



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO - CE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA

JHONATAN DE HOLANDA CAVALCANTI

**ARTICULAÇÃO ENTRE A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA E A
REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO OBJETO RETA UTILIZANDO O
SOFTWARE *FUNCTION STUDIUM***

Recife
2023

JHONATAN DE HOLANDA CAVALCANTI

**ARTICULAÇÃO ENTRE A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA E A
REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO OBJETO RETA UTILIZANDO O
SOFTWARE *FUNCTION STUDIUM***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain

Recife

2023

Catálogo na fonte
Bibliotecária Anaíse de Santana Santos, CRB-4/2329

C377a

Cavalcanti, Jhonatan de Holanda.

Articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta utilizando o software Function Studium. / Jhonatan de Holanda Cavalcanti. – Recife, 2023.

125 f.: il.

Orientador: Franck Gilbert René Bellemain.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2023. Inclui Referências.

1. Articulação. 2. Representação algébrica. 3. Representação geométrica. 4. Registros de representação semiótica. 5. Reta. I. Bellemain, Franck Gilbert René. (Orientador). II. Título.

370 (23. ed.)

UFPE (CE2023-012)

JHONATAN DE HOLANDA CAVALCANTI

**ARTICULAÇÃO ENTRE A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA E A
REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO OBJETO RETA UTILIZANDO O
SOFTWARE *FUNCTION STUDIUM***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 16/01/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Prof^a. Dr^a. Iracema Campos Cusati (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Prof. Dr. Ricardo Tiburcio dos Santos (Examinador Externo)
Prefeitura do Recife - PCR

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha avó Maria das Dores (*In Memoriam*), que me protege e me guia em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, por toda força dada a mim para superar as dificuldades durante o processo. Toda honra e toda glória sejam dadas a ti, Senhor!

À minha mãe, Cristina Cavalcanti, pelo apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida. Sem você, nada seria possível.

Às minhas tias Carmen Cavalcanti e Cleide Cavalcanti, por acreditarem em mim e não medirem esforços para a concretização dos meus sonhos.

À minha noiva, Nathália Ribeiro, que sempre esteve comigo todo o tempo, dando-me apoio e incentivo, sendo, acima de tudo, companheira.

À minha prima Danúbia Caroline, que em todos os momentos se fez presente na minha vida e estará sempre em meu coração.

Ao meu orientador, professor Franck Bellemain, por ser tão solícito, companheiro e, acima de tudo, pelas grandes contribuições que proporcionaram o desenvolvimento deste estudo.

À professora Paula Baltar, pela disponibilidade e orientações que proporcionaram significativas contribuições para o desenvolvimento desta dissertação.

À Banca Examinadora, constituída pelos professores Ricardo Tiburcio e Iracema Cusati, pelos conhecimentos compartilhados e contribuições significativas para esta pesquisa.

A todos os colegas e professores, em especial José Vitor, Ricardo Tiburcio e Tarcísio Rocha, que participaram do Grupo de Pesquisa Atelier Digitas e nos seminários da linha de pesquisa Educação Tecnológica, pelas importantes sugestões para o desdobramento desta pesquisa.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo principal analisar como estudantes do 3º ano do ensino médio realizam a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, dispondo-se do software *Function Studium* como ferramenta a ser utilizada nesse processo. Para contemplar o objetivo previamente exposto, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: (a) Investigar as dificuldades apresentadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio ao realizarem a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta. (b) Compreender as implicações desse software sobre a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta. (c) Discutir a utilização do software em relação à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta. (d) Analisar criticamente as potencialidades e as dificuldades/limitações do software quanto à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, na perspectiva de elaborar funcionalidades para possíveis modificações dentro desse ambiente. O quadro teórico é constituído pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Duval. Nessa perspectiva, realizamos uma análise prévia em relação ao objeto reta à luz da Engenharia Didático-Informática (EDI) considerando-se suas dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática, interligando-as. Além disso, utilizamos a EDI como quadro de análise/quadro de referência para a utilização de software educativo para um artefato que já foi desenvolvido. Com isso, percebemos a necessidade de propor situações utilizando como ferramenta o software *Function Studium*, levando em consideração nosso aporte teórico e os estudos preliminares realizados. As situações foram experimentadas e analisadas a fim de realizarmos uma análise crítica do software a partir da EDI, apontando suas potencialidades e dificuldades/limitações, na perspectiva de aprimoramento da tecnologia.

Palavras-chave: articulação; representação algébrica; representação geométrica; registros de representação semiótica; reta.

ABSTRACT

The main objective of this research is to analyze how students in the 3rd year of high school realize the articulation between the algebraic representation and the geometric representation of the straight object, using the Function Studium software as a tool to be adopted in this process. To achieve the previously exposed objective, we have established the following specific objectives: (a) To investigate the difficulties presented by 3rd year high school students when performing the articulation between the algebraic representation and the geometric representation of the straight object. (b) Understand the implications of this software on the articulation between the algebraic representation and the geometric representation of the straight object. (c) Discuss the use of the software in relation to the articulation between the algebraic representation and the geometric representation of the straight object. (d) Critically analyze the potentialities and difficulties/limitations of the software regarding the articulation between the algebraic representation and the geometric representation of the straight object, in the perspective of developing functionalities for possible modifications within this environment. The theoretical framework is constituted by the Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS), proposed by Duval. In this perspective, we realized a previous analysis in relation to the straight object in the light of Didactic-Informatics Engineering (EDI) considering its epistemological, didactic, cognitive and informatics dimensions, interconnecting them. In addition, we use EDI as an analysis/reference framework to use educational software for an artifact that has already been developed. With this, we realized the need to propose situations using the Function Studium software as a tool, considering our theoretical contribution and the preliminary studies realized. The situations were experienced and analyzed to realize a critical analysis of the software from the EDI, pointing out the potentialities and difficulties/limitations, in the perspective of technology improvement.

Keywords: articulation; algebraic representation; geometric representation; semiotic representation records; straight line.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Modelo de Processo de Software – Engenharia Didático-Informática	21
Figura 2 –	Exemplos acerca dos signos e das representações na Teoria dos Registros de Representação Semiótica	26
Figura 3 –	Conversão e articulação de representações de um objeto	27
Figura 4 –	Exemplo relativo a tratamento e conversão	28
Figura 5 –	Marcos na História da Matemática em relação ao objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções	34
Figura 6 –	Representação gráfica dos elementos da geometria plana	38
Figura 7 –	Linha do tempo a respeito do estudo da reta em diversos momentos de escolaridade e com diferentes abordagens	45
Figura 8 –	Principais contribuições dos estudos preliminares de cada uma das dimensões	54
Figura 9 –	Tela inicial do software GeoGebra expondo a equação da reta	59
Figura 10 –	Tela inicial do software GeoGebra expondo a equação da reta passando por dois pontos	59
Figura 11 –	Tela inicial do software Desmos expondo a equação da reta passando por dois pontos	60
Figura 12 –	Tela inicial do software Winplot expondo a equação da reta	61
Figura 13 –	Tela inicial do software <i>Function Studium</i>	63
Figura 14 –	Utilização do software <i>Function Studium</i> na situação 2	67
Figura 15 –	Utilização do software <i>Function Studium</i> na situação 4	69
Figura 16 –	Situação 1 resolvida pela Dupla 4	79
Figura 17 –	Recorte da situação 2 resolvida pela Dupla 1 no <i>Function Studium</i>	80
Figura 18 –	Situação 2 resolvida pela Dupla 1	80
Figura 19 –	Situação 2 resolvida pela Dupla 2	81
Figura 20 –	Situação 2 resolvida pela Dupla 4	81
Figura 21 –	Recorte da situação 2 resolvida pela Dupla 4 no <i>Function Studium</i>	82

Figura 22 –	Situação 3 resolvida pela Dupla 1	83
Figura 23 –	Recorte da situação 3 resolvida pela Dupla 1 no <i>Function Studium</i>	83
Figura 24 –	Situação 3 resolvida pela Dupla 2	84
Figura 25 –	Situação 3 resolvida pela Dupla 4	85
Figura 26 –	Situação 4 resolvida pela Dupla 1	85
Figura 27 –	Recorte da situação 4 resolvida pela Dupla 1 no <i>Function Studium</i>	86
Figura 28 –	Situação 4 resolvida pela Dupla 2	87
Figura 29 –	Situação 4 resolvida pela Dupla 3	87
Figura 30 –	Situação 5 resolvida pela Dupla 3	88
Figura 31 –	Situação 6 resolvida pela Dupla 3	89
Figura 32 –	Recorte da situação 6 resolvida pela Dupla 1 no <i>Function Studium</i>	90
Figura 33 –	Situação 7 resolvida pela Dupla 3	92
Figura 34 –	Recorte da situação 7 resolvida pela Dupla 3 no <i>Function Studium</i>	92
Figura 35 –	Recorte da situação 7 resolvida pela Dupla 4 no <i>Function Studium</i>	93
Figura 36 –	Recorte da situação 7 resolvida pela Dupla 4 no <i>Function Studium</i>	93
Figura 37 –	Situação 8 resolvida pela Dupla 2	94
Figura 38 –	Recorte da situação 8 resolvida pela Dupla 3 no <i>Function Studium</i>	95
Figura 39 –	Pontos importantes em relação à análise crítica do software <i>Function Studium</i>	101

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Classificação das diferentes representações mobilizáveis no funcionamento matemático	29
Quadro 2 –	Diferentes representações para o objeto reta	30
Quadro 3 –	Relação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções nas coleções de livros didáticos de Matemática aprovadas no PNLD – 2018	49
Quadro 4 –	Possíveis sugestões da utilização de recursos computacionais em relação ao conteúdo “reta” nos livros didáticos, do 3º ano do ensino médio, aprovados no PNLD – 2018	53
Quadro 5 –	Objetivos das situações em torno dos aspectos em relação a análise crítica do software <i>Function Studium</i>	74
Quadro 6 –	Informações dos encontros com as duplas na fase de experimentação	76
Quadro 7 –	Levantamento dos resultados em torno das situações propostas na experimentação	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Abordagem referente à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta nos livros didáticos do 3º ano do ensino médio aprovados no PNLD - 2018	52
------------	---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	QUADRO DE ANÁLISE/QUADRO DE REFERÊNCIA PARA UTILIZAÇÃO DE SOFTWARE EDUCATIVO À LUZ DA ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA	20
2.1	ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA: UMA METODOLOGIA PARA O DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE EDUCATIVO	20
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	24
3.1	TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	25
3.1.1	Diversas representações do objeto reta	28
3.1.1.1	Língua natural (materna)	31
3.1.1.2	Articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica	32
4	ESTUDOS PRELIMINARES	34
4.1	MARCOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA SOBRE A RELAÇÃO DO OBJETO RETA NA GEOMETRIA ANALÍTICA E NO ESTUDO DAS FUNÇÕES	34
4.2	UM ESTUDO ACERCA DA RETA	37
4.3	DIFICULDADES DOS ESTUDANTES	40
4.3.1	Dificuldade dos alunos em relação ao conteúdo de função	42
4.4	ANÁLISE DOS DOCUMENTOS DE ORIENTAÇÃO CURRICULAR	44
4.5	ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS	48
4.6	SOFTWARE DINÂMICO	54
4.7	ANÁLISE DE SOFTWARES DINÂMICOS	57
4.7.1	Software GeoGebra	58
4.7.2	Software Desmos	60
4.7.3	Software Winplot	61
4.8	UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE <i>FUNCTION STUDIUM</i> : UMA ALTERNATIVA PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM	62
5	DESCRIÇÃO DAS SITUAÇÕES	65

5.1	SITUAÇÕES ENVOLVENDO A COMPREENSÃO DO OBJETO RETA	66
5.2	SITUAÇÕES ACERCA DA RELAÇÃO DO OBJETO RETA NA GEOMETRIA ANALÍTICA E NO ESTUDO DAS FUNÇÕES	68
5.3	SITUAÇÕES ABRANGENDO A ARTICULAÇÃO ENTRE A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA E A REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO OBJETO RETA	70
6	EXPERIMENTAÇÃO	75
7	ANÁLISE DOS DADOS EXPERIMENTAIS	78
7.1	SITUAÇÃO 1	79
7.2	SITUAÇÃO 2	79
7.3	SITUAÇÃO 3	82
7.4	SITUAÇÃO 4	85
7.5	SITUAÇÃO 5	88
7.6	SITUAÇÃO 6	89
7.7	SITUAÇÃO 7	91
7.8	SITUAÇÃO 8	94
8	ANÁLISE CRÍTICA DO SOFTWARE <i>FUNCTION STUDIUM</i>	100
8.1	AS POTENCIALIDADES DO SOFTWARE <i>FUNCTION STUDIUM</i>	102
8.2	AS DIFICULDADES/LIMITAÇÕES NA UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE <i>FUNCTION STUDIUM</i>	103
9	CONSIDERAÇÕES GERAIS	105
9.1	AS IMPLEMENTAÇÕES SUGERIDAS NO SOFTWARE <i>FUNCTION STUDIUM</i>	106
9.2	ESTUDOS FUTUROS	108
	REFERÊNCIAS	110
	APÊNDICE A – SITUAÇÕES DE ENSINO	116
	APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	121

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa surgiu da vivência do pesquisador como professor da disciplina de Matemática em uma escola situada na cidade de Gravatá-PE, com turmas do 3º ano do ensino médio, ao deparar-se com a dificuldade dos estudantes acerca da articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta.

Nessa conjuntura, vale destacar que este estudo segue na vertente de uma continuidade dos trabalhos de Cavalcante (2019) e Silva (2016) em relação ao software *Function Studium*, e de Siqueira (2009) no que cerne à articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto matemático.

Dessa forma, na perspectiva do estudo de Siqueira (2009), utilizamos o termo **forma algébrica** para nos referirmos às diversas escritas da expressão algébrica ou equação, e **forma geométrica** para nos referirmos ao gráfico correspondente. Bellemain (2004) aponta que a organização em torno de formas se baseia na pertinência do reconhecimento das formas algébricas na medida em que esse reconhecimento dá acesso a uma forma e, por meio dela, às diversas transformações possíveis de uma expressão (BELLEMAIN, 2004).

As reflexões envolvendo o objeto reta são frequentes nas pesquisas da área da Matemática, trazendo para o processo a utilização de ferramentas computacionais com o intuito de proporcionar um tratamento dinâmico, favorecendo as articulações das representações dos objetos matemáticos. Esse contexto nos orientou na busca de um referencial que abordasse as representações utilizadas em sala de aula. Sob esse viés, encontramos Raymond Duval, na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), que serviu de fundamentação teórica do nosso estudo, enfatizando a importância da diversidade de sistemas de representação e a articulação entre eles nas atividades matemáticas (DUVAL, 2003).

Nesse sentido, buscamos realizar uma análise preliminar referente ao objeto reta nos diferentes contextos sob à luz da Engenharia Didático-Informática (EDI) através das suas dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática (TIBURCIO; BELLEMAIN, 2021) de forma que estejam entrelaçadas (BELLEMAIN, 2022), direcionando-nos a alguns caminhos descritos a seguir.

Os trabalhos de construção da EDI iniciaram no Grupo de Pesquisas LEMATEC e, atualmente, são realizados no grupo de pesquisa Atelier Digitas, vinculado à Universidade Federal de Pernambuco. A perspectiva da EDI é sistematizar a

concepção de artefatos computacionais e analisar softwares existentes, articulando as Engenharias de Software e Didática (TIBURCIO; BELLEMAIN, 2021).

Nesse sentido, utilizamos a EDI como quadro de análise/quadro de referência para utilização de software educativo para um artefato que já foi desenvolvido, o *Function Studium*. Dessa forma, buscamos realizar uma análise crítica do *Function Studium* a partir da EDI na perspectiva de aprimoramento dessa tecnologia, analisando as potencialidades e as dificuldades/limitações do software.

O *Function Studium* é uma ferramenta multirrepresentacional para o estudo de funções, com ênfase no raciocínio covariacional, desenvolvida no Grupo de Pesquisas LEMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como parte das dissertações de mestrado de Silva (2016) e Tibúrcio (2016) (SILVA *et al.*, 2017). Vale ressaltar que o software *Function Studium*, mesmo tendo como base a taxa de variação, na vertente do estudo de Silva (2016), incorpora ideias inicialmente exploradas por Bellemain e Siqueira (SIQUEIRA, 2009; SIQUEIRA; BELLEMAIN, 2010), no que tange a articulação entre representações de diversos registros.

Apoiados em estudos sob a ótica da História da Matemática, como Mafra (2009), Soares (2013) e Cavalcante (2019), abordamos o contexto histórico do estudo da reta e trouxemos uma breve apresentação, em forma de marcos na História da Matemática, trabalhando a conexão do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções. Ademais, apresentamos a origem das funções e a evolução de suas definições no decorrer do tempo.

Posteriormente, suscitamos, para nossas análises prévias, um estudo acerca da reta, considerada noção primitiva da geometria. Contudo, essa noção não torna inviável a ação de reforçar a intuição do estudante, fator esse que, de certa forma, já ocorria nos Elementos de Euclides.

Nessa conjuntura, surge um fator importante em nossa pesquisa, que são as dificuldades dos estudantes em relação ao estudo da reta, sendo válido frisar que diversas pesquisas foram realizadas com o intuito de mostrar a correlação da reta com a TRRS e a articulação entre as representações (MARKOVITS; EYLON; BRUCKHEIMER, 1995; CASTRO, 2001; NOTARE; GRAVINA, 2013).

Notare e Gravina (2013) observam que um clássico exemplo de dificuldade dos estudantes é quanto à articulação da representação geométrica da reta para a representação algébrica; contudo, é no processo de conversão da geometria para a álgebra que os obstáculos na aprendizagem se mostram mais constantes.

A reta é estudada em diferentes momentos de escolaridade e com diversas abordagens: na geometria euclidiana plana, como um dos axiomas de Euclides, definida por dois pontos distintos; na função, como o gráfico da função afim; e na geometria analítica, sob parâmetro cartesiano e representação algébrica.

Isso posto, buscamos fazer uma análise nos documentos de orientação curricular e nos livros didáticos, focando quatro aspectos: o estudo da reta nos diferentes momentos da escolaridade e suas várias abordagens, a associação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções, a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, e o uso de softwares.

Nessa perspectiva, o uso do software dinâmico se mostra uma possibilidade para nosso estudo, pois tende a oferecer ao estudante um dinamismo na articulação, possibilitando que as representações (algébrica e geométrica) interajam entre si. Com isso, trouxemos para nosso estudo preliminar a análise de softwares no que se refere à conversão da representação algébrica e da representação geométrica, em ambos os sentidos. Dessa forma, apresentamos reflexões em relação a essas ferramentas, destacando o que realizam e o que não realizam diante dessa perspectiva.

A partir das análises, destaca-se o *Function Studium*, um software que permite representar graficamente e algebricamente funções polinomiais, permitindo, além disso, que a partir do movimento de pontos no gráfico possam ser obtidas modificações na sua representação algébrica, também explicitada na sua interface. O mesmo acontece no sentido contrário, ou seja, modificando os coeficientes da equação obtêm-se as alterações no gráfico.

A partir das considerações supracitadas, justificamos nosso estudo em relação à importância de analisarmos as dificuldades que podem ser apresentadas por estudantes do 3º ano do ensino médio após a realização da articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta ao utilizarem o software *Function Studium* nesse processo.

Com base nessa justificativa, propomos os seguintes problemas: que dificuldades podem ser apresentadas por estudantes do 3º ano do ensino médio ao realizarem a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta? Como a utilização do software *Function Studium* poderá ajudar no que diz respeito às dificuldades apresentadas pelos estudantes na

articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta?

Com o intuito de responder essas questões, consideramos como objeto de estudo a forma de interação dos estudantes do 3º ano do ensino médio em relação ao conteúdo “reta”. Como unidade de observação, consideramos a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica a partir do emprego do software *Function Studium*.

Para tanto, propomos o seguinte objetivo geral: analisar como estudantes do 3º ano do ensino médio realizam a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, dispondo-se do software *Function Studium* como ferramenta utilizada nesse processo.

Contemplando o objetivo geral, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: (a) investigar as dificuldades apresentadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio ao realizarem a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta; (b) compreender as implicações do software *Function Studium* sobre a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta; (c) discutir a utilização do software *Function Studium* em relação à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta; e (d) analisar criticamente as potencialidades e as dificuldades/limitações do software *Function Studium* quanto à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, na perspectiva de elaborar funcionalidades para possíveis modificações dentro desse ambiente.

Assim sendo, percebemos a necessidade de propor situações utilizando o software *Function Studium*. Para a elaboração das situações de ensino, nos embasamos em nossos estudos preliminares na perspectiva da EDI e na TRRS. Buscamos elaborar um conjunto de situações interligadas, iniciando com propostas mais simples, aumentando de forma gradativa o nível de dificuldade e introduzindo conceitos no decorrer do processo.

Essas situações foram pensadas como proposta a ser desenvolvida junto a estudantes do 3º ano do ensino médio, tendo duração estimada de um momento de três aulas. Foram elaboradas levando em consideração principalmente três aspectos importantes: a compreensão do objeto reta, a articulação do conteúdo “reta” na função afim e na geometria analítica, e o aprofundamento do estudo da reta por meio da

compreensão da conversão nos dois sentidos, entre as suas representações algébrica e geométrica.

De modo geral, as situações podem ser divididas em três categorias de análise, sendo elas: compreensão do objeto reta e abordagem de aspectos das representações gráfica e algébrica da reta; reflexão sobre as relações do objeto reta nas temáticas da função afim e da geometria analítica; e articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

As oito situações que propusemos experimentar foram abordadas com oito estudantes do 3º ano do ensino médio, formando quatro duplas. Um aspecto fundamental que nos levou a propor as situações em duplas foi favorecer a verbalização das dificuldades, e efetivamente possíveis conflitos sociocognitivos. De fato, os estudantes precisaram dialogar, discutir e argumentar para que encontrassem uma resposta que representasse a dupla diante das situações propostas. Tais fatores foram de grande contribuição para nossas análises e objetivos da pesquisa.

Diante das situações, os estudantes foram levados a refletir, discutir e apresentar respostas, processo esse que foi registrado através de gravação (áudio e vídeo) para posterior análise. A experimentação aconteceu em uma escola estadual situada no município de Gravatá-PE. Na escolha da escola, levou-se em consideração a disposição dos estudantes em colaborar, a existência de um laboratório de informática e a proposta pedagógica em conexão com os documentos oficiais de orientação curricular.

Como consequência, na análise dos dados coletados utilizamos a abordagem qualitativa, pela importância dada pelo pesquisador à interpretação do fenômeno em estudo, buscando compreender detalhes das informações obtidas (PEREIRA *et al.*, 2018).

Para a análise, foram considerados os dados coletados a partir dos registros material e virtual dos estudantes. Dessa forma, tivemos a possibilidade de acompanhar o modo como os estudantes realizaram a articulação entre o gráfico e a equação.

Uma vez organizados os dados, fizemos sua categorização e análise, objetivando, sobretudo, uma análise crítica do software *Function Studium* a partir da EDI e a identificação dos erros e das dificuldades dos alunos na articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta. Assim, apresentamos as potencialidades e as dificuldades/limitações de seu uso na perspectiva de

aprimoramento da tecnologia no que tange à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

Diante do contexto, a pesquisa aqui apresentada é composta por fases em uma perspectiva teórica operacional, a fim de atender os objetivos já especificados: (a) Utilização da Engenharia Didático-Informática como estrutura do processo de análise do software *Function Studium*; (b) Análise preliminar referente ao objeto reta através das dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática, propostas pela Engenharia Didático-Informática; (c) Detalhamento acerca das situações de ensino, explicitando suas devidas justificativas de concepção e as expectativas de possíveis respostas dos estudantes; (d) Experimentação com estudantes do 3º ano do Ensino Médio em torno de situações de ensino elaboradas na perspectiva da análise preliminar realizada e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica; (e) Análise dos dados obtidos a partir de uma abordagem qualitativa; (f) Análise crítica do *Function Studium*, na perspectiva de aprimoramento da tecnologia, analisando as potencialidades e dificuldades/limitações do software.

Nesse sentido, podemos destacar como pontos específicos acerca do percurso que utilizamos para delinear a pesquisa: (a) A Engenharia Didático-Informática como processo de concepção de software educativo ou de análise de um artefato já existente; (b) A Engenharia Didático-Informática como estrutura da pesquisa, a partir das suas dimensões epistemológica, cognitiva, didática e informática; (c) As situações de ensino que propusemos a experimentar, com o intuito de efetuar um levantamento mais amplo das potencialidades e das dificuldades/limitações do *Function Studium*, a partir do uso do software com estudantes do 3º ano do Ensino Médio no que cerne a articulação entre as representações algébricas e geométricas do objeto reta; (d) A Engenharia Didático-Informática sendo utilizada para analisar criticamente um software já existente, permitindo, dessa forma, sua validação; (e) A Engenharia Didático-Informática trazendo reflexões sobre sua utilização, na perspectiva da evolução do software *Function Studium*, através da elaboração de funcionalidades para possíveis modificações dentro do ambiente.

2 QUADRO DE ANÁLISE/QUADRO DE REFERÊNCIA PARA UTILIZAÇÃO DE SOFTWARE EDUCATIVO À LUZ DA ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA

Neste capítulo, propomos descrever a Engenharia Didático-Informática (TIBURCIO, 2016, 2020; TIBURCIO; BELLEMAIN, 2021), uma metodologia para o desenvolvimento de software educativo, que, juntamente com as reflexões iniciais em relação à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, nos direcionou para organizarmos nosso estudo preliminar, considerando-se suas dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática (TIBURCIO; BELLEMAIN, 2021) de forma entrelaçada (BELLEMAIN, 2022).

Os trabalhos de construção da EDI iniciaram no Grupo de Pesquisas LEMATEC e, atualmente, são realizados no grupo de pesquisa Atelier Digitas, vinculado à Universidade Federal de Pernambuco. O grupo tem como foco a concepção, o desenvolvimento e a validação de ferramentas informáticas para a organização e gestão de situações de ensino, reunindo pesquisadores das áreas de Educação Matemática, Expressão Gráfica e Educação Tecnológica, com o intuito de articular conhecimentos de educação, informática, ensino de conteúdos e didáticas específicas desses temas em uma perspectiva transdisciplinar.

Levando-se em conta a temática deste estudo por meio da EDI, pensamos em alguns questionamentos relativos ao *Function Studium*, como: “O que o software pode proporcionar além do que já oferece?”, “Quais são as adaptações necessárias?”, “Quais são as modificações?” e “Em que o software pode evoluir?”.

2.1 ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA: UMA METODOLOGIA PARA O DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE EDUCATIVO

A Engenharia Didático-Informática (TIBURCIO; BELLEMAIN, 2021) é uma metodologia para desenvolvimento de software educativo, a qual se constitui da percepção em utilizar os procedimentos metodológicos e as reflexões teóricas da Engenharia de Software (SOMMERVILLE, 2011) e da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988, 1996).

Para Tiburcio (2016), a necessidade de propor a relação entre as engenharias nasce a partir da observação de algumas limitações para a criação de software educativo. No caso da Engenharia Didática, em suas contribuições, a metodologia não

contempla a totalidade das exigências para a concepção de software educativo; já a Engenharia de Software não reúne as especificidades que os artefatos computacionais educativos necessitam, ou seja, os modelos padronizados de desenvolvimento foram criados para outras finalidades fora do contexto do processo de ensino e aprendizagem (TIBURCIO, 2016).

O modelo da EDI, como mostra a figura a seguir, é composto por quatro fases, sendo elas a analítica, a hipotética, a experimental e a operacional, e é formado pelos ciclos analítico-hipotético, hipotético-experimental, experimental-operacional e operacional-analítico, que são constituídos pela integração das fases. Vale destacar que cada ciclo reflete um avanço no processo; porém, de forma simultânea, as fases são consideradas e revisitadas (TIBURCIO, 2020).

Figura 1 – Modelo de Processo de Software – Engenharia Didático-Informática



Fonte: Tiburcio (2020).

A EDI apresenta intersecção com nossa pesquisa, principalmente no que se refere a forma como as tecnologias podem auxiliar efetivamente nas atividades de ensino e aprendizagem. Por esse motivo, se torna um fator importante para a disposição de nossas análises preliminares em torno do objeto reta e das situações propostas.

Nessa perspectiva, para respondermos nossas questões de pesquisa e direcionarmos nossos estudos prévios, pautamo-nos nas dimensões epistemológica, cognitiva, didática e informática propostas pela EDI. Considerando a importância de analisá-las interligando-as, em nosso estudo realizamos as análises preliminares das diferentes dimensões de forma a não as explorar de maneira isolada, mas articulada (BELLEMAIN, 2022).

Segundo Tiburcio (2016), no procedimento de análises preliminares da EDI, é realizado um levantamento direcionado com o propósito de conhecer quais são os encaminhamentos didáticos, epistemológicos, cognitivos e tecnológicos do objeto de estudo em questão. Para isso, buscamos referência em Artigue (1988, 1996) e Tiburcio (2016).

Para Artigue (1988, 1996), a dimensão epistemológica está associada às características específicas do conteúdo em questão; a cognitiva leva em consideração os aspectos cognitivos do público ao qual se dirige o ensino; já a didática está relacionada ao funcionamento do processo de ensino, investigando seu estado atual. Em complemento, segundo Tiburcio (2016), a dimensão informática tende a tratar especificamente das questões tecnológicas computacionais, articulada com as demais dimensões, procurando notadamente como os recursos tecnológicos podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

Em nossos estudos preliminares do objeto reta, buscamos organizar nossos tópicos de abordagem em torno das dimensões da EDI nas seguintes vertentes: primeiro, acerca de marcos na História da Matemática sobre a relação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções, seguido de um estudo voltado para a reta. A seguir, trouxemos as dificuldades dos estudantes no tocante ao conteúdo em questão, acompanhadas das análises dos documentos de orientação curricular e dos livros didáticos. Para finalizar, fizemos um levantamento em relação a softwares, adentrando sob o termo “dinâmico”, à utilização do software *Function Studium* para o processo de ensino e de aprendizagem e uma análise dos artefatos computacionais GeoGebra, Desmos e Winplot.

A primeira parte dos estudos preliminares, a partir das dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas, possibilitou contribuir para definirmos quais seriam as funcionalidades interessantes para um software, para que, com isso, na dimensão informática, analisássemos sob essa ótica os recursos computacionais citados.

Salientamos a importância dessa metodologia acerca da construção de software educativo no que concerne ao desenvolvimento do software *Function Studium* a partir das premissas da EDI, artefato esse utilizado na experimentação das situações propostas em nosso estudo, abordando prioritariamente a conversão das representações algébrica e geométrica do objeto reta nos dois sentidos.

Esperamos, assim, que através do levantamento preliminar realizado, tomando como base as dimensões propostas pela EDI, possamos responder nossos questionamentos iniciais, contemplar nossos objetivos de pesquisa e, pensando em um aspecto operacional, identificar o que precisamos em um software e de que forma os softwares podem nos auxiliarem efetivamente no processo de ensino e aprendizagem do objeto reta.

Vale destacar que esse levantamento precede a análise de software, e auxilia a montagem da experimentação com o software *Function Studium*, que, por sua vez, dará subsídios na perspectiva de elaborar funcionalidades para possíveis modificações dentro desse ambiente.

Por conseguinte, buscaremos o aprimoramento de um software existente, o *Function Studium*, através de uma análise crítica do artefato a partir da EDI, por meio da qual enfatizaremos suas potencialidades e dificuldades/limitações. Em linhas gerais, analisaremos as possibilidades de utilização do software *Function Studium* para o estudo do objeto reta, adentrando na articulação entre as representações algébrica e geométrica, e buscaremos verificar quais são as potencialidades, dificuldades/limitações, os benefícios, as falhas e os problemas gerais encontrados com o uso. Essa investigação, com foco nas situações de ensino propostas, gera um retorno de informações e diversos incrementos que podem ser realizados, enriquecendo a atualização do software com as observações efetuadas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As dificuldades apresentadas pelos estudantes, ponto que descreveremos mais adiante, e a necessidade de articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, nos direcionou na busca de um referencial que abordasse as representações utilizadas em sala de aula. Encontramos Raymond Duval, que direciona suas pesquisas para os registros de representação semiótica.

Nesse sentido, buscamos adentrar nos estudos da TRRS com base em três vertentes: compreender a teoria de uma maneira mais ampla, associar a teoria com o estudo da reta e a dificuldade dos estudantes e, a partir da teoria, identificar o que precisamos que um software realize na articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta.

Vale destacar que a dimensão cognitiva proposta pela Engenharia Didático-Informática tem o propósito de compreender a natureza e onde se encontram as dificuldades que inúmeros estudantes, e muitas vezes professores, têm na compreensão de conceitos matemáticos, contexto esse bastante presente na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que busca analisar as dificuldades e os problemas da aprendizagem.

Outro fator importante em nosso estudo, é o uso do termo **forma**, no qual, segundo Bellemain (2004), pode ser considerado como um elemento de sentido da representação enquanto unidade significativa (ou grupo de unidades).

Segundo Bellemain (2022), em matemática, o termo **forma** é usado

Para certas classes de equivalência de objetos organizados por uma relação de equivalência definida: falamos de forma linear, forma quadrática, ..., mas a ideia de forma se estende a outras classes de objeto: forma canônica, forma fatorada, etc., cuja relação de equivalência pode ser descrita pelos tratamentos que cada uma permite implementar. De fato, essas formas interessam mais à resolução de problemas do que como objeto de estudo, pois por meio delas, o que interessa em um processo heurístico é o 'reconhecimento de formas' (BELLEMAIN, 2022, p. 98).

A noção de forma na geometria é, do ponto de vista epistemológico, relevante e transversal para a compreensão de muitos conteúdos. Contudo, a caracterização da noção de forma em geometria é mais geral do que usualmente aceita, pois se é aceito que dois objetos têm a mesma forma caso haja uma semelhança que transforme um no outro, essa caracterização não nos permite considerar, por exemplo, retângulos, paralelogramos, cônicas, produtos da implementação do termo

forma, pois esses objetos não são semelhantes no sentido de semelhança (BELLEMAIN, 2022).

Diante dessa perspectiva, e seguindo na vertente do estudo de Siqueira (2009), utilizamos o termo **forma algébrica** para nos referirmos às diversas escritas da expressão algébrica ou equação, e **forma geométrica** para nos referirmos ao gráfico correspondente. O fato de usarmos o termo **forma geométrica**, ao invés de **forma gráfica**, justifica-se pela importância do nosso estudo, acerca do objeto reta, com a geometria.

Tendo em vista que uma das funções do simbolismo é facilitar o trabalho do entendimento, a organização do nosso estudo gira em torno de formas, fundando, por exemplo, a pertinência do reconhecimento de formas algébricas, uma vez que essa identificação concede acesso a uma forma e, por meio dela, aos diversos tratamentos possíveis de uma expressão (BELLEMAIN, 2004).

Segundo Bellemain (2004), as formas são reconhecidas em função de um entendimento das expressões, sendo guiadas pelos tratamentos passíveis de serem efetuados, e em função das situações em que esse reconhecimento tem sentido. Em complemento, o autor aponta que as formas algébricas participam na construção de um significado das estruturas algébricas, fator esse que reforça o reconhecimento de forma como um papel importante, pois contribui para a compreensão da situação.

3.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica se esforça em entender o funcionamento cognitivo dos estudantes em situações envolvendo sistemas de representação, possibilitando, desse modo, compreender as dificuldades e os problemas da aprendizagem em Matemática.

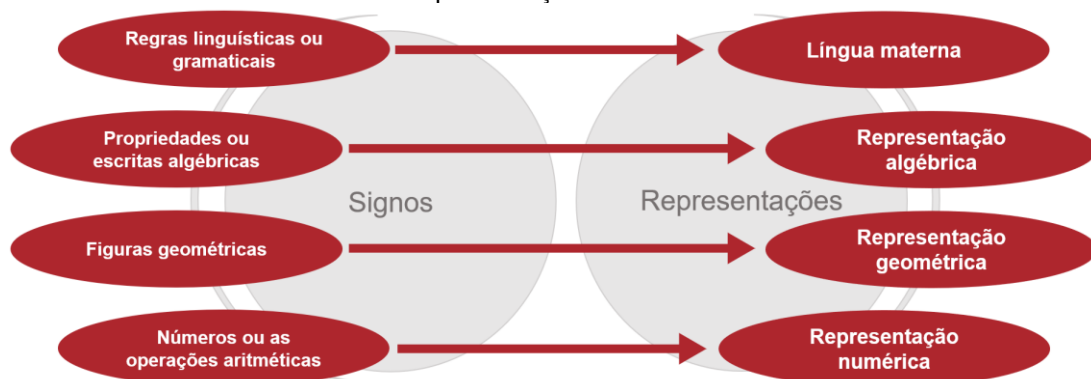
Em um de seus estudos, chamado “Gráficos e Equações: a articulação de dois registros”, realizado em 1988, Duval produziu uma série de perguntas voltadas para o reconhecimento de funções lineares e afins, com o intuito de entender se os estudantes compreendiam as mudanças das representações gráficas para a representação escrita. Tal questionário era composto por retas em várias posições em um plano cartesiano, alterando as características de sinal, número oposto e constantes.

Duval (1988), acerca do resultado do questionário, expôs a dificuldade dos estudantes em relação à percepção da conversão das representações, e mostrou que o processo de ensino e aprendizagem deve considerar essa dificuldade, analisando as conversões de representações semióticas. Com isso, deve haver uma articulação das representações, ou seja, a coordenação entre a linguagem natural e o uso das representações gráficas e geométricas. Assim, o autor define as representações semióticas como sendo:

produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes (DUVAL, 1993, p. 269).

Sob essa ótica, surgem dois termos importantes para essa teoria: os signos e as representações. Signo é um sinal mobilizado por um sujeito, capaz de permitir identificação de um registro de representação. Já uma representação é um sistema dotado de signos, que permitem definir uma representação de um objeto de saber. Henriques e Almouloud (2016) citam como exemplos as regras linguísticas ou gramaticais na língua materna, as propriedades ou escritas algébricas para a representação algébrica, as figuras geométricas (pontos, segmentos/retas/curvas, planos e superfícies) para a representação geométrica e os números e operações aritméticas para a representação numérica.

Figura 2 – Exemplos acerca dos signos e das representações na Teoria dos Registros de Representação Semiótica



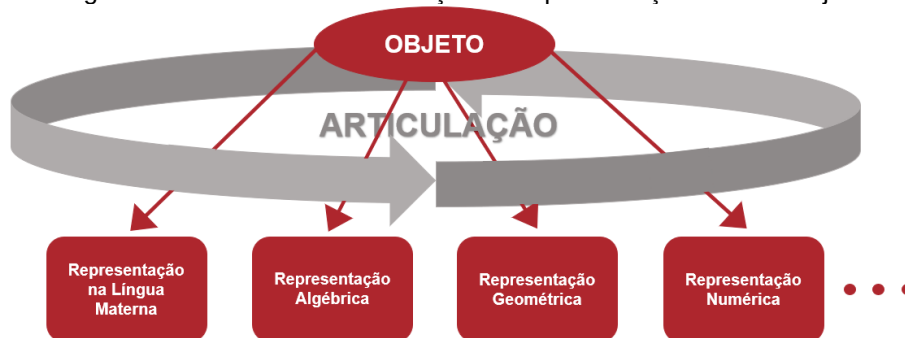
Fonte: Autor (2022).

Essa variedade de representações semióticas presentes na Matemática fez surgir a necessidade de organizar esses diversos tipos de representações em

diferentes tipos de registros, sendo definida, assim, a ideia de representação semiótica.

Duval (2003) destaca que um dos aspectos mais relevantes à originalidade da atividade Matemática diz respeito à mobilização simultânea de, no mínimo, dois registros de representação, ou à possibilidade de trocar a todo momento a representação na qual essa articulação das representações constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática.

Figura 3 – Conversão e articulação de representações de um objeto



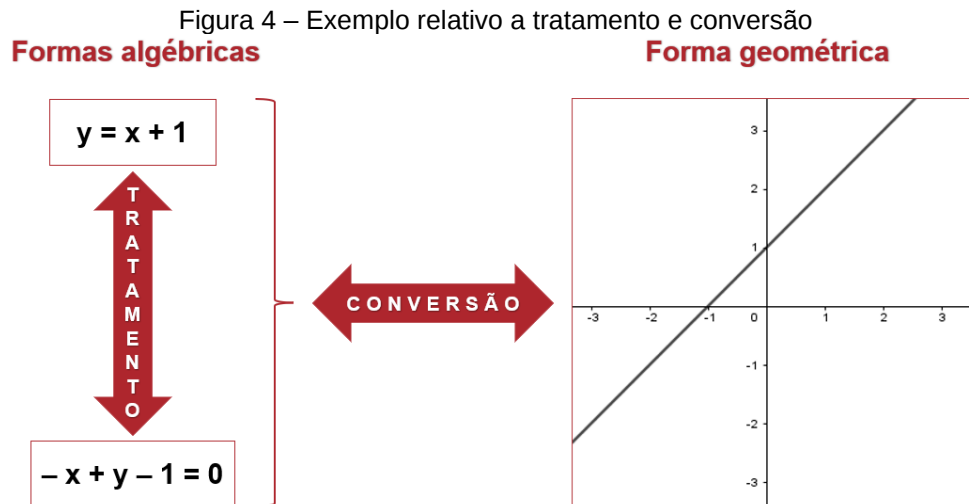
Fonte: Adaptado de Henriques e Almouloud (2016).

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, é necessário que se permita cumprir três atividades cognitivas características a toda representação, conforme é explicitado por Duval (1993):

- a) A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, etc. (DUVAL, 1993, p. 271).
- b) O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro (DUVAL, 1993, p. 272).
- c) A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter) (DUVAL, 1993, p. 272).

Possivelmente, não são todos os sistemas semióticos que possibilitam a realização dessas três atividades cognitivas fundamentais. Contudo, as características da linguagem Matemática permitem que elas aconteçam no que se refere aos gráficos e figuras geométricas e às linguagens natural, simbólica e algébrica.

Nessa perspectiva, podemos pensar como um exemplo de tratamento a passagem da equação reduzida da reta para a equação geral da reta, como mostra a figura a seguir. Já as conversões implicam mudar de forma conservando os mesmos objetos denotados, podendo-se citar como exemplo a passagem da forma algébrica para sua forma geométrica.



Fonte: Autor (2022).

Tomando como base o que foi exposto neste capítulo, a dificuldade presente no pensamento matemático é bastante evidenciada a partir da TRSS que, por sua vez, através do funcionamento cognitivo, esclarece as dificuldades de compreensão dos objetos matemáticos. O estudo desse processo implica maior atenção na elaboração de atividades que abordem a articulação entre diferentes registros de representação.

3.1.1 Diversas representações do objeto reta

No processo de ensino e aprendizagem, os estudos de Duval acerca da Teoria dos Registros de Representação Semiótica apontam que as representações elaboradas pelos alunos em torno dos objetos matemáticos são fundamentais. Nessa perspectiva, o intuito deste tópico é abordar as diferentes representações do objeto reta, mesmo que as representações enfatizadas em nosso estudo sejam as algébricas e geométricas. Nesta pesquisa, o tema matemático focado é o objeto reta, o qual nos permite explorar, dentre outras coisas, as representações em língua natural (materna), algébrica, geométrica e tabular.

Para Duval (2004), pelo fato de os estudantes apresentarem dificuldades na compreensão em Matemática, é necessário um enfoque cognitivo dos conteúdos abordados, buscando entender o funcionamento cognitivo que leva o estudante a compreender e efetuar os diversos processos matemáticos.

Diante dessas atividades cognitivas que necessitam de processos matemáticos, o autor aponta para a importância da utilização de uma variedade de representações. Por conseguinte, para Duval (1993), é essencial que haja o domínio da articulação entre essas representações para que o acesso à compreensão matemática se estabeleça. O autor, ao abordar essa articulação entre as diferentes representações, afirma que "uma aprendizagem especificamente centrada na troca e na coordenação dos diferentes registros de representação (conversão de registros), produz efeitos espetaculares sobre as tarefas de produção e compreensão" (DUVAL, 2004, p. 49).

Segundo Duval (2003), existem quatro tipos muito diferentes de Registros de Representações Semióticas, as quais são apresentadas no quadro 1.

Quadro 1 – Classificação das diferentes representações mobilizáveis no funcionamento matemático

	Representação Discursiva	Representação Não-discursiva
Registros Multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma racional: argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva. Apreensão operatória e não somente perspectiva; Construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: numéricas (binárias, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. Mudanças de sistema de coordenadas; Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p.14).

Os registros multifuncionais, cujos tratamentos não são algoritmizáveis, dispõem como representação discursiva a língua natural, ou seja, se evidenciam através de associações verbais conceituais pelas formas de raciocínio, as quais se baseiam, por exemplo, em observações e crenças, e pelo aspecto dedutivo, por meio de definições ou teoremas (DUVAL, 2003). Segundo o autor, tais registros se apresentam, além do mais, na forma não discursiva, como em figuras geométricas planas.

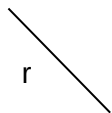
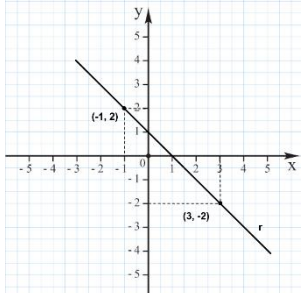
Nos registros monofuncionais, aqueles que possuem algoritmos próprios em sua disposição, segundo Duval (2003), na representação discursiva têm-se os sistemas de escritas numéricas, algébricas e simbólicas, bem como o cálculo. Na representação não discursiva encontram-se os gráficos cartesianos com as mudanças de sistemas de coordenadas, interpolação e extrapolação (DUVAL, 2003).

Diante desse cenário, julgamos importante não nos limitarmos apenas às representações algébrica e geométrica, que compõem o foco da pesquisa, mas também descrever de forma sucinta sobre as diversas representações do objeto reta, como a língua natural (materna), algébrica, geométrica e tabular.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), tanto para o ensino fundamental como para o ensino médio, orienta acerca da utilização de diferentes registros de representação para o objeto reta, quando abordado, por exemplo, o conceito de função afim.

No Quadro 2, a seguir, apresentamos diferentes representações semióticas para o objeto reta.

Quadro 2 – Diferentes representações para o objeto reta

Quadro 2 – Diferentes representações para o objeto reta								
Designação na língua natural	Designação simbólica	Representação figural						
Reta r	r							
Representação tabular	Representações algébricas	Representação geométrica						
<table border="1" data-bbox="317 1812 668 1924"><thead><tr><th>x</th><th>y</th></tr></thead><tbody><tr><td>3</td><td>-2</td></tr><tr><td>-1</td><td>2</td></tr></tbody></table>	x	y	3	-2	-1	2	$r: x + y - 1 = 0$. . . $r: y = -x + 1$	
x	y							
3	-2							
-1	2							

Fonte: Autor (2022).

Vale destacar que as representações, em sua maioria, são mistas, pois, mesmo que predominantemente sejam em língua natural, por exemplo, também possuem elementos da designação simbólica. Outro fator importante é a diferença acerca das representações gráficas: figural, a partir da Geometria Gráfica, e a geométrica, no que tange à Geometria Analítica. Associamos essa distinção principalmente em relação às funções e aos controles que elas permitem.

A seguir, descreveremos três registros de representação semiótica as quais nossos estudos preliminares apontaram serem importantes para o processo de ensino e aprendizagem do objeto reta, quais sejam: a língua natural (materna), primeira linguagem de entendimento do estudante (DUVAL, 2003); e as representações algébrica e geométrica, que compõem o foco da nossa pesquisa. Buscamos descrever a representação da língua natural inicialmente de maneira mais ampla e, posteriormente, adentramos no objeto reta. Acerca das representações algébrica e geométrica, interligamo-las em um tópico, abordando a articulação.

3.1.1.1 Língua natural (materna)

Da Silva e Moretti (2018) destacam a importância e a contribuição da representação em língua natural em sua pesquisa ao relatarem sua relevância não apenas para a comunicação, mas também para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Nesse sentido, Duval (2003), em seus estudos sobre os registros de representação semiótica, percebeu que a língua natural do estudante é a primeira linguagem de entendimento. Na perspectiva do autor, a passagem da língua natural para a linguagem matemática caracteriza uma atividade denominada por ele de conversão e que, ao serem analisados os registros produzidos pelos estudantes, é possível apontar quais as principais dificuldades encontradas pelos aprendizes na passagem da língua natural para a linguagem matemática.

Segundo Coutinho e Moran (2014), a língua natural é uma representação de comunicação oral e escrita. Além disso, os autores apontam que é a representação mais utilizada pelos professores no processo de ensino e aprendizagem durante explicações, definições, exemplos e formalização de propriedades matemáticas, tanto no discurso como nas representações escritas durante as aulas.

Diante desse contexto e com base nas análises prévias realizadas em nosso estudo, as representações em língua natural do objeto reta são frequentes em sala de aula nas explicações, no livro didático, em situações, entre outras possibilidades.

3.1.1.2 Articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica

Conforme já citado em seus estudos, Duval destaca a importância da necessidade de articular vários sistemas de representação. Todavia, no processo de ensino e aprendizagem, na maioria das vezes essas representações são abordadas de maneira independente, e as articulações entre elas são consideradas como resultado natural do conhecimento dos registros (DUVAL, 2003). Nesse sentido, Duval (1988) afirma que, apesar das aparências, a abordagem de articulação entre representação gráfica e expressão algébrica não está presente nas perspectivas de ensino de Matemática.

Duval (1988), em sua pesquisa acerca da articulação entre a representação algébrica da equação da reta ($y = ax + b$) e sua representação geométrica, destacou que a razão para profundas dificuldades em ler e interpretar as representações gráficas parece estar associada à falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre as representações gráficas e sua escrita algébrica (SIQUEIRA; BELLEMAIN, 2011).

Para Duval (2003), o estudante compreender Matemática implica ter a capacidade de mudar de registro, pois não se deve confundir um objeto e sua representação. Em contrapartida, na Matemática o acesso aos objetos ocorre somente por meio de suas representações, fato que pode desencadear o paradoxo: “Como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?” (DUVAL, 2003, p. 21).

Segundo Duval (2003), na articulação entre as duas representações em relação à representação de um objeto matemático, duas condições devem ser efetivamente respeitadas:

primeiramente, a sequência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão; em segundo lugar, para cada sentido da conversão deve haver tarefas que comportem casos de congruência e casos mais ou menos complexos de não-congruência. Se o objetivo é acentuar a compreensão de uma noção Matemática, pode ser importante que tais sequências sejam constituídas por dois ou três pares de registros: de um lado, um par compreendendo um registro multifuncional e um registro

monofuncional; de outro lado, um par compreendendo dois registros monofuncionais (DUVAL, 2003, p. 27).

Vale destacar que Duval (2003) estabelece dois tipos de fenômenos característicos das conversões de representações: as variações de congruência, a correspondência semântica entre as unidades significantes de cada uma das representações; e as variações de não-congruência, ou seja, a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. É justamente no viés desse tópico que nosso estudo se apoia, pois defendemos que a compreensão de objetos matemáticos tende a acontecer a partir da articulação entre suas diferentes representações.

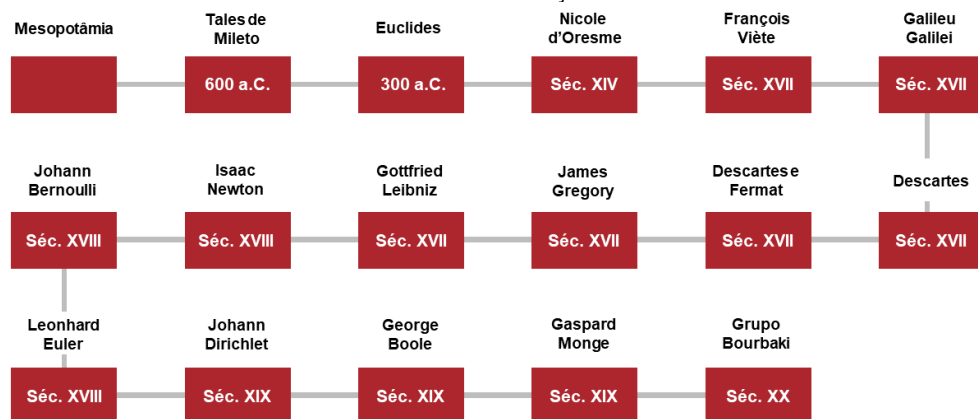
4 ESTUDOS PRELIMINARES

Nesta seção, apresentamos discussões teóricas a respeito do que constitui a reta na geometria analítica e no estudo das funções, a partir de um breve relato da historicidade do desenvolvimento dessa relação. Posteriormente, faremos uma abordagem relacionada ao estudo da reta, seguida de um enfoque na perspectiva das dificuldades dos estudantes, descrevendo sua relação com a TRRS e a articulação entre as representações. A seguir, analisaremos os documentos de orientação curricular e os livros didáticos. Por fim, adentraremos nos softwares dinâmicos, investigando alguns no tocante ao que se propunham realizar diante da articulação entre as representações e trazendo para o estudo o *Function Studium* como uma ferramenta a ser utilizada no processo.

4.1 MARCOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA SOBRE A RELAÇÃO DO OBJETO RETA NA GEOMETRIA ANALÍTICA E NO ESTUDO DAS FUNÇÕES

Apoiando-nos em fontes secundárias, trabalhos que estudaram sob a ótica da História da Matemática, como o de Mafra (2009), Soares (2013) e Cavalcante (2019), explanaremos o contexto histórico do estudo da reta e traremos uma breve apresentação, em forma de marcos na História da Matemática (figura 5), levantando a relação do objeto reta na geometria e no estudo das funções. Ademais, apresentaremos a origem das funções e a evolução de suas definições no decorrer do tempo.

Figura 5 – Marcos na História da Matemática em relação ao objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções



Fonte: Autor (2022).

É importante frisar que buscamos na História fatos que nos levam a entender de que forma se tem um conhecimento da reta na geometria analítica e no estudo das funções e, desse modo, interpretar como e por que esses conteúdos nos têm sido transmitidos.

Segundo Soares (2013), alguns pesquisadores acreditam que os primeiros indícios de problemas geométricos – utilizados como meio de oferecer exemplos para aplicação de um determinado tipo de problema algébrico – aconteceram na Mesopotâmia. Interessante que, de certa forma, a geometria servia de cálculo para resolver problemas numéricos, tendo como típico exemplo a resolução de problemas de segundo grau por Al-Khwarizmi.

Os primeiros séculos da Matemática grega começaram com os esforços de Tales por uma geometria demonstrativa (600 a.C), que culminaram com os Elementos de Euclides (300 a.C), marcando, assim, um período de grandes realizações (SOARES, 2013).

Nicole d'Oresme, em seus escritos no século XIV descreve as mudanças das propriedades dos objetos a partir de sua representação gráfica e geométrica, evidenciando um dos primeiros registros da representação gráfica associada a um sistema de coordenadas (MAFRA, 2009).

Para Barbosa e Mendes (2016), outro marco importante nessa perspectiva foi trazido por François Viète, considerado precursor da álgebra simbólica no século XVII. Seu trabalho intitulado “Introdução à Arte Analítica” insere a prática de representar incógnitas por vogais e constantes por consoantes, sendo extremamente importante para a escrita das equações em sua forma geral. Nesse mesmo período, Galileu Galilei contribuiu para o uso de números em representações gráficas (CAVALCANTE, 2019).

É importante destacar a contribuição de Descartes ao representar comprimentos com segmentos e efetuar os cálculos com eles, tendo como outro fato relevante a nomeação dos segmentos “variáveis” de x e/ou y . Soares (2013) destaca o século XVII como um período de extrema importância na História da Matemática, pelo fato de ter-se o surgimento de uma nova geometria, devido, principalmente, aos trabalhos de René Descartes e Pierre de Fermat, dando início ao que veio se configurar como a geometria analítica.

A definição mais explícita de função, durante esse período da História da Matemática, foi dada por James Gregory, que a definiu como “uma quantidade obtida

de outras quantidades, pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginável” (KLINE, 1990, p. 339).

Gottfried Leibniz foi o precursor no uso do termo “função”, utilizando-o na obra intitulada “O método inverso das tangentes, ou em funções”, empregada com o mesmo significado usado atualmente. A utilização da expressão foi proposta para caracterizar, de modo geral, um segmento de reta cujo comprimento depende da posição que ocupa um certo ponto sobre uma curva dada. Importante ressaltar que Leibniz é o responsável pela nomenclatura com a qual estamos acostumados, introduzindo os termos “constante”, “variável” e “parâmetro” (BOTELHO; REZENDE, 2011).

De acordo com Mafrá (2009), em meados do século XVIII, o termo função já aparecia em vários estudos; contudo, havia a necessidade de uma análise conceitual mais profunda, ideia que adentraremos a seguir.

Segundo Cavalcante (2019), nesse período, as colaborações de Isaac Newton acerca do conceito de função surgem como de fundamental importância, principalmente em duas vertentes: no entendimento do sistema de representação da concepção de curva e ao introduzir o termo **variável independente**.

Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli tiveram um papel fundamental na evolução e consolidação da teoria de Leibniz, desenvolvendo métodos, aplicações e notações. Após a morte de Jakob Bernoulli, seu irmão Johann Bernoulli prossegue com descobertas matemáticas. No início do século XVIII, Johann Bernoulli define função em seu artigo “Acta Eruditorum Lipsiae” da seguinte maneira: “Chamamos de função de uma grandeza variável as quantidades compostas, de um modo qualquer, dessa grandeza variável e de constantes” (MOL, 2013, p. 116). Conforme Cavalcante (2019), nesse mesmo século, os pensamentos propostos por Leonhard Euler foram significativos para o desenvolvimento do conceito de função, substancialmente quando passa a utilizar a identificação $f(x)$ para representar a função de x .

No século XIX, Johann Dirichlet foi o primeiro matemático a definir formalmente uma função, caracterizando-a da seguinte forma:

Suponhamos que a e b são dois valores dados e x é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b . Se para cada x corresponde um único y , de modo que, enquanto x percorre o intervalo de a até b , $y = f(x)$ varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função contínua de x para este intervalo. Além disso, não é absolutamente necessário que y dependa de x no intervalo inteiro de acordo com a mesma lei; sem dúvida, não é necessário pensar somente em relações que possam

ser expressas através de operações matemáticas (BOTELHO; REZENDE, 2011, p. 71).

Nesse mesmo período, George Boole interpretou o conceito de função como transformação, na qual cada elemento x é transformado no elemento $f(x)$:

Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo de x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada $f(x)$ Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma $f(1)$; se na mesma função transformarmos x em 0, o resultado será expresso pela forma $f(0)$ (BOTELHO; REZENDE, 2011, p. 73).

O século XIX caracteriza um momento frutífero para a Matemática com a escrita do livro “Applications de l’algèbre à la géométrie”, por meio do trabalho de Gaspard Monge, podendo ser considerado um livro didático destinado aos estudantes da escola “polytechnique”. O efeito produzido pelo seu estudo fez com que, no mesmo período, a geometria analítica se tornasse uma disciplina, conquistando um lugar nas escolas (SOARES, 2013).

Por fim, no século XX, um grupo de matemáticos franceses denominado “Grupo Bourbaki” utilizou a Teoria dos Conjuntos, à qual é atribuída a definição atual de função: “sejam A e B dois conjuntos, uma relação entre uma variável de $x \in A$, e uma variável $y \in B$ é dita relação funcional se qualquer que seja $x \in A$, existe um único elemento $y \in B$, que esteja na relação considerada” (CHAVES; CARVALHO, 2004, p. 4).

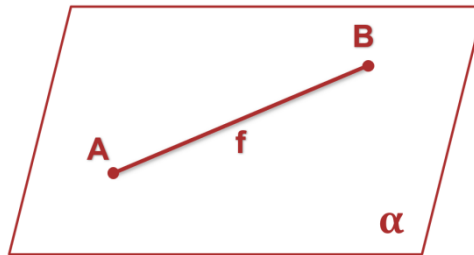
Podemos considerar, através deste breve histórico, que o conceito de função passou por variadas mudanças e que sua construção percorreu um trajeto significativo, fazendo conexões com a geometria analítica, trazendo, assim, uma importante análise para nosso estudo com um olhar voltado para a relação entre a geometria analítica e o estudo das funções.

4.2 UM ESTUDO ACERCA DA RETA

O fato de ponto e reta serem noções primitivas da geometria não significa que o reforço da intuição do estudante a respeito dessas noções seja uma prática inviável. De certa forma, isso já ocorria nos Elementos de Euclides, em que, por exemplo, ponto é definido como “aquilo que não possui partes”, ou seja, é indivisível, e reta é “uma linha que jaz igualmente com respeito a todos os seus pontos”, isto é, uma linha na qual não existem pontos “especiais” (LIMA *et al.*, 2016).

Os elementos primitivos da geometria plana são o ponto, a reta e o plano. A representação do ponto é feita por uma letra maiúscula do alfabeto, a reta é representada por uma letra minúscula do alfabeto, e o plano é representado por uma letra do alfabeto grego, como mostra a figura 6.

Figura 6 - Representação gráfica dos elementos da geometria plana



Fonte: Autor (2022).

As definições dos elementos criados por Euclides estão registradas em uma coleção de livros que tem como título **Os Elementos** (EUCLIDES, 2009). Segundo Euclides (2009), as sete primeiras definições são:

- I. Ponto é aquilo de que nada é parte;
- II. E linha é comprimento sem largura;
- III. E extremidades de uma linha são pontos;
- IV. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma;
- V. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura;
- VI. E extremidades de uma superfície são retas;
- VII. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma (EUCLIDES, 2009, p. 97).

Ainda de acordo com o autor supracitado, na sequência do livro são apresentados os postulados postos por Euclides, dos quais destacamos os dois primeiros: “I. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto; II. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta” (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Com isso, podemos pensar em reta como um conjunto de pontos colineares (que pertencem à mesma linha), podendo esses serem localizados no plano cartesiano e tendo-se a possibilidade de escrever algebricamente uma reta através de uma equação. Portanto, as equações de reta são expressões utilizadas para determinar as coordenadas (valores de x e y) de pontos colineares no plano cartesiano e podem sofrer variações em sua organização através da alteração dos seus coeficientes que, segundo Souza e Garcia (2016), fornecem informações a respeito

da relação entre as coordenadas x e y bem como sobre o comportamento de seu gráfico.

Ao alterar os coeficientes que uma reta fornece, podemos observar que o coeficiente angular está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, enquanto o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas (IEZZI *et al.*, 2016).

Segundo Faria, Santos e Curi (2012), no estudo do objeto reta, uma mesma situação pode ter várias representações; por exemplo, na língua natural, na linguagem algébrica ou na representação gráfica cartesiana. Desse modo, é importante que o estudante compreenda as diferentes representações que envolvem essa noção Matemática e que, apesar de ter representações distintas, o objeto matemático é o mesmo: a reta.

Para Duval (2003), é preciso que o estudo do objeto reta se constitua em um domínio, fazendo-se necessária a articulação de conhecimentos na área da álgebra e na área da geometria de forma simultânea. Por esse motivo, é importante que o estudante construa o conhecimento de forma significativa; um facilitador para esse processo pode ser explorar o conteúdo por meio de um software dinâmico.

Os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), apoiados pelo emprego da tecnologia, defendem que:

o estudante poderá ter mais oportunidade de expandir sua capacidade de resolver problemas, de fazer conjecturas, de testar um grande número de exemplos, de explorar os recursos da chamada “geometria dinâmica”, em que é possível fazer variar continuamente parâmetros atrelados a figuras, operação impossível num contexto de papel e lápis (PERNAMBUCO, 2012, p. 32).

Diante disso, Lucena e Gitirana (2016) apontam que existe grande defesa na utilização de múltiplas representações articuladas no ensino de funções e da geometria analítica, o qual vem sendo facilitado com o uso de softwares educacionais. Esses softwares regularmente permitem automações, como a de tratamento, de conversão e, algumas vezes, de ambos.

Sobre o uso de softwares, Lucena e Gitirana (2016) trazem que:

Desde os anos 90, surgiram softwares de geometria dinâmica e de exploração de funções que permitem o trabalho com diversas representações de forma articulada e com alterações simultâneas, como é o caso do Cabri-géomètre; do Modellus; do GeoGebra; do Cinderela; dentre outros (LUCENA; GITIRANA, 2016, p. 27).

Esse aumento na criação de softwares, para nós, sugere que existe uma demanda de utilização desses recursos para suporte em metodologias de ensino. É importante que o estudante não apenas chegue ao resultado, mas que também entenda o processo, tendo em vista que “[...] uma situação sem sentido não pode levar a uma aprendizagem consistente e duradoura” (PERNAMBUCO, 2012, p. 45).

Para Cavalcanti e Bezerra (2020), a construção desse caminho só é possível, por meio do ensino da Matemática, se houver a realização de um trabalho que faça sentido para o estudante através de diversos recursos, ou seja, é necessário propiciar um ambiente de desenvolvimento.

Encontramos, assim, alinhamento com as ideias da inserção de softwares educacionais na metodologia de ensino do objeto reta, principalmente na articulação de suas representações.

4.3 DIFICULDADES DOS ESTUDANTES

Neste tópico, apresentaremos nossos estudos em relação às dificuldades dos estudantes acerca do objeto reta, trazendo contribuições para nossa pesquisa. Um fator presente na ótica do tema proposto é sua conexão com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a articulação entre as representações, aspecto esse que descreveremos a seguir.

Conforme Silva e Bianchini (2014), algumas das dificuldades dos estudantes no que se refere ao estudo da reta são a argumentação no contexto de conjecturas, o que reflete em uma dificuldade relacionada a provas e demonstrações (VARELLA, 2010); a falta de motivação para aprender determinados conteúdos, devido à ausência de contextualização (ANDRADE, 2007); e a transição entre as diversas representações que representam o objeto matemático (CASTRO, 2001). Esse último ponto se caracteriza como um grande nó quanto ao processo de ensino e aprendizagem do objeto reta, enfatizado por Duval (2003) em relação aos registros de representação semiótica, ao apontar a importância da diversidade de sistemas de representação e a articulação entre eles nas atividades matemáticas.

Diversas pesquisas apontam as dificuldades dos estudantes em compreender a reta como objeto geométrico, algébrico entre outras representações. Nesse sentido, Notare e Gravina (2013) citam que um clássico exemplo de dificuldade dos estudantes

é quanto à articulação das representações algébrica e geométrica da reta, sendo que a maior dificuldade está na passagem da geometria para a álgebra.

Fonte (2015) aponta algumas considerações que justificam o porquê de os alunos participantes de sua pesquisa apresentarem-se mais seguros no contexto algébrico do que no contexto gráfico:

A prática na sala de aula e nos livros didáticos faz com que os alunos entendam mais facilmente o sentido equação-gráfico da Conexão Cartesiana, ou seja, que se um ponto satisfaz a equação $y=mx+b$, então esse ponto pertence ao gráfico de $y=mx+b$. O aluno parece estar seguro de que os pontos constantes da tabela e marcados por ele no sistema de eixos cartesianos estão sobre a reta, pois estes pontos são salientes no gráfico. No entanto, assimilar o sentido gráfico-equação da Conexão Cartesiana - considerar um ponto qualquer da reta e afirmar que o mesmo satisfaz a equação $y=mx+b$ - não é simples para o aluno, visto que este ponto qualquer não está saliente no gráfico e o aluno pode não estar seguro se o par ordenado correspondente poderia constar também da tabela e satisfazer a equação $y=mx+b$. Acreditamos que o equilíbrio poderá ser alcançado se o professor e os livros-texto enfatizarem ambos os sentidos da Conexão Cartesiana (FONTE, 2015, p. 10).

Nessa vertente, Duval (2006) relata que o estudante, ao realizar a passagem da equação da reta $y = ax + b$ para a representação geométrica, utiliza uma regra de conversão bem estabelecida; por esse motivo, apresenta menos dificuldade. Conforme o autor, o aluno desenvolve o processo associando um ponto no plano cartesiano ao par ordenado de números (x, y) que resolve a equação, posteriormente marcando localmente tais pontos no sistema de coordenadas de modo a delinear a correspondente reta.

Contudo, no outro sentido da conversão, ou seja, da geometria para a álgebra, os estudantes precisam de um entendimento global da relação entre as coordenadas dos pontos que pertencem à reta desenhada para então estabelecer a correspondente equação, representando, assim, um processo mais complexo (DUVAL, 2006).

Segundo Gravina e Santarosa (1998), o recurso de múltiplas representações (analítica e geométrica) favorece a construção de relações entre as representações algébrica e geométrica e, a partir de uma equação ou de seu gráfico, o estudante passa a explorar a articulação. Com essa abordagem, pretende-se reduzir significativamente as dificuldades dos alunos com relação à interpretação e à compreensão dos conceitos envolvidos com o objeto reta.

Vejamos, a seguir, um tópico que trata da dificuldade dos estudantes no que tange ao estudo da reta em um contexto mais específico, ao qual iremos nos referir acerca do conteúdo de função, adentrando nos componentes da compreensão do

conceito, nas dificuldades, nas concepções erradas e nos corretivos, analisando as causas possíveis dessas problemáticas.

4.3.1 Dificuldade dos alunos em relação ao conteúdo de função

O conteúdo de função assume, a partir de sua associação e articulação, uma importante relação com diversos conhecimentos em variadas áreas, auxiliando o entendimento de outros conceitos que surgem em diferentes campos do conhecimento. Dessa forma, tal tema se faz essencial no processo de ensino e aprendizagem não apenas da Matemática, principalmente pelo aspecto da aplicação intensiva e recorrente em muitos outros campos do saber científico.

Contudo, as dificuldades apresentadas pelos estudantes no que se refere ao conteúdo de função são frequentes. Nessa perspectiva, Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) descrevem os aspectos necessários para que os estudantes tenham uma compreensão geral do conteúdo de função, os quais chamam de componentes e cada um tem duas fases no estudo: a passiva, no sentido de classificar e identificar; e a ativa, no sentido de fazer algo ou dar exemplos. Nessa vertente, os autores levaram em conta dois fatores básicos tendo em vista a definição de função e suas várias representações.

Segundo Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995), os componentes da compreensão do conceito de função são: 1A - capacidade de classificar relações em funções e não funções; 1B – capacidade de dar exemplo de uma relação que é função e de uma que não é função; 2A – para uma dada função, capacidade de identificar pré-imagens, imagens e pares (pré-imagem, imagem); 2B – para uma dada função, capacidade de achar a imagem para uma dada pré-imagem e vice-versa; 3A - capacidade de identificar funções iguais; 3B – capacidade de passar de um registro de representação para outro; 4A – capacidade de identificar funções satisfazendo certas condições dadas; 4B – capacidade de dar exemplos de funções satisfazendo certas condições dadas (MARKOVITS; EYLON; BRUCKHEIMER, 1995).

Diante desses requisitos, surgem as dificuldades e concepções erradas dos estudantes, para as quais os autores, além de elencá-las em seu estudo, sugere algumas causas possíveis e corretivos aplicados correntemente nas revisões curriculares.

De acordo com Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995), muitas das dificuldades dos alunos têm relação com os termos pré-imagem, imagem, par (pré-imagem, imagem), domínio, contradomínio e conjunto imagem, fator esse que leva os estudantes a outras dificuldades, como: localizar pré-imagens e imagens nos eixos em representações gráficas, identificar imagens e pares (pré-imagem, imagem) para funções dadas na representação algébrica, distinguir entre o conjunto imagem e o contradomínio, e ignorar o domínio e o contradomínio de uma função.

Os autores destacam a importância desses conceitos que são abrangidos no conteúdo de função serem compreendidos pelos estudantes em todas as suas representações. Dessa forma, é essencial que o aluno domine as representações e realize a articulação entre as diversas representações no que se refere ao conteúdo em questão (DUVAL, 1993).

No que tange às concepções erradas que os alunos possuem, Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) destacam a ideia de que toda função é uma função linear. Os autores sugerem que sejam inseridas funções não-lineares ao longo de todo o capítulo que trata sobre funções lineares.

Adentrando nas dificuldades dos estudantes acerca do conteúdo de função, Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) evidenciam manipulações técnicas como um grande nó no que se refere ao tema em questão. Os autores apontam que um exemplo desse tipo de dificuldade ocorre:

na passagem de um registro de representação de uma função para outro. Verificamos que a passagem da representação algébrica para a gráfica foi mais fácil que no sentido contrário. Isso muito provavelmente decorreu das manipulações mais complicadas envolvidas da passagem da representação gráfica para a algébrica (MARKOVITS; EYLON; BRUCKHEIMER, 1995, p. 64).

Nesse sentido, há uma tendência para que os estudantes tenham mais facilidade em lidar com funções dadas na representação gráfica do que na representação algébrica. Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) apontam que a razão disso se dá pela representação gráfica ser mais visual, principalmente com relação ao seu comportamento e pelo domínio, pelo contradomínio e pela regra de correspondência serem dados simultaneamente.

Uma sugestão para essa problemática é trabalhar a representação gráfica nos passos iniciais do desenvolvimento do conceito de função, sendo articulada com sua representação algébrica, tendo em vista que os documentos de orientação curricular

trazem frequentemente a representação algébrica antes da representação gráfica sem a devida conexão (MARKOVITS; EYLON; BRUCKHEIMER, 1995).

É nessa perspectiva que surge o escopo do nosso estudo, atentando para a importância da articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta, utilizando como ferramenta nesse processo o software *Function Studium*.

Encontramos, assim, alinhamento com nosso aporte teórico, ou seja, a conversão nos dois sentidos entre as representações e as dificuldades apresentadas pelos estudantes quanto ao processo de ensino e aprendizagem do objeto reta. Vejamos, agora, as análises em torno dos documentos de orientação curricular, dos livros didáticos e dos artefatos computacionais como ferramentas a serem utilizadas no processo.

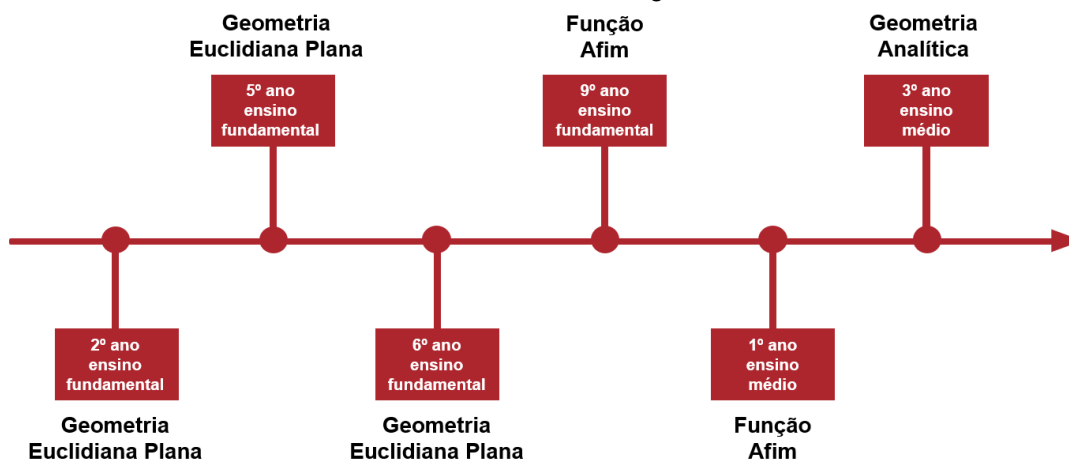
4.4 ANÁLISE DOS DOCUMENTOS DE ORIENTAÇÃO CURRICULAR

Ao fazermos a análise dos documentos de orientação curricular, buscamos focar quatro aspectos: situar o estudo da reta nos variados momentos da escolaridade e nas diferentes abordagens, tratar a relação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções, dissertar acerca da articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, e relatar sobre o uso de softwares.

Os documentos que nortearam nossas análises foram: Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000); Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002); Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006); Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017); Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012); e Guia do Livro Didático (BRASIL, 2017).

A reta é estudada em diversos momentos da escolaridade e com diferentes abordagens, como apresentado na figura a seguir. Na geometria euclidiana plana, como um dos axiomas de Euclides, é definida por dois pontos distintos; na função, é o gráfico da função afim; na geometria analítica, é tratada sob um parâmetro cartesiano, de representação algébrica.

Figura 7 – Linha do tempo a respeito do estudo da reta em diversos momentos de escolaridade e com diferentes abordagens



Fonte: Autor (2022).

Os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) indicam que a partir do 2º ano do ensino fundamental o conteúdo de reta já deve ser abordado nas intervenções pedagógicas, mas sem a preocupação com a formalização do conteúdo em questão. O documento mostra que no 5º ano do ensino fundamental o aluno se torna capaz de formalizar o conceito por trás de uma reta, um segmento de reta, ou uma semirreta.

O estudo da reta deve ser abordado como objeto da geometria gráfica, sendo introduzido a partir do 6º ano do ensino fundamental (BRASIL, 2017). Por sua vez, a BNCC (BRASIL, 2017) insere o estudo de funções a partir do 9º ano do ensino fundamental, abordando a sua representação numérica, algébrica e gráfica, sendo essa última em forma de reta.

Os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) incluem o estudo de funções a partir do 9º ano do ensino fundamental, ressaltando a importância da “articulação de problemas envolvendo proporcionalidade com o estudo da função linear” (PERNAMBUCO, 2012, p.103). Nesse contexto, a partir do 9º ano se inicia o estudo específico do conceito função, valorizando as diferentes representações da função, sendo uma delas a representação gráfica no plano cartesiano (BRASIL, 2017).

O conteúdo de função afim deve ser trabalhado no 1º ano do ensino médio, dando continuidade ao que foi trabalhado durante o ensino fundamental. Em acréscimo, esse conteúdo é de extrema importância, pois influencia a compreensão de diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, Medicina, Física, Economia,

Engenharia e Tecnologia (BRASIL, 2017). Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) apontam que o estudo das funções é essencial nessa etapa de escolaridade e deve seguir de acordo com algumas expectativas de aprendizagem, como:

reconhecer a representação algébrica e a representação gráfica de uma função afim, resolver e elaborar problema envolvendo função afim, relacionar uma sequência numérica com crescimento linear a uma função de domínio discreto, reconhecer o zero, o coeficiente linear e o coeficiente angular de uma função afim no plano cartesiano, reconhecer as transformações sofridas pela reta no plano cartesiano em função da variação dos coeficientes (por exemplo: reconhecer que se o coeficiente angular é negativo, a reta é decrescente ou que quanto maior for o valor absoluto do coeficiente angular, maior será a inclinação da reta) (PERNAMBUCO, 2012, p. 130).

A BNCC (BRASIL, 2017) acrescenta que o conteúdo de função afim deve ser trabalhado de modo a proporcionar ao estudante a compreensão do modelo de variação que se estabelece entre as variáveis envolvidas e a percepção de aspectos importantes, como taxa de variação, crescimento e decrescimento, incluindo os casos em que a relação entre as variáveis envolvidas é proporcional, a função linear.

No 3º ano do ensino médio comumente é realizado o estudo da geometria analítica, que está fundamentada na ideia de representar os pontos da reta por números reais. Com isso, as linhas no plano (reta, circunferência, elipse, etc.) são descritas por meio de equações, ou seja, é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas como também interpretar de forma geométrica algumas situações algébricas. Essa integração entre geometria e álgebra foi responsável por grandes progressos na Matemática e nas outras ciências em geral. Em geometria analítica, estuda-se várias figuras (incluindo as que não representam funções) e, conseqüentemente, suas propriedades geométricas por meio de processos algébricos (equações, inequações, sistemas etc.).

A reta é representada por uma equação polinomial do 1º grau com duas incógnitas. Para determinar uma reta e sua equação, é preciso conhecer dois de seus pontos distintos ou, então, um de seus pontos e o seu ângulo de inclinação.

Na geometria analítica, o estudante deve perceber que um mesmo problema pode ser abordado com diferentes estratégias, levando em consideração as suas seguintes características: se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica; se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, que pode ser representada graficamente (BRASIL, 2002).

Nesse contexto, no ensino médio, comumente, a geometria analítica no plano concentra-se, inadequadamente, no 3º ano, ocasião em que acontece o estudo da reta. Dessa forma, no 1º ano já devem ser abordados tópicos relativos à distância entre pontos bem como os primeiros contatos com as equações da reta (BRASIL, 2017).

No estudo da reta, vários tipos de equação – geral, reduzida, segmentária, paramétrica, entre outras – são apresentados isoladamente e com igual destaque, não acontecendo, assim, a abordagem mais integrada dessas equações (BRASIL, 2017).

A BNCC (BRASIL, 2017), nessa perspectiva, denota o entendimento de função como uma noção integradora da Matemática e que deve ser resgatada em vários momentos durante o ensino médio, como, por exemplo, na geometria analítica.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) sinalizam que o trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Porém, para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) revelam a importância de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamentos matemáticos, citando as funções como exemplo. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui, pois, as propriedades de retas estudadas em geometria analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes.

Os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) relatam a importância de que a geometria analítica não fique restrita a determinado momento, mas seja desenvolvida durante todo o ensino médio, fazendo articulações com outros conteúdos, quando possível. Nessa conjuntura, orienta-se que o estudo da reta deva estar presente no 1º, 2º e 3º anos do ensino médio acerca do bloco de conteúdo referente à geometria, e no 1º e 2º anos do ensino médio quanto ao bloco de álgebra e funções.

No que se refere à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, para melhor compreensão de um conceito, os estudantes precisam de repertório de imagens e informações. Apoiado nos documentos norteadores da educação para o ensino médio, o uso de softwares se mostra como uma alternativa para ampliar esse repertório. Nesse sentido, a Base

Nacional Comum Curricular salienta a importância de se recorrer ao uso de softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica na conversão de representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano (BRASIL, 2017).

Segundo os Parâmetros Curriculares de Pernambuco, ao relacionar as transformações sofridas na equação de uma reta de expressão $y = bx + c$ com modificações nos coeficientes, é conveniente o uso de um software para verificar os efeitos provocados pela alteração dos parâmetros b e c (PERNAMBUCO, 2012).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio indicam que para o estudo das equações na geometria analítica, os recursos disponibilizados nos programas facilitam a exploração algébrica e gráfica de forma simultânea, ajudando o aluno a entender o conceito e o significado geométrico (BRASIL, 2006).

4.5 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Na investigação em livros didáticos, mais especificamente aqueles pertencentes às coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2018) para o ensino médio, buscamos identificar em que ano do referido período de escolaridade é abordada a relação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções, bem como a forma como é tratada tal conexão. Outro fator que adentramos foi a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta. Além disso, alguns outros aspectos relacionados ao conteúdo “reta” nos livros didáticos do 3º ano do ensino médio também se fizeram significativos para nossa análise, dentre eles como são realizadas as propostas de utilização de recursos computacionais.

Foram escolhidos para análise os livros didáticos: “Matemática: Interação e Tecnologia”, de Rodrigo Balestri, editado pela Leya, em São Paulo, em 2016; “Quadrante – Matemática”, de Diego Prestes e Eduardo Chavante, editado pela SM, em São Paulo, em 2016; “Matemática – Contexto & Aplicações”, de Luiz Roberto Dante, editado pela Ática, em São Paulo, em 2016; “Matemática: Ciência e Aplicações”, de Gelson Iezzi *et al.*, editado pela Saraiva, em São Paulo, em 2016; “Conexões com a Matemática”, de Fabio Martins de Leonardo, editado pela Moderna, em São Paulo, em 2016; “#Contato Matemática”, de Joamir Souza e Jacqueline Garcia, editado pela FTD, em São Paulo, em 2016.

No primeiro momento, analisamos as seis coleções aprovadas no PNLD 2018 em relação à presença ou ausência da articulação entre a determinação da lei que rege uma reta no conteúdo de função afim (habitualmente abordada no 1º ano) e da reta que se forma na geometria analítica (comumente abordada no 3º ano), e a maneira como é tratada essa conexão, como mostra o quadro a seguir:

Quadro 3 – Relação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções nas coleções de livros didáticos de Matemática aprovadas no PNLD - 2018

Coleção de livros	Relação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções na:		Forma (s) de como é abordada a relação
	1º ano do ensino médio (EM)	3º ano do ensino médio (EM)	
Coleção A	X	X	(1º ano EM) Demonstrando que o gráfico da função afim é uma reta; (3º ano EM) Semelhança entre a lei geral da função afim e a equação reduzida de uma reta.
Coleção B	X	X	(1º ano EM/3º ano EM) Semelhança entre a lei geral da função afim e a equação reduzida de uma reta; (1º ano EM/3º ano EM) A partir da reflexão de que reta vertical não é gráfico de uma função.
Coleção C	Não há relação.	Não há relação.	Não há.
Coleção D	Não há relação.	X	(3º ano EM) A partir da reflexão de que reta vertical não é gráfico de uma função; (3º ano EM) Semelhança entre a lei geral da função afim e a equação reduzida de uma reta;

Coleção D	Não há relação.	X	(3º ano EM) Associando os coeficientes da equação reduzida da reta à lei de uma função afim; (3º ano EM) Abordando a representação gráfica da equação da reta r e o gráfico da função f .
Coleção E	X	X	(1º ano EM/3º ano EM) A partir da reflexão de que reta vertical não é gráfico de uma função; (1º ano EM) Associando taxa de variação (função afim) e coeficiente angular (equação reduzida da reta); (3º ano EM) Através do contexto histórico; (3º ano EM) Semelhança entre a lei geral da função afim e a equação reduzida de uma reta.
Coleção F	Não há relação.	X	(3º ano EM) Semelhança entre a lei geral da função afim e a equação reduzida de uma reta.

Fonte: Autor (2022).

Nosso trabalho nos permitiu concluir que dentre as seis coleções de livros didáticos analisadas, três oferecem a articulação no 1º e 3º ano do ensino médio; em uma coleção não há conexão e em duas há relação somente no livro do 3º ano do ensino médio.

Na coleção A, o livro do 1º ano do ensino médio apresenta conexão com o conteúdo “reta” na abordagem de função afim; e no livro do 3º ano, na geometria analítica o assunto “reta” é conduzido ressaltando-se sua relação com a função afim.

Na coleção B, no livro do 1º ano, há uma relação do tópico funções com a geometria analítica por meio de exercícios que envolvem interseção de duas retas, interseção de uma reta com os eixos coordenados, determinação da equação de uma reta a partir de dois pontos, entre outras situações; no livro do 3º ano, há estabelecimento da correspondência entre a equação de uma reta e a função afim.

Na coleção C, no livro do 1º ano, a abordagem articulada das funções afim, quadrática e exponencial com juros simples e compostos, progressão aritmética e progressão geométrica, é um ponto positivo, porém não há conexão com a geometria analítica; no livro do 3º ano, na parte de geometria analítica, o conteúdo “reta” é conduzido sem apresentar a articulação.

Na coleção D, no livro do 1º ano do ensino médio, a abordagem de função afim é feita sem apresentar conexão com o tema “reta” da geometria analítica; já no livro do 3º ano, há articulação dos conteúdos com outros campos da Matemática escolar. Na parte de reta, por exemplo, há referências à função afim e conexões com soluções de um sistema linear.

Na coleção E, no livro do 1º ano, a temática de função afim apresenta conexão com o assunto “reta” em geometria analítica; no livro do 3º ano, o estudo da geometria analítica é iniciado com referências históricas, que enfatizam a importância da integração entre a geometria e a álgebra. Os conceitos de reta são desenvolvidos em discussões, ressaltando-se as articulações entre os aspectos geométricos e algébricos.

Na coleção F, no livro do 1º ano, acerca do estudo de função afim, há uma condução sem trazer tal relação. Porém, no livro do 3º ano, na parte de geometria analítica, há articulação com conteúdos matemáticos através de situações práticas. Por exemplo, existem boas ligações entre as noções de função afim, juros simples, sequências em progressão aritmética e o tópico “reta”.

Essas conexões são trazidas de diferentes formas, como: contexto histórico; demonstração que o gráfico da função afim é uma reta e justificativa da semelhança entre a lei geral da função afim e a equação reduzida de uma reta; reflexão acerca da reta vertical não ser gráfico de uma função; associação dos coeficientes da equação reduzida da reta à lei de uma função afim; associação da taxa de variação (função afim) e do coeficiente angular (reta) tendo como consequência o trabalho da equação reduzida da reta que passa por um ponto bem como o trabalho do coeficiente angular; abordagem em relação à representação gráfica da equação da reta r e o gráfico da função f .

Os tipos de exercícios e problemas que os livros didáticos utilizam para relacionar a determinação da lei que rege uma reta no conteúdo de função afim e da reta que se forma na geometria analítica são diversos, como, por exemplo: determinação da equação reduzida de uma reta a partir de dois pontos; determinação

da equação reduzida de uma reta a partir de dois pontos no gráfico; determinação da equação reduzida de uma reta a partir de um ponto e o coeficiente angular; e representação gráfica da equação da reta r e o gráfico da função f .

Seguimos, então, analisando os livros do ensino médio visando verificar a quantidade de questões abordadas em relação à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

Como mostra a tabela a seguir, é possível evidenciar que os livros didáticos analisados não priorizam a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, bem como pouco exploram o duplo sentido de conversão entre essas representações, o que, segundo Duval (2003), são condições fundamentais para a aquisição dos conceitos matemáticos. O autor, acerca dos registros de representação semiótica, enfatiza a importância da diversidade de sistemas de representação e a articulação entre eles nas atividades matemáticas.

Tabela 1 – Abordagem referente à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta nos livros didáticos do 3º ano do ensino médio aprovados no PNLD - 2018

Livros	Conversão da representação algébrica para a representação geométrica	Conversão da representação geométrica para a representação algébrica
Livro A (quantidade de questões)	1	7
Livro B (quantidade de questões)	0	7
Livro C (quantidade de questões)	0	2
Livro D (quantidade de questões)	2	12
Livro E (quantidade de questões)	0	3
Livro F (quantidade de questões)	1	5

Fonte: Autor (2022).

Segundo Duval (2003), na Matemática, a conversão de representações impõe contínua manipulação de objetos abstratos, como números, funções, gráficos, entre outros; para isso, o aluno necessita de uma atividade de produção semiótica para a compreensão desses objetos, ou seja, deve-se explorar a sua representação. Nessa ótica, o autor justifica que:

Não pode haver compreensão Matemática, sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais se devem confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos das figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois em Matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade Matemática (DUVAL, 2003, p. 15).

Neste capítulo, por fim, julgamos como importante analisar as possíveis sugestões da utilização de recursos computacionais em relação ao conteúdo “reta” nos livros didáticos do 3º ano do ensino médio, conforme quadro 4, a seguir.

Quadro 4 – Possíveis sugestões da utilização de recursos computacionais em relação ao conteúdo “reta” nos livros didáticos, do 3º ano do ensino médio, aprovados no PNLD - 2018

Coleção de livros	Sugestão da utilização de recursos computacionais
Coleção A	Não há.
Coleção B	X
Coleção C	X
Coleção D	X
Coleção E	X
Coleção F	X

Fonte: Autor (2022).

Como mostra o quadro 4, possíveis sugestões de atividades com recursos computacionais aparecem em cinco obras, sendo explorados softwares como GeoGebra, Winplot, Cabri Géomètre, dentre outros. Porém, em nenhuma das coleções as sugestões de atividades com recursos computacionais exploram a

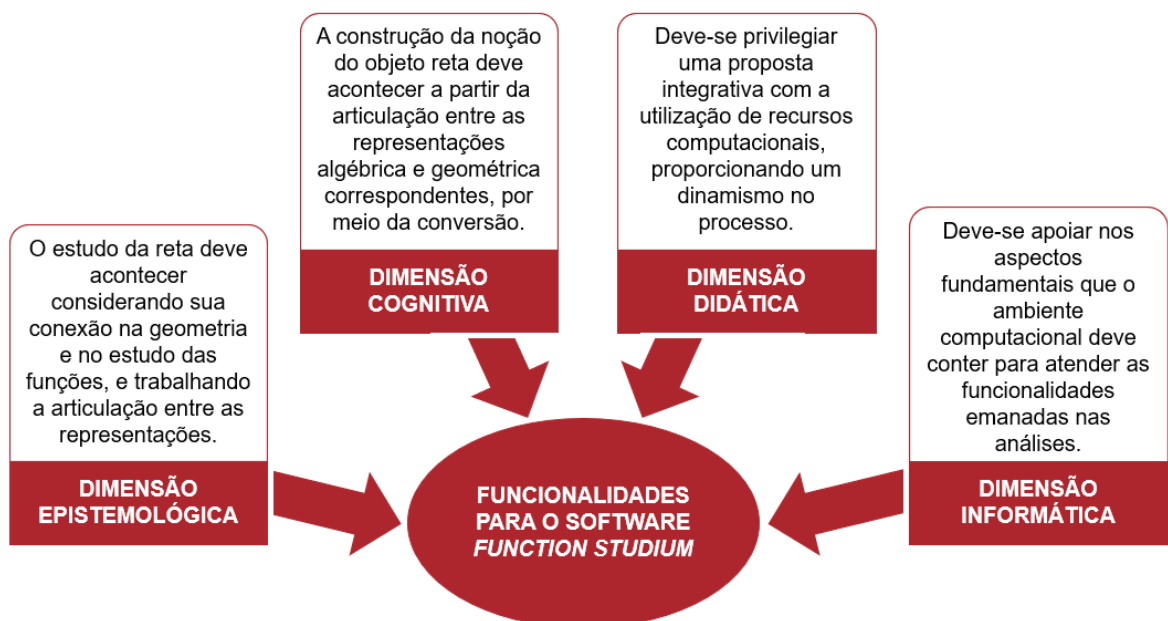
articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

No tocante à análise dos livros didáticos realizada nesta seção, percebemos a necessidade de dispor de um artefato computacional de forma a apresentar diferentes situações de ensino aos estudantes, possibilitando a compreensão da diversidade dos processos matemáticos, o que perpassa pela utilização e pela articulação dos diferentes registros de representação semiótica requeridos nesses processos, no caso desta análise, referente ao conteúdo **reta**.

4.6 SOFTWARE DINÂMICO

Consideramos o modelo da Engenharia Didático-Informática para estruturar nossa pesquisa segundo as quatro dimensões (figura 8), de maneira que pela compreensão das características específicas do objeto reta (dimensão epistemológica), considerando como os estudantes mobilizam suas representações (dimensão cognitiva) e a identificação das contribuições e dificuldades geradas no seu ensino (dimensão didática), pudemos obter funcionalidades que possam colaborar com o aprimoramento do recurso computacional *Function Studium* (dimensão informática).

Figura 8 – Principais contribuições dos estudos preliminares de cada uma das dimensões



Fonte: Autor (2022).

Com relação à dimensão epistemológica, o estudo permitiu analisar as características específicas do conhecimento e sua relação com o que pode favorecer ou dificultar a aprendizagem. O estudo da reta deve acontecer considerando sua conexão na geometria e no estudo das funções e trabalhando a articulação entre as representações. Por sua vez, essa articulação requer um dinamismo que leve em questão as variáveis visuais (do gráfico) e algébricas (das expressões algébricas), o que poderá ocorrer a partir da utilização de recursos computacionais.

Segundo os estudos da dimensão cognitiva, a construção da noção de reta deve acontecer a partir da articulação entre as representações algébrica e geométrica correspondentes, por meio da conversão. Nesse contexto, se faz necessária uma abordagem cognitiva, que favoreça a articulação dinâmica das diversas representações do objeto reta através de recurso computacional.

Já na dimensão didática, pudemos investigar as principais contribuições e dificuldades geradas e as consequências do ensino do objeto reta. Constatamos que a conversão das representações algébrica e geométrica da reta, em ambos os sentidos, constitui a principal dificuldade, no qual é priorizada sua abordagem analítica com enfoque algébrico. Além disso, o ensino da reta acontece de maneira fragmentada. Em oposição a esses aspectos, deve-se privilegiar uma proposta integrativa com a utilização de recursos computacionais, proporcionando um dinamismo no processo.

Por fim, a dimensão informática busca por elencar as características fundamentais que o ambiente deve conter para atender as especificidades emanadas dos estudos das outras dimensões.

A partir do que lemos em Duval sobre os registros de representação semiótica e da nossa análise em relação às dificuldades dos estudantes, refletindo de que maneira as tecnologias computacionais podem contribuir nessa perspectiva, nos tendenciamos a buscar um tratamento dinâmico na articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, tornando a relação entre a geometria e a álgebra mais evidente.

Seguindo esse contexto, destaca-se o raciocínio covariacional, definido por Carlson *et al.* (2002) como atividades cognitivas envolvidas na articulação de duas quantidades que variam quando se observam às formas como cada uma delas se modificam em relação à outra.

Adentrando nesse aspecto, a covariação propõe estabelecer uma relação entre as variáveis da função, no sentido de como uma varia em função da variação da outra. Duval (2007), acerca das covariações entre representações em registros diferentes, aponta que deve haver uma comparação entre uma variável presente na representação de partida e uma possível covariação na representação de chegada, dependendo dos fatores de variação presentes ou das variáveis independentes que alterarmos.

Desse modo, buscamos um software capaz de representar o gráfico e sua respectiva equação, permitindo, além disso, que a partir do movimento de pontos no gráfico, pudéssemos obter modificações na sua representação algébrica, também explicitada na interface do software. Outrossim, convém mencionar a possibilidade do processo inverso, pelo qual, com a modificação dos coeficientes da equação, obteríamos as devidas alterações no gráfico.

A utilização de software no processo de ensino e aprendizagem pode enriquecer de maneira significativa as aulas, pois proporciona o ensino de conceitos aos estudantes de uma forma que permita a manipulação e visualização em diferentes ângulos e formatos. Sendo assim, o uso de tais ferramentas no ensino da Matemática pode aumentar a interação e a dinâmica dos estudantes com o conteúdo ministrado.

Frisamos que a BNCC (BRASIL, 2017) defende a importância de atividades investigativas com softwares dinâmicos, porque quando interagem com movimento e posição, podem promover o desenvolvimento de diversas ideias na integração entre o cotidiano do estudante e o conteúdo. Por vivermos num mundo em constante transformação, com novas tecnologias, o estudo do movimento e posição pode ter muitas finalidades em diversas áreas.

Nessa perspectiva, Bernd (2016) pontua que a utilização de ferramentas tecnológicas na aprendizagem de Matemática é uma tendência na Educação Matemática, não apenas por estar inserida no contexto de inovações tecnológicas contemporâneas, mas principalmente pelo potencial promovido pelo seu uso.

A utilização do software dinâmico pode propiciar uma melhor compreensão de alguns conteúdos da Matemática, criando ligações entre teoria e prática, bem como a visualização das figuras relacionadas aos cálculos obtidos de maneira convencional, nas quais são demonstrados com materiais virtuais concretos, numa perspectiva clara e dinâmica, pelo fato de o estudante ter a possibilidade de ver e manipular.

Bellemain (2001), em relação ao termo “dinâmico”, aponta que tal princípio permite ao usuário a sensação de agir direta e livremente sobre a representação do objeto, além de poder controlar imediatamente os efeitos dessa ação (BELLEMAIN, 2001). Nesse sentido, e contemplando os registros de representação semiótica, Nóbriga (2019) conceitua tratamento dinâmico e conversão dinâmica:

O Tratamento Dinâmico seja considerado como as transformações que ocorrem num mesmo registro e que sejam produzidas num ambiente que permita os princípios de manipulação direta, constituindo uma relação de conhecimento em comparação com as representações iniciais. Já a Conversão Dinâmica seria as transformações que ocorrem, simultaneamente, de um registro para outro e que sejam produzidas num ambiente que permita os princípios de manipulação direta, constituindo uma relação de conhecimento em comparação com as representações iniciais (NÓBRIGA, 2019, p. 9).

Em vista disso, como o foco dado a este trabalho gira em torno da articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, que relaciona a geometria com a álgebra, abordaremos, principalmente, as conversões dinâmicas, utilizando o software dinâmico tanto no processo de ensino como no de aprendizagem.

Vale ressaltar a necessidade de um planejamento e um estudo da adequação entre o uso do recurso escolhido às necessidades da aula a ser trabalhada, permitindo a interação entre o conhecimento e uma prática de ensino capaz de propiciar uma melhor compreensão.

4.7 ANÁLISE DE SOFTWARES DINÂMICOS

Os estudos preliminares realizados até o momento evidenciaram que a utilização de uma ferramenta computacional na articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta pode trazer um dinamismo para esse processo através da visualização por meio das conversões nos dois sentidos realizadas no gráfico e na equação simultaneamente.

Assim sendo, julgamos como importante investigar softwares no que se refere à conversão da representação algébrica e da representação geométrica, em ambos os sentidos, apresentando, a seguir, reflexões em relação ao que esses artefatos computacionais realizam e o que eles não realizam diante dessa perspectiva.

4.7.1 Software GeoGebra

O GeoGebra é um software de Matemática Dinâmica criado por Markus Hohenwarter, que iniciou seu projeto em 2001 na Universidade Salzburg, Áustria, e o desenvolveu na Florida, Estados Unidos. A ferramenta reúne geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos, apoiando o ensino e a aprendizagem em diversas áreas de conhecimento.

Lucena e Gitirana (2016) definem o GeoGebra como um software gratuito que possibilita a um mesmo objeto matemático a utilização de representações distintas, de forma dinâmica e articulada, possibilitando ao usuário a visualização de tais representações em uma única tela.

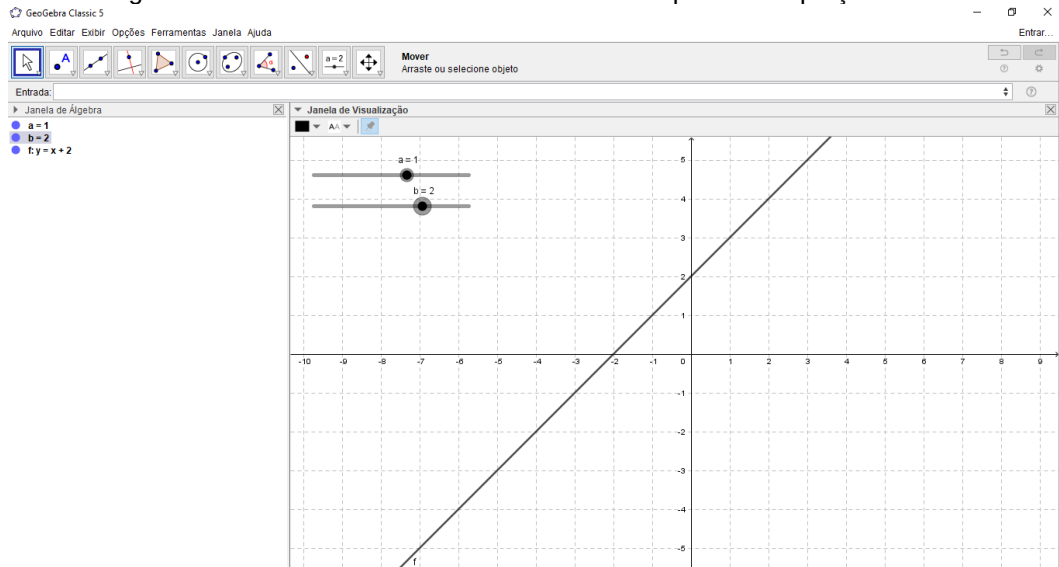
As autoras apontam que o GeoGebra dispõe de duas janelas, uma de visualização e uma de álgebra, que podem ser vistas simultaneamente. Além disso, apontam o GeoGebra como um recurso importante para uma abordagem do conceito de parábola, buscando vincular os dois subcampos da Matemática e articular diferentes representações.

Atentando-se ao foco dado neste trabalho acerca da articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, que relaciona a geometria com a álgebra, Gravina *et al.* (2010) salientam as possibilidades do estudo de geometria analítica com a utilização desse software, destacando que isso se observa a partir do

Próprio nome do software que funde geometria (Geo) com álgebra (Gebra). Com o GeoGebra também é possível trabalhar as figuras sob o ponto de vista analítico. Para isso, basta selecionar os menus “Exibir Eixos” e “Exibir Janela de Álgebra” e aos objetos geométricos construídos são associados, por exemplo, as coordenadas dos pontos, as equações das retas, as equações dos círculos (GRAVINA *et al.*, 2010, p. 31).

Na figura 9, a seguir, temos um formato de construção que, ao manipularmos a equação da reta, podemos observar os efeitos obtidos na representação geométrica correspondente.

Figura 9 – Tela inicial do software GeoGebra expondo a equação da reta

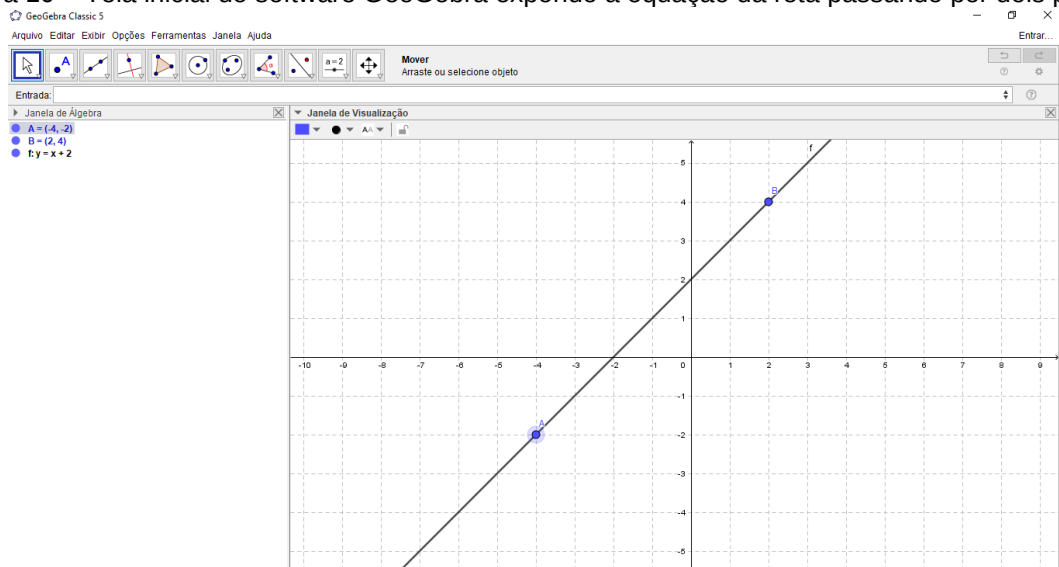


Fonte: Autor (2022).

Porém, mesmo o software permitindo a criação da equação, dependendo de coeficientes manipuláveis, chamados controles deslizantes, a reta obtida por tal equação não é modificável.

Na forma como mostra a figura 10, a seguir, com a reta sendo criada a partir de dois pontos, temos a possibilidade de mover os pontos e, com isso, movimentar a reta, observando as alterações na equação. Contudo, há uma limitação no que se refere à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, pois não temos a possibilidade, nesse modelo, de manipular a equação.

Figura 10 – Tela inicial do software GeoGebra expondo a equação da reta passando por dois pontos



Fonte: Autor (2022).

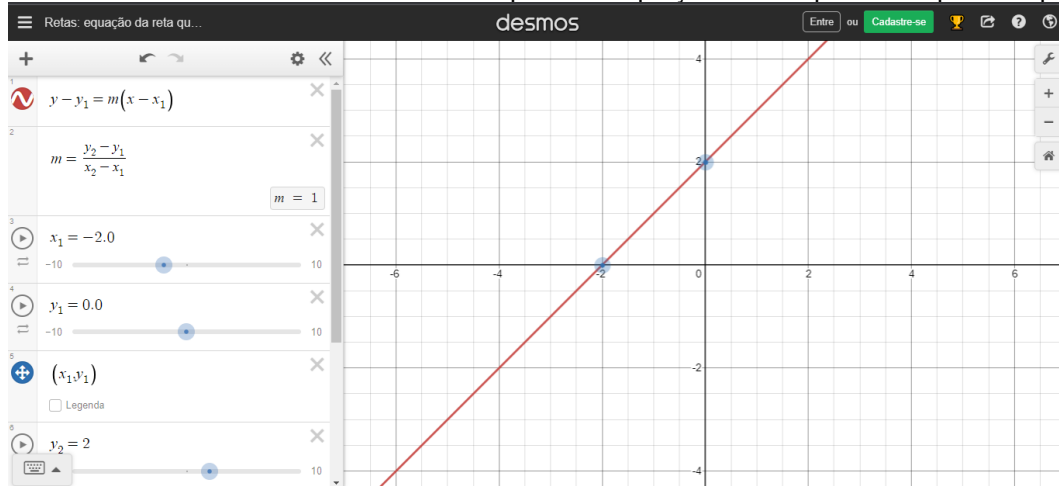
Nesse sentido, mesmo apresentando diversos aspectos interessantes relacionados à perspectiva do nosso estudo, o software em questão não atende às necessidades relacionadas à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

4.7.2 Software Desmos

O software Desmos foi idealizado por Eli Luberoff e lançado como uma *startup* em uma conferência de Nova Iorque, denominada *TechCrunch's Disrupt*, no ano de 2011. Como mostra a figura 11, é designado para a construção de gráficos, tendo também uma visualização algébrica e uma calculadora na própria tela.

Segundo Melo (2021), o Desmos pode se tornar uma ferramenta importante em relação ao ensino de gráficos, uma vez que traz dinamismo ao explicar o conteúdo. A autora aponta que sua utilização confronta a maneira de ensinar usando lápis, régua e quadro, tendo assim a possibilidade de trazer maiores ganhos para os estudantes na compreensão dos elementos matemáticos.

Figura 11 – Tela inicial do software Desmos expondo a equação da reta passando por dois pontos



Fonte: Autor (2022).

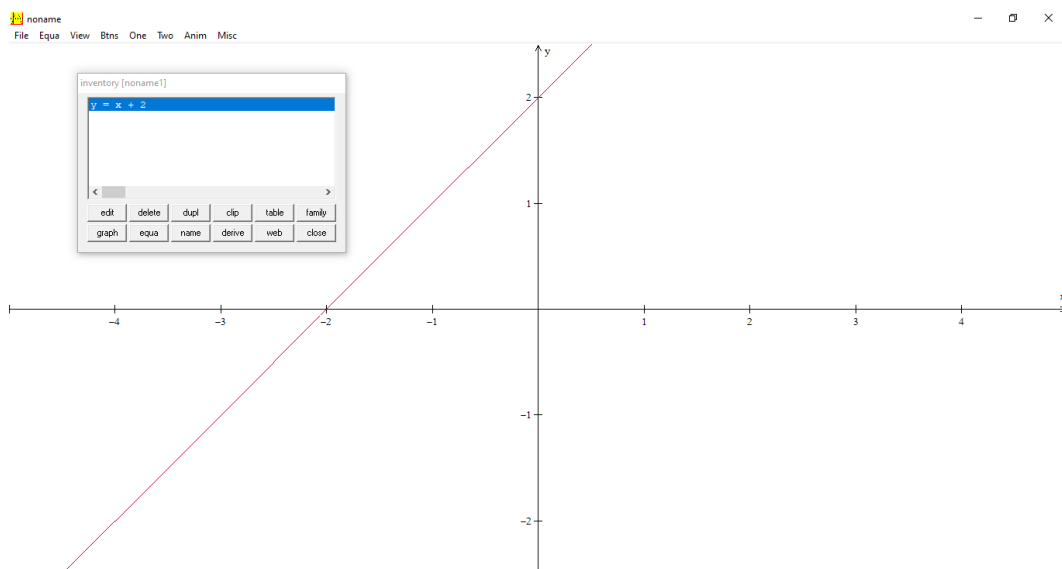
Nesse contexto, destacamos que as ferramentas apresentadas pelo software Desmos são interessantes para o contexto do nosso estudo, pois permitem que a partir da manipulação de pontos no gráfico possam ser obtidas modificações na sua equação da reta, também explicitada na sua tela (figura 11). O mesmo acontece no sentido inverso, ou seja, modificando os coeficientes da equação, obtemos as alterações no gráfico.

No entanto, nesse formato de construção, encontramos restrição a respeito da possibilidade de visualizar a equação da reta na forma $y = ax + b$, dificultando a relação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções referente à semelhança entre a lei geral da função afim e à equação reduzida de uma reta, contexto que se mostra importante para nossa pesquisa.

4.7.3 Software Winplot

O software Winplot foi desenvolvido em 1985 pelo professor da Philips Exeter Academy, Richard Parris, tendo como principal característica gerar gráficos de funções e efetuar operações sobre elas. Lemes, Marques e Brum (2020) consideram o Winplot um software simulador e de exercitação, pois ele oferece ao estudante um ambiente dinâmico com a capacidade de modificar parâmetros e observar resultados imediatos, além de transladar e rotacionar gráficos.

Figura 12 – Tela inicial do software Winplot expondo a equação da reta



Fonte: Autor (2022).

O Winplot explora na mesma tela a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta. Entretanto, apresenta limitação em não possibilitar a movimentação do gráfico, permitindo apenas a manipulação na equação da reta, podendo, assim, serem observados os efeitos obtidos na representação geométrica correspondente. Nesse contexto, o software não possibilita uma articulação entre as representações, não proporcionando o dinamismo necessário ao nosso estudo.

Os softwares abordados anteriormente, mesmo apresentando diversos pontos positivos, não atenderam às necessidades do nosso estudo. Tendo em vista os argumentos supracitados, somados ao acréscimo de informações obtidas a partir das análises realizadas nesses artefatos computacionais, buscaremos uma possível evolução do software *Function Studium*, ferramenta que descreveremos a seguir, adaptando-o especificamente para o estudo da reta e a sua articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica.

4.8 UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE *FUNCTION STUDIUM*: UMA ALTERNATIVA PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

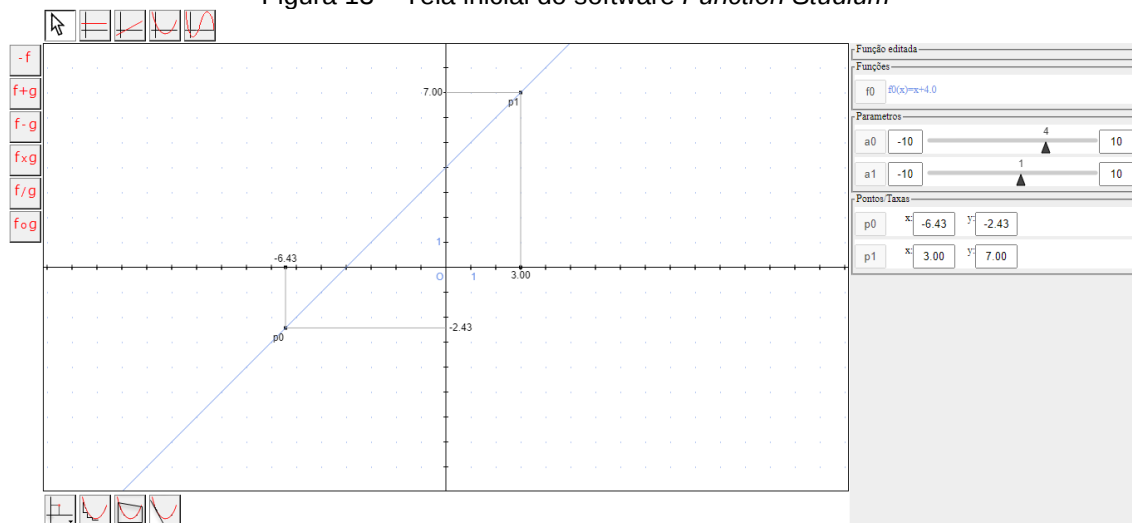
Diante do exposto, o uso do software *Function Studium* se mostra como uma importante ferramenta para nosso estudo, pois tende a oferecer ao estudante um dinamismo na articulação, possibilitando que as representações algébrica e geométrica interajam entre si, ou seja, proporciona a capacidade de representar o gráfico e sua respectiva equação, permitindo, além disso, que a partir do movimento de pontos no gráfico, possam ser obtidas modificações na sua representação algébrica, também explicitada na sua interface. O mesmo acontece no outro sentido, ou seja, modificando os coeficientes da equação, obtêm-se as alterações no gráfico.

O *Function Studium* é uma ferramenta multirrepresentacional para o estudo de funções, com ênfase no raciocínio covariacional, desenvolvida no Grupo de Pesquisas LEMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco, como parte das dissertações de mestrado de Silva (2016) e Tibúrcio (2016) (SILVA *et al.*, 2017).

A produção do software foi iniciada em 2014 e sua ideia inicial foi finalizada em 2017. Ao longo desse período, seu desenvolvimento consistiu na articulação de seis fases: Delimitação do campo, Análises preliminares, Análise de requisitos, Análise *a priori* e prototipação, Fase experimental, e Análise *a posteriori* e validação (CAVALCANTE, 2019).

Segundo Silva *et al.* (2017), um Modelo de Processo de Software baseado no quadro teórico-metodológico da Engenharia Didático-Informática direcionou a concepção e o desenvolvimento do software *Function Studium*.

A ferramenta dispõe de duas janelas, uma de visualização e uma de álgebra, que podem ser vistas simultaneamente, além de proporcionar diversas funções, como mostra a figura a seguir.

Figura 13 – Tela inicial do software *Function Studium*

Fonte: Autor (2022).

Na tela inicial do software *Function Studium* (figura 13), exemplificamos inserindo a função afim $f(x) = x + 4$. Explorando o ambiente, temos, na parte superior da tela, o ícone de seleção de um objeto no gráfico, além de quatro tipos de funções: a constante, a afim, a quadrática e a polinomial de grau três.

À esquerda do campo para plotagem do gráfico, temos as operações básicas, que podem ser realizadas com funções: função oposta, soma, diferença, produto, quociente e função composta.

Na parte inferior da tela, temos as ferramentas de marcar ponto, a taxa média de variação, a representação da reta secante e da tangente. Por fim, ao clicarmos nos ícones referentes a cada função, é habilitada a janela “Função Editada”, na qual é registrado todo o processo realizado no software.

Uma das diversas formas de definir uma função no software é selecionarmos o ícone referente à função desejada, a afim, por exemplo, e clicarmos em dois pontos na representação do plano cartesiano. Com isso, ao plotarmos a função, temos a disposição de relacionar a representação algébrica e a representação geométrica: movimentando os pontos no gráfico, podemos observar as alterações sofridas na representação algébrica; alterando os parâmetros, conseguimos identificar as modificações obtidas no gráfico.

Um fator importante evidenciado em nosso estudo é a continuidade no desenvolvimento e aprimoramento do *Function Studium*, desenvolvendo versões do software com a inserção de outras possibilidades.

Sob essa vertente, Cavalcante (2019) aborda alguns requisitos para uma possível atualização do software *Function Studium*, dos quais destacamos: permitir a utilização de expressão algébrica, coordenadas de pontos e outras representações matemáticas como entrada; uso do software em outras bases tecnológicas e no modo *off-line*; e funções de compartilhamento rápido, desfazer e salvar.

Em nosso estudo, utilizaremos o software *Function Studium* fazendo uso para a experimentação de situações, abordando prioritariamente a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica, analisando, assim, as potencialidades e as dificuldades/limitações do artefato para o estudo da reta.

5 DESCRIÇÃO DAS SITUAÇÕES

Para a elaboração das situações de ensino (disponíveis no Apêndice A), para as quais utilizamos o software *Function Studium*, nos embasamos em nossos estudos preliminares na perspectiva da Engenharia Didático-Informática e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Buscamos elaborar um conjunto de situações interligadas, iniciando com propostas mais simples, aumentando de forma gradativa o nível de dificuldade e introduzindo conceitos no decorrer do processo.

Essas situações foram pensadas como proposta a ser desenvolvida junto a estudantes do 3º ano do ensino médio, tendo duração estimada de três aulas, levando em consideração, principalmente, três aspectos importantes: a compreensão do objeto reta, a articulação do conteúdo “reta” na função afim e na geometria analítica, e o aprofundamento do estudo da reta por meio da compreensão da conversão nos dois sentidos (entre as suas representações algébrica e geométrica).

De modo geral, as situações podem ser divididas em três categorias de análise, sendo elas: a compreensão do objeto reta e a abordagem de aspectos das representações gráfica e algébrica da reta; reflexão sobre as relações do objeto reta nas temáticas da função afim e da geometria analítica; e a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

As situações que nos propusemos a experimentar foram abordadas junto a oito estudantes do 3º ano do ensino médio, formando quatro duplas. Um fator importante a ser destacado é que o pesquisador esteve presente em todos os momentos da experimentação, registrando todas as informações para posteriores análises dos dados.

Um aspecto fundamental que nos levou a escolher propor as situações em duplas foi favorecer a verbalização das dificuldades, e efetivamente possíveis conflitos sociocognitivos. De fato, os estudantes precisariam dialogar, discutir e argumentar para que encontrassem uma resposta que representasse a dupla diante das situações propostas. Esses fatores seriam de grande contribuição para nossas análises e objetivos da pesquisa.

A seguir, cada situação será apresentada de forma detalhada, explicitando suas devidas justificativas de concepção e nossas expectativas de possíveis respostas dos estudantes, tomando como fator principal o funcionamento do software

Function Studium no processo com o intuito de analisá-lo criticamente, apontando suas potencialidades e dificuldades/limitações.

5.1 SITUAÇÕES ENVOLVENDO A COMPREENSÃO DO OBJETO RETA

Situação 1 - Vocês sabem o que é uma reta? Discutam e, juntos(as), busquem apresentar uma definição de reta.

Na situação 1, iniciamos por meio de um questionamento às duplas no tocante à compreensão do objeto reta, perguntando se eles sabem o que é uma reta. O objetivo foi que discutissem entre si e, juntos, apresentassem uma definição de reta.

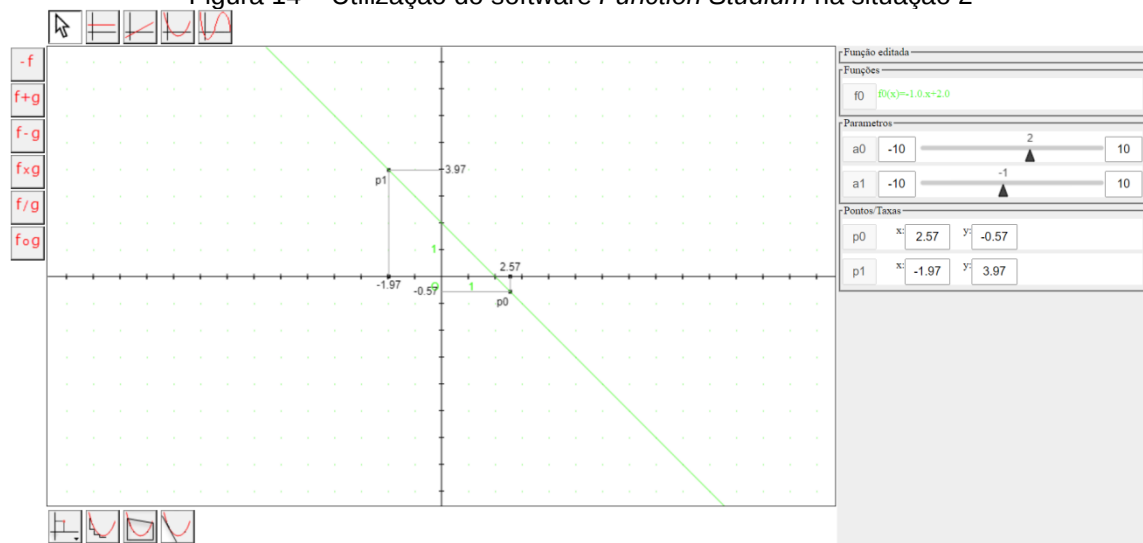
Nessa etapa, consideramos que os estudantes possivelmente teriam dificuldade em definir uma reta, problema esse que poderia ser identificado após analisarmos as respostas das duplas e o diálogo entre os alunos.

É importante destacar que, pelo nível de escolaridade dos estudantes, consideramos possível que muitas duplas apresentassem declarações que se aproximassem do que desejávamos, partindo do pressuposto que o objeto reta atravessa a escolaridade em vários momentos, permeando diferentes olhares: uma fundamentação mais robusta a respeito da geometria euclidiana plana, não definindo, mas trazendo a sua forma de ser construída axiomaticamente e a presença de noções primitivas; um olhar para a reta na função, como sendo o gráfico da função afim, sendo definida pela representação algébrica; aspectos da geometria analítica, sob um parâmetro cartesiano, definido a partir da sua representação algébrica.

Situação 2 – Com o auxílio do software *Function Studium*, construam uma reta. Do lado direito da tela do software, nas janelas funções, parâmetros e pontos/taxas, observem o que aparece. Como vocês interpretam essas informações?

Na situação 2, trouxemos o software *Function Studium* como ferramenta a ser utilizada, permitindo, entre outras ações, a construção de objetos geométricos da geometria euclidiana de forma dinâmica. Nesse momento, os estudantes deveriam construir uma reta no artefato e buscar responder como interpretam as informações contidas do lado direito da tela, nas abas funções, parâmetros e pontos/taxas, como mostra a figura a seguir.

Figura 14 – Utilização do software *Function Studium* na situação 2



Fonte: Autor (2022).

Essa segunda situação teve o objetivo de introduzir aspectos no que tange às representações algébrica e geométrica do objeto reta no plano cartesiano.

Pelo nível de escolaridade dos estudantes, consideramos possível que eles reconhecessem de imediato as coordenadas dos pontos que definiram a reta e sua representação algébrica exibida no software *Function Studium* no formato da equação reduzida da reta $y = ax + b$. Direcionamos o modo de exibição à equação reduzida da reta com o intuito de nos aproximarmos da forma como a lei de formação de uma função afim é dada no estudo das funções. Nessa lógica, essa atividade teve como intuito uma retomada do estudo de uma função afim, tendo em vista que essa abordagem já havia sido trabalhada com os alunos anteriormente.

Situação 3 – Considerando a reta r , sendo esta determinada pelos pontos A $(-2, -1)$ e B $(2, 7)$, de que maneira podemos descobrir se o ponto C $(-1, 1)$ pertence a reta? E o ponto D $(-38, -73)$?

Na situação 3, pediu-se que a dupla considerasse a reta r , determinada pelos pontos A $(-2, -1)$ e B $(2, 7)$. Em seguida, os estudantes foram levados a refletir de que maneira eles poderiam descobrir se o ponto C $(-1, 1)$ e o ponto D $(38, -73)$ pertenciam a essa reta.

Essa atividade, típica de livros didáticos no estudo de função afim, teve por objetivo permitir que os estudantes retomassem os conhecimentos utilizados ao longo dos anos anteriores e apresentassem métodos de resolução, como substituir as coordenadas de cada ponto fornecido em $y = ax + b$, e assim resolvessem um sistema de equações com o intuito de encontrar os valores de a e b , e, desse modo, com a

lei de formação da função, substituíssem os valores das coordenadas dos pontos C e D para verificarem a pertinência desses pontos à reta r .

Consideramos que as possíveis respostas dos estudantes acerca das maneiras de se resolver esse tipo de problema geraria um debate entre a dupla por meio do qual seriam discutidas as soluções válidas e aquelas que apresentariam algum tipo de limitação ou erro. Esperávamos que, ao buscarem investigar a pertinência do ponto D à reta r , os estudantes percebessem que, para alguns casos, uma solução algébrica pode se mostrar mais eficiente do que uma solução geométrica, o mesmo acontecendo no sentido inverso.

5.2 SITUAÇÕES ACERCA DA RELAÇÃO DO OBJETO RETA NA GEOMETRIA ANALÍTICA E NO ESTUDO DAS FUNÇÕES

Situação 4 – Qual a expressão algébrica que permite a obtenção de todos os pontos da reta determinada por A (3, 4) e B (3, 6)?

Na situação 4, as duplas deveriam encontrar uma expressão algébrica que permitisse a obtenção de todos os pontos da reta determinada por A (3, 4) e B (3, 6).

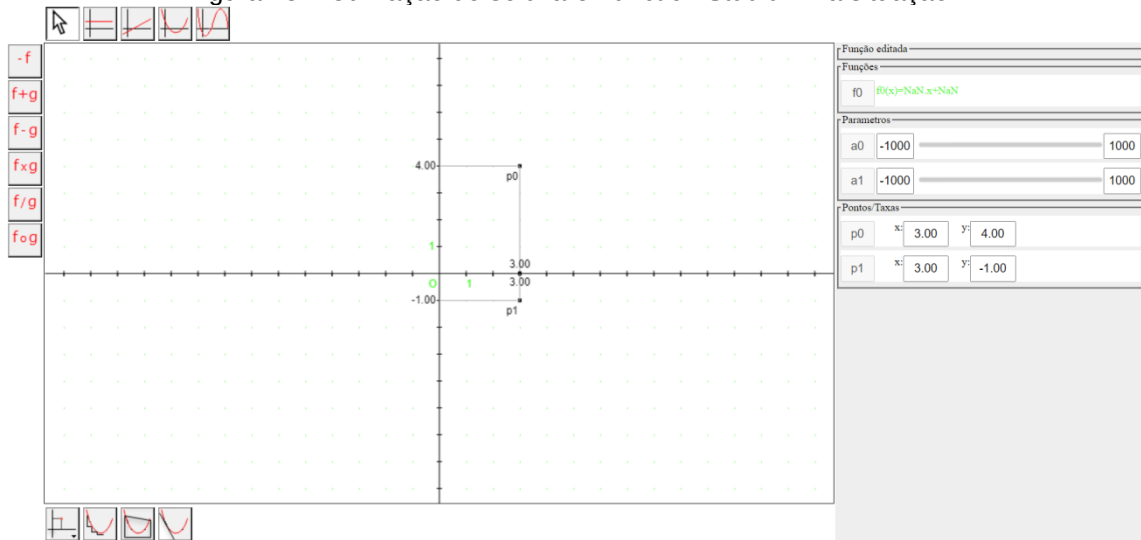
Para os estudantes, essa atividade poderia parecer similar à anterior, contudo, ela tenderia a trazer certo problema, tendo em vista que o procedimento de encontrar a lei de formação de uma função afim por meio das coordenadas de dois de seus pontos, discutido no exercício anterior, não funcionaria nesse caso, considerando que o sistema de equações obtido por meio da substituição das coordenadas dos pontos dados na expressão $y = ax + b$ não apresentaria soluções.

Nosso intuito ao propor essa atividade foi trazer uma situação de conflito que invalidasse parcialmente o procedimento utilizado anteriormente pelos estudantes. Com isso, nesse momento, surgiria o caso de uma reta vertical, que não pode representar uma função, pois teríamos mais de um valor da variável dependente para um mesmo valor da variável independente.

Consideramos, diante do possível conflito gerado pela atividade, que alguns questionamentos poderiam surgir entre a dupla, como: “essa reta existe?”; “qual o problema dessa atividade?”; “o que essa reta tem de especial?”. Questões como essas fomentariam o debate e, provavelmente, levariam os estudantes a concluir que essa reta não poderia ser representada algebricamente por uma expressão do tipo $y = ax + b$.

Um fator importante a ser destacado é o software *Function Studium*. Ao formarem uma reta vertical no artefato, clicando em dois pontos no plano cartesiano, criando uma reta qualquer e manuseando os pontos, os estudantes perceberiam um erro no campo do software relacionado à representação algébrica (figura 15), pois a ferramenta foi idealizada inicialmente para o estudo das funções.

Figura 15 – Utilização do software *Function Studium* na situação 4



Fonte: Autor (2022).

Diante dessa situação, acreditávamos que os estudantes retomariam a discussão com a definição de uma função, impossibilitando a existência de uma função afim que fosse representada geometricamente por uma reta vertical.

Esperávamos, por fim, que os estudantes refletissem quanto à estratégia necessária para a obtenção de uma expressão algébrica para a referida reta, que é a condição de alinhamento de 3 pontos no plano, em que, dadas as coordenadas de dois pontos, é possível a determinação da equação de uma reta, se considerarmos o terceiro ponto de coordenadas gerais (x, y) , obtendo, nesse caso, a equação $x = 3$ como sendo a expressão algébrica procurada na questão mencionada.

Situação 5 – Considerando a reta r , determinada pelos pontos $A(3, 4)$ e $B(3, 9)$, de que maneira podemos descobrir se o ponto $C(3, 7)$ pertence à reta? E o ponto $D(3, 70)$?

Na situação 5, pediu-se que a dupla considerasse a reta r , determinada pelos pontos $A(3, 4)$ e $B(3, 9)$. Em seguida, os estudantes deveriam responder de que maneira eles poderiam descobrir se o ponto $C(3, 7)$ e o ponto $D(3, 70)$ pertenciam a essa reta.

Essa atividade teve como objetivo permitir que os estudantes retomassem os conhecimentos utilizados em torno da questão anterior sobre reta vertical. Esperávamos que os alunos apresentassem métodos de resolução, como a condição de alinhamento de 3 pontos no plano, e impossibilitassem a existência de uma função afim que fosse representada geometricamente por uma reta vertical.

5.3 SITUAÇÕES ABRANGENDO A ARTICULAÇÃO ENTRE A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA E A REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO OBJETO RETA

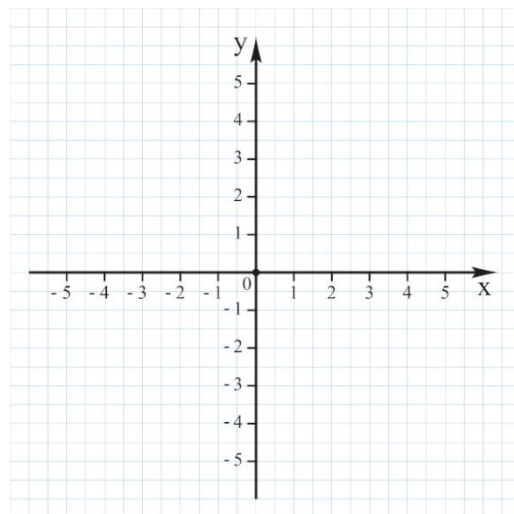
Situação 6 – Tracem uma reta no *Function Studium* e, com isso, manuseiem os coeficientes da forma algébrica através dos controles “a0” e “a1”, que são os parâmetros. Com isso, qual o efeito do parâmetro “a0” no gráfico da equação? E qual o efeito do parâmetro “a1”? O que acontece com os parâmetros “a0” e “a1” ao movimentarmos o gráfico da equação?

Na situação 6, associada à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, os alunos deveriam traçar uma reta no *Function Studium* e, com isso, manusear os coeficientes da forma algébrica através dos controles “a0” e “a1”, que são os parâmetros. Posteriormente, os estudantes deveriam refletir, discutir e apresentar respostas diante das perguntas: “qual o efeito do parâmetro “a0” no gráfico da equação?” e “qual o efeito do parâmetro “a1” no gráfico da equação?”.

Dando continuidade, nessa ocasião os estudantes deveriam manusear a reta, atentando-se para o fato de o objeto já ter sido anteriormente traçado no software e, a partir disso, observar o que acontece com os coeficientes “a0” e “a1”. Em seguida, os alunos buscariam debater, refletir e responder à seguinte pergunta: “o que acontece com os parâmetros “a0” e “a1” ao movimentarmos o gráfico da equação?”.

A realização dessas atividades esteve diretamente relacionada a dois aspectos: ao comportamento do gráfico da equação, associado à variação dos valores de seus coeficientes, e o sentido inverso, ou seja, à forma como os parâmetros se portam de acordo com o manuseio do gráfico. Esse tipo de atividade, em que o estudante é levado a tirar suas conclusões a respeito da dinamicidade, visou permitir, com o tipo $y = ax + b$, que ele percebesse que o coeficiente “a” está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, enquanto a coordenada “b” é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas.

Situação 7 – Esbocem, num mesmo sistema coordenado, as retas das seguintes equações definidas em $\mathbb{R}$.



$$y = x - 2$$

$$y = x$$

$$y = x + 2$$

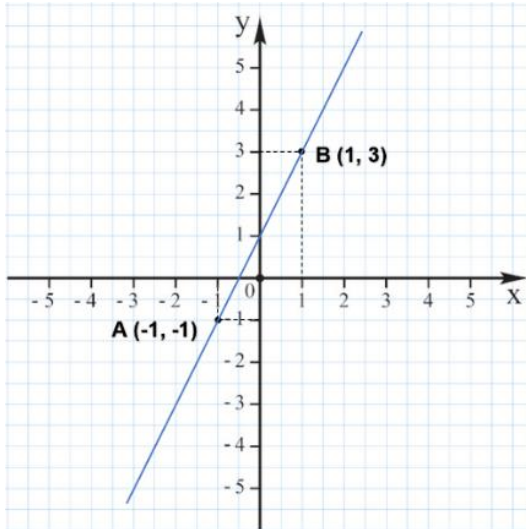
- (A) As retas são crescentes ou decrescentes? Por quê?
- (B) As retas intersectaram o eixo y (ordenadas)? Se sim, em quais pontos?

A situação 7 envolveu a articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta, englobando a articulação entre três equações e seus respectivos gráficos. Inicialmente, solicitou-se o esboço, num mesmo sistema de coordenadas, das retas das seguintes equações definidas em $\mathbb{R}$: $y = x - 2$, $y = x$ e $y = x + 2$. Em seguida, a dupla deveria refletir, discutir e apresentar uma resposta diante dos seguintes questionamentos: “As retas são crescentes ou decrescentes? Por quê?” e “As retas intersectaram o eixo y (ordenadas)? Se sim, em quais pontos?”.

Esperávamos, nessa situação, que os estudantes compreendessem o comportamento do gráfico da equação associado à variação dos valores de seus coeficientes e à forma como os parâmetros se portam de acordo com o manuseio do gráfico. Esse tipo de atividade teve o intuito de permitir aos estudantes explorar a dinamicidade do software *Function Studium* e, possivelmente, a dupla perceber, quando a reta estivesse na forma $y = ax + b$, que o coeficiente “ a ” liga-se à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, enquanto a coordenada “ b ” é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas.

Situação 8 – Associem as equações abaixo com seus respectivos gráficos. Em seguida, expliquem como fizeram esta correspondência.

I.



☐ $2x - y + 1 = 0$

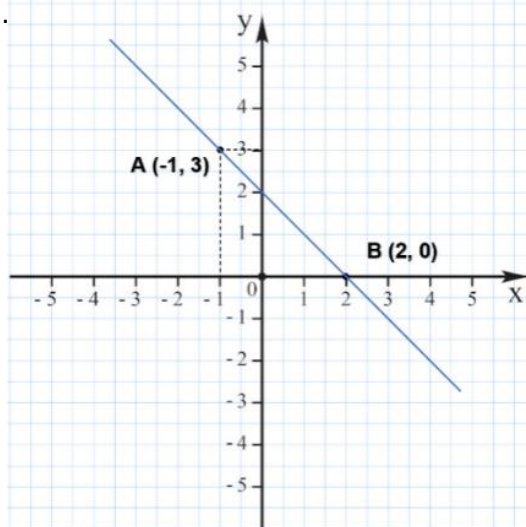
☐ $x = 3$

☐ $y = -x + 2$

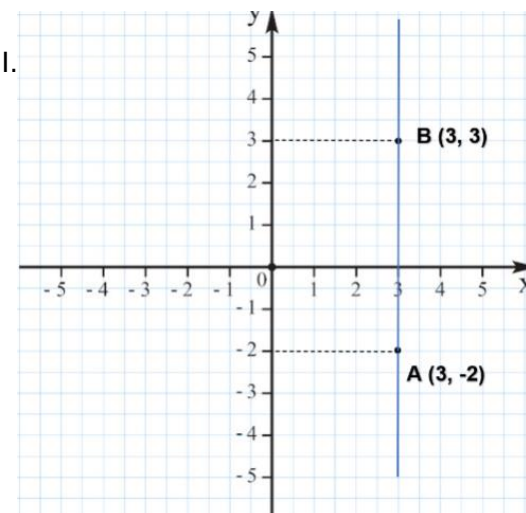
☐ $x + y - 2 = 0$

☐ $y = 2x + 1$

II.



III.



Por fim, na situação 8, buscamos abordar uma questão presente nas nossas análises de livros didáticos, realizadas nos estudos preliminares. O problema proposto estava relacionado à conversão nos dois sentidos, ou seja, no que cerne à articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta. Os estudantes deveriam associar as equações com seus respectivos gráficos. Em seguida, a dupla explicaria como realizou essa correspondência.

Esse tipo de estudo, apesar de não ser uma novidade para os alunos, já que no conteúdo de função afim essa análise já poderia ter sido realizada, é um exemplo frequente de dificuldade quanto à conversão da representação geométrica de reta para a representação algébrica, e vice-versa, ou seja, a articulação, sendo que a maior dificuldade está na conversão da geometria para a álgebra (NOTARE; GRAVINA, 2013).

O trabalho em torno dessas atividades esteve diretamente ligado às conversões nos dois sentidos, buscando levar os estudantes a exercitarem o dinamismo no processo, com a associação das duas representações, algébrica e geométrica, do objeto reta.

Diante do exposto, nosso intuito com a experimentação das situações de ensino propostas, para as quais levamos em consideração nossas análises prévias, na perspectiva da EDI e da TRRS, foi de ter a oportunidade de confirmar ideias iniciais e coletar e analisar dados com o objetivo de realizar uma análise crítica do software a partir da EDI na perspectiva de aprimoramento da tecnologia no que tange à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

Nessa perspectiva, a seguir apresentaremos o quadro 5 com os objetivos das situações, acerca dos aspectos importantes para análise crítica do software *Function Studium*, no contexto da investigação.

Quadro 5 – Objetivos das situações em torno dos aspectos em relação a análise crítica do software *Function Studium*

Compreensão do objeto reta	Relação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções	Articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta
Situações 1, 2 e 3	Situações 4 e 5	Situações 6, 7 e 8
Analisar a reta no software <i>Function Studium</i>, na perspectiva dos três diferentes campos (geometria euclidiana plana, função e geometria analítica); Explorar as representações algébrica e geométrica do objeto reta contidas no software <i>Function Studium</i>.	Explorar no software <i>Function Studium</i> a relação do objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções, através da reta vertical.	Explorar as diversas representações do objeto reta contidas no ambiente do software <i>Function Studium</i>; Analisar o dinamismo no ambiente do software <i>Function Studium</i> em relação a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

Fonte: Autor (2022).

6 EXPERIMENTAÇÃO

O intuito dessa etapa é analisar criticamente o software *Function Studium* e, com isso, explorar suas potencialidades e dificuldades/limitações, ou seja, verificar falhas, sugestões de melhorias de interface, comandos, botões, funcionalidades, entre outros. Dessa forma, discutiremos sobre a utilização do artefato computacional como ferramenta a ser utilizada em relação à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

Vale ressaltar que essa experimentação faz parte do caráter cíclico da EDI, pois continuamos o estudo de Silva (2016), no qual o software *Function Studium* foi experimentado com estudantes de Licenciatura em Matemática, tendo em vista o potencial educativo do artefato computacional. Dessa forma, a vertente do nosso trabalho traz o *Function Studium* para a Educação Básica.

Conforme dissemos anteriormente, a experimentação contou com a participação de oito estudantes do 3º ano do ensino médio, formando quatro duplas. Antecedendo a experimentação, foi apresentado aos estudantes um “Termo de Consentimento Livre e Esclarecido” (disponível no Apêndice B), para que todos pudessem entender o objetivo da nossa pesquisa e o papel de cada um durante toda a experimentação. Caso aceitassem participar, deveriam assinar o termo supracitado, juntamente com seu responsável, autorizando a divulgação do material produzido, sem suas identificações. Todos concordaram, assinaram o termo e o entregaram ao pesquisador no momento da experimentação.

A escolha dos estudantes participantes da pesquisa foi feita a partir da disponibilidade e da manifestação de interesse deles, considerando o critério de inclusão estabelecido, qual seja: estarem cursando o 3º ano do Ensino Médio.

Os oito participantes da pesquisa foram organizados em duplas. Cada dupla teve a sua disposição um computador com acesso à internet, pois o software *Function Studium* encontra-se disponível *on-line* na plataforma Atelier Digitas. O experimento aconteceu em dias distintos, de acordo com a disponibilidade das duplas.

Nos encontros, apresentamos aos participantes da pesquisa, no caso, a cada dupla, uma síntese do nosso estudo e nosso objetivo a ser alcançado por meio do artefato computacional: proporcionar um suporte ao professor para o ensino do objeto reta, na perspectiva da articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta.

Após essa apresentação inicial, solicitamos que acessassem a plataforma Atelier Digitas, a qual hospeda o software *Function Studium*, disponível em <<https://artefacts.atelierdigitas.net/functionstudium/>>.

Desse modo, para iniciar a experimentação, orientamos os estudantes participantes da pesquisa apresentando a eles as funcionalidades básicas do artefato computacional, conduzindo-os em relação à compreensão do que seria desenvolvido em torno do objeto do conhecimento em questão, nesse caso, a reta. Buscamos direcionar as instruções de forma clara e concisa, com o objetivo de evitar incompreensões aos usuários (TIBÚRCIO, 2020).

Após essa instrução inicial, os estudantes foram orientados a ler as questões na ficha de situações propostas e explorar o software *Function Studium* para respondê-las.

Com o intuito de obtermos os dados referentes ao experimento, além das respostas dadas em torno das situações de ensino, gravamos a interface do computador das duplas (em áudio e vídeo por meio do software *OBS Studio*) para coletarmos a interação entre os componentes de cada uma delas e os procedimentos realizados no *Function Studium*.

Organizamos em forma de calendário as informações dos encontros presenciais de acordo com a disponibilidade dos integrantes das duplas. As composições das duplas foram: Dupla 1, composta pelos estudantes “A e B”; Dupla 2, pelos estudantes “C e D”; Dupla 3, pelos estudantes “E e F”; e Dupla 4, pelos estudantes “G e H”. O quadro a seguir apresenta os dias e turnos dos encontros bem como a duração de cada um.

Quadro 6 – Informações dos encontros com as duplas na fase de experimentação

Dupla	Dias/mês	Turno	Duração
Dupla 1 (AB)	06/09	Tarde	2h21min
Dupla 2 (CD)	08/09	Manhã	1h42min
Dupla 3 (EF)	12/09	Manhã	1h15min
Dupla 4 (GH)	15/09	Manhã	1h22min

Fonte: Autor (2022).

Um fator importante a ser destacado no quadro 6 é o tempo maior utilizado pela Dupla 1 em comparação com as outras duplas, aspecto esse que se justifica pelo fato de, em dado momento da experimentação, a internet ter oscilado e o software *Function Studium* ter parado de funcionar por um período, como descreveremos adiante na análise dos dados experimentais.

Durante a experimentação, analisamos os requisitos levantados – se atendiam às expectativas, se auxiliavam o ensino e a aprendizagem, e se ajudavam na compreensão do saber; verificamos se o recurso tecnológico se mostrava eficaz para atender o que foi planejado; e averiguamos os possíveis erros e incompreensões, as sugestões de implementações e outras inconsistências no uso do software *Function Studium* no que tange à articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta (TIBURCIO; BELLEMAIN, 2021).

Nosso foco na próxima seção é a fase de análise dos dados experimentais, quando realizamos uma análise crítica do software *Function Studium* apresentando suas potencialidades e dificuldades/limitações na perspectiva de aprimoramento da tecnologia em relação à articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta.

7 ANÁLISE DOS DADOS EXPERIMENTAIS

Nesta etapa, buscaremos analisar os dados experimentais confrontando nossas ideias iniciais com os dados coletados durante a fase de experimentação em torno das situações propostas, utilizando como ferramenta o software *Function Studium*. Dessa forma, analisaremos criticamente as potencialidades e as dificuldades/limitações do artefato computacional quanto à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, na perspectiva de elaborar funcionalidades para possíveis modificações dentro desse ambiente.

Em relação à experimentação, ao receberem a atividade, os estudantes foram orientados a utilizarem o software *Function Studium* como ferramenta computacional para auxiliar na sua realização. No decorrer, percebemos envolvimento e dedicação entre os alunos na execução das situações e anotações das resoluções propostas.

Posteriormente à fase de coleta de dados, buscamos organizar o material para analisá-lo com um cunho qualitativo. Segundo Lüdke e André (1986, p. 45), “analisar os dados qualitativos significa ‘trabalhar’ todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos das observações, as transcrições de entrevistas, as análises de documentos e as demais informações disponíveis”.

Para análise do material referente ao experimento no software *Function Studium*, dispomos das respostas dadas pelos estudantes acerca das situações e as gravações da interface do computador (áudio e vídeo) das duplas, das quais obtivemos as interações entre os componentes de cada uma delas e os procedimentos realizados no artefato computacional.

Conforme dissemos anteriormente, denominamos as duplas da seguinte forma: Dupla 1, composta pelos estudantes “A e B”; Dupla 2, pelos estudantes “C e D”; Dupla 3, pelos estudantes “E e F”; e Dupla 4, pelos estudantes “G e H”.

Pelo motivo de termos a possibilidade de encontrar processos resolutivos semelhantes entre os estudantes participantes do estudo, decidimos analisar por situação. Dessa forma, a seguir, descreveremos as análises em torno das oito situações propostas a partir das interações das duplas, tomando como fator principal o funcionamento do software *Function Studium* no processo com o intuito de analisá-lo criticamente, apontando suas potencialidades e dificuldades/limitações.

7.1 SITUAÇÃO 1

Iniciamos a situação 1 por meio de um questionamento para as duplas no que se refere à compreensão do objeto reta, perguntando se os estudantes sabiam o que é uma reta. Com isso, os alunos deveriam discutir entre si e, juntos, apresentarem uma definição referente à reta.

As duplas encontraram dificuldade em definir uma reta, fator esse que ficou evidenciado na captura de vídeo e voz com a fala do estudante C, da Dupla 2: “Eu sei o que é, mas é muito complicado definir”.

As quatro duplas seguiram a mesma vertente para responder à situação 1. A figura 16 apresenta a resolução desenvolvida pela Dupla 4.

Figura 16 - Situação 1 resolvida pela Dupla 4

Situação 1 - Vocês sabem o que é uma reta? Discutam e, juntos(as), busquem apresentar uma definição de reta.

Um ponto infinito determinado por duas ordenadas.

Fonte: Autor (2022).

Importante salientar que a reta existe em três diferentes campos, sendo o mesmo objeto, mas com nuances de um para o outro: na geometria euclidiana plana, como um dos axiomas de Euclides, sendo definida por dois pontos distintos; na função, como sendo o gráfico da função afim; e na geometria analítica, sob um parâmetro cartesiano e representação algébrica.

Dessa forma, os estudantes poderiam trazer 1) uma fundamentação mais robusta a respeito da geometria euclidiana plana, não definindo, mas expondo a sua forma de ser construída axiomáticamente e a presença de noções primitivas; 2) um olhar para a reta na função, como sendo o gráfico da função afim, definida pela representação algébrica; e 3) aspectos no que tange à geometria analítica sob um parâmetro cartesiano, definindo a partir da sua representação algébrica.

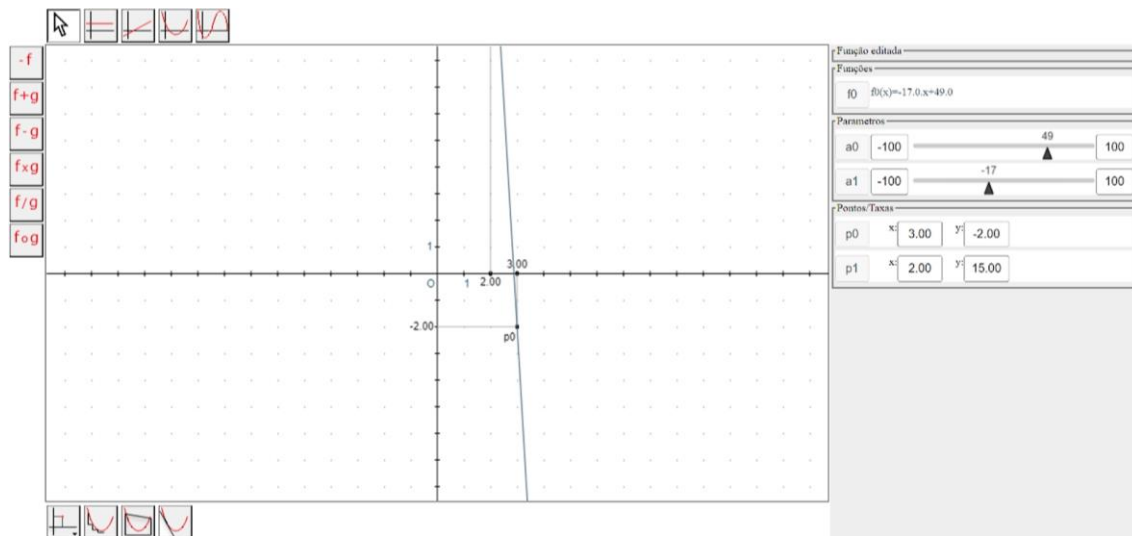
7.2 SITUAÇÃO 2

Na situação 2, trouxemos o software *Function Studium* como ferramenta a ser utilizada, por meio da qual os estudantes deveriam construir uma reta no artefato e

buscar responder como interpretavam as informações contidas do lado direito da tela, nas abas funções, parâmetros e pontos/taxas.

Na captura de vídeo e voz, o estudante B, da Dupla 1, relatou uma limitação que encontrou no software: “O único problema é que quando são números grandes demais, não conseguimos ver os dois pontos”.

Figura 17 – Recorte da situação 2 resolvida pela Dupla 1 no *Function Studium*



Fonte: Autor (2022).

Na captura de tela da Dupla 1 (figura 17), os estudantes utilizaram valores aleatórios para criar a reta no software. A dupla fez a inserção das coordenadas dos pontos (3, -2) e (2, 15) e, dessa forma, obteve uma tabela, a expressão algébrica e a representação gráfica. Contudo, a Dupla 1, ao responder à situação 2, se restringiu à dificuldade do campo de visão limitado do plano cartesiano no software, como mostra a figura a seguir.

Figura 18 – Situação 2 resolvida pela Dupla 1

Situação 2 – Com o auxílio do software Function Studium, construam uma reta. Do lado direito da tela do software, nas janelas funções, parâmetros e pontos/taxas, observem o que aparece. Como vocês interpretam essas informações?

Em primeira análise as informações são de fácil compreensão sobre seu funcionamento. Porém ao utilizar números maiores é impossível visualizá-los no plano em questão

Fonte: Autor (2022).

A Dupla 2 também teve dificuldade com o campo de visão limitado do plano cartesiano no software, como mostra a fala do estudante C: “Queria subir a tela pra visualizar esse ponto”. Nesse caso, os estudantes reconheceram as coordenadas dos pontos que definiram a reta e a representação algébrica, contudo tiveram dificuldade em analisar os efeitos dos parâmetros no gráfico. A figura 19 apresenta a resposta da Dupla 2.

Figura 19 – Situação 2 resolvida pela Dupla 2

Situação 2 – Com o auxílio do software Function Studium, construam uma reta. Do lado direito da tela do software, nas janelas funções, parâmetros e pontos/taxas, observem o que aparece. Como vocês interpretam essas informações?

A janela "funções" apresenta a função das retas
f(x). Parâmetros (a0) não tem a cota y, p- e
(a1) manipula o x. O quadro "pontos / taxas" por
sua vez, atrela as coordenadas (x, y) aos parâ-
metros.

Fonte: Autor (2022).

Dessa forma, podemos apontar a ausência de uma funcionalidade que aumente o campo de visão do plano cartesiano como uma possível limitação do artefato computacional. Mesmo o software proporcionando mover manualmente o eixo de coordenadas, ou alterar a escala dos eixos, que permite visualizar uma maior parte do eixo das abscissas e manipular a variável, seria interessante a possibilidade de aproximar, afastar a tela e se movimentar pelo eixo.

As Duplas 3 e 4, por sua vez, reconheceram as coordenadas dos pontos que definiram a reta, a representação algébrica e os efeitos dos parâmetros no gráfico. A Figura 20 apresenta a resolução desenvolvida pela Dupla 4.

Figura 20 – Situação 2 resolvida pela Dupla 4

Situação 2 – Com o auxílio do software Function Studium, construam uma reta. Do lado direito da tela do software, nas janelas funções, parâmetros e pontos/taxas, observem o que aparece. Como vocês interpretam essas informações?

Funções: Entrego a função designada para encontrar no plano
Retas.
Parâmetros: a0 é o ponto que corta o eixo de y e a1 determina
a inclinação da reta.
Pontos / Taxas: São as coordenadas dos pontos.

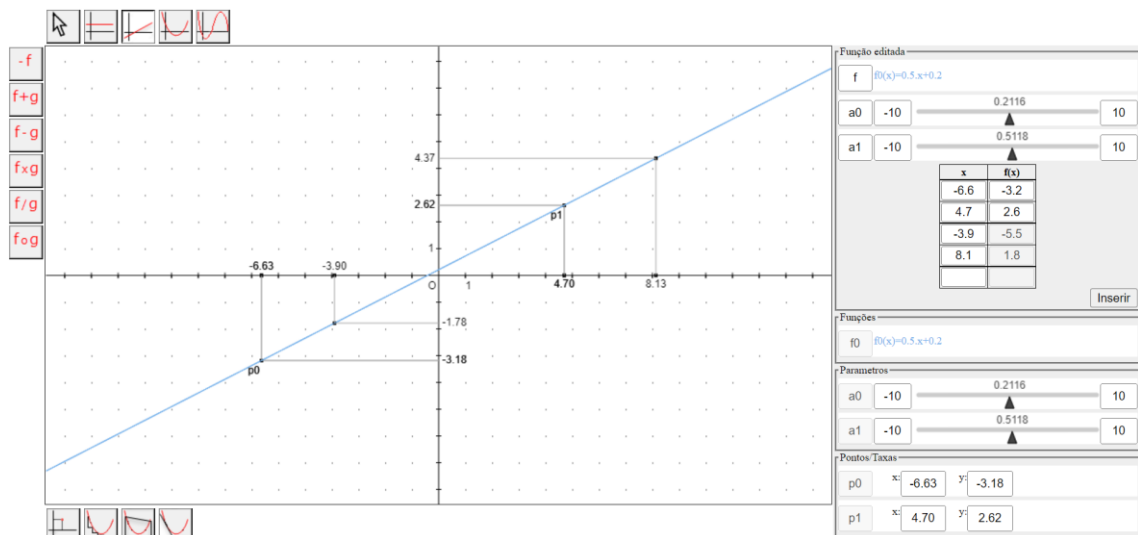
Fonte: Autor (2022).

Analisando a captura de tela e voz da Dupla 4, o estudante G relatou o dinamismo que o software *Function Studium* traz para a experimentação:

Se liga! Massa o efeito que o movimento no gráfico causa na expressão algébrica, e também o que acontece na reta quando eu altero os parâmetros. Muito bom! Assim fica fácil dizer que o a_0 é o ponto que corta o eixo y e a_1 determina a inclinação da reta, se ela é crescente ou decrescente. (Estudante G).

Manuseando o software, a Dupla 4 percebeu que quando construída a reta a partir do terceiro ponto inserido, dependendo do valor de x , a ordenada é atribuída pelo próprio software, com o intuito do ponto pertencer à reta, como mostra a figura a seguir.

Figura 21 – Recorte da situação 2 resolvida pela Dupla 4 no *Function Studium*



Fonte: Autor (2022).

O *Function Studium* é articulado desta forma: quando os estudantes inserem os dois primeiros pontos na tabela, o software automaticamente determina a expressão algébrica e sua representação gráfica, de modo que o artefato cria uma espécie de “trava” nos próximos valores inseridos em $f(x)$.

7.3 SITUAÇÃO 3

A situação 3 pedia que a dupla considerasse a reta r , determinada pelos pontos A (-2, -1) e B (2, 7). Em seguida, os estudantes deveriam responder se o ponto C (-1,

1) e o ponto D (38, -73) pertenciam a essa reta. Buscou-se investigar de que forma a dupla chegaria a sua conclusão.

A Dupla 1 teve dificuldade em descobrir se o ponto D pertencia à reta r , pelo fato de, segundo os estudantes, não visualizarem o ponto no ambiente do software *Function Studium*. A figura 22 apresenta a resolução desenvolvida pela Dupla 1.

Figura 22 – Situação 3 resolvida pela Dupla 1

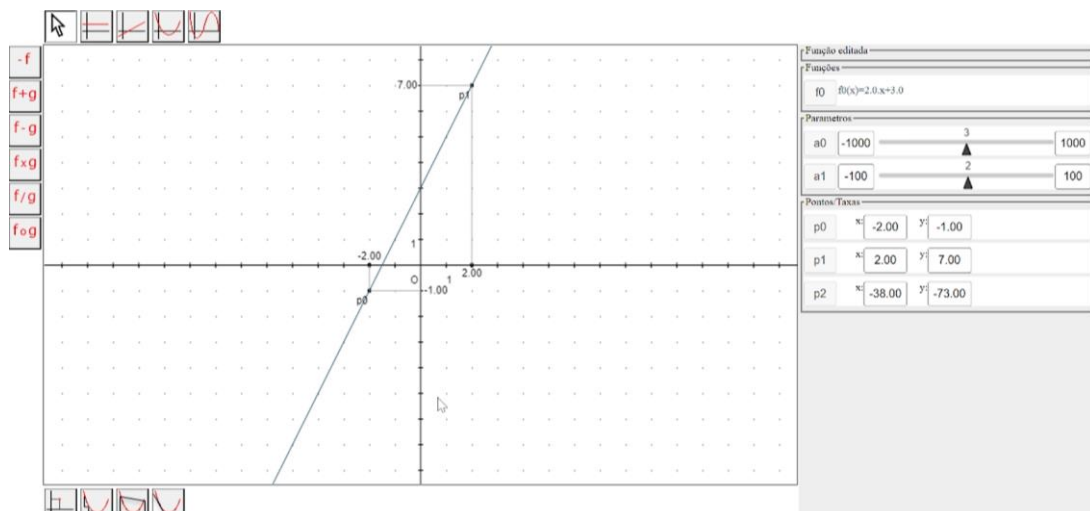
Situação 3 – Considerando a reta r , sendo esta determinada pelos pontos A(-2, -1) e B(2, 7), de que maneira podemos descobrir se o ponto C(-1, 1) pertence a reta? E o ponto D(-38, -73)?

Em relação ao ponto C, através do software conseguimos visualizar facilmente que o mesmo pertence. Porém o ponto D é impossível de visualizar, pois está fora do nosso campo de visão.

Fonte: Autor (2022).

Importante salientar que o artefato não proporciona a possibilidade de aproximar, afastar a tela e se movimentar pelo eixo. Se houvesse essa perspectiva, mesmo a situação 3 trazendo o ponto D (-38, -73) com abscissa e ordenada discrepantes, possivelmente os estudantes não teriam a dificuldade em analisar se o ponto é pertencente à reta r , ou seja, nesse caso o obstáculo está na dificuldade de visualização na janela do artefato. A figura a seguir representa a captura de tela da Dupla 1, na qual os estudantes buscaram desenvolver a situação 3 utilizando o software *Function Studium*.

Figura 23 – Recorte da situação 3 resolvida pela Dupla 1 no *Function Studium*



Fonte: Autor (2022).

Realmente, é complicado explorar a parte gráfica em algumas situações pelo fato de o software *Function Studium* não possibilitar a mudança de escala. Por outro lado, essa ausência pode favorecer a mudança de sistemas de representação e a utilização da representação algébrica para resolver as situações propostas, evidenciando, dessa forma, um dos aportes da informática, as covariações dinâmicas entre sistemas de representação.

As Duplas 2, 3 e 4 utilizaram a estratégia de inserir a abscissa do ponto C e D no software. Com isso, o artefato atribuiu automaticamente a ordenada do ponto. Esse é um fator importante já identificado na situação anterior pela Dupla 4.

A Dupla 2 identificou que os pontos pertenciam à reta, contudo, pelo fato do ponto D não ser visualizado no software, utilizaram o método da condição de alinhamento de 3 pontos no plano, como mostra a figura a seguir com a resolução da situação. Esse contexto com a Dupla 2 mostra a articulação entre as representações.

Figura 24 – Situação 3 resolvida pela Dupla 2

Situação 3 – Considerando a reta r , sendo esta determinada pelos pontos $A(-2, -1)$ e $B(2, 7)$, de que maneira podemos descobrir se o ponto $C(-1, 1)$ pertence a reta? E o ponto $D(-38, -73)$?

Então eu sei, quando colocou a e a reala -1 e ao D, -38, o programa chegou automaticamente a coordenada y para 1 e -73 respectivamente.

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -38 \\ -1 & 1 & -73 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-1)(-73) - (-2)(-73)(-38) - (-1)(-38)(7) - (-1)(-73)(2) - (-2)(-38)(1) - (-1)(-73)(-38)$$

$$= 154 - 546 - 266 - 146 - 38 - 278 = 0$$

Fonte: Autor (2022).

Em suas falas na captura de vídeo e voz, os estudantes D e E, respectivamente das Duplas 2 e 3, relacionaram o objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções: o estudante D apontou que “Eles (pontos) estarão alinhados, pertencerão à reta, se o determinante da matriz formada pelos pontos for igual a 0 (zero)” e o estudante E orientou o colega “Vamos usar a condição de alinhamento que vimos em Geometria Analítica, os dois tem a mesma ideia, trabalham com a reta”.

A Dupla 4 havia percebido na situação anterior que, quando construída a reta, a partir do terceiro ponto inserido, dependendo do valor de x , a ordenada é atribuída pelo próprio software com o intuito do ponto pertencer à reta. Dessa forma, afirmaram que os pontos pertenciam à reta r , como mostra a figura a seguir.

Figura 25 – Situação 3 resolvida pela Dupla 4

Situação 3 – Considerando a reta r , sendo esta determinada pelos pontos $A(-2, -1)$ e $B(2, 7)$, de que maneira podemos descobrir se o ponto $C(-1, 1)$ pertence a reta? E o ponto $D(-38, -73)$?

No Juncion Studium, na aba "função editada" inserimos as coordenadas dos pontos enunciados e colocamos as coordenadas C e D para verificar se fazem parte da mesma reta. E pelo programa, percebe-se que os pontos pertencem à reta.

Fonte: Autor (2022).

7.4 SITUAÇÃO 4

Na situação 4, as duplas buscaram encontrar uma expressão algébrica que permitisse a obtenção de todos os pontos da reta determinada por $A(3, 4)$ e $B(3, 6)$.

A Dupla 1, ao inserir os pontos no software, percebeu que os pontos formavam uma reta vertical, e que a reta vertical não podia representar uma função, como mostra a figura a seguir, com a resolução da dupla.

Figura 26 – Situação 4 resolvida pela Dupla 1

Situação 4 – Qual a expressão algébrica que permite a obtenção de todos os pontos da reta determinada por $A(3, 4)$ e $B(3, 6)$?

Por meio do software, conseguimos perceber que a função desses pontos é inexistente.

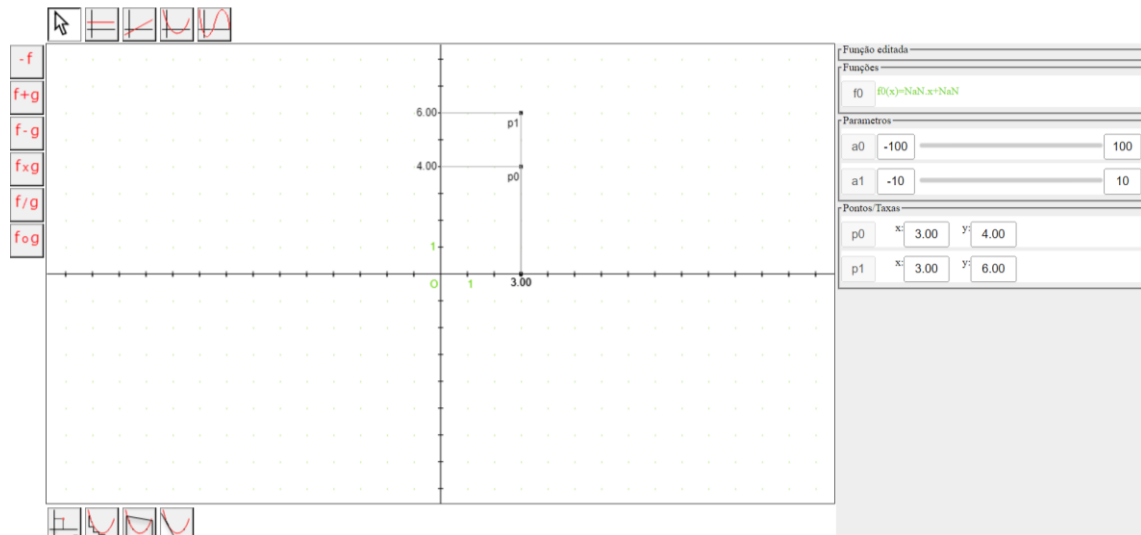
Fonte: Autor (2022).

Posteriormente, os estudantes A e B, da Dupla 1, traçaram uma estratégia para a obtenção de uma expressão algébrica para a referida reta, porém não conseguiram desenvolver. O estudante A, ao inserir os pontos no software, perguntou: "O que é esse $f(0(x) = \text{NaN}.x + \text{NaN}$ que aparece?", depois de um momento em silêncio, o estudante B afirmou que "O primeiro contato com essa ferramenta gera estranheza, vamos fazer com cálculo". Depois de mais um momento em que a dupla silencia, no

qual julgamos que os alunos estavam realizando os cálculos, o estudante A apontou: “Essa equação tá ficando estranha, porque aqui no sistema, o a e o b vão se anular”.

Um aspecto importante que surge na discussão da dupla é o termo “ $f_0(x) = \text{NaN}.x + \text{NaN}$ ” (figura 27), informação que se refere à reta vertical no software e que significa uma característica do artefato, não representando uma limitação, pois o objeto em foco no *Function Studium* é função, e a reta vertical não representa uma função. Essa é outra característica do software que provoca algo interessante, pelo fato de favorecer articulações entre representações, notadamente pela incoerência entre o que o estudante esperava na articulação e a articulação efetivamente realizada pelo recurso computacional.

Figura 27 – Recorte da situação 4 resolvida pela Dupla 1 no *Function Studium*



Fonte: Autor (2022).

As Duplas 2 e 4 perceberam que a reta vertical não pode representar uma função, traçaram uma estratégia para a obtenção de uma expressão algébrica para a referida reta, e utilizaram a condição de alinhamento de 3 pontos no plano para desenvolver a situação.

Nessa vertente, os estudantes C e D, ambos da Dupla 2, discutiram acerca da resolução. O estudante C, ao inserir os pontos no software, afirmou: “O software está dando erro, porque não é uma função, temos vários valores de y para x igual a 3”. Em seguida, o estudante D sugeriu: “Será? Vamos usar a condição de alinhamento de 3 pontos”. Depois de um momento em silêncio, no qual julgamos que os alunos estavam

realizando os cálculos, o estudante D completou: “Seria muito bom se pudéssemos colocar a expressão algébrica e o software gerasse o gráfico”.

Dessa forma, os estudantes utilizaram a condição de alinhamento de 3 pontos no plano para desenvolver a resolução da situação 4, referente à reta vertical, como mostra a figura a seguir.

Figura 28 – Situação 4 resolvida pela Dupla 2

$$18 + 3y + 4x = 3y + 6x + 32$$

$$6 = 2x$$

$$3 = x$$

Fonte: Autor (2022).

Outro fator relevante a ser destacado no diálogo entre os estudantes C e D, da Dupla 2, é a fala do aluno D em relação à ausência de uma espécie de campo de entrada, em que houvesse a possibilidade da inserção da representação algébrica, aspecto importante para o desenvolvimento da situação.

A Dupla 3 percebeu que a reta vertical não pode representar uma função. Todavia, não traçou uma estratégia para a obtenção de uma expressão algébrica para a referida reta. A Figura 29 apresenta a resolução desenvolvida pela Dupla 3 em torno da situação 4.

Figura 29 – Situação 4 resolvida pela Dupla 3

Situação 4 – Qual a expressão algébrica que permite a obtenção de todos os pontos da reta determinada por A (3, 4) e B (3, 6)?

É uma função impossível, já que o gráfico não está o eixo de y e como não tem uma inclinação, não é possível encontrar a função.

Fonte: Autor (2022).

A Dupla 3, com um diálogo, concluiu que a reta gerada a partir dos pontos dados não representava uma função. O estudante E, ao inserir os pontos no software, destacou o termo “ $f_0(x)=NaN.x+NaN$ ”: “O que é esse $f_0(x)=NaN.x+NaN$? Será que coloquei os pontos errados no software?”. Depois de um momento em silêncio, o estudante F apontou: “Penso que o problema seja os dois estarem no mesmo eixo de x ”. Em seguida, o estudante E completou: “Não existe função aí, por isso o software não pega. O a_1 determina a inclinação da reta, e como o gráfico não corta o eixo y , não tem inclinação, então não é possível encontrar a função”.

7.5 SITUAÇÃO 5

Na situação 5, pedia-se à dupla que considerasse a reta r , determinada pelos pontos A (3, 4) e B (3, 9). Em seguida, os estudantes deveriam responder se o ponto C (3, 7) e o ponto D (3, 70) pertenciam a essa reta. Buscou-se averiguar de que maneira a dupla chegaria a tal conclusão.

As quatro duplas perceberam que a reta vertical não pode representar uma função e utilizaram a visualização no software para afirmar que os pontos C e D pertencem à reta r . A figura 30 apresenta a resolução desenvolvida pela Dupla 3 em torno da situação 5.

Figura 30 – Situação 5 resolvida pela Dupla 3

Situação 5 – Considerando a reta r , determinada pelos pontos A(3, 4) e B(3, 9), de que maneira podemos descobrir se o ponto C(3, 7) pertence à reta? E o ponto D(3, 70)?

Visualmente, estão na mesma reta porque o valor de x é o mesmo para todos. Só que a função não existe porque não corta no eixo de y .

Fonte: Autor (2022).

A Dupla 3 concluiu que os pontos estão na mesma reta através de um diálogo. O estudante E afirmou: “Vou colocar os pontos no software, mas a gente sabe que vai dar a mesma coisa que antes”. Em seguida, o estudante F perguntou: “O ponto C consigo ver. Mas, e esse ponto D, também vai pertencer?”. Logo depois, o estudante

E completou: “Sim. O valor da abscissa é o mesmo para todos os pontos. Não existe função, mas eles pertencem à mesma reta”.

Um fator interessante é que quando os estudantes usam o termo “visualmente” eles trazem uma marca de linguagem de qual representação ele se apoia. Nesse contexto, essa fala está associada à representação gráfica.

7.6 SITUAÇÃO 6

Na situação 6, os alunos deveriam traçar uma reta no *Function Studium* e, com isso, manusear os coeficientes da forma algébrica através dos controles “a0” e “a1”, que são os parâmetros. Posteriormente, os estudantes deveriam refletir, discutir e apresentar respostas diante das perguntas: “qual o efeito do parâmetro “a0” no gráfico da equação?” e “qual o efeito do parâmetro “a1” no gráfico da equação?”.

As quatro duplas perceberam que o coeficiente “a1” está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, enquanto a coordenada “a0” é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas. A figura 31 apresenta a resolução desenvolvida pela Dupla 3 em torno da situação 6.

Figura 31 – Situação 6 resolvida pela Dupla 3

Situação 6 – Tracem uma reta no *Function Studium* e, com isso, manuseiem os coeficientes da forma algébrica através dos controles “a0” e “a1”, que são os parâmetros. Com isso, qual o efeito do parâmetro “a0” no gráfico da equação? E qual o efeito do parâmetro “a1”? O que acontece com os parâmetros “a0” e “a1” ao movimentarmos o gráfico da equação?

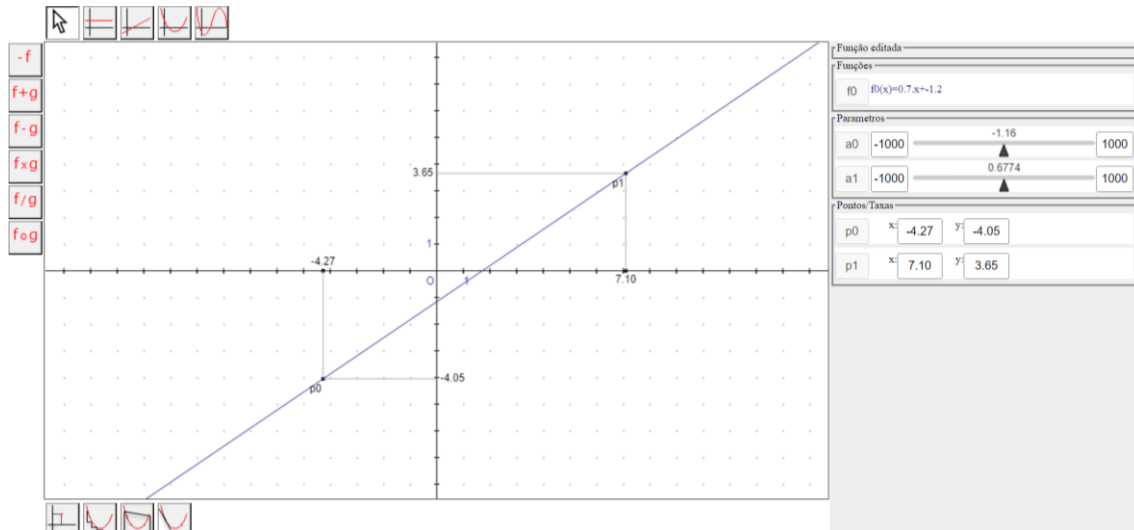
a0: ele altera o valor “l” da função, mostrando onde a reta corta o eixo de y.
a1: altera o valor “a” da função, mudando a inclinação da reta.

Fonte: Autor (2022).

Importante salientar a conexão que o software *Function Studium* estabelece com o conteúdo de polinômios ao abordar a representação algébrica no formato $f_0(x) = a_1x + a_0$, sendo a_1 o coeficiente angular e a_0 o coeficiente linear, tendo como referência a equação polinomial.

Inicialmente, a Dupla 1 teve certa dificuldade na situação 6, pois os parâmetros do software *Function Studium* estavam com um intervalo mínimo de -1000, um intervalo máximo de 1000 e um incremento de 10, como mostra a figura a seguir.

Figura 32 – Recorte da situação 6 resolvida pela Dupla 1 no *Function Studium*



Fonte: Autor (2022).

Os estudantes A e B, ambos da Dupla 1, tiveram dificuldade na visualização do gráfico, pois quando o limite é ultrapassado, há uma espécie de extrapolação dos valores, levando a números muito grandes, sendo assim, um aspecto limitador. Nessa perspectiva, o estudante B apontou: “Não conseguimos analisar, pois não conseguimos ver o que acontece; a reta facilmente fica fora do campo de visão”. Em seguida, a internet oscilou e o *Function Studium* parou de funcionar. Tendo em vista o ocorrido, o estudante B comentou: “Seria interessante que o software salvasse o desenvolvimento em um arquivo e funcionasse sem internet”. Alguns minutos depois, a internet estabilizou e o software reiniciou com os parâmetros em um intervalo mínimo de -10, um intervalo máximo de 10 e um incremento de 0,1.

Com isso, os estudantes conseguiram visualizar os efeitos do parâmetro utilizando o artefato. Nesse contexto, analisando a captura de tela e voz, o estudante A relatou:

Agora sim, conseguimos analisar bem no software, quando alteramos o a_0 , sobe e desce o gráfico, ou seja, altera onde a reta toca no eixo y. E quando manuseamos o a_1 , percebemos que a função passa a ser crescente ou decrescente, dependendo do sinal do a_1 (Estudante A).

Em seguida, o estudante B respondeu: “Realmente! Interessante, pois não lembrava. No software, fica muito visível essas alterações que os coeficientes causam no gráfico”.

Um aspecto importante a ser destacado é o artefato não operar sem internet. Em ambientes que não possuem internet, é impossível utilizar o software, como pudemos observar na captura de vídeo e voz da Dupla 1 na situação 6. Outro fator a ser destacado é a ausência das opções de voltar e salvar: os estudantes para desfazer qualquer ação precisam limpar todo o software e começar do zero.

Em relação ao dinamismo que o software *Function Studium* proporciona acerca da articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, o estudante D, da Dupla 2, afirmou: “O parâmetro a_0 movimenta o sentido do gráfico, quando positivo a reta é crescente, quando negativo é decrescente. Já a_1 controla onde a reta intercepta o eixo y . Muito bom os efeitos no software!”. O estudante F, da Dupla 3, apontou: “Interessante quanto o software ajuda a visualizar esses efeitos; no quadro fica bem mais complicado de entender”. O estudante H, da Dupla 4, ressaltou: “Esse aí a gente já fez brincando no começo. O software ajuda bastante na visualização”. Destaca-se, assim, a potencialidade do *Function Studium* para o estudo do objeto reta diante da articulação entre as representações algébrica e geométrica.

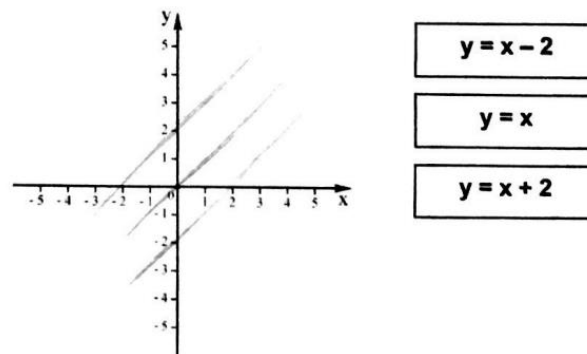
7.7 SITUAÇÃO 7

Na situação 7, os estudantes deveriam esboçar, num mesmo sistema de coordenadas, as retas das seguintes equações definidas em $\mathbb{R}$: $y = x - 2$, $y = x$ e $y = x + 2$. Em seguida, a dupla deveria refletir, discutir e apresentar uma resposta diante dos seguintes questionamentos: “As retas são crescentes ou decrescentes? Por quê?” e “As retas intersectaram o eixo y (ordenadas)? Se sim, em quais pontos?”.

As quatro duplas exploraram diversas representações da reta a partir do dinamismo do software e, com isso, compreenderam os efeitos dos parâmetros. A figura 33 apresenta a resolução desenvolvida pela Dupla 3.

Figura 33 – Situação 7 resolvida pela Dupla 3

Situação 7 – Esbocem, num mesmo sistema coordenado, as retas das seguintes equações definidas em $\mathbb{R}$.



(A) As retas são crescentes ou decrescentes? Por quê?

Crescentes, porque o "a" da função é positiva

(B) As retas intersectaram o eixo y (ordenadas)? Se sim, em quais pontos?

Sim,

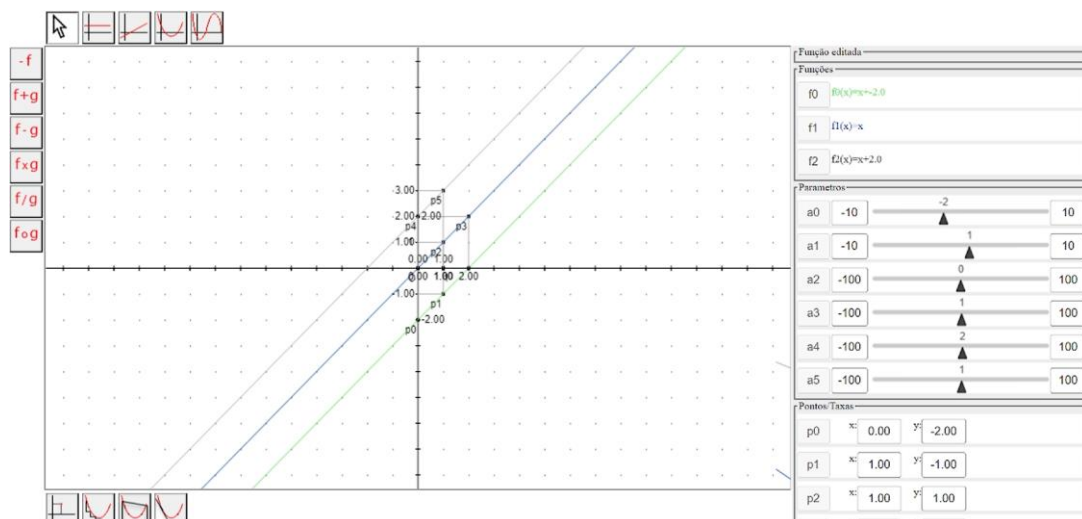
$y = x - 2$: Ponto na -2

$y = x$: Ponto na 0

$y = x + 2$: Ponto na 2

Fonte: Autor (2022).

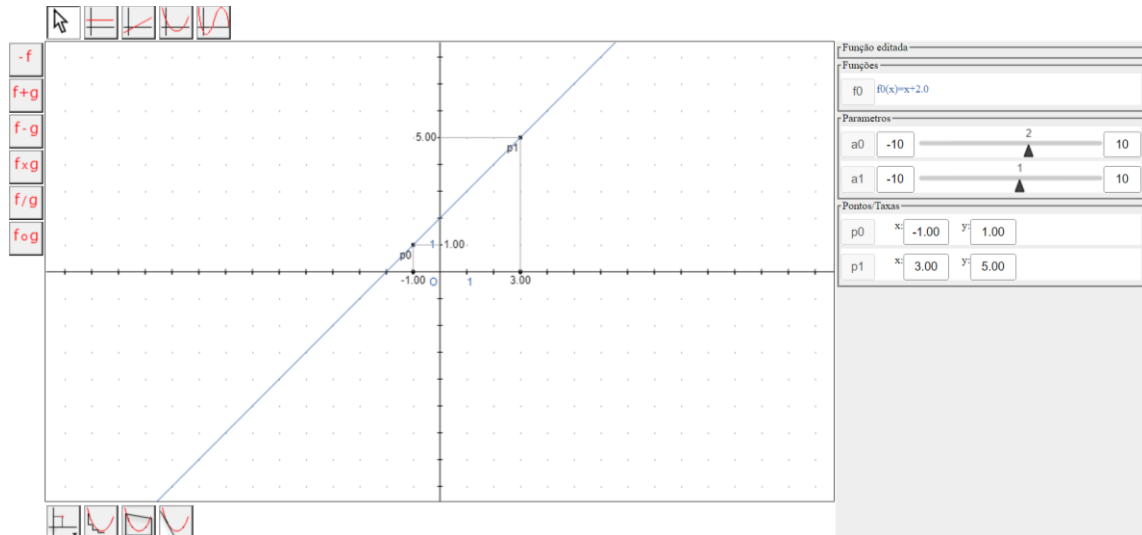
As Duplas 1, 2 e 3 utilizaram a estratégia da inserção no software dos pontos necessários para construção das retas correspondentes às funções dadas na situação, como mostra a figura a seguir, que representa a resolução da Dupla 3.

Figura 34 – Recorte da situação 7 resolvida pela Dupla 3 no *Function Studium*

Fonte: Autor (2022).

A Dupla 4 construiu a reta através da inserção dos pontos $(-1,1)$ e $(3,5)$ e manuseou o parâmetro a_0 associando a reta às funções dadas na situação, como mostra a figura a seguir.

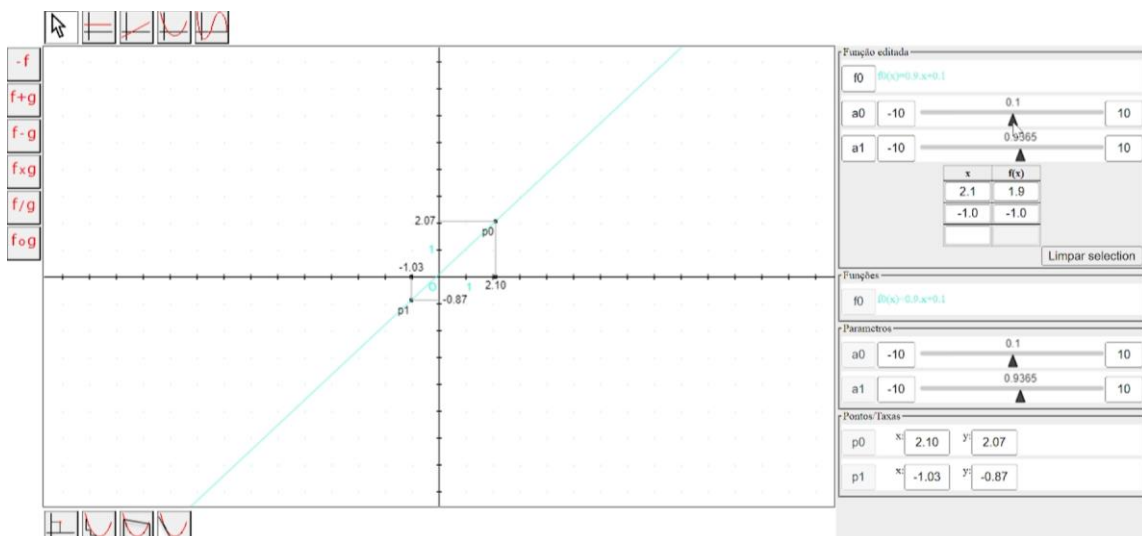
Figura 35 – Recorte da situação 7 resolvida pela Dupla 4 no *Function Studium*



Fonte: Autor (2022).

Um aspecto importante a ser ressaltado é a paleta de cores do *Function Studium*, pois em alguns momentos da experimentação os alunos apresentaram dificuldade na visualização das representações do objeto reta por conta de cores claras (figura 36). Nesse contexto, o estudante G, da Dupla 4, destacou: “Olha como a reta tá clara... seria interessante podermos alterar a cor.”

Figura 36 – Recorte da situação 7 resolvida pela Dupla 4 no *Function Studium*



Fonte: Autor (2022).

7.8 SITUAÇÃO 8

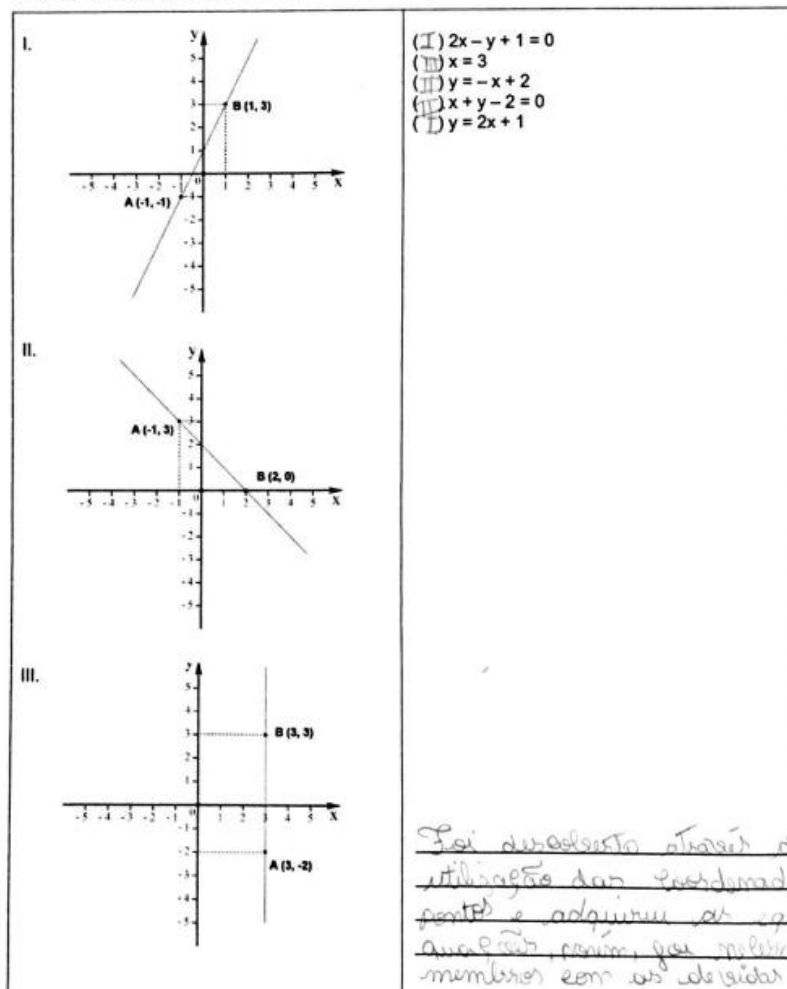
Na situação 8, os estudantes deveriam associar as equações com seus respectivos gráficos. Em seguida, a dupla deveria explicar como realizou essa correspondência.

As quatro duplas exercitaram o dinamismo no processo com a associação das duas representações, algébrica e geométrica, do objeto reta. Contudo, a Dupla 1 não obteve a expressão algébrica para reta vertical e, do mesmo modo que a Dupla 4, não realizou as transformações por tratamento das formas algébricas.

As Duplas 2 e 3 associaram as equações com seus respectivos gráficos, respeitando todas as particularidades, como mostra a figura a seguir, que representa a resolução da Dupla 2.

Figura 37 – Situação 8 resolvida pela Dupla 2

Situação 8 – Associem as equações abaixo com seus respectivos gráficos. Em seguida, expliquem como fizeram esta correspondência.

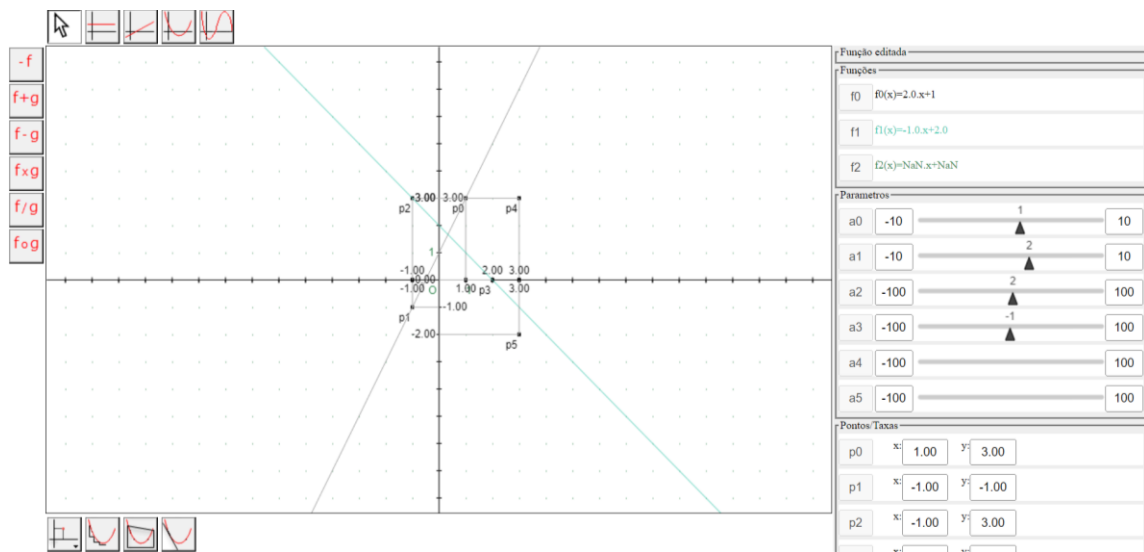


Fonte: Autor (2022).

Por fim, o estudante F, da Dupla 3, ressaltou o tratamento de uma representação, que podemos considerar pela transformação dessa representação na mesma forma em que ela foi constituída (DUVAL, 1993): “Seria interessante o software abordar a expressão algébrica em outro formato”.

A Dupla 3 utilizou a estratégia de inserir os pontos no *Function Studium* com o intuito de associar as equações com seus respectivos gráficos, como mostra a figura a seguir.

Figura 38 – Recorte da situação 8 resolvida pela Dupla 3 no *Function Studium*



Fonte: Autor (2022).

Diante das análises nos dados da experimentação, propomos a resumir o levantamento relativo à exploração dos resultados a seguir, no quadro 7.

Quadro 7 – Levantamento dos resultados em torno das situações propostas na experimentação

Situações	Resultados	Duplas
Situação 1	Dificuldade na compreensão do objeto reta nos três diferentes campos: na geometria euclidiana plana, na função e na geometria analítica;	Duplas 1, 2, 3 e 4
Situação 2	Dificuldade com o campo de visão limitado do plano cartesiano no software;	Duplas 1 e 2

Situação 2	Dificuldade em reconhecer as coordenadas dos pontos que definiram a reta, a representação algébrica e os efeitos dos parâmetros no gráfico;	Dupla 1
	Dificuldade em analisar os efeitos dos parâmetros no gráfico;	Dupla 2
	Reconheceram as coordenadas dos pontos que definiram a reta, a representação algébrica e os efeitos dos parâmetros no gráfico;	Duplas 3 e 4
	Percebeu que quando construída a reta a partir do terceiro ponto inserido, dependendo do valor de x , a ordenada é atribuída pelo próprio software, com o intuito do ponto pertencer à reta;	Dupla 4
Situação 3	Dificuldade em descobrir se o ponto D $(-38, -73)$ pertencia à reta r ;	Dupla 1
	Utilizaram a estratégia proporcionada pelo software da inserção automática da ordenada no ponto;	Duplas 2, 3 e 4
	Utilizou o método da condição de alinhamento de 3 pontos no plano, para descobrir se o ponto D $(-38, -73)$ pertencia à reta r ;	Dupla 2
	Relacionaram o objeto reta na geometria analítica e no estudo das funções;	Duplas 2 e 3
Situação 4	Utilizaram a estratégia da inserção dos pontos A $(3, 4)$ e B $(3, 6)$ no software;	Duplas 1, 2, 3 e 4
	Percebeu que a reta vertical não pode representar uma função. Traçou uma estratégia para a obtenção de uma expressão algébrica para a referida reta, porém não conseguiu desenvolver;	Dupla 1

Situação 4	Perceberam que a reta vertical não pode representar uma função, logo traçaram uma estratégia para a obtenção de uma expressão algébrica para a referida reta e utilizaram a condição de alinhamento de 3 pontos no plano para desenvolver a situação;	Duplas 2 e 4
	Percebeu que a reta vertical não pode representar uma função. Mas, não traçou uma estratégia para a obtenção de uma expressão algébrica para a referida reta;	Dupla 3
	Discussão sobre o termo " $f_0(x) = NaN.x + NaN$ ", informação que se refere à reta vertical no software e que significa uma característica do artefato;	Duplas 1 e 3
	Diálogo em relação a ausência de uma espécie de campo de entrada, em que houvesse a possibilidade da inserção da representação algébrica;	Dupla 2
Situação 5	Perceberam que a reta vertical não pode representar uma função e utilizaram a visualização no software para afirmar que os pontos C e D pertencem à reta r;	Duplas 1, 2, 3 e 4
Situação 6	Perceberam que o coeficiente " a_1 " está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, enquanto a coordenada " a_0 " é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas;	Duplas 1, 2, 3 e 4
	Dificuldade na visualização do gráfico, com o manuseio dos parâmetros do software, pois estavam com um intervalo mínimo de -1000, um intervalo máximo de 1000 e um incremento de 10;	Dupla 1

Situação 6	Dificuldade em o artefato não operar sem internet e a ausência das opções de voltar e salvar;	Dupla 1
	Destaque para o dinamismo que o software proporciona;	Duplas 2, 3 e 4
Situação 7	Exploraram diversas representações da reta a partir do dinamismo do software e, com isso, compreenderam os efeitos dos parâmetros;	Duplas 1, 2, 3 e 4
	Utilizaram a estratégia da inserção no software dos pontos necessários para construção das retas correspondentes às funções dadas na situação;	Duplas 1, 2 e 3
	Construiu a reta através da inserção dos pontos $(-1,1)$ e $(3,5)$ e manuseou o parâmetro a_0 associando a reta às funções dadas na situação;	Dupla 4
	Dificuldade com a paleta de cores do software;	Dupla 4
Situação 8	Exercitaram o dinamismo no processo com a associação das duas representações, algébrica e geométrica, do objeto reta;	Duplas 1, 2, 3 e 4
	Dificuldade em obter a expressão algébrica para reta vertical;	Dupla 1
	Dificuldade em realizar as transformações por tratamento das formas algébricas;	Duplas 1 e 4
	Associaram as equações com seus respectivos gráficos, respeitando todas as particularidades;	Duplas 2 e 3
	Destaque para a ausência no software do tratamento de uma representação algébrica;	Dupla 3
	Utilizou a estratégia de inserir os pontos no software com o intuito de associar as equações com seus respectivos gráficos.	Dupla 3

Fonte: Autor (2022).

À luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1988, 1993, 2003, 2004, 2006) e da Engenharia Didático-Informática (TIBURCIO, 2016, 2020; TIBURCIO; BELLEMAIN, 2021), acreditamos que as abordagens e justificativas apresentadas durante a presente escrita nos permitiram justificar nossas escolhas e decisões acerca dos processos resolutivos das duplas, alcançando a problemática de pesquisa e os objetivos apresentados.

A seguir, apresentaremos a análise crítica do software *Function Studium*, apontando suas potencialidades e dificuldades/limitações, diante das análises em torno dos dados experimentais na perspectiva de aprimoramento da tecnologia.

8 ANÁLISE CRÍTICA DO SOFTWARE *FUNCTION STUDIUM*

A Engenharia Didático-Informática é utilizada em nosso estudo como quadro de análise/quadro de referência para utilização de software educativo para um artefato que já foi desenvolvido, o *Function Studium*. Dessa forma, buscamos realizar uma análise crítica do *Function Studium* a partir da EDI, na perspectiva de aprimoramento da tecnologia, analisando as potencialidades e dificuldades/limitações do software.

Com isso, reforçamos o caráter cíclico da EDI, realizando a aplicação do quarto ciclo, o “operacional-analítico”. Segundo Tibúrcio (2020), é a etapa em que se contemplam as análises conclusivas e evolutivas. Esse ciclo tem por objetivo confrontar as hipóteses iniciais que foram propostas com os resultados alcançados a fim de verificar se o artefato computacional atinge seus objetivos para, posteriormente, validar suas contribuições (TIBÚRCIO, 2020).

A partir das análises realizadas nos dados experimentais, alguns aspectos se destacaram na perspectiva da análise crítica do software *Function Studium* em torno das potencialidades e dificuldades/limitações do artefato no que cerne à articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta. De modo geral, os aspectos podem ser divididos em quatro categorias, sendo elas: o objeto do saber; o dinamismo na articulação; o manuseio do artefato; e a interface do software.

Na análise dos dados experimentais do nosso estudo, as categorias auxiliam na organização, na separação, nas correlações estabelecidas e na validação das respostas encontradas pelos instrumentos de coleta de dados (GOMES, 2004).

O objeto do saber no nosso estudo é a reta, estudada em diferentes momentos de escolaridade e com diversas abordagens: na geometria euclidiana plana, como um dos axiomas de Euclides, sendo definida por dois pontos distintos; na função, como sendo o gráfico da função afim; e na geometria analítica, sob um parâmetro cartesiano e representação algébrica.

O dinamismo na articulação é o princípio que permite ao usuário a sensação de agir direta e livremente sobre a representação do objeto, além de poder controlar imediatamente os efeitos dessa ação (BELLEMAIN, 2001).

O manuseio com o computador funciona a partir da interação do usuário acionando os operadores de criação, manipulação de objetos e relações, e respostas diversas (representação, movimento, dentre outros). Esse processo tem um papel

importante na aprendizagem, favorecendo a construção de conhecimentos no tocante aos objetos (BELLEMAIN, 2002).

A interface deve produzir representações significativas para o sujeito e interpretar suas ações, também significativas para ele, para que, dessa forma, possa processar essas ações de uma forma relevante (BELLEMAIN, 2002).

Em torno desses aspectos e a partir da experimentação, se destacaram pontos acerca da análise crítica do software *Function Studium*, como mostra a figura a seguir.

Figura 39 – Pontos importantes em relação à análise crítica do software *Function Studium*



Fonte: Autor (2022).

Nessa perspectiva, um ponto importante a ser destacado é a reta vertical, bastante presente durante a experimentação. Não elencamos esse caso como potencialidade e/ou dificuldade/limitação, mas como uma característica do artefato, pelo fato do objeto em foco no software *Function Studium* ser função, e a reta vertical não representar uma função.

A seguir, descreveremos, de acordo com a experimentação, os pontos acima citados, direcionando-os quanto às potencialidades e dificuldades/limitações do software *Function Studium* no que tange à articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta.

8.1 AS POTENCIALIDADES DO SOFTWARE *FUNCTION STUDIUM*

Tendo em vista a manutenção/evolução do software como uma etapa contínua, evidencia-se a importância de investigações das potencialidades do artefato computacional visando a novas possibilidades de implementação (TIBURCIO, 2020).

Durante a experimentação, o artefato mostrou ter uma interface intuitiva, considerando que, mesmo apresentando apenas as funcionalidades básicas do *Function Studium*, os estudantes participantes, no decorrer do processo, conseguiram explorar outras formas de uso do software.

Nessa perspectiva, os estudantes desenvolveram estratégias para usufruir do que o software oferece com o intuito de resolver as situações propostas. A partir da situação 2, acontece um exemplo interessante, quando os alunos perceberam que uma vez construída a reta, a partir do terceiro ponto inserido, dependendo do valor de x , a ordenada é atribuída pelo próprio software, de forma automática, com o intuito do ponto pertencer à reta. No decorrer da experimentação, as duplas foram percebendo que o *Function Studium* é articulado dessa forma e, com isso, usufruíram dessa potencialidade na resolução das situações.

Outro ponto importante são as diversas representações do objeto matemático no ambiente do software, tendo em vista que a abordagem do objeto reta por representações distintas conectadas de forma simultânea permitiu que, dependendo do aspecto a ser explorado, os estudantes fossem escolhendo a representação que expressava o aspecto de forma mais clara e eficiente para a compreensão das propriedades analisadas nas situações.

Nessa vertente, ficou ainda mais evidente durante a experimentação a articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta, permitindo que a variação dinâmica dos parâmetros refletisse simultaneamente no gráfico correspondente, o que contribuiu para que os estudantes estabelecessem relações entre os efeitos.

A articulação dinâmica entre os pontos da reta, correspondente à representação algébrica associada a cada ponto, contribuiu para que os estudantes entendessem que o coeficiente “ a_1 ” está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, enquanto a coordenada “ a_0 ” é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas.

Portanto, a partir dos dados experimentais analisados, o artefato permitiu a visualização das representações algébrica e geométrica, promovendo as alterações concomitantes, ou seja, a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

8.2 AS DIFICULDADES/LIMITAÇÕES NA UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE *FUNCTION STUDIUM*

Analizamos as possibilidades de utilização do recurso para a articulação entre as representações algébrica e geométrica verificando quais são as suas dificuldades/limitações com foco nas situações, com o intuito de buscar a evolução do software *Function Studium* a partir de uma possível atualização do artefato (TIBURCIO, 2020).

Tendo em vista que a evolução do software passa pelas pesquisas realizadas em torno dele, quando pontuamos suas potencialidades e dificuldades/limitações, buscamos apresentar para comunidade científica que o artefato trabalha a articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta. Contudo, vale ressaltar que em seu desenvolvimento o objetivo em foco do *Function Studium* era trabalhar com a taxa de variação, na perspectiva do conteúdo de função, ou seja, em alguns casos as limitações existem pelo fato de ele não ser concebido para tal finalidade.

Um fator limitador que observamos durante a exploração dos estudantes diz respeito à variação dos parâmetros pelo controle deslizante, tendo em vista que, quando o limite é ultrapassado, há uma espécie de extrapolação dos valores, levando a números muito grandes e inviabilizando a visualização no gráfico.

No *Function Studium*, embora seja possível mover manualmente o eixo de coordenadas, ou alterar a escala dos eixos, o que permite visualizar uma maior parte do eixo das abscissas e manipular a variável, o software apresenta limitação no domínio da função a ser testado, ou seja, um campo de visão limitado do plano cartesiano.

Um ponto importante que observamos na situação 8, durante a experimentação, foi o software não proporcionar ao objeto reta outras formas algébricas por meio das transformações por tratamento. Desse modo, algumas duplas não conseguiram associar as formas algébricas.

Em alguns momentos da experimentação, os estudantes sentiram falta de digitar a representação algébrica diretamente no software, fator esse que trouxe dificuldade para as duplas em algumas situações. Contudo, é importante salientar que essa característica do artefato (ausência de um campo de entrada) faz com que se defina a expressão algébrica a partir dos controles deslizantes, o que faz com que os estudantes reflitam sobre a importância e a relação entre os coeficientes de uma função, sua expressão algébrica e sua representação gráfica.

O software *Function Studium* aborda a função do 1º grau, 2º grau e 3º grau e aquelas obtidas por meio da operação de adição, subtração, produto, quociente e composição, com as funções anteriormente citadas. Dessa forma, a característica de o artefato trabalhar com diversas funções e operações fez com que os estudantes, em alguns momentos da experimentação, desfocassem dos objetivos da nossa intervenção em torno do objeto reta para explorar essas outras funcionalidades do recurso tecnológico.

Uma importante observação é em relação a inserção automática da ordenada no ponto que o *Function Studium* proporciona, o que em diversos momentos da experimentação se mostrou como uma potencialidade do artefato. Apesar disso, os estudantes demoraram bastante para entender o motivo da coordenada ficar cinza no software e ser inserida automaticamente, sendo assim um aspecto que trouxe dificuldade para as duplas. Analisando a captura de vídeo e voz, quando os estudantes inseriram os dois primeiros pontos na tabela, o software automaticamente determinou a expressão algébrica e sua representação gráfica, de modo que o artefato criou uma espécie de “trava” nos próximos valores inseridos em $f(x)$.

Outro ponto relevante a ser ressaltado é a paleta de cores do *Function Studium*, pois em alguns momentos da experimentação os alunos apresentaram dificuldade na visualização das representações do objeto reta por conta de cores claras.

Um aspecto limitador no processo foi o software não proporcionar as opções de voltar, salvar e operar sem internet. Ademais, as duplas, para desfazer qualquer ação no artefato, precisavam limpar todo o software e começar do zero. O recurso tecnológico também não permite salvar o processo para auxiliar o estudante na análise. Por fim, para utilizar o *Function Studium* é necessário estar conectado à internet, ou seja, em ambientes que não possuem internet, é impossível utilizá-lo.

9 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Ao considerarmos em nossas análises preliminares as dificuldades apontadas na articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta, investigamos, através da identificação e da compreensão dessas dificuldades, as implicações do software *Function Studium* nessa articulação entre a expressão algébrica e o gráfico da reta. Buscamos, desse modo, elucidar tais dificuldades e, dessa forma, discutir a utilização do artefato computacional no processo, analisando criticamente as potencialidades e as dificuldades/limitações do *Function Studium* quanto à conversão nos dois sentidos, algébrico e geométrico, do objeto reta, na perspectiva de elaborar funcionalidades para possíveis modificações dentro desse ambiente.

Para buscarmos respostas a esses questionamentos, desenvolvemos nosso estudo através de uma convergência entre a TRRS (DUVAL, 1988, 1993, 2003, 2004, 2006) e a EDI (TIBURCIO, 2016, 2020; TIBURCIO; BELLEMAIN, 2021).

Tomando como referência nosso aporte teórico; a TRRS; nossos estudos preliminares através das dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática, propostas pela EDI; e nossas análises em torno dos dados da experimentação, as dificuldades apresentadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio ao realizarem a articulação entre as representações algébrica e geométrica do objeto reta foram:

(a) a compreensão da conexão da reta nos diferentes campos, sendo o mesmo objeto, mas com nuances de um para o outro: na geometria euclidiana plana, na função e na geometria analítica;

(b) a articulação da representação geométrica da reta para a representação algébrica, sendo mais constante a dificuldade no processo de conversão da geometria para a álgebra;

(c) o enfoque dado a uma única representação algébrica, que nesse caso é na forma $y = ax + b$, dificultando, assim, o reconhecimento das outras formas algébricas de mesma representação gráfica, ou seja, o tratamento na representação algébrica;

(d) as situações nas quais a reta é vertical pelo fato de não representar uma função mostrou-se um obstáculo no que tange à correspondência da sua representação algébrica.

Nessa perspectiva, surge um aspecto importante, o artefato computacional *Function Studium*, que foi desenvolvido a partir do objetivo de duas pesquisas de mestrado, Silva (2016) e Tibúrcio (2016), que trabalharam com requisito de software, estudo covariacional, múltiplas representações e desenvolvimento de software (SILVA *et al.*, 2017).

O software *Function Studium* apresentou um grande rendimento para o objetivo da nossa pesquisa, destacando-se, dessa forma, sua potencialidade para o estudo do objeto reta, diante da articulação entre as representações algébrica e geométrica.

O software oferece ao estudante um dinamismo na articulação, possibilitando que as representações algébrica e geométrica interajam entre si, ou seja, o artefato permite representar graficamente e algebricamente funções polinomiais, permitindo, além disso, que a partir do movimento de pontos no gráfico, possam ser obtidas modificações na sua representação algébrica, também explicitada na sua interface. O mesmo acontece no outro sentido, ou seja, modificando os coeficientes da equação, obtém-se, assim, as alterações no gráfico.

A seguir, pontuamos algumas sugestões de implementações no software *Function Studium* tomando como base a análise crítica do artefato, explorando suas potencialidades e dificuldades/limitações quanto à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta.

9.1 AS IMPLEMENTAÇÕES SUGERIDAS NO SOFTWARE *FUNCTION STUDIUM*

O período de manutenção/evolução do software é contínuo na perspectiva de prover novas possibilidades de atualizações a partir de versões mais recentes, novas funcionalidades, correção de erros, enfim, são diversos caminhos a cada atualização.

Nesse contexto, pensando em suas próximas atualizações e em estudos futuros, buscamos pontuar sugestões de implementação para o artefato a partir das análises da experimentação em torno das situações propostas.

Um fator importante a ser destacado é que o software *Function Studium* não proporciona a possibilidade de aproximar, afastar a tela e se movimentar pelo eixo. Se houvesse essa perspectiva, mesmo as situações trazendo pontos com abscissa e ordenada discrepantes, possivelmente os estudantes não teriam dificuldade na análise; sendo assim, o obstáculo está na dificuldade de visualização na janela do artefato.

Embora seja possível mover manualmente o eixo de coordenadas ou alterar a escala dos eixos que permite visualizar uma maior parte do eixo x e manipular a variável, julgamos importante aumentar o campo de visão do plano cartesiano, tendo, assim, a possibilidade de aproximar, afastar a tela e se movimentar pelo eixo.

Um aspecto que dificultou o entendimento dos estudantes durante a experimentação foi a limitação na variação dos parâmetros pelo controle deslizante, pois quando o limite foi ultrapassado houve uma espécie de extrapolação dos valores, levando a números muito grandes e inviabilizando a visualização no gráfico.

Com isso, uma vertente importante para próximas atualizações do *Function Studium* é possibilitar a alteração dos intervalos e do incremento, ambos do parâmetro, com o intuito de os estudantes controlarem os valores e, assim, visualizarem os efeitos dos parâmetros no gráfico.

Outra perspectiva que analisamos em torno dos dados experimentais, muito presente na situação 8, foi a relevância de as ferramentas computacionais possibilitarem o tratamento dinâmico das formas algébricas, que podemos considerar pela transformação dessa representação na mesma forma em que ela foi constituída (DUVAL, 1993). Assim sendo, sugerimos que o software proporcione ao objeto reta outras formas algébricas por meio das transformações por tratamento.

Em alguns momentos da experimentação os estudantes sentiram falta de digitar a representação algébrica diretamente no software, como opção aos controles deslizantes. Nesse sentido, julgamos como pertinente que o *Function Studium* possibilite, em uma espécie de campo de entrada, a inserção da representação algébrica.

Outro aspecto relevante a ser ressaltado é a paleta de cores do *Function Studium*, pois durante a experimentação os alunos apresentaram dificuldade na visualização das representações do objeto reta por conta de cores claras. Com isso, entendemos que o artefato possibilitando a escolha da cor do objeto matemático com cores mais realçadas e distintas permitirá uma melhor identificação e relação das diversas representações.

Um fator que surgiu nas discussões das duplas foi o termo “ $f_0(x) = \text{NaN}.x + \text{NaN}$ ”, informação que se refere à reta vertical no software. Os estudantes tiveram dificuldade em identificar o que significava essa característica do artefato, o que, como mencionamos anteriormente, não representa uma limitação, pois o objeto em foco no *Function Studium* é função, e a reta vertical não representa uma função.

Nessa perspectiva, e tomando como base nossos estudos preliminares, julgamos como importante que o artefato conecte, em uma próxima atualização, o objeto reta visto na geometria analítica e no estudo das funções, trazendo para o ambiente a representação algébrica da reta vertical, deixando claro, contudo, que a referida reta não representa uma função.

Para utilizar o *Function Studium* é necessário estar conectado à internet, como vimos nas análises da situação 6. Com isso, em ambientes que não possuem internet, é impossível utilizar o artefato. Como sugestão, propomos que nas próximas atualizações o software possa ser utilizado também sem o uso da internet, para que alcance o maior número possível de professores e estudantes.

Outro aspecto importante é que, para desfazer algum passo no *Function Studium*, o estudante precisa limpar todo o software e começar do zero. Nesse sentido, propomos um botão de desfazer procedimentos recentes, permitindo o sujeito voltar ao estado desejado; também sugerimos a criação de um botão de salvar o que foi construído no artefato.

9.2 ESTUDOS FUTUROS

Para trabalhos futuros, sugerimos ampliar o uso do *Function Studium*, permitindo um alcance maior acerca do número de usuários, divulgando, assim, o artefato para professores e estudantes. Outro aspecto que destacamos é o aperfeiçoamento de seus ícones e suas funções, baseando-se na análise dos dados coletados na experimentação deste estudo. Com isso, em estudos futuros, sugerimos a implementação das funcionalidades emanadas em nosso estudo em uma possível atualização do software *Function Studium*.

Uma possibilidade complementar com relação a novas possibilidades de investigações ligadas ao objeto abordado nesta pesquisa é analisar de forma mais aprofundada e/ou em outros formatos os dados experimentais, tendo em vista, por exemplo, que podemos ter não apenas um olhar mais detalhado para as dificuldades dos estudantes, mas também, até mesmo, a superação dessas dificuldades.

Por fim, um fator importante a ser evidenciado é que este trabalho nos direcionou para um novo projeto, por meio do qual buscaremos conceber, desenvolver e validar um software a partir do Modelo de Processo de Software Educativo proposto na Engenharia Didático-Informática, com o objetivo de proporcionar a capacidade de

representar as formas na sua interface, permitindo, além disso, articular representações de diversos tipos de funções. Nesse sentido, esperamos contribuir com os avanços da EDI, ampliando mais as discussões, e oferecer a professores e estudantes um software que poderá ser aplicado na articulação entre representações de diversos tipos de funções.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, R. C. D. **Geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio**. f. 121. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Núcleo pedagógico ao desenvolvimento científico. Pará: Universidade Federal do Pará - UFPA, 2007.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. *In*: BRUN, J. (Org). **Didáctica das Matemáticas**. 1. ed. p. 193-217. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

ARTIGUE, M. **Ingénierie didactique**: recherches em Didactique des Mathématiques. v. 9, p. 281-308, 1988.

BALESTRI, R. **Matemática**: interação e tecnologia, v. 3. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

BARBOSA, E. J. T.; MENDES, A. A. A Contextualização no Ensino de Equações: uma análise em um livro didático antes e depois do PNLD. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 363-386, 2016.

BELLEMAIN, F. Elementos da engenharia de software educacional, o caso de Micromundos para Matemática: dimensões epistemológica, cognitiva e didática. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**, Campo Mourão, PR, Brasil, v. 11, n. 25, p. 80 – 105, maio-ago, 2022.

BELLEMAIN, F. **Geometria dinâmica**: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. *In*: International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design (p. 1314–1329). São Paulo: USP, 2001.

BELLEMAIN, F. O paradigma micromundo. Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática [s. l.], *In*: **Anais do [...]**, p. 51-62, 2002.

BELLEMAIN, F. **Reconhecimento de formas algébricas no ensino**. II HTEM. Rio de Janeiro: *In*: **IME-UERJ**, 2004.

BERND, A. B. Registros de Representações Semióticas e a Utilização de Ambiente de Geometria Dinâmica na Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica. **Revista Novas Tecnologias na Educação – RENOTE**, v. 14, n. 2, 2016.

BOTELHO, L.; REZENDE, W. **Um breve histórico do Conceito de Função**. p. 64–75, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, v. 1. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2018: matemática** – guia de livros didáticos Ensino Médio/Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2017.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN+). Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio (PCNEM). Brasília: Ministério da Educação, 2000.

CARLSON, M.; JACOBS, S.; COE, E; LARSEN, S; HSU, E. Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: a framework and a study. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 33, n. 5, 352-378, 2002.

CASTRO, S. C. **Os Vetores do Plano e do Espaço e os Registros de Representação**. f 111. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC-SP, 2001.

CAVALCANTE, T. F. **Concepções de Funções no Software Function Studium: um estudo com o modelo CK ϕ** . Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). 2019. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2019.

CAVALCANTI, J. H.; BEZERRA, T. V. O Jogo de Xadrez como Objeto Facilitador no Processo de Ensino Aprendizagem do Conteúdo Coordenadas Cartesianas. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 9, 2020.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante: matemática**, 3ª série ensino médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

CHAVES, M. I. de A.; CARVALHO, H. C. de. **Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio**: Uma sequência de ensino-aprendizagem. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004.

COUTINHO, D. M.; MORAN, M. Ensinando polígonos por meio de várias representações: Uma experiência com alunos do 6º Ano. *In: Encontro Paranaense de Educação Matemática*, v. 12, Campo Mourão/PR, 2014.

DA SILVA, S. F.; MORETTI, M. T. Registros em língua natural das superfícies quádras: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 20, n. 1, 2018.

DANTE, L. A. **Matemática: contexto & aplicações**, v. 3. São Paulo: Ática, 2016.

DUVAL, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**. p. 103-131. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2006.

DUVAL, R. Graphiques et Équations: L'articulation de deux registres. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**. v. 1. Strasbourg: ULP – IREM, 1988.

DUVAL, R. **La Conversion des Représentations**: un des deux processus fondamentaux de la pensée. p. 9-46. Du mot au concept: Conversion, 2007.

DUVAL, R. Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. p. 37-64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. p.11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução em castellano de Myriam Veja Reestrepo. Berna, Suíça: Peter Lang, 2004.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FARIA, R. R.; SANTOS, C. A. B.; CURI, E. A Transformabilidade dos Registros de Representação Semiótica no Ensino de Equações de Reta. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMET**, v. 7, n. 2, 2012.

FONTE, R. B. **Algumas Concepções e Dificuldades sobre o Ensino-Aprendizagem de Funções envolvendo os Contextos Algébrico e Gráfico e a Conexão entre os Mesmos**. Temas & Conexões, n. 2, 2015.

GOMES, R. A Análise de Dados em Pesquisa Qualitativa. In: MINAYO, M. C. (Org). **Pesquisa Social**. 23. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2004.

GRAVINA, M. A; BARRETO, M. M.; DIAS, M. T.; MEIER, M. Geometria Dinâmica na Escola. In: GRAVINA, M. A. *et al.* (Org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática**: tripé para formação de professores de Matemática. p. 13. Porto Alegre: UFRGS, 2010.

GRAVINA, M.; SANTAROSA, L. M. **A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. A. **Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior**: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. *Ciência & Educação* (Bauru), v. 22, p. 465-487, 2016.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciência e aplicações, v. 1. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, v.1, Oxford University Press, 1990.

LEMES, M; MARQUES, C; BRUM, V. Software Winplot: estudo da função afim. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 2, p. 5520-5526, 2020.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**, v. 1. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, v. 2. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LUCENA, R.; GITIRANA, V. Articulações Internas à Matemática: a parábola e a função quadrática com o GeoGebra. **Educação Matemática em Revista - SBEM**, v. 51, p. 25-34, 2016.

LÜDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAFRA, J. R. S. **Um Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função I**. Coleção Histórica da Matemática para Professores. v. 15. SBHMT, Belém, 2009.

MARKOVITS, Z; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos Alunos com o Conceito de Função. *In*: COXFORD, A.; SHULTE, A (Org.) **As Ideias da Álgebra**. São Paulo, SP: Atual Editora, 1995.

MELO, A. B. P. **Software Educativo Desmos**: possibilidades e limites no ensino de funções no fundamental II. f. 63. 2021. Trabalho de Conclusão do Curso (Matemática). João Pessoa: UFPB, 2021.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED UFMG, Belo Horizonte, v. 79, p. 80, 2013.

NÓBRIGA, J. C. C. Demonstrações Matemáticas Dinâmicas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1-21, 2019.

NOTARE, M. R.; GRAVINA, M. A. **A Formação Continuada de Professores de Matemática e a Inserção de Mídias Digitais na Escola**– Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. UFRGS, 2013.

PEREIRA, A. S.; SHITSUKA, D. M.; PARREIRA, F. J.; SHITSUKA, R. **Metodologia da Pesquisa Científica**. Santa Maria: Ed. UAB/NTE/UFSM, 2018. *E-book*.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação do Estado de Pernambuco. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco**: parâmetros curriculares de matemática para o ensino fundamental e médio. Recife: SEDUC-PE, 2012.

SILVA, C. T. **A Engenharia Didático-Informática na Prototipação de um Software para Abordar o Conceito de Taxa de Variação**. f. 164. 2016. Dissertação de

Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec). Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2016.

SILVA, C. T.; TIBURCIO, R.; BELLEMAIN, F.; GITIRANA, V. Function Studium: um software para o desenvolvimento do raciocínio covariacional. II Congresso sobre Tecnologias na Educação - Ctrl+E. Paraíba: Universidade Federal da Paraíba. *In: Anais do [...]*, 2017.

SILVA, R. S.; BIANCHINI, B. L. Equação da Reta: uma proposta de atividades para o Ensino Médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do software GeoGebra. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 3, n. 2, 2014.

SIQUEIRA, J. E. M.; BELLEMAIN, F. Articulando as Representações Algébricas e a Geométrica das Equações Quadráticas a partir da Noção de Registros de Representações Semióticas de Duval. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 2, n. 3, 2011.

SIQUEIRA, J. E. M.; BELLEMAIN, F. **Um Estudo das Dificuldades na Articulação entre Formas Algébricas e Forma Geométrica da Equação Quadrática**. *In: X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador: X ENEM, 2010.

SIQUEIRA, J. E. M. **Equações Quadráticas**: articulando suas formas algébricas e geométrica via um aplicativo ad hoc. f. 173. 2009. Dissertação de Mestrado. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2009.

SOARES, S. R. **Um Estudo Histórico do Ensino de Geometria Analítica no Curso de Matemática da UFJF nas Décadas de 1960 e 1970**. f. 141. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática). Minas Gerais: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

SOMMERVILLE, I. **Engenharia de Software**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2011.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. **#Contato Matemática**, 3ª série. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

TIBURCIO, R. **A Engenharia Didático-Informática**: uma metodologia para a produção de software educativo. f. 194. Tese de Doutorado (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec). Recife: UFPE, 2020.

TIBURCIO, R. **Processo de Desenvolvimento de Software Educativo**: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função. f. 112. 2016. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec). Recife: UFPE, 2016.

TIBURCIO, R.; BELLEMAIN, F. Aperfeiçoamento da Engenharia Didático-Informática com Contribuições da Metodologia de Desenvolvimento do Software Modellus. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-21, 2021.

VARELLA, M. **Prova e Demonstração na Geometria Analítica**: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos. f. 213. Dissertação de Mestrado (Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, 2010.

APÊNDICE A – SITUAÇÕES DE ENSINO



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

EDUMATEC
UFPE

Estudantes: _____

Série: _____

Data: _____

Situação 1 - Vocês sabem o que é uma reta? Discutam e, juntos(as), busquem apresentar uma definição de reta.

Situação 2 – Com o auxílio do software *Function Studium*, construam uma reta. Do lado direito da tela do software, nas janelas funções, parâmetros e pontos/taxas, observem o que aparece. Como vocês interpretam essas informações?

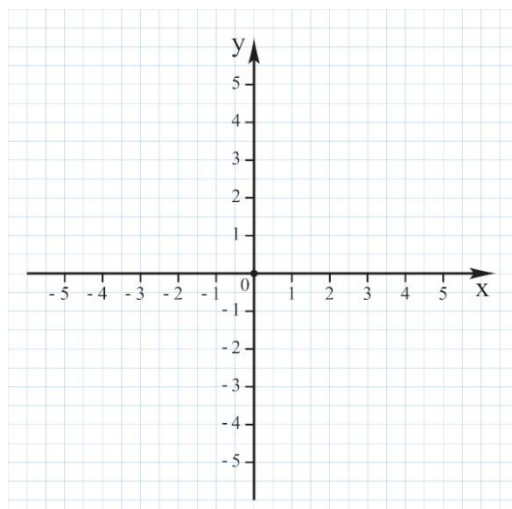
Situação 3 – Considerando a reta r , sendo esta determinada pelos pontos A $(-2, -1)$ e B $(2, 7)$, de que maneira podemos descobrir se o ponto C $(-1, 1)$ pertence a reta? E o ponto D $(-38, -73)$?

Situação 4 – Qual a expressão algébrica que permite a obtenção de todos os pontos da reta determinada por A (3, 4) e B (3, 6)?

Situação 5 – Considerando a reta r , determinada pelos pontos A (3, 4) e B (3, 9), de que maneira podemos descobrir se o ponto C (3, 7) pertence à reta? E o ponto D (3, 70)?

Situação 6 – Tracem uma reta no *Function Studium* e, com isso, manuseiem os coeficientes da forma algébrica através dos controles “a0” e “a1”, que são os parâmetros. Com isso, qual o efeito do parâmetro “a0” no gráfico da equação? E qual o efeito do parâmetro “a1”? O que acontece com os parâmetros “a0” e “a1” ao movimentarmos o gráfico da equação?

Situação 7 – Esbocem, num mesmo sistema coordenado, as retas das seguintes equações definidas em R.



$$y = x - 2$$

$$y = x$$

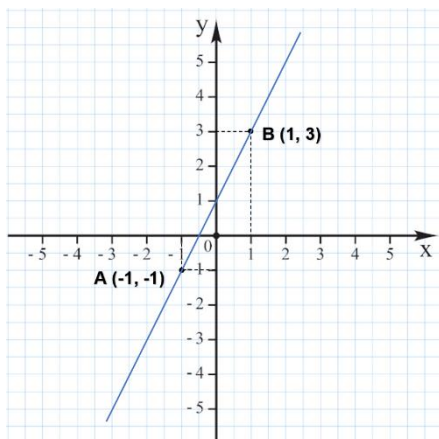
$$y = x + 2$$

(A) As retas são crescentes ou decrescentes? Por quê?

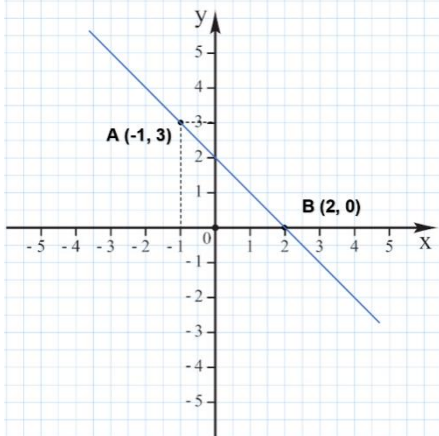
(B) As retas intersectaram o eixo y (ordenadas)? Se sim, em quais pontos?

Situação 8 – Associe as equações abaixo com seus respectivos gráficos. Em seguida, expliquem como fizeram esta correspondência.

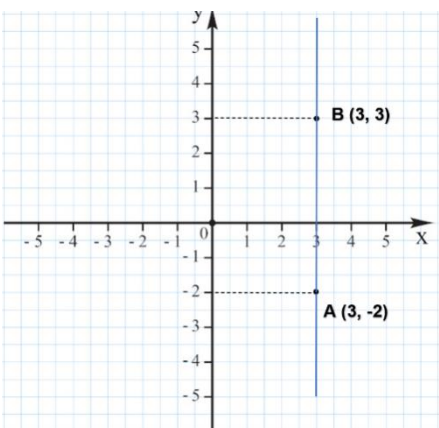
I.



II.



III.



() $2x - y + 1 = 0$

() $x = 3$

() $y = -x + 2$

() $x + y - 2 = 0$

() $y = 2x + 1$

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
EDUMATEC
UFPE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE EDUCAÇÃO

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA**

MESTRADO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convidamos o (a) Sr. (a) para participar como voluntário (a) da pesquisa **articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta utilizando o software *Function Studium***, que está sob a responsabilidade do pesquisador **Jhonatan de Holanda Cavalcanti**, endereço: **rua Matheus de Melo, número 104**, Gravatá, Pernambuco, **Telefone (81) 9 9765 - 8038**, e-mail: **jhonatancavalcanti19912014@gmail.com**. Está sob a **orientação do professor Dr. Franck Gilbert René Bellemain**.

Todas as suas dúvidas podem ser esclarecidas com o responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concordar com a realização do estudo, pedimos que assinale na opção: declaro que li e concordo como que está disposto no atual documento. Você estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Esta pesquisa tem por objetivo principal analisar como estudantes do 3º ano do ensino médio realizam a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, dispondo-se do software *Function Studium* como ferramenta a ser utilizada nesse processo. Para contemplar o objetivo previamente exposto, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: (a)

Investigar as dificuldades apresentadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio ao realizarem a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta. (b) Compreender as implicações desse software sobre a articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta. (c) Discutir a utilização do software em relação à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta. (d) Analisar criticamente as potencialidades e as dificuldades/limitações do software quanto à articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta, na perspectiva de elaborar funcionalidades para possíveis modificações dentro desse ambiente. O quadro teórico é constituído pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Duval. Nessa perspectiva, realizamos uma análise prévia em relação ao objeto reta à luz da Engenharia Didático-Informática (EDI) considerando-se suas dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática, interligando-as. Além disso, utilizamos a EDI como quadro de análise/quadro de referência para a utilização de software educativo para um artefato que já foi desenvolvido. Com isso, percebemos a necessidade de propor situações utilizando como ferramenta o software *Function Studium*, levando em consideração nosso aporte teórico e os estudos preliminares realizados. As situações foram experimentadas e analisadas a fim de realizarmos uma análise crítica do software a partir da EDI, apontando suas potencialidades e dificuldades/limitações, na perspectiva de aprimoramento da tecnologia. As 8 (oito) situações que propomos a experimentar, serão abordadas junto a 8 (oito) estudantes do 3º ano do ensino médio, formando 4 (quatro) duplas, tendo duração estimada de um momento de três aulas. Diante das situações, os estudantes serão levados a refletir, discutir e apresentar respostas, processo esse que será registrado através de gravação para posterior análise.

Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Caso precise citar algum sujeito em relação aos trechos da experimentação, serão utilizados nomes 'fantasia'.

Os dados coletados nesta pesquisa ficarão armazenados em computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador no endereço, pelo período de mínimo

5 anos. Nada lhe será pago e nem será cobrado para participar desta pesquisa, pois a aceitação é voluntária.

As dúvidas sobre a pesquisa poderão ser esclarecidas com o pesquisador responsável, via e-mail jhonatancavalcanti19912014@gmail.com e, inclusive, sob forma de ligação, através do contato telefônico (81) 9 9765 - 8038.

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: (Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cepccs@ufpe.br).

Jhonatan de Holanda Cavalcanti
(Assinatura do pesquisador)

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO VOLUNTÁRIO (A)

Eu, _____,
CPF _____.____.____-____, abaixo assinado, após a leitura (ou a escuta da leitura) deste documento e de ter tido a oportunidade de conversar e ter esclarecido as minhas dúvidas com o pesquisador responsável, concordo em participar do estudo articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta utilizando o software *Function Studium*, como voluntário (a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa e os procedimentos nela envolvidos. Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade (ou interrupção de meu acompanhamento/assistência/tratamento).

() Sendo assim, declaro que li, entendi e concordo como que está disposto no atual documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar e que eu posso interromper minha participação a qualquer momento. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para os propósitos acima descritos.

(Nome e assinatura do estudante)

(Nome e assinatura do(a) responsável do estudante)