Python*, relacionando alguns benefícios e desafios à profissão como atuário. O Capítulo 5 elucida e analisa os resultados alcançados e, por fim, o Capítulo 6 traz as considerações finais, apresenta as limitações encontradas e sugestões para futuros trabalhos acadêmicos.

2. REGIME DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR

A previdência complementar é regida principalmente pela Lei Complementar nº 109/2001, que define as regras gerais sobre previdência complementar no Brasil, e pela Lei Complementar nº 108/2001, que dispõe sobre a relação entre os entes públicos e suas EFPC. A previdência complementar representa uma forma importante de proteção financeira aos trabalhadores, pois possibilita a formação de reserva de longo prazo, podendo contribuir para o aumento de capacidade de investimento do país e diversificação das fontes de financiamento do crescimento econômico.

Segundo os dados da Superintendência Nacional de Previdência Complementar – PREVIC (2021), o Regime Fechado de Previdência Complementar, ao final do exercício de 2020, contava com 1.129 planos de benefícios geridos por 292 EFPC e R\$ 1,05 trilhão de ativos totais administrados. Desse montante, 37% correspondiam aos ativos administrados pelas 182 EFPC de patrocínio privado. A população abrangida pelo Regime Fechado de Previdência Complementar supera 7,6 milhões de pessoas, sendo que desse total, cerca de 2,85 milhões são participantes ativos, 869 mil assistidos e 3,91 milhões são dependentes dos participantes ou assistidos (de acordo com as regras do regulamento do plano).

Responsáveis pela gestão dos planos de benefícios, as EFPC são entidades autônomas que têm personalidade jurídica própria e não possuem finalidade lucrativa (Leis Complementares nº 108 e 109/2001). O patrimônio destas não se confundem com o das empresas patrocinadoras, tal como os dos planos de benefícios, que são contabilizados separadamente de modo a ter a segregação patrimonial entre eles (Resolução CNPC Nº 43/2021 e Lei Complementar nº 109/2001). As responsabilidades das EFPC também não têm relação com as das patrocinadoras, da mesma forma que as responsabilidades são independentes, não se confundem entre si e não existe a obrigatoriedade de solidariedade entre as patrocinadoras (MINISTÉRIO DA ECONOMIA, 2021). Ressalta-se que a empresa patrocinadora, é a empresa responsável pelo aporte de contribuições e pelas transferências das contribuições descontadas dos seus trabalhadores ao plano de benefícios previdenciário, observado o que está disposto no convênio de adesão e no regulamento.

Conforme destaca Pinheiro (2005), os planos de benefícios podem oferecer benefícios programados e não programados. Os benefícios programados, como o de

aposentadoria, são aqueles em que existe a previsibilidade no regulamento do plano para início de pagamento, pois sua concessão está baseada em critérios de elegibilidade, como, por exemplo: a idade, o tempo de serviço ou de contribuição. Por outro lado, os benefícios de risco ou não programados são aqueles em que há incerteza quanto ao instante de sua ocorrência, como por exemplo: invalidez, sobrevivência ou morte. A gestão dos benefícios de riscos pode ser realizada pela própria EFPC ou pode ser terceirizada, compartilhando a responsabilidade de gestão desses benefícios com uma seguradora contratada pela EFPC. Estes benefícios são usualmente concedidos ao participante, atendendo a regras próprias de cada plano e entidade.

Sendo assim, os benefícios comumente ofertados nos planos previdenciários das EFPC são:

- I. aos participantes:
 - a) suplementação de aposentadoria por invalidez: é um benefício concedido aos participantes ativos que ficam incapacitados para o trabalho em decorrência de doença ou acidente e que não atingiram os critérios de elegibilidade para receber aposentadoria pelo tempo de contribuição ou pela idade. Os regulamentos¹ estabelecem que seja necessária a concessão da aposentadoria por invalidez pelo regime de previdência oficial que o participante esteja vinculado, seja o RGPS ou RPPS, como também satisfazer um tempo mínimo de contribuição ao plano ou de vinculação à patrocinadora.
 - b) suplementação de aposentadoria por idade: é um benefício concedido ao participante ativo que além de suprir o período determinado em regulamento de carência de vinculação ao plano ou à patrocinadora, tem sua aposentadoria por idade concedida pela previdência oficial que também esteja vinculado, a qual possui critérios próprios de idade e número de contribuições mínimas.
 - c) suplementação de aposentadoria por tempo de contribuição: é um benefício concedido ao participante que atingir um tempo mínimo de

¹ Alguns regulamentos que podem ser verificadas tais condições, são: do plano de benefícios da previdência complementar do poder executivo federal (ExecPrev da Funpresp-Exe), do plano de Benefício Definido da POSTALIS (Instituto de Seguridade Social dos Correios e Telégrafos) e do plano de Benefícios BD-01 da Regius (sociedade de previdência privada dos empregados do Banco de Brasília – BRB).

contribuição definido pela previdência oficial e pelo regulamento do plano, que também define tempo de vinculação ao plano ou à patrocinadora, tempo este que costuma ser menor que o de contribuição à previdência oficial. É comum que estabeleçam também uma idade mínima para estar elegível ao benefício de suplementação de aposentadoria por tempo de contribuição.

- d) suplementação de aposentadoria antecipada: benefício oferecido ao participante que cessar o vínculo empregatício com a patrocinadora, ter idade e tempo de contribuição ao plano mínimos de acordo com o regulamento, mas inferiores aos exigidos pelos benefícios de suplementação por idade ou por tempo de contribuição.
- e) pecúlio por invalidez: benefício pago em uma única vez ao participante ativo que fizer jus à suplementação de aposentadoria por invalidez pelo plano.

II. aos beneficiários:

- a) pecúlio por morte: benefício destinado ao conjunto de beneficiários inscritos e habilitados à suplementação de pensão por morte do participante conforme disposto em regulamento, sendo pagamento único e rateado em partes iguais.
- b) suplementação de pensão por morte: concedida, sob forma de renda mensal, ao conjunto de beneficiários inscritos e habilitados do participante que vier a falecer.

Existem ainda planos que oferecem também benefício por sobrevivência do assistido e alguns tipos de auxílios, como suplementação de auxílio-doença, de auxílio-reclusão, auxílio-natalidade, entre outros auxílios. A metodologia de cálculo de benefícios mais conhecidos e regras de elegibilidade serão abordados em mais detalhes no Capítulo 4.

2.1. TIPOS DE PLANOS PREVIDENCIÁRIOS

Um plano de benefícios reúne um conjunto de direitos e obrigações em um regulamento que define as regras de pagamento de benefícios previdenciários ou

assistenciais aos seus participantes e beneficiários, mediante contribuições e rentabilidade dos investimentos. Conforme a Resolução CNPC Nº 41/2021, os planos de benefícios estão estruturados nas modalidades de benefício definido, contribuição definida e contribuição variável.

Segundo Reis (2019), o principal aspecto que definirá qual modalidade um plano de benefícios se encaixa, será a qualificação dada ao benefício de aposentadoria programada, tornando irrelevante o tratamento dado aos benefícios de risco, como nos casos dos planos de contribuição definida, os quais podem prever algum componente mutualista e atuarial para os benefícios de risco, mas a aposentadoria programada sendo definida pela acumulação baseada no saldo financeiro da conta do participante. No plano de contribuição definida, o benefício que é indefinido, pois tem seu valor permanentemente ajustado ao saldo de conta mantido em favor do participante, inclusive na fase de percepção de benefícios, considerando o resultado líquido de sua aplicação, os valores aportados e os benefícios pagos. (art. 3.º da Resolução CNPC nº 41/2021). Apesar da nomenclatura, as contribuições podem variar acima do percentual mínimo previsto em regulamento, desde que o participante deseje incrementar seu saldo de conta, mas não por consequência de equacionamentos de déficits atuariais, como pode ocorrer nos planos de benefício definido (REIS, 2019).

Nos planos de contribuição variável, a variação da contribuição é admitida não apenas em razão da liberdade de aportes, como também devido aos componentes atuariais apresentados por esse plano, tendo em vista que o benefício é calculado com base no saldo de conta do participante, mas uma vez concedido, este se torna vitalício (REIS, 2019) na fase da inatividade, diferentemente do plano de contribuição definida, que não tem a garantia de renda vitalícia. Sendo assim, sob o aspecto técnico, tanto o benefício quanto as contribuições podem sofrer variações. Reis (2019) também afirma que outra possibilidade de qualificar um plano como contribuição variável é a previsão de um benefício mínimo, calculado atuarialmente tal como ocorre em um plano de benefício definido, agregado a um benefício resultante do saldo de conta assim como é feito em plano de contribuição definida, com ou sem renda vitalícia na fase de recebimento.

Os planos de benefícios definidos têm o valor ou nível do benefício programado previamente estabelecido na contratação do plano, sendo a contribuição (tanto da patrocinadora, quanto do participante) quem sofrerá variações ao longo do tempo para

poder atingir a acumulação ideal que garanta seu pagamento. O custeio é determinado atuarialmente, de forma a assegurar sua concessão e manutenção e por ser tradicionalmente expresso como uma renda vitalícia, é importante que as hipóteses atuariais adotadas, como taxa de juros, longevidade, crescimento real de salário, rotatividade, entre outras, estejam alinhadas com a realidade da massa de participantes.

2.2. INSTITUTOS

De acordo com o art. 14 da Lei Complementar nº 109/2001, todo plano de benefícios deve assegurar aos seus participantes o direito aos institutos do benefício proporcional diferido, da portabilidade, do resgate e do auto patrocínio. Reis (2019) discorre sobre a mudança do contexto em que se inseriam as relações de trabalho na época da publicação da Lei nº 6.435/1977, que inicialmente regia a previdência complementar brasileira, e o contexto quando ocorreu a publicação da Lei Complementar nº 109/2001. O autor compara que inicialmente as relações de trabalhos eram mais estáveis no que se refere aos contratos de trabalho, em que a quebra de vínculo empregatício era mais rara de ocorrer quando se analisa o contexto atual, o qual houve grande flexibilização, sendo menos comum os contratos de longo prazo. Por essa razão a legislação de 2001 trouxe inovações para os planos de previdência complementar, como os institutos da portabilidade e do benefício proporcional diferido, além dos já existentes sob a égide da legislação anterior, como o resgate e o auto patrocínio.

Assim, mesmo que haja a quebra do vínculo empregatício, o participante tem o direito de se manter vinculado ao seu plano de previdência complementar originário através do auto patrocínio ou benefício proporcional diferido, ou mesmo transferir suas reservas para outro plano de benefícios por meio da portabilidade, mantendo-se o perfil de longo prazo dessa poupança previdenciária (REIS, 2019). O benefício proporcional diferido (BPD) será a faculdade concedida ao participante de receber futuramente o benefício proporcional às suas contribuições após a cessação do seu vínculo empregatício com a patrocinadora e antes da elegibilidade do benefício pleno. O regulamento definirá as regras específicas quanto à carência para opção deste instituto, como também referente à contribuição para o custeio administrativo e de

eventuais coberturas dos riscos de invalidez e morte oferecidas durante a fase do diferimento, apesar da cessação de contribuições para a constituição das reservas do benefício pleno programado (art. 6º, § 1º da Resolução CGPC nº 06/2003). A opção pelo BPD, no entanto, não isenta o participante remido ou assistido de eventuais contribuições extraordinárias necessárias para equacionamento de déficit atuarial em planos de benefícios que apresentam componentes atuariais como, por exemplo, os planos de benefício definido.

Caso tenha sido optado pelo BPD, o participante remido poderá posteriormente optar pelo instituto da portabilidade ou resgate, sendo o primeiro o direito de transferir os recursos financeiros correspondente ao seu benefício acumulado para outro plano e o segundo, resgate das contribuições descontadas as parcelas do custeio administrativo de acordo com o regulamento. No caso da portabilidade, o recurso não fica disponível ao participante, como acontece no resgate e também não pode ser confundido com a migração de plano. A portabilidade, como ressalta Reis (2019), é facultada ao participante sem o concurso da vontade do patrocinador, dado ser um instituto obrigatoriamente previsto em regulamento, tendo como premissa a cessação do contrato de trabalho. No caso da migração, não há cessação do contrato de trabalho e a transferência de recursos entre planos geralmente ocorre na mesma EFPC, dentro de uma ampla reestruturação previdenciária, facultada ao participante e assistidos com o concurso de vontades do patrocinador, EFPC (através do conselho deliberativo) e autorização prévia da Previc (REIS, 2019). A portabilidade pode-se dar entre planos de uma EFPC para outra, como também entre EFPC e EAPC, garantindo a poupança previdenciária.

Por fim, o auto patrocínio faculta ao participante a possibilidade de manter o valor da sua contribuição e assumir também a da patrocinadora quando ocorrer a perda total ou parcial da sua remuneração, permitindo que seja mantida ou alterada a percepção futura do benefício. Sendo assim, caso haja cessação do vínculo empregatício ou esteja o contrato de trabalho suspenso, o participante poderá optar por assumir integralmente as contribuições próprias junto com as da patrocinadora para o plano ao qual permanecerá vinculado, deslocando a fonte contributiva do patrocinador para o participante, mas mantendo o nível do benefício. O mesmo ocorre com a perda parcial da remuneração em que o participante pode preservar o nível do benefício, mantendo o nível contributivo e assumindo a diferença da patrocinadora. Ressalta-se que o auto patrocínio não está sujeito à carência e o participante que

optar por este instituto poderá mudar posteriormente para um BPD, uma portabilidade ou um resgate, conforme regras do regulamento.

2.3. REGIMES FINANCEIROS

O art. 18 da Lei Complementar nº 109/2001 estabelece que o plano de custeio, com periodicidade mínima anual, definirá o nível de contribuição necessário à constituição das reservas garantidoras de benefícios, fundos, provisões e à cobertura das demais despesas do plano de benefícios. Segundo o art. 10 da Resolução CNPC nº 30/2018, o custeio do plano são valores que devem ser aportados, por meio de contribuições de patrocinadores, participantes e assistidos para constituição das provisões matemáticas e fundos necessários para pagamento de benefícios e de despesas decorrentes da administração do plano de benefícios, segundo critérios definidos previamente no regulamento e na nota técnica atuarial.

O regime financeiro indicará como será o custeio das obrigações através das contribuições ao plano, definindo a distribuição do custo ao longo do tempo, através da utilização de hipóteses atuariais, demográficas, econômicas e financeiras (CAPELO, 1986), sendo admitido, no sistema de previdência complementar fechado pela legislação, os regimes financeiros de capitalização, de repartição de capitais de cobertura e repartição simples. Os regimes financeiros, diferentemente do método de financiamento, não interferem no valor que será pago aos segurados a título de benefício, portanto não alteram o chamado custo atuarial (BOHNEN, 2019). O regime financeiro define a forma adotada para financiar os benefícios, isto é, como pretende-se alocar os recursos para fazer frente às obrigações dos planos. Sendo assim, não definem a forma como as contribuições serão realizadas, enquanto que o método de financiamento, no regime de capitalização, define a estratégia de capitalização do plano, determinando a forma de distribuição do custo dos benefícios futuros ao longo do tempo (JARDIN, 2010; PREVIC, 2022).

O regime de repartição simples prevê apenas a arrecadação de recursos suficientes para honrar as despesas do mesmo exercício. Nesse regime financeiro, não há constituição de reservas matemáticas para honrar os compromissos calculados, mas podem eventualmente constituir fundos (CAPELO, 1986; PAZ e PINTO, 2010). “Aplica-se esse regime para estruturar e avaliar benefícios de

pagamento único ou temporários de curta duração, tais como auxílio-doença, auxílio-natalidade, auxílio-funeral, pecúlio por morte e pecúlio por invalidez” (PINHEIRO, 2007, p. 49). A Resolução CNPC Nº 30/2018 estabelece que as EFPC devem adotar o regime de capitalização obrigatoriamente para os benefícios programados e continuados, e facultativamente para os demais, na forma de renda ou pagamento único. Neste método há a formação de reservas tendo como característica principal que esta seja constituída pelo participante na fase ativa para o cumprimento do próprio benefício previdenciário. Sendo assim, diferente do regime de repartição simples, não há a solidariedade entre as gerações, em que cada participante deverá constituir sua própria reserva matemática ao longo do período laborativo (PAZ e PINTO, 2010).

O regime de repartição de capitais de cobertura admite-se para benefícios pagáveis por invalidez, por morte, por doença ou reclusão, cuja concessão seja estruturada na forma de renda. Tal regime consiste na arrecadação das contribuições efetuadas no ano para a constituição de um fundo garantidor, que corresponde ao valor presente das concessões estimadas dos benefícios a ocorrer naquele ano. Caso os mesmos benefícios sejam estruturados na forma de pagamento único, a legislação admite a adoção do regime de repartição simples.

2.4. MÉTODOS DE FINANCIAMENTO

Inicialmente, cada método de financiamento estabelece, com base em suas peculiaridades e o regime financeiro adotado, o que se chama de “custo normal”. Este custo é denominado dessa forma dado que define o custo que é a base para todo o financiamento e depende, intrinsecamente, da filosofia de alocação de custos do método adotado (JARDIM, 2010). Desse modo, o custo normal está relacionado ao curso trivial do plano, aos valores constantes acumulados das obrigações no exercício e que determina a necessidade de custeio do plano para o exercício seguinte. No momento da aposentadoria, a acumulação atuarial dos custos normais ao longo da vida ativa do participante deve se igualar ao passivo atuarial. O equilíbrio atuarial de um plano de benefícios é caracterizado como a igualdade entre o valor presente esperado dos benefícios, acrescido das despesas administrativas e o valor presente esperado das contribuições, acrescido do total de recursos garantidores desse plano (JARDIM, 2010).

Paz e Pinto (2010) afirmam que os principais métodos de financiamento são: Crédito Unitário Tradicional e Projetado, Idade Normal de Entrada, Agregado, Prêmio Nivelado Individual e Capitalização Financeira. Conforme Jardim (2010), o método do crédito unitário foi inicialmente criado para atender aos planos de aposentadoria, em que o benefício era acumulado a cada ano e com base em valores fixados em moeda, ou seja, não estavam vinculados ao salário final do participante. Em alguns casos a acumulação poderia se basear no salário corrente e não no salário final. O benefício a ser concedido na idade de aposentadoria divide-se em tantas frações quantos forem os anos de filiação como participante ativo, com uma unidade atribuída a cada ano. Dessa forma, o Valor Atual dos Benefícios Futuros (VABF) é calculado em unidades correspondentes ao número de anos de filiação ao plano, até a idade de início do benefício, considerando as hipóteses de mortalidade, rotatividade e os decrementos para o ano seguinte (PAZ E PINTO, 2010; JARDIM, 2010).

O método do crédito unitário projetado surge para atender os planos em que os benefícios de aposentadoria são calculados com base no salário final do participante, ou seja, considera a hipótese de crescimento real do salário e calcula os benefícios levando em conta os salários projetados até a data de elegibilidade do benefício (PINHEIRO, 2007). Sendo assim, a acumulação do benefício segue uma projeção, ao invés do seu valor corrente. O custo normal continua correspondendo ao valor presente do aumento desse benefício acumulado, projetado a cada ano. Tanto o método do crédito unitário tradicional quanto projetado são adequados para massas que apresentem um perfil de renovação constante de participantes, tendo em vista que as contribuições se tornam niveladas ao longo do período ativo, levando em consideração que além da massa, as demais premissas atuariais e econômicas adotadas se concretizem ao longo do tempo (PAZ e PINTO, 2010).

Segundo Jardim (2010), o método idade de entrada normal pode ser dividido em duas formas quanto ao cálculo do custo normal, a primeira estabelece um custo normal uniforme em valor constante em moeda e a segunda em valor constante de percentual de salário. O princípio deste primeiro método está em sempre determinar um custo normal nivelado a partir de determinada idade (normalmente a data de adesão ao plano ou admissão na patrocinadora), chamada de idade de entrada normal. Determina-se o custo normal dividindo o valor presente dos benefícios na data de entrada por uma anuidade temporária, contada da idade de entrada normal até a data prevista para a concessão do benefício.

A segunda forma tem seu princípio também em definir o custo normal nivelado, a partir da idade de entrada normal. Porém, diferentemente do primeiro método, a determinação do custo normal consiste em tomar o valor presente dos benefícios na data de entrada e dividir pelo valor presente dos salários na mesma data. Com base em Pinheiro (2007), diferentemente do método de crédito unitário, em que o custo normal tende a crescer ano após ano em consequência dos juros, o custo não deve aumentar pelo método idade de entrada normal, considerando o mesmo cenário de premissas e taxa de crescimento salarial nula. Considerando que o custo normal será nivelado em percentual do salário desde a entrada do participante na patrocinadora até a aposentadoria, uma vez que o efeito dos juros já está refletido no custo normal.

O método agregado é um método coletivo, sua característica principal é estabelecer um prêmio médio através da proporção entre o valor atual dos benefícios futuros de todos os participantes ativos e o valor atual dos salários futuros (CONDE e ERNANDES, 2007; PINHEIRO, 2007). Tem como princípio igualar o valor presente dos futuros benefícios sem cobertura pelo ativo do plano ao valor presente das contribuições futuras. Segundo Paz e Pinto (2010), é importante ressaltar algumas observações relacionadas ao método agregado, pois não há uma abordagem específica sobre o serviço passado a amortizar, visto que as taxas de financiamento normal obtida já reconhece os benefícios passados ou futuros sem cobertura (PINHEIRO, 2007). Sendo assim, os ganhos e perdas são absorvidos no mesmo cálculo e, por consequência, são amortizados até a data da aposentadoria por meio da alteração no custo normal futuro. Portanto, os planos que não tenham o seu plano de custeio revisado anualmente, podem apresentar desequilíbrio.

De acordo com Conde e Ernandes (2007), o método denominado prêmio nivelado individual, também chamado de método de capitalização ortodoxa, determina que o valor atual do benefício seja equivalente ao valor atual das contribuições. O valor anual da contribuição se manterá nivelado, seja individualmente ou coletivamente, desde a data de admissão, ou data de implantação do plano, se posterior, até a data de início do benefício. Segundo Pinheiro (2007), os participantes ativos entrantes na inauguração do plano de benefícios terão suas reservas individuais constituídas por uma série percentual nivelada de pagamento das contribuições. Caso os indivíduos que ingressem no plano depois da sua constituição, a forma de financiamento se assemelha ao método idade normal de entrada.

O método de capitalização financeira é utilizado para cálculo dos benefícios nos planos estruturados nas modalidades de contribuição definida e de contribuição variável. Consiste na formação individual de um montante financeiro, através do aporte de contribuições mensais de participantes e patrocinadoras, que arbitrarão o percentual de contribuição, não sendo assim aplicado o conceito de custo normal. O valor total acumulado, capitalizado de acordo com o retorno dos investimentos do ativo do plano, resultará no montante final que será convertido em benefício (PAZ e PINTO, 2010).

3. CÁLCULO ATUARIAL

Segundo o art. 1º do regulamento do Decreto-Lei nº 806 de 04 de setembro de 1969, o atuário é “o técnico especializado em matemática superior que atua, de modo geral, no mercado econômico-financeiro, promovendo pesquisas e estabelecendo planos e políticas de investimentos e amortizações”. Quanto ao seguro privado e social, o referido artigo afirma que o atuário atua “calculando probabilidades de eventos, avaliando riscos e fixando prêmios, indenizações, benefícios e reservas matemáticas”. Entre as atividades profissionais do atuário está a realização do cálculo atuarial, que pode ser entendido no âmbito previdenciário como o método matemático que utiliza conceitos financeiros, econômicos e probabilísticos para dimensionar o montante de recursos e de contribuições necessárias ao pagamento de benefícios futuros dos segurados dos fundos de previdência, que busca o equilíbrio entre os resultados financeiros e a projeção atuarial (GOMES *et al.*, 2017).

A manutenção do equilíbrio atuarial é imprescindível para a garantia da sustentabilidade do plano e do pagamento dos benefícios previdenciários. É através do cálculo atuarial que o profissional poderá desenvolver a avaliação atuarial, na qual são estudados os aspectos quantitativos e qualitativos relativos ao ativo e ao passivo do plano. Há também o parecer atuarial, no qual o atuário atesta ou não a situação de solvência econômico-financeira da entidade, identifica as discrepâncias encontradas e as razões que as originaram e propõe correções para esses desvios (SOUZA, 2007).

3.1. HIPÓTESES E PREMISSAS ATUARIAIS

As avaliações atuariais das EFPCs são obrigatórias e realizadas em intervalos regulares, normalmente anuais, mas na ocorrência de fato relevante deve ser realizada uma nova avaliação, posicionada na data da efetivação do fato que a motivou (art. 22 da Lei Complementar Nº 109/2001 e art. 5 da Resolução PREVIC nº 7/2022). A avaliação dos benefícios futuros tem como objetivo assegurar o equilíbrio entre as contribuições a serem pagas, o valor dos ativos do fundo e os benefícios previstos no plano, na data base da avaliação. Para isso, torna-se necessário adotar hipóteses ou premissas demográficas, biométricas e econômicas sobre o futuro do plano, da economia e dos mercados envolvidos, as quais devem constituir as

melhores estimativas para os respectivos parâmetros e escolher o método de financiamento a ser utilizado na avaliação (ROSA, 2011). Tais hipóteses ou premissas devem ser adequadas às características do plano de benefícios, da sua massa de participantes, assistidos e beneficiários, ao ambiente econômico e à legislação em vigor, bem como à atividade desenvolvida pelo patrocinador ou instituidor (PREVIC, 2022).

Portanto, como afirmam Vanzillotta e Soares (2020), as premissas têm relação direta com o custo e equilíbrio do plano, dado que a utilização de premissas inadequadas, ou seja, que não correspondem com a realidade do plano e de sua massa de participantes, resultará na apuração de um custeio inadequado e, conseqüentemente, poderá causar desequilíbrio. Conforme Corrêa (2018) ressalta, a utilização de diferentes premissas pode resultar na estimação de alíquotas de contribuição e reservas distintas para uma mesma população nos cálculos atuariais. Premissas que estimam maior tempo de contribuição ao plano e aposentadoria mais tardia, conseqüentemente assumem aplicações investidas por mais tempo e, portanto, exigem alíquotas de contribuições menores. Por outro lado, levando em consideração que benefícios previdenciários podem ser vitalícios e reversíveis a cônjuges e dependentes, quanto maior o tempo de vida do servidor e quanto maior a probabilidade de deixar cônjuge e dependentes, maior o tempo de recebimento de benefícios e, conseqüentemente, maior alíquota de contribuição necessária para custear os benefícios (WINKLEVOSS, 1993).

Sendo assim, é importante que as premissas reflitam a realidade sem superestimá-la ou subestimá-la, pois déficits ou superávits são situações indesejáveis ao plano, tendo em vista que déficits significam que as contribuições não foram suficientes para custear os benefícios, prejudicando seus pagamentos e a sustentabilidade do plano. Quanto ao superávit, entende-se que trouxe uma despesa maior ao segurado cobrando-se mais para arcar com os benefícios, privando-o de um padrão de vida melhor sem uma necessidade real (CORRÊA, 2018 *apud* WINKLEVOSS, 1993).

O Instituto Brasileiro de Atuária (IBA) através do Comitê de Pronunciamentos Atuariais (CPA) nº 3 anexo à Resolução IBA 02/2016 afirma que a Norma Atuarial nº 1 estabelece os tipos de hipóteses utilizados para mensuração de obrigações de um plano de benefícios. São hipóteses como a de aposentadoria, rotatividade, mortalidade, invalidez, morbidez e composição familiar (percentual de casados, idade

do cônjuge, quantidade e idade dos filhos, entre outros), mas que não necessariamente se limitarão a estas. Ainda de acordo com o CPA nº 3 do IBA, as hipóteses atuariais podem ser classificadas conforme verifica-se na Tabela 1.

TABELA 1 – Classificação das Hipóteses Atuariais

Biométricas	Demográficas	Econômicas	Financeiras
Tábua de Entrada em Invalidez	Hipótese sobre composição da família de pensionistas	Taxa de Inflação	Taxa Real Anual de Juros
Tábua de Mortalidade de Inválidos	Hipótese de Entrada em Aposentadoria	Projeção de Crescimento Real de Salário	
Tábua de Mortalidade Geral	Hipótese sobre Geração Futura de Novos Entrados	Projeção de Crescimento Real dos Benefícios do Plano	
Tábua de Sobrevivência	Hipótese de Desligamento (Rotatividade)	Projeção de Crescimento Real do Maior Salário de Benefício do INSS	
Tábua de Sobrevivência de Inválidos		Indexador do Plano	
Tábua de Morbidez			

Fonte: CPA nº 3 do IBA

3.1.1. Hipóteses Biométricas

A **tábua de entrada em invalidez** tem por objetivo estimar a probabilidade de um participante ativo ficar inválido e se aposentar por invalidez. Pinheiro (2007) ressalta que probabilidades maiores de entrada em invalidez resultam em valores também maiores de reserva matemática necessária para prover os benefícios de aposentadoria por invalidez. Conforme Corrêa (2018), a entrada do participante em invalidez encerra o pagamento das contribuições e inicia uma série de pagamentos de benefícios, pois a morte do aposentado por invalidez também pode resultar na geração de um benefício de pensão aos seus dependentes ou cônjuge, que terá valores e duração de acordo com o regulamento.

A **tábua de mortalidade/sobrevivência de inválidos** indica a probabilidade de falecimento dos participantes inválidos, ou seja, dos participantes que já estão aposentados por invalidez. Sendo assim, impacta diretamente na provisão matemática de benefícios concedidos, visto que corresponde à possibilidade de cessação do benefício (CHAN *et al.*, 2010).

A **tábua de mortalidade/sobrevivência geral** é usada para estimar a sobrevivência dos participantes ativos, aposentados e beneficiários válidos. Também utilizada para calcular o valor atual das despesas com o pagamento de aposentadorias e pensões, exceto para os inválidos. O evento “mortalidade” é uma componente importante no cálculo do valor atual dos benefícios que serão pagos no futuro. O fato gerador pode ser a morte, resultando no benefício de pensão por morte, mas também pode ser a sobrevivência, o que resultará no benefício de aposentadoria programada.

Conforme Chan *et al.* (2010), dado os impactos dessa variável na estruturação do plano, infere-se que eventuais desvios de estimativa devem ocasionar reflexos significativos no seu resultado técnico. É importante destacar também que, com base no Art. 4º da Resolução CNPC nº 30, de 2018 e art. 13, §§ 1º e 2º, da Instrução Normativa Previc nº 33, de 2020, as tábuas de mortalidade geral referenciais para o cálculo das provisões matemáticas dos planos de benefícios devem ser: “AT-2000 Básica – M” para o sexo masculino e “AT-2000 Básica – F” para o sexo feminino. Em caso de recomendação de tábuas que gerem provisões matemáticas menores que aquelas geradas pelas tábuas referenciais, é necessário que o atuário responsável pelo plano emita parecer específico, acompanhado de manifestação de ciência e concordância do Administrador Responsável pelo Plano de Benefícios (ARPB), comprovando a aderência e a razoabilidade da adoção da hipótese.

A **tábua de morbidez** é utilizada em caso de adoção de premissa de entrada em doença como, por exemplo, benefícios de auxílio-doença. Serve para medir o tempo médio esperado por idade de afastamento temporário do trabalho com perda total ou parcial do salário.

3.1.2. Hipóteses Demográficas

Composição familiar, segundo Rodrigues (2008), é fundamental para a formação das reservas matemáticas quando o regulamento do plano considera pagamento de pensão aos dependentes dos participantes. A constante atualização e regularidade cadastral dos associados e de seus dependentes é imprescindível, tanto para concessão do benefício, quanto para os cálculos atuariais. É importante para o atuário saber o tamanho familiar, como também a idade dos membros familiares, visto

que quanto mais jovem for a família beneficiária, maior deverá ser o valor atual dos benefícios futuros das pensões (PINHEIRO, 2007). Conforme Rodrigues (2008), alguns atuários consideram a família real de cada um dos participantes, outros utilizam-se de modelagem média ou $Heritor_{(x)} - H_x$, na qual se traça a curva média de dependentes por idade, sexo e condição como participante (ativo ou em benefício).

Entrada em aposentadoria tem relação direta com as datas para elegibilidade em aposentadoria fixadas pelos regimes de previdência quando esse sistema serve de parâmetro para complementação de renda (RODRIGUES, 2008). Tal hipótese possibilita ao atuário adotar uma idade presumida para entrada do participante no benefício de aposentadoria e é de suma importância, principalmente quando o plano não fixa uma idade mínima para sua elegibilidade. Essa idade impacta diretamente na formação do fluxo de caixa relativo aos pagamentos com aposentadoria e pensões, tanto para planos na modalidade de benefício definido, quanto contribuição definida (RODRIGUES, 2008).

Geração Futura de Novos Entrados, de acordo com ABRAPP (2018, p. 27), “representa o fluxo anual de novos participantes ou, em outras palavras, a hipótese de reposição/entrada de empregados na empresa”. Conforme Corrêa (2018), entrada de novos indivíduos depende geralmente de aspectos políticos e de realização de concursos públicos ou políticas de crescimento e novas contratações das empresas. A autora ainda afirma que em cálculos atuariais de planos capitalizados em geral não se costuma considerar a entrada de novos participantes, apenas a população que já está assegurada.

Rotatividade refere-se ao *turnover*, ou seja, ao fluxo de entradas e saídas de funcionários da patrocinadora que aderiram ao plano. Chan *et al.* (2010) comenta que uma rotatividade maior de participantes que não atingiram os requisitos mínimos dos institutos (BPD, portabilidade, auto patrocínio ou resgate) implica em menor necessidade de recursos para liquidação de compromissos futuros e, conseqüentemente, menor será a provisão matemática.

3.1.3. Hipóteses Econômicas

A **taxa de inflação** afeta diretamente o poder aquisitivo da moeda e, conseqüentemente, acaba influenciando os reajustes dos benefícios e dos salários

dos participantes ativos. Para Rodrigues (2008, p. 132), “a taxa de inflação, pela sua capacidade de deprimir ganhos salariais, servirá de base para o cálculo da capacidade salarial”. O fator de capacidade salarial é um valor entre zero e um e quanto menor o fator, maior a influência da inflação na redução do poder aquisitivo salarial (CHAN *et al.*, 2010). Rodrigues (2008) ressalta que o fator de capacidade salarial, para cada ponto percentual de redução ou aumento de inflação, pode sensibilizar inversamente a reserva matemática, porém, em percentual inferior à variação inflacionária.

A **Projeção de Crescimento Real de Salário** refere-se à taxa com que os salários crescerão em média acima da inflação ao longo da permanência como participante ativo no plano. De modo geral, o valor dos benefícios de aposentadoria nos planos BD está relacionado ao valor do salário do participante. Logo, conforme ressalta Chan *et al.* (2010), o problema é estimar o valor do salário futuro do participante na data da sua aposentadoria. Sendo assim, esta premissa “tem por objetivo permitir que o volume da reserva matemática atual reflita uma condição salarial futura” (RODRIGUES, 2008, p. 124). As estimativas salariais envolvem a consideração sobre fatores como alterações de salários não só por correções monetárias, como também por ganhos de produtividade e mérito de carreira (WINKLEVOSS, 1993). O desempenho dos ganhos salariais, segundo Rodrigues (2008), pode ser o fator de maior impacto no modelo agregado de cálculo das reservas matemáticas. O autor cita, a título de exemplo, que o aumento de um ponto percentual no crescimento salarial pode resultar em até 30% de acréscimo nas reservas matemáticas.

A **Projeção de Crescimento Real dos Benefícios** corresponde à taxa de crescimento médio anual acima da inflação dos benefícios na fase de recebimento de recurso. Nos planos em que há previsão em regulamento desse crescimento real, haverá também uma dificuldade maior para o atingimento da meta atuarial, sendo preciso uma atenção especial na taxa real de juros utilizada (ABRAPP, 2018). Dessa forma, é recomendável considerar o incremento real do benefício no estudo de adequação da taxa real de juros como estratégia de mitigação de riscos relacionamento ao descasamento desta hipótese.

A **Projeção de Crescimento Real do Maior Salário de Benefício do INSS** está relacionada ao crescimento médio anual, descontada a inflação, do teto do benefício do INSS. Esta premissa tem impacto direto nos planos BD que exigem a concessão do benefício pelo RGPS e este serve de parâmetro para o benefício de

complementação de aposentadoria pela EFPC. Geralmente utilizada quando o governo federal sinaliza reajuste no teto do INSS acima da inflação (ABRAPP 2018).

O **Indexador do Plano** está relacionado, na maioria dos casos, às hipóteses de inflação, Fator de Capacidade Real dos Salários ou Fator de Capacidade Real dos benefícios da entidade. Estas hipóteses têm como objetivo refletir o impacto da deterioração dos salários e benefícios entre dois reajustes diante de um contexto inflacionário (ABRAPP, 2018). O indexador do plano serve como um índice de referência, seja quanto ao retorno esperado dos investimentos, como também para correção de salários e benefícios. Segundo Rodrigues (2008), a escolha do indexador deve ir ao encontro do índice que melhor expresse variações médias do custo de vida segundo a classe de renda do participante.

3.1.4. Hipótese Financeira

A **Taxa Real Anual de Juros** é utilizada para refletir a expectativa de rentabilidade mínima, acima da inflação, dos recursos aplicados para a cobertura dos compromissos do plano de benefícios (ABRAPP, 2018; CHAN *et al.*, 2010). Segundo Rodrigues (2008), também é utilizada como taxa de desconto atuarial para o cálculo do valor presente dos benefícios e contribuições futuras relativas ao plano. Ou seja, a taxa de ganhos reais dos investimentos assume, também, a forma de taxa de desconto do passivo do plano.

Nas EFPC a Estrutura a Termo de Taxa de Juros Média (ETTJ-M) é utilizada para definir a Taxa de Juros Parâmetro (TJP) de um plano de benefícios, que corresponde à taxa anual cujo ponto da ETTJ-M seja o mais próximo à duração (*duration*) do passivo do plano de benefícios, conforme caput do Art. 6º da Instrução Normativa Previc nº 33/2020. A importância da TJP encontra-se no fato de que a taxa de juros real anual que uma EFPC pode adotar na avaliação atuarial de um plano de benefícios está limitada ao intervalo compreendido entre 70% da TJP e 0,4 p.p. acima da TJP, de acordo com a Resolução CNPC nº 30/2018. Caso a EFPC pretenda adotar a premissa de uma taxa de juros fora desse intervalo, deve enviar estudo técnico específico para autorização pela Previc.

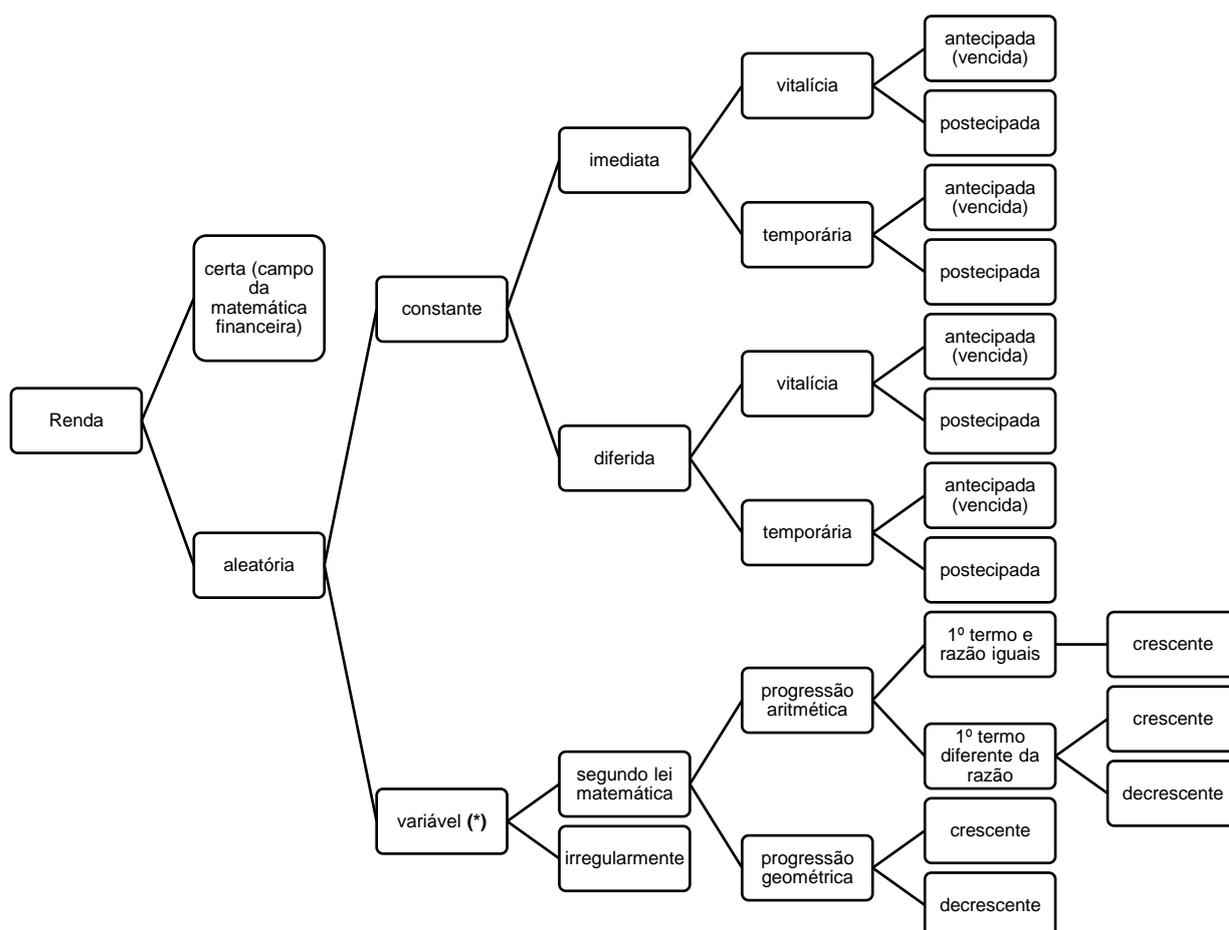
De acordo com Corrêa (2018), quanto maior a taxa de juros adotada nas avaliações atuariais, menor será o valor presente das reservas matemáticas

necessárias e vice-versa. A autora ainda enfatiza que esta premissa é a que mais impacta os resultados dos cálculos atuariais, portanto, é o mais importante dentre todos os pressupostos.

3.2. ANUIDADES

Precedendo os conceitos e fundamentos abordados nesta seção, é relevante apresentar a Figura 1, a qual é uma adaptação do quadro elaborado por Vilanova (1969, p. 32), que resume bem os diversos desdobramento assumidos pelas rendas, ou anuidades, no campo discreto.

Figura 1 – Quadro sinótico das anuidades



* Cada tipo do grupo variável pode ter desdobramento idêntico ao mencionado nas rendas aleatórias constante, como também haver as rendas fracionadas, rendas conjuntas com duas ou mais vidas, combinações de renda certa com renda aleatória, entre outras.

Adaptado de: Vilanova (1969, p.32)

Diz-se aleatória, de acordo com Cordeiro Filho (2009), as rendas que, como o próprio nome sugere, dependem de acontecimentos aleatórios e, por isso, também são chamadas de contingentes. Um exemplo citado pelo autor de renda aleatória seria de uma apólice de seguro com o objetivo de ser pago à uma pessoa, uma determinada quantia financeira de forma vitalícia. Sendo assim, este valor a ser pago é previamente acordado, no entanto, sua duração é incerta, já que dificilmente será possível prever de forma exata até quando esta pessoa permanecerá viva auferindo a renda.

Como pode ser visto na Figura 1, a anuidade poderá assumir diversas variações, entre elas, imediata ou diferida, quando se refere ao prazo de carência, sendo diferida o caso em que a renda é paga após certo tempo decorrido. Quanto à duração do pagamento, a renda poderá ser temporária ou vitalícia. Referente ao período, a renda poderá ser paga no início dos períodos quando antecipada ou ao final, quando postecipada.

Considerando os casos discretos, quando a renda está caracterizada como uma renda aleatória, constante, imediata, com periodicidade anual, vitalícia e postecipada, significa que é uma renda anual que uma pessoa deverá receber no final de cada ano enquanto estiver viva (CORDEIRO FILHO, 2009). O respectivo valor presente esperado é também chamado do prêmio puro e, para esta classificação de renda, tem como notação atuarial padrão o a_x . Para o cálculo do a_x , temos:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} {}_t p_x \cdot v^t, \quad (1)$$

em que v^t indica o fator de descapitalização ou fator de valor atual, o qual é $(1+i)^{-t}$, sendo i a taxa de juros anual efetiva e t o número de períodos; ω representa a idade limite da tábua de mortalidade utilizada, que é teoricamente inalcançável por qualquer indivíduo em vida; e ${}_t p_x$ é a probabilidade de uma pessoa de idade x alcançar a idade $x+t$ com vida.

Há também a possibilidade de realizar o cálculo das anuidades através de funções de comutação, que reúnem várias colunas em uma tabela com o resultado das operações que se efetuam com os valores de l_x (quantidade de pessoas vivas na idade x) e d_x (quantidade de pessoas que morreram na idade x) de determinada tábua de mortalidade, multiplicados pelo fator de juros a uma taxa prefixada (CHAN *et al.*,

2010; CORDEIRO FILHO, 2009). A tábua de comutação é constituída por sete colunas, considerando as idades, sendo os valores de D_x, N_x e S_x referentes à sobrevivência, enquanto C_x, M_x e R_x à mortalidade. Para o presente estudo, consideraremos apenas aqueles valores referentes à sobrevivência, que são obtidos conforme as equações (2), (3) e (4):

$$D_x = l_x \cdot v^x, \quad (2)$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}, \quad (3)$$

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} N_{x+t}. \quad (4)$$

Portanto, com base nas funções de comutação, a equação (1) pode ser reescrita como:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \quad (5)$$

Supondo que a renda mantenha as mesmas características anteriores, diferenciando-se apenas por ser antecipada, ou seja, uma renda aleatória, constante, imediata, com periodicidade anual, vitalícia e antecipada, sua notação atuarial padrão é o símbolo \ddot{a}_x e seu cálculo é definido como:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} {}_t p_x \cdot v^t = \frac{N_x}{D_x}. \quad (6)$$

Note que, nesse caso, t inicia em zero, ao invés de 1. Como $v^0 \cdot {}_0 p_x = 1$, então:

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} {}_t p_x \cdot v^t = 1 + a_x. \quad (7)$$

Caso seja uma renda aleatória constante, periódica anual, temporária por n anos, diferida por m anos e postecipada, significa que será diferida por m períodos após a idade de contratação x , paga ao final de cada n períodos e enquanto o segurado viver. Sendo assim, a renda iniciará o pagamento no instante $x + m + 1$ e

encerrará em $x + m + n + 1$. A notação atuarial padrão é representada pelo símbolo ${}_m|a_{x:\overline{n}|}$ e seu cálculo é dado por:

$${}_m|a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=m+1}^{n+m} {}_t p_x \cdot v^t = \sum_{t=1}^n {}_{t+m} p_x \cdot v^{t+m} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}. \quad (8)$$

Considerando que a renda seja antecipada, ao invés de postecipada, e as mesmas condições se mantenham, então sua notação será ${}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ e seu cálculo definido como:

$${}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=m}^{n+m-1} {}_t p_x \cdot v^t = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t+m} p_x \cdot v^{t+m} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}. \quad (9)$$

De forma resumida, em geral, para relacionar como as anuidades, ou rendas, variam de acordo com suas classificações, é necessário compreender que quando a classificação se altera de antecipada para postecipada, o limite inferior e superior do somatório terá o incremento de um termo. Isto é, a anuidade postecipada inicia e termina um termo depois da anuidade antecipada. Supondo que seja uma anuidade temporária em n termos, a duração influenciará no limite superior do somatório. Quando se trata de anuidade diferida em m períodos, o limite inferior do somatório terá um incremento de m termos em comparação com a anuidade imediata, como também o limite superior será acrescido de m períodos caso se trate também de uma renda temporária. Em outros termos, o diferimento desloca em m períodos o início e o final de uma renda temporária.

É importante ressaltar que todos os exemplos de anuidades abordados até então neste estudo consideraram a possibilidade em que o participante deixe o plano apenas por falecimento, ou seja, por um único decremento. No entanto, em regra geral, o participante ativo até que tenha atingido a elegibilidade para a aposentadoria programada está sujeito às probabilidades conjuntas de morrer, se invalidar e se desligar. Portanto, considera-se que o participante está submetido a múltiplos decrementos probabilísticos (RODRIGUES, 2008). Em um ambiente com apenas um único decremento, a probabilidade decremental desse evento é igual à sua taxa de ocorrência. Não obstante, quando se trata de múltiplos decrementos, é necessário transformar as taxas de ocorrências em probabilidades. Isso se deve ao fato de que, em um ambiente com múltiplos decrementos, assume-se tipicamente a hipótese de

independência entre as causas e que estas concorrem simultaneamente na saída do participante do plano durante todo ano (CORRÊA, 2018; PINHEIRO, 2007; PROMISLOW, 2014 e RODRIGUES, 2008). A passagem de taxa para probabilidades decrementais sujeita-se a que esses eventos se deem sob a hipótese de distribuição uniforme de ocorrência ao longo do ano e para expressar a equação da taxa efetiva decremental de um ambiente com quatro decrementos (morte, invalidez, rotatividade e aposentadoria) pela interseção dos conjuntos de probabilidades $q_x^{(k)}$ na forma $q_x^{(k_1)} \dots q_x^{(k_4)}$, se dá que:

$$\begin{aligned} q_x^{(k_1)} &= q_x^{(k_1)} - \frac{q_x^{(k_1)}}{2} (q_x^{(k_2)} + q_x^{(k_3)} + q_x^{(k_4)}) \\ &+ \frac{q_x^{(k_1)}}{3} (q_x^{(k_2)} \cdot q_x^{(k_3)} + q_x^{(k_2)} \cdot q_x^{(k_4)} + q_x^{(k_3)} \cdot q_x^{(k_4)}) \\ &- \frac{q_x^{(k_1)}}{4} (q_x^{(k_2)} \cdot q_x^{(k_3)} \cdot q_x^{(k_4)}), \end{aligned} \quad (10)$$

em que $q_x^{(k)}$ e $q_x^{(k)}$ representam a taxa de ocorrência e a taxa efetiva do decremento, respectivamente.

Se, por exemplo, desejamos obter a probabilidade de uma pessoa durante a idade x deixar a condição de ativo por morte, sem se tornar inválida, se desligar ou se aposentar, temos que:

$$q_x^{aa} = q_x - \frac{q_x}{2} \cdot (i_x + q_x^w + q_x^r) + \frac{q_x}{3} (i_x \cdot q_x^w + i_x \cdot q_x^r + q_x^w \cdot q_x^r) - \frac{q_x}{4} (i_x \cdot q_x^w \cdot q_x^r), \quad (11)$$

sendo q_x a taxa de ocorrência de falecer durante a idade x , i_x de tornar-se inválido, q_x^w de se desligar e q_x^r de se aposentar. Quanto à probabilidade de se manter na condição ativa durante a idade x sem se tornar inválida, se desligar ou se aposentar, é dada por:

$$p_x^{aa} = 1 - (q_x^{aa} + q_x^{ai} + q_x^{ar} + q_x^{aw}), \quad (12)$$

expressão que temos também o q_x^{ai} , que representa probabilidade de uma pessoa de idade x sair da condição ativa por invalidez, sem falecer, se desligar ou se aposentar; q_x^{ar} a probabilidade de sair da condição ativa por aposentadoria, sem se tornar inválida, falecer ou se desligar; e q_x^{aw} a probabilidade de sair da condição de ativo por

desligamento sem que se torne inválida, faleça ou se aposente, ambas durante a idade x . Essas probabilidades seguem o exemplo da equação (11) quanto à sua obtenção, alternando apenas a causa principal de risco ($q_x^{(k_1)}$) e as causas acessórias ($q_x^{(k_2)}$, $q_x^{(k_3)}$ e $q_x^{(k_4)}$). Note que a notação utilizada na expressão (12) busca representar a transição da condição do participante na ocorrência do decremento, então q_x^{ai} representa a transição da condição de ativo para inválido e p_x^{aa} a permanência na condição de ativo, por exemplo.

Dessa forma, é possível obter funções de comutações para múltiplos decrementos de forma semelhante ao que já foi exposto:

$$D_x^{aa} = l_x^{aa} \cdot v^x, \text{ em que } l_x^{aa} = l_{x-1}^{aa} \cdot p_{x-1}^{aa}; \quad (13)$$

$$N_x^{aa} = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}^{aa}; \quad (14)$$

$$\ddot{a}_x^{aa} = \frac{N_x^{aa}}{D_x^{aa}}. \quad (15)$$

Há também os casos em que é necessário calcular a reversão em pensão do benefício de aposentadoria, a qual tem como objetivo atender outro beneficiário, seja cônjuge ou filho, mas somente após o falecimento do titular do benefício. Assim, de acordo com Bowers *et al.* (1997), uma renda reversível é uma renda paga durante a existência de y (beneficiário), mas somente após o falecimento de x (titular). A expressão dessa renda se dá conforme (16).

$$a_{x|y} = a_y - a_{x,y}. \quad (16)$$

Para o cálculo das anuidades na expressão (16), diferencia-se do cálculo do \ddot{a}_x apenas na utilização de ${}_n p_y$ e ${}_n p_{x,y}$ que são obtidos conforme expressão (17).

$${}_n p_y = \frac{l_{y+n}}{l_y} \text{ e } {}_n p_{x,y} = \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot l_y}. \quad (17)$$

3.3. PROVISÕES MATEMÁTICAS

Podemos entender reservas ou provisões matemáticas como sendo o valor total que o plano deverá integralizar tendo em vista o cumprimento dos compromissos assumidos com os participantes e assistidos, decorrentes da diferença entre os compromissos com o pagamento dos benefícios e os direitos com o recolhimento de contribuições, segundo os dispositivos regulamentares, hipóteses e premissas atuariais (SILVA, 2016). De acordo com Chan *et al.* (2010), o dimensionamento das provisões matemáticas sob o regime de capitalização visa à cobertura total da entidade com os segurados, isto é, tanto em relação aos benefícios concedidos quanto a conceder.

Em geral, dentre as provisões matemáticas existem as Provisões Matemáticas de Benefícios Concedidos (PMBC) e as Provisões Matemáticas de Benefícios a Conceder (PMBaC) (GUSHIKEN *et al.*, 2002). As Provisões Matemáticas de Benefícios Concedidos são constituídas a partir do momento da concessão do benefício e corresponderá ao valor dos recursos garantidores necessários ao pagamento deste benefício. Quando os benefícios são estruturados em benefício definido, essa provisão equivale ao Valor Atual dos Benefícios Futuros – VABF. O VABF representa o somatório dos benefícios futuros garantidos a um determinado assistido, calculado atuarialmente. Isto é, o montante de recursos que deveria existir em certo momento para assegurar o pagamento ao assistido do benefício contratado, em face de seu direito adquirido (GUSHIKEN *et al.*, 2002 e SILVA, 2016).

De acordo com Silva (2016), as Provisões Matemáticas de Benefícios a Conceder representam o montante, em valor presente, equivalente às obrigações previdenciárias líquidas dos planos de benefícios com seus participantes, resultantes da diferença entre os compromissos com o pagamento dos benefícios futuros e o recolhimento de contribuições a serem pagas, sendo essas denominadas de Valor Atual de Contribuições Futuras – VACF. O VACF representa o somatório das contribuições de um determinado participante e patrocinadora, se for o caso, que deverá ser pago até a concessão do benefício no plano, calculado atuarialmente. De forma simplificada, o cálculo da provisão matemática é:

$$PMBC = VABF; e \quad (18)$$

$$PMBaC = VABF - VACF. \quad (19)$$

Lembrando que:

PMBC: Provisão Matemática de Benefícios Concedidos;

PMBaC: Provisões Matemáticas de Benefícios a Conceder;

VABF: Valor Atual dos Benefícios Futuros;

VACF: Valor Atual das Contribuições Futuras.

Quanto ao *VABF*, com base em Chan *et al.* (2010), considera-se como:

$$\begin{aligned} VABF &= 13 \cdot FCS \cdot S_x \cdot (1 + CS)^{r-x} \cdot {}_{r-x}p_x \cdot v^{r-x} \cdot \ddot{a}_r \\ &= 13 \cdot FCS \cdot S_x \cdot (1 + CS)^{r-x} \cdot {}_{r-x}E_x \cdot \ddot{a}_r. \end{aligned} \quad (20)$$

Sendo *FCS* o fator de capacidade salarial; S_x o salário mensal de participação; *CS* indica o crescimento salarial; ${}_{r-x}E_x$ o fator de desconto atuarial, que também é igual a ${}_{r-x}p_x \cdot v^{r-x}$; e *r* a idade de aposentadoria do participante.

Em relação ao *VACF*, tem-se:

$$VACF = 13 \cdot FCS \cdot C_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}, \quad (21)$$

em que C_x indica a contribuição mensal para o plano; e $\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}$ uma anuidade temporária. Dessa forma, o cálculo da *PMBaC* será:

$$PMBaC = 13 \cdot FCS \cdot [S_x \cdot (1 + CS)^{r-x} \cdot {}_{r-x}E_x \cdot \ddot{a}_r - C_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}]. \quad (22)$$

4. METODOLOGIA

Neste capítulo serão apresentadas as bases de dados utilizadas, as regras de concessão e pagamento dos benefícios geralmente previstas em regulamentos, além das hipóteses atuariais e métodos de financiamentos adotados. Ademais, busca discorrer sobre o uso da linguagem *Python*, relacionando alguns benefícios e desafios ao atuário e, por fim, os métodos utilizados para o desenvolvimento da aplicação.

4.1. BASE DE DADOS

Neste trabalho foram utilizadas duas bases de dados fictícias, a Base 1 disponibilizada no curso “Avaliação Atuarial em Planos de Previdência – 2ª Edição”² (VANZILLOTA, 2022) com 180 pessoas, distribuídas entre participantes ativos e assistidos, para servir como base na construção da aplicação e avaliar a acurácia dos valores obtidos nos resultados. A Base 2 apenas substitui os 100 participantes ativos da primeira base, utilizando uma base de ativos de outro plano (que havia aproximadamente 200.000 pessoas), replicando-os até obter um número superior a 1.000.000 de participantes. A Base 2 tem o objetivo apenas de permitir obter uma primeira percepção referente à *performance* da aplicação quanto ao tempo de processamento computacional para obtenção dos resultados. O Quadro 1 resume o perfil da massa de participantes ativos e assistidos das duas bases utilizadas.

Quadro 1 – Perfil da massa de participantes e assistidos

		Base 1	Base 2
ATIVOS	Quantidade	100	1.006.210
	Idade média	44,70	28,87
	Tempo médio na empresa	16,27	3,55
	Tempo médio no plano	16,08	3,55
	Salário médio	R\$ 10.877,58	R\$ 9.205,13
	Total da folha – Salário de Participação	R\$ 972.537,00	R\$ 6.898.746.183,82
APOSENTADOS	Quantidade	60	60
	Idade média	69,62	69,62
	Benefício médio	R\$ 8.093,10	R\$ 8.093,10
PENSIONISTAS	Quantidade	20	20
	Idade média	67,35	67,35
	Benefício médio	R\$ 4.365,00	R\$ 4.365,00

Elaboração do autor.

² Disponível nos links: Aula 1 <https://youtu.be/up84i0d99w0> e Aula 2 <https://youtu.be/zDApIleN6C8>.

4.2. REGRAS GERAIS REGULAMENTARES

Um regulamento geralmente reúne um conjunto de direitos e obrigações do plano de benefícios através de regras de concessão e pagamento dos benefícios previdenciários ou assistenciais aos seus participantes e beneficiários, mediante contribuições e rentabilidade dos investimentos. Com isso, buscou-se adotar algumas regras genéricas com base em regulamentos reais de EFPC que são fundamentais para realizar os cálculos das provisões matemáticas e estruturar a aplicação, tais como os benefícios ofertados pelo plano, respectivas regras de elegibilidades e metodologia de cálculo. Além disso, também foi definido um plano de custeio vigente na data base de cálculo, a qual foi considerada para 30 de setembro de 2022 e o teto do salário de participação em R\$ 15.000,00.

Os benefícios adotados não foram selecionados com base em nenhum critério específico, no entanto são benefícios comuns nos regulamentos das EFPC. Os seguintes benefícios foram definidos para constituir o plano:

- I. Aposentadoria normal. Sendo os requisitos mínimos adotados que o participante tenha atingido 55 anos de idade independente do sexo, 15 anos de serviço prestados à patrocinadora e 10 anos de adesão ao plano, para se tornar elegível ao benefício. O valor do benefício correspondendo a 80% do último salário de participação.
- II. Pecúlio por invalidez. Benefício de pagamento único e seu valor correspondendo a 15 vezes o teto do salário de participação ou o valor total de resgate, o que for maior.
- III. Pecúlio por morte do ativo. Similar ao pecúlio por invalidez, difere apenas por ser pago ao dependente do participante falecido.
- IV. Pensão por morte do assistido. Benefício pago ao dependente do assistido falecido como uma renda vitalícia no valor de 60% da aposentadoria, limitado a um único dependente, neste caso, o cônjuge.

Como participantes do plano de benefícios foram considerados os ativos e os assistidos, que incluem os aposentados e pensionistas. Os beneficiários, ou dependentes, restringiu-se aos cônjuges dos participantes. O Quadro 2 representa a

suposição de um plano de custeio vigente inicialmente adotado para constituição das provisões matemáticas necessárias para o pagamento dos benefícios e das despesas decorrentes da administração do plano.

Quadro 2 – Plano de custeio vigente

Contribuições	
Participante ativo:	5% do salário de contribuição
Patrocinadora:	5% do salário de contribuição
Assistido:	Não há
Taxa de carregamento:	15% do valor das contribuições

Elaboração do autor.

4.3. HIPÓTESES ATUARIAIS E MÉTODOS DE FINANCIAMENTO

Da mesma forma como ocorreu na seleção dos benefícios, as hipóteses atuarias assumidas no cálculo das provisões foram escolhidas apenas de forma a permitir os cálculos, sem o objetivo de refletir qualquer cenário econômico ou demográfico particular e estão representadas no Quadro 3. Após determinar o valor presente dos benefícios, duas formas de financiamento foram utilizadas, definida através do método atuarial, para a distribuição do custo do plano ao longo do tempo: o método Crédito Unitário Projetado e o Agregado.

Quadro 3 – Hipóteses atuarias

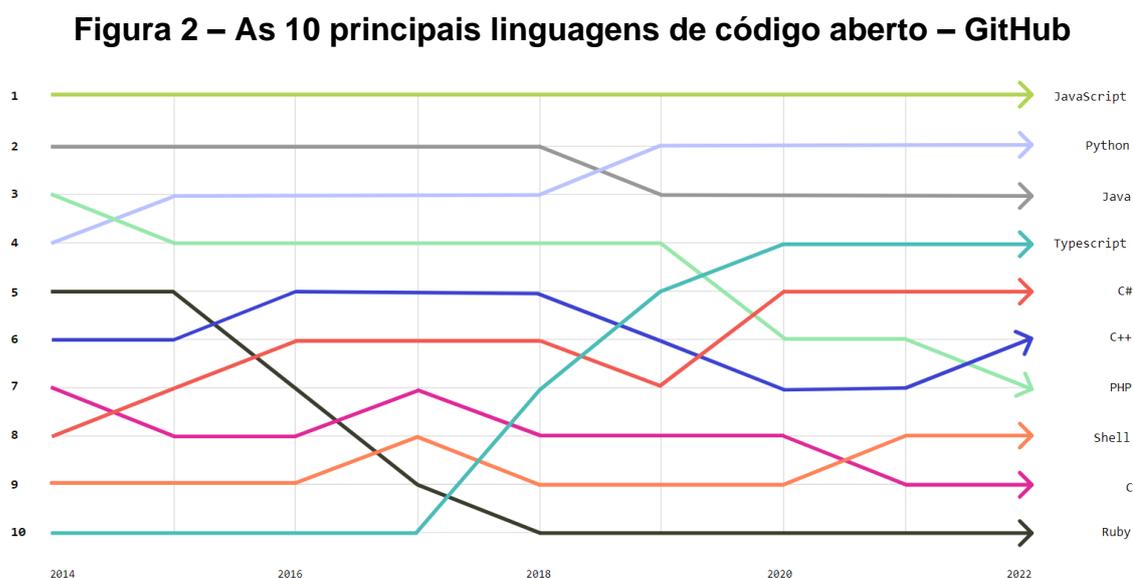
Taxa Real de Juros:	6,00%	a.a.
Crescimento Real dos Salários:	2,01%	a.a.
Rotatividade (desligamento):	1,00%	a.a.
Idade máxima Rotatividade:	48	
Tábua de Mortalidade Geral:	BR EMS Sbv 2010 M& F	
Tábua de Entrada em Invalidez:	Álvaro Vindas	
Composição Grupo Familiar		
% de casados do sexo feminino:	100,00%	
% de casados do sexo masculino:	100,00%	
Diferença de idade do cônjuge do participante do sexo feminino:	4	
Diferença de idade do cônjuge do participante do sexo masculino:	-4	

Elaboração do autor.

4.4. PYTHON

O relatório *Octoverse* (GITHUB, 2022) é um relatório anual divulgado pelo GitHub, plataforma de hospedagem e gerenciamento de repositórios de código-fonte, que traz *insights* e análises sobre a comunidade de desenvolvedores e a atividade na plataforma durante o ano da divulgação, que geralmente ocorre no mês de outubro. O relatório apresenta uma ampla variedade de informações e estatísticas, entre elas as linguagens de programação mais populares no GitHub e análises sobre a adoção de tecnologias e ferramentas específicas na plataforma. Essas informações podem ser úteis para desenvolvedores, empresas e pesquisadores que desejam entender melhor as tendências e mudanças na comunidade de desenvolvimento de software. O relatório também pode ajudar a identificar áreas de oportunidade e a entender como as tecnologias e ferramentas estão evoluindo.

Segundo o *Octoverse* (GITHUB, 2022), a linguagem *Python* manteve-se estável na segunda posição das principais linguagens utilizadas em 2022, em grande parte devido à sua versatilidade em áreas que vão desde o desenvolvimento até a educação, passando por *machine learning* e ciência de dados. Ainda de acordo com o relatório, a linguagem *Python* cresceu com um aumento de 22,5% no ano de 2022 em relação a 2021. A Figura 2 mostra o ranking das 10 principais linguagens na plataforma desde 2014.



Fonte: *Octoverse* 2022.

Em maio de 2022, a plataforma *Stack Overflow* realizou uma pesquisa intitulada “2022 Developer Survey” (STACK OVERFLOW, 2022), que envolveu mais de 70.000 desenvolvedores, com objetivo de entender sobre como eles aprendem, evoluem, quais ferramentas estão usando e quais desejam começar a utilizar. Conforme a pesquisa, é o décimo ano consecutivo em que o *JavaScript* é a linguagem de programação mais utilizada. No entanto, a situação é diferente entre os entrevistados que estão aprendendo a programar. *HTML/CSS*, *Javascript* e *Python* estão quase empatados como as linguagens mais populares para iniciantes na programação. Além disso, pessoas aprendendo a programar são mais propensas do que desenvolvedores profissionais a relatar o uso de *Python* (58% vs. 44%), *C++* (35% vs. 20%) e *C* (32% vs. 17%). A Figura 3 apresenta as linguagens mais populares entre os 75.547 entrevistados, sendo 53.421 desenvolvedores profissionais e 6.239 que estão aprendendo a programar.

Figura 3 – As linguagens mais populares – Stack Overflow



Fonte: 2022 Developer Survey.

De acordo com Robidoux (2021) em seu artigo “*Excel Is Not the Culprit*” (O Excel não é o culpado, em tradução livre) publicado pela *The Actuary Magazine*, os atuários ainda se utilizam do Excel® para fazer muitos trabalhos de alta complexidade, muito além do uso pretendido. No entanto, o autor afirma que é inviável aos atuários fazer tudo por conta própria e aprender engenharia de *software* pode ser um enorme custo de oportunidade. Para Robidoux (2021), os atuários vivem um grande dilema porque ou aprendem diversas novas tecnologias ou aprendem a se comunicar com os parceiros de tecnologia da informação e ambos podem exigir muito esforço. O autor ressalta ainda que regulamentos como o *International Financial Reporting Standard*

(IFRS) 17 tornarão o uso do Excel® para processos de relatórios praticamente inviável.

Por outro lado, segundo McGinley (2021) em seu artigo publicado pela *Society of Actuaries* (SOA), a linguagem de programação *Python* vem se tornando uma excelente ferramenta ao atuário, que se popularizou por ser uma linguagem de alto nível, fácil de aprender e fácil de usar, por ser robusta, rápida e projetada para produção, entre outras características.

O trabalho do atuário muitas vezes envolve lidar com grandes conjuntos de dados, incorporar hipóteses, analisar e modificar dados e desenvolver um modelo para extrair resultados usados para a tomada de decisão. Devido ao enorme volume de dados e necessidade de analisá-los em tempo real, os atuários necessitam se adaptar ao mundo da programação³. Atualmente, muitas linguagens de programação de código aberto, portais de aprendizagem, tutoriais e soluções prontas estão disponíveis para tornar esse processo realizável.

Sendo assim, a escolha da linguagem de programação *Python* como ferramenta para os cálculos das provisões matemáticas se baseia nas características apresentadas referentes à linguagem. Muito embora os atuários não sejam profissionais de tecnologia da informação, o fato de ser uma das linguagens mais populares entre os desenvolvedores experientes e os que estão em fase de aprendizado, estar em constante ascensão, ser uma ferramenta rápida e relativamente acessível aos que estão aprendendo, permite à linguagem *Python* ser uma ferramenta com grande potencial no campo atuarial.

4.5. DESENVOLVIMENTO DA APLICAÇÃO

As principais bibliotecas utilizadas para dar suporte no desenvolvimento da aplicação foram: *NumPy*, *pandas* e *Datetime*. Conforme McKinney (2012), a biblioteca *NumPy* é uma das mais importantes para processamento numérico em *Python*, utilizada para computação científica, a qual fornece uma variedade de recursos de processamento rápido. A biblioteca *pandas* oferece estruturas de dados de alto nível e ferramentas para manipulação de dados, projetadas para agilizar e facilitar sua limpeza e análise (MCKINNEY, 2012). Para operações com datas a fim de obter, por

³ <https://www.theactuaryindia.org/article/python-for-actuaries>

exemplo, a idade do participante, tempo de patrocinadora e adesão ao plano, utilizou-se a biblioteca nativa *Datetime*, que possibilita manipulação de datas e horas. É importante ressaltar que há uma biblioteca disponível denominada *pyliferisk*⁴ que pode ser útil para cálculos de anuidades envolvendo apenas o decremento de morte. No entanto, este trabalho envolve a aplicação de múltiplos decrementos, razão pela qual optou-se por não utilizar essa biblioteca.

Na construção da tabela de múltiplos decrementos, importou-se uma planilha em Excel® baseada no banco de tábuas biométricas do IBA⁵, utilizando a biblioteca *pandas*. Isso possibilitou a extração dos dados referente ao q_x segregado por sexo para mortalidade geral e o i_x de entrada em invalidez para ambos os sexos, de acordo com as premissas adotadas. Portanto, utilizou-se inicialmente de tabelas de múltiplos decrementos segregadas por sexo, cada uma armazenada em uma variável. Com as probabilidades decrementais definidas, foi possível realizar operações com os dados aplicando a Equação (11) conforme o Quadro 4.

Quadro 4 – Cálculo do q_x^{aa}

```
tabua['qx_aa'] = tabua.qx*(1 - 1/2*(tabua.ix + tabua.wx + tabua.qr)
+ 1/3*(tabua.ix * tabua.wx + tabua.ix * tabua.qr + tabua.wx * tabua.qr)
- 1/4*(tabua.ix * tabua.wx * tabua.qr))
```

Elaboração do autor.

Tendo em vista que para cada sexo serão aplicadas as mesmas manipulações, as tábuas masculina e feminina estão representadas genericamente pela variável “tabua”. De forma análoga ao q_x^{aa} , os demais decrementos seguem a mesma metodologia de cálculo. Assim, com os valores dos q_x^{aa} , q_x^{ai} , q_x^{ar} e q_x^{aw} , obtém-se o valor do p_x^{aa} com base na Equação (12) conforme Quadro 5.

Quadro 5 – Cálculo do p_x^{aa}

```
tabua['px_aa'] = 1 - (tabua.qx_aa + tabua.qx_ai + tabua.qx_ar + tabua.qx_aw)
```

Elaboração do autor.

⁴ <https://github.com/franciscogarate/pyliferisk>

⁵ <https://atuarios.org.br/wp-content/uploads/2022/10/Banco-de-Tabuas-Biometricas-setembro-2022.zip>

Em seguida, para o cálculo do l_x e l_x^{aa} optou-se por criar as colunas com valores arbitrários, nesse caso “0.0” para todas as idades e então definiu-se a raiz da tábua na idade zero. Nas idades posteriores, considerou o $l_x = l_{x-1} - q_{x-1} \cdot l_{x-1}$ e o $l_x^{aa} = l_{x-1}^{aa} \cdot p_{x-1}^{aa}$ conforme Quadro 6.

Quadro 6 – Cálculo do l_x e l_x^{aa}

```
# Criando as colunas lx's inicialmente com valor zero
tabua['lx'] = tabua['lx_aa'] = 0.0

# Atribuindo a raiz da tábua na idade zero
tabua.loc[0, 'lx'] = tabua.loc[0, 'lx_aa'] = 100000

# Calculando os lx a partir da idade 1 com base em lx-1 - qx-1 * lx-1
for i in tabua.x[1:]:
    tabua.loc[i, 'lx'] = tabua.lx[i-1]-tabua.qx[i-1]*tabua.lx[i-1]
    tabua.loc[i, 'lx_aa'] = tabua.lx_aa[i-1]*tabua.px_aa[i-1]
```

Elaboração do autor.

Em relação ao l_{xy} , o cálculo leva em consideração a diferença de idade do cônjuge conforme a premissa adotada no Quadro 3, sendo esta atribuída na variável “dif_conjuge”. Assim, para o exemplo de uma participante do sexo feminino, o l_{xy} é dado por $l_x \cdot l_{y+dif_conjuge}$, pois a premissa supõe que o cônjuge possui 4 anos a mais que a participante, neste caso. Com o uso da função “shift” do *pandas* a qual busca o valor desejado por n períodos anteriores, o cálculo na aplicação se dá conforme o Quadro 7.

Quadro 7 – Cálculo do l_{xy}

```
tabua_feminina['lxy'] =
    tabua_feminina.lx * tabua_masculina.lx.shift(-dif_conjuge)

tabua_masculina['lxy'] =
    tabua_feminina.lx.shift(dif_conjuge) * tabua_masculina.lx
```

Elaboração do autor.

Referente às anuidades, inicialmente buscou-se calcular individualmente para cada participante de forma analítica. Muito embora tenha sido possível desenvolver a aplicação por este método e mensurar os valores das provisões para a Base 1, o tempo de processamento de algumas funções para uma base de 200.000 participantes demandava cerca de 5 horas para que fosse concluído, mesmo se

utilizando de bibliotecas com ênfase em *big data* como a *Vaex.io*⁶. Portanto, para que fosse possível obter um nível de *performance* minimamente viável optou-se por adotar, então, as funções de comutação, possibilitando mensurar as provisões em menos de 5 minutos para a Base 2 que conta com mais de um milhão de participantes. Essa mudança resultou em um ganho de *performance* considerável, mesmo sem necessitar de conhecimentos e técnicas sofisticadas em engenharia de *software*.

Logo, para o cálculo das anuidades, aplicou-se as Equações (2), (3), (4), (6), (13), (14), (15) e (17) conforme o Quadro 8.

Quadro 8 – Cálculo das anuidades

```

tabua['Dx'] = tabua.lx * v ** tabua.x
tabua['Dx_aa'] = tabua.lx_aa * v ** tabua.x
tabua['Dxy'] = tabua.lxy * v ** tabua.x

tabua['Nx'] = tabua['Nxy'] = tabua['Nx_aa'] = 0.00

for x in tabua.x:
    tabua.loc[x, 'Nx'] = tabua.loc[x:, 'Dx'].sum()
    tabua.loc[x, 'Nx_aa'] = tabua.loc[x:, 'Dx_aa'].sum()
    tabua.loc[x, 'Nxy'] = tabua.loc[x:, 'Dxy'].sum()
    tabua['Sx'] = tabua.loc[x:, 'Nx'].sum()

tabua['äx'] = tabua.Nx / tabua.Dx
tabua['äx_aa'] = tabua.Nx_aa / tabua.Dx_aa
tabua['äxy'] = tabua.Nxy / tabua.Dxy

```

Elaboração do autor.

Após a construção das tabelas de múltiplos decrementos segregadas por sexo e as funções de comutação, foram importadas as bases dos participantes ativos, aposentados e pensionistas. Inicialmente, partindo da base de ativos, mensurou-se o tempo necessário para que o participante se torne elegível para o benefício de aposentadoria normal, conforme critérios na Seção 4.2. No entanto, é necessário previamente mensurar a idade do participante, bem como o tempo de admissão na patrocinadora e de adesão no plano na data base de cálculo, além da idade quando da adesão ao plano de benefícios.

Então, obtidas as idades e os tempos decorridos, para o cálculo do tempo necessário até a elegibilidade do participante para o benefício de aposentadoria

⁶ <https://vaex.io/>

normal deu-se conforme a Expressão (23), enquanto no Quadro 9 verifica-se a metodologia adotada na aplicação para se obter os tempos e as idades.

$$t_r = \text{máximo}[0; (r - x); (adp_r - adp_x); (pat_r - pat_x)], \quad (23)$$

em que t_r é o tempo para se tornar elegível ao benefício de aposentadoria, r é a idade mínima para elegibilidade, x idade atual, adp_r é o tempo mínimo de adesão ao plano, adp_x é o tempo atual de adesão ao plano, pat_r e pat_x correspondem ao tempo mínimo e tempo atual de patrocinadora, respectivamente.

Quadro 9 – Cálculo de idade e tempo

```

colunas_datas = ['DT NASC', 'DT ADMISSÃO', 'DT ADESÃO']

# Transformando as colunas de datas em formato de data reconhecível pelo
python (caso precise)
for i in colunas_datas:
    ativos[i] = pd.to_datetime(ativos[i])

# Idade Atual na Data Base dos Cálculos
ativos['IDADE_x'] =
(database - ativos['DT NASC']).astype('timedelta64[Y]').astype(int)
# Idade de Adesão
ativos['IDADE_e'] = (ativos['DT ADESÃO'] - ativos['DT NASC']).astype('timedelta64[Y]').astype(int)
# Tempo na Patrocinadora na Data Base em anos
ativos['TEMP_PATROC'] = (database - ativos['DT ADMISSÃO']).astype('timedelta64[Y]').astype(int)
# Tempo no Plano na Data Base em anos
ativos['TEMP_PLANO'] = (database - ativos['DT ADESÃO']).astype('timedelta64[Y]').astype(int)

# Tempo para estar elegível para aposentadoria em anos
ativos['TEMP_APOSENT'] = np.maximum(
    # Critério de idade
    0, np.maximum(idade_aposentadoria - ativos['IDADE_x'],
    # Critério de Tempo de Adesão ao Plano
    np.maximum(tempo_plano - ativos['TEMP_PLANO'],
    # Critério de Tempo na Patrocinadora
    tempo_patrocinadora - ativos['TEMP_PATROC'])))

# Idade na elegibilidade para aposentadoria em anos
ativos['IDADE_APOSENT'] = ativos['IDADE_x'] + ativos['TEMP_APOSENT']

```

Elaboração do autor.

Referente ao salário de participação, salário projetado na data da aposentadoria e o valor do benefício de aposentadoria, a aplicação também seguiu os critérios da Seção 4.2 que estão representados pelas Expressões (24), (25) e (26) e a premissa de crescimento real do salário do Quadro 3. A metodologia construída na aplicação pode ser conferida no Quadro 10.

$$s_{part} = \text{mínimo}[teto; s_x], \quad (24)$$

$$s_{proj} = \text{mínimo}[teto; (s_x \cdot (1 + cs)^{t_r})], \quad (25)$$

$$B_r = \text{mínimo}[teto; s_{proj} \cdot s_r], \quad (26)$$

em que s_{part} é o salário de participação, $teto$ corresponde ao teto do salário de contribuição, s_x ao salário atual, s_{proj} ao salário projetado, cs é a taxa de crescimento salarial, B_r o benefício de aposentadoria e s_r é o percentual do salário que será considerado para o benefício de aposentadoria.

Quadro 10 – Cálculo do Salário de Participação, Salário Projetado e Benefício

```
# Salário de Participação = Mínimo entre Teto de Contribuição e o Salário
ativos['SALARIO_PARTICIPACAO'] = np.minimum(teto_salario_contribuicao, at
ivos['SALARIO'])

# Salário na Aposentadoria = Mínimo entre Teto de Contribuição e
o Salário Projetado
ativos['SALARIO_APOSENT'] = np.minimum(teto_salario_contribuicao, ativos[
'SALARIO'] * (1+crescimento_salarial) ** ativos['TEMP_APOSENT'])

# Benefício na Aposentadoria = Mínimo entre Teto de Contribuição e o
Salário Projetado x % do salário para o benefício
ativos['BENEFICIO_z'] = np.minimum(teto_salario_contribuicao, ativos['SAL
ARIO_APOSENT'] * perc_beneficio_salario)
```

Elaboração do autor.

Com o objetivo de obter de maneira eficiente⁷ os valores das anuidades e evitar a necessidade de iterações na base de dados, bem como de estruturas condicionais para identificar a idade e o sexo de cada participante, adotou-se uma metodologia baseada na utilização de uma coluna “id”. Essa coluna resulta da concatenação dos

⁷ Eficiência em termos de processamento computacional em grandes bases de dados.

dados do sexo e da idade, permitindo a união das tábuas segregadas por sexo em uma tábua única. Dessa forma, torna-se possível identificar a anuidade de um participante com base apenas no valor correspondente da coluna “id” da tábua única, por exemplo, “M-55” para um participante do sexo masculino de 55 anos.

A função “*merge*” da biblioteca *pandas* permitiu um ganho de *performance* significativo utilizando a coluna “id” para obter os valores das anuidades, a qual realiza a combinação de dois conjuntos de dados, associando linhas por meio de colunas chaves, com dados comuns entre os dois conjuntos (MCKINNEY, 2012). O Quadro 11 apresenta como a aplicação obtém as anuidades através da função “*merge*”.

Quadro 11 – Função *merge*, funções de comutação e anuidades

```
# Criando uma coluna chave para dar match na tábua única de múltiplos
decrementos
ativos['id'] = ativos.SEXO+"-"+ativos.IDADE_APOSENT.astype(str)

# Unindo a base de ativos com os valores das funções de comutação
ativos = ativos.merge(tabua_unica[['id', 'Dx_aa', 'ãx', 'ãxy']], on='id', how
='left')

# Renomeando a coluna para Dz_aa e äz (Renda antecipada vitalícia na
idade de aposentadoria)
ativos.rename(columns={'ãx': 'ãz', 'Dx_aa': 'Dz_aa', }, inplace=True)

# Excluindo a coluna chave
ativos.drop(columns='id', inplace=True)
```

Elaboração do autor.

Dessa forma, já se torna possível obter o VABF do benefício de aposentadoria normal, conforme expressão (20). Neste caso, adotando um fator de capacidade de 100%, 13 pagamentos mensais por ano (por considerar o 13º salário) e anuidades sem fracionamento mensal. Também foi considerada a reversão em pensão do benefício de aposentadoria, conforme expressão (27), utilizando r como o tempo restante até a aposentadoria. Em relação aos benefícios de pecúlio por invalidez e por morte, estes seguiram metodologias parecidas conforme os critérios da Seção 4.2, diferenciando apenas o decremento de saída da condição ativo, obtido através da função “*merge*”. O Quadro 12 representa a metodologia adotada na aplicação.

$$\text{Reversão em Pensão} = 13 \cdot \text{Benefício} \cdot \% \text{ Sal. em pensão} \cdot (\ddot{a}_{y+r} - \ddot{a}_{x+r,y+r}) \cdot \frac{D_{x+r}^{aa}}{D_x^{aa}} \quad (27)$$

Quadro 12 – Cálculo do VABF

```
# Valor Atual dos Benefícios Futuros de Aposentadoria

# 13 pagamentos mensais x Valor do Benefício x Valor da Renda Vitalícia x
# nEx (Data de Aposentadoria / Data Atual)
ativos['VABF_APO'] =
13 * ativos['BENEFICIO_z'] * ativos['az'] * ativos.Dz_aa / ativos.Dx_aa

# Valor Atual dos Benefícios Futuros Pecúlio por Invalidez

# Maior valor entre o valor do Resgate ou 15x o valor do salário de pa
# rticipação x decremento de invalidez
ativos['VABF_INV'] = np.maximum(ativos['RESGATE'], 15 * ativos['SALARI
O_PARTICIPACAO']) * ativos['qx_ai']

# Valor Atual dos Benefícios Futuros Pecúlio por Morte

# Maior valor entre o valor do Resgate ou 15x o valor do salário de pa
# rticipação x decremento de morte
ativos['VABF_PEC'] = np.maximum(ativos['RESGATE'], 15 * ativos['SALARI
O_PARTICIPACAO']) * ativos['qx_aa']

# Valor Atual dos Benefícios Futuros de Aposentadoria com Reversão em
# Pensão

# 13 pagamentos mensais x Valor do Benefício x Diferença Valor da Rend
# a Vitalícia do Cônjuge e da Renda Conjunta x nEx
ativos['VABF_REV_PENS'] = 13 * perc_reversao_pensao * ativos.BENEFICIO
_z * (ativos.ay - ativos.axy) * ativos.Dz_aa/ativos.Dx_aa
```

Elaboração do autor.

Na apuração do Valor Atual dos Salários Futuros (VASF), que será utilizado no cálculo do VACF, adotou-se a metodologia de cálculo conforme a expressão (28), em que r considera a idade de aposentadoria do participante.

$$VASF = \sum_{t=0}^{r-t} \text{mínimo}[teto; s_x \cdot (1 + cs)^t] \cdot \frac{D_{x+t}^{aa}}{D_x^{aa}} \quad (28)$$

Para obter o VASF por meio da aplicação, o processo dividiu-se em duas etapas. A primeira, consiste em estimar para cada participante os valores de ${}_nE_x^{aa}$ de cada ano t até a idade r (Quadro 13). A segunda (Quadro 14), em projetar o salário até a idade r , respeitando o teto do salário de participação definido na Seção 4.2.

Quadro 13 – nE_x^{aa} para cada ano futuro até a aposentadoria

```
# Cálculo do nEx nos anos futuros com base na idade atual para ser utilizado no cálculo do Valor Atual dos Salários Futuros

# Criando uma cópia da base apenas com as colunas desejáveis
nEx_aa = ativos[['MATRICULA', 'SEXO', 'IDADE_x', 'IDADE_APOSENT', 'SALARIO']].copy()

for t in fluxo:
# Condição para trazer o valor do nEx apenas até a data de aposentadoria
    nEx_aa['id'] = np.where(nEx_aa.IDADE_x+t <= nEx_aa.IDADE_APOSENT,
        nEx_aa.SEXO+"-"+(nEx_aa.IDADE_x+t).astype(str), 'N/A')

    nEx_aa = nEx_aa.merge(tabua_unica[['id', 'Dx_aa']], on='id',
        how='left')
    nEx_aa.rename(columns={'Dx_aa':t}, inplace=True)

    nEx_aa[t] = nEx_aa[t] / ativos.Dx_aa # nEx = Dx+n / Dx
```

Elaboração do autor.

Quadro 14 – Salário projetado, VASF e VACF

```
vasf = ativos[['MATRICULA', 'SEXO', 'IDADE_x', 'IDADE_APOSENT', 'SALARIO']].copy()
vasf = vasf.reindex(columns=['MATRICULA', 'SEXO', 'IDADE_x', 'IDADE_APOSENT', 'SALARIO'] + fluxo)

for t in fluxo:
    vasf.loc[:,t] = (np.where(
        t + vasf['IDADE_x'] <= vasf['IDADE_APOSENT'],
        0.00, np.minimum( teto_salario_contribuicao,
            vasf['SALARIO']*(1+crescimento_salarial) ** t)))

vasf.iloc[:,5:] = vasf.iloc[:,5:] * nEx_aa.iloc[:,5:]

# Valor Atual dos Salários Futuros está somando todas as colunas para cada linha
ativos['VASF'] = vasf.iloc[:,5:].sum(axis=1)

# Valor Atual das Contribuições Futuras = (% de contribuição ativo + patrocinadora) x (1-taxa de carregamento) x Valor Atual dos Salários Futuros
ativos['VACF'] = 13 * (perc_contr_ativo + perc_contr_patroc) *
(1 - tx_carregamento) * ativos['VASF']
```

Elaboração do autor.

O método de financiamento Crédito Unitário Projetado (PUC), conforme abordado na Seção 2.4, tem seu Custo Normal definido conforme a Expressão (29), em que o VABF na idade x divide-se pela quantidade de anos da vida laborativa do participante ativo ($r - e$). Com base em Mano e Ferreira (2009), o cálculo da PMBaC pode ser dado pelo Custo Normal multiplicado pelos serviços prestados até a idade x ($x - e$). Referente ao método Agregado, a PMBaC é calculada conforme visto na Expressão (19). O Quadro 15 apresenta a metodologia utilizada na aplicação para a Expressão (29).

$$\text{Custo Normal}_x^{PUC} = \frac{VABF_x}{r - e}; \text{PMBaC}_x^{PUC} = \text{Custo Normal}_x^{PUC} \cdot (x - e) \quad (29)$$

Quadro 15 – Custo Normal e o PMBaC – PUC

```
# Custo Normal pelo Método Crédito Unitário = Soma dos Valores Atuais dos
Benefícios Futuros / diferença entre idade de aposentadoria e idade de a
desão
ativos['CN'] = (ativos.VABF_APO + ativos.VABF_INV + ativos.VABF_PEC + ati
vos.VABF_REV_PENS) / (ativos.IDADE_APOSENT - ativos.IDADE_e)

# PMBaC Crédito Unitário = Custo Normal x diferença entre idade x e de ad
esão
ativos['PMBaC_UC'] = ativos.CN * (ativos.IDADE_x - ativos.IDADE_e)
```

Elaboração do autor.

Calcular as PMBC dos benefícios dos assistidos, assemelha-se ao que já foi apresentado em termos de algoritmos de linguagem de programação. A metodologia se baseia na expressão (18) e, com isso, o valor presente esperado dos benefícios de aposentadoria e pensão será o valor anual do benefício multiplicado por uma renda vitalícia. Ressaltando que estão sendo considerados 13 pagamentos mensais como benefício anual, devido à gratificação natalina (13º salário). Quanto à reversão em pensão do benefício de aposentadoria concedida, esta poderá ser obtida através da expressão (27), sendo, neste caso, dispensável o cálculo do ${}_nE_x$ por ser um benefício já concedido.

5. RESULTADOS

O código-fonte da aplicação concluída e os dados utilizados para o cálculo das provisões matemáticas estão disponibilizados no repositório *online* GitHub⁸ e pode ser executado através da plataforma Google Colab⁹. O Google Colab, ou "*Colaboratory*", é uma plataforma de ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) baseada em computação na nuvem que permite aos usuários escrever, executar e compartilhar códigos em *Python* de forma colaborativa¹⁰. Ele é hospedado no Google Drive e oferece acesso gratuito a recursos de processamento e armazenamento em nuvem. Além disso, também foi desenvolvido um protótipo de aplicação *web*¹¹, cujo código-fonte também está disponibilizado no GitHub¹² e as imagens da sua interface gráfica podem ser visualizadas no Apêndice A deste trabalho.

Utilizando o Google Colab para o cálculo das provisões da Base 1 e Base 2 foram obtidos tempos médios de execução de 4,37 e 74,90 segundos, respectivamente. Considerando, inclusive, o tempo de importação da base de dados, o que representa um tempo de execução muito satisfatório quando comparado ao Excel®, uma das principais ferramentas utilizadas pelos atuários. Ademais, devido à facilidade de construir, editar e ajustar códigos *Python*, a aplicação permite a ser verticalizada para utilização em diferentes regulamentos de planos e premissas atuariais sem muito esforço técnico. Os valores das provisões para a Base 1 utilizando as premissas adotadas na seção de Metodologia, estão representados na Tabela 2.

O resultado da Tabela 2 aponta para constituição de provisões maiores através do método Agregado nesta avaliação devido às características da população deste plano. Para custear o pagamento dos benefícios a serem concedidos futuramente aos atuais ativos, o plano deverá ter constituído na data base da avaliação provisões no montante de R\$ 85.345.260,75 pelo método Agregado ou R\$ 67.619.246,67 pelo método Crédito Unitário Projetado. Sendo a PMBaC constituída como $\sum VABF - \sum VACF$ pelo método Agregado para todos os participantes ativos, enquanto pelo método Crédito Unitário Projetado é constituída como $\sum \frac{VABF_x}{r-e} \cdot (x - e)$.

⁸ <https://github.com/helderbelo/tcc>

⁹ <https://drive.google.com/file/d/1qPBKubtGHH1TFvdu1CeJRyWFSsrX7NDJ/view?usp=sharing>

¹⁰ <https://colab.research.google.com/>

¹¹ <https://pyliability.onrender.com/>

¹² <https://github.com/helderbelo/pyliability>

TABELA 2 – Provisões Matemáticas

PMBC	
Aposentadorias	R\$ 68.554.519,02
Reversão Pensão	R\$ 10.525.402,04
Pensões Concedidas	R\$ 13.521.507,58
TOTAL PMBC	R\$ 92.601.428,64

PMBaC	
VABF – Aposentadorias	R\$ 86.984.974,10
VABF - Reversão em Pensão	R\$ 6.570.971,81
VABF - Pecúlio por Invalidez	R\$ 37.920,59
VABF - Pecúlio por Morte	R\$ 45.963,02
TOTAL VABF	R\$ 93.639.829,52
VACF (13x valor mensal)	R\$ 8.294.568,77
VASF (13x valor mensal)	R\$ 97.583.162,03

PROVISÕES		
	Agregado	Credito Unitário
PMBC	R\$ 92.601.428,64	R\$ 92.601.428,64
PMBaC	R\$ 85.345.260,75	R\$ 67.619.246,67

Elaboração do autor.

A apuração da PMBC, que se refere aos inativos e pensionistas, não há diferenciação pelos métodos utilizados, tendo em vista que neste exemplo não prevê contribuição por parte dos assistidos ao fundo do plano. Sendo assim, a provisão para custear os benefícios concedidos aos inativos e pensionistas já deveria ter sido integralizada com as contribuições realizadas no passado e representa na data base da avaliação um montante de R\$ 92.601.428,64. Os resultados demonstram através da soma das provisões que, para estar em equilíbrio técnico atuarial na data base, o plano deverá possuir como patrimônio de cobertura um montante de R\$ 177.946.689,39 pelo método Agregado ou de R\$ 160.220.675,31 pelo Crédito Unitário Projetado.

Verificou-se também a variação das provisões matemáticas na alteração de algumas premissas, em relação àquelas inicialmente adotadas. Na Tabela 3, estão representadas na coluna “AT-2000” as provisões calculadas após a alteração da tábua de mortalidade “BR-EMSsb-v.2010 M&F” para “AT-2000 M&F”. Na coluna “Tx. Juros 5%” alterou-se apenas a taxa de juros de 6% para 5%, mas mantendo a tábua “BR-

EMSsb-v.2010 M&F". Por fim, na coluna "Cresc. Sal. 3,01%" houve apenas a alteração da premissa de crescimento salarial de 2,01% para 3,01%.

TABELA 3 – Provisões Matemáticas alterando as premissas

Sem Alteração de Premissa		AT-2000	Tx. Juros 5%	Cresc. Sal. 3,01%
PMBC		PMBC	PMBC	PMBC
Aposentadorias	R\$ 68.554.519,02	R\$ 64.646.337,95	R\$ 74.140.378,71	R\$ 68.554.519,02
Reversão Pensão	R\$ 10.525.402,04	R\$ 10.565.634,10	R\$ 12.440.517,18	R\$ 10.525.402,04
Pensões Concedidas	R\$ 13.521.507,58	R\$ 12.719.019,93	R\$ 14.806.777,36	R\$ 13.521.507,58
TOTAL PMBC	R\$ 92.601.428,64	R\$ 87.930.991,98	R\$ 101.387.673,25	R\$ 92.601.428,64

Sem Alteração de Premissa		AT-2000	Tx. Juros 5%	Cresc. Sal. 3,01%
PMBaC		PMBaC	PMBaC	PMBaC
VABF - Aposentadorias	R\$ 86.984.974,10	R\$ 84.414.957,53	R\$ 103.991.787,11	R\$ 90.698.185,39
VABF - Reversão em Pensão	R\$ 6.570.971,81	R\$ 6.752.464,53	R\$ 8.898.445,58	R\$ 6.805.913,29
VABF - Pecúlio por Invalidez	R\$ 37.920,59	R\$ 37.908,16	R\$ 37.920,59	R\$ 37.920,59
VABF - Pecúlio por Morte	R\$ 45.963,02	R\$ 49.421,75	R\$ 45.963,02	R\$ 45.963,02
TOTAL VABF	R\$ 93.639.829,52	R\$ 91.254.751,97	R\$ 112.974.116,30	R\$ 97.587.982,29
VACF (13x valor mensal)	R\$ 8.294.568,77	R\$ 8.294.236,60	R\$ 8.764.806,55	R\$ 8.595.758,51
VASF (13x valor mensal)	R\$ 97.583.162,03	R\$ 97.579.254,16	R\$ 103.115.371,21	R\$ 101.126.570,71

Sem Alteração de Premissa		AT-2000	Tx. Juros 5%	Cresc. Sal. 3,01%
PROVISÕES	Agregado	Agregado	Agregado	Agregado
PMBC	R\$ 92.601.428,64	R\$ 87.930.991,98	R\$ 101.387.673,25	R\$ 92.601.428,64
PMBaC	R\$ 85.345.260,75	R\$ 82.960.515,36	R\$ 104.209.309,75	R\$ 88.992.223,79
	Credito Unitário	Credito Unitário	Credito Unitário	Credito Unitário
PMBC	R\$ 92.601.428,64	R\$ 87.930.991,98	R\$ 101.387.673,25	R\$ 92.601.428,64
PMBaC	R\$ 67.619.246,67	R\$ 65.873.908,17	R\$ 80.021.493,19	R\$ 69.562.083,08

Elaboração do autor.

No entanto, a Tabela 3 apresenta apenas os valores absolutos das provisões apuradas e para se ter uma melhor percepção da variação relativa da alteração das premissas, na Tabela 4 são apresentadas as variações percentuais dos valores obtidos.

De maneira geral, os resultados apontam que alterar a premissa de tábua de mortalidade para "AT-2000 M&F" traz uma redução nos valores das provisões, com exceção das provisões de reversão em pensão e pecúlio por morte. Vale ressaltar novamente que a "AT-2000" é a tábua referencial para as EFPC, conforme Art. 4º da Resolução CNPC nº 30, de 2018 e art. 13, §§ 1º e 2º, da Instrução Normativa Previc nº 33, de 2020. Com base nisto, a EFPC não poderia adotar uma tábua que gerasse

valores de provisões menores que a “AT-2000” e, no caso da ‘BR-EMSsb-v.2010’, não haveria este impeditivo.

TABELA 4 – Provisões Matemáticas alterando as premissas

Sem Alteração de Premissa		AT-2000	Tx. Juros 5%	Cresc. Sal. 3,01%
	PMBC	Var.(%)	Var.(%)	Var.(%)
Aposentadorias	R\$ 68.554.519,02	-5,70%	8,15 %	0,00 %
Reversão Pensão	R\$ 10.525.402,04	0,38 %	18,20 %	0,00 %
Pensões Concedidas	R\$ 13.521.507,58	-5,93%	9,51 %	0,00 %
TOTAL PMBC	R\$ 92.601.428,64	-5,04%	9,49 %	0,00 %

Sem Alteração de Premissa		AT-2000	Tx. Juros 5%	Cresc. Sal. 3,01%
	PMBaC	Var.(%)	Var.(%)	Var.(%)
VABF - Aposentadorias	R\$ 86.984.974,10	-2,95%	19,55 %	4,27 %
VABF - Reversão em Pensão	R\$ 6.570.971,81	2,76 %	35,42 %	3,58 %
VABF - Pecúlio por Invalidez	R\$ 37.920,59	-0,03%	0,00 %	0,00 %
VABF - Pecúlio por Morte	R\$ 45.963,02	7,53 %	0,00 %	0,00 %
TOTAL VABF	R\$ 93.639.829,52	-2,55%	20,65 %	4,22 %
VACF (13x valor mensal)	R\$ 8.294.568,77	-0,00%	5,67 %	3,63 %
VASF (13x valor mensal)	R\$ 97.583.162,03	-0,00%	5,67 %	3,63 %

Sem Alteração de Premissa		AT-2000	Tx. Juros 5%	Cresc. Sal. 3,01%
PROVISÕES	Agregado	Var.(%)	Var.(%)	Var.(%)
PMBC	R\$ 92.601.428,64	-5,04%	9,49 %	0,00 %
PMBaC	R\$ 85.345.260,75	-2,79%	22,10 %	4,27 %
	Credito Unitário	Var.(%)	Var.(%)	Var.(%)
PMBC	R\$ 92.601.428,64	-5,04%	9,49 %	0,00 %
PMBaC	R\$ 67.619.246,67	-2,58%	18,34 %	2,87 %

Elaboração do autor.

Em relação à taxa de juros, é perceptível que adotar uma premissa de taxa de juros menor gera um agravamento nos valores das provisões, pelo fato de que os ativos financeiros constituídos dos valores das contribuições terão rendimento inferior e com isso, necessita-se de valores maiores de contribuições para taxa de juros menores. Por último, a premissa de taxa de crescimento salarial, só causa impacto nas provisões de benefícios a conceder, por considerar o salário projetado para determinação do valor do benefício.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos grandes desafios dos gestores dos fundos de pensão é garantir a solvência futura dos planos de benefícios, pois estes estão sujeitos a diversos riscos, destacando-se os riscos biométricos e financeiros que impactam principalmente os resultados das provisões matemáticas dos planos de benefício definido (DIAS e SANTOS, 2009). A adoção de premissas que não estão alinhadas com a realidade do plano de benefícios pode levar à determinação de benefícios inadequados e cálculos incorretos de custos, resultando em déficit ou superávit técnico devido à exposição excessiva ou mínima aos riscos (VANZILLOTTA e SOARES, 2020).

Utilizar-se de recursos computacionais para auxiliar nos cálculos de provisões de um plano de benefícios permite otimizar o processamento de dados, operações aritméticas e na mensuração dos riscos atuariais envolvidos. A linguagem *Python* vem se tornando cada vez mais popular a cada ano que passa, não só entre os profissionais do setor de tecnologia, como também no meio atuarial. Isso se deve à facilidade no uso da linguagem, como também sua versatilidade, rapidez e robustez. Por ser uma linguagem de código aberto, sua popularidade também faz com que novas bibliotecas sejam desenvolvidas de maneira constante e disponibilizadas livremente entre os usuários.

As características do *Python* o tornam uma excelente escolha como linguagem de programação para o cálculo de provisões matemáticas em um plano de benefício definido, como evidenciado ao longo deste trabalho acadêmico. Observa-se que essa linguagem permite a construção de algoritmos sem a necessidade de técnicas avançadas de desenvolvimento de *software*, além de oferecer ganhos de desempenho em termos de tempo de processamento de dados em comparação com o Excel® em casos de bases de dados volumosas.

No entanto, é importante ressaltar que a aplicação se limitou apenas aos métodos de financiamento Crédito Unitário Projetado e Agregado, como também não engloba o cálculo de provisões de todos os benefícios que costumam ser concedidos pelas EFPCs, como aposentadoria por invalidez, por exemplo. A aplicação ainda não compreende premissas atuariais como mortalidade de inválidos, fator de capacidade salarial e de benefícios menor que 100%, hipótese de filhos na composição familiar e como beneficiários de pensão por morte, entre outras.

Dessa forma, aspectos como expandir as formas de cálculos de provisões adicionando outros métodos de financiamento, premissas atuariais e benefícios podem ser abordados em trabalhos futuros. Adicionalmente, trabalhos futuros poderiam incluir na aplicação estudos de aderência das premissas biométricas e de convergência da taxa de juros, para seleção e acompanhamento das premissas mais adequadas à realidade do plano de benefícios, auxiliando na gestão dos riscos atuariais.

REFERÊNCIAS

ABRAPP. **Riscos Atuariais com Foco no Equilíbrio dos Planos de Benefícios**, 2018. Disponível em: <https://www.abrapp.org.br/produto/riscos-atuariais-com-foco-no-equilibrio-dos-planos-de-beneficios/>. Acesso em: 04 fev. 2023.

BOHNEN, Bruna. **UMA ANÁLISE DOS REGIMES DE FINANCIAMENTO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL FRENTE AOS PRINCÍPIOS NORTEADORES DA SEGURIDADE SOCIAL: SISTEMA DE REPARTIÇÃO SIMPLES E SISTEMA DE CAPITALIZAÇÃO**. 2019. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Direito, Universidade de Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, 2019. Disponível em: <https://repositorio.unisc.br/jspui/bitstream/11624/2671/1/Bruna%20Bohnen.pdf>. Acesso em: 25 dez. 2022.

BOWERS, N. L.; GERBER, H.; HICKMAN, J.; JONES, D.; NESBITT, C. **Actuarial Mathematics**. 2nd edition, The Society of Actuaries, 1997.

BRASIL. Conselho de Gestão da Previdência Complementar. Resolução CGPC nº 06, de 30 de outubro de 2003. **Dispõe sobre os institutos do benefício proporcional diferido, portabilidade, resgate e autopatrocínio em planos de entidade fechada de previdência complementar.**

BRASIL. Conselho Nacional de Previdência Complementar. Resolução CNPC nº 30, de 10 de outubro de 2018. **Dispõe sobre as condições e os procedimentos a serem observados pelas entidades fechadas de previdência complementar na apuração do resultado, na destinação e utilização de superávit e no equacionamento de déficit dos planos de benefícios de caráter previdenciário que administram, bem como estabelece parâmetros técnico-atuariais para estruturação de plano de benefícios, e dá outras providências.**

BRASIL. Conselho Nacional de Previdência Complementar. Resolução CNPC nº 41, de 09 de junho de 2021. **Normatiza os planos de benefícios de caráter previdenciário das entidades fechadas de previdência complementar nas modalidades de benefício definido, contribuição definida e contribuição variável, e dispõe sobre a identificação e o tratamento de submassa.**

BRASIL. Conselho Nacional de Previdência Complementar. Resolução CNPC nº 43, de 06 de agosto de 2021. **Dispõe sobre os procedimentos contábeis das entidades fechadas de previdência complementar e sobre o registro e avaliação de títulos e valores mobiliários.**

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília,. [S.l.], 1988. Disponível em: <http://www.tse.jus.br/legislacao/codigo-eleitoral/constituicao-federal/constituicao-da-republica-federativa-do-brasil>.

BRASIL. Decreto-Lei nº 806, de 4 de setembro de 1969. **Dispõe sobre a profissão de Atuário e dá outras providências.**

BRASIL. Presidência da República. Lei Complementar no 108, de 29 de maio de 2001. **Dispõe sobre a relação entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os**

Municípios, suas autarquias, fundações, sociedades de economia mista e outras entidades públicas e suas respectivas entidades fechadas de previdência complementar. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil: seção 1, Brasília, DF, ano 137, n. 104, p. 1, 30 maio 2007.

BRASIL. Presidência da República. Lei Complementar no 109, de 29 de maio de 2001. **Dispõe sobre o Regime de Previdência Complementar e dá outras providências.** Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil: seção 1, Brasília, DF, ano 137, n. 104, p. 3, 30 maio 2007.

BRASIL. Superintendência Nacional de Previdência Complementar. Instrução Normativa PREVIC nº 33, de 23 de outubro de 2020. **Regulamenta critérios técnico-atuariais para definição da duração do passivo, da taxa de juros parâmetro, do ajuste de precificação, do estudo técnico de adequação das hipóteses atuarias, além de estabelecer procedimentos a serem adotados pelas entidades fechadas de previdência complementar para destinação e utilização de superávit e elaboração, aprovação e execução de planos de equacionamento de déficit.**

BRASIL. Superintendência Nacional de Previdência Complementar. Resolução PREVIC nº 7, de 23 de março de 2022. **Dispõe sobre as demonstrações atuariais e os elementos mínimos que devem constar na nota técnica atuarial dos planos de benefícios de caráter previdenciário administrados pelas entidades fechadas de previdência complementar.**

CAPELO, Emílio R. **Uma Introdução ao Estudo Atuarial dos Fundos Privados de Pensão.** São Paulo, EAESP/FGV, 1986.

CHAN, Betty Lilian; SILVA, Fabiana Lopes da; MARTINS, Gilberto de Andrade. **Fundamentos da Previdência Complementar: da atuária à contabilidade.** 2 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

CONDE, Newton Cezar; ERNANDES, Ivan Sant'Ana. **Atuária para não Atuários.** São Paulo, ABRAPP, 2007.

CORDEIRO FILHO, A. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações: exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo (SP): Atlas, 2009.

DIAS, C. R. B.; SANTOS, Josenildo. **Mensuração de Passivo Atuarial de Fundos de Pensão: Uma Visão Estocástica.** Anais do 9º Congresso USP de Controladoria e Contabilidade, 2009. Disponível em: <https://congressosp.fipecafi.org/anais/artigos92009/147.pdf>. Acesso em: 7 dez. 2022.

FUNPRESP-EXE, Fundação de Previdência Complementar do Servidor Público Federal do Poder Executivo. **Regulamento do Plano de Benefícios da Previdência Complementar do Poder Executivo Federal – ExecPrev.** Brasília, DF, 2013. Alterado pela Portaria DITEC/PREVIC/MF nº 311, de 8 de julho de 2016 (publicada no DOU, em 11 de julho de 2016, na Seção 1, Página 45).

GITHUB. **Octoverse 2022: The State of open source software**. 2022. Disponível em: <https://octoverse.github.com/>. Acesso em: 19 de março de 2023.

GOMES, Carlos Francisco Simões; SANTOS, Marcos dos; MARTINS, Ernesto Rademaker; GREGÓRIO, Thierry Faria da Silva; SANTOS, Ronaldo Cesar Evangelista. **Redução do tempo de processamento do Cálculo Atuarial das Forças Armadas: uma aplicação da Computação Paralela**. In: Anais do XIV SEGeT – SIMPÓSIO DE EXCELÊNCIA EM GESTÃO E TECNOLOGIA, Resende, RJ, 26 e 27 de Outubro de 2017.

GUSHIKEN, L.; FERRARI, A. T.; FREITAS, W. J. de; GOMES, J. V.; OLIVEIRA, R. M. F. de. **Regime Próprio de Previdência dos Servidores: Como Implementar? Uma visão prática e teórica**. Coleção Previdência Social, Série Estudos, volume 17. MPAS, 2002.

IBA. Instituto Brasileiro de Atuária. Resolução IBA nº 2 de 21 de março de 2016. **Dispõe sobre a criação do Pronunciamento Atuarial CPA 003 – Classificação de Hipóteses Atuariais**.

JARDIM, Edson Duarte. **MÉTODOS ATUARIAIS DE FINANCIAMENTO: UMA VISÃO SOBRE A ADEQUAÇÃO AOS COMPROMISSOS A SEREM AVALIADOS**. In: Coletânea de Artigos sobre Tábuas de Mortalidade, Taxas de Juros e Métodos de Financiamento. Superintendência Nacional de Previdência Complementar – Previc - Comissão Nacional de Atuária. MPS, 2010. p.269-277.

LOPES DA SILVA, F. **ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DAS PREMISSAS ATUARIAIS DOS PLANOS PREVIDENCIÁRIOS: IMPACTO POTENCIAL NAS DEMONSTRAÇÕES CONTÁBEIS DAS COMPANHIAS BRASILEIRAS LISTADAS NO IBOVESPA**. Redeca, Revista Eletrônica do Departamento de Ciências Contábeis; Departamento de Atuária e Métodos Quantitativos, [S. l.], v. 7, n. 2, p. 1–18, 2021. DOI: 10.23925/2446-9513.2020v7i2p1-18. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/redeca/article/view/51952>. Acesso em: 7 dez. 2022.

MANO, Cristina Cantanhede Amarante; FERREIRA, Paulo Pereira. **Aspectos Atuariais e Contábeis das Provisões Técnicas**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2009.

MCGINLEY, Donal. **The Rise of Python: Powerful, Robust Calculation Software**. Society of Actuaries - SOA. Disponível em: <https://www.soa.org/sections/health/health-newsletter/2021/august/hw-2021-08-mcginley/>. Acesso em: 7 dez. 2022.

MCKINNEY, Wes. **Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython**. O'Reilly Media, Inc.: Newton, MA, USA, 2012.

MINISTÉRIO DO TRABALHO E PREVIDÊNCIA, Secretaria de Previdência, **Guia da Previdência Complementar dos Entes Federativos**. Brasília: Subsecretaria do Regime de Previdência Complementar, 6ª edição, dezembro de 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/trabalho-e-previdencia/pt-br/assuntos/previdencia->

complementar/mais-informacoes/arquivos/guia_6-1ed_el.pdf. Acesso em: 11 dez. 2022.

PAZ, Aline; PINTO, Claudia Campestrini. **Regimes Financeiros e Métodos de Financiamento para Entidades Fechadas de Previdência Complementar**. In: Coletânea de Artigos sobre Tábuas de Mortalidade, Taxas de Juros e Métodos de Financiamento. Superintendência Nacional de Previdência Complementar – Previc - Comissão Nacional de Atuária. MPS, 2010. p.279-293.

PINHEIRO, Ricardo Pena. **Riscos Demográficos e Atuariais nos Planos de Benefício Definido e de Contribuição Definida num Fundo de Pensão**. 2005. 320p. Tese (Doutorado em Demografia) - Universidade Federal de Minas Gerais.

PINHEIRO, Ricardo Pena. **A demografia dos fundos de pensão**. Brasília: Ministério da Previdência Social, 2007.

POSTALIS, Instituto de Seguridade Social dos Correios e Telégrafos. **Regulamento Plano de Benefício Definido (Com Saldamento)**. Brasília, DF, 2007. 31p. (Aprovado pela SPC – Ofício nº 4.683 de 12/12/2007).

PREVIC – Superintendência Nacional de Previdência Complementar. **Educação previdenciária: diagnóstico e boas práticas**. 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/economia/pt-br/orgaos/entidades-vinculadas/autarquias/previc/centrais-de-conteudo/publicacoes/estudos/estudo-sobre-educacao-previdenciaria-nas-efpc/estudo-sobre-educacao-previdenciaria-nas-efpc-1-0.pdf>. Acesso em: 11 dez. 2022.

PREVIC – Superintendência Nacional de Previdência Complementar. **GUIA PREVIC MELHORES PRÁTICAS ATUARIAIS 2022**. 2022. Disponível em: <https://www.gov.br/previc/pt-br/publicacoes/guias-de-melhores-praticas/guia-previc-melhores-praticas-atuariais-2022-1-1.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2023.

PROMISLOW, S. David. **Fundamentals of actuarial mathematics**. 3. ed. John Wiley & Sons, 2014.

REGIUS, Sociedade de Previdência Privada dos Empregados do Banco de Brasília – BRB. **Regulamento do Plano de Benefícios 01 CNPB Nº 1985.0007-92**. Brasília, DF, 1985. Revisão 17: Aprovada na 582ª reunião do Conselho Deliberativo, em 29.7.2020. Parecer nº 498/2020/CAL/CGAT/DILIC, 21.10.2020. Portaria nº 722, 20/10/2020, no DOU em 22.10.2020

REIS, Adacir. **Curso básico de previdência complementar**. 4. ed. rev. e atual. São Paulo: Thomson Reuters Brasil, 2019.

RODRIGUES. José A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Ed. Saraiva, 2008.

ROSA, Maria Dora de Jesus Duarte da. **A avaliação actuarial na óptica das comissões de acompanhamento dos planos de pensões**. Dissertação de Mestrado. Universidade Técnica de Lisboa. Instituto Superior de Economia e Gestão, 2011.

SILVA, Daniel Pereira da. **Fundamentos de Atuária**. In: APOSTILA de Curso de MBA Executivo em Economia e Gestão: Previdência Complementar. Brasília: Fundação Getúlio Vargas, 2016.

SOUZA, Silney de. **Seguros: contabilidade, atuária e auditoria**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

STACK OVERFLOW. **2022 Developer Survey**. 2022. Disponível em: <https://survey.stackoverflow.co/2022/>. Acesso em: 19 de março de 2023.

VANZILLOTTA, Andrea; SOARES, Mônica Christina Oliveira de Alencar. **Estudos de Aderência de Tábuas Biométricas Adequação do Uso de Testes Não Paramétricos**. Rio de Janeiro, RJ, 2020. Disponível em: <https://qrqo.page.link/wyWW1>. Acesso em: 07 dez. 2022.

VANZILLOTTA, Andrea. **CURSO AVALIAÇÃO ATUARIAL EM PLANOS DE PREVIDÊNCIA (2ª edição)**. 2022. Disponível em: <https://youtu.be/up84i0d99w0> e <https://youtu.be/zDApIleN6C8>. Acesso em: 08 abr. 2023.

WINKLEVOSS, H. E. **Pension Mathematics with numerical illustrations**. 2.ed. Philadelphia: Pension Research Council of the Wharton School of the University of Pennsylvania, 1993. 307p.

APÊNDICE A

Figura 4 – Imagem da aplicação Web

pyLiability
Hélder N. F. Belo - UFPE

Aplicação desenvolvida para o Trabalho de Conclusão de Curso em Ciências Atuariais pela Universidade Federal de Pernambuco.
 Base de dados utilizada nos cálculos: <https://github.com/helderbelo/tcc/blob/main/base-bd.xlsx?raw=true>

Selecione a tábua de mortalidade geral - Masculina:

Selecione a tábua de mortalidade geral - Feminina:

Selecione a tábua para entrada em invalidez:

BR-EMSsb-v.2010-m

BR-EMSsb-v.2010-f

ALVARO VINDAS

Idade mínima de aposentadoria:

Tempo mínimo de patrocinadora:

Tempo mínimo de adesão ao plano:

Última idade que considera probabilidade de desligamento:

Teto do Salário de Contribuição:

Contribuição Ativo (%):

Contribuição Patrocinadora (%):

Valor do Benefício (em % do salário):

Reversão de Pensão (em % do benefício):

Taxa de Juros (%):

% Rotatividade (desligamento):

% Crescimento Real dos Salários a.a.:

Taxa de Carregamento (% da contribuição):

Diferença de idade dos Cônjuges (Masculino x Feminino):

Selecione a Data Base da Avaliação:

Provisões
Calcular

PMBC		PMBaC	
Aposentadorias:	R\$ 68.554.519,02	VABF - Aposentadorias:	R\$ 86.984.974,10
Reversão em Pensão:	R\$ 10.525.402,04	VABF - Reversão em Pensão:	R\$ 6.570.971,81
Pensões Concedidas:	R\$ 13.521.507,58	VABF - Pecúlio por Invalidez:	R\$ 37.920,59
TOTAL PMBC:	R\$ 92.601.428,63	VABF - Pecúlio por Morte:	R\$ 45.963,02
		TOTAL VABF:	R\$ 93.639.829,52
		VACF (13x valor mensal):	R\$ 8.294.568,77
		VASF (13x valor mensal):	R\$ 97.583.162,03
		PMBaC Crédito Unitário:	R\$ 67.619.246,67
		PMBaC Custo Agregado:	R\$ 85.345.260,75