



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA

ANDERSON RODRIGO OLIVEIRA DA SILVA

**PROBABILIDADE SUBJETIVA NO ENSINO MÉDIO: constituição de indicadores
epistêmicos e o conhecimento de estudantes**

Recife
2023

ANDERSON RODRIGO OLIVEIRA DA SILVA

**PROBABILIDADE SUBJETIVA NO ENSINO MÉDIO: constituição de indicadores
epistêmicos e o conhecimento de estudantes**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador (a): José Ivanildo Felisberto de Carvalho

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Anaíse de Santana Santos, CRB-4/2329

S586p

Silva, Anderson Rodrigo Oliveira da.

Probabilidade subjetiva no ensino médio: constituição de indicadores epistêmicos e o conhecimento dos estudantes. / Anderson Rodrigo Oliveira da Silva. – Recife, 2023.

117 f.: il.

Orientador: José Ivanildo Felisberto de Carvalho.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2023. Inclui Referências.

1. Educação estatística. 2. Probabilidade. 3. Letramento. 4. Probabilidade Subjetiva. 5. Ensino médio. I. Carvalho, José Ivanildo Felisberto de. (Orientador). II. Título.

370 (23. ed.)

UFPE (CE2023-019)

ANDERSON RODRIGO OLIVEIRA DA SILVA

**PROBABILIDADE SUBJETIVA NO ENSINO MÉDIO: CONSTITUIÇÃO DE
INDICADORES EPISTÊMICOS E O CONHECIMENTO DE ESTUDANTES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 01/02/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho (Examinadora Externa)
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Este trabalho é dedicado às três mulheres da minha vida: minha mãe, a dona Joana, que assumiu as responsabilidades de pai, mãe e meu anjo da guarda; a minha irmã, Silvana, que diariamente me ensina pelo exemplo, aquela que me faz todos os dias aprender como se fosse o primeiro; e por último, a minha avó, a dona Romana, que foi uma das minhas mães, me ensinou princípios que carrego comigo até os dias de hoje. Infelizmente, hoje ela não possui a lucidez para finalmente saber que o seu neto, que tanto a ama, está prestes a virar mestre. Dona Romana, nós estamos vencendo!

AGRADECIMENTOS

Se alguém me falasse, antes de começar o mestrado, que esta seria a seção mais difícil de escrever, provavelmente eu duvidaria. Agora, aqui, sentado e em frente ao computador, posso comprovar que é a mais pura verdade. Não quero ser injusto, pois, provavelmente vou esquecer de alguém. Desde já, peço desculpas.

Durante os dois anos desse mestrado, convivi diariamente com as limitações impostas por uma doença ocular que me tirou a paz em muitas ocasiões. Foram inúmeras as vezes em que estudar se tornou uma tortura: o zoom a 200%, as duas cirurgias oculares que não resultaram em ganho efetivo, os olhos vermelhos de irritação. Mesmo com isso, consegui, ao meu tempo, produzir esta dissertação. Logicamente, meu primeiro agradecimento é feito àquele que ilumina todos os meus caminhos, que me dá forças e sabedoria para as minhas escolhas: Deus, nosso pai.

Agradeço ao meu orientador, professor Ivanildo, pelas valiosas orientações, paciência com as demandas, e a indicação deste tema de pesquisa, pelo qual me apaixonei desde a primeira leitura.

Um agradecimento especial também para os membros da banca de avaliação, que desde a qualificação apresentaram dicas valiosas que enriqueceram o escopo desta pesquisa.

À Universidade Federal de Pernambuco, ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, ao Grupo de Estudos em Educação Estatística (GREF), meu eterno muito obrigado. Aprendi muito nessa instituição maravilhosa e nesse programa, juntamente com o GREF, capitaneado brilhantemente pela professora Gilda Guimarães, pela qual tenho profunda admiração.

Um obrigado a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo financiamento desta pesquisa.

Agradeço também ao meu amigo Lucas, que sempre esteve me salvando com o inglês. És partícipe desse momento!

Obrigado também aos meus mestres do Instituto Federal de Pernambuco – Campus Pesqueira, que tanto contribuíram para minha entrada no universo da pesquisa. Em especial ao meu eterno mestre Olavo Otávio Nunes (in memoriam) e ao meu “pai” na graduação, professor Bruno Lopes, ao qual me espelho todos os dias na missão de ser docente.

Aos meus colegas de turma no mestrado, Jhonatan, Vitor, Diana, Gabriela Figueiredo e Gaby, um obrigado de coração, por dividir as angústias comigo e me dar forças para prosseguir. Meus mais sinceros votos de prosperidade.

E, claro, não poderia deixar de mencionar três pessoas que tiveram impacto na produção e manutenção da minha saúde mental durante essa fase da minha vida: Eduardo, Francinette e Janiely; sem vocês tudo teria sido muito mais difícil! Que Deus os ilumine sempre.

Se esqueci alguém, desde já me perdoe, sou muito agradecido por todos que me ajudaram na caminhada.

“Tudo é possível. O impossível apenas demora mais.”

(Dan Brown, 1998)

RESUMO

A probabilidade tem relevante papel social com o auxílio à leitura, interpretação e tomada de decisões em contextos de nossas vidas em sociedade nos quais a aleatoriedade se faz sempre presente. No campo da Educação Probabilística há a orientação para um trabalho em sala de aula que aborde a probabilidade e seus diferentes significados. A literatura atual aponta que estudos sobre as relações entre estudantes e a Probabilidade Subjetiva ainda se encontram raros. Esta pesquisa tem como foco central o Significado Subjetivo de Probabilidade e, como objetivo, investigar os conhecimentos sobre probabilidade subjetiva de estudantes do Ensino Médio à luz de indicadores epistêmicos. O construto teórico Indicadores Epistêmicos se constitui em uma das dimensões abordadas sobre a Teoria da Idoneidade Didática de Juan Godino. Metodologicamente, foram selecionados 10 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública situada na cidade de Pesqueira-PE para responder a um instrumento diagnóstico organizado em três fases. A fase inicial, abordando problemas de probabilidade subjetiva; uma segunda fase com uma atividade de simulação, e uma terceira envolvendo todos os indicadores epistêmicos de probabilidade subjetiva elaborados no estudo. Para a categorização dos problemas e a análise dos livros didáticos, foram elaborados indicadores epistêmicos, baseados nos livros didáticos, BNCC e currículo local, para a probabilidade subjetiva. Os resultados apontaram para uma boa compreensão dos estudantes acerca do significado subjetivo, ainda que os livros didáticos tomem o caminho inverso, trabalhando e forma apenas fragmentada os significados de probabilidade e tendo como predominância o significado clássico. As análises apontam ainda que houve dificuldades relativas aos cálculos básicos de probabilidade, ao trabalho com probabilidade condicional, ou saída do espectro da equiprobabilidade. Problemas próximos daqueles encontrados nos livros didáticos apresentaram menores dificuldades de interpretação e manipulação algorítmica. Defendemos que a abordagem do saber probabilidade seja acompanhada de seus diferentes significados, de forma a desenvolver uma visão holística do conceito. Para que o letramento probabilístico seja contemplado em sua totalidade, o desenvolvimento dos conhecimentos de probabilidade deve se fazer presente, no intuito de que uma educação verdadeiramente concreta deixe de ser apenas utopia.

Palavras-chave: educação estatística; probabilidade; letramento probabilístico; probabilidade subjetiva; ensino médio.

ABSTRACT

Probability has a relevant social role in helping us to read, interpret and make decisions in contexts of our lives in society where randomness is always present. In the field of Probabilistic Education there is guidance for classroom work that addresses probability and its different meanings. The current literature points out that studies on the relationship between students and subjective probability are still rare. This research focuses on the Subjective Meaning of Probability and aims to investigate high school students' knowledge of subjective probability in light of epistemic indicators. The theoretical construct Epistemic Indicators constitutes one of the dimensions addressed on Juan Godino's Theory of Didactic Suitability. Methodologically, 10 3rd year high school students from a public school located in the city of Pesqueira-PE were selected to answer a diagnostic instrument organized in three phases. The initial phase, addressing problems of subjective probability; a second phase with a simulation activity, and a third involving all the epistemic indicators of subjective probability elaborated in the study. For the categorization of the problems and the analysis of the textbooks, epistemic indicators were elaborated, based on the textbooks, BNCC and local curriculum, for subjective probability. The results pointed to a good understanding of the students about the subjective meaning, although the textbooks take the opposite path, working only in a fragmented way the meanings of probability and having as predominance the classical meaning. The analyses also point out that there were difficulties related to the basic calculations of probability, working with conditional probability, or leaving the equiprobability spectrum. Problems close to those found in the textbooks presented fewer difficulties of interpretation and algorithmic manipulation. We advocate that the approach to probability be accompanied by its different meanings, in order to develop a holistic view of the concept. In order for the probabilistic literacy to be contemplated in its entirety, the development of probability knowledge must be present, so that a truly concrete education ceases to be merely a utopia.

Keywords: statistical education; probability; probability literacy; subjective probability; high school.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 OBJETIVO GERAL	14
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
2 O ENSINO DE PROBABILIDADE.....	15
2.1 LETRAMENTO PROBABILÍSTICO	15
2.2 OS SIGNIFICADOS DA PROBABILIDADE.....	20
2.3 OS SIGNIFICADOS DA PROBABILIDADE PRESENTES NO CURRÍCULO	23
3 A PROBABILIDADE SUBJETIVA	26
3.1 A CONSISTÊNCIA MATEMÁTICA DA PROBABILIDADE SUBJETIVA.....	28
3.2 ESTUDOS ANTERIORES SOBRE PROBABILIDADE SUBJETIVA NA SALA DE AULA	31
4 A CONSTITUIÇÃO DOS INDICADORES EPISTÊMICOS DE PROBABILIDADE SUBJETIVA	34
4.1 A CONSTRUÇÃO DOS INDICADORES PARA O SIGNIFICADO SUBJETIVO: dos documentos oficiais à versão final	34
4.2 OS INDICADORES EPISTÊMICOS COMO ELEMENTOS DE ANÁLISE PARA PROBLEMAS DE PROBABILIDADE SUBJETIVA.....	40
5 DELINEAMENTO METODOLÓGICO	44
5.1 DOS PARTICIPANTES.....	44
5.2 QUANTO À NATUREZA E ANÁLISE DE DADOS DA PESQUISA	45
5.2 O QUESTIONÁRIO: Formulação e intencionalidades.....	49
<i>Questão 1</i>	50
<i>Questão 2</i>	51
<i>Questão 3</i>	54
<i>Questão 4</i>	56
5.3 SOCIALIZAÇÃO DAS RESPOSTAS	59
6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	65
6.1 ESTUDO 1: ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DA TURMA	65
6.1.1 SOBRE OS SIGNIFICADOS DE PROBABILIDADE.....	66
6.1.2 SOBRE OS INDICADORES DE PROBABILIDADE SUBJETIVA	72
6.2 ESTUDO 2: A DIAGNOSE	73
6.2.1 Análise do questionário	73
6.2.2 Simulação do Jogo das Portas (Paradoxo de Monty Hall).....	93
6.2.3 Problema final de Probabilidade Subjetiva	95
6.2.4 Quanto aos indicadores epistêmicos	102

7 CONCLUSÃO	105
REFERÊNCIAS.....	109
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INICIAL DA DIAGNOSE	112
APÊNDICE B – FICHA DE SIMULAÇÃO DO JOGO DAS PORTAS	115
APÊNDICE C – PROBLEMA FINAL DE PROBABILIDADE SUBJETIVA	117

1 INTRODUÇÃO

Diariamente, somos expostos a um grande volume de informações, e com base nas mesmas, desafiados a tomar decisões, tais como adquirir um financiamento baseado em uma determinada taxa de inflação, levar um agasalho para o trabalho após acompanhar a previsão do tempo, entre outras situações. A matemática surge na história da humanidade como uma ferramenta capaz de auxiliar nessa tarefa, passando por grandes transformações, a fim de se adequar às demandas existentes e consolidar algumas aplicações (EVES, 2011).

Dentre essas aplicações da Matemática, destaca-se a Probabilidade. É imprescindível reconhecer que o conceito de probabilidade passou por modificações até chegar ao estágio atual, tendo contribuições de grandes nomes como Cardano (1501–1576), Jacob Bernoulli (1700-1782), Laplace (1749-1827), Thomas Bayes (1701 – 1761) entre outros.

Nesse sentido, corroboramos com as ideias propostas por Batanero (2005), ao associar significados para a probabilidade de acordo com as demandas que a sociedade impõe, bem como o avanço nos estudos por matemáticos da época. O berço da probabilidade é a modelagem dos jogos de azar, quando se atribui seu significado *intuitivo*, para logo após, receber sua formalização como uma razão, já presentes nas correspondências entre Pascal e Fermat e formalizada por Laplace, associando assim o significado *clássico*.

No entanto, o avanço dos estudos propõe outras discussões, como a possibilidade de repetição dos experimentos em igualdade de condições com o significado *frequentista*, que por sua vez, utiliza a repetição como instrumento de quantificação probabilística. A versão mais recente em termos de significado é o *subjetivo*, este que pressupõe e engloba tanto a experiência de quem declara uma probabilidade, bem como a atualiza com eventos que ocorram posteriormente e/ou simultaneamente ao experimento, permitindo assim, inferir atualizações na declaração probabilística.

Assim, dada a sua importância histórica desde a modelagem de jogos ditos de “azar”, até aos mais sofisticados modelos de previsão de eventos conhecidos, o conceito de probabilidade deve ser bem construído no ambiente escolar (GAL, 2005).

Entretanto, desde pesquisas como as de Sáenz (1999), até Grando e Santos (2011, 2020) apontam para um problema: a dificuldade dos nossos estudantes para lidar com os conceitos fundamentais de probabilidade.

Sendo o significado subjetivo aquele que possui maior potencial para o entendimento e construção de noções probabilísticas sofisticadas, incluindo a atualização perante a ocorrência de fatos, que é um instrumento importante na tomada de decisão, decidimos estudar como o contato de estudantes do Ensino Médio com esses problemas pode acionar gatilhos para a utilização de conceitos probabilísticos. Embora estudos com probabilidade em sala de aula sejam numerosos, poucos são aqueles que se debruçam sobre o significado subjetivo.

Igualmente, apesar do interesse crescente nos estudos de educação probabilística, são poucos os trabalhos encontrados na literatura voltados à área da educação que englobem trabalhar o significado subjetivo de probabilidade em sala. São muitos aqueles que se voltam às probabilidades clássicas e frequentistas.

Com efeito, entendemos que há possibilidades para avançar nas discussões em sala, como corroboram os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PCPE), ao afirmarem que “A ideia de probabilidade deve ser ampliada durante o Ensino Médio, de forma que o estudante, ao fim dessa etapa, seja capaz de estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento” (PERNAMBUCO, 2012, p.126). Complementando essa colocação, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz que “[...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade” (BRASIL, 2018, p.219).

Estudos anteriores a respeito da probabilidade subjetiva, voltados à educação (RAST, 2005; MOREIRA, 2015; BERNARDO et al, 2019), apontam para uma melhora significativa no tocante aos aspectos cognitivos de participantes das intervenções. No entanto, entendemos que as visões propostas nesses estudos ora se detém ao trabalho com os docentes, ora com estudantes de nível fundamental, configurando assim uma lacuna, que seria o contato com os estudantes de Ensino Médio, a partir de uma visão holística sobre os efeitos cognitivos presentes em situações envolvendo o significado subjetivo.

Paralelamente a isso, entendemos que essa pesquisa tende a preencher as situações voltadas à análise dos conhecimentos trazidos pelos estudantes ao se depararem com problemas envolvendo probabilidade subjetiva. Ao mesmo tempo que se configura como um instrumento de análise prévio à própria regência em sala,

fornecendo informações sobre a relação dos estudantes com os problemas propostos, essa pesquisa tem potencial para configurar uma nova visão sobre o ensino de probabilidade e reflexão sobre novos avanços necessários para satisfazer demandas da sociedade moderna.

Diante do exposto, respondemos a seguinte questão norteadora de pesquisa: *Quais são os conhecimentos que estudantes de Ensino Médio utilizam ao resolver problemas envolvendo o significado subjetivo de probabilidade?* Assim, delineamos os seguintes objetivos:

1.1 OBJETIVO GERAL

Investigar os conhecimentos sobre probabilidade subjetiva de estudantes do Ensino Médio à luz de indicadores epistêmicos de probabilidade subjetiva.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar e categorizar as atividades propostas no livro didático utilizado na turma de acordo com os significados da probabilidade;
- Elaborar indicadores epistêmicos para a probabilidade subjetiva a nível de Ensino Médio;
- Analisar os problemas de probabilidade subjetiva propostos nos livros didáticos utilizados considerando os indicadores;
- Analisar conhecimentos de probabilidade subjetiva de estudantes do Ensino Médio por meio de uma sequência de atividades elaborada à luz de indicadores de probabilidade subjetiva.

Em suma, compreendemos que os resultados dessa pesquisa podem contribuir na reflexão sobre os processos de ensino aprendizagem de probabilidade, com uma contribuição para o avanço nas discussões e problemas voltados ao chão da sala de aula. Esperamos também que possa ser uma possibilidade de visita antes da elaboração de aulas de probabilidade a nível de Ensino Médio, com o intuito de antever algumas possibilidades de questionamentos e conceitos explorados pelos estudantes no confronto com os problemas de probabilidade subjetiva.

2 O ENSINO DE PROBABILIDADE

O ensino de probabilidade em sala de aula é relativamente recente, pois historicamente os currículos não deram ênfase a essa parte da matemática (BATANERO, 2005). No que diz respeito à visão adotada nesta pesquisa, entendemos que o mesmo se deva dar em um cenário onde os estudantes além de pensar dentro do sentido acadêmico, esse conhecimento adquirido deve servir como base para sua vida, nas tomadas de decisão.

Com isso, entendemos que o letramento probabilístico é uma importante ferramenta para o desenvolvimento de uma educação matemática dotada de criticidade, mas que ao mesmo tempo não esquece da importância formal dos conceitos. Para expor nossa visão, detalhamos nas próximas seções o próprio letramento probabilístico e como este está presente no currículo do Ensino Médio.

2.1 LETRAMENTO PROBABILÍSTICO

Ao se trabalhar em um contexto escolar com a Probabilidade, é necessário ter em conta aspectos que permeiam os contextos e demandas que os estudantes deverão enfrentar para além das paredes da sala de aula. Corroboramos com Gal (2005) quando cita que

A probabilidade está entrelaçada em uma ampla gama de situações e processos do mundo real de maneiras implícitas e explícitas. Os adultos precisam ser capazes de se envolver com eficácia em situações que requerem interpretação ou mensagens probabilísticas, geração de mensagens probabilísticas ou tomada de decisão. (GAL, 2005, p.64, tradução nossa)

E justamente com essa perspectiva posta à prova, o mesmo desenvolve um modelo de Letramento Probabilístico (LP), muito semelhante ao seu já conhecido modelo de Letramento Estatístico (LE), porém com olhares voltados aos componentes norteadores da Probabilidade.

Gal e Baron (1996) já mencionavam aspectos relacionados ao ensino de probabilidade a partir de repetições, nas quais se analisa a aleatoriedade ou não a respeito de sequências geradas voltadas para o significado frequentista da Probabilidade. Com o modelo de LP (GAL, 2005), ampliou-se a discussão para inserção de fenômenos mais complexos e uma educação probabilística voltada também ao engajamento em termos sociais para os estudantes.

Nesse sentido, a essência do modelo se mantém, com a presença de elementos de conhecimento e elementos disposicionais. Gal (2004) entende que a

probabilidade é de importância ímpar no preparo dos estudantes para a vida, uma vez que situações advindas da aleatoriedade permeiam nossas vidas. Logo, ao pensar no trabalho com probabilidade, é necessário ir além da mecanização dos cálculos e engessamento da visão de aplicabilidade desse conceito. O quadro 1 mostra a composição desse modelo de letramento.

Quadro 1 – Modelo de Letramento Probabilístico

Elementos de Conhecimento

1. Grandes Ideias: Variação, Aleatoriedade, Independência, Incerteza.
2. Cálculos Probabilísticos: maneiras de quantificar as probabilidades.
3. Linguagem: termos e métodos usados para comunicar o acaso.
4. Contexto: compreender o papel e as implicações das comunicações probabilísticas.
5. Questões Críticas: questões para reflexão ao lidar com probabilidades.

Elementos Disposicionais

1. Postura Crítica
2. Crenças e Atitudes
3. Sentimentos pessoais em relação à incerteza e risco.

Fonte: Gal (2004, p. 51, tradução nossa)

Apesar de separados por blocos, presume-se que todos esses elementos devem interagir entre si durante as vivências em sala de aula, como corrobora Gal (2004, p.50, tradução nossa), ao referenciar que “Todos os elementos interagem uns com os outros de maneiras complexas durante o comportamento ou aprendizagem real. Isso significa que um enfoque instrucional apenas em um ou dois dos elementos não será suficiente para desenvolver um comportamento *alfabetizado em probabilidade*.” Assim, para uma aprendizagem suficiente em termos probabilísticos, é necessário que as situações envolvam mais que a simples aplicação de um algoritmo para quantificar uma probabilidade.

A seguir abordaremos alguns conceitos do modelo que nortearão a proposta de diagnose desta pesquisa, focando nos *Elementos de Conhecimento*, pois são esses que oferecerão subsídios para a análise das questões e elaboração das mesmas.

O termo *Grandes Ideias* se refere a uma inserção dos pensamentos que norteiam o próprio conceito de probabilidade, como variabilidade, aleatoriedade e incerteza. Sobre o conceito em si de aleatoriedade, que possui inúmeras

interpretações presentes na literatura, vamos ao encontro da definição adotada por Bennett (1998), que declara a aleatoriedade como um fenômeno no qual a probabilidade inicial é desconhecida. Por exemplo, no lançamento de um dado, não sabemos qual face cairá para cima, e se repetirmos n vezes esse lançamento, igualmente não saberemos, ou seja, a sequência de resultados não possui um padrão propriamente dito. O mesmo acontece, por exemplo, com situações ainda mais cotidianas, como a probabilidade de chover ou não.

Já no que se refere a *Cálculos Probabilísticos*, Gal (2005) o define como um elemento voltado à quantificação de probabilidade através de algoritmos específicos. Cabe ressaltar que esse é um dos aspectos mais presentes no ensino atualmente, mas Gal (2005, p. 54, tradução nossa) traz que:

pode-se esperar que as pessoas saibam que existem diferentes maneiras de se chegar a estimativas probabilísticas, mas também que as estimativas são frequentemente o resultado de integração de informações de fontes múltiplas.

Recortando esse elemento para a nossa pesquisa, estão fortemente presentes a probabilidade condicional, o Teorema de Bayes e o Teorema da probabilidade Total através de sua representação por diagrama de árvore. Porém, deixaremos em aberto as soluções para os estudantes, de modo que possam exercer a sua criatividade também na hora da quantificação das probabilidades envolvidas nas situações – problema propostas.

Nessa mesma situação, trazemos também o papel da *Linguagem* específica que a Probabilidade utiliza para comunicação dos experimentos. É importante ressaltar como esse elemento se faz presente no significado intuitivo de probabilidade, situado por Batanero (2005), pois, nesta fase é primordial o desenvolvimento dos termos probabilísticos, tais como, provável, muito provável, impossível, entre outros. Essa pesquisa tem ligação intrínseca com a Probabilidade Subjetiva, logo, fazemos aqui um parêntese para os termos mais presentes nesse significado, que são: *dado que*, *Se*, $P(A|B)$, $P(B|A)$, pois a compreensão correta desses termos evita uma série de equívocos na interpretação.

Sendo assim, entendemos que a Probabilidade não se reduz somente a um número, mas sim a um conjunto de ideias que nos ajudam a tomar decisões e se comportar perante as incertezas; Claro que não poderíamos negligenciar o papel do

Contexto nas situações envolvendo probabilidade. Gal (2005, p.58, tradução nossa) ressalta que:

O conhecimento relativo ao contexto é necessário tanto do ponto de vista funcional quanto educacional. Compreender que o acaso e a aleatoriedade afetam eventos e processos do mundo real em diferentes graus permite que as pessoas prevejam que certos eventos serão mais previsíveis, enquanto outros nem tanto. Além disso, esse conhecimento está subjacente à expectativa apresentada anteriormente de que é necessário que as pessoas e as organizações façam declarações sobre a probabilidade dos eventos, mas também sobre o nível de certeza por trás dessas declarações.

Assim, entender o contexto é muito importante quando se refere à demanda de entender o porquê da importância da probabilidade na vida real. Sabemos que inúmeros eventos do nosso dia a dia podem ser expressos com uma probabilidade de ocorrência, seja baseada em cálculos probabilísticos ou não, pois nosso entendimento é de que existem várias formas de quantificá-los.

Com isso, Gal (2005) traz uma série de 10 contextos distintos nos quais a probabilidade é utilizada. A seguir, o quadro 2 expõe e detalha os mesmos.

Quadro 2 – Contextos significativos de Probabilidade

1. o mundo natural e físico (por exemplo, clima, evolução)
2. processos tecnológicos (por exemplo, garantia de qualidade, fabricação)
3. comportamento humano (por exemplo, encontros de serviço, esportes, direção)
4. medicina, saúde pública (por exemplo, doenças genéticas, riscos relacionados ao fumo)
5. justiça e crime (por exemplo, correspondência de impressões digitais ou DNA)
6. finanças e negócios (por exemplo, mercados de investimento, seguros)
7. pesquisa e estatísticas (por exemplo, amostragem, inferência estatística)
8. políticas públicas, previsões (por exemplo, imunização)
9. jogos de azar, jogos de azar e apostas (por exemplo, dados, loterias)
10. decisões pessoais (por exemplo, uso de cinto de segurança, aceitação na faculdade)

Fonte: Gal (2005, p. 59, tradução nossa)

Com isso, nossas questões pretendem explorar contextos seguindo a mesma linha. Porém, como estamos vivendo uma das maiores pandemias da História,

pretendemos ter um carinho especial no tocante ao contexto número 4 (quatro), de medicina e saúde pública, dado que vivemos sob um ambiente de questionamentos recorrentes a eficácias de vacinas, de testes, entre outros.

E fechando o bloco de letramento probabilístico, temos as *Questões Críticas*, que para Gal (2005, p. 59, tradução nossa), “envolve saber quais perguntas críticas devem ser feitas quando se encontra uma afirmação de probabilidade ou certeza, ou quando se tem que gerar uma estimativa probabilística”. Logo, corroboramos com a ideia de que uma probabilidade – ou declaração de probabilidade – nem sempre pode ser aceita dogmaticamente, o leitor deve se posicionar perante os dados e questionar coisas como a maneira que foram obtidos, que bases e evidências estão envolvidos ali, de que instituição essa informação está sendo trazida, bem como sua representação.

Além disso, a probabilidade não funciona apenas para e por si mesma. A estatística, por exemplo, utiliza dos processos de probabilidade para conceituação e confiabilidade de informações. Processos de amostragem probabilística, técnicas de inferência e testes estatísticos utilizam das distribuições de probabilidade, bem como das questões ligadas à incerteza e previsão de dados. Pesquisas de autores como Souza (2019), Coutinho (1994), Gomes e Guimarães (2021), já mencionam a abordagem de conceitos da probabilidade e estatística de maneira articulada. Com isso percebemos que a amostragem, por exemplo, pode ser um primeiro passo para entendimento, interpretação e comunicação de dados. Fenômenos diversos podem ser relacionados e mensurados quando se interpreta uma declaração de probabilidade, tais como, conservadorismo, a aversão ao risco, entre outros.

Nesse mesmo processo, buscamos compreender que a probabilidade, quando informada e mensurada, não é um sistema engessado, mas sim passível de uma imensidade de variações, como os aspectos subjetivos e *in-loco* que vão aparecendo simultaneamente. Assim, entendemos a importância de se ter bem trabalho aspectos do significado subjetivo de probabilidade. Para Batanero (2005), a probabilidade subjetiva também pode ser uma grande precursora dos aspectos probabilísticos que serão ensinados no Ensino Superior. A seguir, o quadro 3 destaca questões críticas relevantes, levantadas por Gal (2005), a serem mobilizadas ao estarmos diante de declarações probabilísticas.

Quadro 3 – Questões Críticas

1. <i>Contexto</i> . Qual é a natureza do domínio sobre a qual uma declaração probabilística está sendo feita? Até que ponto os problemas em questão envolvem aleatoriedade, independência, variação, etc.?
2. <i>Fonte</i> . Quem é a fonte de uma afirmação probabilística (por exemplo, organização, pessoa), e quais são suas qualificações, experiência, características e motivos?
3. <i>Processo</i> . Como essa fonte chegou à afirmação feita? Que tipo de fontes de informação foram usadas (por exemplo, uma análise "clássica" de eventos equiprováveis; informações frequentistas ou dados relacionados, como estatísticas oficiais ou resultados de estudos; estimativas subjetivas)? Qual é a relevância desses dados para o problema em questão e qual é sua qualidade? Se várias fontes foram usadas, como as informações foram integradas ou os conflitos entre as fontes de dados foram resolvidos?
4. <i>Significado da mensagem</i> . Qual é o significado da declaração probabilística sendo feito (numérico ou verbal), e deve ser traduzido ou representado de outra forma para ficar mais claro? A que exatamente se refere a declaração de probabilidade? (a questão do significado pode surgir quando uma afirmação pode confundir $P(A B)$ e $P(B A)$, ou quando uma fonte usa frases de probabilidade vagas).
5. <i>Interpretação reflexiva</i> . Como a mensagem deve ser interpretada? Deveria ser questionado, dado o que se sabe sobre o contexto, a fonte, o processo de derivação e a clareza do significado da mensagem? Quão razoáveis são as estimativas feitas à luz do conhecimento de mundo de uma pessoa? É possível que as próprias suposições e conhecimentos de alguém possam estar errados? Ou é possível que a probabilidade tenha sido super ou subestimada pela fonte que a gerou, devido a interesses próprios, motivos ocultos, necessidade de errar por cautela, aversão ao risco, etc.?

Fonte: Gal (2005, p. 62, tradução nossa)

Em nossa pesquisa, acreditamos que esse modelo de Letramento Probabilístico elaborado por Gal (2005), é uma ferramenta muito importante no ensino de probabilidade, e mais além disso, se torna um potente instrumento também para o planejamento, já que fornece subsídios para elaboração e análise de questões e situações – problema que podem ser levadas ao convívio dos estudantes.

2.2 OS SIGNIFICADOS DA PROBABILIDADE

Da modelagem dos jogos de azar em seus primórdios até os mais robustos modelos de previsão, a probabilidade encontra seu espaço tanto na sociedade quanto nas comunidades científicas, sendo aceita como ramo da Matemática que estuda experimentos aleatórios por fenômenos não determinísticos. E, como toda produção do homem, esteve sujeita a adequação e evolução a partir de demandas de cunho científico e tecnológico.

Nesse sentido, apresentam-se significados através da compreensão do que seria a probabilidade e sua quantificação. Godino, Batanero e Cañizares (1987) propõem significados que acompanham o processo epistemológico dos conceitos probabilísticos e como interpretamos as quantificações, sejam elas numéricas ou textuais.

Para esta pesquisa levaremos em consideração cinco significados, a saber: intuitivo, clássico (ou laplaciano), frequentista, subjetivo e axiomático. A ordem com que são apresentados os significados indicam uma evolução epistêmica do conhecimento probabilidade através do tempo. Abaixo detalhamos cada um deles.

Começando pelo significado intuitivo, este diz respeito às primeiras aparições do uso da probabilidade na modelagem de jogos de azar e definição de estratégias capazes de otimizar os ganhos dos jogadores. Em se tratando da sala de aula, esse significado está fortemente presente em problemas que visam o desenvolvimento do pensamento e quantificação relacionados ao uso do vocabulário probabilístico. A figura 1 apresenta um modelo de questão envolvendo o trabalho com a probabilidade intuitiva.

Figura 1 – Exemplo de questão trabalhando o vocabulário probabilístico

2. Se, no início de uma rodada de bingo da família Silva, alguém disser “vai sair um número maior que 3”, a chance de acerto é maior que a de erro: sair um número maior que 3 é, nesse caso, um acontecimento (evento) **muito provável** (não ocorre sempre, mas ocorre com frequência). Determine quantos elementos tem esse evento e quantos elementos tem o espaço amostral. 87; 90

Fonte: Souza (2021)

Entretanto, com o passar do tempo, a demanda por quantificar as probabilidades começou a aparecer, e consigo vieram questionamentos ao entendimento apenas linguístico da comunicação probabilística. Nesse contexto, nasce o significado Clássico, também conhecido como primeiro princípio de Laplace (2010, p.49), definido como “a relação entre o número de casos favoráveis e aquele de todos os casos possíveis”. Com essa interpretação, a análise combinatória ganha notório espaço no cálculo de probabilidades. A figura 2 mostra um clássico exemplo de problema em sala de aula que explora o significado clássico de probabilidade.

Figura 2 – Problema de significado clássico de probabilidade

R6. Uma equipe de 12 pessoas é formada por 9 homens e 3 mulheres, das quais duas serão sorteadas para compor uma comissão. Indicar a probabilidade de a comissão ser formada por:

- a) duas mulheres;
- b) um homem e uma mulher.

Fonte: Souza (2021)

Com isso, um dos grandes problemas reclamados pela sociedade científica em relação ao significado clássico foi o entendimento de que todos os espaços amostrais são equiprováveis (todos os eventos tem a mesma chance de ocorrer). Por exemplo, uma pergunta simples como “Qual a probabilidade de ganhar na mega sena?” Se levássemos em conta o viés de equiprobabilidade, erradamente, indicaríamos por 50% (ou ganha ou não ganha), o que logicamente está incorreto. Assim, é necessário um modelo matemático (probabilístico) que leve em conta essa insuficiência da interpretação clássica, levando assim aos pressupostos para o surgimento do significado frequentista.

Nesse significado, a probabilidade é dividida entre teórica e experimental, sendo a teórica entendida como um limite para a experimental. Ou seja, a probabilidade de ocorrência de um evento é quantificada através de repetições em igualdade de condições do experimento. Convém destacar grandes resultados que emergiram a partir desse significado, como a Lei dos Grandes Números, desenvolvida por Jacob Bernoulli (1654 – 1705). Na sala de aula, esse significado aparece em livros didáticos como experimentos envolvendo repetições, como por exemplo determinar a probabilidade de roubos, de acidentes, de ser atingido por raios, de uma pessoa morrer antes de completar certa idade, entre outros.

No entanto, surgiram questionamentos em relação a esse significado, pois presume-se que os eventos são quantificados a partir da repetição dos experimentos em um número suficientemente grande de vezes. Porém o que seria um número suficientemente grande de repetições? Como replicar os experimentos garantindo igualdade de condições? Que tipos de fenômenos são possíveis de experimentar nesse contexto? Como forma de quantificar essas probabilidades, entra o significado subjetivo de probabilidade.

Assim, no contexto subjetivo, que além de considerar as experiências prévias e pessoais de quem declara as probabilidades, o significado subjetivo possui apadrinhamento de nomes como Thomas Bayes, Ramsey e De Finetti, que trabalharam em sua axiomatização para efeitos de aceitação dentro da comunidade científica. Os problemas com abordagem subjetiva de probabilidade levam em consideração probabilidades a priori e a posteriori, atualizando as quantificações de acordo com novos dados obtidos.

Com isso, na maioria dos contextos, é dispensável a repetição dos experimentos bem como a experiência pessoal também é levada em conta para quem comunica ou deve tomar uma decisão pautado por dados probabilísticos. Esse significado também é interpretado como grau de crença de um indivíduo na ocorrência de um determinado evento (DEGROOT; SCHERVISCH, 2011). A figura 3 mostra um exemplo de problema envolvendo probabilidade subjetiva em um livro didático do Ensino Médio.

Figura 3 – Problema de probabilidade subjetiva

Um jogo consiste em escolher um número entre 1 e 6 e lançar um dado duas vezes sucessivas. Se o número escolhido aparecer em pelo menos um dos lançamentos, a pessoa vence; se não aparecer em nenhum dos dois lançamentos, a pessoa perde. Dois amigos decidiram jogar. Um deles escolheu o número 3 e lançou o dado duas vezes. Qual é a probabilidade de ele ganhar, se não obteve o número 3 no primeiro lançamento?

Fonte: Souza (2021)

A probabilidade subjetiva é objeto de estudo desta pesquisa, portanto terá uma seção própria nas próximas páginas.

2.3 OS SIGNIFICADOS DA PROBABILIDADE PRESENTES NO CURRÍCULO

Atualmente a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento normativo que dispõe sobre os caminhos que a educação básica brasileira deve seguir. Homologada em 2018 para a etapa do Ensino Médio, a mesma avança significativamente em relação aos antigos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) no tocante ao ensino de probabilidade. Em Pernambuco, no ano de 2021, o currículo do ensino médio foi reelaborado de modo a ser compatível com as demandas da BNCC.

Dessa forma, podemos encontrar todos os tópicos relativos ao ensino de probabilidade (PERNAMBUCO, 2021) concentrados no terceiro ano do Ensino Médio, abordando os seguintes temas:

- Riscos probabilísticos;
- Espaço amostral e contagem;
- Cálculos da união e interseção de eventos, bem como probabilidades condicionais;
- Eventos equiprováveis, independência e espaços amostrais discretos ou não

Nesse sentido, percebemos uma abertura maior para o trabalho com diferentes significados de probabilidade, incluindo o subjetivo. É importante lembrar que a probabilidade nem sempre esteve presente nos currículos nacionais (BATANERO, 2005) e que nessa versão da BNCC ela está presente em um núcleo comum de conhecimentos para todos os estudantes, independentemente da escolha em seus itinerários formativos dentro da estrutura do novo Ensino Médio.

Assim, podemos inferir que o currículo permite associação com a estrutura presente no letramento probabilístico (GAL, 2005) e nos indicadores de Ortiz e Alsina (2019) para trabalho com os diferentes significados de probabilidade. No esquema abaixo fazemos uma correlação entre os itens do currículo, os indicadores de probabilidade subjetiva (consultar página 38 para rever os itens) e o letramento probabilístico.

Quadro 4 – Elementos do currículo e os significados da probabilidade

Item Currículo	Descrição (PERNAMBUCO, 2021, p.206)	Elemento (s) cognitivo (s) do letramento probabilístico	Item no indicador	Significado Dominante
Riscos probabilísticos	Identificar e interpretar situações do cotidiano, envolvendo riscos probabilísticos em que é necessário fazer escolhas.	Contexto Linguagem Questões Críticas Grandes Ideias	1 2	Subjetivo
Espaço amostral e contagem	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades para resolver e elaborar	Cálculo de probabilidades	1 2 4	Laplaciano

	situações problema que envolvam o cálculo da probabilidade.			
Cálculos da união e interseção de eventos	Resolver e elaborar situações problema que envolvam o cálculo de probabilidade (simples, da união, da interseção, condicional) de eventos em experimentos aleatórios sucessivos	Cálculo de probabilidades Contexto	4	Laplaciano
Probabilidade Condicional				Subjetivo
Eventos equiprováveis, independência e espaços amostrais discretos ou não	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.	Cálculo de Probabilidades Linguagem Grandes Ideias		Frequentista Laplaciano

Fonte: O Autor

Podemos ver que os significados Lapaciano e frequentista ainda predominam no currículo, mas que já há um espaço considerável para o estímulo da vivência do significado subjetivo. Convém recordar que o trabalho com probabilidade não pode ser isolado no tocante aos seus significados, pois os mesmos estão interligados o a todo o tempo (BATANERO, 2005; DEGROOT E SCHERVISH, 2012).

Sendo assim, para uma abordagem que conduza ao desenvolvimento satisfatório do letramento probabilístico, é necessário articular na prática os diferentes significados de probabilidade, por meio de atividades que contemplem desde comunicações pessoais qualitativas (significado intuitivo) até as quantitativas (significado subjetivo). (ORTIZ E ALSINA, 2019).

3 A PROBABILIDADE SUBJETIVA

É notório que o conceito de probabilidade adquiriu diferentes significados durante a história em razão de demandas específicas no tocante às singularidades de diversos problemas. Se fizermos um percurso histórico podemos destacar desde o significado intuitivo nos primórdios dos estudos em probabilidade no contexto dos jogos de azar, até os mais recentes, como frequentista e laplaciano (BATANERO, 2002).

Dentre estes, está o subjetivo. No entanto, é impossível abordá-lo sem antes percorrer um pouco sobre o significado frequentista. Basicamente, entende-se por frequentistas os fenômenos que podem ser repetidos, em tese, sob igualdade de condições, como por exemplo os lançamentos de uma moeda. Entretanto, surge uma demanda mais específica dentro desse campo de estudo, dado que a maioria dos experimentos não podem ser repetidos com igualdade de condições (por exemplo, economia, política, entre outros) e a busca por respostas deve ser obtida considerando a atualidade.

Assim, imaginemos, por exemplo, perguntas como: qual a probabilidade de que a pandemia de covid-19 termine em 2022? Qual a probabilidade de que chova amanhã em Recife? Qual a chance de que o São Paulo vença o Palmeiras no Allianz Parque? Percebemos que problemas assim não são passíveis de solução com o significado laplaciano nem o frequentista. Quantificar as probabilidades para esses problemas é uma tarefa que se encaixa no significado subjetivo de probabilidade.

Porém, nesse contexto a probabilidade não se baseia apenas nas opiniões e experiências pessoais na comunicação a posteriori, algo que, até ser compreendido em sua totalidade, incomodou a comunidade de estudiosos em Estatística. Ramsey (1926) e De Finetti (1937) construíram uma teoria matemática que deu a sustentação formal para o cálculo de probabilidades subjetivas, dado que expressar numericamente o grau de crença pessoal em um evento era uma tarefa ainda difícil (DEGROOT E SCHERVISH, 2012).

Com isso, mais alguns personagens marcaram história no desenvolvimento desse significado subjetivo, como Thomas Bayes. Dado o contexto de um experimento que não é passível de repetições, faz-se necessário um mecanismo capaz de alterar as probabilidades em razão de condições simultâneas ao mesmo. Está aí um dos grandes aportes de Thomas Bayes (1701-1761), que desenvolveu um teorema com essa característica. Para Bussab e Morettin (2010, p.121) “O Teorema de Bayes tem

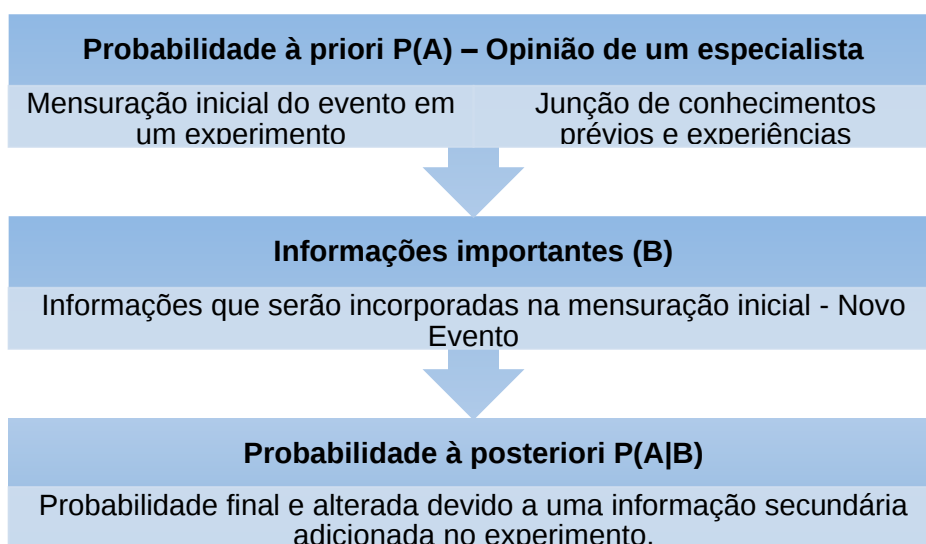
papel importante nesse tipo de inferência, pois passa a ser visto como um mecanismo de atualização de opiniões. Ou seja, o indivíduo aprende B e passa a ter opinião $P(A|B)$ sobre A.” Entender a construção matemática desse significado é muito importante para compreender sua solidez em âmbito científico.

Mas objetivamente, o que vem a ser a probabilidade subjetiva? Batanero (2002, p.30) nos traz que:

Keynes, Ramsey e de Finetti descrevem as probabilidades como graus de crença pessoal, baseadas no conhecimento e experiência da pessoa que as indica sobre um determinado evento. Para eles a probabilidade de um evento sempre está condicionada por um certo sistema de conhecimentos e pode, portanto, ser diferentes para pessoas distintas.

Com isso, é possível compreender que as probabilidades dependem tanto de um sistema de conhecimentos e experiências prévias que a pessoa que as comunica carrega, quanto de possíveis eventos que ocorrem concomitantemente ao experimento, gerando assim probabilidades *à priori* e *à posteriori*. Em se tratando de algoritmos probabilísticos, em efeito prático, a probabilidade subjetiva pode ser entendida como um processo de probabilidade condicional, em que o evento conhecido (a priori) tem sua probabilidade atribuída de acordo com a opinião de um especialista. Vejamos o seguinte esquema para ilustrar essas ideias:

Figura 4 – Esquema das fases da probabilidade subjetiva



Fonte: O autor

Como representado acima, a probabilidade subjetiva também leva em conta as probabilidades condicionais concomitantes a um determinado evento. Logo, não fica presa apenas às intuições. Esse é um dos detalhes que diferenciam a probabilidade

subjetiva da intuitiva; enquanto a primeira possui quantificação numérica, a segunda se limita a quantificar apenas verbalmente sobre a crença de ocorrência de um determinado evento.

3.1 A CONSISTÊNCIA MATEMÁTICA DA PROBABILIDADE SUBJETIVA

Para compreender a construção matemática da probabilidade subjetiva, vamos buscar as relações existentes entre diferentes definições e teoremas encontrados na literatura, mais especificamente na obra de Rifo (2021) e De Finetti (1989). A saber, buscaremos as definições da Lei da Probabilidade Total, Regra do Produto, Probabilidade Condicional e, por fim, a junção delas no Teorema de Bayes junto ao clássico problema das portas.

Quadro 5 – Definições importantes

TEOREMAS UTILIZADOS NO CÁLCULO DE PROBABILIDADES SUBJETIVAS
Definição 1: <i>Lei da Probabilidade Total</i> Seja A um evento e $E_1, E_2, \dots, E_n$ uma partição do espaço amostral. Então: $P(A) = (A \cap E_1) + (A \cap E_2) + \dots + (A \cap E_n)$
Definição 2: <i>Probabilidade Condicional</i> Dados dois eventos A e E, chamamos probabilidade condicional de A dado E, e a denotamos por $P(A E)$, à probabilidade de que A ocorra, sabendo ou supondo que E ocorreu.
Definição 3: <i>Regra do Produto</i> Dados dois eventos A e E, a probabilidade de sua interseção é igual ao produto $P(A \cap E) = P(A)P(E) = P(E)P(A E)$
Definição 4: <i>Teorema de Bayes</i> Dada uma partição do espaço amostral, U_1 e U_2, e um evento B qualquer, $P(B) = \frac{P(U_1)P(B U_1)}{P(U_1)P(B U_1) + P(U_2)P(B U_2)}$

Fonte: Rifo (2021) – Adaptado

Como se dá a interação entre essas definições no âmbito do Teorema de Bayes? É fácil ver que Thomas Bayes pensou na probabilidade teórica como uma condição apenas inicial, pois as informações e outros eventos devem dar um ajuste fino na probabilidade à posteriori. O uso do Teorema da Probabilidade Total, junto às condicionais e a regra do produto são as bases para a demonstração do Teorema de Bayes. Podemos entender a junção das teorias para validar matematicamente a crença em determinado evento no contexto do significado subjetivo de probabilidade (ROSS, 2010).

Com isso, podemos chegar à Fórmula de Bayes (ROSS, 2016), por meio da seguinte dedução:

Suponhamos os eventos E e F . Podemos expressar:

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$$

pois, para que um resultado esteja em E , ele deve estar em E e F ou em E mas não em F . Segue daí que $E \cup F$ e $E \cap F^c$ são eventos mutuamente excludentes. Então, pelo axioma de Kolmogorov, temos:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap F^c) \\ &= P(F)P(F) \\ &\quad + P(F^c)P(F^c) \\ &= P(F)P(F) \\ &\quad + P(F^c)[1 - P(F)] \\ &\quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para elucidar o processo de quantificação por meio da fórmula de Bayes em uma situação envolvendo o significado subjetivo de probabilidade, utilizaremos o já consolidado Problema das Portas (ou Paradoxo de Monty Hall).

Quadro 6 – Problema de Monty Hall

Basicamente iremos tratar de um programa de auditório onde você deve obrigatoriamente acertar na porta com o prêmio, ou nada feito. A situação inicial é o apresentador o convidando a escolher uma das três portas: digamos A, B ou C. Depois de escolhida uma porta, o apresentador irá revelar o conteúdo (vazio) de uma das outras portas não escolhidas, e em seguida irá oferecer duas opções: ou você continua com a porta escolhida inicialmente ou muda para a outra porta. Como proceder inteligentemente na escolha?

Fonte: O autor

Veja que claramente temos uma probabilidade subjetiva a ser encarada: você inicia o jogo com uma informação e em seguida recebe outra (uma das portas com conteúdo vazio). O que fazer? Convém destacar que intuitivamente o jogador pode pensar que as possibilidades de vencer são iguais (significado intuitivo de probabilidade), pois se ele tem duas opções, as chances serão as mesmas (50%). No entanto, não é isso que o cálculo probabilístico tem a dizer, dado que não temos eventos equiprováveis dentro desse espaço amostral. Daí a importância do significado subjetivo e sua base matemática na tomada de decisão consciente.

Sá e Sá (2008) resolvem formalmente este problema utilizando o Teorema de Bayes e as condicionais envolvidas. Vejamos:

Sejam os eventos:

- P_A – o prêmio está na porta A.

- P_B – o prêmio está na porta B.
- P_C – o prêmio está na porta C.
- R_A – o apresentador revela o conteúdo vazio de A.
- R_B – o apresentador revela o conteúdo vazio de B.
- R_C – o apresentador revela o conteúdo vazio de C.

Se simularmos como A, a escolha inicial do jogador e B a porta vazia revelada pelo apresentador, estamos em busca de $P(P_A|R_B)$. Pelo Teorema de Bayes, temos que:

$$P(R_B) = \frac{P(R_B|P_A) \cdot P(P_A)}{P(P_A) \cdot P(P_A) + P(P_B) \cdot P(P_B) + P(R_B|P_C) \cdot P(P_C)}$$

$$P(R_B) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$P(R_B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

$$P(R_B) = \frac{1}{3}$$

Como $P(R_B) + P(R_B) + P(R_B) = 1$ e $P(R_B) = 0$, então:

$$P(R_B) = 1 - P(P_A|R_B)$$

$$P(R_B) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$P(R_B) = \frac{2}{3} \cong 66,67\%$$

Fica assim provado por cálculos utilizando o Teorema de Bayes que é mais provável vencer trocando a porta escolhida inicialmente, o que contradiz a intuição inicial e valida o significado subjetivo por uma base matemática.

Reafirmamos, com esse problema, que a intuição por vezes está equivocada. Daí a necessidade de entender a probabilidade subjetiva como um significado diferente, pois nele se considera todos os eventos posteriores que afetam a probabilidade inicial (teórica), gerando assim um resultado mais condizente com o momento atual do experimento em questão.

3.2 ESTUDOS ANTERIORES SOBRE PROBABILIDADE SUBJETIVA NA SALA DE AULA

Sobre o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade subjetiva, apresentamos a seguir três estudos voltados para a sala de aula. Convém destacar que se trata de um tema novo no campo da pesquisa delimitado pela sala de aula. Uma série de outros estudos podem ser encontrados, porém, com aplicações na área da psicologia.

Vamos iniciar a discussão com o trabalho de Rast (2005), o qual escolheu 87 estudantes, os dividindo em dois grupos: o controle, que recebeu instrução sobre probabilidade clássica; e o grupo experimental, recebendo instruções em probabilidade subjetiva. Tratou-se de um estudo realizado em Atlanta, Geórgia com estudantes de ensino médio.

Nesse sentido, Rast (2005) utilizou um questionário sobre o acaso e o risco probabilístico para que os estudantes respondessem, no sentido de alimentar o questionamento *“Existe uma diferença média no desempenho na aplicação de probabilidade entre os alunos que receberam instrução em probabilidade tradicional e aqueles que receberam instrução em probabilidade tradicional e subjetiva?”*

Em seu estudo, a referida autora faz uma análise qualitativa e obtém as seguintes conclusões: (a) alunos têm dificuldade com conceitos de probabilidade, (b) questões tradicionais são mais fáceis de responderem, e em seguida, questões subjetivas, (c) os alunos têm pensamentos subjetivos sobre eventos fortuitos, e (d) equívocos comumente rotulados em pesquisas parecem ser julgamentos subjetivos.

Concluimos assim que os estudantes reproduzem pensamentos baseados nas instruções que os mesmos recebem. Em uma análise quantitativa, Rast (2005) utilizou um teste estatístico de diferenças de média, concluindo que os estudantes, ao receberem instruções baseadas na probabilidade subjetiva, conseguiram desenvolver os raciocínios probabilísticos com mais facilidade que o grupo controle.

Com um hiato de 10 anos, surge no Brasil um estudo sobre probabilidade subjetiva. Porém, dotado deu um ingrediente a mais: a teoria da decisão. Iremos discorrer nos próximos parágrafos o detalhamento do estudo de Moreira (2015), realizado pela Unicamp sob orientação de Laura Rifo, uma das referências no ensino de probabilidade no Brasil.

Moreira (2015) faz um estudo voltado para professores do Ensino Médio utilizando situações de jogos, com doze situações articuladas com questões da própria estatística e probabilidade, abordando Teoria da Decisão junto à probabilidade subjetiva.

Em seu estudo, Moreira aplica situações versando problemas relativos a média e seus significados, a teoria de decisão aplicada a perdas e ganhos em jogos e ciência forense. Por fim, situa suas propostas como um guia para o professor em sala de aula, afirmando que (MOREIRA, 2015, p.79):

“As atividades propostas neste trabalho desenvolvem cuidadosamente a compreensão da linguagem de probabilidade e suas diferentes interpretações, faz a relação com a estatística ao trabalhar médias e desvio padrão e amplia o currículo comum do ensino médio ao inserir teoria da decisão.”

Os detalhes da sua pesquisa envolvem também estudantes do 2º ano do Ensino Médio, fornecendo um produto final sobre sequência didática para ensino de probabilidade. Com isso, Moreira conclui que:

Conseguimos contribuir para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à compreensão, comunicação, investigação e contextualização. Levamos o aluno a compreender a Matemática enquanto ciência organizada e como um conhecimento social e historicamente construído. (MOREIRA, 2015, p.157)

Por fim, detalhamos a pesquisa de Di Bernardo et al (2019) feita em parceria com instituições também da Itália. Eles investigaram o desenvolvimento de conhecimentos especializados para professores e futuros docentes no contexto da probabilidade, utilizando diretrizes curriculares italianas. Eles adotaram um modelo de sala de aula invertida, fornecendo os questionários antes dos encontros para que os docentes estudassem as situações antes da discussão em sala.

A aplicação do teste envolveu a resolução de questões com probabilidade clássica, frequentista e subjetiva. Eles concluíram que os professores que receberam a instrução com o significado subjetivo conseguiram desenvolver melhor suas habilidades e ajustaram suas intuições probabilísticas, resultando assim no desenvolvimento de habilidades necessárias para a docência em Matemática.

Articulando os três estudos conseguimos perceber que eles investigaram o ensino da probabilidade utilizando intervenções; seja o de Rast (2005), ou Di Bernardo et al (2019). Com isso nossa proposta se diferencia no sentido de não intervir e deixar

que os estudantes expressem suas habilidades e intuições em probabilidade subjetiva com questões de contextos reais.

Assim, elencamos mais diferenças entre os estudos analisados e essa pesquisa, como não utilizar a intervenção, produzindo assim subsídios para o docente que necessita entrar em sua sala e saber as concepções prévias dos estudantes. Outro ponto significativo em destaque é que os três trabalhos envolvem situações-problema com jogos de azar – como o lançamento de dados, urnas, entre outras – e a nossa proposta é desvincular a imagem da probabilidade apenas encaixadas em situações de jogos.

Por fim, dado o protagonismo que a probabilidade assumiu na sociedade atual, que demanda respostas rápidas e agilidade no pensamento, esta pesquisa se ocupa em analisar os conhecimentos prévios dos estudantes e fornecer informações a respeito das concepções prévias e os conhecimentos mobilizados para resolver questões de probabilidade subjetiva, um significado potente na atualização de probabilidades dadas as informações que decorrem de um experimento.

4 A CONSTITUIÇÃO DOS INDICADORES EPISTÊMICOS DE PROBABILIDADE SUBJETIVA

A probabilidade possui algumas variações relativas aos tipos de problema, por vezes encontrados em livros didáticos, tais como problemas de simular lançamentos de dados e moedas, experimentos relativos aos ensaios de Bernoulli, entre outros.

Com essa visão voltada à vivência em sala de aula, Alsina e Ortiz (2019) propõem indicadores de probabilidade que nos levam a reconhecer os significados de probabilidade que estão presentes nessas situações. Nesse sentido, os autores propõem indicadores para os significados clássico, frequentista, subjetivo, axiomático. No entanto, eles estão postos no sentido de análise para situações da Educação Primária. E, nos espelhando nesse trabalho, objetivamos aqui discutir a reconstrução e/ou releitura desses indicadores voltados ao Ensino Médio, mais especificamente para o significado subjetivo de probabilidade.

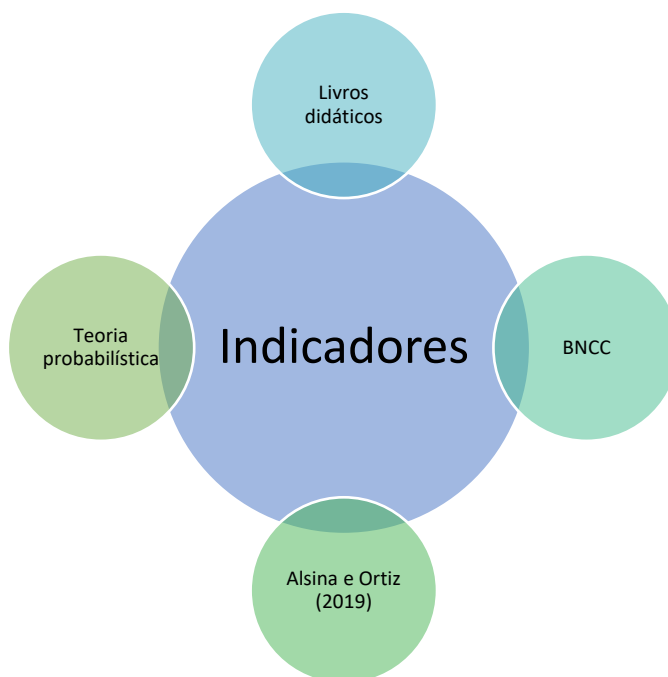
4.1 A CONSTRUÇÃO DOS INDICADORES PARA O SIGNIFICADO SUBJETIVO: dos documentos oficiais à versão final

Antes de expor a construção dos indicadores epistêmicos de probabilidade subjetiva, convém destacar a fonte primária desse conceito, que é o Enfoque Onto-Semiótico do Conhecimento (EOS) (GODINO, 2011). A referida teoria dá suporte as diferentes vertentes do conhecimento matemático, desde as suas disposições cognitivas, até a idoneidade epistêmica.

Para a elaboração dos indicadores, tomamos em conta a visão quanto à idoneidade epistêmica de um determinado conceito, onde Godino (2011, p.8) entende que “[...] um processo de estudo matemático tem maior idoneidade epistêmica na medida que os conteúdos apresentados (ou pretendidos) representam bem aos conteúdos de referência”. Nesse sentido, um indicador epistêmico é uma característica marcante que pertence a um determinado significado para a probabilidade.

Inspirados pela teoria mencionada, chegamos aos pressupostos que nos direcionaram para a elaboração desses indicadores, que levam em consideração o Letramento Probabilístico como guia para análise das questões. Na figura 5, apresentamos os detalhes envolvidos na elaboração dos significados.

Figura 5 – Composição dos indicadores de probabilidade



Fonte: O Autor

Em se tratando de elaborar indicadores que contemplem os significados de probabilidade, iniciamos com a análise dos livros didáticos, mais especificamente os livros utilizados pelas turmas que participaram da pesquisa, pois com isso poderíamos ter ideias relativas aos possíveis comportamentos dos estudantes em face de sua habituação com as variáveis presentes nos problemas.

Após a investigação com os livros, concluímos que a maioria das questões trabalham conceitos muito mais ligados às conexões entre probabilidade e métodos de contagem, estando assim mais presente os significados clássico e intuitivo. No que tange a probabilidade subjetiva, temos uma presença maciça de questões com tabelas de dupla entrada, situações mais algorítmicas, entre outras. A figura 3 traz um exemplo da tipologia de questões mais presentes.

Figura 6 – Exemplo de questão no livro didático

30. Um grupo de 1.000 pessoas apresenta, conforme sexo e qualificação profissional, a composição indicada na tabela a seguir.

Qualificação profissional do grupo		
Sexo \ Qualificação	Especializados	Não especializados
Homens	210	390
Mulheres	140	260

Dados fictícios.

Escolhendo uma dessas pessoas ao acaso, qual é a probabilidade:

- a) de ser homem? 60%
- b) de ser mulher não especializada? 26%
- c) de ser não especializado? 65%
- d) de ser homem especializado? 21%
- e) se for especializado, de ser mulher? 40%

Fonte: Livro Didático - Conexões

A questão acima é um clássico exemplo de como os livros trazem os problemas muito mais voltados aos recortes do espaço amostral para consolidar a quantificação de uma nova probabilidade (a posteriori). Assim, essa etapa de análise dos livros foi um primeiro passo para reler os significados já elaborados por Alsina e Ortiz (2019).

Já no que tange o estudo dos documentos oficiais da educação no Brasil, mais especificamente a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), não encontramos grande aporte na elucidação das propriedades que as situações de probabilidades subjetivas devem propor aos estudantes. Já no que tange o novo Currículo de Pernambuco, lançado em 2021, já de acordo com a BNCC, encontramos indícios mais claros quanto ao aproveitamento da gama de situações possíveis no significado subjetivo de probabilidade. O currículo (PERNAMBUCO, 2021, p.206) traz o seguinte:

Quadro 7 – Habilidades relativas a probabilidade subjetiva

- | |
|---|
| (EM13MAT106PE12) Identificar e interpretar situações do cotidiano, envolvendo riscos probabilísticos em que é necessário fazer escolhas como, por exemplo, usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, como nos demais campos de conhecimento. |
| (EM13MAT312PE28) Resolver e elaborar situações problema que envolvam o cálculo de probabilidade (simples, da união, da interseção, condicional) de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. |

Fonte: PERNAMBUCO (2021, p.206)

Com isso, encontramos abertura suficiente para esperar que as situações de probabilidades subjetivas também englobem as tomadas de decisão, que são de fundamental importância na vida do estudante. Sendo assim, partimos para a análise da matemática envolvida na probabilidade subjetiva (DEGROOT, 2012; RIFO, 2021), damos destaque aos seguintes conteúdos matemáticos:

- Teorema da Probabilidade Total
- Probabilidade Condicional
- Teorema de Bayes
- Árvore das possibilidades
- Repartição do espaço amostral

Esses foram os que mais encontramos nos livros didáticos, que apresentaremos no próximo capítulo, e que encaixam adequadamente com os pressupostos inseridos no Currículo de Pernambuco.

Já como última etapa, fizemos a adequação contida no trabalho de Alsina e Ortiz (2019), aproveitando alguns dos indicadores já presentes e adaptando-os ao contexto de Ensino Médio. Paulatinamente construímos alguns outros que acreditamos ter presença forte na maioria das situações problema e que convergem às teorias matemáticas bem como as demandas da BNCC.

O quadro abaixo traz a versão final de Alsina e Ortiz (2019), com seis indicadores de probabilidade subjetiva voltados à Educação Primária. Convém destacar que fizemos uma tradução do espanhol para português do Brasil.

Quadro 8 – Indicadores de Probabilidade de Alsina e Ortiz (2019)

Quadro de Indicadores de Probabilidade Subjetiva	
Indicador	Descrição
1	Foco em situações onde a probabilidade muda com base na informação que se dispõe inicialmente.
2	Uso de termos e expressões vinculadas ao vocabulário probabilístico.
3	Ênfase na probabilidade entendida como o grau de crença no acontecimento de um evento.
4	Foco na incerteza e na imprevisibilidade dos resultados possíveis onde a probabilidade é condicionada com a informação que se dispõe.
5	Foco na análise de experimentos onde a probabilidade de ocorrência de um evento se vê afetada por uma informação disponível.

6	Análise de exemplos e experiências prévias que permitem ajustar a quantificação da ocorrência de um evento com base nas informações disponíveis.
----------	--

Fonte: Alsina e Ortiz (2019, adaptado)

Mediante o exposto, chegamos aos nossos indicadores, com alguns adaptados do trabalho citado anteriormente e incrementados com os conceitos vistos em sua maioria no Ensino Médio.

Quadro 9 – Indicadores de probabilidade subjetiva elaborados nesta pesquisa

Indicadores Epistêmicos de probabilidade subjetiva elaborados na pesquisa	
<i>Indicador</i>	<i>Descrição</i>
1	Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial (as probabilidades iniciais são ajustadas a partir de uma nova informação disponível.)
2	Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “ $P(A B)$ ”, “ $P(B A)$ ”
3	Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento. (Nem todos os acontecimentos anteriores são repetições de um mesmo evento, onde não há a igualdade de condições).
4	Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos.
5	Representação visual dos problemas em diagrama de árvore, tabelas, diagrama de Venn.
6	Procedimentos de quantificação centrados na busca pelas probabilidades através de algoritmos probabilísticos.
7	Formato dos dados em frequências, porcentagens ou números decimais.

Fonte: O Autor

Os indicadores apresentados no quadro 9 são construídos levando em consideração as diversas variações apresentadas pelas situações – problema de probabilidade subjetiva. Cada conjunto de indicadores pertence a um bloco diferente no sentido cognitivo. Vejamos no quadro 10 a distribuição de cada indicador.

Quadro 10 – Blocos de composição dos indicadores

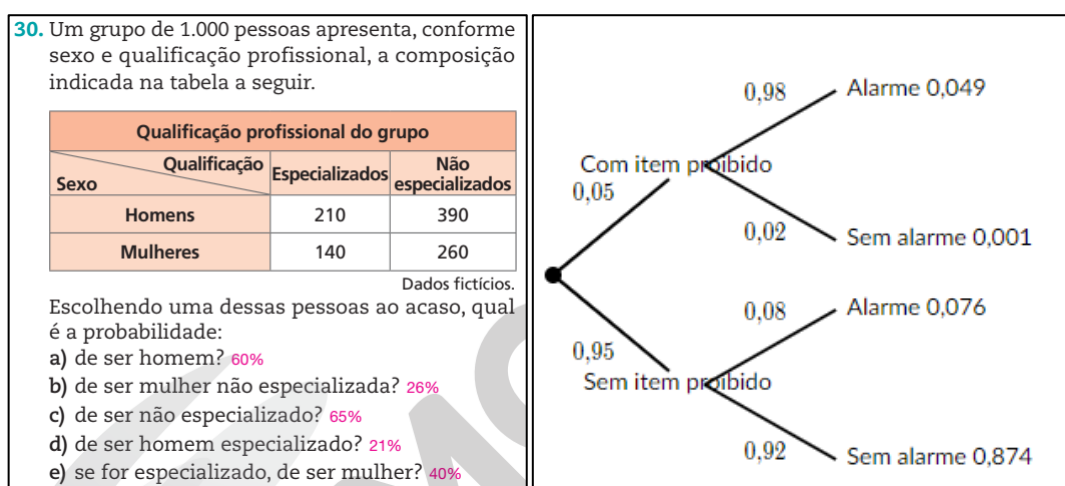
BLOCOS DE PROPRIEDADES DO CONCEITO	
CONCEITUAL	Indicadores 1, 3 e 4
REPRESENTAÇÕES	Indicadores 5 e 7
LINGUAGEM	Indicador 2
ALGORITMOS	Indicador 6

Fonte: O Autor

O bloco Conceitual diz respeito ao entendimento geral da ideia do significado subjetivo de probabilidade, levando em consideração aspectos envolvendo probabilidades a priori e a posteriori, as probabilidades condicionais, o quanto a informação prévia pode mudar a quantificação de probabilidade de um evento a partir de experiências e análises, entre outros aspectos mais detalhados na seção específica de probabilidade subjetiva.

Já as representações dizem respeito as formas como os problemas estão desenhados. Na maioria das situações encontradas em livros didáticos as tabelas de dupla entrada são cartas marcadas, porém existem outras representações, como diagrama de Venn, a árvore de possibilidades, entre outras (não discutiremos as eficiências de cada representação pois não pertence ao escopo desta seção).

Figura 7 – Exemplos de representação de problemas de probabilidade subjetiva



Fonte: Acervo do autor

A figura 7 apresenta dois problemas de probabilidade subjetiva, envolvendo o recorte do espaço amostral (partição de espaço amostral), dentro da aplicação voltada à probabilidade condicional e o Teorema da Probabilidade Total. Neles, notamos as

representações em porcentagens na árvore de possibilidades, e frequência absoluta no quadro da questão 30, corroborando com nosso indicador X de probabilidade subjetiva.

Já o bloco de Linguagem se refere aos termos comuns utilizados na linguagem probabilística. Aqui cabe ressaltar uma adaptação feita ao indicador apresentado por Alsina e Ortiz (2019), pois entendemos que existe ali um sentido mais geral para linguagem probabilística, – adequada para a faixa educacional a qual se propõe: educação primária, onde os primeiros passos estão sendo dados na compreensão do conceito de probabilidade – já na nossa versão temos uma delimitação para termos comuns da probabilidade subjetiva, elevando ao nível de Ensino Médio.

O último bloco, Algoritmos, se refere aos processos utilizados para quantificação das probabilidades, seja com o Teorema de Bayes, ou Teorema da Probabilidade Total, entre outros. Aqui salientamos que existem alguns problemas que a resolução pode passar apenas pelo entendimento da situação e a tomada de decisão, pois nem sempre queremos quantificar a probabilidade do acontecimento de um evento, mas sim, apenas tomar uma decisão consciente de que escolhendo determinado evento, digamos A, esse terá mais probabilidade de ocorrer no experimento em questão.

Nesse sentido, um exemplo clássico é o problema das portas (apresentado na seção de probabilidade subjetiva), onde o jogador pode ter duas opções de resolução: usando as probabilidades condicionais ou entendendo que ao mudar de porta as probabilidades a posteriori do experimento se invertem, daí ele deve apenas tomar uma decisão, que é trocar ou não a porta na segunda situação.

4.2 OS INDICADORES EPISTÊMICOS COMO ELEMENTOS DE ANÁLISE PARA PROBLEMAS DE PROBABILIDADE SUBJETIVA

Com efeito, entendemos que os significados de probabilidade não são estanques, possuindo características em comum e relevantes. Pensando nisso, elaboramos cada um dos indicadores com base nos achados já mencionados nesta seção. Além disso, iremos apresentar as justificativas para cada um deles.

Assim, após estudo detalhado a respeito da validade matemática do significado subjetivo de probabilidade (com base no Teorema de Bayes), que envolve aspectos

relativos aos cálculos probabilísticos para quantificação, bem como a intuição e experiência de quem a declara; apresentamos o caminho para a construção dos indicadores.

O indicador 1: *“Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial (as probabilidades iniciais são ajustadas a partir de uma nova informação disponível.)”* diz respeito às situações onde a probabilidade possui uma informação inicial que modifica alguma das características elementares do espaço de probabilidade estudado, como por exemplo, um recorte do espaço amostral inicial, ou uma informação que até o momento era desconhecida à respeito do evento. Destacamos que esse indicador é exclusivo do significado subjetivo.

Já o indicador 2: *Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, $P(A|B)$, $P(B|A)$* diz respeito ao uso do vocabulário probabilístico delimitado às probabilidades subjetivas. Com o uso das expressões presentes em problemas envolvendo cálculo das probabilidades condicionais, este indicador está ligado as formulações presentes no Teorema de Bayes e no Teorema da Probabilidade Total para interpretar as situações-problema, evidenciando o uso do algoritmo para quantificar as declarações de probabilidade. Esse também é um indicador situado apenas para a probabilidade subjetiva.

Paralelamente a isso, o indicador 3: *“Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento. (Nem todos os acontecimentos anteriores são repetições de um mesmo evento, onde não há a igualdade de condições)”*, apresenta parte do processo de quantificação que não está necessariamente preso a um algoritmo (ROSS, 2015; BUSSAB, MORETTIN, 2015).

Assim, nem sempre a parte total da quantificação numérica de uma declaração probabilística depende apenas de um processo numérico. Um exemplo seria a avaliação de uma cirurgia por parte de um médico, onde exista a probabilidade de sucesso e fracasso do procedimento que dependa de um fator pessoal do paciente. Nessa situação, a probabilidade inicial pode ser mensurada e/ou quantificada por meio da experiência do médico, para logo em seguida, entrar a avaliação dos riscos

existentes. Cabe salientar que cirurgias passadas não precisam necessariamente serem tomadas em consideração para a avaliação atual, dado que, mesmo com a repetição do experimento (cirurgia), não podemos garantir a igualdade de condições (abordagem frequentista).

Igualmente, o indicador 4: *“Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos*, não deve ser considerado exclusivo do significado subjetivo, dado que o frequentista pode utilizá-lo no sentido de informação disponível como uma repetição do experimento. O exemplo do médico, citado anteriormente, caberia nesse contexto, ao avaliar as chances de sucesso da cirurgia por meio de informações disponíveis do paciente.

Já no tocante às representações, os indicadores 5: *“Representação visual dos problemas em diagrama de árvore, tabelas, diagrama de Venn”*, e 7: *“Formato dos dados em frequências, porcentagens ou números decimais”*, pertencem a praticamente todos os significados, já que se trata apenas de como as informações são apresentadas mais comumente. Inclusive, destacamos que as formas apresentadas em cada um deles foram as mais presentes nas análises prévias a elaboração dos indicadores. Também é válido mencionar que alguns deles podem ser facilitadores nas resoluções de problemas, como por exemplo, o estudante que lida melhor com números decimais se comparado a porcentagens (consideramos aqui um caso onde a conversão porcentagem-decimal é falha).

Por fim, o indicador 6: *“Procedimentos de quantificação centrados na busca pelas probabilidades através de algoritmos probabilísticos”*, também está presente em todos os significados trabalhados nesta pesquisa, com exceção do intuitivo. Em relação às análises dos livros, essa forma de resolução dos problemas é a mais presente.

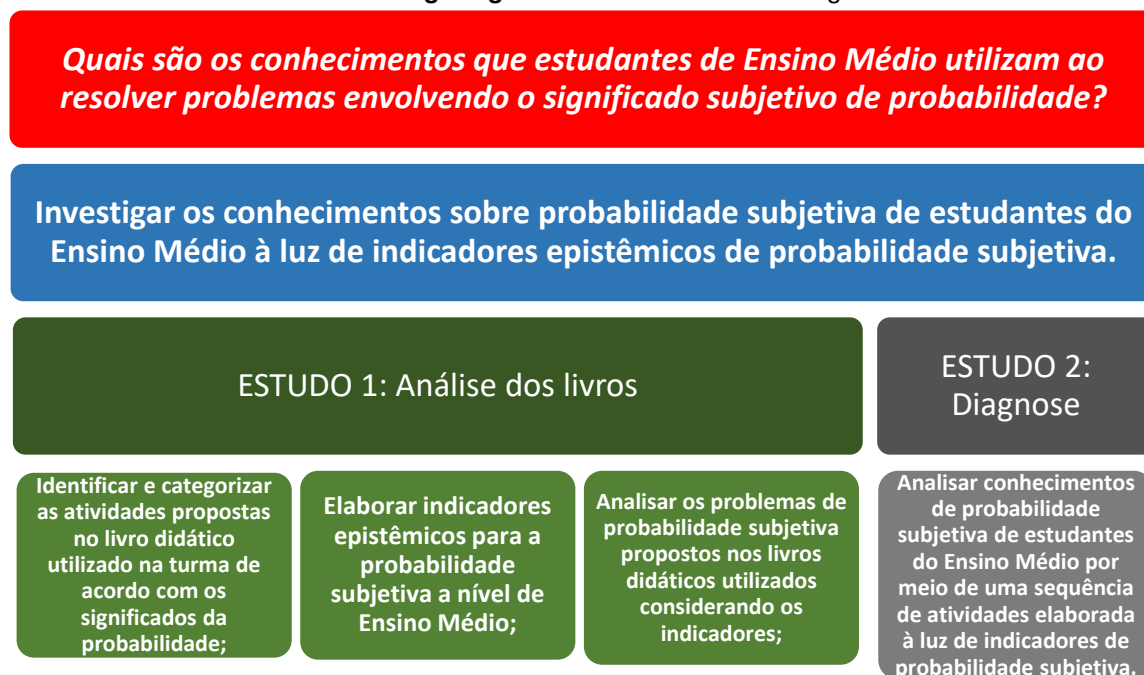
Em vista disso, a identificação do significado subjetivo nas situações analisadas fica por conta do critério de inclusão a partir do indicador número 1, 3 ou 4. Com base no atendimento a um dos três, partimos para analisar a presença dos outros. Apontamos também que o atendimento a um deles não necessariamente exclui a presença dos outros. Assim, os indicadores aqui elaborados serão base da nossa análise dos livros didáticos e na elaboração do instrumento de diagnose, nos guiando

para agrupar as situações – problema encontradas nos livros e tentar adequar outras situações que serão inseridas na diagnose, para que as análises a posteriori estejam pautadas na mesma organização.

5 DELINEAMENTO METODOLÓGICO

Em vista de responder adequadamente aos objetivos e pergunta científica propostos, esta pesquisa está dividida em dois estudos: a análise dos livros didáticos e uma diagnose composta por três instrumentos para coleta dos dados. O organograma 1 apresentada a síntese do percurso metodológico a ser percorrido no presente capítulo.

Organograma 1 – Síntese Metodológica



Fonte: O autor

Visando um melhor entendimento do objeto de estudo desta pesquisa e como o enxergamos, detalharemos a seguir a abordagem quanto aos procedimentos metodológicos respectivos a cada objetivo específico.

5.1 DOS PARTICIPANTES

Participaram desse estudo 10 estudantes do 3º ano do Ensino Médio da Escola de Referência em Ensino Médio José de Almeida Maciel (EREMJAM), localizada na cidade de Pesqueira – PE. A escolha dos estudantes se deu de maneira aleatória, a partir de sorteio realizado em software de planilha. O município de Pesqueira localiza-se no Agreste de Pernambuco, contando com população de 68 067 habitantes (Estimativa IBGE – 2021), e área de 995 500 km².

A EREMJAM (Código INEP 26058430) é um colégio de tempo integral que oferta o Ensino Médio regular, pertencente à Gerência Regional de Educação (GRE) de Arcoverde/Sertão do Moxotó. Mais recentemente, em 2020, foi avaliada com o Índice de Desenvolvimento Educacional de Pernambuco (IDEPE) em 5,17; ficando acima do índice do estado, que é de 3,9.

Participaram deste estudo 6 meninos e 4 meninas, com idades entre 16 e 18 anos. A escolha pela turma se dá pela presença massiva dos conteúdos de probabilidade no Currículo de Pernambuco no 2º e 3º ano, assim, tendo no 3º ano a etapa de consolidação dos mesmos.

A escolha do campo de pesquisa se deu por ser a escola onde o pesquisador cursou seu Ensino Médio, assim, tendo trânsito facilitado e flexibilizado para realização dessa pesquisa.

5.2 QUANTO À NATUREZA E ANÁLISE DE DADOS DA PESQUISA

A pesquisa detalhada na presente dissertação tem natureza qualitativa quanto a sua abordagem e técnica de análise dos dados. Para Creswell (2007, p.185) “[...] os procedimentos qualitativos se baseiam em dados de texto e imagem, têm passos únicos na análise de dados e usam estratégias diversas de investigação.” Assim, criamos um método para a análise dos dados nos estudos 1 e 2, detalhados a seguir.

Estudo 1: A análise dos livros didáticos

Para responder ao objetivo específico “Mapear nas atividades propostas por livros didáticos das turmas a abordagem dos significados de probabilidade”, criamos um método de análise baseado nos significados da probabilidade elencados no estudo de Batanero (2005).

Assim, analisamos os livros aprovados do objeto dois do edital do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), válido do ano 2021 a 2024, dedicados ao Ensino Médio. O edital conta com 10 obras aprovadas, das quais duas serão objeto de análise dessa pesquisa. Nessa etapa, faremos uso da pesquisa bibliográfica com base documental, que de acordo com Gil (2006, p.65) “é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.”

Os critérios utilizados para analisar as atividades propostas nos livros didáticos vão ao encontro aos significados de probabilidade elencados por Batanero (2005),

com o propósito de verificar as proporções quantitativas dedicadas a cada um deles. Assim, pretendemos estabelecer um diálogo com vista a encontrar aproximações com os resultados a serem coletados no estudo número 2.

Com isso, no que tange os significados de probabilidade, criamos cinco categorias de análise para associar um significado dominante para cada tarefa trazida pelos livros. A saber: *Tarefa de Significado Intuitivo (TSI)*, *Tarefa de Significado Clássico (TSC)*, *Tarefa de Significado Frequentista (TSF)*, *Tarefa de Significado Subjetivo (TSS)*, e *Tarefa de Significado Axiomático (TSA)*.

A categoria da Tarefa de Significado Intuitivo (TSI) tende a abraçar as questões que envolvem principalmente as quantificações de maneira verbal, associando a probabilidade de ocorrência dos eventos ligadas às expressões comuns, tais como: impossível, pouco provável, provável, muito provável, certo, entre outras. Com isso, a gama de atividades que envolvem as noções mais intuitivas relativas à abordagem e técnica de resolução estarão presentes nessa categoria.

Para as Tarefas de Significado Clássico (TSC), separamos àquelas que dizem respeito ao cálculo de probabilidades recorrendo ao seu entendimento como a razão $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$. Geralmente, as questões que envolvem a probabilidade entendida como uma razão tem ligação intrínseca com a análise combinatória envolvendo métodos de contagem para encontrar os termos de cada elemento da razão, bem como a forte presença de eventos equiprováveis, com lançamentos de dados e moedas.

Já no que diz respeito às Tarefas de Significado Frequentista (TSF), iremos elencar aquelas em que a probabilidade é abordada a partir da repetição do experimento em igualdade de condições. Assim, mudamos o foco da probabilidade teórica para olharmos uma probabilidade entendida como um limite. Convém destacar aqui a entrada de teoremas importantes, como por exemplo a lei dos grandes números.

Com as Tarefas de Significado Subjetivo (TSS), o trabalho terá uma maior riqueza de detalhes quanto à abordagem das questões. Nesse significado os problemas irão tratar de situações em que a probabilidade se vê afetada a partir de situações prévias e/ou que ocorrem depois, e que suas consequências irão afetar a probabilidade a priori (teórica), gerando assim uma probabilidade a posteriori. Questões que tipicamente envolvem independência de eventos, probabilidades condicionais, probabilidade total e Teorema de Bayes, se encaixam nessa categoria.

Salientamos que o significado subjetivo se trata do objeto de estudo dessa pesquisa. Portanto, para essa análise, iremos catalogar os problemas e logo em seguida analisá-los sob a ótica dos indicadores de probabilidade subjetiva que adaptamos a partir da pesquisa de Alsina e Ortiz (2019), com o intuito de estabelecer conexões com os diferentes tipos de pensamento e desafios propostos.

Por fim, nas Tarefas de Significado Axiomático (TSA) estarão presentes os problemas que induzem ao estudante pensar quais aspectos e quais regras fazem de um experimento estar bem construído dentro da Teoria das Probabilidades, respeitando assim os Axiomas de Kolmogorov. No quadro abaixo, esquematizamos todo o processo de análise dos problemas dos livros didáticos quanto aos significados.

Quadro 11 – Categorias de análise dos problemas de livros didáticos

Tipo de tarefa	Código	Tipologia de problema	
<i>Tarefa de Significado Intuitivo</i>	TSI	Probabilidade entendida imprescindivelmente a partir da intuição do estudante. Uso de termos como provável, impossível, entre outros, para expressar a crença no acontecimento de um evento.	
<i>Tarefa de Significado Clássico</i>	TSC	A probabilidade entendida como uma razão. Probabilidade teórica. $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$.	
<i>Tarefa de Significado Frequentista</i>	TSF	Probabilidade quantificada a partir da repetição de experimentos em igualdade de condições, Lei dos Grandes Números (LGN). $\lim_{P(A) \rightarrow \infty} f = P(A), 0 \leq P(A) \leq 1.$	
<i>Tarefa de Significado Subjetivo</i>	TSS	Indicador de Probabilidade Subjetiva	Detalhamento
		I 1	Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial (as probabilidades iniciais são ajustadas a partir de uma nova informação disponível.)
		I 2	Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “P(A B), P(B A)”
		I 3	Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento. (Nem todos os acontecimentos anteriores são repetições de um mesmo evento, onde não há a igualdade de condições).

		I 4	Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos.
		I 5	Representação visual dos problemas em diagrama de árvore, tabelas, diagrama de Venn.
		I 6	Procedimentos de quantificação centrados na busca pelas probabilidades através de algoritmos probabilísticos.
		I 7	Formato dos dados em frequências, porcentagens ou números decimais.
Tarefa de Significado Axiomático	TSA	Problemas voltados ao entendimento dos axiomas de probabilidade. Axiomas de Kolmogorov.	

Fonte: O autor

Com isso, concluímos o detalhamento das análises feitas no estudo 1. Também objetivamos levantar quantitativos das respectivas categorias e/ou indicadores de probabilidade para entender o quanto cada um dos significados é trabalhado nos problemas propostos e sua profundidade quanto aos desafios propostos aos estudantes. Assim, tentaremos compreender melhor as aproximações e distanciamentos com os resultados da diagnose do estudo 2.

Estudo 2: A diagnose

Para responder ao objetivo específico “Analisar os conhecimentos de estudantes do Ensino Médio em atividades que envolvem a probabilidade subjetiva considerando os referidos indicadores.”, dispomos de um tratamento qualitativo a partir da aplicação de um questionário envolvendo problemas de probabilidade subjetiva, e logo após, uma discussão coletiva com o grupo de estudantes em questão.

O primeiro passo desse estudo foi identificar, a partir dos dados obtidos nas análises dos livros didáticos, as possíveis lacunas deixadas pelos problemas apresentados e explorar, concomitante aos indicadores adaptados de Alsina e Ortiz (2019), um questionário que tenha maior abrangência quanto à diversidade de desafios propostos aos estudantes.

Além disso, trabalhamos para que as questões exploradas tenham intrínseca relação com os indicadores de probabilidade subjetiva, que comungam com o

Letramento Probabilístico, baseado nos princípios do modelo de Gal (2005). Com isso, seguimos algumas premissas:

1. Os problemas versaram a partir de contextos reais, com significado verdadeiramente próximo ao cotidiano dos estudantes;
2. A tipologia de problemas abarcou consigo o maior número de indicadores de probabilidade subjetiva, para que tivéssemos um diagnóstico mais próximo de demandas cognitivas mais completas no que tange o campo de problemas desse significado;
3. Os problemas se distanciaram dos contextos típicos dos jogos de azar, no intuito de reconhecer a presença da probabilidade em situações corriqueiras;
4. E, fechando as premissas, os problemas devem permitir que os estudantes utilizem diferentes estratégias para sua resolução e, quando possível, sejam passíveis de resolução sem a aplicação de algoritmos.

Para a correção dos questionários, utilizamos categorias *a posteriori*, para serem associadas aos tipos de respostas, catalogando os aspectos apresentados em cada questão. Com isso, objetivamos entender os obstáculos epistemológicos encontrados pelos estudantes durante seu contato com os problemas de probabilidade subjetiva, bem como situar por onde e quais os limites que as possibilidades de trabalho desse significado podem ser exploradas em sala de aula no Ensino Médio.

Após a realização das análises e categorização dos erros, organizamos dois encontros para discussão coletiva sobre as respostas encontradas no questionário. Buscando entender quais conhecimentos foram aplicados para responder as questões dadas e quais os possíveis caminhos que os estudantes tomaram ao traçar suas estratégias, gravamos os encontros para posterior análise e transcrição de trechos convenientes para esclarecimentos. A seguir, detalharemos o questionário e a esquematização de trabalho nos encontros.

5.2 O QUESTIONÁRIO: Formulação e intencionalidades

Como citado anteriormente, o questionário obedeceu aos critérios estabelecidos para o estudo 2. Este instrumento de coleta de dados teve por função principal a tarefa de mapear os conhecimentos que os estudantes levantaram durante as resoluções das questões, no intuito de compreender as situações propostas e como esses mesmos conhecimentos entram em jogo a cada tipo de questão.

Nesse sentido, convém ressaltar que os significados de probabilidade não são estanques e tem correlações epistêmicas de proximidade (BATANERO, 2005). E ainda sobre esse enfoque, os problemas do questionário obedeceram a um processo cognitivo que não parte do significado subjetivo, ou seja, ele trabalha uma gradação entre os elementos que constituem o constitui (nessa pesquisa tratamos de identificá-los como indicadores de probabilidade subjetiva).

Por conseguinte, acredita-se que elementos básicos da probabilidade no geral deve estar presentes em qualquer problema em qualquer que seja o significado dominante do mesmo. Corroboramos com as ideias de Bryant e Nunes (2012), ao afirmarem que a probabilidade exige demandas cognitivas básicas, tais como: entendimento de aleatoriedade, constituição de espaço amostral, quantificação de probabilidades e a compreensão das relações entre eventos.

Nesse sentido, iremos apresentar as quatro questões propostas, das quais algumas foram adaptadas e outras criadas de modo que pudessem abarcar a maior quantidade de indicadores de probabilidade subjetiva possíveis. Abaixo, elencamos elementos básicos de cada problema de acordo com os pressupostos de sua elaboração.

Questão 1

Objetivo	Verificar se o estudante compreende a dependência entre eventos.
Situação/Contexto	Fictício/Tecnológico.
Conhecimento Probabilístico	Retiradas sucessivas sem reposição.
Indicadores de Probabilidade Subjetiva	I1 - Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial.

Na primeira questão escolhemos um problema semelhante ao que se encontra nos livros didáticos tradicionais, envolvendo o raciocínio no contexto de retiradas

sucessivas. Com isso, o estudante é levado a pensar nos conceitos básicos dos espaços de probabilidade, tais como a definição do espaço amostral, se o mesmo é afetado pela primeira retirada ou não, independência de eventos, bem como a questão da coerência nas declarações probabilísticas, dado que ele deve raciocinar sobre as chances de ocorrência dos eventos em um experimento com dupla retirada.

Já no que se refere aos campos cognitivos do Letramento Probabilístico, essa não é uma questão que envolve grande quantidade de elementos. Em sua composição estão presentes as ideias de variabilidade, cálculo de probabilidades por meio de algoritmos dentro do conhecimento matemático, seu vocabulário também não é rebuscado nem visa desenvolver majoritariamente as expressões comuns do campo probabilístico, tais como, “é possível”, “é provável”, “impossível”, “pouco provável”, dentre outras.

Na questão 1, esperamos que o estudante consiga enxergar a relação de dependência entre a primeira e segunda retirada, pois Mário já retirou um telefone defeituoso, e com isso, o espaço amostral é diminuído, juntamente com a quantidade de casos favoráveis do evento “Retirar um telefone defeituoso”.

Figura 8 – Questão 1

Em uma caixa há quatro smartphones, sendo que desses, dois encontram-se defeituosos. Mário e Rita devem escolher um telefone para si, mas não podem repetir a retirada da caixa, ou seja, se pegar um telefone com defeito, ficará com ele mesmo assim. Mário retirou primeiro que Rita, e seu telefone veio com defeito. Agora é a vez de Rita, e com isso podemos concluir que:

- a) É mais provável que o telefone de Rita seja defeituoso
- b) É mais provável que o telefone de Rita não seja defeituoso
- c) A probabilidade do telefone de Rita ser defeituoso é a mesma de estar funcionando corretamente.

Fonte: O autor

Nessa questão está presente o indicador de probabilidade subjetiva número 1. Com isso, era esperado que os estudantes tivessem contato com um dos elementos importantes da probabilidade subjetiva, como o reconhecimento da dependência de eventos, sabendo que a ocorrência de um pode afetar a do outro, fato que pode ser interpretado também como a atualização da probabilidade *a priori* por meio de um outro evento, assim, alterando a declaração de probabilidade *a posteriori*.

Questão 2

Objetivo	Investigar a interpretação de declarações probabilísticas e sua interligação com acontecimentos concomitantes.
Situação/Contexto	Teste de Covid/Saúde

Conhecimento Probabilístico	Vocabulário probabilístico, probabilidade condicional de forma intuitiva.
Indicadores de Probabilidade Subjetiva	I1 - Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial.
	I2 - Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “ $P(A B)$, $P(B A)$ ”
	I3 - Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento. (Nem todos os acontecimentos anteriores são repetições de um mesmo evento, onde não há a igualdade de condições).
	I7 - Formato dos dados em frequências, porcentagens ou números decimais.

A questão número dois vem dotada de significados importantes para conceitos de probabilidade, bem como envolve a utilização de uma situação real para avaliar declarações de probabilidade. Trata-se de uma situação envolvendo sensibilidade e especificidade de testes de Covid-19.

Figura 9 – Questão 2

Você sabe interpretar testes para Covid – 19?

Primeiramente, precisamos entender dois conceitos básicos: a sensibilidade e a especificidade.

A *sensibilidade* é definida como a capacidade que um teste tem em identificar uma pessoa verdadeiramente doente, dentre pessoas que apresentam apenas a suspeita da doença. A *especificidade*, por sua vez, é definida como a capacidade do teste apresentar um resultado negativo em indivíduos que não possuem a doença. Um fabricante disponibiliza em seu site web a seguinte informação:

COVID-19 Ag ECO Teste

Ensaio imunocromatográfico para detecção qualitativa de antígenos (proteína N) do SARS-CoV-2 (COVID-19)

- Sensibilidade: 96,52%
- Especificidade: >99,9%
- Armazenamento: 2 a 30°C
- Amostra: swab nasal/swab de nasofaringe
- Tempo do Teste: 2-15 minutos (não ler após 30 minutos)
- Validade: 24 meses
- Kit: acompanha swab para coleta

Apresentação: Cassete

Registro MS: 80954880133

COVID Ag ECO Teste

Teste de antígeno (Ag)
POSSUI TESTAÇÃO e validação de Brasil

Qualificação por IVD
Qualificação por IVD

• Especificidade: 99,9%
• Sensibilidade: 96,52%

2-15 minutos
2-15 minutos

BAIXAR O FLYER

Disponível em: <<<https://ecodiagnostica.com.br/diagnostico-rapido/covid-19-ag-eco-teste/>>>.

Após uma leitura atenta, responda às seguintes perguntas:

- Como você interpretaria as porcentagens de sensibilidade e especificidade mencionadas no banner do teste?
- Você considera confiável os resultados fornecidos por esse teste?
- Imagine que um profissional de saúde, ao fazer o referido teste, demora aproximadamente 1 hora para verificá-lo. Como você avalia as condições da sensibilidade e especificidade do teste nessa situação?
- No que se refere aos números da sensibilidade do teste apresentados pelo laboratório, você classificaria como impossível que esse teste apresente resultado negativo mesmo para uma pessoa infectada pela doença?

Fonte: O autor

Nessa questão, começamos a abordar nos itens (a) e (b), temas relativos à interpretação de declarações probabilísticas fornecidas pelo fabricante do teste, bem como os significados dos termos sensibilidade e especificidade. Em termos do vocabulário probabilístico, relacionamos com as mensagens definidas nas probabilidades condicionais $P(A|B)$: Probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu e $P(B|A)$: probabilidade de B ocorrer dado que A ocorreu. Como Gal (2019; 2005) aponta, no Conhecimento Matemático e Conhecimento de Contexto, presentes nos Elementos de Conhecimento do Letramento Probabilístico, nesses itens exploramos as informações e instigamos o estudante a pensar nessas declarações, fazendo uso de uma situação real.

Já no item (c), abordamos um acontecimento na realização do experimento (realização do teste) que envolve a habilidade de um profissional de saúde ao manusear o referido teste durante um exame. Com isso, instigamos o estudante a pensar sobre como um acontecimento secundário influenciaria nas respectivas probabilidades da especificidade e sensibilidade do teste; fazendo assim, com que, ao se deparar com uma situação, o estudante possa atualizar suas estimativas probabilísticas in loco com os eventos simultâneos. Essa é uma premissa marcante do significado subjetivo de probabilidade, dado que o experimento sofre uma atualização na quantificação probabilística. Porém, nesse caso, salientamos que não está envolvido nenhum processo de quantificação por meio de cálculo, a resposta incidirá sobre o significado intuitivo, levando em conta a experiência e conhecimento prévio.

Fechamos essa questão investigando o ajuste fino entre a comunicação probabilística “impossível” com a baixa probabilidade declarada pela fabricante do teste (3,48%). A ideia desse questionamento gira em torno da investigação da probabilidade baseada nas crenças a partir de uma informação que está disponível (especificidade do teste).

Na questão 2 estão presentes os indicadores 1, 2, 3, e 7. Com isso, percebemos que item a item a questão desenvolve desde a interpretação de dados probabilísticos envolvendo situações reais, até a utilização ferramentas matemáticas para calcular e declarar probabilidades que envolvem probabilidades *a priori* e *a posteriori*.

Questão 3

Objetivo	Investigar a compreensão dos estudantes acerca de probabilidade condicional.
Situação/Contexto	Genética/Saúde
Conhecimento Probabilístico	Vocabulário probabilístico, probabilidade condicional de forma algorítmica, árvore de possibilidade.
Indicadores de Probabilidade Subjetiva	I2 - Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “ $P(A B)$ ”, “ $P(B A)$ ”
	I5 - Representação visual dos problemas em diagrama de árvore, tabelas, diagrama de Venn.
	I6 - Procedimentos de quantificação centrados na busca pelas probabilidades através de algoritmos probabilísticos.

A questão número três envolve uma situação simples, que objetiva investigar a compreensão dos estudantes acerca de probabilidade condicional por meio de atribuição numérica na quantificação. O elemento algorítmico presente na questão corrobora com os pressupostos de Batanero (2015) e Bussab e Morettin (2015), ao entender as probabilidades subjetivas e o Teorema de Bayes como instrumentos para “atualizar” as probabilidades.

Figura 10 – Questão 3

Gene BRCA e o Câncer de Mama

BRCA é a abreviatura de Breast Cancer gene 1 ou 2. BRCA1 e BRCA2 são dois genes diferentes que afetam as chances de uma pessoa desenvolver câncer de mama e ovário.

Todas as pessoas possuem genes BRCA1 e BRCA2. Apesar do que os seus nomes possam sugerir, os genes BRCA não causam o câncer de mama. É importante mencionar que esses genes normalmente desempenham um papel na prevenção do câncer de mama. Eles ajudam a reparar quebras do DNA que podem levar ao câncer e ao crescimento descontrolado de tumores. Por essa razão, os genes BRCA são conhecidos como genes supressores do tumor.

No entanto, em algumas pessoas, esses genes supressores do tumor não funcionam corretamente. Quando um gene é alterado ou danificado, não realiza mais sua função de forma programada e podem, então, ocasionar o desenvolvimento do câncer. Isso é denominado mutação genética.

(Disponível em: << <http://www.oncoguia.org.br/conteudo/brca/13919/1227/>>>)

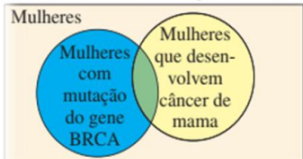
(Farber e Larsson, 2015, p.146, adaptado)

Uma pesquisa mostrou que aproximadamente 1 em 400 mulheres carregam uma mutação (gene alterado/modificado) do gene BRCA e que cerca de 6 em cada 10 mulheres com essa mutação desenvolvem câncer de mama. Encontre a probabilidade de uma mulher desenvolver câncer de mama dado que a mesma carrega uma mutação do gene BRCA.

(Fonte: National Cancer Institute.)

Explique como você chegou a sua resposta.

Câncer de mama e o gene BRCA



O diagrama de Venn ilustra a relação entre dois conjuntos de mulheres. O conjunto universal, representado por um retângulo amarelo, é rotulado 'Mulheres'. Dentro dele, há dois círculos que se sobrepõem. O círculo à esquerda, de cor azul, é rotulado 'Mulheres com mutação do gene BRCA'. O círculo à direita, de cor amarela, é rotulado 'Mulheres que desenvolvem câncer de mama'. A área onde os dois círculos se sobrepõem, representando o interseção dos dois conjuntos, também é amarela.

Fonte: O Autor – Adaptação Farber e Larsson (2015)

No que tange a estrutura da questão, nossa ideia foi iniciar contextualizando os dados que seriam apresentados logo abaixo, e chamando atenção para um problema de saúde, com a avaliação de desenvolvimento de câncer a partir da presença da mutação de Gene BRCA utilizando dados reais.

Com isso, de forma implícita, já inserimos informações iniciais que podem ser decisivas na atribuição da probabilidade buscada na pergunta, bem como a representação em diagrama de Venn fornece a informação que textualmente não foi explicitada: mulheres que não carregam a mutação do BRCA também são passíveis de desenvolver câncer de mama.

Assim, estão presentes na questão 3 os indicadores 2, 5, e 6; que se ocupam de averiguar vocabulário, algoritmo e representação da probabilidade como conjunto finito de elementos. Ainda destacamos a possibilidade de desenvolver sentidos cognitivos e críticos dos estudantes ao terem contato com informações médicas de fontes confiáveis e dados reais, os quais eles podem relacionar no sentido de construir uma opinião e atribuir probabilidades para a situação.

Questão 4

Objetivo	Investigar a compreensão dos estudantes acerca da probabilidade subjetiva, ao atualizar em duas situações a mensuração de probabilidade, bem como avaliação de risco probabilístico.
Situação/Contexto	Risco Probabilístico/Jogos.
Conhecimento Probabilístico	Vocabulário probabilístico, probabilidade condicional de forma algorítmica e intuitiva, confronto de significados (frequentista x subjetivo).
Indicadores de Probabilidade Subjetiva	I1 - Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial (as probabilidades iniciais são ajustadas a partir de uma nova informação disponível.)
	I2 - Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento. (Nem todos os acontecimentos anteriores são repetições de um mesmo evento, onde não há a igualdade de condições).
	I6 - Procedimentos de quantificação centrados na busca pelas probabilidades através de algoritmos probabilísticos.

A questão quatro emerge de um jogo, com seu cerne ligado a um programa de TV americano, *Let's Make a Deal*, onde um prêmio está em jogo. O problema consiste no apresentador mostrar três portas, a qual o jogador deve escolher uma (a priori), e, sabendo do conteúdo de cada uma das portas, o apresentador revelará o conteúdo de uma delas, com a mesma estando vazia. Posteriormente, o jogador deve tomar uma decisão: ele fica com a porta escolhida inicialmente ou irá mudar sua escolha para a terceira porta em questão?

Figura 11 – Questão 4

O problema foi apresentado no programa de televisão Let's Make a Deal nos Estados Unidos, que posteriormente ganhou sua versão brasileira: "Porta da Felicidade", com Sérgio Malandro na apresentação.



Neste programa de TV o objetivo é ganhar um prêmio (bode). O apresentador do programa mostra a você três portas, P_1 , P_2 e P_3 : atrás de uma há um bode e, das outras, não existe nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe P_1 , mas esta não é aberta. Então, ele abre uma das outras duas portas e mostra que ela está vazia (ele sabe o que há atrás de cada porta).

Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha inicial de porta. O que você faria? Justifique sua resposta.

Fonte: O Autor

Nessa questão, estão presentes os principais indicadores que caracterizam a probabilidade subjetiva, ao mesmo tempo que trabalha a tomada de decisão envolvendo também o risco probabilístico. Destacamos o papel singular do apresentador do programa, ao revelar uma porta vazia, que muitas vezes passa despercebido pelo jogador a intencionalidade envolvida na hora de majorar sua probabilidade de vencer, ou seja, de escolher a porta onde está o prêmio.

Além disso, esse problema possibilita uma gama de possibilidades de resolvê-lo, desde aplicações probabilísticas intuitivas até as lógicas formais de resolução utilizando da probabilidade condicional. Batanero, Fernandes e Garcia (2009) elencam possibilidades distintas de resolução do problema. Para o nível contextual onde essa pesquisa se desenvolve, consideramos esperadas as soluções de caráter intuitivo (mesmo com essa denominação, as mesmas não fogem do significado subjetivo, já que possuem formalização matemática).

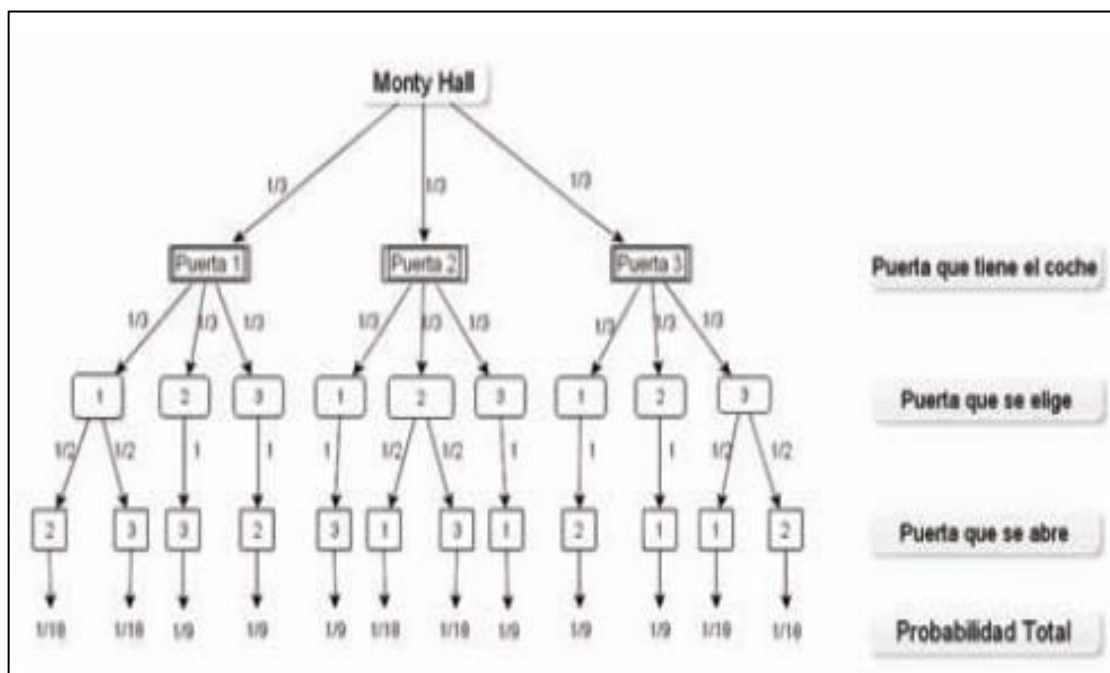
Com isso, destacamos abaixo três formas de resolução, as quais consideramos esperadas para o nível de Ensino Médio, conforme Batanero, Fernandes e Garcia (2009):

Solução Intuitiva 1: Imaginemos o cenário onde apenas uma das três portas está premiada, isto é, nossa probabilidade de vencer é $\frac{1}{3}$, e de perder é $\frac{2}{3}$. Se após o

apresentador revelar o conteúdo vazio de uma das portas o jogador permanecer com sua escolha inicial, a probabilidade de vencer continua sendo $\frac{1}{3}$. No entanto, ao trocar de porta, as probabilidades se invertem, pois, a chance de ele vencer pula para $\frac{2}{3}$, enquanto que a de perder fica sendo $\frac{1}{3}$.

Solução intuitiva 2: esta, na nossa visão, é a solução mais esperada, pois a mesma se torna visual e parte de uma análise mais criteriosa porta por porta. Consideramos dois experimentos: “Porta que contém o prêmio” (cada porta com probabilidade de 1/3) e “Porta que se escolhe”. Considerando os dois experimentos independentes, por meio de uma árvore de possibilidades podemos desenhar todo o jogo e calcular as probabilidades.

Figura 12 – Árvore de possibilidades do experimento



Fonte: Batanero, Fernandes e Garcia (2009, p. 12)

É perceptível que se consideramos não mudar a porta, temos como probabilidade de ganhar somando apenas os ramos da árvore onde escolhemos a porta 1 e a mesma está premiada, a porta 2 e a mesma está premiada, a porta 3 e a mesma está premiada. Cada um dos eventos tem probabilidade 1/3 de acontecer. No entanto, se trocamos de porta, somaremos as possibilidades considerando que o apresentador sabe o conteúdo de cada porta, aumentando assim as chances de vitória. A última solução, por meio probabilidade frequentista usando a simulação, iremos explorar no momento de socialização, com intencionalidades específicas.

5.3 SOCIALIZAÇÃO DAS RESPOSTAS

Para a socialização das respostas, questionamentos acerca da maneira como os estudantes responderam ao questionário inicial, e o procedimento para resolução de um novo problema proposto, optamos por uma atividade coletiva em dois momentos e mediada pelo pesquisador. Utilizamos do recurso de gravação para consultas e revisões posteriores no intuito de enriquecer as análises.

Quadro 12 – detalhamento da socialização

Socialização	Momento 1: Discussão das respostas ao questionário e simulação do jogo das portas.
	Momento 2: Resolução e discussão de um novo problema de probabilidade subjetiva.

Fonte: o autor

No primeiro momento, a intencionalidade foi de criar um contexto favorável para discussão das respostas e apresentação de um problema adicional. O foco esteve em duas situações: a questão número 4 do teste inicial (jogo das portas) e a socialização das respostas, juntamente com a discussão coletiva.

Quadro 13 – organização da socialização

Problema das Portas (Questão 4)	Utilização da Probabilidade Frequentista para tomada de decisão.
	Utilização da Probabilidade Subjetiva como formalizador da resposta.
Novo Problema	Utilização da probabilidade subjetiva como grau de crença e coerência entre declarações probabilísticas
	Probabilidade Subjetiva por meio de instrumentos quantificadores (algoritmos probabilísticos).

Fonte: O autor

Sobre o problema das portas, propusemos uma simulação do jogo e adição de questionamentos que pudessem mobilizar os conhecimentos acerca de probabilidade frequentista e como os mesmos iriam dialogar com os preceitos da probabilidade

subjetiva. A atividade contou com a mediação do pesquisador e a formação de duplas para respondê-la.

Figura 13 – Proposição de simulação do Jogo das Portas

Vamos brincar?

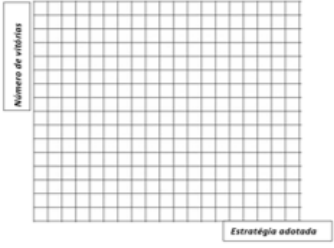
Aproveitando o que você conheceu a partir do Problema 4 do questionário da primeira fase, vamos simular a brincadeira do jogo das portas. O que vamos precisar? Temos que anotar as decisões que vocês estão tomando: Trocar de porta ou não, ao responder o questionamento do entrevistador. Logo após, você deve escrever se ganhou ou não. A tabela abaixo vai te ajudar quanto a escrita dessa situação. Ah, importante que você lembre: vocês podem repetir a brincadeira quantas vezes vocês acharem que é necessário!

NÚMERO DA SIMULAÇÃO	Escolha inicial da porta (P_1, P_2, P_3)	Você trocou de porta?		Anoto aqui o seu resultado após tomar a decisão anterior: GANHEI ou NÃO GANHEI
		SIM	NÃO	
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				

Agora, responda às perguntas abaixo de acordo com o que ocorreu nas suas simulações.

a) Qual estratégia vocês mais utilizaram: trocar a porta ou não?

b) Construa aqui um gráfico de barras (um exemplo será mostrado nos slides) mostrando quantas vezes vocês ganharam ao utilizar a estratégia de Trocar de Porta e Não Trocar de Porta?



c) Logo após as simulações, responda: qual você acha que deve ser a estratégia que representa o menor risco: trocar a porta ao ser questionado (a) pelo apresentador ou não? Explique tua resposta, consagrando (a).

d) Por último, mas não menos importante: você acha que brincar dessa forma te ajudou a pensar em uma estratégia de vencer? O quão confiável você acha que essa situação é? Explique pra gente como você chegou nessa conclusão.

Fonte: O Autor

Inicialmente, deixamos o espaço para a simulação de 31 jogadas para o problema das portas, e sem seguida, de posse dos resultados, lançamos os seguintes questionamentos:

Item (a) “Qual estratégia vocês mais utilizaram: trocar a porta ou não?” Nesse item, intencionamos que os estudantes percebessem qual a estratégia mais utilizada pela dupla, no sentido de começar a perceber uma frequência de vezes que uma decisão foi tomada (trocar de porta ou não).

Item (b) “Construa aqui um gráfico de barras (um exemplo será mostrado nos slides) mostrando quantas vezes vocês ganharam ao utilizar a estratégia de *Trocar de Porta* e *Não Trocar de Porta*?” Aqui, nosso objetivo era que os estudantes pudessem visualizar seus dados de forma que ficasse em evidência qual estratégia resultou em mais vitórias em cada um dos experimentos das duplas.

Já o item (c) “Logo após as simulações, responda: qual você acha que deve ser a estratégia que representa o menor risco: trocar a porta ao ser questionado (a) pelo apresentador ou não? Explique tua resposta, consagrando (a).” indaga os

estudantes a reportarem suas respostas a partir do gráfico construído no item anterior, pois o mesmo identificará qual estratégia resultou em mais vitórias.

Com isso, fechamos essa atividade com o item (d) “Por último, mas não menos importante: você acha que brincar dessa forma te ajudou a pensar em uma estratégia de vencer? O quão confiável você acha que essa situação é? Explica pra gente como você chegou nessa conclusão.”, que visa explorar o gargalo epistêmico da probabilidade frequentista no que diz respeito à consideração do número de repetições ser verdadeiramente significativo para que a quantificação obtida seja confiável.

Para esse item, foi esperado que os estudantes respondessem ao problema utilizando a experiência pessoal (simulação do jogo), mas que também fosse além dos dados obtidos, pois é colocada em questão a consideração do número de vezes em que o jogo foi repetido entre as duplas. Para isso, utilizamos das experiências pessoais para montar um quadro com os dados de todas as realizações experimentais: ao todo, 155 simulações. E partir daí, a indagação sobre repetições serem importantes para quantificar o processo de geração da probabilidade, bem como a confiabilidade dos dados obtidos, deve ser colocada em prática, no intuito de identificar as concepções dos estudantes, e se elas sofreram algum impacto gerado pela simulação do jogo das portas.

No segundo encontro, que teve por objetivo propor um novo problema de probabilidade subjetiva para ser resolvido pelos estudantes, a atenção foi direcionada a resolver o seguinte problema:

Figura 14 – novo problema proposto

SITUAÇÃO												
Imagine que você se encontra em um cenário onde está em um <i>date</i>¹¹ com seu/sua crush dos sonhos, e nesse momento, você deve sugerir um filme para que vejam juntos.												
De acordo com a situação acima, responda aos questionamentos que se seguem. Considere o seguinte evento: "Recomendar o filme <i>UM AMOR PARA RECORDAR</i> para assistirem juntos".												
SINOPSE  7 de fevereiro de 2003 No cinema / 1h 52min / Romance, Drama Direção: Adam Shankman Roteiro: Nicholas Sparks Elenco: Mandy Moore, Shane West, Peter Coyote Título original: A Walk to Remember Em plenos anos 90, Landon Carter (Shane West) é punido por ter feito uma brincadeira de mal gosto em sua escola. Como punição ele é encarregado de participar de uma peça teatral, que está sendo montada na escola. É quando ele conhece Jamie Sullivan (Mandy Moore), uma jovem estudante de uma escola pobre. Com o tempo Landon acaba se apaixonando por Jamie que, por razões pessoais, faz de tudo para escapar de seu assédio. Disponível em: <<https://www.adorocinema.com/filmes/filme-40910/>>												
a) Qual a probabilidade de você recomendar o filme acima? <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>0%</td><td>10%</td><td>20%</td><td>30%</td><td>40%</td><td>50%</td><td>60%</td><td>70%</td><td>80%</td><td>90%</td><td>100%</td> </tr> </table>		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%		
b) Explique os motivos pelos quais você tomou a decisão acima ao atribuir a probabilidade.												
c) Imagine agora: você abre o instagram do seu/sua crush e vê que ele é fã de Heavy Metal (Rock de quem "come morcego" kkkk). Agora, sabendo disso, qual a probabilidade de você não recomendar o filme acima? <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>0%</td><td>10%</td><td>20%</td><td>30%</td><td>40%</td><td>50%</td><td>60%</td><td>70%</td><td>80%</td><td>90%</td><td>100%</td> </tr> </table>		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%		
d) Você acredita que sua experiência sobre algo influencia a tomada de decisão no cotidiano?												
e) Considere o CENÁRIO #2: Em uma excursão de colégio, sabe-se que 70% dos estudantes adoram baladas de funk. Entre o grupo que adora esse tipo de balada, sabemos que 20% gostam de música clássica. Já entre os estudantes que não gostam de baladas de funk, 40% curtem músicas clássicas. e.1) Qual a probabilidade de, ao escolher uma pessoa aleatoriamente dessa excursão, a mesma gostar de música clássica? e.2) Imagine que você encontrou uma pessoa e a mesma gosta de funk. Qual a probabilidade de você colocar uma música clássico num possível <i>date</i> entre vocês? <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>0%</td><td>10%</td><td>20%</td><td>30%</td><td>40%</td><td>50%</td><td>60%</td><td>70%</td><td>80%</td><td>90%</td><td>100%</td> </tr> </table> e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade? e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta #2.		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%		

Fonte: o autor

No que se refere a elaboração do problema da figura 11, levou-se em consideração um contexto (romance) ao qual os estudantes realmente tivessem pertencimento e pudessem avaliar e declarar probabilidades a partir de suas experiências. Inicialmente o problema propõe um encontro entre o (a) estudante e um possível *crush*, para a partir disso, eles avaliarem as probabilidades por meio das perguntas a seguir.

O item (a) "Qual a probabilidade de você recomendar o filme acima?" traz uma escala de 0% a 100%, sendo ligada diretamente à experiência e crença pessoal do participante. Com isso, a intencionalidade de que a atribuição de probabilidade parta de uma análise prévia da experiência dos estudantes já entra em curso.

Já o item (b) "Explique os motivos pelos quais você tomou a decisão acima ao atribuir a probabilidade" apresenta um pedido de descrição dos elementos que fizeram o estudante tomar a decisão imediatamente anterior. Para esse item, esperava-se que a explicação para a atribuição de uma declaração probabilística partisse da experiência pessoal do participante.

Já o item (c) "Imagine agora: você abre o instagram do seu/sua crush e vê que ele é fã de Heavy Metal. Agora, sabendo disso, qual a probabilidade de você não recomendar o filme acima?" adiciona uma nova informação para o estudante, que se

refere ao perfil do instagram de quem está com ele (a) no encontro. Espera-se com isso que a nova avaliação passe por uma diminuição da probabilidade de recomendar o filme mencionado, visto que de um modo geral, heavy metal e romance não tenham muitas interseções. Também é válido mencionar que o aspecto da coerência ao atribuir uma nova probabilidade – requisito básico para a probabilidade subjetiva – também pode ser avaliado por essa questão.

Por fim, antes de enunciar uma nova situação, é perguntado ao estudante, no item (d) “Você acredita que sua experiência sobre algo influencia a tomada de decisão no cotidiano?”, se o mesmo já pensava em como a probabilidade auxilia na tomada de decisões.

Por último, o item (e) anuncia uma situação mais próxima do que se encontra nos livros didáticos utilizados pela turma.

Figura 15 – detalhamento do item (e)

e) Considere o CENÁRIO #2:

Em uma excursão de colégio, sabe-se que 70% dos estudantes adoram baladas de funk. Entre o grupo que adora esse tipo de balada, sabemos que 20% gostam de música clássica. Já entre os estudantes que não gostam de baladas de funk, 40% curtem músicas clássicas.

e.1) Qual a probabilidade de, ao escolher uma pessoa aleatoriamente dessa excursão, a mesma gostar de música clássica?

e.2) Imagine que você encontrou uma pessoa e a mesma gosta de funk. Qual a probabilidade de você colocar uma música clássico num possível *date* entre vocês?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade?

e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta e.2.

Fonte: o autor

Nessa etapa, já houve a inserção de cálculos probabilísticos envolvendo condicionais no item e.1, em que uma informação a priori é fornecida “a pessoa gosta de música clássica”. Com isso, o item e.2 entra com uma informação que deve ser levada em conta antes de atribuir uma probabilidade, pois “a pessoa gosta de funk”. Escolher uma música clássica nessa situação, envolveria saber mensurar a probabilidade condicional $P(\text{gostar de música clássica} | \text{ela gosta de funk})$ para que a decisão se torne mais lógica ao saber que essa é uma probabilidade muito baixa.

Os itens e.3 e e.4 se referem às condições pessoais de cada participante, levando-o (a) a pensar em como a probabilidade está presente nas suas decisões, e explicar de que forma ela o influenciou na resposta para e.2.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nessa seção iremos discutir os resultados dos estudos 1 (análise do livro didático) e 2 (diagnose).

6.1 ESTUDO 1: ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DA TURMA

Nesse estudo, objetivamos mapear quais são os significados dominantes nas questões de probabilidade do livro Objeto 2 do PNLD (livros de conhecimento específico), e no que se refere a probabilidade subjetiva, iremos elencar quais os indicadores mais presentes nos problemas e refletir em como isso pode afetar os conhecimentos demonstrados pelos estudantes na etapa da diagnose.

No entanto, destacamos que existe um rompimento no modelo de escolha e utilização desses livros. Os participantes selecionados para este estudo utilizaram no 1º e 2º anos livros do Edital PNLD 2018, que em sua estrutura contemplava um livro de Matemática para cada ano escolar. Com isso, achamos necessário fazer também a análise dos livros com os quais esses estudantes trabalharam no 1º e 2º ano, para entender a trajetória dos mesmos em seu contato com a probabilidade. Também recordamos que o levantamento realizado aqui foi de importância ímpar na elaboração dos indicadores de probabilidade subjetiva já mencionados anteriormente.

Trabalhamos com 10 estudantes de uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Pernambuco, na qual buscamos saber quais livros do PNLD 2021 – 2024 foram adotados pela instituição. Assim, resultamos na obra de Leonardo F.M., da Editora Moderna, código de coleção PNLD 0193P21202.

A obra, como já mencionado anteriormente, se refere ao Objeto 2 da escolha dos livros didáticos do novo edital PNLD 2021 – 2024, que aborda o conteúdo técnico de Matemática, bem como algumas de suas aplicações. No que se refere a coleção adotada pela escola, estão separados em seis volumes, detalhados no quadro abaixo.

Quadro 14 – Estrutura da Coleção Moderna

Coleção Moderna – Código PNLD 0193P21202	
Item	Tema
Volume 1	Grandezas, álgebra e algoritmos
Volume 2	Funções e aplicações
Volume 3	Estatística e Probabilidade
Volume 4	Trigonometria

Volume 5	Geometria Plana e Espacial
Volume 6	Matrizes e Geometria Analítica

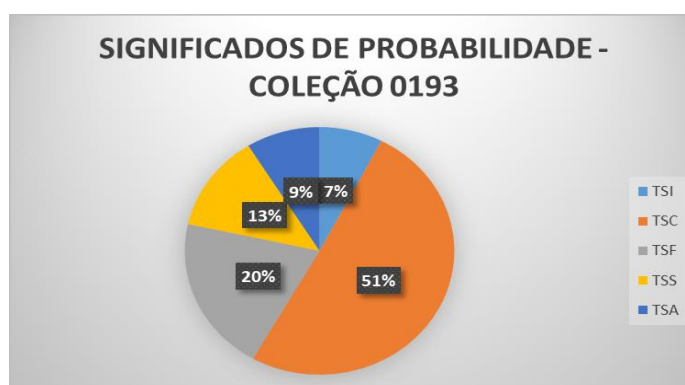
Fonte: O Autor

Para esta pesquisa, nos atentamos a fazer a análise integral dos problemas contidos no Volume 3 – Estatística e Probabilidade, elencando-os e discutindo suas repercussões. Entretanto, não foi apenas com essa coleção que os estudantes desse estudo tiveram contato durante sua trajetória no Ensino Médio. A escola em questão adotou, no edital PNLD 2018, a coleção Contato – Matemática, da Editora FTD, código de coleção 0155P18023. Esses volumes contemplam a estrutura usual, utilizada antes do Novo Ensino Médio. Assim, analisamos os volumes 1 e 2, que corresponde ao conteúdo de probabilidade vivenciado no Ensino Médio por essa coleção.

6.1.1 SOBRE OS SIGNIFICADOS DE PROBABILIDADE

No que tange os significados de probabilidade, as duas obras possuem diferenças no quantitativo de problemas específicos de probabilidade. Nota-se concordância com estudos como os Batanero (2006), que indicam predominância do significado Clássico (ou Laplaciano), conduzindo os estudantes a uma interpretação da probabilidade como uma razão.

Figura 16 – Resultados do livro da coleção da Moderna – PNLD 2021



Fonte: O Autor

O livro da Moderna conta com 79 problemas de probabilidade, dos quais 6 (7,6%) são do significado intuitivo, 40 (50,63%) do clássico, 16 (20,25%) do frequentista, 10 (12,66%) do subjetivo e 7 (8,86%) do axiomático. Destacamos que apenas 12,6% dos problemas nesse volume se referem à probabilidade subjetiva, e ainda assim não contemplam todas as características que um problema de abordagem subjetiva pode envolver.

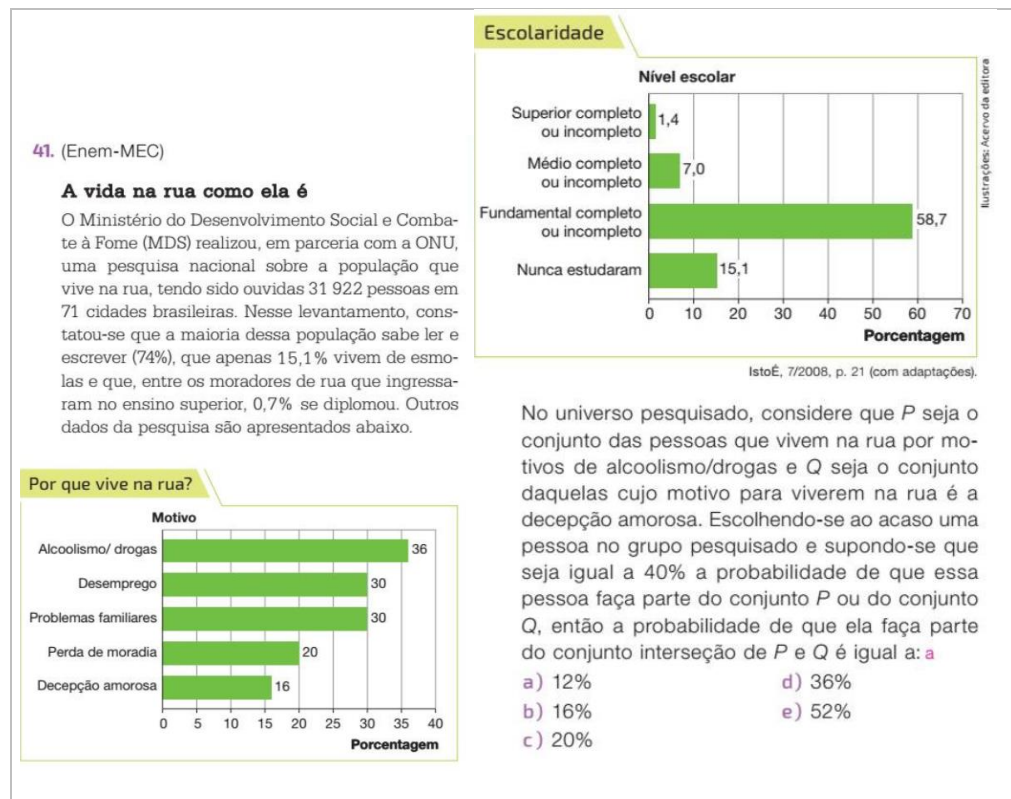
Nota-se a presença massiva do significado clássico, envolvendo situações de análise combinatória ou sucessão de retiradas de bolas em urnas, mantendo a ideia de equiprobabilidade. Com a maioria das questões podendo ser interpretadas por meio da razão entre o número de casos favoráveis e o total de casos, pouco é trabalhada a transição do significado clássico ao frequentista, o que entendemos que se configura como uma falha, deixando de vivenciar com os estudantes os problemas epistemológicos que levam a aparição da abordagem por meio do frequentismo.

Em segundo lugar aparece o significado frequentista, com problemas que envolvem a repetição dos experimentos e posterior quantificação por meio da contagem de frequências. No entanto, convém destacar como os problemas não tocam em questões sensíveis desse significado, não levando os estudantes a racionar, por exemplo, quantas simulações são necessárias para uma declaração de probabilidade segura, nem o que seriam as condições ideais de repetição para os experimentos.

Consideramos esses questionamentos essenciais para entender o porquê da gênese desses problemas de abordagem subjetiva de probabilidades, confronto dos significados intuitivo e subjetivo, ao apontar a possibilidade de quantificação no segundo caso. Intrinsecamente a esse processo, entendemos que a entrada do significado subjetivo fica evidente, ao ser necessário analisar eventos que podem não ser passíveis de repetição mantendo a igualdade de condições.

Se nos atentarmos aos livros do 1º e 2º ano utilizados na escola, a situação é ainda mais rasa no tocante à distribuição de problemas entre os significados de probabilidade. O livro do 1º ano se restringe basicamente a trabalhar conjuntos e funções. Há a aparição de apenas cinco problemas de probabilidade, os quais podem ser resolvidos utilizando probabilidade clássica, juntamente com a Teoria dos Conjuntos, como reporta a figura 17.

Figura 17 – Exemplo de problema do livro do 1º ano



Fonte: Acervo do autor

Como mencionado anteriormente, o problema se restringe a aplicação da Teoria dos Conjuntos para resolver um problema de probabilidade. Dado que a BNCC elenca a probabilidade frequentista desde o Ensino Fundamental, esse reforço poderia aparecer no 1º Ano do Ensino Médio. Como analisado no currículo, a concentração de conteúdos relativos à probabilidade está centrada no 2º e 3º ano.

No que se refere ao livro do 2º ano, a quantidade de problemas aumenta substancialmente, já que existe um capítulo dedicado exclusivamente aos conteúdos de Probabilidade, como exposto na figura 17. Na figura 18, fica explícito como o problema praticamente se repete no livro do 2º ano, com a concentração de problemas verificada no Significado Clássico (TSC). Com isso, se espera que o viés de equiprobabilidade, a utilização de técnicas de contagem da combinatória e o entendimento de espaços amostrais quase sempre equiprováveis, se tornem o mote principal da compreensão do conceito de probabilidade dos estudantes.

Figura 18 – Distribuição dos problemas de Probabilidade no livro da FTD: 2º Ano



Fonte: O autor

Nesse volume, são 55 os problemas de probabilidade, distribuídos em 47 (85%) Tarefas de Significado Clássico (TSC), 3 (6%) Tarefas de Significado Axiomático (TSA) e 5 (9%) Tarefas de Significado Frequentista. Destacamos a ausência completa dos significados subjetivo e intuitivo, mesmo que eles já estivessem presentes nas recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Os problemas encontrados referentes ao significado clássico se resumiram em situações de retiradas sucessivas, quase sempre fazendo referências aos jogos de azar e ao desenho do espaço amostral de um experimento. O viés de equiprobabilidade foi trabalhado de maneira mais completa, com a presença de variações entre os problemas. Em sua maioria relativas à interpretação de jogos, onde as situações comumente apresentaram características como no exemplo da figura 19.

Figura 19 – Tipologia de problema mais usual no livro do 2º ano – FTD

4. Em geral, os baralhos atuais possuem 52 cartas, divididas igualmente em 4 naipes: copas, espadas, ouros e paus. Esses naipes se originaram da fusão entre os baralhos espanhóis e franceses, sendo que os nomes vieram dos espanhóis, e os símbolos que os representam, dos franceses.

Utilizando as iniciais de cada naipe, escreva os eventos considerando a retirada aleatória de duas cartas de um baralho completo.

Respostas no final do livro.
As quatro damas de um baralho.
Da esquerda para a direita:
copas, paus, ouros e espadas.



a) A: as duas cartas serem do mesmo naipe
b) B: pelo menos uma carta ser de ouros
c) C: nenhuma carta ter naipe de copas

Fonte: Acervo do Autor

Já no que tange o significado frequentista, as questões abordam a repetição de experimentos, no entanto, não discutem problemas básicos do significado que

historicamente se constituíram de ferramentas importantes na evolução do estudo da probabilidade. No exemplo da figura 20, percebemos como os problemas se desconectam da realidade e não exploram esses pormenores.

Figura 20 – Tipologia de problema frequentista – Livro FTD 2º Ano

51. Em certo experimento realizado com um dado de seis faces, foram feitos 900 lançamentos, obtendo os seguintes resultados:

Face	Quantidade de lançamentos
1	113
2	225
3	105
4	120
5	202
6	135

Pode-se suspeitar da honestidade desse dado? Justifique.

Fonte: Acervo do autor

Este problema, em específico, traz uma situação para verificar a honestidade de um dado a partir da repetição de lançamentos. Cabe uma menção à Lei dos Grandes Números (LGN), pois se o dado for honesto, a probabilidade experimental tende a se aproximar da teórica. No entanto, o livro não trouxe essa discussão à baila, e novamente, apontamos aqui um problema quanto a viabilidade das repetições e se o número das mesmas é grande o suficiente para que o estudante possa tirar conclusões a respeito.

Por fim, o livro ainda apresenta cinco problemas que visam expor os axiomas e proposições da probabilidade. Dada essa característica, classificamos os problemas como Tarefas de Significado Axiomático (TSA), que trabalham a visão de construção da probabilidade. Na Figura 21, um problema de composição do evento complementar é discutido.

Figura 21 – Exemplo de TSA do livro do 2º ano da FTD

10.7 Ao realizar uma prova objetiva em que cada questão possuía 5 alternativas de respostas, sendo apenas uma correta, um aluno decidiu assinalar aleatoriamente a resposta da última questão por falta de tempo. Qual é a probabilidade de esse aluno acertar a questão? E de errar?

Fonte: Acervo do autor

No problema apresentado, claramente tratamos de um evento A : probabilidade de o aluno acertar a questão, e do evento A^c : probabilidade de o aluno não acertar a questão. Apesar do problema em si não deixar claro que está explorando uma proposição na construção da Teoria das Probabilidades, o classificamos como axiomático pela possibilidade de formalização da proposição $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Com os resultados desse estudo em mãos, nos livros do PNLD 2018, nos aproximamos de resultados presentes em outros estudos de análise de livros didáticos, como o de Carvalho, Silva e Paraíba (2016), que apontam defasagem nas abordagens dos problemas nos livros didáticos no tocante aos significados de probabilidade.

Notamos uma evolução na distribuição dos problemas de probabilidade presentes no livro do PNLD 2021. Ainda assim, encontramos assimetrias entre os significados, evidenciando a presença ainda majoritária do significado clássico. Trazendo a análise feita nesta pesquisa, entendemos que os significados clássico e frequentista ainda se constituem de abordagens mais comuns e presentes no currículo da Educação Básica.

Entretanto, ressaltamos as lacunas históricas que esses significados apresentam e como isso pode afetar as declarações probabilísticas dos estudantes, bem como seus entendimentos a respeito das mesmas. Diante do exposto nos resultados acima, levantamos algumas hipóteses em relação ao que esperamos dos estudantes que trabalham sistematicamente com o conteúdo dos livros analisados:

- 1) Os estudantes terão uma visão mais fechada sobre probabilidade, entendendo a mesma como uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de elementos do espaço amostral na maioria das situações;
- 2) Problemas como a falácia temporal na probabilidade condicional poderão ser notados, dado o baixo e disperso quantitativo de questões sobre o tema;
- 3) Os estudantes estarão inclinados a quantificar as probabilidades através de repetições dos experimentos, dada a quantidade significativa de problemas sobre probabilidade frequentista. Ainda assim, esbarrando em diferentes problemas de ordem semântica e epistemológica do significado frequentista, tais como: os problemas estão corretamente enunciados? O número de

repetições do experimento aleatório é grande o suficiente para não gerar uma indução ao erro?

6.1.2 SOBRE OS INDICADORES DE PROBABILIDADE SUBJETIVA

Para esta parte da análise iremos utilizar dos indicadores de probabilidade subjetiva criados e/ou adaptados nesse estudo, com o objetivo de elencar em quantos problemas cada um dos indicadores estão presentes. A depender dos resultados, esperamos que os estudantes tenham mais ou menos familiaridade com as questões de probabilidade subjetiva.

Na tabela a seguir, apresentamos o panorama quantitativo da distribuição de indicadores em cada questão elencada nas duas obras.

Tabela 1 – Distribuição dos indicadores de probabilidade por coleção

Mapa da distribuição dos indicadores de probabilidade em cada obra analisada							
Obra	I 1	I 2	I 3	I 4	I 5	I 6	I 7
Interação (Editora do Brasil)	16	15	1	7	7	4	5
Conexões (Editora Moderna)	7	6	3	0	1	4	5
Totais de questões	23	21	4	7	8	8	10

Fonte: O autor

Em ambas as obras identificamos que os indicadores 1 e 2 são os mais presentes, mostrando que as questões de vocabulário probabilístico e a ideia geral de probabilidade subjetiva estão bastante presentes. Já no que tange os significados 4 e 5, notamos tanto uma baixa concentração de questões que exploram situações nas quais o estudante deve tomar uma decisão e refletir sobre riscos probabilísticos envolvidos, quanto da pouca variabilidade na forma com que os dados são apresentados.

Nesse sentido, há um desacordo com o que prescreve a BNCC e o Currículo de Pernambuco, ao citar a análise de problemas em que haja riscos probabilísticos e tomadas de decisão, bem como a representação dos problemas em diagramas de árvore, de Euler – Venn, entre outras.

Por outro lado, notamos baixa concentração de questões com o indicador 6, mostrando que há espaço para criatividade na busca por soluções dos problemas que

estudantes que participaram da atividade. O número reduzido de participantes se dá em torno do tempo disponível para realização da pesquisa, dado que se trata de um âmbito de mestrado. Já no dia 19/10, foi realizado o encontro para discussão das respostas aos questionários. Para efeitos de análise, codificamos cada estudante como A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09 e A10; o mediador como M, e os momentos de fala coletiva dos alunos com A's.

Assim, na primeira etapa da pesquisa realizada com os 10 estudantes, não houve qualquer intervenção do pesquisador na resolução das questões. Convém ainda destacar os critérios de análise utilizados nessa etapa, que são norteados pelos indicadores de probabilidade construídos na pesquisa, bem como elementos que levam em consideração o Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005).

Questão 1

Figura 23 – problema 1

Em uma caixa há quatro smartphones, sendo que desses, dois encontram-se defeituosos. Mário e Rita devem escolher um telefone para si, mas não podem repetir a retirada da caixa, ou seja, se pegar um telefone com defeito, ficará com ele mesmo assim. Mário retirou primeiro que Rita, e seu telefone veio com defeito. Agora é a vez de Rita, e com isso podemos concluir que:

- a) É mais provável que o telefone de Rita seja defeituoso
- b) É mais provável que o telefone de Rita não seja defeituoso
- c) A probabilidade do telefone de Rita ser defeituoso é a mesma de estar funcionando corretamente.

Fonte: o autor

Para a primeira questão do diagnóstico, levamos em consideração os seguintes critérios de análise:

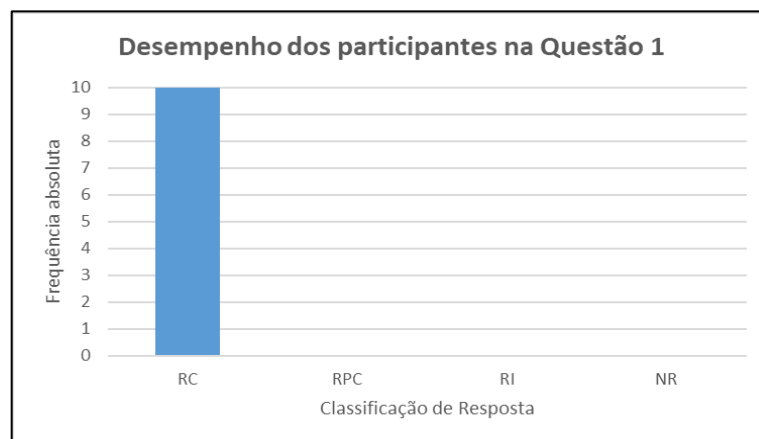
Quadro 15 – Critérios de análise da questão 1

Resposta Adequada (RA)	O estudante respondeu corretamente marcando o item (b) e apresentou raciocínio coerente, mencionando a redução do espaço amostral/eventos favoráveis.
Resposta Parcialmente Adequada (RPA)	O estudante respondeu corretamente ao item (b), no entanto apresentou raciocínio que não corresponde à diminuição do espaço amostral para mensurar a nova probabilidade.
Resposta Inadequada (RI)	O estudante não respondeu corretamente (item b) e não apresentou raciocínio coerente com a redução do espaço amostral.
Não Respondeu (NR)	Resposta em branco nas justificativas.

Fonte: O autor

Ao analisar as repostas, identificamos uma taxa de acerto de 100% entre os participantes, com raciocínios muito semelhantes, apresentando a justificativa pautada na redução do número de eventos favoráveis e no espaço amostral. Isso nos faz inferir que os estudantes perceberam a relação de dependência entre os dois eventos da questão, bem como a compreensão do envolvimento de retiradas sucessivas sem reposição. O gráfico abaixo elenca o desempenho dos participantes na questão número 1.

Figura 24 – Desempenho dos estudantes na questão 1



Fonte: O autor

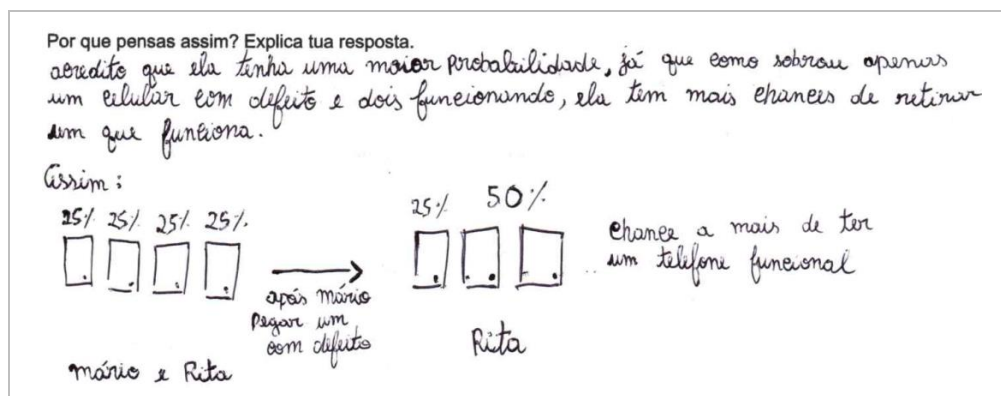
Dentre as justificativas elaboradas pelos participantes, destacamos as de A01, A03 e A04.

Figura 25 – justificativas da questão 1

Letra B/E mais provável ela tirar um que não tenha defeito, porque vai ter mais opções, mais chances de pegar um smartphone sem defeito

ESPAÇO PARA SOLUÇÃO DA QUESTÃO
 Por que pensas assim? Explica tua resposta.

Se tem quatro, dois com defeito, nário tirou o com defeito, de 100% de chance de Rita tirar o com defeito e de 33,5%, enquanto nário tinha 50%



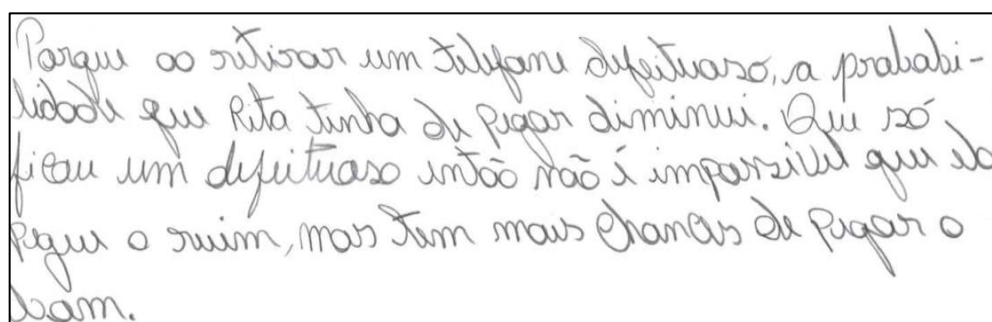
Fonte: Questionário Inicial

No que se refere aos raciocínios utilizados, todos eles explicaram que a resposta correta é o item (b), pois o número de smartphones com defeito diminuiu antes de Rita fazer o sorteio do seu. A compreensão da não reposição do smartphone com defeito por parte de Mário desencadeia a diminuição da probabilidade de Rita sortear um smartphone com defeito também.

A resposta do A03 e A04 fizeram referência ao cálculo de probabilidade, mesmo que de maneiras distintas, com o participante A03 fazendo uma aproximação de 33,33% para 33,5% de probabilidade de escolha de um smartphone com defeito por parte de Rita. Percebe-se com isso que o Indicador 1 (Foco em situações onde a probabilidade muda com base na informação que se dispõe inicialmente.) foi compreendido pelos participantes quando o mesmo esteve associado a um problema com formatação comum em relação aos livros didáticos, em situação de retirada sucessiva.

Nesse sentido, ainda surgiram respostas que fizeram referência ao vocabulário probabilístico, desassociando a expressão “impossível” a um evento com probabilidade nula de acontecer, do evento “Marta retirar um telefone defeituoso”.

Figura 26 – Resposta do participante A05



Fonte: Questionário Inicial

Além da propriedade no que se refere ao vocabulário probabilístico, o participante também apresenta uma compreensão dos eventos complementares, ao

M: - *E aí, como vocês pensaram para responder essa primeira questão?*

A's: - *Letra B.*

M: - *E por que essa resposta?*

A03: - *Só sobrou um telefone com defeito na caixinha, né? Aí diminui a chance dela pegar um com defeito também. Tinha dois, agora sobrou 1.*

A10: - *Ah, eu usei o mesmo raciocínio, do mesmo jeito dele né, só que com diferentes palavras. Tipo, tinha 2 com defeito, e o carinha tirou o primeiro, agora só tem 3, 1 com defeito e dois bom. Claro, tem mais chance dela tirar um bom. E eu não filei, tá?!*

A's: *Isso aí mesmo.*

(todos concordam e balançam a cabeça em movimento de afirmação, palmas ao final)

associar as probabilidades entre os dois. As discussões acerca das respostas foram ao encontro das justificativas apresentadas de forma escrita.

Por fim, a primeira questão mostrou que os estudantes conseguem entender os pormenores relativos às retiradas sucessivas, compreendendo o impacto de uma retirada sem reposição causado nas próximas ações. Ao mesmo tempo, eles mostraram conhecimento relativo às propriedades de eventos complementares, bem como a respeito da associação de probabilidade a termos probabilísticos. E, no que se refere ao indicador 1 de probabilidade subjetiva (indicador presente na questão), os mesmos apresentaram, em uma taxa de 100% de acerto, a compreensão do efeito de uma informação inicial ao atribuir a probabilidade de um evento.

Questão 2

Figura 27 – problema 2

Você sabe interpretar testes para Covid – 19?

Primeiramente, precisamos entender dois conceitos básicos: a sensibilidade e a especificidade.

A *sensibilidade* é definida como a capacidade que um teste tem em identificar uma pessoa verdadeiramente doente, dentre pessoas que apresentam apenas a suspeita da doença. A *especificidade*, por sua vez, é definida como a capacidade do teste apresentar um resultado negativo em indivíduos que não possuem a doença. Um fabricante disponibiliza em seu site web a seguinte informação:

COVID-19 Ag ECO Teste

Ensaio imunocromatográfico para detecção qualitativa de antígenos (proteína N) do SARS-CoV-2 (COVID-19)

- Sensibilidade: 96,52%
- Especificidade: >99,9%
- Armazenamento: 2 a 30°C
- Amostra: swab nasal/swab de nasofaringe
- Tempo do Teste: 2-15 minutos (não ler após 30 minutos)
- Validade: 24 meses
- Kit: acompanha swab para coleta

Apresentação: Cassete

Registro MS: 80954880133



BAIXAR O FLYER

Disponível em: <<<https://ecodiagnostica.com.br/diagnostico-rapido/covid-19-ag-eco-teste/>>>.

Após uma leitura atenta, responda às seguintes perguntas:

- Como você interpretaria as porcentagens de sensibilidade e especificidade mencionadas no banner do teste?
- Você considera confiável os resultados fornecidos por esse teste?
- Imagine que um profissional de saúde, ao fazer o referido teste, demora aproximadamente 1 hora para verificá-lo. Como você avalia as condições da sensibilidade e especificidade do teste nessa situação?
- No que se refere aos números da sensibilidade do teste apresentados pelo laboratório, você classificaria como impossível que esse teste apresente resultado negativo mesmo para uma pessoa infectada pela doença?

Fonte: o autor

Para a segunda questão, o método de análise se baseia nos itens (a) e (d), pois os mesmos se referem às questões probabilísticas e interpretação das declarações presentes no banner do teste. Já os itens (b) e (c) englobam as justificativas pessoais no tocante às interpretações apresentadas. No entanto, apesar de não classificar as repostas, existe uma expectativa para a forma com que as justificativas serão expostas, baseando os argumentos nos dados apresentados pela fabricante do teste. Na sequência, detalhamos os critérios de análise para os itens da questão dois.

Quadro 16 – critérios de análise da questão 2

Item	Descrição
	RA: interpretação dos níveis de sensibilidade e especificidade em comunhão com os dados do banner.

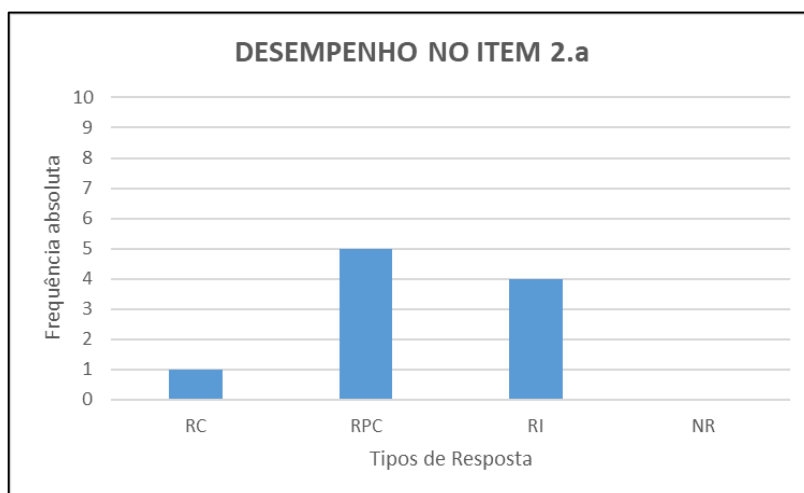
A	• RPA: interpretação dos níveis de sensibilidade e especificidade parcialmente baseada nos dados do banner. • RI: Resposta baseada unicamente no aspecto pessoal. • NR: Não respondeu
B	Resposta pessoal. No entanto, espera-se que a afirmação de confiabilidade do teste seja alta, dados os níveis de sensibilidade (96,52%) e especificidade (>99,9%).
C	Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem mudanças no nível de especificidade e sensibilidade, usando a justificativa da demora no recolhimento de material (adição da informação nova para mensurar probabilidade a posteriori).
D	• RA: Identificação da não impossibilidade do evento considerando o nível de sensibilidade do teste, assim, permitindo margem para o evento complementar. • RPA: Identificação da não impossibilidade do evento, mas sem considerar as informações do banner. • RI: Afirmação de que o evento é impossível. • NR: Não respondeu.

Fonte: o autor

Analizamos os itens (a) e (b) de forma conjunta, pois apresentam situações complementares: identificação do que significam os níveis de especificidade e sensibilidade, e depois a confiabilidade do teste, de forma que esperamos que as argumentações tenham como base as informações presentes no banner.

O item (a) apresentou nível de elevada dificuldade para os estudantes, pois a maioria não conseguiu desenvolver adequadamente o raciocínio para justificar as declarações probabilísticas utilizando os dados do teste. Considerando as análises dos livros didáticos do 1º e 2º anos do Ensino Médio, nos quais as questões ligadas à compreensão do significado de uma declaração probabilística são apresentadas de maneira superficial, justifica-se uma possível dificuldade com questões desse tipo. Abaixo, a figura 28 apresenta os desempenhos obtidos pelos participantes no respectivo item.

Figura 28 – Desempenho no item 2.a



Fonte: o autor

Ressaltamos que apenas o estudante A03 desenvolveu o raciocínio adequado utilizando os dados em questão, apresentando inclusive a ideia de complementariedade entre as probabilidades de especificidade e sensibilidade. Existe aqui uma convergência com os resultados do estudo de Moreira (2015), quando afirma que os estudantes de Ensino Médio são capazes de entender conceitos probabilísticos relacionados à probabilidade subjetiva.

Figura 29 – Resposta do estudante A03 ao item 2.a

a) Como você interpretaria as porcentagens de sensibilidade e especificidade mencionadas no banner do teste? *A sensibilidade: tem uma grande porcentagem que o teste é confiável. Especificidade: além de ter quase 100% de chance de acertar, ainda é menor do que a sensibilidade.*

“A sensibilidade tem uma grande porcentagem que o teste é confiável. A especificidade além de ter quase 100% de chance de acertar, ainda é menor do que a sensibilidade.”

Fonte: o autor

Ao ser questionado a respeito da resposta acima, o estudante A03 argumentou da seguinte forma:

A03: - Tipo assim, eu respondi que a especificidade tem quase certeza. Digo, o resultado sair certo (positivo) pra quem tá doente é muito grande, mais de 99% né? Aí não tem como dizer que não é confiável.

Como mencionado anteriormente, o estudante apresenta argumentação de sua resposta de acordo com as informações contidas no banner do teste, mostrando assim que sua declaração sobre a probabilidade teve base nos dados.

Já as respostas parcialmente adequadas (cinco no total) se basearam em repetir os dados da questão, mas não ofereceram argumentação e/ou conclusão a respeito da confiabilidade do teste, como foi o caso do A08, que argumentou dizendo que a confiabilidade depende do fato de um médico estar manipulando o teste.

Figura 30 – Respostas do A08

a) Como você interpretaria as porcentagens de sensibilidade e especificidade mencionadas no banner do teste? *Sensibilidade = 96,52% mas ainda tem como dar errado*
Especificidade = Praticamente 100%
Bem mais seguro seguir

b) Você considera confiável os resultados fornecidos por esse teste? *Poderia dizer que é confiável de estudos na mão de um médico*

Fonte: o autor

Nesses casos percebemos que houve um forte papel das crenças dos participantes por sobre os dados apresentados no banner do teste. Na maioria dos casos houve confusão quanto à interpretação do texto da questão, ao definir especificidade e sensibilidade, e isso pode ser um fator complicador para declarar a resposta no item (b). No entanto, convém trazer à baila a falta de problemas nos livros didáticos que explorem esses contextos, podendo desestimular os estudantes a perceberem a probabilidade como ferramenta de tomada de decisão.

Ressaltamos que quatro estudantes responderam incorretamente aos questionamentos dos itens (a) e (b), pois não compreenderam os conceitos necessários para emitir uma declaração sobre a confiabilidade do teste. O tema central dos erros consistiu em não entender o contexto em que os dados estavam sendo declarados, como observamos nas respostas dos participantes A04 e A09.

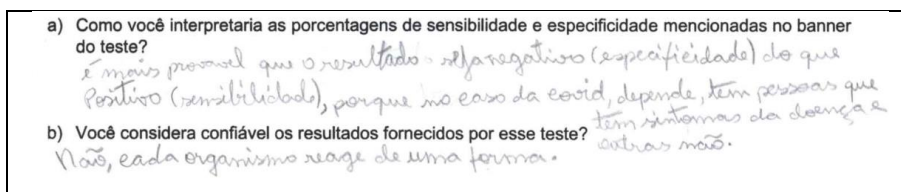
Figura 31 – Respostas dos participantes A04 e A09

A04

a) Como você interpretaria as porcentagens de sensibilidade e especificidade mencionadas no banner do teste? *96,5% de precisão quanto a sensibilidade de quem usa*
100% de chance de encontrar alguma falha no organismo

b) Você considera confiável os resultados fornecidos por esse teste? *De certa forma sim, é confiável, mesmo sabendo que é um ensaio, ainda assim possui argumentos e estudos científicos.*

A09



Fonte: o autor

Novamente percebemos como as crenças dos participantes influenciaram nas suas declarações de probabilidade, inclusive o senso comum ao afirmar que “cada organismo reage de uma forma”. Nos itens (a) e (b), estão presentes os indicadores 1 (Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial) e 3 (Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento).

Com relação aos indicadores de probabilidade subjetiva, encontramos nos resultados indícios que mostram baixa compreensão das declarações de probabilidade e formação de juízo pessoal a respeito de informações inseridas em um contexto corriqueiro. Novamente indicamos aqui os resultados das análises dos livros didáticos, onde, por sua vez, mostram que não há esse tipo de atividade em suas rotinas de exercícios.

Desse modo, concluímos em relação ao indicador 1, que os estudantes são capazes de compreender informações iniciais para em seguida omitir graus de crença pessoal. No entanto, evidências apontaram que eles desenvolvem esse pensamento quando o contexto apresenta similaridade com as atividades propostas no livro didático (questão 1), mas existem dificuldades quando essas informações são inseridas em contextos mais complexos (questão 2).

Já no item (c), uma nova informação hipotética foi fornecida: a demora no recolhimento do material, contrastando com a informação pertencente ao banner “Tempo do teste: 2-15 minutos”. Esperávamos nas respostas argumentações baseadas na informação do banner, invalidando assim os possíveis resultados do teste. Na tabela 2, detalhamos o desenvolvimento de respostas onde eles consideram confiáveis e não confiáveis os resultados emitidos pelo teste.

Tabela 2 – Respostas do item 2.c

Respostas do item c	
Confiável	4 respostas
Não confiável	6 respostas

Fonte: o autor

Todos os estudantes que declararam que os resultados não seriam confiáveis utilizaram as informações contidas no banner do teste, assim, cumprindo a expectativa que elencamos para o item. Vejamos as argumentações presentes para os participantes A01 e A02.

Figura 32 e 33 – Respostas A01 e A02

c) Imagine que um profissional de saúde, ao fazer o referido teste, demora aproximadamente 1 hora para verificá-lo. Como você avalia as condições da sensibilidade e especificidade do teste nessa situação?

O tempo determinado pelo site é de não ler após 30 minutos, se ele demorar 1 hora para verificá-lo a porcentagem da sensibilidade e especificidade vai haver uma variação.

c) Imagine que um profissional de saúde, ao fazer o referido teste, demora aproximadamente 1 hora para verificá-lo. Como você avalia as condições da sensibilidade e especificidade do teste nessa situação?

O resultado deve estar impreciso, pois nas instruções é dito para não ler/considerar após os 30 minutos.

Fonte: o autor

Os estudantes A01 e A02 que declararam que os resultados seriam confiáveis, mesmo com a adição da nova informação, utilizaram-se de aspectos unicamente pessoais para essas declarações. No estudo também encontramos evidências que apontam para a falta de interpretação das informações do banner, como nas respostas de A04 e A06.

Figuras 34 e 35 – respostas dos participantes A04 e A06

c) Imagine que um profissional de saúde, ao fazer o referido teste, demora aproximadamente 1 hora para verificá-lo. Como você avalia as condições da sensibilidade e especificidade do teste nessa situação?

facilitaria saber quais os pacientes que de fato tinham sido infectados pela Covid-19

c) Imagine que um profissional de saúde, ao fazer o referido teste, demora aproximadamente 1 hora para verificá-lo. Como você avalia as condições da sensibilidade e especificidade do teste nessa situação?

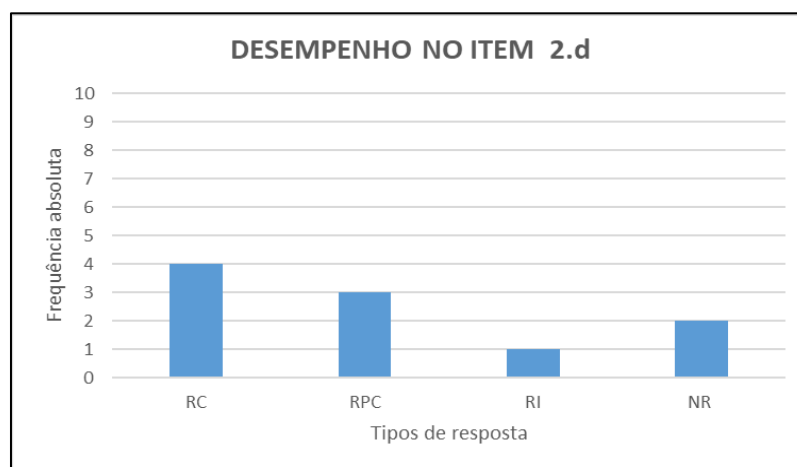
Tem alguns testes que demoram minutos e são seguros, então se esse for confiável as condições podem ser boas e ser eficazes.

Fonte: dados da pesquisa

Diante do exposto, concluímos que a maioria dos estudantes conseguiu compreender o efeito de uma nova informação para a geração de uma probabilidade a posteriori, convergindo com o Indicador 3 de probabilidade subjetiva. Entendemos que cada indicador possa ter sua compreensão analisada separadamente de acordo com o nível dos estudantes, nesse caso Ensino Médio, e com o nível das questões; que paulatinamente irão compor contextos mais complexos em problemas futuros.

Finalizando a segunda questão, apresentamos o item (d), que se refere ao vocabulário probabilístico presente na questão (indicador 2: Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade), na qual jogamos com a probabilidade intuitiva em seu aspecto subjetivo, ao associar a palavra impossível com uma probabilidade muito baixa (3,48%). Havia expectativa de que os estudantes argumentassem que não era impossível e utilizassem as informações do banner relativas à especificidade. Na figura 36 apresentamos o desempenho dos mesmos.

Figura 36 – Desempenho no item 2.d



Fonte: dados da pesquisa

Os estudantes que responderam adequadamente fizeram as argumentações de acordo com os dados presentes no banner, assim, cumprindo a expectativa de gerar declarações de probabilidade baseadas nos dados, e não apenas nas suas crenças pessoais. Por outro lado, aqueles que responderam parcialmente adequada não utilizaram os dados do teste para justificar a sua resposta. Por fim, quem não respondeu corretamente, ou declarou que realmente seria impossível ou não compreendeu o conceito explorado no item (especificidade). Segue um exemplo de cada classificação.

Figuras 37, 38 e 39 – tipos de respostas RC, RPC, RI, respectivamente

d) No que se refere aos números da sensibilidade do teste apresentados pelo laboratório, você classificaria como impossível que esse teste apresente resultado negativo mesmo para uma pessoa infectada pela doença? <i>Não, tem 4,48% de chance de dar erro.</i>
d) No que se refere aos números da sensibilidade do teste apresentados pelo laboratório, você classificaria como impossível que esse teste apresente resultado negativo mesmo para uma pessoa infectada pela doença? <i>Não impossível, mas pouco provável.</i>
d) No que se refere aos números da sensibilidade do teste apresentados pelo laboratório, você classificaria como impossível que esse teste apresente resultado negativo mesmo para uma pessoa infectada pela doença? <i>Sim, pois pode ocorrer que ele não demonstre está bem.</i>

Fonte: dados da pesquisa

Os dados apontam para desempenhos apenas regulares nos indicadores presentes na questão. Convém destacar o contexto em que os mesmos estão inseridos, pois o problema tratado foge das características mais típicas nas questões dos livros didáticos. Ainda assim, foi uma atividade trabalhada sem nenhum processo interventivo, o que nos dá indícios de que uma abordagem mais ampla do saber probabilidade poderia fechar as lacunas citadas.

Questão 3

Figura 40 – problema 3

Gene BRCA e o Câncer de Mama

BRCA é a abreviatura de Breast Cancer gene 1 ou 2. BRCA1 e BRCA2 são dois genes diferentes que afetam as chances de uma pessoa desenvolver câncer de mama e ovário.

Todas as pessoas possuem genes BRCA1 e BRCA2. Apesar do que os seus nomes possam sugerir, os genes BRCA não causam o câncer de mama. É importante mencionar que esses genes normalmente desempenham um papel na prevenção do câncer de mama. Eles ajudam a reparar quebras do DNA que podem levar ao câncer e ao crescimento descontrolado de tumores. Por essa razão, os genes BRCA são conhecidos como genes supressores do tumor.

No entanto, em algumas pessoas, esses genes supressores do tumor não funcionam corretamente. Quando um gene é alterado ou danificado, não realiza mais sua função de forma programada e podem, então, ocasionar o desenvolvimento do câncer. Isso é denominado mutação genética.

(Disponível em: << <http://www.oncoguia.org.br/conteudo/brca/13919/1227/>>>)

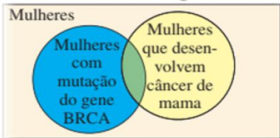
(Farber e Larsson, 2015, p.146, adaptado)

Uma pesquisa mostrou que aproximadamente 1 em 400 mulheres carregam uma mutação (gene alterado/modificado) do gene BRCA e que cerca de 6 em cada 10 mulheres com essa mutação desenvolvem câncer de mama. Encontre a probabilidade de uma mulher desenvolver câncer de mama dado que a mesma carrega uma mutação do gene BRCA.

(Fonte: National Cancer Institute.)

Explique como você chegou a sua resposta.

Câncer de mama e o gene BRCA



Fonte: o autor

A questão número três objetivou investigar a compreensão dos estudantes acerca de probabilidade condicional, que é uma das facetas apresentadas na probabilidade subjetiva. Na verdade, como mencionado no decorrer do texto, a probabilidade condicional e o Teorema de Bayes funcionam como mecanismos para atualização de uma opinião sobre um evento, o indivíduo sabe $P(A)$ de um experimento, aprende $P(B)$, e expressa a sua opinião atualizada a partir de $P(A|B)$. Abaixo, apresentamos os critérios de análise deste problema.

Quadro 17 – descrição das categorias da questão 3

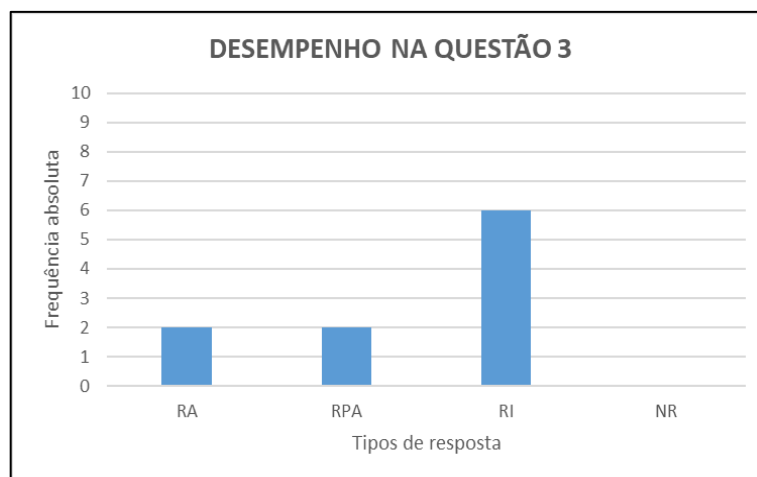
Critério	Detalhamento
RA	O estudante utilizou argumentação baseada nas informações da questão e utilizando cálculo probabilístico.
RPA	O estudante utilizou argumentação apenas utilizando os dados ou cálculos de probabilidade.
RI	A resposta apresentada não possui relação com os dados apresentados na questão.
NR	Não respondeu.

Fonte: o autor

Nesse problema, os desafios enfrentados pelos estudantes foram mais oriundos a partir da interpretação do texto da questão. O diagnóstico inicial por meio do questionário sugeriu desempenhos abaixo do esperado, dado que o conteúdo “Probabilidade Condicional” está presente no currículo de PE e na BNCC. No entanto, conforme apontaram os resultados da análise dos livros, as questões de probabilidade condicional apresentadas nos mesmos também não fazem referência a contextos reais, onde na maioria dos casos apresentam contextos fictícios e tabelas de dupla entrada, onde a resolução da questão por vezes se limita a um simples recorte do espaço amostral.

Assim, os dados sugerem que os estudantes não possuem rotinas de exercícios capazes de atender às demandas mais algorítmicas da probabilidade subjetiva. Convém destacar que, nesse caso, a informação já estava contida na questão. O trabalho seria apenas interpretá-la corretamente e comunicar a probabilidade conforme os dados expressos no desenvolver da questão. Na figura 41 apresentamos os respectivos desempenhos na questão 3.

Figura 41 – desempenho dos estudantes na questão 3



Fonte: dados da pesquisa

Apenas dois estudantes (20%) conseguiram responder adequadamente à questão 3. Os participantes A02 e A04, argumentaram utilizando o dado que fazia referência à própria probabilidade condicional perguntada na questão, e ainda assim, utilizaram o contexto inicialmente descrito para justificar suas declarações.

Figuras 42 e 43 – respostas de A02, A04, respectivamente

Uma pesquisa mostrou que aproximadamente 1 em 400 mulheres carregam uma mutação (gene alterado/modificado) do gene BRCA e que cerca de 6 em cada 10 mulheres com essa mutação desenvolvem câncer de mama. Encontre a probabilidade de uma mulher desenvolver câncer de mama dado que a mesma carrega uma mutação do gene BRCA.

(Fonte: National Cancer Institute.)

Explique como você chegou a sua resposta.

chance, pois 60% das mulheres com a mutação desenvolvem o câncer.

R: a chance é de 60%, visto que 6 a cada 10 afetadas desenvolvem câncer de mama, por essa média acredito que seja possível

Fonte: dados da pesquisa

Destacamos das argumentações a identificação da probabilidade condicional já informada, bem como a compreensão de que mulheres sem a mutação genética do BRCA também podem desenvolver câncer de mama. E, aproveitando a esteira de discussão, no momento de socialização levantou-se o questionamento a respeito dos riscos probabilísticos relativos à mutação do gene BRCA. Para isso, apresentou-se aos participantes uma matéria de jornal que aborda a cirurgia de Angelina Jolie¹, que fez a remoção das mamas para prevenir o câncer, já que a mesma carrega a mutação do gene BRCA1.

Assim, o questionamento aos estudantes orbitou em torno da pergunta: *O que vocês fariam no lugar dela, caso tivessem a confirmação da mutação do gene BRCA?* Apresenta-se um trecho da discussão:

M: Vocês sabiam que a Angelina Jolie fez a retirada das mamas por possuir a mutação do gene BRCA? Leiam a matéria e a gente volta pra discutir.

(matéria é exibida na apresentação de slides)

M: E aí, vocês acham que essa decisão envolve um risco?

A01: Sim, certeza! Se ele não operasse ia ter câncer.

A04: Não tanto assim né, ela tinha chance de ter o câncer. Na notícia mesmo tá 87% de chance. Tem risco, pra mim ela escolheu certo, mas assim, eu não sei se faria.

A02: É porque podia chegar lá na frente e ela não desenvolver né?

A06: Mas aí, como é que vai saber né? Esse é o problema. Porque tinha a probabilidade.

A07: É tipo, consequência né?!

¹ Disponível em: <<<https://g1.globo.com/pop-arte/cinema/noticia/2013/05/com-receio-de-cancer-angelina-jolie-retira-os-seios.html>>>.

M: Pessoal, formalizando a questão pra gente poder discutir melhor, a resposta estava no próprio texto, 6 em cada 10 mulheres com a mutação desenvolvem câncer de mama.

A04: Sabia! Não disse a vocês? 60%.

M: O que vocês fariam sabendo dos dados assim?

A02: Eu acho que tiraria mesmo, chance alta demais. Melhor fazer prótese do que enfrentar câncer.

A's: Sim!

Nesse momento, foi possível perceber como os estudantes já estavam utilizando os dados do contexto para emitir opiniões a respeito das atitudes relativas ao gene BRCA. Diferentes pesquisas, como Gal (2002; 2005; 2019), Batanero (2005) já apontam para como a utilização de contextos reais e significantes para os estudantes são capazes de despertar o engajamento com a estatística e probabilidade. Percebemos nesse momento a sensatez e equilíbrio ao avaliar os riscos probabilísticos envolvidos nas decisões tomadas perante ao problema de mutação do gene BRCA.

No tocante aos indicadores de probabilidade trazidos na questão, o indicador 2 (Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “ $P(A|B)$, $P(B|A)$ ”), notamos uma compreensão apenas parcial desse tipo de linguagem, ao se obter apenas 2 RA. Já o indicador 5 (Representação visual dos problemas em diagrama de árvore, tabelas, diagrama de Venn), foi bem compreendido, pois notamos nas falas e nas respostas que os estudantes compreenderam que mulheres que não trazem a mutação do gene BRCA também podem desenvolver o câncer de mama, embora em menor probabilidade. Por fim, o indicador 6 (Procedimentos de quantificação centrados na busca pelas probabilidades através de algoritmos probabilísticos) não foi explorado por nenhum dos estudantes, mesmo que fosse possível efetuar cálculos. Notamos que dois dos participantes já obtiveram a informação diretamente da questão, mostrando assim a compreensão com base no indicador 2.

Questão 4

Figura 44 – problema 4

O problema foi apresentado no programa de televisão Let's Make a Deal nos Estados Unidos, que posteriormente ganhou sua versão brasileira: "Porta da Felicidade", com Sérgio Malandro na apresentação.



Neste programa de TV o objetivo é ganhar um prêmio (bode). O apresentador do programa mostra a você três portas, P_1 , P_2 e P_3 : atrás de uma há um bode e, das outras, não existe nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe P_1 , mas esta não é aberta. Então, ele abre uma das outras duas portas e mostra que ela está vazia (ele sabe o que há atrás de cada porta).

Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha inicial de porta. O que você faria? Justifique sua resposta.

Fonte: o autor

A questão 4 tratou do Paradoxo de Monty Hall, famoso problema para abordagem da probabilidade condicional, uma das facetas da probabilidade subjetiva, quando atualizamos uma opinião com uma nova informação. Esse problema, no questionário, não consistia exatamente em obter a probabilidade de vencer o jogo, mas sim de identificar a estratégia que teria mais chances de ser vencedora.

A discussão dessa questão foi abordada na seção de metodologia, com a abertura das soluções intuitivas e algorítmicas. Dado o nível acadêmico dos participantes (3º Ano do Ensino Médio), esperou-se que as justificativas versassem sobre as soluções intuitivas da questão. Abaixo, trazemos os critérios para sua análise.

Quadro 18 – descrição das categorias da questão 3

Critério	Detalhamento
RA	O estudante identificou a estratégia correta (trocar de porta) e a justificou utilizando o cálculo probabilístico, ou com a resposta intuitiva do problema.
RPA	O estudante identificou a estratégia correta, mas se perdeu em termos de argumentação ou utilizou apenas crenças pessoais.
RI	O estudante não conseguiu identificar a estratégia correta do problema.

NR	Não respondeu.
----	----------------

Fonte: o autor

Na prática, esse foi mais um problema que obteve baixo índice de compreensão, com apenas uma resposta adequada. Apresentamos abaixo o gráfico de desempenho dos participantes.

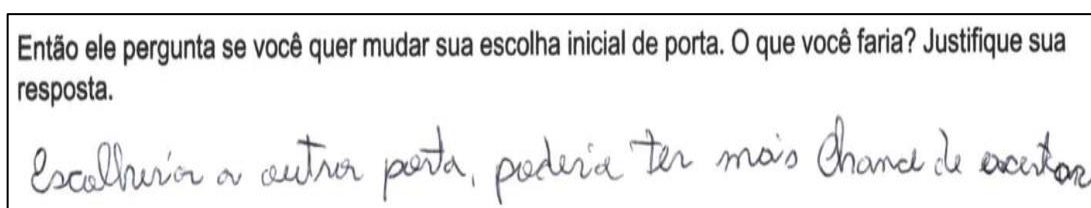
Figura 45 – gráfico com desempenho da questão 4



Fonte: o autor

O participante A07 respondeu adequadamente a questão, utilizando o raciocínio de uma resposta intuitiva para o problema. No entanto, se nos atermos apenas à resposta escrita, esta não teve nível de detalhamento suficiente para a conclusão, como podemos observar em sua resposta.

Figura 46 – resposta de A07 para questão 4



Fonte: dados da pesquisa

Assim, no momento de socialização questionou-se o porquê da resposta de trocar de porta (já que essa é a estratégia com maior chance de vitória). A justificativa do estudante se dá abaixo:

A07: Tipo assim, prof., no início tinha chance 1 em 3 de ganhar. Só que o apresentador sabe o que tá atrás da porta, né? Aí ele abre uma porta vazia que ele mesmo já sabe que tá fazendo. Se ficar na porta do início minha chance de errar é $2/3$ e se mudar isso inverte, sabe? A chance de acertar é $2/3$.

Com a explicação dada pelo participante A07, associamos esse raciocínio ao tipo de resposta intuitiva destacada por Batanero (2009), que associa a inversão de chance de ganhar e perder ao fazer a mudança de porta. No entanto, destacamos 7 respostas inadequadas, como as dos participantes A05 e A06.

Figuras 47 e 48 – respostas de A05 e A06, respectivamente

Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha inicial de porta. O que você faria? Justifique sua resposta.

Eu seguiria a minha intuição, porque tenho 50% de chances de errar e de acertar também. Ao abrir uma a minha chance de acertar aumenta mas também posso errar, que ainda continua uma Vazia, mas antes eram duas vezes o lado positivo. Mas aqui eu escolheria a B, porque sei que o bode está dentro.

Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha inicial de porta. O que você faria? Justifique sua resposta.

PERMANECIA. POIS AS CHANCES DE ACERTO SÃO AS MESMAS DE BATEZ.

Fonte: dados da pesquisa

Notamos na maioria das respostas inadequadas um típico erro de interpretação desse problema, que foi a adoção do viés de equiprobabilidade, com uma visão de que o papel do apresentador não interfere no problema e a nova escolha se dá a partir de outro experimento com chances iguais de ocorrência, com 50% de chances de vencer em cada uma das portas. Esse resultado aponta para um problema já percebido na análise dos livros didáticos, onde a maioria dos problemas de probabilidade versaram sobre probabilidade clássica, com eventos equiprováveis. Assim, infere-se que esse tipo de característica, ao ser explorada na maioria das vezes, pode criar uma visão equiprovável do mundo.

Também foi possível identificar respostas que apenas a crença foi levada em consideração. A dissertação da questão apontou uma primeira escolha em portas enumeradas de 1 a 3, e com isso, alguns participantes responderam que mudariam de porta porque não gostam de números ímpares (na situação inicial do problema, é escolhida a porta número 1).

A partir dos dados levantados nesse questionário inicial, identificamos resultados próximos às pesquisas de Rast (2005) e Moreira (2015), com a visão

predominante dos estudantes relativas à probabilidade clássica e tomadas de decisão pouco centradas nos dados quando os problemas não tiveram discussão oral a respeito das situações. No tocante ao problema 4, já identificamos muitas respostas convergentes ao erro histórico pertencente à solução do problema de Monty Hall, conforme Mlodinow (2009) apresentou, de considerar as chances de vitória nas duas portas sendo iguais.

6.2.2 Simulação do Jogo das Portas (Paradoxo de Monty Hall)

No último encontro com os estudantes, trabalhamos uma forma de resolver o problema das portas (problema 4 do questionário inicial) utilizando a estabilização de frequências, e junto a isso, orientamos, por meio dos questionamentos, que os estudantes fossem conduzidos a conhecer os problemas epistemológicos apresentados no significado frequentista de probabilidade.

Também no mesmo encontro, oferecemos aos estudantes um novo problema sobre probabilidade subjetiva, que inclui a vivência de todos os indicadores elaborados nessa pesquisa, para que com isso possamos entender melhor os conhecimentos apresentados pelos estudantes em relação à probabilidade subjetiva. A seguir, analisamos de forma contextualizada os dois novos problemas e as vivências dos mesmos.

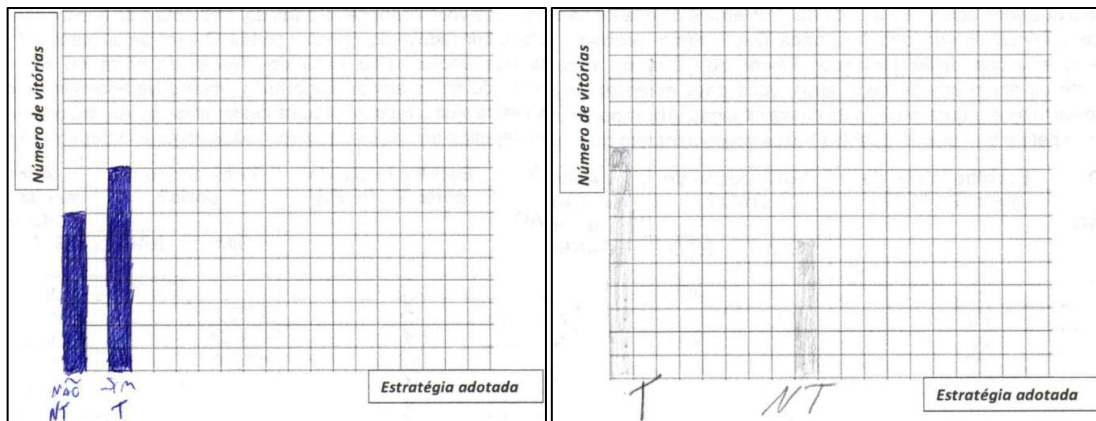
Inicialmente, foi proposta a discussão a respeito do problema 4 do questionário por meio da pergunta: *qual estratégia tem mais possibilidades de ser vencedora, trocando a porta inicialmente escolhida ou mudando de porta na oportunidade seguinte?*

A partir disso, foi pedido aos participantes que formassem duplas e repetissem o jogo que seria simulado naquele instante junto aos colegas. Em seguida, eles receberam o quadro de simulações do jogo das portas e foram convidados que anotassem a estratégia seguida e o resultado final ao adotá-la: ganhar ou não ganhar. As simulações se deram entre pares com o revezamento de quem era o apresentador e quem estava no papel de jogador.

Em um dos itens seguintes à simulação, eles foram convidados a construir um gráfico de barras indicando as estratégias adotadas nas vezes em que o resultado final foi “ganhar”, já que ali os mesmos poderiam enxergar melhor as estratégias

traçadas, que foram: (T) trocar a porta escolhida inicialmente, (NT) não trocar a porta escolhida no início. Segue alguns dos resultados documentados pelos estudantes.

Figuras 49 e 50 – quadros de simulações das duplas



Fonte: dados da pesquisa

Em todas as duplas o resultado foi o mesmo: trocar de porta foi a estratégia mais vencedora. Logo após as simulações, foram lançados questionamentos a fim de que os participantes relacionassem o resultado das simulações com as estratégias tomadas. No item (a), perguntou-se qual estratégia foi a mais utilizada pelos estudantes, e no item (b), foi pedido a construção de um gráfico com os resultados que levaram às vitórias.

A maioria das duplas escolheu não trocar de porta, mantendo-se fiéis ao que responderam no questionário, conforme apresentado na seção anterior. E, a partir daí, construíram os gráficos de vitórias, sempre apontando para a estratégia “trocar de porta” sendo a mais eficiente.

O item (c) questionava qual era realmente a estratégia que oferecia a maior possibilidade de vencer. Rapidamente as duplas responderam que trocar de porta tinha oferecido um número maior de vitórias, indicando assim que a estratégia de permanecer oferecia menos possibilidades de ganhar. Abaixo, algumas respostas das duplas.

Figuras 51 e 52 – respostas das duplas ao item (c)

c) Logo após as simulações, responda: qual você acha que deve ser a estratégia que representa o menor risco: trocar a porta ao ser questionado (a) pelo apresentador ou não? Explica tua resposta, consagrado (a). <i>Trocar a porta, por que acontece mais quando trocamos a porta.</i>
c) Logo após as simulações, responda: qual você acha que deve ser a estratégia que representa o menor risco: trocar a porta ao ser questionado (a) pelo apresentador ou não? Explica tua resposta, consagrado (a). <i>TROCAR A PORTA, POIS NOS ACERTAMOS MAIS QUANDO TROCAMOS AS PORTAS.</i>

Fonte: dados da pesquisa

Salientamos a forma como a vivência do problema por meio de simulações do jogo mudou a percepção dos estudantes acerca da estratégia com mais chances de vitórias. A partir da simulação eles perceberam que a estratégia escolhida no questionário inicial não era tão óbvia como eles pensaram (viés de equiprobabilidade entre as portas restantes).

Em paralelo, o item (d) questionou a respeito da própria atividade de simulação, se ela realmente ajuda a tomar uma decisão, e se o número de repetições é o apropriado para se tomar uma conclusão eficiente a respeito da estratégia mais próxima da vitória. Os mesmos argumentaram que a experiência auxilia na tomada de decisão para o jogo, evidenciando assim um papel importante da probabilidade frequentista auxiliando as decisões que envolvem também o significado subjetivo.

Quanto ao indicador 4 (Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos) presente nessa simulação, os dados apontam para uma compreensão ampla da probabilidade subjetiva quando a mesma está relacionada a decisões, já que as cinco duplas conseguiram raciocinar e argumentar com base na experiência adquirida na simulação do jogo.

6.2.3 Problema final de Probabilidade Subjetiva

O novo problema de probabilidade subjetiva foi levado no último encontro com os estudantes, para que os mesmos pudessem respondê-lo em duas divisões: uma seção de probabilidade subjetiva mais voltada às experiências e intuições, e outra

com a inserção do cálculo probabilístico. Analisamos a primeira seção, com distribuição dos indicadores conforme o quadro seguinte:

Quadro 19 – disposição dos indicadores de probabilidade subjetiva no problema

Distribuição dos Indicadores de Probabilidade Subjetiva		
<i>Situação 1: Encontro romântico</i>		
Item	Indicador (es)	Descrição
A	4 e 7	- Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos. - Formato dos dados em frequências, porcentagens ou números decimais.
C	3 e 7	- Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento. - Formato dos dados em frequências, porcentagens ou números decimais.
D	Verificação do Indicador 4	Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos.

Fonte: o autor

Na primeira seção, foi tratado de um tema recorrente ao contexto dos participantes, pois foi referente a encontros e a maneira como os mesmos iriam se desenvolver. Primeiramente foi apresentada uma sinopse de filme, e em seguida, no item (a), os participantes foram perguntados à respeito da probabilidade de que eles escolhessem o referido filme para assistir junto ao parceiro de encontro. As respostas de todos eles foram elencadas em forma de porcentagem, e, junto com essa análise, inserimos o item (b), que perguntava à respeito do porquê de cada resposta. Percebeu-se que todas as respostas foram baseadas no gosto e experiência pessoal dos estudantes, como se pode perceber nas respostas dos participantes A01 e A09.

Figuras 53 e 54– respostas dos participantes A01 e A09

a) Qual a probabilidade de você recomendar o filme acima?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
---------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

b) Explique os motivos pelos quais você tomou a decisão acima ao atribuir a probabilidade.

hunca ouvi falar deste filme, não escolheria ele, tenho outros tipos de filme para assistir.

a) Qual a probabilidade de você recomendar o filme acima?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

b) Explique os motivos pelos quais você tomou a decisão acima ao atribuir a probabilidade.

Sim, porque é interessante a história de Landon e Jamie

Fonte: dados da pesquisa

Nota-se que as respostas tiveram direcionamento a partir da mobilização pessoal dos gostos e experiências dos estudantes, convergindo com o Indicador número 4. Desse modo, entende-se que o conhecimento apresentado para os itens (a) e (b) estão de acordo com as demandas necessárias para atribuição de probabilidade como grau de crença em um evento.

No que se refere aos itens (c) e (d), optou-se por permitir verificar se existiria coerência com a resposta dada no item (a), mesmo com a adição de uma nova informação, envolvendo assim o indicador número 3 (Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento).

Assim, a expectativa ao adicionar uma nova informação foi correlacionar os itens (a) e (c) de modo que houvesse a mensuração de o quanto as respostas eram complementares, já que o item (a) questionava a respeito da probabilidade de indicar o filme para assistir e o item (b) mencionava a probabilidade de não indicar o filme para assistir. Com isso, levantamos as porcentagens atribuídas nos itens (a) e (c).

Tabela 3 – confrontamento das probabilidades nos itens a e c

Estudante	Item (a)	Item (b)	Diferença
A01	0%	80%	-20%
A02	10%	90%	0%
A03	60%	50%	+10%
A04	0%	80%	-20%
A05	70%	40%	+10%
A06	0%	100%	0%

A07	10%	80%	-10%
A08	50%	50%	0%
A09	70%	30%	0%
A10	10%	90%	0%

Fonte: o autor (dados da pesquisa)

Nessa questão, admitimos uma diferença entre os eventos complementares de até 10% para mais, porque uma nova informação foi inserida (abriu-se o Instagram da pessoa que estava no encontro, e a mesma seria uma roqueira), podendo assim, fazer com que os estudantes aumentassem a probabilidade de não recomendar sem levar em conta a resposta dada ao item (a).

No entanto, percebe-se que as respostas estão coerentes no sentido de serem eventos complementares. Dado que a situação envolve uma tomada de decisão a partir dos dados, os participantes apresentaram graus de crença condizentes com a probabilidade formal, nesse caso, subjetiva. Ao analisar as respostas, percebe-se que o maior afastamento entre as somas das probabilidades foi de -20%, nas respostas dos participantes A01 e A04.

Nesse sentido, Batanero (2005) reforça que a probabilidade subjetiva pode ser distinguida da intuitiva no ponto em que a primeira foi axiomatizada, assim, obedecendo aos Axiomas de Kolmogorov. Com isso, identificam-se cinco respostas dos participantes que obedecem exatamente ao Axioma $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, ou seja, a probabilidade de um evento somada com o complementar do mesmo, será sempre 100%. Nenhuma das pesquisas elencadas na revisão de literatura (RAST, 2005; MOREIRA, 2015; DI BERNARDO, 2019) trabalhou com esse tipo de atividade, portanto aqui não há como tomar parâmetros com pesquisas anteriores.

Já no que se refere ao item (d) “Você acredita que sua experiência sobre algo influencia na tomada de decisão sobre algo?”, os participantes foram unânimes em dizer que sim, pois a experiência pauta as decisões. Aqui, caberá correlação com a resposta dada a outro item presente na segunda parte desse questionário, que será retomada na próxima seção.

Nesse primeiro bloco, os dados apontaram para uma ampla compreensão do significado subjetivo de probabilidade por parte dos participantes, quando a situação envolveu apenas as experiências pessoais e tomada de decisão fundamentadas nas mesmas. Houve coerência na atribuição de probabilidades entre eventos

complementares, e as tomadas de decisão foram pautadas em experiência e análise de eventos concomitantes.

Na segunda parte do problema analisado nesta seção, o direcionamento dos itens foi semelhante ao citado anteriormente, com uma única mudança: na segunda seção a primeira situação envolveu um problema onde o instrumento de quantificação a priori foi algorítmico, com uma situação a ser resolvida com a árvore de possibilidades. No quadro 20 descrevemos a composição de cada item conforme os indicadores de probabilidade subjetiva.

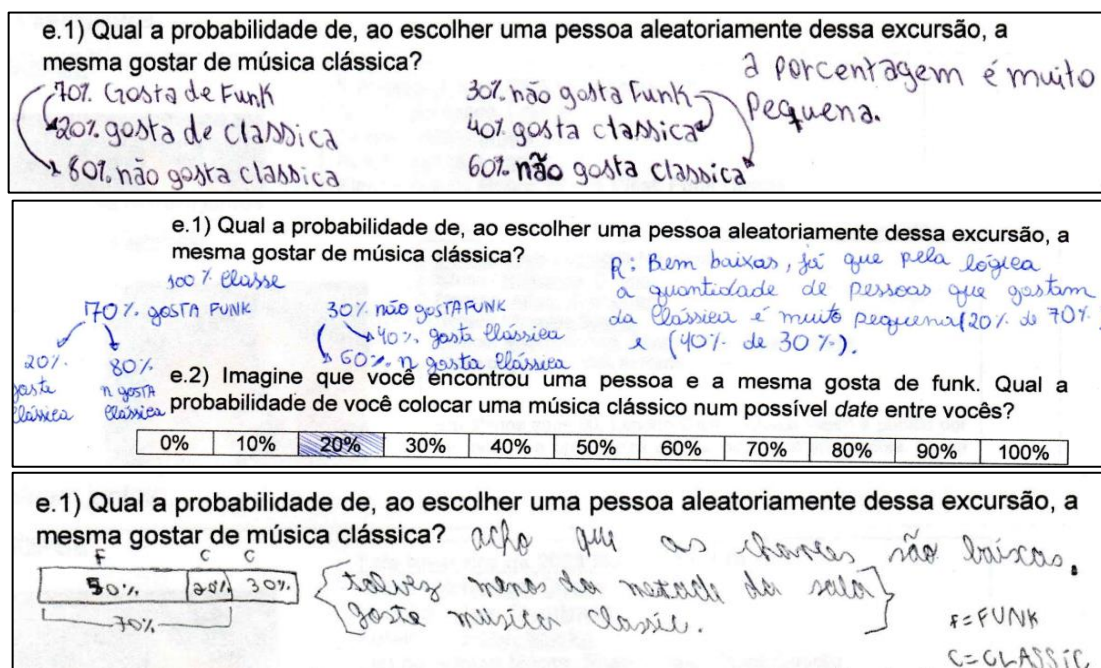
Quadro 20 – distribuição de indicadores na seção 2

Distribuição dos Indicadores de Probabilidade Subjetiva		
<i>Situação 2: Excursão escolar – Cálculo de Probabilidade</i>		
Item	Indicadores	Descrição
E.1	2, 5 e 6	▪ Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “$P(A B)$”, “$P(B A)$” ▪ Representação visual dos problemas em diagrama de árvore, tabelas, diagrama de Venn. ▪ Procedimentos de quantificação centrados na busca pelas probabilidades através de algoritmos probabilísticos.
E.2	1, 2 e 4	▪ Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial ▪ Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “$P(A B)$”, “$P(B A)$” ▪ Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos.

Fonte: o autor

O item e.1 envolveu uma solução para o problema proposto na situação 2, que demandava conhecimento de cálculo probabilístico por um diagrama de árvore ou mesmo eventos sucessivos. Nesse sentido, nenhum estudante conseguiu chegar à resposta adequadamente, mesmo que alguns tenham desenvolvido esquemas para interpretar a questão, como observamos nos registros.

Figuras 55, 56 e 57 – esquemas para resposta ao item e.1 dos participantes



Fonte: dados da pesquisa

Convém destacar como as interpretações se direcionam de maneira coerente nos esquemas, mas existe indecisão quanto a forma de continuar o desenvolvimento. Eles identificam que a porcentagem é pequena, o que aponta para a compreensão geral da situação, mas não conseguem desenvolver os cálculos pertinentes.

Já o item (e.2), “Imagine que você encontrou uma pessoa e a mesma gosta de funk. Qual a probabilidade de você colocar uma música clássico num possível *date* entre vocês?”, envolve uma tomada de decisão que depende da compreensão adequada do item (e.1). Destaca-se que os cálculos não foram efetuados em (e.1), no entanto os estudantes perceberam que a probabilidade de uma pessoa gostar de música clássica era baixa nesse contexto. Nesse item não foram elencadas respostas corretas ou não, mas havia a expectativa de que a probabilidade atribuída fosse baixa, dado que apenas 20% dos estudantes que gostam de funk também gostam de música clássica.

Tabela 4 – porcentagens atribuídas no item e.2

Porcentagem	0%	10%	20%	30%
Frequência de atribuição	3	3	3	1

Fonte: o autor (dados da pesquisa)

Com isso, nenhuma resposta ultrapassou a marca de 30%, mostrando assim como a compreensão da situação no geral se deu de forma coerente. Para além disso,

com uma análise conjunta ao item e.4, pode-se explicar de que forma os participantes decidiram atribuir as probabilidades do item e.2.

Figuras 58, 59 e 60 – justificativas das respostas do item e.2

e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta e.2. Sim, há chances de quem detesta música clássica e se sentir desconfortável (ficar pistola).
e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta e.2. EU SEI QUE 20% DAS PESSOAS QUE GOSTAM DE ROCK TAMBÉM TAMBÉM GOSTAM DE MÚSICA CLÁSSICA.
e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta e.2. Sim, há chances de quem detesta música clássica e se sentir desconfortável (ficar pistola).

Fonte: dados da pesquisa

Percebe-se que as justificativas versam sobre o risco de colocar a música clássica e a pessoa não gostar do gênero musical, assim, retomando a baixa probabilidade de uma pessoa gostar de funk e música clássica. Atribuir uma probabilidade baseada nos dados e não apenas nas crenças pessoais é uma demanda presente no Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005), e levada em consideração na elaboração desse problema, junto aos indicadores de probabilidade subjetiva.

Também se destaca a forma satisfatória com que a mensagem $P(A|B)$ foi interpretada pelos participantes, pois para serem coerentes com a atribuição de probabilidade para o item e.2, era necessário o entendimento da mensagem “gostar de música clássica, dado que gosta de funk”. O índice de baixa porcentagem atribuído pelos participantes aponta para a leitura correta do questionamento.

Por fim, o item e.3 “Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade?” levantou a possibilidade de reflexão por parte dos estudantes enquanto suas tomadas de decisão. As respostas dos participantes apontam para percepções de como a probabilidade está presente em suas declarações e decisões.

Figuras 61, 62 e 63– respostas do item e.3

e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade? <i>tem o costume de dizer "Provavelmente", ao dizer isso estamos falando de Probabilidade</i>
e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade? <i>sim KKKK, usar a lógica para tentar solucionar as questões, ou pelo menos buscando encontrar uma lógica da questão.</i>
e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade? <i>tem o costume de dizer "Provavelmente", ao dizer isso estamos falando de Probabilidade</i>

Fonte: dados da pesquisa

As respostas fizeram menção inclusive ao vocabulário probabilístico, tão comum em nosso cotidiano, ao atribuir graus de crença para determinados eventos. Atentando-se ao fato de como as probabilidades subjetivas da primeira seção foram condizentes com as lógicas formais do saber probabilidade, infere-se que as questões subjetivas do significado de probabilidade são atendidas de forma linear, mostrando assim que os estudantes são capazes de organizar seus pensamentos em torno de uma lógica formal de probabilidade, mesmo que os detalhes envolvendo cálculo ainda estejam incipientes ou mal compreendidos.

6.2.4 Quanto aos indicadores epistêmicos

Após realização das tarefas propostas nas sequências de atividades, constatamos algumas situações relativas à compreensão global do conceito de probabilidade subjetiva por parte dos estudantes. Sendo, nesta pesquisa, utilizados os indicadores epistêmicos como forma de categorização de cada setor que compõe o referido conceito. Abaixo, apresentamos um heatmap com a síntese dos resultados.

Figura 64 – *heatmap* dos resultados por indicador na pesquisa

n	DESCRIÇÃO	DESEMPENHO ¹
1	Foco em situações-problema onde a probabilidade de ocorrência é afetada por uma informação inicial (as probabilidades iniciais são ajustadas a partir de uma nova informação disponível.)	
2	Uso de termos e expressões verbais comuns associadas a linguagem da probabilidade subjetiva, tais como “dado que”, “ $P(A B)$, $P(B A)$ ”	
3	Ênfase na probabilidade entendida como grau de crença em um evento a partir de uma série de informações disponíveis que permitem ajustar a probabilidade a partir de um juízo pessoal sobre o evento.	
4	Foco em situações que envolvem experimentos dependendo da informação disponível e da experiência dos estudantes com o evento em questão envolvendo a tomada de decisão e/ou verificação de riscos probabilísticos.	
6	Procedimentos de quantificação centrados na busca pelas probabilidades através de algoritmos probabilísticos.	
Os indicadores 5 e 7 fazem apenas referência à apresentação dos dados, por isso não entraram nessa etapa de análise.		
¹ = Quanto mais fria a cor, pior o desempenho		

Fonte: o autor (dados da pesquisa)

Diante do exposto, ressaltamos a compreensão presente nas estruturas interpretativas dos problemas relacionados a forma com que novas informações afetam a mensuração inicial de uma probabilidade de evento. Nesse sentido, a análise das atividades apontou para o entendimento adequado de como o impacto das mensagens $P(A|B)$ e $P(B|A)$ afetam a probabilidade a priori. Também é importante perceber a forma com que a avaliação dos eventos a partir de informações disponíveis a priori foi compreendida.

No entanto, a desenvoltura com a manipulação de algoritmos para cálculo de probabilidade se mostrou ausente. Quanto ao segundo caso da última situação de probabilidade subjetiva (problema do encontro), os estudantes apresentaram compreensão satisfatória da situação no geral, porém as avaliações se mostraram um tanto quanto imprecisas no tocante ao desenvolvimento de cálculos necessários.

Já quanto à atribuição de probabilidade entendida como grau de crença pessoal no acontecimento de um evento, identificamos a falta de rotina de exercícios para os estudantes – quando elencamos a análise dos livros didáticos – e a forte presença da crença acima do que apresentaram os dados. Logo, identificamos alguma fragilidade quanto ao desenvolvimento do letramento probabilístico, pois segundo Gal (2005), o conhecimento matemático e contextual são parte da estrutura presente nesse desenvolvimento.

Em síntese, os resultados apontaram para um melhor desempenho dos estudantes em relação aos cálculos quando os problemas de probabilidade se assemelham àqueles presentes nos livros didáticos. Sendo esse um problema passível de resolução por meio da habituação com problemas cujo papel da reflexão sobre os dados esteja presente.

7 CONCLUSÃO

Esta pesquisa teve como objetivo geral investigar os conhecimentos de probabilidade subjetiva de estudantes do Ensino Médio à luz de indicadores de probabilidade subjetiva; procurando mais especificamente, elaborar indicadores epistêmicos para a probabilidade subjetiva, identificar e analisar nas atividades propostas pelos livros didáticos os significados de probabilidade, analisar os problemas de probabilidade subjetiva propostos no livro com base nos indicadores, e propor uma sequência de atividades elaborada à luz dos indicadores epistêmicos de probabilidade subjetiva elaborados na pesquisa.

A respeito da literatura existente no tocante ao significado subjetivo de probabilidade sendo explorado em sala de aula, destacamos a escassez de estudos sobre esse tema. O que, na prática, nos deixa sem parâmetros prévios, e a sentido de comparação entre os nossos resultados e os de outras pesquisas, encontramos pouco ou quase nada nesse sentido.

Para o desenvolvimento do estudo, utilizamos como recurso a pesquisa de campo, onde participaram 10 estudantes de uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Pesqueira-PE. A pesquisa se deu em 4 etapas, a saber: elaboração de indicadores de probabilidade subjetiva, com o intuito de criar categorias de análise dos problemas do respectivo significado, bem como para guiar a elaboração de situações-problema explorando esse aspecto da probabilidade; observância das resoluções dos estudantes a um questionário prévio de probabilidade subjetiva, onde os indicadores epistêmicos foram trabalhados de maneira isolada em cada situação; socialização e vivência de um novo problema de probabilidade subjetiva, onde foram explorados os aspectos de confronto entre os significados frequentista e subjetivo, bem como a investigação à respeito de duas situações de probabilidade subjetiva, uma utilizando algoritmo matemático e a outra apenas a experiência pessoal.

No que se refere a elaboração dos indicadores de probabilidade subjetiva, o estudo de Alsina e Ortiz (2019) já aponta para a possibilidade de elencar os principais aspectos dos significados de probabilidade no sentido de estruturar uma pauta de observação de aulas do referido tema. Em nosso estudo, fizemos adaptações possíveis para o nível de Ensino Médio brasileiro levando em conta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o currículo do estado de Pernambuco (local onde se

desenvolveu a pesquisa), a análise dos livros didáticos e a configuração epistemológica do significado subjetivo. Destacamos ainda a forma de utilização dos indicadores, pois em nosso estudo, os mesmos foram de grande valia extrapolando a observação de aula, tanto no sentido de critério de análise para os problemas, quanto na estruturação de situações-problema envolvendo as diferentes facetas do significado subjetivo de probabilidade.

Já quanto às análises dos significados de probabilidade encontrados nos problemas trabalhados nos livros didáticos que os estudantes tiveram contato no Ensino Médio, nossos resultados corroboram com outros estudos já realizados sobre esse aspecto, como o de Batanero (2006). Foram analisados três livros que a turma utilizou, um de cada ano do Ensino Médio, e notou-se uma pequena evolução do livro do edital PNLD de 2021 em relação aos do edital de 2018. Ainda assim, encontramos a predominância do significado clássico de probabilidade em detrimento dos outros, o que, em tese, pode criar obstáculos de aprendizagem, dado que os estudantes podem desenvolver uma visão enviesada pela equiprobabilidade em relação aos problemas envolvendo esse saber.

Nesse sentido, o número de problemas abordando probabilidade clássica beira os 50% do total nos três volumes analisados. O principal eixo de trabalho gira em torno dos problemas envolvendo análise combinatória e desenho do espaço amostral e eventos favoráveis, convergindo assim para a visão laplaciana de probabilidade. Já os problemas de probabilidade frequentista pouco contribuem para o desenvolvimento das ideias que esbarram nas limitações significado, como a estabilização de frequências, que seria um grande incentivo para a investigação do significado subjetivo. Assim, o significado subjetivo aparece como um dos menos explorados nos problemas, na faixa de 7% do total.

Paralelamente, ao analisarmos os problemas que envolvem o significado subjetivo de probabilidade, encontramos uma tendência quase que absoluta para exploração do conceito de probabilidade condicional, com grande frequência de tabelas de dupla entrada. Para Godino, Batanero e Cañizares (1987), o significado subjetivo abrange tópicos relacionados à experiência pessoal e grau de crença no acontecimento de eventos, o que nos livros didáticos analisados, não é devidamente esmiuçado.

Além disso, a tipologia dos problemas aponta apenas para utilização de algoritmos matemáticos/probabilísticos, deixando de lado as facetas que emergem do significado subjetivo, tais como opiniões de especialistas, avaliação de novos acontecimentos durante a realização de um experimento, entre outras. Em relação aos indicadores elaborados na pesquisa, encontramos uma distribuição assimétrica entre os problemas, como a inexistência da presença de situações envolvendo a experiência de quem declara a probabilidade, sendo essa uma das principais vertentes do significado subjetivo de probabilidade (ROSS, 2015). Destacamos também o uso de contextos fictícios na maioria dos problemas, habituando assim os estudantes a rotinas de exercícios que se descolam de suas realidades.

Dessa maneira, elaboramos o questionário prévio, que foi respondido pelos estudantes sem nenhum processo de intervenção do pesquisador. A estruturação se deu de forma a abordar os principais indicadores da probabilidade subjetiva separadamente e em diferentes contextos. A primeira questão, propositalmente, foi inserida com o intuito de se aproximar à tipologia presente nos livros didáticos, com a avaliação apenas de eventos sucessivos. Na segunda e terceira, foram inseridos contextos de saúde, com a introdução das declarações probabilísticas de um teste de covid e da exploração da temática do gene BRCA e o câncer de mama. Já a questão quatro abordou o paradoxo de Monty Hall, famoso problema de probabilidade subjetiva, com diferentes possibilidades de resolução, desde a intuitiva até as algorítmicas (BATANERO, FERNANDES, GARCIA; 2009).

Os resultados apontaram para maiores dificuldades quando os problemas tinham mais aproximação com a realidade, onde na maioria dos casos, os estudantes deixaram que suas preferências fossem prioridade em relação aos dados, mostrando assim, certa fragilidade no desenvolvimento do Letramento Probabilístico (GAL, 2005). Também vale destacar a dificuldade apresentada pelos estudantes com o cálculo probabilístico por meio dos algoritmos, mais especificamente, a probabilidade condicional, onde os participantes entenderam as mensagens $P(A|B)$ e $P(B|A)$ mas não conseguiram manipular o cálculo devidamente.

Ainda nesse aspecto, foi trabalhada a simulação do paradoxo de Monty Hall, que teve como objetivo confrontar respostas dos estudantes por meio do significado frequentista e do subjetivo. Com essa atividade foi possível que os estudantes identificassem a estratégia com maior chance de vitória, sendo induzidos apenas no desenvolvimento das simulações de jogadas. Assim, os estudantes conseguiram

compreender a dinâmica do jogo, mesmo com a formalização da resposta advindo da probabilidade frequentista. Ainda houve a aplicação de um problema envolvendo a totalidade dos indicadores epistêmicos elaborados na pesquisa, com a vivência de duas situações: uma que tinha por base a experiência pessoal e outra que tinha a base alicerçada no cálculo probabilísticos. Com isso, os resultados apontaram para uma compreensão satisfatória do problema, bem como do raciocínio empregado nas resoluções.

Diante do exposto, concluímos que os estudantes compreendem satisfatoriamente as nuances relativas ao significado subjetivo de probabilidade, mesmo não tendo instruções específicas para a mesma, e com os livros didáticos explorando de maneira rasa o conceito. Também apontamos para um aspecto preocupante: o entendimento dos participantes se deu de melhor forma quando os contextos das questões de algoritmo se aproximaram das tipologias de problemas presentes nos livros didáticos. Acreditamos que com uma abordagem diferente e que amplie a visão acerca dos significados de probabilidade, os estudantes podem ser capazes de dominar ainda mais o conceito de probabilidade subjetiva.

Uma limitação desse estudo se deu por não termos conduzido um processo interventivo explorando os múltiplos significados de probabilidade que poderiam ser explorados na Educação Básica. Assim, como indicação de futuras pesquisas, tanto recomendamos a elaboração de processos interventivos que possam explorar e fazer dialogar todos os significados de probabilidade, concebendo assim uma visão ampla a respeito dos mesmos, onde a construção do conhecimento se dê também de forma a relacionar com as principais lacunas e abrangências dos significados, quanto processos de formação de professores que possam atenuar as lacunas de formação inicial.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, C.M.C. **Um modelo didático de referência para o ensino de probabilidade**. 2018. 149f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade federal da Bahia, Salvador/BA, 2018.
- BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa**, México, v. 8, n. 3, p.247-263, nov. 2005.
- BATANERO, C.; FERNANDES, J. A.; GARCÍA, J. M. C. Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. **Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas**, n. 62, p. 11-18, 2009.
- BENNETT, D. J. **Randomness**. London: Harvard University Press, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 10 out. 2021.
- BROWN, D. **Fortaleza Digital**. São Paulo: Editora Arqueiro, 1998.
- BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability**. A literature review (full report). Londres: Nuffield Foundation, 2012.
- BUSSAB, WO; MORETTIN, PA. **Estatística Básica**. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.
- COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista: estudo epistemológico e didático**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo – SP, 1994.
- DE FINETI, B. **Probabilidade**. Tradução de Beatriz Simões de Carvalho. In: Enciclopédia Einaudi, v.15. Cálculo-Probabilidade. Edição Portuguesa, 1989.
- DEGROOT, M.H., SCHERVISH. **Probability and Statistics**. Boston: Pearson Education, 2012.
- DI BERNARDO, R.; MELLONE, M.; MINICHINI C.; RIBEIRO, M. Subjective Approach to probability for accessing prospective teacher's specialized knowledge. In: **Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. 2019, Pretoria, Sputh Africa: PME, p.177-184.
- EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5.ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- GAL, I. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: JONES, Graham A. (ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2005, p. 43-71.
- GAL, I., BARON, J. (1996). Understanding repeated simple choices. **Thinking and Reasoning**, 2, 81–98.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In: **XIII CIAEM – IACME**. Anais. Recife, 2011.

Disponível em: <<

https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf>> . Acesso em: nov. 2022.

Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. J. **Azar y probabilidad**: Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Síntesis, 1987.

GOMES, T.M.S; GUIMARÃES, G.L. O ensino e aprendizagem de Amostragem por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental baseado na Teoria da Atividade. **Em Teia** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Recife, v. 12, n. 3, p. 1 – 22, 2021. Disponível em: <<
https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/250199/pdf_1>>. Acesso em: out. 2021.

GRANDO, R.C.; SANTOS, J.A.F.L. (2011). O Movimento das Ideias Probabilísticas no Ensino Fundamental: análise de um caso. **Bolema**, 24(39), 561-584.

LAPLACE, P. S. **Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades**. Tradução, introdução e notas Pedro Leite de Santana. Rio de Janeiro: Editora Contraponto, PUC-Rio, 2010.

MOREIRA, A. P. M. **Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em sala de aula do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade de Campinas. Campinas – SP, p.203, 2015.

ORTIZ, C.V.; ALSINA, A. Diseño, construcción y validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de Educación Primaria. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. 14, 1–20 (2019).

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco**: Parâmetros Curriculares de matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife, 2012.

PERNAMBUCO. Secretaria Estadual de Educação. **Novo Currículo de Pernambuco**. Recife – PE. 2021.

RAST, J. D. **A Comparison of Learning Subjective Probability and Traditional Probability in Middle Grades**. Tese (Middle Secondary Education Program) – Georgia State University. Georgia – USA, p.144, 2005.

RIFO, L. **PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA**: aspectos da tomada de decisões e incerteza para o Ensino Fundamental e Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2021.

ROSS, S. **Probabilidade**: Um curso moderno com aplicações. 8 Ed. Prentice Hall, 2010.

SÁ, I. P.; SÁ, V. G. P. **Desafio: A Porta dos Desesperados**. GEPEM, v. 52, 2008.

SÁENZ, C.C. **Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades** – propuesta de un modelo teórico. Universidad Autónoma de Madrid Ediciones: Madrid, 1999.

SOUZA, F. S. Ensino de probabilidade e estatística por meio da análise exploratória de dados e resolução de problemas. **Revista Internacional de Educação Superior**,

Campinas, SP, v. 5, p. e019002, 2019. DOI: 10.20396/riesup.v5i0.8652708.

Disponível em:

<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/riesup/article/view/8652708>. Acesso em: set. 2022.

SOUZA, J. **Matemática**. Editora FTD. Rio de Janeiro, 2021.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INICIAL DA DIAGNOSE**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**

Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC
Pesquisa de mestrado: Probabilidade Subjetiva no Ensino Médio e conhecimento de estudantes
Mestrando: Anderson Rodrigo O. da Silva
Orientador: José Ivanildo F. de Carvalho

Instrumento de coleta de dados: Questionário – Fase 1

Prezado estudante, você foi sorteado para participar desta pesquisa que terá seu plano de ação dividido em duas fases, onde a primeira é a resolução deste questionário envolvendo seus conhecimentos de Probabilidade. Ao respondê-lo, você estará ajudando a melhor desenvolver nossa atividade. Responda com atenção às perguntas abaixo, justificando suas respostas ao máximo de forma escrita.

Salientamos que, sob hipótese alguma, seu nome será divulgado na escrita do texto final da dissertação de mestrado.

Desde já, agradecemos pela sua participação!

Nome/Apelido: _____

Responda atentamente às questões 1 a 4, explicitando de que maneira você desenvolveu os raciocínios para cada uma delas.

➤ **QUESTÃO 1**

Em uma caixa há quatro smartphones, sendo que desses, dois encontram-se defeituosos. Mário e Rita devem escolher um telefone para si, mas não podem repetir a retirada da caixa, ou seja, se pegar um telefone com defeito, ficará com ele mesmo assim. Mário retirou primeiro que Rita, e seu telefone veio com defeito. Agora é a vez de Rita, e com isso podemos concluir que:

- a) É mais provável que o telefone de Rita seja defeituoso
- b) É mais provável que o telefone de Rita não seja defeituoso
- c) A probabilidade do telefone de Rita ser defeituoso é a mesma de estar funcionando corretamente.

ESPAÇO PARA SOLUÇÃO DA QUESTÃO

Por que pensas assim? Explica tua resposta.

➤ QUESTÃO 2

Você sabe interpretar testes para Covid – 19?

Primeiramente, precisamos entender dois conceitos básicos: a sensibilidade e a especificidade.

A *sensibilidade* é definida como a capacidade que um teste tem em identificar uma pessoa verdadeiramente doente, dentre pessoas que apresentam apenas a suspeita da doença. A *especificidade*, por sua vez, é definida como a capacidade do teste apresentar um resultado negativo em indivíduos que não possuem a doença. Um fabricante disponibiliza em seu site web a seguinte informação:

COVID-19 Ag ECO Teste

Ensaio imunocromatográfico para detecção qualitativa de antígenos (proteína N) do SARS-CoV-2 (COVID-19)

- Sensibilidade: 96,52%
- Especificidade: >99,9%
- Armazenamento: 2 a 30°C
- Amostra: swab nasal/swab de nasofaringe
- Tempo do Teste: 2-15 minutos (não ler após 30 minutos)
- Validade: 24 meses
- Kit: acompanha swab para coleta

Apresentação: Cassete

Registro MS: 80954880133

COVID Ag ECO Teste

Teste de antígeno (Ag)
PMAS TESTADO e validado no Brasil

Certificado pelo INCT
+1 que o produto PMAS

Certificado pelo INCT
+1 que o produto PMAS

2 anos de estabilidade
nasofaringe e orofaringe

COVID-19 Ag

BAIXAR O FLYER

Disponível em: <<<https://ecodiagnostica.com.br/diagnostico-rapido/covid-19-ag-eco-teste/>>>.

Após uma leitura atenta, responda às seguintes perguntas:

- Como você interpretaria as porcentagens de sensibilidade e especificidade mencionadas no banner do teste?
- Você considera confiável os resultados fornecidos por esse teste?
- Imagine que um profissional de saúde, ao fazer o referido teste, demora aproximadamente 1 hora para verificá-lo. Como você avalia as condições da sensibilidade e especificidade do teste nessa situação?
- No que se refere aos números da sensibilidade do teste apresentados pelo laboratório, você classificaria como impossível que esse teste apresente resultado negativo mesmo para uma pessoa infectada pela doença?

➤ QUESTÃO 3

Gene BRCA e o Câncer de Mama

BRCA é a abreviatura de Breast Cancer gene 1 ou 2. BRCA1 e BRCA2 são dois genes diferentes que afetam as chances de uma pessoa desenvolver câncer de mama e ovário.

Todas as pessoas possuem genes BRCA1 e BRCA2. Apesar do que os seus nomes possam sugerir, os genes BRCA não causam o câncer de mama. É importante mencionar que esses genes normalmente desempenham um papel na prevenção do câncer de mama. Eles ajudam a reparar quebras do DNA que podem levar ao câncer e ao crescimento descontrolado de tumores. Por essa razão, os genes BRCA são conhecidos como genes supressores do tumor.

No entanto, em algumas pessoas, esses genes supressores do tumor não funcionam corretamente. Quando um gene é alterado ou danificado, não realiza mais sua função de forma programada e podem, então, ocasionar o desenvolvimento do câncer. Isso é denominado mutação genética.

(Disponível em: << <http://www.oncoguia.org.br/conteudo/brca/13919/1227/>>>)

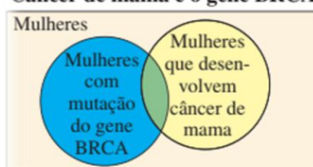
(Farber e Larsson, 2015, p.146, adaptado)

Uma pesquisa mostrou que aproximadamente 1 em 400 mulheres carregam uma mutação (gene alterado/modificado) do gene BRCA e que cerca de 6 em cada 10 mulheres com essa mutação desenvolvem câncer de mama. Encontre a probabilidade de uma mulher desenvolver câncer de mama dado que a mesma carrega uma mutação do gene BRCA.

(Fonte: National Cancer Institute.)

Explique como você chegou a sua resposta.

Câncer de mama e o gene BRCA



➤ QUESTÃO 4

O problema foi apresentado no programa de televisão Let's Make a Deal nos Estados Unidos, que posteriormente ganhou sua versão brasileira: "Porta da Felicidade", com Sérgio Malandro na apresentação.



Neste programa de TV o objetivo é ganhar um prêmio (bode). O apresentador do programa mostra a você três portas, P_1 , P_2 e P_3 : atrás de uma há um bode e, das outras, não existe nada. Ele pede a você para escolher uma porta, você escolhe P_1 , mas esta não é aberta. Então, ele abre uma das outras duas portas e mostra que ela está vazia (ele sabe o que há atrás de cada porta).

Então ele pergunta se você quer mudar sua escolha inicial de porta. O que você faria? Justifique sua resposta.

APÊNDICE B – FICHA DE SIMULAÇÃO DO JOGO DAS PORTAS

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

Mestrando: Anderson Rodrigo

Orientador: José Ivanildo F. de Carvalho

Estudantes (Insira aqui o mesmo nome que você usou na primeira atividade)

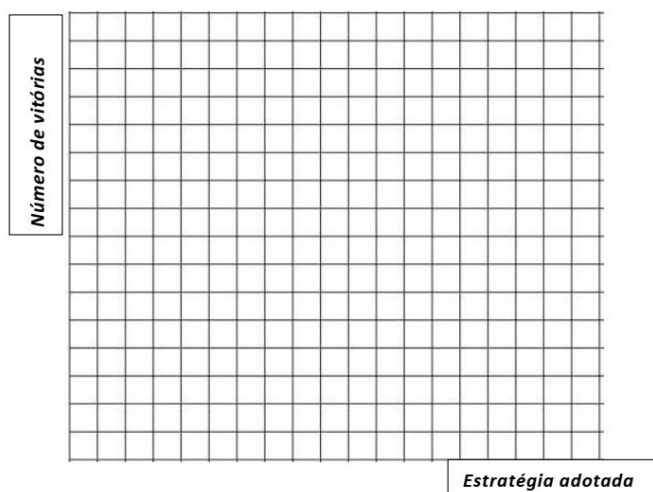
Vamos brincar?

Aproveitando o que você conheceu a partir do Problema 4 do questionário da primeira fase, vamos simular a brincadeira do jogo das portas. O que vamos precisar? Temos que anotar as decisões que vocês estão tomando: Trocar de porta ou não, ao responder o questionamento do entrevistador. Logo após, você deve escrever se ganhou ou não. A tabela abaixo vai te ajudar quanto a escrita dessa situação. Ah, importante que você lembre: vocês podem repetir a brincadeira quantas vezes vocês acharem que é necessário!

NÚMERO DA SIMULAÇÃO	Escolha inicial da porta (P_1 , P_2 , P_3)	Você trocou de porta?		Anote aqui o seu resultado após tomar a decisão anterior: <i>GANHEI</i> ou <i>NÃO</i> <i>GANHEI</i>
		SIM	NÃO	
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				

Agora, responda às perguntas abaixo de acordo com o que ocorreu nas suas simulações.

- a) Qual estratégia vocês mais utilizaram: trocar a porta ou não?
- b) Construa aqui um gráfico de barras (um exemplo será mostrado nos slides) mostrando quantas vezes vocês ganharam ao utilizar a estratégia de *Trocar de Porta* e *Não Trocar de Porta*?



- c) Logo após as simulações, responda: qual você acha que deve ser a estratégia que representa o menor risco: trocar a porta ao ser questionado (a) pelo apresentador ou não? Explica tua resposta, consagrado (a).
- d) Por último, mas não menos importante: você acha que brincar dessa forma te ajudou a pensar em uma estratégia de vencer? O quão confiável você acha que essa situação é? Explica pra gente como você chegou nessa conclusão.

APÊNDICE C – PROBLEMA FINAL DE PROBABILIDADE SUBJETIVA

PPGEDUMATEC

Mestrando: Anderson Rodrigo

Orientador: José Ivanildo F. de Carvalho

Nome/Apelido (utilize o mesmo que você escreveu na primeira atividade):

PROBLEMA FINAL

Queridos e queridas,

Chegamos ao fim da nossa vivência, e como última etapa, gostaríamos que vocês respondessem aos problemas que se seguem logo abaixo. Foi uma longa e divertida caminhada. *Desde já agradecemos a tod@s!*

SITUAÇÃO

Imagine que você se encontra em um cenário onde está em um *date*¹ⁱ com seu/sua crush dos sonhos, e nesse momento, você deve sugerir um filme para que vejam juntos.

De acordo com a situação acima, responda aos questionamentos que se seguem.

Considere o seguinte evento: “Recomendar o filme *UM AMOR PARA RECORDAR* para assistirem juntos”.

SINOPSE



7 de fevereiro de 2003 No cinema / 1h

52min / Romance, Drama

Direção: Adam Shankman

Roteiro: Nicholas Sparks

Elenco: Mandy Moore, Shane West, Peter Coyote

Título original *A Walk to Remember*

Em plenos anos 90, Landon Carter (Shane West) é punido por ter feito uma brincadeira de mal gosto em sua escola. Como punição ele é encarregado de participar de uma peça teatral, que está sendo montada na escola. É quando ele conhece Jamie Sullivan (Mandy Moore), uma jovem estudante de uma escola pobre. Com o tempo Landon acaba se apaixonando por Jamie que, por razões pessoais, faz de tudo para escapar de seu assédio.

Disponível em: <<[>>https://www.adorocinema.com/filmes/filme-40910/](https://www.adorocinema.com/filmes/filme-40910/)>>.

a) Qual a probabilidade de você recomendar o filme acima?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

b) Explique os motivos pelos quais você tomou a decisão acima ao atribuir a probabilidade.

- c) Imagine agora: você abre o instagram do seu/sua crush e vê que ele é fã de Heavy Metal (Rock de quem “come morcego” kkkk). Agora, sabendo disso, qual a probabilidade de você **não** recomendar o filme acima?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

- d) Você acredita que sua experiência sobre algo influencia a tomada de decisão no cotidiano?

- e) Considere o CENÁRIO #2:

Em uma excursão de colégio, sabe-se que 70% dos estudantes adoram baladas de funk. Entre o grupo que adora esse tipo de balada, sabemos que 20% gostam de música clássica. Já entre os estudantes que não gostam de baladas de funk, 40% curtem músicas clássicas.

- e.1) Qual a probabilidade de, ao escolher uma pessoa aleatoriamente dessa excursão, a mesma gostar de música clássica?

- e.2) Imagine que você encontrou uma pessoa e a mesma gosta de funk. Qual a probabilidade de você colocar uma música clássico num possível *date* entre vocês?

0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

- e.3) Você já pensou anteriormente que ao tomar essas decisões você sempre usou, mesmo que sem saber, seus conhecimentos acerca de probabilidade?

- e.4) Explique as razões pelas quais você escolheu a probabilidade da resposta à pergunta e.2.

¹ Date = encontro.