



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

CRISTIANE DE ARIMATÉA ROCHA

**ESTUDO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO À LUZ DO ENFOQUE
ONTOSSEMIÓTICO:
o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas?**

Recife
2019

CRISTIANE DE ARIMATÉA ROCHA

**ESTUDO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO À LUZ DO ENFOQUE
ONTOSSEMIÓTICO:**

o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas?

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica

Área de concentração: Ensino
(Matemática)

Orientadora: Prof^ª. Dr. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.

Recife
2019

Catálogo na fonte
Bibliotecária Anaíse de Santana Santos, CRB-4/2329

R672e

Rocha, Cristiane de Arimatéa.

Estudo de combinatória no ensino médio à luz do enfoque ontossemiótico: o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas?. / Cristiane de Arimatéa Rocha. – Recife, 2019.
380 f.: il.

Orientadora: Rute Elizabete de Souza Rosa Borba.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.
Inclui Referências.

1. Ensino médio. 2. Configuração didática. 3. Trajetória didática. 4. Ensino de combinatória. I. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa. (Orientadora). II. Título.

370 (23. ed.)

UFPE (CE2023-043)

CRISTIANE DE ARIMATÉA ROCHA

**ESTUDO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO À LUZ DO ENFOQUE
ONTOSSEMIÓTICO:
o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas?**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 30/04/2019.

COMISSÃO EXAMINADORA

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (Orientadora e presidente)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Ruy César Pietropaolo (Examinador Externo)
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN

Rogéria Gaudêncio do Rêgo (Examinadora Externa)
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Gilda Lisbôa Guimarães (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Sérgio Paulino Abranches (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

AGRADECIMENTOS

Construir uma tese é navegar por mares de pensamentos revoltos, desbravar trilhas fechadas de teorias, mergulhar em oceanos profundos de reflexão sobre o que emerge das análises, mas apesar do que dizem não é uma viagem para uma única pessoa. Muitos amigos ajudaram a chegar até aqui no fim de mais essa etapa. Portanto, no início dessa aventura de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica preciso agradecer-los imensamente.

A Deus, aquela luz que ilumina a viagem, mostrando a imensidão do horizonte.

A Rute, minha orientadora, amiga, mãe acadêmica, inspiração! O leitor, que não a conhece, pode pensar que ela faz o papel daquele olhar direcionando o caminho, mas nesse caso, ela é aquela que ajuda a remar, mesmo em situações de perigo não abandona o barco. Tenho que agradecer a parceria, as leituras cuidadosas, as orientações da madrugada sempre trazendo os contrapontos necessários, o cuidado com o outro, comigo, com a tese, a inspiração necessária para seguir nessa profissão. Obrigada Rute!

À Minha Família! Sabe aquele povo que torce por você em todos os momentos, aquelas pessoas que não deixam você desistir de você, de seus sonhos? O povo que sonha junto, mesmo aguentando o desespero de quem escreve tese, as ausências, o cansaço, o estresse. Doutorando é chato. Mainha obrigada pelo colo, pela companhia nas altas horas da madrugada durante a escrita. Painho, obrigada pelas conversas, pelo cuidado, pelos subsunçores das madrugadas. Eles leram tudo gente. Huguinho, obrigada pela ajuda nas classificações da madrugada, foram apenas 2900 linhas x 48 colunas. Eudes, obrigada pelo zelo na conclusão da obra da minha casinha. As férias foram nas construções gente! Imagina. Lide, obrigada pelos lanches, cafés, chás, pelas águas (doutorando esquece que tem que beber água) necessárias à sobrevivência. Só diminua o bolo de chocolate. Família assim é de dar orgulho! Agora, tenho que levá-los para outras viagens, só de passeios.

Ao Geração-UFPE, obrigada meninas! Existe família na universidade! Aquelas pessoas que você gosta de estar junto, discutindo, estudando, passeando, viajando, publicando, torcendo umas pelas outras. Desbravando o desconhecido – em Foz do Iguaçu, Madri, Granada, São Paulo, Recife –

compartilhar a viagem com vocês é bom demais. Diversão, compromisso, amizade, realização.

Ao Edumatec-UFPE por possibilitar a viagem. Em 2008 abriu na UFPE um curso de formação de excelência na Educação Matemática e Tecnológica, fruto da luta de muitos professores. Pessoas que amam o que fazem e lutam com todas as forças para tornar sonhos realidades. Vocês que ainda não conhecem essas pessoas, por favor, não percam tempo. Elas são desbravadoras, ajudam a gente a perceber que a luta vale a pena. A Educação tem que ser de qualidade. O compromisso com a profissão é só o caminho que eles escolheram fazer. Obrigada! Ver pessoas diferentes, compartilhar objetivos e trabalhar para construir um sonho, é muito bom.

Aos professores da banca de defesa, muito obrigada. Discutir caminhos da pesquisa, com verdadeiros conhecedores do lugar, 'guias de viagens' auxilia a planejar melhor o caminho. Meus Agradecimentos.

Aos professores e amigos da linha de pesquisa Processos de ensino aprendizagem em Educação Matemática e Científica, muito obrigada. A partir das discussões sobre os itinerários das viagens, dos holofotes em caminhos escuros, das trilhas conhecidas da metodologia. Assim o objetivo da viagem e o visto no passaporte são garantidos.

À Capes por financiar parte da viagem (durante o estágio doutoral)!

À Universidad de Granada pela acolhida, em especial, à Professora Carmen Batanero. Conhecer novos horizontes, colegas, amigos que levarei para sempre nas fotos, lembranças, nas histórias compartilhadas.

Aos amigos que extrapolam os espaços da universidade para a vida, comadre, compadre, do contra (ou sou eu a do contra?), das conversas no dia a dia, na madrugada (aproveitar ao máximo a viagem), das fugidas no cinema, das baladas das noites de dogão, das pizzas de borda de coxinha, das idas e vindas ao sítio, das viagens de ônibus, de carro, de trem, de avião, dos banhos de cachoeiras, das trilhas, dos churrascos e feijoadas. Viagens com vocês são mais alegres e mais gostosas. Realmente selfies não têm graça quando são tiradas sozinhas. Cabeças, pés e corações no mundo.

Aos meus amigos da UFPE-CAA, professores e alunos. Sabe aquele povo que dá gosto de ver, de trabalhar, de ver crescer? As idas e vindas Caruaru – Olinda cada dia mais distantes, são compensadas pela certeza que sorrisos e

sonhos são compartilhados. Obrigada por serem testemunhas da viagem, compartilharem os passeios e dividirem o assento no busão, na van, no carro.

A todos que mencionei (e outros mais que trilharam muitos caminhos comigo): Muito obrigada!

*“Todos caminhos trilham pra gente se ver.
Todas trilhas caminham pra gente se achar, viu?”*

Maria Gadú

RESUMO

Essa pesquisa teve por objetivo analisar diferentes movimentos intencionais que podem ser priorizados pelo professor no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio. Salienta-se que o participante foi escolhido porque em estudo anterior apresentou conhecimento especializado de Combinatória. Nessa perspectiva, analisaram-se os capítulos de Combinatória em dois livros e seis aulas de Combinatória no Ensino Médio utilizando ferramentas teórico-metodológicas do Enfoque Ontossemiótico da Instrução e Conhecimento Matemáticos (EOS). Da análise dos capítulos, derivou-se que os mesmos priorizaram, em sessões separadas, conceitos de *arranjo*, *combinação*, *permutação*, *permutação com elementos idênticos* e *fatorial*, enquanto que os problemas denominados de *produtos de medidas*, *arranjo com repetição* e *permutação circular* são implicitamente abordados. Esse fato, não permite a identificação do tipo de problema combinatório por parte dos alunos, já que existem sessões específicas por cada problema. A ênfase dos invariantes do conceito envolveu as propriedades de ordenação e de simplificação de fatorial, tratando de modo tácito as demais propriedades, o que deixa para o professor a função de explicá-las. Foi constatada a preferência nas conversões entre linguagem natural e fórmulas, o que diminuiu a presença de procedimentos enumerativos e numéricos (PFC), suprimindo a elaboração de estratégias pessoais de resolução. Foi verificado a utilização de argumentação do tipo indutiva, com grau nulo, o que sugere a necessidade de textos mais questionadores nos capítulos do que apenas informativos. Na análise das aulas, a presente pesquisa apresentou a descrição do processo de ensino e aprendizagem implementado, discutindo e classificando as configurações didáticas apresentadas, as ênfases realizadas pelos movimentos intencionais do professor nas trajetórias didáticas, bem como a valoração de indicadores da idoneidade didática das aulas de Combinatória. Constatou-se que os movimentos intencionais desse professor priorizaram na trajetória epistêmica acertadamente os estados procedimentais e argumentativos. Já na trajetória docente, privilegiaram a regulação, motivação e atribuição de tarefas – o que denotou sua preocupação com acompanhamento do processo realizado pelos estudantes, de modo que implementou na trajetória discente comportamentos

como a argumentação, procura pela informação e exploração. Na trajetória cognitiva foram identificados conflitos semióticos nas falas dos estudantes na utilização dos invariantes de ordenação e repetição e na compreensão de contextos dos problemas. Na interação professor-alunos observaram-se padrões que incitaram a participação e a responsabilidade dos estudantes na resolução de problemas. A valoração dos indicadores da idoneidade didática sugeriu que os movimentos intencionais do professor garantiram o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio implementado, priorizando a explicitação de procedimentos numéricos (PFC) em detrimento aos algorítmicos (fórmulas); a autonomia dos alunos na *construção de resoluções próprias para os problemas combinatórios*; bem como a presença de *argumentos de alunos* sobre essa resolução, possibilitando a seleção de variados tipos de situações; o acompanhamento da resolução desses problemas pelos estudantes na íntegra, sem a necessidade inicial de nomenclaturas, ou apresentação de fórmulas; proporcionando a exploração do processo de construção do raciocínio combinatório; aprendendo com as dúvidas e as incertezas existentes e promovendo a responsabilidade dos estudantes no próprio processo aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.

Palavras-Chave: ensino de combinatória; ensino médio; configuração didática. trajetória didática; padrões de interação professor-alunos; idoneidade didática.

ABSTRACT

This research aimed to analyze different intentional movements that can be prioritized by the teacher in the teaching and learning process of High School Combinatorics. It is noteworthy that the participating teacher was chosen because in a previous study presented specialized knowledge of Combinatorics. From this perspective, the Combinatorics chapters were analyzed in two books and six High School Combinatorics lessons using theoretical and methodological tools of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Education and Knowledge (EOS). From the analysis of the chapters, it was derived that they prioritized, in separate sessions, the concepts of *arrangement*, *combination*, *permutation*, *permutation with identical elements* and *factorial*, while the problems called *products of measures*, *arrangement with repetition* and *circular permutation* are implicitly addressed. This fact does not allow students to identify the type of combinatorial problem as there are specific sessions per problem type. The emphasis of the concept invariants involved the ordering and factorial simplification properties, tacitly addressing the other properties, leaving it to the teacher to explain them. Preference was found in conversions between natural language and formulas, which decreased the presence of enumerative and numerical procedures (PFC), suppressing the elaboration of personal resolution strategies. It was verified the use of inductive type arguments, with zero degree, which suggests the need for more questioning texts in the chapters than just informative ones. In the analysis of the classes, the present research presented the description of the teaching and learning process implemented, discussing and classifying the presented didactic configurations, the emphases made by the intentional movements of the teacher in the didactic trajectories, as well as the valuation of indicators of the Didactical suitability of the Combinatorics lessons. It was found that the intentional movements of this teacher prioritized in the epistemic path correctly the procedural and argumentative states. In the teaching path, they favored the regulation, motivation and assignment of tasks - which denoted their concern with monitoring the process carried out by the students, so that it was implemented in the student path behaviors such as argumentation, search for information and exploration. In the cognitive trajectory, semiotic conflicts were identified in the students' speech in the use of order and repetition invariants and in the understanding of problem contexts. In teacher-student

interaction, patterns were observed that encouraged student participation and responsibility in problem solving. The valuation of the Didactical suitability indicators suggested that the intentional movements of the teacher ensured the enrichment of the implemented High School Combinatorial teaching and learning process, prioritizing the explicitness of numerical procedures (PFC) over the algorithmic ones (formulas); *the autonomy of the students to build their own resolutions for combinatorial problems*; as well as *the presence of arguments from students about this resolution*, allowing the selection of various types of situations; the monitoring of the resolution of these problems by the students in full, without the initial need for nomenclatures, or presentation of formulas; providing the exploration of the process of constructing combinatorial reasoning; learning from the doubts and uncertainties and promoting the responsibility of students in the process of learning Combinatorics in High School.

Keywords: combinatorics teaching; high school; didactic configuration; didactic trajectory; teacher-student interaction patterns; didactical suitability.

RESUMEN

Esta investigación tuvo como objetivo analizar diferentes movimientos intencionales que pueden ser priorizados por el maestro en el proceso de enseñanza y aprendizaje de Combinatoria en la Secundaria. Es de destacar que el maestro participante fue elegido porque en un estudio anterior presentó conocimiento especializado de Combinatoria. Desde esta perspectiva, los capítulos de Combinatoria fueron analizados en dos libros y seis clases de Combinatoria de secundaria utilizando herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS). Del análisis de los capítulos, fue perceptible que ellos priorizaron, en sesiones separadas, los conceptos de *variación*, *combinación*, *permutación*, *permutación con elementos idénticos* y *factorial*, mientras que los problemas denominados *productos de medidas*, *agrupación con repetición* y *permutación circular* son implícitamente abordados. Ese hecho no permite a los estudiantes identificar el tipo de problema combinatorio, ya que hay sesiones específicas por tipo de problema. El énfasis de los invariantes del concepto involucró las propiedades de ordenación y simplificación factorial, abordando tácitamente las otras propiedades, dejando que el maestro las explicara. Se constató la preferencia en las conversiones entre lenguaje natural y fórmulas, lo que disminuyó la presencia de procedimientos enumerativos y numéricos (PFC), suprimiendo la elaboración de estrategias de resolución personal. Se verificó la utilización de argumentación inductiva, con grado cero, lo que sugiere la necesidad de textos con más cuestionamientos que solo informativos en los capítulos. En el análisis de las clases, la presente investigación presentó la descripción del proceso de enseñanza y aprendizaje implementado, discutiendo y clasificando las configuraciones didácticas presentadas, los énfasis hechos por los movimientos intencionales del maestro en las trayectorias didácticas, así como la valoración de indicadores de la adecuación didáctica de las clases de Combinatoria. Se encontró que los movimientos intencionales de este maestro priorizaron en el camino epistémico correctamente los estados procedimentales y argumentativos. Ya en el camino de la enseñanza, favorecieron la regulación, la motivación y la asignación de tareas – lo que denotó su preocupación por monitorear el proceso llevado a cabo por los estudiantes, de modo que fueron implementados en el camino de ellos comportamientos como la argumentación,

la búsqueda de información y exploración. En la trayectoria cognitiva se identificaron conflictos semióticos en el discurso de los estudiantes en el uso de invariantes de ordenación y repetición y en la comprensión de contextos problemáticos. En la interacción maestro-alumnos se observaron patrones que alentaron la participación y la responsabilidad de los estudiantes en la resolución de problemas. La valoración de los indicadores de la adecuación didáctica sugirió que los movimientos intencionales del maestro aseguraron el enriquecimiento del proceso implementado de enseñanza y aprendizaje de Combinatoria en la Secundaria, priorizando la clarificación de procedimientos numéricos (PFC) sobre los algorítmicos (fórmulas); la autonomía de los alumnos en la *construcción de resoluciones propias para los problemas combinatorios*; así como la presencia de *argumentos de alumnos* sobre esta resolución, posibilitando la selección de variados tipos de situaciones; monitorear la resolución de estos problemas por los estudiantes en su totalidad, sin la necesidad inicial de nomenclaturas, o fórmulas; proporcionar la exploración del proceso de construcción de razonamiento combinatorio; aprender de las dudas e incertidumbres existentes y promover la responsabilidad de los estudiantes en el propio proceso de aprendizaje de Combinatoria en la Secundaria.

Palabras clave: enseñanza de combinatoria; secundaria; configuración didáctica; trayectoria didáctica; patrones de interacción maestro-alumnos; idoneidad didáctica.

LISTA DE EXTRATOS

Extrato 1 –	Exemplo da Aula 3 de Situação S1 Interpretar e empregar adequadamente notações científicas – CD 23.....	238
Extrato 2 –	Exemplo da Aula 1 da Situação S2 – Enumerar o parcialmente ou totalmente o número de possibilidades – CD 4.....	238
Extrato 3 –	Exemplo da Aula 4 – Situação de enumeração S2 utilizada para verificar e comprovar a solução encontrada – CD26	239
Extrato 4 –	Exemplo da Aula 2 de tipos de situação S3 – Identificar os tipos de problemas combinatórios a partir do enunciado do problema e resolvê-los e S12 – Discutir invariantes/propriedades nos problemas combinatórios – CD12.....	239
Extrato 5 –	Exemplo da Aula 4 de tipos de Situação S4 – Explorar contextos de problemas combinatórios – CD 25.....	240
Extrato 6 –	Exemplo da Aula 2 da Situação S5 – Explorar o tipo de procedimento de resolução – CD12.....	241
Extrato 7 –	Exemplo da Aula 1 de Situações S10 – Alterar (ampliar ou diminuir) a quantidade total de elementos do conjunto e S11 – Alterar (ampliar ou diminuir) a quantidade de elementos a serem escolhidos (subgrupos) – CD4	241
Extrato 8 –	Exemplo de Aula 5 da Situação S14 – Comparar definições de problemas combinatórios	242
Extrato 9 –	Exemplos da Aula 6 de problema combinatório integrado de combinação e problema combinatório condicional de combinação – CD36 e CD43	244
Extrato 10 –	Exemplo da Aula 2 de problema de arranjo com repetição – CD6	245
Extrato 11 –	Exemplo da Aula 3 de problema de arranjo condicional na situação S3 – CD 11	246
Extrato 12 –	Exemplo da Aula 6 de problema de arranjo na Situação S3 – CD35.....	247
Extrato 13 –	Exemplo de Aula 2 de problema de produto de medidas na Situação S3 – CD14.....	248
Extrato 14 –	Exemplo da Aula 3 de problemas de permutação com elementos idênticos – CD23.....	249
Extrato 15 –	Exemplo da Aula 6 de problemas de arranjo – Discussão sobre invariante de repetição – CD38.....	250
Extrato 16 –	Exemplo da Aula 3 de produto de medidas na situação S3 – Apresentação de procedimentos gráficos – CD18.....	251
Extrato 17 –	Exemplo da Aula 6 de problema de produto de medidas na Situação S3 –Apresentação de procedimentos gráficos – CD39	252
Extrato 18 –	Exemplos de Aula 4 de problemas de combinação – Conversão de LN – Regra de três – CD27.....	252

Extrato 19 –	Exemplos de Aula 5 – Explicação sobre a Regra do Quociente – CD30.....	253
Extrato 20 –	Exemplo da Aula 5 – Exemplos de problemas de combinação na conversão de LN – Listagem – CD33	254
Extrato 21 –	Exemplo da Aula 3 de problemas de arranjo – CD12	255
Extrato 22 –	Exemplo de Aula 1 – uso dos termo Fazer combinação por estudantes – CD1	259
Extrato 23 –	Exemplo de Aula 1 com introdução do registro de tracinhos (registro intermediário na conversão LN para PFC) – CD1...	260
Extrato 24 –	Exemplo da Aula 1 de argumentos quase lógicos (relação matemática) e propriedades sobre se zero faz ou não parte do que pode ser escolhido no contexto de código – CD1.....	260
Extrato 25 –	Exemplo da Aula 2 – Sistematização do PFC – CD15.....	263
Extrato 26 –	Exemplo da Aula 3 de diferentes estados da trajetória epistêmica – CD20.....	266
Extrato 27 –	Exemplo da Aula 6 – Delineamento da Trajetória Docente de planejamento – CD34	272
Extrato 28 –	Exemplo da Aula 1 – Delineamento da Trajetória Docente de Motivação – CD4	272
Extrato 29 –	Exemplo da Aula 1 – Delineamento da Trajetória Docente de Atribuição de Tarefa – CD4.....	273
Extrato 30 –	Exemplo da Aula 3 – Delineamento da Trajetória Docente de Regulação – CD19.....	273
Extrato 31 –	Exemplo da Aula 1 – Delineamento da Trajetória Docente de Avaliação – CD22	274
Extrato 32 –	Exemplo da Aula 2 – Delineamento da Trajetória Docente de investigação – CD15.....	275
Extrato 33 –	Exemplo da Aula 2 – Trajetória Discentes observadas na resolução de um problema de arranjo – CD14	280
Extrato 34 –	Exemplo da Aula 6 – Trajetória discente de Exercitação (DI7) em um problema combinatório condicional de combinação – CD43	282
Extrato 35 –	Exemplo da Aula 6 – Trajetória Discente de Exploração e Argumentação – CD36.....	284
Extrato 36 –	Exemplo da Aula 6 – Trajetória Discente de argumentação e exploração – CD35	285
Extrato 37 –	Exemplo da Aula 6 – Trajetória Discente de procura por informação – CD41	286
Extrato 38 –	Exemplo da Aula 1 – Trajetória Discente de avaliação, argumentação e exploração – CD6	287
Extrato 39 –	Exemplo da Aula 2 – Trajetória Discente de avaliação– CD13	287
Extrato 40 –	Exemplo da aula 1 – Privilegiando o livro didático; Privilegiando os estudantes; Professor e livro didático alinhados – CD1 ...	293

Extrato 41 –	Exemplo da aula 1 – Estudante e livro didático alinhados – CD3	294
Extrato 42 –	Exemplo da aula 2 – Privilegiando o livro didático – CD3 ...	295
Extrato 43 –	Exemplo da Aula 3 – Trajetória Mediacional recursos de lápis– CD21.....	298
Extrato 44 –	Exemplo da Aula 5 – Trajetória Mediacional recurso de dramatização com alunos– CD31	301
Extrato 45 –	Exemplo da Aula 6 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Participação – (IPA10), Discussão (IPA2) e Afirmativo (IPA6) – CD38.....	306
Extrato 46 –	Exemplo da Aula 2 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Funil (IPA3); Focalização (IPA4); Participação – (IPA10), Gestão da Incerteza (IPA13) – CD11	308
Extrato 47 –	Exemplo da Aula 5 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Participação – (IPA10), Devolutiva (IPA13) e Gestão da Incerteza (IPA13) – CD28.....	311
Extrato 48 –	Exemplo da Aula 4 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Focalização (IPA4), Recitação (IPA8), Recordação (IPA0) e Resposta (IPA12) – CD24.....	313
Extrato 49 –	Exemplo da Aula 4 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Resposta (IPA12) – CD23.....	314
Extrato 50 –	Exemplo da Aula 6 – Ênfase ao uso do PFC em detrimento de procedimentos enumerativos – CD33.....	321
Extrato 51 –	Exemplo da Aula 4 – Ênfase a busca de invariantes do conceito de ordenação nos contextos propostos nos enunciados dos problemas combinatórios– CD23.....	326
Extrato 52 –	Exemplo da Aula 2 – Ênfase sobre o que está implícito nos enunciados de problemas combinatórios – CD11.....	326
Extrato 53 –	Exemplo da Aula 4 – Compromisso com atividade do Aluno A1 apresentando auto-estima frente a resolução de problemas combinatórios – CD23.....	329
Extrato 54 –	Exemplo da Aula 5 – Alunos apresentam impaciência e atribui a responsabilidade de dizer a resposta ao professor – CD32..	330
Extrato 55 –	Exemplo da Aula 6 – Atribui a responsabilidade de responder o problema ao colega – CD33	331

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama das dimensões/facetadas da idoneidade didática.....	66
Figura 2 – Lista de Hexagramas presentes no I CHING	78
Figura 3 – Lista de Permutações na era Medieval	78
Figura 4 – Ilustrações em um manuscrito apresentado por Ramon Llull em 1280 ao regente de Veneza	79
Figura 5 – Ilustração produzida por Cayley de árvores	80
Figura 6 – Percorso desenvolvido na análise da pesquisa.....	137
Figura 7 – Exemplos de tipos de problemas combinatórios segundo a classificação de Pessoa e Borba (2009) retirados dos capítulos de Combinatória analisados.	142
Figura 8 – Exemplos de tipos de problemas combinatórios apresentados nos capítulos de Combinatória analisados.	143
Figura 9 – Exemplos do tipo de situação S1 – Interpretar e empregar adequadamente notações científicas	154
Figura 10 – Exemplo da Situação S2 – Enumerar as possibilidades de um problema combinatório	155
Figura 11 – Exemplo da Situação S3 – Identificar o tipo de problema combinatório a partir do enunciado, quantificando o número de possibilidades	155
Figura 12 – Exemplo de Situação S4 (letra b) – Explorar a resolução de problemas combinatórios a partir de situações com possibilidades de respostas diferentes	156
Figura 13 – Exemplo de Situações S5 – Explorar o tipo de procedimento de resolução do problema combinatório.....	157
Figura 14 – Exemplo de Situação S6 – Explorar a operação combinatória a partir do número total de possibilidades	158
Figura 15 – Exemplo de Situação S7 – Identificar o tipo de problema combinatório a partir de suas propriedades ou invariantes	158
Figura 16 – Exemplo de Figura S8 – Explorar alterações ou mudanças no enunciado de problemas combinatórios	159
Figura 17 – Exemplo de Figura S9 – Promover raciocínio recursivo.....	159
Figura 18 – Tipo de problema Permutação circular.....	162
Figura 19 – Tipo de problema Permutação com repetição	162
Figura 20 – Tipo de problema Permutação com elementos idênticos e/ou repetidos.....	163
Figura 21 – Possibilidades na permutação circular	167
Figura 22 – Considerações sobre Permutação com elementos repetidos do Capítulo A.....	168
Figura 23 – A influência do invariante da Repetição em problemas de <i>arranjo</i> nos capítulos de livro.....	169
Figura 24 – O invariante da escolha em problemas do tipo de Produto de Medidas.....	169

Figura 25 – O invariante da escolha em problemas do tipo de arranjo	169
Figura 26 – Exemplo do uso da <i>ordenação</i> e <i>não repetição</i> na resolução de um problema de <i>arranjo</i>	170
Figura 27 – Exemplo do uso da <i>ordenação</i> na resolução de um problema de <i>combinação</i>	171
Figura 28 – Regra do Quociente apresentada no problema de <i>combinação</i> ...	171
Figura 29 – Propriedade da <i>igualdade de combinações complementares</i>	172
Figura 30 – Propriedades de simplificação de fatorial	172
Figura 31 – Proposta de situação sobre comparação de tipos de problemas combinatórios por meio de procedimentos diferenciados.....	173
Figura 32 – Exemplo de um tratamento em Linguagem natural em um problema de <i>combinação</i>	176
Figura 33 – Exemplo de conversão de Linguagem natural para Fatorial para Expressão algébrica	177
Figura 34 – Exemplo de conversão de Linguagem natural para PFC para Fórmula em um problema de <i>arranjo</i>	178
Figura 35 – Exemplo de mais de uma conversão com PFC em um problema de <i>produto de medidas</i>	179
Figura 36 – Exemplo de Mais de uma conversão com Fórmula no problema de <i>arranjo</i>	180
Figura 37 – Exemplo de conversão de Linguagem natural para árvore de possibilidades em um problema de <i>arranjo</i>	181
Figura 38 – Termo utilizado para possibilidades	181
Figura 39 – Termo Combinação utilizado com diferentes significados.....	182
Figura 40 – Seção do Capítulo B sobre Permutações com elementos idênticos	183
Figura 41 – Tipos de Registros utilizados para PFC no Capítulo A.....	183
Figura 42 –Tipos de Registros utilizados para PFC no Capítulo B	184
Figura 43 – Comparação entre os procedimentos numéricos e algorítmicos no problema de <i>arranjo</i>	188
Figura 44 – Comparação entre os procedimentos enumerativo e algorítmico no problema de <i>arranjo</i>	188
Figura 45 – Comparação entre os procedimentos gráficos(Árvore) e numéricos (PFC) no problema de <i>Produto de Medidas</i>	189
Figura 46 – Exemplo de procedimento gráfico presente no Manual do professor	190
Figura 47 – Problema de Permutação com elementos idênticos	192
Figura 48 – Exemplo de problema combinatório simples de <i>combinação</i>	193
Figura 49 – Exemplo de problema combinatório condicional de <i>permutação</i> (letras b, c – Condicional; letra a – simples).....	193
Figura 50 – Exemplo de problema combinatório integrado de <i>combinação</i>	194
Figura 51 – Exemplo de problema de <i>permutação com elementos idênticos</i> (simples e condicional)	194
Figura 52 – Exemplo da Técnica T5 na resolução da letra f	199

Figura 53 – Atividade que visa a comparação de procedimentos de resolução de problemas combinatórios.	199
Figura 54 – Exemplo da Técnica T12 – Compara Fórmula e/ou PFC com outros tipos de procedimentos	200
Figura 55 – Exemplo da Técnica 13 – Utiliza propriedade de igualdade complementar do número de <i>combinação</i>	200
Figura 56 – Exemplo da Técnica 11 – Resolve a partir da recursividade com o uso de Soma da Progressão aritmética.....	201
Figura 57 – Contexto de emplacamento na introdução do Capítulo A	207
Figura 58 – Situações de contagens na introdução do Capítulo B.....	208
Figura 59 – Exemplos de situações na seção de introdução ao Princípio Fundamental da Contagem dos capítulos analisados	210
Figura 60 – Imagens ornamentais, extra matemáticas, naturalista do capítulo A	213
Figura 61 – Exemplos de situações na seção do Fatorial dos capítulos analisados	213
Figura 62 – Exemplos de simplificação na seção do Fatorial do Capítulo A	215
Figura 63 – Exemplos de situações Reflita na seção do Fatorial do Capítulo A	215
Figura 64 – Exemplos de argumento de Relação Matemática presente na seção do Fatorial do Capítulo A.....	216
Figura 65 – Exemplo de concepção combinatória de Fatorial apresentada no Capítulo A.....	217
Figura 66 – Exemplos de situações na seção de <i>permutação</i> dos capítulos analisados	217
Figura 67 – Exemplos de Exercício resolvido na seção do <i>arranjo</i> do Capítulo B	220
Figura 68 – Exemplos de situações na seção de <i>combinação</i> dos capítulos analisados	221
Figura 69 – Exemplos de Exercício resolvido na seção de <i>combinação</i> do Capítulo A.....	222
Figura 70 – Exemplos de problema resolvido na seção de <i>combinação</i> do Capítulo B.....	223
Figura 71 – Distribuição equivalente dos estados da trajetória epistêmica	265
Figura 72 – Uso do quadro como fonte de informação (Aula 2, 4)	290
Figura 73 – Uso de quadro para registro de propostas de formulação e/ou procedimento.....	290
Figura 74 – Uso do quadro para registro de linguagem (Aula 1, 2, 4)	291
Figura 75 – Uso do quadro para registro de definições (Aula 4)	291
Figura 76 – Alunos utilizando o livro na primeira aula	292
Figura 77 – Exemplo da ficha de permutação circular.....	296
Figura 78 – Exemplos de problemas combinatórios do recurso ficha	296
Figura 79 – Acompanhamento realizado pelo professor na resolução da ficha	297

Figura 80 - Representação com material manipulável da ordenação de dois lápis	299
Figura 81 - Representação com material manipulável da ordenação de três lápis	300
Figura 82 - Representação com material manipulável da ordenação de quatro lápis	300
Figura 83 – Representação icônica de problemas de apertos de mão para o caso de duas, três ou quatro pessoas	302
Figura 84 – Idoneidade didática do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio	342

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Tipos de significados institucionais e pessoais	44
Quadro 2	Crterios de anlise de argumentos em livros apresentados por Llanos e Otero (2012)	50
Quadro 3	Dimenses duais para objetos matemticos.....	52
Quadro 4	Esquema de configurao epistmica da Combinatria	55
Quadro 5	Tipos de Trajetrias didticas	56
Quadro 6	Possveis trajetrias didticas de Combinatria.....	56
Quadro 7	Padres de interao entre professor e alunos	57
Quadro 8	Resumo dos componentes que podem ser analisados em cada idoneidade didtica	65
Quadro 9 –	Teses e dissertaes brasileiras sobre o EOS 2016	68
Quadro 10 –	Dimenses normativas em atividades exploratrio-investigativas identificadas por Andrade (2014)	74
Quadro 11 –	Classificao de problemas combinatrios simples por Pessoa e Borba (2009)	84
Quadro 12 –	Tipos de relaes de problemas combinatrios condicionais propostos por Borba e Braz (2012)	86
Quadro 13 –	Sntese do Currculo de Combinatria proposto por Batanero et al. (1996) equivalente ao Ensino Mdio	92
Quadro 14 -	Smbolos e representaes utilizadas nas transcries.....	135
Quadro 15 -	Componentes (C) e Indicadores(I) dos objetos matemticos primrios(O) da Combinatria Priorizados nos livros didticos do Ensino Mdio.	141
Quadro 16 -	Indicadores analisados por dimenses da idoneidade didtica na aula	149
Quadro 17 -	Dimenses dos objetos matemticos (GODINO, 2002) da Combinatria no livro didtico	151
Quadro 18 –	Invariantes do Conceito ou propriedades relativos aos tipos de problemas combinatrios observados.....	166
Quadro 19 –	Dimenses de argumentao observadas nos captulos de livros analisados.....	206
Quadro 20 –	Caracterizao dos argumentos apresentados nas pginas introdutrias	209
Quadro 21 –	Caracterizao das relaes entre imagem e argumentos apresentadas na pgina introdutria.....	209
Quadro 22 –	Caracterizao dos argumentos apresentados nas sees de PFC dos captulos analisados.....	211
Quadro 23 –	Caracterizao das relaes entre imagem e argumentos apresentadas nas sees de introduo ao PFC dos captulos analisados.....	212
Quadro 24 –	Caracterizao dos argumentos apresentados nas sees de Fatorial dos captulos analisados.....	214

Quadro 25 –	Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de <i>permutação</i> dos capítulos analisados.....	218
Quadro 26 –	Caracterização das imagens apresentadas nas seções de <i>permutação</i> dos capítulos analisados.....	218
Quadro 27 –	Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de <i>permutação com elementos idênticos</i> dos capítulos analisados	219
Quadro 28 –	Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de <i>arranjo</i> dos capítulos analisados.....	219
Quadro 29 –	Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de <i>combinação</i>	220
Quadro 30 –	Caracterização das imagens apresentadas nas seções de <i>combinação</i> dos capítulos analisados.....	222
Quadro 31 –	Resumo do dos objetos primários da Combinatória no Ensino Médio	226
Quadro 32 –	Apresentação dos objetivos sistematizados a partir das aulas observadas	231
Quadro 33 –	Discriminação das Configurações Didáticas (CD) ocorridas nas aulas	233
Quadro 34 –	Resumo da configuração epistêmica da primeira aula	258
Quadro 35 –	Resumo da Configuração epistêmica da segunda aula (CD7, CD8, CD9, CD10, CD11, CD12, CD13,CD14, CD15, CD16, CD17).....	262
Quadro 36 –	Distribuição da trajetória epistêmica em uma configuração didática.....	266
Quadro 37 –	Distribuição da Trajetória Epistêmica por estado da atividade matemática apresentada por aula.....	268
Quadro 38 –	Resumo da distribuição dos delineamentos da trajetória docente apresentada por aula	276
Quadro 39 –	Resumo da distribuição dos comportamentos da trajetória discente por aula.....	280
Quadro 40 -	Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Produto de medidas	318
Quadro 41 -	Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Arranjo	319
Quadro 42 –	Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Permutação	321
Quadro 43 –	Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de problemas de <i>combinação</i>	322
Quadro 44 -	Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Arranjo com repetição.	324
Quadro 45 -	Síntese da Análise da Idoneidade Epistêmica	335
Quadro 46 -	Síntese da Análise da Idoneidade Cognitiva.....	337

Quadro 47 —	Síntese da Análise da Idoneidade Interacional	338
Quadro 48 —	Síntese da Análise da Idoneidade Mediacional	339
Quadro 49 —	Síntese da Análise da Idoneidade Ecológica	340
Quadro 50 —	Síntese da Análise da Idoneidade Afetiva.....	341

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Número (e percentual) dos tipos de situações identificados em capítulos de Combinatória	154
Tabela 2 –	Número (e frequência) de tipos de problemas combinatórios encontrados nos livros analisados	161
Tabela 3 –	Distribuição do tipo de problema combinatório por tipo de situação.....	164
Tabela 4 –	Conversões entre registros de representação por tipo de problema combinatório.....	175
Tabela 5 –	Distribuição de procedimentos por capítulos de livro	187
Tabela 6 –	Distribuição do tipo de procedimento de resolução por tipo de problema combinatório.....	191
Tabela 7–	Distribuição da complexidade de problemas combinatórios por tipo de problema	195
Tabela 8 –	Distribuição de técnicas aplicadas na resolução de problemas combinatórios por capítulos de livro.....	197
Tabela 9 –	Tipo de problema combinatório distribuído por técnica de resolução	203
Tabela 10 –	Tipo de técnica distribuída por complexidade de problemas combinatórios.....	203
Tabela 11 –	Distribuição dos tipos de situações apresentadas durante as aulas de Combinatória	237
Tabela 12 –	Distribuição dos tipos de problemas combinatórios apresentados nas aulas observadas	243
Tabela 13 –	Tipos de argumentos apresentados durante as aulas	256
Tabela 14–	Frequência de funções assumidas pelo recurso quadro	289
Tabela 15 –	Conflitos semióticos apresentados na resolução comentada de problemas combinatórios nas aulas de Ensino Médio	325
Tabela 16 –	Atitudes positivas e negativas observadas durante as aulas de Combinatória.....	328
Tabela 17 –	Distribuição percentual das unidades de análise nas diferentes dimensões por aula.....	332

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	27
1.1	PROBLEMA DE PESQUISA.....	37
1.2	OBJETIVO GERAL	37
1.3	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	37
1.4	TESE.....	38
2	ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICOS (EOS): o caso da Combinatória	40
2.1	SISTEMAS DE PRÁTICAS EM COMBINATÓRIA	42
2.2	CONFIGURAÇÕES DE OBJETOS E PROCESSOS MATEMÁTICOS EM COMBINATÓRIA.....	45
2.3	CONFIGURAÇÕES DIDÁTICAS E TRAJETÓRIAS DIDÁTICAS NA COMBINATÓRIA	54
2.4	DIMENSÃO NORMATIVA E COMBINATÓRIA.....	58
2.5	IDONEIDADE DIDÁTICA E COMBINATÓRIA	60
2.6	PESQUISAS BRASILEIRAS QUE UTILIZARAM O EOS.....	68
3	COMBINATÓRIA.....	76
3.1	DIMENSÕES EPISTÊMICA-ECOLÓGICA DA COMBINATÓRIA EM PESQUISAS.....	81
3.1.1	Dimensão epistêmica: discussões sobre classificações de problemas combinatórios	81
3.1.2	Dimensão ecológica: discussões sobre o documentos curriculares nacionais e internacionais da Combinatória.	88
3.2	DIMENSÃO INSTRUMENTAL (MEDIACIONAL E INSTRUCIONAL) DA COMBINATÓRIA EM PESQUISAS....	100
3.3	DIMENSÃO COGNITIVO-AFETIVO DA COMBINATÓRIA EM PESQUISAS	108
3.4	ENSINO DE COMBINATÓRIA.....	122
4	MÉTODO	132
4.1	CARACTERÍSTICAS DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA E PROCESSO DE COLETA DAS INFORMAÇÕES	132
4.1.1	Caracterização dos participantes na pesquisa	132
4.1.2	Processo de coleta das informações	134
4.2	PERCURSO ADOTADO PARA ANÁLISE	136

4.2.1	Significados Institucionais Pretendidos da Combinatória observados nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio.....	138
4.2.2	Trajetórias Didáticas implementadas nas aulas de Combinatória no Ensino Médio	144
4.2.3	Adequações didáticas de aulas de Combinatória no Ensino Médio.....	147
5	ANÁLISE DOS OBJETOS PRIMÁRIOS DA COMBINATÓRIA IDENTIFICADOS EM CAPÍTULOS DOS LIVROS DIDÁTICOS DE ENSINO MEDIO.....	151
5.1	TIPOS DE SITUAÇÕES APRESENTADAS NOS CAPÍTULOS DE LIVROS DIDÁTICOS DE COMBINATÓRIA.....	153
5.2	CONCEITOS RELATIVOS À COMBINATÓRIA APRESENTADAS NOS CAPÍTULOS.....	160
5.3	ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS RELATIVOS À COMBINATÓRIA APRESENTADOS NOS CAPÍTULOS DOS LIVROS ANALISADOS.....	174
5.4	PROCEDIMENTOS RELATIVOS À COMBINATÓRIA APRESENTADOS NOS CAPÍTULOS DOS LIVROS ANALISADOS.....	185
5.5	ARGUMENTOS RELATIVOS À COMBINATÓRIA APRESENTADOS NOS CAPÍTULOS.....	205
6	AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: O PERCURSO TRAÇADO POR UM PROFESSOR	228
6.1	COMENTÁRIOS SOBRE AS AULAS DE COMBINATÓRIA OBSERVADAS	228
6.2	CONFIGURAÇÕES DIDÁTICAS OBSERVADAS NAS AULAS DE COMBINATÓRIA	232
6.3	CONFIGURAÇÕES EPISTÊMICAS OBSERVADAS NAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO.....	235
6.4	TRAJETÓRIAS EPISTÊMICAS DAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO.....	264
6.5	CONFIGURAÇÕES INTERACIONAIS IMPLEMENTADAS AO LONGO DAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO	270
6.5.1	Trajetórias docentes, discentes e mediacionais observadas ao longo das aulas de Combinatória no Ensino Médio ...	271
6.5.2	Padrões de interação observados nas aulas de Combinatória do Ensino Médio	303

6.6	CONFIGURAÇÃO COGNITIVA–AFETIVA IMPLEMENTADAS NAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO.....	316
6.6.1	Trajetórias cognitivas observadas nas aulas de Combinatória de Ensino Médio	316
6.6.2	Trajetórias emocionais observadas nas aulas de Combinatória de Ensino Médio	327
6.7	IDONEIDADE DIDÁTICA DAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO	331
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	345
	REFERÊNCIAS	354
	APÊNDICE A – EVOLUÇÃO DE REGISTROS NO QUADRO NAS AULAS DE COMBINATÓRIA	376
	APÊNDICE B – CONFIGURAÇÃO EPISTÊMICA DAS AULAS 3,4,5 E 6.....	377

1 INTRODUÇÃO

A Combinatória, enquanto área de conhecimento matemático, teve um grande crescimento com o surgimento e a popularização dos computadores. Cameron (2013) aponta que antes mesmo dessa invenção, Charles Babbage e Alan Turing assinalaram a necessidade de noções discretas para a construção de máquinas de processamento de dados, o que, particularmente, projetou um crescimento para a área da Matemática Discreta. Alguns sistemas computacionais tratam especificamente objetos combinatórios ou algébricos, o que fornece aos matemáticos importantes ferramentas para análise, exploração e testes dessas estruturas, potencializando a elaboração de conjecturas, fortalecendo essa área (CAMERON, 2013).

Cameron (2013, p.358) afirma, ainda, que a invenção dos computadores originou novas áreas da Matemática e “Como os computadores são digitais, essas áreas são naturalmente relacionadas à Análise Combinatória”, dentre as quais, destacam-se a teoria de codificação, a criptografia e a programação.

Hunter (2011) acresce que a popularização do computador, assim como a aumento de sua capacidade, ampliou a abrangência de processos de contagem nas mais variadas áreas da Ciência e Indústria. Tal abrangência pode ser verificada na presença desses processos em áreas como: a formação de palavras na Linguagem, as combinações de tons na Música, a organização/representação das correntes elétricas pela Lei de Kirchhoff na Física, a compreensão de padrões do DNA na Biologia, a sistematização de compostos orgânicos na Química e a resolução de problemas de otimização relacionados a produção, transportes e distribuição na Economia (NAVARRO-PELAYO, 1994; KNUTH, 2005; 2013; HUNTER, 2011).

Antes desse crescimento da Combinatória a partir do surgimento de computadores, ao longo da história, fontes documentais apresentaram a enumeração de variadas listas em civilizações em diferentes localidades (Problemas no Papiro de Rhind no Egito, Livro I Ching na China, o trabalho de Pingala na Índia, entre outros) e com aplicações em diversas áreas, como canções de ninar, livros de previsão, tratados médicos, quadrados mágicos, dentre outros (BIGGS, 1979; KNUTH, 2013).

Devido à importância da Combinatória ao longo da história e nos dias atuais e à crescente aplicação da mesma em diferentes áreas do conhecimento, pesquisadores como Kapur (1970), Kenney e Hirsch (1991), Dossey (1991), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), English (2005), Pessoa e Borba (2009; 2010), Borba, Rocha e Azevedo (2015), Lima e Rocha (2016), Hart e Sandefur (2018) – por variados motivos – defendem a inserção da Combinatória no currículo da Educação Básica.

Kapur (1970) indica como um dos pontos positivos para a inserção da Combinatória na Educação Básica a possibilidade da resolução de problemas sem ser necessário um amplo conhecimento algébrico, enfatizando elaborações de procedimentos próprios sem necessidade de conhecimentos prévios de procedimentos formais como fórmulas. English (2005) afirma que crianças imbuídas no trabalho de resolução de problemas combinatórios, podem apresentar diferentes procedimentos de resolução, mesmo com poucos conhecimentos de Combinatória.

Batanero et al. (1996) consideram os problemas combinatórios um meio excelente para que os estudantes realizem atividades de matematização. Borba (2010; 2013) comenta que o raciocínio combinatório promove o desenvolvimento de uma maneira sistemática para a organização de dados e escolha de conjuntos ou subconjuntos em diversas situações no dia a dia dos alunos, constituindo-se um instrumento importante na formação da cidadania. Mais motivos para o estudo da Combinatória na escola são apresentados por esses autores – relacionados ao desenvolvimento de formas de raciocínio, necessários ao pleno exercício da cidadania.

Em texto mais recente, Hart e Sandefur (2018) reafirmam a importância da inserção no currículo da Educação Básica de elementos da Matemática Discreta¹, inclusive a Combinatória. Para esses autores, a Combinatória “[...] é uma parte fundamental da matemática discreta e o raciocínio combinatório é um modo poderoso de raciocínio, um hábito matemático mental, que é especificamente desenvolvido no ensino e aprendizagem da matemática discreta” (HART; SANDEFUR, 2018, p.vi).

¹ É a parte da Matemática que estuda de objetos e estruturas discretas ou finitas. Para Bogart (1991) os assuntos populares da Matemática Discreta são Teoria dos Conjuntos, Combinatória, Teoria dos Grafos, Indução Matemáticas, Lógica básica, Probabilidade/ Estatística.

Na mesma direção, a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio afirma que os problemas de contagem fazem parte da dualidade entre as ideias de certeza e incerteza, caracterizadas pela necessidade de comunicação social e pelas “práticas de expressar e comunicar ideias e estratégias matemáticas, validando-as por meio de sugestões” (BRASIL, 2018, p.520-521). Nesse documento, os problemas combinatórios se inserem na competência específica que propõe “[...] interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente”. (BRASIL, 2018, p.526).

Pesquisas como English (2005), Pessoa e Borba (2010) discutem que crianças conseguem apresentar, durante a resolução de problemas combinatórios, algumas noções interessantes que exibem, por exemplo, procedimentos alternativos, como a listagem sistemática (ENGLISH, 2005) ou a percepção de regularidades (PESSOA; BORBA, 2010). Assim, defende-se que a matematização, em particular a problematização matemática, pode ser iniciada e instrumentalizada a partir de problemas combinatórios, dentre outros, na escola.

Kenney e Hirsch (1991) apresentam uma série de artigos no livro do ano do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) que vislumbram aspectos da Combinatória inseridos na Matemática Discreta. Essa coletânea de artigos, promove a discussão sobre a presença da Combinatória nos doze anos de escolarização nos Estados Unidos (equivalentes ao Ensino Fundamental e Médio brasileiros) tratados como de forma contínua, priorizando a discussão de problemas combinatórios “com ênfase no pensamento e senso comum ao invés de métodos padronizados de solução”. (GARDINER, 1991, p.15).

No âmbito da Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental foram propostas atividades para crianças pequenas que envolviam combinações de cores de tintas, ao longo de projeto de artes, envolvendo situações ordenadas e não ordenadas para proporcionar contagens das crianças e que as mesmas percebessem quando todas as possibilidades foram encontradas, desenvolvendo nelas o cuidado do que e como contar (SCHIELACK, 1991).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, enfatizaram o trabalho de problemas combinatórios por meio do uso de materiais manipulativos e

diagramas como árvores de possibilidades, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e o Princípio da Casa dos Pombos² (GRAHAM, 1991), como também, o trabalho por meio da resolução de problemas de permutação com conjuntos de pequenos valores para permitir que os alunos apresentem diferentes procedimentos de resolução (DEGUIRE, 1991).

No Ensino Médio, Holliday (1991) apresenta uma proposta do uso de grafos na resolução de problemas combinatórios, uma vez que pode auxiliar os estudantes a elaborarem suas próprias soluções, a partir do apoio visual dado por essas estruturas. O trabalho de Johnson (1991) sugere o uso de dominós para inserir a discussão de diferentes problemas combinatórios, inclusive de relações com a indução matemática, promovendo o desenvolvimento do raciocínio combinatório. No entanto, para chegar a esse nível de discussão sobre Combinatória no Ensino Médio, é necessário garantir um trabalho desse conteúdo ao longo de toda a Educação Básica.

Pesquisas diversas indicam que a natureza de problemas combinatórios pode possibilitar um trabalho com resolução de problemas nos diferentes níveis de escolarização, devido à pouca presença de algoritmos em diversos desses problemas. No entanto, de acordo com Martin (2001, p.1), “Uma das coisas que tornam a contagem elementar difícil é que encontraremos poucos algoritmos. Você terá que pensar. Existem poucas fórmulas e cada problema parece ser diferente.” DeTemple e Webb (2014) ressaltam a beleza da Combinatória quando auxiliam na criação de maneiras diferentes e inovadoras de resolução desses problemas. Vancsó et al. (2018, p.112) afirmam que o ensino de Combinatória não deve se focar em ensinar apenas “[...] as soluções de certos tipos de problemas, mas ensinar métodos de solução de problemas, e como abordar problemas desconhecidos”. Nessa perspectiva, é importante que professores utilizem práticas nas quais os alunos elaborem diferentes procedimentos de resolução, além da apresentação de explicações para outros colegas.

Fischbein (1975) acredita que existe a necessidade do ensino específico para que a capacidade ampla de resolver problemas combinatórios seja

² Também conhecido como Princípio de Dirichlet, esse princípio faz relação com a distribuição de elementos em caixas e afirma que “Se em n caixas são postos $n + 1$ pombos, então pelo menos uma caixa terá mais de um pombo”.

alcançada. A partir de análises teóricas e de dados de pesquisa, pode-se dizer que sem a escolarização o desenvolvimento do raciocínio combinatório nem sempre se dará de maneira satisfatória. Na mesma direção, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p.14-15) reafirmam a necessidade de “[...] estimular o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de uma instrução adequada, já que o mesmo nem sempre se alcança espontaneamente ao chegar na idade adulta”. Schliemann (1988), a partir de resultados de um estudo comparativo de desempenhos de profissionais e de estudantes, com e sem familiaridade com situações combinatórias, afirma que a experiência no dia a dia com a Combinatória possui influência no desenvolvimento do raciocínio combinatório, mas a vivência no âmbito da escola parece ser mais indicada para o melhor desempenho dos estudantes. Segundo a autora, a interação entre as experiências vivenciadas e a instrução escolar pode possibilitar ainda maiores avanços nesse desenvolvimento.

Roa (2000), em sua investigação, afirma que o raciocínio combinatório não se desenvolve de maneira espontânea e mesmo alunos, com intensa preparação matemática, precisam de ensino específico em Combinatória, focalizando diferentes configurações combinatórias, inclusive aquelas com problemas combinatórios não considerados simples (passíveis de serem resolvidos com apenas a aplicação direta de fórmulas).

Coenen, Hof e Verhoef (2018, p.78) afirmam que a orientação dos professores é necessária para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Esses autores sugerem que os estudantes tenham acompanhamento durante esse processo e enfatizam que se esta orientação/acompanhamento for realizada adequadamente “[...] fortalecerá a confiança dos alunos em sua abordagem e em suas soluções”.

Diferentes enfoques da Combinatória foram analisados no livro didático. Borba, Azevedo e Bittar (2016) discutem que os livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental apresentam diferentes conversões entre registros de representação semiótica relacionados aos problemas combinatórios, o que sugere elementos que podem, ou não, ser tratado pelos professores. Silva e Rocha (2015) afirmam que problemas combinatórios com repetição já se apresentam em livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. Na pesquisa de Silva (2015), o autor comenta que os livros didáticos do Ensino

Médio apresentam problemas combinatórios condicionais, mas que não há orientações específicas sobre esse trabalho, seja para o professor ou para o aluno. Essas pesquisas apontam a necessidade do professor, de cada nível de ensino, conhecer essas discussões e, ainda, possibilitar o trabalho com esses tipos de problemas.

Além do professor, suas ações e escolhas didáticas, o livro didático pode influenciar o modo como a Combinatória é tratada na aula, já que apresenta considerações sobre problemas, representações, conceitos, procedimentos e complexidade desse conteúdo. A autoridade única desse recurso ou texto curricular é contestada (JANUARIO; LIMA; PIRES, 2016; HERBEL-EISENMANN, 2009), mas sua distribuição nas escolas, em especial, seu uso nas aulas de Combinatória, “podem impactar o que e como os professores ensinam e os alunos aprendem” (HERBEL-EISENMANN, 2009, p.134). As preferências desse recurso com relação a Combinatória, podem influenciar as escolhas do professor, mesmo compreendendo que a relação entre professor e livro didático, pode assumir funções – a exemplo da reprodução, da adaptação ou da improvisação (JANUARIO; LIMA; PIRES, 2016; REMILLARD, 2005).

Apesar do grande número de pesquisas que recomendam o início do processo de ensino e aprendizagem da Combinatória a partir dos níveis elementares, da presença de problemas combinatórios em livros didáticos dos anos iniciais, tanto nacionalmente (BARRETO; BORBA, 2010) quanto em outros países, como no Chile (ROCHA; DIAZ-LEVICOY; BORBA, 2017) e da orientação de documentos oficiais curriculares nacionais ou estaduais (BRASIL, 1997, 1998; 2000; 2018; PERNAMBUCO, 2012; 2013), no Brasil, o ensino de Combinatória se apresenta por vezes de maneira implícita no Ensino Fundamental e grande parte das práticas docentes sobre Combinatória, tradicionalmente, acontece no 2º ano do Ensino Médio.

Szitányi e Csíkos (2015), em sua investigação, constataram que futuros professores de Matemática da Hungria, apresentaram crenças a respeito de seus conhecimentos sobre Combinatória, assim como, das suas habilidades para o ensino desse conteúdo, como atividades em que possuem mais dificuldades, inclusive em comparação com outros domínios matemáticos como Conjuntos, Geometria, Álgebra, Teoria dos Números, Funções e Lógica.

Nesse contexto, em pesquisa anteriormente desenvolvida, Rocha (2011) investigou os conhecimentos sobre Combinatória e seu ensino apresentados por professores de Ensino Fundamental e Médio³. A partir de protocolos de resolução de problemas combinatórios, de estudantes dos diferentes níveis de escolaridade, foram realizadas, junto a professores, entrevistas semiestruturadas que discutiam aspectos do Conhecimento para ensinar Combinatória, fundamentada nos estudos desenvolvidas por Ball, Thames e Phelps (2008). As entrevistas trouxeram elementos sobre o que diziam tais professores, quanto a seus desafios e os de estudantes nos processos de ensino e de aprendizagem da Combinatória, além de sugestões por eles apresentadas de superação de dificuldades nesses processos.

Dentre os comentários realizados ao longo das entrevistas, destaca-se o seguinte depoimento de um dos professores de Ensino Médio:

[...] O professor está ali no mínimo para saber o que deve propor. De que adiantaria nós chegarmos na primeira aula de Análise Combinatória⁴ e o professor passasse um problema de um nível mais avançado? O aluno não ia ter suas estruturas cognitivas, não ia sofrer nada. - O que é isso aqui? Eu era para saber disso? [...] Por outro lado também, a gente não pode vir só sempre com questão mais simples. Até porque no nível de Ensino Médio, eu comento com eles que daqui a pouco eles estão para vida, para os concursos públicos e isso não é fácil (ROCHA, 2011, p.175).

O professor aponta a reflexão sobre suas atitudes, pensando em diferentes aspectos do ensino, tais como: a escolha dos conceitos abordados (problemas, procedimentos), a escolha dos problemas a serem trabalhados junto aos alunos e a complexidade deles, e como essas escolhas refletem nos conhecimentos prévios dos estudantes, nas dificuldades que eles apresentam e nos modos de manter os estudantes motivados e preparados para etapas futuras de suas vidas. Essa reflexão aponta para necessidade de investigar sobre que ações docentes promovem, dentre outras, a participação/motivação dos alunos no próprio processo de construção do conhecimento, as relações do conteúdo matemático com contextos intra e extramatemáticos, os recursos e condições existentes e presentes durante a aula, as interações entre professor e alunos e como elas favorecem a promoção de autonomia na resolução de problemas, os

³Seis professores sendo dois dos anos iniciais do Ensino Fundamental (7-10 anos), dois dos anos finais do Ensino Fundamental (11-14 anos) e dois do Ensino Médio (15-17 anos).

⁴ Nessa pesquisa trata-se Combinatória e Análise Combinatória como sinônimos.

conteúdos matemáticos abordados e como estes se adequam ao nível conhecimento dos alunos.

Em outra investigação, Lima (2016) afirma que as aulas de Combinatória no Ensino Médio, ainda priorizam as fórmulas como única técnica de contagem, em contrapartida do que orientam documentos curriculares oficiais (BRASIL, 1998, 2002). Apesar dessa ênfase em fórmulas, Pessoa (2009) comenta que alunos de 3º ano do Ensino Médio utilizaram mais frequentemente as fórmulas na resolução de problemas combinatórios do que alunos de outros anos escolares, mas muitos alunos que utilizaram tal procedimento resolveram as questões de maneira equivocada, implicando no não reconhecimento das especificidades/propriedades inerentes a esses problemas, o que pode evidenciar lacunas na construção de conceitos na Combinatória.

Para esse processo de construção, Lockwood (2013, p.265) defende a necessidade da pesquisa em Educação Matemática produzir “uma visão mais aprofundada sobre como os estudantes conceitualizam ideias combinatórias” para se buscar modos de professores auxiliarem nesse processo de conceitualização. Voltando-se ao trabalho de Combinatória no Ensino Médio, a presente pesquisa se insere na perspectiva de investigar sobre as escolhas didáticas e ações realizadas pelo professor nas aulas de Combinatória e como essas podem orientar/acompanhar o desenvolvimento do raciocínio combinatório de estudantes do Ensino Médio.

Batanero et al. (1996) afirmam a importância do papel assumido pelo professor no âmbito das mudanças curriculares. Esse papel é ampliado quando pensa-se nas proposições de práticas para o desenvolvimento de raciocínio combinatório, na elaboração e utilização de materiais didáticos, na alteração da responsabilidade de resolução de problemas pelos alunos na sala de aula, ou no acompanhamento dos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória.

Nessa perspectiva, Godino, Rivas, Castro e Konic (2012, p.4) ressaltam a relevância das decisões e escolhas do professor de Matemática que vai além da “seleção e adaptação de situações-problemas que promovam a contextualização dos conteúdos” [...], como também nos avanços provocados “na organização de configurações e trajetórias didáticas idôneas”, levando em consideração dimensões epistêmicas, cognitivas, afetivas, ecológicas e instrucionais.

Compreende-se, assim, que o ensino, em particular de Combinatória, ultrapassa o caráter exclusivamente matemático, permeando diferentes pontos de vistas durante a sua implementação. A ação complexa de ensinar envolve aspectos diversos que perpassam, dentre outros, a escolha dos problemas combinatórios abordados com maior ou menor ênfase, a complexidade desses problemas, os procedimentos mais evidenciados, as conexões da Combinatória com a Matemática e com outras áreas; além de processos de aquisição de conhecimentos, dificuldades enfrentadas pelos estudantes, os recursos adequados para mediar o trabalho, a motivação dos alunos, atitudes negativas e positivas relativas à Matemática, a interação entre professor e alunos e a promoção de autonomia dos estudantes. Nessa perspectiva, corrobora-se com Godino (2011) quando explicita:

Certamente não dispomos de receitas de como ensinar, mas isto não significa que não tenhamos certos conhecimentos que nos permitem tomar algumas decisões locais preferidas (GODINO, 2011, p.3).

Durante a aula, o professor pode se deparar com situações imprevisíveis, como uma exigência de alunos sobre a resposta do problema combinatório, o que pode gerar variadas decisões do professor: falar a resposta aos alunos, apresentar dicas, atribuir a responsabilidade da resolução do problema a eles, modificar o problema para tornar possível outros procedimentos. Tais decisões locais podem ser preferidas pelos professores ao longo da implementação de aulas de Combinatória, no entanto é importante que as escolhas efetuadas pelo professor e as decisões tomadas precisam ser adequadas aos objetivos que se deseja alcançar.

A complexidade existente no processo de ensino e aprendizagem aponta que não há formas únicas para abordagem de distintos conteúdos. É, assim, necessário investigar decisões tomadas pelos professores para tornar os processos de ensino mais eficazes.

Para aproximar da complexidade do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, a presente pesquisa utiliza como aporte teórico-metodológico o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemáticos (EOS), proposto por Juan Diaz Godino e seus colaboradores, que possui uma ampla gama de noções teóricas que buscam auxiliar a pesquisa a alcançar seus objetivos.

Das noções teóricas propostas pelos EOS centrou-se, na presente pesquisa, naquelas que ajudam a descrever e avaliar o processo de ensino e aprendizagem desenvolvido em sala de aula, dentre as quais, nas configurações de *objetos primários* da Combinatória observados nos livros didáticos utilizados, nas *configurações didáticas* e *trajetórias didáticas* observadas nas aulas de um professor e na *idoneidade didática* – a fim de avaliar os movimentos intencionais de um professor, realizados a partir das diferentes dimensões (epistêmica, cognitiva, afetiva, mediacional, interacional e ecológica) durante o ensino e aprendizagem de Combinatória implementado.

Pode-se observar que as pesquisas em Combinatória trazem muitas considerações sobre aspectos diferenciados que podem ser colocados em prática nos processos de ensino de Combinatória. No entanto, é necessário se rever, por meio da pesquisa, perspectivas de ensino que não vejam a aprendizagem como reprodução, mas que, por intermédio de problematizações, concedam aos estudantes autonomia e um papel ativo em suas aprendizagens.

É nesse contexto que a presente pesquisa se insere e, fundamentados no exposto, surgem alguns questionamentos, que mobilizaram as investigações realizadas:

- (1) Que aspectos da Combinatória são apresentados nos livros didáticos – tais como, tipos de situações, de problemas combinatórios, de relações entre conceitos, de conversões entre registros e/ou procedimentos – e quais devem ser priorizados em aulas no Ensino Médio?
- (2) De que maneira as interações professor-alunos auxiliam na participação em sala de aula e na aprendizagem de problemas combinatórios?
- (3) Que tipo de ações desempenhadas pelo professor nas aulas de Combinatória no Ensino Médio podem auxiliar no desenvolvimento de atitudes positivas dos estudantes, diminuindo as fobias e medos com relação a resolução desses tipos de problema?
- (4) Que ações do professor potencializam a resolução de problemas combinatórios por parte dos alunos?
- (5) Que recursos podem ser e são efetivamente utilizados para mediar as discussões em Combinatória?
- (6) Como o professor acompanha e auxilia a superação de dificuldades observadas nos estudantes?

(7) O que é realizado pelo professor nas aulas de Combinatória no Ensino Médio para efetivamente gerar aprendizagens?

Nessa compreensão, a aula de Combinatória tornou-se o lugar do objeto de estudo: **os movimentos intencionais implementados pelo professor no processo de ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Médio**, analisados a partir de escolhas frente a livros didáticos utilizados e a propostas de atividades realizadas em sala de aula junto a estudantes. Para a investigação, buscou-se aprofundar o olhar sobre as escolhas didáticas de um professor na implementação do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória de Ensino Médio e delimitou-se o problema de pesquisa e os objetivos que seguem, bem como apresenta-se, em seguida, a tese defendida.

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Quais movimentos intencionais implementados pelo professor podem ser priorizados e por que priorizá-los no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio?

1.2 OBJETIVO GERAL

- Analisar diferentes movimentos intencionais que podem ser priorizados pelo professor no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar os indicadores⁵ do objeto primário Combinatória priorizados nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio utilizados por um professor;
- Categorizar e descrever as aulas de Combinatória no Ensino Médio classificando trajetórias didáticas implementadas (epistêmica, docente, discente, mediacional, cognitiva e afetiva);

⁵ Dentre os objetos matemáticos primários da Combinatória foram selecionados componentes que são possíveis de analisar no livro didático (situações, problemas, invariantes, conversões entre registros, complexidade, procedimentos de resolução, técnicas, características de argumentos e argumentos em tipos de imagens) e para cada um foram categorizados e contabilizados indicadores que caracterizam cada um desses componentes.

- Relacionar os diferentes indicadores das dimensões da Idoneidade didática aos movimentos intencionais de um professor ao longo do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória;
- Valorar os indicadores das diferentes dimensões da Idoneidade Didática (epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, ecológica e afetiva) para os movimentos intencionais do professor na Combinatória no Ensino Médio.

1.4 TESE

Defende-se a tese de que

Um bom processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio deve ser contemplado nos movimentos intencionais do professor proporcionando a seleção de tipos de situações variadas, abordando as diferenças entre os invariantes dos problemas combinatórios (escolha, ordem, repetição); a construção de resoluções próprias, enfatizando procedimentos enumerativos e numéricos e a explicitação de argumentos de alunos (pessoais e coletivos) que façam uso de propriedades combinatórias, favorecendo o surgimento de padrões de interação entre professor e alunos que promovam a responsabilidade dos estudantes na resolução de problemas combinatórios.

A fim de fundamentar essa discussão, o presente estudo foi organizado nos capítulos que seguem.

No Capítulo 2 apresenta-se o Enfoque Ontossemiótico da Instrução e Conhecimento Matemáticos, marco teórico-metodológico da presente pesquisa.

No Capítulo 3 aprofunda-se a discussão sobre o estudo de Combinatória no Ensino Médio, apresentando pesquisas que refletem aspectos das diferentes dimensões da idoneidade didática, agrupadas em interações entre as mesmas: epistêmica – ecológica; cognitiva – afetiva e instrucional (mediacional e interacional).

Depois, no Capítulo 4, apresenta-se o desenho metodológico da pesquisa, no qual se discorre sobre as etapas da pesquisa e as escolhas realizadas a fim de alcançar cada objetivo.

As análises dos resultados foram subdivididas em dois capítulos, no Capítulo 5 foram apresentadas as discussões sobre os capítulos de livro didático analisados e no Capítulo 6 foram expostas e debatidas as características e

dimensões alcançadas nas idoneidades didáticas das aulas de Combinatória analisadas.

Por fim, no Capítulo 7 apresentam-se as Considerações Finais, discute-se sobre os principais resultados e apontam-se novos caminhos para pesquisa sobre a Combinatória e seu ensino.

2 ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICOS (EOS): o caso da Combinatória

A discussão sobre esse marco teórico inicia-se nos anos noventa a partir do desenvolvimento de pesquisas de Juan Diaz Godino, em Granada, na Espanha, e das investigações produzidas no âmbito da Didática Matemática na França. (GODINO, 2012). Para tanto, se fundamenta em algumas teorias produzidas na Didática da Matemática, como a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard, a Dialética Ferramenta-Objeto de Règine Douady e a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

Para Godino (2012, p.52) o objetivo de reunir tais teorias é se aproximar das respostas de diversos problemas, relativos a pesquisa sobre processos de ensino e aprendizagem, sob variados pontos de vista. Do ponto de vista epistemológico, busca-se responder, dentre outras questões: “Qual é o significado de um objeto matemático [...] em um contexto ou marco institucional determinado?”. Do ponto de vista cognitivo, objetiva-se, dentre outros questionamentos, a resposta para: “Que significa o objeto O para um sujeito em um momento e circunstâncias dadas?”. Desse modo, Godino e colaboradores construíram algumas ferramentas teóricas (*sistema de práticas, configurações de objetos e processos*) para implementar a análise das questões epistemológicas e cognitivas do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Após essa construção, tais pesquisadores se detiveram em questões relativas ao design instrucional, e formularam as seguintes indagações, a primeira direcionada à instrução matemática significativa e a segunda aos processos formativos: “Que tipos de interações didáticas se deveriam implementar nos processos instrucionais que permitam otimizar as aprendizagens matemáticas?”; “Que normas condicionam o desenvolvimento dos processos instrucionais, como se estabelece, e podem modificar-se para otimizar as aprendizagens matemáticas?” (GODINO, 2012, p.53)

De acordo com Godino (2012, p.53), a busca por um modelo unificado das teorias mencionadas sugeriu um novo problema de epistemologia da Didática da Matemática: “Dadas as teorias $T_1, T_2, \dots, T_n$, focalizadas sobre uma mesma

problemática de ensino e aprendizagem de Matemática, é possível elaborar uma Teoria T que inclua as ferramentas necessárias e suficientes para realizar o trabalho das Ti?" Tal problema promove a comparação e articulação das teorias mencionadas e de outras buscando integração entre as diferentes terminologias e seus fundamentos.

Com base nessa discussão, o EOS se constitui como um aporte teórico à avaliação dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, e para esse fim, foram ampliadas as noções anteriores (sistemas de práticas e configurações de objetos), sendo elaboradas outras noções teóricas que auxiliam na descrição, explicação e avaliação das interações e práticas em sala de aula: 1) Sistemas de práticas; 2) Configurações de objetos e processos matemáticos, emergentes e participantes das práticas matemáticas; 3) Configurações didáticas [trajetórias didáticas]; 4) Dimensão normativa; e 5) Idoneidade didática. Para Godino (2012) tais noções teóricas se configuram:

- (1) *Sistemas de práticas* (operativas, discursivas e normativas) [...] A atividade de resolução de problemas se adota como elemento central na construção do conhecimento matemático.
- (2) *Configurações de objetos e processos* matemáticos, emergentes e participantes das práticas matemáticas [...] Os diversos meios de expressão (linguagens) desempenham o duplo papel de instrumentos do trabalho matemático e de representações dos objetos matemáticos.
- (3) *Configurações didáticas [trajetórias didáticas]*, como sistema articulado de papéis docentes e discentes, a propósito de uma configuração de objetos e processos matemáticos ligados a uma situação-problema, constituindo a principal ferramenta para a análise da instrução matemática.
- (4) *Dimensões normativas*, sistema de regras, hábitos, normas que restringem e suportam as práticas matemáticas e didáticas, generaliza a noção de contrato didático e normas sócio-matemáticas. [...]
- (5) *Idoneidade didática*, como critério geral de adequação e pertencimento das ações dos agentes educativos, dos conhecimentos postos em jogo e dos recursos usados em um processo de estudo matemático. (GODINO, 2012, p.55, tradução própria).

Como se pode observar, a abrangência das ferramentas teóricas que fundamentam as análises no EOS é ampla. De acordo com Godino (2012) as noções de sistema de práticas, configurações de objetos e processos matemáticos, configurações didáticas ou trajetórias didáticas e a dimensão

normativa são ferramentas para uma didática descritivo-explicativa, enquanto a idoneidade didática “se fundamenta nas quatro análises prévias e constitui uma síntese orientada da identificação de potenciais melhoras do processo de instrução” (FONT; PLANAS; GODINO, 2010, p.13). Nas próximas seções, apresentam-se as características dessas ferramentas teóricas que servem como arcabouço para análise da prática em sala de aula, relacionando-as com processos de ensino e aprendizagem de Combinatória.

2.1 SISTEMAS DE PRÁTICAS EM COMBINATÓRIA

Para Godino (2011; 2012; 2017), os *sistemas de práticas* dizem respeito às ações apresentadas por pessoas quando se deparam com diferentes tipos de situações problemas. Godino, Batanero e Font (2008) seguem uma perspectiva pragmática quando assumem como conceito primitivo o de situação problema.

Na perspectiva do ensino e aprendizagem de Combinatória a situação problema é um de seus principais focos, de acordo com Godino e Batanero (2016, p.8, tradução própria), “os problemas combinatórios são um meio excelente para que os estudantes realizem atividades de matematização”.

Em contato com um problema de Combinatória não se sabe de imediato qual a solução e é preciso análise cuidadosa dos dados do problema e das condições dadas para se elaborar um procedimento adequado de solução. Além disso, processos enumerativos, ou de recursividade, podem auxiliar a percepção de regularidade, ou mesmo, processos de generalização podem ser abordados por meio da resolução de problemas combinatórios. Para isso, ações didáticas que promovam, pouco a pouco, a ampliação da quantidade de elementos a serem ordenados, combinados ou escolhidos podem ser implementadas.

Desse modo, ao assumir o papel central dos sistemas de práticas, os problemas podem ser utilizados como ponto de partida para a construção do raciocínio combinatório, e com esse intuito a escolha de problemas combinatórios pelo professor e a maneira como este apresenta, discute ou promove a mediação pode promover mudanças nesse processo de construção.

Godino, Batanero e Font (2008), Godino e Batanero (1994, p.8) compreendem *prática* de maneira ampliada, levando em consideração a ação, manifestação, expressão (textual, oral, verbal, gráfica, gestual, etc) “[...]”

realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução, validar ou generalizar para outros contextos ou problemas”. Dessa forma, as práticas matemáticas são compreendidas como ensino e aprendizagem de conteúdos específicos (GODINO; BATANERO, 1994), ou também, como ações peculiares de uma pessoa inserida em uma instituição⁶ (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Com base nas discussões de Godino (2012; 2017), pode-se afirmar que os sistemas de práticas com relação à Combinatória se exemplificam como resposta à pergunta: *Que significados e procedimentos podem ser utilizados na resolução de um problema combinatório no Ensino Médio?* Ou seja, na resolução de um problema, um aluno do Ensino Médio pode usar diferentes expressões tais como gestos, ou esquemas próprios para enumeração sistemática, apresentando um *significado pessoal*. Por outra perspectiva, esse mesmo problema pode estar em um livro didático, resolvida por meio de árvore de possibilidades, ou com a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem, promovendo um significado compartilhado por uma instituição, ou *significado institucional* para esse conteúdo. A dualidade pessoal-institucional de acordo com Godino, Batanero e Roa (2005) pode ser verificada nos problemas combinatórios por meio de linguagens, ações, conceitos, propriedades e argumentos que permeiam a análise de processos didáticos.

O sistema de práticas relacionadas à resolução de um problema combinatório no Ensino Médio pode ser representado por diferentes conversões entre os registros de linguagem natural e fórmulas ou na explicação da solução na qual se apresentam justificativas de propriedades de *ordenação*, *repetição* de problemas combinatórios ou, ainda, algum erro como uso de fórmulas equivocadas, ou o não esgotamento de possibilidades, identificando, dessa maneira, pistas de como os alunos estão relacionando as informações relativas ao *significado pessoal declarado dos estudantes com relação à Combinatória*. O sistema de práticas relacionados à linguagem na resolução de problemas combinatórios, devem ir além da resolução envolvendo o desenvolvimento de processos comunicativos, de elaboração de argumentos, de apresentação das

⁶ É constituída por pessoas envolvidas em uma mesma classe de situações problemas, que leva ao compartilhamento da mesma problemática e que, geralmente, são condicionadas pelos instrumentos, regras e modos de funcionamento (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

justificativas dos procedimentos escolhidos a fim de proporcionar um melhor acompanhamento do processo de construção do raciocínio combinatório de cada estudante.

De modo similar, o livro didático, nas escolhas realizadas no capítulo de Combinatória, apresenta um conjunto de diferentes tipos de situações, tipos de problemas combinatórios e, para cada um, estabelece exemplos de procedimentos, termos e contextos que podem ser compreendidos como *significado institucional pretendido de Combinatória no Ensino Médio*. Afinal, o livro se configura como uma proposta de ensino pensada por seus autores.

Godino e Batanero (1994) identificam que a noção de significados, permite o estudo dos sistemas de práticas que emergem dos objetos matemáticos. No Quadro 1 apresenta-se a tipologia dos significados institucionais e significados pessoais para auxiliar na distinção entre os mesmos.

Quadro 1 – Tipos de significados institucionais e pessoais

Significados institucionais		Significados pessoais	
Referencial	Sistema de práticas que se usa como referência para elaborar o significado pretendido. Numa instituição de ensino, esse significado de referência será uma parte do significado holístico do objeto matemático.	Global	Sistema de práticas pessoais relativas a um objeto matemático.
Preten-dido	Sistema de práticas incluídas no planejamento do processo de ensino e aprendizagem		
Imple-mentado	Sistema de práticas efetivamente implementadas pelo docente.	Declara-do	Práticas expressas para fins de avaliação propostos, incluindo tanto o correto e incorreto do ponto de vista institucional.
Avali-ado	Subsistema de práticas que o docente utiliza para avaliar as aprendizagens.	Alcan-çado	Práticas apresentadas que são consistentes com o padrão institucional estabelecido.

Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p.5)

Godino e Batanero (1994, p.23) afirmam que “a diferença entre as dimensões pessoais e institucionais [...] nos permite articular as facetas epistemológicas, sociológicas e psicológicas em processos da cognição humana, e portanto, em processos da educação matemática”.

Esses significados permeiam o processo de ensino e aprendizagem de um objeto matemático, sugerindo, de acordo com Godino, Batanero e Font (2008, p.6), que “[...] o ensino implica a participação do estudante na comunidade

de práticas que suporta os significados institucionais; a aprendizagem, em última instância, supõe a apropriação, pelo estudante, dos referidos significados” .

Em se tratando de sistemas de práticas relacionados à Combinatória no Ensino Médio, pode-se pensar nas aulas desse conteúdo, elencando os significados institucionais implementados pelo docente e, em contrapartida, os significados pessoais declarados na interação entre participantes inseridos nesse contexto. Por exemplo, o professor na aula de Combinatória, estabelece definições para os problemas combinatórios, pistas de procedimentos – por exemplo o uso do Princípio Fundamental da Contagem ou de fórmulas combinatórias – exhibe propriedades inerente aos problemas sobre quando é permitido repetir elementos, discute a definição de termos de Combinatória, como Algarismos distintos, ou anagramas, ou permutação de um número. Essas relações realizadas pelo professor representam o *significado institucional implementado da Combinatória*.

Em contrapartida, o estudante focaliza sua atenção na aula, questiona as informações lançadas pelo professor, interage com os pares na tentativa de compreender conceitos e procedimentos sobre Combinatória, faz uso do livro didático e/ou jogos, vídeos ou outros recursos para aprendizagem, tudo em um interagir direcionado pela ação docente, impregnando-se dos condicionantes necessários para a efetivação da aprendizagem. É da relação entre esses significados (pessoal e institucional) que emerge o objetivo da ação docente: a aprendizagem.

2.2 CONFIGURAÇÕES DE OBJETOS E PROCESSOS MATEMÁTICOS EM COMBINATÓRIA

Outra noção essencial no EOS são os *objetos matemáticos*. Godino, Batanero e Font (2007, p.11) definem tal noção como “não são apenas os conceitos, mas qualquer entidade ou coisa sobre a qual nos referimos ou falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo que intervenha de algum modo na atividade matemática”. Godino, Batanero e Font (2008) propuseram uma tipologia de objetos matemáticos primários composta por:

[...] situações-problema (aplicações extramatemáticas, exercícios, etc.); elementos linguísticos (termos, expressões, notações, gráficos, etc.) em seus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.); conceitos/definições (introduzidos mediante definições ou descrições: reta, ponto, número, média, função, etc.); propriedades/proposições (enunciados sobre conceitos, soluções para as situações-problema, etc.); procedimentos (algoritmos, operações, técnicas de cálculo, etc.); argumentos (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos; dedutivos ou de outro tipo) (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.7, tradução própria).

A partir dessa proposição, a Combinatória, enquanto objeto matemático, pode apresentar diferenças com relação ao nível de escolarização que está sendo trabalhado, como também variações a depender do currículo do país em que está sendo implementado.

Godino e Batanero (2016), na Espanha fizeram um estudo no qual adotaram os modelos de *amostra* (seleção), *colocação de objetos em urnas* e *partição de conjuntos* que possibilitam a resolução de vários problemas combinatórios. Nesse caso, se diferencia dos problemas propostos pelo currículo brasileiro, o qual escolhe, dentre outros para o Ensino Médio, o trabalho com *arranjos*, *combinações* e *permutações* (BRASIL, 2000, 2002). Pesquisas brasileiras também propõem classificações interessantes de problemas combinatórios como, por exemplo, a inserção do problema denominado *produto cartesiano* (nomenclatura proposta por Nunes e Bryant (1996)) ou *produto de medidas* (nomenclatura proposta por Vergnaud (1991)) discutida por Pessoa e Borba(2009), ou ainda, a análise de condições existentes em problemas combinatórios observada pelas pesquisas de Borba e Braz (2012), Borba, Araújo e Braz (2013) que inserem uma classificação para problemas combinatórios condicionais.

Com relação aos procedimentos de resolução de problemas combinatórios utilizados na Espanha, Godino e Batanero (2016, p.9) afirmam que “[...] se apresentam também com referência as sucessões recorrentes, métodos lógicos, grafos e árvores, etc”. Pessoa (2009), em pesquisa realizada com estudantes pernambucanos, afirma que no Ensino Médio os alunos utilizaram, entre outros procedimentos, a listagem, a árvore de possibilidades, Princípio Fundamental da Contagem, uso adequado ou inadequado de fórmulas e percepção ou busca de regularidade.

Apesar da importância dos aspectos apresentados, Godino, Batanero e Font (2008, p.7) afirmam que os objetos matemáticos primários “ampliam a distinção tradicional entre entidades conceituais e procedimentais ao considerá-las insuficientes para descrever os objetos pertencentes e emergentes da atividade matemática”. Nesse caso, acrescentam aspectos da linguagem, argumentos e propriedades/regras.

Para exemplificar, Godino, Batanero e Roa (2005) explicitaram alguns modelos de linguagem na Combinatória, como os termos utilizados para explicar os modelos combinatórios (seleção, colocação, partição, combinação, combinação com *repetição*) e notações simbólicas utilizadas tais como: fatorial $n!$, a fórmula da Combinação $C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, tanto para representar valores numéricos, ou indicar operações combinatórias, ou mesmo operar com as notações. Segundo esses autores “os símbolos desempenham um papel representativo e instrumental”. (GODINO; BATANERO; ROA, 2005, p.10).

Outros estudos, como o de Borba, Azevedo e Bittar (2016), na análise de livros didáticos dos anos iniciais, verificaram conversões entre registros de representação em problemas combinatórios, seja de linguagem natural e desenho para listagem, linguagem natural e desenho para expressões numéricas, e linguagem natural e desenho para desenho. Outras conversões podem ser utilizadas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, tais como de linguagem natural para o PFC e também para fórmulas.

Nas *propriedades/proposições de Combinatória*, Godino, Batanero e Roa (2005, p.12-13) ilustram que as mesmas se apresentam “na seleção de amostras que podem ser com ou sem reposição, as amostras podem ser ordenadas ou não; *combinações* são obtidas como o quociente entre *arranjos* e *permutações*”. Borba, Rocha e Azevedo (2015) acrescentam algumas propriedades aos problemas combinatórios no Ensino Médio:

Nesse nível de ensino, geralmente os problemas abordados são: **arranjos** (a partir de um conjunto maior são escolhidos elementos cuja ordenação gera possibilidades distintas), **combinações** (que se assemelham aos **arranjos** em termos de escolha de elementos, com a diferença de que a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas) e **permutações** (todos os elementos do conjunto são utilizados, apenas a ordem de apresentação dos mesmos varia). (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015, p.1315).

Entretanto, considera-se que a presença de problemas de *produto de medidas* no Ensino Médio, pode ser trabalhada pelo professor nessa etapa de ensino. Rocha e Borba (2017), em análise de capítulos de Combinatória, observaram a presença desse tipo de problemas nos dois livros de Ensino Médio aprovados no PNLD 2015 que foram analisados. Os problemas do tipo *produto de medidas* possuem estrutura diferente dos demais problemas combinatórios, pois envolvem mais de um conjunto e pedem a escolha de elementos pertencentes a cada conjunto envolvido. Pode-se, ainda, justificar a inclusão da propriedade de *repetição* em problemas combinatórios, posto que em algumas situações a presença da *repetição* é implícita ao problema, e pode causar diferentes interpretações. Sobre essa propriedade, Batanero, Godino e Roa (2005) afirmam que essa condição não é simples de ser reconhecida em enunciados de problemas combinatórios. Portanto, acredita-se que ela possa ser melhor discutida tanto nos livros didáticos, como nas aulas de Combinatória.

Outras *propriedades/proposições de Combinatória* são discutidas e apresentadas nas pesquisas de Braz e Borba (2012) quando acrescentam o estudo sobre problemas combinatórios condicionais, no qual apresentam 22 categorias diferentes para problemas de *arranjo condicional*, a partir da variação de condições relativas como *escolha*, *posição*, *proximidade* e *ordem*. No Ensino Médio, a pesquisa de Borba, Araújo e Braz (2013, p.14) apresenta dificuldades dos alunos surgem em problemas combinatórios condicionais quando especificam a condição de “ter ao menos ou no máximo alguns elementos”. Segundo essas autoras a complexidade de problemas combinatórios condicionais podem ser ampliadas a partir do efeito isolado ou combinado das relações apresentadas.

Com relação aos *argumentos combinatórios*, Godino, Batanero e Roa (2005) afirmam que “não se limitam a provas dedutivas” e exemplificam que alunos para legitimar o resultado obtido por meio do uso de fórmulas podem utilizar como suporte a listagem de algumas ou de todas as possibilidades. Pessoa (2009) verificou em sua tese a estratégia de percepção ou busca pela regularidade. A autora afirma que “nesse tipo de resolução, o aluno inicia, a partir de outra estratégia [...] e percebe que não é necessário ir até o final [...] a tendência se repete na continuação da resolução e, geralmente, realiza uma multiplicação a partir da regularidade percebida” (PESSOA, 2009, p.204). Pode-

se entender esse procedimento como um início do argumento de generalização combinatória.

Procurando compreender um pouco mais sobre a argumentação, identificou-se tal conceito em outros aportes teóricos, especificamente, Leitão e Almeida (2000), Leitão (2001, 2007) e Llanos e Otero (2012). Dessa forma, a presente pesquisa, compreende a argumentação como “[...] atividade discursiva específica, no curso da qual divergências entre pontos de vista são abertamente negociadas” (LEITÃO, 2007, p.81-82). Para a autora, tal atividade está intrinsecamente ligada/relacionada, à construção do conhecimento, o que justifica pesquisas que tenham como foco “A investigação das formas como a argumentação evolui em ambientes instrucionais” (LEITÃO, 2007, p.82).

A autora afirma que três pontos constituem o processo de argumentação: o argumento, o contra-argumento e a resposta. Os argumentos por sua vez assumem três funções: a discursiva (identificando pontos de vista e justificativas que os fundamentam); a psicológica (situando a referência para as fases de argumentação subsequentes); e a epistêmica (constituindo um instante que diz do conhecimento do indivíduo sobre a temática discutida). (LEITÃO, 2007).

Llanos e Otero (2012), baseadas nos estudos de Leitão (2007), realizaram pesquisas em 137 livros de Matemática de diferentes épocas (1940-2007) na Argentina, sobre as características dos argumentos apresentados nos textos dos livros, e sua relação com as imagens inseridas nesses textos. Nesse caso, a análise se voltou para situações em que:

[...] um indivíduo se engaja na argumentação apenas consigo mesmo a respeito de um tema [...]. Em tais situações, o diálogo se realiza pela presença de um interlocutor imaginário a quem a argumentação se dirige [...] e cuja voz [...] traz para o contexto da argumentação um elemento de oposição (pontos de vista alternativos, contra-argumentos, etc.) indispensável à sua realização. É portanto, o confronto entre pontos de vista, e não entre indivíduos, o elemento que confere à argumentação sua dimensão dialógica/dialética. (LEITÃO; ALMEIDA, 2000, p. 351-352).

Esse processo, denominado de auto argumentação (LEITÃO, 2001), pode ser aplicado em situações que focalizem essencialmente “os processos de construção e transformação de conhecimentos que são implementados quando um sujeito se envolve em um processo de negociação de “diferenças entre pontos de vista” consigo mesmo e com os livros” (LLANOS; OTERO, 2012,

p.123). Portanto, a compreensão da argumentação no livro didático assume um sentido mais amplo, que, segundo Goulart (2007, p.93), faz referência ao que se apresenta nos enunciados, pois “enunciar é argumentar, atuar sobre os outros, o que significa que vá mais além que compreender e responder enunciados”.

Godino, Batanero e Roa (2005) afirmam que os argumentos utilizados em Combinatória pelos estudantes fazem uso de diferentes relações, utilizando fórmulas ou listagens. No livro didático tais argumentos podem aparecer de maneira diversa, fazendo uso de argumentos que vão além da classificação proposta por Llanos e Otero (2012). Na aula, tais argumentos podem surgir na relação com outros conceitos matemáticos, trazendo também aspectos dos contextos dos enunciados ou diferentes relações do que é apresentado pelos autores.

Os aspectos que foram analisados, com relação aos argumentos apresentados em livros propostos por Llanos e Otero (2012), são organizados no Quadro 2.

Quadro 2 – Critérios de análise de argumentos em livros apresentados por Llanos e Otero (2012)

Dimensões	Componentes	Indicadores
Características da Argumentação	Início da argumentação	Pergunta; Definição; Exemplos.
	Tipo de argumentação	Dedutiva-Formal; Dedutiva-informal; Indutiva.
	Grau de argumentação	Alto; Médio; Nulo
Relação entre as imagens externas e a argumentação	Uso da Imagem	Ornamental; Argumentativa;
	Tipo de imagem	Representações Matemáticas; Representações extra matemáticas
	Estilo Gramatical da imagem	Conceitual; Narrativa
	Relação com o mundo	Naturalista; Abstrata
Características dos livros	Período de edição do Livro	1940-1973; 1974-1994; 1995-2007 ⁷
	Nível de Escolaridade	12 a 14 anos; 15 a 17 anos; Acima de 18 anos;
	Tradição	Computacional; Axiomática; Estruturalista.

Fonte: Organizado a partir de Llanos e Otero (2012).

Em outra investigação, Perelman e Olbrechts-Tyteca (1969) classificaram vários tipos ou classes de argumentação utilizadas em diferentes discursos.

⁷ Os períodos acompanham algumas reformas curriculares ocorridas na Argentina. O primeiro diz respeito ao período anterior à difusão dos livros, o segundo após a difusão e o terceiro após a reforma do currículo argentino.

Essas foram divididas em: 1. argumentos quase lógicos; 2. argumentos com base na estrutura do real; 3. argumentos que se fundam na estrutura do real.

Tais autores afirmam que entre os *argumentos quase lógicos* estão aqueles que utilizam contradição, identidade, transitividade, inclusive aqueles que se utilizam de relações matemáticas (relação entre a parte e o todo, frequência, entre outros). Os *argumentos com base na estrutura do real* tratam das relações de sucessão do tipo causa e efeito, ou uma relação de coexistência (geralmente entre símbolo e o que é simbolizado). De acordo com Boavida (2005, p.47) os *argumentos que se fundam na estrutura do real* “permitem estabelecer um precedente, um modelo ou uma regra geral a partir de um caso conhecido”. Para Perelman e Olbrechts-Tyteca (1999) esses argumentos podem ser observados em discursos pelo exemplo, modelo, analogia ou metáfora.

Conhecer os argumentos apresentados nos livros didáticos e nas aulas de Combinatória pode dar pistas sobre a compreensão dos estudantes e do professor sobre como se relacionam os procedimentos combinatórios, as técnicas combinatórias, as definições apresentadas, as regras e as linguagens utilizadas.

A partir do estudo dos objetos combinatórios primitivos, pode-se construir uma configuração ontossemiótica. Godino (2017, p.8, tradução própria) acrescenta a *noção de configuração ontossemiótica* (de práticas, objetos e processos) para auxiliar na previsão de “conflitos potenciais e efetivos de aprendizagem, avaliar competências matemáticas de estudantes e identificar objetos [...] que devem ser recordados e institucionalizados nos momentos oportunos dos processos de estudo”.

Tal noção denominada de *conflito semiótico* é compreendida por Godino, Batanero e Font (2008, p.23) como “qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições)”. Godino, Batanero e Roa (2005, p.25) identificaram conflitos semióticos com relação a “não identificação da possibilidade de *repetição* no enunciado do problema” e a “identificação incorreta dos parâmetros (conceito)”.

Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos e Giacomone (2017, p. 3) afirmam que esses objetos matemáticos primários podem ser entendidos de diferentes polaridades. Godino (2002) afirma que essas polaridades ou dualidades auxiliam na construção de objetos matemáticos secundários, a saber: pessoal e

institucional; elementar e sistêmica; ostensivo e não ostensivo; exemplar e tipo; expressão e conteúdo. Como são variados termos, necessita-se de maior detalhamento, sendo um resumo apresentado no Quadro 3.

O Quadro 3 permite uma comparação entre as dualidades existentes na configuração ontossemiótica no âmbito do EOS. Godino et al. (2017, p.3) afirmam que em consequência dessas dualidades são construídos “processos de problematização, definição, enunciação, argumentação, particularização-generalização, representação-significação, etc.”

Quadro 3 – Dimensões duais para objetos matemáticos

Pessoal – manifestações individuais, tal como resoluções apresentadas por estudantes a um problema.	Institucional – objetos que são utilizados como referência no ensino e na aprendizagem, geralmente apresentados pelo professor, pelo livro didático, e por documentos curriculares.
Elementar – conteúdos e conceitos são trabalhados em pequenas unidades, como alguma propriedade específica.	Sistêmica – os conteúdos e conceitos podem ser compreendidos como entidades compostas, com certa organização e estrutura (conceitos – sistema).
Ostensiva ⁸ – são objetos de fácil percepção, como o modo de representar uma definição ou conceito matemáticos, que se apresenta com certa materialidade. São objetos públicos que podem ser apresentados a outros. Símbolos, gráficos, palavras escritas, notações.	Não Ostensiva – ao contrário estão geralmente implícitos, em conceitos, noções, intuições dos indivíduos, não perceptíveis por si mesmos. Para Godino (2002, p.9) “A linguagem vem a ser o meio pelo qual não só se expressam os não ostensivos, como também é o instrumento para sua constituição e desenvolvimento”.
Exemplar – são exemplos pontuais, particulares, modelos, cópias da atividade matemática (concreto).	Tipo – são as situações gerais, um sistema de situações, constituído por vários exemplos (abstrato). Para Godino (2002) essa dualidade permite se aproximar da generalização e justificar conflitos ocasionados por ela.
Expressão – uma representação de um objeto matemático, também chamada de antecedente (significante).	Conteúdo – consequente, conteúdo, significado. Para Godino (2002), essa dualidade diz respeito ao estabelecimento de relações entre elas, e as naturezas dessas relações podem ser do tipo representacional, instrumental ou operatória.

Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p.8-9).

Por exemplo, no caso da Combinatória, podem ser consideradas manifestações próprias de alunos na resolução de problemas combinatórios

⁸Não há uma clara separação nessa dualidade, posto que às vezes uma pessoa pode resolver um cálculo explícito (ostensivo) ou implícito (não ostensivo), ou vice versa.

(pessoal), ou aquela conhecida e interpretada por todos, como no caso dos exercícios resolvidos no capítulo de Combinatória do livro didático (institucional).

Com relação à dualidade *elementar-sistêmica*, pode-se verificar o tratamento dado pelo professor à propriedade de ordenação presente em um problema combinatório na aula (elementar) ou a organização da Combinatória apresentada pelo livro didático (sistêmica).

Na dualidade *ostensiva-não ostensiva* estão as diferenças entre o que está claramente apresentado (ostensivo) e o que não está evidente. Como exemplo, por um lado, tem-se o uso da árvore de possibilidades, a qual evidencia as possibilidades de um problema combinatório (ostensivo), e por outro lado, tem-se propriedades, como a *ordenação* (ou não) e a *repetição* (ou não) de elementos, as quais são tratadas implicitamente nessa representação. Apenas quando há a explicação da representação utilizada, as ideias sobre as propriedades implícitas são evidenciadas.

Quando há a construção de um início do argumento indutivo, pode-se utilizar a dualidade exemplar-tipo. Em Combinatória, um exemplar pode ser um problema combinatório do tipo *combinação* ou do tipo *arranjo*. Um exemplo, como o problema no contexto de aperto de mão, pode ser pensado com um número reduzido de pessoas, e ir ampliando, paulatinamente, para chegar à generalização de uma fórmula de combinação de n dois a dois, configurando o tipo de problema de *combinação*.

Essa dualidade pode acontecer nos diferentes elementos dos objetos da Combinatória. Um processo argumentativo pode se centrar em características pontuais, como contexto do problema combinatório, ao invés de utilizar elementos que são mais gerais, como as propriedades de ordenação presentes, ou não, no problema.

Também chamada de *significante-significado*, a dualidade *expressão-conteúdo* reflete sobre o caráter relacional da atividade matemática (GODINO, 2002). Nesse caso, na discussão da Combinatória pode-se entender que o termo *permutação* é a expressão da função semiótica na qual o conteúdo são os problemas de permutação. De modo análogo, a notação $P_n = n!$ pode ser compreendida como expressão ou conteúdo, expressão quando se pensa na representação do problema combinatório, e conteúdo como o conceito a que se quer chegar com essa representação.

2.3 CONFIGURAÇÕES DIDÁTICAS E TRAJETÓRIAS DIDÁTICAS NA COMBINATÓRIA

Godino, Batanero e Font (2008) na discussão sobre *configurações didáticas*, assumem como unidade primária as interações professor-alunos relativas a um conteúdo matemático ou recursos didáticos específicos.

Assis, Frade e Godino (2013) afirmam que esse tipo de configuração é um intervalo do processo de ensino e aprendizagem, consistindo de períodos de início e fim da resolução de um problema. Os autores ainda discutem que uma configuração didática pode ser classificada, a depender da relação entre as interações professor-alunos, em: 1) *Magistral*, o professor expõe o conteúdo e os alunos recebem; 2) *A-didática*, o aluno assume o processo de resolução; 3) *Dialógica*, o professor faz a formulação e os alunos são responsáveis pela exploração da resolução dos problemas; 4) *Pessoal*, geralmente utilizado fora da sala de aula pelo estudante. Tais classificações permitem observar o nível de responsabilidade assumida pelos estudantes na realização da atividade matemática.

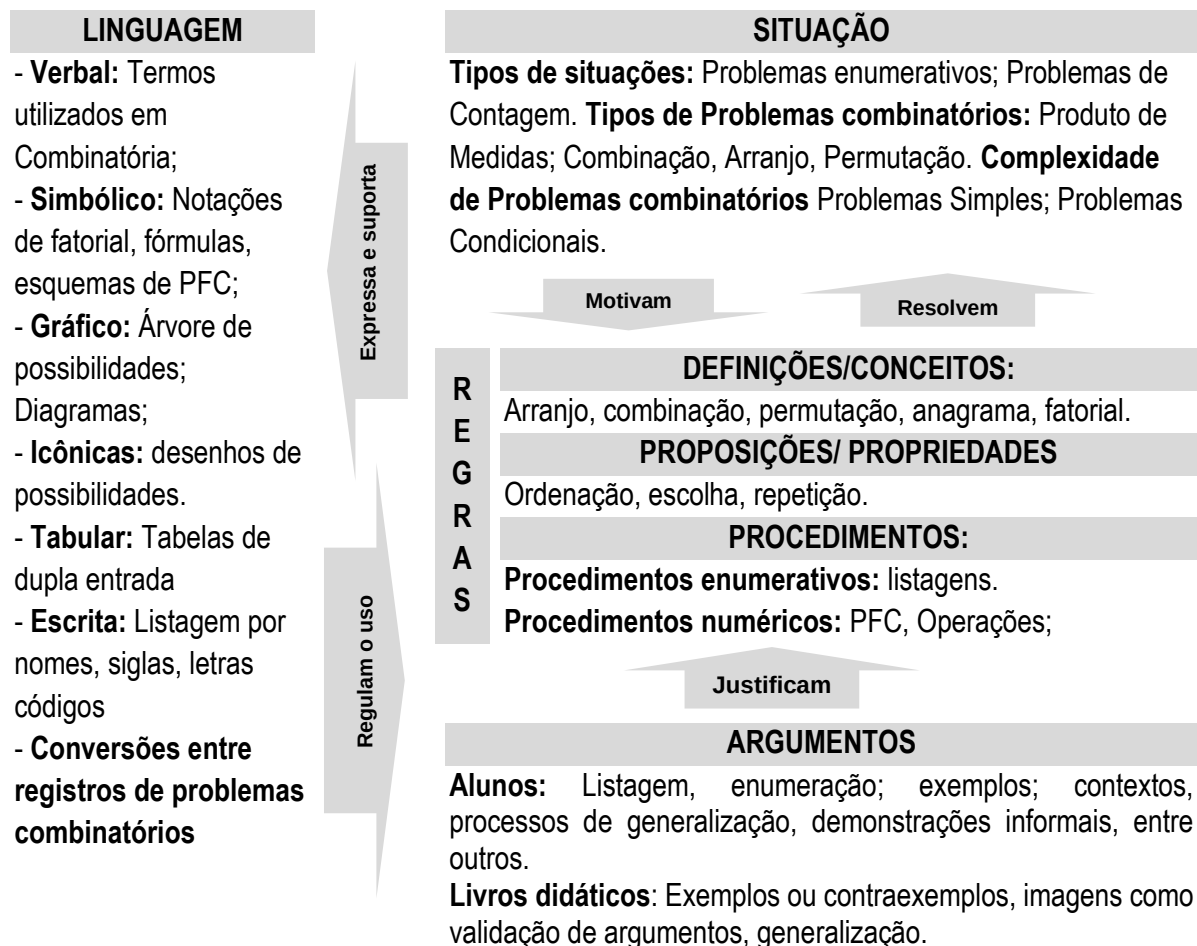
Godino (2017) afirma que uma configuração didática é constituída por:

- a) uma configuração epistêmica (sistema de práticas, objetos e processos matemáticos institucionais necessários na tarefa), b) uma configuração instrucional (sistema de funções de ensino, alunos e meios instrucionais que são usados, bem como as interações entre os diferentes componentes) e c) uma configuração cognitiva - afetiva (sistema de práticas, objetos e processos matemáticos pessoais que descrevem o aprendizado e os componentes afetivos que o acompanham). (GODINO, 2017, p.10).

A *configuração epistêmica* é constituída pelos sistemas de práticas e objetos e processos matemáticos que foram apresentados nas duas subseções anteriores. De acordo com Font e Godino (2006), a configuração epistêmica também é uma ferramenta útil para análise de livros didáticos e para análise de currículo de países pois auxiliam na verificação do que orientam para o trabalho com diferentes objetos matemáticos.

Font e Godino (2006) apresentam um esquema para essa configuração que relaciona os objetos envolvidos (*linguagem, situação, definição/conceitos, proposições/propriedades, procedimentos e argumentos*), a partir do qual foi elaborado o esquema para Combinatória no Quadro 4.

Quadro 4 – Esquema de configuração epistêmica da Combinatória



Fonte: Adaptado de Font e Godino (2006)

Para Godino (2003, p.179), na implementação de um processo instrucional se produz “[...] uma trajetória amostral do processo, que descreve uma sequência particular de funções ou componentes que tem lugar ao largo do tempo”. Nessa perspectiva, para se aproximar das *configurações instrucionais e cognitivas-afetivas*, Godino (2002; 2003), Godino, Contreiras e Font (2006), elaboram e descrevem a proposta da Teoria das Funções Semióticas (TFS) que possibilita analisar o processo de ensino e aprendizagem a partir de uma amostra de tal processo. A referida amostra está estruturada em seis procedimentos que podem ser observados na sala de aula, denominados: trajetória epistêmica, trajetória docente, trajetória discente, trajetória mediacional, trajetória cognitiva e trajetória afetiva, detalhadas no Quadro 5, que segue.

Quadro 5 – Tipos de Trajetórias didáticas

Trajetória	Definição
Epistêmica	Distribuição temporal dos significados institucionais implementados ao longo de um processo de ensino e aprendizagem, subdivididas em: situacional, procedimental, linguístico, conceitual, proposicional e argumentativo.
Docente	Sequência de atividades realizadas pelo professor no estudo, categorizadas como planificação; motivação; atribuição de tarefas; regulação; avaliação e investigação.
Discente	Ações desempenhadas pelos alunos no processo e que são categorizadas como: aceitação do compromisso; exploração; recordação; formulação de soluções; argumentação; recepção de informação; demanda de informação; exercitação; avaliação.
Cognitiva	Qualificação dos conhecimentos dos alunos por meio da noção de significado pessoal.
Afetiva	Atuação no estado emocional apresentado pelo aluno durante o processo de ensino e aprendizagem.
Mediacional	Análise dos usos potenciais e implementados dos recursos e suas consequências cognitivas.

Fonte: Godino, Contreiras e Font (2006)

Para auxiliar na compreensão das trajetórias didáticas implementadas nas aulas de Combinatória no Ensino Médio pode-se pensar na situação fictícia descrita no Quadro 6.

Quadro 6 – Possíveis trajetórias didáticas de Combinatória

Trajetória didática de Combinatória
UA1: O professor divide a sala em grupos (Trajetória docente – Atribuição de tarefas); UA2: Distribui uma ficha com exercícios de <i>combinação</i>, ampliando de maneira gradativa a quantidade de possibilidades (Trajetória mediacional – Recurso didático: ficha); UA3: Professor escolhe um problema de <i>combinação</i>; (Trajetória epistêmica – Situacional, problema de <i>combinação</i>); UA4: Alunos organizados em grupos iniciam a exploração da situação (Trajetória discente – aceitação de tarefas, exploração); UA5: Um aluno propõe um procedimento equivocado (Trajetória cognitiva – erro em procedimento no uso de fórmulas combinatórias indício de conflito semiótico porque considera a ordenação equivocadamente) ; UA6: Professor pede que o aluno justifique o procedimento e propõe que outros alunos evidenciem a resolução (Trajetória epistêmica – procedimental); UA7: Alguns alunos apresentam aversão à Matemática (Trajetória afetiva – atitude negativa); UA8: Professor apresenta discurso que induz atitudes positivas com relação à Combinatória (Trajetória docente – motivacional); UA9: Aluno justifica o procedimento do PFC, considerando a ordem equivocadamente na situação (Trajetória cognitiva – equívoco no procedimento do PFC); UA10: Outro aluno indica que a ordenação não gera novas possibilidades, utilizando o contexto da situação como justificativa (Trajetória cognitiva – apresenta justificativa correta).

Fonte: Acervo da Pesquisa

Verifica-se na trajetória didática fictícia uma ferramenta para se aproximar das diferentes possibilidades para a descrição das aulas de Combinatória. De acordo com Godino, Contreras e Font (2006, p.6), a TFS permite observar o

processo de ensino e aprendizagem e descrever⁹⁹ tais categorias ao longo do tempo, considerando inclusive “os elementos eventuais que produzem mudanças em cada uma das trajetórias anteriormente vivenciadas, pela necessidade de adaptar o ensino planejado para as características e necessidades dos alunos”.

Assis, Frade e Godino (2013) verificaram, nas configurações instrucionais, os padrões de interação produzidos por professores e alunos ao longo de uma configuração didática. Tais padrões, centrados no professor, foram sistematizados e estão classificados de acordo com o Quadro 7.

Quadro 7 – Padrões de interação entre professor e alunos

Padrão de interação	Ações do professor
Extrativo	Professor propõe uma tarefa ambígua e os alunos são estimulados a explorá-la e analisá-la espontaneamente. Em seguida, o professor conduz uma discussão, extraindo fragmentos de conhecimentos que estão associados a pequenos passos no raciocínio dos alunos.
Discussão	Professor pede a um aluno que o informe sobre o trabalho desenvolvido pelo grupo. Em seguida, contribui com as explicações dos alunos, fazendo perguntas adicionais, observações e reformulações – de maneira que uma explicação ou solução conjunta emerga e seja tomada como válida. Por fim, o professor pergunta se há outros modos de solução e inicia, novamente, o ciclo de discussão.
Funil	Professor, diante da dificuldade dos alunos de resolver um problema, propõe questões mais fáceis relacionadas ao problema e cuja solução possa conduzir à sua resolução.
Focalização	Professor propõe uma série de perguntas com o objetivo de estreitar o foco da atenção dos alunos a um aspecto específico do problema, tentando fazer com que eles ultrapassem as dificuldades. Feito isso, o professor deixa os alunos continuarem o trabalho de forma autônoma.
Matematização direta	Professor propõe tarefas suficientemente abertas para permitir diferentes interpretações e, conseqüentemente, diferentes abordagens matemáticas. Em seguida, reduz o número de possibilidades de interpretação, conduzindo os alunos para um determinado modo de interpretar a tarefa, direcionando-os a seguir suas próprias abordagens.
Afirmativo	Professor confirma se a afirmação/solução do aluno está (ou não) correta.
Interrogativo	Professor pede ao aluno para verificação da sua afirmação/solução.
Recitação	Professor explica, os alunos respondem, em seguida, as respostas são avaliadas pelo professor. Aplicada em situações ditas tradicionais.

Fonte: Assis, Frade e Godino (2013, p.739)

⁹⁹ A partir de um processo estocástico, tais variáveis são apresentadas ao longo do tempo.

Para sistematização e classificação apresentadas no quadro acima foram utilizadas variadas pesquisas, como, por exemplo, Voigt (1985; 1996), Bauersfeld (1988), Wood(1994), Sienspiska (1996), Menezes (2005).

Godino (2003, p.212) afirma que no desenvolvimento de uma configuração didática surge uma variedade de padrões de interação que apoiam o processo instrucional sobre os quais afirma que são “[...] regularidades que se constituem com frequência de maneira inconsciente, reduzem a incerteza e resolvem conflitos semióticos”.

Assis, Frade e Godino (2013, p.735) defendem a “[...] necessidade da cooperação produtiva (sinergia) entre os diferentes padrões de interação, para estabilizar a negociação de significados e possibilitar o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos”. No caso da Combinatória podem ser observados padrões de interação professor-aluno *interrogativo*, para que o aluno apresente as ideias que justificam a elaboração do procedimento. Outros padrões podem ser observados, tais como o *funil* ou a *focalização*, posto que a atividade de Combinatória geralmente é produzida por meio da resolução de problemas e o professor pode auxiliar os alunos dando pistas.

2.4 DIMENSÃO NORMATIVA E COMBINATÓRIA

A *dimensão normativa* é entendida por Godino (2017, p. 12) como um conjunto de “[...] normas, hábitos e convenções geralmente implícitos, que regulam o funcionamento da aula de matemática, concebida como uma 'micro-sociedade', que condiciona, em maior ou menor grau, o conhecimento que os alunos constroem”.

Segundo Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2009), tais normas podem ser implícitas ou explícitas, instituídas por fatores externos à escola (sociedade, a administração educacional, entre outros), pela escola, ou mesmo, pelo professor, além de perpassar as diferentes dimensões do processo de ensino e aprendizagem. Tais autores afirmam que as noções de contrato didático¹⁰ e de

¹⁰ Brousseau (2002) define contrato didático como um conjunto de relações que se estabelece entre professor, alunos e saber.

normas sociais¹¹ e sociomatemáticas¹² são reconstruídas no EOS e integradas na *dimensão normativa*, a fim de contemplar as dimensões que descrevem os processos de estudo.

Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2009) definem e categorizam as normas segundo as dimensões do EOS, classificando-as em: normas epistêmicas ou metaepistêmicas, normas cognitivas, normas interacionais, normas mediacionais, normas afetivas e normas ecológicas relativas ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Em outro artigo, D'Amore, Font e Godino (2007) especificam metanormas (normas de segunda ordem) relativas à consciência que o aluno possui do próprio conhecimento que se subdividem em três blocos: *Metaepistêmicas* (relativa à clareza e precisão de definições, proposições, teoremas), *Metainstrucionais* (relativo à vivência do plano de aula/curso, desenvolvimento da aula) e *Metacognitivas* (que por sua vez, se subdivide em metacognição matemática – a compreensão do aluno sobre sua aprendizagem, e metacognição didática – a compreensão do aluno sobre o processo de ensino e aprendizagem).

Assis, Godino e Frade (2012) defendem a necessidade da tomada de consciência do professor sobre a complexidade das normas e metanormas existentes nas práticas, identificando-as e gerenciando-as, buscando a melhoria da aprendizagem. Godino, Bencomo, Font e Wilhelmi (2006) também advertem sobre a necessidade de cuidados ao propor tais normas e regras.

[...] o objetivo de melhorar os processos de ensino e aprendizagem de matemáticas está na base de qualquer esforço de investigação e inovação; mas a complexidade de tais processos nos leva a ser extremamente precavidos na proposição de normas e regras para a intervenção nos sistemas didáticos (GODINO; BENCOMO; FONT; WILHELMI, 2006, p.2).

¹¹ “São convenções que descrevem como comunicar-se uns com outros, assim como as obrigações que descrevem como reagir socialmente ante a um erro ou uma indicação” (D'AMORE; FONT; GODINO, 2007, p.52).

¹² “São aspectos normativos do discurso ou retórica matemática que são específicas da atividade matemática dos estudantes e que regulam as argumentações matemáticas e influem nas oportunidades de aprendizagem” (D'AMORE; FONT; GODINO, 2007, p.52).

Na aula de Combinatória, para exemplificar as categorias de normas explicitadas por Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2009), pode-se pensar nas atitudes que seguem, as quais configuram algumas dessas normas.

Uma *norma epistêmica da Combinatória no Ensino Médio* pode ser vislumbrada na priorização de problemas do tipo *arranjo*, *combinação* e *permutação*, em detrimento a problemas de *produto de medidas*, ou, ainda, priorizar procedimentos de fórmula, ao invés de variar os tipos de procedimentos. Nesse caso, a tomada de consciência dessa escolha é necessária, para que o ensino de Combinatória não se restrinja apenas à identificação da fórmula adequada a cada problema.

Um exemplo de *norma cognitiva da Combinatória no Ensino Médio*, versaria sobre como o aluno aprende esse conteúdo. Pode-se pensar nos conhecimentos de variados procedimentos de resolução de problemas combinatórios e na conversão entre os mesmos, ou, ainda, na presença de propriedades dos ditos problemas em argumentos apresentados pelos estudantes na autoavaliação do procedimento aplicado por eles.

2.5 IDONEIDADE DIDÁTICA E COMBINATÓRIA

Godino (2017) afirma que a idoneidade didática do processo de ensino e aprendizagem pode ser definida como:

[...]o grau em que tal processo (ou parte dele) reúne certas características que permitem ser qualificado como ótimo ou adequado para alcançar a adaptação entre os significados pessoais alcançados pelos alunos (aprendizagem) e os significados institucionais pretendidos ou implementados (ensino), levando em conta as circunstâncias e os recursos disponíveis (entorno) (GODINO, 2017, p.13).

Para isso, Godino (2017); Godino, Rivas e Arteaga (2012) elaboram e definem seis diferentes dimensões da idoneidade didática (ID), denominadas idoneidade epistêmica, idoneidade ecológica, idoneidade cognitiva, idoneidade afetiva, idoneidade interacional, idoneidade mediacional. Para cada uma das dimensões da ID, Godino (2011) categorizou critérios – denominados de componentes - para verificação do grau das idoneidades.

A *idoneidade epistêmica* se referencia “ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos), a respeito de um significado de referência” (GODINO; RIVAS; ARTEAGA, 2012, p.334). Os

componentes selecionados para essa dimensão por Godino (2011) são situação-problema, linguagens, regras (definições, proposições, procedimentos), argumentos e relações.

Com relação à Combinatória explicita-se, ao longo do texto, elementos que podem fazer parte do significado de referência – tais como tipos de situações, procedimentos, conversões entre registros, problemas combinatórios, entre outros – e, portanto, auxiliar na avaliação do grau de representatividade dos significados institucionais implementados. No entanto, verifica-se os diferentes tipos de situações problemas envolvendo Combinatória, como por exemplo, enumerar as possibilidades de um problema combinatório, ou ainda, identificar o tipo de problema combinatório a partir do enunciado, quantificando o número de possibilidades, entre outras. (ROCHA; BORBA, 2017).

A *idoneidade ecológica* identifica o “grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educativo do centro, da escola e da sociedade e aos condicionamentos do entorno em que se desenvolve” (GODINO; RIVAS; ARTEAGA, 2012, p.334). Como componentes elencados por Godino (2011) para essa dimensão verifica-se a adaptação ao currículo, inovação didática, integração de novas tecnologias, adaptação socioprofissional e cultural, educação para valores, conexões inter e intradisciplinares.

Breda, Font e Lima (2015, p.11) indicaram que, para a ampliação do grau dessa dimensão, se faz necessário verificar a correspondência entre o que está sendo ensinado e as diretrizes curriculares, além de assegurar “que tais conteúdos contribuem para a formação social e profissional dos estudantes; buscando relacionar os conteúdos ensinados com outros conteúdos matemáticos e de outras disciplinas; tendo em conta as fontes de diversidades dos alunos; etc”.

Nesse contexto, Lima e Rocha (2016), ao analisarem documentos curriculares oficiais (BRASIL, 2016; 2006; 2002; 2000; 1998; PERNAMBUCO, 2013), observaram que há indicativos para que a Combinatória seja trabalhada focalizando procedimentos variados de resolução desses problemas; enfatizando as diferentes naturezas dos problemas combinatórios; ou mesmo relações entre diferentes blocos de conhecimento, como Números e Operações e Estatística e Probabilidade. Consequentemente, com o grau da idoneidade ecológica, entre outros elementos, verifica-se, dentre significados institucionais

implementados da Combinatória, o que do currículo do Ensino Médio foi alcançado.

A *idoneidade cognitiva* apresenta “o grau em que os significados pretendidos/implementados estejam na zona de desenvolvimento potencial dos alunos” (GODINO; RIVAS; ARTEAGA, 2012, p.334). Os componentes apresentados por Godino (2011) foram conhecimentos prévios, adaptações curriculares a diferenças individuais e aprendizagem.

Com relação à Combinatória, o currículo brasileiro, já indica o trabalho com problemas combinatórios desde os anos iniciais (BRASIL, 1997), livros didáticos também apresentam, desde os anos iniciais problemas combinatórios (BORBA; AZEVEDO; BITTAR, 2016; ROCHA; DIAZ; BORBA, 2017) e, assim, pode-se verificar alguns conhecimentos prévios sobre problemas combinatórios em alunos de Ensino Médio. A apresentação de significados pessoais na resolução de problemas combinatórios e nos argumentos apresentados ou construídos na busca da solução, pode ser indício de aprendizagem em Combinatória.

A *idoneidade afetiva* reflete sobre o “grau de implicação (interesse, motivação,...) do alunado no processo de estudo”. (GODINO; RIVAS; ARTEAGA, 2012, p.334). Tal dimensão está imbricada com relação a instituição ou a vida escolar do estudante. Nesse sentido, os componentes elencados são: interesses, atitudes e emoções (GODINO, 2011).

Beltrán-Pellicer e Godino (2017), em investigação realizada, utilizaram como aporte teórico os indicadores da idoneidade afetiva (interesses, necessidades; emoções; atitudes; crenças). Trata-se de uma pesquisa qualitativa que utilizou a observação participante das aulas e o registro do professor-investigador. Além disso, foi utilizado o mapa do humor, apresentado aos alunos durante a resolução dos problemas no qual indicavam suas emoções (positivas ou negativas) para as atividades. Tal ferramenta, fundamentada em Gómez-Chacón (2000), indica alguns estados emocionais que um aluno pode apresentar ao longo da resolução de um problema. Como resultados, os autores consideraram a idoneidade afetiva baixa ou média, o que pode ser alvo de reflexões docentes para propor alterações, com vistas a melhorar tal grau de idoneidade.

Com relação à Combinatória, os alunos têm interesse especial pelos problemas, visto que, a depender da escolha dos problemas, estes podem ser bastante curiosos, apresentarem contextos práticos, e, quando não há a ênfase em fórmulas, podem possibilitar o surgimento de diversas interpretações e discussões sobre os mesmos. Por outro lado, alguns alunos podem sentir emoções negativas, uma vez que cada problema tem uma estrutura diferente e as soluções não são prontamente identificadas, causando insegurança no procedimento apresentado, ou a não participação no processo de resolução de problemas.

A *idoneidade interacional* visa saber “se as configurações e trajetórias didáticas permitem, por uma parte, identificar conflitos semióticos potenciais, e por outra parte permitem resolver os conflitos que se produzem durante o processo de instrução”. Como componentes Godino(2011) elegeu a interação docente-discente, interação entre alunos, autonomia e avaliação formativa.

Na aula de Combinatória, as interações entre professor-aluno podem ampliar a participação dos alunos e aumentar a responsabilização pela resolução de problemas combinatórios, provocando a autonomia dos estudantes, promovendo amplo diálogo sobre os problemas combinatórios entre alunos-professor e alunos-alunos. Além disso, as interações em sala de aula podem identificar as dificuldades de compreensão dos distintos invariantes das situações combinatórias, desencadeando outras ações para ajudar na superação dessas dificuldades, ou conflitos semióticos encontrados.

A *idoneidade mediacional* representa o “grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem” (GODINO; RIVAS; ARTEAGA, 2012, p. 335. tradução própria). Como componentes para essa idoneidade Godino (2011) indicou recursos materiais (manipulativos, calculadora, computadores), número de alunos, horários, condições da aula e tempo.

Arteaga, Batanero e Gea (2017) realizaram uma investigação sobre a componente mediacional do conhecimento didático-matemático em Estatística, com 108 futuros professores de Educação Primária na Espanha. Nessa pesquisa, os futuros professores que participavam da disciplina, Didática da Matemática, tiveram que avaliar o grau de idoneidade mediacional de um projeto

estatístico que consistia das seguintes atividades: Apresentação do projeto e Realização do experimento; Recolhida de dados; Análise de dados; e Conclusões.

Na análise foram criados níveis para hierarquizar os comentários realizados pelos futuros professores com relação aos componentes e descritores da idoneidade mediacional. Foram considerados quatro níveis: o primeiro aplicado ao futuro professor sem fazer referência ao descritor; o segundo quando se limita à cópia do descritor sem indicar como se aplica; o terceiro quando aplica o descritor de maneira incompleta, sem considerar os interesses, atitudes ou emoções dos alunos; o último quando o futuro professor aplica os descritores a recursos que foram ou poderiam ser utilizados, considerando os objetivos do processo de ensino e aprendizagem implementado.

Com o estudo, os autores verificaram que os futuros professores tiveram dificuldades em avaliar a idoneidade mediacional do projeto estatístico, principalmente no que diz respeito à valoração de recursos, organização dos alunos e o tempo requerido para o estudo. Os autores indicaram que houve alguns descritores nos quais os participantes tiveram facilidade em analisar, em especial o que trata do “uso de materiais manipulativos e informativos que possibilitam a introdução de boas situações, linguagens, procedimentos e argumentações adaptadas ao conteúdo pretendido” (ARTEAGA; BATANERO; GEA, 2017, p.61).

A depender das condições da aula de Combinatória, como, por exemplo, número de alunos reduzido, pode-se disponibilizar mais tempo para a atividade de resolução de problemas em grupo, posto que a socialização dos diferentes procedimentos encontrados gastará menos tempo. Outro indicador dessa idoneidade, pode ser exemplificado com o uso de um recurso tecnológico, como o software Árbol¹³, para auxiliar em procedimentos enumerativos durante a resolução de um problema combinatório, focalizando a discussão em características para diferenciação dos tipos de problemas combinatórios.

Com relação ao uso do livro didático enquanto recurso, por vezes ele assume diferentes papéis na aula. Herbel-Eisenmann (2009) aponta que alunos, professores e livros didáticos assumem posicionamentos que alteram as

¹³ O software *Diagramas de Árbol* não se trata de um *software livre*, este foi concedido pelas autoras (SANDOVAL; TRIGUEIROS; LOZANO, 2007I) para uso na pesquisa de Azevedo(2013)

autoridades e as responsabilidades pelo conteúdo e resoluções de problemas, sempre mediados por meio de negociações.

Para essa autora, existem algumas configurações que o livro didático, o professor e os alunos podem assumir ao longo das aulas: 1. *Privilegiando o livro didático*. Por exemplo, na introdução e definição de termos matemáticos específicos, a partir de uma leitura em voz alta do livro didático, o professor atribui autoridade ao livro; 2. *Professor – livro didático alinhado*. Por exemplo, quando professor assume uma posição de interpretar o que o livro apresenta para os alunos; 3. *Privilegiando o professor*, assumindo a autoridade, quando, por exemplo, propõe situações ou termos que não foram propostos ou apresentados pelo livro didático; 4. *Professor-estudantes alinhados* que acontece quando o professor concorda com que os alunos apontam, distanciando-se do que é direcionado no livro didático. 5. *Estudantes-livros didáticos alinhado*, que ocorre quando o aluno corrige o professor, ou mesmo quando, desconsidera as indicações do professor, utilizando o livro como referência; 6. *Privilegiando os estudantes*, que ocorre quando o professor segue as indicações dos alunos, ao invés de apenas controlá-las, fazendo com que os mesmos apresentem suas ideias próprias. No Quadro 8 apresenta-se um resumo dos componentes de cada dimensão da idoneidade didática.

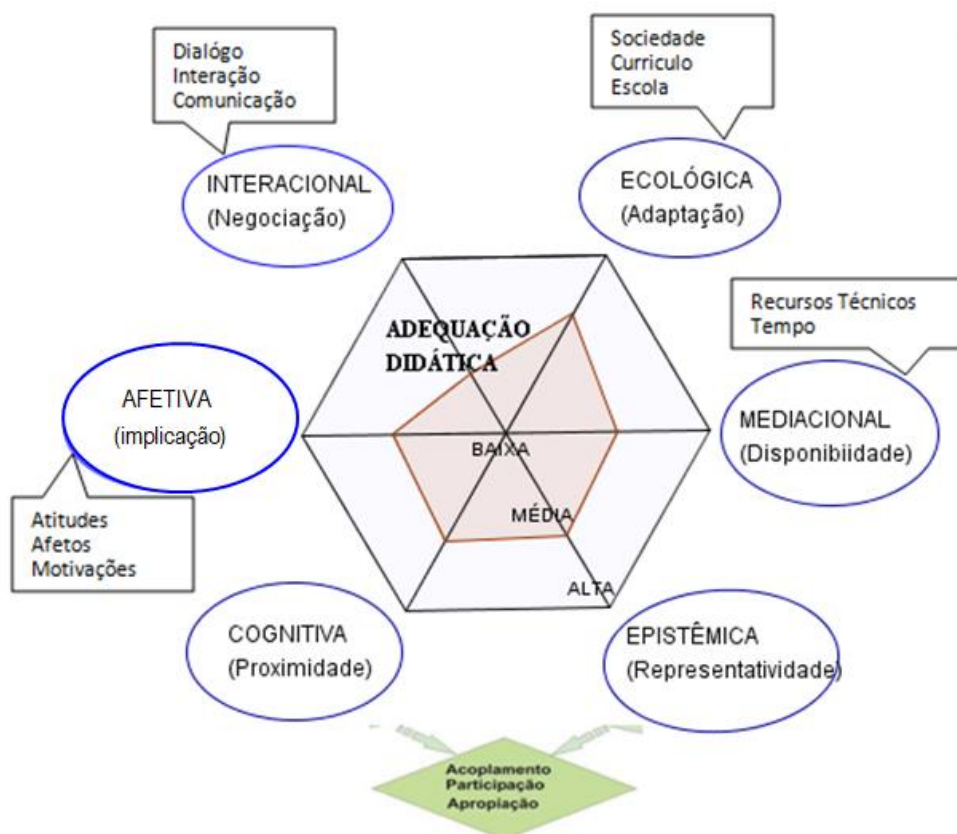
Quadro 8 – Resumo dos componentes que podem ser analisados em cada Idoneidade didática

Dimensão	Componentes
Idoneidade Epistêmica	situação-problema, linguagens, regras (definições, proposições, procedimentos), argumentos e relações
Idoneidade Cognitiva	conhecimentos prévios, adaptações curriculares a diferenças individuais e aprendizagem
Idoneidade Afetiva	interesses, atitudes e emoções
Idoneidade Instrucional	interação docente-discente, interação entre alunos, autonomia e avaliação formativa
Idoneidade Mediacional	recursos materiais (manipulativos, calculadora, computadores), número de alunos, horários, condições da aula e tempo
Idoneidade Ecológica	adaptação ao currículo, inovação didática, integração de novas tecnologias, adaptação socioprofissional e cultural, educação para valores, conexões inter e intradisciplinares

Fonte: Godino (2011)

Tais componentes têm que ser relacionados ao conteúdo específico. A Figura 1 a seguir apresenta o diagrama criado por Godino, Batanero e Font (2008) para representar as diferentes dimensões/facetas da idoneidade didática. Em cada uma delas, estão explicitadas algumas ideias que podem fazer parte do processo de ensino e aprendizagem.

Figura 1 – Diagrama das dimensões/facetas da idoneidade didática



Fonte: Traduzido de Godino, Batanero e Font (2008, p.16)

Por exemplo, na *idoneidade interacional* tem-se a negociação entre professor-alunos e, nesse caso, o diálogo e a comunicação são necessários para atingir um maior grau dessa dimensão da Idoneidade Didática. Com relação à *idoneidade ecológica*, a adaptação do conteúdo para o currículo, sociedade e escola fazem parte do maior grau dessa faceta. A implicação apresentada na *idoneidade afetiva* representa o compromisso e a motivação dos estudantes na realização das tarefas propostas. A disponibilidade de tempo e condições são exibidas como essenciais na *idoneidade mediacional*. As idoneidades *epistêmica*

e *cognitiva* se relacionam entre si, destacando as noções de *acomplamento*¹⁴, participação e apropriação, sugerindo que o que foi trabalhado pela faceta epistêmica e deve ser aprendido na faceta cognitiva, ou seja, se faz necessário o acoplamento progressivo entre os significados institucionais e os significados pessoais, a participação dos estudantes nas propostas implementadas e a apropriação dos diferentes objetos primários trabalhados. No caso da idoneidade epistêmica possui maior grau quando se aproxima do que é considerado significado de referência para um conteúdo. Já na idoneidade cognitiva o grau será maior quanto mais próximo for os significados pessoais e o significado institucional implementado.

Na Figura 1 estão descritos os graus das dimensões da idoneidade didática, os quais não estão igualmente distribuídos, pois na prática é isso que acontece: há grau de idoneidade maior em algumas facetas e menor em outras. As gradações baixa, média e alta, na Figura 1, dizem respeito ao grau de cada dimensão da idoneidade didática atingido pelo processo de ensino e aprendizagem implementado. O equilíbrio entre as dimensões favorece a relação entre elas. Godino, Becomo, Font e Wilhelmi (2006, p.6) consideram que “uma idoneidade alta em uma das dimensões, por exemplo, a epistêmica, pode requerer capacidades cognitivas que os estudantes não possuam”. Por isso, defendem o equilíbrio entre as diferentes facetas, em especial, a epistêmica e a cognitiva. Dessa forma, o hexágono não regular apresenta indicações sobre o que se pode melhorar no processo de ensino e aprendizagem implementado.

Outro aspecto defendido por Godino, Batanero e Font (2007) são as interações entre as diferentes facetas. Godino (2011, p.14) afirma que tais dimensões/facetos não podem ser analisadas em separado, por causa de intrínsecas relações entre elas, por exemplo, “o uso de um recurso tecnológico pode determinar se podemos abordar determinados tipos de problemas e as configurações de objetos e processos correspondentes, o que por sua vez leva a novas formas de representação, argumentação, generalização, etc”. Dessa forma apresenta algumas interações entre as facetas, a saber, epistêmica-

¹⁴ Acomplamento nesse caso é entendido como as conexões (tal como peças de quebra cabeça) entre o que foi realmente implementado e aquilo que foi aprendido. Não adianta, por exemplo, se aproximar do que é considerado referência se não houver a aprendizagem desses conteúdos, como também, se aproximar do que se considera significado pessoal do aluno e desconsiderar completamente a referência.

cognitiva, epistêmica-cognitiva-afetiva, epistêmica-cognitiva-medicacional, cognitiva-afetiva-interacional, ecológica-instrucional.

2.6 PESQUISAS BRASILEIRAS QUE UTILIZARAM O EOS

Como modo de atualização e reforço da relevância da EOS para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Brasil, nessa seção apresenta-se algumas pesquisas nacionais realizadas sobre essa temática. Para tal, foi realizada uma revisão bibliográfica no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes para identificar pesquisas que utilizam o EOS como aporte teórico. Essa revisão, após exclusão de teses e dissertações repetidas e temas que não versavam sobre a teoria, resultou em cinco trabalhos brasileiros com esse enfoque, apresentados no Quadro 9.

Quadro 9 – Teses e dissertações brasileiras sobre o EOS 2016

Palavras chaves utilizadas	Número de trabalhos listados	Número de trabalhos selecionados
Ontosemiótico	3	1 (Andrade, 2014)
Ontossemiótico	5	4 (Ferreira, 2012; Santos, 2015; Thiel, 2013; Santos Ne, 2013;)
Idoneidade	33	0
Onto-semiótico	21	0

Fonte: Pesquisa no portal da Capes no período de 2012-2016¹⁵

Nessas pesquisas observou-se o EOS aplicado em três enfoques, na relação entre EOS e a Teoria do Registro de Representação Semiótica (SANTOS NÉ, 2013; THIEL, 2013), pesquisas focalizando a Idoneidade Didática (SANTOS, 2015; ANDRADE, 2014) e a aplicação das cinco noções teóricas do EOS (FERREIRA, 2012).

Santos Né (2013) realizou uma pesquisa sobre o processo de ensino e aprendizagem da prática de esboço de curvas no Ensino Superior. Nela, o autor discute a relação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da instrução matemática (EOS) para analisar a linguagem matemática utilizada na prática descrita. Para coleta

¹⁵ Pesquisa realizada em 2016.

de dados, o autor utilizou seis encontros de duas aulas na disciplina de Cálculo A da UFSC, com em média, 30 alunos por encontro.

Para análise, o pesquisador elaborou configurações epistêmicas dos objetos matemáticos (pontos críticos de uma função real, ponto crítico quando não existe a derivada no ponto, variações das funções reais, teste da derivada primeira, teste da derivada segunda, pontos de inflexão) identificando situações problemas, envolvendo a prática de esboço de curvas, definição, propriedade, procedimento e argumentação.

Como resultado, o autor sugere que existem dois conflitos semióticos. O primeiro conflito relaciona-se aos sistemas de práticas associadas aos pontos críticos, o que indica que o “o reconhecimento da existência ou não de derivadas em ponto angulosos a partir de gráficos de funções, entre outras conceituações, não fazem parte dos significados pessoais dos estudantes” (SANTOS NÉ, 2013, p.132). O segundo diz respeito às práticas referentes aos pontos de inflexão, posto que “alguns estudantes justificaram os pontos de inflexão procurando por valores do domínio da função que anulam a derivada segunda, o que me permite concluir que não associam o conceito de ponto de inflexão e a propriedade indicada na configuração epistêmica” (SANTOS NÉ, 2013, p.130).

O autor aponta algumas articulações entre as teorias utilizadas TRRS e EOS, a saber: “os registros semióticos podem ser inseridos como elementos das configurações epistêmicas ou cognitivas que forem construídas para realização da análise dos dados, apontando assim para uma conexão entre os princípios de aprendizagem das duas teorias” (SANTOS NÉ, 2013, p.63).

Com relação ao ensino, o autor considera que a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de apresentar diferentes registros de representação, com intuito de propiciar a troca entre elas (conversão), tais registros podem ser compreendidos no EOS “como facetas do objeto matemático”. No caso da Combinatória, tais registros de representação e os processos de conversão entre registros são compreendidos como elementos da linguagem pertencentes ao objeto matemático.

Thiel (2013) objetivou discutir sobre os procedimentos norteadores para compreensão e análise pelo aluno das representações no plano cartesiano, no contexto da aprendizagem escolar. De forma análoga a pesquisa de Santa Fé

(2013), buscou relacionar as teorias de TRRS e EOS para auxiliar na discussão de seu objeto de estudo.

A pesquisa foi realizada em uma escola municipal de Santa Catarina em três turmas do nono ano, totalizando 97 estudantes. Foram executados 29 encontros subdivididos em quatro momentos. No primeiro momento discutiu-se a noção de coordenadas e a construção de plano cartesiano por meio de práticas (croqui do trajeto casa/escola, planta do bairro buscando coordenadas de localização, e acesso localização via tecnologia da informática). No segundo momento focalizou-se na elaboração do conceito de plano cartesiano e coordenadas por professor e alunos, visando a compreensão de “formas de uma representação significável (linguística, simbólica, gráfica) de um objeto matemático” (THIEL, 2013, p.102). No terceiro momento foi organizada a configuração epistêmica e as entidades matemáticas de atividades que continham a conversão e o tratamento das representações gráficas. Por fim, no quarto momento, apresentaram-se atividades que abordavam tratamentos e conversões de diferentes registros de representações de um ponto ou das regiões no plano cartesiano.

Os resultados desse estudo apontam que grande parte dos alunos sentiu maior dificuldade na passagem do registro de representação da linguagem algébrica para a natural, da linguagem natural para a linguagem gráfica e da linguagem gráfica para a algébrica. Thiel (2013) também verificou que os estudantes se limitaram apenas à forma de representação que os mesmos conheciam.

Segundo o autor, as aulas realizadas focalizando os diferentes registros de representação de um conceito (com uso de tratamento e conversão) promoveram “novos caminhos para a apropriação e uso na sua prática docente” (THIEL, 2013, p.202), apesar de não produzirem avanço significativo no desempenho dos estudantes sobre plano cartesiano.

Outro fator observado foi com relação à “linguagem matemática escrita (linguagem natural, simbólica e gráfica) e oral, compartilhando significados próprios desse contexto para que os alunos se aproximassem do saber institucionalizado” (THIEL, 2012, p.202).

Tal discussão sobre a linguagem remete, na presente pesquisa, à relação da função semiótica desenvolvida no âmbito do EOS, às circunstâncias

contextuais do jogo de linguagem de objetos matemáticos as quais serão posteriormente analisadas.

A investigação de Santos (2015) teve por objetivo investigar – com base no desenho, implementação, avaliação, valoração e redesenho de tarefas – quais as contribuições da metacognição para a prática pedagógica dos professores de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Nela, a autora, discute os componentes e/ou ferramentas teóricas para análise e caracterização das diferentes facetas da idoneidade didática.

A pesquisa se realizou em uma escola municipal de Amargosa, sendo organizada em três fases: 1) identificação do contexto e dos sujeitos; 2) execução da proposta proporcionando o estudo das tarefas selecionadas com relação aos aspectos metacognitivos, propostas de redesenho das mesmas, além de identificação de conhecimentos, expectativas experiências dos professores; 3) encontros para análise para discutir e refletir sobre a aula ministrada, nos quais foram realizadas entrevistas para evidenciar implicações da proposta em sua prática educativa.

A autora utilizou a ferramenta da idoneidade didática para analisar a reflexão sobre as tarefas, assim como seu redesenho e aplicação. Godino (2011, p.5) define a idoneidade didática como uma ferramenta que permite a passagem de uma didática descritiva–explicativa a uma didática normativa, isto é, uma didática que orienta a intervenção efetiva na aula”.

Santos (2015) acrescentou às facetas da idoneidade didática a dimensão metacognitiva que visava identificar as alterações das concepções de metacognição desenvolvidas pelos professores no processo da intervenção.

A autora concluiu que a experiência com tarefas matemáticas que exploram a metacognição promoveu a reflexão sobre apropriação do conhecimento metacognitivo. Santos (2015) considerou algumas limitações, tais como, o tempo necessário para planejamento, o programa curricular rígido e sem flexibilização; o tempo para aplicação das tarefas e dificuldades de sistematização de grupos de estudos na escola com os professores. Além disso, foram observadas mudanças na postura dos professores, no entanto, a autora faz ponderações sobre a continuação desse trabalho.

Vale salientar que, de acordo com Santos (2015, p.161), tais componentes das facetas da idoneidade didática possibilitaram a análise das

“ações e reflexões dos professores, quando resolviam as tarefas, e, principalmente ofereceram os subsídios para analisar o (re)desenho das tarefas proposto pelos professores após a intervenção”.

O trabalho de Andrade (2014) buscou analisar o desenvolvimento da Matemática no Ensino Médio de escolas públicas estaduais do Rio Grande do Sul. Para isso realizou a análise documental nos documentos curriculares oficiais do Ensino Médio, em especial, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCN+ (BRASIL, 2002) e Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio - OCNEM (BRASIL, 2006). Além disso, investigou os planos de ensino de Matemática de escolas distribuídas em cinco municípios da região metropolitana de Porto Alegre, e realizou entrevistas semiestruturadas com supervisores das escolas e com os docentes.

Para análise dos documentos e entrevistas realizadas, a pesquisadora, utilizou as ferramentas teóricas do EOS, em especial, a noção de idoneidade didática e as seis dimensões da mesma.

Com relação aos documentos oficiais analisados, a autora utilizou a faceta de análise epistêmica, identificando situações problemas, regras e linguagem nos dois documentos. De acordo com a autora, tal ferramenta proporcionou a aproximação sobre “a forma como os conhecimentos matemáticos são organizados em âmbito nacional” e que a idoneidade epistêmica dos referidos documentos “[...] pode ser alcançada quando se compreende, se conhece e se domina determinado objeto matemático”(ANDRADE, 2014, p.212).

Outro aspecto analisado por Andrade (2014) foram os planos de ensino de Matemática de 18 instituições escolares, utilizando as seis dimensões da idoneidade didática e seus componentes e indicadores.

Para determinar o grau de idoneidade didática, Andrade (2014) adotou a seguinte classificação para cada componente da idoneidade didática: *baixa* para aqueles elementos que se apresentaram entre 1 a 5 planos; *média ou moderada* para 6 a 13 planos; *alta* para 14 a 18 planos. Desse modo, conseguiu elaborar um diagrama que apresenta os graus das idoneidades dos planos investigados.

Para a autora, tais ferramentas permitiram compreender “a preocupação com o caráter formativo da Matemática com relação à estruturação do pensamento, bem como a presença de elementos das distintas idoneidades, porém com diferentes graus de adequação” (ANDRADE, 2014, p.212). Dentre

todas as dimensões, as que foram mais evidenciadas, mesmo com diferentes graus, foram as idoneidades epistêmicas e cognitivas, o que para a autora indica o desenvolvimento de atividades por meio de resolução de problemas priorizando “as representações, as relações e os argumentos no processo de ensino e aprendizagem dos conhecimentos matemáticos e que busque, nos estudantes, o desenvolvimento das capacidades de raciocinar, interpretar, analisar e sintetizar” (ANDRADE, 2014, p. 212).

A autora também realizou entrevistas com 30 professores de Matemática para identificar o grau da idoneidade didática e utilizou como critério a distribuição do número de docentes por elemento ou componente de cada dimensão: baixa (entre 1 a 9 docentes), média ou moderada (10 a 21 docentes), alta (22 a 30 docentes). Segundo Andrade (2014), por meio das entrevistas realizadas com os professores foi possível identificar alguns aspectos da aula de Matemática, como por exemplo, utilizar a resolução de problemas, a linguagem, interpretação e argumentação matemática.

Ferreira (2012), em seu estudo, objetivou identificar o processo de produção de significados por alunos envolvidos em atividades exploratório-investigativas e avaliar a idoneidade didática do processo vivido. As atividades exploratório-investigativas, ao todo nove, foram desenvolvidas em uma turma do 7º ano em uma escola de Minas Gerais. Tais atividades versavam sobre “aritmética (soma controlada, divisão e resto), medidas (perímetro e área) e padrões (sequências, relações entre grandezas e funções)” (FERREIRA, 2012, p.66). As análises foram realizadas sobre as atividades de padrões.

Dentre os diferentes aspectos discutidos nessas análises por Ferreira (2012), selecionou-se a noção configuração didática, em especial a de trajetória docente e trajetória discente. Vale salientar que a noção de configuração didática é composta “pelas interações entre professor–aluno a propósito de um objeto ou conteúdo matemático e usando alguns recursos materiais específicos”(GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.12).

Para análise de atividades exploratório-investigativas, Ferreira (2012) acrescenta mais três funções docentes: manejo de classe/regulação de tempo ou disciplina, validação da solução encontrada, exploração conjunta professor-alunos; e outra função discente para o momento da exploração em que ocorre uma descoberta na atividade exploratório-investigativa.

A partir dessas noções, Ferreira (2012) descreveu e explicitou o que foi vivenciando em sala de aula, observando as funções docentes e discentes, construindo as configurações docentes e as configurações cognitivas afetivas de alguns alunos. Esse trabalho, segundo a autora, “permitiu revelar a complexidade do trabalho realizado e as dificuldades vivenciadas não só pelos alunos, mas também pelas professoras na implementação e no gerenciamento das atividades exploratório-investigativas” (FERREIRA, 2012, p.232).

Ferreira (2012) apresentou, ainda, uma discussão sobre a dimensão normativa apresentada por Godino, Batanero e Font (2008) e comentou que as interações da sala de aula são reguladas pelas normas e metanormas, e as mesmas, sistematizam a organização da participação dos sujeitos envolvidos.

Na pesquisa de Ferreira (2012) foram identificadas algumas dessas normas presentes em um processo de ensino e aprendizagem por meio de atividades exploratório-investigativas. Dessa forma, organizou-se no Quadro 10 o conjunto de dimensões normativas identificadas pela autora na análise de uma atividade exploratória.

Quadro 10 – Dimensões normativas em atividades exploratório-investigativas identificadas por Andrade (2014)

Dimensões normativas encontradas	Ações práticas
Normas metainstrucionais	- Professores não apresentarem a solução direta para o problema -As atividades desenvolvidas necessitam que os alunos assumam a responsabilidade na resolução
Norma metaepistêmica	- É necessário chegar a uma explicação do problema, a uma regra; - É necessário chegar a generalização -E necessário testar a regra (professora) -Se o professor questiona sua resposta é porque, muito provavelmente, ela deve estar equivocada.
Norma afetiva	A partir da norma metainstrucional de proporcionar situações que promovam a dedicação dos alunos na descoberta, houve a presença da norma afetiva que se relaciona a <i>autoria da descoberta da solução</i>

Fonte: Andrade (2014, p.159-163)

Ferreira (2012) também discutiu a respeito da idoneidade didática. A partir dos critérios dessa noção, a autora observou que a insuficiência na idoneidade ecológica refletia na escolha de atividades que proporcionassem a aplicação e/ou crítica do conteúdo. Com relação às baixas adequações cognitiva-afetiva e interacional cogitava-se a ampliação da familiaridade dos envolvidos nas

peculiaridades do trabalho investigativo. Ferreira (2012, p. 234) considerou que “o nível de adequação didática global alcançado pela prática analisada (de mediano a alto) [...] sugere que o trabalho com esse tipo de atividade pode proporcionar um contexto altamente adequado para a produção de significados”.

Para a avaliação da variação de conceitos atribuídos na avaliação do grau de adequação didática¹⁶, Ferreira (2012) apontou características para cada faceta da adequação didática ser considerada alta.

Adequação interacional: A interação [...] permite que o professor e os alunos identifiquem conflitos semióticos e resolvam tais conflitos mediante a negociação de significados[...]

Adequação cognitiva: O material favorece a emergência de ZDPs e permite a evolução dos significados pessoais dos estudantes.

Adequação afetiva: As configurações didáticas motivam a ação e a participação dos alunos, já que têm em conta seus interesses, afetos e suas emoções.

Adequação epistêmica/matemática: representatividade das atividades implementadas, pertinência dos significados implementados.

Adequação ecológica: Adaptações às diretrizes curriculares, conexões com outros conteúdos, contextualização sociocultural da prática profissional.

Adequação Mediacional: Gestão adequada de meios, recursos didáticos, materiais manipulativos, tempo. (FERREIRA, 2012, p.50)

Na tese de Ferreira (2012) existem algumas interações entre as facetas, cognitivo-afetiva e interacional-mediacional. No caso das facetas cognitivo-afetiva, Ferreira (2012) considerou como moderadamente alta, pois uma das funções docentes mais evidenciadas no processo foi a motivacional. Com relação às facetas interacional-mediacional, a autora classificou como moderadamente baixa, e atribuiu esse resultado ao formato de interação entre as professoras e estudantes que limitava, em parte, as possibilidades e ações dos estudantes.

Nota-se, a partir das pesquisas apresentadas, a amplitude com que o EOS trata o ensino e aprendizagem de Matemática, a adequação metodológica de suas ferramentas teóricas no delineamento desse processo, reforçando, sobremaneira, sua utilização na instrução de Combinatória no Ensino Médio.

¹⁶ Ferreira(2012) traduz Idoneidade Didática do espanhol para Adequação Didática. Na presente pesquisa adota-se o termo Idoneidade Didática usando como referência (GODINO, 2011)

3 COMBINATÓRIA

Enumerar, quantificar, contar e procurar padrões. Essas atividades são desenvolvidas pela humanidade há bastante tempo. A ideia de contar elementos foi evoluindo, para a contagem de grupos, coleções repletas de características comuns ou incomuns. Para Graham (2013) procurar padrões é um dos mais irresistíveis instintos humanos, assegurando que a Combinatória representa o coração e a alma dessa busca¹⁷.

As maneiras de contar foram sendo reconduzidas, estudadas, analisadas, reformuladas – gerando técnicas de contagem de grupos de elementos discretos – e, nas últimas décadas, veem ganhando espaço devido à importância em outros campos da Matemática como a teoria dos grafos, a análise de algoritmos e atualmente a teoria dos projetos, geometria finita, teoria de codificação (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; CAMERON, 2013).

Cameron (2013) acredita que a invenção dos computadores potencializou o surgimento de variadas áreas da Matemática e como essa invenção é digital, essas áreas estão relacionadas à Combinatória. Esse autor afirma ainda que “nos últimos dois séculos a matemática vem sendo dominada pela tendência de axiomatização” (p.358), no entanto, a natureza da Combinatória não se adequou a isso, e mesmo possuindo tentativas interessantes para realizar essa intenção (como exemplo, a influência dos artigos de Gian-Carlo Rota nas décadas de 1960-1970) não conseguiram ser implantadas. Cameron (2013, p.364) sugere que “Talvez a ‘Teoria do tudo’ usará Combinatória”.

Hunter (2011, p.181), se referindo às aplicações da contagem e computadores “[...] em cadeias binárias, sequências de operações, listas de dados e conexões entre objetos”, afirma que, com a abrangência do uso dos computadores, houve um crescimento de diferentes áreas que utilizam processos discretos. Como exemplos o autor apresenta a música, pois a mecânica de armazenamento e reprodução são processos discretos; a Biologia e a descoberta dos códigos genéticos do DNA porque são tratados como

¹⁷Graham (2013, Foreword) “Mathematics has often been described as the science of patterns, and perhaps more than any other mathematical field, this represents the heart and soul of combinatorics”.

informações discretas; a linguística que trata da linguagem humana, falada ou escrita que podem ser compreendidas em sequências discretas de sons para transmitir a informação.

De fato, para delinear a relevância atual da Combinatória como processo matemático vivo e representativo da riqueza desse conteúdo, deve-se buscar na sua história o *modus operandi* de seu desenvolvimento.

Identificar aspectos históricos de um conteúdo matemático por vezes torna-se um trabalho árduo, pois depende de fontes que foram preservadas e tem origens nas mais diferentes civilizações ao longo dos anos. Algumas dessas fontes de Matemática podem ser mal interpretadas e atribuídas a outros matemáticos. Biggs (1979, p.110) raciocinando sobre a história da Combinatória alega que “por causa das regras serem consideradas auto-evidentes, não se espera encontrá-las mencionadas explicitamente, e não se pode, portanto, traçar sua “história”. Podem-se procurar exemplos sobre seu uso”¹⁸. No entanto, apresenta em seu artigo alguns problemas que envolve a Combinatória com fontes de diferentes localidades (Egito, China, Índia, entre outros) e com aplicações em diversas áreas (canções de ninar, livros de previsão, tratados médicos, quadrados mágicos...) o que pode ser indício de que algumas regras eram conhecidas nas primeiras civilizações.

Knuth (2013) acrescenta que padrões de Combinatória podem ser observados no início da civilização em diferentes culturas no mundo, com traços na poesia, música e religião. No seu capítulo intitulado “Two thousand years of combinatorics” apresenta um percurso histórico da Combinatória com enumerações de muitas possibilidades (n-uplas) para problemas combinatórios existentes em fontes históricas na China, Índia e Grécia em diferentes épocas. Outras apresentam diagramas de diferentes maneiras para a organização da enumeração de possibilidades.

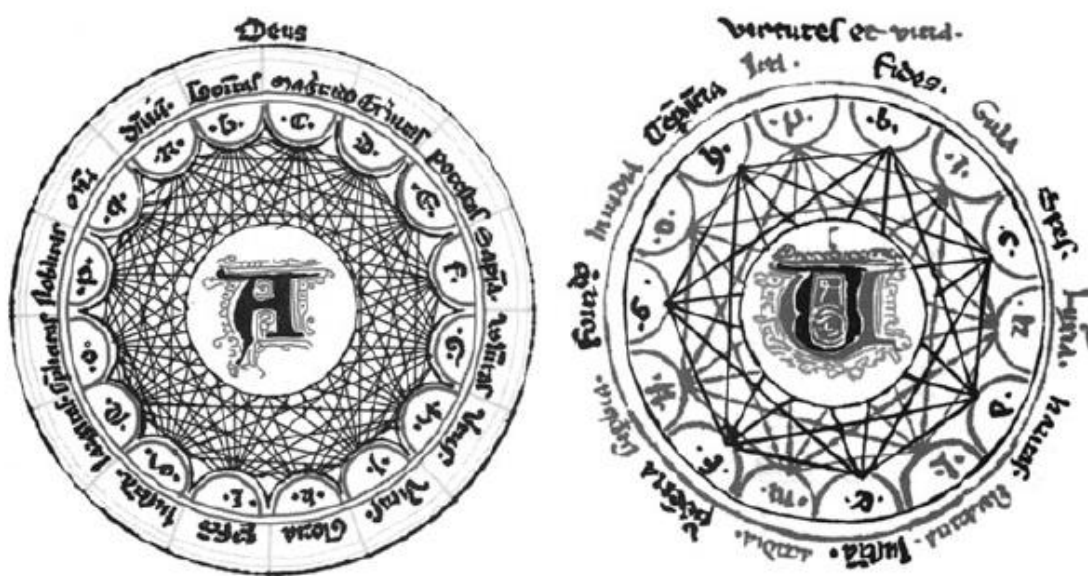
As maneiras de fazer n-uplas utilizavam algumas sistematizações para não esquecer possibilidades. Por exemplo, na China o I CHING (Livro das mutações) datado de 4 a.C. traz a representação de hexagramas (figuras de seis linhas produzidas escolhendo entre yin (_ _) e yang (_ _ _)). A lista dos 64

¹⁸Because such rules have been commonly regarded as selfevident, we do not expect to find them mentioned explicitly, and we cannot therefore trace their "history." We can, however, seek for examples of their use.

De acordo com Knuth (2005, p.4), “Embora ele (Shabbetai Donnolo) soubesse quantas permutações deveriam existir, e quantas deveriam começar com uma determinada letra, evidentemente não tinha um algoritmo para gerá-las”. A enumeração dessas listas apresentavam alguns equívocos, mas exibe tentativas de procedimentos combinatórios, como a fixação de elementos na listagem.

É ainda de Knuth (2013) a citação de Ramon Llull (1232-1316), em seu *Ars Compendiosa Inveniendi Veritatem*, no qual identifica algumas características básicas de elementos divinos, depois tenta combiná-las de todas as formas possíveis, propondo diagramas conforme se apresenta na Figura 4.

Figura 4 – Ilustrações em um manuscrito apresentado por Ramon Llull em 1280 ao regente de Veneza



Fonte: Knuth (2013, p.15)

O autor afirma que o primeiro diagrama apresenta a combinação de 16 características de Deus, onde para cada uma delas é atribuída uma letra. O segundo diagrama apresenta a combinação de dois conjuntos de sete atributos, vinculados em uma cor a virtude e outra cor relacionada aos vícios. (KNUTH, 2013). Esses diagramas representam respectivamente a combinação de $C_{16,2}$ e duas combinações $C_{7,2}$. A criatividade de Ramon Llull na enumeração de possibilidades apresenta um pouco da versatilidade de estratégias para resolver problemas combinatórios.

Didática ou pedagogicamente, a ideia de representação do conhecimento por meio de figuras acarreta grande parte dos esforços para facilitar o processo de aprendizagem. Nesse sentido, a ideia de árvore de possibilidades assume total relevância quando das ações enumerativas para a resolução de problemas combinatórios. Segundo Wilson (2013) uma árvore é um gráfico conectado sem ciclos tendo seu aparecimento implícito ocorrido nos trabalhos de Kirchhoff em 1847, na tentativa de cálculos que representavam as correntes em redes elétricas.

Ainda para Knuth (2013), desde 1850 alguns trabalhos em Química conduziram à ideia de enumeração de isômeros a partir de determinadas cadeias orgânicas. Daí, Arthur Cayley, em 1874, relacionou tais contagens com o processo de contagem de árvores basicamente como hoje elas são utilizadas. Foi a partir de tais estudos que Cayley chegou ao seu famoso grupo de permutações de quatro elementos. Na Figura 5 representa-se a resposta de Cayley a lista de números de Catalan C_n para $n = 3$ feita por árvores em 1859.

Figura 5 – Ilustração produzida por Cayley de árvores



Fonte: Knuth (2013, p.32)

Heitele (1975, p.198), fazendo a relação entre a árvore da possibilidade e a Combinatória, defende sua ampla utilização:

O diagrama de árvore é uma representação icônica de importância fundamental, porque visualiza a estrutura de várias etapas da experiência, assim como os resultados possíveis, e assim trabalha em conjunto com outras operações Combinatórias. Por esta razão, as operações combinatórias básicas, mais do que serem simplesmente algoritmos padrão para calcular probabilidades de experiências compostas, fornecem uma visão direta, em particular na sua forma icônica e inativa, para a estrutura interior das experiências do acaso e o encadeamento de experiências sucessivas dentro de um complexo maior. (HEITELE, 1975, p. 198, tradução própria).

Esses fatos históricos permitem inferir a importância de processos enumerativos para a construção histórica do que compreende-se hoje como Combinatória. As relações entre as diferentes áreas permitem interações entre

conceitos matemáticos de diversas teorias, possibilitando um enfoque desse conteúdo que envolva tais relações.

No entanto, outros aspectos didáticos têm que ser considerados na adequação desse conteúdo para o ensino e aprendizagem eficaz. Nas próximas seções apresentam – se pesquisas que tratam da Combinatória e considerações sobre seu processo de ensino e aprendizagem. A fim de orientar tais discussões dividiram-se as pesquisas entre as dimensões epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional da Combinatória conforme pressupostos teóricos adotados.

3.1 DIMENSÕES EPISTÊMICA-ECOLÓGICA DA COMBINATÓRIA EM PESQUISAS

Essa seção debate pesquisas que tratam de aspectos sobre a Combinatória, tendo como base os significados institucionais e a adequação desse conteúdo ao currículo de Matemática do Ensino Médio, especificamente. Destacam-se, portanto, as pesquisas que auxiliem na compreensão de diferentes classificações de problemas combinatórios apresentados na pesquisa, além da diversidade de aspectos que o documentos oficiais curriculares nacionais e internacionais, como também propostas curriculares de pesquisadores.

3.1.1 Dimensão epistêmica: discussões sobre classificações de problemas combinatórios

Batanero et al. (1996) propõem uma classificação de problemas combinatórios mais abrangente, na qual consideram: problemas de *existência* (planeja provar a existência, ou não, de um determinado tipo de estrutura), de *enumeração* (consiste em fazer lista de elementos que possuem determinada propriedade), de *classificação* (utilizado em grande quantidades de elementos, apresentando categorias de relações apropriadas), de contagem (aqueles que identificam a quantidade de elementos de um conjunto finito) e de *otimização* (aplicado em situações nas quais as soluções podem ser ordenadas, implicando na possibilidade de determinação de um máximo ou mínimo de elementos). No Brasil, no âmbito do Ensino Médio, os problemas combinatórios são compreendidos entre os que esses autores consideram como problemas de contagem.

Em outra classificação, Dubois (1984, p.38) apresenta a Combinatória como o estudo das configurações finitas que oferece um terreno propício ao exercício da matematização e tem pleno sentido na didática das matemáticas. Em seu estudo apresenta diferentes configurações combinatórias, destacando problemas de *seleção*, *colocação* e *partição* como tipos de problemas combinatórios.

No modelo de *seleção* é considerado um conjunto de m objetos, entre os quais se escolhe uma amostra de n elementos. Dessa forma, enfatiza-se a ideia de população e amostra e ordenação e repetição.

No modelo de *distribuição/colocação* o autor considera o problema de colocar n objetos em m caixas. Isso quer dizer que cada objeto se associa a no máximo a uma única caixa. Batanero et al. (1996) afirmam que as colocações podem ser classificadas a partir dos valores de m e n dados, em injetivas, sobrejetivas, bijetivas ou aplicações comuns. Nesse caso, tem-se que considerar as propriedades de ordenação(ou não) dos objetos nas caixas (que por sua vez pode ser iguais ou não) e que estes podem ou não ser discriminados (a ideia de objetos iguais ou distintos), determina-se seis tipos de situações que agregam tais condições, perfazendo uma vasta gama de problemas.

O modelo de *partição* consiste em dividir um conjunto de n objetos em m subconjuntos, dois a dois disjuntos, incluindo a possibilidade de alguns desses subconjuntos serem vazios. Em termos matemáticos tradicionais, uma partição de um conjunto é um subconjunto especial de um conjunto das partes desse conjunto, do conjunto de todos os subconjuntos dele.

Desse modo, interessa-se sobre subconjuntos do conjunto dado cuja união o reproduza e em que a interseção deles, dois a dois, é vazia. Isso corresponde a nos esquecermos das caixas nos problemas do modelo de colocações delineado por Batanero et al. (1996). Do ponto de vista matemático, as partições do conjunto $\{F1, F2, F3\}$ são: $\{F1, F2, F3\}, \{\}, \{\{F1, F2\}, \{F3\}\}, \{\{F1, F3\}, \{F2\}\}, \{\{F2, F3\}, \{F1\}\}, \{\{F1\}, \{F2\}, \{F3\}\}$.

Concorda-se com Roa (2000, p.22) quando afirma que para os alunos espanhóis, a proposta de Dubois (1984) “não constitui uma classificação de problemas combinatórios”, no entanto, reconhece-se a importância cognitiva e didática desses esquemas combinatórios. No caso do Brasil, esse fato também se aplica, e mesmo com a descrição de uma infinidade de problemas

combinatórios, não considera a sua totalidade.

Roa (2000) investigou como alunos resolvem problemas de contagem simples — baseados na classificação de Dubois (1984) — e problemas combinatórios compostos. Os problemas combinatórios compostos são aqueles que para resolvê-los necessita do uso de diferentes operações combinatórias e a composição delas por meio da regra da soma ou produto.

De acordo com esse autor, a solução dos problemas combinatórios compostos exige dos alunos, não apenas a aplicação de fórmulas, mas o uso de diferentes técnicas de resolução, como por exemplo, a decomposição do problema em problemas reduzidos, a fixação de variáveis e a aplicação de diferentes regras (soma, produto, quociente). Em sua pesquisa, Roa (2000, p.44) afirma que esses problemas são mais difíceis que os problemas combinatórios simples e justifica que para resolver um problema composto “[...] o aluno precisa resolver corretamente dois problemas combinatórios simples e combinar suas soluções”.

Apesar da amplitude dos problemas combinatórios apresentada por esses pesquisadores, pouco dessa discussão chega na Educação Básica brasileira, geralmente sendo restrita apenas a problemas de contagem.

Pessoa e Borba (2009) apresentaram uma proposta para classificação de problemas combinatórios simples que perpassa toda a Educação Básica fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991). As autoras subdividem os problemas nas situações (*permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano*), invariantes (ordem e escolha) e variadas representações simbólicas.

Nessa classificação, os problemas de *produto cartesiano*¹⁹ (NUNES; BRYANT, 1997), também chamados de *produtos de medidas*²⁰ (VERGNAUD, 1991) ou situações associadas à ideia de Combinatória (BRASIL, 1997), são acrescentados nos problemas combinatórios do Ensino Médio. No Quadro 11 apresenta-se a descrição da classificação desses problemas.

¹⁹ Essa nomenclatura é utilizada por Nunes e Bryant(1996) e adotada por Pessoa e Borba (2009).

²⁰ Adota-se a indicação do Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico do Centro de Educação da UFPE a nomenclatura de *produto de medidas*, tal como proposto por Vergnaud (1991), ao invés de *produto cartesiano* para não gerar confusão com o *Produto Cartesiano, na Matemática*, compreendido como o conjunto dos pares ordenados originados do A cartesiano B.

Quadro 11 – Classificação de problemas combinatórios simples por Pessoa e Borba (2009)

Tipos de problemas	Exemplos	Invariantes
Produto cartesiano ou Produto de Medidas	Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?	Elementos são <i>escolhidos</i> a partir de <i>dois ou mais conjuntos diferentes</i> e a ordem na qual estes elementos são enumerados não constituem possibilidades distintas.
Permutação	Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR?	Todos os elementos do conjunto são ordenados e utilizados em cada uma das possibilidades
Arranjo	As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	Elementos são <i>escolhidos</i> a partir de um <i>conjunto único</i> , mas nem todos os elementos constituem as possibilidades a serem enumeradas e a <i>ordem</i> na qual os elementos são escolhidos constituem possibilidades distintas.
Combinação	Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?	Elementos são <i>escolhidos</i> de um conjunto único e a ordem de escolha dos elementos não constituem possibilidades distintas

Fonte: Pessoa e Borba (2009); Borba (2013);

Para Borba, Rocha e Azevedo (2015, p.1351) o problema de *produto cartesiano* ou *produto de medidas* “envolve dois ou mais conjuntos disjuntos que são combinados, a partir da seleção de um elemento de cada um dos conjuntos independentes, gerando um novo conjunto de elementos, de natureza distinta da dos conjuntos disjuntos dados”. Para Magina, Merline e Santos (2012) os problemas de *produto de medidas* se subdividem em configuração retangular, para os quais atribuem a característica de contínuo, e os em Combinatória que abrangem a característica de discreto.

O interessante nessa classificação é de que ela permitiu que Pessoa (2009) elaborasse um teste para investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório em 568 alunos que estudavam do 2º ano do Ensino Fundamental até o final do Ensino Médio ao resolverem problemas combinatórios, já que tais problemas perpassam esses níveis de ensino.

Outra proposta de classificação com base nas características de problemas combinatórios é discutida por Borba e Braz (2102). Nela as autoras

utilizaram critérios cognitivos na categorização, discutindo principalmente as relações que necessitam ser compreendidas, percebidas, pelas pessoas que tem por objetivo a resolução de um problema combinatório.

Os problemas combinatórios condicionais, segundo as autoras, atribuem características tais como “a escolha de elementos isolados ou de subconjuntos de elementos; a explicitação (ou não) de elementos que devem pertencer às possibilidades levantadas; determinada ordem de elementos; posicionamento; e/ou proximidade dos mesmos” (BORBA; BRAZ, 2012, p.6).

Segundo Borba, Araújo e Braz (2013) os problemas combinatórios condicionais utilizados nessa pesquisa são classificados em:

Um elemento fixo e em uma determinada posição; Um elemento não-explicitado, fixo e com determinada característica; Ter no máximo determinados elementos não explicitados, com certa característica; Mais de um elemento não-explicitado, com determinadas características, em determinadas posições e ordem; Mais de um elemento não-explicitado, com determinadas características, em determinadas posições e ordem; Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, em determinada ordem; Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, em determinadas posições; Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem; Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e proximidade; Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, é fixo; Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, com determinada posição, proximidade e ordem; Mais de um elemento explicitado em determinadas posições; Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com determinada proximidade; Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica; Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica; Mais de um elemento explicitado em determinada ordem; Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e ordem; Mais de um elemento explicitado fixo; Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com determinada proximidade e ordem; Um elemento explicitado fixo; Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições e proximidade; Mais de um elemento explicitado com determinadas posições, proximidade e ordem (BORBA; ARAÚJO; BRAZ, 2013, p.8-11).

No Quadro 12 organizou-se essa classificação com alguns problemas evidenciando tais relações condicionais.

Quadro 12 – Tipos de relações de problemas combinatórios condicionais propostos por Borba e Braz (2012)

Tipos de relações	Problemas combinatórios condicionais
Um elemento é fixo e em uma determinada <u>posição</u>	O Brasil será o país da Copa do Mundo de 2014! Considere que, assim como a seleção brasileira, também participarão a Argentina, a Espanha, a França e a Itália. Imaginando que o <u>Brasil será o campeão</u> , de quantas maneiras diferentes podem se organizar os três primeiros colocados?
Mais de um elemento não-explicitado, com determinada característica, com determinada <u>posição</u> , <u>proximidade</u> e <u>ordem</u>	Júlio, seu irmão Marcos, sua mãe e sua avó adoram videogame. O joguinho possui três controles: primeiro, segundo e terceiro player (jogador). De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar para jogar, desde que as mulheres sejam as primeiras e da mais velha para a mais nova?
Mais de um elemento explicitado com determinada <u>proximidade</u> e <u>ordem</u>	Cinco garotas: Maria, Ana, Paulinha, Bela e Raquel estão disputando na natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas desde que <u>Maria e Raquel fiquem sempre juntas e nessa ordem</u> ?
Ter <u>no máximo</u> determinados elementos com determinada característica	Paulo, Maria, Amanda e Lila são muito amigos e adoram ir juntos na Van da escola. Mas em cada banco da Van só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar no banco desde que <u>no máximo</u> duas das meninas tenham lugar?

Fonte: Borba e Braz (2012); Borba, Araujo e Braz(2013)

De modo propositivo, Deguire (1991), em seu texto, ressalta a aproximação desse conteúdo para o Ensino Fundamental com o uso da resolução de problemas. A apresentação do princípio multiplicativo a partir de problemas enunciados em um sentido progressivo da quantidade de elementos envolvidos em um processo de contagem, sempre fazendo uso da árvore de possibilidades, o que indica a imbricação de tais procedimentos. Interessante observar a apresentação da noção de permutação sem *repetição* como base para a definição do conceito de fatorial do número natural. O questionamento sobre a ordem dos elementos também é colocado fazendo-se então a construção do conceito de combinação simples, sempre com o foco na resolução de problemas. A autora não aborda a questão da *repetição* de elementos.

Já a pesquisa realizada por Araújo e Rocha (2018, p.143) com estudantes do Ensino Médio, consideram como invariantes prescritivos dos problemas de *arranjo* e *combinação* a “[...] formação de subgrupos e pela presença ou ausência da ordenação no processo de contagem de elementos, ou em outros casos, podem ser considerados ou não a *repetição* de elementos nessa contagem”. Ressalta-se ainda na investigação de Silva e Rocha (2015) que

observaram o invariante da *repetição* incluído em problemas combinatórios em livros didáticos desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Portanto, pode-se afirmar que tanto nos anos finais do Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio, torna-se necessário a discussão de problemas combinatórios que incluam a discussão do invariante prescritivo da *repetição*.

A rede de relações que envolvem classificações de problemas combinatórios pode ter influência direta na formação de professores de Matemática, como também na aprendizagem dos alunos, possibilitando aportes diferenciados, devendo, assim, ser investigada.

No Ensino Médio os livros didáticos trazem uma grande mostra de problemas combinatórios que se utilizam de diferentes invariantes e complexidades, para os quais podem ser aplicadas diferentes técnicas, além de apresentarem variados tipos de problemas combinatórios. Braga (2009), em pesquisa realizada em quatro capítulos de Combinatória em livros didáticos, observou a presença da discussão sobre Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Combinação, Permutação, Fatorial, Permutações com elementos idênticos e Permutação com repetição²¹. Desse modo, cabe ao professor escolher aquelas discussões que mais se adequam à sua turma, sem esquecer das orientações curriculares para essa temática.

Na presente pesquisa, considera-se os problemas combinatórios no Ensino Médio: *produtos de medidas; arranjo; arranjo com repetição; permutação; permutação com elementos idênticos; permutação com repetição; permutação circular e combinação*. Tais problemas podem variar considerando aspectos de sua complexidade como os problemas condicionais (discutidos por BORBA; BRAZ, 2012) e os problemas que foram denominados de integrados (compreendidos como compostos por ROA, 2000).

Além da tipologia de problemas combinatórios, pode-se verificar aspectos com relação a linguagem, regras (definições, proposições, procedimentos), argumentos e relações.

²¹ Na presente pesquisa compreende-se que há pequenas diferenças que devem ser pensadas nessas nomenclaturas (Permutação com elementos idênticos e Permutação com repetição), apesar de serem consideradas sinônimos em variados livros didáticos, por isso tratou-se como diferentes. Na primeira situação pensa-se em ordenar um grupo com alguns elementos iguais (por exemplo, o conjunto das letras da palavra Combinatória, possui dois 'a', dois 'i', dois 'o'); Na segunda situação pensa-se em ordenar um grupo na qual pode-se repetir elementos (no caso de números de três algarismos que podem ser feitos com os números 1,2,3)

Schmidt (2016) realizou uma meta análise em quatro pesquisas desenvolvidas com alunos de Ensino Médio para investigar se, e como, são empregados os registros de representação semiótica no desenvolvimento do raciocínio combinatório nesse nível de ensino. O autor elaborou dez descritores relativos a estratégias de resolução de problemas combinatórios no Ensino Médio, a saber: 1. Uso de fórmulas (*arranjo, combinação e permutação*); 2. Uso de regra do produto (PFC e multiplicação); 3. Formação de configurações pedidas no enunciado do problema (listagem, diagramas, árvores de possibilidades); 4. Utilização da recursividade; 5. Decomposição do problema em subproblemas; 6. Uso da regra da soma (princípio aditivo); 7. Fixação de variáveis; 8. Tradução do problema a outro equivalente (transformação do problema de distribuição em problema de seleção, por exemplo); 9. Uso da regra do quociente; 10. Enumeração não sistemática. Nessa pesquisa constatou-se que o uso da regra do produto foi mais evidenciada que o uso de fórmulas, as demais foram pouco utilizadas.

3.1.2 Dimensão ecológica: discussões sobre o documentos curriculares nacionais e internacionais da Combinatória

Concorda-se com Lima e Rocha (2016, p.2) quando defendem que o currículo “[...] fornece pistas para o desenvolvimento dos domínios do conhecimento do professor para ensinar”. Dessa forma, compreender o que os documentos curriculares orientam sobre Combinatória pode influenciar as práticas desenvolvidas na sala de aula. Januário, Lima e Pires (2016) afirmam que professores podem utilizar alguns desses materiais curriculares como recursos e inclusive podem adaptar e improvisar de acordo com a compreensão das necessidades dos estudantes.

A relevância dos estudos de Combinatória para a modernidade no Brasil e no mundo, já vem sendo ressaltada em textos acadêmicos e fóruns de discussões diversos. Por exemplo, no livro do ano de 1991 do NCTM organizado por Kenney e Hirsch (1991) para o K12 (equivalente aos 12 anos da Educação Básica), já são rastreados diversos enfoques descritivos e prescritivos das ações pedagógicas para serem consideradas para esse conteúdo disciplinar.

Acerca da gênese da Matemática Discreta no currículo escolar, Dossey (1991) afirma que o tópico de contagem é destacado nesse texto pelo seu

relacionamento com a Álgebra e Geometria escolares, em temas como o uso de árvores de possibilidades e/ou do princípio multiplicativo em problemas básicos de tais disciplinas.

Kapur (1970), em meio a discussões sobre possíveis caminhos para o currículo da Matemática e críticas ao modelo de matemáticas avançadas, apresenta possibilidades para esse currículo envolvendo aplicações da Matemática Discreta, em especial, abordando o que considera um componente essencial da mesma, a Combinatória. Esse autor defende uma ampliação do lugar da Combinatória na matemática escolar e justifica apresentando uma série de motivos, inclusive

(a) Como não depende do cálculo, seus problemas podem ser resolvidos em um estágio inicial do currículo escolar. Na verdade, tem problemas adequados para todos os graus. (b) Pode ser usado para treinar os alunos nos conceitos de enumeração (contando com contagem contando sem contar), fazendo conjecturas, generalizações, otimização, existência, pensamento sistemático etc. (c) Aplicações à física, química, biologia, análise de rede, projeto de experimentos, teoria da comunicação, simetria, probabilidade, programação dinâmica, teoria dos números, topologia, matemática recreativa etc. podem ser indicadas. (d) A necessidade de criação de mais matemática pode ser criada nas mentes dos estudantes. Um grande número de problemas desafiadores pode ser indicado para eles. (e) A distinção entre provas plausíveis e rigorosas pode ser revelada. (f) Motivação suficiente para trabalhar com computadores pode ser fornecida. (g) Os alunos podem apreciar os poderes e limitações da matemática, bem como os poderes e limitações dos computadores através da matemática combinatória. (h) Pode ajudar no desenvolvimento de conceitos de mapeamento, relações, funções, relações de equivalência, classes de equivalência, isomorfismos, etc. (i) Algumas das grandes vitórias da mente humana sobre problemas desafiadores podem ser indicadas. (j) A maioria dos problemas combinatórios e suas aplicações foram desenvolvidas recentemente e, assim, os estudantes podem ter uma ideia do crescimento da matemática. (k) Isto pode ajudar no desenvolvimento da atitude combinatória da mente que examina todas as possibilidades, enumera-as e descobre a melhor possibilidade e, assim, leva a um pensamento lúcido. (KAPUR, 1970, p.114)

Observa-se que Kapur (1970) alerta para potencialidades do trabalho com esse conteúdo, exemplificando a partir de diferentes tipos de procedimentos de resolução de problemas (aplicando enumeração, criando conjecturas, para além de fórmulas), aplicações nas diversas áreas, na própria Matemática, como também a elaboração de um pensamento sistemático, ou uma atitude

combinatória. A partir desses motivos, apresenta problemas que foram aplicados para alunos de 9 a 13 anos que versam sobre diferentes tópicos, como por exemplo, partição; composições de um número; outros com aplicações em geometria - intersecção de retas, grafos lineares; quadrados mágicos; entre outros. Vale salientar que nessa lista apresentada por Kapur (1970) os problemas prototípicos de Combinatória (*arranjo, combinação e permutação*) são pouco abordados, apresentando uma visão ampliada do tema em questão.

Com relação a ações de professores no ensino e aprendizagem de Matemática Discreta, Gardiner (1991) adverte que o papel desse conteúdo na aquisição de novas ideias e raciocínios relativos a contagem sistemática, pode ser facilmente finalizado por ações docentes que na intenção de auxiliar, reduzem esse processo a procedimentos metódicos com base em regras e fórmulas.

Na Hungria, de acordo com Vancsó et al. (2018), Tamá Varga em um experimento de ensino complexo de Matemática introduziu, em 1963, a Análise Combinatória no currículo escolar nos anos 1 a 8, o que segundo esses autores originou uma reforma curricular na Hungria em 1978. Em seu artigo, Vancsó et al. (2018, p.113) afirmam que as ideias de Varga apesar de não serem direcionadas ao Ensino Médio “certamente influenciaram e foram parcialmente incluídas nesse novo currículo”.

Segundo Vancsó et al. (2018), existia no experimento de ensino proposto por Varga uma ênfase no uso de recursos didáticos. Nessa proposta, os livros e manuais de professor apresentavam, nos capítulos sobre Combinatória, elementos de jogos de construção, pérolas coloridas e caixas de fósforos também são mencionados em alguns problemas. Vancsó et al. (2018) afirmaram que a proposta de Varga, já em 1967, propunha que a Combinatória está ligada a atividades de manipulação como dobrar papel, desenhar, estudar modelos, etc., podendo ser implementada para crianças nas quais fossem privilegiadas as diferentes estratégias e experiências pessoais com esses materiais.

De acordo com o NCTM (2000, p.31), a Combinatória é uma das três importantes áreas da Matemática Discreta incluída no currículo. Segundo esse documento “Essas ideias podem ser sistematicamente desenvolvidas desde a pré-escola até a 12ª série”. De acordo com esse documento “a maioria dos conceitos matemáticos ou generalizações pode ser efetivamente introduzida

usando uma situação problema”(p.335) e nesse sentido propõe a exploração de um problema de contagem de retângulos (inclusive quadrados) que podem ser observados em um tabuleiro de xadrez. O NCTM afirma que problemas dessa natureza:

Dá aos alunos a oportunidade de construir seu conhecimento de conteúdo durante o processo de resolução de problemas, aprender ou praticar algumas estratégias heurísticas e fazer conexões entre várias maneiras de pensar sobre o mesmo conteúdo matemático. Pode ser colocado durante uma unidade em combinatória ou como parte de uma série contínua de problemas que são dados fora de contexto para que os estudantes tenham que determinar as abordagens relevantes para si mesmos. (NCTM, 2000, p.335).

Dessa maneira, o documento orienta para um trabalho de resolução de problemas propondo a diminuição do tabuleiro, para que os alunos analisem e façam suas conjecturas.

Atualmente no documento denominado *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM, 2010), a Combinatória é explicitamente abordada em nível equivalente ao Ensino Médio (High School), relacionada aos blocos que discutem a Probabilidade Condicional e regras de probabilidade. Esse documento orienta o “[...] uso de permutações e combinações para calcular probabilidade de eventos compostos e resolver problemas”. (CCSSM, 2010, p.82). Essa relação entre a Combinatória com a Probabilidade é observada em outros documentos curriculares.

No documento *Bases Curriculares do 7º básico ao 2º Médio* do Chile (MEC, 2015) (o que equivale a 12 e 15 anos no Brasil), a Combinatória é apresentada no 8º Básico com ênfase ao princípio multiplicativo, árvore de possibilidades, tabelas, com métodos manuais e recursos tecnológicos. Isso reafirma a importância da variedade de procedimentos de resolução de problemas combinatórios apresentada por Kapur (1970), como as enumerações sistemáticas, as tabelas de dupla entrada, alguns procedimentos de generalização e ainda, representações gráficas de diferentes naturezas.

No 1º ano do Médio no Chile, a Combinatória é vinculada à Probabilidade por meio da resolução de problemas, e no 2º ano observa-se o objetivo no eixo da Estatística e Probabilidade que introduz a utilização de “permutações e a combinatória simples para calcular a probabilidade de eventos e resolver problemas” (MINISTERIO DE EDUCACIÓN, 2015, p.125).

Esse objetivo apresenta a Combinatória extremamente vinculada à probabilidade, assumindo o papel de ferramenta, o que é reforçado pelo documento “Programa de estudio Primer año Médio”, quando comenta que “[...] se incorporam as técnicas combinatórias, que constituem verdadeiras ferramentas para ajudar na contagem dos elementos de um espaço amostral” (MINISTERIO DE EDUCACIÓN, 2011, p.68).

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) apresentaram também uma proposta de organização para o currículo de Combinatória a ser desenvolvido na Espanha. Trata-se de uma proposta que discorre sobre a gradação de dificuldades e conceitos combinatórios, em atividades para cada um dos níveis, discussões e indicações para professor sobre aspectos de conteúdos, como também sobre aspectos de gestão de sala e conexões intramatemática.

Observa-se na proposta de Batanero et al. (1996) relativa ao Ensino Médio, o uso de problemas enumerativos, com ênfase ao diagrama de árvores, aos invariantes de *ordenação* e *repetição*, além de justificativas de possíveis erros esperados no tratamento desse conteúdo. Essa indicação corresponde aos aspectos históricos anteriormente apresentados por Knuth (2013). No Quadro 13 apresenta-se um resumo da parte que cabe ao equivalente ao Ensino Médio no Brasil.

No trabalho de *arranjo*, há a indicação da discussão de contextos relativos aos diferentes problemas, o que poderia ser utilizado na verificação de invariantes como *ordenação* e *repetição* presentes, ou não, em cada contexto. As fórmulas, segundo os autores, podem ser alcançadas a partir da dedução com uso da regra de produto (também denominada Princípio Fundamental da Contagem) (BATANERO et al., 1996).

No trabalho com *permutação*, os autores enfatizam diferentes tipos de ordenações que variam tanto com relação à disposição geométrica, quanto pela presença de elementos iguais. A ideia de recorrência pode ser utilizada para a produção da fórmula de permutação, associada à noção de fatorial (BATANERO et al., 1996).

Quadro 13 – Síntese do Currículo de Combinatória proposto por Batanero et al. (1996) equivalente ao Ensino Médio

Amostras ordenadas. Arranjos	Identificar nos problemas combinatórios (modelos de seleção) a necessidade de levar em consideração a ordem para a formação de configurações distintas; Desenvolver o raciocínio combinatório para resolver problemas de arranjo com ou sem repetição; descobrir e utilizar as expressões e/ou fórmulas para o cálculo do número de arranjo com ou sem repetição; Utilizar diferentes esquemas desenvolvidos para a resolução de problemas de arranjo.	- Discutir diferentes tipos de contextos nos quais se apliquem a noção de arranjo; - Proporcionar à verificação nas situações Combinatórias apresentadas quando a ordem e a repetição geram novas possibilidades; - Deduzir as fórmulas de arranjo com ou sem repetição a partir do emprego do diagrama de árvores e da regra do produto; - Introduzir a definição e a notação dos conceitos presentes nas fórmulas de arranjo, como os significados dos parâmetros; - Atentar que os erros mais comuns desses problemas são aqueles que os alunos não consideram a ordem e/ou a repetição quando deveriam considerar;
Permutações. Fatorial	Desenvolver o raciocínio combinatório para resolver problemas combinatórios (modelos de seleção) que requerem contar todas as ordenações possíveis de um conjunto; - Descobrir e utilizar as expressões e fórmulas para o cálculo do número de permutações com ou sem elementos repetidos; Utilizar diferentes esquemas desenvolvidos para a resolução de problemas de permutações com ou sem elementos repetidos.	- Introduzir os conceitos de permutações, permutações circulares, permutações com elementos repetidos como também, permutações com elementos fixos e o estudo de grupos de substituição; - Introduzir a notação fatorial e fazer com que os alunos descubram a fórmula de permutação, com o uso do raciocínio recorrente. - Introduzir a definição e a notação dos conceitos presentes nas fórmulas, como alguns exercícios com fatoriais; - Atentar que um erro comum para os problemas de permutação com elementos repetidos é a compreensão equivocada dos elementos repetidos serem diferentes, respondendo como uma permutação simples; - Em outros casos, se consideram os elementos repetidos fixados e apenas se permuta os demais elementos do conjunto; Outra situação que pode ser proposta é trabalhar com o estudo de grupos de substituição e pontos fixos em uma substituição. Essa ideia é utilizada em resultados curiosos na Combinatória e Probabilidade discutidas nas próximas etapas de escolarização.
Amostras não ordenadas. Combinações	Identificar nos problemas combinatórios a necessidade de não levar em consideração a ordem para a formação de configurações distintas; Desenvolver o raciocínio combinatório para resolver situações de combinação com ou sem repetição; - Descobrir e utilizar as expressões e/ou fórmulas para o cálculo do número de combinação com ou sem repetição;	- Introduzir situações que propõe a formação do cálculo de combinações sem repetição; - Apresentar a partir das situações com números pequenos, ampliar esses números proporcionando a formalização da relação entre os problemas de arranjo, permutação e combinação ($A = P \times C$); - Introduzir combinações com repetição por meio de enumerações sistemáticas e/ou contagem e chegar à dedução de uma relação que permita o cálculo desses problemas. Situações que utilizem o raciocínio recursivo também podem ser utilizadas para esse fim. - Não se faz necessário utilizar a fórmula de combinação com repetição para todos os alunos, apenas para aqueles que demonstram curiosidade, posto que com o raciocínio recursivo se deduz todos os números combinatórios; - Utilizar a relação existente entre números triangulares e combinações simples como foco para descoberta de padrões além de permitir conexões da Combinatória com geometria e álgebra.

Fonte: Batanero, et al. (1996)

No trabalho com a *combinação*, a fórmula é apresentada a partir da regra de quociente, percebida a partir das relações entre *arranjo*, *permutação* e *combinação* ($A = P \times C$). Existe, ainda, a indicação da utilização do raciocínio recursivo e a relação entre números triangulares e a combinação (BATANERO et al., 1996).

Rosenstein (2018, p.34) afirma que na proposta de Currículo para Nova Jersey em 2007 para o Ensino Médio (High School) existe a orientação para a aplicação do PFC “[...] em situações complexas, distinguindo entre situações com ou sem *repetição*, com ou sem ordenação, apresentando justificativas para soluções em problemas de contagem”. Em seu texto, expõe algumas críticas à retirada de temas da Matemática Discreta no Common Core State Standards for Mathematics e defende sua inserção já que “[...] a experiência que os alunos têm ao aprender a usar o raciocínio sistemático para resolver problemas [combinatórios...] pode ser muito significativa na construção de seus pensamentos matemáticos e em outras áreas” (ROSENSTEIN, 2018, p.30, tradução própria).

As propostas curriculares internacionais apontam em diferentes direções, que se complementam: a importância da construção do raciocínio combinatório a partir da resolução de problemas, as relações entre a Combinatória e a Probabilidade, a proposição da variedade de procedimentos apresentando justificativas para os mesmos, a identificação de diferentes propriedades (*ordenação*, *repetição*) nos problemas combinatórios, a utilização de materiais manipulativos para incentivar a inserção desse conteúdo com crianças e a potencialidade da resolução desses problemas para a construção de um pensamento matemático.

No Brasil, foram analisados alguns documentos curriculares oficiais a saber: Parâmetros Curriculares Nacionais Mais do Ensino Médio – PCNEM + (BRASIL, 2002), as Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio – OCNEM (BRASIL, 2006), a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), como também, documentos curriculares oficiais de Pernambuco, Base Curricular Comum de Matemática de Pernambuco – BCC (PERNAMBUCO, 2008), Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco – PCEB (PERNAMBUCO, 2012) e Parâmetros na Sala de Aula Matemática para o Ensino Fundamental e Médio de Pernambuco – PSA

(PERNAMBUCO, 2013). Ademais desses documentos também foram analisados os Guia do PNLD do Ensino Médio, relativo aos anos de 2012 e 2015 (BRASIL, 2011, 2014).

Observou-se que no Guia do PNLD 2012, a Combinatória está inserida no campo de conhecimento de números e operações “representada pela contagem de coleções discretas” (BRASIL, 2011, p.18). Essa classificação está de acordo com o apresentado na 2ª versão preliminar da BNCC que configura o conhecimento matemático dividido em unidades - Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções – e a Combinatória está inserida, na unidade de Números e Operações (BRASIL, 2016).

Por outro lado, as OCNEM subdividem os conteúdos matemáticos em quatro blocos (Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade) e atribuem ao bloco Análise de dados e Probabilidade o estudo da Combinatória, sobre o qual afirmam: “O estudo da Combinatória e da Probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas” (BRASIL, 2006, p.79).

Nos PCNEM+, os conteúdos matemáticos são subdivididos em três temas: Álgebra, Números e Funções; Geometria e medidas; e Análise de dados, e, tal como as OCNEM, a Combinatória é abordada no terceiro tema (BRASIL, 2002). De acordo com a BNCC a compreensão do espaço amostral está associada aos problemas de contagem, principalmente, na ampliação da capacidade da enumeração dos elementos que constituem esse conteúdo (BRASIL, 2018). Nesse sentido, são adotadas na presente pesquisa, a perspectiva do Guia e da BNCC, posto que foram análise um livro didático, mas defendendo que inúmeras relações podem ser realizadas no âmbito do Ensino de Combinatória com a Probabilidade.

Com relação aos documentos curriculares oficiais e orientações sobre o ensino e aprendizagem de Combinatória, o PCNEM+ advoga que conteúdos como esse devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio (BRASIL, 2002, p.127). As orientações curriculares para o Ensino Médio de Matemática (BRASIL, 2006, p.94) sugerem que problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes.

Outro documento de Pernambuco – a Base Curricular Comum (BCC) ainda orienta a ampliação das “[...] estratégias básicas de contagem, evitando-se o ensino restrito a uma extensa lista de fórmulas que não apresentem significado para o aluno” (PERNAMBUCO, 2008, p.111).

Os Parâmetros Curriculares para Sala de Aula de Pernambuco (PSA) propõe para o 1º ano do Ensino Médio o trabalho com Combinatória, como apresentado a seguir:

Nesta etapa da escolarização, o estudo da análise Combinatória deve possibilitar que o estudante amplie, aprofunde e formalize seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório adquirido ao longo do ensino fundamental. O professor deve retomar o assunto, sempre explorando as situações de contextos realísticos e por meio de diferentes representações. Por exemplo, diagramas de árvores, tabelas, n-uplas de elementos etc. De maneira bastante intuitiva, as ideias multiplicativas, abordadas ao longo do Ensino Fundamental, devem servir de ponto de partida para que o estudante resolva problemas de contagem, envolvendo as noções de permutação, combinação e arranjo simples. [...] O estudante deve ser instigado a utilizar estratégias diferenciadas. Nesse momento, não devem ser utilizadas fórmulas (PERNAMBUCO, 2013, p.195).

Observa-se nos Parâmetros Curriculares para Sala de Aula de Pernambuco (PSA) a preocupação com uma diversidade de representações e estratégias de resolução dos problemas combinatórios, além da ênfase a diferentes tipos de problemas combinatórios. Tal proposta curricular de Pernambuco apresenta a necessidade do ensino de Combinatória ao longo do currículo do Ensino Fundamental e Médio e distribui o ensino de Combinatória nos três anos do Ensino Médio, o que se considera um avanço pois propõe retomadas de conteúdos ao longo dos três anos para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Esse documento ainda relaciona o cálculo de probabilidades à Combinatória, e exemplifica no Ensino Médio a probabilidade da união de eventos, como a retirada de bolas coloridas de uma urna, ou mesmo, números com diferentes características, orientando que “Esse trabalho deve ser articulado com as práticas sociais e culturais do estudante (loterias, rifas) e com o raciocínio combinatório”. (PERNAMBUCO, 2013, p.102).

O guia do PNLD 2012, diferente dos anteriores, apresentou além das resenhas das coleções aprovadas, discussões conceituais de cada campo e

orientações sobre questões didáticas referente à articulação desses campos. Com relação ao ensino de Combinatória, nota-se a referência a utilização do Princípio Fundamental da Contagem.

A **Análise Combinatória** [...] Como esse é um tema com muita tradição, sua renovação tem sido lenta nos livros didáticos do ensino médio. Um desses avanços é a introdução do Princípio Fundamental da Contagem, com o qual é possível obter técnicas básicas e muito eficientes de contagem (BRASIL, 2011, p.29).

Essa indicação é reforçada na orientação trazida pela BNCC, no Ensino Médio quando indica como habilidades necessárias para essa etapa:

Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (BRASIL, 2018, p.546).

Nessa habilidade é observada a explicitação do invariante de problemas combinatórios de ordenação, os princípios aditivo e multiplicativo utilizados como estratégias de resolução, além do diagrama de árvore, o que direciona o olhar do professor para esses elementos, ao invés de fórmulas.

Nos anos finais do Ensino Fundamental a BNCC indica uma diminuição do número total de possibilidades para que seja possível a aplicação de procedimentos enumerativos na resolução de problemas combinatórios, como observa-se na citação a seguir:

Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. (BRASIL, 2018, p.275).

Há também observações no Guia dos Livros didáticos do PNLD aos objetivos relativos ao ensino de Combinatória, desaprovando o uso de fórmulas em detrimento a diferentes técnicas de contagem e da abordagem estanque dos problemas de *combinação*, *arranjo* e *permutação*.

Todas as obras aprovadas o apresentam[PFC], mas muitas delas imediatamente o colocam de lado e voltam-se para o tratamento tradicional e estanque das combinações, arranjos e permutações. Na verdade, os problemas de contagem mais interessantes exigem o uso de mais de uma dessas técnicas. Um dos objetivos de um bom ensino de análise Combinatória é desenvolver no aluno a capacidade para escolher diferentes técnicas de contagem e usá-las de modo eficiente na resolução

dos problemas. É prejudicial um ensino que habitue o aluno a sempre tentar resolver qualquer problema de contagem com o uso somente de fórmulas (BRASIL, 2011, p.29).

Esse cuidado, ao trabalhar com as fórmulas de Combinatória, corrobora o apresentado no PCNEM + quando apresenta que “As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande”. (BRASIL, 2002, p.126-127). Essa orientação também é observada em outros textos curriculares como a BCC quando orienta a ampliação das “[...] estratégias básicas de contagem, evitando-se o ensino restrito a uma extensa lista de fórmulas que não apresentem significado para o aluno” (PERNAMBUCO, 2008, p.111).

Nesse contexto, um dos objetivos explicitados pelo PCNEM+ para a Combinatória no Ensino Médio, perpassa a organização das informações para simplificar cálculos nas situações reais, a percepção de regularidades e estabelecimento de regras nos processos de contagem, como também, o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A Contagem, ao mesmo tempo que, possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2002, p.126).

Vê-se nesse extrato, outro aspecto abordado, especificando as relações entre Combinatória e outros conteúdos matemáticos. Do mesmo modo incide o Guia do PNLD (BRASIL, 2011) quando afirma:

Ao estudar as permutações, em geral, não se aproveita a oportunidade para relacioná-las com funções: uma permutação de um conjunto finito é, simplesmente, uma função bijetiva desse conjunto nele mesmo. (BRASIL, 2011, p.29).

Outra limitação vem de uma tradição arraigada de se anteceder o estudo da probabilidade (e da estatística) por um longo e fragmentado capítulo de Análise Combinatória. É certo que a contagem de possibilidades é uma ferramenta muito útil para resolvermos problemas de probabilidades, quando se utiliza sua definição clássica. No entanto, estender demais a preparação em Análise Combinatória induz o aluno a pensar que, sem todo aquele arsenal não é possível compreender probabilidades (nem estatística) (BRASIL, 2011, p.38,).

Essa discussão também é referendada na OCNEM quando afirma

A Combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as idéias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias (BRASIL, 2006, p.79).

No PCE-PE observou-se uma discussão sobre as Tecnologias e sua repercussão em novos campos intra-matemáticos no âmbito da Matemática discreta.

[...] verifica-se que repercutiram de forma evidente, na Matemática, as novas tecnologias de armazenamento e comunicação de informações, de computação automática e de criação de “realidades virtuais”. Não só a Matemática passou a ser empregada de forma mais extensiva e aprofundada, como novos campos surgiram, especialmente no âmbito das variáveis discretas, ampliando de forma impressionante o conhecimento matemático. [...] Matemática do discreto, que lida com a Combinatória e suas ferramentas teóricas para a contagem sistemática de conjuntos discretos e com outros campos de conhecimento envolvendo estruturas de tais conjuntos, a exemplo dos grafos. (PERNAMBUCO, 2012, p.31).

Esse documento (PCE-PE) também acrescenta, sem fazer relação com a Combinatória, o papel da Calculadora e de outras possibilidades tecnológicas no ensino de Matemática.

Um primeiro ponto a mencionar é o papel que a calculadora e o computador desempenham para, entre outras possibilidades: facilitar os cálculos com números de ordem de grandeza elevada; armazenar, organizar e dar acesso a grande quantidade de informações (banco de dados); fornecer imagens visuais para conceitos matemáticos; permitir a criação de “micromundos” virtuais para a simulação de “experimentos matemáticos” (PERNAMBUCO, 2012, p.32).

Nesse documento ainda apresentou-se a discussão sobre a utilização de jogos na Matemática, inclusive na Combinatória: “Outro aspecto a ressaltar é o de que muitos dos jogos propiciam a integração de várias áreas da Matemática – aritmética, álgebra, geometria, combinatória etc –, o que tem sido uma das mais ricas características dessa ciência” (PERNAMBUCO, 2012, p.36).

Nessa mesma direção, o PSA afirma que nos anos iniciais do Ensino Fundamental “O trabalho envolvendo noções de combinatória deve partir de situações lúdicas e próximas ao estudante” (PERNAMBUCO, 2013, p.186), mas considera que “[...] importante que, desde os anos iniciais, o estudante seja

exposto a problemas desta natureza, que, no Ensino Médio, serão formalizados (PERNAMBUCO, 2013, p.187).

Ao comparar as informações dos documentos curriculares nacionais, com as propostas curriculares internacionais, observam-se coincidências, como as relações entre a Combinatória e a Probabilidade, a proposição da variedade de procedimentos em relação aos procedimentos algorítmicos (fórmulas) e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. O tratamento com materiais manipulativos e jogos fica restrito aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Atenta-se para a vasta gama de problemas combinatórios que ultrapassam o arranjo, combinação e permutação, mas não há menção para a identificação de diferentes propriedades (*ordenação, repetição*) nos problemas combinatórios.

3.2 DIMENSÃO INSTRUMENTAL (MEDIACIONAL E INSTRUCIONAL) DA COMBINATÓRIA EM PESQUISAS

A dimensão instrucional tem a ver com as facetas interacional e mediacional. Dessa forma, está orientada para analisar os padrões de interação entre professor e estudantes e sua sequência de ensino, sendo destinada a construção e negociação de significados, como também, os recursos que podem ser utilizados para mediar o ensino e aprendizagem de Combinatória. Assim, nessa seção descrevem-se as pesquisas que tratam os recursos previstos e/ou utilizados e aquelas que lidam com os participantes e seu papel no ensino e aprendizagem de Matemática.

Com relação aos recursos para ensinar e aprender, observaram-se várias pesquisas que tratam do livro didático. Esse recurso já abordavam questões sobre o ensino de Combinatória, desde a década de 1960. Por exemplo, no livro intitulado *Um curso Moderno de Análise Combinatória*, de Rui Madsen Barbosa, há um capítulo todo dedicado à utilização das árvores de possibilidades, sendo creditado pelo autor, a relevância dessa representação para a resolução de problemas combinatórios. Em seu prefácio, confirmando isto, encontra-se a seguinte citação: '[...] dedicamos, dêste modo, especial atenção ao recurso das árvores de possibilidades, o qual reputamos de grande valia didática' (BARBOSA, 1963, p.1). A escolha do autor corrobora a pesquisa desenvolvida

por Fischbein, Pampu e Mînzat (1970) que acreditavam no potencial da árvore de possibilidades para auxiliar alunos na construção de sequências e na identificação de regularidades.

Sabo (2007) analisou a proposta do ensino de Combinatória em três livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio utilizados pela rede pública de São Paulo, embasado pela Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Nesse estudo, o autor verificou que os livros analisados valorizam, na abordagem de Combinatória, a aplicação de fórmulas algébricas, implicando numa redução de estratégias de resolução, não favorecendo a utilização de árvores de possibilidades ou a enumeração dos agrupamentos. Além disso, os exercícios valorizam tarefas semelhantes e por consequência, técnicas também semelhantes, não propiciando o desenvolvimento do raciocínio combinatório e, ainda, enfatizando uma prática docente que se fundamenta em um padrão improdutivo.

Braga (2009) investigou o desenvolvimento do processo ensino e aprendizagem de Combinatória, na visão dos professores de Ensino Médio no Piauí. Para isso aplicou um questionário para 19 professores que ensinam esse conteúdo em sete escolas e posteriormente realizou uma entrevista com 14 desses professores. O questionário tratava de aspectos relativos a importância da Combinatória no Ensino Médio, as dificuldades de aprendizagem dos alunos e sobre os recursos didáticos utilizados.

A entrevista focalizou os livros didáticos utilizados pelos professores para ensinar Combinatória, identificando críticas, observações e aspectos como abordagem, sistematização e contextualização do conteúdo. Tais aspectos fizeram parte das análises dos livros didáticos utilizados pelos participantes da pesquisa, especificamente para o capítulo de Combinatória dessas obras. Outros dados, como a apresentação de conceitos de *arranjo* e *combinação*, a resolução com uso de representações, a inclusão de fatos históricos a apresentação das fórmulas e a demonstração matemática das mesmas, foram acrescentados como critérios de análise.

Como resultado, a maioria dos participantes da pesquisa afirmou utilizar outros recursos além do livro didático para ensinar Combinatória, tais como, materiais manipulativos (bolas coloridas, figuras ilustrativas), recursos tecnológicos (sites, calculadora), materiais lúdicos (baralhos, cubo).

Pouquíssimos professores na entrevista afirmaram possuir dificuldades no ensino de Combinatória, mas alguns assinalaram ter algumas delas em propiciar o desenvolvimento de habilidades de interpretação do texto do problema pelo aluno, ou de habilidades de compreensão das características nos enunciados de problemas combinatórios, como por exemplo, se deve somar ou multiplicar o número de comissões.

Com relação aos livros didáticos, a autora analisou quatro capítulos de Combinatória do Ensino Médio (dois de livros do 2º ano, um de livro volume único, uma apostila de Vestibular). Foram observados no geral, que a abordagem faz uso de exercícios resolvidos para apresentar o conteúdo, e que no volume único e na apostila esse número é reduzido. A sistematização que é comum aborda PFC, *fatorial*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*, e que apenas um dos livros abordou, o *princípio aditivo*, e outro o Binômio de Newton.

Observou-se que as questões são contextualizadas, excetuando a parte que trata de fatorial. Com relação à introdução de fórmulas, dois dos livros começam a partir de exercícios resolvidos, fórmulas e definição, os demais apresentam a definição seguida de questões resolvidas e fórmula. O uso de representações para resolução de problemas combinatórios não é variado (pouquíssimos exemplos com uso árvore de possibilidades). Nenhum dos capítulos observados faz uso do recurso de História da Matemática para o ensino de Combinatória. Segundo a autora

As obras analisadas trazem os tipos de agrupamentos separadamente, e não preocupam-se em relacionar esses agrupamentos. Não deixando claras as diferenças essenciais entre eles. Como as questões só trabalham um agrupamento de cada vez, fica mais difícil para o aluno e para o professor visualizar essas diferenças. (BRAGA, 2009, p.57).

Outro aspecto observado em investigações diz respeito à evolução do livro didático, pelo menos com relação aos aspectos vislumbrados pelo Programa do PNLD. Tal aspecto é discutido na pesquisa de Ferreira (2015), especificamente com relação à Combinatória.

Ferreira (2015) buscou investigar as propostas didáticas desse conteúdo apresentadas por três livros didáticos de Matemática do Ensino Médio entre 1960 e 2000 (respectivamente dos anos de 1966, 1967 e 2005). O trabalho enfocou

aspectos relativos à contextualização, se fundamentando nas discussões dos documentos curriculares oficiais. O autor assegurou que os livros mais antigos, priorizavam a linguagem formal para a discussão do conteúdo, enquanto que o livro mais recente utiliza a linguagem menos formal. Em relação à contextualização, Ferreira (2015) ressaltou que o livro mais recente apresenta maior diversidade de contextos, enquanto que a ênfase maior dos livros de 1960 era o contexto matemático.

Espinoza e Roa (2013) abordaram o tratamento dado a Combinatória nos livros didáticos da Educação Secundaria da Espanha. Para isso escolheram como base a teoria dos significados pessoais e institucionais proposta por Godino e Batanero (1994).

Nesse estudo, os autores analisaram quatro livros didáticos definidos como uma instituição no sentido mais 'amplo', porque neles existem problemas matemáticos propostos e são descritas práticas específicas para descrevê-los, muitas vezes utilizando os meios próprios da Matemática (ESPINOZA; ROA, 2013, p.3).

Para análise foram escolhidas as variáveis a seguir: a) Local do capítulo de Combinatória no livro; b) Conteúdos inclusos, notações empregadas e ordem de apresentação; c) Abordagem dada às definições; d) Modelo combinatório considerado e o enunciado do conceito combinatório; e) Utilização de Recursos didáticos; f) Presença de considerações históricas; g) Exemplos e exercícios resolvidos e propostos sobre os conteúdos relativos à Combinatória.

Como resultados, os autores observaram notações similares para os problemas combinatórios básicos e verificaram que estes utilizam como recurso a calculadora apenas para simplificar cálculos. Em relação à organização e distribuição de exercícios de Combinatória os livros, apresentaram um exemplo introdutório, em seguida a definição e, após isso, vários outros exercícios.

Espinoza e Roa (2014), em outro estudo, visaram à caracterização do significado institucional do objeto matemático Combinatória em livros didáticos. Nessa pesquisa, os autores apresentaram a abordagem teórica apresentada nos livros para esse conteúdo, e ainda categorizaram as tarefas propostas em um desses livros.

Como resultado, os autores afirmam que a Combinatória encontra-se separado dos capítulos de Probabilidade e Estatística, não apresentando

atividades no capítulo de Probabilidade que façam referências a Combinatória. Na análise realizada no livro, os autores constataram que os problemas combinatórios estão divididos pelo conteúdo combinatório que os estudantes devem utilizar na sua resolução. Tal explicitação do conteúdo limita a identificação do tipo de problema pelo aluno.

Silva (2015) analisou os problemas combinatórios condicionais presentes nas coleções de livro didático do Ensino Médio. Fundamentado na discussão de Borba e Braz (2012) e na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991) identificou as relações Combinatórias condicionais presentes nos livros (posicionamento, proximidade, explicitação (ou não) de elementos) como também as situações, invariantes e representações simbólicas relacionadas a tais problemas.

Foram analisadas sete coleções aprovadas no Guia do PNLD 2015 (BRASIL, 2014). Quanto aos problemas combinatórios condicionais não se apresentara de maneira equivalente nas coleções variando entre os percentuais de 13,1% a 42,2% da totalidade de problemas combinatórios presente nos livros didáticos. Quanto a variedade de tipos de problemas combinatórios condicionais mais frequentes acusou-se que são respectivamente *permutação*, *combinação* e *arranjo*. O autor também afirma que nos manuais do professor não há menção a qualquer tipo de orientação para o trabalho com esses tipos específicos de problemas em sala de aula.

Um trabalho mais recente, apesar de não ser no Ensino Médio e sim nos anos iniciais do Ensino Fundamental, utiliza-se da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval para analisar como as representações semióticas de Combinatória são abordadas em livros didáticos desse nível de ensino. Borba, Azevedo e Bittar (2016) analisaram duas coleções de livros didáticos, a primeira relativa a Alfabetização Matemática e a segunda relativa ao 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. As autoras concluíram que, esses livros, apresentam situações com variados registros de representação semiótica, apesar de não apresentarem todos os tipos de problemas combinatórios. Com relação às conversões entre registros de representação observadas, Borba, Azevedo e Bittar (2016) constataram que as mais frequentes são as que transformam a Linguagem Natural e Desenho para Listagem, Linguagem

Natural e Desenho para expressões numéricas, Linguagem Natural e Desenho para Desenho.

Deduz-se, portanto, que diversos aspectos permeiam um único conteúdo nos livros didáticos (representações, linguagens, contexto, forma de apresentação dos conteúdos, locais do capítulo tipos de situações e problemas combinatórios, relações condicionais). Com relação à Combinatória já vislumbram-se aspectos positivos como ênfase em problemas mais contextualizados, mas outros ainda necessitam de incentivo a mudanças, como é o caso de problemas dispostos em seções que informam o tipo de procedimento que deve ser seguido e memorizado, ou mesmo o papel do manual do professor e a ampliação de sugestão e/ou orientações para o desenvolvimento de um bom trabalho. Observar como estão ocorrendo essas pequenas mudanças nos livros didáticos, acompanhar alterações em alguns procedimentos, situações-problemas pode ser realizado com o aporte do EOS.

Em outra direção, alguns trabalhos apresentam recursos estruturados para o ensino de Combinatória tais como jogos, ou recursos tecnológicos.

Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) analisaram cinco softwares/ objetos de aprendizagem, três dos quais se encontram disponíveis na Rede Interativa Virtual de Educação (RIVED). Os recursos encontrados foram os softwares Diagrama de Arbol, MI Combiner, e os objetos de aprendizagem Arranjo, Combinação e Permutação.

Os objetos de aprendizagem promovem problemas combinatórios contextualizados, possibilitando a manipulação de alguns objetos para ordenar, ou escolher diferentes possibilidades. Existem, ainda, possibilidades de consultas das definições dos diferentes tipos de problema.

Ainda com relação ao uso de tecnologias digitais no ensino de Combinatória, pesquisas como Azevedo e Borba (2013) fizeram uso do software Diagrama de Arbol para fundamentar a intervenção desses problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O software possibilita a enumeração das possibilidades de diferentes tipos de problemas combinatórios por meio da construção de árvore de possibilidades. Tal prática pode também ser utilizada no Ensino Médio, para auxiliar na construção de raciocínios recursivos nas aulas de Combinatória.

Aguiar (2013), em sua dissertação, teve por objetivo inferir se a utilização de Objetos de Aprendizagem facilita o processo de ensino-aprendizagem do Princípio da Casa dos Pombos. Para isso foram selecionados dois grupos de 10 alunos (experimental e controle) do 2º ano do Ensino Médio. De acordo com o autor tal princípio é fundamental na Combinatória, sendo aplicado em alguns teoremas matemáticos e pode se tornar uma importante ferramenta para resolução de problemas combinatórios não comuns.

O grupo experimental utilizou como recurso o objeto de aprendizagem ‘Casa, pombos e matemática²²’, que tem por objetivo apresentar tal princípio a partir de atividades que envolvam números, geometria e sorteio de bolas coloridas. Os alunos puderam, primeiro, responder as questões propostas pelo aplicativo e depois socializar as dúvidas com o professor por meio do Datashow. Já o grupo Controle teve aula tradicional com recurso do quadro e de algumas atividades que envolviam o Princípio da Casa dos Pombos. Após a aplicação cada grupo teve que resolver oito problemas. O estudo mostra que o grupo experimental teve maior desempenho do que o grupo controle.

Chilela (2013) objetivou analisar uma proposta de ensino de Combinatória utilizando o jogo de pôquer. Com base na engenharia didática propôs uma sequência didática envolvendo situações de contagem e seleção apresentadas no contexto do jogo aplicadas no 2º ano do Ensino Médio. De acordo com o autor a experiência possibilitou ao estudante atribuir significado à Combinatória por meio da contagem dos agrupamentos relacionados às diferentes “mãos” do pôquer; despertar o interesse pelo o que foi desenvolvido. Também notou que a diminuição do número de cartas do jogo permitiu um processo enumerativo, favorecendo a utilização de árvores de possibilidades, entre outras operações combinatórias.

Ambrozi (2017), em sua dissertação, teve por objetivo explorar conceitos combinatórios por meio de recursos digitais, jogos e estudos orientados. A proposta foi aplicada no 2º ano do Ensino Médio, consistindo de problemas iniciais com base em história da matemática, exploração de três jogos da internet (Jogo Yellow Out; Jogo Twibik; Jogo de Pulo Sapo) e da exploração de jogos

²² Para conhecer o objeto de aprendizagem, visitar a página <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1223>

que envolve o conteúdo tais como: Quadrado, Senha, Bicolorido, Trilha Combinatória.

Segundo o autor, “houve uma melhora significativa no entrosamento das equipes de trabalho” e o jogo Senha proporcionou aos estudantes conhecimentos de *arranjo e permutação* ao “explorar e a construir técnicas próprias para prever possíveis jogadas do adversário e chegar a uma solução com o menor número possível de jogadas”. (AMBROZI, 2017, p.93).

Muitos recursos para o ensino de Combinatória estão sendo investigados, mas o recurso preferido são os livros didáticos, inclusive nas referidas investigações. Nas pesquisas apresentadas observam-se propostas de recursos lúdicos para o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória até mesmo no Ensino Médio, reinterando o papel motivador e desafiador para desencadear a construção de técnicas de contagem pessoais dos alunos, participantes das pesquisas, o que, de certa forma, acrescenta ao proposto pelos documentos oficiais curriculares nacionais.

Aspectos pontuais foram encontrados com relação à interação entre professor-aluno no ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.

Na investigação realizada por Godino, Batanero e Roa (2005, p.28) os autores defendem a importância de se “considerar um raciocínio matemático como sequência de funções semióticas (ou cadeia de conhecimentos postos em relação) no processo de resolução de problemas por parte do sujeito”. Esse raciocínio pode, ainda, segundo esses autores, ser uma “sequência de práticas de ação e discursivas durante a resolução de um problema para um sujeito”.

Na mesma direção, a pesquisa de Almeida (2010) buscou investigar o papel da comunicação matemática em uma proposta de Combinatória construída com base na resolução de problemas para alunos do 2º ano do Ensino Médio. Para a autora, “Ao expressar-se, elaborando argumentos, o indivíduo atribui significado e se apropria do conhecimento, potencializando assim maior autonomia no processo de ensino e aprendizagem” (ALMEIDA, 2010, p.36).

Tais pesquisas apontam para a necessidade do professor estar atento para as produções dos alunos – sejam ações, estratégias desenvolvidas, ou mesmo, comentários – a fim de compreender os significados pessoais em jogo

ao longo da aula. Dessa forma, algumas mudanças têm que ser produzidas nas aulas para que o aluno sinta necessidade de responder o problema.

3.3 DIMENSÃO COGNITIVO-AFETIVO DA COMBINATÓRIA EM PESQUISAS

Essa dimensão discute sobre as pesquisas que tratam de aspectos relativos a como os alunos constroem os conhecimentos relativos a Combinatória, como esses podem ser ampliados como também as dificuldades encontradas nas pesquisas. Com relação a dimensão afetiva seriam as pesquisas que lidam com crenças, concepções, emoções e atitudes de estudantes ou professores frente as ações de aprender ou ensinar Combinatória, respectivamente.

Piaget e Inhelder (1951) investigaram por meio de entrevistas clínicas a formação de sistemas completos na enumeração de operações combinatórias (*combinação, permutação e arranjo*). Para esses autores “a formação das ideias de acaso e de probabilidade depende, em estreita medida, da evolução das próprias operações combinatórias” (PIAGET; INHELDER, 1951, p.227). As entrevistas tiveram como base questionamentos acerca da manipulação de montes de tentos de diferentes cores (pedrinhas coloridas) e a criação de histórias para despertar o interesse das crianças.

Para a operação de *combinação* os autores restringiram a construção para a escolha de pares, utilizando algumas vezes, o contexto de personagens passeando dois a dois. Na entrevista foi observado que crianças de idades até 7 anos, usam o método empírico, manuseio das peças, sem a presença de um plano sistemático, o que geralmente ocasiona a *repetição* de possibilidades ou o não esgotamento das possibilidades. Já em crianças de 8 a 11 anos as crianças tentam estabelecer um sistema para que não ocorra esquecimento de possibilidades, mas o sistema não se configura. Apenas entre os 11 e 12 anos que esse sistema completo é formulado pelas crianças.

Para Piaget e Inhelder (1951), essa dificuldade ocorreu pela natureza das operações combinatórias que

constituem um sistema único tal que as precedentes comandam as seguintes[...] Ao construir um sistema de todas as combinações duas a duas possíveis no caso de n termos, trata-se de coordenar entre elas várias séries ou correspondências diferentes e de antecipar o esquema de suas relações antes de construí-las efetivamente (PIAGET; INHELDER, 1951, p.242).

Na operação de *permutação*, as entrevistas foram realizadas ampliando o número de objetos a serem permutados, com 2, 3 e 4 objetos de diferentes cores. Piaget e Inhelder (1951) apontaram que crianças (7-8 anos) não apresentaram nenhum sistema para realizar as permutações empíricas; as crianças (8-12 anos) conseguiram elaborar métodos parciais; no entanto, o sistema completo de permutações só foi observado em crianças a partir de 15 anos.

Para os autores “achar empiricamente as diferentes permutações possíveis consiste em seguir adiante na procura de mudanças perdidas”.

Nesse contexto, os autores afirmaram que as crianças apresentaram mais dificuldades nas permutações que em combinações, mesmo aquelas realizadas empiricamente, e justificaram

[...] permutar posições – quer dizer, mudar a ordem dada – pressupõe certa mobilidade, seja de natureza operatória (estágio II), seja acentuando ao menos o que chamamos em outra parte de descentralizações próprias das intuições articuladas (subestágio IB). Na ausência dessa mobilidade, a ordem de partida constitui obstáculo ao impor-se como única possível[...] ao passo que as combinações pressupõem o acréscimo de novos elementos e, desse ponto de vista, constituem uma conduta mais fácil (PIAGET; INHELDER, 1951, p.250).

Sobre a operação de *arranjo*, o experimento de Piaget e Inhelder (1951) foi realizado em conjunto com ideias de acaso. Os autores solicitaram para que as crianças fizessem o *arranjo* escolhendo as cartas de três pilhas diferentes, depois fizeram uma pilha com todas as cartas e orientaram as crianças para que tirassem duas e adivinhassem a próxima. Por fim, as possibilidades foram registradas e os autores criaram a seguinte situação: Se o número de cartões fosse ampliado o que aconteceria com o número de possibilidades de *arranjos*. aumentaria ou diminuiria?

Com esse experimento, Piaget e Inhelder (1951), identificaram que crianças até 7 anos utilizam procedimentos não sistemáticos e com relação a

previsão de cartas se baseavam em experiências anteriores. Com crianças de 8 a 10 anos, ou autores afirmaram que já procuravam um procedimento sistemático, por meio de tentativa e erro as mesmas desvendaram procedimentos experimentais limitados para a construção de *arranjos*. Para crianças com 11 a 12 anos as crianças conseguiram listar o esgotamento de possibilidades para o *arranjo* de três e quatro elementos, tomadas dois a dois, mas não conseguem justificar como chegam ao resultado. Já crianças de 11 a 13 anos, compreenderam o *arranjo* com *repetição* e conseguiram operar com a fórmula n^2 .

Fischbein (1975), em suas pesquisas, criticou a conclusão obtida por Piaget e Inhelder (1951) nesse estudo. Fischbein (1975, p.105, tradução própria) defendeu e compreendeu que “durante o estágio das operações formais (12-15 anos) as capacidades intelectuais requeridas para operações Combinatórias são desenvolvidas gradualmente e continuamente, e esse desenvolvimento não é, de fato, concluído durante esse estágio.” Esse autor afirmou ainda que “mesmo no nível de operações formais, técnicas Combinatórias não são adquiridas espontaneamente. Instrução é necessária” (FISCHBEIN, 1975, p.115). Além disso, retoma alguns pontos da pesquisa de Piaget e Inhelder (1951).

Uma análise mais detalhada dos resultados obtidos por Piaget e Inhelder evidencia os seguintes aspectos de desempenho ao nível das operações formais. Em primeiro lugar, nem todos os sujeitos nesta idade são capazes de descobrir o método de construção de combinações. Não sabemos que porcentagem do total desses sujeitos representa. Os sujeitos não são capazes de lidar satisfatoriamente com arranjos até a idade de 13 anos, e eles não encontram um método para lidar com permutações, embora esta pareça ser uma operação mais simples, até a idade de 14-15 anos. Tudo isto indica que, durante o estágio de operações formais (12-15 anos), as capacidades intelectuais necessárias para as operações Combinatórias continuam a se desenvolver gradualmente, e este desenvolvimento não é, de facto, concluído durante esta fase. Em segundo lugar, como vimos, o desenho experimental utilizado por Piaget e Inhelder incorporou um fator de aprendizagem, uma vez que o aumento gradual no tamanho de conjunto dos elementos sugeriu um método particular para os sujeitos. (FISCHBEIN, 1975, p.105, tradução própria).

Interessado na problemática de ensino de Combinatória, principalmente pelo seu rebatimento na Probabilidade, Fischbein (1975, p.107) se questionando sobre “é possível que a instrução sistemática possa acelerar essa aquisição?”

indicou que um dos aspectos relevantes do processo de instrução é “a aquisição de estruturas, e não de informações específicas ou procedimentos específicos”. Para esse autor, o estudante que está para aprender uma operação combinatória precisa

[...] já possuir um conjunto de esquemas intelectuais, a saber, o raciocínio hipotético-dedutivo, a generalização indutiva e a capacidade de combinar essas duas abordagens em um único procedimento iterativo – um infinito método recursivo de gerar uma sequência ilimitada de resultados a partir de um dado conjunto, e que está sujeito a um rigoroso controle (FISCHBEIN, 1975, p.107, tradução própria).

Embasado na discussão de prefiguração de estruturas²³ como estratégia de ensino, Fischbein (1975, p.115) afirmou que “Mesmo no nível das operações concretas, é possível induzir as crianças a assimilarem as técnicas Combinatórias com bastante facilidade com a ajuda de imagens figurativas”.

Fischbein, Pampu e Minzat (1970) analisaram o efeito da instrução direta para estudantes de 10, 12 e 14 anos de idade na resolução de problemas de *arranjo* e *permutação*. As sessões foram realizadas individualmente e utilizavam cartões de letras, números e figuras geométricas coloridas, e tinham como objetivo a estimativa do número de permutações para três, quatro, cinco objetos e a construção de estratégias sistemáticas para calcular o número de possibilidades de *arranjo* e *permutação*.

Como resultados para o primeiro objetivo, os autores afirmaram que as diferenças entre os estudantes de menor ou maior idade se tornam mais amplas à medida que aumenta o número de objetos considerados.

Para o ensino, os autores criaram a técnica de instrução por descoberta programada. Tal instrução iniciou com uma pergunta de fácil resolução para os estudantes, depois da resolução, os alunos realizavam os próximos passos por transferência ou generalização. O diagrama de árvores foi escolhido como padrão figural para o experimento. Foram abordados *arranjos* de dois diferentes objetos em grupos de três, e de quatro, *permutação* de três, quatro e cinco letras.

²³ Para Fischbein (1975, p.109) “A prefiguração de estruturas é uma estratégia de ensino geral que exprime a necessidade (e não apenas a possibilidade) de preparar a assimilação de estruturas abstratas, prefigurando essas estruturas na fase anterior do desenvolvimento intelectual àquela em que são normalmente assimiladas, mas que utiliza os métodos apropriados para esta etapa anterior”.

Os resultados apontaram que as variações entre os três níveis etários indicam uma melhoria progressiva das respostas, no entanto, as diferenças diminuíram na etapa de instrução. Fischbein, Pampu e Minzat (1970, p.200) afirmaram que “No que diz respeito à capacidade Combinatória, uma instrução bem conduzida pode determinar aquisições estruturais, cuja eficiência é demonstrável pelos efeitos de transferência remota que nós mesmos temos verificado”.

No Brasil, o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, apesar de ser incentivado por documentos curriculares oficiais desde os anos iniciais do Ensino Fundamental – os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), ou mesmo, problemas combinatórios estarem presentes em livros didáticos desse nível de ensino (BARRETO; BORBA, 2010), grande parte das práticas que abordam a Combinatória ocorrem no Ensino Médio. O raciocínio combinatório é compreendido por Borba (2010, p.3) como:

um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (BORBA, 2010, p.3).

Bonilla Martínez e Rueda Mejía (2011, p.10), pesquisadores colombianos, caracterizam o raciocínio combinatório como processos que as pessoas mobilizam na ação de “[...] enfrentar situações Combinatórias, nas quais os procedimentos se enquadram em uma árvore de ideias onde as pessoas tomam decisões frente ao problema, baseando-se em um conjunto de intuições ou heurísticas”.

DeTemple e Webb (2014, p.ix) compreendem o raciocínio combinatório como as “observações criativas e engenhosas” utilizadas na resolução de problemas combinatórios. Esses pesquisadores americanos asseguram que muitos dos resultados dos problemas combinatórios, são encontrados a partir da aplicação desse raciocínio em modelos, que utilizam simples cálculos algébricos.

Hart e Sandefur (2018, p. vi) afirmam que o raciocínio combinatório é “[...]a habilidade de pensar sobre o tamanho de conjuntos, o processo de contagem ou a configuração combinatória para responder à questão: Quantos são?”

Assim, o raciocínio combinatório promove o desenvolvimento de uma maneira sistemática para a organização de dados e escolha de conjuntos ou

subconjuntos em diversas situações no dia a dia dos alunos, constituindo-se um instrumento importante na formação da cidadania.

O processo de ensino e aprendizagem que promove a construção do raciocínio combinatório se influencia por diferentes aspectos, como por exemplo, as escolhas de recursos didáticos e/ou situações-problema do livro didático; aqueles relativos à sala de aula e dos sujeitos envolvidos (expectativas de alunos, professores, conhecimentos prévios); os relativos à construção dos conceitos combinatórios (aspectos históricos, propriedades, representações e conexões com outras áreas); se a formação inicial e/ou continuada dos professores formadores priorizam tais elementos, entre outros.

Hadar e Hadass (1981) apresentaram algumas dificuldades dos estudantes ao resolver problemas combinatórios: 1. Não reconhecem o conjunto que deve ser enumerado em problemas combinatórios; 2. Não escolhem uma notação apropriada; 3. Mesmo após de ter escolhido uma notação apropriada os alunos não encontram a solução; 4. Não conseguem construir um método sistemático de contagem.

Navarro-Pelayo (1994) indicou que erros no desenvolvimento do raciocínio combinatório podem acontecer em situações relacionadas com a estimação de probabilidades. Alguns erros centram-se na impossibilidade de enumerar todas as possibilidades presentes em um problema combinatório. Segundo a autora, um exemplo seria os alunos dizerem que escolher duas pessoas em um grupo de oito tem mais possibilidades do que escolher um grupo de seis pessoas em um grupo de oito. O fato de escolher duas pessoas ser mais fácil de imaginar, ou mesmo de mencionar variados exemplos, induz a pensar que a quantidade é maior do que escolher oito. Existe uma propriedade da combinação que indica que esses números são iguais.

Ainda segundo Navarro-Pelayo (1994), com relação à efetividade dos padrões de busca, pode-se pensar em situações que já se pensou anteriormente em comparação com aquelas que ainda não se conhece. Por exemplo listar anagramas de seis letras que comece com a letra m, parece ter mais possibilidades, do que aquelas em que a condição seria que o m estivesse na terceira posição da palavra. Apesar de nesse caso, se tratar de problemas de *arranjo com condição* e não ter diferença no número de possibilidades a posição em que uma letra está fixada.

Godino, Batanero e Roa (2005) aplicaram o EOS para analisar a resolução de problemas combinatórios em classes equivalentes ao Ensino Médio na Espanha. A partir da aplicação desse modelo, os autores identificaram conhecimentos corretos e incorretamente utilizados por quatro alunos na resolução de problemas combinatórios.

Os autores subdividiram os problemas combinatórios em quatro tipos denominados de seleção, distribuição, partição e problemas combinatórios compostos que utilizavam os anteriores combinados pelas regras da soma ou produto. Na linguagem além das palavras utilizadas para denominar os tipos de problemas e respectivas notações de fórmula, foram utilizadas representações tabulares (triângulo de Pascal), diagramas de Venn, árvores de possibilidades e elementos icônicos.

Os conceitos combinatórios trabalhados incluíram além dos tipos de problema, conjuntos, parâmetros, subgrupos que são utilizados em ações como ordenar grupos ou escolher amostras. Argumentos utilizados pelos alunos nessa pesquisa relacionam os diferentes elementos da Combinatória, e de acordo com os autores, os alunos utilizaram não apenas provas dedutivas, mas também enumerações de possibilidades (parciais ou totais), ou ainda fórmulas Combinatórias.

Como resultados da análise dos protocolos de resolução de problemas combinatórios pelos alunos, os autores apontam para variação de objetos combinatórios utilizados pelos mesmos, variando inclusive em um mesmo problema, o que representa “[...] a pluralidade de conhecimento usada pelos alunos na solução de problemas combinatórios e a diversidade do significado pessoal (idiossincrático e sistêmico) dos alunos para a Combinatória elementar” (GODINO; BATANERO; ROA, 2005, p.24).

Em relação aos alunos do Ensino Médio, Pessoa (2009) verificou que a estratégia que os alunos do Ensino Médio mais evidenciaram foi a multiplicação inadequada, seguida da estratégia de listagem e da multiplicação adequada, mas pouco se evidenciou o uso de fórmulas ou mesmo do princípio multiplicativo. O uso de fórmulas foi mais frequente no 3º ano do Ensino Médio porque haviam vivenciado esse ensino de Combinatória, no entanto muitos alunos utilizaram as fórmulas de maneira inadequada (trocando os tipos de problemas).

Bonilla Martínez e Rueda Mejía (2011) propuseram níveis de raciocínio combinatório produzidos por estudantes universitários na Colômbia. Segundo os autores diante de uma situação Combinatória o estudante passa por uma fase de *rotulação ou enumeração* na qual se tem que determinar as características e objetos presentes na situação; Em seguida, o estudante identifica quais características são referência para a *distinção ou indistinção* dos objetos, ou seja o que diferencia ou assemelha nos objetos que são contados.

Posteriormente, inicia a fase de *construção* na qual o aluno tem que decidir entre desenhar objetos que representem a situação, utilizar simbolizações para representá-los, ou mesmo, diagramas como a árvore de possibilidades (WILHELM, 2004). Nessa fase, de acordo com os autores, os alunos utilizam diferentes técnicas de contagem. Essas por sua vez se fundamentam na análise combinatória ou nas operações aritméticas - Regra da soma, produto ou quociente proposta por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo(1996).

Nessa perspectiva, Bonilla Martínez e Rueda Mejía (2011) definiram uma hierarquia para o raciocínio combinatório que utiliza cinco níveis, a saber: Nível 0 – Não realiza o processo adequado; Nível 1 – Reconhece as variáveis distintas ou indistinguíveis; Nível 2 – Conta ordenadamente mediante símbolos e gráficos; Nível 3 – Utiliza princípios básicos de soma e produto; Nível 4 – Generaliza os processos de contagem. Esses níveis se subdividem em 15 categorias que identificam alguns possíveis erros ou incompreensões apresentadas nas escolhas de resolução dos estudantes.

Após aplicado esse modelo para análise de níveis de raciocínio combinatório em estudantes de licenciatura, os autores indicaram que os estudantes tiveram mais sucessos quando o Nível 1 é satisfeito, os objetos são rotulados e as características envolvidas na situação distinguidas.

Szitányi e Csíkos (2015, p.225) realizaram uma investigação com 128 estudantes do Colégio de Treinamento para Professores da Universidade Eötvös Loránd, na Hungria, sobre as estratégias de resolução de problemas combinatórios de mesma estrutura e enunciados diferenciados. Para esses autores “a construção de modelos mentais para as tarefas correspondentes ao enunciado e à estrutura combinatória é essencial”.

O questionário foi composto por cinco problemas de estrutura semelhante à escolha de 2 objetos em 7 (*combinação* de sete dois a dois) e dois problemas que têm estrutura semelhante à escolha de 2 objetos em 8, ou escolha de 2 objetos em 7 adicionados de 7 (*combinação* de oito, dois a dois, e *combinação* de sete, dois a dois, adicionados a sete). Como resultados, as estratégias observadas nesses problemas utilizavam diferentes representações com imagens: (1) Visualização semelhante a uma escadaria; (2) Polígono como auxílio visual; (3) Linhas desenhadas; (4) Grafos; (5) Listagem de casos; (6) Apenas cálculos numéricos e (7) Recursão.

Apesar da variedade de estratégias apresentadas, os autores constataram que os futuros professores, geralmente, não conseguem identificar as semelhanças nas estruturas dos problemas combinatórios com enunciados e contextos diferentes e, deste modo, defendem que a aquisição de um tipo de processo (procedimentos) não é suficiente para que os estudantes resolvam melhor os problemas combinatórios. Para esses autores, os participantes da pesquisa “[...] constroem modelos [combinatórios] superficiais, ou seja, escolhem uma das expressões algébricas (por exemplo, fatorial, coeficientes binomiais) de seu repertório do ensino médio e a usam sem entender o problema” (SZITÁNYI; CSÍKOS, 2015, p.225).

Lockwood (2013) propõe um modelo para o raciocínio combinatório a partir das relações entre fórmulas/expressões, processos de contagem e os conjuntos de soluções (objetos que são contados). Para essa autora as relações produzidas entre esses três polos permite compreender como os estudantes conceitualizam ideias Combinatórias. A compreensão entre fórmulas/expressões e processos de contagem pode desenvolver a habilidade nos estudantes “de ir e vir entre processos de contagem e fórmulas/expressões, e reconhecer não só que o processo de contagem pode gerar uma expressão, mas também que uma dada fórmula pode gerar um processo de contagem” (LOCKWOOD, 2013, p.255, tradução própria). Tal movimento de ir e vir também pode ser observado entre os processos de contagem e os conjuntos de soluções. Segundo a autora “o conjunto de soluções promove um caminho para estudantes desenvolver sua atividade Combinatória e pode auxiliar na determinação de qual processo de contagem é correto” (LOCKWOOD, 2013, p.258, tradução própria).

Lima, Gadelha e Borba (2017) investigaram como estudantes de diferentes grupos etários resolvem problemas combinatórios condicionais ou não. Com relação ao grupo de estudantes do Ensino Médio obtiveram melhor desempenho em relação aos demais, apresentando estratégias variadas (listagem, árvore, multiplicação, PFC e fórmulas).

Maher e Uptegrove (2010, p.10) legitimaram o exposto quando afirmam que ao trabalhar com problemas combinatórios “os alunos podem encontrar a necessidade de organizar seu trabalho sistematicamente, buscar padrões e generalizar suas descobertas; [...] Além disso, esses problemas se prestam ao uso de múltiplas representações pessoais que podem ser compartilhadas”.

Fernandez (2013) descreve em seu artigo a importância da Combinatória, descrita por James Bernoulli em seu livro *Ars Conjectandi*:

É fácil perceber a variedade prodigiosa que ocorre tanto nas obras da Natureza como nas ações humanas e que constitui a maior parte da beleza do universo, é devida a multidão de modos diferentes nos quais suas diversas partes podem mesclar-se ou justapor-se. No entanto, devido ao número de causas que concorrem na produção um acontecimento dado ou efeito é muitas vezes tão enormemente grande e as mesmas causas são tão diferentes entre si, que é extremamente difícil enumerar todos os modos diferentes, nos quais podem ordenar-se ou combinar-se, e muitas vezes, ocorre que os homens, mesmo da mais alta capacidade e de maior discernimento, caem na falta de raciocínio que autores de livros de Lógica chamam de enumeração insuficiente ou imperfeita de partes ou casos. E isso acontece em tal medida, que me atrevo a afirmar que esta é a principal, quase diria a única fonte de grande número de opiniões errôneas em assuntos, muito freqüentemente, de grande importância. (FERNÁNDEZ, 2013, p.2, tradução própria).

Essa dificuldade de resolver ou enumerar todas as possibilidades dos problemas de Combinatória também é vista, em diferentes pesquisas, ao longo da escolaridade por estudantes. Johnson (1991, p.128) reflete que para um estudante conseguir pensar através de um ponto de vista combinatório requer-se a exploração criativa de aspectos estruturais de um problema, na esperança de vir a reduzi-lo a um caso mais simples ou a um problema anteriormente resolvido.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) ressaltam que o ensino de Combinatória “deve enfatizar o processo de modelagem, o raciocínio recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de simplesmente

concentrando-se em aspectos algorítmicos e sobre as definições das operações Combinatórias” (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1997, p. 251).

Maher, Powell e Uptegrove (2010) realizaram um estudo longitudinal com relação ao desenvolvimento do raciocínio combinatório dos anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Para tal, analisaram doze anos de produções escritas, orais e ações dos estudantes foram documentadas, acompanhando as heurísticas, a construção de argumentos e justificativas para a resolução de problemas combinatórios. A escolha por esses tipos de problemas foi devido a eles não fazerem parte do currículo vivenciado na escola e não eram familiares aos estudantes.

Apesar de não terem por objetivo ensinar Combinatória para os alunos, os resultados desse estudo afirmaram que, alunos nos primeiros anos escolares (Elementary School) iniciam o uso de raciocínios indutivos, apresentam organizações de trabalho pelas possibilidades e as justificativas por meio de contradições. Já estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental (Middle School) o uso de raciocínio indutivo são frequentes e definidos, como também aparecem estratégias como o controle de variáveis, procura por padrões e tentativa e erro. No caso dos estudantes no Ensino Médio (High School) apresentaram o início do processo de construção de isomorfismos, usando sua própria notação, bem como notação padrão para descrever como alguns problemas estavam relacionados uns aos outros e, finalmente, o triângulo de Pascal.

Para que haja o desenvolvimento do raciocínio combinatório, a aprendizagem de diferentes estratégias de resolução de problemas combinatórios e técnicas de contagem, como as apresentadas por Fischbein (1975), Johnson (1991) e Batanero, Godino e Navarro - Pelayo (1996), Maher, Powel e Uptegrove (2010) necessário se faz a ênfase no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória.

Fischbein (1975, p.115) em suas pesquisas sobre a construção do raciocínio combinatório, afirma que “mesmo ao nível das operações formais, técnicas combinatórias não são espontaneamente adquiridas” e ainda afirma a necessidade de instrução para que essas estratégias sejam aprendidas.

Batanero et al. (1996, p.14-15) reafirmam a necessidade de ‘estimular o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de uma instrução

adequada, já que nem sempre se alcança espontaneamente ao chegar na idade adulta'.

Quanto à importância de pesquisas que influenciem e auxiliem no ensino e na aprendizagem de Combinatória desde anos iniciais, as autoras Borba, Pessoa, Rocha e Assis (2014) defendem que:

o desenvolvimento proporcionado pelo estudo da Combinatória não se limita a conhecimentos matemáticos, mas também a outras áreas, pois, na resolução de problemas combinatórios, os estudantes são estimulados a pensarem de modo hipotético, a levantarem possibilidades e a julgarem a adequação das possibilidades levantadas, a partir de uma grande variedade de situações (BORBA; PESSOA; ROCHA; ASSIS, 2014, p.116).

A partir de estudos realizados no grupo de pesquisa Geração²⁴ (PESSOA; BORBA (2009), ROCHA; BORBA (2012), BORBA; PESSOA; ROCHA (2012), ROCHA (2011), ROCHA (2012)), percebe-se que no caminho para a construção do raciocínio combinatório, os problemas combinatórios representam grande dificuldade para alunos de diferentes idades e níveis escolares como também para o trabalho dos professores.

Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) avaliaram as estratégias produzidas por 720 alunos espanhóis de 14 a 15 anos, dos quais 352 haviam estudado Combinatória e os demais (368) não tinham. Para isso, aplicaram os problemas combinatórios, baseado nos modelos de partição, colocação, e seleção, em uma turma de Ensino Médio e verificaram algumas dificuldades encontradas nos estudantes na resolução de problemas combinatórios, entre elas destacam: enumeração não sistemática; uso incorreto de diagrama de árvores; erro de ordem (estudantes confundem quando a ordem importa ou não, não diferenciando os problemas de *arranjo* e *combinação*); erro de *repetição* (estudantes não percebem quando a situação permite ou não a *repetição* de elementos); confusão com o tipo de objeto (estudantes não identificam se os objetos são idênticos ou diferentes); confundir o tipo de subconjuntos nos problemas de partição ou modelos de distribuição e, por fim, a não compreensão do tipo de partição pedida.

²⁴Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico do Centro de Educação da UFPE. Blog com trabalhos disponibilizados no endereço: <http://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/linhas-de-pesquisa.html>

Roa (2000) aplicou os mesmos problemas para 147 estudantes de 16 a 18 anos com preparação matemática avançada, acrescentando dois problemas combinatórios compostos (com mais de uma operação combinatória). Realizou ainda entrevistas individuais com quatro estudantes. Como resultados a investigação, apresentou que apesar da preparação matemática dos participantes, os estudantes têm dificuldades na resolução desses problemas se assemelhando algumas vezes aos resultados de alunos de 14 anos.

O autor afirmou que as estratégias utilizadas pelos alunos foram sempre para reduzir o problema centrando-se na

[...] tradução do problema para outro equivalente, nos problemas de partição e colocação; fixação de variáveis nos problemas com maior tamanho de solução; decomposição do problema em partes dos problemas de partição e colocação; uso da regra do produto nos problemas compostos; uso da regra da soma nos problemas de arranjo com repetição (ROA, 2000, p.120-121).

Outro fator apresentado por Roa (2000) diz respeito às representações apresentadas pelos alunos na resolução de problemas. A maioria não utiliza nenhum tipo de simbolização, e quando usam é priorizando a algébrica sozinha ou acompanhada por outras, geralmente numéricas.

Roa Guzmán, Batanero e Godino (2001, p.43) advogam que para “a resolução de problemas combinatórios requer uma série de elementos, não só conceituais, como técnicas e destrezas, emprego adequado de notação, capacidade de argumentação e sua relação com os problemas dados”.

Alves (2012) aplicou um questionário para alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ para analisar a habilidade de raciocínio combinatório. Tal questionário se fundamenta nos modelos de colocação, partição e seleção constituída de seis questões. Os alunos eram recém egressos do Ensino Médio. Os resultados apontam que os licenciandos apresentam mais facilidade ao responder problemas de seleção em detrimento dos outros modelos.

Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), Roa (2000) e Alves(2012) afirmam que distinção entre tipos de problemas é relevante do ponto de vista matemático e se apresenta como um instrumento necessário na construção de várias oportunidades de desenvolvimento e análise de tarefas com os alunos, visto que a Combinatória não é simplesmente uma linguagem simbólica ou um

sistema conceitual, mas também uma atividade humana que envolve a resolução de problemas socialmente compartilhados.

Borba, Araújo e Braz (2013) investigaram como estudantes do Ensino Médio (54 do 1º ano, 33 do 3º ano) resolveram metade dos 22 problemas combinatórios condicionais que abordavam as relações de escolha, ordenação, posição e proximidade.

Os resultados assinalam que os alunos do 3º ano, que já possuíam experiência com Combinatória, responderam aos problemas utilizando procedimentos formais (PFC, fórmulas) enquanto alunos do 1º ano não utilizavam as fórmulas, mas sim o PFC e desenho, listas, árvore de possibilidades e diagramas.

De acordo com as autoras, a complexidade dos problemas combinatórios condicionais se intensifica de acordo com a relação condicional implícita no enunciado do problema. Borba, Araujo e Braz (2013) afirmam que as relações condicionais mais complexas são aquelas que envolvem os termos *ter ao menos* ou *no máximo*.

A partir dessas pesquisas, observou-se que no Ensino Médio os estudantes possuem dificuldades em relação à utilização de fórmulas e do princípio multiplicativo. Os estudos trazem considerações importantes e sugestões de trabalho que priorizem diferentes estratégias, como a utilização do princípio multiplicativo e até mesmo o diagrama de árvores. Os erros e dificuldades observados podem ser foco dos movimentos intencionais dos professores nesse nível de ensino.

Poucos trabalhos foram encontrados que discutem especificamente, a dimensão afetiva com relação à Combinatória. Goldin(2018) discutindo sobre a necessidade de pesquisas que abordem as relações entre a afetividade e a Matemática Discreta defende que essa área promove algumas vantagens para que sejam implementados alguns princípios na matemática escolar que promovam a orientação afetiva para inventividade na Educação Matemática. Dentre esses princípios destacam – se:

- Criar um ambiente emocionalmente seguro para o engajamento com ideias conceituais desafiadoras;
- Promover o envolvimento íntimo;
- Desenvolver meta-afetiva positiva em torno das emoções que ocorrem naturalmente durante a resolução de problemas;
- Cultivar satisfação pessoal em sucesso e aprendizado;
- Valorizar ideias matematicamente inventivas e

acompanhá-las; • E respeitar a individualidade de cada aluno. (GOLDIN, 2018, p.63).

Uma das estratégias que o autor expõe para inserir a perspectiva afetiva nas aulas de Matemática Discreta diz respeito a utilizar o engajamento pela curiosidade na introdução de novos conteúdos ou o contexto de jogos. De acordo com Goldin (2018, p.60) esse sentimento é “tanto como emocional como conativo”, ou seja, promove uma ação de transformação.

3.4 ENSINO DE COMBINATÓRIA

Shulman (1986) defende a construção do *knowledge base* do professor, que categoriza uma organização para o saber do professor, elegendo como um saber específico do professor nessa organização o conhecimento pedagógico do conteúdo, que abrange a maneira de pensar do professor e reflete nas escolhas das ações para formular e apresentar a matéria, trazendo a compreensão da organização de conceitos, seus problemas, suas representações que se adaptam aos diversos interesses e habilidades dos alunos.

Nesse sentido, o professor necessita se apropriar de conhecimentos de diferentes naturezas, tais como: o conhecimento específico dos conteúdos trabalhados em sala de aula – em termos de significados que os conceitos podem assumir, as relações e propriedades destes conceitos e as formas de representação simbólica que podem ser utilizadas para registro e operacionalização de tal conceito; além de apreender o conhecimento de como um conceito se desenvolve e de fatores que podem influenciar este desenvolvimento.

Sobre o ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio, a pesquisa desenvolvida por Navarro-Pelayo (1991) traz alguns aspectos para discussão. Em seu livro “Razonamiento Combinatório” Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) apresentam essa investigação que trata do ensino de Combinatória que abordou questões relativas a:

- a) modo em que se chega a ensino de Combinatória e os condicionamentos da mesma. b) Mudanças que introduziriam os professores no ensino do tema. c) interesse relativo do tema entre

os propostos oficialmente no primeiro curso de bacharelado; utilidade do mesmo. d) Dificuldade relativa dos problemas e exercícios combinatórios. (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.86)

Para a discussão dessas questões, os autores realizaram entrevistas com 22 professores com experiência em ensino de Combinatória no bacharelado e efetuaram estudo comparativo com 14 futuros professores de Matemática. De acordo com Batanero et al. (1996), um dos resultados desse trabalho indica que o número médio de horas registradas ao ensino de Combinatória pelos professores entrevistados é de cerca de 18,36 horas e a maioria desse tempo é empregada com a correção de trabalhos e explanação teórica do professor. Entretanto, pouco desse tempo é dedicado ao trabalho em grupo ou mesmo individual do aluno. Além disso, foi observado o pouco uso de recursos audiovisuais, a ênfase na utilização do livro (apenas dois professores não utilizam). Observa-se também a importância atribuída ao diagrama de árvores para o ensino de Combinatória.

Sabo (2010) em sua investigação se propõe a identificar os saberes do professor do Ensino Médio, em relação ao ensino e à aprendizagem de Análise Combinatória por meio de entrevistas semi-estruturadas.

A entrevista realizada com seis professores foi subdividida em quatro etapas: a primeira em relação à identificação do entrevistado; a segunda em relação às influências das experiências e da vida profissional e escolar do professor no ensino de Combinatória; a terceira sobre os saberes docentes e a quarta sobre a prática do professor (planejamento, preparação de aula, livro didático, atitudes dos alunos e avaliação).

Sabo (2010) verificou que alguns professores valorizam a memorização e a aplicabilidade de fórmulas. Além disso, a importância de formações continuadas e das trocas entre colegas de profissão como possíveis modificadores favorecendo a construção dos saberes profissionais.

Na Espanha, atualmente, Batanero e Godino (2016) fazem um alerta sobre aspectos adversos implementados no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória.

[...] o ensino de Combinatória vem sendo separado dos resto dos temas do currículo da matemática, excetuando a probabilidade. Este ensino está centrado na aprendizagem de fórmulas combinatórias, na realização de exercícios de cálculo

de expressões combinatórias, ou na identificação da operação combinatória contida em um enunciado verbal. Possivelmente devido a essa abordagem, o tema tem sido considerado como um dos mais difíceis pelos professores, que com frequência, tem preferido omitir seu ensino. Inclusive, nos documentos oficiais (MEC, 2007; MECD, 2014), o tema está suprimido praticamente, sendo reduzido a uma tímida menção a contagem e as árvores de possibilidades dentro do bloco de probabilidade. (BATANERO; GODINO, 2016, p.8)

Desse modo, deve-se repensar aspectos da formação de professores, e inclusive, o processo de implementação realizado com base em informações técnicas, tais como o uso da fórmula, efetuar operações e a identificação do tipo de problema.

Rocha e Borba (2012) analisaram o conhecimento de dois professores do Ensino Médio sobre Combinatória por meio de entrevistas semi-estruturadas utilizando resoluções de alunos sobre os problemas combinatórios retirados da pesquisa de Pessoa e Borba(2009) como base para entrevista.

Nessa pesquisa, os professores do Ensino Médio apontaram como dificuldades dos alunos a distinção entre os problemas combinatórios, alguns invariantes das estruturas desses problemas como a *ordenação* e a *repetição*, a influência de contextos reais na interpretação dos problemas e a ampliação do número de possibilidades.

Na análise das estratégias de resolução dos problemas combinatórios, esses professores escolheram a utilização do Princípio Fundamental da Contagem como expectativa principal para os alunos do Ensino Médio, mesmo assim houve indicações da utilização de árvores de possibilidades e da percepção de generalização como estratégias possíveis. É necessário, por parte dos professores, um aprofundamento de conhecimento das estruturas combinatórias, do conhecimento dos alunos e das possíveis estratégias de resolução.

Em pesquisa anteriormente desenvolvida, Rocha (2011) buscou analisar os conhecimentos de Combinatória e seu ensino por parte de professores que atuavam em anos iniciais, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Para isso entrevistou-se, com base em protocolos de resolução de problemas combinatórios, seis professores (dois de cada nível de escolaridade), a fim de identificar características sobre o conhecimento de professores em relação aos

tipos de problemas combinatórios, aos procedimentos de resolução utilizados por alunos e às formas de ensino para a superação de dificuldades. Com intuito de fundamentar teoricamente as análises, baseou-se a discussão de problemas combinatórios a partir de Pessoa e Borba (2009), que discutem os invariantes de problemas combinatórios, com base na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD,1991), e o debate de conhecimento de professores para ensinar Matemática proposto por Ball, Thames e Phelps (2008).

A pesquisa revelou que os professores, na análise das atividades, sofrem fortes influências de suas formações inicial e/ou continuada, e também das experiências vivenciadas no ensino de Combinatória. Os professores de anos iniciais, geralmente, possuem uma formação na qual os aspectos sobre Combinatória são pouco ou quase não abordados. Assim, não parecem diferenciar características de problemas como *arranjo*, *combinação* ou *permutação*, no entanto, sugerem atividades que utilizam recursos variados (contextos diferenciados, relações com outras áreas, materiais manipulativos, resolução de problemas e socialização das estratégias criadas pelos alunos). Os professores que atuam nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, com formação matemática específica, trazem em sua discussão aspectos como *ordenação*, *repetição*, possibilidade e princípio multiplicativo – vivenciados, geralmente, em suas formações e/ou em livros didáticos – e propõem atividades menos variadas (pouca variação de contextos, resolução de questões clássicas, raro recurso aos jogos, uso de regras para facilitar a compreensão dos problemas).

Ademais, conclui-se que para a condução de um trabalho que permita maior desenvolvimento do raciocínio combinatório pelos alunos, é necessário, por parte dos professores, um *conhecimento especializado do conteúdo* de Combinatória, além de conhecimentos relativos ao *conhecimento do conteúdo e seu ensino*, ressaltando-se a necessidade de mais trabalhos científicos que busquem auxiliar professores em seus *conhecimentos de conteúdo e pedagógico* referentes à Combinatória.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p.86) alertam que “a experiência acumulada de cada professor sobre o ensino de um conteúdo matemático, constitui um acervo de conhecimentos que configuram seu saber profissional”. Entretanto, esse processo parece ainda não acontecer ao longo da

Educação Básica por problemas advindos da própria formação do professor ou mesmo, pelas lacunas existentes nos livros didáticos em que pese às pesquisas já existentes sobre o raciocínio combinatório.

Portanto, ainda se faz necessário investigar o desenvolvimento amplo do *raciocínio combinatório*, especificamente com relação às práticas docentes desenvolvidas no Ensino Médio, no intuito de ampliar esse desenvolvimento e verificar como o grau de Idoneidade didática de Combinatória é ou pode ser alcançado ao longo de aulas sobre esse conteúdo, ou mesmo, identificar aspectos do conhecimento didático-matemático que o professor deveria conhecer para que o ensino de Combinatória tenha a maior grau de Idoneidade didática possível.

Acredita-se que o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória se influencia por diferentes aspectos, como por exemplo, as escolhas de recursos didáticos e/ou situações-problema do livro didático; aqueles relativos à sala de aula e dos sujeitos envolvidos (expectativas de alunos, professores, conhecimentos prévios); os relativos à construção dos conceitos combinatórios (aspectos históricos, propriedades, representações e conexões com outras áreas); assim como, aspectos relativos à formação inicial e/ou continuada que os professores formadores priorizam, entre outros. Dessa forma, ressalta-se a importância de investigar a prática de professores, principalmente evidenciando os processos de ensino e aprendizagem de Combinatória.

Correia, Fernandes e Almeida (2009) investigaram o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no 12º ano de escolarização. Para isso realizaram pré-teste e pós-teste sobre problemas combinatórios para verificar as aquisições cognitivas dos alunos e aplicaram um questionário para observar a opinião dos alunos com relação ao ensino.

A intervenção foi realizada em sete aulas de 90 minutos, subdivididas em quatro aulas para problemas combinatórios (*arranjo com repetição, arranjo, permutação e combinação*) e três aulas com problemas combinatórios sem separação por tipo. As aulas consistiam em fichas de problemas que eram entregues a grupos de alunos de nível heterogêneo (com base nos níveis alcançados em matemática no ano anterior). As fichas possuíam problemas que ampliavam o número de possibilidades gradualmente, tais problemas tinham como base uma atividade de descoberta associado a eles.

Na aplicação das fichas os alunos tinham liberdade de elaborar as próprias estratégias e nas fichas eram apresentados os valores das soluções para nortear a confecção das mesmas. Os testes foram aplicados em duas fases. A primeira consistia na resolução de sete problemas combinatórios, após a entrega das resoluções inicia a segunda fase. Nessa fase foram entregues as soluções dos problemas para que os alunos apresentem correções para as resoluções apresentadas, buscando a confrontação entre as mesmas.

Os autores afirmaram que a intervenção proporcionou uma atitude positiva nos alunos, e que o trabalho em grupo foi bem aceito pelos estudantes. A proposta dos testes em duas fases possibilitou aos estudantes na verificação de erros cometidos, gerando uma nova oportunidade de aprendizagem, no entanto, os autores afirmam ser necessária a inclusão de justificativas dos diferentes raciocínios para que seja possível a distinção entre a correção realizada e a compreensão adquirida. Segundo os autores a intervenção se mostrou eficaz para possibilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Em outro artigo sobre a mesma experiência Fernandes, Correia e Roa Guzmán (2010) compararam as estratégias evidenciadas pelos alunos e o desempenho alcançado nas fases dos testes. Os alunos apresentaram na primeira fase do teste mais frequentemente as estratégias desenho e operações (42% dos quais 48% foram exitosas), desenhos e fórmulas (26% dos quais 53% foram exitosas) e apenas fórmulas (20% dos quais 55% foram exitosas). As demais estratégias apenas desenho, apenas operações e operações e fórmulas aparecem em menos de 5% dos casos.

Trevizan (2014), em sua dissertação, elaborou e aplicou uma sequência didática para o ensino de Combinatória no Ensino Médio. A sequência foi aplicada em três momentos para turmas de 2º e 3º ano do Ensino Médio, em duas escolas diferentes e parte da aplicação foi selecionada para análise. A sequência consistia numa narrativa que criava situações com diferentes problemas combinatórios inseridos no contexto da cidade da Contagem, na qual uma adolescente se deparava com situações de contagem: sabores de sorvete, anagramas da palavra contagem, descoberta de senha esquecida do cartão, com condições, elaboração de problemas com contagem, escolha de grupos, entre outros.

O objetivo do trabalho foi analisar a aplicação de uma Sequência Didática visando potencializar uma situação adidática no tema Análise Combinatória. Como pontos negativos a autora explicita o tempo para realização das atividades tem que ser suficiente para que os alunos cheguem as soluções. Caso contrário, o professor acaba “Dando a resposta do desafio, interrompendo uma experiência e, com isso, destruindo a possibilidade de aprendizagem” (TREVIZAN, 2014, p.86).

A autora ainda indica que a elaboração de situações adidáticas pode favorecer para o professor a elaboração de uma nova postura com relação ao ensino e aprendizagem de Matemática que:

[...] valoriza cada aluno como capaz de aprender; não ignora os problemas concretos de nosso sistema educacional, mas vê na sala de aula uma oportunidade de mudanças individuais; demonstra que o saber matemático é possuidor de valor próprio; explora recursos e meios de modo que o aluno aprenda por sua própria atividade e seja capaz de continuar aprendendo mesmo fora da escola; promove o prazer de aprender e raciocinar, pois ele mesmo possui esse prazer; e, por fim, assume a sua responsabilidade de ensinar (TREVIZAN, 2014, p.87).

Abitibol (2018) teve por objetivo apresentar a utilização de recorrências lineares na resolução de problemas relacionados com diferentes conteúdos no Ensino Médio. Nessa perspectiva defende que o uso da recorrência pode “fortalecer o pensamento matemático, uma vez que permite avaliar regularidades, analisar possibilidades e fazer inferências, habilidades importantes para resolver problemas”(p.18). Dentre as diferentes aplicações apresentadas em seu trabalho, discute a recorrência em situações Combinatórias, nas quais o autor faz uso de raciocínios recursivos para generalizar problemas com contexto de filas e formar comissões.

Segundo Abitibol (2018, p.48), o raciocínio recursivo aplicado a problemas de Combinatória possibilita a apreensão de “mais significado e as fórmulas de *permutação*, *arranjos* e *combinação* deixam de ser essenciais e podem ser percebidas naturalmente no decorrer do procedimento”. Para esse autor o uso do raciocínio recursivo no Ensino Médio pode proporcionar aos alunos mais segurança nas suas resoluções, mais ferramentas para resolver problemas não prototípicos, mais habilidades para justificativas das ações tomadas, pois as

fórmulas são fruto de construções discutidas em sala, e não apenas a única alternativa para resolver problemas.

Com relação ao ensino com ênfase em fórmulas e Combinatória, Abitibol (2018) afirma que:

[...] • nem sempre o aluno tem clareza do método adequado para cada situação. Diante de problemas combinatórios, os alunos tendem a escolher um desses métodos de contagem e costumam perguntar qual devem utilizar; • existem problemas simples que não se aplicam diretamente/exclusivamente a nenhum dos métodos citados. Existem problemas, por exemplo, que utilizam as ideias de permutação e de arranjos; • quando se dispunha apenas desses recursos, a solução de problemas um pouco mais complexos é inatingível". (ABITIBOL, 2018, p.48).

Bezerra (2013) em seu trabalho apresentou aspectos conceituais da Combinatória discutindo aplicações matemáticas para além dos problemas combinatórios envolvendo permutações caóticas, equações lineares nos inteiros positivos e não negativos e grafos. No seu trabalho, o autor propõe duas atividades para o trabalho do professor com Combinatória no Ensino Médio, para promover a discussão de propriedades da teoria dos grafos, a primeira fazendo uso de figuras cujo objetivo é recobri-las sem retirar o lápis do papel e a segunda faz uso da coloração de mapas.

O autor considera que a atividade de recobrir figuras sem tirar o lápis do papel pode ser contextualizada com o percurso de um caminhão de lixo para percorrer a cidade economizando combustível.

Lima (2016) em sua dissertação analisou os conhecimentos de professores sobre o ensino de Combinatória no Ensino Médio. Para isso utilizou entrevistas com dois professores e observou as aulas de Combinatória no 2º ano do Ensino Médio. Nas aulas observadas verificou a sequência de definição de problemas combinatórios, apresentação de exercício resolvido pelo professor, exercícios resolvidos individualmente pelos alunos e corrigidos posteriormente pelo professor, o que faz a autora concluir que as aulas sem haver a "solicitação dos alunos quanto à construção do conhecimento" (LIMA, 2016, p.71).

Segundo a autora, o único recurso didático observado para o ensino de Combinatória foi o livro didático adotado pela escola, e outros que eram utilizados como referência para estudo. A autora também constata que as sequências de problemas combinatórios trabalhados coincidem entre os dois professores que iniciam *com permutação*, *permutação com repetição*, *arranjo* e

combinação. Acredita-se que uma justificativa para apresentação dessa sequência, pode ser dessa maneira posto que é uma sequência adotada nos capítulos de livro de Combinatória.

A pesquisa concluiu identificando a ausência do trabalho explícito com os invariantes dos problemas combinatórios, como também, constatou a pouca exploração de diferentes estratégias de resolução, observando a ênfase nas fórmulas Combinatórias. Para a autora, existe a necessidade de um maior investimento em conhecimentos pedagógicos por esses professores. Foi verificado que o tempo para preparação de aulas é escasso, pois os professores atuam em diferentes vínculos, em diferentes turnos.

Almeida (2010) investigou as contribuições de uma proposta de ensino com base na comunicação matemática para a Combinatória em uma turma de 2º ano do Ensino Médio. Em sua proposta, produziu um ambiente de estímulo à argumentação e discussão de problemas combinatórios em pequenos e grandes grupos. As atividades foram pensadas com diferentes níveis de complexidade, iniciando com questões mais simples para motivação e variando o nível, para que os mesmos não se desmotivassem pelo alto nível de dificuldades dos problemas e tendo como ponto de partida contextos conhecidos pelos estudantes, para promover autonomia e autoconfiança.

A autora verificou o interesse dos estudantes na proposta a partir da ampliação gradativa da participação nas aulas, atuando com maior segurança nas proposições e argumentos apresentados ao longo das aulas. Além disso, afirmou, a partir dos diálogos ocorridos em sala, que constatarem-se padrões contributivos entre grupos, reflexivos no momento de discussão e, ao final, nível instrutivo. Ao fim da proposta, muitos alunos questionavam o porquê, e ainda, criavam, apresentavam e discutiam suas próprias estratégias para a sala.

Com base no exposto, as variadas pesquisas apontam que o ensino de Combinatória no Ensino Médio pode priorizar aspectos diferenciados, tais como o uso da recursividade; a elaboração de procedimentos próprios de resolução de problemas combinatórios; a variedade de estratégias de resolução, ao invés da resolução apenas a partir de fórmulas; a proposta de problemas que envolvam nível de dificuldade gradativos e que relação com o cotidiano dos estudantes; e, por fim, a comunicação como centro do processo de ensino e aprendizagem,

promovendo a autonomia dos estudantes na resolução de problemas dessa natureza.

No Capítulo 4, são apresentados os caminhos escolhidos para a investigação, as características dos participantes da pesquisa e os delineamentos teórico-metodológicos adotados na presente pesquisa.

4 MÉTODO

Esse capítulo apresenta o percurso metodológico delineado para a pesquisa. Ao aprofundar a investigação sobre o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, em especial, nas escolhas didáticas realizadas por um professor em um processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio delimitou-se como objetivo geral *Analisar diferentes características que são priorizadas por um professor no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.*

Nessa perspectiva delimitou-se a ação de ensino de um professor, sua turma e as aulas destinadas ao processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio. Na seção seguinte discriminam-se algumas escolhas e justificativas para esses dados.

4.1 CARACTERÍSTICAS DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA E PROCESSO DE COLETA DAS INFORMAÇÕES

A seguir especifica-se a escolha dos sujeitos envolvidos no processo e a categorização dos mesmos assim como o processo de recolha das informações e os cuidados nas transcrições realizadas.

4.1.1 Caracterização dos participantes na pesquisa

A escolha do professor de Matemática do Ensino Médio se baseou na disponibilidade do mesmo em participar da pesquisa. Pensando em investigar um bom processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, esse professor foi escolhido ainda por ter apresentado um domínio especializado de conteúdo para ensinar Combinatória na pesquisa de mestrado de Rocha (2011) fundamentada nos aspectos do conhecimento para ensinar Matemática apresentados por Ball, Thames e Phelps (2008). Tal professor possuía na época

da coleta de dados 15 anos de experiência no Ensino Médio, e foi Licenciado em Matemática, Mestre em Educação e no período da coleta encontrava-se cursando o Doutorado em Educação Matemática.

Quando se selecionou o conteúdo e o professor, definiu-se a escola e a sala e o período nos quais se realizaram a coleta de informações. O professor trabalha nessa instituição há 10 anos. A instituição possuía no tempo da coleta de dados cerca de 80 anos, atuando tanto no Ensino Médio como o Ensino Médio Profissionalizante. Existe uma seleção para a formação das turmas por meio do desempenho escolar dos estudantes. A escola possui turmas pela manhã e à tarde, no entanto, o professor atua apenas no período da tarde no 2º ano do Ensino Médio. Vale salientar que essa escola por causa do número reduzido de alunos realiza a junção de turmas (da Educação Básica e da Educação Profissional) para todas as aulas de componentes curriculares comuns (Matemática, Português, Física, Química).

A turma se constitui de dois grupos, o primeiro referente ao segundo ano do Ensino Médio, e outro composto por estudantes do Ensino Médio profissionalizante, com idades entre 16 a 18 anos. Os alunos das duas turmas se conhecem, mas parece haver uma divisão na sala, pelo modo que estão distribuídos na mesma (um grupo à direita e outro à esquerda). Juntas as duas turmas possuíam 24 alunos, os quais foram denominados de A1 a A24 nos extratos da transcrição.

A relação professor-aluno é bem próxima visto que se conhecem desde o ano anterior à coleta, e a interação na sala de aula é percebida, acontecendo de forma natural.

Os estudantes interveem quando sentem necessidade, a qualquer momento durante a aula para esclarecer dúvidas, propor soluções, discordar, concordar, desse modo, foram poucos momentos de dispersão, observados no contexto da aula.

Foram percebidas algumas atitudes negativas em relação à Matemática, mas que foram bem controladas pelo professor, motivando-os convenientemente. Os estudantes se apresentaram de modo participativo ao longo das aulas.

4.1.2 Processo de coleta das informações

Escolheu-se a observação de aulas como instrumento de coleta de informações. Pensou-se em aproximar o olhar para as decisões do professor. De acordo com Flick (2009, p.204, tradução própria) classificou-se esse processo como uma observação não participante, mais especificamente como um observador completo, que tenta “manter distância dos eventos observados a fim de evitar influenciá-los”. Nesse caso, legitima-se em Adler e Adler (1998, p.81, tradução própria) que tais tipos de observações “[..] seguem o fluxo de eventos. Comportamento e interação continuam como se estivessem sem a presença de um pesquisador”.

Em conversa inicial com o professor, este determinou um período de doze aulas (seis encontros) destinadas à Combinatória em sua turma de 2º ano de Ensino Médio de uma escola pública da Região Metropolitana de Recife.

A coleta das aulas foi realizada entre agosto e setembro de 2015, o conteúdo foi o primeiro após o recesso escolar desse ano. As classes ocorreram nas terças e sextas feiras no período da tarde. Na terça eram os 3º e 4º períodos e na sexta feira os dois últimos horários.

As aulas foram videogravadas e transcritas. Pode-se dizer que os alunos e professores encararam com naturalidade a presença da câmera que ficava posicionada por trás de todos os alunos, com principal foco o professor e os diálogos observados em sala de aula. De acordo com Font, Planas e Godino (2010, p.6) pode-se compreender “o discurso do professor como um componente de sua prática profissional”. Para os autores o discurso do professor pode gerar práticas operativas (resolução de problemas) e discursivas (reflexões sobre as resoluções) nos alunos.

Powell e Quintaneiro da Silva (2015) apresentaram razões para o uso de vídeo na pesquisa em Educação Matemática. Em síntese, destacaram o registro de comportamentos e interações complexas que permite ao pesquisador poder ver e rever tantas vezes quanto necessárias, evitando interpretações prematuras, potencializando a interpretação dos dados e permitindo múltiplas análises sobre diferentes pontos de vista. As falas dos vídeos foram transcritas

utilizando alguns símbolos e representações as quais se descrevem no Quadro 14 a seguir.

Quadro 14 - Símbolos e representações utilizadas nas transcrições

Símbolos	Representações
((entre dois parentes))	Ações realizadas ao longo da fala
[[...]]	Cortes de trechos ou paradas na fala
(...)	Inaudível
P	Fala do professor
A1, A2, ...A24.	Registro da fala de alunos
CD1, CD2, ... CD43	Configurações didáticas
[1], [2],...[978]	Unidades de análise

Fonte: Acervo da pesquisa.

Para cada aluno foi atribuído um código, para preservar sua identidade e para o professor foi utilizada a inicial P, conforme apresentado no Quadro 14. Alguns gestos foram observados e fotografados, assim como, registros no quadro realizados pelo professor foram acrescentados para ilustrar a discussão de alguns momentos da aula. Nas fotos foram retirados rostos e a identificação da escola.

Após a transcrição, cada registro das aulas foi numerado sequencialmente, produzindo cerca de 2200 registros nos seis encontros, que foram agrupados em 978 registros, denominadas de unidades de análise. As unidades de análise (ua) foram, por sua vez, classificadas em 43 configurações didáticas que foram adotadas como referência nos momentos apresentados ao longo da análise, explicitando desse modo às falas e registros de maneira ordenada com relação a sua apresentação cronológica nos vídeos.

Para realizar a divisão das configurações didáticas, utilizou-se como referência Assis; Frade; Godino (2013, p.736) quando explicitam que “Uma *configuração didática* é um intervalo ou segmento de atividade didática (ensino e aprendizagem) que se distribui entre os momentos de início e término de uma tarefa ou situação-problema.” Portanto, a configuração didática nessa pesquisa representa seções de aulas que apresentam tarefas, atividades, discussões sobre as resoluções de problemas combinatórios realizadas ao longo das mesmas.

Em cada representação escrita da aula (extrato da transcrição apresentado) é indicado o encontro que foi retirado (Encontro 1 a 6), a sequência dos registros numéricos e a configuração didática analisada (CD). A seguir

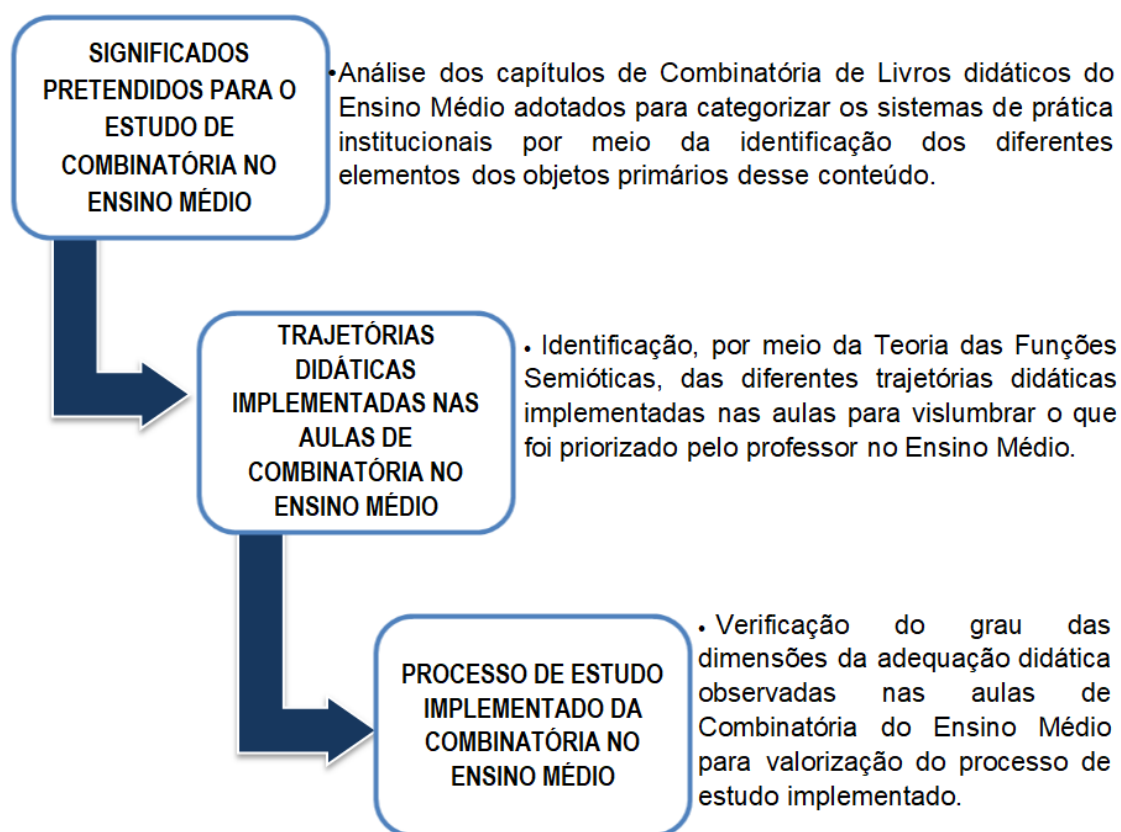
delimita-se como foi realizada a análise da pesquisa, por meio do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemáticos (EOS).

4.2 PERCURSO ADOTADO PARA ANÁLISE

Com a intenção de ampliar as dimensões de observação dos dados coletados escolheu-se o EOS (GODINO, 2017; 2002;) como ferramenta teórico-metodológica, pois permite a delimitação de técnicas para aproximar o olhar do pesquisador ao processo complexo de observar, descrever e analisar os fenômenos que ocorre na sala de aula. Dentre os diferentes níveis de análise propostos por Font, Planas e Godino (2010) no EOS a verificação de práticas matemáticas, a preparação de configurações de objetos e processos matemáticos, a investigação de trajetórias e interações didáticas, a identificação de normas e metanormas e a valorização da Idoneidade didática.

Com base nessa perspectiva teórico-metodológica foram elencadas três etapas para a pesquisa: os *significados* pretendidos para o estudo de Combinatória no Ensino Médio traçados por meio dos capítulos de livros desse conteúdo; as *trajetórias didáticas* implementadas por um professor nas aulas de Combinatória do Ensino Médio; a valoração do *grau de Idoneidade didática* dessas aulas, conforme sistematizado na Figura 6 a seguir.

Figura 6 – Percurso desenvolvido na análise da pesquisa



Fonte: Autora, 2019

Centralizou-se essa pesquisa, primeiramente, na identificação das práticas matemáticas (operativas) de Combinatória no Ensino Médio manifestadas na instituição livro didático por meio da identificação dos diferentes elementos objetos primários apresentados. Dessa forma, consegue-se produzir um *significado institucional pretendido para Combinatória no Ensino Médio*.

Em seguida, focalizou-se a investigação na categorização das aulas por meio da identificação das configurações didáticas observáveis (CD), compostas por configurações epistêmicas, configurações instrucionais (docentes e discentes) e configurações cognitivo-afetiva (essa última, parcialmente, detendo a análise apenas nas situações apresentadas pelos alunos ao longo das aulas). Nesse caso, centralizou-se a análise na Teoria das Funções Semióticas a fim de detectar nas configurações didáticas e nas unidades de análise as trajetórias didáticas implementadas (epistêmicas, docentes, discentes, mediacionais, cognitivas, emocionais).

Por fim, a análise centrou-se na identificação dos indicadores apontados por Godino (2002; 2012) para a valoração da noção de idoneidade didática e

suas diferentes dimensões (epistêmicas, cognitivas, interacionais, mediacionais, ecológicas, afetivas) referente a implementação das aulas.

Apresenta-se a delimitação e justificativa de cada etapa nas subseções seguintes.

4.2.1 Significados Institucionais Pretendidos da Combinatória observados nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio

Contreras de la Fuente, García Armenteros e Font Moll (2012) explicitam que para um professor iniciar um processo de ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo matemático para uma classe específica de estudantes, é necessário investigar o que as instituições matemáticas e didáticas apontam sobre determinado objeto matemático. Dessa forma, o professor imbuído desse objetivo se dispõe a verificar “os textos matemáticos correspondentes, as orientações curriculares, e, em geral, o que pesquisadores consideram que são as práticas operativas e discursivas” (CONTRERAS DE LA FUENTE; et al. 2012, p.672, tradução própria).

Carvalho e Lima (2010), discutindo sobre as pesquisas envolvendo o livro didático, consideram algumas perspectivas relativas ao uso do livro didático no processo de ensino e aprendizagem. Dentre as que apresentam, essa seção se detém sobre a área de conhecimentos e conceitos considerados pelo livro didático.

Em particular, centralizou-se o olhar dessa pesquisa nos capítulos de Combinatória dos livros didáticos adotados pelo professor com a intenção de *Identificar os indicadores do objeto primário da Combinatória priorizados nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio utilizados por um professor*. Os referidos componentes/elementos do objeto matemático primários são definidos por Godino, Batanero e Font (2008) como situações-problema, linguagem, conceitos/definições, propriedades/proposições, procedimentos e argumentos.

Essa escolha se justifica pela característica curricular do livro didático explicitada por Bonafé e Rodriguez (2013, p.209), quando verificam que “em plena era digital, os livros didáticos continuam sendo o dispositivo didático

hegemônico para o desenvolvimento curricular nas aulas”. Haro (2002, p.23) afirma que o livro de Matemática “preserva o conhecimento modificado para as matemáticas escolares [...]. Ele provê uma fonte na qual alguns aspectos das transposições didáticas atuais podem ser investigados”.

O livro didático possui uma qualidade universal para Sacristán (2000, p.150) a de “agente apresentador do currículo pré-elaborado para os professores”. Esse autor assegura a presença de condicionantes nesse papel intermediário do livro didático entre o currículo e o professor, a saber:

[...] mecanismos de controle sobre a prática profissional dos professores e sobre os conteúdos e métodos de ensino. [...] a projeção dos condicionamentos inerentes a uma prática de produção e de mercado que persegue interesses que não são apenas os pedagógicos, com efeitos na configuração da realidade escolar. [...] A dependência do professor quanto a esses meios, autênticos planejadores da prática, reflete a autonomia profissional real que tem o professor num aspecto que, à primeira vista, é verdadeira competência dos docentes (SACRISTÁN, 2000, p.150-151).

Enfatiza-se nessa discussão a autonomia do professor, especialmente, com relação à influência do livro nos aspectos didáticos mediados pelo docente, Pais (2006, p.5) defende que “o livro didático é uma das fontes indutoras da organização do estudo, pois, à rigor, compete ao professor decidir pela definição dos recursos e das estratégias a serem adotadas”.

Todos os autores aqui apresentados estão contemplados pelo Guia do Livro Didático de Matemática de Ensino Médio do Programa Nacional do Livro Didático-PNLD, pois para esse documento a função do livro didático em relação aos professores é:

[...] auxiliar no planejamento didático-pedagógico anual e na gestão das aulas; favorecer a formação didático-pedagógica; auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno; favorecer a aquisição de saberes profissionais pertinentes, assumindo o papel de texto de referência (BRASIL, 2014, p.10).

Com base no exposto, justifica-se a investigação dos capítulos dos livros didáticos de Combinatória no Ensino Médio, principalmente para elucidar o objetivo anteriormente traçado, e verificar os objetos primários da Combinatória priorizados a fim de produzir os significados institucionais pretendidos da Combinatória no Ensino Médio.

Os capítulos de livros didáticos analisados foram selecionados porque ambos são utilizados pelo professor. De acordo com Sabo (2007, p.20), nos livros didáticos do Ensino Médio, geralmente, “[...] um conceito matemático é abordado pontualmente em uma determinada série”, o que reflete a escolha da pesquisa em analisar apenas os capítulos de Combinatória, que habitualmente é abordada nos livros do 2º ano do Ensino Médio.

A título de situar a discussão, denominou-se os capítulos de A e B, sendo que o Capítulo A representa o capítulo de Combinatória do livro adotado e utilizado na sala de aula, enquanto o Capítulo B é um capítulo de Combinatória usado apenas como referência pelo professor, como apoio na proposição de situações novas. Ambas as coleções foram aprovadas no Programa Nacional dos Livros Didáticos de 2015 (PNLD – BRASIL, 2014).

Portanto, elencaram-se as seguintes categorias baseadas nos componentes dos objetos primários do EOS relacionados a Combinatória: Situações-problemas (tipos de situações); Conceitos (problemas combinatórios, invariantes/propriedades); Elementos linguísticos (Conversões entre registros de representação); Procedimentos (Estratégias de resolução de problemas, Complexidade de problemas combinatórios (Comp*), Técnicas de resolução de problemas combinatórios); Argumentos (características de argumentos(C**), tipos de imagem(I***)).

A seguir, apresenta-se no Quadro 15 os indicadores de cada um dos elementos/componentes analisados nos capítulos de Combinatória dos livros didáticos. Tais indicadores foram elaborados a partir da observação e análise dos capítulos de Combinatória, além da discussão proposta por alguns autores que discutem tal temática, além de autores que discutem argumentação no livro didático.

Inicialmente, foram selecionadas as situações problemas disponíveis nos capítulos e Manual do Professor que foram classificadas com relação aos componentes dos objetos primários (Situações Problemas, Conceitos, Linguagens e Procedimentos) e categorizadas posteriormente em cada um dos indicadores sistematizados no Quadro 15.

Quadro 15 - Componentes (C) e Indicadores(I) dos objetos matemáticos primários(O) da Combinatória Priorizados nos livros didáticos do Ensino Médio.

O	C	Indicadores observáveis no livro didático
Situação problema	Tipo de Situações	S1: Interpretar e empregar adequadamente notações científicas; S2: Enumerar o total de possibilidades ; S3: Identificar os tipos de problemas combinatórios a partir do enunciado do problema e resolvê-los; S4: Explorar contextos de problemas combinatórios.; S5: Explorar o tipo de procedimento de resolução; S6: Explorar a operação Combinatória a partir do número total de possibilidades; S7: Identificar o tipo de problemas combinatórios a partir de suas propriedades ou invariantes S8: Explorar alterações ou mudanças no enunciado de problemas combinatórios S9: Promover raciocínio recursivo
Conceitos	Prob. Comb.	P1: Produto de Medidas; P2: Arranjo; P3: Arranjo com Repetição; P4: Combinação; P5: Permutação; P6: Permutação com elementos repetidos; P7: Permutação Circular; P8: Permutação com repetição; P9: Fatorial; ++ Mais de um problema combinatório.
	Invariantes	I1: Apenas escolha; I2: Apenas ordenação; I3: Ordenação e escolha I4: Ordenação, escolha e repetição; I5: Ordenação e elementos idênticos; I6: Fatorial; I7: Disposição geométrica em forma de círculo; I8: Ordenação e Repetição;
Lingua-	Conversões	Ln: Linguagem natural; Ln> PFC: Linguagem natural para PFC; Ln > For: Linguagem natural para fórmula; Ln> Ar: Linguagem natural para Árvore de possibilidades; Ln>Fat: Linguagem natural para fatorial; Ln>PFC> For: Linguagem natural para PFC para fórmula; ++ PFC: Mais de uma conversão com PFC; ++ For: Mais de uma conversão para fórmula.
Procedimentos	Resolução	PR0: Linguagem natural PR1: Princípio Fundamental da Contagem (PFC); PR2: Árvore de possibilidades; PR3: Fórmula; PR4: Dois procedimentos de resolução em um mesmo problema; PR5: Mais de dois procedimentos de resolução em um mesmo problema; PR6: Em branco.
	Comp *	PS: Problema Combinatório Simples; PC: Problemas Condicionais; PI: Problemas integrados; E: Exercícios.
	Técnicas de resolução	T0: Não explicitada; T1: Explicita as possibilidades de escolha de cada etapa e aplica o PFC; T2: Enumera sistematicamente o total de possibilidades (por meio de tabelas, árvores de possibilidades, linguagem natural, fórmulas); T3: Subdivide o problema em seções, aplica o PFC e o Princípio aditivo e/ou multiplicativo entre as seções; T4: Subdivide o problema em seções, aplica a fórmula e o Princípio aditivo e/ ou multiplicativo entre as seções; T5: Quantifica o total de possibilidades e retira aquelas que não fazem parte do resultado; T6: Fixa elementos e aplica a fórmula ou PFC; T7: Apenas aplica fórmulas de Combinatória; T8: Apenas aplica o PFC; T9: Simplifica expressões e ou equações utilizando propriedades de fatorial; T10: Compara os procedimentos da fórmula com o Princípio Fundamental da Contagem; T11: Resolve com o uso da Soma da Progressão aritmética; T12: Compara Fórmula e PFC com outros tipos de procedimentos; T13: Utiliza propriedade de complementar de número da combinação
Argumen-	C**	A1. Início da argumentação; A2. Tipo da argumentação; A3. Grau de argumentação
	I***	IM1. Uso da imagem; IM2. Tipo da imagem; IM3. Estilo gramatical da imagem; IM4. Relação com o mundo.

Fonte: Acervo da Pesquisa

A elaboração dos indicadores do *tipo de situações* foi realizada a partir da sistematização e observação dos problemas e comentários dispostos no capítulo seja em exercícios propostos, resolvidos, manual de professor e ainda em dicas ou propostas vindas em seções especiais do livro didático.

Do mesmo modo, os *tipos de técnicas de resolução* foram categorizados observando os exercícios resolvidos ao longo dos capítulos ou nos exercícios resolvidos nos manuais do professor referentes a cada capítulo.

Nos indicadores dos *problemas combinatórios* utilizou-se a classificação proposta por Pessoa e Borba (2009) que subdividem em *produto cartesiano* (*produto de medidas*), *arranjo*, *combinação* e *permutação* como observa-se na Figura 7.

Figura 7 – Exemplos de tipos de problemas combinatórios segundo a classificação de Pessoa e Borba (2009) retirados dos capítulos de Combinatória analisados.

Produto de Medidas 1. Com 3 tipos de macarrão e 2 tipos de molho, quantas opções de pratos diferentes de macarronada podem ser preparadas? 6 opções 	Arranjo 11. Quantos números de 3 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 7?
Permutação 5. De quantas maneiras distintas podem ser colocados 5 livros lado a lado em uma prateleira? 120 maneiras	Combinação 42. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas com um grupo de 7 pessoas? 35 comissões

Fonte: Capítulo A, p.250; 257; 260.

Além desses problemas combinatórios, foram acrescentados outros apresentados no livro didático sejam implicitamente como *arranjo com repetição* e *permutação circular*, ou explicitamente, como a *permutação com elementos idênticos* e os exercícios relacionados ao uso de Fatorial, tal como apresentados na Figura 8.

Figura 8 – Exemplos de tipos de problemas combinatórios apresentados nos capítulos de Combinatória analisados.

Permutação com elementos idênticos (a) 21. Em relação à palavra PAPA: a) quantos são os anagramas?	Permutação circular (b) 11. De quantos modos diferentes podemos pintar as faces laterais e a base de uma pirâmide heptagonal, usando 8 cores diferentes, de tal modo que as cores não sejam repetidas?
Arranjo com repetição (c) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7: a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?	Fatorial (d) R6. Determinar o número natural n sabendo que: $\frac{(n+1)!}{n!} = 4!$

Fonte: (a) Capítulo B, p.248; (b) Capítulo A, MP, p.41;

(c) Capítulo B, p.244; (d) Capítulo A, p.252.

Na sistematização dos *invariantes prescritivos ou do conceito dos problemas combinatórios* adotaram-se como referência as discussões apresentadas por Pessoa e Borba (2009), Rocha (2011), Silva (2015) e Araújo e Rocha (2018) que foram sistematizados a partir do tipo de problema combinatório. A junção entre os invariantes de *escolha*, *ordenação* e *repetição* permite a identificação dos problemas combinatórios e vice-versa. Observou-se ainda a existência do invariante “elementos idênticos” que gera mudanças na proposta de contagem nos problemas de permutação, e ainda a disposição geométrica dos problemas que geram alterações nos problemas combinatórios de *permutação*, categorizando os problemas de *permutação circular*.

Para exemplificar o contexto de senhas constituídas por dois números, {1,2}, formam-se as senhas {12; 21} se não considerarmos as *repetições* de letras, ou {11; 12; 22; 21} se considerarmos as possibilidades que repetem os números. A quantidade de anagramas formados pelas letras da palavra AMA, nesse caso existem letras *idênticas*, diminuindo o total de possibilidades {AMA; AAM; MAA}.

Com relação às *conversões entre linguagens* observadas nos capítulos de Combinatória do Livro Didático baseou-se a discussão na pesquisa de Borba, Azevedo e Bittar (2016) que observou as conversões de registros combinatórios em livros do Ensino Fundamental. Nessa pesquisa aos registros observados diferem devido ao nível de escolarização já que no Ensino Médio prevalecem outras possibilidades como o uso de Fórmulas.

Outro critério elaborado a partir de pesquisas desenvolvidas foi à complexidade de problemas combinatórios, nos quais se especificaram os problemas combinatórios condicionais cuja classificação referendou as pesquisas de Borba e Braz (2012) e Borba, Araújo e Braz (2013) e os problemas integrados ou compostos fundamentados em Roa(2000).

Ainda foram analisados os argumentos presentes nos capítulos, o que foi realizado a partir da proposta de Llanos e Otero (2012) que classificaram como os inícios dos capítulos/seções dos capítulos utilizam os argumentos, os tipos de argumentos e o grau dos argumentos apresentados nos capítulos. Essas autoras ainda categorizaram as imagens que são expostas nos livros didáticos nas categorias: Uso da imagem; Tipo da imagem; Estilo gramatical da imagem; Relação com o mundo. Tais classificações permitem a compreensão de como o objeto primário da Combinatória é apresentado pelos capítulos analisados.

Considerações sobre argumentos trazidas por Perelman (1993), Perelman e Olbrechts-Tyteca (1999) e Boavida (2005) são incorporadas àquelas propostas por Llanos e Otero (2012) para categorizar o tipo de argumento apresentados pelos livros didáticos.

Com base no exposto, os componentes e indicadores relativos a Combinatória no Livro didático de Ensino Médio, pode ser considerado o *significado institucional pretendido* para Combinatória no Ensino Médio (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

4.2.2 Trajetórias Didáticas implementadas nas aulas de Combinatória no Ensino Médio

As escolhas ou decisões de cunho didático podem promover; potencializar; ou mesmo, **podem desfavorecer; ou descontinuar** tais aprendizagens. Portanto, acredita-se na necessidade de investigações que focalizem os traçados de professores no decorrer de um processo de ensino e aprendizagem, os diferentes percursos imaginados, centrando-se naqueles que de fato foram escolhidos, que seriam as trajetórias didáticas, por eles implementadas.

O professor nas suas aulas, a partir de planejamento prévio, programa suas escolhas didáticas, permeando aspectos sobre o currículo que é de fato vivenciado, apresenta os problemas sobre o conteúdo, exhibe o contexto que pensa ser adequado para despertar interesses, procura artifícios ou alternativas para suprir as dúvidas, ou suprimir dificuldades, ou propor atividades para superá-las, expõe justificativas que podem motivar os estudantes, atribui trabalhos aos alunos, gere conflitos cognitivos, semióticos, ou mesmo de interação, tudo isso tendo a intencionalidade de desenvolver o processo de construção do conhecimento dos alunos.

No entanto, mesmo com cuidados no planejamento da aula, mudanças e alterações se fazem necessárias na ação. De acordo com Rocha (2011) “O professor vivencia o conflito de decidir: O que é melhor e como é melhor chegar ao aluno? Como atender as cobranças dos alunos, da natureza dos problemas combinatórios, da escola, da aula, da vida?” (ROCHA, 2011, p.175). Portanto, a presente investigação visa se aproximar do significado institucional implementado nos sistemas de práticas que efetivamente se apresentam nas aulas de Combinatória de Ensino Médio.

Ao se eleger como objeto “as movimentações didáticas intencionais de um professor na implementação de um processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio” objetiva-se *Categorizar e descrever as aulas de Combinatória no Ensino Médio, classificando trajetórias didáticas implementadas (epistêmica, docente, discente, mediacional, cognitiva e afetiva)*.

Nessa pesquisa compreendem-se as movimentações didáticas de um professor como pequenas mudanças, adequações, ações e/ou reações que ocorrem ao longo de suas aulas com a intenção de ensinar. Tais movimentos se fundamentam nos conhecimentos didáticos-matemáticos dos professores, relativo ao currículo, recursos, livros didáticos, além de suas crenças, concepções sobre o que acham importante para haver aprendizagem, entre outras perspectivas. O papel do aluno nessas mudanças também pode ser observado. Dessa maneira considera-se tal como afirma Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p.98) “a comunicação oral e escrita na aula, realizada pelo professor e os alunos um aspecto central determinante sobre o que aos alunos aprendem sobre matemática”.

Com esse objetivo, fundamentaram-se as análises em Godino, Contreras e Font (2006) especificamente a ferramenta das Teorias das Funções Semióticas (TFS) explicitada pelo EOS e na identificação em cada aula das trajetórias didáticas implementadas pelo professor nas aulas de Combinatória, especificamente as trajetórias epistêmicas, docentes, discentes, mediacional, cognitivas e afetivas, classificados de acordo com as categorias de análise apresentadas por esses autores.

Dessa forma, podem-se verificar as escolhas e preferências do professor ao longo das aulas de Combinatória com relação ao tipo de atividade matemática implementada (trajetória epistêmica) distribuindo a Combinatória nas aulas pelos estados vivenciados (situacional; procedimental; linguístico; conceitual; proposicional; argumentativo).

A trajetória docente permite qualificar as diferentes ações exercidas pelo professor ao longo do processo (planejamento, motivação, atribuição de tarefas, regulação, avaliação e investigação). Do mesmo modo a distribuição das ações dos alunos (trajetória discente) permite uma análise das atividades desempenhadas por estes durante o processo (aceitação do compromisso, exploração, memorização, formulação, argumentação, busca por informação, exercitação, recepção de informação, avaliação).

Com base nas categorias propostas por Godino, Contreiras e Font (2006) foram classificados os diferentes estados do professor e dos alunos no decorrer de cada aula, além de distribuídas a atividade matemática com relação a Combinatória implementada.

Posteriormente, foram analisados e classificados os diferentes recursos utilizados traçando a trajetória mediacional implementada. Para essa análise foram observadas as funções desempenhadas por cada recurso para produzir uma classificação.

A trajetória cognitiva foi parcialmente analisada a partir das participações dos alunos em cada aula, quando os mesmos respondiam os problemas, ou explicitavam a compreensão (ou não) de determinado conteúdo ou procedimento. O professor também ao longo das aulas pode tomar uma mudança de trajetória docente, ou epistêmica a partir da interação com o estudante.

De modo análogo, a trajetória afetiva foi delineada a partir do envolvimento dos alunos na tarefa apresentando compromisso, interesse, aversão pela Matemática, ou pela atividade, sentimentos de autoestima positivos evidenciados. Atenta-se ainda como o professor pode potencializar essa trajetória utilizando o processo de devolução (Teoria das Situações Didáticas), ou seja, “[...] o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade por uma situação de aprendizagem (adidática) ou por um problema, e aceita as consequências dessa transferência dessa responsabilidade.” (BROUSSEAU, 2002, p.230). Com essas categorias observadas pode-se ter a noção das prioridades que o professor possui no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.

4.2.3 Idoneidade didática de aulas de Combinatória no Ensino Médio

Nessa seção, discute-se como a noção de Idoneidade didática proposta por Godino e colaboradores foi utilizada na pesquisa. Para alcançar o objetivo de valorar os indicadores das diferentes dimensões da Idoneidade Didática (epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, ecológica e afetiva) para os movimentos intencionais do professor na Combinatória no Ensino Médio, as unidades de análise foram classificadas, categorizadas e contabilizadas de acordo com as dimensões da Idoneidade didática para apresentar uma noção geral de como as aulas de Combinatória no Ensino Médio aconteciam. Essa classificação gerou tabelas quantitativas apresentando as unidades de análise por dimensão da Idoneidade didática, o que possibilitou descobrir algumas das prioridades do professor, mesmo entendendo a natureza equitativa da distribuição entre suas dimensões proposta por Godino (2012, 2014).

Nesse caso, as unidades de análise foram subdivididas entre as diferentes dimensões da idoneidade didática especificamente com relação ao objeto de estudo aqui definido. Vale salientar que uma mesma unidade de análise pode pontuar em mais de uma dimensão da idoneidade.

Por exemplo, ao professor registrar no quadro a resposta do aluno a um problema combinatório, ele está inserido na dimensão cognitiva, posto que, o

mesmo apresenta a solução de um aluno a um problema, mas também está na dimensão epistêmica no componente de regras elencando um dos procedimentos de resolução do problema, e ainda fazendo uso do quadro, que representa a dimensão mediacional. Nessa perspectiva, a contagem inicial de 978 unidades de análise foi excedida para que todas as dimensões fossem contabilizadas. Assim tem-se a noção do que foi priorizado pelo professor ao longo das aulas.

Para atingir o objetivo de “Relacionar os diferentes indicadores das dimensões da Idoneidade didática aos movimentos intencionais de um professor ao longo do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória”, foi necessário pensar nas diferentes dimensões da idoneidade didática (epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva, ecológica) e seus respectivos componentes (GODINO, 2012, 2014) para as determinadas ações docentes que poderiam ser vinculadas as aulas de Combinatória no Ensino Médio.

Para isso, alguns indicadores foram sistematizados, adaptados e relacionados ao que pode ser notado em aulas de Combinatória no Ensino Médio, posto que alguns deles não são identificados apenas com a técnica de observação. Nesse caso, alguns dos indicadores foram pensados enquanto ações docentes (movimentos intencionais), fundamentadas em pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Combinatória e organizados por dimensão da idoneidade didática. Tal sistematização foi apresentada no Quadro 16 apresentado na página seguinte.

A partir do exposto os indicadores das ações docentes foram analisados e classificados, o que permitiu a atribuição de níveis das dimensões da Idoneidade didática em alta, média e baixa ou níveis intermediários para cada um dos indicadores, o que gerou um hexágono da Idoneidade didática apresentado na Figura 1.

Quadro 16 - Indicadores analisados por dimensões da idoneidade didática na aula

D	C	Indicadores para movimentos intencionais docentes na Combinatória no Ensino Médio
Epistêmica	SP	● Promove momentos de discussão de diferentes tipos de situações problemas envolvendo Combinatória; ● Utiliza a variação de ordem de grandeza para seus alunos escolherem diferentes procedimentos enumerativos; ● Oportuniza aos alunos a discussão sobre a variedade de tipos de problema/operações Combinatória a fim de que possam diferenciá-los; ● Promove a discussão de problemas com complexidades diferenciadas (exercícios, simples, condicionais, integrados)
	L	● Discute variados tipos de registros de representação e a conversão entre eles; ● Apresenta diferentes termos utilizados em problemas combinatórios; ● Valoriza diferentes registros apresentados pelos alunos.
	R	● Oportuniza aos alunos o trabalho com diferentes procedimentos relativos a resolução de problemas combinatórios; ● Promove o uso do PFC em detrimento de fórmulas como procedimento para problemas combinatórios; ● Promove distinção de problemas combinatórios por meio de discussão de invariantes do conceito de Combinatória; ● Apresenta corretamente as definições dos problemas combinatórios; ● Promove situações que utilizem o raciocínio recursivo
	A	Incentiva a produção de diferentes argumentos aos alunos
Cognitiva	A	O professor promove ações para o acesso e alcance dos estudantes:
	Ap	● Os alunos apresentaram diferentes procedimentos e/ou técnicas para resolução de problemas combinatórios; ● Os alunos realizam a conversão entre registros combinatórios; ● Os alunos reconhecem diferentes propriedades/invariantes presentes nos problemas combinatórios. ● Os alunos apresentam argumentos e justificativas para os procedimentos utilizados.
Interacional	IPA	● Possibilita que os alunos façam propostas de procedimentos de resolução de problemas combinatórios sem esperar a resposta do professor e argumentem sobre suas ideias; ● Identifica e propõe sugestões para resolver os conflitos semióticos observados.
	IAA	● Favorece o diálogo e comunicação entre os estudantes
	At	● Promove momentos que os alunos assumam a responsabilidade do estudo
Mediacional	Re	● Utiliza diferentes Recursos Didáticos que auxiliem na compreensão da Combinatória; ● Utiliza de situações contextualizadas e motivadoras que provocam o interesse dos alunos
	Co	● O número de alunos permite possibilidades metodológicas; ● O horário das aulas é produtivo; ● A organização dos alunos na aula permite interações entre eles e o professor
	T	● Distribuição do tempo na aula
Afetiva	I	● As tarefas propostas são interessantes para os alunos; ● São propostas situações que permitem ilustrar e valorizar a utilidade da Matemática na vida cotidiana e profissional.
	A	● Promove-se a participação nas atividades; ● Promove a responsabilização dos alunos pelas soluções dos problemas combinatórios. ● Promove atitudes positivas nos alunos por meio das situações propostas e consegue propor soluções para as atitudes negativas com relação as atividades.
	E	● Promove a alta autoestima, evitando o medo ou fobia pela Matemática.
Ecológica	Ac	● Promove atividades que trabalhem com os conteúdos combinatórios dispostos no Currículo do Ensino Médio.
	ID	● Promove situações com uso de tecnologias; ● Incorpora práticas inovadoras como a ênfase da resolução de problemas.
	A	● Estabelece relações entre a Combinatória e a formação social, cultural e profissional.
	CII	● Estabelece conexões entre a Combinatória e outras áreas da Matemática; ● Estabelece conexões entre a Combinatória e outras áreas.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Este é o desenho proposto. Espera-se que a partir dele se apreenda o objeto em estudo, pois quando se obtém a proximidade com a teoria que embasa a presente pesquisa, os resultados que emergem das análises dos livros didáticos e das observações realizadas, parecem anunciar que o caminho está se construindo a medida em que o objeto vem se apresentando e se fazendo ser compreendido.

O “laboratório” apresentado para a pesquisa é, como se vê, variado e cheio de significações. O objeto em estudo qualifica a investigação, exigindo dela um tratamento que sempre retorna o olhar sobre ele, espiralando a visão em busca de seus invariantes centrais e relevância pedagógica. Com relação ao recorte do EOS apresentado na presente pesquisa, focalizaram-se naqueles que oferecem um ponto de partida (objetos primários da Combinatória), os que descrevem o processo de ensino e aprendizagem (configurações didáticas e trajetórias didáticas) e os que analisam esse processo (idoneidade didática). Tais ferramentas possibilitam uma visão geral do processo centrado nos movimentos intencionais do professor. Como o foco das análises foram as ações desenvolvidas na sala de aula durante o processo, aspectos da dimensão normativa não foram trabalhados nessa pesquisa. Nos Capítulos 5 e 6 são apresentados a análise a partir do método proposto.

5 ANÁLISE DOS OBJETOS PRIMÁRIOS DA COMBINATÓRIA IDENTIFICADOS EM CAPÍTULOS DOS LIVROS DIDÁTICOS DE ENSINO MÉDIO

Nesse capítulo apresentam-se as análises das informações coletadas, na identificação dos significados pretendidos da Combinatória no Ensino Médio, a partir da apropriação dos objetos primários em dois dos capítulos dos livros didáticos utilizados pelo professor nas aulas de Combinatória para essa etapa de ensino no presente estudo.

O motivo dessas análises baseia-se no fato que o livro didático representa um dos recursos mais utilizados por professores, e ainda, propõe um sistema de práticas institucionais pretendidas relacionadas ao campo de problemas combinatórios. A noção de configuração ontossemiótica de práticas, objetos e processos representados nos capítulos de Combinatória perpassa a identificação de objetos primários de naturezas e funções diferenciadas e classificadas em componentes como: linguagens, problemas, conceitos, proposições, argumentos e procedimentos (GODINO et al., 2017).

Tais práticas, objetos e processos podem ser analisados de pontos de vistas variados, denominados por Godino (2002) *dimensões duais para objetos matemáticos* (como anteriormente apresentado no Quadro 3, na página 49). entanto, quando aplicados a textos de livros didáticos, fazem-se necessárias algumas adaptações para tais dimensões, as quais se discutem no Quadro 17, que a segue.

Quadro 17 - Dimensões dos objetos matemáticos (GODINO, 2002) da Combinatória no livro didático

Dimensões Duais de Objetos Matemáticos	Dimensões possíveis de se apresentar no livro didático
Pessoal -Institucional	Institucional. Nos livros didáticos podem-se considerar objetos de uma instituição, referência no ensino e aprendizagem de Combinatória.
Elementar -Sistêmica	Sistêmica. Os problemas combinatórios nos capítulos de livros aparecem em uma organização estruturada pelo autor na coleção.
Ostensiva - Não Ostensiva.	Ostensiva. Nos textos didáticos observam-se apenas os objetos que podem ser representados por meio da escrita ou símbolos gráficos impedindo a verificação daqueles que fazem parte das ideias(não ostensivos).
Exemplar - Tipo	Tipo. Situações gerais da Combinatória apresentada pelos livros didáticos. Exemplar. Exemplos pontuais de situações combinatórias retiradas do livro
Expressão -Conteúdo	Expressão. Representação da Combinatória apresentada no livro didático; Conteúdo. Relações entre representações da Combinatória.

Fonte: Elaborado a partir de Godino (2002)

As diferentes dimensões duais da Combinatória são restringidas quando observadas no livro didático devido a natureza do recurso, por isso, não há objetos de natureza pessoal e elementar. De acordo com Godino e Batanero (1994), os sistemas de significados dos objetos matemáticos colocam em evidência o caráter amostral do processo de ensino e aprendizagem, trazendo aspectos como a relevância das escolhas das situações mais adequadas. Para esses autores:

[...] a população de possíveis situações (itens ou reagentes) usada no diagnóstico, para um dado conceito, é potencialmente infinita. Será necessário determinar as variáveis que determinam a estrutura dessa população, a fim de obter uma amostra representativa do mesmo, o que evita os erros ou a invalidez na determinação dos significados pessoais (GODINO; BATANERO, 1994, p.21).

A identificação dos objetos primários nos capítulos de Combinatória de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio constitui uma sistematização das atividades com relação a esse conteúdo, uma amostra das diferentes situações compartilhadas no âmbito de uma instituição – o livro didático. Como anteriormente mencionado, no capítulo do Método, os capítulos analisados foram de dois livros de Matemática do 2º ano do Ensino Médio, o Capítulo A relativo ao adotado pelo professor para uso pela turma de estudantes e o Capítulo B, utilizado pelo professor para consultas.

A análise e comparação de objetos matemáticos presentes nos capítulos de Combinatória dos livros didáticos, adotado (Capítulo A) e utilizado (Capítulo B) pelo professor como recurso para suas aulas, foi realizada a partir da identificação das atividades propostas nos textos, em seções de atividades resolvidas ou propostas seções complementares e nos manuais do professor. Tais elementos apresentam as regras, propriedades, definições e técnicas de Combinatória propostas nos capítulos. Os tipos de argumentos foram selecionados ao longo do texto das seções dos capítulos em exercícios resolvidos e nas imagens apresentadas para o qual foram selecionados alguns para exemplificação dos capítulos. Nesse caso, a noção de argumentos é compreendida como as justificativas e/ou explicações para o uso de regras, propriedades, definições e técnicas de Combinatória utilizadas nos capítulos analisados.

No Quadro 15, apresentado no capítulo de Método (p.135), foram apresentados os indicadores dos objetos primários analisados nos livros didáticos que foram sistematizados por meio das pesquisas de Borba, Azevedo e Bittar (2016); Pessoa e Borba (2009); Llanos e Otero (2012), Boavida (2005), Perelman (1993); Perelman e Olbrechts-Tyteca (1999), Borba e Braz (2012), Borba, Araújo e Braz (2013) e Roa (2000); dentre outros. A seguir, são apresentadas as cinco seções que abordam os componentes dos objetos primários encontrados nos capítulos analisados: situações problema, conceitos, linguagem, procedimentos e argumentos.

5.1 TIPOS DE SITUAÇÕES APRESENTADAS NOS CAPÍTULOS DE LIVROS DIDÁTICOS DE COMBINATÓRIA

Com relação aos *tipos de situações* identificadas nos capítulos de Combinatória dos dois livros didáticos analisados, organizou-se a Tabela 1, com a frequência e a distribuição em cada um deles. No caso, compreende-se *tipos de situações* como aquelas que abordam diferentes habilidades referentes à Combinatória, sejam procedimentos, propriedades, notações, abordadas de modo não somente convencional.

Observa-se que a variação de situações propostas é um pouco mais ampla no Capítulo A, apesar dos dois capítulos se concentrarem no tipo de situação (S3). Assim, os dois livros analisados priorizam a identificação, a partir do enunciado, do tipo de problema combinatório e, a partir da mesma, a quantificação do número de possibilidades.

Outras situações são muito pouco exploradas – tais como a identificação de problemas a partir dos invariantes dos diferentes tipos de problemas combinatórios(S7). Esse tipo de situação explora as distintas propriedades – o que pode possibilitar que os estudantes atentem para as diferenças entre os distintos tipos de problemas combinatórios. A coluna preferência representa o que é de fato priorizado nos capítulos de Combinatória analisados indicando, o percentual total do que foi apresentado pelos mesmos.

Tabela 1 – Número (e percentual) dos tipos de situações identificados em capítulos de Combinatória

Tipos de situação	Capítulo A	Capítulo B	Preferência
S1: Interpretar e empregar adequadamente notações científicas	15(8,9%)	11(6%)	26(7,5%)
S2: Enumerar as possibilidades de um problema combinatório	5(3,0%)	5(2,7%)	10(2,8%)
S3: Identificar o tipo de problema combinatório a partir do enunciado, quantificando o número de possibilidades	134(79,3%)	155 (85,2%)	289(82,3%)
S4: Explorar a resolução de problemas combinatórios a partir de situações com possibilidades de respostas diferentes.	2(1,2%)	0	2(0,6%)
S5: Explorar o tipo de procedimento de resolução do problema combinatório	4(2,4%)	2(1,1%)	6(1,7%)
S6: Explorar a operação combinatória a partir do número total de possibilidades	3(1,8%)	8 (4,4%)	11(3,1%)
S7: Identificar o tipo de problema combinatório a partir de suas propriedades ou invariantes	3(1,8%)	1(0,5%)	4(1,1%)
S8: Explorar alterações ou mudanças no enunciado de problemas combinatórios	2(1,2%)	0	2(0,6%)
S9: Promover raciocínio recursivo	1(0,6%)	0	1(0,3%)
Total	169	182	351

Fonte: Acervo da Pesquisa

A seguir apresentam-se exemplos de cada tipo de situação observada.

Consideraram-se exemplos do tipo de Situação (S1) aqueles que explicitam a operação combinatória a ser calculada, representada por meio de notações simbólicas, equações ou simplificação de expressões, geralmente envolvendo a noção de fatorial. Observam-se exemplos desses tipos de situação na Figura 9.

Figura 9 – Exemplos do tipo de situação S1 – Interpretar e empregar adequadamente notações científicas

Calcule o valor de:

a) $\frac{7!}{4!} \cdot 210$

39. Determine o valor de x em:

a) $5 + C_{x,2} = x + 14$

b) $C_{x+3,2} = 15$

Fonte: Capítulo A, p.253; Capítulo B, p.259

Os problemas de enumeração classificados nos tipos de Situações (S2) possibilitam o trabalho com diferentes procedimentos, tais como árvores de possibilidades ou tabelas, entretanto, tais procedimentos são aplicados apenas

para problemas que possuem número de possibilidades restrito. Em S2 solicita-se não apenas a quantificação, mas que se enumere todas as possibilidades, como se pode observar na Figura 10. Esse tipo de situação utiliza características propostas em problemas combinatórios na História, como apresenta Knuth (2013). Além disso, esse tipo de situação exige que os alunos escolham maneiras que auxiliem na sistematização para que não ocorra erros – como o não esgotamento de possibilidades, ou a repetição de elementos já contabilizados.

Figura 10 – Exemplo da Situação S2 – Enumerar as possibilidades de um problema combinatório

3. Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado?

Fonte: Capítulo B, p. 247

As Situações (S3), as mais frequentes, por vezes configuram-se em seções específicas intituladas *arranjo*, *combinação*, *permutação* explicitando, assim o tipo de operação combinatória. Essa frequência de problemas em seções que especificam o tipo de problema combinatório, retira do aluno a necessidade de identificá-los, tal como aponta o estudo de Espinoza e Roa (2014). No entanto, as demais situações S3 encontram-se em subseções dos capítulos (aproximadamente 33% das situações no capítulo A e 10% do Capítulo B encontram-se nessas subseções), nas quais os problemas combinatórios são dispostos sem nenhuma indicação, como na Figura 11, o que pode oportunizar aos alunos atividades de reconhecimento do tipo de problema combinatório e a construção de estratégias próprias de resolução desses problemas.

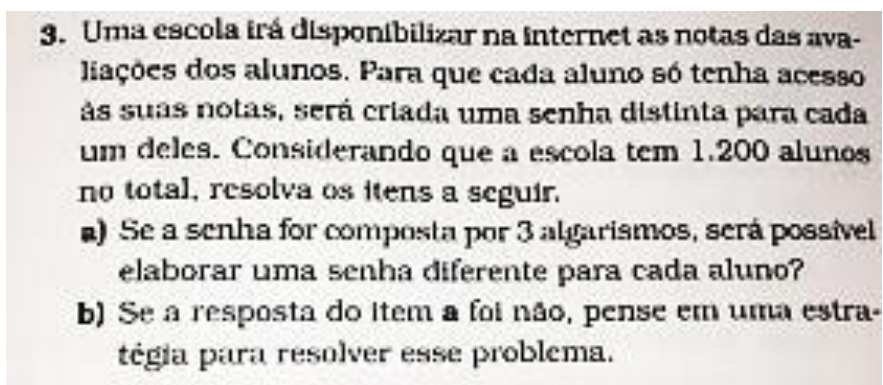
Figura 11 – Exemplo da Situação S3 – Identificar o tipo de problema combinatório a partir do enunciado, quantificando o número de possibilidades

40. Quantas equipes de 3 astronautas podem ser formadas com 20 astronautas?

Fonte: Capítulo B, p. 259

Foi observada a inserção de outros tipos de forma pontual (S4, S5, S6, S7, S8, S9). Na Situação (S4), a qual exige do aluno a exploração da resolução de problemas combinatórios a partir de situações com possibilidades de respostas diferentes, podem se apresentar diferentes escolhas realizadas por alunos e compará-las. Observa-se na Figura 12, a seguir, um exemplo desse tipo de situação.

Figura 12 – Exemplo de Situação S4 (letra b) – Explorar a resolução de problemas combinatórios a partir de situações com possibilidades de respostas diferentes

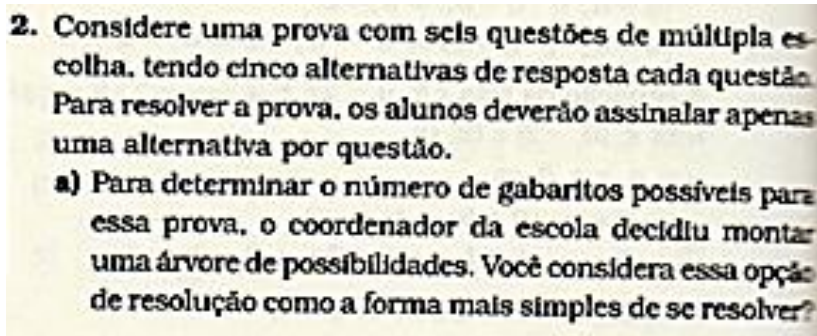


Fonte: Capítulo A, Manual do Professor, p.41.

Com relação à Combinatória, o trabalho com esse tipo de situação pode possibilitar aos alunos o reconhecimento de propriedades Combinatórias, o desenvolvimento da criatividade, e a aproximação de problemas reais, contextualizados e motivadores de novas aprendizagens. O mais interessante, nesse exemplo, é que existem diferentes procedimentos que podem ser elaborados para a composição de senhas, proporcionando a necessidade de exploração da criatividade dos alunos.

A exploração da Situação (S5), geralmente ligada à representação de árvore de possibilidades, dá-se pela organização da árvore de possibilidades, como também pela reflexão sobre quando é sensata a sua utilização, levando em consideração o número total de possibilidades. Na Figura 13 apresenta-se um exemplo de situação-problema que aborda a representação de árvore de possibilidades.

Figura 13 – Exemplo de Situações S5 – Explorar o tipo de procedimento de resolução do problema combinatório



Fonte: Capítulo A, Manual do professor, p.40

Barbosa (1963), Fischbein, Pamput e Minzat (1970), Azevedo e Borba (2013) discutem sobre a utilização da árvores de possibilidades para o ensino de Combinatória, discorrendo sobre as funções didáticas dessa representação, tanto no favorecimento de pensamentos recursivos, como na identificação e compreensão das semelhanças e diferenças existentes entre os problemas combinatórios. Nesse caso específico, apresentam-se limitações para a aplicação da árvore de possibilidades, devido ao grande número de possibilidades.

Com relação à Situação (S6), observa-se que inicialmente é dado ao aluno o resultado e se propõe que se elabore uma maneira de atingir o número total de possibilidades, o que pode permitir a exploração de diferentes propriedades dos problemas combinatórios, ou mesmo a identificação do número de elementos do conjunto e número de elementos do subgrupo a ser escolhido. Nesse exemplo da Figura 14, que utiliza abraços como contexto, há explicitação do número total de subgrupos e implicitamente há indicação do número de elementos de cada subgrupo (duas pessoas que se abraçam), mas é desconhecida a quantidade total de elementos do conjunto. Esse é um tipo de situação que explora conhecimentos de Combinatória e de outros conteúdos matemáticos, tais como equações polinomiais do 2º grau²⁵.

²⁵ Para resolver esse problema podem ser utilizado o seguinte procedimento $\frac{x(x-1)}{2} = 36$, com base na fórmula de combinação.

Figura 14 – Exemplo de Situação S6 – Explorar a operação combinatória a partir do número total de possibilidades

60. Na despedida de um grupo de amigos, 36 abraços foram trocados. Sabendo que cada um abraçou todos os outros, quantos amigos estavam reunidos?

Fonte: Capítulo B, p.172

Outra situação presente no livro didático, diz respeito à identificação do problema combinatório pelo enunciado, sem a necessidade de cálculo (S7). A Figura 15 é um exemplo desse tipo de situação.

Figura 15 – Exemplo de Situação S7 – Identificar o tipo de problema combinatório a partir de suas propriedades ou invariantes

- (Enem) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:
- a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
 - b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
 - c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
 - d) duas combinações.
 - e) dois arranjos.

Fonte: Capítulo B, p.303

A Situação (S7) está implícita em todas as Situações do tipo (S3), no entanto, a S3 exige o cálculo de possibilidades e na (S7) a atenção é dada na identificação do tipo de problema combinatório, auxiliando na compreensão das propriedades/invariantes presentes em cada problema. A ideia de situações, como a apresentada na Figura 15, é que possam ser feitas comparações entre os tipos de problema em contextos semelhantes e que possam também auxiliar na diferenciação de problemas combinatórios a partir de suas propriedades.

As situações (S8) e (S9) são bastante pontuais e só aparecem no Capítulo A e em locais de destaque. A Situação (S8) sugere a alteração do enunciado para verificação de propriedades. No exemplo da Figura 16 modifica-se a quantidade de alunos e cadeiras no auditório para verificar as semelhanças entre

as duas proposições. A alteração de valores entre números de cadeiras e número de alunos nas situações propostas não alteram a necessidade de escolher agrupamentos ordenados de três em um conjunto de sete elementos, apenas alteram em que conjunto será escolhido. Na primeira situação, escolhe-se o trio de cadeiras que cada aluno irá sentar. Na segunda situação, escolhe-se o trio de alunos que irá sentar nas cadeiras disponíveis. Nos dois casos, a *ordenação* é necessária, pois pessoas diferentes sentadas em cadeiras diferentes representam novas possibilidades.

Figura 16 – Exemplo de Figura S8 – Explorar alterações ou mudanças no enunciado de problemas combinatórios

R1. Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório, só estão vazias 7 cadeiras. De quantas maneiras eles podem ocupar essas cadeiras?

Refleta

Se houvesse uma inversão na situação da palestra — 7 alunos chegam atrasados e só há 3 cadeiras vazias no auditório —, a quantidade de grupos diferentes de 3 alunos que podem ocupar os 3 lugares seria a mesma? sim

Fonte: Capítulo A, p. 249

A Situação (S9) trata da recursividade, ou seja, a ideia de reutilizar, ou repetir um procedimento realizado em uma situação de menos elementos, ampliando gradativamente para um conjunto de mais elementos. A Figura 17 traz um exemplo desse tipo de situação.

Figura 17 – Exemplo de Figura S9 – Promover raciocínio recursivo

R2. Ao entrar num cinema, 6 amigos encontram uma fila de 6 poltronas livres. De quantas maneiras diferentes os amigos podem ocupar essas poltronas?

Refleta

Numa situação parecida com a do cinema, de quantas maneiras diferentes 7 pessoas podem ocupar uma fila com 7 poltronas?

Fonte: Capítulo A, p. 249

Na única situação que pode promover essa discussão no capítulo, observa-se a proposição de ampliação de um conjunto de seis elementos para

sete elementos. Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) defendem que no processo de ensino e aprendizagem da Combinatória, devem ser considerados aspectos do raciocínio recursivo, ao invés de focalizar apenas algoritmos e fórmulas combinatórias. O raciocínio recursivo, conforme apresentado por Abitbol (2018), Batanero et al. (1996) e Fischbein (1975) promove uma outra maneira de descobrir as fórmulas em Combinatória.

Tais situações apresentam a natureza diversificada da Combinatória e possibilitam ao professor a compreensão de diferentes perspectivas para o trabalho desse conteúdo no Ensino Médio. Pode-se acrescentar, ainda, na inclusão de situações a elaboração de problemas combinatórios, posto que, a elaboração envolve a necessidade de alunos e professores pensarem nos conceitos, invariantes e contextos envolvidos em cada tipo de problema combinatório.

Defende-se a relevância de que movimentos intencionais do professor um trabalho que promova a variação dessas situações posto que enfatizam diferentes elementos da Combinatória (procedimentos, propriedades, regras, conceitos, argumentos) que podem ser implementados no âmbito da dimensão epistêmica da idoneidade didática. Nas seções que seguem apresentam-se as discussões sobre conceitos, elementos linguísticos, procedimentos e argumentos apresentados pelos capítulos de livros analisados.

5.2 CONCEITOS RELATIVOS À COMBINATÓRIA APRESENTADAS NOS CAPÍTULOS

Na discussão sobre os *conceitos* relativos à Combinatória presentes nos livros didáticos analisados, foram elencados os indicadores de tipos de problemas combinatórios e de invariantes e/ou propriedades relativas a esses problemas. Acredita-se que o estudo das propriedades relativas a cada problema combinatório auxilia na identificação do tipo específico de problema, uma das maiores dificuldades dos alunos, conforme indicaram as pesquisas de Pessoa e Borba (2009), English (2005), dentre outras.

Para contabilizar os tipos de problemas combinatórios, foram considerados cada item dos problemas propostos, problemas resolvidos e problemas ilustrativos (utilizados como exemplo, no início de cada subseção). Alguns exercícios que tratavam de Binômio de Newton foram excluídos dessa contagem, uma vez que não tratam de um tipo específico de problema. A Tabela 2 traz a distribuição dos tipos de problemas nos dois capítulos analisados.

Tabela 2 – Número (e frequência) de tipos de problemas combinatórios encontrados nos livros analisados

Tipos de Problemas Combinatórios	Capítulo A	Capítulo B	Preferência
P1: Produto de Medidas	7(4,1%)	12(6,6%)	19 (5,4%)
P2: Arranjo Simples	34(20,1%)	51 (28%)	85(24,2%)
P3: Arranjo com Repetição	27(16%)	6(3,3%)	33(9,4%)
P4: Combinação Simples ²⁶	37(21,9%)	48(26,4%)	85(24,2%)
P5: Permutação Simples	35(20,7%)	40(22%)	75(21,4%)
P6: Permutação com elementos idênticos	13(7,7%)	16(8,8%)	29(8,3%)
P7: Permutação Circular	1(0,6%)	0	1(0,3%)
P8: Permutação com repetição	0	1(0,55%)	1(0,3%)
P9: Fatorial	12(7,1%)	5(2,7%)	17(4,8%)
++: Mais de um tipo de problema combinatório	3(1,8%)	3(1,65%)	6(1,7%)
Total	169	182	351

Fonte: Acervo da Pesquisa

Identifica-se que os problemas mais frequentes nos capítulos analisados são os de *arranjo simples*, *combinação simples* e *permutação simples*. Os problemas do tipo *produto de medidas* são menos presentes nos capítulos, o que pode se justificar pelo nível de escolarização e objetivos para o Ensino Médio. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental acontece o contrário, de acordo com constatação de Borba, Azevedo e Bittar (2016). No início da escolarização são os mais frequentes os *produtos cartesianos* e há poucos problemas de outros tipos. Ressalta-se, também, que em nenhum dos capítulos analisados verificou-se problemas de *combinação com repetição*.

Em um dos capítulos observa-se o tipo de problema de *permutação circular* (Figura 18), mas o mesmo não é mencionado no capítulo, apenas

²⁶ O termo simples nos problemas combinatórios geralmente são utilizados em problemas que não apresentam a repetição. Em livros mais antigos, denominava-se *arranjo completo* aquele que pode repetir os elementos. No texto da presente pesquisa as palavras *arranjo*, *permutação* e *combinação* são utilizadas para representar os problemas combinatórios simples.

aparece como exercício complementar no Manual do Professor, e não são apresentadas considerações que identifiquem o tipo de problema, excetuando-se a fórmula apresentada na sua resolução.

Figura 18 – Tipo de problema Permutação circular

De quantos modos diferentes podemos pintar as faces laterais e a base de uma pirâmide heptagonal, usando 8 cores diferentes, de tal modo que as cores não sejam repetidas?

Para pintar a base temos 8 possibilidades.

Para pintar as faces laterais temos 7 cores, assim:

$$8 \cdot (PC)_7 = 8 \cdot \frac{7!}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 5.760$$

Portanto, a pirâmide pode ser pintada de 5.760 modos diferentes.

Fonte: Capítulo A, p.41-42, Manual do Professor.

Também apenas um exemplo de *Permutação com repetição* foi observado, no Capítulo B como apresentado na Figura 19. Nesse caso, o problema se encontra na seção de *arranjo*, assemelha-se a um problema de *arranjo com repetição*, mas considera-se a totalidade de elementos do conjunto. A diferença entre os problemas de *arranjo com repetição* e *permutação com repetição* se apresenta com relação ao número de elementos que é ordenado. No primeiro caso se escolhe um subgrupo de elementos e no segundo caso se ordena todos os elementos do conjunto.

Figura 19 – Tipo de problema Permutação com repetição

13. Quantos números de 4 algarismos podemos escrever com os algarismos 2, 4, 6 e 8? E de 4 algarismos distintos?

Fonte: Capítulo B, p.247

Para a solução da primeira pergunta desse problema, além da *ordenação* dos elementos 2, 4, 6 e 8, é necessário contar com a repetição de elementos, proporcionando maior número de possibilidades. Para exemplificar, se fossem números de três algarismos com {1, 2, 3}, se obtém 27 possibilidades, tais como: {111; 222; 333; 112; 113; 121; 131; 211; 311; 122; 133; 212; 313; 331; 221; 322; 233;

232; 323; 223; 332; 123; 132; 231; 213; 312; 321}. Isso representa que a repetição, nesse caso, amplia consideravelmente o número total de possibilidades, pois os números podem ser repetidos.

Na seção de *Permutação com repetição* do Capítulo B, observam-se problemas como o apresentado Figura 20 que considera a quantificação de anagramas cujas letras se repetem, ou são impossíveis de se diferenciar.

Figura 20 – Tipo de problema Permutação com elementos idênticos e/ou repetidos

7. Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com A?

Fonte: Capítulo B, p.248

Nesse caso, o fato de ter elementos idênticos diminui o número de possibilidades, diferente do que acontece na figura anterior que aumenta o número de possibilidades. Para exemplificar, tem-se: quantos anagramas podem ser feitos com a palavra AMA? Nesse caso, o fato das letras A serem idênticas faz com que o número de possibilidades diminua, obtendo apenas três possibilidades, ou seja, apenas {AMA; AAM; MAA}.

Acredita-se que discussões sobre as características dos problemas, principalmente com relação à repetição de elementos, devem ser melhor explicitadas nos capítulos analisados. As sutis diferenças entre os problemas *permutação com repetição* e *permutação com elementos idênticos* não são discutidas no Capítulo B, o que pode gerar equívocos.

Ressalta-se, também, que problemas de *produto de medidas* devem ser mais trabalhados no Ensino Médio, já que figuram como problemas escolhidos para exemplificar o uso do Princípio Fundamental da Contagem, procedimento considerado por Lima(2015) elementar para a discussão da Combinatória. A distribuição irregular entre os tipos de problemas combinatórios nos capítulos, se não percebida pelos professores, podem configurar nas aulas, ocasionando a remoção do trabalho de algum tipo de problema em detrimento de outros.

No cruzamento dos tipos de problemas combinatórios com os tipos de situações identificou-se que o problema de *arranjo com repetição* do Capítulo A, variou dentre seis dos tipos de situações observadas, seguidos por *combinação*

e *arranjo* que se apresentaram em cinco tipos de situação, conforme se pode verificar na Tabela 3.

Tabela 3 – Distribuição do tipo de problema combinatório por tipo de situação

TS	TIPOS DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS																			
	PM		A		AR		C		P		Pr		Pc		PR		F		++	
	Capítulos dos livros didáticos analisados																			
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
S1	-	-	2	3	-	-	1	3	1	-	-	-	-	-	-	-	11	5	-	-
%			0,6	0,9			0,3	0,9	0,3								3,1	1,4		
S2	2	3	1	-	1	-	1	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-
%	0,6	0,9	0,3		0,3		0,3			0,3		0,3								
S3	4	9	29	48	20	6	33	41	32	33	12	15	1	-	-	1	-	-	3	2
%	1,4	2,6	8,3	13,7	5,7	1,7	9,4	11,7	9,1	9,4	3,4	4,3	0,3			0,3			0,9	0,6
S4	-	-	-	-	2	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
%					0,6			0,6												
S5	1	-	-	-	2	-	-	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
%	0,3				0,6			0,6	0,3											
S6	-	-	1	-	-	-	1	-	-	6	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-
%			0,3				0,3			1,7							0,3			
S7	-	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1
%					0,3		0,3				0,3									0,3
S8	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
%			0,3		0,3															
S9	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
%									0,3											
T	7	12	34	51	27	6	37	48	35	40	13	16	1	-	-	1	12	5	3	3
%	2	3,4	9,7	14,5	7,7	1,7	10,5	13,7	10	11,4	3,7	4,6	0,3	-	-	0,3	3,4	1,4	0,9	0,9
	19		85		33		85		75		29		1		1		17		6	
%	5,4		24,2		9,4		24,2		21,4		8,3		0,3		0,3		4,8		1,8	

Legenda: S#. Número do Tipo de Situação; TP: Tipo de Situação;
 PM: Produto de Medidas; A: Arranjo; AR: Arranjo com repetição; C: Combinação; P: Permutação;
 Pr: Permutação com elementos idênticos; Pc: Permutação Circular; PR: Permutação com
 Repetição; F: Fatorial; ++: Mais de um problema na mesma situação;

Fonte: Acervo da Pesquisa

Nem todos os tipos de problema foram explorados pelos diferentes tipos de situação. Acredita-se que permitir a exploração da variedade de situações em cada tipo de problema combinatório, pode possibilitar a elaboração de diferentes habilidades nos alunos. Por outro lado, o professor com base nas diferentes situações pode pensar naquelas que melhor se adequam para as dificuldades percebidas nos alunos durante as aulas.

Apesar da Situação S3 ser a única que contempla todos os tipos de problemas combinatórios, pode-se observar que a Situação S2 contempla, de maneira pontual, seis tipos de problemas combinatórios. Esse fato é visto de maneira positiva, posto que, a enumeração de possibilidades auxilia na elaboração de percepções de regularidade, auxiliando na compreensão de propriedades dos diferentes problemas combinatórios (BATANERO et al., 1996).

De modo analogamente pontual, as situações S1, S5, S6 e S7 contemplam quatro tipos de problemas combinatórios, o que promove a variação de situações para cada tipo de problema combinatório.

Vale salientar que essas relações só podem ser observadas se considerar os dois capítulos analisados como complementares, posto que os capítulos, se considerados individualmente, não contemplam todas as relações. Conhecer essas particularidades pode potencializar as escolhas realizadas pelo professor para possibilitar propostas com o intuito de favorecer o interesse dos alunos, como também a aprendizagem dos mesmos.

Com relação aos *invariantes e/ou propriedades relativas a esses problemas*, utilizou-se a discussão apresentada por Cunha (2015, p.24) na qual se considera que “Os invariantes do conceito ou de uma forma de raciocinar combinatoriamente indicam as diferentes propriedades do conceito”, o que permite ao professor e ao aluno diferenciá-los e ainda escolher procedimentos específicos para a solução de determinados problemas.

Pessoa e Borba (2009) classificaram os invariantes dos problemas combinatórios em *escolha, ordenação e número de elementos do(s) conjunto(s) que fo(i)(ram) considerado(s)*, diferenciando, assim, os problemas de *arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano (produto de medidas)*.

Nos capítulos de Combinatória dos livros didáticos do Ensino Médio analisados, observaram-se outros tipos de problemas combinatórios, alguns dos

quais são subcategorias dos problemas anteriormente classificados. A partir dessa classificação ampliada, categorizaram-se os tipos de problemas de acordo com os invariantes do conceito e/ou propriedades observadas, como se pode verificar no Quadro 18.

Quadro 18 – Invariantes do Conceito ou propriedades relativos aos tipos de problemas combinatórios observados

Tipo de Problema	Invariante do Conceito/ Propriedade
P1: Produto de Medidas	Escolha
P2: Arranjo Simples	Escolha e Ordenação
P3: Arranjo com Repetição	Escolha, Ordenação e Repetição.
P4: Combinação Simples	Escolha; Propriedades encontradas no livro: Regra do quociente e Igualdade entre Combinações Complementares.
P5: Permutação Simples	Ordenação
P6: Permutação com elementos idênticos	Ordenação desconsiderando na contagem das possibilidades elementos repetidos ou idênticos
P7: Permutação Circular	Ordenação desconsiderando na contagem a disposição geométrica idêntica
P8: Permutação com repetição	Ordenação Repetição
P9: Fatorial	Propriedades relativas a simplificação de Fatorial

Fonte: Acervo da Pesquisa

Observa-se em algumas subcategorias a presença de outros invariantes tais como repetição, elementos idênticos, disposição geométrica dos elementos.

Os mesmos invariantes e propriedades anteriormente citados foram identificados na análise dos capítulos de livros didáticos do presente estudo de maneira implícita, acrescido de outros que caracterizam os subtítulos de problemas. A identificação dos invariantes do conceito de Combinatória e das propriedades inerente aos problemas auxilia na diferenciação dos tipos de problemas combinatórios e na proposição de procedimentos de resolução. Importante considerar apenas pequenas diferenças entre esses invariantes determinam diferenças entre problemas, como no invariante da Repetição compreendida na *permutação com repetição* (PR) e *permutação com elementos idênticos* (Pr), por exemplo.

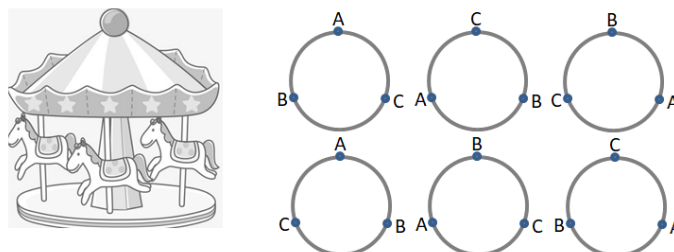
No primeiro caso, considerar a repetição em *permutação*, ou mesmo no *arranjo*, significa ampliar o número total de possibilidades, tal como afirma Silva e Rocha (2015).

[...] outra propriedade que pode aumentar a quantidade de possibilidades é a invariante da repetição, que pode ser considerada, ou não, dependendo do problema a ser resolvido. Por exemplo, ao pensar senhas compostas por três letras utilizando as letras {A, B, O}, podemos ter {ABO; AOB; BAO; BOA; OAB; OBA}, se não considerarmos as repetições de letras, ou {AAA; AAB; AAO; ABA; ABB; ABO; AOA; AOB; AOO; BAA; BAB; BAO; BBA; BBB; BBO; BOA; BOB; BOO; OAA; OAB; OAO; OBA; OBB; OBO; OOA; OOB; OOO}, se considerarmos as possibilidades que repetem as letras. Notemos que ao considerar as repetições, aumentamos consideravelmente as possibilidades, e desta forma podem mudar as estratégias de resolução das mesmas, assim deve ser considerada na análise das questões propostas (SILVA; ROCHA, 2015, p. 5).

No caso de *permutação com elementos idênticos*, o número total de possibilidades diminui e deve-se desconsiderar aqueles que já foram contabilizados na *permutação simples*. Por exemplo, ao pensar nas senhas compostas pelas letras {A, B, A} tem-se apenas {AAB; ABA; BAA}, o que diminui o total de possibilidades se as letras fossem diferentes. No caso da *permutação simples* que trata apenas da *ordenação* dos elementos, as senhas de três letras formadas por {A, B, C} sem repetição representam um total de seis possibilidades {ABC; ACB; BCA; BAC; CAB; CBA}. Dessa forma, afirma-se que os invariantes do conceito repetição e elementos idênticos podem ser analisados para auxiliar na identificação dos tipos de problemas combinatórios.

A diminuição de possibilidades também ocorre na *permutação circular* posto que a configuração geométrica influencia no total de possibilidades, havendo contagem de possibilidades a mais que devem ser desconsideradas no fim. Pode-se pensar no exemplo, de quantas maneiras três crianças (A;B; C) podem se sentar em um carrossel de três lugares? Na Figura 21 apresenta-se as configurações das crianças dispostas no círculo do carrossel.

Figura 21 – Possibilidades na permutação circular



Fonte: Adaptado de Rocha(2011)

No exemplo de *permutação circular*, as três primeiras disposições coincidem por meio da rotação. Analogamente, as três últimas também se equivalem. Dessa forma, devido à disposição circular, esse problema tem apenas duas possibilidades {ABC; ACB}. Morgado et al. (1991) afirmam que no caso da permutação circular o que importa é a posição relativa entre os objetos ordenados.

Com relação à *permutação com elementos idênticos* (denominado pelo Capítulo A como permutação com elementos repetidos), os dois livros possuem seções que discutem e exemplificam o tipo do problema, como se pode verificar na Figura 22.

Figura 22 – Considerações sobre Permutação com elementos repetidos do Capítulo A

3.3 Permutação com elementos repetidos

Trocando-se a posição das letras da palavra AMORA, podem ser escritas outras sequências de letras. Nesse caso, porém, os anagramas não correspondem mais às permutações simples, pois a letra A se repete. Apesar de a palavra AMORA ter 5 letras, o número de anagramas distintos é inferior a $5!$. Se as 2 letras A fossem distintas, (A_1 , $MORA_2$), teríamos $5!$ anagramas. Assim, fixadas as letras M, O e R, a permutação das letras A_1 e A_2 daria, para cada anagrama de AMORA, origem a $2!$ novos anagramas. Como essas letras são iguais, a permuta delas não gera um novo anagrama. Então, para o cálculo correto do número de anagramas de AMORA, devemos dividir por $2!$ o total de permutações simples, $5!$. Portanto, o total de anagramas da palavra AMORA é 60.

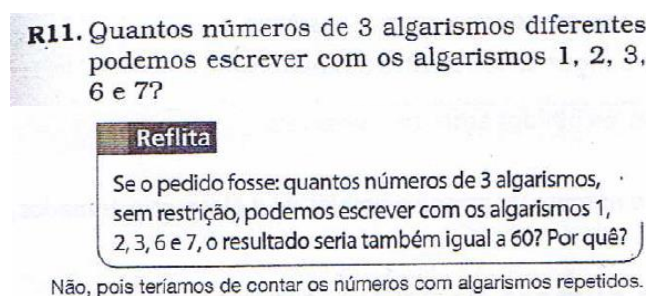
Aplica-se o mesmo raciocínio aos casos em que há repetição de mais de 2 elementos.

Fonte: Capítulo A, p.254.

Verifica-se que o autor apresenta em linguagem natural como resolver os problemas de permutação com elementos idênticos, justificando, pela igualdade dos elementos (letras), a divisão pela quantidade de permutações dos elementos repetidos. Ressalta-se que o registro em linguagem natural geralmente ocorre no início das seções para exemplificar e explicar o procedimento adotado.

O invariante da repetição na *permutação* não é discutido amplamente nos livros didáticos analisados. Em algumas situações pode ser discutida a influência da repetição em problemas de *arranjo*. No exemplo apresentado na Figura 23 a diferença entre os Algarismos impõe a restrição da repetição na escolha. Na seção Reflita (Figura 23) o termo ‘sem restrição’ garante a necessidade de contabilizar a repetição de Algarismos na construção das possibilidades.

Figura 23 – A influência do invariante da Repetição em problemas de arranjo nos capítulos de livro



Fonte: Capítulo A, p.257.

O invariante de escolha apresenta-se de modo implícito na resolução de problemas de *produto de medidas* e, em alguns casos, de *produto de medidas e permutação*, é apresentado de maneira explícita, como nos exemplos das Figuras 24 e 25.

Figura 24 – O invariante da escolha em problemas do tipo de Produto de Medidas

Para comprar um lanche na cantina da escola, Raul avalia as seguintes opções: são oferecidos 2 tipos de pão (francês e integral) e 3 tipos de recheio (calabresa, presunto e hambúrguer). Os sanduíches podem ser servidos com ou sem queijo. Quantos tipos de sanduíche Raul pode montar?

Raul deve fazer 3 tipos de escolha:

- E1: pão francês ou integral (**f** ou **i**);
- E2: recheio de calabresa (**c**), presunto (**p**) ou hambúrguer (**h**);
- E3: com queijo (**cq**) ou sem queijo (**sq**).

Fonte: Capítulo A, p.257.

Figura 25 – O invariante da escolha em problemas do tipo de arranjo

Já vimos que a quantidade de permutações simples das letras da palavra AMOR é igual a $4! = 24$. Isso significa que as 4 letras dessa palavra podem ser reordenadas de 24 maneiras diferentes, resultando 24 anagramas. Se, contudo, quisermos formar sequências de 2 letras distintas (escolhidas entre as 4 que formam a palavra AMOR), de quantas maneiras diferentes podemos fazê-las?

Vamos considerar que a situação descrita ocorra em duas etapas:

1ª etapa: escolher a primeira letra entre 4 possíveis;

2ª etapa: escolher a segunda letra entre 3 possíveis.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos: $4 \cdot 3 = 12$

Fonte: Capítulo A, p.256.

Tais exemplos sugerem a necessidade da escolha de elementos nos conjuntos para determinar o número total de possibilidades, ressaltando que o

que difere *produtos de medidas e permutações* faz relação com a quantidade de conjuntos envolvidos. Assim como nos problemas de *arranjo*, a *combinação* também possui o invariante de escolha, no entanto, o que os diferencia é que no último a seleção ocorre em uma mostra não ordenada de elementos.

Nos capítulos de livros analisados são exibidos alguns exemplos do invariante de *ordenação* na resolução de problemas, como também em textos introdutórios das seções dos capítulos. Nas Figuras 26 e 27 esse invariante é explicitado.

Figura 26 – Exemplo do uso da *ordenação* e *não repetição* na resolução de um problema de *arranjo*

13. Quantas frações diferentes (e não iguais a 1) podemos escrever usando os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13?

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula
 Nesse caso estamos procurando agrupamentos de 2 elementos nos quais a ordem é importante $\left(\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}\right)$ e nos quais um mesmo número não pode ser repetido na mesma fração $\left(\frac{3}{3} = 1\right)$.
 Esses agrupamentos de 2 elementos devem ser formados com os 6 elementos: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Logo, temos:

$$A_{6,2} = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$$

Fonte: Capítulo B, p.252.

Ressalta-se nesses exemplos o invariante da *ordenação* (ou não) explicitado na resolução de problemas de *arranjo* e *combinação* respectivamente. Essa diferença a partir do invariante da *ordenação* distingue os problemas de *arranjo* e os de *combinação*, e representa um dos aspectos de maior dificuldade entre alunos (PESSOA; BORBA, 2009) e professores que ensinam Combinatória nos diferentes níveis de escolarização (ROCHA, 2011).

Figura 27 – Exemplo do uso da *ordenação* na resolução de um problema de *combinação*

21. De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete tendo à sua disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula

Procuramos o número total de subconjuntos (ou combinações) com 5 elementos tirados de um conjunto de 12 elementos. A ordem não importa; cada subconjunto difere um do outro apenas pela natureza dos seus elementos. Assim, procuramos:

$$C_{12,5} = \frac{A_{12,5}}{5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$$

Portanto, podemos formar 792 times de basquete diferentes com 12 atletas.

Fonte: Capítulo B, p.258.

No caso do problema de *combinação*, além do invariante da *escolha* de subgrupos em um grupo de elementos, foram observadas duas outras propriedades nos capítulos. A primeira diz respeito à Regra do Quociente (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.30) “[...]o cálculo das combinações como o quociente do número de *arranjo* e o número de *permutações*” como se pode observa na Figura 28.

Figura 28 – Regra do Quociente apresentada no problema de *combinação*

A cada combinação de n elementos tomados p a p correspondem $p!$ arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Fonte: Capítulo B, p.254.

Tal regra é utilizada no capítulo como alternativa para o uso de fórmulas, e como explicação para a fórmula de *combinação* (C). Roa, Batanero e Godino (2003, p.18) afirmam que utilizar essa regra “implica em estabelecer uma relação de equivalência dentro de um conjunto de configurações combinatórias”. Segundo esses autores, essa regra não é intuitiva e, para que seja utilizada, é necessário focalizá-la no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória. Como se observa, a apresentação da mesma no problema de *combinação* nos dois capítulos analisados, e ainda seu implícito para problemas de *permutação com elementos idênticos* (para desconsiderar as possibilidades contadas que

são iguais)²⁷ pode ser um possível caminho para explicar as fórmulas combinatórias no Ensino Médio.

Outra propriedade discutida no capítulo sobre o problema de *combinação* foi a igualdade de combinações complementares. Essa igualdade significa que escolher elementos de um conjunto que pertencem a uma seleção corresponde a escolher também o que não pertence à seleção, como se pode observar na Figura 29. Dessa forma, por exemplo, a *combinação* de 7 elementos três-a-três ($C_{7,3}$) é igual à *combinação* de 7 elementos quatro-a-quatro ($C_{7,4}$). O uso dessa propriedade pode simplificar os cálculos de *combinação*.

Figura 29 – Propriedade da igualdade de combinações complementares

De modo geral, vale a propriedade:

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

pois:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = C_{n,n-p}$$

Essa propriedade é muito útil para simplificar os cálculos e é conhecida por **igualdade de combinações complementares**.

Fonte: Capítulo B, p.255.

Sobre as propriedades do fatorial, as discussões dos capítulos são apresentadas por meio de exercícios resolvidos. A ênfase nas propriedades de simplificação de fatorial é exibida em pequenas seções de destaque, como se pode observar na Figura 30. Pesquisas como a de Batanero et al. (1996) indicam que o uso do fatorial deve ser associado a discussão dos problemas de permutação, o que pode propiciar contextos ao tratamento desse tipo de registro.

Figura 30 – Propriedades de simplificação de fatorial

Fique atento!

Podemos escrever:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$15! = 15 \cdot 14 \cdot 13!$$

Refleta

Se n é um número natural maior que 1, $(n-1)!$, $n!$ e $(n+1)!$ são números consecutivos?

Não. Por exemplo, para $n = 2$, temos:

$$(n-1)! = 1! = 1$$

$$n! = 2! = 2$$

$$(n+1)! = 3! = 6$$

Fonte: Capítulo B, p.246; Capítulo A, p.252

²⁷ No caso da Permutação com elementos idênticos, a Regra do Quociente aplicada divide o número de permutações totais, pelo número de permutações da quantidade de elementos que são idênticos.

Os invariantes são abordados geralmente de maneira implícita nos problemas combinatórios, mencionados ou em problemas resolvidos (*escolha*), ou no texto introdutório das subseções (*ordenação*) ou em seções que chamam atenção ao longo do texto (*fatorial, repetição*).

As propriedades (*fatorial, combinação*) são enunciadas, mas são escassas as atividades que as utilizam. Em alguns casos pode-se observar em um dos capítulos (apenas o B) em um exercício proposto (igualdade do complementar da *combinação*) e em alguns exercícios resolvidos (Regra do quociente). As propriedades de fatoriais foram abordadas de maneira implícita nas simplificações dos fatoriais, quando fórmulas foram utilizadas, em textos introdutórios das subseções ou em exercícios propostos.

Dessa maneira, cabe ao professor, com base no livro didático, fazer escolhas que permeiem diferentes discussões desses conceitos e propriedades. Nessa direção, a comparação entre diferentes soluções de um mesmo problema pode auxiliar na identificação de procedimentos para distintos tipos de problemas e de suas propriedades específicas.

No trabalho de Holanda (2017) existe uma situação (Figura 31) na qual a comparação entre diferentes soluções para um problema combinatório produzidos por estudantes fictícios são apresentadas para que os alunos justifiquem qual dos procedimentos está correto.

Figura 31 – Proposta de situação sobre comparação de tipos de problemas combinatórios por meio de procedimentos diferenciados

14. Quatro alunos estavam discutindo sobre uma questão de combinatória que caiu numa prova de concurso, apresentando as seguintes resoluções:

Quatro alunos (Mário, Alex, Raul e José) participam de um concurso em que serão sorteados dois jogos eletrônicos. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

Aluno A: $\overline{4} \cdot \overline{3} = 12$	Aluno B: $\overline{4} \cdot \overline{4} = 16$	Aluno C: MA; MR, MJ, AR, AJ, RJ 6 possibilidades	Aluno D: MM, AA, RR, JJ, AM, MR, MJ, AR, AJ, JR 10 possibilidades

Para você qual desses alunos está correto? Como você avaliaria os demais alunos?

Fonte: Holanda (2017, p.116)

Esse tipo de situação pode ser apresentada a fim de propiciar a identificação e a discussão sobre invariantes relativos aos problemas combinatórios. O fato do enunciado do problema não estar bem definido (se uma mesma pessoa pode ser sorteada duas vezes), permite diferentes interpretações propostas por cada aluno.

O Aluno A imagina a situação com ordenação e sem repetição, entendendo o problema como *arranjo*, considerando no enunciado que os jogos eletrônicos são diferentes (um mais caro do que o outro, por exemplo) e que nenhum dos alunos pode ganhar dois prêmios. O Aluno B imaginou a situação com ordenação e repetição, considerando o problema de *arranjo com repetição*, no caso, uma pessoa pode ganhar dois prêmios. O Aluno C imaginou a situação com jogos eletrônicos iguais, logo considera um problema de *combinação* – pois tanto faz ser sorteado para o primeiro, quanto para o segundo jogo. O Aluno D imaginou a situação com jogos iguais e com a possibilidade de receber os dois prêmios, considerando um problema de *combinação com repetição*.

A comparação entre os tipos de problemas combinatórios não é tratada explicitamente nos capítulos analisados. Corrobora-se com Braga (2009) quando sugere que a apresentação dos tipos de problemas combinatórios de maneira separada, em seções, não permite a comparação entre os mesmos. A atividade de comparação entre os diferentes tipos de problemas combinatórios pode fazer com que alunos observem alguns elementos implícitos ao problema combinatório, como invariantes ou propriedades de cada tipo.

5.3 ELEMENTOS LINGUÍSTICOS RELATIVOS À COMBINATÓRIA APRESENTADOS NOS CAPÍTULOS DOS LIVROS ANALISADOS

Na análise de *elementos linguísticos*, fez-se uma leitura nos capítulos e, também, manuais do professor, posto que nesses, constam as resoluções comentadas dos problemas combinatórios. Para classificação desses elementos foram utilizadas algumas categorias da conversão de representações simbólicas desses problemas discutidos na pesquisa de Borba, Azevedo e Bittar (2016) e adaptadas para problemas combinatórios no nível de Ensino Médio.

Para Borba et al. (2016), as conversões realizadas entre diferentes formas de representações simbólicas de problemas combinatórios podem permitir aos estudantes compreenderem propriedades relacionadas a cada problema combinatório (ibid). A seguir apresenta-se na Tabela 4 a distribuição da conversão por tipo de problema combinatório dos capítulos analisados.

Tabela 4 – Conversões entre registros de representação por tipo de problema combinatório

Conversões entre Registros de Representação																
TP	Ln		Ln>Fat		Ln>PFC		Ln>For		Ln>Ar		Ln>PFC >For		++ PFC		++ For	
	Capítulos dos livros didáticos analisados															
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PM	-	1	-	-	4	4	-	1	1	-	-	-	2	5	-	1
%		0,3			1,1	1,1		0,3	0,3				0,6	1,4		0,3
A	1	-	2	-	16	8	11	28	1	-	3	14	-	-	-	1
%	0,3		0,6		4,5	2,3	3,1	8,0	0,3		0,9	4,0				0,3
AR	4	-	-	-	21	4	-	-	2	-	2	2	-	2	-	-
%	1,1				6,0	1,1			0,6		0,6	0,6		0,6		
C	2	-	1	-	2	-	27	42	-	-	-	-	-	-	3	5
%	0,6		0,3		0,6		7,7	11,9							0,9	1,4
P	-	3	1	-	9	2	24	32	1	-	-	-	-	1	-	2
%		0,9	0,3		2,6	0,6	6,8	9,1	0,3					0,3		0,6
Pr	1	2	-	-	-	-	12	14	-	-	-	-	-	-	-	-
%	0,3	0,6					3,4	4,0								
Pc	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
%							0,3									
PR	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
%						0,3										
F	1	-	8	4	-	-	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-
%	0,3		2,3	1,1			0,9	0,3								
++	-	1	-	-	3	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-
%		0,3			0,9			0,6								
T	16		16		74		198		5		21		10		12	
%	4.5		4.5		21,1		56.4		1.4		5.9		2.8		3.4	

Legenda: TP. Tipo de Problema combinatório; (PM: Produto de Medidas; A: Arranjo; AR: Arranjo com repetição; C:Combinação; P: Permutação; Pr: Permutação com elementos idênticos; Pc: Permutação Circular; PR: Permutação com Repetição; F: Fatorial; ++: Mais de um problema na mesma situação;) **Conversões** (Ln: Linguagem natural; Ln> PFC: Linguagem natural para PFC; Ln > For: Linguagem natural para fórmula; Ln> Ar: Linguagem natural para Árvore de possibilidades; Ln>Fat: Linguagem natural para fatorial; Ln>PFC> For: Linguagem natural para PFC para fórmula; ++ PFC: Mais de uma conversão com PFC; ++ For: Mais de uma conversão para fórmula)

Fonte: Acervo da Pesquisa

Para Duval (1995), por meio das transformações de representações semióticas, verifica-se a atividade cognitiva do aluno. No caso do *tratamento*, as

transformações acontecem internamente em um mesmo tipo de registro, enquanto nas *conversões* indica-se um caminho percorrido pelas transformações provocando uma mudança, uma transição entre o registro de partida e o de chegada. Acredita-se que a conversão apresenta uma relação entre os diferentes registros o que pode permitir aos alunos do Ensino Médio, a compreensão das fórmulas combinatórias, dando sentido às mesmas, como também a outros tipos de procedimentos de resolução desses problemas.

Tanto a Linguagem natural como a conversão entre Linguagem natural e Fatorial foi utilizada na mesma quantidade de problemas combinatórios (4,5%). A mais evidenciada foi a conversão entre Linguagem natural e fórmulas (56,4%), seguida pela conversão entre Linguagem natural e PFC (21,1%). Em alguns momentos, em ambos os livros, foram observadas as conversões entre Linguagem natural, PFC e fórmulas, sugerindo a comparação entre os diferentes procedimentos, com a intenção de fomentar a discussão e a compreensão sobre diferentes procedimentos de resolução para um problema combinatório.

A seguir apresentam-se e discutem-se alguns exemplos retirados dos livros para elucidar a discussão sobre as diferentes conversões realizadas.

A Linguagem natural foi utilizada para a resolução de diferentes problemas combinatórios de maneira pontual, pois era exibida principalmente no início dos capítulos e/ou seções específicas dos problemas combinatórios. Nesse caso, observou-se o registro de representação da Linguagem natural (como se pode observar na Figura 32) e, por fim, a conversão da mesma para a listagem, escolhendo a inicial do nome para confeccioná-la.

Figura 32 – Exemplo de um tratamento em Linguagem natural em um problema de combinação

- a) Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?
 Representemos por A: Ane; E: Elisa; R: Rosana; F: Felipe; e G: Gustavo. Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos $\{A, E, R, F, G\}$. A ordem em que os elementos aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Ane-Elisa, por exemplo, é a mesma dupla que Elisa-Ane. Então, os subconjuntos de 2 elementos são: $\{A, E\}, \{A, R\}, \{A, F\}, \{A, G\}, \{E, R\}, \{E, F\}, \{E, G\}, \{R, F\}, \{R, G\}, \{F, G\}$.

Fonte: Capítulo B, p.254

A conversão entre Linguagem natural e Fatorial aparece tanto em exercícios quanto em problemas combinatórios para operar com as notações. Na Figura 33 está exposta a conversão entre Linguagem natural para Fatorial para Expressão Algébrica, no qual se faz uso de propriedades de simplificação de fatorial para resolver.

Figura 33 – Exemplo de conversão de Linguagem natural para Fatorial para Expressão algébrica

R6. Determinar o número natural n sabendo que: $\frac{(n+1)!}{n!} = 4!$

► *Resolução*

Podemos escrever $(n+1)!$ como $(n+1) \cdot n!$, obtendo: $\frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = 4!$

Temos: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Obtemos, assim, uma nova expressão que pode ser simplificada:

$$\frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = 24 \Rightarrow n+1 = 24 \Rightarrow n = 23$$

Fonte: Capítulo A, p.252

Na pesquisa de Borba et al. (2016), como versavam sobre problemas combinatórios de livros dos anos iniciais do Ensino Fundamental, a conversão mais frequente era a Linguagem Natural para Desenhos. Já nos capítulos de Combinatória do Ensino Médio aqui analisados, a conversão mais frequente é da Linguagem Natural para Fórmulas, representando mais de 56% do total de problemas combinatórios, sendo nos problemas de *combinação* onde essa conversão foi mais utilizada.

Não foi observado, nos capítulos analisados, o uso de desenhos como procedimento de resolução de problema, apenas como figuras ilustrativas ou como apresentação de algum argumento de combinatória como acontece no caso de árvore de possibilidades. Esse fato pode indicar que autores desses livros considerarem que desenhos no Ensino Médio não podem mais serem auxiliares na resolução de problemas combinatórios.

Verifica-se que a conversão de Linguagem Natural para PFC (Princípio Fundamental da Contagem) se refere a 21,1% dos problemas combinatórios analisados, o que pode ser ampliado para esse nível de escolarização, já que a utilização abusiva de fórmulas combinatórias não é indicada para a aprendizagem (ROCHA, 2011). O PFC é um procedimento que pode ser utilizado

em praticamente todos os problemas combinatórios do Ensino Médio e pode constituir um passo para a compreensão das fórmulas. No Capítulo A essa conversão é mais frequente nos problemas de *arranjo com repetição*, já no Capítulo B foi mais aplicada nos problemas de *arranjo*.

Nos dois capítulos analisados observa-se a conversão de Linguagem Natural para PFC para Fórmula em apenas 5,9%. Essa conversão pode favorecer para os alunos a compreensão de diferentes possibilidades de resolução do problema, como também a utilização das fórmulas combinatórias. Ressalta-se que essa conversão foi mais adotada em problemas de *arranjo* nos dois capítulos analisados. Na Figura 34 observa-se um exemplo dessa conversão.

Figura 34 – Exemplo de conversão de Linguagem natural para PFC para Fórmula em um problema de *arranjo*

12. De quantas maneiras 5 meninos podem se sentar em um banco que tem apenas 3 lugares?

Resolução:

1ª maneira: sem usar a fórmula
5 meninos são possíveis para o 1º lugar do banco, 4 para o 2º e 3 para o 3º. Então, são $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; 60 possibilidades.

2ª maneira: usando a fórmula
Estamos interessados nos agrupamentos ordenados de 3 elementos, retirados de 5 elementos, ou seja:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Portanto, há 60 maneiras possíveis.

Fonte: Capítulo B, p.251.

Constatou-se, em algumas situações, a presença de mais de duas conversões em um mesmo problema combinatório. Essas situações foram subdivididas entre aquelas que envolvem fórmulas e as que envolvem o PFC.

Na Figura 35 exemplifica-se a conversão Linguagem Natural para Diagrama para Árvore de possibilidades para PFC e para Listagem foi uma das que mais tiveram conversão entre registros. Duval (1995) defende o uso de diferentes conversões para a compreensão de conceitos.

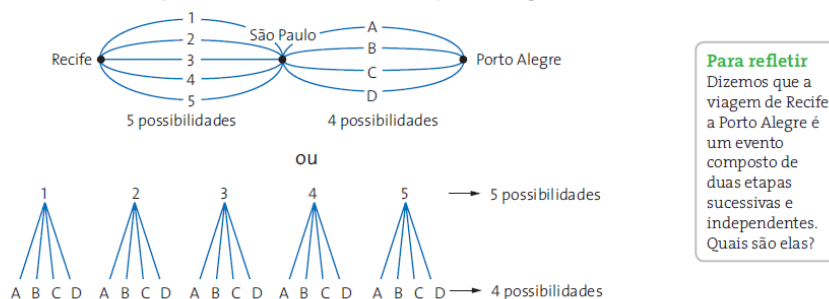
No Manual do Professor do Capítulo B há uma indicação para o trabalho com as diferentes técnicas de contagem. Nessa indicação, para a apresentação

do PFC, direciona-se o professor a discutir os procedimentos de resolução utilizados no exemplo exposto na Figura 35.

Figura 35 – Exemplo de mais de uma conversão com PFC em um problema de produto de medidas

1º) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Para facilitar a compreensão, vamos utilizar os esquemas seguintes:



Total de possibilidades: $5 \cdot 4 = 20$.

São elas: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D, 4A, 4B, 4C, 4D, 5A, 5B, 5C e 5D.

Portanto, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo.

Fonte: Capítulo B, p.243

A visualização de diferentes maneiras de como uma mesma possibilidade pode ser representada em cada um dos procedimentos (diagrama, árvore, PFC e listagem), pode ser realizada para que o aluno compreenda o conceito de possibilidade.

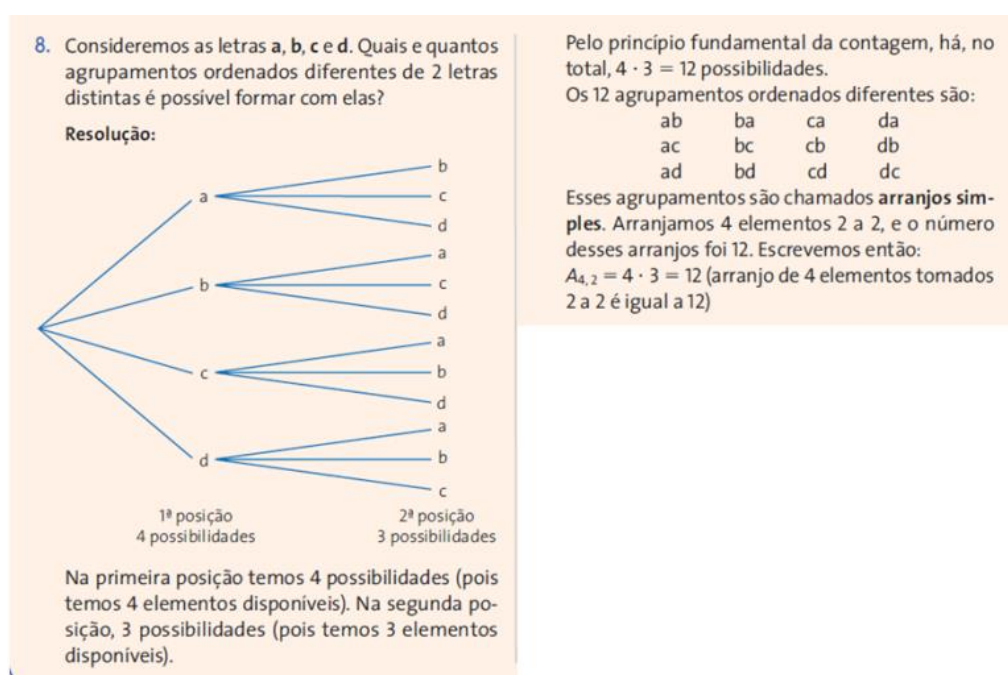
Foram observadas, nos capítulos de livros analisados, as sistematizações de procedimentos enumerativos (diagramas, árvore, listagens) para o uso do PFC, tal como apresenta-se na Figura 35. Essa orientação é reforçada pela BNCC desde os anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018). No entanto, como também se apresenta em livros didáticos do Ensino Médio, pode ser implementada pelo professor nessa etapa de ensino, pois viabiliza a compreensão de diferentes técnicas de contagem.

Observou-se que essas conversões entre variados tipos de registros enumerativos ocorrem no início dos capítulos, se tornando mais escassas no decorrer dos mesmos. São mais frequentes em problemas de *produtos de medidas* e é pouco explorado em outros tipos de problemas. Faz-se necessário ampliar a utilização de procedimentos enumerativos para os demais tipos de problemas combinatórios, além de reforçar as sistematizações desses procedimentos para o uso dos princípios aditivo e multiplicativo no Ensino Médio,

para que não haja a ênfase estanque em fórmulas combinatórias no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória.

As fórmulas também foram comparadas a outros registros, conforme se expõe Figura 36. Nesse caso, exhibe-se a conversão Linguagem Natural para Árvore de possibilidades para Princípio Fundamental da Contagem para Listagem para Fórmula. A comparação dentre todos esses registros pode ser ponto de discussão sobre qual é o registro mais adequado para cada situação, ou seja, em uma situação com um número muito grande de possibilidades, convém o uso de procedimentos mais econômicos.

Figura 36 — Exemplo de Mais de uma conversão com Fórmula no problema de arranjo



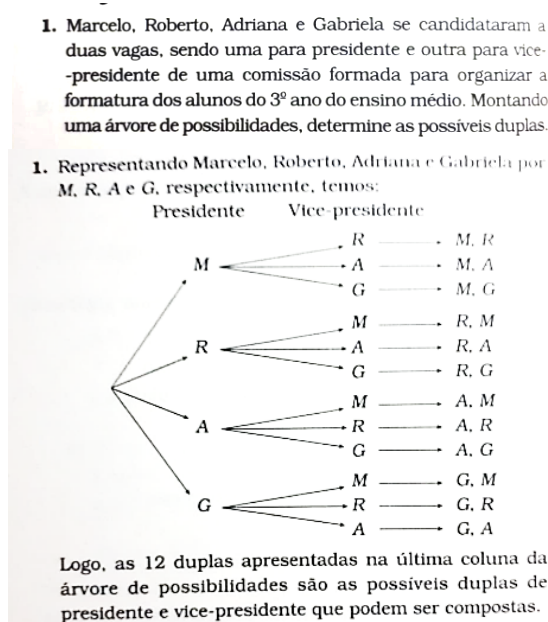
Fonte: Capítulo B, p.249.

As diferenças entre esses registros podem ser comparadas pelos alunos. Os procedimentos enumerativos, como a árvore de possibilidades e a listagem, são organizados de maneira sistemática para que não haja esquecimento de alguma possibilidade. A similaridade pode ser observada entre o uso de fórmulas e notações de *arranjo* com o uso do PFC. Semelhanças como essa devem ser enfatizadas, pois podem promover a compreensão de fórmulas combinatórias.

Na Figura 37 representa-se uma conversão da Linguagem natural para a árvore de possibilidades. O Manual do professor do Capítulo B indica a utilização

do Princípio Fundamental da Contagem juntamente com a árvore de possibilidades para introduzir a discussão de diferentes técnicas para resolução de problemas combinatórios. Nesse sentido, as autoras Azevedo e Borba (2013) consideram a árvore de possibilidades como um registro enumerativo que apresenta relações estreitas com o Princípio Fundamental da Contagem. Nos capítulos analisados, essa conversão foi utilizada pontualmente em quatro tipos de problemas combinatórios (*produto de medidas, arranjo, arranjo com repetição e permutação*), apesar da sua baixa frequência (de apenas 1,4%).

Figura 37 – Exemplo de conversão de Linguagem natural para árvore de possibilidades em um problema de *arranjo*



Fonte: Capítulo A, Manual do Professor, p. 41–42.

Outro fator que também pode ser observado no âmbito da linguagem diz respeito aos termos utilizados para representar a mesma ideia ou noção matemática. Nos capítulos não foram notadas muitas mudanças em relação a isso. No entanto, com relação aos termos utilizados para a discussão de possibilidades, nota-se a utilização de termos como combinações possíveis, conforme apresentado na Figura 38.

Figura 38 – Termo utilizado para possibilidades

Resolver esse problema implica quantificar todas as combinações possíveis com três letras e quatro algarismos para formar as diferentes placas. Problemas de contagem desse tipo permeiam nosso cotidiano.

Fonte: Capítulo A, p.246.

O termo *combinações possíveis* é utilizado em dois momentos no Capítulo A, apesar de nesses momentos se tratar em todos os casos de resolução e nos comentários sobre problemas de *arranjo*. Já na seção de problemas de *combinação simples* o trecho é apresentado na Figura 39. Considera-se que a nomenclatura *combinação* no sentido de agrupar elementos pode gerar confusões nos alunos ou ainda conflitos semióticos já que existe um problema combinatório denominado *combinação*. Assim, pode se gerar confusão entre o sentido de agrupar elementos – válido para todos os tipos de problemas – com o tipo de um problema combinatório específico.

Figura 39 – Termo Combinação utilizado com diferentes significados

Vamos determinar o número de subconjuntos do conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ que tenha 3 elementos, isto é, o número de **combinações** dos 5 elementos tomados 3 a 3, cuja notação é $C_{5,3}$.

Cada **combinação** de 3 elementos, por exemplo $\{2, 6, 8\}$, origina $3! = 6$, ou seja, 6 agrupamentos ordenados (permutações desses elementos):

$(2, 6, 8), (2, 8, 6), (6, 2, 8), (6, 8, 2), (8, 2, 6), (8, 6, 2)$

Portanto, $C_{5,3} \cdot 3!$ dá o total de arranjos dos 5 elementos tomados 3 a 3 ($A_{5,3}$):

$$C_{5,3} \cdot 3! = A_{5,3} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow C_{5,3} = 10$$

Como vimos, com p elementos distintos, podemos obter $p!$ permutações. Isso significa que, a partir de uma **combinação**, podemos obter $p!$ arranjos distintos dos n elementos tomados p a p .

Então, o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos ($A_{n,p}$) e o número de permutações ($p!$):

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} : p! = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Fonte: Capítulo A, p.259.

Godino e Batanero (1994) discutem a noção de conflito semiótico compreendendo essa ideia como as discrepâncias entre os significados institucionais e os pessoais dos objetos matemáticos. Dessa forma, um aluno imbuído dessa noção exibida no livro didático, pode usar procedimentos resolutivos de *combinação* em situações nas quais esses procedimentos não se aplicam. Observam-se, ainda, como sinônimos de *possibilidades* termos como *maneiras diferentes* e *modos diferentes*, dentre outros.

Verificou-se, ainda, na comparação dos capítulos a falta de uniformidade na nomenclatura para problemas de *permutação com elementos idênticos*. No

Capítulo A utiliza-se a *permutação com elementos repetidos*, enquanto que o Capítulo B denomina *permutação com repetição* (aqui compreendida como a ordenação completa dos elementos, inclusive com a repetição de todos elementos do conjunto) conforme apresentado na Figura 40.

Figura 40 – Seção do Capítulo B sobre Permutações com elementos idênticos

3 Permutações com repetição

Considere o exemplo:

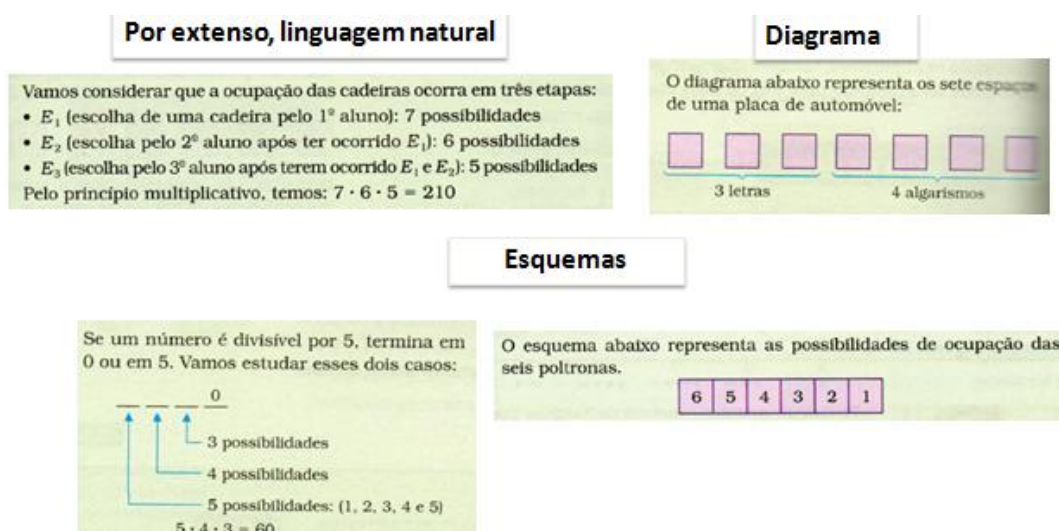
Quanto são os anagramas da palavra BATATA?

Fonte: Capítulo B, p.248

No ano de 2012 o Guia do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ensino Médio de Matemática (BRASIL, 2011) expandiu a avaliação para garantir a inclusão de todos os campos da Matemática, a exploração de conceitos (evitando definições dúbias, a confusão entre tese e hipótese, entre outros equívocos) e sua utilização na resolução de problemas. Nesse sentido, palavras que gerem dúvidas, se forem utilizadas, devem explicitar seu significado.

Semelhantermente, pode-se verificar que o princípio multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem é representado por vários tipos de registro nos dois capítulos analisados, como se pode observar nas Figuras 41 e 42, principalmente nos exercícios resolvidos.

Figura 41 – Tipos de Registros utilizados para PFC no Capítulo A

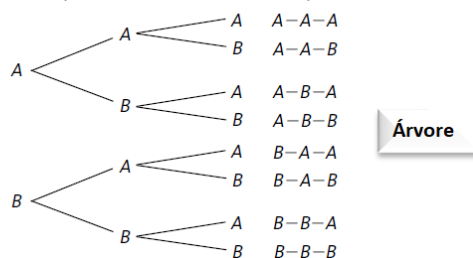


Fonte: Capítulo A, p.257.

Na Figura 41, observa-se um esquema de tracinhos relacionado ao uso do PFC, bastante utilizado para representar a quantidade de escolhas de cada etapa. Além dele, são apresentados quadradinhos que devem ser preenchidos corretamente com o número de possibilidades relativos às posições indicadas, e a linguagem natural explicitando o número de possibilidades de cada etapa. Já na Figura 42 as escolhas apresentadas dizem respeito à árvore de possibilidades e à multiplicação.

Figura 42 –Tipos de Registros utilizados para PFC no Capítulo B

3. Em cada lançamento, podemos ter cara ou coroa. Utilizando A para cara e B para coroa, temos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades de resultado:



4. Há $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras.

Multiplicação

5. Algarismos das dezenas: 2, 4, 6 ou 8
 Algarismos das unidades: 0, 3, 6 ou 9
 Logo, podemos formar $4 \cdot 4 = 16$ números.

Explicitação das possibilidades de cada escolha

Fonte: Capítulo B, p.433. Manual do Professor

A compreensão desses diferentes registros do PFC pode trazer uma ideia de como os alunos adaptam e modificam as representações semióticas ao longo do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória. Dessa forma, Linguagem natural, Diagramas, Esquemas, Árvores e outros registros podem gradativamente serem usados para a construção do significado do PFC e das fórmulas combinatórias.

Em relação às notações de fórmulas, essas são análogas nos dois livros analisados. Portanto, não há variações dessas notações nos textos matemáticos. A padronização pode facilitar o reconhecimento, por parte dos estudantes, de cada uma das fórmulas.

Observou-se assim que a linguagem utilizada promove uma variedade de representações, de problemas combinatórios. Verificou-se, também que os livros promovem, por vezes as conversões variadas entre registros de representação semiótica. No entanto, algumas considerações devem ser realizadas quanto à diferença de nomenclatura entre os problemas combinatórios e, ainda, a possível

utilização do termo combinação com dois significados diferentes apresentado no Capítulo A. Para Olson (1989, p.241, tradução própria) a linguagem apresentada no livro didático estabelecem “ [...]um registro lingüístico distintivo que envolve uma forma particular de linguagem (prosa escrita em arquivo), uma situação social particular (escolas) e relações sociais (autor-leitor) e uma forma particular de interação linguística”. Esse registro linguístico proposto pelos capítulos dos livros didáticos analisados pode gerar dúvidas, ou usos equivocados dos termos em questão.

Não foi observado um padrão no uso das conversões para todos os tipos de problema combinatórios. Apesar de não se esperar que os tipos de conversão sejam utilizados igualmente em todos os tipos de problemas, acredita-se que devam ser mais bem distribuídos nos diferentes problemas, inclusive priorizando outras conversões que não envolvam apenas as fórmulas e ampliando o número de conversões entre diferentes registros e ainda, aquelas que relacionam a conversão de PFC para fórmulas.

Duval (1995) enfatiza a importância das transformações de representações semióticas (conversão e tratamento) para a aprendizagem. Dessa forma, os elementos linguísticos apresentados pelos capítulos são essenciais para que o professor promova ações para mobilizar os alunos e para perceber de que forma eles compreendem às ideias relativas à Combinatória.

5.4 PROCEDIMENTOS RELATIVOS À COMBINATÓRIA APRESENTADOS NOS CAPÍTULOS DOS LIVROS ANALISADOS

Outro elemento primário analisado nos capítulos de livro foram os *procedimentos*. Para essa análise escolheu-se como indicadores os procedimentos de resolução, a complexidade de problemas combinatórios e as técnicas normalmente empregadas na resolução desses problemas. A exploração dos procedimentos de resolução de problemas combinatórios presentes no livro didático pode auxiliar na elaboração de procedimentos próprios de resolução, além de relacionar aqueles mais indicados para problemas combinatórios específicos.

Os procedimentos são compreendidos como os diferentes algoritmos, operações, técnicas de cálculo ou maneiras de resolver um problema combinatório, apresentados nos capítulos analisados.

Para Godino e Batanero (2016, p.3, tradução própria) “As matemáticas constituem uma atividade socialmente compartilhada de resolução de situações problemas que podem se referir ao mundo natural e social, ou bem podem ser internas a própria matemática”.

Nesse texto os autores apresentam alguns procedimentos relativos aos problemas combinatórios em uma proposta curricular para Combinatória na Espanha, a saber: 1. *Procedimientos gráficos* (árvore de possibilidades, grafos); 2. *Procedimientos numéricos* (regra do produto, regra da soma, regra do quociente, números combinatórios, números fatoriais, números de Stirling); 3. *Procedimientos lógicos* (classificação, demonstração por redução ao absurdo, demonstração por indução, enumeração sistemática, princípio da inclusão-exclusão, recorrência); 4. *Procedimientos tabulares* (matrizes, tabelas); 5. *Procedimientos analíticos* (funções geratrizes). Tal proposta se fundamenta na discussão de Dubois (1984) utilizando a classificação de problemas combinatórios em seleção, colocação e partição (comentada no capítulo 3).

Como no currículo brasileiro se adota outra estrutura, com base essencialmente nos tipos de problemas *arranjo*, *combinação* e *permutação*, alguns desses procedimentos não são discutidos ao longo da Educação Básica no país.

Desse modo, nos procedimentos analisados nos capítulos de Combinatória nos livros do Ensino Médio analisados, foram elencadas as seguintes categorias: PR0: Procedimento enumerativo (baseado na Linguagem natural seguindo a noção de listagem das possibilidades); PR1: Procedimento numérico (com base em operações numéricas, tais como o Princípio Fundamental da Contagem ou a multiplicação); PR2: Procedimento gráfico (Árvore de Possibilidades); PR3: Procedimento algorítmico (Fórmula, Fatorial); PR4: Dois procedimentos de resolução para um mesmo problema; PR5: Mais de dois procedimentos de resolução para um mesmo problema. PR6: Em branco ou sem procedimentos evidenciados.

A seguir, na Tabela 5, são apresentadas as frequências dos procedimentos apresentados por capítulo de livro.

Tabela 5 — Distribuição de procedimentos por capítulos de livro

Tipos de Procedimentos de Resolução	Capítulo A	Capítulo B	Preferência
PR0: Procedimento enumerativo	-	5(2,7%)	5 (1,4%)
PR1: Procedimento numérico	53(31,4%)	20 (11%)	73(20,8%)
PR2: Procedimento gráfico	5(3%)	-	5(1,4%)
PR3: Procedimento algorítmico	91(53,8%)	123(67,6%)	214(61%)
PR4: Dois procedimentos de resolução para um mesmo problema;	9(5,3%)	27(14,9%)	36(10,3%)
PR5: Mais de dois procedimentos de resolução para um mesmo problema.	2(1,2%)	5(2,7%)	7(2%)
PR6: Em branco.	9(5,3%)	2(1,1%)	11(3,1%)
Total	169	182	351

Fonte: Acervo da pesquisa

Observa-se que o procedimento mais frequentemente solicitado nos dois capítulos é o *procedimento algorítmico* (uso de fórmulas combinatórias), seguido do *procedimento numérico* (uso do Princípio Fundamental da Contagem). Como diferenças constata-se que o Capítulo A apresenta situações que exigem apenas o *procedimento gráfico* (utilizando a Árvore de possibilidades), enquanto que o Capítulo B possui situações para serem resolvidas apenas com o *procedimento enumerativo* (com uso de Linguagem natural). Com relação a elementos linguísticos, várias conversões distintas são apresentadas nos capítulos de livros didáticos analisados, mas com relação à solução dos problemas se priorizam as fórmulas e o PFC.

A partir das contagens dos procedimentos apresentados nos capítulos de Combinatória analisados verificou-se que aproximadamente 12%(43) das situações utilizam dois ou mais de dois procedimentos de resolução.

No procedimento PR4 (Dois procedimentos de resolução para um mesmo problema) foram observadas diferentes soluções para o mesmo problema versando sobre PFC e Fórmula; Fórmula e listagem; e Árvore e PFC. Tais comparações, quando abordadas pelo professor de diferentes níveis de ensino inclusive de Ensino Médio podem possibilitar a compreensão de elementos que pertençam a cada um dos procedimentos, além de estabelecer relações entre os mesmos o que pode trazer novas compreensões no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Na Figura 43 verificam-se dois procedimentos para a mesma situação, podendo trazer sentido ao uso da fórmula. Para realizar a comparação entre PFC e Fórmula em um problema de arranjo, o capítulo B, explica o procedimento algorítmico e posteriormente o procedimento numérico. Nota-se a explicitação da ordenação nessa situação por meio de exemplos numéricos.

Figura 43 – Comparação entre os procedimentos numéricos e algorítmicos no problema de *arranjo*

10. Quantos números de 2 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução:

1ª maneira: usando a fórmula
Procuramos agrupamentos de 2 elementos em que a ordem é importante, pois, por exemplo, $12 \neq 21$. Temos 9 elementos para serem arranjados 2 a 2. Assim, temos de calcular:

$$A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 72$$

Portanto, existem 72 números de 2 algarismos diferentes que podem ser escritos com os algarismos de 1 a 9.

2ª maneira: sem usar a fórmula
Para o algarismo das dezenas temos 9 opções, e para o algarismo das unidades, apenas 8 opções, pois não podemos repetir algarismos. Assim, temos $9 \cdot 8 = 72$. Portanto, são 72 números.

Fonte: Capítulo B, p. 251.

Ressalta-se que a simplificação do fatorial presente na fórmula resulta no PFC. Outros exemplos, como a comparação entre o procedimento enumerativo (Listagem) e Procedimento algorítmico (Fórmula), estão presentes nos textos das seções, como exposto na Figura 44.

Figura 44 – Comparação entre os procedimentos enumerativo e algorítmico no problema de *arranjo*

- começam por A → AMO, AMR, AOM, AOR, ARO e ARM
- começam por M → MAO, MAR, MOA, MOR, MRA e MRO
- começam por O → OAM, OAR, OMA, OMR, ORA e ORM
- começam por R → RAM, RAO, RMA, RMO, ROA e ROM

Esses agrupamentos ordenados são os arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 3 a 3.

Para indicar a quantidade de agrupamentos, escrevemos: $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Fonte: Capítulo A, p.256.

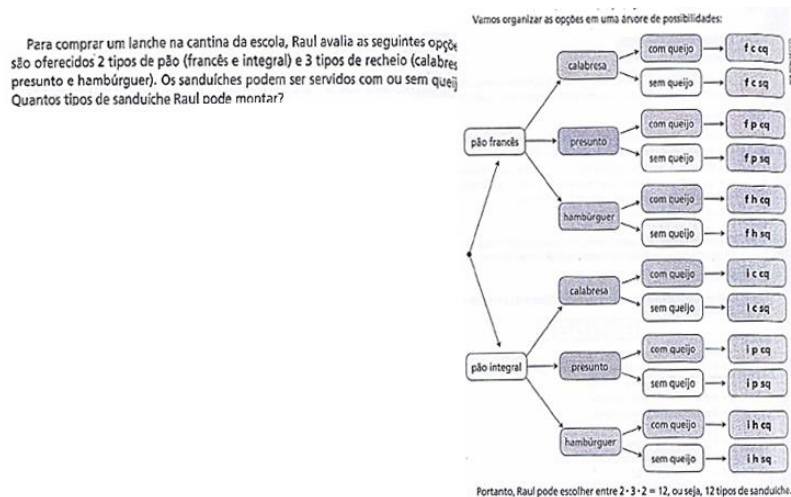
Trata-se de um problema de escolher três letras da palavra AMOR. A listagem observada tem a sistematização a partir da fixação do 1º termo de cada possibilidade, e segue elegendo elementos para serem fixados (ou seja, inicia fixando o A, depois o M, depois o O, e, finalmente, o R). Em seguida, a notação de *arranjo* é apresentada de modo já simplificado.

Pessoa e Borba (2009) afirmaram que a partir de listagens como essa, alguns alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental conseguiram aplicar a estratégia denominada Percepção da Regularidade, que consiste em perceber que para cada letra que fixarmos no início tem 6 possibilidades e como a palavra AMOR tem 4 letras basta realizar a multiplicação (6 por 4). Dessa forma, podem ser aproveitadas as listagens e enumerações apresentadas no livro didático do Ensino Médio, principalmente como atividades iniciais, posto que estabelecem a necessidade do uso de fórmulas para números de possibilidades altos.

Considera-se que procedimento enumerativo pode ser fundamental para elaboração de procedimentos lógicos tal como a percepção da regularidade, que pode ser compreendida como um início de um processo de generalização.

O uso de procedimentos gráficos (Árvore de possibilidades) e numéricos (PFC), como na Figura 45, apresenta correspondência de fatores, o que para Barbosa (1963), Fischbein, Pampu e Minzat (1970) auxilia na identificação de regularidades de problemas combinatórios.

Figura 45 — Comparação entre os procedimentos gráficos(Árvore) e numéricos (PFC) no problema de *Produto de Medidas*



Fonte: Capítulo A, p.248.

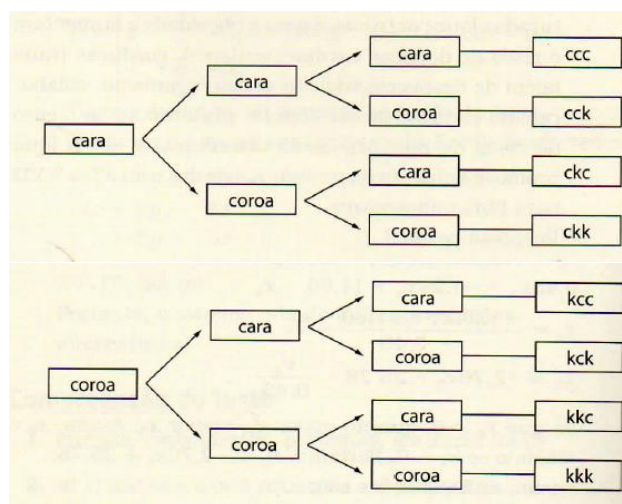
A correspondência de fatores diz respeito à quantidade de elementos que podem ser escolhidos em cada etapa. Na primeira etapa pode ser escolhido entre dois sabores de pão; na segunda etapa entre três tipos de recheio e na terceira etapa entre duas opções (com queijo ou sem queijo). Assim, nesse

procedimento gráfico fica clara a quantidade de escolhas em cada etapa pelo número de setas que representa a explicitação da escolha.

Azevedo e Borba (2013) afirmam que a árvore é um ótimo recurso de ensino para alunos dos anos iniciais, pois ajuda na sistematização do levantamento de possibilidades. Já no Ensino Médio, esse procedimento pode promover a relação com a probabilidade, assim como aponta o estudo de Lima (2018) para a Educação de Jovens e Adultos.

A árvore de possibilidades pode, por exemplo, representar a equiprobabilidade, ou verificar o espaço amostral não equiprovável do lançamento de três moedas. O Capítulo A, no manual do professor, em uma proposta trazida pela seção *Refleta*, apresenta o espaço amostral do lançamento de três moedas, como apresentado na Figura 46. É possível verificar na comparação das possibilidades que obter três caras é menos provável do que obter duas caras e uma coroa.

Figura 46 – Exemplo de procedimento gráfico presente no Manual do professor



Fonte: Capítulo A, Manual do professor, p.168.

Fischbein (1975, p.94) afirma que se não houver um processo de ensino e aprendizagem que envolva a construção de árvores de possibilidades para os alunos e ao invés disso forem apenas expostos a fórmulas, tais alunos “serão capazes de resolver exercícios padrão, mas não serão capazes de pensamento independente e produtivo neste domínio”.

Na Tabela 6, na página seguinte verificam-se quais os procedimentos mais utilizados por tipo de problema combinatório.

Tabela 6 — Distribuição do tipo de procedimento de resolução por tipo de problema combinatório

Proc.	Tipos de problemas combinatórios									
	PM	A	AR	C	P	Pr	Pc	PR	F	++
PR0	-	-	-	-	4 1,1%	-	-	-	-	1 0,3%
PR1	9 2,6%	24 6,8%	25 7,1%	1 0,3%	11 3,1%	-	-	1 0,3%	-	2 0,6%
PR2	1 0,3%	1 0,3%	2 0,6%	-	1 0,3%	-	-	-	-	-
PR3	-	41 11,7%	2 0,6%	69 19,6%	56 15,9%	26 7,4%	1 0,3%	-	16 4,5%	3 0,8%
PR4	7 2%	17 4,8%	-	10 3%	2 0,6%	-	-	-	-	-
PR5	2 0,6%	1 0,3%	-	3 0,8%	1 0,3%	-	-	-	-	-
PR6	-	1 0,3%	4 1,1%	2 0,6%	-	3 0,8%	-	-	1 0,3%	-

Legenda: Problemas Combinatórios. PM: Produto de Medidas; A: Arranjo; AR: Arranjo com repetição; C: Combinação; P: Permutação; Pr: Permutação com elementos idênticos; Pc: Permutação Circular; PR: Permutação com Repetição; F: Fatorial; ++: Mais de um problema na mesma situação;

Procedimentos: PR0: Procedimento enumerativo; PR1: Procedimento numérico; PR2: Procedimento gráfico; PR3: Procedimento algorítmico; PR4: Dois procedimentos de resolução para um mesmo problema; PR5: Mais de dois procedimentos de resolução para um mesmo problema. PR6: Em branco.

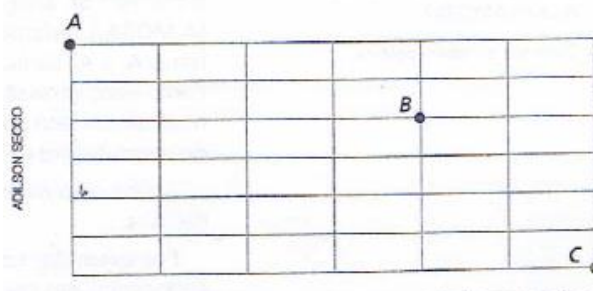
Fonte: Acervo da Pesquisa

Apesar do procedimento algorítmico (PR3 - fórmulas) ser o mais comum em vários tipos de problemas combinatórios, averigua-se que nos problemas de *arranjo*, *combinação*, *produto de medidas* e *permutação* (nessa ordem) os capítulos de Combinatória realizam diferentes soluções para um mesmo problema, indicando a comparação entre dois ou mais procedimentos de resolução (PR4 e PR5).

Nos problemas de *fatorial*, *permutação com elementos idênticos* e *permutação circular* os capítulos dos livros analisados adotaram como único o procedimento algorítmico. No entanto, observam-se problemas que podem ser alterados para que procedimentos enumerativos possam ser utilizados, como se apresenta na Figura 47.

Figura 47 – Problema de Permutação com elementos idênticos

31. Uma pessoa vai de A para B, e então de B para C, sempre andando para baixo ou para a direita, conforme o diagrama a seguir. Quantos caminhos diferentes são possíveis? Você pode resolver esta questão com um colega. 225 caminhos



Fonte: Capítulo A, p.255.

Nesse caso, a situação poderia ser adaptada para números pequenos de possibilidades, o que proporcionaria a produção de listagens e/ou enumerações sistemáticas, mas não há essa indicação nos capítulos analisados. A maioria dos problemas dos capítulos analisados tem número de possibilidades maiores que 100, o que torna impossível a enumeração.

O procedimento numérico (PR1) foi o procedimento mais utilizado nos problemas de *arranjo com repetição* e *produto de medidas* e também é utilizado em *arranjos simples*, *combinações* e *permutações*. Este é um procedimento adequado para esse nível de ensino e como utiliza o Princípio Fundamental da Contagem apresenta mais indicações das ideias dos alunos na resolução de problemas combinatórios do que os procedimentos algorítmicos (fórmula).

Os procedimentos enumerativos (PR0) e os procedimentos gráficos (PR2) foram utilizados apenas de maneira pontual. No caso dos procedimentos enumerativos foram mais utilizados nos problemas de *permutação*.

Com relação a *complexidade dos problemas combinatórios* propostos nos capítulos de Combinatória foram determinadas as seguintes categorias:

- Exercícios – relativos à aplicação de propriedades de fatorial, tanto nos fatoriais como, também, em fórmulas e/ou equações com fórmulas Combinatórias;
- Problemas combinatórios simples – aqueles que são protótipos de cada tipo de problema combinatório aqui trabalhado, geralmente resolvido por aplicação

simples de fórmula, e sem restrições, condições, ou mesmo junções de problemas. Um exemplo desse tipo de problema é apresentado na Figura 48.

Figura 48 – Exemplo de problema combinatório simples de combinação

19. Em um plano marcamos 6 pontos distintos, dos quais 3 nunca estão em linha reta.
a) Quantos segmentos de reta podemos traçar ligando-os 2 a 2?

Fonte: Capítulo B, p.255.

- *Problemas combinatórios condicionais* – relativos à discussão proposta por Borba e Braz (2012) e Borba, Araújo e Braz (2013), que se fundamentam na influência que certas características de problemas combinatórios têm no raciocínio dos estudantes que se encontram no processo de resolução desses problemas. Dessa forma, as autoras estabelecem como critérios de condição para problemas combinatórios “a escolha de elementos isolados ou de subconjuntos de elementos; a explicitação (ou não) de elementos que devem pertencer às possibilidades levantadas; determinada ordem de elementos; posicionamento; e/ou proximidade dos mesmos” (BORBA; BRAZ, 2012, p.6).

Em Silva (2015) foram analisados os problemas combinatórios condicionais em sete coleções de livros didáticos de Ensino Médio e constatou-se que os percentuais da frequência desses tipos de problema variam de 42,2% a 13,1%. Tais valores, quando comparados ao número de procedimentos algorítmicos apresentados nos capítulos analisados, pode representar uma dificuldade para os estudantes, já que dificilmente esses problemas podem ser resolvidos com apenas a aplicação direta de fórmula. Na Figura 49 expõe-se um exemplo de problema combinatório condicional.

Figura 49 – Exemplo de problema combinatório condicional de permutação (letras b, c – Condicional; letra a – simples)

3. Calcule quantos são os anagramas:
a) da palavra PERDÃO;
b) da palavra PERDÃO que iniciam com P e terminam em O;
c) da palavra PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntas e nessa ordem (ÃO);

Fonte: Capítulo B, p.246, grifo próprio

No exemplo apresentado na Figura 48, o problema combinatório condicional da letra b pode ser categorizado como “Mais de um elemento explicitado em determinadas posições”. Na letra c pode ser classificado em “Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem”. Verifica-se a presença de algumas características nesses problemas como a explicitação de elementos, a posição, a proximidade e a ordem.

- Problemas combinatórios integrados – relativos à discussão de Roa (2000) que compreende como sendo a junção de dois ou mais tipos de problemas combinatórios ou mesmo o uso do princípio aditivo ou multiplicativo para junção de problemas combinatórios simples do mesmo tipo, como se pode observar na Figura 50.

Figura 50 – Exemplo de problema combinatório integrado de *combinação*

22. O conselho desportivo de uma escola é formado por 2 professores e 3 alunos. Candidataram-se 5 professores e 30 alunos. De quantas maneiras diferentes esse conselho pode ser eleito?

Fonte: Capítulo B, p.256.

Nesse tipo de problema existe a necessidade de subdividir a contagem em dois subproblemas de *combinação simples* (escolher 2 em 5 professores e 3 em 30 professores) e, posteriormente, aplicar o princípio multiplicativo entre os casos.

- Problemas combinatórios com repetição – aqueles que possuem como invariante a repetição de elementos, sejam os elementos idênticos, como no caso da *permutação com elementos repetidos*, sejam com relação à opção de repetir os elementos escolhidos. Esse tipo de problema pode também ser simples, condicional ou integrado, como pode ser exemplificado na Figura 51.

Figura 51 – Exemplo de problema de *permutação com elementos idênticos* (simples e condicional)

6. Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

7. Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com A?

Fonte: Capítulo B, p.248

Para verificar a distribuição da complexidade por tipo de problemas combinatórios foi organizada a Tabela 7.

Tabela 7– Distribuição da complexidade de problemas combinatórios por tipo de problema

Complexidade de Problemas Combinatórios							
TP	Exercícios	Problemas Simples		Problemas Condicionais		Problemas integrados	
		Sem Repetição	Com Repetição	Sem Repetição	Com Repetição	Sem Repetição	Com Repetição
PM	-	19 5,4%	-	-	-	-	-
A	4 1,1%	50 14,2%	-	23 6,6%	-	8 2,3%	-
AR	-	-	22 6,3%	-	10 2,9%	-	1 0,3%
C	2 0,6%	58 16,5%	-	1 0,3%	-	24 6,8%	-
P	1 0,3%	31 8,8%	-	33 9,4%	-	10 2,9%	-
Pr	-	-	22 6,3%	-	5 1,4%	-	2 0,6%
Pc	-	1 0,3%	-	-	-	-	-
PR	-	-	1 0,3%	-	-	-	-
F	17 4,8%	-	-	-	-	-	-
++	-	2 0,6%	-	-	-	4 1,1%	-
Total	24	161	45	57	15	46	3
(%)	6,8%	45,8%	12,9%	16,3%	4,2%	13,1%	0,9%

Legenda: PM: Produto de Medidas; A: Arranjo; AR: Arranjo com repetição; C: Combinação; P: Permutação; Pr: Permutação com elementos idênticos; Pc: Permutação Circular; PR: Permutação com Repetição; F: Fatorial; ++: Mais de um problema na mesma situação;

Fonte: Acervo da Pesquisa

Quando foi comparada a distribuição da complexidade dos problemas combinatórios entre os capítulos analisados, não foram observadas grandes diferenças entre eles. Verificou-se maior frequência de problemas combinatórios simples, tanto no Capítulo A, quanto no Capítulo B (respectivamente, 22,5% e 23,6%), seguidos de problemas combinatórios condicionais (4,8% e 11,4%), problemas combinatórios integrados (5,4% e 7,7%) e, por fim, exercícios (4,0% e 2,8%). Constatou-se, ainda, problemas combinatórios simples com repetição (6,8% e 5,1%), problemas combinatórios condicionais com repetição (4,8% e 11,4%) e problemas combinatórios integrados com repetição (encontrados

apenas no Capítulo A com 0,9%). Essa distribuição prioriza mais os problemas combinatórios do que os exercícios, entretanto, poderiam ser valorizados mais problemas de desafios (problemas condicionais, integrados e que apresentem repetição).

Verificou-se que os problemas de *produto de medidas e permutação circular*, só aparecem em Problemas Combinatórios Simples nos dois capítulos. Apesar dos problemas de *arranjo* e *combinação* se apresentar em todas as categorias(exercício, simples, condicionais e integrados) a maior frequência é observada na complexidade de Problemas Combinatórios Simples.

Os problemas de *combinação* são os que possuem maior número de problemas integrados. A Figura 49 apresenta um tipo de problema integrado de *combinação* bastante comum nos capítulos analisados. O número reduzido de problemas condicionais na *combinação* se justifica porque os critérios de condição *ordem* e *posição* não se aplicam a esse tipo de problema. Braz e Borba (2012), Borba, Araújo e Braz(2013) e Braz (2013) afirmam que as categorias dos problemas combinatórios condicionais devem se adequar à natureza de cada problema e seus invariantes.

Já os problemas de *permutação* têm sua maioria em problemas combinatórios condicionais. Braz e Borba (2012) e Braz (2013) afirmam que esses problemas podem utilizar os critérios de condição como proximidade, ordem e posição, além da explicitação de elementos, o que pode ter favorecido no alto número de problemas de permutação condicionais.

Roa, Batanero e Godino (2003) indicam a necessidade do ensino de Combinatória priorizar situações que auxiliem no desenvolvimento de estratégias pessoais de resolução de problemas. A partir das estratégias pessoais, os alunos apresentam sua compreensão dos enunciados e das propriedades envolvidas em cada tipo de problema combinatório, sendo possível acompanhar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Para Roa, Batanero e Godino (2003, p.21, tradução própria) “A Combinatória é [...] um campo no qual as estratégias de resolução de problemas, tais como dividir o problema em partes, traduzir o enunciado em um problema equivalente, fixar variáveis, etc.. podem ser adequadamente exemplificadas.” Portanto, é importante que no Ensino Médio o ensino e aprendizagem de Combinatória visando o amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório,

proporcione momentos em que os alunos compreendam e elaborem diferentes estratégias/ técnicas de resolução de problemas combinatórios.

Nessa perspectiva, considera-se a necessidade de incluir na discussão desse ensino, principalmente no Ensino Médio, problemas combinatórios condicionais e integrados. Tais problemas podem possibilitar o surgimento de novas estratégias ou técnicas de resolução de problemas, indo além das operações combinatórias. Nos problemas combinatórios simples, a discussão nas aulas pode sugerir apenas a determinação de qual fórmula aplica-se para resolução, o que necessita da identificação do tipo de problema combinatório-dificuldade já identificada nas pesquisas de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), English (2005) e Pessoa e Borba (2009). Já nos problemas condicionais e/ou integrados necessário se faz elaborar outras estratégias e técnicas de resolução).

Roa, Batanero e Godino (2003) apresentam, em seu artigo, um conjunto de estratégias gerais de resolução de problemas combinatórios evidenciadas por alunos de classes avançadas de Matemática (16-18 anos) como, por exemplo, a subdivisão o problema em partes, a tradução do enunciado em um problema equivalente, ou mesmo, a fixação de elementos do problema, e outras com base em operações aritméticas denominadas pelos autores de *regra da soma, do produto e do quociente*.

Com base nessa discussão foram observadas as estratégias de resolução de problemas combinatórios nos capítulos de livro analisados. Desse modo, foram classificadas 14 técnicas utilizadas nos capítulos para resolução de problemas combinatórios, caracterizadas conforme a Tabela 8 na qual se apresenta a distribuição das mesmas entre os capítulos.

Tabela 8 – Distribuição de técnicas aplicadas na resolução de problemas combinatórios por capítulos de livro

Tipos de Técnicas aplicadas na Resolução	Capítulo A	Capítulo B	Total
T0: não explicitada	8(4,7%)	2(1,1%)	10(2,8%)
T1: Explicita as possibilidades de escolha de cada etapa e aplica o PFC;	31(18,3%)	11(6%)	42(12%)
T2: Enumera sistematicamente o total de possibilidades (por meio de tabelas, árvores de possibilidades, linguagem natural, fórmulas);	6 (3,6%)	14(7,7%)	20(5,7%)
T3: Subdivide o problema em seções, aplica o PFC e o Princípio aditivo e/ou multiplicativo entre as seções;	9(5,3%)	6(3,3%)	15(4,3%)

T4: Subdivide o problema em seções, aplica a fórmula e o Princípio aditivo e/ ou multiplicativo entre as seções;	30(17,8%)	35(19,2%)	65(18,5%)
T5: Quantifica o total de possibilidades e retira aquelas que não fazem parte do resultado;	3(1,8%)	5(2,7%)	8(2,3%)
T6: Fixa elementos e aplica a fórmula ou PFC	4(2,4%)	14(7,7%)	18(5,1%)
T7: Apenas aplica fórmulas combinatórias	40(23,7%)	59(32,4%)	99(28,2%)
T8: Apenas aplica o PFC	8(4,7%)	6(3,3%)	14(4%)
T9: Simplifica expressões e ou equações utilizando propriedades de fatorial	19(11,2%)	11(6%)	30(8,5%)
T10: Compara os procedimentos da fórmula com o Princípio Fundamental da Contagem	6(3,6%)	14(7,7%)	17(4,8%)
T11: Resolve com o uso da Soma da Progressão Aritmética	-	2(1,1%)	2(0,6%)
T12: Compara Fórmula e/ou PFC com outros tipos de procedimentos	5(3%)	2(1,1%)	7(2%)
T13: Utiliza propriedade de igualdade complementar do número de combinação	-	1(0,5%)	1(0,3%)
Total	169	182	351

Fonte: Acervo da pesquisa

De acordo com a tabela das técnicas utilizadas pelos capítulos, observam-se aglutinações entre regras aritméticas – princípio aditivo e multiplicativo – com a subdivisão dos problemas combinatórios (T3 e T4) e com a fixação de elementos (T6);

As Técnicas T2 e T9 estão extremamente ligadas ao tipo de situação problema (S2 – enumeração e S1- simplificação de notações científicas) que estão sendo pedidas. A T2 foi aplicada apenas em problemas com baixo número de possibilidades e a T9 em problemas com o trato de fórmulas combinatórias e exercícios de fatoriais.

As Técnicas T1 e T8 são relativas ao uso do Princípio Fundamental da Contagem, e foram divididas em duas, pois a primeira tem a preocupação em explicitar o número de possibilidades (Ver Figura 42) e a segunda apenas faz uso sem intenção de explicá-lo.

Já a Técnica T7 diz respeito à utilização de fórmulas combinatória que é como já comentado, a mais frequentemente utilizada. Nesse caso, deve-se tomar cuidado com a valorização dessa técnica em detrimento das outras, pois, de acordo com Sabo (2007, p.52), “[...] a aplicabilidade imediata de fórmulas algébricas configura o estudo da análise combinatória a um reducionismo de metodologias e conceitos”.

A Técnica T5 diz respeito a outra forma de encarar um problema combinatório, desconsiderando inicialmente as restrições, contando o total de possibilidades e, posteriormente, retirando do todo a restrição apresentada no enunciado do problema. Essa técnica está exemplificada na Figura 52.

Figura 52 – Exemplo da Técnica T5 na resolução da letra f

11. Responda às seguintes questões:

- a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?
- b) Quantas palavras de 4 letras distintas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?
- c) Quantas dessas palavras começam com E?
- d) Quantas terminam com TA?
- e) Quantas contêm a letra M?
- f) Quantas não contêm a letra M?

Observação: Também poderíamos ter feito $1680 - 840$ para obter 840, subtraindo o número de palavras obtido em e do número total obtido em b.

Fonte: Capítulo B, p.251

Essa técnica é apresentada no livro de Morgado et al. (1991) em alguns dos exercícios resolvidos e pode ser utilizada quando as restrições tornam o problema mais difícil de ser abordado. Por exemplo, em problemas combinatórios condicionais que especifiquem que a contagem tenha no mínimo/no máximo/pelo menos..., o que implica em condicionar a escolhas de acordo com Borba e Braz (2012).

A comparação entre tipos diferentes de procedimentos (T10 e T12) são técnicas que priorizam a compreensão dos mesmos e, ainda, de propriedades e relações entre problemas combinatórios. O Capítulo A propõe algumas atividades que enfatizam essas comparações como observado na Figura 53.

Figura 53 – Atividade que visa a comparação de procedimentos de resolução de problemas combinatórios.

Comparem as resoluções

Escolham uma das resoluções e escrevam no caderno um comentário sobre ela. Se vocês pensarem em uma forma diferente de resolver esse problema, elaborem a resolução no caderno e façam um comentário a respeito. resposta pessoal

Fonte: Capítulo A, p.273.

No Capítulo B, o uso das Técnicas T10 e T12 promove a comparação entre os procedimentos fórmula da *combinação* e a resolução por meio da aplicação da propriedade da Regra do quociente, como exemplificado na Figura 54.

Figura 54 – Exemplo da Técnica T12 – Compara Fórmula e/ou PFC com outros tipos de procedimentos

27. Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podemos formar para representar um grupo de 10 pessoas?

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 120 \text{ ou}$$

$$C_{10,3} = \frac{A_{10,3}}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Podemos formar 120 comissões.

Fonte: Capítulo B, p.260

Observa-se também o uso de outra propriedade como técnica de resolução conforme apresentado na Figura 55. Nesse caso, utiliza a propriedade de igualdade entre os complementares da *combinação*, que segundo Navarro-Pelayo (1994) pode induzir erros nos alunos, já que podem considerar mais fácil em listar grupos de 3 do que listar grupos de 5 pessoas.

Figura 55 – Exemplo da Técnica 13 – Utiliza propriedade de igualdade complementar do número de *combinação*

50. **ATIVIDADE EM DUPLA** Em um grupo de 10 pessoas estão Anderson e Eduardo. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar:

- a) em que ambos estejam presentes?
- b) em que nenhum deles esteja presente?

$$50. \text{ a) } A E \text{ } \underline{\underline{C_{8,3}}} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2!}} = 56 \text{ comissões}$$

$$\text{b) } C_{8,5} = C_{8,3} = 56 \text{ comissões}$$

Fonte: Capítulo B, p.259

Outra técnica observada apresenta relação entre conteúdos matemáticos (T11), no caso, um problema de *combinação* resolvido recursivamente, o que gerou a relação com a fórmula de Soma de uma Progressão Aritmética, como se pode observar na Figura 56.

Godino, Batanero e Font (2003, p.41) afirmam que “Quando os estudantes podem conectar as ideias matemáticas entre si, com as aplicações a outras áreas, e em contextos de seu próprio interesse a compreensão matemática é mais profunda e duradoura.”

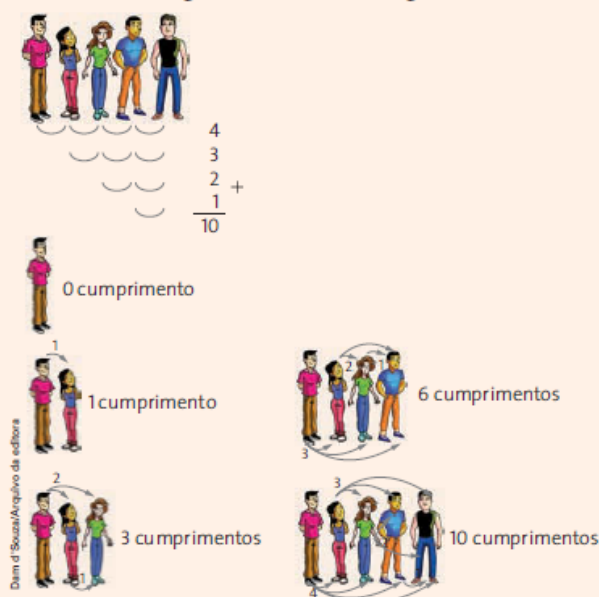
Nesse caso, pode-se observar um processo de generalização do particular para o geral, quando inicia-se com casos que são possíveis de contar, verifica-se um padrão contável e depois se generaliza para qualquer quantidade, com uso da Soma de termos da Progressão Aritmética. Nesse problema, o autor utiliza o raciocínio recursivo para identificar os padrões e gerar a generalização da fórmula.

Sandefur, Somers e Dance (2018) defendem o uso desse tipo de raciocínio na Matemática desde a escola secundária, e justificam sua utilização pela integração com a álgebra. De acordo com esses autores, a utilização do raciocínio recursivo “[...] aprofunda e amplia sua compreensão da álgebra tradicional” além de “[...] preparar melhor os alunos para o cálculo do que o currículo tradicional de álgebra” (SANDEFUR; SOMERS; DANCE, 2018, p.146, tradução própria).

Figura 56 – Exemplo da Técnica 11 – Resolve a partir da recursividade com o uso de Soma da Progressão aritmética

- 2ª maneira: elaborando uma tabela, descobrindo regularidades e usando PA.

Observe os diagramas e a tabela a seguir:



Observe a regularidade:

- para 4 pessoas temos 6 ($1 + 2 + 3 = 6$) cumprimentos;
- para 5 pessoas temos 10 ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$) cumprimentos;
- o último número da expressão $1 + 2 + 3 + \boxed{4}$ é igual ao número de pessoas menos 1.

Seguindo esse padrão, para 30 pessoas teremos:

$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 28 + 29$ cumprimentos

A sequência 1, 2, 3, 4, ..., 28, 29 é uma PA de razão igual a 1, onde o primeiro termo é 1, o último termo é 29 e o número de termos é 29.

Vimos no capítulo 7 do volume 1 que a soma de uma PA finita é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Nesse caso, $a_1 = 1$, $a_n = 29$ e $n = 29$.

$$\text{Assim, } S_{29} = \frac{(1 + 29)29}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = \frac{870}{2} = 435.$$

Portanto, teremos 435 cumprimentos.

Fonte: Capítulo B, p.257

Um distinto aspecto a ser analisado é como essas técnicas se distribuem por tipo de problema combinatório, como se pode observar na Tabela 9.

Alguns problemas como o de *combinação* (12)²⁸ e *arranjo* (11) são tratados com maior variedade de técnicas que os demais, isso pode ser devido ao número desses problemas no livro didático serem bem maior que os demais, o que se vê como aspecto positivo. Conhecer diferentes técnicas combinatórias pode potencializar a construção do desenvolvimento do raciocínio combinatório.

²⁸ Quantidade de técnicas diferentes aplicadas no problema de combinação.

Cabe ao professor escolher a variedade desses problemas para o trabalho com as diferentes técnicas em sala de aula, principalmente quando se tem por objetivo que o estudante apreenda as diferentes técnicas de contagem.

Tabela 9 – Tipo de problema combinatório distribuído por técnica de resolução

Tipos de Técnica														
	T0	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13
PM		5	9	1					4					
%	-	1,4	2,6	0,3	-	-	-	-	1,1	-	-	-	-	-
A	1	15	2	7	10		5	20	2	6	14		3	
%	0,3	4,3	0,6	2	2,8	-	1,4	5,7	0,6	1,7	4		0,9	-
AR	4	15	1	2		3		1	5				2	
%	1,1	4,3	0,3	0,6	-	0,9		0,3	1,4	-	-	-	0,6	-
C	1		2	1	23	5	1	34		7	2	2	2	5
%	0,3	-	0,6	0,3	6,6	1,4	0,3	9,7		2	0,6	0,6	0,6	1,4
P		5	6	2	23		11	26	1	1				
%	-	1,4	1,7	0,6	6,6	-	3,1	7,4	0,3	0,3	-	-	-	-
Pr	3				6		1	18	1					
%	0,9	-	-	-	1,7	-	0,3	5,1	0,3	-	-	-	-	-
Pc					1									
%	-	-	-	-	0,3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PR									1					
%	-	-	-	-	-	-	-	-	0,3	-	-	-	-	-
F	1									16				
%	0,3	-	-	-	-	-	-	-	-	4,6	-	-	-	-
++		2		2	2									
%	-	0,6	-	0,6	0,6	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Legenda: PM: Produto de Medidas; A: Arranjo; AR: Arranjo com repetição; C: Combinação; P: Permutação; Pr: Permutação com elementos idênticos; Pc: Permutação Circular; PR: Permutação com Repetição; F: Fatorial; ++: Mais de um problema na mesma situação;

Fonte: Acervo da pesquisa

Com relação à complexidade de problemas combinatórios, a Tabela 10 mostra que a técnica mais utilizada em problemas combinatórios condicionais e problemas combinatórios integrados é a T4.

Tabela 10 – Tipo de técnica distribuída por complexidade de problemas combinatórios

Tipos de Técnicas aplicadas na Resolução	Ex	Prob Simples		Prob Condicional		Prob Integrado	
		C/R	S/R	C/R	S/R	C/R	S/R
T0: não explicitada	1	5	4	-	-	-	-

	0,3%	1,4%	1,1%			
T1: Explicita as possibilidades de escolha de cada etapa e aplica o PFC;	-	7 2%	24 6,8%	8 2,3%	3 0,9%	-
T2: Enumera sistematicamente o total de possibilidades	-	1 0,3%	15 4,3%		4 1,1%	-
T3: Subdivide o problema em seções, aplica o PFC e o Princípio aditivo e/ou multiplicativo entre as seções;	-	1 0,3%	3 0,9%		3 0,9%	1 0,3% 7 2,0%
T4: Subdivide o problema em seções, aplica a fórmula e o Princípio aditivo e/ou multiplicativo entre as seções;	-	2 0,6%	5 1,4%	2 0,6%	21 5,9%	2 0,6% 33 9,4%
T5: Quantifica o total de possibilidades e retira aquelas que não fazem parte do resultado;	-	1 0,3%	1 0,3%	2 0,6%	-	4 1,1%
T6: Fixa elementos e aplica a fórmula ou PFC	-		2 0,6%	1 0,3%	15 4,3%	-
T7: Apenas aplica fórmulas combinatórias	-	17 4,8%	74 21%	2 0,6%	5 1,4%	1 0,3%
T8: Apenas aplica o PFC	-	6 1,7%	6 1,7%		1 0,3%	1 0,3%
T9: Simplifica expressões e ou equações utilizando propriedades de fatorial	23 6,6%		7 2%			-
T10: Compara os procedimentos da fórmula com o Princípio Fundamental da Contagem	-		12 3,4%		4 1,1%	-
T11: Resolve com o uso da Soma da Progressão aritmética	-		2 0,6%		-	-
T12: Compara Fórmula e PFC com outros tipos de procedimentos	-	2 0,6%	4 1,1%		1 0,3%	-
T13: Utiliza propriedade de igualdade complementar do número de combinação	-		5 1,4%		-	-

Fonte: Acervo da pesquisa

Assim como discutido anteriormente os problemas combinatórios simples apresentam como maioria a Técnica T7 que utiliza apenas fórmulas para resolução. Esse fato indica a preferência dessa técnica sobre as outras, uma possível justificativa para isso diz respeito ao alto número de possibilidades presente na maioria dos problemas combinatórios dos capítulos.

A Técnica T6 de fixar o elemento é mais utilizada em problemas combinatórios condicionais, isso se justifica pois nos problemas condicionais observados possuem como invariante a ordem e a posição de elementos fixadas. A Técnica T5 é mais utilizada em problemas combinatórios integrados, mas

também pode ser aplicada para os problemas combinatórios condicionais com pelo menos ou no máximo. As técnicas de comparação T10 e T12 são aplicadas em sua maioria para problemas combinatórios simples. Vale salientar que a Técnica T12 é aplicada em problemas com menor número de possibilidades (Ver Figuras 36 e 44).

5.5 ARGUMENTOS RELATIVOS À COMBINATÓRIA APRESENTADOS NOS CAPÍTULOS

Godino, Batanero e Font (2007) afirmam que “os argumentos justificam os procedimentos e as proposições que relacionam os conceitos entre si”. Segundo os Parâmetros Curriculares de Matemática do Estado de Pernambuco (PCE) “[...] é importante que o professor esteja atento ao desenvolvimento, por parte do estudante, da capacidade de expressar-se em linguagem matemática, de realizar formulações coerentes e validá-las com argumentos apoiados no pensamento dedutivo” (PERNAMBUCO, 2012, p.121).

O guia do livro didático de Matemática do Ensino Médio corrobora com esse objetivo quando acrescenta nos critérios de avaliação desse recurso, como requisitos obrigatórios para a coleção de Matemática, o desenvolvimento de competências básicas como a argumentação em alunos desse nível. (BRASIL, 2015).

Godino, Batanero e Roa (2005) afirmam que os argumentos combinatórios “não se limitam a provas dedutivas” e exemplificam que alunos para legitimar o resultado obtido por meio do uso de fórmulas podem utilizar como suporte a listagem de algumas ou de todas as possibilidades. Pessoa (2009) afirma que o procedimento de listagem ainda é usado no 3º ano do Ensino Médio, e que em alguns casos, os alunos apresentam mais de um procedimento, talvez para confirmar o resultado alcançado pelos procedimentos algorítmicos ou numéricos.

Com base na discussão de Perelman (1993), Leitão (2007), Llanos e Otero (2012) exposta no Capítulo 2, focalizou-se, nessa seção, nas dimensões sobre as características da argumentação combinatória e na relação entre as

imagens presentes e a argumentação produzida pelos capítulos dos livros didáticos analisados.

Com relação aos capítulos de livros analisados, foram observados outros tipos de argumentação do que as categorizadas por Llanos e Otero (2012) e com base na discussão de Perelman (1993) foram acrescentados argumentos com base na estrutura do real e argumento pelo exemplo, que foram sistematizados no Quadro 19.

Quadro 19 – Dimensões de argumentação observadas nos capítulos de livros analisados.

Dimensões	Componentes	Indicadores
Características da Argumentação	Início da argumentação	Pergunta; Definição; Exemplos.
	Tipo de argumentação	1.Dedutiva-Formal; 2. Dedutiva-informal; 3. Indutiva. 4.Argumentos com base na estrutura do real. 5.Argumento pelo exemplo.
	Grau de argumentação	Alto; Médio; Nulo
Relação entre as imagens externas e a argumentação	Uso da Imagem	Ornamental; Argumentativa;
	Tipo de imagem	Representações Matemáticas; representações extra matemáticas
	Estilo Gramatical da imagem	Conceitual; Narrativa
	Relação com o mundo	Naturalista; Abstrata

Fonte: Adaptado Perelman(1993) e Llanos e Otero(2012)

As análises consideraram apenas nos textos iniciais de cada seção dos capítulos e nos exercícios resolvidos presentes nas mesmas, porque nesses locais é que existem maior possibilidade para promoção de processos de negociação entre os diferentes pontos de vista, ou seja, a elaboração de argumentos. Logo foram selecionados os seguintes momentos para análise: Início do Capítulo, seção relacionada à introdução do Princípio Fundamental da Contagem, seção de Fatorial, seção de *permutação*, seção de *permutação com elementos repetidos*, seção de *arranjo* e seção de *combinação*.

Na introdução do Capítulo A, quando se categorizou o início da argumentação do capítulo, houve a necessidade de criação de um novo indicador, denominado *realístico*, pois as imagens e textos do infográfico que iniciavam o capítulo apresentavam uma aplicação social da Combinatória. Depois disso no Capítulo A apresentou-se uma pergunta e a discussão sobre aplicações do conteúdo em outras áreas, como ilustra o recorte na Figura 57.

Figura 57 – Contexto de emplacamento na introdução do Capítulo A



De acordo com o infográfico acima, em 1990 foi necessário acrescentar uma letra às placas por causa da grande demanda de carros a serem identificados. Com a inclusão dessa letra, quantas placas podem ser formadas?

Análise combinatória é o campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto. Seu estudo encontra aplicação nas mais diversas situações, como na Química, ao se investigar a possível união entre átomos, ou no esporte, na montagem das tabelas de campeonatos.

Associada à Probabilidade e à Estatística, a Análise combinatória constitui um poderoso instrumento de antecipação de resultados nos campos industrial, comercial, científico ou governamental.

Fonte: Capítulo A, p.246.

A situação realística promoveu a discussão sobre a história de emplacamento dos veículos em São Paulo, o que corrobora com o indicado pelo Parâmetro de Sala de Aula (PSA) (PERNAMBUCO, 2013). As relações entre as áreas propostas pela introdução do Capítulo A no livro didático apresenta a abrangência da Combinatória, trazendo diferentes relações que podem ser interpretadas pelos alunos como motivo para estudá-la. O contexto de emplacamento de carros é algo que faz parte do dia-a-dia, apresentando aspectos de proximidade da Combinatória ao cotidiano dos estudantes. Dessa forma, a relação entre os conteúdos matemáticos pode ser melhor aproveitada pelo professor para trazer outros sentidos e significados para o estudo da Combinatória.

Os argumentos apresentam diferentes relações da Combinatória (entre conteúdos matemáticos, entre áreas e no dia-a-dia), pontuando na introdução aspectos que podem ser explorados pelo professor com maior profundidade.

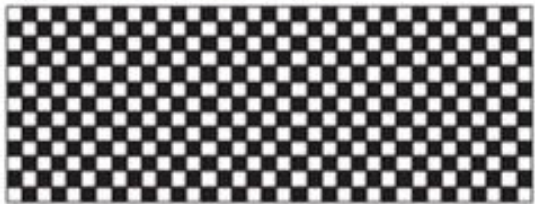
Geralmente, esses textos precisam ser complementados, pois, como se trata de um livro didático, os textos têm que ser concisos.

No Capítulo B, a situação inicial promove uma reflexão sobre os tipos de contagem realizados por crianças (contagem simples biunívoca) e o tipo de contagem realizada por adultos (contagem por agrupamentos). Por fim, apresenta uma pergunta com relação a contagem de quadradinhos conforme se apresenta na Figura 58.

Figura 58 – Situações de contagens na introdução do Capítulo B

A análise combinatória é o campo da Matemática que trata das técnicas de contagem. Se dermos a uma criança de 8 anos um punhado de moedas para que sejam contadas, ela provavelmente contará uma a uma. Já o adulto com a mesma tarefa costuma usar algumas técnicas que evitam ou minimizam os erros de contagem, por exemplo, fazendo grupinhos de 5 ou 10, e depois contando os grupinhos. Este capítulo vai tratar das principais técnicas de contagem.

Agora, forme dupla com um colega, observem a figura abaixo e tentem responder às perguntas a seguir.

- Quantos quadradinhos no total (brancos e pretos) existem nessa figura?
- E quantos quadradinhos pretos?

Fonte: Capítulo B, p.242

A discussão promovida pela seção inicial do Capítulo B promove a reflexão sobre a ação de contar, fazendo a relação com as técnicas diferentes de contagem, o que de certa forma busca apresentar uma função para Combinatória.

Para a classificação do tipo de argumento no início do Capítulo A e do Capítulo B, como não houve explicitações de relações matemáticas ou lógicas dedutivas e indutivas, sentiu-se a necessidade de outro aporte teórico para esse fim. Nessa perspectiva, classificou-se o tipo de argumento do início dos capítulos como sendo o caso “que unem uma pessoa a seus atos, um grupo aos indivíduos que dele fazem parte e, em geral, uma essência a suas manifestações” (PERELMAN; OLBRECHTS-TYTECA, 1999, p.299), representando uma ligação de coexistência entre a Combinatória e as outras áreas. No Quadro 20 são expostas as características da argumentações observada em cada um dos capítulos analisados.

Quadro 20 – Caracterização dos argumentos apresentados nas páginas introdutórias

Características da Argumentação		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Início	Realístico: Livro didático que começa o assunto com apresentação de situação com base em fatos reais. Pergunta: o capítulo possui uma pergunta que irá conduzir a discussão da introdução da temática	Pergunta: o capítulo possui uma pergunta que não conduz a discussão, apenas introduz a comparação entre contagens.
Tipo	Argumentação baseados na estrutura do real: Ligação de coexistência na qual a importância da Combinatória é dada pelas aplicações em outras áreas e com outros conteúdos matemáticos.	Argumentação baseados na estrutura do real: ligação de coexistência na qual o autor apresenta diferentes ações de realizar uma contagem
Grau	Médio: o argumento introdutório tenta gerar uma confrontação com a pergunta apresentada, mas exibe a resposta na seção de exercício resolvido algumas páginas depois.	Alto: o argumento introdutório tenta gerar uma confrontação com a pergunta apresentada e não exibe a resposta depois

Fonte: Acervo da pesquisa

Os diferentes graus dos argumentos apresentados, diz respeito ao nível de confrontação produzido pelo livro e ao tempo da apresentação da resposta. Para as autoras Llanos e Otero (2012), quanto mais tempo se decorre da apresentação da resposta, maior é o grau de argumentação. O grau nulo é relacionado aos textos que são apenas informativos.

Podem-se categorizar, ainda, as imagens dos livros analisados quanto ao uso, ao tipo e quanto à relação com o mundo em que vivemos. No Quadro 21 são apresentadas essas categorizações.

Quadro 21 – Caracterização das relações entre imagem e argumentos apresentadas na página introdutória

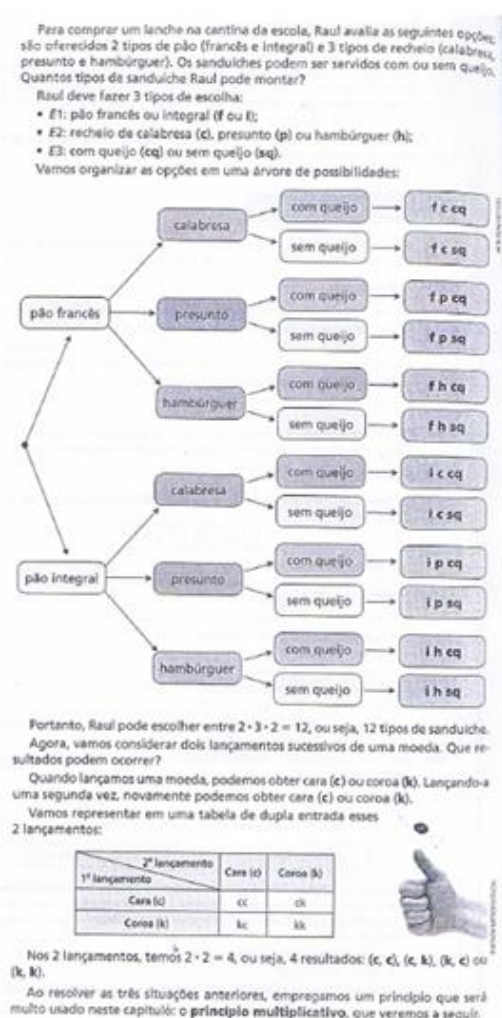
Imagens na parte introdutória dos capítulos analisados		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Uso	Ornamental (Fotos de automóveis), ou seja, o objetivo é meramente ilustrativo.	Ornamental: (foto de menina contando) Argumentativa: imagem (retângulo quadriculado) como fonte de informação
Tipo	Representação extra-matemática , que não apresenta suporte para a argumentação de um sistema matemático.	Representação extra-matemática (foto de meninas contando)
Relação com o mundo	Naturalista que faz referência aos veículos e seus emplacamentos	Naturalista que faz referência à ação de contar
Estilo gramatical da imagem	Narrativa que é possível de se construir a partir das imagens presentes no infográfico	Conceitual no caso do retângulo, mostra características fixas entre os quadradinhos brancos e pretos.

Fonte: Acervo da pesquisa

Observa-se que as imagens apresentam uma função estética, a fim de ilustrar o que está sendo dito no texto, trazendo relações com o mundo real e pouco dizem sobre a Combinatória em si.

Nas seções de introdução ao Princípio Fundamental da Contagem, os capítulos apresentam exemplos de problemas, alguns deles com diferentes tipos de procedimentos de solução do problema e as imagens utilizadas apresentam árvores de possibilidades, ou diagramas ou tabelas de dupla entrada, conforme se apresenta na Figura 59.

Figura 59 – Exemplos de situações na seção de introdução ao Princípio Fundamental da Contagem dos capítulos analisados

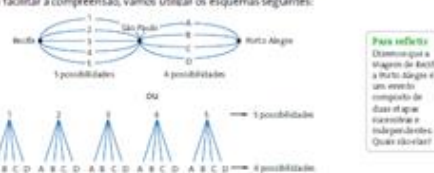


1 Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

Acompanhe a seguir a resolução de alguns problemas.

- 19) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 rotas diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 rotas diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

Para facilitar a compreensão, vamos utilizar os esquemas seguintes:

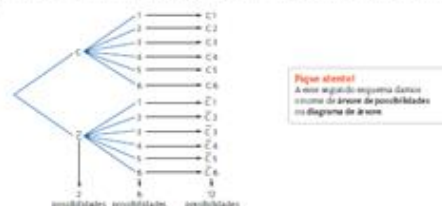


Total de possibilidades: $5 \cdot 4 = 20$.

São elas: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D, 4A, 4B, 4C, 4D, 5A, 5B, 5C e 5D.

Portanto, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo.

- 20) Ao lançarmos uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado (sendo C: cara e T: coroa):



Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 12 possibilidades ($2 \cdot 6 = 12$).

De modo geral, podemos dizer:

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n , então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Esse é o **princípio fundamental da contagem**.

Observação: O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.

Fonte: Capítulo A, p.248; Capítulo B, p.243

Os exemplos determinam e apresentam diferentes tipos de problemas de contagem que são resolvidos com a aplicação do Princípio Fundamental da

Contagem. Em alguns deles, nota-se a diminuição do número de possibilidades para que sejam aplicados os procedimentos enumerativos (nos dois capítulos com exemplos de *produto de medidas e arranjo com repetição*).

Acredita-se que a apresentação de diferentes procedimentos para resolução de problemas combinatórios, bem como, a comparação entre os mesmos, possibilita a aprendizagem de Combinatória. Iniciar o trabalho de Combinatória com procedimentos enumerativos pode potencializar o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Observa-se a caracterização dos argumentos no Quadro 22.

Quadro 22 – Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de PFC dos capítulos analisados

Características da Argumentação no PFC		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Início	Exemplos: a seção utiliza exemplos a partir dos quais o PFC pode ser realizado.	Exemplos: a seção utiliza exemplos a partir dos quais o PFC pode ser realizado.
Tipo	Argumentação indutiva: generaliza o princípio multiplicativo a partir de quatro exemplos	Argumentação indutiva: generaliza a partir de dois exemplos e enuncia o Princípio Fundamental da Contagem. Depois continua com mais dois exemplos.
Grau	Nulo: O livro apenas informa como resolver esses tipos de problema	Nulo: O livro apenas informa como resolver esses tipos de problema

Fonte: Acervo da pesquisa

O contexto de lançamento de moedas é comum nos dois capítulos, no entanto há preferência por procedimentos diferentes de resolução (tabela e árvore de possibilidades, respectivamente). Esse contexto pode ser complementado com a relação com Probabilidade, trazendo mais argumentos entre conteúdos matemáticos. A comparação entre procedimentos tabulares e gráficos também podem ser elementos de discussão nas aulas, a fim de que apareçam alguns argumentos combinatórios. Uma proposição da ampliação gradativa de moedas no lançamento, pode ser relacionada a um processo de generalização do Princípio Fundamental da Contagem.

Com relação à generalização do Princípio Fundamental da Contagem, ambos os capítulos, fazem uso da argumentação indutiva, a qual generaliza por meio de alguns exemplos, tomando tais exemplos como representantes da ideia

noção desse princípio. Não há ênfase na dedução formal nos capítulos analisados, apenas no final o PFC é enunciado para dois elementos, e há a afirmação de que pode ser generalizado para mais etapas.

Podem-se categorizar, ainda, as imagens presentes quanto ao uso, ao tipo, ao estilo gramatical da imagem e quanto sua relação com o mundo em que vivemos nas seções do Princípio Fundamental da Contagem. Tais categorizações podem ser observadas no Quadro 23.

Quadro 23 – Caracterização das relações entre imagem e argumentos apresentadas nas seções de introdução ao PFC dos capítulos analisados

Imagens no PFC		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Uso	Ornamental e Argumentativo (referindo a presença da árvore de possibilidades e tabela de dupla entrada)	Argumentativo (árvore de possibilidades e diagrama)
Tipo	Representação extra-matemática; Representação matemática	Representação matemática
Relação com o mundo	Naturalista; Naturalista-abstrata (a árvore de possibilidades e tabela não abstraem, completamente as informações do problema representando-as elas em sua sistematização).	Abstrata (as informações foram tratadas de modo a fazer apenas indicações simbólicas de suas relações)
Estilo gramatical da imagem	Narrativa.	Narrativa

Fonte: Acervo da pesquisa

No estilo gramatical da imagem, classificaram-se árvores de possibilidades, tabelas e diagramas dos capítulos como narrativa, já que tais representações “mostram ações entre os objetos participantes [...] e é possível construir com elas uma narração – uma dimensão temporal – que representa uma relação transacional entre os objetos que as compõem.” (LLANOS; OTERO, 2012, p.129). A relação temporal que apresentam diz respeito às etapas de escolha de cada possibilidade, indicando relações entre os objetos que foram escolhidos e aqueles que ainda podem ser escolhidos, o que permite a verificação da enumeração sistemática de todas as possibilidades.

No Capítulo A ainda observam-se, ainda, a presença de imagens que ilustram as situações problemas, trazendo os componentes ornamentais, a relação extra-matemática, na qual apresentam relações com o contexto do problema e naturalista, que apresenta a relação direta com o mundo que representa – como se pode observar na Figura 60.

Figura 60 – Imagens ornamentais, extra matemáticas, naturalista do capítulo A



Fonte: Capítulo A, p.248

Na seção de Fatorial, nos dois capítulos, não há imagens, ou figuras apenas da apresentação da notação fatorial e propriedades de simplificação. Portanto, centralizou-se a discussão nas características dos argumentos. Exemplos das seções de Fatorial são apresentados na Figura 61.

Figura 61 – Exemplos de situações na seção do Fatorial dos capítulos analisados

2 Fatorial de um número natural

Boa parte dos problemas da Análise combinatória é resolvida por um produto de números naturais consecutivos, como $1 \cdot 2 \cdot 3$ ou $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Em ambos os exemplos, multiplicamos números naturais de 1 até n , sendo, no primeiro caso, $n = 3$ e, no segundo, $n = 8$.

Em geral, produtos do tipo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ serão escritos com a notação de fatorial.

O **fatorial** de um número natural n é representado por $n!$ (leamos: "n fatorial") e é definido por:

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geq 2$
- $1! = 1$
- $0! = 1$

Exemplos

a) O fatorial de 4, ou seja, $4!$, é 24, pois: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$

A notação fatorial facilita a representação da multiplicação de números naturais consecutivos. Por exemplo, para representar o produto $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, podemos escrever: $25!$

Fatorial

O valor obtido com P_n é também chamado **fatorial** do número natural n e indicado por $n!$ (lê-se "fatorial de n " ou " n fatorial").

Assim, temos $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geq 1$.

Considera-se $0! = 1$.

Exemplos:

a) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
 $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
c) $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

Fonte: Capítulo A, p.251; Capítulo B, p.246.

Lockwood e Erickson (2016) ao investigar sobre concepções de fatorial de estudantes, descreve que existem duas concepções geralmente discutidas, que podem ser implementadas. As autoras classificam como concepção computacional e concepção combinatória e explicam:

[...] em uma concepção computacional, os estudantes pensam em $n!$ em termos de sua definição numérica como o produto dos primeiros n números inteiros positivos. Um estudante com uma concepção computacional pode ser capaz de usar e manipular fatoriais em expressões ou equações, como um cálculo estritamente numérico.[...] Alguém com uma concepção combinatória pode pensar em $n!$ como o número de arranjos de n objetos distintos, e eles adicionalmente podem ser capazes de conceber um processo pelo qual o produto $n!$ pode gerar todos os arranjos de n objetos. Com uma concepção combinatória, existe uma maneira natural de relacionar o fatorial a algum significado combinatório e não apenas como uma expressão que pode ser computada. (LOCKWOOD; ERICKSON, 2017, p.504)

As características dos argumentos apresentados pelos capítulos são bem similares, enfatizando a concepção computacional, o que gerou a mesma categorização para ambos. Com relação ao tipo de argumento, fundamentou-se a discussão em Perelman (1993, p.119), quando explica que “Argumentar pelo exemplo é pressupor a existência de certas regularidades cujos exemplos fornecerão uma concretização” e denominou-se o tipo de argumento em *Argumentação pelo exemplo*. No Quadro 24 apresenta-se a categorização dos argumentos na seção Fatorial.

Quadro 24 – Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de Fatorial dos capítulos analisados

Características da Argumentação no Fatorial		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Início	Definição: as seções se iniciam com a definição do fatorial	Definição
Tipo	Argumentação pelo exemplo: parte do geral e apresenta exemplos para aplicar o que foi inicialmente apresentado (PERELMAN, 1993; BOAVIDA, 2005)	Argumentação pelo exemplo
Grau	Médio: Apresenta exemplos de simplificação e perguntas na seção de reflita que são resolvidas no manual do professor	Nulo: Apresenta exemplos de simplificação

Fonte: Acervo da pesquisa

Portanto, nos capítulos, após exibir a definição de fatorial, os autores apresentam as propriedades de simplificação de fatorial, a partir dos exemplos de resolução dos exercícios, como pode-se observar na Figura 62.

Figura 62 – Exemplos de simplificação na seção do Fatorial do Capítulo A

Exemplos

a) Veja como podemos simplificar as seguintes expressões:

- $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$
- $\frac{1.001!}{1.000!} = \frac{1.001 \cdot \cancel{1.000!}}{\cancel{1.000!}} = 1.001$
- $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1$ (simplificamos $n!$ com $n!$)

Fonte: Capítulo A, p.252.

Na seção *Reflita* do Capítulo A, existe a apresentação da definição sobre o Fatorial de 1 (1!) e Fatorial de 0 (0!), sobre a notação de fatorial e sobre operações com números fatoriais, com o objetivo de discutir algumas dessas propriedades, como pode-se observar na Figura 63.

Figura 63 – Exemplos de situações Reflita na seção do Fatorial do Capítulo A

Reflita

Se n é um número natural maior que 1, $(n-1)!$, $n!$ e $(n+1)!$ são números consecutivos?

Não. Por exemplo, para $n = 2$, temos:

$(n-1)! = 1! = 1$
 $n! = 2! = 2$
 $(n+1)! = 3! = 6$

Fonte: Capítulo A, p.252.

Nas Figuras 62 e 63 as características que são evidenciadas focalizam a concepção computacional de fatorial, explicitando as propriedades e como podem ser realizadas a simplificação.

A discussão sobre a caracterização de argumentos pode ser realizada a partir da análise pormenorizada das justificativas apresentadas em cada seção. Com base em Perelman (1993), pode-se classificar o argumento utilizado no início da seção de Fatorial do Capítulo A como um argumento quase lógicos que fazem uso de relações matemáticas. No caso, utiliza-se da relação de frequência ou parte todo, no qual a partir da mesma indica um procedimento comum para a resolução de problemas combinatório, como pode-se observar na Figura 64.

Figura 64 – Exemplos de argumento de Relação Matemática presente na seção do Fatorial do Capítulo A

Boa parte dos problemas da Análise combinatória é resolvida por um produto de números naturais consecutivos, como $1 \cdot 2 \cdot 3$ ou $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Em ambos os exemplos, multiplicamos números naturais de 1 até n , sendo, no primeiro caso, $n = 3$ e, no segundo, $n = 8$.

Em geral, produtos do tipo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ serão escritos com a notação de fatorial.

Fonte: Capítulo A, p.251.

De acordo com Perelman (1993, p.69), o argumento de relação lógica matemática se caracteriza “necessariamente, [por] reduzir a realidade a um esquema do tipo lógico ou matemático sobre o qual se raciocina, transpondo, no entanto, a conclusão para a realidade concreta”.

No caso, o Capítulo A apresenta um procedimento frequente, mas não o único procedimento para resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios. Esse fato é esclarecido ao longo do capítulo, mas o professor precisa escolher exemplos que se contraponham ao explicitado.

Nota-se uma tentativa de explicitar uma concepção combinatória de fatorial utilizando esse tipo de argumento, mas exemplos relacionando as noções deveriam ser apresentados. Na lista de exercícios propostos, foram observados alguns exemplos que utilizam a concepção combinatória, como evidencia o capítulo A na Figura 65.

Figura 65 – Exemplo de concepção combinatória de Fatorial apresentada no Capítulo A

Observação

O exercício proposto 5 é um exemplo desse tipo de problema.

5. De quantas maneiras distintas podem ser colocados 5 livros lado a lado em uma prateleira?

120 maneiras

Fonte: Capítulo A, p.250-251

Com relação à ordem da apresentação da seção de *Permutação* nos capítulos, o Capítulo A exibe-a após a seção de fatorial, enquanto que o Capítulo B traz antes mesmo da apresentação de fatorial, como se pode observar na Figura 66.

Figura 66 – Exemplos de situações na seção de *permutação* dos capítulos analisados

3.1 Definição de permutação simples

Anagrama de uma palavra é qualquer agrupamento, com ou sem significado, obtido pela transposição de suas letras. Por exemplo, um anagrama da palavra AMOR é ROMA. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

Para a primeira letra, temos 4 possibilidades (A, M, O, R). Depois dessa escolha, há 3 possibilidades para a colocação da segunda letra, 2 para a terceira letra e 1 para a quarta letra. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, ou seja, 24 anagramas.

Cada um desses anagramas corresponde a uma permutação simples das letras da palavra AMOR.

De uma permutação para outra, os elementos são sempre os mesmos; eles apenas trocam de posição. Daí o nome **permutação** (permutar significa trocar os elementos que formam um todo, com a finalidade de obter nova configuração).

Dado um conjunto de n elementos, chama-se **permutação simples** dos n elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos.

Indica-se o número de permutações simples de n elementos por P_n .

3.2 Cálculo do número de permutações simples

Para saber, por exemplo, quantos anagramas da palavra CINEMA começam por C, consideramos que, para a primeira letra, temos 1 possibilidade (C) e que as outras 5 letras podem ser permutadas entre si.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$$1 \cdot P_5 = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 5! = 120$$

Logo, há 120 anagramas de CINEMA começados por C.

Acompanhe mais este exemplo:

Vamos considerar que as 20 carteiras de uma sala de aula podem ser ocupadas por 20 alunos de modos distintos. Dizemos, então, que esses alunos podem ocupar essas carteiras de P_{20} modos, ou seja:

$$P_{20} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.432.902.008.176.640.000$$

Logo, há 2.432.902.008.176.640.000 modos de os alunos ocuparem essas carteiras.

O número de permutações simples de n elementos é dado por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ ou } P_n = n!$$

2 Permutações simples e fatorial de um número

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição.

Vejamos agora quantos agrupamentos é possível formar quando temos n elementos e todos serão usados em cada agrupamento. Observe os exercícios resolvidos.

Exercícios resolvidos

1. Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los em um mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Resolução:

Podemos resolver por tentativa. Assim, temos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Concluímos então que são 6 os números procurados. Podemos também fazer uma árvore de possibilidades:

Pelo princípio fundamental da contagem, temos 6 possibilidades ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$). Observe que a **ordem dos algarismos** é muito importante. Todos os números diferem entre si pela ordem de seus algarismos.

2. Quantos são os anagramas (diferentes disposições das letras de uma palavra) da palavra ANE?

Resolução:

Considerando as quatro letras: a, n, e, e, há 4 possibilidades para a primeira posição, 3 possibilidades para a segunda, 2 possibilidades para a terceira e 1 possibilidade para a quarta posição.

Pelo princípio fundamental da contagem, temos 24 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$), ou seja, são 24 anagramas.

De modo geral, se temos n elementos distintos, quantas filas podemos formar? Podemos escolher o primeiro elemento da fila de n maneiras. Agora, de quantas maneiras podemos escolher o segundo elemento da fila? De $n-1$ maneiras. Prosseguindo dessa forma e usando o princípio multiplicativo, fica claro que o número de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses n elementos é dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de **permutações simples**. Indicamos por P_n o número de permutações simples de n elementos:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Fonte: Capítulo A, p.253; Capítulo B, p.245.

Apesar da diferença na ordenação da apresentação, as características da argumentação não se diferenciam, como pode-se observar no Quadro 25.

Quadro 25 – Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de *permutação* dos capítulos analisados

Características da Argumentação na Seção de <i>permutação</i>		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Início	Exemplo	Exemplos
Tipo	Argumentação indutiva	Argumentação indutiva
Grau	Nulo	Nulo

Fonte: Acervo da pesquisa

Verifica-se nos dois casos a preocupação com a compreensão da linguagem, apresentando sinônimos para a palavra *permutação*. A opção por anagramas é comum nos dois capítulos. No Capítulo A promove-se a discussão sobre anagramas já na situação inicial, enquanto no Capítulo B, no exemplo resolvido, como se observa na Figura 66.

Na seção de *permutação* poucas imagens são apresentadas. No Capítulo A apenas durante a resolução de problemas que é exibida a imagem de um sofá com uma família desenhada, sendo utilizada apenas como ilustração. Já no Capítulo B a resolução de problema é realizada com a utilização de árvore de possibilidades. Vale salientar que o número de possibilidades apresentadas nos exemplos resolvidos do Capítulo A é muito maior que no do Capítulo B, o que impossibilita procedimentos enumerativos. Dessa forma classificou-se o uso da imagem conforme se apresenta no Quadro 26.

Quadro 26 – Caracterização das imagens apresentadas nas seções de *permutação* dos capítulos analisados

Imagens na Permutação		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Uso	Ornamental	Argumentativa (árvore de possibilidades)
Tipo	Representação extra-matemática;	Representação matemática
Relação com o mundo	Naturalista;	Abstrata
Estilo gramatical da imagem	Narrativa.	Narrativa

Fonte: Acervo da pesquisa

As semelhanças entre as características de argumentos são observadas ainda na seção de *permutação com elementos repetidos*. Ambas iniciam com a resolução de uma situação de anagrama com letras idênticas e após a resolução da situação, apresenta a generalização da fórmula aplicada a esse tipo de

situação. Dessa forma, apresenta-se a categorização das seções de permutação com elementos idênticos no Quadro 27.

Quadro 27 – Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de permutação com elementos idênticos dos capítulos analisados

Características da Argumentação na Permutação com elementos repetidos		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Início	Exemplos	Exemplos
Tipo	Argumentação indutiva	Argumentação indutiva
Grau	Nulo	Nulo

Fonte: Acervo da pesquisa

As diferenças nas seções desses capítulos se evidenciam nas notações utilizadas, como a nomenclatura dos tipos de problemas combinatórios (Permutação com elementos repetidos no Capítulo A e Permutação com repetição no Capítulo B) e na maneira de explicitação dos termos, pois no Capítulo A utilizou-se a notação de fatorial ($5!$) e no Capítulo B a notação simbólica de permutação simples (P_3). Não há imagens apresentadas nessa seção nos dois capítulos, o que impossibilita a classificação das características das imagens.

Com relação às seções de *arranjo* dos capítulos analisados, verificou-se que ambas trazem exemplos para depois generalizar a fórmula de *arranjo*. Portanto, não há diferenças entre as características de argumentação, como pode-se observar no Quadro 28.

Quadro 28 – Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de arranjo dos capítulos analisados

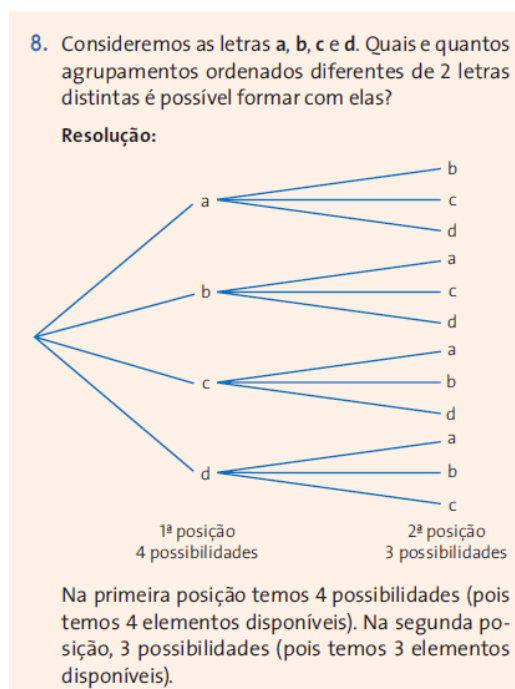
Características da argumentação no arranjo		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Início	Exemplos.	Exemplos
Tipo	Argumentação indutiva	Argumentação indutiva:
Grau	Nulo	Nulo

Fonte: Acervo da pesquisa

Observa-se, ainda, que no Capítulo B os exercícios resolvidos utilizam a comparação entre os procedimentos de árvore, listagem, fórmula e PFC em um exemplo com poucas possibilidades. O uso de diferentes procedimentos é mais frequentemente apresentado quando o número de possibilidades dos problemas combinatórios é restrito.

Já no Capítulo A, os exercícios resolvidos comparam os procedimentos da fórmula com PFC. Esse fato faz com que o Capítulo B apresente imagens como a árvore, como se verifica na Figura 67, e o Capítulo A não utilize imagens.

Figura 67 – Exemplos de Exercício resolvido na seção do arranjo do Capítulo B



Fonte: Capítulo B, p.249.

De acordo com a caracterização de imagens proposta por Llanos e Otero (2012), pode se classificar seu uso enquanto *argumentativa*, o tipo como *representação matemática*, a relação com o mundo é *abstrata* e o estilo gramatical da imagem *narrativa*.

As seções de *combinação* dos capítulos analisados, semelhantemente às seções de *arranjo* e *permutação*, também se iniciam com exemplo seguido de generalização, como se verifica no Quadro 29.

Quadro 29 – Caracterização dos argumentos apresentados nas seções de combinação

Características da Argumentação na combinação		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Início	Exemplo	Exemplos
Tipo	Argumentação indutiva	Argumentação indutiva
Grau	Nulo	Nulo

Fonte: Acervo da pesquisa

Os dois capítulos fazem uso da propriedade de regra do quociente para apresentar a fórmula da *combinação*. O procedimento enumerativo com base na listagem foi o escolhido para resolução dos problemas nos dois casos e o argumento utilizado para justificar a não *ordenação* dos agrupamentos foi o contexto, a escolha de subconjuntos. Nessa perspectiva, não há variação da caracterização dos argumentos apresentados na seção de *combinação*. Na Figura 68 apresenta-se a seção de *combinação* dos capítulos analisados.

Figura 68 – Exemplos de situações na seção de combinação dos capítulos analisados

5 Combinação simples

5.1 Definição de combinação simples

Considerando o conjunto formado pelas letras da palavra AMOR, quantos subconjuntos com 3 elementos podemos formar?

Como já vimos, a quantidade de agrupamentos ordenados ou sequências é dada por: $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Estes agrupamentos são:

AMO, AMR, AOM, AOR, ARO, ARM, MAO, MAR, MOA, MOR, MBA, MRO, OAM, OAR, OMA, OMR, ORA, ORM, RAO, RAM, RMA, RMO, ROA, ROM

Pensando em termos de conjuntos cujos elementos são as letras do agrupamento, os conjuntos formados pelas letras AMO, ADM, MAO, MOA, OAM e OMA são iguais, pois, ao permutar as 3 letras, o conjunto continua tendo exatamente os mesmos elementos, isto é, o conjunto não se modifica.

Dessa forma, o total de 24 sequências com as 3 letras deve ser dividido por $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (número de permutações das 3 letras).

Podemos, portanto, dizer que a quantidade de subconjuntos com 3 elementos é $\frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{24}{6} = 4$, escolhidos entre os 4 elementos do conjunto das letras da palavra AMOR:

$\{A, M, O\}$, $\{A, M, R\}$, $\{A, O, R\}$, $\{M, O, R\}$.

Chamamos esses agrupamentos de combinações simples dos 4 elementos, tomados 3 a 3.

Dado um conjunto de n elementos, chama-se **combinação simples** dos n elementos, tomados p a p , qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $C_{n,p}$ o número de combinações simples de n elementos tomados p a p .

5.2 Cálculo do número de combinações simples

Vamos determinar o número de subconjuntos do conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ que tenha 3 elementos, isto é, o número de combinações dos 5 elementos tomados 3 a 3, cuja notação é $C_{5,3}$.

Cada combinação de 3 elementos, por exemplo $\{2, 6, 8\}$, origina $3! = 6$, ou seja, 6 agrupamentos ordenados (permutações desses elementos): $\{2, 6, 8\}$, $\{2, 8, 6\}$, $\{6, 2, 8\}$, $\{6, 8, 2\}$, $\{8, 2, 6\}$, $\{8, 6, 2\}$.

Portanto, $C_{5,3} \cdot 3!$ dá o total de arranjos dos 5 elementos tomados 3 a 3 ($A_{5,3}$):

$$C_{5,3} \cdot 3! = A_{5,3} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow C_{5,3} = 10$$

Como vimos, com p elementos distintos, podemos obter $p!$ permutações. Isso significa que, a partir de uma combinação, podemos obter $p!$ arranjos distintos dos n elementos tomados p a p .

Então, o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos ($A_{n,p}$) e o número de permutações ($p!$):

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1))}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Portanto:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \text{ com } n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \text{ e } p \leq n.$$

5 Combinações simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos.

Observe com atenção estes dois exemplos:

- a) Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?
- Representemos por A: Ane; E: Elisa; R: Rosana; F: Felipe; e G: Gustavo. Precisamos determinar todos o subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos $\{A, E, R, F, G\}$. A ordem em que os elementos aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Ane-Elisa, por exemplo, é a mesma dupla que Elisa-Ane. Então, os subconjuntos de 2 elementos são: $\{A, E\}$, $\{A, R\}$, $\{A, F\}$, $\{A, G\}$, $\{E, R\}$, $\{E, F\}$, $\{E, G\}$, $\{R, F\}$, $\{R, G\}$, $\{F, G\}$. A esses subconjuntos chamamos **combinações simples** de 5 elementos tomados com 2 elementos, ou tomados 2 a 2, e escrevemos: $C_{5,2}$.
- Como o número total dessas combinações é 10, escrevemos $C_{5,2} = 10$.

- b) Consideremos um conjunto com 5 elementos e calculemos o número de combinações simples de 3 elementos, ou seja, o número de subconjuntos com 3 elementos.

Conjunto com 5 elementos: $\{a, b, c, d, e\}$.

Combinações simples de 3 elementos: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, d, e\}$.

Cada combinação dessas dá origem a 6 arranjos, permutando de todos os modos possíveis seus 3 elementos. Por exemplo, ao permutar todos os elementos da combinação $\{a, b, c\}$ encontramos os arranjos $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$. Isso significa que o número de arranjos de 3 elementos tomados 3 a 3 é seis vezes o número de combinações de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja $A_{5,3} = 6C_{5,3}$. Como o 6 foi obtido fazendo permutações dos 3 elementos de, por exemplo, $\{a, b, c\}$, temos $P_3 = 6$. Logo

$$A_{5,3} = P_3 \cdot C_{5,3} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Fórmula das combinações simples

A cada combinação de n elementos tomados p a p correspondem $p!$ arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

Indica-se por $C_{n,p}$ (C ou $\binom{n}{p}$) o número total de combinações de n elementos tomados p a p .

calcula-se por $C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ ou $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$.

Observações:

1ª) Como são subconjuntos de um conjunto, a ordem dos elementos não importa. Só consideramos subconjuntos distintos os que diferem pela natureza dos seus elementos.

2ª) Como foi observado acima, do mesmo modo que se obtém a fórmula da combinação por meio da divisão de um arranjo pela permutação, podemos obter a combinação sem usar a fórmula, calculando o arranjo sem a fórmula e dividindo o resultado pela permutação dos elementos escolhidos.

Fonte: Capítulo A, p.258-259; Capítulo B, p.254.

As imagens utilizadas nas seções aparecem apenas nos exercícios resolvidos, no Capítulo A assumindo um papel ilustrativo apenas. No Capítulo B

promovem a utilização do procedimento com uso do diagrama. A categorização das imagens referente a combinação é apresentada no Quadro 30.

Quadro 30 – Caracterização das imagens apresentadas nas seções de combinação dos capítulos analisados

Imagens na combinação		
Componentes	Capítulo A	Capítulo B
Uso	Ornamental	Argumentativa (diagrama)
Tipo	Representação extra-matemática;	Representação matemática
Relação com o mundo	Naturalista;	Abstrata

Fonte: Acervo da pesquisa

No caso do Capítulo A, as imagens apenas representam o contexto do problema não oferecendo base argumentativa para a construção do procedimento, portanto não apresentam justificativa para o mesmo, como se pode observar na Figura 69.

Figura 69 – Exemplos de Exercício resolvido na seção de combinação do Capítulo A

Exercícios resolvidos

Os 30 alunos de uma classe devem fazer um trabalho em equipes de 4 pessoas. Há 20 garotas e 10 garotos. Quantas equipes podem ser formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo?

b) com 2 garotas e 2 garotos?

► **Resolução**

a) As 4 pessoas devem ser escolhidas entre o total de 30 alunos.

$$C_{30, 4} = \frac{30!}{4! \cdot (30 - 4)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 26!} = 27.405$$

O número de equipes de 4 pessoas, escolhidas entre 30, é 27.405.

b) Nesse caso, a escolha deverá ocorrer em duas etapas:

- E_1 : escolher 2 das 20 garotas;
- E_2 : escolher 2 dos 10 garotos.

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades é dado por:

$$C_{20, 2} \cdot C_{10, 2} = \frac{20!}{2! \cdot (20 - 2)!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot (10 - 2)!} = 190 \cdot 45 = 8.550$$

O número de equipes com 2 garotas e 2 garotos é 8.550.



Fonte: Capítulo A, p. 259

Já no Capítulo B, a imagem promove a construção do argumento, pois os diagramas apresentados apresentam a relação com os apertos de mão realizados e promovem uma ideia de sistematização indo do particular para o geral, produzindo uma dedução informal, generalizando para a situação proposta no exercício, como se pode observar na Figura 70.

Figura 70 – Exemplos de problema resolvido na seção de combinação do Capítulo B

20. No primeiro dia de aula de Matemática do 2º ano, 30 alunos estavam presentes na sala de aula. Para se conhecerem melhor, o professor sugeriu que cada aluno cumprimentasse o outro com um aperto de mão e uma breve apresentação. Qual foi o total de apertos de mão?

1ª maneira: com diagramas
Os diagramas abaixo representam os cumprimentos para 1, 2, 3, 4 e 5 pessoas.

Observe que o problema dos cumprimentos se reduz à contagem do número de segmentos necessários para conectar vários números de pontos.

Vamos ver o caso de 4 pessoas. A cumprimenta 3 pessoas: B, C e D (3 cumprimentos). B também cumprimenta 3 pessoas: A, C e D (3 cumprimentos). E assim por diante. Cada pessoa cumprimenta outras 3 pessoas. Parece então que teremos $4 \cdot 3$ ou 12 cumprimentos. Mas note que os cumprimentos entre A e B foram contados 2 vezes. Isso ocorre com cada uma das 4 pessoas. Consequentemente, cada cumprimento foi contado 2 vezes. Assim, para obter a resposta, precisamos dividir 12 por 2, ou seja, fazer $\frac{4 \cdot 3}{2}$ ou 6, que é igual ao número de segmentos de reta traçados na figura ($\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$).

Faça esse mesmo raciocínio para o caso de 5 pessoas. Você descobrirá que serão $\frac{5 \cdot 4}{2}$ ou 10 cumprimentos ou 10 segmentos de reta ligando 5 pontos não alinhados do plano. Podemos generalizar esse raciocínio para um número qualquer de pessoas. Usando a estratégia acima, nosso problema fica resolvido fazendo $\frac{30 \cdot 29}{2} = \frac{870}{2}$ ou 435 cumprimentos.

Fonte: Capítulo B, p. 285

Verifica-se que, no geral, os argumentos apresentados nos diferentes capítulos coincidem, se diferenciando apenas nas escolhas das situações que são apresentadas. A presença de argumentação a partir de exemplos é comum

na maioria das seções, o que inicialmente parece ser mais adequado do que a apresentação a partir de definições.

A falta de características dedutivas nos argumentos apresentados nos capítulos dos livros analisados, parece acompanhar o apresentado por Godino, Batanero e Roa (2005) no qual indicam a presença de listagens como argumentos produzidos pelos estudantes. Os capítulos analisados preferem apresentar argumentações indutivas com relação à Combinatória, principalmente nas seções relativas aos tipos de problemas combinatórios.

Acredita-se, ainda, que o grau de argumentação combinatória pode ser ampliado se houver mais perguntas ao longo os textos introdutórios do que respostas. Nesse sentido, assevera-se a proposta de Llanos e Otero (2012, p.139) sobre os livros didáticos “[...] estes deveriam propor mais perguntas que respostas e promover a geração de confrontações explícitas que tenham que ser resolvidas pelo leitor”.

Com relação às características das imagens apresentadas, houve diferenças entre os capítulos analisados, principalmente com relação ao tipo de imagem e ao uso feito da mesma. Em algumas seções a escolha por altas ordens de grandeza dos problemas combinatórios impedem a apresentação de procedimentos enumerativos, gráficos ou tabulares, principalmente no Capítulo A. Essa escolha refletiu no uso das imagens, pois no Capítulo A foram utilizadas mais imagens ornamentais que argumentativas, tal como se apresenta no Capítulo B.

A ampliação do número de possibilidades (ordem de grandezas) nas situações introdutórias dos tipos de problemas combinatórios do Capítulo A podem ter inibido o uso de procedimentos gráficos (árvore de possibilidades) ou procedimentos enumerativos (listagens), como também o tipo de imagens que possuísem representações matemáticas, já que foram priorizadas as representações extra matemáticas. No Capítulo B as representações matemáticas foram priorizadas. Essa escolha também se reflete no tipo de relação com o mundo apresentadas pelos capítulos analisados, posto que o Capítulo A prioriza a relação naturalista, enquanto que o Capítulo B a relação abstrata.

As imagens apresentadas nos capítulos analisados possuem propostas diferentes e acredita-se que a variação entre as propostas pode ser interessante

para a complementação de argumentos. Por exemplo, imagens ornamentais podem auxiliar na discussão dos contextos dos enunciados dos problemas combinatórios, enquanto que as imagens argumentativas apresentam discussões concernentes à Combinatória.

Observou-se, ainda, que os dois capítulos analisados, nas seções de *permutação* e de introdução ao Princípio Fundamental da Contagem usaram contextos similares (anagramas, lançamento de moedas, respectivamente), sugerindo que podem ser frequentes na abordagem de tais conceitos.

De acordo com Llanos e Otero (2012, p.142), a argumentação apresentada nos livros didáticos “podem ser um instrumento a mais” no processo de construção de conhecimento matemático, todavia a argumentação deve ser realizada durante a aula.

O livro didático, em especial os capítulos de Combinatória investigados na presente pesquisa, apontam como esse conteúdo vem sendo apresentado, dispondo de uma organização dos objetos primários da Combinatória, que podem influenciar as decisões didáticas do professor. Conhecer-las pode promover reflexões que auxilia na escolha didática consciente, a fim de propor mudanças para ampliar o grau alcançado nas diferentes dimensões da idoneidade didática do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.

O processo de análise para encontrar os objetos primários da Combinatória produziram uma série de reflexões que podem fazer parte das aulas de Combinatória. Verificou-se os objetos primários da Combinatória priorizados nos capítulos específicos analisados. Dessa forma, construiu-se no Quadro 31 um resumo que exprime os principais indicadores verificados em cada elemento analisado por capítulo de Combinatória analisado, explicitando aqueles que foram mais evidenciados.

Quando comparam-se os dois capítulos a partir de suas similaridades, a Combinatória encontra-se de maneira restrita, não atingindo suas reais potencialidades na construção de pensamentos matemáticos, de um raciocínio específico.

Vale salientar que existem tipos de situações diversificadas, o que possibilita a escolha pelos professores de problemas combinatórios que

abordem as diferentes propriedades combinatórias, procedimentos, técnicas, linguagens e conceitos – permitindo um tratamento da Combinatória mais amplo.

Quadro 31 – Resumo do dos objetos primários da Combinatória no Ensino Médio

Comparação dos objetos primários mais frequentemente observados nos capítulos analisados			
O	C	Capítulo A	Capítulo B
Situação	Tipo de Situações	S3: Identificar os tipos de problemas combinatórios a partir do enunciado do problema e resolvê-los S1: Interpretar e empregar adequadamente notações científicas S2: Enumerar o total de possibilidades	S3: Identificar os tipos de problemas combinatórios a partir do enunciado do problema e resolvê-los S1: Interpretar e empregar adequadamente notações científicas S6: Explorar a operação Combinatória a partir do número total de possibilidades
		P4: Combinação; P5: Permutação P2: Arranjo;	P2: Arranjo; P4: Combinação P5: Permutação
Conceitos	Prob. Comb.	I1: Apenas escolha; I2: Apenas ordenação I3: Ordenação e escolha	I3: Ordenação e escolha I1: Apenas escolha; I2: Apenas ordenação
	Invariantes:	Os invariantes são tratados de forma implícita nos livros, apenas a ordenação é explicitada na diferenciação nos problemas de arranjo e combinação.	
Ling	Conv	L3: Linguagem natural para fórmula; L2: Linguagem natural para PFC;	L3: Linguagem natural para fórmula; L2: Linguagem natural para PFC;
	Resolução	PR3: Fórmula PR1: Princípio Fundamental da Contagem	PR3: Fórmula PR4: Dois procedimentos de resolução para um mesmo problema;
Procedimentos	C	PS: Problema Combinatório Simples; PC: Problemas Condicionais;	
	Técnicas de resolução	T7: Apenas aplica fórmulas de Combinatória T1: Explicita as possibilidades de escolha de cada etapa e aplica o PFC; T4: Subdivide o problema em seções, aplica a fórmula e o Princípio aditivo e/ ou multiplicativo entre as seções;	T7: Apenas aplica fórmulas de Combinatória T4: Subdivide o problema em seções, aplica a fórmula e o Princípio aditivo e/ ou multiplicativo entre as seções; T2: Enumera sistematicamente o total de possibilidades (por meio de tabelas, árvores de possibilidades, linguagem natural, fórmulas); T6: Fixa elementos e aplica a fórmula ou PFC; T10: Compara os procedimentos da fórmula com o Princípio Fundamental da Contagem
Argumentos*	Caract	1. Início de Argumentação mais utilizada: Exemplo; 2. Tipo de Argumentação mais utilizada Argumentação Indutiva; 3. Grau do argumento: Nulo	
	Imagem	1. Uso da imagem: Ornamental 2. Tipo da imagem: Representação extra-matemática 3. Estilo gramatical da imagem; Narrativa 4. Relação com o mundo: Naturalista	1. Uso da Imagem: Argumentativa 2. Tipo da imagem: Representação matemática 3. Estilo gramatical da imagem; Narrativa 4. Relação com o mundo: Abstrata

Fonte: Acervo de Pesquisa

Observam-se a maior prioridade desses capítulos para problemas combinatórios de *arranjo*, *combinação* e *permutação*, o que pode ocasionar uma

visão equivocada para que os movimentos intencionais do professor se restrinjam apenas a esses tipos de problemas combinatórios.

De certa maneira, a escolha do professor para o trabalho com apenas esses problemas é uma tentativa de buscar facilitar o processo de resolução de problemas, pois se apresenta apenas um modelo a ser seguido, desconfigurando todo o processo de construção de conhecimento.

Nos capítulos de livro didático analisados, a fórmula é o procedimento mais apresentado, como também a técnica de resolução mais discutida, o que pode contribuir para uma escolha do professor, na qual a apresentação de fórmulas combinatórias aparece mais cedo do que necessário, o que inibe a elaboração de procedimentos pessoais, ou procedimentos enumerativos, numéricos, ou qualquer outro.

Em alguns casos, o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, é iniciado, apesar do que indicam os documentos curriculares oficiais nacionais, internacionais e alguns resultados de pesquisas apontados por essa investigação, apenas no Ensino Médio. Sabe-se ainda, tal como se apresentou nas coleções de livros didáticos aqui analisados, que esse processo geralmente se concentra no 2º ano do Ensino Médio. Portanto, é necessário que os movimentos intencionais do professor oportunizem a resolução de problemas sem a apresentação de fórmulas, pelo menos inicialmente, e nesse caso, os capítulos analisados contrapõem tal proposta, quando apresentam seções nas quais seguem a disposição – nomenclatura do tipo de problema, procedimentos de resolução enumerativos e algorítmicos, exercícios resolvidos e problemas propostos que seguem o mesmo tipo.

Se os movimentos intencionais do professor do Ensino Médio, organizar a aula seguindo o processo descrito nos capítulos, para o início do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, de certa maneira, deprecia a criação e elaboração das ferramentas necessárias para aprendizagem Combinatória, mecanizando a construção de raciocínio combinatório, não proporcionando a identificação das diversas propriedades inerentes aos problemas e anulando o processo de identificação dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

6 AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: O PERCURSO TRAÇADO POR UM PROFESSOR

Nesse capítulo discute-se o percurso escolhido pelo professor participante do estudo para o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio, especificamente o que foi implementado a partir das interferências do tempo, das necessidades dos alunos, das condições da turma, entre outros fatores que influenciaram no decorrer da mesma. Para auxiliar a leitura subdividimos em algumas seções que tratam sobre: as aulas observadas, a classificação das configurações didáticas encontradas, configurações epistêmicas desenvolvidas, trajetórias epistêmicas, configurações interacionais e configurações cognitivas-afetivas.

6.1 COMENTÁRIOS SOBRE AS AULAS DE COMBINATÓRIA OBSERVADAS

As aulas foram realizadas no período de agosto a setembro de 2015 em uma escola pública, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio que atende também ao Curso Técnico em Agropecuária.

A sala de aula era clara e arejada, o quadro não estava em boas condições, já que havia pequenas pichações, mas isso não foi impedimento para que as aulas transcorressem adequadamente.

As práticas matemáticas concretizadas nas aulas centraram-se na resolução de problemas combinatórios, a partir de um processo de resolução de problemas, envolvendo os alunos no processo. A Combinatória não havia sido discutida na turma.

O livro didático foi utilizado para introduzir o conteúdo a partir de leituras, fonte de problemas combinatórios e de conceitos. Todos os alunos possuíam o livro didático, mas nem sempre traziam para as aulas. Na aula os alunos geralmente se sentavam em duplas, mas quando havia propostas de trabalho eles se organizavam em trios ou quartetos. Nesse caso, elementos como tipo de situações, tipos de problemas combinatórios, conversões entre registro, nível de

complexidade, procedimentos de resolução e argumentos presentes nos capítulos de livro didático analisados, foram utilizados para classificar as discussões sobre Combinatória realizadas na aula.

Foram realizadas filmagens, pois concorda-se com Powell e Quintaneiro Silva (2015) os quais afirmam que o vídeo permite a captação de características verbais e não verbais na sala de aula, comportamentos dos diferentes participantes e possibilita documentação e observação de perto do objeto investigado. Com base nas observações realizadas, apresenta-se um sumário descritivo do que foi discutido nas aulas.

Na *primeira aula* para iniciar a discussão sobre a Combinatória o professor efetuou a leitura do texto introdutório do livro didático (Figura 49) e, posteriormente, seguiu a discussão sobre outros códigos conhecidos pelos estudantes, como por exemplo, mudanças com a inclusão de novo dígito no celular. Diferentes códigos (CPF, RG, Título de Eleitor) foram elencados e características, como o número total de dígitos dos códigos, foram discutidas. Nessa proposta, os alunos utilizaram linguagens próprias, ou adquiridos a partir da leitura do capítulo do livro didático, ou por meio da conversa com o professor.

A partir da discussão, o professor elaborou propostas de situações problemas sobre quantidades de códigos e propôs que os alunos apresentassem sugestões de resolução. As situações problemas sofreram adaptações propostas pelo professor para possibilitar diferentes procedimentos heurísticos de resolução de problemas.

Os procedimentos de resolução comentados pelos estudantes foram sendo registrados no quadro e serviram de base para questionamentos feitos pelo professor, em busca de justificativas por parte dos alunos. Os argumentos eram constantemente pedidos pelo professor, principalmente aqueles que faziam menção à justificativa dos procedimentos utilizados pelos estudantes. A noção de Princípio Fundamental da Contagem foi abordada de maneira intuitiva a partir da busca pelo procedimento mais econômicos de resolução.

Na *segunda aula*, houve a retomada de alguns problemas trabalhados na aula anterior para verificar dificuldades dos alunos. Foram trabalhados diferentes tipos de problemas combinatórios por meio de resolução de problemas. Situações com contextos de criação de códigos (CPF, placas de carro), escolha

de pratos, escolha de vestimentas, possibilidades de sentar em diferentes poltronas, foram utilizados para o trabalho com problemas combinatórios.

Geralmente, os problemas eram propostos pelo professor e os alunos em duplas ou em trios assumiam a tarefa de resolvê-los. As diferentes propostas de procedimento eram registradas pelo professor no quadro e havia discussão sobre justificativas para as mesmas. As dificuldades observadas pelo professor eram colocadas para discussão do grupo e questionamentos eram realizados para que alunos tomassem decisão do procedimento mais adequado para solução do problema. No fim da aula foi sistematizado formalmente o princípio multiplicativo, também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Na *terceira aula* foram resolvidos problemas combinatórios do livro didático que foram passados para casa na aula anterior, continuando com a mesma estratégia didática, na qual os procedimentos apresentados pelos alunos foram discutidos pelo grupo-classe. Os contextos dos problemas opções de percurso, corrida, composição de senhas e números, organização de livros em uma estante.

Na parte final da aula, após a discussão de um problema de *permutação*, foi apresentado o conceito de *fatorial* a partir do procedimento de resolução do mesmo. A *permutação* também foi apresentada e depois vinculada a um problema com contexto de anagramas.

Na quarta e na quinta aula a diferença entre problemas de *arranjo* e *combinação* fizeram parte dos objetivos do professor. Na *quarta aula*, foi retomada a discussão de *fatorial* e *permutação* e o problema de anagrama discutido. Após isso, o professor discutiu diferentes procedimentos e técnicas para comparar os problemas, ora a partir dos procedimentos utilizados pelos alunos, ora auxiliando os mesmos com estratégias para descobrir a solução de problemas de *combinação* (regra do quociente)²⁹. O professor propôs a enumeração das possibilidades de um problema de *combinação* e a turma teve dificuldades em esgotar possibilidades. Apenas com um processo de enumeração sistemática apresentado pelo professor é que a solução foi alcançada.

²⁹ Ver seção 4.1.2 p.165

No fim da *quinta aula* foram apresentadas pelo professor as fórmulas de *arranjo* e *combinação* a partir da comparação das diferentes definições desses problemas. Antes foram propostos problemas para que os alunos continuassem a estratégia de propostas de procedimentos e justificativas dos mesmos.

Na *sexta aula* o professor trouxe uma ficha de revisão com problemas combinatórios que foi distribuída na sala para que os alunos em grupos de quatro alunos, sem a ajuda do professor, propusessem soluções. As soluções eram apresentadas a ele e reproduzidas no quadro. As justificativas entre as propostas eram apresentadas pelos alunos quando outros alunos necessitavam. Problemas combinatórios compostos e condicionais estavam presentes na ficha.

Para sistematizar o que foi observado, para cada aula foram atribuídos objetivos, em seguida, foram divididas em Configurações Didáticas. Algumas dessas características das aulas estão condensadas no Quadro 32.

Quadro 32 – Apresentação dos objetivos sistematizados a partir das aulas observadas

A	Objetivos	Nº AI	Nº CD	Dia	Tempo
1	Introduzir intuitivamente a noção do Princípio Fundamental da Contagem por meio do contexto de códigos conhecidos e utilizados pelos alunos.	16	6	Terça	68m
2	Explorar a resolução de diferentes problemas combinatórios com os alunos para posteriormente sistematizar formalmente o Princípio Fundamental da Contagem como ferramenta econômica para resolução de problemas combinatórios.	20	11	Sexta	87 m
3	Explorar a resolução de problemas combinatórios para apresentar as noções de <i>fatorial</i> e <i>permutação</i>	20	6	Terça	70 m
4	Formalizar as noções de <i>fatorial</i> e <i>permutação</i> e Comparar problemas de <i>arranjo</i> e <i>combinação</i>	22	4	Sexta	64m
5	Diferenciar problemas de arranjo e combinação e apresentar a formulação dos conceitos	23	6	Terça	72m
6	Resolver problemas combinatórios em pequenos grupos e discutir as diferentes respostas com todos, iniciando um processo de revisão do que foi apresentado.	19	10	Sexta	58m

Legenda: A - Aula; NºAI- Número de alunos; Nº CD- número de configurações didáticas observadas na aula

Fonte: Acervo da Pesquisa

Apesar dos encontros serem de duas horas aulas, em algumas situações terminavam um pouco mais cedo e em outros momentos tiveram intervalos

durante os mesmos. Alguns alunos faltaram às aulas, como se pode observar na frequência. Observou-se que a média de tempo de transcrição das aulas foi de 70 minutos e a média de alunos presentes na aula foi de 20 alunos.

6.2 CONFIGURAÇÕES DIDÁTICAS OBSERVADAS NAS AULAS DE COMBINATÓRIA

Após a descrição das aulas, as mesmas foram subdivididas em 43 configurações didáticas distribuídas ao longo do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória realizado (Quadro 33). Para essa divisão foi utilizada como referência as situações problemas, tarefas e atividades propostas em cada aula. Portanto, uma CD é iniciada geralmente por um problema combinatório e termina quando ele é respondido, incluindo quando necessário as discussões de sistematização.

De acordo com Godino, Contreras e Font (2006) as configurações didáticas de referência podem ser classificadas em: Magistral (M): baseia-se na exposição do conteúdo pelo professor e depois na exercitação dos problemas pelos alunos; A-didática (A): o aluno assume o processo de resolução de problema autonomamente, sem necessariamente ser orientado pelo professor; Dialógica (D): o professor assume a formulação e validação e alunos da exploração da resolução dos problemas dos mesmos. Nessa configuração a institucionalização ocorre por meio do diálogo entre professor e alunos. (POCHULU; FONT, 2011); Pessoal (P): alunos fazem a resolução de exercícios, predominando o estudo pessoal, mas geralmente ocorre fora da sala de aula.

Com base no exposto foram categorizadas as configurações didáticas das aulas com os códigos M, A, D e P. Algumas CD possuem em sua constituição mais de um tipo dessas classificações. No Quadro 33 estão apresentadas discriminações das ações realizadas em cada configuração didática.

Quadro 33 – Discriminação das Configurações Didáticas (CD) ocorridas nas aulas

A	T	CD	UA	Discriminação das Configurações Didáticas (CD) ocorridas nas aulas
1	D	CD1	44	Atividade de leitura do livro didático e comentários sobre emplacamento
	M	CD2	84	Atividade de exploração de diferentes códigos conhecidos, apresentação de registro intermediário de representação do PFC
	D	CD3	39	Problema de <i>arranjo com repetição</i> no contexto de códigos
	D	CD4	118	Problema de <i>arranjo com repetição</i> com menos possibilidades
	D	CD5	6	Problema de <i>arranjo com repetição</i> com mais de possibilidades
	D	CD6	3	Problema de <i>arranjo com repetição</i> com mais etapas de escolha
2	D	CD7	28	Problema de <i>arranjo com repetição</i> no contexto de códigos
	D	CD8	13	Problema de <i>produto de medidas</i> criado com características dos alunos
	D	CD9	14	Problema de <i>arranjo com repetição</i> sobre códigos
	D	CD10	1	Atividade de discussão sobre possibilidades e relação entre áreas
	D	CD11	12	Problema de <i>arranjo com repetição</i> retirado do livro didático
	D	CD12	52	Problema de <i>arranjo</i> retirado do livro didático
	D	CD13	15	Problema de <i>permutação</i> retirado do livro didático
	D	CD14	8	Problema de <i>produto de medidas</i> retirado do livro didático
	M	CD15	7	Atividade de comparação entre problemas combinatórios para introduzir PFC
	D	CD16	11	Problema de <i>produto de medidas</i> criado com características dos alunos
3	D	CD17	25	Problema de <i>combinação</i> criado a partir do questionamento do aluno A16
	D	CD18	38	Problema de <i>produto de medidas</i> retirados no livro didático
	D	CD19	26	Problema de <i>arranjo</i> retirado no livro didático..
	D	CD20	30	Problema de <i>arranjo com repetição</i> retirado no livro didático..
	D/M	CD21	54	Problema de <i>permutação</i> e apresentação da notação de fatorial
	D	CD22	48	Problema de <i>arranjo condicional</i> retirado do livro didático
4	D	CD23	43	Problema de <i>permutação</i> criado com características dos alunos, comparação entre problemas e apresentação da noção de fatorial
	M	CD24	27	Problema de <i>permutação</i> com característica de alunos para a formalização de fatorial e permutação
	D	CD25	23	Problema de <i>arranjo</i> retirado do livro didático
	D/M	CD26	12	Problema de <i>combinação</i> retirado do livro didático
5	D	CD27	29	Atividade de comparação entre os problemas de <i>arranjo</i> e <i>combinação</i>
	D	CD28	14	Problema de <i>arranjo</i> retirado do livro didático
	D	CD29	6	Atividade de discussão de contexto e influencia da ordenação
	D/M	CD30	19	Problema de <i>combinação</i> retirado do livro didático
	D	CD31	27	Problema de <i>combinação</i> retirado do livro didático
	D	CD32	19	Problema de <i>combinação</i> criado com contexto dos alunos
6	D	CD33	8	Problema de <i>combinação</i> retirado do livro didático
	D	CD34	8	Problema de <i>produto de medidas</i> da ficha elaborada pelo professor
	D	CD35	7	Problema de <i>arranjo</i> da ficha elaborada pelo professor
	D	CD36	8	Problema integrado de <i>combinação</i> da ficha elaborada pelo professor
	A	CD37	3	Problema de <i>produto de medidas</i> da ficha elaborada pelo professor
	A	CD38	7	Problema de <i>arranjo</i> da ficha elaborada pelo professor
	A	CD39	5	Problema de <i>produto de medidas</i> da ficha elaborada pelo professor
	D	CD40	3	Problema de <i>permutação</i> da ficha elaborada pelo professor
	A	CD41	8	Problema de <i>permutação</i> da ficha elaborada pelo professor
	D/M	CD42	11	Problema de <i>combinação</i> da ficha elaborada pelo professor
	M	CD43	14	Problema de combinatório <i>condicional de combinação</i> da ficha elaborada pelo professor

Legenda: A: Número da Aula; T- Tipo de Configuração Didática; CD- Número da Configuração didática; D: Dialógica; M; Matricial; A: Adidática.

Fonte: Acervo de Pesquisa

Constatou-se que nas configurações didáticas foram mais frequentemente utilizadas as *configurações dialógicas*. Grande parte das aulas observadas foi constituída a partir do diálogo entre professor e alunos, com vistas a que esses últimos produzissem procedimentos de resolução de problemas combinatórios. O professor, por sua vez, ficava com a função de propor os problemas e validá-los a partir da discussão apresentada.

Em momentos de dúvidas recorrentes ou na formalização dos conteúdos foram verificadas configurações magistrais. Observa-se no Quadro 35 que as configurações magistrais são geralmente introduzidas no final da aula, apresentando que o professor optou por formalização após diálogos e resoluções de problemas.

Na Aula 6 a atividade de resolução de fichas de problemas em grupo, potencializou o surgimento de algumas *configurações a-didáticas*. A ficha continha problemas combinatórios de diferentes complexidades. O professor possibilitou que cada grupo propusessem formulações para os problemas que tinham que ser resolvidos e discutidos na sala. Nessa hora, o professor assumiu um papel de observador, indo em cada grupo e pedindo para que os alunos socializassem suas respostas. Em algumas configurações, a formulação e argumentação foram realizadas por estudantes do grupo, sem necessidade de intervenção do professor.

As escolhas do professor nesse aspecto priorizam a resolução de problemas combinatórios para os alunos de Ensino Médio possibilitando o diálogo entre alunos e professor, promovendo a interação professor-aluno a fim de acompanhar o processo de resolução dos alunos, dificuldades encontradas por eles, tanto com relação ao conteúdo, como em relação às interpretações dos enunciados dos problemas.

Essas configurações didáticas se constituem a partir das interações professor-aluno com a intenção de discutir a Combinatória e foram utilizados alguns recursos comuns para auxiliar nessa discussão. O livro didático foi utilizado para retirada de problemas, que muitas vezes eram escritos no quadro. A ficha foi utilizada como uma revisão do que os alunos tinham aprendido até o momento. Alguns problemas foram criados de improviso, como maneira de motivar os alunos, ou mesmo, discutir ou introduzir algum conceito.

A partir das aulas e suas respectivas configurações didáticas foram sistematizadas as configurações epistêmicas, as configurações interacionais e as configurações cognitivo-afetivas com base na ferramenta de análise da Teoria das Funções Semióticas. A análise do traçado teórico-metodológico desse momento está fundamentada em Pochulu e Font (2011), Nogueira (2015a; 2015b), Aroza, Godino e Beltrán-Pellicer (2016), entre outros. Com essa intenção, as quatro próximas seções explicitam configurações epistêmicas, trajetórias epistêmicas, configurações instrucionais e configurações cognitivo-emocionais fundamentadas na identificação das diferentes trajetórias didáticas.

6.3 CONFIGURAÇÕES EPISTÊMICAS OBSERVADAS NAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

A configuração epistêmica é constituída por situações-problemas, conceitos, procedimentos, elementos linguísticos, proposições e argumentos relacionados (GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006). A estruturação da configuração epistêmica permite descrever os objetos matemáticos presentes na prática, ressaltando aspectos desenvolvidos nas aulas. (POCHULU; FONT, 2011).

As configurações epistêmicas da Combinatória observadas na prática foram baseadas na discussão trazida pelos capítulos didáticos analisados. Para tanto, foram observados os indicadores para situações problema (tipos de situação apresentados), conceitos (tipos de problemas combinatórios), linguagens (conversões entre registro realizadas), procedimentos (complexidade dos problemas combinatórios propostos, procedimentos, técnicas de resolução) e argumentos (tipos de argumentação).

Nessa perspectiva, foram classificadas as unidades de análise que apresentavam essas características dentre esses indicadores para verificar quais dessas eram escolhidas e apresentadas pelo professor, discutidas pelos alunos ao longo das aulas. Portanto, foram confeccionadas tabelas com a frequência desses indicadores comparando o que foi realizado em aula. Para sistematizar essas discussões foi organizados resumos das configurações

epistêmicas ocorridas em aulas e transcritos trechos do diálogo produzido em aula.

Os *tipos de situações de Combinatória* apresentados ao longo das aulas foram classificados em dez categorias, algumas das quais foram observadas também no livro didático (S1, S2, S3, S4, S5), outras compreendidas apenas a partir das análises das aulas (S10, S11, S12, S13, S14).

Os *tipos de situações* que foram apresentadas na aula tratam da discussão e alteração dos problemas para possibilitar que o aluno compreenda ou diminua sua dificuldade, como por exemplo, as situações S10 e S11 que visam *Alterar (ampliar ou diminuir) a quantidade total de elementos do conjunto*(S10) e *Alterar (ampliar ou diminuir) a quantidade de elementos a serem escolhidos (subgrupos)*(S11), respectivamente.

Situações que permitissem a discussão e análise da presença de invariantes e/ou propriedades (S12) nos problemas combinatórios também foram constatadas. Mesmo após a solução do problema, em algumas situações, o professor promovia discussões sobre as possibilidades que podem ou não fazer parte do conjunto solução do problema combinatório (S13). Situações que promovam a comparação entre definições de problemas combinatórios também foram requisitadas pelo professor na quinta aula para comparar problemas de *arranjo e combinação* (S14).

As variações de tipos de situação podem potencializar a construção do raciocínio combinatório, pois ampliam as relações entre diferentes elementos epistêmicos, incentivando diferentes procedimentos, a elaboração de argumentos que justifiquem os percursos escolhidos, como também na diferenciação de problemas combinatórios.

Tais tipos de situações podem ser ampliados se forem acrescentados os tipos de situação S6 (Explorar a operação Combinatória a partir do número total de possibilidades), S7 (Identificar o tipo de problemas combinatórios a partir de suas propriedades ou invariantes), S8 (discussão de enunciado de problemas combinatórios) e S9 (Promover raciocínio recursivo) presentes no livro didático.

Na Tabela 11 foi apresentada a sistematização das unidades de análise por aula que abordaram tipos de situações.

Tabela 11 — Distribuição dos tipos de situações apresentadas durante as aulas de Combinatória

Tipos de situação encontradas	Aulas						T
	1	2	3	4	5	6	
S1: Interpretar e empregar adequadamente notações científicas	0	0	2	0	1	1	4
%	-	-	1,6	-	0,8	1,6	3,2
S2: Enumerar o parcialmente ou totalmente o número de possibilidades	6	1	6	3	1	0	17
%	4,8	0,8	4,8	2,4	0,8	-	13,6
S3: Identificar os tipos de problemas combinatórios a partir do enunciado do problema e resolvê-los	2	17	9	3	7	9	47
%	1,6	13,6	7,2	2,4	5,6	7,2	37,6
S4: Explorar contextos de problemas combinatórios.	0	0	1	2	2	0	5
%	-	-	0,8	1,6	1,6	-	4,0
S5: Explorar o tipo de procedimento de resolução	7	4	3	2	1	5	22
%	5,6	3,2	2,4	1,6	0,8	4,0	18,4
S10. Alterar (ampliar ou diminuir) a quantidade total de elementos do conjunto	2	0	0	0	0	0	2
%	1,6	-	-	-	-	-	1,6
S11. Alterar (ampliar ou diminuir) a quantidade de elementos a serem escolhidos (subgrupos)	3	0	0	0	0	0	3
%	2,4	-	-	-	-	-	2,4
S12. Apresentar, Analisar e Discutir invariantes/propriedades nos problemas combinatórios.	1	3	3	9	3	1	20
%	0,8	2,4	2,4	7,2	2,4	0,8	16
S13: Verificar se a possibilidade pertence ou não a condição dada pelos problemas combinatório.	0	0	0	2	0	0	2
%	-	-	-	1,6	-	-	1,6
S14: Comparar definições de problemas combinatórios	0	0	0	0	3	0	3
%	-	-	-	-	2,4	-	2,4
Total	21	25	26	19	18	16	125
%	17,6	20	20,8	15,2	14,6	12,8	

Fonte: Acervo da Pesquisa

Constatou-se que as situações nas aulas mais frequentes tratam da identificação do tipo de problema combinatório e sua resolução (S3), seguidas pela exploração de procedimentos de resolução (S5), situações de discussão de propriedades/invariantes (S12) e as situações de enumeração (S2). As demais situações, apesar de interessantes foram observadas em frequência menor do que aquelas encontradas no livro didático. Acredita-se que a variação dessas

situações em aulas pode auxiliar na construção do raciocínio combinatório, auxiliando os alunos principalmente no desenvolvimento de diferentes procedimentos de resolução e em suas justificativas.

Apresentam-se trechos retirados das aulas que ilustram essas situações. Tais trechos estão numerados e encontram-se descritos e nomeados no sumário da presente pesquisa. Entre colchetes estão os números das unidades de análise retiradas da transcrição do vídeo das aulas.

A Situação S1 trata de problemas relativos a apresentação da notação de fatorial e da simplificação de fórmulas combinatórias, nas quais o professor solicitava que os alunos representassem a multiplicação obtida em fatorial (Extrato 1), ou simplificassem a fórmula da *combinação* para encontrar o resultado do problema.

Extrato 1 – Exemplo da Aula 3 de Situação S1 Interpretar e empregar adequadamente notações científicas – CD 23

[714] P: Olha se eu quisesse escrever isso aqui, utilizando essa simbologia de fatorial? ((Professor se referia a solução 6.5.4.3.2.1 de um problema resolvido em sala))

[715] A22: Seis fatorial. ((Professor escreve no quadro 6!))

Fonte: Acervo da pesquisa

No caso a nomenclatura de fatorial é um dos aspectos que tinha sido abordado nessa aula e o professor propôs essa atividade de escrever em fatorial.

As *Situações de enumeração* (S2) observadas nas aulas tem funções de inserção de um processo de generalização e de verificação da solução obtida. Apresentam-se os Extratos 2 e 3 para ilustrar essas diferentes naturezas.

Extrato 2 – Exemplo da Aula 1 da Situação S2 – Enumerar o parcialmente ou totalmente o número de possibilidades – CD 4

[262] P: Vamos se a gente utilizar aquelas regras matemáticas... Vamos dá aquele ajuste. A1 sugere que a gente continue a listagem. Vamos complementar a listagem das possibilidades de um código formado por dois números escolhidos entre 0 e 4?

[263] ((Os alunos começam a dizer em voz alta a continuação da listagem)).

Alunos: 00,01,02,03,04 [...] 10,11,12,13,14 [...] 20, 21, 22, 23, 24...

[264] P: A gente precisa fazer mesmo tudo? Não tem um jeito mais rápido? (Incentivo a procedimento econômico)

[265] A11: Aí a gente vai somando é?

P: É vai ser complicado.... ((O professor segue com a listagem))

[266] A3: Dá 25

A1: Dá 25

A12: Dá 25

P: Depois que eu quase termino tudinho vocês dizem que dá 25. ((Alunos conseguem perceber a percepção de regularidade)).

Fonte: Acervo da pesquisa

Extrato 3 – Exemplo da Aula 4 – Situação de enumeração S2 utilizada para verificar e comprovar a solução encontrada – CD26

[795] [...] **A7:** Porque aí só aparece o resultado com só ‘um, dois, três’ ((se referindo ao exposto no quadro)), e as outras escolhas que podem ser feitas?

P: Como assim? Não, não, esse sessenta aqui eu contei ‘um, dois, três’, eu contei ‘um, dois, quatro’... Eu contei todos eles. Quando eu faço aqui o dez, que é minha resposta final. Esse dez a gente pode lista ras escolhas que podem ser feitas? Olha.. ‘um, dois, três’, qual seria o outro? ‘

A6:um, dois, quatro’, ‘um, dois, cinco’...

P: Ok? ((professor sai enumerando oralmente e escrevendo no quadro as possibilidades ditas pelos estudantes)).

Fonte: Acervo da pesquisa

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p.118) afirmam que nas situações de enumeração sistemática “praticam-se as capacidades numéricas básicas, as relações entre os números naturais, assim como as operações [...] habitua-se o aluno na busca de procedimentos sistemáticos e no pensamento indutivo e algorítmico”. Dessa forma, defende-se o uso dessas situações mesmo no Ensino Médio, pois podem promover novos significados para os processos de contagem.

A que teve maior frequência foi à situação S3 que representa a resolução de problemas combinatórios e a identificação a partir do enunciado. As mesmas foram tomadas como referência para as configurações didáticas anteriormente apresentadas. Atenta-se para o fato que as mesmas não ultrapassam os 40% dos tipos de situações problemas apresentadas ao longo das aulas, o que apesar de predominar, não representa a preponderância ocorrida nos capítulos de livro analisados (mais de 80%).

Extrato 4 – Exemplo da Aula 2 de tipos de situação S3 – Identificar os tipos de problemas combinatórios a partir do enunciado do problema e resolvê-los e S12 – Discutir invariantes/propriedades nos problemas combinatórios – CD12

[416] P: Oh agora nós temos a seguinte situação. Seis pessoas para sentar em seis poltronas livres. De quantas maneiras diferentes os amigos podem ocupar essas poltronas? (*Exemplo de situação S3*) [...]

[424] A16: Então o segundo colocado não poderia ter nunca as seis opções?

P: É... ou se fosse alguma coisa que você escolhesse não assim para sentar, mas vamos supor se fosse sabores em uma sorveteria...

- [424] P: Vamos supor: Seis amigos em uma sorveteria com seis sabores de sorvete. Como poderíamos escolher duas bolas? ... aí é diferente não é? (*Exemplo de Situação S12-promovendo a discussão sobre a repetição de sabores*).
- [425] De repente você poderia repetir, porque todo mundo poderia ficar com o mesmo sorvete.

Fonte: Acervo da pesquisa

O professor além de propor a resolução de problemas combinatórios, possibilitava a discussão sobre o invariante da repetição ou não de elementos (conforme exemplo de situação S12). Em outros exemplos da S12 foram discutidos sobre o invariante da *ordenação*, sobre condições do zero como possibilidade de escolha, ou mesmo sobre a regra do quociente presente nos problemas de *combinação*.

A situação S4 de discussão de contexto do problema combinatório surgia em momentos nos quais os alunos sentiam necessidade de entender o problema combinatório, na prática, tentando fazer simulações reais da situação proposta, como se constatou no Extrato 5.

Extrato 5 – Exemplo da Aula 4 de tipos de Situação S4 – Explorar contextos de problemas combinatórios – CD 25

[749] A8: Oh. De quantos modos três pessoas podem sentar em um sofá de cinco lugares? Sofá de dois lugares e um sofá de três lugares?

[750] P: Imaginem um sofá grande mesmo, para não ficar aquela história de sofá de três lugares, ou de dois lugares.

A20: 15.

A8: Um sofá de cinco lugares?

P: É um sofá de cinco lugares

A20: Depende também do tamanho da pessoa que vai sentar não é?

P: Não, cada pessoa só ocupa um lugar. Poderia caber nesse sofá três pessoas gordas, feito eu, ou até mais gordinhos, poderia caber cinco gordos.

[...] A7: Um sofá assim tão grande na minha casa não daria não.

Fonte: Acervo da pesquisa

Pessoa (2009) afirma que as mudanças no contexto do problema combinatório podem desencadear diferenças nas maneiras de pensar a situação. No Extrato 5, observa-se a tentativa dos alunos de simulação de pessoas sentando no sofá tomando como referência aquilo que conhecem.

A situação S5 sobre exploração de procedimentos coloca em ênfase a argumentação dos alunos na justificativa para os procedimentos utilizados, além de permitir em outras situações a apresentação de procedimentos diferentes como a enumeração (buscando estratégias mais sistemáticas) e o Princípio

Fundamental da Contagem (proporcionando por meio de questionamentos a explicitação do número de possibilidades de cada etapa).

Extrato 6 – Exemplo da Aula 2 da Situação S5 – Explorar o tipo de procedimento de resolução – CD12

[372] P: Na questão que vocês comentaram do código, a gente tentou escrever algum código então vamos nos colocar... Nessas questões de Análise Combinatória algumas vezes a gente tem que se colocar na ação da pessoa, no caso aqui em três pessoas para se sentar em um cinema com sete lugares. Então pergunto a vocês... Temos as opções que vocês disseram: ((Escreve no quadro)) – $7 \times 7 \times 7$; outra que era 21; e a última foi 3^7 . [...] Tem mais alguma sugestão? Vocês concordam ou discordam?

Fonte: Acervo da pesquisa

As situações S10 e S11 foram utilizadas alternadamente na primeira aula para possibilitar a utilização da enumeração das possibilidades pelos alunos, e em seguida, para incentivar o uso de “procedimentos mais econômicos”, relacionados ao Princípio Fundamental da Contagem.

Extrato 7 – Exemplo da Aula 1 de Situações S10 – Alterar (ampliar ou diminuir) a quantidade total de elementos do conjunto e S11 – Alterar (ampliar ou diminuir) a quantidade de elementos a serem escolhidos (subgrupos) – CD4

[130] [...] P: E se a gente iniciasse com uma quantidade menor, por exemplo, se o CPF ou se existisse outro documento que ele tivesse apenas três dígitos, todos os dígitos sendo algarismos. Ou seja, eu poderia escolher de 0 a 9. (*Exemplo de Situação S11*) [...]

[167] P: Vamos fazer com pouquinhos para ajudar? Vamos colocar com apenas dois! Será que ajuda? (*Exemplo de situação S11*)

[174] P: Como é que seria com os dígitos? Se eu, por exemplo, diminuir a quantidade? Então eu não quero mais dígitos de zero a nove, agora eu quero escrever só dígitos de zero a quatro. (*Exemplo de situação S10*)

Fonte: Acervo da pesquisa

Alterações como essas em um problema combinatório (S10, S11) pode permitir aos alunos a construção e/ou comparação entre procedimentos de resolução diferentes, e ainda auxiliar no processo de generalização.

A comparação entre elementos das definições dos problemas de *arranjo* e *combinação* (S14) pode servir de estímulo a linguagens e notações adequadas, já que no Ensino Médio essa linguagem é apresentada pelos livros didáticos.

Extrato 8 – Exemplo de Aula 5 da Situação S14 – Comparar definições de problemas combinatórios

[880] ((Representação do registro realizado no quadro))

Combinação Simples

Def. Dado um conjunto de n elementos chama-se combinação simples dos n elementos, tomados p a p , qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos escolhidos entre os n possíveis.

Arranjo Simples

Def. Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples dos n elementos tomados p a p , qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

[881] **P:** Vejam só! Aqui eu tenho uma definição para algo que seja um arranjo simples ((aponta para a definição de arranjo no quadro)) e uma definição para algo que seja uma combinação simples ((aponta para a definição de combinação no quadro))... Parem um pouquinho de copiar e olha para cá... a definição é a mesma? O que é que está diferenciando?

A1: O não!

P: É isso! ((Lê)) 'qualquer agrupamento ordenado'... arranjo ... e 'qualquer agrupamento não ordenado'... combinação.

Fonte: Acervo da pesquisa

No Extrato 8 se nota os conceitos de subconjunto e sequência nas definições, que podem ter sido anteriormente discutidos, o que pode gerar oportunidade para relações intra-matemáticas. Nessa aula o aspecto do invariante de *ordenação* foi destacado.

Outro aspecto evidenciado nas unidades de análise foi relativo aos conceitos trabalhados em sala, especificamente os *tipos de operações/problemas combinatórios* discutidos.

Para isso foi contabilizado e classificado de acordo com a categorização do tipo de problemas combinatórios (*produto de medidas, arranjo, arranjo com repetição, permutação, permutação com elementos repetidos, combinação, fatorial*) apresentadas no livro didático fundamentadas na categoria de Pessoa e Borba (2009).

Na Tabela 12 a seguir apresenta-se o quantitativo das unidades de análise apresentadas por tipo de problemas combinatórios. Nesse caso, foram contabilizadas apenas as configurações didáticas (43), problemas que foram discutidos e não necessariamente resolvidos (+1), problemas que poderiam ser considerado como mais de uma operação combinatória ou problemas integrados (+1), problemas que eram resolvidos de mais de uma maneira sendo a segunda exigida a simplificação de fatoriais (+4). Isso se justifica porque foram esses os

tipos de problemas combinatórios discutidas nos tipos de situação e que sofriam alterações ao longo de seus procedimentos de resolução.

Tabela 12 – Distribuição dos tipos de problemas combinatórios apresentados nas aulas observadas

Tipos de Problemas	Aulas						T
	1	2	3	4	5	6	
Combinatórios							
Produto de Medidas	0	3	1	0	0	3	7
%	-	6,1	2	-	-	6,1	14,3
Arranjo	0	1	2	1	1	2	7
%	-	2	4,1	2	2	4,1	14,3
Arranjo com repetição	5	4	1	0	0	0	10
%	10,2	8,2	2	-	-	-	20,4
Combinação	0	1	0	1	6	4	12
%	-	2	-	2	12,2	8,2	24,5
Permutação	0	1	2	1	0	2	6
%	-	2	4,1	2	-	4,1	12,2
Permutação com elementos idênticos	0	0	1	0	0	0	1
%	-	-	2	-	-	-	2
Fatorial	0	0	2	1	2	1	6
%	-	-	4,1	2	4,1	2	12,2
Total	5	10	9	4	9	12	49
%	10,2	20,4	18,4	8,2	18,4	24,5	

Fonte: Acervo da Pesquisa

Considerações sobre a ordem de grandeza presente nas atividades foram realizadas, porque é defendido “que o tamanho do conjunto dos objetos iniciais [...] é uma variável fundamental para o controle da situação didática” (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.118). Pessoa (2009) confirma essa afirmação quando assegura que o desempenho dos alunos na resolução de problemas combinatórios sofre interferências da ordem de grandeza do problema combinatório.

Os problemas de *combinação* utilizados foram os mais frequentes dentre tipos de problemas trabalhados. Os contextos utilizados versavam sobre a escolha de duplas (Aula 2), escolha de frutas para salada, escolha de questões na prova, escolha de livros, escolha de comissões e aperto de mão. A escolha de elementos promove um contexto para implementação de problemas de *combinação*, Braz (2013) afirma que contextos que envolvam posições não pode ser aplicados a esse tipo de problema.

A ordem de grandeza utilizada nas soluções se mostrou bem variada (10 possibilidades até 3136) o que permitiu que o professor propusesse situações

de enumeração (S2), situações de exploração de procedimentos (S5), situação de exploração de contexto (S4), situação de discussão de propriedades e invariantes (S12), situação de comparação de definições (S14).

Dentre os problemas de combinação a maioria foram problemas simples, apenas dois trabalhados na aula 6, foram classificados como problemas condicionais e problemas compostos ou integrados.

Extrato 9 – Exemplos da Aula 6 de problema combinatório integrado de combinação e problema combinatório condicional de combinação – CD36 e CD43

[920] Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de Matemática, 7 livros diferentes de Física e 10 livros diferentes de Química e pediu-me para escolher 2 livros com condição de que eles fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los? ((Problema combinatório integrado de combinação retirado da ficha aplicada na sexta aula)).

[966] Uma organização dispõe de 10 economistas e 6 administradores. Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas de modo que cada comissão tenha no mínimo 3 administradores? ((Problema combinatório condicional de combinação retirado da ficha aplicada na sexta aula))

Fonte: Acervo da pesquisa

Nos dois casos apresentados o total de possibilidades excede 50 possibilidades, portanto não foram resolvidos por procedimentos de listagem ou enumeração. Braz e Borba (2012), Braz (2013) afirmam que o problema de combinação condicional desse gênero envolve os invariantes de ter no mínimo ou “máximo determinados elementos não explicitados, com determinadas características, fixo” (BRAZ, 2013, p.11). Esse tipo de problema com a condição de no mínimo exige a técnica de classificar em diferentes grupos, aplica a fórmula e depois utilizar o princípio aditivo.

Os problemas de *arranjo* com repetição versaram sobre códigos, placas, números e foram escolhidos para introduzir a discussão de problemas combinatórios. Tiveram os resultados que se encontravam entre 25 e 10^{11} possibilidades. Em alguns casos possibilitaram a enumeração dos elementos o que foi realizado em conjunto com os alunos. Para esse tipo de problema foram utilizados os tipos de situação de enumeração (S2), Situações de resolução de problemas (S3), discussão de contextos (S4), alterações nas quantidades e/ou nas etapas envolvidas (S10 e S11), exploração de procedimentos (S5) e discussão de propriedades (S12).

Na discussão sobre o contexto (S4) relacionadas aos problemas de *arranjo com repetição* verificou-se a relação com a área de geografia na

comparação entre população e números de possibilidades diferentes do código de CPF.

Extrato 10 – Exemplo da Aula 2 de problema de *arranjo com repetição* – CD6

[338] Quantos códigos diferentes de CPF podem ser construídos? (Exemplo de Situação S3)

P: Quantos dígitos tem o CPF? ((Exploração do enunciado, pois são informações que não constam no enunciado, mas são necessárias para resolver esse problema)) [...]

[350]P: Boa. 10 elevado a 11. Isso na forma de potência, se eu escrever eu vou ter que colocar 11 zeros... ((*Registro do quadro da solução comentada pelos estudantes*)) Então eu tenho, mil, milhão, bilhão,... 100 bilhões;

[351] $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ ((*Registro que simula o PFC utilizado pelo professor*))

$$10^{11} = 100.000.000.000$$

[352] [...] P: Vocês sabem quanto é a população do Brasil? ((*Situação de exploração do contexto – S4*))

A1: 200 milhões

P: Esse cara é bom demais... Poxa! ((*Escreve no quadro*)) População brasileira. Dados de A1 (200 milhões). Vai demorar um pouquinho para chegar aos 100 bilhões ou está perto?

A1: Vai demorar [...] A4: Só a população mundial são 7 bilhões.[...]

P: [...] Caramba! É bom vê o pessoal assim informado... Olhem... Se fossemos usar esse tipo de cadastro (CPF) de código daria para fazer para todo mundo da Terra!

A2: Sério? A5: Dava e ainda sobriaria 93 bilhões.

Fonte: Acervo da pesquisa

De acordo com Lockwood (2013) situações que promovem a discussão sobre resultados de problemas combinatórios podem proporcionar novas aprendizagens, inclusive a percepção de padrões recorrentes nos processos de contagem. Para Lockwood, Swinyard e Caughman (2015, p.58, tradução própria) defendem que a busca e a discussão pelos resultados dos problemas combinatórios é “um aspecto fundamental da decisão sobre quais fórmulas podem ser apropriadas, e isso permite que os estudantes evitem respostas não-sensatas e os afasta da tentação de simplesmente aplicar fórmulas cegamente”. No Extrato 10 observam-se a discussão por meio do contexto em conexão com a Geografia, um contexto que se mostrou relevante devido ao conhecimento dos estudantes sobre os números da população no mundo, explorando junto com os mesmos a relação existente entre a quantidade total de possibilidades, trazendo sentido e significado para o resultado encontrado.

Outros problemas de *arranjo* (14,3% do total) utilizaram contextos relativos a competição, a eleição de comissão ordenada, a construção de senhas e números, a sorteio de prêmios e a sentar em determinadas situações. Todos esses contextos envolvem necessariamente a escolha e a ordenação de

elementos. Dentre os problemas desse tipo, observou-se apenas um problema condicional, como se ressalta no Extrato 11.

Extrato 11 – Exemplo da Aula 3 de problema de *arranjo condicional* na situação S3 – CD 11

[629] P: A senha de acesso de um site é composta de 4 letras distintas seguidas de 3 algarismos distintos. A primeira letra não pode ser Z e o primeiro algarismo não pode ser zero. Quantas diferentes senhas de acesso a esse site podem ser criadas? [...]

P: Quantas letras possuem o nosso alfabeto? ((Exemplo de Situação S12 de discussão de propriedades do enunciado)) [...]

[653] $25 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8$ ((Registro da solução realizada pelos estudantes no quadro)) [...]

[660] P: ((Escreve no quadro)) Alex 171... Esse aqui podia ser uma senha? Alex 171 isso poderia ser uma senha? ((Exemplo de situação S13, discussão sobre a palavra que restringe a repetição de elementos “distintas”)).

Fonte: Acervo da pesquisa

No caso, as condições são dadas pela exclusão de elementos nas posições indicadas (a primeira letra não pode ser Z e o primeiro algarismo não pode ser zero). Além do reconhecimento dessas condições, questões como o significado da palavra ‘distinto’ e quantidade de letras no alfabeto são necessárias para a compreensão desse enunciado e foram discutidas ao longo da solução pelos estudantes, a partir dos questionamentos levantados pelo professor. O professor, ainda, promoveu a discussão da solução para que houvesse a compreensão das condições propostas na composição da senha.

A ordem de grandeza dos problemas combinatórios propostos nas aulas variou de 20 possibilidades até mais de milhões, no entanto, apenas uma permitia a enumeração, mas não foi realizada, posto que, era enfatizado pelo professor o uso do PFC, mesmo que intuitivamente. Essa ênfase pode-se justificar por se tratar de Combinatória no Ensino Médio, o que segue a orientação de documentos curriculares (BRASIL, 2002; PERNAMBUCO, 2012;) e de pesquisas (ROCHA, 2011; LIMA, 2015) enfatizarem esse uso. Ressalta-se que a enumeração também é útil em alguns momentos do ensino, segundo Lockwood, Swinyard e Caughman (2015, p.27) que afirmam que esse tipo de solução de problemas combinatórios, permite “[...]um rico contexto para o estudantes desenvolverem justificativas matemáticas e habilidades de resolver problemas”.

Os tipos de situações associadas aos problemas de *arranjo* envolvem Situações de resolução de problemas (S3), de discussão de contextos (S4), de exploração de procedimentos (S5), de discussão de propriedades (S12) e de comparação de definições dos problemas (S14). No Extrato 12 tem-se um exemplo de *arranjo* em uma situação de resolução de problemas (S3).

Extrato 12 – Exemplo da Aula 6 de problema de *arranjo* na Situação S3 – CD35

[912] P: De quantas maneiras podemos dar dois prêmios a uma classe com 10 rapazes, de modos que os prêmios não sejam dados a um rapaz? (Exemplo de Situação S3)

[913] A1: Porque o primeiro tem dez opções e o segundo tem nove (Técnica T1 – Explicita as possibilidades de escolha de cada etapa e aplica o PF)

A2: Eu utilizei a fórmula porque ... a ordem não importa, a ordem não interferiria. ((Apresentação de propriedades/invariantes de *ordenação*, Argumento com base em propriedades Combinatórias))

A1: Então é dez vezes nove, dez vezes nove![...] (procedimento do uso correto do PFC – Técnica T8 – apenas aplicação do PFC)

[917] A20: É sobre a questão três, esses prêmios aqui são iguais ou são diferentes? ((Questionamentos sobre o Contexto da situação S4)).

Fonte: Acervo da pesquisa

Ao longo da situação proposta no Extrato 12 se observaram a explicitação de invariantes do problema de *arranjo* por alunos (indicando que a ordem nesse caso não indica novas possibilidades), a conversão entre Linguagem Natural e Princípio Fundamental da Contagem (10 opções no primeiro prêmio e nove opções no segundo prêmio) e, ainda, houve questionamentos sobre características do contexto, relativos à natureza dos prêmios. Se os prêmios forem considerados diferentes o problema é de *arranjo*, se eles forem considerados iguais o problema se classifica como *combinação*. Essa discussão sobre características do enunciado, sobre o contexto do problema traz relações que podem dificultar a compreensão do tipo de problema combinatório. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p.118) comentam que “A análise do enunciado do problema pode parecer, em uma primeira fase, ao que podemos denominar ‘identificação das configurações combinatórias’”. O professor nessa situação acompanhou a discussão e no fim da mesma limitou-se a instituir que os prêmios são considerados diferentes. Essa decisão direcionou os alunos para a discussão sobre os aspectos procedimentais do problema. Uma possível justificativa para essa decisão, seja a presença desse problema em um livro que considera apenas uma solução do problema que no caso é a de *arranjo*.

Os problemas de *produto de medidas* (14,3%) tiveram a mesma quantidade dos problemas de *arranjo*. Os contextos utilizados versavam sobre composições de roupas, formação de duplas, de grupos de letras, escolha de macarrão e molho e possibilidades de trajetos, entre outros. A ordem de grandeza variou de 6 a 100 possibilidades, o que pode favorecer diferentes processos de enumeração (S2), como, também, a discussão de contextos (S4). Alguns desses problemas, como se pode observar no Extrato 13, foram construídos com a participação dos estudantes.

Extrato 13 – Exemplo de Aula 2 de problema de *produto de medidas* na Situação S3 – CD14

[325] P: A12 comentou na aula passada: há eu lembro de uma combinação de roupas. Lembram-se disso?

A3: Eu lembro.

P: Vamos supor, vocês vem para escola, vem jogar bola. Vocês têm quantos uniformes diferentes do 2º ano? Quantas fardas?.

[326] A10: Tem essa verde.

[327] A6: Tem essa aqui ((aponta para uma camisa cinza))

[328] P: Tem duas então. E quantas calças jeans?

[329] A9: Dez

[330] P: Dez. Pronto A9. ((Escreve no quadro)) A9 tem duas camisas e dez calças [...]. De quantas formas diferentes podemos vestir uma calça e uma blusa a partir da escolha de duas camisas e de dez calças? (Situação S3)

[...] Estão entendendo essa coisa de “a partir da escolha”? Estão entendendo a pergunta? (Situação S5 – propriedade/invariante de escolha)

Fonte: Acervo da pesquisa

Incentivar os alunos na elaboração do problema pode ser compreendido como uma ação que promove o interesse dos estudantes. O professor ainda discute propriedades/invariante de escolha.

A *permutação* foi trabalhada utilizando a *ordenação* de livros, as diferentes posições para sentar em cadeiras e a criação de anagramas. A relação desse problema com o fatorial foi discutida pelo professor. A criação de anagramas foi feita a partir de nomes de alunos da sala visando despertar o interesse dos estudantes. A ordem de grandeza dos problemas de permutação variou de 120 possibilidades até $10!$ o que não permite situações de enumeração com o esgotamento de possibilidades.

A *permutação de elementos repetidos* surgiu a partir da pergunta realizada por um aluno a partir da situação de anagrama, como apresentado no Extrato 14. A característica de ter elementos iguais para ser ordenados faz com

que seja necessário excluir das ordenações realizadas, aquelas que são “reordenações de objetos indistinguíveis” (WILHELM, 2004, p.47, tradução própria).

Extrato 14 – Exemplo da Aula 3 de problemas de *permutação com elementos idênticos* – CD23

[711] A3: Mas e se tivesse a mesma letra? Feito A3 tem dois A's? ((Demonstra interesse))

[712] P: Aí é outra história...é quando eu estou fazendo esses cálculos de permutação mais com repetição, por isso quando falaram Robson.... Eu parei e fiquei assim, porque Robson tem dois O's;

Alunos: Ah tá...

Fonte: Acervo da pesquisa

O caso dos anagramas que possuem letras idênticas diminui o número de possibilidades. Infelizmente não foi notada a resolução desse tipo de problema ao longo das videogravações. Os conceitos trabalhados refletem os principais problemas combinatórios. A partir da discussão foram observados apenas três problemas condicionais/compostos (dois de combinação e um de arranjo) os demais foram simples.

Com relação as propriedades/invariantes do conceito de problemas combinatórios foram observadas, ao longo das aulas, alguns comentários em relação a cada problema combinatório. Nos problemas de produto de medidas discutiu-se invariante do conceito de escolha; nos problemas de arranjo, assim como nos de combinação foi mencionada a necessidade de verificação da *ordenação* no contexto do problema; nos problemas de combinação foram exploradas outras formas de resolução sem ser por uso da fórmula. Por exemplo, a partir da apresentação implícita da propriedade $C=A/P$ (Regra do quociente), aplicação da regra de três (proporção entre o total de possibilidades ordenadas e o número de vezes que são reordenadas); No arranjo com repetição houve necessidade da discussão sobre a condição do zero para iniciar o número ou o código. A repetição foi vinculada a ausência de restrições no enunciado do problema. As propriedades de simplificação de fatorial foram apresentadas, mas só após dos alunos terem trabalhado diferentes problemas combinatórios. Dessa forma, concorda-se com Trevizan (2014, p.63) que “[...] o cálculo fatorial é uma ferramenta que auxilia na resolução de problemas que envolvem Análise Combinatória e, portanto, a sua aprendizagem deve ser motivada pela Análise Combinatória, e não o contrário”.

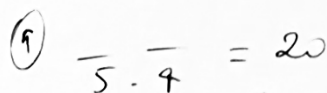
Portanto, foi verificado que a maioria dos invariantes e/ou propriedades foi abordada ao longo das aulas de Combinatória, mesmo que implicitamente. Vale salientar que em alguns casos essas propriedades foram abordadas ao longo da resolução de problemas combinatórios e não desvinculado desse processo. No Extrato 15 está explicitado à discussão sobre a restrição da repetição por causa da palavra distintos, surgido durante a resolução de problema de arranjo.

Extrato 15 – Exemplo da Aula 6 de problemas *de arranjo* – Discussão sobre invariante de repetição – CD38

P: [...] ‘Considerando os dígitos 8,7,6,4,1, quantos números de dois algarismos distintos diferentes podem ser formados?’

[931] A3: Oh professor é cinco vezes quatro que dá 20 ((Procedimento do uso correto do PFC))
A1: é o que eles falaram, professor.

[932] P: Olha A3, o que disseram aqui... É o que eles falaram!!! Estão concordando com o que saiu ali? ((anota o que observou no quadro)) E aí A10, concorda?



$$\textcircled{5} \cdot 4 = 20$$

A10: Concordo.

A2: Por quê? / A1: Porque são distintos, não pode ser o mesmo. / A2: O que menina?

A1: Eu fiz cinco vezes cinco... eu ia fazer cinco vezes cinco, porque tinha cinco e duas opções, sendo que são distintos, então não podem se repetir. Eu pensei que podia, mas não pode ser repetir ((pega a ficha e mostra a A2)) vê aqui, algarismos distintos...((Argumento com base em relação matemática - na definição de distintos presentes no enunciado))

Fonte: Acervo da pesquisa

Com relação às conversões entre registro de representações observadas durante as aulas as mais comuns foi a que relaciona a Linguagem Natural ao Princípio Fundamental da Contagem (53,1%), seguidos pela conversão entre Linguagem Natural e Listagem (12,2%), conversão entre Linguagem Natural e fórmulas (10,2%), conversão entre Linguagem Natural e regra do quociente (8,2%), conversão entre Linguagem natural e fatorial (6,1%) Conversão entre Linguagem Natural e Árvore de possibilidades/diagramas (4,1%), Conversão entre Linguagem natural e Soma de elementos da progressão aritmética (2%) e Conversão entre Linguagem natural e operação de regra de três (2%).

Essa realidade apresenta diferenças entre as conversões encontradas nos livros didáticos do Ensino Médio que enfatizam a conversão entre Linguagem Natural e Fórmulas. A resolução de problemas combinatórios com o uso do PFC é adequada tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino

Médio. Lima (2015) discute a importância dessa estratégia de resolução elucidando aspectos de sua aplicação na resolução de problemas combinatórios

O PFC pode ser aplicado aos diferentes tipos de problemas combinatórios, sejam eles condicionais ou não condicionais, e, também, é base das fórmulas empregadas no ensino da Análise Combinatória para a construção dos diferentes tipos de problemas [...] estudados neste campo da Matemática. (LIMA, 2015, p.17)

O professor, em suas aulas, tenta promover a busca por um procedimento mais econômico, que se configura na utilização do PFC. Ele permite a comparação entre diferentes procedimentos o que a partir da discussão na sala e apresentação de argumentos acaba sendo escolhido o mais adequado. Em alguns momentos na aula caminha entre grupos e expõe os procedimentos que alunos fazem no caderno no quadro para implementar a discussão. Para Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p.118, tradução própria) no ensino de Combinatória deve se promover momentos nos quais “os alunos tenham tempo suficiente para que se investigue as possíveis soluções para aos problemas planejados, e que se estimule a invenção de suas próprias representações”. Nos Extratos 16 e 17 das aulas apresentam-se exemplos de procedimentos próprios dos alunos para representar problemas de *produto de medidas*.

Extrato 16 – Exemplo da Aula 3 de *produto de medidas na situação S3 – Apresentação de procedimentos gráficos* – CD18

((professor chega próximo de outro grupo e observa a discussão verifica os cadernos dos alunos))

[498] A6: De A para B eles tem 3 estradas e de B para C eles tem 4 estradas, e ele quer saber os percursos de A até C

Ex. 2

[499] P: Passando por B.... ((volta para o quadro e escreve um esquema no quadro))

A = B = C

((Registro retirado do caderno das alunas))

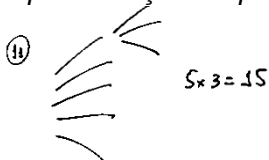
[500] P: Vê só, eu vou falar uma coisa aqui, para poder socializar porque há discussões que as pessoas que estão tendo, eles são bem interessantes....

Fonte: Acervo da pesquisa

No Extrato 16 observa-se a elaboração de um diagrama representando os caminhos que podem ser percorridos entre as cidades A, B e C. Essa representação dos estudantes serviu para discussão com os alunos. Dessa forma, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p.118, tradução própria)

explicam que “a apresentação das soluções encontradas pelos alunos e sua discussão coletiva permitirá criar uma aprendizagem matemática eficaz”. Foi verificada ainda situação semelhante em outra aula como está exposto no Extrato 17.

Extrato 17 – Exemplo da Aula 6 de problema de *produto de medidas na Situação S3 – Apresentação de procedimentos gráficos* – CD39



[941] ((Professor vai ao quadro e escreve um esquema representando o que o aluno escreveu no caderno))

((Registro apresentado por um grupo de estudantes e exposto no quadro))

P: O décimo primeiro o pessoal aqui do grupo de A3 já fez um esquema

aqui[...]

Fonte: Acervo da pesquisa

Dessa forma se apresenta um esquema que representa a ideia de árvore de possibilidades. O procedimento de árvore de possibilidade é destacado por Fischbein (1975), Heitele(1975), e mais recentemente por Azevedo e Borba(2013). Tais autores discutem o caráter fundamental dessa representação em problemas combinatórios com menor número de possibilidades. Não foram sistematizadas discussões que mencionassem essa importância nas aulas observadas, mesmo assim alunos apresentaram essa representação para justificar a multiplicação.

Os problemas de combinação foram os que mais apresentaram conversões diferenciadas na sua resolução. Apresenta-se no Extrato 18 o uso da regra de três como argumento para o procedimento utilizado.

Extrato 18 – Exemplos de Aula 4 de problemas de combinação – Conversão de LN – Regra de três – CD27

[788] P: Olha A7, vê só, eu tenho aqui olha um, dois, três, como eu poderia reorganizar isso?... Eu escrevi aqui um, três, dois; dois, um, três; dois, três, um;

A3: Mas a prova vai continuar tendo um, dois, três, quatro e cinco.

P: Isso. De quantas formas diferentes eu reorganizei isso que na verdade é a mesma coisa? Seis vezes. Então seis que na verdade representa apenas um, então cada objeto que eu contei aqui ((aponta para o sessenta)) eu contei seis vezes a mais ele. Então na verdade não tinha sessenta, se para cada seis era só um...

A3: Tinham menos...

P: Se eu contei sessenta, pensem como uma regra de três, se a cada seis era só um, então em sessenta tinham quantos? ((Argumento com base em relação matemática- regra de três))

[789] A6: dez

A21: Tem dez

[790] P: É isso que estou dizendo A6, tem dez. [...] Para cada seis objetos na verdade só tinha um... Eu fiz um cálculo aqui e ele deu sessenta ((Faz um esquema no quadro)) na verdade eu tenho quantos objetos diferentes? Qual é a operação que eu faço para sair daqui ((aponta para o

sessenta no esquema agora)) e chegar aqui ((aponta para o espaço branco)) pensando em multiplicação ou divisão?

6 → 1

60 → ((Registro de procedimento no quadro))

[791] A3: Sessenta dividido por seis.

[792] P: Esse seis, ele tem a ver com a quantidade de elementos que eu estou escolhendo para meu conjunto.[...]

Fonte: Acervo da pesquisa

O Extrato 18 apresenta a relação entre as conversões realizadas na resolução de um problema de combinação, construindo com base em uma relação matemática conhecida pelos estudantes (regra de três), o argumento necessário para justificativa do processo. Essas maneiras diferenciadas de justificar o procedimento tornam-se interessante, pois pode estabelecer relações entre diferentes conteúdos matemáticos, apresentando novos elementos para a construção de argumentos combinatórios. Roa, Batanero, Godino e Cañizares (1997, p.436, tradução própria) afirmam que a Combinatória pode permitir “o ensino de estratégias gerais para a resolução de problemas matemáticos”. Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010, p.45) indicaram que o trabalho desse conteúdo na resolução de problemas permitindo a discussão e construção de estratégias pode incentivar o “desenvolvimento de raciocínios progressivamente mais complexos”.

A *regra de quociente* foi introduzida a partir de questionamentos dos estudantes na quinta aula, como se observa no Extrato 19.

Extrato 19 – Exemplos de Aula 5 – Explicação sobre a Regra do Quociente – CD30

[846] A7: Professor eu não entendi porque seis?

[847] P: A8, você perguntou agora uma coisa...

A8: Por que a gente tem que dividir por seis?

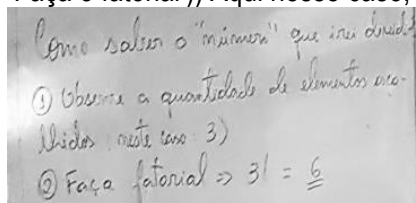
[...] P: Não, é a mesma coisa não. Você perguntou diferente... é a mesma coisa, mas você perguntou diferente...

A8: Como é que eu vou saber o número que eu tenho que dividir?

[848] P: Pronto. Agora chegaremos lá. Como é que a gente vai saber isso? Vê só, olha para cá! ((aponta para o quadro, para a divisão $210/6$)) Como é que eu cheguei a esse seis? Eu peguei essa quantidade ((apontando para os três nomes))... e o que foi que eu fiz aqui? Três elementos e eu fiz o fatorial de três. Então respondendo... ((escreve no quadro)) ‘Como saber o “número” que irei dividir?’ Então...Passo 1: Observe a quantidade de elementos escolhidos. Nesse caso foram quantos? Três. Como assim, Professor? De sete eu escolhi três. Aqui ((apontando para a primeira questão)) também é uma escolha. De dez eu escolhi quantos? Do primeiro quesito?

A21: Dois

P: Dois. Aqui de sete eu estou escolhendo três... Aí você faz o fatorial dele. ((escreve no quadro 'Faça o fatorial')) Aqui nesse caso, três fatorial que é seis. Entenderam?



Como saber o "número" que irei dividir?

1. Observe a quantidade de elementos escolhidos (neste caso 3)
2. Faça o fatorial $\rightarrow 3! = 6$

Fonte: Acervo da pesquisa

A regra do quociente relaciona combinações, arranjos e permutações, mas a apresentada pelo professor não esclarece essa relação. Ele explica essa relação utilizando como justificativa a fórmula de *combinação*. Roa (2000, p.118) afirma que essa regra pode ser também utilizada nas permutações com repetição, estabelecendo, quando utilizada, "uma relação de equivalência dentro do conjunto das configurações combinatórias". Acredita-se que a não explicitação dos tipos de problemas na regra do quociente, foi realizada porque os alunos ainda não sabiam reconhecer os tipos de problemas combinatórios por meio de sua nomenclatura.

As conversões entre registros de representação e procedimentos utilizados pelo professor nas aulas se sobrepõem, pois as conversões realizadas acabam gerando o mesmo procedimento adotado pelos participantes da pesquisa. A busca pelo 'procedimento mais econômico' estava claramente explicitada nas aulas pelo professor, sendo utilizada como incentivo durante as aulas, como se observa no Extrato 20.

Extrato 20 – Exemplo da Aula 5 – Exemplos de problemas de combinação na conversão de LN – Listagem – CD33

[899] A15 levanta vai ao quadro pega o lápis e desenha mais duas diagonais))

[900] P: Rapaz a gente aprendeu tantas técnicas de contagem, vai ficar fazendo assim de um em um é?

A23: Mas eu fiz assim...

P: Não tem uma forma menos econômica ou digo...mais econômica de a gente fazer isso não?

A3: Eita tem mais duas aqui. Assim retas ((faz gesto com duas mãos apontando a direção)) ((A15 vai no quadro e escreve essas duas ditas por A3))

P: Depois vocês vão ter que contar isso tudinho...

Fonte: Acervo da pesquisa

As técnicas mais utilizadas foram à aplicação do PFC correto ou incorreto (T1³⁰ e T8) para resolução dos problemas combinatórios, seguidas da técnica de enumeração (T2) que no caso poderia ser incompleta ou completa, sistemática ou não sistemática, geralmente para que os alunos gerassem novas ideias para exploração do problema. A técnica de aplicação de fórmulas combinatórias (T7) também foi usada, mas dificilmente de modo exclusivo. Outras técnicas como subdividir o problema em seções, aplicar a fórmula e o Princípio aditivo e/ ou multiplicativo entre as seções (T4) foram evidenciadas apenas em dois problemas.

A Técnica T1 que indica a explicitação da quantidade de possibilidades existentes em cada etapa, era geralmente utilizada pelo professor para gerar possíveis argumentos e justificativas para os números adotados pelos alunos. Segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p.86) uma estratégia para resolução de problemas combinatórios é “sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples”. Em um problema combinatório de arranjo, por exemplo, as decisões mais simples a serem tomadas pode ser a quantidade de possibilidades exigidas em cada etapa, como se pode observar no Extrato 21.

Extrato 21 – Exemplo da Aula 3 de problemas de *arranjo* – CD12

[372] P: A primeira pessoa ao sentar ela tem quantas opções de cadeira? ((professor faz questionamentos para que os alunos identifiquem a quantidade de possibilidades para cada decisão))

[373] A1: sete/ Alunos: sete

[374] P: a segunda pessoa?

[375] A1: sete

[376] A8: seis

[377] P: Seis ou sete?

A1: Sete / A8: Acho sete / A2: seis/ P: Vamos lá defendam suas ideias?

Fonte: Acervo da pesquisa

Os argumentos apresentados ao longo da aula diferem dos apresentados no livro didático e na pesquisa de Godino; Batanero; Roa (2005), já que a linguagem oral e não a escrita foi a mais observada na maioria dos argumentos. A maioria dos argumentos foi utilizada para justificar os procedimentos de resolução seja pelos alunos ou pelo professor e geralmente fundamentavam-se em: (a) *argumentos com base estrutura do real* (PERELMAN 1993) que foram

³⁰ Técnica T1 – Explicita as possibilidades de escolha de cada etapa e aplica o PFC

apresentados por meio da discussão do contexto do problema ou de informações presentes no enunciado ou do livro didático; (b) *argumentos que se fundam a estrutura do real* (PERELMAN 1993) observados em uso de analogia, ou com base em modelos/ exemplos, e em informações anteriormente discutidas; (c) argumentos que utilizam relações matemáticas³¹ sejam apresentadas pela fala ou mesmo por gestos;. (d) *argumentos com base em informações combinatórias* apresentados por meio do uso de procedimentos (fórmulas, enumeração, diagramas), ou propriedades/ invariantes (*ordenação, repetição*, regra do quociente) ou definições.

Observa-se na Tabela 13 que os argumentos mais frequentes são aqueles que usam estruturas combinatórias.

Tabela 13 – Tipos de argumentos apresentados durante as aulas

Tipos de Argumentos	1	2	3	4	5	6	T
Argumentos com base na estrutura do real	3,5	13,1	6,5	6,0	2,0	0,5	31,7
Argumentos que se fundam a estrutura do real	0,0	1,0	1,5	1,0	0,0	0,0	3,5
Argumentos que utilizam relações matemáticas	4,5	1,0	0,5	1,0	0,0	0,0	7,0
Argumentos que usam estruturas Combinatórias	5,0	13,6	15,1	5,5	10,6	8,0	57,8

Fonte: Acervo da pesquisa

Vale salientar que foram contabilizados mesmo aqueles que representam ideias equivocadas, mas que fazem parte da justificativa apresentada pelos estudantes e professor no processo de construção de aprendizagem.

Exemplos desse tipo de argumento se encontram na discussão do enunciado quando indicam, por exemplo, a presença ou não de *ordenação* na escolha de possibilidades, ou possibilidade ou não da repetição de elementos na amostra. Verificou-se também nos argumentos a proposta de enumeração, completa ou incompleta, das possibilidades dos problemas combinatórios, ou a interpretação de termos como fatorial, permutação, combinação pelos estudantes. Esse tipo de argumento usado nas primeiras aulas foi constatado

³¹ Nesse caso, diferentemente do que é discutido em Perelman(1993), os argumentos se baseiam em conceitos e conteúdos matemáticos já conhecidos pelos estudantes.

também no momento de exploração de regras como a utilização de zero na frente de número na função de quantidade ou código.

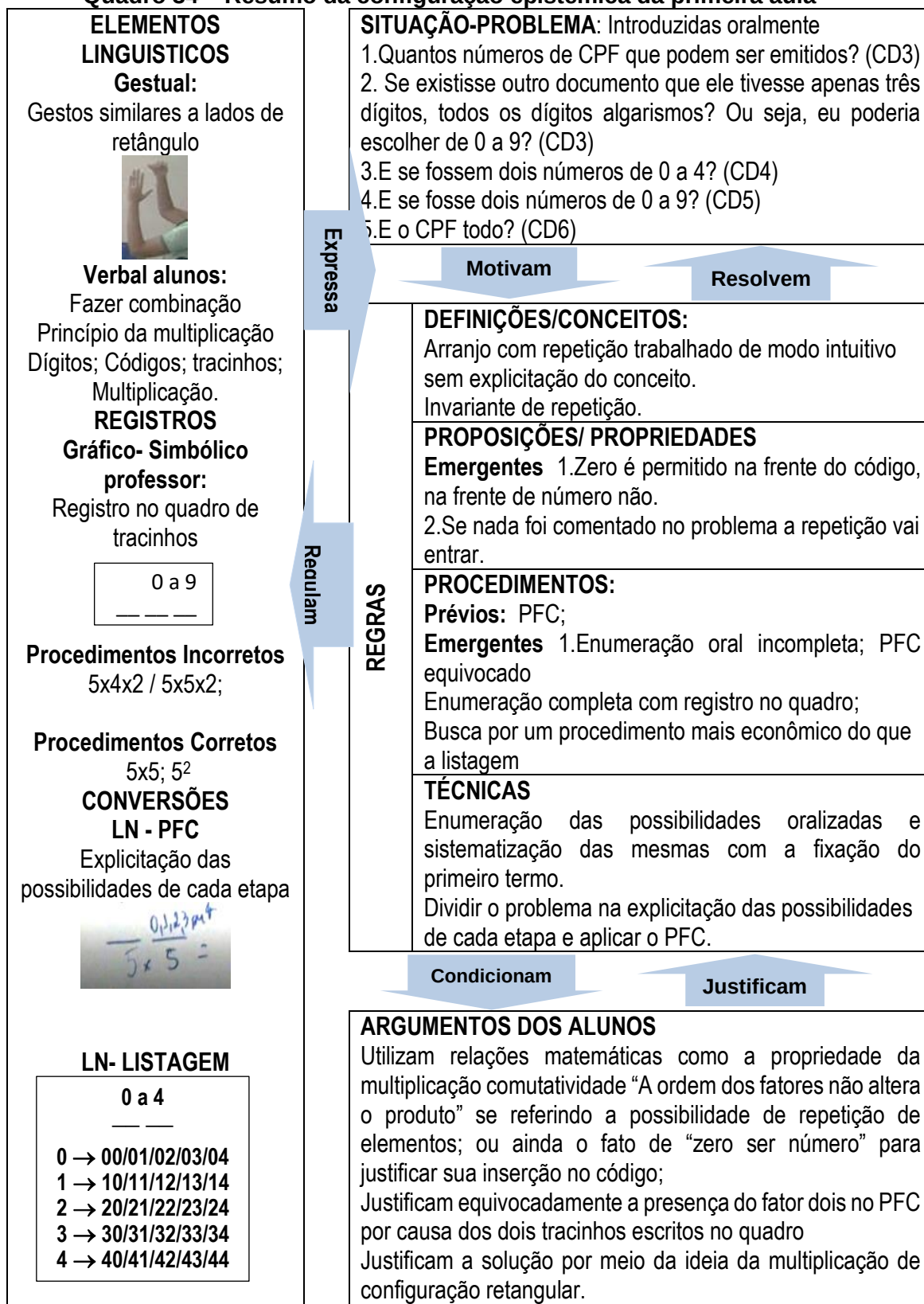
Os argumentos com base na estrutura do real tratavam de questões referentes ao contexto ou ao enunciado dos problemas combinatórios. Neles os alunos apresentavam e discutiam diferentes interpretações do contexto do problema combinatório indicando, por exemplo, características para tipos de molho ou tipos de macarrão, verificavam/imaginavam o tipo de sofá suas dimensões, as características das pessoas que seriam dispostas no sofá o que pode gerar diferentes interpretações dos invariantes do conceito/ propriedades dos problemas combinatórios.

Os argumentos de relações matemáticas utilizados versavam sobre propriedades da multiplicação (comutativa, distributiva). Noções de configuração retangular, noções de proporcionalidade e de sequência foram utilizadas para justificar procedimentos combinatórios utilizados para resolução de problemas.

Os argumentos que se fundam a estrutura do real foram observados de maneira pontual, geralmente utilizados em analogias com a intenção de comparar procedimentos a elementos reais. Como exemplo, observou-se a comparação de um diagrama a uma 'ponte' ou a uma 'ligação direta'. Relações dessa maneira são utilizadas para representar a interpretação dos alunos quanto aos procedimentos resolutivos.

A presença desses argumentos durante as aulas representam as justificativas entre os significados pessoais e institucionais de Combinatória, e ainda as relações que os alunos fazem entre os diferentes elementos da configuração epistêmica.

Com base nas discussões organizou-se um esquema da configuração epistêmica com os elementos presentes ao longo da aula fundamentado na discussão de Pochulu e Font (2011). Para exemplificar, nas duas primeiras aulas foram destacados nos Quadros 34 e 35 elementos de situação problema, elementos linguísticos, definições/conceitos, procedimentos, proposições, técnicas e argumentos utilizados referentes à Combinatória.

Quadro 34 – Resumo da configuração epistêmica da primeira aula³²

Fonte: Acervo da pesquisa

³² Resumos das aulas 3,4,5 e 6 da configuração epistêmica encontram-se no Apêndice B.

Observam-se, no Quadro 34, relações matemáticas que os alunos apresentaram intuitivamente ao longo do processo de ensino e aprendizagem, como também aspectos tais como propriedades que o professor destacou ao longo da realização da aula. Nos elementos linguísticos destacaram-se, além das conversões entre registros alguns gestos, aspectos verbais, simbólicos e gráfico-simbólicos apresentados por professores e alunos. O uso dos termos “fazer combinação” com significado de possibilidades foram observados como se destacam no Extrato 22.

Extrato 22 – Exemplo de Aula 1 – uso dos termo *Fazer combinação* por estudantes – CD1

[22] A8: Na época que Santos Dumont inventou o primeiro carro, aqui no Brasil. A partir disso começou a surgir mais carros em São Paulo e as fiscalizações decidiram emplacar os carros. Surgiram com combinações pequenas e depois foram aumentando as combinações. Assim surgiram com duas letras e três números.... ((Termos utilizados com base na leitura do texto introdutório)) [...] ((*Na justificativa da situação problema desenvolvida durante a aula –CD3/CD4*)) [...]

[164] A12: É combinação não é? Combinação. Eu também estudei isso. Combinação de números. A gente pega um número e combina com três, pega outro número e combina com mais, e assim vai. Pega um número e segue combinando com outros. É como se fosse uma distribuição. ((Uso da linguagem no processo de argumentação)) [...]

[169] A12: Eu fazia isso com desenho, eu tinha uns problemas combinar quantas roupas. Eu fazia assim tinha três camisas, três calças e dois sapatos e qual é probabilidade de eu ir combinar? De fazer combinações.

[170] A1: Aqui no livro tem combinar pão francês e pão integral.

[171].A3: Fica combinação aqui no texto.[...]

[194]. A12: Fazer combinação...

[195]. P: Fazer alguma combinação? A gente depois vai discutir melhor esse vocabulário. ((Apresenta preocupação com a linguagem utilizada))

Fonte: Acervo da Pesquisa

O professor entendeu que o termo empregado pode não ser o mais adequado, mas permitiu a utilização do mesmo ao longo da aula. Há indícios que a utilização desse termo pode ter tido influência do que foi apresentado na introdução do Capítulo A analisado anteriormente. Outro aspecto a ser destacado é a representação de tracinhos apresentada pelo professor como se pode observar no Extrato 23, o qual é utilizado para representar a quantidade de dígitos pertencente ao código.

Extrato 23 – Exemplo de Aula 1 com introdução do *registro de tracinhos* (registro intermediário na conversão LN para PFC) – CD1

[24] P: Alguém tem mais algo a acrescentar? Como são as placas atuais?((Pergunta para introduzir o registro))

[25] A3: Três letras e quatro números

[26] P: São três letras...Eu vou indicar assim, cada linha dessa que eu faço seria um código, letra no caso e aqui números. ((Introdução do registro para representar códigos- *linguístico*))

[27] ((Registra no quadro))

PLACAS ATUAIS: ____ - ____

((Durante a discussão de resolução de problemas combinatórios))

[243] P: Eu também não. Estava perguntando a ela ((se referindo a aluna A4))

A7: Professor diga logo como é? [...]

[244] A1: Seria assim professor. Cinco opções de números para cinco maneiras para dois tracinhos. Cinco opções de números que é de zero a quatro, para cinco maneiras de fazer em cada número para duas opções, que são dois tracinhos.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Tal registro é utilizado ao longo de todas as aulas e pode ser interpretado como o uso intuitivo do Princípio Fundamental da Contagem no qual todos os tracinhos são relativos à quantidade de elementos a serem escolhidos ou ordenados, e cada tracinho individualmente pode representar uma decisão, que no caso, seria o número de possibilidades de cada escolha. O registro de tracinhos pode ser considerado um tipo de registro intermediário utilizado na conversão de LN para PFC. Exemplos de proposições e argumentos podem ser contemplados no Extrato 24.

Extrato 24 – Exemplo da Aula 1 de argumentos quase lógicos (relação matemática) e propriedades sobre se zero faz ou não parte do que pode ser escolhido no contexto de código – CD1

[74] P: Sou mais antigo que vocês e o meu RG também tem sete. E o CPF? Alguém tem? Quantos dígitos?

[75] A1: 11 dígitos [...]

[77] P: [...] Mas tem uma coisa interessante no CPF? Vou tirar uma dúvida com vocês? O meu começa assim [...] ((Escreve no quadro 03064....))

[78] P: Eu devo considerar ou não o zero na frente? ((professor aponta para o zero)) (*Pergunta para iniciar a discussão sobre propriedade, quando o zero entra como alternativa para contagem*).

[79] A4: A o meu é 1. [...]

[82] P: O que vocês acham? Eu devo considerar ou não o zero na frente do CPF? (Pergunta para iniciar a discussão sobre proposição)

[83] A7: Deve porque zero é número. (*Argumento quase lógicos - apresenta relação matemática com justificativa no que conhece sobre números*)

[84] P: Mas, zero na frente do número?

[85] A3: É número.

[86] A7: Se você for ligar para um cartão e não colocar o zero na frente, ele não libera não. (*Argumento com base no real*)

[87] P: Essa pergunta que eu fiz é meio proposital! É porque o seguinte, vocês tem razão de dizer o zero enquanto número. Não vou entrar muito na discussão do número real, mas quando olho isso aqui ((aponta para o CPF)) eu não estou vendo isso como um número real, eu estou vendo como um código. (Proposicional) Então é por isso que eu considero o zero na frente do CPF, porque o CPF é considerado um código.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Na primeira aula as proposições apresentadas versavam sobre aspectos pontuais dos problemas combinatórios, discutindo aspectos relativos a diferenças das funções de número enquanto código e enquanto quantidade (87), número total de elementos do código (71,72), o Zero é considerado ou não na frente do código (78,82), a repetição deve ou não ser considerada no problema.

No Extrato 24 observam-se também alguns argumentos apresentados pelos alunos e professor durante a aula (84, 86 e 87). Os argumentos dos alunos apresentam justificativa com relação ao que conhecem de número, não identificando a diferença entre as funções do número enquanto quantidade e enquanto código. Há também um aluno que justifica o uso que faz do CPF no banco, apresentado argumentos com base no real, em ações ou experiências vivenciadas.

As informações que estão implícitas nos problemas combinatórios exigem dos estudantes um conhecimento sobre a natureza desses problemas, termos específicos, contextos diferenciados, o que pode permitir *a priori* compreensões contraditórias, a depender das experiências vivenciadas. No Extrato 24, observa-se o professor tentando obter indícios dos conhecimentos prévios dos estudantes, sondando o que pensam sobre o problema, e contrapondo essas experiências.

No Quadro 35 apresenta-se o resumo da configuração epistêmica da segunda aula.

Quadro 35 – Resumo da Configuração epistêmica da segunda aula (CD7, CD8, CD9, CD10, CD11, CD12, CD13, CD14, CD15, CD16, CD17)

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS Gestual: Gestos representando linha e coluna Verbal alunos: Algarismos, cinco ao quadrado. 26 a terceira vezes 10 a quarta Dígitos, Códigos. Verbal Professor Opções, combinação com roupas, a partir da escolha, composição. Princípio multiplicativo Simbólico alunos Procedimentos corretos: 5^2; 2×10; $7 \times 6 \times 5$; $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ $\cdot 10 \cdot 10$ $\cdot 10 \cdot 10$ $10^{11} = 100.000.000.000$ 2×3 $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$ $\cdot 10 \cdot 10$ Procedimentos incorretos: $7 \times 7 \times 7$; 37; 3×7; $3 \times 7 \times 3 \times 6 \times 3 \times 5$; $3 \times 7 \times 2 \times 6 \times 1 \times 5$; Gráfico- Simbólico professor: Registro no quadro de tracinhos CONVERSÕES LN-PFC Explicitação das possibilidades de cada etapa $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ LN-LISTAGEM INCOMPLETA 0 a 4 0 → 00/01/02/03/04 1 → 10/11/12/13/14	SITUAÇÃO-PROBLEMA: Introduzidas no quadro, retomados da aula anterior, elaborados com características dos estudantes e selecionados do livro didático. 1.Quantos códigos podemos fazer com dois dígitos, utilizando os algarismos 0,1,2,3 ou 4? 2. De quantas formas diferentes podemos vestir uma calça e uma blusa a partir da escolha de duas camisas e de dez calças? 3. Quantos códigos de CPF podem ser construídos? 4. Quantas placas de automóvel podem ser confeccionadas com três letras e quatro algarismos Quantas placas diferentes eu vou poder fazer? 5. Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório só estão vazias 7 cadeiras. De quantas maneiras eles podem ocupar essas cadeiras? 6. Seis pessoas para sentar em seis poltronas livres. De quantas maneiras diferentes os amigos podem ocupar essas poltronas? 7. Com três tipos de macarrão e dois tipos de molho. Quantas opções de pratos diferentes de macarronada podem ser preparados? 8. Quantas duplas eu posso formar contendo um rapaz e uma moça, sabendo que existem 11 rapazes e 9 moças? 9. Quantas duplas podemos formar em um grupo de 20 pessoas? <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td data-bbox="639 1016 703 1794" style="text-align: center; vertical-align: middle;">REGRAS</td><td data-bbox="703 1016 1398 1794"> DEFINIÇÕES/CONCEITOS: Produto de medidas, permutação, arranjo simples ou com repetição, combinação (todos de maneira implícita); Multiplicação; Princípio multiplicativo. PROPOSIÇÕES/ PROPRIEDADES: Emergentes: 1.Zero é permitido na frente do código e não é permitido na frente do número; 2.Se nada foi comentado no problema a repetição vai entrar; 3. O contexto da situação pode influenciar na resolução do problema combinatório PROCEDIMENTOS: Prévios (Livro): Fórmulas, PFC; árvore; listagem. Emergentes: Enumeração oral incompleta; PFC correto; PFC incorreto; Busca por um procedimento mais econômico do que a listagem; TÉCNICAS: Enumeração incompleta das possibilidades (T2); Subdividir o problema na explicitação das possibilidades de cada etapa e aplicar o PFC (T1); Aplicar PFC de modo intuitivo (T8); Multiplicar $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ do um para o começo para evitar erros.(T14) </td></tr> </table> ARGUMENTOS DOS ALUNOS: Justificam equivocadamente o PFC incorreto a partir dos números presentes no enunciado	REGRAS	DEFINIÇÕES/CONCEITOS: Produto de medidas, permutação, arranjo simples ou com repetição, combinação (todos de maneira implícita); Multiplicação; Princípio multiplicativo. PROPOSIÇÕES/ PROPRIEDADES: Emergentes: 1.Zero é permitido na frente do código e não é permitido na frente do número; 2.Se nada foi comentado no problema a repetição vai entrar; 3. O contexto da situação pode influenciar na resolução do problema combinatório PROCEDIMENTOS: Prévios (Livro): Fórmulas, PFC; árvore; listagem. Emergentes: Enumeração oral incompleta; PFC correto; PFC incorreto; Busca por um procedimento mais econômico do que a listagem; TÉCNICAS: Enumeração incompleta das possibilidades (T2); Subdividir o problema na explicitação das possibilidades de cada etapa e aplicar o PFC (T1); Aplicar PFC de modo intuitivo (T8); Multiplicar $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ do um para o começo para evitar erros.(T14)
REGRAS	DEFINIÇÕES/CONCEITOS: Produto de medidas, permutação, arranjo simples ou com repetição, combinação (todos de maneira implícita); Multiplicação; Princípio multiplicativo. PROPOSIÇÕES/ PROPRIEDADES: Emergentes: 1.Zero é permitido na frente do código e não é permitido na frente do número; 2.Se nada foi comentado no problema a repetição vai entrar; 3. O contexto da situação pode influenciar na resolução do problema combinatório PROCEDIMENTOS: Prévios (Livro): Fórmulas, PFC; árvore; listagem. Emergentes: Enumeração oral incompleta; PFC correto; PFC incorreto; Busca por um procedimento mais econômico do que a listagem; TÉCNICAS: Enumeração incompleta das possibilidades (T2); Subdividir o problema na explicitação das possibilidades de cada etapa e aplicar o PFC (T1); Aplicar PFC de modo intuitivo (T8); Multiplicar $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ do um para o começo para evitar erros.(T14)		

Fonte: Acervo da pesquisa

Em comparação com a primeira aula, observa-se um maior número de tipos de problemas combinatórios, variação de contextos, ampliação de termos da Combinatória. No Extrato 25 pode-se observar a sistematização formal sobre o princípio multiplicativo ou PFC a partir de conversas comparativas entre os tipos de problemas combinatórios apresentados durante as duas aulas primeiras aulas.

Extrato 25 – Exemplo da Aula 2 – Sistematização do PFC – CD15

[438] P: Pergunta: Qual é a operação que eu estou utilizando comum nessas questões?

P: A3, vou fazer uma pergunta para vê se você responde rápido. Qual foi a operação que a gente utilizou comum mais?

[439] A1: Multiplicação

A3: Multiplicação

P: A1 respondeu primeiro... Ela hoje está muito bem! Depois vocês não querem dá credibilidade a habilidade de A1!

A10: Muito bem A1!

[440] P: Olha utilizamos multiplicação, certo!

P: Tem um trecho em destaque no livro que vai justamente comentar sobre essa noção que a gente está utilizando nessas questões. Isso é justamente na página.. ((procura no livro)) o início do capítulo foi na página 246, já na página 249 [...]

P:[...] o nomezinho do item, é justamente “Princípio multiplicativo” ((escreve no quadro)).

Fonte: Acervo da pesquisa

O princípio multiplicativo ou PFC é um procedimento bastante valorizado no ensino de Combinatória desde os anos iniciais até o Ensino Médio (BRASIL, 1997; 1998; 2002). Batanero, Godino e Navarro-Pelayo(1996, p.92, tradução própria) afirmaram que “Apenas se precisa da regra do produto, apesar de ser uma das técnicas fundamentais, junto com a regra da soma, já que delas se derivam praticamente todo o raciocínio combinatório”.

No Brasil, pesquisas como Lima (2015) defendem que essa relação entre o PFC e as fórmulas Combinatórias podem potencializar o ensino e aprendizagem desse conteúdo. Ao introduzir o PFC por meio de consequências da comparação dos procedimentos de resolução de problemas combinatórios o professor pode auxiliar na compreensão dessa estratégia, trazendo significados para o ensino e aprendizagem de Combinatória e proporcionando o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Com base no exposto, as configurações epistêmicas desenvolvidas apresentam variação de situações problemas, discutem

propriedades/invariantes dos diferentes problemas combinatórios, enfatizam procedimentos que valorizam o PFC em relação as fórmulas e as conversões entre linguagem natural e PFC. Aspectos de argumentos aparecem nas justificativas de procedimentos realizados pelos alunos.

6.4 TRAJETÓRIAS EPISTÊMICAS DAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

A Teoria das Funções Semióticas é usada nessa seção, especificamente para abordar as *trajetórias epistêmicas* delineadas pelo professor nas aulas de Combinatória que auxilia na descrição dos componentes do *significado institucional implementado* de Combinatória com base em Godino, Contreras e Font (2006)

Tal tipo de trajetória, nesse trabalho, consiste na distribuição do ensino de Combinatória pelas componentes dos sistemas de práticas operativas e discursivas implementadas. Nesse caso, identificaram-se nas unidades de análise das configurações didáticas observadas, aquelas características da atividade matemática desenvolvida nas aulas de Combinatória do Ensino Médio.

Conforme discutido, as diferentes características referentes a trajetória epistêmica, de acordo com os autores Godino, Contreras e Font (2006), se subdividem em seis, discutidas a seguir.

- (1) *Situacional* (E1) é desenvolvido quando se enuncia tipos de problemas combinatórios, nesse caso, sendo também contabilizada qualquer alteração, mudança ou proposta de problemas combinatórios;
- (2) *Procedimental*³³ (E2) se desenvolve quando há o estudo da maneira de resolver problemas combinatórios, focalizando diferentes procedimentos e técnicas de resolução traçados pelo professor ou alunos;
- (3) *Linguístico* (E3) é aquele no qual se apresentam as notações, representações gráficas, fórmulas, termos entre outras características de linguagem relacionadas à Combinatória;
- (4) *Conceitual* (E4) é direcionado para interpretações de definições dos tipos de problema combinatórios e/ou de objetos combinatórios implementados;

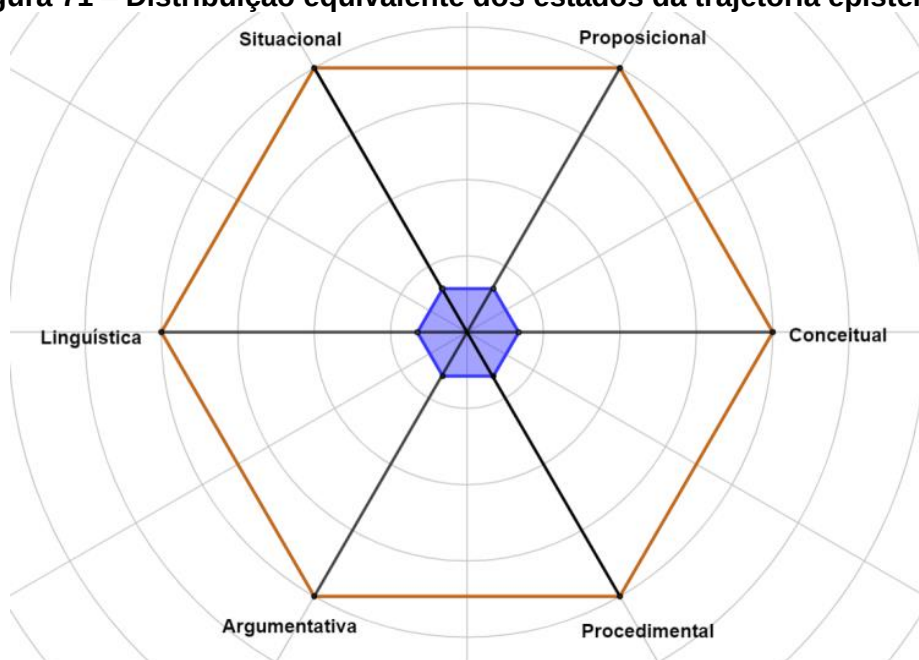
³³ Godino, Contreras e Font(2006) denominaram esses estado de atuante, mas preferiu-se definir aqui para o trabalho de procedimental.

- (5) *Proposicional* (E5) acontece quando se retrata as propriedades/ invariantes relativas à Combinatória, apontando regras relativas as situações problemas;
- (6) *Argumentativo* (E6) é quando se apresentam justificativas das ações adotadas ou das propriedades enunciadas.

Para classificar as trajetórias epistêmicas desenvolvidas nas aulas utilizou-se a frequência de cada característica apresentada nas unidades de análise como referência, e posteriormente foram construídas as representações hexagonais da distribuição epistêmica das atividades matemáticas desenvolvidas (NOGUEIRA, 2015a). De acordo com Nogueira (2015b, p.53) “a análise da trajetória epistêmica de um processo de instrução permitirá caracterizar o significado institucional efetivamente implementado e a sua complexidade ontossemiótica”.

Vale salientar que a representação hexagonal, nesse caso, apresenta a distribuição percentual da trajetória epistêmica entre os diferentes estados encontrados ao longo das aulas. Portanto, se fossem igualmente distribuídos os estados na aula o hexágono seria uma figura regular como se estabelece na Figura 71.

Figura 71 – Distribuição equivalente dos estados da trajetória epistêmica



Fonte: Acervo da pesquisa

No Extrato 26 apresentam-se alguns dos estados da trajetória epistêmica selecionados para exemplificar essa representação.

Extrato 26 – Exemplo da Aula 3 de diferentes estados da trajetória epistêmica – CD20

[546] P: Então vamos prosseguir. A questão 4...((o professor lê)) Quantos são os números de 4 algarismos? (*Estado situacional – E1*) [...]

[551]P: Por exemplo, 359 e é um número de quatro algarismos?... ((Escreve 359 no quadro)) (*Estado conceitual – E4*)

[552]A3: Não aí só tem três!

Alunos: não

[553]P: Não seja por isso, eu posso colocar assim ((escreve zero na frente do número)) 0359. Pode ser? (*Estado Proposicional – E5*)

Alunos: pode! [...]

[554]A1: Vai ficar 10 vezes 10... (*Estado Procedimental – E2*) [...]

A18: 10 elevado a quarta!

A1: É 10 elevado a quarta!

[555]P: 10 elevado a quarta?

[556]A1: É. Seria 10 embaixo de cada tracinho. (*Estado Linguístico – E3*)

$$10^4 =$$

$$\overline{10} \cdot \overline{10} \cdot \overline{10} \cdot \overline{10}$$

((Registro da discussão no quadro feito))

[557]A1: Porque são 10 opções de números de zero a nove. (*Estado Argumentativo – E6*) [...]

[574]P: Porque eu não posso entrar com o zero aqui, então esse nove representa os dígitos 1,2,3,4,5,6,7,8,9. ((Escreve no quadro alterando o 10 por nove)) [...]

[575] Eu não posso entrar com zero de início. Isso aqui não é jogo de número de bicho, não é número de CPF, isso não é um código. Quando é alguma coisa como um código, eu ainda admito iniciar com o zero e considerar como válido, uma senha de alguma coisa... Logo a resposta é 9000. (*Estado Argumentativo – E6*)

Fonte: Acervo da pesquisa

No Extrato 26, verificam-se diferentes estados da trajetória epistêmica, apresentando a atividade matemática desenvolvida nessa aula. Dessa forma, foram contabilizados os estados da trajetória apresentados o que gerou uma distribuição que foi contabilizada conforme o Quadro 36.

Quadro 36 – Distribuição da trajetória epistêmica em uma configuração didática³⁴

Estados da Trajetória Epistêmica Implementado	Distribuição das Unidades de Análise (UA) na Configuração Didática 20 (CD20)																															
	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574		
SITUACIONAL																																
CONCEITUAL																																
LINGUISTICA																																
PROPOSICIONAL																																
PROCEDIMENTAL																																
ARGUMENTATIVO																																

Fonte: Acervo da pesquisa

³⁴ Tal estratégia também foi utilizada para a discussão das trajetórias docentes e discentes.

No Quadro 36, parece haver um padrão proposital, seguido pelo professor, de apresentar as situações, explorar conceitos com seus invariantes/propriedades de Combinatória e proposições (regras ou propriedades), discutir sobre procedimentos, linguagem e, por fim, argumentação.

A partir dessa descrição do Quadro 36 e do Extrato 26 podem ser observados que o estado situacional refere-se a proposta (S3) de um problema do tipo de arranjo com repetição. Tal problema tem complexidade simples, o contexto utilizado foi à formação de números. A discussão conceitual tratou do que se considera um número de quatro algarismos proposta a partir do enunciado.

O estado linguístico foi realizado por meio do “registro de tracinhos” considerado uma maneira implícita de aplicar o PFC. O estado proposicional versou sobre as regras/ condições para o uso do zero. Em outro momento um aluno questionou sobre a quantidade de possibilidades das etapas ultrapassarem a quantidade de algarismos no número. Para dirimir algumas dúvidas dessa natureza, geralmente, o professor sugeria que fossem explicitadas possibilidades de cada etapa.

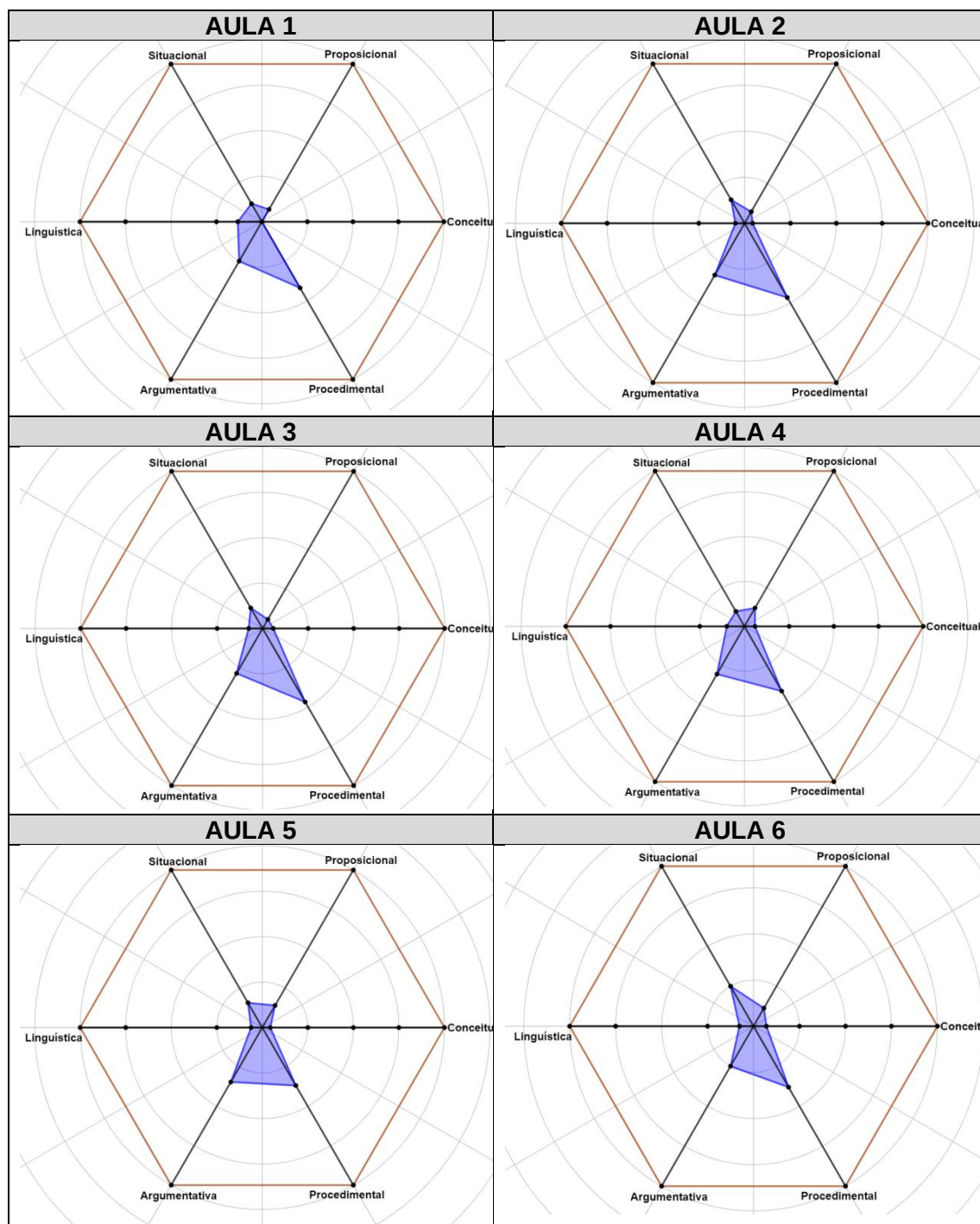
O estado procedimental foi realizado a partir de discussões com os alunos que propuseram uma resolução equivocada, depois corrigida. O uso do PFC foi discutido por meio da explicitação da quantidade de possibilidades de cada etapa. Em um primeiro momento alunos explicitam que todos os algarismos podem compor um número de quatro algarismos,

O estado argumentativo justifica o procedimento dos alunos pela quantidade de possibilidades de etapas e o uso do zero na frente de números e/ou código para confecção do número. Muito do que é discutido nos problemas combinatórios diz respeito a interpretação do contexto do problema, demandando uma série de decisões para os alunos e para os professores. Um enunciado simples como o de formar números pede que alunos decidam qual a forma desse número e que diferenciem funções diferentes do número tal como o código.

A partir da contagem realizada nas unidades de análise (tal como configura o Quadro 36, anteriormente apresentado) foi realizado o percentual da frequência dos estados para vislumbrar aquele mais realizado ao longo das

aulas. Dessa forma, foram sistematizados os hexágonos que apresentam os estados frequentemente utilizados, sendo organizado o Quadro 37, no qual, se apresenta a trajetória epistêmica por estado da atividade matemática encontrada nas aulas de Combinatória observadas.

Quadro 37 – Distribuição da Trajetória Epistêmica por estado da atividade matemática apresentada por aula



Fonte: Acervo da pesquisa

Observa-se que a distribuição entre os estados não é regular, o que representa de certa maneira o que está sendo priorizado nas aulas de Combinatória. De acordo com o Quadro 39, constatou-se pequenas variações entre as aulas relativamente ao estado que foi priorizado e, de fato, implementado ao longo das aulas.

Verifica-se que em todas as aulas o estado mais evidenciado foi o procedimental, o que está relacionado à escolha do professor em discutir o ensino de Combinatória por meio de resolução de problemas. Isso também se deve aos aspectos de que a participação dos alunos no processo de resolução faz com que se gaste mais tempo, determinando que mais unidades de análise sejam observadas nas aulas.

Outro estado frequente foi o argumentativo. O professor ao longo da resolução dos problemas solicitava aos estudantes que justificassem as escolhas ou procedimentos, escolhessem o procedimento correto dentre os que eram respondidos. Essa característica produziu justificativas pontuais do processo de resolução adotado, ora realizado pelos alunos, ora realizado pelo professor.

O estado situacional teve maior presença na sexta aula já que foi resolvido um maior número de problemas combinatórios. Nessa aula, como a atividade planejada sistematizava que os alunos resolvessem os problemas em grupos e depois apresentassem a sala para saber se haveriam dúvidas ou resoluções diferenciadas, os argumentos foram menos apresentados.

Com relação ao estado proposicional obteve variação entre 7,1% a 16,1% de frequência nas aulas. Foi mais utilizado na primeira aula, já que o contexto de código foi utilizado para discutir diferentes propriedades com relação à repetição de elementos, ou condições para o zero nos códigos.

No estado linguístico foi observado variações entre 3,4% e 19,1%, esse último também relativo a primeira aula, na qual foi introduzido o “registro de tracinhos” que representa intuitivamente o PFC pelo professor, e questões de termos de Combinatória a partir da leitura da parte introdutória do capítulo de Combinatória do livro didático.

Em contrapartida, a escolha de fazer com que os alunos construam o conhecimento por meio da resolução de problemas, faz com que alguns estados (por exemplo, o conceitual) fiquem dependentes desse processo, sendo menos

evidenciados. Nesse estado também foi contabilizado apenas quando os conceitos foram definidos, discutidos e introduzidos pelo professor, mas também se considera que noções conceituais podem ser trabalhadas sempre que há discussão sobre a linguagem, o procedimento, o argumento, as propriedades e as situações.

A despeito de o procedimental ser essencial para realização da atividade matemática, em especial para a Combinatória (a natureza relacionada a resolução de problemas), a variação entre os estados epistêmicos pode auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes. Dessa forma, o professor tem que articular a variação dos tipos de situação problema, dos tipos de problemas combinatórios, a promoção de diferentes procedimentos, além de proposta de tarefas que permitam diferentes ações dos discentes (exploração, argumentação, formulação, entre outras).

A presença do estado argumentativo nas aulas de Combinatória pode permitir relações entre o contexto do problema, as diferentes propriedades/invariantes, relações entre diferentes conteúdos matemáticos e outras áreas.

6.5 CONFIGURAÇÕES INTERACIONAIS IMPLEMENTADAS AO LONGO DAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Essa seção apresenta a configuração instrucional com relação à Combinatória no Ensino Médio, que para Godino, Batanero e Font (2008) consiste em uma rede de configurações docentes, discentes e mediacionais realizadas.

Nogueira (2015a, p.209) considera a prática de apresentar e analisar os processos instrucionais de extrema relevância para promover ações de qualidade da Educação, pois permite “distinguir práticas eficazes para aprendizagem de seus alunos”, além de fazer que professores, quando inseridos na reflexão “oportunidades de validar ou reconfigurar as suas práticas, contribuindo dessa forma para seu próprio desempenho profissional”.

Na perspectiva de auxiliar a compreensão de como ocorreu o processo, apresenta-se na primeira subseção a descrição das diferentes trajetórias

(docentes, discentes e mediacionais) observadas nas aulas de Combinatória e na subseção seguinte trata-se dos padrões de interação (ASSIS; FRADE; GODINO, 2013) entre professor e alunos observados.

6.5.1 Trajetórias docentes, discentes e mediacionais observadas ao longo das aulas de Combinatória no Ensino Médio

A relação entre as trajetórias docentes, discentes e mediacionais trazem aspectos de como os participantes da pesquisa interagiram nas aulas de Combinatória no Ensino Médio.

As funções que o professor desempenhou nas aulas e como nessas se intercalaram as funções adotadas pelos estudantes, foram registradas a partir dos diferentes estados assumidos por esses durante as aulas. Nessa direção, Nogueira (2015a, p.212) afirma que “As questões ligadas à aprendizagem dos estudantes estão fortemente relacionadas com a qualidade das experiências formativas que lhes são proporcionadas pelos seus professores”.

Com relação aos recursos adotados pelo professor, esses puderam promover meios para aquisição de aprendizagens, ou promover discussões e justificativas para a compreensão de regras, procedimentos ou ideias que fazem parte da construção do raciocínio combinatório no Ensino Médio.

Para sistematizar o vivenciado em sala, utilizou-se a noção de *trajetórias ou configurações docentes* propostas por Godino, Contreras e Font (2006). A identificação das diferentes trajetórias docentes propõe uma qualificação das ações exercidas pelo professor nas aulas de Combinatória. Dessa forma, foram utilizadas as categorias delineadas por tais autores e classificadas nas unidades de análise aquelas que representam diferentes ações do docente (*planejamento, motivação, atribuição de tarefas, regulação, avaliação, investigação*).

(1) *Planejamento* – DO1: Indica o delineamento, explicitado ou não, das atividades propostas ao longo das aulas. Nesse caso, como as unidades de análise representam falas ou registros observados, essa trajetória docente foi pouco apresentada. No Extrato 27 observa-se um exemplo desse delineamento.

Extrato 27 – Exemplo da Aula 6 – Delineamento da Trajetória Docente de planejamento – CD34

[905] P: Oi já estão divididos ai em grupos? ((alunos sim))

P: Olhe ... por que esses exercícios? Nós já fizemos alguns do livro, então, a gente vai continuar trabalhando o assunto que a gente vinha discutindo[...]

A22: É para entregar alguma coisa?

P: Não... Não é para entregar! / A1: Glória a Deus!

P: Não. Vocês vão fazer nos cadernos e a gente vai discutir alguns aqui e outros vão ficar para casa [...] Com o fechamento da lista a gente pensa em uma atividade de teste mais para frente, ou alguma coisa.

A22: Trabalho, prova não!

P: Olha, presta atenção [...] Hoje nós vamos nos dedicar as ímpares [...] as questões ímpares e para tarefa de casa ficam as pares [...] Ou querem ao contrário?

Fonte: Acervo da pesquisa

(2) *Motivação* – DO2: Nesse estado o professor tenta envolver os alunos no processo, instigando a participação dos alunos, pedindo o envolvimento de algum aluno específico para contribuir sobre a temática desenvolvida, ou sobre o procedimento utilizado, tentando criar um clima propício para a resolução de problemas. No Extrato 28 observa-se um exemplo desse delineamento.

Extrato 28 – Exemplo da Aula 1 – Delineamento da Trajetória Docente de Motivação – CD4

[189] P: Matemática é assim. Como é que vocês aprenderam a somar?

[190] ((Alunos riem)) (DI1- Aceitação do Compromisso)

[191] P: Ninguém nem lembra mais tem tanto tempo. $1+1$ não é. Essa conta que eu vou dizer agora já foi o maior problema na vida de vocês: quanto é $2+1$? Hoje em dia vocês fazem em automático, mas quando eram menores, $2+1$ ((professor mostra contas nos dedos))

Fonte: Acervo da pesquisa

No Extrato 28 foi observado a trajetória docente de motivação que foi utilizada sempre que surgia dificuldades na busca pela solução, ou uma emoção ou atitude negativa por parte dos estudantes, tal como ansiedade, ou inibições para resolver o problema. Como o professor procurava não apresentar resposta dos problemas para os alunos, deixando a cargo dos mesmos a proposta de solução, isso gerava uma ansiedade, por parte de alguns estudantes que tinha que ser gerenciada pelo professor. Nesse tipo de estado também foram contabilizados a valoração feita pelo professor às respostas apresentadas, como também, elogios realizado aos alunos.

No Extrato 28 observa-se uma apologia quanto a superação das dificuldades com relação as operações matemáticas. Essa prática pode promover atitudes positivas. Beltran-Pellicer e Godino (2017, p.95) afirmam que “Quando se propõe situações que devem ser resolvidas pelos alunos, as emoções ajudam a que flua ou se iniba o pensamento de quem resolve, fazendo possível o desejo pela perseverar na tarefa proposta”.

(3) *Atribuição de tarefas – DO3*: Caracterizado pela gestão e controle do processo de ensino e aprendizagem, é o estado no qual se define os tempos para execução das tarefas, orientando sempre que necessário às adaptações das mesmas. No Extrato 29 observa-se um exemplo desse delineamento.

Extrato 29 – Exemplo da Aula 1 – Delineamento da Trajetória Docente de Atribuição de Tarefa – CD4

[385] P: Psiiu! ((Pede silêncio)) [...] Então, vamos continuar com a pergunta: Chegou a primeira pessoa para sentar, ela tem sete opções não é? Isso pelo menos está em consenso aqui, não é? A primeira? ((direcionamento das ações dos alunos))

Fonte: Acervo da pesquisa

Na trajetória docente de Atribuição de Tarefa (DO3) o professor administrava o tempo para que a solução do problema fosse encontrada pelos alunos. Dessa forma, era comum observar ele fazer perguntas que direcionassem a busca pela solução. No Extrato 29 se retrata o corte a uma discussão para que fosse retomado o que era de interesse para a solução do problema.

(4) *Regulação – DO4*: Entendida como as ações realizadas para fixação de regras, definições, enunciados, exemplificações, ou a mobilização de conhecimentos prévios (nesse caso, a exploração do contexto da situação, ou lembranças relativas aos procedimentos), re-significando as ações e ideias apresentadas. No Extrato 30 observa-se um exemplo desse delineamento.

Extrato 30 – Exemplo da Aula 3 – Delineamento da Trajetória Docente de Regulação – CD19

[520] P: Alguém falou 24 aí? ((observação ao que é falado na sala e trazido para o debate))
A5: A1

[521] A1: Porque para cada um teria a opção do primeiro ou do segundo premio. Cavalo a cavalo... (D15- Argumentação com base nos valores do enunciado)

P: Cavalo a Cavalo? / A1: Sim

[522] P: Vamos pensar na ação.... Pensem na ação... Como se fossem corrida não é, e todos os cavalos na corrida. Vamos colocar nomes, números alguma coisa para os doze cavalos para poder identificá-los. ((Sugestão de regras se colocar na ação))

Fonte: Acervo da pesquisa

No Extrato 30 se verificou a atenção do professor para o que acontece na sala, acompanhando as ações dos estudantes, os raciocínios dos estudantes, tentando trazer para a discussão as expressões de ideias que estão sendo explicitadas pelos alunos. Em outro momento o professor sugere a regra de se colocar na ação de quem resolve o problema combinatório. Para Lima et al. (2006) essa regra apresenta uma relação de postura para um bom ‘resolvedor’ de problemas combinatórios, como aquele que se “coloca no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada”.

(5) *Avaliação- D5*: Consiste no acompanhamento do processo de aprendizagem dos alunos a partir de respostas, justificativas apresentadas, corrigindo ou propondo situações para dirimir as dificuldades individuais detectadas, apresentadas em momentos críticos, inicial, final ou durante o processo. No Extrato 31 observa-se um exemplo desse delineamento.

Extrato 31 – Exemplo da Aula 1 – Delineamento da Trajetória Docente de Avaliação – CD22

[674] P: A7 você entendeu o 25 aqui? ((aponta para o primeiro tracinho)). Entendeu esse daqui?((aponta para o segundo)) Entendeu o 24? ((Pede para que aluno diga se entendeu o procedimento realizado))

A7: Vê... esse primeiro 25 daí é porque ele está sem o Z. (I5- Argumentação com base no enunciado)

P: Porque ele não tem o Z?

A4: Não dá para usar...

Fonte: Acervo da pesquisa

Na maioria das configurações didáticas o professor procura perceber o que os alunos compreenderam das ações tomadas por outros alunos, dessa forma incita alguns alunos explicarem o que pensou e porque escolheu determinada solução. No Extrato 31 observa-se a explicação dada por um aluno

(A7) e complementada por (A4) para apresentar a compreensão do passo tomado na solução do problema.

(6) *Investigação- D6*: Quando acontece a reflexão ou análise do processo de ensino e aprendizagem e possíveis modificações ou justificativas das ações tomadas ao longo das aulas. Nesse caso, pouco foi observado desse estado, já que o professor teria que apresentar as justificativas de suas ações de ensino para a sala. No Extrato 32 observa-se um exemplo desse delineamento.

Extrato 32 – Exemplo da Aula 2 – Delineamento da Trajetória Docente de investigação – CD15

P: Antigamente no cinema a gente entrava no meio do filme. Pegava o filme pela metade. Algumas vezes a gente não entendia nada... a gente assistia, o filme terminava... aquele pessoal que chegou as duas horas se levantavam...e aí, a gente procurava uma cadeira porque geralmente estava muito escuro... e a gente então assistia o filme.. E a gente achava tudo muito legal naquele tempo... Só que... Imagina se eu chegasse na aula e dissesse Tema da Aula: Princípio Multiplicativo. E começasse a passar os exercícios... Aí vocês iam olhar “Princípio multiplicativo” e se eu perguntasse depois... Será que teria alguma operação que poderia fazer?

[423] A8: Lógico que multiplicação! (D11- Aceitação do Compromisso)

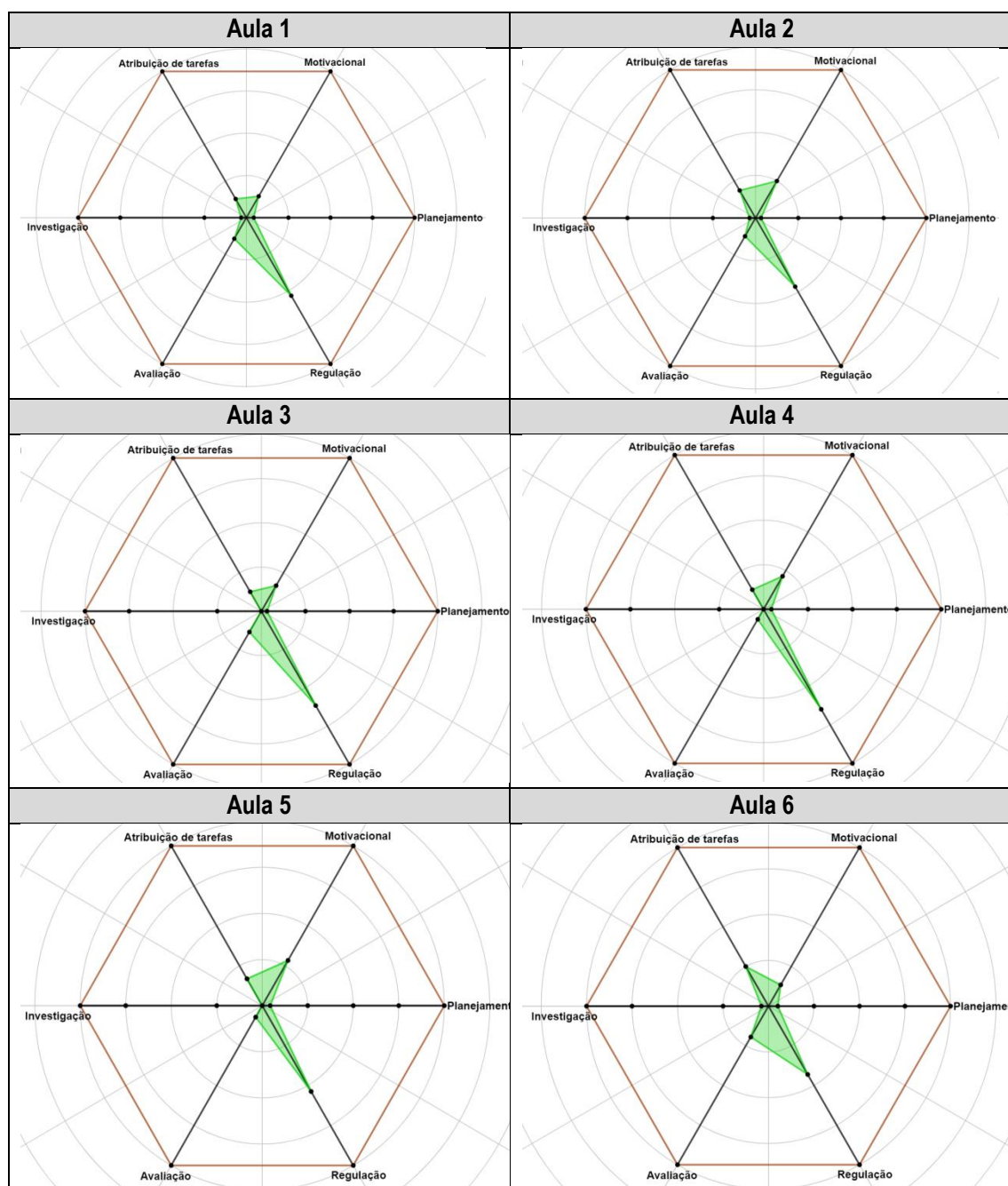
[424] P: Isso. Vocês só iriam tentar multiplicar acertando ou não o número, com a multiplicação. E veja que a gente comentou aqui essas aulas e veio espontaneamente essa questão da multiplicação. Uma vez ou outra, não é, eu chamei a atenção, quando aparece esse conectivo o ‘e-zinho’ aí ((aponta para o e da terceira questão)) na escolha, na ação... Alguns de vocês já estudaram isso no ensino fundamental... Lembro que na aula anterior vocês lembraram...

Fonte: Acervo da pesquisa

O professor nesse extrato justifica sua motivação de não iniciar a aula apresentando o princípio multiplicativo, o cuidado para que os alunos não generalizem suas ações por causa da nomenclatura apresentada no livro didático.

A partir dessas considerações a respeito dos estados da trajetória docente, foi utilizada a mesma estratégia para contabilizar a trajetória epistêmica, posteriormente organizada em diagramas hexagonais para indicar os estados mais utilizados pelo professor durante as aulas de Combinatória do Ensino Médio. No Quadro 38 apresenta-se a variação desses estados por aula.

Quadro 38 – Resumo da distribuição dos delineamentos da trajetória docente apresentada por aula



Fonte: Acervo da pesquisa

Observa-se que o estado mais valorizado é a *regulação* (DO4) em todas as aulas ficando em torno de 40% a 60%. Nesse estado, consegue-se verificar algumas atitudes do professor, como por exemplo, estar bem atento ao que acontece em sala, acompanhando todo o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, percebendo pequenas alterações em expressões faciais,

atentando a comentários entre alunos, trazendo, sempre que possível, essas conversas para serem discutidas com toda a sala, focalizando nas diferentes percepções dos alunos sobre a resolução de problemas combinatórios. Apesar da importância do domínio conceitual (epistêmico), esse professor também valoriza o aspecto interacional considerando de extrema relevância a participação dos alunos na aula. O professor geralmente não respondia aos problemas, deixando para os alunos a responsabilidade por sua resolução. Essa atitude permitiu que os alunos fizessem conjecturas sobre as respostas, buscando diferentes maneiras de achar a solução do problema.

Quanto ao delineamento de *motivação* (DO2), foram observados picos na segunda (24,7%) e quinta aula (26,6%). Uma justificativa para o fato diz respeito ao número de problemas combinatórios resolvidos na segunda aula, principalmente pela variação das operações combinatórias vivenciadas nessa aula e por ser a primeira vez que o professor apresentava problemas de diferentes naturezas para os alunos. A quinta aula, versava sobre a diferença entre problemas de *arranjo* e *combinação*, e nessa aula, foram apresentadas diferentes técnicas e procedimentos para resolução de problemas de *combinação*. Houve duas tentativas para a enumeração total das possibilidades que não tiveram êxito, o que fez com que alunos necessitassem de apoio para não haver desistência. Nesse sentido, o professor buscava sempre que necessário motivar os alunos para que os mesmos continuassem a realização das tarefas.

O delineamento de *atribuição de tarefas* (DO3) teve um aumento na sexta aula (25,4%) já que nessa aula foi produzida uma ficha de problemas combinatórios para serem respondidos em grupos (conforme apresentado no Extrato 28). A tarefa proposta teve que ser acompanhada pelo professor para que houvesse a discussão das diferentes propostas de resolução de problemas combinatórios na turma. Nessa aula, os alunos estavam bastante motivados em sua realização, o que gerou um aumento apenas na gestão dos momentos de socialização de respostas e no gerenciamento do tempo, assim como, permitiu um acompanhamento mais próximo para que o professor pudesse perceber procedimentos de cada grupo de alunos.

A *avaliação* (DO5) tornou-se um pouco mais frequente na sexta aula (17%), devido ao acompanhamento e observação do professor em cada grupo.

Uma ação o que fez com que o professor apresentasse para o grupo os procedimentos observados e discutisse a adequação do mesmo para o problema proposto.

Quanto aos delineamentos de *planejamento* (DO1) e *investigação* (DO6) foram realizados de maneira pontual, dada a natureza desses delineamentos que aparecem geralmente no início e no final do processo de ensino e aprendizagem (NOGUEIRA, 2015a). Ressalta-se que o planejamento pode ser observado, mas nem sempre é mencionado pelo professor.

Considera-se que as decisões do professor e os delineamentos por ele realizados conseguiram fazer com que os alunos participassem da aula. Quando foram quantificadas as falas dos envolvidos durante as aulas, foram contabilizadas 44,2% do professor contra 55,8% de falas dos alunos. Para justificar a informação, apresentam-se os comportamentos da *trajetória discente* que identificam as ações realizadas pelos alunos nas aulas de Combinatória.

Foi verificado o índice de falas de estudantes em cada aula entre 50% a 70%, ratificando o bom nível de participação dos estudantes em aula. Para descrever os tipos de comportamentos explicitados pelos alunos, foram utilizadas as características da trajetória discente definidas por Godino, Contreras e Font (2006). Tais autores subdividem as participações discentes entre nove comportamentos (aceitação do compromisso, exploração, memorização, formulação, argumentação, procura ou busca pela informação, exercitação, recepção de informação, avaliação).

Na presente pesquisa esses comportamentos são compreendidos e classificados como: *DI1: Aceitação do compromisso* — o aluno apresenta uma atitude positiva com relação às tarefas propostas e boa relação com os colegas. *DI2: Exploração* — o aluno apresenta sugestões para explorar o problema, ou discute conjecturas apresentadas e exhibe diferentes procedimentos de resolução de problemas. *DI3: Memorização* — esse comportamento é computado quando os alunos fazem uso da interpretação das regras, das propriedades, das definições e das linguagens em cada situação, principalmente como resposta a uma pergunta do professor. *DI4: Formulação* — representa a apresentação de soluções dos problemas propostos, para o professor, toda sala ou para um grupo. *DI5: Argumentação* — os alunos apresentam justificativas para as conjecturas propostas na resolução; *DI6: Procura por informação* — Nesse

comportamento, os alunos solicitam informações ao professor ou aos colegas para dirimir as dúvidas durante a resolução. *DI7: Exercitação* — Realização de tarefas de rotina para dominar técnicas específicas. *DI8: Recepção de informação* — nas quais os alunos apenas recebem informações; *DI9: Avaliação* — compreendida como a autoavaliação feita pelos alunos durante a resolução de problemas.

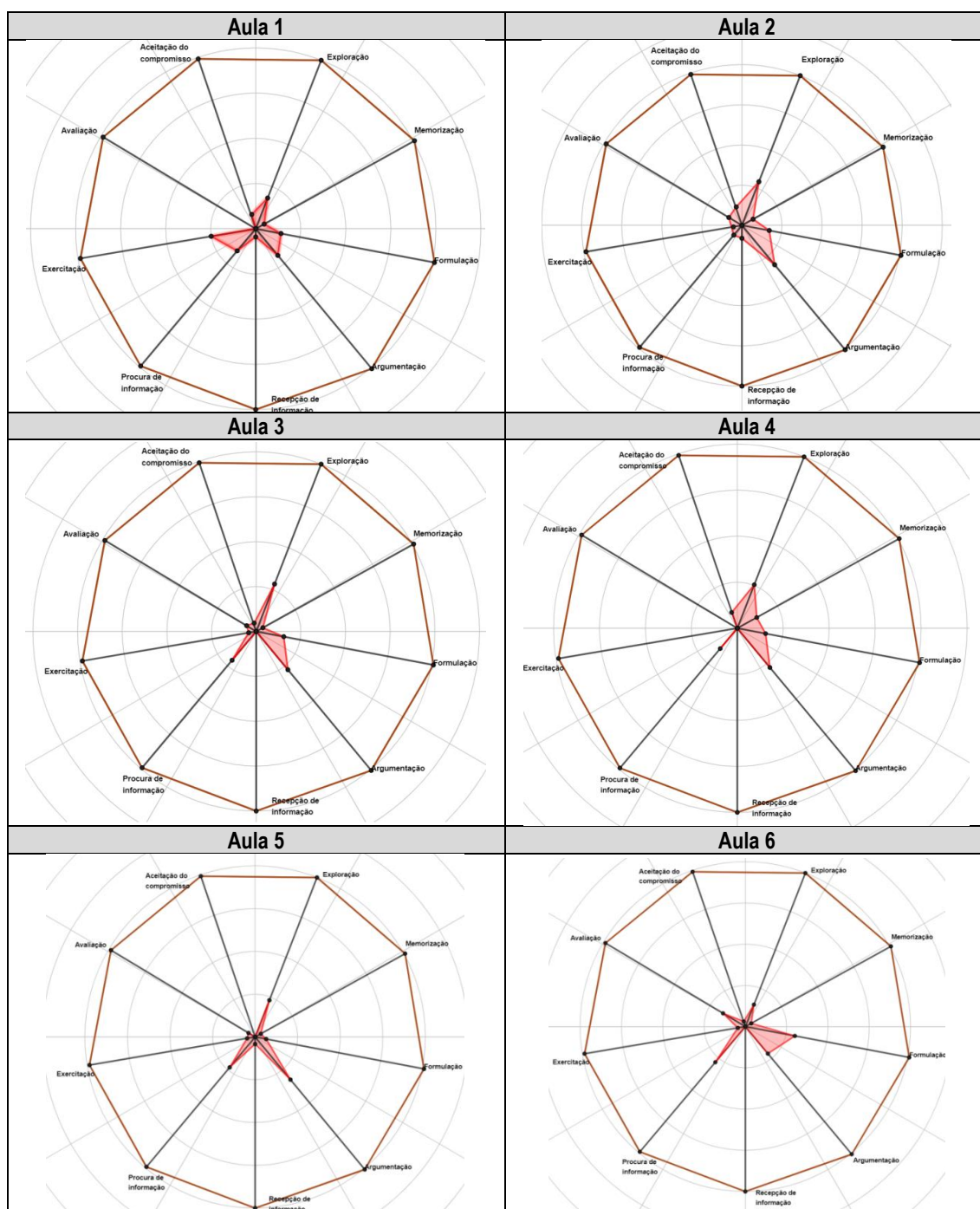
Para apresentar a frequência dos comportamentos apresentados na trajetória discente, indicando os que foram mais utilizados pelos alunos, foram construídos diagramas em forma de eneágono, com base na discussão de Nogueira (2015a). Em seu estudo, Nogueira(2015a) observou apenas os estados de recepção da informação, exercitação e memorização, o que indica a necessidade do professor “fornecer indicações que permitissem aos alunos realizarem o trabalho definido para este processo de estudo” (NOGUEIRA, 2015a, p.212).

Após a identificação dos diferentes comportamentos dos discentes e suas atitudes nas aulas, foi organizado o Quadro 39 com as trajetórias discentes traçadas nas aulas.

No Quadro 39, ao contrário do apontado por Nogueira(2015a), foram observados que os comportamentos mais frequentes nas aulas são os de Exploração(*DI2* $\approx 23\%$), Argumentação(*DI5* $\approx 25\%$) e Procura de Informação(*DI6* $\approx 16\%$).

De acordo com Nogueira (2015a, p.212) esses comportamentos da trajetória discente indicam “à mobilização de competências cognitivas mais complexas”, posto que, neles os alunos conseguem explicitar as ideias que direcionam suas atitudes, além de auxiliar na apresentação de fatores como autonomia e responsabilidade pela resolução de problemas e a própria aprendizagem.

Quadro 39 – Resumo da distribuição dos comportamentos da trajetória discente por aula



Fonte: Acervo da pesquisa

No Extrato 33 observa-se um exemplo do comportamento dos estudantes.

Extrato 33 – Exemplo da Aula 2 – Trajetória Discentes observadas na resolução de um problema de arranjo – CD14

Problema 1: Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório só estão vazias 7 cadeiras. De quantas maneiras eles podem ocupar essas cadeiras? ((Professor copia

- no quadro o exercício do livro lê em voz alta os alunos tentam responder)) ((E1- Situacional))
- [335] A16: 21 Dá $7 \times 7 \times 7$ ((Discente DI4- Formulação)) ((E2- Procedimental))
- [336] A1: Dá isso não!
- [337] P: Eu concordo com A1 que $7 \times 7 \times 7$ não dá 21. O que vocês acham da ideia dela? ((Docente – DO4 Regulação))
((Alunos conversam entre si)).
- [338] P: A16 você disse 21 e $7 \times 7 \times 7$ e um é diferente do outro... Qual você escolhe? ((Docente – DO4 Regulação))
- [339] A16: Eu escolho $7 \times 7 \times 7$ ((Discente DI4- Formulação))
- [340] P: Por quê? ((Docente – DO4 Regulação)) ((E6- Argumentação))
- [341] A16: Porque são três cadeiras! ((Discente DI5- Argumentação – com base no enunciado))
- [342] P: Por que são três cadeiras? ((Docente – DO4 Regulação))
- [343] A16: Mas eu acho que vai ser 21 ((Discente DI4- Formulação))
- [344] P: Então eu tiro $7 \times 7 \times 7$ e fico com 21?
- [345] A9: Porque são três pessoas professor! ((Discente DI5- Argumentação))
- [346] P: Três pessoas?
- [347] A2: É três! Três vezes sete é vinte e um. ((Discente DI2- Exploração))
- [348] A16: Porque professor, na outra aula você fez aquela conta, que dava cinco vezes cinco, vinte e cinco! Assim aqui seria três vezes sete. ((Discente DI6- Argumentação))
- [349] A10: Eu acho que seria três a sétima. ((Discente DI2- Exploração)) Porque eu tenho sete cadeiras e cada cadeira eu tenho três pessoas que pode sentar. ((Discente DI6- Argumentação – com base no enunciado))

Fonte: Acervo da pesquisa

Como pode-se observar no Extrato 33, o clima de resolução de problemas combinatórios foi aceito por grande parte dos estudantes que durante as aulas apresentam a vontade de resolver os problemas apresentados pelo professor. Observa-se a presença da trajetória docente de regulação, acompanhando o processo, realizando perguntas para que os alunos respondam e apresentem o que estão pensando, alterando o comportamento, e ampliando a participação dos alunos.

Foi averiguado que o comportamento de *aceitação de compromisso* (DI1) ocorreu com pouca frequência entre os estudantes, variando entre 2% a 8% das unidades de análise, pois eles fizeram mais que apenas apresentar disposição para resolver as atividades propostas. Eles arriscaram respostas e construíram argumentos com base em diferentes experiências. Desse modo, não se trata também de apenas de *exercitação* (DI7), afinal a situação ainda não tinha sido discutida no grupo, por isso, classificaram-se esses comportamentos de tentativa de respostas como *exploração* (DI2) do problema proposto.

A *exercitação* (DI7) foi mais frequente na primeira aula na qual os alunos tiveram que explicitar o que conheciam sobre códigos, respondendo questionamentos sobre a temática e na sexta aula em atividades que foram propostas apenas para simplificação de fórmulas. Um exemplo desse comportamento é apresentado no Extrato 34.

Extrato 34 – Exemplo da Aula 6 – Trajetória discente de Exercitação (DI7) em um problema combinatório condicional de *combinação* – CD43

[970] P: Eu vou escolher de um grupo de seis administradores eu vou escolher três, então eu calculo por combinação de seis três a três ($C_{6,3}$). Vou deixar para vocês calcular isso ai [...] Eeeee também vou ter que escolher de um grupo de dez escolher três. Combinação de dez, três a três ($C_{10,3}$). (*Epistêmica – E2 Procedimental*)

P: Essas duas escolhas fazem parte da mesma comissão, da composição da mesma comissão, então por isso que eu estou multiplicando. ((Escreve $C_{6,3} \cdot C_{10,3}$ no quadro)) Então vejam isso ai quanto é que dá? Algo semelhante podemos fazer nas outras comissões. (*Docente DO4 – Regulação*) (*Epistêmica – E5 Argumentação*)

A3: Então fica combinação de seis, quatro a quatro ($C_{6,4}$) e combinação de dez, dois a dois ($C_{10,2}$). (*Discente DI7 – Exercitação*)

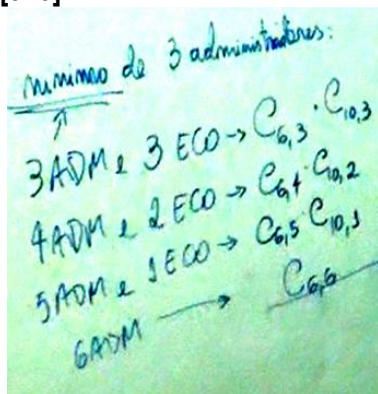
[971] ((Professor anota no quadro)) P: A próxima?

A3: Combinação de seis a cinco e combinação de dez a um (*Discente DI7 – Exercitação*)

P: Combinação de seis, cinco a cinco ($C_{6,5}$)... (*Docente DO5 - Avaliação*)

[972] A3: Por que cinco a cinco? (*Discente DI6 – Procura por informação*) (*Epistêmica E3 – Linguística*)

[973]



[974] P: O vocabulário é esse... Quando você fala seis a cinco dá a entender que é algo como uma potência. (*Docente DO5 - Avaliação*) Ora, é feito uma norma técnica, o vocabulário técnico é esse.

A10: É um linguajar técnico (*Discente DI3 – Memorização*)

[...] P: Combinação de dez, um a um ($C_{10,1}$)... Se vocês voltarem para aquela definição quando se coloca combinação de n p a p elementos, p a p é repetido. E no final? (*Docente DO4 – Regulação*) (*Epistêmica – E5 Argumentação*)

A3: Combinação de seis, seis a seis ($C_{6,6}$). (*Discente DI7 –*

Exercitação)

(Esquema delineado pelo professor em conversa com estudantes, descrito no quadro com o uso de fórmulas de combinação) [...]

[975] P: Apliquem a fórmula. Olha combinação de seis, quatro a quatro ($C_{6,4}$). ((Escreve a fórmula substituindo os valores)) $C_{6,4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$ seis fatorial dividido por dois fatorial, vezes quatro fatorial (*Docente DO3- Atribuição de tarefas – Disponibiliza um tempo para a turma resolver*)

P: E ai gente? Qual a resposta pessoal? (*Docente DO3- Atribuição de tarefas – Gestão do tempo*)

A3: A2?... O primeiro é 15 eu escutei de A2. E o outro? (*Discente DI7– Exercitação*) [...]

Fonte: Acervo da pesquisa

Como o professor lida para a resolução desse problema com o procedimento de fórmulas e pede apenas para que os estudantes as simplifiquem, esse comportamento é considerado de *exercitação*. A aplicação de fórmulas de *combinação* pode representar dificuldades para os alunos, pois é necessária a simplificação de fatoriais. Pessoa (2009, p.80) afirma que a utilização de fórmulas em problemas combinatórios “[...] são uma possibilidade de resolução de modo mais econômico e seguro” a autora ainda defende “[...] que antes da formalização é necessário um longo processo de compreensão de resolução de problemas”. Como se trata da sexta aula, outras situações que priorizassem diferentes procedimentos já foram utilizadas, considerado como positivo o uso do procedimento de fórmula. Além disso, por se tratar de um problema condicional com uso de pelo menos, com maior complexidade, grande número de possibilidades, necessita da técnica de subdividir o problema em partes menores, o que justifica a indicação do professor para usar fórmulas.

Lima (2016) observou em sua pesquisa que dois professores de Ensino Médio realizaram o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória a partir da definição de cada problema combinatório, apresentando as fórmulas, seguido da resolução de um exemplo pelo professor e, posteriormente, resoluções individuais no caderno pelos alunos e correção dos exercícios no quadro. Essa escolha pode limitar os estados assumidos pelos alunos no Ensino Médio, pois, segundo a autora, apesar da “[...] valorização da fórmula, os professores poderiam permitir que os alunos experimentassem outras formas [...]. Sem essa orientação, não é dada ao aluno a possibilidade de utilização de outras técnicas” (LIMA, 2016, p.107).

Diferentemente das práticas implementadas pelos professores descritos por Lima (2016), no caso estudado aqui, o professor possibilitou a *exploração*, a *argumentação* e a *procura pela informação*, como anteriormente observado. A *exercitação* também pode ser um comportamento necessário, já que as fórmulas combinatórias exigem dos alunos conhecimentos sobre simplificação de fatoriais. No Extrato 35 observa-se a tentativa do professor em fazer com que os alunos apliquem e simplifiquem a fórmula da *combinação*, pois se tratava de um problema de *combinação* com formação de variados grupos. Dessa maneira, a

fórmula tem a função de minimizar os cálculos e de sistematizar a contagem nos diferentes grupos.

No Ensino Médio, também se faz necessário um processo de resolução de problemas combinatórios antes da formalização, principalmente, aqueles que auxiliem na distinção entre os tipos de problemas e que valorizem estratégias próprias de resolução. Além disso, de acordo com o PCN+ do Ensino Médio, as fórmulas de Combinatória devem “ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande” (BRASIL, 2002, p.127).

Nos diagramas apresentados foram constatados que o comportamento de *exploração* possui variação de frequência entre 16% a 29% ua, o que explicita-o como um dos mais evocados pelos estudantes. Esse fato confirma a trajetória epistêmica mais utilizada (*procedimental*), a qual é exemplificada no Extrato 35.

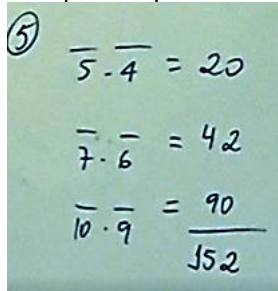
Extrato 35 – Exemplo da Aula 6 – Trajetória Discente de Exploração e Argumentação – CD36

[919] Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de Matemática, 7 livros diferentes de Física e 10 livros diferentes de Química e pediu-me para escolher 2 livros com condição de que eles fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los? (Epistêmico E1 – Situacional)

A1: Professor, veja! Dos cinco livros de Matemática, eu posso escolher dois livros, então sobraria três. Logo os de Física eu não posso escolher porque tem que ser dois livros do mesmo, certo? (Epistêmica E2 – Procedimental) (Discente DI2 – Exploração)

(Professor se afasta porque já está sendo chamado em outro grupo).

A10: Professor veja aqui no caderno. (Discente DI2 – Exploração) (o professor pega o caderno leva para o quadro e copia no quadro a solução apresentada pelo aluno)



⑤

$$\overline{5 \cdot 4} = 20$$

$$\overline{7 \cdot 6} = 42$$

$$\overline{10 \cdot 9} = \frac{90}{152}$$

A3: Isso é a resposta professor?

P: Rapaz isso é o que está no caderno. (Docente DO4 –Regulação Não confirma a resposta)

A3: É de quem?

P: A10 e o grupo.

A3: Ah então está certo!

[920] P: Olha, eles fizeram para cada matéria e aqui no final somou?. Explica para gente como vocês fizeram? (Docente – DO4 Regulação) [...]

[921] A24: Porque eu tenho cinco livros para escolher dois, o primeiro eu tenho cinco livros para escolher depois só sobram quatro. O segundo tem sete para escolher o primeiro e seis para o segundo. Temos que escolher dois livros. Não podemos escolher o mesmo livro [...] (Discente DI5 – Argumentação)

Fonte: Acervo da pesquisa

O comportamento de *exploração* (DI2) tal como observado no Extrato 35 é considerado principalmente quando os alunos propõem procedimentos para encontrar solução do problema, sem necessariamente estar correta, mas que apresenta para a turma ou para o professor as ideias de resolução de problemas combinatórios de forma oral ou escrita. Dessa maneira, pode-se acompanhar algumas mudanças/alterações no raciocínio combinatório dos alunos, acompanhando as mudanças nos procedimentos propostos.

O comportamento da trajetória discente mais frequentemente apresentado, em cerca de 16% a 33% das u.a foi a *argumentação*. Na *argumentação* (DI5) os alunos procuravam justificar os procedimentos utilizados e explicá-los para outros alunos, ou para o professor. Acredita-se que o mesmo pode ter sido ampliado pela postura adotada do professor de deixar a responsabilidade pela resolução dos problemas para os alunos.

Muitos dos argumentos utilizados pelos estudantes, se fundamentavam em relações matemáticas anteriores (como, por exemplo, propriedades comutativa e configuração retangular referente à ideia de multiplicação); ou com relação ao enunciado do problema (como no Extrato 33); ou com relação ao contexto do problema. Outros conseguiam utilizar noções relativas a Combinatória como *ordenação*, ou não, de elementos, repetição, ou não, de elementos e escolha de elementos (como apresentado nos Extratos 36 ou 37).

Extrato 36 – Exemplo da Aula 6 – Trajetória Discente de argumentação e exploração – CD35

[914] A2: Eu utilizei a fórmula porque ... a ordem não importa, a ordem não interferiria. (Discente DI5 –Argumentação- com base em propriedades Combinatórias)

A1: Então é dez vezes nove, dez vezes nove! (Discente DI2 – Exploração)

A2: Mas a ordem não vai interferir! (Discente DI5 – Argumentação com base em propriedades combinatórias ou invariantes do conceito de problemas combinatórios)

Fonte: Acervo da pesquisa

O comportamento de *procura por informação* também foi bastante frequente, sendo observado entre 7% e 23% das u.a. Quando os alunos

assumiam esse comportamento, faziam perguntas com relação a notações ou a dúvidas que possuem em relação ao enunciado. Observa-se um exemplo no Extrato 37.

Extrato 37 – Exemplo da Aula 6 – Trajetória Discente de procura por informação – CD41

[945] Vamos para o décimo quinto [...] Qual dos fatoriais a seguir representa a quantidade de anagramas que podem ser formados com as letras da palavra Pernambuco? (E1 – Situacional)

[946] A1: Professor venha aqui, por favor...

A3: O que é anagrama professor? (Discente DI6 – Procura de informação) (E3- Linguística))

[947] P: Alguém lembra o que é anagrama? (Docente DO4 – Regulação)

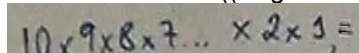
A14: Não [...] Como é que a pessoa vai responder se não sabe o que é anagrama?

P: Lembrou o que é anagrama?

[948] A8: Ah eu sei.. ((parece rever o que está escrito no caderno)) São as trocas! (Discente DI3 – Memorização)

[949] A1: Eu pensei assim [...] 10 vezes nove vezes oito vezes sete...até... um. ((Discente DI4 – Formulação))

P: É isso mesmo. ((Registra no quadro)) ((Docente DO5- Avaliação))

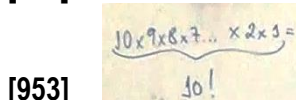


[950] P: Pergunta: Tem uma forma mais simples de a gente escrever isso aqui? ((E3- Linguística)) (Docente DO4 – Regulação)

[951] A14: Dez exclamação... (Discente DI3 – Memorização)

P: Dez exclamação?

[952] A23: É o fatorial (Discente DI3 – Memorização)



[953] (Professor escreve 10! no quadro) ((Docente DO5- Avaliação))

Fonte: Acervo da pesquisa

Considera-se importante a presença desse comportamento, pois pode também ser indicativo do interesse dos alunos pela temática que está sendo discutida. O professor ao invés de responder diretamente os questionamentos, atribuiu a resposta para outros alunos, continuando a discussão direcionando o surgimento de novos comportamentos. Isso deteve o interesse de alguns alunos na discussão.

O comportamento de *formulação* apresentou frequência variando entre 9% e 24%. O mais alto ocorreu na sexta aula porque os alunos tiveram que apresentar as soluções que estavam fazendo para cada problema combinatorio proposto na ficha. Os comportamentos de *memorização*, *recepção de informação* e *avaliação* foram pouco observados, porque o professor buscava mobilizar os alunos a apresentarem soluções e justificarem as mesmas.

Sobre o comportamento de *avaliação* foram contabilizados os momentos que os alunos faziam considerações sobre a própria aprendizagem, como pode se verificar nos Extratos 38 e 39.

Extrato 38 – Exemplo da Aula 1 – Trajetória Discente de avaliação, argumentação e exploração – CD6

[291] P: E a pergunta suprema [...] E o CPF para detonar com chave de ouro. Se eu fosse considerar que qualquer dígito aqui pudesse ser de zero a nove? (Epistêmica E1 – Situacional) (Docente DO3 – Atribuição de tarefas)

A1: Dez vezes dez (Discente DI2 – Exploração) (Epistêmica E2 – Procedimental)

P: Por que dez vezes dez? [...] Você entendeu o dez vezes dez? ((aponta para A7)) (Docente DO4 – Regulação)

A7: Entendi. É porque conta o zero. (Discente DI9 – Avaliação) (Discente DI6 – Argumentação)

Fonte: Acervo da pesquisa

No Extrato 39 observa-se que o professor propõe uma autoavaliação para o estudante, que apresenta uma justificativa para sua resposta. A partir desse diálogo o professor estabeleceu a compreensão que os alunos tinham com relação a condição do zero na construção de códigos.

Extrato 39 – Exemplo da Aula 2 – Trajetória Discente de avaliação– CD13

P: Da quanto? 720?

[729] A1: Não (Discente DI9 – Avaliação)

P: Mas você fez essa multiplicação ou fez outra?

[730] A1: Fiz essa/ P: Deu quanto? /A1: Deu muito... (Discente DI9 – Avaliação)

[731] P: Olha a sugestão é a seguinte, se vocês começarem a multiplicação por aqui.... ((aponta para um e faz a conta de trás para frente)) 1x2

Alunos: dois / P: 2x3 / Alunos: seis (Discente DI7 – Exercitação)

P: 6x4: vinte e quatro; 24 x5; cento e vinte; 120 x6; setecentos e vinte.

[732] A1: Eu já sei o que eu errei... é que eu contei 7 x6 eu não contei 6x5 não porque eu fiz pela outra conta. (Discente DI9 – Avaliação)

P: Entendi.

Fonte: Acervo da pesquisa

No Extrato 39 o aluno aponta que houve o erro e verifica em que momento ocorreu. O comportamento de avaliação pelos estudantes pode ser entendido como positivo ou negativo e era geralmente realizado de maneira oral, a partir de perguntas, ou no final de alguma proposta de procedimento. Sant'anna (2013,

p.94) afirma que com a autoavaliação “[...] os alunos adquirem uma capacidade cada vez maior de analisar suas próprias aptidões, atitudes, comportamentos, pontos fortes, necessidades de êxito na construção de propósitos.” Acredita-se na necessidade de ampliar o surgimento de comportamentos avaliativos individuais e em grupo, principalmente, a fim de possibilitar reflexões sobre os pontos fracos e fortes dos estudantes e, ainda, relativos ao processo de ensino e aprendizagem implementado. Os questionamentos realizados pelo professor auxiliam na produção de comportamentos avaliativos, mas ainda se considera poucos evidenciados.

Alguns desses comportamentos da trajetória discente podem ser modificados a partir da trajetória docente ou mesmo influenciados pelas trajetória mediacional.

A *trajetória mediacional* trata dos diferentes meios ou recursos utilizados para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem delineado pelo professor. Godino, Contreras e Font (2006, p.18) definem essa noção como “ferramenta para analisar os usos potenciais e efetivamente implementados dos recursos instrucionais e suas consequências cognitivas”.

Lorenzato (2006, p.18) afirma que um material didático é “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem”. Passos (2006, p.81) considera que “Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas”. Pepin, Gueudet e Trouche (2013, p.929) acrescentam que *recursos de ensino de matemática* podem ser compreendidos como aqueles “[...] que são desenvolvidos e utilizados pelos professores (e alunos) na sua interação com a matemática no ensino e aprendizagem, dentro e fora da sala de aula”.

Com relação a Combinatória no Ensino Médio pesquisas apresentam diferentes recursos didáticos estruturados para esse ensino. Nos recursos didáticos tecnológicos foram observados os trabalhos de: Azevedo e Borba (2013) que apresentaram o software Arbol nos anos iniciais; Leite et al. (2009) que identificaram cinco objetos de aprendizagem disponibilizados na internet para diferentes níveis de ensino; Aguiar (2013) que propôs um objeto de aprendizagem para Ensino Médio denominado ‘Casa, pombos e matemática’.

Ainda foram verificados trabalhos que remetem ao uso de jogos matemáticos como: Ambrozi (2017) que utiliza os jogos como trilha Combinatória; jogo senha; jogo bicolorido no Ensino Médio; ou o jogo de poquer apresentado por Chilela (2013).

No caso das aulas de Combinatória observadas os recursos utilizados na aula foram o quadro, o livro didático e uma ficha de exercícios. Alguns outros recursos de oportunidade foram utilizados para esclarecer as dúvidas apresentadas pelos alunos. Na observação foram categorizados os diferentes usos desses recursos didáticos de acordo com a função didática desempenhada no processo de aprendizagem.

O recurso mais frequentemente utilizado foi o quadro (quase 70% das unidades de análise referentes a essa trajetória).

Na Tabela 14 pode-se observar essas distintas funções e a frequência de cada uma ao longo das seis aulas observadas.

Tabela 14– Frequência de funções assumidas pelo recurso quadro

Funções assumidas pelo recurso do quadro	Aulas						T	%
	1	2	3	4	5	6		
Fonte de informação das atividades	-	4	-	3	5	-	12	12,4
Registro de linguagem	10	3	3	2	2	1	21	21,7
Registro de definições de problemas combinatórios	-	1	2	2	2	-	7	7,2
Propostas de formulações e/ou procedimentos	4	8	17	13	6	9	57	58,7

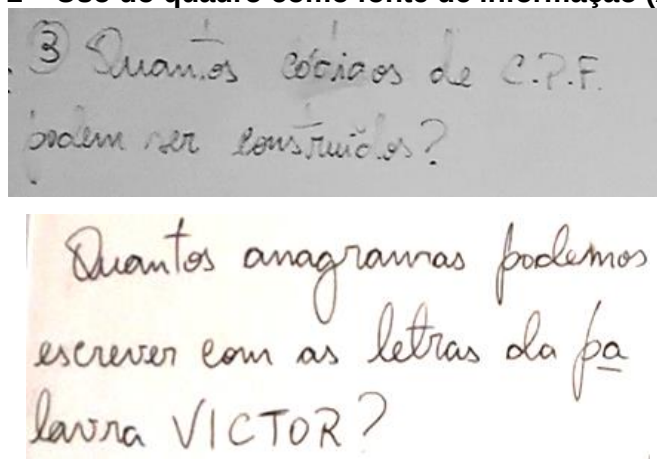
Fonte: Acervo da Pesquisa

O quadro foi utilizado como *fonte de informação* no qual eram dispostos problemas combinatórios para serem resolvidos; *registro de linguagem* (representação do uso do PFC implícito, notações, fórmulas); Registros de definições de problemas combinatórios, geralmente utilizados para a institucionalização dos conceitos; *registros de propostas de formulações e procedimentos* realizadas por alunos e/ou professores que serviam de comparação e discussão das diferentes ideias apresentadas pelos estudantes.

Ao usar o quadro como fonte de informação, o professor registrava os problemas que seriam resolvidos na aula, que poderiam ser do livro ou problemas criados a partir da discussão em sala, como no caso da Figura 72 que

foi criada a partir da discussão sobre códigos na aula ou que utiliza o nome do aluno para fazer anagramas.

Figura 72 – Uso do quadro como fonte de informação (Aula 2, 4)



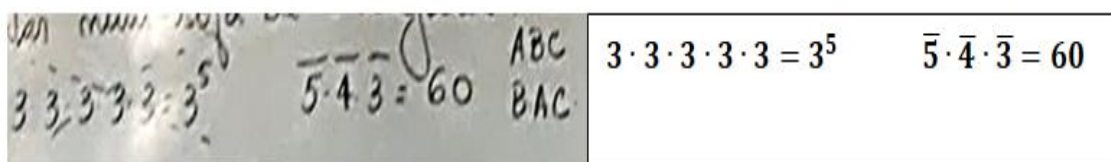
Fonte: Acervo da Pesquisa

Essa forma de produzir problemas combinatórios envolvendo relações com os alunos fez com que eles participassem, interagissem e conseguissem memorizar alguns aspectos da Combinatória como linguagens e procedimentos o que confirma a afirmação de Godino, Batanero e Font(2003) para a relação entre contextos de interesse dos alunos e sua participação na aula de Combinatória.

Outro aspecto que pode ter potencializado as aprendizagens em Combinatória foi a utilização do quadro para registrar diferentes procedimentos e realizar a comparação entre os mesmos. Isso possibilitou o estado de argumentação evidenciados pelos estudantes que como já mencionado, permitiu a enunciação de propriedades dos problemas combinatórios, conforme apresentado na Figura 73.

Figura 73 – Uso de quadro para registro de propostas de formulação e/ou procedimento

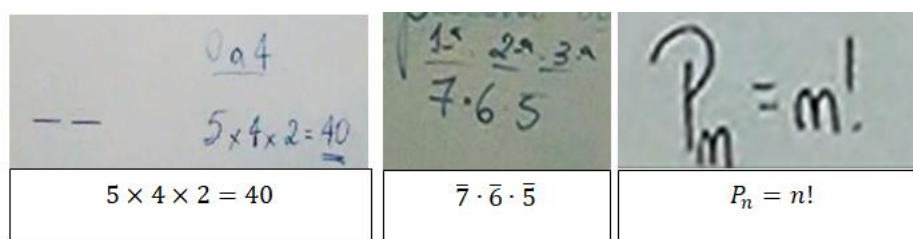
1. De quantos modos 3 pessoas podem sentar em um sofá de 5 lugares?



Fonte: Acervo da Pesquisa

As utilizações gerais do quadro como apresentação de registros linguísticos e ou definições dos problemas também foram observadas, como registrado na Figura 74. Os elementos linguísticos dispostos no quadro pelo professor foram contabilizados em todas as aulas, mas na primeira foi mais presente. No caso, foram evidenciados diferentes fórmulas, registros e notações utilizadas pelo professor no quadro para representar indicativos de ideias de problemas, indicativos de soluções e notações ou fórmulas.

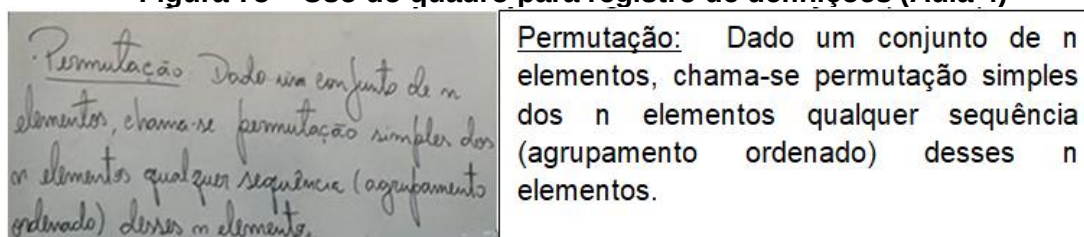
Figura 74 – Uso do quadro para registro de linguagem (Aula 1, 2, 4)



Fonte: Acervo da Pesquisa

O registro de definições de problemas combinatórios, diferentemente do que foi apresentado na pesquisa de Lima(2016), não foi realizado de início, permitindo aos alunos exercer o estado de exploração. Na Figura 75 observa-se a explicitação da definição de Permutação no quadro. Outras situações realizadas foi a comparação entre diferentes definições para que os alunos observassem a propriedade de *ordenação*.

Figura 75 – Uso do quadro para registro de definições (Aula 4)



Fonte: Acervo da Pesquisa

A partir do exposto, considera-se que o quadro, um recurso presente em toda sala de aula, foi utilizado pelo professor de maneira a potencializar as aprendizagens dos estudantes.

Outro recurso presente nas aulas de Combinatória foi o livro didático. Considerando, apenas os aspectos relacionados ao uso do livro didático foram observadas diferentes funções como: introdução da temática, fonte de problemas combinatórios, base para argumentos e fonte de institucionalização de conteúdos.

A função mais assumida foi fonte de problemas combinatórios verificadas em quatro das seis aulas. Nesse caso, o professor geralmente anotava no quadro os problemas combinatórios e, desse modo, permitia a discussão de problemas resolvidos no livro didático e a de identificação dos tipos de problemas combinatórios pelos alunos, sem que os alunos consultassem, privilegiando os estudantes, e para que eles não fossem influenciados pelo que está no livro didático (principalmente as respostas), possibilitando a discussão dos procedimentos. Além disso, em algumas seções dos capítulos de Combinatória dos livros didáticos analisados há a predominância de um único tipo de problema combinatório, antecipando a identificação desses problemas, como acontece em seções de *permutação*, *arranjo* e *combinação*.

Lima (2016) afirma que o livro didático foi o único recurso utilizado pelos professores durante o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio, mas em sua pesquisa observa que os alunos não fazem uso do mesmo, já que nem todos receberam o livro pela escola. Diferentemente, na presente pesquisa, a partir da observação realizada, nota-se o uso por alunos em pequenos grupos, principalmente na leitura e interpretação do texto introdutório do livro didático, como observa-se na Figura 76.

Figura 76 – Alunos utilizando o livro na primeira aula



Fonte: Acervo da Pesquisa

No geral, o livro foi pouco utilizado com a função de introdução de temáticas verificada apenas na primeira aula, tal como observa-se no Extrato 40, no qual utilizou-se a classificação sugerida por Herbel-Eisenmann (2009) a saber, *privilegiando o livro didático*; *professor – livro didático alinhado*; *privilegiando o professor-estudantes*; *estudantes-livros didáticos alinhado*; *privilegiando os estudantes* e *privilegiando o professor*.

Extrato 40 — Exemplo da aula 1 — Privilegiando o livro didático; Privilegiando os estudantes; Professor e livro didático alinhados – CD1

[11] P: O que a gente vai começar a trabalhar é um dos últimos capítulos do livro.

[12] P: Vê ai A1. Não apenas pelo índice, isso. O penúltimo capítulo! O que ele diz? ((Inserção de termos de Combinatória por meio do livro didático — Privilegiando o livro didático))

[13] A1: Análise combinatória ((Aluno lê — Privilegiando o livro didático))

[14] P: Qual a página?

[15] A1: Página 246

[16] P: Beleza. Pagina 246. Tema do capítulo Análise Combinatória. Vocês observam que um pouco diferente de alguns capítulos, ele começa com uns textos então eu vou dá justamente um tempinho para vocês lerem a página 246, essas imagens e essas partes que tem as legendas das figuras. Dá um tempinho para vocês lerem esse material, é curtinho! Coisa de três parágrafos, para poder a gente continuar. ((Inserção de termos de Combinatória por meio do livro didático — Privilegiando o livro didático))

[17] P: Alguns certamente não tenham tido tempo de ler completamente, mas quem leu pode comentar algo para quem não leu? ((Professor pede para explicar a leitura — Essa proposta pode permitir o surgimento de novos termos que não seja os apresentados pelo livro didático — Privilegiando os estudantes))

[18] A7: Fala do emplacamento. ((Aluno resume o descrito no livro — Privilegiando o livro didático))

[19] P: Emplacamento?

[20] A8: Na época que Santos Dumont inventou o primeiro carro, aqui no Brasil. Ai a partir disso começou a surgir mais carros em São Paulo, e ai as fiscalizações decidiram emplacar os carros. ((Aluno resume o descrito no livro — Privilegiando o livro didático))

[21] A8: Ai surgiram com combinações pequenas e depois foram aumentando as combinações. Ai surgiram com duas letras e três números.... ((Aluno apresenta termos do livro didático — Privilegiando o livro didático))

[22] P: Alguém tem mais algo a acrescentar? Como são as placas atuais? ((Professor pede complementar a leitura — Privilegiando os estudantes))

[...]

[68] P: Estou falando se vocês imaginarem o mapa do Brasil. São Paulo a vivo entrou lá, só lá inicialmente, e aquilo que você conhece como claro, oi entrou no nordeste e norte inteiro todinho. Só que comparando o publico daqui com o de lá, São Paulo tem um mercado consumidor muito maior que o daqui. É onde um dos primeiros estados que se acrescentou logo outro nove. Hoje em dia, vocês aqui sabem que, uma casa só tem um no máximo telefone fixo, mais quantas telefonias móveis tem que ter? Algumas vezes nós temos dois três chips. Essas coisas vão crescendo, vão crescendo então o que acontece, e o livro vem tratar da necessidade de aumentar esses códigos. ((Professor interpreta as ideias do livro didático após a discussão sobre diferentes códigos — Professor e livros didáticos alinhados)).

Considera-se essa proposta integradora, pois consiste na discussão do emplacamento de carros na cidade de São Paulo e na necessidade de ampliação desse tipo de código para adequar ao crescimento de carros no estado. Com a leitura os alunos conseguiram reproduzir termos vinculados a Combinatória o que auxiliou na proposição de procedimentos e justificativas para os mesmos. Vale salientar que o docente vinculou a leitura ao contexto de códigos relacionando-os a maneira de contar e registrar tais códigos o que pode-se considerar privilegiando o professor. Nesse caso, o professor interferiu na proposta do livro, adaptando para outro trabalho com a turma.

Outra função observada para o livro didático foi denominada de base ou fonte para argumentos, como se exemplifica no Extrato 41.

Extrato 41 — Exemplo da aula 1 — Estudante e livro didático alinhados – CD3

[150] P: Fala menina. O que é que tu não sabe mais? Tu acabou de falar alguma coisa. Como é que tu não sabe mais o que falou? ((Professor pede para explicitar o que pensa — Privilegiando os estudantes))

[151] A1: Eu lembro mais ou menos...

[152] P: Ah tu lembra! Lembra de onde?

[153] A1: Que eu li um principio de multiplicação ((Aluno se refere a leitura do livro — Privilegiando o livro didático))

[154] P: Principio de multiplicação?

[...]

[158] A1: Não professor eu estava pensando poderia..., mas é não , é não, é não.

[159] P: Mas fale. Olha é o que venho dizendo a vocês é melhor falar agora do que depois: - não professor.... O momento de tirar dúvida é agora! A gente está aprendendo! Diga uma ideia....((Privilegiando os estudantes))

[160] A1: O assunto está encerrado

[161] P: Diga... diga....

[162] A1: Eu pensei que o número ia multiplicar ele por cada quadradinho entendeu? Para saber quantos cubinhos tem neles. Mas não tem nada haver.

[163] P: Como assim?

[164] A12: É combinação não é? Combinação. Eu também estudei isso. Combinação de números. A gente pega um número e combina com três, aí pega outro número e combina com mais, e assim vai.. pega um número e segue combinando com outros. É como se fosse uma distribuição. ((Utiliza a nomenclatura apresentada no livro, combinação no sentido de casos que podem combinar, mas atribui significado próprio – Estudante e livro didático alinhados))

[...]

[165] A12: Eu fazia isso com desenho, eu tinha uns problemas combinar quantas roupas. Eu fazia assim tinha três camisas, três calças e dois sapatos e qual é probabilidade de eu ir combinar? De fazer essas combinações. ((Utiliza a nomenclatura apresentada no livro, combinação no sentido de casos que podem combinar, mas atribui significado próprio – Estudante e livro didático alinhados))

[169] A1: Aqui no livro tem combinar pão francês e pão integral.

[170] A3: E ai fica combinação aqui no texto.((Utiliza o livro como fonte de argumentos, mas não há elaboração de propostas pelo estudante - Estudante e livro didático alinhados))

[171] P: Tudo bem. O texto está falando de pão e a gente está falando de dígitos. Como é que seria com os dígitos? Se eu, por exemplo, diminuir a quantidade? Então eu não quero mais dígitos de zero a nove, agora eu quero escrever só dígitos de zero a quatro. ((Professor volta a discussão do problema, retirando o argumento do livro didático como base – Privilegiando os estudantes))

Fonte: Acervo da Pesquisa

Nesse extrato, o argumento utilizado pelos estudantes, tomando o livro como referência, pode ser considerado positivo, quando estes criam e utilizam termos e ideias próprias para explicar o que o livro propõe.

O livro didático também foi utilizado como fonte das definições de tipos de problemas combinatórios colocados no quadro, o que ocorreu em três aulas. Nesse caso, o professor recorria ao livro para transcrever as definições no quadro ou pedia para que alunos lessem certos trechos.

Extrato 42 - — Exemplo da aula 2 — Privilegiando o livro didático – CD3

[440] P: Olha utilizamos multiplicação, certo! Tem um trecho em destaque no livro que vai justamente comentar sobre essa noção que a gente está utilizando nessas questões. Isso é justamente na página... ((procura no livro)) o início do capítulo foi na página 246, já na página 249 [...]

P:[...] o nomezinho do item, é justamente “Princípio multiplicativo” ((escreve no quadro)). ((Privilegiando o livro didático))

Fonte: Acervo da Pesquisa

Nesse caso, o livro foi utilizado apenas após as discussões sobre os diferentes assuntos de Combinatória, o que considera-se uma decisão positiva do professor – utilizar o livro como fonte de institucionalização. Esses exemplos, apresentam as diferentes negociações com relação ao livro didático, professor e alunos, fazendo surgir nas aulas de Combinatória, justificativas, argumentos e termos, na medida em que a busca pela solução de problemas necessita.

Na sexta aula foi apresentada uma ficha de problemas combinatórios como fonte de problemas combinatórios, alguns foram retirados do livro didático de apoio do professor. A ficha consistia de 20 problemas combinatórios dos quais os ímpares foram resolvidos em grupos em sala e os demais deixados para casa.

A ficha era composta por cinco problemas de *produto de medidas*; quatro de *arranjo*, quatro de *combinação*; três de *permutação*; três de *arranjo com repetição*; e um de *permutação circular*. Entre esses apenas os problemas de *combinação* apresentaram problemas integrados e condicionais, e a repetição foi trabalhada apenas nos problemas de *arranjo com repetição*.

A ordem de grandeza apresentada nos problemas excede 30 possibilidades, excetuando um problema de permutação que não foi selecionado para ser respondido em sala. Dessa forma, poucas diferenças entre procedimentos podem ser observadas já que os números impedem o uso de estratégias enumerativas. Os contextos utilizados nos problemas versaram sobre modelos de mobília, sorteio, anagramas, organização e escolha de livros, formação de números, escolha de sabores de sorvete, formação de vestimentas, percurso de viagens e formação de equipes. Alguns desses contextos já tinham sido trabalhados como a contagem de anagramas, a formação de grupos e a *ordenação* de livros.

O problema de permutação circular não foi resolvido em sala nem comentado anteriormente, o que pode gerar dúvidas aos alunos quando tentarem resolvê-lo em casa. Na Figura 77 apresenta-se o exemplo retirado da ficha.

Figura 77 – Exemplo da ficha de permutação circular

14 – De quantas maneiras distintas podemos dispor cinco pessoas ao redor de uma mesa redonda?

Fonte: Acervo da Pesquisa

Assim como ocorre nos capítulos dos livros didáticos analisados não há comentários sobre esse tipo de problema aparecendo apenas na seção do manual do professor. Outros dois problemas podem gerar dúvidas, nesses casos específicos quanto a sua classificação, como observa-se na Figura 78.

Figura 78 – Exemplos de problemas combinatórios do recurso ficha

3 – De quantas maneiras podemos dar 2 prêmios a uma classe com 10 rapazes, de modos que os prêmios não seja dados a um mesmo rapaz?

4 – De quantas maneiras podemos dar 2 prêmios a uma classe com 10 rapazes, se é permitido que ambos sejam dados a um mesmo rapaz?

Fonte: Acervo da Pesquisa

De acordo com a classificação proposta por Santos, Mello e Murari (2007) esses problemas são de arranjo e arranjo com repetição, respectivamente. Isso acontece quando considera-se os prêmios diferentes, se os prêmios forem considerados iguais os problemas podem ser classificados como *combinação* e *combinação com repetição*. Alguns alunos, quando da interpretação do enunciado, podem julgar os dois prêmios iguais, o que remete justamente ao invariante de *ordenação* dos problemas, conforme aconteceu na discussão sobre o problema 3 da ficha.

A proposta da ficha permitiu que os alunos assumissem a responsabilidade de resolver os problemas, ou seja, a autonomia sobre a resolução de alguns desses problemas. Essa característica foi menor nos problemas condicionais e integrado de *combinação*, pois observaram-se dificuldades que será discutido na seção 5.2.3 das trajetórias cognitivas. Correia, Fernandes e Almeida(2009) afirmaram que a maioria dos alunos do 12º ano que passaram por um processo de ensino de Combinatória atestam que a resolução de problemas combinatórios em grupos possibilitou o surgimento de ideias diferentes, a superação de dúvidas e dificuldades e uma ampliação do envolvimento pessoal nos problemas. Na Figura 79 apresenta-se alguns acompanhamentos realizados pelo professor.

Figura 79 – Acompanhamento realizado pelo professor na resolução da ficha



Fonte: Acervo da Pesquisa

O professor caminhava pela sala acompanhando as dúvidas dos grupos, isso permitiu verificar os procedimentos que estavam sendo realizados por eles. Geralmente, quando o procedimento estava correto ou apresentavam soluções diferentes o professor socializava com os grupos para que houvesse discussão sobre o procedimento realizado.

Após apresentar tais procedimentos questionava alguns alunos se haviam ou não compreendido e caso não houvessem solicitava ao grupo que justificasse o porque daquele procedimento. Essa característica, ampliou os estados de formulação e argumentação na trajetória discente. Portanto, mesmo a resolução de problemas combinatórios em grupos sendo necessária para buscar responsabilidade para resolução, a postura do professor é fundamental para a comparação de diferentes procedimentos e para a superação das dúvidas apresentadas.

Algumas estratégias de enumeração incompleta foram observadas nas aulas, nas quais o professor utilizou recursos de dramatização e materiais como lápis para realizar listagens de algumas possibilidades.

No Extrato 43 apresenta-se a discussão do professor com uso dos lápis para discutir porque utilizar a multiplicação e não a soma para resolver um problema de permutação.

Extrato 43 – Exemplo da Aula 3 – Trajetória Mediacional recursos de lápis– CD21

[600] P: Deve ter sido. Mas A1 levantou a mão ali e acabou perguntando – “Professor, não é multiplicando não?”

A1: É!

P : É multiplicando ou é somando? ((Alunos discutem entre si))

[601] P: O que é que faz que leve a gente a pensar que seja uma multiplicação ou que seja uma soma?

[602] A3: A pergunta?...

[610] A13: Por quê?

[611] P: Porque [...] faz parte de uma opção de armação. Eu estou com cinco livros, certo. Vamos supor que sejam aqui esses pilotos, cinco pilotos ((pega cinco lápis de quadro e coloca na mão)) E eu organizei assim Isso aqui é uma opção de organização (12345)

[612] P: Depois fui lá organizei diferente. Isso aqui é outra opção de organização(21435).



((Primeira e Segunda organização))

P: Então no total teremos?..

- [613] A13: Pode usar os pilotos para fazer todas as 120 opções?
- [614] P: Pode. 120. Olha, eu pego esse lápis coloco na mesa. Pergunta: Terminei de organizar? Coloquei o primeiro, terminei?
- [615] A3: Terminou
- [616] Alunos: Não
- [617] P: Não. Mesmo colocando o segundo lápis na mesa eu só termino quando eu organizar todos os...
- [618] Alunos: cinco
- P: Cinco. OK?
- [619] A7: O professor, mas por que não somar?
- [620] P: Porque A7 a sua opção de organização só termina depois de você por o quinto livro. Entendeu? Quando eu estava fazendo a coisa dos pilotos...
- [621] A7: Ahh, entendi!
- P: Entendeu?
- A6: Por exemplo, porque um livro pode estar em vários lugares diferentes.

Fonte: Acervo da Pesquisa

No Extrato 40 observa-se apenas a listagem de 3 possibilidades apenas, que serviu para que os alunos buscassem elaborar justificativas para a organização dos livros.

O problema dessa atividade é a listagem de todas as possibilidades que não seria possível de se realizar. Acredita-se que uma abordagem por meio do raciocínio recursivo utilizando pilotos poderia gerar uma melhor percepção da multiplicação entre os números das diferentes etapas de escolha. Mesmo assim os alunos afirmam que compreenderem a situação. Em outras situações foram realizados a enumeração com número reduzido de possibilidades.

Alguns autores como Fischbein(1975), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996; 1997), Roa(2000), e mais recentemente Abitbol (2018), Sandefur, Somers e Dance (2018) destacam a importância do raciocínio recursivo na matemática e, em especial, para Combinatória. O raciocínio recursivo pode ser pensado, por exemplo, a partir da *ordenação* de dois lápis, ou seja, “quantas possibilidades diferentes tem-se para ordenar dois lápis de cores diferentes?”. A enumeração desse problema é apresentada na Figura 80.

Figura 80 - Representação com material manipulável da ordenação de dois lápis
ORDENAÇÃO DE 2 LÁPIS
 1º possibilidade 2º possibilidade



Fonte: Acervo da Pesquisa

Para utilizar a recursividade, pode-se se basear na proposta anterior para que seja inserida na *ordenação* outro lápis. Desse modo a partir dessa ideia pode-se representa a inclusão de um novo lapis conforme representado na Figura 81.

Figura 81 - Representação com material manipulável da ordenação de três lápis
ORGANIZAÇÃO DE 3 LÁPIS



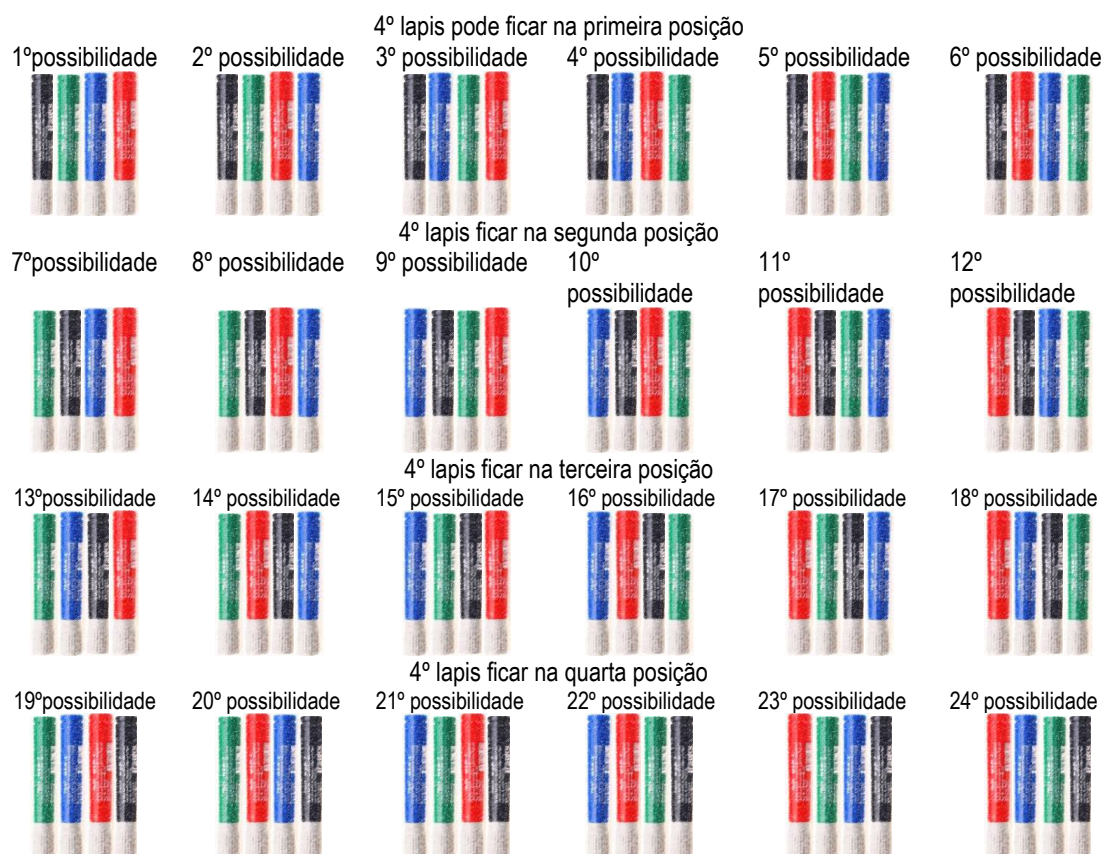
Fonte: Acervo da Pesquisa

Assim pode-se tentar fazer com que os alunos compreendam a relação que ao inserir mais um lápis o total de possibilidades é triplicado. Do mesmo modo, se for acrescentado outro lapis a essa enumeração, ele terá quatro posicoes para ocupar na listagem anterior, perfazendo um total de 24 possibilidades como apresenta-se na Figura 82.

Tal noção de recursividade pode ser utilizada para buscar o processo de generalização para problemas de permutação. De acordo com Silva, Fernandes e Soares (2004) ao analisarem intuições de alunos de 12º ano em resolução de problemas combinatórios, constataram que os alunos conseguem realizar enumerações de problemas de permutação com números pequenos, mais quando se ampliam o número para permutação de cinco amplia-se o número de respostas em branco e nenhum aluno conseguiu a generalização da fórmula da permutação.

Figura 82 - Representação com material manipulável da ordenação de quatro lápis

ORDENAÇÃO DE 4 LÁPIS



Fonte: Acervo da Pesquisa

Outro problema apresentado pelo professor que pode ser utilizado o raciocínio recursivo foi o problema com o contexto de aperto de mão³⁵ utilizado na quinta aula. O professor propôs a dramatização da situação na sala para dirimir a dúvida de alguns alunos, como se pode observar no Extrato 44.

Extrato 44 – Exemplo da Aula 5 – Trajetória Mediacional recurso de dramatização com alunos– CD31

[859] ((Alguns alunos resolveram o problema com uso da regra do quociente da combinação, aqui inicia a discussão de como entender a divisão))

[860] A7: Eu sei...mas, por que botou esse dois ai para dividir?

[861] P: Porque vamos lá... Tem dez pessoas ((escolhe dez pessoas entre os alunos apontando e contando de dois em dois)) dois, quatro, seis, oito, dez.... Pronto, vou tirar A10... vou tirar A10... para eu entrar... (inicia o processo de dramatização com 9 alunos e ele inserindo A7).

P: Vou começar cumprimentando as pessoas ! (começa contando e apertando a mão das pessoas escolhidas)) Aí, uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove. Certo, eu apertei, minhas nove mãos ... Agora é contigo ((se afasta e aponta para A7))

[862] A7: Ai eu vou atrás e aperto também nove mãos

[863] P: Calma, mas o nosso aperto de mão já foi quantas vezes?

[864] Alunos: Duas!

³⁵ Esse problema foi apresentado diferentes procedimentos de resolução no livro didático como foi apresentado na Figura 49 da página 156

A23: Só que uma foi da tua parte ((se referindo a A7)) e outra foi da dele ((se referindo ao professor)) Entendesses?

A7: Só que quando foi da sua parte... foi da sua parte! Quando é da minha, é da minha. ((risos alto de todo mundo, inclusive do professor))

A23: Não

A3: Não mulher... deixa ela ser a primeira a apertar....

[865] A20: ((levanta e aperta a mão de A7)) Olha, se eu estou apertando a sua mão ao mesmo tempo você esta apertando a minha...tudo ao mesmo instante.

P: Isso...

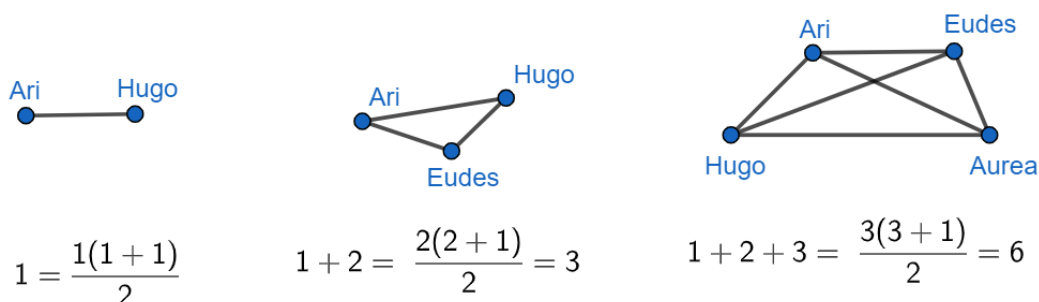
A23: Os dois tem a mesma iniciativa, os dois tem a mesma intenção, só que cada um imagina que a intenção vem dele... entendeu?

Fonte: Acervo da Pesquisa

A dramatização utilizada pelo professor poderia ser melhor desenvolvida utilizando a noção de raciocínio recursivo. Ao invés de tentar realizar 45 apertos de mão poderia iniciar em duas, ou três pessoas e assim sucessivamente. Entretanto, o objetivo do professor de fazer os alunos entenderem porque nesse problema é preciso dividir por dois, foi atendido. A não conclusão da tarefa deve-se à interação com o aluno A7 que continua com a dúvida e não compreende a não ordenação dos apertos de mão nesse momento. Sandefur, Somers e Dance (2018, p.153) utilizaram esse contexto de apertos de mão e consideram que o raciocínio recursivo é uma maneira natural de abordar esse problema posto que “[...] conecta a fórmula fechada e a abordagem recursiva e fornece uma boa justificativa da fórmula para a soma de n inteiros”.

Na Figura 83, apresenta-se a configuração de apertos de mão entre duas, três e quatro pessoas por meio de uma representação icônica e numérica, na qual as linhas representam o número de apertos de mão e os pontos a quantidade de pessoas.

Figura 83 – Representação icônica de problemas de apertos de mão para o caso de duas, três ou quatro pessoas



Fonte: Acervo da pesquisa

Na Figura 83 representa-se a ideia de recursividade. Para cinco pessoas, por exemplo, o número de apertos de mão será $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, ou seja, o número de apertos de mão de três pessoas, mais 4. Nesse caso, a soma de n números inteiros seria representada pelo número de apertos de mão de $n+1$ pessoas, o que equivaleria a $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dessa forma, defende-se que haja necessidade de um ensino de Combinatória que possibilite esse processo de generalização, priorizando a recursividade, utilizando para isso recursos manipulativos – como cartas de baralho ou recursos tecnológicos, como o *software* Árbol.

Nesse sentido, recursos tecnológicos no ensino de Combinatória podem possibilitar a ampliação dos números de possibilidades, e a mudança do enfoque para a observação de regularidades, mas não pode-se excluir totalmente o processo de enumeração sistemática das possibilidades de alguns problemas.

Considera-se que o professor fez bom uso dos recursos disponíveis em sala de aula. Existem diferentes recursos para o ensino de Combinatória que foram desconsiderados nessas aulas, porém, tem-se que considerar que o uso de um recurso pode não ser suficiente para dirimir as dificuldades e as incompreensões referentes à Combinatória. A ação docente nesse caso é o que possibilita a mudança de postura de estudantes.

6.5.2 Padrões de interação observados nas aulas de Combinatória do Ensino Médio

As interações focalizadas nessa seção são aquelas apresentadas na atuação do professor na sala de aula, principalmente aquelas que puderam gerar melhores oportunidades para aprendizagem em Combinatória. Pesquisadores, como Holton e Thomas (2001, p.78), defendem que para aprendizagem ocorrer faz-se necessário a integração entre informações novas e anteriores, além de valorizar que o processo de explicação “[...] para si mesmo, um adulto ou para pares facilita a compreensão das mesmas”. Para esses autores, a aprendizagem pode ser ampliada com atividades que permitam o diálogo.

Clarke (2001, p.50) defende a utilização da incerteza “[...] como um catalisador construtivo para reflexão, negociação de significado, desenvolvimento e refinamento da intersubjetividade e para a aprendizagem da matemática e da ciência em contextos de sala de aula”. Para esse autor, o professor pode dispor da incerteza dos estudantes, envolvidos no processo de construção, a fim de gerenciar novas aprendizagens na sala de aula.

Com base nessa discussão, iniciou-se um processo de análise para entender os tipos ou padrões de interação que foram apresentados nas aulas de Combinatória, compreendendo que “[...] durante a realização de uma tarefa podem-se implementar diferentes padrões de interação (trabalho autônomo dos alunos, explicações magistrais, diálogo e cooperação entre alunos e professor etc.)” (ASSIS; FRADE; GODINO, 2013, p.738).

Esses autores definem alguns padrões de interação entre professor-aluno, categorizados como (IPA1) Extrativo (VOIGT, 1985); (IPA2) Discussão (VOIGT, 1985); (IPA3) Funil (VOIGT, 1985; BAUERSFELD, 1988); (IPA4) Focalização (WOOD, 1994); (IPA5) Matematização direta (VOIGT, 1996); (IPA6) Afirmativo (GODINO; LLINARES, 2000); (IPA7) Interrogativo (GODINO; LLINARES, 2000); (IPA8) Recitação (MENEZES, 2004)³⁶.

Alguns desses padrões foram observados nas aulas de Combinatórias. Outros foram sistematizados a partir da análise das configurações didáticas, os quais são apresentados a seguir:

- IPA 9. *Padrão de Busca de Memorização ou Recordação*: Observado geralmente no início de novas aulas. Nesse momento, existe a menção de atividades feitas anteriormente, com o objetivo de verificar o que os alunos

³⁶ Para mais detalhes rever Quadro 4 na página 29.

recordam, a fim de trazer novas interações, ou lembranças, ou mesmo conhecimentos aprendidos.

- IPA 10. *Padrão de estimular a participação*: Observado geralmente quando há dispersão dos alunos, ou quando eles estão em silêncio para que respondam e apresentem o que estão pensando.
- IPA 11. *Padrão de motivação ou suporte afetivo*: Observado geralmente quando há recusa de participação ou recusa em fazer atividades. O professor tenta motivar o aluno e/ou grupo de alunos para aceitarem a atividade.
- IPA 12. *Padrão Indicativo de Respostas*. Observado quando o professor responde à própria pergunta, ou uma pergunta do aluno sobre o conteúdo, ou quando o mesmo tenta dar indicativos, pistas, para auxiliar a compreensão do aluno.
- IPA13. *Padrão de devolução*³⁷. Observado quando o professor devolve a pergunta aos alunos, deixando que eles assumam a resolução do problema. Nesse padrão, o professor não responde às perguntas dos alunos, deixando-os com o papel de validar, ou não, a proposta de solução.
- IPA 14. *Padrão gestão da incerteza*³⁸. Observado quando o professor questiona alunos com relação ao processo realizado ou com relação a alguma propriedade mencionada pelos alunos, gerando a necessidade para que os mesmos tomem decisões e justifiquem o procedimento adotado. Nesse padrão o professor também não responde às perguntas dos alunos e apresenta questionamentos sobre as respostas para continuar a discussão.

Clarke (2001) apresenta algumas possibilidades com o trabalho do professor diante da incerteza relacionada a diferentes objetivos ao longo de uma aula, seja com relação ao uso correto de linguagem, de procedimentos, interpretação de registros e/ou representações dos alunos, com relação às opiniões ou compreensões apresentadas pelos alunos:

- Incerteza em relação a um fato ou termo correto: ["Por que é V, o que V tem a ver com velocidade?"]; Incerteza quanto à forma correta de uma ação ou procedimento; [I: Você pode me dizer como resolver isso? M: Você ganha oito quatro oh, que é o número de alunos, divide cinco, vezes dois.]; Incerteza quanto

³⁷ O termo devolução se refere a uma posição do Rei da França que quando não queria decidir sozinho sobre alguma situação, devolvia ao conselho a responsabilidade. Aqui se considera a discussão de Brousseau (2002) que aponta a devolução didática como a situação nas quais os alunos assumem a responsabilidade pela solução do problema.

³⁸ Incerteza aqui é definida de acordo com o apresentado por Clarke (2001):

ao significado de um termo ou uma atividade; ["Como o gráfico pode ir abaixo de zero? Você não pode ter uma velocidade de menos dez"]; Incerteza quanto a uma forma de representação; ["É a velocidade, não a maneira como ela salta" - em referência a um gráfico]; - Incerteza quanto à correção da opinião do aluno, compreensão, método ou resultado. ["Me diga se você acha que isso parece meio lógico"] (CLARKE, 2001, p.46).

Observa-se a abrangência que o trabalho com a incerteza pode apresentar-se em diferentes aspectos do conteúdo matemático, permitindo possibilidades para as ações docentes.

O ensino e aprendizagem de Combinatória preveem o trabalho a partir da resolução de problemas e para isso o professor não pode apresentar as soluções sem antes oportunizar que os alunos resolvam por si só alguns problemas. Apresentar de início as fórmulas pode gerar nos alunos a necessidade de responder os problemas combinatórios apenas por elas, desconsiderando outros procedimentos. DeTemple e Webb (2014, p.ix) afirmam que a Combinatória "[...] oferece muitos resultados sobre a beleza da matemática que são agradáveis de descobrir e problemas que são simplesmente divertidos de se pensar e resolver de maneiras inovadoras".

Outros pesquisadores como Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), English (2005), Pessoa e Borba (2009) e Borba, Rocha e Azevedo (2015) discutem que no ensino e aprendizagem de Combinatória o professor pode oportunizar aos estudantes a exploração e elaboração de diferentes procedimentos de resolução, além de possibilitar a descrição e discussão das diferentes soluções em sala. Nessa perspectiva, a ação docente para ensinar Combinatória pode fazer uso de diferentes padrões de interação professor-aluno, visando um ambiente que permita as explorações, discussões, elaborações de procedimentos, inclusive o trabalho com a incerteza e explicações das atitudes adotadas.

A partir dessas categorias, foram classificados alguns momentos nas configurações didáticas das aulas de Combinatória que utilizaram tais padrões de interação. Vale salientar, ainda, que os padrões de matematização direta e extrativo não foram encontrados ao longo das aulas. Observam-se alguns padrões de interação no Extrato 45

Extrato 45 – Exemplo da Aula 6 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Participação – (IPA10), Discussão (IPA2) e Afirmativo (IPA6) – CD38

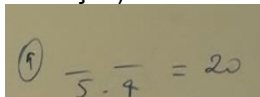
[930] A1: Professor venha aqui, por favor!

P: Diga daí se você tem coragem [...] Quero vê se você é uma mulher de coragem! (IPA10 Participação – instiga a participação do aluno) [...]

[931] A3: Olha professor, é cinco vezes quatro que dá 20!

A1: É o que eles falaram, professor. Concordo!

P: Olha A3, o que disseram aqui [...] “É o que eles falaram!!!” Estão concordando. O que saiu ali. ((anota no quadro)) E aí A10, concorda? (IPA2 Discussão – Pede opinião de outros alunos para a indicação)



$$5 \cdot 4 = 20$$

A10: Eu concordo!

P: A2 parece meio na dúvida! ((A1 e A2 discutem no grupo))

A1: Porque são distintos, não podem ser o mesmo. Entendeu?

A2: O que menina? ((risos))

A1: Eu fiz cinco vezes cinco[...] Eu ia fazer cinco vezes cinco, porque tinha cinco e duas opções, sendo que são distintos, então não podem se repetir. Eu pensei que podia, mas não pode ser repetir ((pega a ficha e mostra a A2)) vê aqui, algarismos distintos... ((Aluno chama atenção para o conceito da palavra distintos))

A2: Certo [...]

[935] P: Porque são distintos, não pode ser igual. Depois que você usa um ele vai ter que ser descartado. (IPA 6- Afirmativo)

Fonte: Acervo da Pesquisa

Essa configuração didática foi classificada como a-didática, pois apresenta a ação dos estudantes sobre o problema de *arranjo*. Observou-se a atitude docente de proporcionar os alunos a discussão sobre a solução apresentada. Geralmente no *padrão de participação* o professor pede que um grupo de alunos, ou um aluno específico que está disperso da discussão ou que aparenta não compreender o problema, participe. Notou-se, ainda, que o aluno explicita corretamente o que significa a palavra distintos, excluindo a repetição de elementos do problema. O padrão afirmativo está sendo utilizado para institucionalizar a validação feita pelo aluno.

Apesar de não ser foco da análise, observa-se ainda a interação entre alunos no grupo. Nesse exemplo, um dos alunos apresenta a justificativa para que sua resposta seja aceita e há uma negociação dos significados presentes no enunciado do problema combinatório. Esses momentos foram apresentados tanto na sexta aula, na qual o professor subdividiu a classe em grupos para resolução, quanto em outras aulas nas quais os procedimentos eram ditos para o professor e ele socializava no quadro para que os alunos justificassem as ideias que geraram esse procedimento. Helme e Clarke (2001, p.149) discutem

sobre as potencialidades das interações entre alunos no processo de negociação de significados quando advogam que “As interações aluno-aluno parecem oferecer mais espaço para engajamento cognitivo de alto nível do que as interações professor-aluno, tanto na instrução de toda a turma quanto em pequenos grupos”.

Conforme apresenta-se no Extrato 46, diferentes padrões de interação professor-aluno foram utilizados ao longo da discussão de um problema de *arranjo*.

Extrato 46 – Exemplo da Aula 2 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Funil (IPA3); Focalização (IPA4); Participação – (IPA10), Gestão da Incerteza (IPA13) – CD11

[364] Problema 1: Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório só estão vazias 7 cadeiras. De quantas maneiras eles podem ocupar essas cadeiras? ((Professor lê em voz alta os alunos tentam responder))

[365] A1: 21 Dá $7 \times 7 \times 7$ ((O aluno propõe dois procedimentos equivocados)) ((21 é a multiplicação dos valores do enunciado; o $7 \times 7 \times 7$ segue a tendência da repetição elaborada na primeira aula em problemas de arranjo com repetição))

[366] A2: Dá isso não!

[367] P: Eu concordo com A2 que $7 \times 7 \times 7$ não dá 21. O que vocês acham da ideia dela? ((Alunos conversam entre si))

P: A1 você disse 21 e $7 \times 7 \times 7$ e um é diferente do outro... Qual você escolhe? ((IPA14 gerir a incerteza))

A1: Eu escolho $7 \times 7 \times 7$

[368] P: Por quê? ((IPA14 gerir a incerteza – pedir justificativa))

A1: Porque são três cadeiras!

P: Porque são três cadeiras?

A1: mas eu acho que vai ser 21

[369] P: Então eu tiro $7 \times 7 \times 7$ e fico com 21?

A9: Três pessoas professor

P: Três pessoas?

A17: É três! Três vezes sete é vinte e um. ((Aluno propõe um procedimento equivocado utilizando a multiplicação dos números do enunciado da questão - compara com problemas de produto de medidas))

[370] A1: Porque professor veja só. Na outra aula você fez aquela conta lá, que dava cinco vezes cinco, vinte e cinco! Aí aqui seria três vezes sete. ((Compara com procedimento realizado em problema de arranjo com repetição))

[371] A10: Eu acho que seria três à sétima. Porque eu tenho sete cadeiras e cada cadeira eu tenho três pessoas que podem sentar. ((Elabora um procedimento com os números presentes no enunciado e semelhante ao procedimento realizado em problema de arranjo com repetição))

A3: Três à sétima, é professor?

P: Três à sétima? Vejam só, Olhem. Na questão que vocês comentaram do código, a gente tentou escrever algum código, então vamos nos colocar [...] Nessas questões de Análise Combinatória algumas vezes a gente tem que se colocar na ação da pessoa, no caso aqui em três pessoas para se sentar. Então pergunto a vocês o que acham das opções dadas? Temos as opções que vocês disseram: ((Escreve no quadro)) – $7 \times 7 \times 7$; outra que era 21; e a última foi 3^7 . ((IPA 14 Incerteza))

- [372] P: A primeira pessoa ao sentar ela tem quantas opções de cadeira? ((IPA4 – Focalização – Professor modifica o foco do problema para a contagem de possibilidades de cada etapa))
- [373] A1: sete / Alunos: sete
- [374] P: A segunda pessoa? ((IPA4 – Focalização))
- [375] A1: sete
- [376] A8: seis
- [377] P: Seis ou sete? ((IPA14 gerir a incerteza))
A1: Sete / A8: Acho sete / A2: seis
P: Vamos lá defendam suas ideias!
- [378] A4: Se já está sentado é seis./A2: Se um já está sentado então são seis!
- [379] P: Então é seis ou sete?
- [380] A8: Seis./ Alunos: é seis. [...]
- [385] P: [...] Vamos continuar com a pergunta: Chegou a primeira para sentar, sete opções não é? Isso pelo menos está em consenso, não é? A primeira?
Alunos: Sim / P: A segunda, vamos considerar que a primeira sentou, senão a segunda teria furado a fila e se tornou a primeira...
- [386] A17: É seis
- [387] P: E aí A1?
- [388] A1: Se for considerar assim vai ser seis.
- [389] P: Seis. E a terceira?
- [390] Alunos: cinco
- [391] P: Então vamos considerar assim A1. Certo?/ A1: Certo! [...]
- [396] P: Então pensando desse jeito, que a primeira tem sete opções de cadeira, a segunda terá seis, e a terceira cinco, pensando desse jeito, pergunto a vocês continua alguma daquelas respostas? Possui alguma resposta nova? A2 está balançando a cabeça aí... A1? ((IPA5 – Funil))
- [398] A1: Se for assim então ao todo dá 210.
- [399] P: Por quê? ((IPA14 gerir a incerteza))
- [400] A1: Porque se você multiplicar 7 vezes 6, dá 42 aí vezes cinco dá 210.
- [401] P: A2 e A8 vocês estão falando aí? ((Professor nota a conversa paralela entre dois alunos e traz os pensamentos para discutir em toda sala)) ((IPA Participação 10))
- [402] A2: Eu acho que é 3 vezes 7 vezes 3 vezes 6 vezes 3 vezes 5. ((O aluno propõe procedimento equivocado))
- [403] P: Por que esses 3 vezes.. vezes.. Por quê esse três?
- [404] A2: Porque são três pessoas
- [405] P: Porque são três pessoas... Está um três ali então ele tem que multiplicar de alguma forma não é?... Alguém tem outra ideia? [...] P: Vocês acham melhor a de A2 ou a de A1? ((Muitos alunos preferem a de A2)) ((IPA14 gerir a incerteza))
A6: Eu acho que é A1
P: Olha aí amizade está vendo, uma pessoa preferindo A1! [...] Você pode ter opinião sobre qualquer coisa na vida não é verdade?[...] Mas no caso aqui de Matemática, a gente está trabalhando com alguma contagem, o que ela está opinando faz sentido, ou é um cálculo...((faz um gesto indicando que é ruim))
A8: Acho que de A1.
- [406] A2: Podia ser também... três vezes sete vezes dois vezes seis vezes um vezes cinco, Porque vai saindo de cada um um! ((O aluno propõe procedimento equivocado))
Alunos: riem
- [407] P: Poxa!!!! ((Anota no quadro 3x7x2x6x1x5)) Entendi! Porque vai diminuindo aqui não é ((aponta para o três, dois, um)) e aqui também não é ((aponta para o sete, seis, cinco))

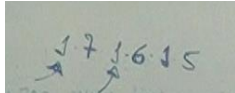
[397] P: [...] Vou pegar essa sugestão de A2 aqui ((aponta para $3 \times 7 \times 2 \times 6 \times 1 \times 5$))... Na primeira escolha concordo contigo que são sete cadeiras, mas eu tenho quantas pessoas ali na primeira escolha? ((IPA5 – Funil))

[408] A2: Três?

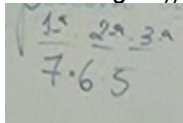
[409] P: Não, como foi que eu disse? A primeira pessoa chegou... Eu tenho quantas pessoas ali.

[410] A2: Uma pessoa?

[411] P: Então eu tenho uma pessoa só escolhendo... Então esse teu três aqui não seria três, seria um! O que acontece é que na segunda escolha, também seria um. Porque é outra pessoa que está escolhendo. Então para gente não ficar com esse pensamento... ((registra no quadro alterando os números por um)) ((IPA5 – Funil))



P: Então A2, na verdade, o que você está pensando aqui agora, pensando realmente que tem uma pessoa... é o que A1 estava discutindo antes. Porque retoma o $7 \times 6 \times 5$. A primeira pessoa tem sete opções de cadeira, a segunda pessoa tem seis e a terceira pessoa tem cinco ((apresenta uma notação bastante comum para problemas combinatórios, conhecida como Princípio Fundamental da Contagem))



P: A1 ((faz um sinal de positivo)) ((Alunos batem palma))

A1: É bom assim! Porque a pessoa está aqui participando, dando opinião e o pessoal só faz agitar. ((Alunos batem mais palmas))

Fonte: Acervo da Pesquisa

Essa configuração didática foi categorizada como dialógica pois o professor permite a exploração dos alunos, sendo responsável apenas pela institucionalização do conceito. No Extrato 46, foi constatado o uso de diferentes padrões de interação professor-aluno. O que apresentou mais frequência durante a observação foi IPA14 de gestão da incerteza. Com base no exposto, observa-se que a incerteza foi utilizada para concretizar a comparação entre as diferentes propostas de procedimentos realizadas pelos estudantes. Verifica-se que o trabalho com a incerteza dos alunos (CLARKE, 2001), pode potencializar as ações de explicação sugeridas por Holton e Thomas(2001), além de mostrar-se essencial no trabalho com a resolução de problemas combinatórios.

O padrão funil - IPA 3 foi utilizado para a validação e institucionalização da solução correta do problema combinatório. Nota-se que para chegar à solução o professor fez perguntas, partindo da solução apresentada pelo aluno direcionando e conduzindo para a resposta.

No padrão focalização - IPA4 o professor faz perguntas que subdividem o problema inicial, em uma situação de quantificar o número de possibilidades existentes em cada etapa de escolha, mas ainda permite que os alunos continuem a exploração do problema autonomamente.

Por se tratar da primeira vez que se discutia na sala o problema de *arranjo*, as ideias que os alunos apresentam mostram pensamentos justificados pelas diferentes experiências. Padrões que permitam essa exploração, explicação podem auxiliar na compreensão do professor das dificuldades que os alunos apresentam. Menezes, Ferreira, Martinho e Guerreiro (2014, p.151) afirmam que “[...] os padrões de funil e de focalização resultam de respostas diferentes do professor face a dificuldades evidenciadas pelos alunos, direcionando-os para o seu próprio conhecimento”. Considera-se que, nesse caso, o padrão de focalização auxiliou na compreensão de características do problema de *arranjo*, pois sistematizou uma divisão do problema em decisões mais simples, utilizando a técnica T1 de explicitação da quantidade de possibilidades existentes em cada etapa, gerando processos argumentativos, e nesse caso a proposição por um aluno do procedimento correto.

No Extrato 46, observa-se que os alunos participaram e exploraram a situação, propondo diferentes soluções para o problema, e pode-se afirmar que cada uma representa um estado do raciocínio combinatório, ou seja, uma ideia que representa as intuições e interpretações dos alunos ao longo de seu desenvolvimento.

No Extrato 47 se discute um episódio vivenciado na quinta aula na discussão de outro problema de arranjo

Extrato 47 – Exemplo da Aula 5 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Participação – (IPA10), Devolutiva (IPA13) e Gestão da Incerteza (IPA13) – CD28

[930] P: ((Se referindo a questão “Numa empresa, 10 de seus diretores são candidatos aos cargos de presidente e vice presidente. Quantos são os possíveis resultados da eleição?”)) “O que eu venho dizendo com relação a essas questões de Análise Combinatória, é tentar entender o que a questão está propondo. A questão está falando sobre o que? Qual é o tipo de ação que está acontecendo?”

A2: (murmura) Eleição /P: Fala mais alto A2 que eu não ouvi daqui. (IPA10 Participação)

A2: Eleição...eleições.

[931] P: Eleição! Uma eleição que nós temos dez candidatos. Então está se falando de eleição.... Sugestões? ((IPA14 gerir a incerteza))

A8: Para presidente tem dez pessoas e para vice nove?

[932] P: Repetindo, e falando um pouco mais alto o que A8 está falando ali [...] Para presidente temos dez e para vice nove. Vocês concordam ou não?

A3: Eu concordo.

P: Por quê? ((IPA14 gerir a incerteza))

[933] A8: Porque já tem um presidente na outra.

[934] A3: É. A pessoa não vai poder ser presidente e vice ao mesmo tempo, não é?

A4: Claro que não.

P: Então seria... Qual seria a resposta A17, segundo a proposta? (IPA10 Participação)

A17: Noventa.

[935] P: Eu tenho dois números dez e nove, o que eu vou fazer com eles? ((IPA14 gerir a incerteza))

A8: Multiplica.

A17: Multiplicar.

[936] P: Multiplicar? Então vai dá noventa? ((escreve no quadro, coloca p para presidente e VP para vice)) A3 disse que concordou. Alguém mais discorda ou concorda?

[937] A7: Eu não entendi por que dá noventa?

[938] P: Agora! A8 repete aí, por favor, já que a ideia foi sua. (IPA13 – Devolução)

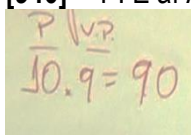
((A8 e A7 riem, A7 vira para A8 esperando a resposta)).

[939] A8: Para presidente são dez pessoas e para vice nove.

A7: Sim.

A8: Não poderia ser dez, porque ele não poderia ser presidente e vice ao mesmo tempo, entendeu? Ai é só isso, a gente multiplica dez por nove.

[940] P: E aí A7, concorda com essa ideia?



P VP
10.9 = 90

((A7 concorda com um aceno positivo de cabeça)).

Fonte: Acervo da Pesquisa

No Extrato 47, de uma configuração dialógica, observa-se quando o professor deixa a validação ser realizada por um aluno (938), entregando a ele a responsabilidade pela explicação sobre a dúvida do colega. Nesse caso, considera-se um exemplo do Padrão de Devolução. A responsabilidade pela resolução de um problema combinatório é algo que deve ser assumido pelos estudantes. O professor na função de ensinar Combinatória pode proporcionar mais momentos em que eles assumam essa função. Ressalta-se que ao devolver a responsabilidade ao aluno, o professor permite a interação entre os alunos, gerando a ação de explicação.

No Extrato 48 foi discutida uma configuração didática magistral, desenvolvida na quarta aula em um problema de *permutação*. Vale situar que alguns pontos dessa configuração tinham sido abordados na aula anterior e são reconsiderados nessa aula pelo professor.

Extrato 48 – Exemplo da Aula 4 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Focalização (IPA4), Recitação (IPA8), Recordação (IPA0) e Resposta (IPA12) – CD24

[723] P: [...] Lembram de alguma coisa que eu falei depois das questões? Lembram de alguma coisa que eu disse? Que eu usei o nome de uma pessoa? ((IPA9 - Padrão Recordação))

A19: O nome da pessoa foi Renato/ A10: Foi meu nome!

P: A10 se lembra, foi o dele! E era sobre o quê, que eu estava falando?

[724] A10: Trocas. As trocas que você vai fazer com o meu nome!

A19: Ah foi! / A8: O senhor fez a troca.

[725] P: A troca?

[726] A8: Pegou o nome de A10 e fez várias combinações...

P: Combinações de que?

A8: De letras

[727] P: Que letras?

[728] A8: As do nome dele.

[729] P: Certo. O nome daquilo era Anagrama...

A10: Anagrama/ A8: Anagrama

P: Eu estava fazendo não eram combinações, era permutando... Lembra que eu falei esse vocabulário?... Era permutação, ou seja, trocas. Eu trocava as letras... Eu tinha o nome RENATO ... e aí... a pergunta foi ((escreve no quadro Análise Combinatória e uma questão “Quantos anagramas podemos escrever com as letras da palavra RENATO?”)) ((IPA12 - Padrão Resposta))

[730] A10: Não me lembro do resultado agora, mas tinha que fazer...

P: Não lembra do resultado...

[731] A8: O senhor fez o anagrama, inverteu as letras...

A10: Foi /P: Sim?

[732] A8: Ai no caso quantas palavras pode ser formar com o nome Renato, só que meio desarticulado, desordenado!

[733] P: Ai quando algumas vezes, as palavras que a gente constrói aqui não tem um sentido, algumas vezes de focar na língua materna, aí a gente não usa o termo palavra, usa o termo anagrama, para evitar essas confusões. Uns exemplos aqui já escrevi isso ((escreve no quadro RENAOT)) Sei lá posso ter... Olha, mas também teríamos outros anagramas e como A20 estava tentando colocar “O senhor escreveu alguma coisa era as letras A, B, C de outra questão”, mas a gente poderia calcular os anagramas assim ((escreve os tracinhos no quadro)) não é isso?

A20: uhum

[734] P: Quando eu fosse escrever a primeira letra aqui ((aponta para o primeiro traço)) eu teria quantas opções de letra? ((IPA4 - Padrão Focalização))

[735] Alunos falam seis.

((Professor faz um gesto com a mão indicando o próximo e os alunos continuam a dizer a sequência ao mesmo tempo))

Alunos: cinco, quatro, três, dois, um. ((o professor escreve no quadro a sequência))

[736] A7: Está todo mundo sabido já!

[737] P: Isso aqui dá? ((IPA8 - Padrão Recitação))

[738] A20: Setecentos e vinte ((Professor escreve no quadro 720))

[739] P: A gente poderia escrever isso com a notação assim ((escreve no quadro 6!)) Lembram? Qual era o nome dessa exclamação? ((IPA8 - Padrão Recitação))

[740] A8: Ah é o fatorial!

[741] P: Isso! É a ideia de Fatorial ((escreve fatorial no quadro)) O que o livro fala em relação ao fatorial? Fatorial de um número natural n é representado por $n!$ e é definido por $n! = n.(n-1)(n-2)...$

2)...2.1 e agora eu vou multiplica o n vezes o seu antecessor, vezes o antecessor dele e assim sucessivamente até chegar ao um. ((Escreve no quadro a sequência da multiplicação falada)). todos os números do n até 1. ((IPA8 - Padrão Recitação))

[742] P: Ou seja, se o n fosse seis? Como vocês disseram é 720, então seria seis vezes cinco vezes quatro vezes três vezes dois vezes um.

[743] P: Se o n fosse dez, então dez vezes nove vezes oito vezes sete vezes seis... certo? ((Alunos parecem copiar o que o professor coloca no quadro))

[744] P: Ainda na definição ele vai falar do um fatorial e do zero fatorial ((professor escreve no quadro)). Cuidado aqui viu, principalmente no zero fatorial. Por definição zero fatorial é um. Ou seja, se não fosse assim, a gente ia ver lá na frente teriam coisas que não iriam dá certo, se o zero fatorial não fosse definido como um. Então, a Matemática utiliza também desses artifícios. Define-se assim, porque se não for assim vai dificultar o que a gente quer lá na frente. Bem, essa definição tem no livro. ((IPA8 - Padrão Recitação)).

Fonte: Acervo da Pesquisa

Observam-se poucas falas dos alunos na configuração didática magistral, na qual o professor estabelece uma relação tradicional. A regularidade de interação mais utilizada foi o padrão de recitação – IPA8, que geralmente reflete uma interação em que os alunos escutam mais que falam (MENEZES, 2004).

No Padrão de Indicativo de Resposta – IPA12, o professor, no caso exposto, faz perguntas que ele mesmo responde. Nesse sentido, diminui a responsabilidade/participação dos estudantes no processo de aprendizagem, posto que faz com que eles não apresentem as diferentes recordações sobre a aula passada. De acordo com Menezes; Ferreira; Martinho; Guerreiro (2014, p.147) “A resposta do professor tanto pode encorajar a dependência dos alunos em relação ao próprio professor como pode favorecer o desenvolvimento matemático dos alunos”.

Durante as diferentes configurações didáticas foram observadas poucas vezes esse padrão (IPA12), que sofria variações, como dar pistas aos alunos ao invés de responder diretamente ou fornecer a primeira sílaba da palavra para que complementassem, conforme se exemplifica no Extrato 49.

Extrato 49 – Exemplo da Aula 4 – Padrões de Interação Professor-Aluno – Resposta (IPA12) – CD23

[680] [...] P: Permutação, muitas vezes você resolve com esse cálculo em fatorial. O que significa permutar? Alguém sabe o que significa permuta? ((IPA14 gerir a incerteza))

[681] A3: Muta é de mutante, per eu não sei.((O aluno tenta apresentar uma divisão etimológica da palavra, fazendo relação com o que conhece))

A22 Professor, mutação é mutante.

[682] P: Mutação   mutante! Mas o que tem no mutante? [...] Qual a característica que tem ali interessante? ((IPA14 gerir a incerteza))

[683] A13: Professor, os genes que são alterados.

[684] P: São os genes alterados no caso dos mutantes. Mas é uma alteração que eles falam outros vocabulários algumas vezes. São diferentes, mas teve um momento que houve uma troca... uma troca... ((IPA12 - Padrão Resposta))

[685] A13: Trocação

[686] P: Quase. Uma troca. Alteração. Uma troca. Então Permutar, significa você fazer essas trocas. [...] ((IPA12 - Padrão Resposta))

Fonte: Acervo da Pesquisa

Após esses extratos pode-se perceber a utilização do padrão de incentivo a resposta em uma configuração didática dialógica. No episódio 49 o professor utilizou o padrão da incerteza para explorar o que os alunos pensavam sobre o termo permutação. A gestão sobre o tipo de respostas apresentado pelo professor ao longo da resolução de problemas combinatórios ou mesmo na apresentação de termos/notações de Combinatória é algo a ser considerado pelo professor durante a aula.

Ao realizar a comparação entre esses quatro episódios, verifica-se que as regularidades encontradas nos padrões de interação professor–aluno variam também de acordo com relação as configurações didáticas adotadas, que podem minimizar ou ampliar a participação e/ou responsabilidade dos estudantes na aula. Nesse sentido, vale considerar o que afirma os autores indicados:

[...] não basta dispor de situações ricas ou criar um espaço para que os alunos expressem o que pensam, nem é suficiente avaliar suas ideias como certas ou erradas. É preciso que o professor questione e problematize as ideias dos alunos, gerenciando as distintas configurações e padrões de interação para estabilizar a negociação de significados e otimizar a aprendizagem. (ASSIS; FRADE; GODINO, 2013, p 754).

Desse modo, pode se inferir que as variações desses padrões para que haja a institucionalização de propriedades e/ou algumas fórmulas em Combinatória tornam-se indispensáveis. Em especial, os padrões de gestão da incerteza e de devolução favoreceram a responsabilidade dos alunos pela resolução de problemas combinatórios e a apresentação de explicações/ justificativas para os mesmos. Momentos como esses são necessários para possibilitar novas aprendizagens em Combinatória.

6.6 CONFIGURAÇÃO COGNITIVA–AFETIVA IMPLEMENTADAS NAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Nessa seção são apresentados os caminhos traçados pelas trajetórias cognitivas e emocionais durante as aulas. De acordo com Godino, Contreras e Font (2006, p.6), essas trajetórias representam respectivamente a “[...] cronogênese dos significados pessoais dos estudantes” e a “[...] distribuição temporal dos estados emocionais de cada aluno com relação aos objetos matemáticos”.

Focalizaram-se momentos pontuais das trajetórias que foram observados durante as aulas, categorizando os significados pessoais de alguns estudantes, e, ainda, alguns estados afetivos expostos nelas. Subdividiu-se nas Seções 6.6.1 e 6.6.2 a análise das trajetórias cognitivas e afetivas observadas ao longo das aulas.

6.6.1 Trajetórias cognitivas observadas nas aulas de Combinatória de Ensino Médio

As configurações cognitivas representam uma rede de relações estabelecidas dos sistemas de práticas pessoais na implementação de uma configuração epistêmica. Para Godino, Batanero e Font (2008, p.21) “A descrição das aprendizagens que vão sendo construídas ao longo do processo se realiza mediante as configurações cognitivas”.

Godino (2017, p.57) afirma que as configurações didáticas no EOS se subdividem em “entidades situacionais, linguísticas, procedimentais, conceituais, proposicionais e argumentativas o que permite uma análise mais próxima das aprendizagens dos alunos”.

Nessa pesquisa, para apresentar as configurações cognitivas subdividiram-se as configurações didáticas por tipo de problema combinatório e não por aulas. Essa escolha se justifica, pois se podem constatar as alterações das compreensões e percepções dos estudantes na resolução do tipo de problema durante as aulas de Combinatória.

Assume-se que as configurações cognitivas se interessam pelo raciocínio dos alunos no processo de resolução de problemas combinatórios apresentados na aula. Nessa perspectiva, as características dos raciocínios foram observadas por meio das respostas, dos procedimentos empregados, argumentos utilizados e dos erros cometidos ao longo das aulas.

Vale ressaltar que as características da cronogênese observada nesse trabalho, mesmo parcialmente consideradas, só foram possíveis de serem observadas devido à postura do professor que oportunizava aos alunos a responsabilidade de resolver o problema e justificar a solução encontrada.

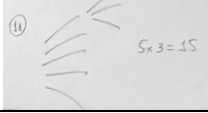
A postura docente de, geralmente, não apresentar respostas e de dar o tempo necessário para que os alunos respondessem e negociassem os diferentes significados entre eles, bem como de possibilitar a captação em vídeo de diferentes soluções e argumentos, facilitou a emergência dos significados pessoais dos estudantes, ressaltando essa cronogênese.

As configurações didáticas que tratam do mesmo tipo de problema combinatório nas aulas foram organizadas e são enumeradas a seguir:

1. Problemas de *produto de medidas* apresentados nas configurações didáticas: CD8, CD14, CD16, CD18, CD34, CD37, CD39;
2. Problemas de *permutação* nas configurações didáticas: CD13, CD21, CD23, CD24, CD40, CD41;
3. Problemas de *arranjo* nas configurações didáticas: CD19, CD22, CD25, CD28, CD35, CD38.
4. Problemas de *combinação* nas configurações didáticas: CD17, CD26, CD30, CD31, CD32, CD33, CD36, CD42, CD43.
5. Problemas de *arranjo com repetição* nas configurações didáticas: CD3, CD4, CD5, CD6, CD7, CD9, CD12, CD20.

Dessa forma, podem ser observadas algumas das dificuldades apresentadas pelos estudantes na discussão específica dos tipos de problemas combinatórios. A fim de exemplificar as discussões dos elementos cognitivos, foram escolhidas algumas configurações didáticas de cada problema e, posteriormente, sistematizados alguns quadros, apresentando as respostas e discussões dos estudantes (significados pessoais). No Quadro 40 apresenta-se uma configuração a-didática na qual os alunos discutem e propõem procedimentos de resolução para o problema de *produto de medidas*.

Quadro 40 - Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Produto de medidas

Elementos	Significados pessoais de estudantes em um problema de Produto de medidas CD39
Problema:	(Problema proposto na sexta aula) Um turista vai fazer uma viagem, indo de ônibus e voltando de avião. Seu agente de viagem lhe oferece 5 opções de roteiros de ônibus e 3 de avião. De quantos modos diferentes esse turista pode fazer a mesma viagem? <u>A1, A8: Resposta Errada;</u> <u>A2, A3: Resposta Correta.</u>
Elementos linguísticos	<u>Conversões observadas:</u> Linguagem Natural para PFC inadequado (A1, A8) -Linguagem Natural para árvore de Possibilidades(A3) - Linguagem Natural para PFC (A3) <u>Termos utilizados:</u> Distintos(A8); Repetir (A8)
Procedimentos	<u>Procedimentos equivocados:</u> - A1: Olha, tu achas que ficaria cinco vezes cinco vezes cinco ? ((Uso do PFC inadequado - Segue a ideia de problema de arranjo com repetição)). - A8: Ou cinco vezes quatro vezes três ? ((Uso do PFC inadequado - Segue a ideia de problema de arranjo)). <u>Procedimentos corretos:</u>  Proposta de árvore produzida pelo grupo A2, A3(945) ((Resposta correta e representada por uma árvore de possibilidades incompleta))
Propriedades	Uso da árvore para representar número pequeno de possibilidades
Argumentos	Argumento com estruturas combinatórias. A8: [...] Porque ele aqui <u>não fala distintos</u> , mas se ele fosse pegar uma trajetória ele não poderia pegar outra, entendeu? <u>Assim não poderia repetir.</u> (Argumento erroneamente apresentado para a proposta do procedimento)

Fonte: Acervo da pesquisa

Observa-se que a negociação de significados pessoais com relação à interpretação da situação de *produto de medidas* caminha sobre diferentes tipos de procedimentos e justificativas.

No caso específico, alguns alunos (A1, A8) apresentam o uso de PFC de modo incorreto baseados, respectivamente, em problemas de *arranjo com repetição* e *arranjo simples*. O argumento foi utilizado para justificar um procedimento equivocado, e seu uso traz algumas propriedades de Combinatória como a repetição que não se aplica à situação.

No episódio seguinte, apresentado no Quadro 41, discute-se os significados pessoais de estudantes na resolução em classe de um problema de *arranjo*.

Quadro 41 - Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Arranjo

Elementos	Significados pessoais de estudantes em um problema de Arranjo CD12
Problema:	(Problema proposto na segunda aula) Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório só estão vazias 7 cadeiras. De quantas maneiras eles podem ocupar essas cadeiras? <u>A1, A2, A3, A9, A17 Resposta Errada;</u> A1: Resposta Correta.
Elementos linguísticos	<u>Conversões observadas:</u> - Linguagem Natural para PFC inadequado (A1, A2, A3, A9, A17); - Linguagem Natural para PFC (A1)
Procedimentos	<u>Procedimentos equivocados:</u> (1) A1, A17, A9: $3 \times 7 = 21$ ((Uso do PFC inadequado – Utiliza os números presentes no enunciado e propõe uma multiplicação)). (2) A1: $7 \times 7 \times 7$? ((Uso do PFC inadequado - Segue a ideia de problema de arranjo com repetição)). (3) A3: três à sétima ((Uso do PFC inadequado - Segue a ideia de problema de arranjo com repetição em conjunto com a ideia de utilizar os números do enunciado da questão)). (4) A2, A8: $3 \times 7 \times 3 \times 6 \times 3 \times 5$ ((Uso do PFC inadequado – Utiliza um dos números do enunciado representando que há 3 pessoas para escolher cada posição)). (5) A2: $3 \times 7 \times 2 \times 6 \times 1 \times 5$ ((Uso do PFC inadequado – Utiliza um dos números do enunciado representando que há 3 pessoas para escolher cada posição, mas depois de escolhido vai diminuindo)). <u>Procedimento correto:</u> (6) A1: $7 \times 6 \times 5 = 210$
Propriedades	Diferentes interpretações do uso do PFC
Argumentos	<u>Argumento com base na estrutura do real:</u> A9: São três pessoas professor! P: Três pessoas?. A17: É três! Três vezes sete é vinte e um. ((Com base nos números do enunciado incorreto)) <u>Argumento que se fundam na estrutura do real:</u> A1: Porque professor veja só. Na outra aula você fez aquela conta lá, que dava cinco vezes cinco, vinte e cinco! Aí aqui seria três vezes sete. (argumento com base nas experiências anteriores em um modelo discutido em sala- incorreto)

Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse episódio não se havia apresentado a definição ou fórmula de *arranjo* e os alunos são convidados a apresentar formulações e argumentos. Por se tratar de uma configuração didática dialógica, o professor deixa a responsabilidade da exploração do problema pelos alunos, assumindo padrões de gerir a incerteza, focalização, funil como visto na seção anterior.

Observa-se nos alunos variadas interpretações da situação, o que se traduz em diferentes usos do PFC inadequadamente. Navarro-Pelayo (1994, p.41) afirma que “muitos dos erros que os alunos apresentam se fundamentam em estratégias corretas que são aplicadas inadequadamente”. Vale ressaltar que Borassi (1987, p.7, tradução própria) considera que “os erros podem ser usados

como recursos motivacionais e como ponto de partida para a exploração matemática criativa, implicando atividades valiosas de introdução e resolução de problemas”.

Dessa forma, algumas das respostas sugeridas pelos estudantes apresentam elementos cognitivos do desenvolvimento do raciocínio combinatório sobre o uso do PFC apresentados durante a discussão do problema. Consegue-se perceber nas justificativas atribuídas para esses procedimentos equivocados níveis pontuais do raciocínio combinatório:

1. *Utilizar equivocadamente os números presentes na situação e propor operações.* Nesse caso o aluno parece compreender o problema como produto de medidas;
2. *Utilizar a ideia de arranjo com repetição para resolver o problema.* Nesse caso, como o professor iniciou a trajetória com um problema de arranjo com repetição, observa-se em outras situações alunos proporem a resolução com a ideia de multiplicação de números iguais, ou mesmo na representação de potenciação.
3. *Utilizar os números presentes na situação e a ideia de arranjo com repetição,* apresentando uma junção das ideias anteriores;
4. *Utilizar o contexto e o número de pessoas na situação para as explicitações corretas do número de possibilidades das etapas de escolha.* Como o professor utiliza-se do artifício de subdividir o problema na quantificação e explicitação de elementos de cada etapa, o aluno com base na discussão e relacionado ao contexto da situação propõe o procedimento.
5. *Utilizar a percepção que cada pessoa escolhe uma vez para as explicitações corretas do número de possibilidades das etapas de escolha.*
6. *Aplicar corretamente o PFC.*

Constata-se a importância de situações respondidas anteriormente e a noção compreendida no contexto da situação faz parte das proposições de resposta dos estudantes. Por se tratar de um problema combinatório com o número alto de possibilidades, procedimentos enumerativos não podem ser utilizados. Como justificativa, em alguns momentos o professor enfatiza uma concepção que a Combinatória no Ensino Médio deve permear situações que utilizem o PFC, tal como se apresenta no Extrato 50 a fala do professor.

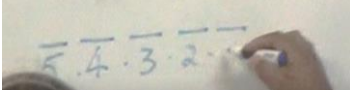
Extrato 50 – Exemplo da Aula 6 – Ênfase ao uso do PFC em detrimento de procedimentos enumerativos – CD33

P: [...] Nesse caso aqui inicial nós estamos é tentando, através de multiplicação, fazer contagem. Eu não estou precisando descrever todas as placas para poder contar essa mesma opção. Eu estou utilizando cálculos matemáticos para chegar. Lembra que na aula anterior a gente descreveu todos os 25 códigos e eu cheguei a perguntar... Tem uma forma mais econômica? E vocês Não...vamos escrevendo.. E a gente foi escrevendo... Essa é que é a ideia ... A ideia é sair daquela situação de descrição, porque podemos encontrar situações nas quais não dá para descrever tudo ((aponta para as situações do CPF e das placas)) a gente vai ter que encontrar alguma técnica uma delas é essa!

Fonte: Acervo da Pesquisa

O próximo exemplo, disposto no Quadro 42, resume os significados pessoais apresentados na discussão de um problema de *permutação*. A discussão ocorreu na terceira aula, durante a Configuração Didática 21 na resolução de um problema com ordem de grandeza maior que 100.

Quadro 42 – Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Permutação

Elementos	Significados pessoais de estudantes em um problema de Permutação – CD21
Problemas	(Problema proposto na terceira aula) De quantas maneiras distintas podem ser colocados cinco livros lado a lado em uma prateleira? <u>A3, A6 Resposta Errada; A3: Resposta Correta.</u>
Elementos linguísticos	<u>Conversões observadas:</u> Linguagem Natural para PFC inadequado Linguagem Natural para Princípio Aditivo equivocado (A6) - Linguagem Natural para PFC (A3)  ((uso do registro dos tracinhos))
Procedimentos	<u>Procedimentos equivocados:</u> -A3: $25 = 5 \times 5$ -A6: $1+2+3+4+5 = 15$ <u>Procedimento correto</u> A3: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
Propriedades	Discutem sobre quando somar ou multiplicar O uso do Princípio Aditivo ou o PFC
Argumentos	<u>Argumento que se fundam na estrutura do real:</u> A6: É como se fosse cinco cadeiras, entenderam. E eu fosse colocar um livro em cada cadeira. (argumento com base nas experiências anteriores em um modelo discutido em sala - incompleto)

Fonte: Acervo da pesquisa

Nesse caso, observaram-se duas respostas equivocadas. A primeira com base na multiplicação dos números presentes no enunciado, e a segunda a quantificação correta das possibilidades de cada etapa, no entanto, o aluno faz a soma das possibilidades. Para resolver algumas dúvidas que surgiram com relação à multiplicação ou soma na situação, o professor fez uso da apresentação de algumas ordenações de lápis, para justificar que a modificação de apenas uma posição gera uma nova possibilidade.

O próximo exemplo, apresentado no Quadro 43, versa sobre problema de *combinação* apresentado na quarta aula.

Quadro 43 – Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de problemas de *combinação*

Elementos	Significados pessoais de estudantes em um problema de <i>combinação</i> CD28
Problema	(Problema proposto na quarta aula) Uma prova é composta de cinco questões, das quais o aluno deve responder três. De quantas formas diferentes ele poderá escolher as três questões? A15, A18: Resposta Errada; A3; A8: Resposta errada; A6: Resposta Correta.
Elementos linguísticos	<u>Conversões observadas:</u> -Linguagem Natural para PFC inadequado (A15, A18) - Linguagem Natural para enumeração incompleta (A3, A8) - Linguagem Natural para apenas resposta
Procedimentos	<u>Procedimentos equivocados:</u> A15: 3×5 (Utiliza incorretamente os números no enunciado do problema)) A18: $5 \times 4 \times 3$ ((PFC incorreto, ordena incorretamente o problema)) <u>Procedimentos incompletos:</u> -A3: Enumera poucas possibilidades sem sistematização: Questões 1,2,3 ou 2,3,4. A8, A3: Enumeração incompleta ((professor acompanha e registra no quadro, faltam as possibilidades 145, 245)) {(123; 124; 125; 134;135;234;235;345)}((registro no quadro)) <u>Procedimento Correto:</u> A6: 10 ((Apenas resposta correta produzida a partir da explicação do professor, aplicou a regra de três para encontrar a solução))
Propriedades	Compara esse problema a outro problema de arranjo -Alunos percebem a não ordenação A7, A15, A21; (corretamente) -Alunos que ficam em dúvidas com a ordenação: A3, A8;
Argumentos	<u>Argumento com base na estrutura do real:</u> A6: Eu tiro as mais difíceis.../ A8: Eu escolho as mais fáceis! (discutem características das questões no contexto sem tratar do problema);/ A7: Professor a prova tem duas pessoas que escolheu 123 e 321 , na hora que a pessoa for responder vai ver um, dois, três. Ele não vai ver se ele vai responder a segunda, depois, a terceira, depois a primeira não. (a partir do contexto identifica a propriedade da <i>ordenação</i> corretamente); <u>Argumento com base em estrutura Combinatória:</u> Enumeração incompleta para justificar o valor encontrado. A3, A7, A8 tentam enumerar as dez possibilidades

Fonte: Acervo da pesquisa

Tal configuração didática foi classificada em dialógica/magistral, pois há momentos em que o professor teve que intervir, fazendo proposições para auxiliar os alunos. Vale salientar que essa aula teve o objetivo de comparar os problemas de *arranjo* e *combinação*, e essa discussão foi realizada antes da apresentação de fórmulas e notações relativas a esses problemas.

Por se tratar de um problema de *combinação* com baixo número de possibilidades, e por ser a primeira vez que se discutia a necessidade de uma divisão de casos repetidos ou já contados (uma regra do quociente intuitiva com base na propriedade que o número de combinação equivale à divisão do número de *arranjo* pelo número de *permutação* de elementos que serão escolhidos), o professor utilizou de argumentos comparativos entre um problema de *arranjo* previamente discutido com o problema de *combinação* explicitado. Essa comparação fez com que surgisse, por dificuldades de alguns alunos, a necessidade de explicação sobre o invariante da *ordenação* e principalmente porque era necessário realizar a divisão.

Dessa forma, foi proposta a enumeração das possibilidades totais do problema de *combinação*. A enumeração iniciou de forma não sistemática, o que gerou algumas recontagens. E mesmo depois de sistematizado, fixando um elemento inicial e alterando os demais, houve necessidade da intervenção do professor, pois os alunos não esgotaram o total de possibilidades. Acredita-se que a dificuldade possa ser justificada pela quantidade de elementos e a quantidade de etapas. A partir dessa situação, poderia ter sido discutida a propriedade da igualdade do complementar da combinação, ou seja, escolher três em um grupo de cinco, representa a mesma quantidade de retirar dois em um grupo de cinco.

Navarro-Pelayo (1994) indica que alguns outros erros em Combinatória se justifica na impossibilidade de enumeração das possibilidades. English (2005, p.131) advoga que o “currículo de Matemática nos anos iniciais e finais precisa incluir novas situações problemas que desafiem crianças a explorar ideias e processos combinatórios, sem a instrução direta do professor”. Defende-se que essa perspectiva também pode fazer parte das aulas de Combinatória no Ensino Médio.

Outro episódio, exposto no Quadro 44, diz respeito a um problema de arranjo com repetição no contexto de números, com alta número de possibilidades o que inibe procedimentos enumerativos.

Os procedimentos equivocados apresentados ignoram a condição de que zero não conta quando representado no início do número. Vale salientar que em outros momentos das aulas houve a discussão sobre a condição do zero na frente de códigos o que é geralmente permitido, por isso o professor auxilia no argumento, trazendo um questionamento com base nas relações matemáticas já estabelecidas.

Quadro 44 - Exemplo de Significados pessoais de estudantes do Ensino Médio na Resolução de Problemas de Arranjo com repetição.

Elementos	Significados pessoais de estudantes em um problema de Arranjo com Repetição – CD20
Problemas	(Problema proposto na terceira aula) Quantos são os números de quatro algarismos? <u>A1, A18 Resposta Errada;</u> ; A1, A18: Resposta Correta.
Elementos linguísticos	<u>Conversões observadas:</u> - Linguagem Natural para PFC inadequado - Linguagem Natural para PFC (A1, A18 - uso do registro dos tracinhos)
Procedimentos	<u>Procedimentos equivocados:</u> -A1: É. Seria 10 embaixo de cada tracinho, pois são 10 opções de números de zero a nove. $10 \times 10 \times 10 \times 10$ -A18: 10 elevado a 4 <u>Procedimento correto:</u> A1, 18: $9 \times 10 \times 10 \times 10$
Propriedades	Condições do uso do zero na primeira posição do número
Argumentos	Argumentos que utilizam relações matemáticas: P: Em geral, na Matemática eu considero isso ((Se referindo ao zero na frente do número))? A2: Não/ A1.A3: Não

Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao analisar as diferentes configurações didáticas por problema combinatório foi possível classificar algumas respostas apresentadas pelos estudantes (significados pessoais) que apresentavam discrepâncias em relação aos significados institucionais implementados, sendo possível de observar em aula conflitos semióticos de Combinatória.

A noção de conflito semiótico foi apresentada no EOS “[...]” como uma explicação dos erros, dificuldades e obstáculos dos alunos na aprendizagem de

conteúdos matemáticos específicos e, em geral, das dificuldades que surgem na comunicação em sala de aula”.(GODINO; FONT; WILHELMI; LURDUY, 2010, p.255)

Os conflitos semióticos de Combinatória foram categorizados e sistematizados de acordo com os elementos a que eram direcionados e organizados na Tabela 15.

Tabela 15 – Conflitos semióticos apresentados na resolução comentada de problemas combinatórios nas aulas de Ensino Médio

Conflitos semióticos observados	PM	P	A	C	AR	T
a.SOBRE LINGUAGEM						
C1. Utilizar incorretamente termos combinatórios	0	2,4	0	0,8	3,9	7,2
b.SOBRE PROPRIEDADES/INVARIANTES						
C2. Identificar incorretamente a ordenação no problema combinatório	0	0	1,8	15,0	0	16,8
C3. Identificar incorretamente a repetição no problema combinatório	0,8	0	2,4	3,1	3,9	10,4
C4: Justificar incorretamente o uso das propriedades em situações ou os procedimentos	0,8	1,6	3,1	2,4	0	8,0
c.SOBRE ENUNCIADOS						
C5. Utilizar incorretamente as informações numéricas presentes no enunciado	0	2,4	1,6	0	3,9	8,0
C6. Interpretar equivocadamente o contexto do problema combinatório	4,7	0	3,9	0	7,9	16,8
d.SOBRE PROCEDIMENTO DE ENUMERAÇÃO						
C7 Apresentar enumeração incompleta	2,4	2,4	0	1,6	1,6	8,0
C8. Enumerar incorretamente as possibilidades de uma etapa de escolha;	0,8	0	0,8	0	2,4	3,9
e.SOBRE OPERAÇÕES						
C9. Apresentar erros em operações aritméticas	0	1,6	0	0	3,9	5,6
C10. Utilizar equivocadamente o princípio aditivo	0	1,6	0	0	0	1,6
C11. Utilizar equivocadamente o PFC	2,4	0	2,4	4,7	5,5	13,6
TOTAL	11,8	11,8	15,7	27,6	33,1	

Legenda: PM – Produto de Medidas; A - Arranjo; P – Permutação; C - Combinação; AR – Arranjo com repetição.

Fonte: Acervo de Pesquisa

A partir dessas tabela verificou-se a necessidade de investimentos dos professores nas propriedades/invariantes da Combinatória, além de discussões

sobre os enunciados dos problemas e as diferentes interpretações que os contextos trazem para esse conteúdo.

Há momentos na aula que o professor percebe a dependência de alunos com relação ao contexto e adverte para outras possibilidades, como por exemplo algumas propriedades de problemas combinatórios, conforme apresenta-se no Extrato 51.

Extrato 51 – Exemplo da Aula 4 – Ênfase a busca de invariantes do conceito de *ordenação* nos contextos propostos nos enunciados dos problemas combinatórios– CD23

[783] P: [...] Então foi uma coisa que eu já comentei aqui nas primeiras aulas, que a gente ia encontrar. Era você olhar para uma questão de análise Combinatória e ter que além de pensar no contexto, procurar identificar se a ordem vai importar ou não na sua escolha.

Fonte: Acervo de Pesquisa

No Extrato 52 observa-se que o professor alerta para a constituição de certos enunciados de problemas combinatórios.

Extrato 52 – Exemplo da Aula 2 – Ênfase sobre o que está implícito nos enunciados de problemas combinatórios – CD11

P: Existem algumas coisas que não estão sendo ditas aqui ((aponta para o enunciado da questão)) [...] Como, por exemplo, o número de letras do alfabeto? A quantidade de algarismos que você pode utilizar? A questão de repetição ou não repetição de elementos? O que estamos fazendo de certa forma nessas questões? Isso tudo tem que se levar em consideração quando se fala Análise Combinatória.

Fonte: Acervo de Pesquisa

No comentário do Extrato 52, o professor alerta para necessidade de complementar as informações que não são descritas e explicitadas no enunciado. Tais atitudes evidenciam que o professor compreende que os alunos possuem essas dificuldades em Combinatória.

Constatou-se, ainda, que os conflitos semióticos foram mais frequentes nos problemas de *combinação* e *arranjo com repetição*. Pesquisas como a de Pessoa e Borba (2010) ao comparar o desempenho de alunos de Ensino Médio na resolução de problemas combinatórios, apontam o de *combinação* como o que possui menor desempenho. Entretanto, a pesquisa não aborda problemas com repetição de elementos.

Araujo e Rocha (2018) ao comparar desempenhos de estudantes de Ensino Médio em problemas de *arranjo* e *combinação com ou sem repetição*, indicam os problemas com repetição como os com piores desempenhos. No

caso dos conflitos semióticos apresentados, aquele que trabalha com a *ordenação* é mais frequente ao invariante da repetição. No entanto, o invariante da repetição é observado em uma variedade de problemas, inclusive naqueles que não possui essa propriedade em sua natureza.

Os problemas de *produto cartesiano* (produto de medidas) são apresentados em pesquisas de Pessoa e Borba (2010) como aqueles com melhor desempenho. Constatou-se percentual equivalente de conflitos semióticos entre os problemas de produto de medidas e permutação.

6.6.2 Trajetórias emocionais observadas nas aulas de Combinatória de Ensino Médio

Para se aproximar dos diferentes fatores que constroem nos alunos o interesse pelas aulas, a participação na discussão, a inclusão no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, a aquisição da responsabilidade pela resolução de problemas foi necessário observar os momentos de auto estima e aversão nas aulas de Combinatória que eram expostos pelos alunos.

Godino, Contreras e Font (2006) estabelecem que a trajetória afetiva se modifica ao longo do processo de e e compreende o fenômeno da devolução (Teoria das Situações Didáticas) como um elemento essencial na implementação dessa trajetória.

De acordo com Gomez-Chacón(2000) para a descrição das emoções que estão em jogo no processo de ensino e aprendizagem se faz necessário o uso de diferentes fontes (interação, entrevistas, entre outras). No entanto, nessa pesquisa, focalizou-se naquelas que são observáveis, ou seja, que se apresentam na interação da sala de aula entre professor – alunos, especialmente, aquelas reações emocionais que são demonstradas pelos alunos, ou por gestos, ou enunciadas durante as aulas.

Dessa forma, para propor a discussão da trajetória afetiva produzida durante as aulas de Combinatória, decidiu-se continuar com a ideia da divisão por tipo de problema combinatório, pois talvez o nível de dificuldade presente no problema combinatório pode ser uma causa para o aluno não assumir a responsabilidade na resolução do problema.

Philipp (2007, p.259) define atitude como: “Maneiras de agir, sentir ou pensar que mostram a disposição ou opinião de alguém”. Gómez-Chacón (2000, p.94) afirma que “[...] as reações emocionais são resultado de discrepâncias entre o que o sujeito espera e o experimentado no momento em que se produz a reação”, portanto, as reações emocionais podem servir de pistas para o professor desenvolver das atividades de sala de aula.

Foram observadas e identificadas *pistas de atitudes positivas e negativas*, compreendidas por Gómez-Chacón(2000, p.115) como “sinais que podem ser observados durante a aula, coletadas na gravação, que permite descrever e corroborar a emoção do estudante”. Portanto, nessa pesquisa compreendemos a trajetória afetiva dos estudantes como as atitudes produzidas durante a resolução de problemas combinatórios e interesses apresentados em forma de questionamentos tanto com relação a propriedades Combinatórias, como com relação a temática desenvolvidas. Tais atitudes podem se apresentar em resposta a propostas do professor, ou na interação com alunos em sala. Na Tabela 16 se apresentam o percentual das dessas atitudes por tipo de problema combinatório.

Tabela 16 – Atitudes positivas e negativas observadas durante as aulas de Combinatória

Pistas de Atitudes positivas observadas	PC	P	A	C	AR	T
RESPONSABILIDADE DE RESOLVER PROBLEMAS						
A1. Assumir compromisso pessoal pelas atividades desenvolvidas	-	3,2	1,6	2,4	11,3	18,5
A2. Apresentar sentimentos de auto estima com relação a matemática ou a Combinatória	-	-	0,85	-	1,6	2,4
A3. Aceitar positivamente a devolução/trabalho na incerteza realizado pelo professor	3,2	3,2	4,8	6,5	20,2	37,9
INTERESSE						
A4. Realizar perguntas sobre a temática	0,85	3,2	0,85	4,0	12,9	21,7
TOTAL (%)	4,05	9,6	8,1	12,9	46,0	80,65
Pistas de Atitudes negativas observadas	PC	P	A	C	AR	T
RESPONSABILIDADE DE RESOLVER PROBLEMAS						
A5. Atribuir a atividade de resolução a outro (colega ou professor)	1,6	1,6	-	1,6	3,2	8,0
A6. Apresentar sentimentos de aversão a tarefa ou impaciência	-	0,85	-	2,4	4,8	8,05
A7. Apresentar sentimentos de baixa estima com relação as atividades	-	0,85	0,85		1,6	3,3
TOTAL	1,6	3,3	0,85	4,0	9,6	19,35

Fonte: Acervo de Pesquisa

Com base na tabela verificou-se um auto índice de atitudes positivas com relação a prática de Combinatória implementada, constatando-se principalmente a maior frequência com relação a responsabilidade. No Extrato 53, vemos A1 defender sua opinião durante a resolução de um problema de arranjo. Considerou-se esse episódio como exemplo de auto-estima frente a resolução de um problema de Combinatória.

Extrato 53 – Exemplo da Aula 4 – Compromisso com atividade do Aluno A1 apresentando auto-estima frente a resolução de problemas combinatórios – CD23

[381] ((A1 levanta a mão))

P: Diga A1? / A1: Para mim é sete, porque não está dizendo que ela já sentou, mas está dizendo as opções que ela tem para sentar.

[382] A2: Vai sentar no colo da outra é mulher? ((Indica a impossibilidade da resposta do colega com uma brincadeira))

[383] A1: Eu acho que é sete! O senhor pediu minha opinião, pois eu acho que é sete! ((Afirma a opinião, mesmo diante das críticas dos colegas))

[384] P: Pssiu! Eu gostei! Defendendo sua opinião! Eu gostei! ((Professor pede aos alunos que parem e afirma ser positivo a defesa do aluno))

Fonte: Acervo da Pesquisa

Outra situação observada é a valorização pelo professor da atitude realizada por A1. Durante todas as configurações didáticas dos variados tipos de problemas combinatórios foram observadas 126 (12,8%) unidades de análise que representam propostas de formulações/soluções pelos estudantes. As propostas de procedimento se apresentaram de maneira correta ou incorreta e variavam entre o uso correto e incorreto do PFC, enumerações incompletas e sistematizadas, e ainda, poucos exemplos de diagramas e árvore de possibilidade. Dos 24 estudantes, 18 (75%) realizaram pelo menos uma vez a proposta de procedimentos indicando um nível de participação interessante dos mesmos ao longo das aulas de Combinatória analisadas.

Com base nesses dados, e na Tabela 16 se averigua um bom índice de alunos que assumiram a responsabilidade pela resolução de alguns problemas combinatórios.

A partir da tabela verificou-se poucas atitudes negativas ao processo de ensino e aprendizagem implementado, apresentando apenas em questões relativas a responsabilidade de resolver os problemas combinatórios.

Groth e Meletiou-Mavrotheris (2018, p.335-336) a partir de análise de pesquisas anteriores sobre crenças e atitudes com relação à Estatística afirmam que atitudes de professores estão intimamente articuladas “[...] à aquisição de conhecimentos sobre Estatística, à promoção de práticas de ensino desse conteúdo, às atitudes de seus alunos, como também, atitudes negativas podem ser danosas a esses aspectos”. Nesse sentido, pode trazer considerações para as atitudes do professor frente as reações emocionais dos alunos, no sentido de que as mesmas podem influenciar, positivamente ou negativamente, as atitudes dos alunos na resolução de problemas combinatórios.

Philipp (2007, p.261) afirma que “Uma conexão entre emoções e atitudes é que a reação emocional repetida a uma experiência relacionada à matemática pode resultar na automatização dessa emoção em uma atitude em relação a essa experiência”. Desse modo, durante a resolução de um problema combinatório, um aluno pode apresentar reações emocionais negativas, o que pode gerar emoções como impaciência, ou então, atitudes como se negar a fazer o problema, ou atribuir a responsabilidade a outro justificando não gostar do conteúdo ou da matemática.

Nos Extratos 54 e 55 foram identificados algumas atitudes e pistas emocionais negativas com relação à proposta do professor não atribuir respostas aos problemas.

Extrato 54 – Exemplo da Aula 5 – Alunos apresentam impaciência e atribui a responsabilidade de dizer a resposta ao professor – CD32

- [901] A15: Vai dá nove professor? (Pergunta e sugere interesse sobre a resposta)
 A2: Dá 15 que menos seis dá nove / P: Segundo A2 e A15 aqui dá 15 ((Apontando para o registro da fórmula)) e a resposta é nove
 [902] A7, A10: Está certo? (Pergunta para que o professor corrija a situação))
 P: Não sei, o que vocês acham? (IPA13 Devolutiva)
 [903] A7: Vá lá diga logo!!! ((Aparenta um pouco de impaciência ou curiosidade))
 P: Por que eu tenho que dizer tudo para vocês? / A10: Porque você é o professor!
 P: Nada a ver [...] quanto é dois mais dois? / Alunos: Quatro / P: Está vendo isso não precisa que eu diga. Precisa? / A12: Claro, precisa ((Atribui a responsabilidade de correção ao professor))
 [904] P: Gente, vejam aqui quanto é que dá...A2 tu fez ou tu contou ali?
 A2: Eu fiz com a fórmula da combinação ((Apresenta a solução com a fórmula no caderno))

Fonte: Acervo da Pesquisa

Observa-se em A10, A12 a atribuição da responsabilidade de resolver/corriger o problema para o professor, retirando a própria. O Padrão de interação professor–aluno IPA13 Devolutiva ou mesmo de IPA14 Gestão da incerteza, nesse caso, está provocando certa impaciência em alguns alunos, pois promove uma mudança da proposta tradicional de ensino e em consequência uma mudança da postura geralmente adotada pelos estudantes.

No trabalho em grupo de alunos também podem ser observadas atitudes negativas, como no caso de A3, que verifica quem deu a resposta para concordar ou discordar de acordo com o estigma do colega com relação a matemática, como se exemplifica no Extrato 55.

Extrato 55 – Exemplo da Aula 6 – Atribui a responsabilidade de responder o problema ao colega – CD33

A3: Quem concordou com a resposta de A1?

P: A8

A8: Eu concordei! / P: Eu também! / A3: Ah. Então eu vou na opinião de A1 também!

Fonte: Acervo da Pesquisa

Essas atitudes negativas podem minar o processo de ensino e aprendizagem, em consequência a construção da aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. O aluno poderá ficar dependente do que os outros apresentam, não identificando características das diferentes naturezas dos problemas combinatórios. Nesse caso as atitudes e crenças do professor com relação a Combinatória durante às aulas de Combinatória são essenciais pra recriar outros momentos nos quais os alunos tenham novas oportunidades.

6.7 IDONEIDADE DIDÁTICA DAS AULAS DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Nessa seção são discutidas a noção da *idoneidade didática* (ID) e suas diferentes dimensões com relação à Combinatória no Ensino Médio. Para isso, fundamentou-se em alguns indicadores de cada dimensão propostos por Godino (2011, 2013, 2014), Godino, Bencomo, Font e Wilhelmi (2006) e Godino;

Contreras e Font (2006) para propor a análise de um processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Dessa forma, inicialmente, apresenta-se a distribuição de percentual das unidades de análise das diferentes dimensões e, posteriormente, é discutida a avaliação dessas diferentes dimensões da idoneidade didática.

Apresenta-se, na Tabela 17, uma distribuição de frequência das unidades de análise encontradas, a partir das diferentes dimensões da idoneidade didática, por aula de Combinatória. Ao todo, com as repetições, foram contabilizadas 1520 unidades de análise que foram distribuídas percentualmente por cada dimensões. Para construção da tabela considerou-se a quantidade de unidades de análise de cada aula como total e a seguir foi calculado o percentual apresentado de cada dimensão da Idoneidade Didática. A distribuição de frequência das unidades de análise a partir das diferentes dimensões da idoneidade didática por aula de Combinatória possibilitou a verificação do que mais foi priorizado e apresentado pelo professor.

Tabela 17 – Distribuição percentual das unidades de análise nas diferentes dimensões por aula

Dimensões da Idoneidade Didática	Aula1	Aula 2	Aula 3	Aula 4	Aula 5	Aula 6	Total
Epistêmica	13,9	22,9	18,8	21,1	23,3	25,6	19,9
Cognitiva	20,4	19,9	18,8	15,8	15,1	17,8	18,6
Interacional	43,5	46,1	45,5	45,6	41,5	34,1	43,8
Mediacional	9,0	6,9	7,0	9,4	8,2	12,4	8,2
Afetiva	8,3	3,3	7,7	6,4	9,4	8,5	7,0
Ecológica	4,9	1,0	2,3	1,8	2,5	1,6	2,5

Fonte: Acervo da Pesquisa

Observou-se que todas as dimensões foram contempladas de alguma forma, em todas as aulas. Verificou-se, que o aspecto interacional foi o mais priorizado dentre as dimensões da idoneidade didática, seguida das dimensões epistêmica e a cognitiva. Vale salientar que a escolha do professor se justifica, pois, o mesmo, utilizou aspectos da idoneidade interacional como meio para apresentar as demais dimensões, razão pela qual ser esta a mais priorizada.

Era comum nas aulas observadas o professor fazer questionamentos para que os alunos apresentassem como estavam pensando a solução, ou o procedimento em cada problema combinatório. Em alguns momentos observou-se o professor caminhar pela sala para verificar alguma dúvida, estava constantemente observando os alunos de modo a perceber conversas entre eles, o que era trazido para discussão. As dúvidas que surgiram foram discutidas em sala. Verificou-se diferentes padrões de interação professor-alunos o que potencializaram, por vezes, a discussão sobre a Combinatória, como a presença dos padrões devolutivo ou o de gerir a incerteza.

A partir do que o professor observava na sala, foram utilizados aspectos da dimensão epistêmica (novos problemas, discussão sobre procedimentos, diferentes linguagens); da dimensão cognitiva (confrontações sobre compreensões diferentes, retomada de discussão, tratava conflitos semióticos observados); da dimensão mediacional (utilizava recursos que dispunha para dirimir as dúvidas); da dimensão afetiva (buscava dirimir situações de ansiedade com relação a disciplina) e da dimensão ecológica (trazendo elementos de diferentes contextos para exemplificar a Combinatória).

Dessa forma, as aulas de Combinatória observadas, para alcançar o objetivo de discutir sobre esse conteúdo não foram propostas para ter distribuição igualitárias das unidades de análise, e sim que buscassem atingir bons graus de idoneidade didática, para garantir a discussão das necessidades percebidas pelo professor durante o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Desse modo, os indicadores mais (ou menos) priorizados pelo professor ainda podem ser analisados com relação ao grau de idoneidade didática.

Conforme apresentado no Quadro 16 (ver método p.142), sistematizaram-se alguns indicadores para a avaliação de cada dimensão da idoneidade didática apresentada no processo de ensino e aprendizagem implementado sobre a Combinatória no Ensino Médio. Com base nesse quadro, focalizam-se as discussões que seguem por dimensão da idoneidade didática (epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva, ecológica) observada nas aulas.

Para sistematizar a avaliação da *idoneidade epistêmica* nas aulas de Combinatória no Ensino Médio, utilizaram-se alguns dos indicadores obtidos a partir da análise dos livros didáticos (significado pretendido) para comparar com

a aula (significado implementado). Quanto a essa dimensão, Breda, Font e Lima (2015) advogam que para a ampliação do grau da idoneidade epistêmica necessita-se apresentar

[...] aos alunos uma mostra representativa, variada e articulada de situações-problema (contextualizados, com diferentes níveis de dificuldade, etc.); procurando explorar o uso dos modos de expressão verbal, gráfica, simbólica, etc., e as conversões que podem surgir entre eles; adequando a linguagem matemática e a clareza e correção de definições e procedimentos conforme o nível educativo em que se está trabalhando; dando os enunciados básicos do tema e adequando explicações, comprovações e demonstrações dentro do nível escolar a que se está voltado; estabelecendo relações significativas entre definições, propriedades, problemas do tema estudado, entre outros (BREDA; FONT; LIMA, 2015, p.10).

Dessa forma, para cada componente da idoneidade epistêmica - situação problema, linguagem, regras, argumentos(A), observados nos capítulos de livros didáticos analisados, foram elaborados indicadores das ações do professor que abordassem os diferentes componentes em relação à Combinatória. Posteriormente, foi avaliado o que foi apresentado nas análises das aulas – o que permitiu a indicação de um grau para idoneidade epistêmica para cada indicador como organizado no Quadro 45 na página seguinte.

De acordo com Beltrán-Pellicer e Godino (2017, p.95, tradução própria) “A aplicação de indicadores permite valorar o grau de idoneidade do processo de ensino e aprendizagem, guiando a reflexão do docente, de modo a ser comparada com pares”. Para classificar os graus da idoneidade didática utiliza-se a gradação entre alta (A), média(M) e baixa(B) como indicativo para avaliar o processo de ensino e aprendizagem, auxiliando a qualificar o que foi vivenciado e o que se pode modificar para melhorá-lo. No caso dessa pesquisa, os movimentos intencionais foram observados ao longo do processo, podendo assim verificar como as escolhas didáticas do professor foram observadas em cada um dos componentes da idoneidade didática e mais especificamente, como os indicadores foram avaliados.

Quadro 45 - Síntese da Análise da Idoneidade Epistêmica

C	Indicadores epistêmicos para os movimentos intencionais do professor na Combinatória no Ensino Médio	G
Situação Problema	Promove momentos de discussão de diferentes tipos de situações envolvendo Combinatória. O professor trabalhou com diferentes tipos de situações, focalizando naquelas que propõem a identificação e resolução de problemas combinatórios, tal como os capítulos de livro analisados. Não foram observadas situações que possibilitem o raciocínio recursivo nem a elaboração de problemas combinatórios.	AI/ M
	Utiliza a variação de ordem de grandeza para seus alunos escolherem diferentes procedimentos enumerativos. Excetuando os problemas de permutação, todos outros tipos de problemas e operações combinatórias, possui pelo menos uma situação que possibilitou a enumeração. A ênfase da ordem de grandeza foi naquelas que impossibilitam a listagem para favorecer o uso do PFC, mas inviabilizou procedimentos como árvore de possibilidades sem auxílio de recursos tecnológicos. Em algumas situações verificou-se a alteração do número de etapas e quantidade de elementos do conjunto para que outras estratégias enumerativas fossem utilizadas.	AI/ M
	Oportuniza aos alunos a discussão sobre a variedade de tipos de problemas combinatórios a fim de diferenciá-los: Verificou-se problemas de produto de medidas, permutação, arranjo, arranjo com repetição e combinação, em comparação com o livro didático. Não foi observada a proposta de resolução de problemas de permutação com elementos idênticos.	AI/ M
	Promove a discussão de problemas com complexidades diferenciadas (exercícios, simples, condicionais, integrados). Foram verificadas poucas situações que envolvessem problemas condicionais ou integrados, só sendo discutidas superficialmente na sexta aula. Não foram discutidos problemas de permutação com elementos idênticos ou de permutação circular.	M
Linguagem	Discute variados tipos de registros de representação e a conversão entre eles. A conversão entre registros mais observada foi a de LN para PFC, o que é bastante indicado para o Ensino Médio. Algumas conversões entre LN e Listagem foram observadas. As conversões de LN para Fórmula ocorreram apenas nas três últimas aulas, mas especificamente no problema de combinação. Foi evidenciado apenas de maneira pontual o uso da conversão de LN para diagrama e LN para árvore de possibilidades.	M
	Apresenta e Discute diferentes termos utilizados em problemas combinatórios. Observou-se a discussão de termos como anagrama, algarismos distintos, permutação, repetição, ordenação, combinação alguns mais explicitamente que outros. Foi observado uso equivocado do termo combinação e probabilidades.	AI/ M
	Valoriza diferentes registros apresentados pelos alunos. O professor compartilhou com a classe as formulações produzidas pelos alunos e ainda os diferentes registros apresentados. Alguns deles surgiram com base nas discussões em aula com a proposição dos estudantes.	AI
Regras	Oportuniza aos alunos o trabalho com diferentes procedimentos relativos a resolução de problemas combinatórios Verificou-se o trabalho com procedimentos enumerativos, numéricos(PFC) e algorítmicos(Fórmula); Não houve atividades que abordassem o procedimento gráfico(o uso de árvore de possibilidades)	M
	Promove o uso do PFC em detrimento de fórmulas como procedimento para problemas combinatórios As fórmulas foram apresentadas nas últimas aulas, sendo mais evidenciado o PFC.	AI
	Promove distinção de problemas combinatórios por meio de discussão de invariantes do conceito de Combinatória. O único invariante evidenciado para diferenciação de problemas combinatórios foi a ordenação que serviu de diferenciação dos problemas de arranjo e combinação. O trabalho com invariantes foi realizado de maneira implícita. Foi apresentada a regra do quociente.	M
	Apresenta corretamente as definições dos problemas combinatórios. As definições apresentadas se fundamentaram no livro didático, não exibindo erros.	AI
	Promove situações que utilizem o raciocínio recursivo. Foi observada a percepção da regularidade em um único momento na primeira aula, a partir de uma situação de enumeração, mas não foi utilizada a recursividade.	B
A	Incentiva a produção de diferentes argumentos aos alunos. O professor solicitou que os alunos constantemente justificassem os procedimentos utilizados e foram observados argumentos de diferentes naturezas.	AI

Legenda: C: Componente; G: Grau; A: Argumento; AI: Alta; M: Média; B: Baixa

Fonte: Acervo da Pesquisa

Pode-se dizer que o grau de idoneidade epistêmica em aulas de Combinatória é ampliado se os movimentos intencionais do professor promove diferentes tipos de situações (envolvendo propriedades diferentes, comparando procedimentos, elaborando problemas combinatórios, discutindo contextos variados), trabalha com diferentes problemas combinatórios (comparando os tipos entre si, alterando as ordens de grandeza dos problemas), varia a complexidade de problemas combinatórios oportunizando o surgimento de diferentes técnicas de contagem.

Além disso, nas aulas tais movimentos propuseram atividades que trabalhem especialmente as conversões entre LN e PFC, do que LN e Fórmulas, o que é adequado para o Ensino Médio. Os Movimentos do professor discutiram sobre os diferentes termos na Combinatória (anagrama, permutação, combinação, ordem) e como apresentou as diferentes notações (de fatorial, fórmulas combinatórias).

Os movimentos também possibilitaram a produção de argumentos pelos estudantes, os quais serviram para que os mesmos apresentassem diferentes justificativas para os procedimentos utilizados ou sobre a compreensão sobre enunciados de problemas combinatórios.

Verificou-se, a partir do exposto, que a valoração dos indicadores da dimensão epistêmica que os movimentos intencionais do professor nas aulas de Combinatória do Ensino Médio obteve no geral o grau alto/médio. Alguns aspectos pontuais podem ser melhorados nessa dimensão tal como a ausência de discussão sobre problemas *de permutação com elementos idênticos* ou *permutação circular*, ou ainda, uma ampliação das discussões sobre problemas combinatórios de diferentes complexidades (condicionais e integrados), mas o tempo disponibilizado teria que ser ampliado para garantir essas discussões.

A *idoneidade cognitiva* mede o grau de aproximação entre o significado pessoal e o significado institucional implementado, ou seja, a proximidade das ações da instituição professor da zona de desenvolvimento proximal dos estudantes (GODINO; BATANERO; FONT, 2007). Breda, Font e Lima (2015, p.6) asseguram que para ampliar essa dimensão os conteúdos, devem ser apresentados de forma a possibilitar “[..]um grau de dificuldade manejável; procurando incluir atividades de ampliação e reforço”. Godino (2013) classifica os componentes dessa dimensão como os conhecimentos prévios (C),

aprendizagem (A) e adaptações curriculares à necessidades especiais (AC). Com relação à aprendizagem o EOS segue o princípio do NCTM no qual os alunos são orientados a construir ativamente o novo conhecimento a partir de suas experiências.

Com base nas pesquisas em Combinatória, observa-se que a aprendizagem desse conteúdo necessita de um processo de ensino (FISCHBEIN, 1975) que possibilite a identificação de propriedades/invariantes presentes em problemas combinatórios (PESSOA; BORBA, 2010; BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015); a conversão entre diferentes registros de representação de Combinatória (BORBA; AZEVEDO; BITTAR, 2016), e ainda, a utilização de diferentes procedimentos e/ou técnicas de resolução de problemas combinatórios e a promoção de argumentações que justifiquem os procedimentos, ou as ideias relativas ao contexto do problema. Desse modo, construíram-se alguns indicadores para a aprendizagem de Combinatória, como se pode observar no Quadro 46.

Quadro 46 - Síntese da Análise da Idoneidade Cognitiva

C	Indicadores da Idoneidade Cognitiva para os movimentos intencionais do professor na Combinatória no Ensino Médio	G
AC	O professor promove ações para o acesso e alcance dos estudantes. Observam-se na primeira aula modificações na estrutura do problema para que possibilitasse a enumeração, o que auxiliou a percepção de regularidade dos alunos.	A/M
Aprendizagem	Os alunos conseguiram compreender os diferentes tipos de problemas combinatórios propostos. Foram observadas o uso de procedimentos (PFC, fórmulas, enumeração, árvores de possibilidades e diagramas) corretamente apresentados pelos estudantes. Alguns conflitos com relação ao enunciado, a linguagem, a procedimentos e sobre operações foram observados.	A/M
	Os alunos realizam a conversão entre registros combinatórios: Os alunos fazem mais frequentemente a conversão entre LN – PFC do que as demais, nem sempre corretamente. Foram observados erros gradativos nas propostas de procedimentos numéricos(PFC) apresentados pelos estudantes. Conflitos semióticos com relação ao termo combinação mal utilizado.	M
	Os alunos reconhecem diferentes propriedades/invariantes presentes nos problemas combinatórios. Alunos conseguem identificar as propriedades de ordenação e repetição em alguns problemas combinatórios, mas foram identificados alguns conflitos semióticos com relação a identificação da ordenação e repetição de elementos nos problemas.	M
	Os alunos apresentam argumentos e justificativas para os procedimentos utilizados. As aulas conseguiram produzir a presença de argumentos dos estudantes. Alguns desses argumentos nas aulas finais constavam algumas propriedades combinatórias.	A/M

Legenda: C: Componentes; G: Grau; AC: Adaptações curriculares a necessidades especiais; Al: Alta; M: Média;

Fonte: Acervo da Pesquisa

O grau da *idoneidade cognitiva* é maior quando o professor consegue que os alunos, produzam a percepção sobre variados procedimentos combinatórios, aproveitando a relação entre os mesmos, para discutir e atribuir significados as fórmulas combinatórias, valorizando as estratégias produzidas pelos estudantes.

Godino (2013) estabelece a interação professor-aluno (IPA), a interação entre alunos (IAA), a autonomia (At) e a avaliação formativa (AF) como componentes da *idoneidade interacional*. No Quadro 47 se apresenta a avaliação dos indicadores para a interação.

Quadro 47 — Síntese da Análise da Idoneidade Interacional

C	Indicadores da Idoneidade Interacional para os movimentos intencionais do professor na Combinatória no Ensino Médio	G
IPA	<i>O professor possibilita que os alunos façam propostas de procedimentos de resolução de problemas combinatórios sem esperar a resposta do professor e argumentem sobre suas ideias.</i> A variação entre padrões de interação—professor principalmente os padrões de gerir a incerteza e de devolução conseguem em vários momentos que os alunos indiquem suas soluções e produzam explicações e argumentos para validá-las.	A
	<i>Identifica e propõe sugestões para resolver os conflitos semióticos observados.</i> O professor usa diálogo em classe para se aproximar das dificuldades e até mesmo da relação entre os estudantes para que os mesmos a partir de argumentos consigam explicar a situação entre eles. Algumas vezes assume responsabilidade de introduzir algum conteúdo.	A/M
IAA	<i>O professor favorece o diálogo e comunicação entre os estudantes.</i> Observam-se momentos de interação entre alunos, inclusive na configuração a-didática, nos quais apresentam alguns argumentos e justificativas. Observam-se ainda poucas interações de dependência entre os alunos, nas quais desfavorece que assumam a responsabilidade pela resolução o problema.	M
At	<i>O professor promove momentos que os alunos assumam a responsabilidade do estudo.</i> Com a variação de padrões de interação professor-aluno o professor conseguiu momentos que os alunos assumam completamente a responsabilidade pela resolução de problemas, realizados na sexta aula nas configurações a-didáticas, e outros momentos nas configurações dialógicas eles assumem parcialmente ficando a cargo do professor a ação de institucionalização. Observam-se poucos momentos de configuração magistral na qual os alunos assumem o papel de receptor.	A/M
AF	<i>O professor observa e acompanha o processo de ensino e aprendizagem realizado pelos alunos.</i> O professor consegue propor alguns momentos de auto-avaliação dos alunos, como também acompanhar dúvidas que foram explicitadas pelos alunos. Uma diagnose antes e após do processo de ensino e aprendizagem, aproximaria mais de uma avaliação formativa.	M

Legenda: C: Componente; G: Grau; A: Argumento; Al: Alta; M: Média; AF: Avaliação formativa; At: autonomia; IAA: Interação Aluno-Aluno; IPA: Interação Professor-Aluno

Fonte: Acervo da Pesquisa

Nas aulas de Combinatória observadas, a interação entre professor e alunos possibilitou padrões que auxiliaram no processo de explicações e argumentações dos estudantes sobre as ideias que permeiam os problemas combinatórios. O diálogo proposto e delineado em sala permitiu um traçado que estabeleceu um clima de trocas, participação e, principalmente, responsabilidade pela resolução de problemas.

Com relação à análise da *idoneidade mediacional* de um processo de ensino e aprendizagem, tem-se que se considerar os recursos materiais que podem ser utilizados nas aulas de Combinatória. Fundamentados nos indicadores propostos pelos autores foi elaborado o Quadro 48.

Quadro 48 — Síntese da Análise da Idoneidade Mediacional

C	Indicadores da Idoneidade Mediacional para os movimentos intencionais do professor na Combinatória no Ensino Médio	G
RM	Utiliza diferentes recursos didáticos que auxiliem na compreensão da Combinatória. Os recursos didáticos utilizados foram o quadro, o livro didático e uma ficha de exercícios elaborada pelo professor. O uso da ficha permitiu novas interações entre alunos na sala. No quadro se acompanhava o processo de resolução de problemas combinatórios, apresentando diferentes ideias de procedimentos. O livro adotado, do modo que foi utilizado, permitiu a retirada de problemas de seções específicas, e, assim, os estudantes tiveram que identificar os tipos de problemas combinatórios. Não houve a utilização de recursos didáticos estruturados, como jogos ou recursos tecnológicos, no entanto, o uso feito dos recursos dispostos gerou diferentes interações e aprendizagens	A/M
	Utiliza situações de Combinatória contextualizadas que provocam o interesse dos alunos. Alguns contextos utilizados tiveram necessidade de discussão, pois provocaram alguns conflitos semióticos. No geral, as situações propostas provocaram o interesse dos alunos. Em algumas situações, o professor propôs no contexto características dos estudantes, despertando o envolvimento deles na resolução..	M
A	O número de alunos permite possibilidades metodológicas. O número de alunos foi suficiente para gerar discussões enriquecedoras. O problema detectado foi a rotatividade de alguns estudantes, o que fez que seis estudantes não acompanhassem todo o processo..	M
	A organização dos alunos na aula permite interações entre eles e o professor: Em quatro aulas o professor organizou a classe em grupos fazendo com que os alunos interagissem entre eles. Mesmo dispostos em grupos, conseguiram interagir com o professor	A
Co	O horário das aulas é produtivo: As aulas aconteceram nas terças nos terceiros e quartos horários com intervalo entre elas e nas sextas feiras nos dois últimos horários, o que gerava uma diminuição do tempo de aula. Mesmo com essa realidade, o professor conseguiu aplicar um bom processo de ensino e aprendizagem.	M
T	Distribuição do tempo na aula. O tempo na aula acompanhava o processo de resolução de problemas combinatórios, deixando que os alunos discutissem e chegassem a um procedimento mais adequado, acompanhando, inclusive, necessidades individuais de estudantes.	A

Legenda: C: Componente; G: Grau; RM: Recursos Materiais; A: Número de alunos; Co: Condições; T: tempo; Al: Alta; M: Média

Fonte: Acervo da Pesquisa

Para realizar a avaliação do grau de *idoneidade mediacional*, Arteaga; Batanero; Gea (2017) elaboraram descritores para cada componente (recursos materiais (RM), número de alunos (A), horário e condições da aula (Co); tempo (T)) que focalizam o uso de materiais manipulativos e tecnológicos, a adequação do contexto e a motivação das definições e propriedades, a quantidade e distribuição dos alunos favorecendo, ou não, a aplicação das atividades, a distribuição do tempo necessário para as diferentes necessidades dos conteúdos, entre outras.

De acordo com Godino e colaboradores a *idoneidade ecológica* utiliza como componentes: Adaptações ao currículo (AC), Abertura para inovações didáticas (ID), Adaptação sócio-profissional e cultural (ASC), Conexões intra e interdisciplinares(CI). No Quadro 49 se apresenta uma síntese da idoneidade ecológica analisada.

Quadro 49 – Síntese da Análise da Idoneidade Ecológica

C	Indicadores da Idoneidade Ecológica para os movimentos intencionais do professor na Combinatória no Ensino Médio	G
AC	Promove atividades que trabalhem com os conteúdos combinatórios dispostos no Currículo do Ensino Médio. O professor promoveu a discussão dos problemas combinatórios propostos para o Ensino Médio, permitiu momentos em que os alunos utilizaram técnicas combinatórias (uso do PFC, fórmulas) e permitiu que os alunos elaborassem estratégias mais adequadas a cada situação.	A
	Promove situações com uso de tecnologias. Não foi observado	NA
ID	Incorpora práticas inovadoras como a ênfase da resolução de problemas O professor promoveu práticas que deixaram os alunos como centro da atividade matemática, proporcionando momentos nos quais os alunos assumiram a responsabilidade pela resolução de problemas.	A/ M
ASC	Estabelece relações entre a Combinatória e a formação social, cultural e profissional: Algumas discussões sobre o uso de diferentes códigos na sociedade e a confecção de senhas foram utilizadas nas aulas, permeando aspectos sociais.	M
	Estabelece conexões entre a Combinatória e outras áreas da Matemática. Observou-se momentos de discussão sobre funções de números, propriedades da multiplicação e regra de três. Talvez devido ao tempo observado não houve menção à probabilidade.	B
CI	Estabelece conexões entre a Combinatória e outras áreas. Observou-se momentos de discussão sobre a população relacionando com a Geografia e o número total de CPF, além da aplicação de códigos numéricos com aplicações no cotidiano.	M/ B

Legenda: C: Componente; G: Grau; AC: Adaptações Curriculares; ID: Abertura para inovações didáticas; ASC: Adaptações sócio-profissional e cultural; CI: Conexões intra e extra matemáticas; Al: Alta; M: Média; B: Baixa; NA: Não avaliado.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Breda, Font e Lima (2015, p.11) afirmaram que para a ampliação do grau dessa dimensão se faz necessário verificar a correspondência entre o que está sendo ensinado e as diretrizes curriculares, além de assegurar “que tais conteúdos contribuem para a formação social e profissional dos estudantes; buscando relacionar os conteúdos ensinados com outros conteúdos matemáticos e de outras disciplinas; tendo em conta as fontes de diversidades dos alunos; etc”.

A *idoneidade afetiva* se apresenta por meio dos componentes Interesse (I), Atitudes (A) e Emoções (E). Essa dimensão se caracteriza como mais adequada a partir do interesse e motivação dos alunos apresentado durante o processo de ensino e aprendizagem. A responsabilidade pela resolução de problemas combinatórios, a participação nas aulas, o interesse demonstrado e as atitudes tomadas frente aos problemas combinatórios refletem a abrangência dos indicadores dessa dimensão, como se pode observar no Quadro 50.

Quadro 50 – Síntese da Análise da Idoneidade Afetiva

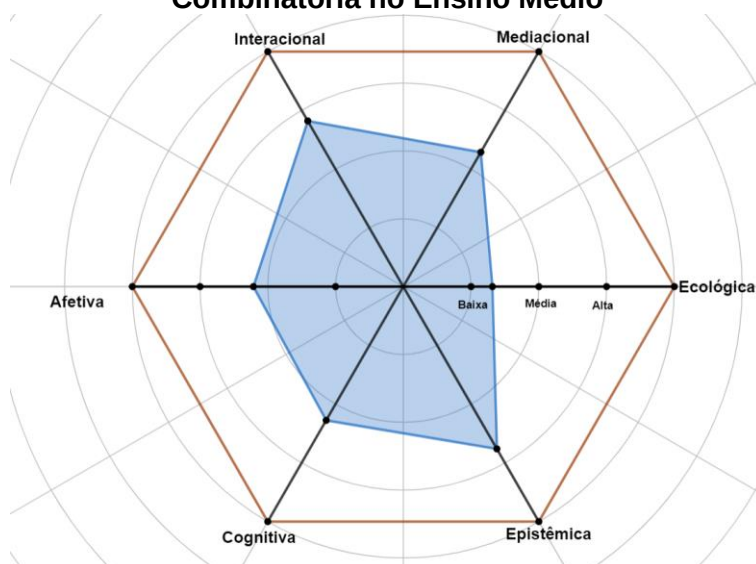
C	Indicadores da Idoneidade Afetiva para os movimentos intencionais do professor na Combinatória no Ensino Médio	G
I	<i>As tarefas propostas são interessantes para os alunos.</i> Observaram-se perguntas ao professor sobre a temática ou sobre o conteúdo, o que representa, em alguma medida, interesse dos alunos sobre o que estava sendo discutido. Poucas vezes observou-se atitudes negativas, o que foi observado e tratado pelo professor.	M
A	<i>Promove-se a participação nas atividades.</i> O professor tentou chamar a atenção para que todos participassem, convidando alunos dispersos para participarem, mas nem todos participam dos momentos de discussão.	M
	<i>Promove a responsabilização dos alunos pelas soluções dos problemas combinatórios.</i> Principal ênfase observada no professor e alunos. Em alguns momentos foi observada a valorização de argumentos por quem diz e não pelo próprio argumento, o que caracteriza a atribuição da responsabilidade de resolução de problemas combinatórios aos pares.	A/ M
E	<i>Promove atitudes positivas nos alunos por meio das situações propostas e consegue propor soluções para as atitudes negativas com relação as atividades.</i> Em geral as atitudes positivas foram mais frequentes e, como isso, o professor conseguiu estabelecer um clima de participação.	A/ M
	<i>Promove-se a alta autoestima, evitando o medo ou fobia pela Combinatória.</i> Poucos momentos de baixa estima foram observados. Pela escolha do professor em não priorizar o uso de fórmulas inicialmente possibilitou que o medo, geralmente existente em questões matemáticas, fosse menos frequente nesse conteúdo.	A/ M

Legenda: C: Componente; G: Grau; I: Interesse; A: Atitudes; E: Emoções AI: Alta; M: Média;

Fonte: Acervo da Pesquisa

Com base no exposto, foi proposta, como apresentada na Figura 84, uma gradação aproximada do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória implementado no Ensino Médio, apontado para as diferentes dimensões da idoneidade didática.

Figura 84 – Idoneidade didática do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio



Fonte: Acervo da Pesquisa

A idoneidade didática representada na Figura 84 apresenta uma hierarquia para as ações do professor priorizando alguns aspectos das dimensões, focalizando respectivamente os indicadores das dimensões interacionais, epistêmica, cognitiva, mediacional, afetiva e ecológica da Idoneidade didática, nessa ordem. Os indicadores com nível mais alto representam o que foi alcançado e os mais baixos aquilo que poderia ser ressignificados no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória do Ensino Médio.

A análise realizada apresenta para o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória uma prática docente inovadora, e quando vivenciada na sala de aula apresenta-se desafiadora, mas certamente demonstra caminhos para um melhor processo de ensinar e aprender Combinatória no Ensino Médio.

A valoração dos indicadores da idoneidade didática sugeriu que os movimentos intencionais do professor garantiu o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio implementado, priorizando a explicitação de procedimentos numéricos (PFC) em detrimento aos

algorítmicos (fórmulas), a autonomia dos alunos na *construção de resoluções próprias para os problemas combinatórios*, bem como a presença de *argumentos de alunos* sobre essa resolução, possibilitando o acompanhamento da resolução de problemas combinatórios pelos estudantes na íntegra, sem a necessidade inicial de nomenclaturas, ou apresentação de fórmulas, proporcionando a exploração do processo de construção do raciocínio combinatório, aprendendo com as dúvidas e as incertezas existentes e promovendo a responsabilidade dos estudantes no próprio processo aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.

A presente pesquisa defende que o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória, inclusive no Ensino Médio, permita a flexibilidade nos diferentes momentos de resolução desses problemas em classe, fazendo com que os estudantes utilizem diferentes procedimentos de resolução, como também, a elaboração de estratégias pessoais para a resolução dos mesmos, sendo capazes de justificar e explicitar o caminho que foi construído durante o processo de resolução.

Dessa forma, pode ser vislumbrado o papel da Combinatória como desafio ao professor que a ensina e ao aluno que toma para si a responsabilidade de resolver tais problemas. A presente pesquisa, apresenta uma reflexão sobre os movimentos intencionais do professor e como estes podem influenciar positivamente esse processo, trazendo em pequenos gestos o desafio de não propor tarefas mecanizadas, favorecendo a criação de habilidades matemáticas, fortalecendo a construção do raciocínio combinatório.

Mudanças devem ser realizadas na maneira que o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória se dá para que esse conteúdo assuma seu verdadeiro potencial, enfatizando o apontado por Sztányi e Csíkos (2015, p.226) que “A maioria das atividades [combinatórias] não pode ser resolvida mecanicamente, mas precisa de pensamento crítico, ativando habilidades metacognitivas, planejamento estratégico, melhorando o desempenho matemático”.

Caso os movimentos intencionais do professor priorizem as fórmulas combinatórias, apresentem o modelo a ser seguido (explicitando apenas os tipos de problemas *arranjo*, *combinação* e *permutação*), antes de valorizar a resolução de problemas combinatórios, sem a necessidade de nomeá-los inicialmente,

seguido de listas de problemas dentro de seções identificadas, não haverá a construção de um raciocínio combinatório, apenas a memorização desses modelos. De certa forma, se esses movimentos intencionais do professor forem os escolhidos, apresenta-se uma justificativa para que quando esses modelos são postos misturados para os alunos, que não teve oportunidade de conhecer suas propriedades ou de criar caminhos pessoais para sua resolução, os mesmos não conseguem diferenciá-los.

A ideia de seguir o livro didático para esse conteúdo, abordando tal qual apresentados nos capítulos analisados, traz antecipações da fórmula que podem dificultar o trabalho com resolução de problemas combinatórios, no sentido de camuflar esse trabalho, que ao invés de buscar estratégias, a resolução de problemas passa a ser identificar que fórmulas são adequadas para o problema.

No processo de resolução de problemas combinatórios são construídas ferramentas que podem servir de base em outras situações, ser reformuladas, modificadas para se adequar à nova situação. Nessa perspectiva, trabalhar com diferentes tipos de situações, promovendo a enumeração, a exploração dos diferentes procedimentos, a discussão de enunciados, contextos, o trabalho com raciocínio recursivo, a explicitação de invariantes são alguns caminhos para ser desenvolvido o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a presente investigação buscou-se defender a tese que um bom processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio deve contemplar nos movimentos intencionais do professor a seleção de tipos de situações variadas abordando, as diferenças entre os invariantes dos problemas combinatórios (escolha, ordem, repetição), a construção de resoluções próprias, enfatizando procedimentos enumerativos e numéricos e a explicitação de argumentos de alunos (pessoais e coletivos) que façam uso de propriedades combinatórias, favorecendo o surgimento de padrões de interação entre professor e alunos que promovam a responsabilidade dos estudantes na resolução de problemas combinatórios.

Especificamente, foi verificado, com relação aos capítulos de Combinatória dos livros didáticos analisados, que ambos priorizam o tipo de situação problema que promove a ‘identificação dos tipos de problemas combinatórios a partir do enunciado do problema e resolvê-los’. Entretanto, salienta-se que uma parte desses problemas está em seção específica, o que retira a tarefa da identificação de problemas. Os problemas de *arranjo*, *combinação* e *permutação* são os mais frequentemente abordados, reforçando o que aponta Batanero et al. (1996) e o documento oficial curricular PCEB-PE (PERNAMBUCO, 2013).

Apenas o invariante da *ordenação* é tratado de maneira explícita quando na definição de problemas de *arranjo* e *combinação*. A *repetição* e a *escolha* são tratados de forma implícita nos capítulos de livros analisados. Pesquisas como Borba, Rocha e Azevedo (2015), Pessoa e Borba (2009) afirmam a necessidade de identificar os invariantes do conceito presentes nos problemas combinatórios. Nesse contexto, defende-se a explicitação de invariantes ao menos no manual do professor para auxiliá-lo nessa indicação.

A conversão entre registros de representação mais frequente é a linguagem natural para fórmula, o que reflete a escolha de problemas com maior ordem de grandeza. Essa característica pode ser um fator que gere dificuldades, visto que a apresentação inicial das fórmulas combinatórias pode inibir o processo de elaboração de procedimentos próprios de resolução, ressaltados como um dos fatores que apresentam indícios do desenvolvimento do raciocínio

combinatório. Já a comparação entre procedimentos, apresentada em seções de exercício resolvidos dos capítulos de Combinatória, pode permitir elaboração de argumentos, em especial, para compreensão das fórmulas combinatórias.

Diferentes técnicas de resolução foram apresentadas, a maioria delas na seção do manual do professor, o que demanda do professor a discussão das mesmas em sala de aula.

No que tange aos capítulos de livros didáticos analisados, as argumentações apresentadas em ambos os capítulos utilizaram o exemplo como início de abordagem, o que indica uma argumentação do tipo indutiva, destacando a presença de exemplos como início de argumentação, do tipo indutivas e com grau nulo, o que sugere a necessidade de textos introdutórios mais questionadores e confrontadores do que apenas informativos. Nos capítulos analisados houve diferenças com relação à argumentação apresentada a partir da imagem, variando com relação ao uso, ao tipo e a relação com o mundo.

Tais resultados, referentes aos livros didáticos analisados, estabeleceram um significado pretendido da Combinatória no Ensino Médio. Reflexões sobre esse recurso podem possibilitar um trabalho para o professor exercer sua intenção pedagógica, enfatizando os pontos positivos e propondo alterações para alguns pontos negativos observados. Os capítulos de Combinatória analisados permitem uma discussão sobre variados elementos, mas o tempo dedicado à Combinatória no Ensino Médio é um fator que pode justificar a apresentação das fórmulas prematuramente.

Esse fato confirma o discurso de Borba (2010; 2013) no qual configura-se ser necessária a antecipação da discussão desse conteúdo no Ensino Fundamental, para possibilitar que no Ensino Médio se consiga realizar um processo de ensino e aprendizagem que proporcione o desenvolvimento do raciocínio combinatório, para além do uso de fórmulas, promovendo situações nas quais os alunos utilizem raciocínio recursivo, bem como processos de generalização incluídos na resolução de problemas combinatórios. Nesse sentido, os capítulos analisados auxiliam com exemplos pontuais distribuídos entre as questões resolvidas e propostas, o que dificulta a identificação dos mesmos pelo professor.

Quanto às aulas, durante todo o processo de observação, evidencia-se que nelas se priorizava a participação dos estudantes, pois o professor implementou *configurações didáticas do tipo dialógicas*. Tal escolha foi adotada pelo professor principalmente quando assumiu uma postura mediadora, na qual não apresenta a solução dos problemas, atribuindo essa responsabilidade para os estudantes. Vale salientar que assumir essa postura é um desafio na prática, uma vez que exige do professor uma compreensão não só do conteúdo, mas do conhecimento sobre o estágio de raciocínio combinatório em que os estudantes se encontram.

Uma das estratégias adotadas pelo professor para que algumas dificuldades ou entraves dos estudantes fossem minimizadas foi subdividir o problema combinatório, na enumeração da quantidade de possibilidades de cada etapa, o que potencializava o uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Com relação à trajetória epistêmica implementada, o estado mais ressaltado foi o *procedimental*, que focalizava as resolução de problemas combinatórios. Como geralmente as aulas se subdividiam na resolução de diferentes problemas combinatórios, ao longo das discussões sobre esses procedimentos eram apresentadas algumas propriedades inerentes a esses problemas, complementando faltas observadas nos livros didáticos utilizados. Ressalta-se que as fórmulas foram corretamente introduzidas nas últimas aulas, permitindo momentos de explorações dos estudantes nas quais o PFC foi o mais utilizado. Tal movimento intencional do professor potencializou a trajetória discente na qual foram mais verificados os estados de *exploração* e *argumentação*.

Na configuração epistêmica foi observado, com maior frequência, o tipo de situação problema denominada *identificar os tipos de problemas combinatórios a partir do enunciado do problema e resolvê-los*. Esse tipo de situação também foi a mais evidenciada nos capítulos de livro didático. Na primeira aula foram notadas propostas de alteração do problema combinatório para possibilitar procedimentos enumerativos de resolução de problemas combinatórios. Tal movimento permite visualizar o acompanhamento das dificuldades dos estudantes, relacionando aspectos das dimensões epistêmica e cognitiva da idoneidade didática.

Os invariantes de *ordenação* foram abordados explicitamente pelo professor como indicativo na diferenciação de problemas de *combinação* e *arranjo*. O caso da repetição foi abordado de maneira implícita, com a explicitação da presença do termos distintos como impeditivo da repetição de elementos.

Com relação às dimensões da idoneidade didática priorizadas pelo professor nas aulas de Combinatória, a dimensão *interacional* foi a mais frequente e por meio dela o professor verificou indicadores das outras dimensões que orientavam em parte os seus movimentos intencionais.

A partir da interação professor-aluno verificou-se a presença de padrões que enfatizaram a participação dos estudantes, tais como, os padrões de interação denominados ‘gerir a incerteza’ e ‘devolutiva’. Esse movimento intencional do professor oportunizou que os alunos assumissem a responsabilidade pela resolução de problemas, e ainda, produzissem e apresentassem explicações para o que estavam pensando, novamente auxiliando a aproximação com aspectos cognitivos.

A *busca pela solução de problemas combinatórios* moveu a dinâmica da sala de aula, e representa a intenção do professor ao longo das aulas. Essa busca tornou-se em várias configurações didáticas o que direcionava as ações de alunos e os movimentos intencionais do professor. Os alunos, por sua vez, apresentavam diferentes soluções e tentavam justificá-las para o professor e para os outros colegas. As propostas de solução eram disponibilizadas no quadro e as dúvidas de colegas eram, geralmente, discutidas por meio da explicação dos autores das propostas. Havia momentos de negociação entre os próprios alunos, ou propostos pelo professor.

Para provocar a *motivação* dos estudantes, há indícios, na *trajetória docente*, de movimentos intencionais que propuseram discussão de temáticas como os códigos conhecidos pelos estudantes e, ainda, a proposição de problemas combinatórios que envolvessem características dos alunos, seja na contagem de duplas, na quantidade de anagramas propostos com o nome de um estudante, ou na elaboração de fardas.

Na *trajetória docente* apresenta-se como prioridade o estado de *regulação*, aqui compreendido como aqueles momentos em que acompanhamento dos estudantes é essencial, pois apresenta as mobilizações

dos conhecimentos apresentados pelos mesmos, indicando a discussão sobre regras, exemplificações e retomadas das ideias geradoras de soluções referentes aos problemas combinatórios.

A *trajetória mediacional* foi verificada a partir do uso de recursos como o quadro, o uso de livro didático e ficha de problemas combinatórios. Esses recursos são frequentemente utilizados nas aulas, em geral, mas nessa pesquisa foram verificados aspectos positivos dos mesmos. Com relação ao recurso quadro, nas aulas considera-se importante seu papel de apoiar a discussão, registrando as diferentes propostas de procedimentos dos alunos para permitir o debate. Quanto ao livro didático, constatou-se a retirada dos problemas combinatórios das seções, uma maneira de lidar com aqueles que estão dispostos em seções que listam um único tipo de problema combinatório. Os distintos movimentos nas aulas com o uso livro didático permitiram a apresentação de diferentes padrões de interação entre o professor-alunos e livros didáticos. Verificou-se que o uso de outros recursos (lápiz de quadro e dramatização) foram utilizados quando o professor observava que os alunos estavam com dúvidas, como as referentes ao invariante de ordenação.

Com relação à *trajetória afetiva* observada, foram verificadas atitudes positivas dos estudantes que indicavam a responsabilidade pela resolução de problemas e interesse dos mesmos. As atitudes negativas representaram menos de 20% das unidades de análise e estavam mais presentes nas situações problemas que envolvem *combinação* e *arranjo com repetição*. Constatou-se que poucos alunos esperavam as respostas dos colegas ou do professor, atribuindo a outros o processo de resolução de problemas combinatórios.

A *trajetória cognitiva* implementada permitiu examinar elementos cognitivos do desenvolvimento do raciocínio combinatório na utilização do procedimento de PFC, indicando confusões na sua implementação, nos quais podem-se observar diferentes níveis de compreensão dos problemas pelos estudantes. De modo similar, ocorreram indicativos de conflitos semióticos envolvendo: a linguagem combinatória, as propriedades inerentes a cada problema, seus enunciados – tanto em relação aos números evidenciados, quanto aos contextos da questão, procedimentos enumerativos incompletos e equívocos nas operações sejam combinatórias ou em operações básicas. Essa pesquisa complementa, com aspectos que ocorreram nas aulas de

Combinatória, as investigações que apresentam erros de alunos de diferentes níveis na resolução de problemas combinatórios, tais como, Roa (2000), English (2005), Pessoa(2009), entre outros.

Com essas ferramentas teórica-metodológicas da Teoria das Funções Semióticas foi possível observar as variações nas aulas de Combinatória, o que é um aspecto positivo, pois possibilita um acompanhamento do processo de ensino e aprendizagem, e pode ser complementados com questionários aos estudantes, principalmente com relação às trajetórias cognitiva e afetiva.

Foi possível ainda perceber, para cada dimensão da idoneidade didática, movimentos intencionais do professor que merecem destaque:

Na *idoneidade epistêmica*, a escolha didática do professor atinge altos índices quando valoriza diferentes registros apresentados pelos alunos, incentiva a produção de diferentes argumentos e apresenta corretamente as definições dos problemas combinatórios. A priorização de procedimentos numéricos, ao invés de procedimentos algorítmicos se mostrou adequada à etapa de Ensino Médio, como também à escolha de formalização após fomentar discussão sobre diferentes problemas combinatórios.

Na dimensão *interacional*, os movimentos permitem que os alunos façam propostas de procedimentos de resolução de problemas combinatórios sem esperar a resposta do professor e argumentem sobre suas ideias, confirmando a responsabilização pela resolução de problemas combinatórios.

A *idoneidade mediacional*, por sua vez, tem seu maior índice na sistematização e organização dos alunos na aula – permitindo interações entre eles e o professor – e na distribuição do tempo que prioriza a compreensão dos estudantes na resolução de problemas.

Na discussão sobre a *dimensão ecológica* observa-se que os movimentos intencionais é mais alto na proposição de atividades que trabalhem com os conteúdos combinatórios dispostos no currículo do Ensino Médio.

Com relação à dimensão *cognitiva*, observa-se índices parciais quando os movimentos intencionais docentes promovem ações para atingir todos os estudantes, ou quando os alunos apresentam diferentes procedimentos, técnicas, argumentos e justificativas relacionados aos problemas combinatórios. Do mesmo modo, observa-se na *idoneidade afetiva* que os movimentos intencionais do professor alcançam boa gradação quando promove uma

autoestima positiva, evitando e propondo alternativas para o medo ou fobia pela Combinatória, incentivando a responsabilização dos alunos pelas soluções dos problemas combinatórios.

A idoneidade didática e a proposta dos indicadores para Combinatória apresentados na presente pesquisa podem ser utilizados para a análise de aulas desse conteúdo em diferentes níveis de ensino e para práticas diferenciadas, podendo, inclusive, servir de elemento de reflexão da própria prática. A valoração de cada um dos indicadores pode variar entre as diferentes práticas, indicando aspectos positivos dos movimentos intencionais do professor e outros que devam ser melhorados.

Com base no exposto, algumas outras considerações com relação ao processo de ensino e aprendizagem de Combinatória implementado no Ensino Médio podem ser realizadas. A primeira diz respeito aos indicadores que obtiveram menor índice de idoneidade didática que apresentam por si, só pistas do que pode ser retomado para que o processo de ensino e aprendizagem seja mais idôneo. Apesar disso, defende-se que os movimentos intencionais do professor ao longo do processo de ensino e aprendizagem de Combinatória indicam a necessidade de que os alunos assumam a responsabilidade pela resolução de problemas combinatórios, e para isso a ação do professor é essencial para mediar o processo de busca de solução, minimizando as pistas para auxiliar os estudantes, como também, não apresentando respostas prontas e ampliando a autonomia dos mesmos para um bom desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A partir dessas considerações, acredita-se que novas pesquisas em Combinatória possam ser realizadas as quais tenham como foco:

- a comparação de diferentes implementações de ensino de Combinatória, para observar as influências no desenvolvimento do raciocínio combinatório de grupos diferenciados;
- a análise de ações docentes no processo de ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Fundamental;
- a verificação mais assertiva da trajetória afetiva traçada por estudantes na resolução de problemas combinatórios de diferentes complexidades, utilizando mapas de humor propostos por Gomez-Chacon(2000);

- a inserção de práticas de Combinatória que incluam alunos com necessidades especiais, visando a adequação de diferentes recursos implementados a partir de uma trajetória mediacional que vise a integração entre os diferentes alunos;
- a elaboração e implementação de recursos tecnológicos no ensino de Combinatória nas diferentes etapas da Educação Básica e a análise a partir dos componentes e indicadores da idoneidade mediacional;
- o uso da História da Combinatória como potencializadora de estratégias diferenciadas de problemas combinatórios, principalmente com relação a estratégias enumerativas;
- um processo de formação de professor na Combinatória que leve em consideração as diferentes dimensões da idoneidade didática e a construção de conhecimentos didático-matemáticos de futuros professores;
- o implemento de técnicas de contagem como base para aprendizagem da resolução de problemas, especialmente verificando o impacto do uso da recursividade e da gradação entre problemas na trajetória cognitiva e nos significados pessoais dos estudantes;
- O estudo da interação dos problemas de contagem com as mídias computacionais, pondo em destaque os avanços da inteligência artificial;
- Os encaminhamentos da capacidade de decisão dos estudantes nos aspectos das questões de contagem, inclusive no que diz respeito a outras áreas do conhecimento.

Outrossim, a relevância do trabalho apresentado, se insere na direção dos contributos do trabalho docente na implementação de práticas/ações do fazer pedagógico, as quais redimensionam a forma de apreender a lógica do ensino e aprendizagem de temas complexos a partir de fundamentos teóricos construídos/ em construção sobre essa ação/fazer. Muito particularmente, verificou-se as contribuições advindas da Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemáticos (EOS) e da Teoria das Funções Semióticas (TFS)ao estudo analisado, tanto do ponto de vista descritivo das ações realizadas na sala de aula e dos objetos primários da Combinatória no

livro didático, como do ponto de vista analítico com o uso dos componentes e indicadores da idoneidade didática.

Pesquisar e estudar os tipos de problemas combinatórios, entendê-los e diferenciá-los, possibilita uma visão geral das diferentes técnicas e modelos, mas quase sempre, quando um problema combinatório é apresentado, faz-se interessante deixar ao aluno a tentativa pessoal de um caminho para solução. A conversa entre os pares, promove a discussão entre as diferentes perspectivas e as justificativas aparecem em defesa da resposta apresentada. Se o objetivo é aprendizagem ou a construção do raciocínio combinatório, a apresentação dos tipos de problemas e técnicas de contagem, não é suficiente. É necessário, como fez o professor do presente estudo, priorizar procedimentos e argumentos, acompanhando os processos realizados pelos estudantes, incentivando a participação e responsabilidade dos estudantes na resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

ADLER, P.A.; ADLER, P. Observation Techniques. In: DEZIN, N; LINCOLN, Y.S. (eds.) **Collectin and interpreting qualitative materials**. Londres: SAGE, 1998. p.79-110.

AGUIAR, T. P. **Princípio da casa dos pombos: uma abordagem diferenciada com objetos de aprendizagem**. 2013. 58f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em:

http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/5990/1/2013_dis_tpdeaguiar.pdf
Acesso em: 01.Nov.2018.

ALVES, R.C. **O Ensino de Análise Combinatória na Educação Básica e a Formação de Professores**. 2012. 176 f. Dissertação. (Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

ALVES-MAZZOTTI, A.J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa qualitativa e quantitativa**. São Paulo: Pioneira, 1998.

ALMEIDA, A. **Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio**. 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, MG, 2010. Disponível em:

http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2522/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_EnsinandoAprendendoAn%C3%A1lise.pdf. Acesso em: 01. Nov. 2018.

AMBROZI, L. **Jogos em uma Sequência Didática para o ensino de Análise Combinatória**. 2017. 163 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2017. Disponível em:

<https://repositorio.ucs.br/xmlui/bitstream/handle/11338/3450/Dissertacao%20Lui%20Ambrozi.pdf?sequence=1&isAllowed=y> . Acesso em: 15 Dez.2018

ANDRADE, L.S. **Currículos de matemática no Ensino Médio: um olhar sob a perspectiva do enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução matemática**. 2014. 260f. Tese. (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2014.

ARAUJO, K.L.S; ROCHA, C.A.R. Como alunos de Ensino Médio Compreendem os Invariantes Prescritivos de Ordem e Repetição em Problemas de Arranjo e Combinação? **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, Londrina, PR, v. 19, n. 2., p.142-150, 2018. Disponível

em: <http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/ensino/article/view/6063/4170>. Acesso em: 14 Nov.2018.

AROZA, C.J.; GODINO, J.D.; BELTRÁN-PELLICER, P. Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. **AIRES. Avances en innovación e investigación**. Granada. v.6, n.6, 2016. p.1-29.

ARTEAGA, P.; BATANERO, C.; GEA, M.M. La componente mediacional del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre Estadística: un estudio de evaluación exploratorio. **Educação Matemática Debate**, Montes Claro, MG, v.1. n. 1, p. 54-75. jan-abr, 2017. Disponível em: <<http://www.periodicos.unimontes.br/emd/article/view/339>> . Acesso em: 14 Out. 2018.

ASSIS, A.; GODINO, J. D.; FRADE, C. As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, México, v. 15, n. 2, p.171-198, jul. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362012000200003&lng=es&nrm=iso>. Acesso em: 14 Out. 2018.

ASSIS, A; FRADE, C; GODINO, J D.. Influência dos padrões de interação didática no desenvolvimento da aprendizagem Matemática: análise de uma atividade exploratório-investigativa sobre sequências. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 733-758, Dezembro de 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2013000400003&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 14 Out. 2018.

ABITIBOL, P. C. P. **Raciocínio lógico-recursivo**: uma proposta para resolução de problemas do ensino médio. 2018. 86 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UEMA). – Universidade Estadual do Maranhão, Maranhão, 2018. Disponível em: [http://www.proformat.uema.br/wp-content/uploads/2018/03/161042371_PAULO_CESAR_PEREIRA_ABITIBOL.p](http://www.proformat.uema.br/wp-content/uploads/2018/03/161042371_PAULO_CESAR_PEREIRA_ABITIBOL.pdf)df? Acesso em: 01 Nov. 2018.

AZEVEDO, J.; BORBA, R.E.S.R. Construindo árvores de possibilidades virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações Combinatórias? **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 7, n. 2, p. 39-62, 2013.

BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, Washington/DC, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, R. M. **Um curso moderno elementar de Análise Combinatória**. São Paulo: Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, 1963.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa, Portugal; Edições 70, LDA, 2009.

BARRETO, F.L.S.; BORBA, R. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais [...]** Salvador. SBEM, 2010. p.1-10.

BATANERO, C.; GODINO, J. D; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial Reasoning and its Assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, J. B. (ed.) **The Assessment Challenge in Statistics Education**. Amsterdã: IOS Press, 1997. p. 239-252.

BAUERSFELD, H. Interaction, construction, and knowledge: alternative perspectives for mathematics education. In: GROUWS, D.A; COONEY, T.J.; JONES, D. (Eds.) **Effective Mathematics Teaching**. Reston, Virginia: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1988. p. 27-46.

BELTRÁN-PELLICER, P.; GODINO, J. D. Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria. **Perspectiva Educacional. Formación de profesores**, Valparaizo, Chile, v. 56. n. 2, p. 92 - 116, Junho 2017. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Beltran-Pellicer_Godino_2017.pdf Acesso em 14 Out. 2018.

BEZERRA, L.R.D. **Métodos de Contagem**. 2013. 93 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7524>. Acesso em: 01. Nov. 2018.

BIGGS, N.L. The roots of combinatorics. **Historia Mathematica**. Amsterdã, Elsevier, v. 6, n.2, p.109-136, 1979.

BOAVIDA, A.M.R. **A argumentação em Matemática**: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. 2005. 975f. Tese.(Doutorado de Educação) - Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa Departamento de Educação. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2005.

BOGART, K.P. The roles of finite and Discrete Mathematics in college and High School Mathematics. In: KENNEY, M.J; HIRSCH, C. R. (Eds.), **Discrete Mathematics across the curriculum, K-12**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991, p. 128-136.

BONAFÉ, J.M.; RODRÍGUEZ, J.R. O currículo e o livro didático: uma dialética sempre aberta. In: SACRISTÁN, J.G.(org) **Saberes e incertezas sobre o**

currículo. Porto Alegre: Penso, 2013. p. 209 - 225. Tradução de Alexandre Salvaterra.

BONILLA MARTÍNEZ, D; RUEDA MEJÍA, M. Niveles de razonamiento combinatorio que demuestran estudiantes universitarios. In: Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 13, 2011, Recife. **Anais [...]** Recife, ICMI, 2011.

BORASSI, R. Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. **For the Learning of Mathematics.** Montreal, Canadá, v.7, n.3, p. 2-9, 1987.

BORBA, R.E.S.R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais [...]** Salvador. SBEM, 2010. p.1-10.

_____. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. **Anais [...]** Curitiba. SBEM, 2013. p.1-10.

BORBA, R.E.S.R; ARAUJO, A.C.B.S.; BRAZ, F.M.T. A compreensão por alunos do Ensino Médio de problemas combinatórios condicionais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. **Anais [...]** Curitiba. SBEM, 2013. p.1-10.

BORBA, R.E.S.R; AZEVEDO, J.; BITTAR, M. Representações semióticas e situações combinatórias em livros didáticos dos anos iniciais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo. **Anais [...]** São Paulo. SBEM, 2016. p.1-12.

BORBA, R.E.S.R; BRAZ, F.M.T. o que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3, 2012, Fortaleza. **Anais [...]** Fortaleza. SBEM, 2013. p.1-10.

BORBA, R.E.S.R; PESSOA, C.A.S; ROCHA, C.A. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa (Online).** São Paulo. v.15, n.4. p.895 - 908. 2013.

BORBA, R.E.S.R; PESSOA, C.A.S; ROCHA, C.A.; ASSIS, A. A formação de professores de anos iniciais do ensino fundamental para o ensino da Combinatória. **Revista RPEM - Revista Paranaense de Educação Matemática.** Universidade Estadual do Paraná – Unespar, Campo Mourão, v.3, n.4, p.115-137, 2014.

BORBA, R.E.S.R.; ROCHA, C.A.; AZEVEDO, J. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica.

Bolema, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, Dezembro, 2015. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2015000301348&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 14 Abr. 2019. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a27>.

BRAGA, K.A. **O processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória**: uma visão dos professores de matemática de Floriano/PI. 73f. 2009. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil. Canoas, RS, 2009. Disponível em: <http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/98/91> Acesso em: 01 Nov.2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1^a a 4^a série. Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1997.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+)** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

_____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, V.2, Brasília: SEF/MEC. 2006
In: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf

_____. FNDE, SEB. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2012 para o Ensino Médio: Matemática / Brasília: Ministério da Educação, 2011.

_____. FNDE, SEB. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015 para o Ensino Médio: Matemática / Brasília: Ministério da Educação, 2014.

_____. **Base Nacional Comum Curricular** Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRAZ, F.M.T. Problemas combinatórios condicionais: a influência dos invariantes na categorização dos diferentes tipos de problemas. .In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013. Curitiba. **Anais [...]** Curitiba: SBEM, 2013. p.1-12.

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V.M.R. A Noção de Idoneidade Didática e seu uso na Formação de Professores de Matemática. In: **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. São Paulo, v.8, n.2, p.1- 41. 2015.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. New York: Kluwer Academic Publisher, 2002. (Trad. Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland; Virginia Warfield).

CAMERON, P.J. A personal view of combinatorics. In: WILSON, R.; WATKINS, J.J. (Eds.). **Combinatorics: ancient e modern**. p. 355-366. United Kingdom: Oxford University Press, 2013.

CARVALHO, J.B.F.; CARVALHO, P; IEZZI, G.; KENNEDI, J. O papel do livro didático na sala de aula de matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004. Recife. **Anais [...]**. Recife: SBEM, 2004. p.1-1. Disponível em: <<http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/13/MR22.pdf>>. Acesso em: 31 Mai. 2016.

CARVALHO, J. B.P.F; LIMA, P. Escolha e uso do livro didático. In: CARVALHO, J.B.P.F.(Org.) **Matemática: Ensino Fundamental**. v.17, p.15-30. Brasília, 2010. Coleção Explorando o Ensino.

CHILELA, R. R. **O jogo de pôquer: uma situação real para dar sentido aos conceitos de combinatória**. 2013. 142 f. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/81702>. Acesso 01. Dez. 2017.

CLARKE, D. Untangling Uncertainty, Negotiation and Intersubjectivity. In: CLARKE, D. (Ed.) **Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. p.33-52.

COENEN, T.; HOF, F.; VERHOEF, N. Combinatorial Reasoning to Solve Problems. In HART, E.W.; SANDEFUR, J.(Eds.) **Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: curriculum and research**. Springer: USA, 2018. p.69-80.

CONTRERAS DE LA FUENTE, Ángel; GARCIA ARMENTEROS, Manuel; FONT MOLL, Vicenç. Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. **Bolema**. Rio Claro, v. 26, n. 42b, p. 667-690, Abr. 2012 . <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200013>.

CORREIA, P.F.; FERNANDES, J.A; ALMEIDA, P. Ensino e aprendizagem das operações combinatórias no 12º ano de escolaridade. In: FERNANDES, J.A; VISEU, F.; MARTINHO, M.H.; CORREIA, P.F. Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, 2, 2009. **Acta [...]** Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2009. p.129-150. Disponível em:

http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9913/1/Actas_IIEncontroProbabilidadesEstatisticaEscola.pdf Acesso em 31/05/2016.

CUNHA, M.J. **Elaboração de problemas combinatórios por professores de matemática do Ensino Médio**. 2015. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

D'AMORE, B.; FONT, V.; GODINO, J. D. La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Paradigma**, São Paulo, v.28, n.2, p.49-77, 2007.

DEGUIRE, L.J. Permutations and Combinations: a problem-solving approach for Middle School students. In: KENNEY, M.J.; HIRSCH, C. R. (Eds.) **Discrete Mathematics across the curriculum, K-12**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991, p. 59-66.

DETEMPLE, D; WEBB, W. **Combinatorial Reasoning**: An Introduction to the Art of Counting. EUA: Wiley, 2014.

DOSSEY, J.A. Discrete Mathematics: The Math for our time. In: M. J. Kenney & C. R. Hirsch (Eds.) **Discrete Mathematics across the curriculum, K-12**. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics, 1991, p. 1-9.

DUARTE, A.R.S.; OLIVEIRA, M.C.A; PINTO, N. B. A relação conhecimento versus conhecimento pedagógico na formação do professor de matemática: um estudo histórico. **Zetetiké**. Campinas, SP, v.18, n.33, jan/jun. p.103-134, 2010.

DUBOIS, J. G. Une Systématique des configurations combinatoires simples. **Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, v.15, n.1, p.37-57, 1984.

DUVAL, R. Prefácio de Raymond Duval. In. D'AMORE, B; PINILLA, M.I.F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. São Paulo: Ed. da Física, 2015. p.9 -11.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.

ENGLISH, L. D. Combinatorics and the development of Children's Combinatorial Reasoning. In: JONES, G. A (Ed) **Exploring Probability in School**: Challenges for Teaching and Learning. New York: Springer, 2005.

ESPINOZA, J.; ROA, G. R. Desarrollo teórico del tema de combinatoria presente en algunos libros de texto de matemática de educación secundaria en España. In: CONTRERAS, J. M.; CAÑADAS, G. R.; GEA, M. M.; ARTEAGA, P. (Eds.), Jornadas Virtuales em Didáctica de la Estadística, Probabilidad y

Combinatoria, 1, 2013. **Acta [...]** Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013. p. 181-188.

_____. La combinatoria en libros de texto de matemática de educación secundaria en España. In: GONZÁLEZ, M. T.; CODES, M.; ARNAU, D.; ORTEGA, T. (Eds.) Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática - SEIEM, 18, 2014 **Acta[...]**. Salamanca: SEIEM, 2014. p. 277-286.

ESTRADA, A; BATANERO, C; LANCASTER, S. Teachers' Attitudes Towards Statistics. In. BATANERO, C; BURRILL, G.; READING, C. (eds.) **Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education**. London: Springer, 2011. p.163-174.

FERNANDES, J.A.; CARVALHO, B. A; CARVALHO, C.F. O Trabalho Colaborativo como meio de desenvolver o Conhecimento Didático de duas professoras em Combinatória. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.12, n.1, p.43-74, 2010.

FERNANDES, J.A.; CORREIA, P.F.; ROA GUZMÁN, R. Aquisição das operações Combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, México, v. 13, n. 2, julio, 2010, p. 215-242
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa Distrito Federal, Organismo Internacional. Disponível em:
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=335159950005>. Acesso em: 31 Mai. 2016.

FERNÁNDEZ, E. Razonamiento Combinatorio y el currículo español. In: CONTRERAS, J. M.; CAÑADAS, G. R.; GEA, M. M.; ARTEAGA, P. (Eds.), Jornadas Virtuales em Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 1, 2013. **Acta [...]** Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013. p. 539-545.

FERREIRA, J.A. **O ensino de combinatória**: uma análise de livros didáticos de matemática. 2015. 66f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

FERREIRA, A.A. **A produção de significados matemáticos em um contexto de aulas exploratório-investigativas**. 2012. Doutorado. (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, MG: UFMG, 2012.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: Reidel, 1975.

FISCHBEIN, E.; PAMPU, I.; MÎNZAT, I. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In E. Fischbein, **The intuitive sources of**

probabilistic thinking in children (Appendix IV). Dordrecht: Reidel, 1975. p. 189-201.

FLICK, U. **Introdução à Pesquisa Qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2009. (Tradução Joice Elias Costa)

FONT, V.; GODINO, J.D. La noción de configuración epistêmica coma herramienta de análises de texto matemáticos: su uso en la formación de profesores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.8, n.1, p. 67-98, 2006.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J.D. Modelo para el análisis didáctico em educación matemática. **Infancia y aprendizaje**. Espanha, v.33, n.2, p.89-105, 2010.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**: China lectures. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.

GARDINER, A.D. A cautionary note. In: KENNEY, M.J.; HIRSCH, C. R. (Eds.), **Discrete Mathematics across the curriculum, K-12**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991, p. 10-17.

GODED, P.A.; BAYÉS, A.S. Tendencias didácticas en los libros de texto de matemática para la ESO. **Revista de Educación**, Espanha, n.340. Maio-agosto, p.341-378, 2006.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathematiques**. França, v. 22, n.2/3, p.237-284, 2002.

_____. **Teoría de las Funciones Semióticas**: un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática. Trabalho para obtenção da cátedra na Universidad de Granada. Granada, 2003. Disponível em: <https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>. Acesso: 10 Dez 2017.

_____. Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada, 2014. **Diapositiva 1**. Disponível em: http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_14abril14.pdf Acesso em: 11 Nov. 2018.

_____. Indicadores de la idoneidade didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia Interamericana de Educação Matemática, 13, 2011. Recife. **Anais [...]**. Recife, CIAEM-IACME, 2011, p.1-20. Disponível em:

http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf. Acesso em: 11 Nov.2018

_____. Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In: ESTEPA, A.; CONTRERAS, Á.; DEULOFEU, J.; PENALVA, M. C.; GARCÍA, F. J.; ORDÓÑEZ, L. (Eds.) Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática - SEIEM, 16, 2012. Jaén. **Actas[...]**. Baeza: SEIEM, 2012, p. 49 - 68.

_____. Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. In. CONTRERAS, J. M.; ARTEAGA, P.; CAÑADAS, G. R.; GEA, M.M.; GIACOMONE, B.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M. (Eds.), Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, 2, 2017. Granada. **Actas [...]** Granada, 2017, p.1-20.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, França,v.14, n.3, p.325-355, 1994.

GODINO, J. D; BATANERO, C. Implicaciones de las relaciones entre epistemología e instrucción matemática para el desarrollo curricular: el caso de la Combinatoria. **La matematica e la sua didattica**, Università di Bologna, v.24, n.1-2, p. 17-39, 2016. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_Batanero_LaMate_SuaDida_2016_Epistemologia_instruccion.pdf . Acesso em: 22 Set. 2018.

GODINO, J. D. BATANERO, C.; FONT, V. The ontosemiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, Switzerland, v. 39, n.1-2, p.127-135, 2007.

GODINO, J. D. BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. **Acta Scientiae**. Revista de Ensino de Ciências e Matemática. Canoas, RS, v. 10, n.2, p.7-37, 2008.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; ROA, R. An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. **Educational Studies in Mathematics**, v.60, n.1, p.3-36, 2005.

GODINO, J. D., RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. **Práxis Educativa**, Paraná, v.7, n.2, p. 331-354, 2012.
In:<http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa>

GODINO, J. D, BATANERO, C., RIVAS, H. Y ARTEAGA, P. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en

didáctica de las matemáticas. **REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 8, n.1, p. 46-74, 2013.

GODINO, J.D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M.R. Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de estudio de las Matemáticas. Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática - SEIEM, 10, 2006. **Acta[...]** Huesca, Espanha: SEIEM, 2006, p.221-252.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathematiques**, França, v.26, n.1, p.39-88, 2006.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, México, v.9, n.4, número especial, p.131-155, 2006.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R.; CASTRO, C. Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. **Enseñanza de las Ciencias**, v.27, n.1, p.59-76, 2009.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R.; LURDUY, O. Why is the Learning of Elementary Arithmetic Concepts Difficult? Semiotic Tools for Understanding the Nature of Mathematical Objects. **Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, v. 77, n. 2, p. 247-265, 2010.

GODINO, J. D.; LLINARES, S. El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. **Revista Educación Matemática**, México, v. 12, n. 1, p. 70-92, 2000.

GODINO, J.D.; RIVAS, M.; CASTRO, W.F.; KONIC, P. Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. **REVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 1-21, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p1/23451> Acesso em: 14 Abr. 2019.

GOLDIN, G.A. Discrete Mathematics and the Affective Dimension of Mathematical Learning and Engagement. In. HART, E.W.; SANDEFUR, J.(Eds.) **Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: curriculum and research**. Springer: USA, 2018. p.53-65.

GÓMEZ-CHACÓN, I.M. **Matemática emocional**. Los afectos en el aprendizaje matemático. Narcea, Madrid, 2000.

GOULART, C. Enunciar é argumentar: analisando um episódio de uma aula de História com base em Bakhtin. **Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação. Unicamp: Pro-posições-** Dossiê: Argumentação e construção do conhecimento: estudos em sala de aula. São Paulo, v.18, n.3(54), p. 93-108, 2007.

GRAHAM, C.L. Strengthening a K-8 mathematics program with discrete mathematics. In: KENNEY, M.J; HIRSCH, C. R. (Eds.), **Discrete Mathematics across the curriculum, K-12**. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics, 1991, p. 18-29.

GRAHAN, R. Foreword. In WILSON, R.; WATKINS, J.J. **Combinatorics: ancient e modern**. United Kingdon: Oxford University Press, 2013.

GROTH, R.; MELETIOU-MAVROTHERIS, M. Research on Statistics Teachers' Cognitive and Affective Characteristics. In: BEN-ZVI, D.; MAKAR, K; GARFIELD, J. (eds.) **International Handbook of Research in Statistics Education**. Switzerland, Springer, 2018, p.327-355.

HADAR,N.; HADASS, R. The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. **Educational Studies in Mathematics**. Switzerland, v.12. p.435-443,1981.

HARO, J.J.O. **La probabilidad en los libros de texto**. Granada: Universidad de Granada, 2002.

HART, E.W.; SANDEFUR, J.(Eds.) **Teaching and learning Discrete Mathematics Worldwide: curriculum and research**. Springer: USA, 2018.

HEITELE, D. An epistemological view on fundamental stochastic ideas. **Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, v.6, p.187-205, 1975

HELME, S; CLARKE, D.; Cognitive engagement in the Mathematics Classroom. In: CLARKE, D. (Ed.) **Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. p.131-153.

HERBEL-EISENMANN, B.A. Negotiating the “Presence of the Text”: How Might Teachers’ Language Choices Influence the Positioning of the Textbook?In. REMILLARD, J.T.; HERBEL-EISENMANN, B.A; LLOYD, G.M. (Eds.) **Mathematics Teachers at Work Connecting Curriculum Materials and Classroom Instruction**. Nova York: Routledge, 2009. p.134-151.

HOLANDA, D.S. **Investigando uma proposta de formação inicial de professores de matemática: conhecimentos docentes de combinatória**. 2017. 118f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2017.

HOLTON, D; THOMAS, G. Mathematical Interactions and Their Influence on Learning. In: CLARKE, D. (Ed.) **Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. p.75-104.

HOLLIDAY, R.L. Graph Theory in the High School Curriculum. In: KENNEY, M.J.; HIRSCH, C. R. (Eds.) **Discrete Mathematics across the curriculum, K-12**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991, p. 87-95.

HUNTER, D. **Fundamentos da Matemática Discreta**. São Paulo: LTC, 2011.

JANUARIO, G; LIMA, K; PIRES, C.M.C. A relação professor-currículo e os diferentes usos dos materiais curriculares de matemática In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo. **Anais[...]** São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

JOHNSON, J. Using Dominoes to Introduce Combinatorial Reasoning. In: KENNEY, M.J; HIRSCH, C. R. (Eds.) **Discrete Mathematics across the curriculum, K-12**. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics, 1991, p. 128-136.

KAUR, B. (Ed.) **Understanding Teaching and Learning: classroom research revisited**. Rotterdami: Sense Publishers, 2012.

KAPUR, J.N. Combinatorial Analysis and school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, D. Reidel Publishing Company: Dordrecht-Holland, v.3. p.111-127, 1970.

KENNEY, M.J; HIRSCH, C. R. (Eds.) **Discrete Mathematics across the curriculum, K-12**. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics, 1991.

KINPARA, M.M. Um estudo da interação professor-aluno a partir da análise do processo de construção de conhecimentos. **PSIC - Revista de Psicologia da Vetor Editora**. São Paulo , v. 9, n. 2, p. 197-210, dez. 2008 . Disponível em <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1676-73142008000200008&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 18 Dez. 2018

KONIC, P.M.; GODINO, J. D.; RIVAS, M.A. Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. **Números**. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Islas Canarias, v.74, p.57-74. julho de 2010. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Decimales_Numeros_2010.pdf> Acesso em 31 Mai. 2016.

KNUTH, D.E. Two Thousand Years of combinatorics. In WILSON, R.; WATKINS, J.J. **Combinatorics: ancient e modern**. United Kingdon: Oxford University Press, 2013. p. 2-38.

_____. A draft of section 7.2.1.7: History of combinatorial generation. *The art of Computer Programming*. 2005. V.4; 4B. p.1-37. Disponível em: <http://www.cs.utsa.edu/~wagner/knuth/fasc4b.pdf> . Acesso em: 10 Dez.2018.

LLANOS, V.C.; OTERO, M.R. Un análisis de las características de los libros de matemática para la Enseñanza Secundaria con relación a la argumentación y las imágenes. **Perspectiva Educacional Formación de Profesores**. Valparaíso, Chile, v.51, n.2., p. 119-148, 2012.

LEITAO, S.; ALMEIDA, E. G. da S.. A produção de contra-argumentos na escrita infantil. **Psicologia: Reflexão e Crítica**. Porto Alegre, v. 13, n. 3, p. 351-361, 2000. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-79722000000300004&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 20 Dez. 2018. <http://dx.doi.org/10.1590/S0102-79722000000300004>.

LEITÃO, S. Analyzing changes in view during argumentation: a quest for method. **Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research** [S.l.], v. 2, n. 3, p.1-19, set. 2001. ISSN 1438-5627. Disponível em: <http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/907/1983>. Acesso em: 21 Dez. 2018.

LEITÃO, S. Processos de construção do conhecimento: a argumentação em foco. **Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação Unicamp. Proposições**. Dossiê: Argumentação e construção do conhecimento: estudos em sala de aula. São Paulo, v.18, n.3(54), p. 75-92, 2007. Disponível em < <https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/2442/54-dossie-leitaos.pdf> > Acesso em: 20 Dez. 2018.

LEITE, M. PESSOA, C; FERRAZ, M; BORBA, R. Softwares educativos e objetos de aprendizagem: um olhar sobre a análise Combinatória. In: Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 10, 2009. Ijuí. **Anais [...]**. Ijuí, EGEM, 2009. p.1-12.

LIMA, A.P.B. **Princípio Fundamental da Contagem**: Conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações Combinatórias. 2015. 138f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2015.

LIMA, A.P.B.; ROCHA, C.A. O que diz o currículo prescrito para combinatória no Brasil? Reflexões sobre o desenvolvimento do conhecimento do horizonte e conhecimento curricular de professores. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016, p.1-12.

LIMA, E; GADELHA, D; BORBA, R. Como diferentes grupos resolvem problemas combinatórios condicionais e não-condicionais? **Educação Matemática Debate**. Montes Claros, v.1, n.2, p.109-130, maio/ago 2017.

LIMA, E. **Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA**: investigando relações. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2018.

LIMA, I.B. **Aulas de Combinatória no Ensino Médio**: como estão ocorrendo. 2016. 114f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/17751/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Itatiane%20Borges%20Lima.pdf>. Acesso em: 20 Dez. 2018.

LOCKWOOD, E. A model student's combinatorial thinking. **The journal of mathematical behavior**, USA, v.32, n.2, p. 251-265, Jun 2013.

LOCKWOOD, E.; ERICKSON, S. Undergraduate students' initial conceptions of factorials. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, United Kingdom, v.48, n.4, p.499-519, 2017.

LOCKWOOD, E.; SWINYARD, C.A.; CAUGHMAN, J.S. Patterns, sets of outcomes, and combinatorial justification: two students' reinvention of counting formulas. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, Switzerland, v.1, n.1, p.27-62, Apr. 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/275041897_Patterns_Sets_of_Outcomes_and_Combinatorial_Justification_Two_Students'_Reinvention_of_Counting_Formulas. Acesso em: 12 Abr. 2018

LOPES, J.A. **Livro didático de Matemática**: concepção, seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendências em Educação Matemática. 2000. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000213902&fd=y>. Acesso em: 25 Fev. 2014.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MAGINA, S.; MERLINI, V.L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. In: Simpósio Internacional de Educação Matemática, 3. 2012. **Anais [...]** Salvador: SBEM, 2012, p.1-12.

MAHER, C.; UPTGROVE, E.. Methodology. In: MAHER, C.; POWELL, A.; UPTGROVE, E. (Eds.) **Combinatorics and Reasoning**: representing, justifying and building isomorphisms. USA. Mathematics Education Library. Springer, 2010, p.9-14.

MAHER, C.; POWELL, A.; UPTEGROVE, E. **Combinatorics and Reasoning: representing, justifying and building isomorphisms**. USA. Mathematics Education Library. Springer, 2010.

MARTIN, G. E. **The art of enumerative combinatorics**. New York: Springer, 2001.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Bases curriculares 7º básico a 2º médio**. Ministerio da Educación. Gobierno de Chile, 2015.

_____. **Matemática**. Programa de Estudio para Primer Año Medio Unidad de Curriculum y Evaluación. Ministerio da Educación. Gobierno de Chile, 2011.

MENEZES, L. **Investigar para ensinar matemática**: contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores. Tese. 702.f. 2004. (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências Departamento de Educação. Lisboa, 2004. Disponível em: <http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1149/4/Investigar%20para%20ensinar%20Matem%C3%A1tica.pdf> Acesso em 12 dez.2018.

MENEZES, L.; FERREIRA, R.T; MARTINHO, M.H.; GUERREIRO, A. Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In: PONTE, J.P. (Org.) **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p.135-161. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/55632317.pdf>. Acesso em 14. Dez.2017.

MORGADO, A.C.O; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NCTM. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principios y estándares para la Educación Matemática**. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). Reston, VA: NCTM, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. Razonamiento Combinatorio en Alumnos de Secundaria. **Educación Matemática**, México, v.8, n.1, p. 26-39, 1996.

NAVARRO-PELAYO, V. **Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria**. 652p. Tese. 1994. (Doutorado em didáctica de la Matemática). Universidad de Granada. Granada, Set de 1994.

NOGUEIRA, I.C. Análise ontossemiótica de processos instrucionais de matemática, melhoria de práticas e desenvolvimento profissional docente.

Revista de estudios e investigación em psicología y educación. Espanha, v. extra, n.6, p.209 -212. 2015a.

NOGUEIRA, I.C.N.S.A. **Abordagem ontossemiótica de processos de ensino e aprendizagem de grandezas e medidas no 1º ciclo de educação básica.** Tese. 241f. 2015.(Departamento de didáctica e organización escolar). Faculdade de Ciências de Educación. Universidade Santiago de Compostela, Portugal, 2015b. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_IsabelC_Nogueira.pdf Acessado em 03 dez. 2018.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLSON, D. R. On the language and authority of textbooks. In Castell,S; Luke, A.; Luke, C. (Eds.) **Language, authority and criticism:** Readings on the school textbook. Philadelphia, PA: Falmer Pres, 1989. p. 233–244.

PAIS, L.C. Recursos metodológicos propostos por livros didáticos para o estudo do Teorema de Pitágoras. In. Seminário Internacional de Educação Matemática, 3.São Paulo. **Anais[...]** São Paulo: SBEM, 2006, p.48-49.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PEPIN, B.; GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Re-sourcing teacher work and interaction: new perspectives on resource design, use and teacher collaboration. **ZDM: The International Journal on Mathematics Education.** Switzerland, v.45, n.7. p. 929-943, 2013. Disponível em: <https://research.tue.nl/en/publications/re-sourcing-teacher-work-and-interaction-new-perspectives-on-reso>. Acesso em: 03 dez.2018.

PERELMAN, C. **O império retórico:** Retórica e argumentação. Porto: Edições ASA, 1993.

PERELMAN, C.; OLBRECHTS-TYTECA, L. **Tratado da argumentação:** A nova retórica. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes públicas de Ensino Pernambuco:** Matemática. Recife: SE, 2008.

_____. Secretária de Educação. Parâmetros para a Educação Básica do estado de Pernambuco. **Parâmetros curriculares de matemática para o ensino fundamental e médio.** Recife: SE, 2012.

_____. Secretaria da Educação. **Parâmetros na sala de aula matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife: SE, 2013

PESSOA, C. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. Tese. (Pós-graduação em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. Resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos do 6º ao 9º ano. In: Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste, 19, 2009. **Anais[...]** João Pessoa, EPENN, 2009, p.1-17.

_____. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife, v. 1,, p. 1-22, 2010

PHILIPP, R.A. Mathematics teachers'beliefs and affect. In LESTER, F. (Ed;) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston, VA: NCTM, 2007. p.257-315.

PIAGET, J; INHELDER, B. **A origem da ideia do acaso na criança**. Rio de Janeiro: Distribuidora Record, 1951

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J.D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**. Venezuela, v. 34, nº 1. Junho. p. 87-109, 2015.

PIMENTA, S. G.; ANASTASIOU, L.G. Docência no Ensino Superior: problematização. In: PIMENTA, S. G.; ANASTASIOU, L. G. C. **Docência no Ensino Superior**. São Paulo: Cortez, 2002. (Coleção Docência em Formação).

PLANCHA, K.C; MORO, M.L.F. Problemas de Produto Cartesiano, Raciocínio Combinatório e intervenção do professor. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**. Brasília, V. 25 n. 1, Jan-Mar, p. 7-17, 2009.

POCHULU, M; FONT, V. Análisis del funcionamiento de una classe de matemáticas no significativa. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME**, México, v.14, n.3. nov. p.361-394, 2011

PONCE, B. **Os limites e possibilidades da aula como instrumento de transformação social: uma reflexão**. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1989.

POWELL, A.B; QUINTANEIRO DA SILVA, W. O vídeo na pesquisa qualitativa da Educação matemática: investigando pensamentos matemáticos de alunos. In: POWELL, A.B (org) **Métodos de pesquisa em Educação Matemática**

usando escrita, vídeo e internet. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015 (Coleção Educação Matemática).

REMILLARD, Janine T. Examining key concepts in research on teachers' use of Mathematics Curricula. **Review of Educational Research**, Washington, American Educational Research Association, v. 75, n. 2, p. 211–246, jun. 2005

ROA, R. **Razonamiento Combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.** 2000. 196 f. Tese. Universidade de Granada, Granada, 2000.

ROA, R.; BATANERO, C.; GODINO, J. D; CAÑIZARES, M. J. Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. **Epsilon** Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Andaluza, v.36, p. 433-446, 1997.

ROA, R., BATANERO, C; GODINO, J. Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. **Educación Matemática**, México, v.15, n.2, p. 5–25, 2003.

ROA, R.; BATANERO, C.; GODINO, J.D. Dificultad de los problemas combinatorios em Estudiantes com preparación matemática avanzada. **Números. Revista de didáctica de las matemáticas.** Islas Canarias, v.47, p.33-47, setembro de 2001.

ROCHA, C.A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatorios:** diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2011.

_____. A. Ensino de Combinatória: Expectativas de Professores que atuam no Ensino Fundamental In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM),5. 2012. **Anais[...]** Petrópolis, RJ: SBEM, 2012, p.1-12.

ROCHA, C.A.; BORBA, R.E.S.R Expectativas e perspectivas docentes sobre ensino E Aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio. In: Simposio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT), 3, 2012. **Anais[...]** Fortaleza, CE: UFCE, 2012, p.1-12.

_____. Combinatória em livros brasileiros na etapa final da Educação Básica: uma análise por meio de indicadores da faceta epistêmica do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática In Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), 8. 2017. **Libro de Actas [...]** Madri, 2017. p.38-46. Disponível em: http://www.cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_CB1201-1300.pdf Acesso:10 jan 2019.

ROCHA, C.A.; DIAZ-LEVICOY, D.; BORBA, R.E.S.R. Atividades de combinatória em livros da educação primária chilena. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 7, 2017. **Anais[...]** Canoas: ULBRA, 2017, p.1-12.

ROSAS, L.S. **Ensino de análise combinatória por atividades** 315 f. 2018. Dissertação. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018.

ROSENSTEIN, J.G. The Absence of Discrete Mathematics in Primary and Secondary Education in the United States... and Why that Is Counterproductive. In: HART, E.W.; SANDEFUR, J.(Eds.) **Teaching and learning Discrete Mathematics Worldwide: curriculum and research**. Springer: USA, 2018. p.21-39.

SABO, R. D. **Saberes docentes: a análise Combinatória no Ensino Médio**. 208f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Pontífica Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.

_____. **Análise de livros didáticos do Ensino Médio: um estudo dos conteúdos referentes à. Combinatória**. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Centro Universitário Fundação Santo André. Santo André, 2007.

SACRISTÁN, J.G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

_____. (org). **Saberes e incertezas sobre o currículo**. Porto Alegre: Penso, 2013.

SANDEFUR, J; SOMERS, K; DANCE, R. How Recursion Supports Algebraic Understanding. In: HART, E.W.; SANDEFUR, J.(Eds.) **Teaching and learning Discrete Mathematics Worldwide: curriculum and research**. Springer: USA, 2018. p.145-162.

SANT'ANNA, I.M. **Por que avaliar? Como avaliar?** critérios e instrumentos. Petrópolis: Vozes: 2013

SANTOS, S.S. **Análise de uma experiência com tarefas matemáticas que exploram a dimensão metacognitiva**. Dissertação. (Mestrado em Educação Científica e Formação de Professores). Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Jequié, 2015.

SANTOS NÉ, A.L. **A análise da linguagem matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no ensino superior**. 2013. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e

Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2013.

SCHIELACK, J.F. Primary experiences in learning what (as well as how) In: KENNEY, M.J.; HIRSCH, C. R. (Eds.), **Discrete Mathematics across the curriculum, K-12**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991, p. 44-51.

SCHMIDT, W. **Raciocínio combinatório**: uma meta-análise a partir dos registros de representação semiótica. 2016 (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

SCHLIEMANN, A. D. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In. NUNES, T; CARRAHER, D. W; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

SHULMAN, L.S. Knowledge and teaching: foundation of the new reform. **Havard Education Review**. Cambridge. V. 57, n.1 p. 313-333, fev.1987.

_____. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**. Washington. V.15, p.1-14,1986.

SIERPINSKA, A. Whither mathematics education? In: Congreso Internacional de Educación Matemática, 8., 1996, Sevilla. **Actas ICME 8[...]** Sevilla: Sociedad Thales/ ALSINA, C. et al. (Ed.), 1996. p. 21-46. CD-ROM.

SILVA; J.J.; ROCHA, C.A.R. O invariante da repetição nos problemas combinatórios em livros didáticos do Ensino Fundamental. In: Encontro De Iniciação a Docência, 5, 2015. **Anais [...]** Paraíba, Campina Grande: 2015. p.1-12.

SILVA, P.E.L. **Problemas combinatórios condicionais**: um olhar para o livro didático do Ensino Médio. 2015. 146f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015

SILVA, D.N; FERNANDES, J.A.; SOARES, A.J; Intuições de alunos de 12º ano em Combinatória: um estudo exploratório. Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, 1. **Actas [...]** Universidade do Minho, 2004. p. 61-84.

SZITÁNYI, J.; CSÍKOS, C. Performance And Strategy Use In Combinatorial Reasoning Among Pre-Service Elementary Teachers. In. BESWICK, K.; MUIR, T.; & WELLS, J. (Eds.). *Psychology of Mathematics Education Conference*, 39, 2015 **Proceedings**... v. 4, p. 225-232. Hobart, Australia: PME. 2015

THIEL, A.A. **Práticas matemáticas no Plano Cartesiano**: um estudo da coordenação de registros de representação. 2013. 235f. Tese. (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis: UFSC, 2013.

THOMAZ, D. **Do livro didático ao aluno**: transposição didática na aula de matemática do ensino médio diurno e noturno. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, 2012. Disponível em:
<<http://www.ie.ufmt.br/ppge/dissertacoes/index.php?op=download&id=424>>
Acesso em: 31 Mai.2016.

TREVIZAN, W.A. **Ensinando matemática por meio de situações potencialmente adidáticas**: estudo de casos envolvendo Análise Combinatória. 2014. 90f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em [https://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Qualifica%E7%E3o Wanessa.pdf](https://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Qualifica%E7%E3o%20Wanessa.pdf). Acesso em: 31 Out. 2016.

VANCSÓ, Ödön; BERECSZÁSZI, Eliza; BURIAN, Hana; EMESE, György; STETTNER; Eleonóra; SZITÁNYI, Judit . Complex Mathematics Education in the 21st Century: Improving Combinatorial Thinking Based on Tamás Varga's Heritage and Recent Research Results. In: HART, E.W.; SANDEFUR, J.(Eds.) **Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide**: curriculum and research. Springer: USA, 2018. p.111-134.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad**. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991

VOIGT, J. Patterns and routines in classroom interaction. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Roubaix, v. 6, n. 1, p. 69-118, 1985.

_____. Negotiation of mathematical meaning in classroom processes: Social interaction and learning mathematics. In: STEFFE, L. et al. (Ed.). **Theories of Mathematical Learning**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Ass. Pub., 1996. p. 21-50.

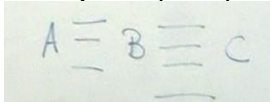
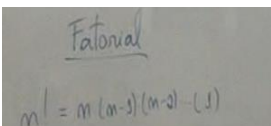
WILHELMI, M.R. **Combinatoria y Probabilidad**. Granada: GEEUG, 2004.

WILSON, R. Early Graph Theory. In WILSON, R.; WATKINS, J.J. **Combinatorics**: ancient e modern. United Kingdom: Oxford University Press, 2013. p. 183-204.

WOOD, T. Patterns of interaction and the culture of the mathematics classroom. In: LERMAN, S.(Ed.) **Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom**. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1994. p.149-168.

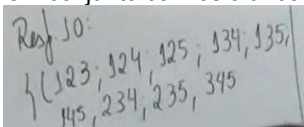
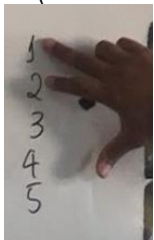
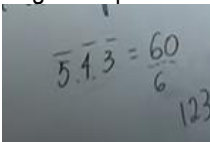
APÊNDICE B – CONFIGURAÇÃO EPISTÊMICA DAS AULAS 3,4,5 E 6

Resumo da Configuração epistêmica da terceira aula (CD18, CD19, CD20, CD21, CD22, CD23)

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS Esquema (CD18)  Enumeração sistemática incompleta oral(CD18) D1 podia ligar com E1,E2,E3,E4, D2 podia ligar com todos os outros. Enumeração não sistemática incompleta (CD23) RENATO OTANER RTNOAE RTNOEA RENAOT RENOTA Multiplicação/ PFC $3 \times 4 = 12$; 12×11 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ $25 \times 25 \times 24 \times 9 \times 8 \times 7$ $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ Multiplicação equivocada $3 \times 5 = 15$, $12 \times 2 = 24$; $5 \times 5 = 25$, Princípio aditivo equivocado (CD21) $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ PFC equivocado (CD22) $25 \times 26 \times 26 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10$ Notação de fatorial(CD23)  Seis fatorial 6!	SITUAÇÃO-PROBLEMA: (Selecionados do capítulo de livro didáticos e elaborados com características dos estudantes). 1. Uma pessoa quer viajar de uma cidade A a uma cidade C, passando pela cidade B. As cidades A e B estão ligadas por 3 estradas: d1,d2,d3. E as cidades B e C estão ligadas por 4 estradas: E1, E2, E3 e E4. De quantos modos diferentes se pode fazer o percurso ABC? (CD 18) 2. Doze cavalos participam de uma corrida. Se nenhum pode ganhar mais de um prêmio, de quantas maneiras podem ser distribuídos o 1º e o 2º prêmio? (CD 19) 3. Quantos são os números de 4 algarismos? (CD 20) 4. De quantas maneiras distintas podem ser colocadas 5 livros lado a lado em uma prateleira? (CD 21) 5. A senha de acesso de um site é composta de 4 letras distintas seguidas de 3 algarismos distintos. A primeira letra não pode ser Z e o primeiro algarismos não pode ser zero. Quantas diferentes senhas de acesso a esse site podem ser criadas? (CD 22) 6. Quantos anagramas poderia fazer com a palavra Renato? (CD23) <table border="1"> <tr> <td data-bbox="641 1048 699 1832" rowspan="4">REGRAS</td><td data-bbox="705 1048 1398 1187"> DEFINIÇÕES/CONCEITOS: Produto de medidas(implícito), permutação, arranjo simples ou com repetição; Fatorial; permutação; anagrama. </td></tr> <tr> <td data-bbox="705 1187 1398 1424"> PROPOSIÇÕES/ PROPRIEDADES Emergentes 1.Zero é permitido na frente do código e não é permitido na frente do número 2.Se nada foi comentado no problema a repetição vai entrar 3. O contexto da situação pode influenciar na resolução do problema combinatório </td></tr> <tr> <td data-bbox="705 1424 1398 1594"> PROCEDIMENTOS: Prévios (Livro): Fórmulas, PFC; árvore; listagem. Emergentes Enumeração oral incompleta; PFC correto; PFC incorreto; </td></tr> <tr> <td data-bbox="705 1594 1398 1832"> TÉCNICAS Enumeração incompleta das possibilidades; Subdividir o problema na explicitação das possibilidades de cada etapa e aplicar o PFC; Aplicar PFC de modo intuitivo; Multiplicar $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ do fim para o começo para evitar erros. Se colocar como quem faz a ação no problema combinatório. </td></tr> </table> ARGUMENTOS DOS ALUNOS Justificam equivocadamente o PFC incorreto a partir dos números presentes no enunciado Alunos utilizam analogia no problema dos caminhos como 'ligação direta'	REGRAS	DEFINIÇÕES/CONCEITOS: Produto de medidas(implícito), permutação, arranjo simples ou com repetição; Fatorial; permutação; anagrama.	PROPOSIÇÕES/ PROPRIEDADES Emergentes 1.Zero é permitido na frente do código e não é permitido na frente do número 2.Se nada foi comentado no problema a repetição vai entrar 3. O contexto da situação pode influenciar na resolução do problema combinatório	PROCEDIMENTOS: Prévios (Livro): Fórmulas, PFC; árvore; listagem. Emergentes Enumeração oral incompleta; PFC correto; PFC incorreto;	TÉCNICAS Enumeração incompleta das possibilidades; Subdividir o problema na explicitação das possibilidades de cada etapa e aplicar o PFC; Aplicar PFC de modo intuitivo; Multiplicar $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ do fim para o começo para evitar erros. Se colocar como quem faz a ação no problema combinatório.
REGRAS	DEFINIÇÕES/CONCEITOS: Produto de medidas(implícito), permutação, arranjo simples ou com repetição; Fatorial; permutação; anagrama.					
	PROPOSIÇÕES/ PROPRIEDADES Emergentes 1.Zero é permitido na frente do código e não é permitido na frente do número 2.Se nada foi comentado no problema a repetição vai entrar 3. O contexto da situação pode influenciar na resolução do problema combinatório					
	PROCEDIMENTOS: Prévios (Livro): Fórmulas, PFC; árvore; listagem. Emergentes Enumeração oral incompleta; PFC correto; PFC incorreto;					
	TÉCNICAS Enumeração incompleta das possibilidades; Subdividir o problema na explicitação das possibilidades de cada etapa e aplicar o PFC; Aplicar PFC de modo intuitivo; Multiplicar $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ do fim para o começo para evitar erros. Se colocar como quem faz a ação no problema combinatório.					

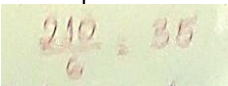
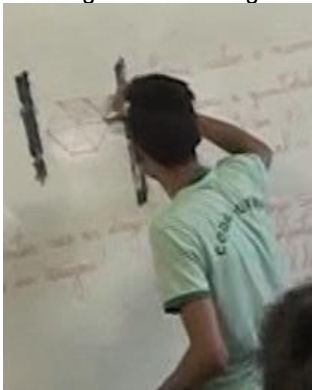
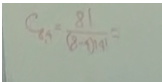
Fonte: Acervo da pesquisa

Resumo da Configuração epistêmica da quarta aula (CD24, CD24, CD26, CD27)

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS Gestual: Gestos representando trocas  Verbal alunos: Trocas, várias combinações, inverteu as letras; desordenado; fatorial Verbal Professor Anagrama, Análise Combinatória. Simbólico alunos: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, seis fatorial; 3×5; 3^5; $5 \times 4 \times 3$ Gráfico- Simbólico professor: Registro no quadro de tracinhos Explicitação das possibilidades da ordenação de três números 123 { 123 231 213 231 312 321 Enumeração das possibilidades em conjunto com os alunos  Dispositivo para enumeração sistemática (fixando elementos)  Regra do quociente 	SITUAÇÃO-PROBLEMA: Problemas retomados da aula anterior, elaborados com características dos estudantes e selecionados do livro didático. 1. Quantos anagramas poderia fazer com a palavra Renato? (CD24) 2. De quantas maneiras 3 pessoas podem sentar em um sofá de quantos lugares? 3. Uma prova é composta de 5 questões, das quais os alunos tem que responder três. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher três? ↓ ↑ DEFINIÇÕES/CONCEITOS: Fatorial; Permutação; anagrama; agrupamentos PROPOSIÇÕES/ PROPRIEDADES Emergentes 1. O contexto da situação pode influenciar na resolução do problema combinatório 2. A ordem pode ou não influenciar o tipo de problema 3. Para sistematizar a listagem é preciso fixar alguns números 4. Regra do quociente PROCEDIMENTOS: Prévios (Livro): Fórmulas, PFC; árvore; listagem. Emergentes PFC correto; PFC incorreto; listagem; Comparação entre agrupamentos ordenados e não ordenados. TÉCNICAS Enumeração incompleta das possibilidades; Subdividir o problema na explicitação das possibilidades de cada etapa e aplicar o PFC; Aplicar PFC de modo intuitivo; Aplica a fórmula de permutação. Multiplicar $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ do fim para o começo para evitar erros. Enumeração para verificação de quantas possibilidades estão sendo ordenadas ↓ ↑ ARGUMENTOS DOS ALUNOS Justificam equivocadamente o PFC incorreto a partir dos números presentes no enunciado; Fixam os argumentos na discussão dos contextos dos problemas para identificar a ordem ou não nos diferentes contextos.

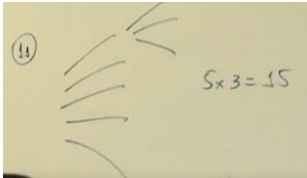
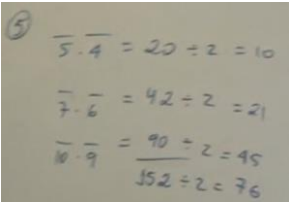
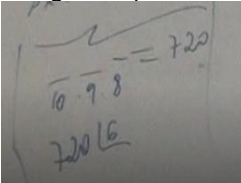
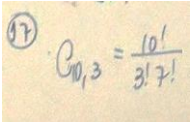
Fonte: Acervo da pesquisa

Resumo da Configuração epistêmica da quinta aula (CD28, CD29, CD30, CD31, CD32, CD33)

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS Verbal alunos: .cinco duplas Simbólico alunos: 10x9; 5; 7x6x5; 90; 45; 9+8+7+6+5+4+3+2+1 Gráfico- Simbólico professor: Registro no quadro de tracinhos  Listagem no quadro do número de diagonais do hexágono  Uso de fórmulas: 	SITUAÇÃO-PROBLEMA: Introduzidas no quadro, retomados da aula anterior, elaborados com características dos estudantes e selecionados do livro didático. 1. Numa empresa 10 de seus diretores são candidatos aos cargos de presidente e vice-presidente. Quantos são os possíveis resultados dessa eleição? 2. Se de Dez pessoas eu fosse escolher duas. De quantas maneiras eu poderia escolher duas? 3. Quantas comissões de três pessoas podem ser formadas com um grupo de sete pessoas?" 4. Ao sair de uma festa dez amigos vão se despedir com um aperto de mão. Quantos apertos de mão eles deram? 5. Quantas são as diagonais do hexágono, DEFINIÇÕES/CONCEITOS: arranjo simples, combinação; apresentação das fórmulas. PROPOSIÇÕES/ PROPRIEDADES Emergentes 1. O contexto da situação pode influenciar na resolução do problema combinatório 2. Verificar se no contexto a ordem influencia ou não o resultado. 3. Apresenta passo a passo da regra do Quociente 4. Comparação entre situações de arranjo e combinação. PROCEDIMENTOS: Prévios (Livro): Fórmulas, PFC; árvore; listagem. Emergentes PFC correto; PFC incorreto; Utiliza princípio aditivo; Enumeração incompleta. Fórmula TÉCNICAS Enumeração incompleta das possibilidades; Subdividir o problema na explicitação das possibilidades de cada etapa e aplicar o PFC; Aplicar PFC de modo intuitivo; Multiplicar 6x5x4x3x2x1 do fim para o começo para evitar erros. ARGUMENTOS DOS ALUNOS Justificam equivocadamente o PFC incorreto a partir dos números presentes no enunciado (realiza divisão); Não compreendem quando é ou não ordenado os agrupamentos, justificando equivocadamente pelo contexto.

Fonte: Acervo da pesquisa

Resumo da Configuração epistêmica da sexta aula (CD34, CD35, CD36, CD37, CD38, CD39, CD40, CD41, CD42, CD43)

ELEMENTOS LINGUISTICOS Verbal alunos: Fatorial; Verbal Professor Opções, combinação com roupas, a partir da escolha, composição. Princípio multiplicativo Simbólico alunos:  10!; Gráfico- Simbólico professor: Registro no quadro de tracinhos  .Regra do quociente  Fórmula 	SITUAÇÃO-PROBLEMA: retiradas da ficha de problemas. 1. Um marceneiro tem 20 modelos de cadeiras e 5 modelos de mesa. De quantas maneiras podemos formar um conjunto de 1 mesa com 4 cadeiras iguais? 2. De quantas maneiras podemos dar 2 prêmios a uma classe com 10 rapazes, de modos que os prêmios não sejam dados a um rapaz? 3. Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com condição de que eles fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los? 4. De quantas maneiras diferentes podemos escolher uma consoante e uma vogal de um alfabeto formado por 18 consoantes e 5 vogais? 5. Considerando os dígitos 8,7,6,4,1, quantos números de dois algarismos distintos diferentes podem ser formados? 6. Um turista vai fazer uma viagem, indo de ônibus e voltando de avião. Seu agente de viagem lhe oferece 5 opções de roteiros de ônibus e 3 de avião. De quantos modos diferentes esse turista pode fazer a mesma viagem? 7. De quantas maneiras diferente podemos dispor de 6 livros em uma prateleira? 8. Qual dos fatoriais a seguir representa a quantidade de anagramas que podem ser formados com as letras da palavra Pernambuco? 9. Tomando-se dez indivíduos, quantos comitês de três pessoas podemos formar? 10. Uma organização dispõe de 10 economistas e 6 administradores. Quantas comissões de 6 pessoas podem ser formadas de modo que cada comissão tenha no mínimo 3 administradores? ↓ ↑ DEFINIÇÕES/CONCEITOS: Produto de medidas, permutação, arranjo simples ou com repetição, combinação (todos de maneira implícita); Multiplicação; Princípio multiplicativo. Problemas condicionais; PROPOSIÇÕES/ PROPRIEDADES Emergentes: 1. Se nada foi comentado no problema a repetição vai entrar; 2. O contexto da situação pode influenciar na resolução do problema combinatório; 3. Verificar se a ordem influencia ou não o problema PROCEDIMENTOS: Prévios (Livro): Fórmulas, PFC; árvore; listagem. Emergentes : PFC correto; PFC incorreto; Fórmulas; Princípio aditivo; Busca por um procedimento mais econômico do que a listagem; TÉCNICAS: Enumeração incompleta das possibilidades; Subdividir o problema na explicitação das possibilidades de cada etapa e aplicar o PFC; Aplicar PFC de modo intuitivo; Comparar o uso da Regra do Quociente e Fórmula ↓ ↑ ARGUMENTOS DOS ALUNOS : Justificam equivocadamente o PFC incorreto a partir dos números presentes no enunciado; Justificam utilizano propriedades de ordenação do problema; Discutem o enunciado sugerindo novas interpretações com base em argumentos combinatórios

Fonte: Acervo da pesquisa