UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

PATRÍCIA BENEVIDES DE OLIVEIRA

MODELIZAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO PARA UM AMBIENTE MICROMUNDO SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Recife
2022

PATRÍCIA BENEVIDES DE OLIVEIRA

MODELIZAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO PARA UM AMBIENTE MICROMUNDO SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain

Recife

2022

Catalogação na fonte
Bibliotecária Natália Nascimento, CRB-4/1543

O48m Oliveira, Patrícia Benevides de.
Modelização do teorema fundamental do cálculo para um ambiente micromundo sob a ótica da teoria antropológica do didático. / Patrícia Benevides de Oliveira. – Recife, 2022.
301 f.: il.

Orientador: Franck Gilbert René Bellemain.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2022 .
Inclui Referências.

1. Software educativo. 2. Teorema fundamental do cálculo – T4TEL. 3. Engenharia didático-informática. 4. Teoria antropológica do didático. I. Bellemain, Franck Gilbert René. (Orientador). II. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2023-001)

PATRÍCIA BENEVIDES DE OLIVEIRA

MODELIZAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO PARA UM AMBIENTE MICROMUNDO SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 13/04/2022

BANCA EXAMINADORA

_____
Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora Interna)
Universidade de Pernambuco

_____
Profa. Dra. Marilena Bittar (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

_____
Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Prof. Dr. Afonso Henriques (Examinador Externo)
Universidade Estadual de Santa Cruz

Dedico este trabalho

aos meus pais, **Odegar** e **Gildete**, meus alicerces, que sempre deram a melhor formação de quem eu sou,

ao meu esposo **Otaviano**, que sempre esteve ao meu lado e me incentivou a perseverar mesmo quando o caminho parecia perdido,

aos meus filhos **Otto Gabriel** e **José Henrique**, por toda paciência, amor e compreensão. Vocês compõem, com muito orgulho, o meu maior legado!

à minha irmã **Thais**, minha maninha, por todo o apoio e torcida

e, de modo especial, ao meu irmão **Murilo** (*in memorian*) que me ensinou que, mesmo diante da brevidade da vida, nós podemos escrever uma linda história...

AGRADECIMENTOS

Sempre confiei na Palavra que diz “Esta é minha ordem: Seja forte e corajoso! Não tenha medo nem desanime, pois o Senhor, seu Deus, estará com você por onde você andar” (Jos. 1:9). E diante de todos os caminhos que percorri para chegar até aqui, em todo o tempo a perseverança esteve comigo por força dessa Palavra. Por isto, o meu primeiro e maior agradecimento é ao meu Pai Celestial.

Nessa caminhada, sempre tive grande apoio da minha família, mesmo com as minhas ausências e falta de tempo para dedicar a eles, então agradeço por todo incentivo, amor e preocupação.

O meu profundo agradecimento ao professor Franck Bellemain, pela orientação, compreensão e incentivo. Juntamente com a professora Paula Baltar, me ajudaram a trilhar no caminho da pesquisa com presteza e dedicação. Sempre levarei comigo os seus ensinamentos.

Gratidão também a todos os colegas do grupo de pesquisa Atelier Digitas pelas contribuições e aos colegas da turma com os quais tive a oportunidade de conviver e compartilhar nossas aprendizagens.

Finalmente, agradeço aos professores do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática por todos os ensinamentos, à Universidade Federal de Pernambuco que me acolheu e, em especial, aos membros da banca que sempre serão referência na minha formação.

Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.

Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.
(PESSOA, 1972, p. 70).

RESUMO

Os processos de concepção e desenvolvimento de um sistema computacional do tipo micromundo se colocam sobre questões relativas à transposição didática e informática. Nessa implementação, há um ponto de convergência que está no nível da representação e modelização do objeto do saber e da resolução de problemas. No contexto da Matemática, as atividades desenvolvidas para o micromundo são de natureza exploratória, portanto levam à resolução de problemas, à construção de objetos específicos para modelagem e à criação de novas atividades. No âmbito da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a atividade matemática e o saber que emerge dela são analisadas através de um modelo praxeológico, constituído por certos tipos de tarefas com técnicas específicas e de forma justificada por meio do saber. Os conceitos irão emergir ao se trabalhar com os objetos ostensivos e, tendo como ambiente de estudo o micromundo, há uma possibilidade de se criar novos tipos de ostensivos. Considerando que a organização matemática a ser ensinada é um modelo praxeológico do currículo matemático obtido de programas e livros didáticos, esta pesquisa analisou o modelo dominante nas instituições de ensino superior relativo ao Teorema Fundamental do Cálculo. Este teorema traz implicitamente a relação inversa entre dois conceitos que são muito utilizados no ensino e aprendizagem do Cálculo, a Derivada e a Integral. Assim, buscamos a concepção de um suporte informático à atividade matemática no ambiente computacional, sendo o micromundo uma proposta de suporte. O objetivo geral da tese se baseou em realizar uma modelização do Teorema Fundamental do Cálculo para constituir a caracterização de um micromundo. A Engenharia Didático-Informática (EDI) foi escolhida como aporte metodológico, com uma adaptação do modelo de processo para descrever as etapas de investigação e com a análise das dimensões didática, cognitiva, epistemológica e informática. O processo de modelização foi realizado com a conexão entre a TAD e a abordagem T4TEL para estudar o teorema fundamental por meio das praxeologias e poder caracterizar o micromundo. A análise das dimensões e dos livros didáticos permitiu especificar um conjunto de requisitos e funcionalidades para descrever o micromundo. O sistema de variáveis que foi constituído para os geradores de tipos de tarefas evidenciou o papel da dimensão ostensiva no desenvolvimento das técnicas e permitiu conjecturar sobre a existência de outros objetos que podem ser mobilizados com a intermediação de um software e, consequentemente, para a produção de novas técnicas ou a resolução de novas tarefas.

Palavras-chave: Software educativo. Teorema Fundamental do Cálculo. T4TEL. Engenharia Didático-Informática. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

The processes of conception and development of a computer system of the microworld type are placed on questions related to the didactic and informatics transposition. In this implementation, there is a point of convergence that is at the level of representation and modeling of the object of knowledge and problem solving. In the context of Mathematics, the activities developed for the microworld are exploratory in nature, therefore, they lead to problem solving, the construction of specific objects for modeling and the creation of new activities. Within the scope of the Anthropological Didactic Theory (ADT), mathematical activity and the knowledge that emerges from it are analyzed through a praxeological model, consisting of certain types of tasks with specific techniques and in a way justified by means of knowledge. The concepts will emerge when working with the ostensive objects and, having the microworld as a study environment, there is a possibility of creating new types of ostensives. Considering that the mathematical organization to be taught is a praxeological model of the mathematics curriculum obtained from programs and textbooks, this research analyzed the dominant model in higher education institutions to analyze the Fundamental Theorem of Calculus. This theorem implicitly brings the inverse relationship between two concepts that are widely used in the teaching and learning of Calculus, the Derivative and the Integral. Thus, we seek to design a computer support for mathematical activity in the computational environment, with the microworld being a support proposal. The general objective of the thesis was based on performing a modeling of the Fundamental Theorem of Calculus to constitute the characterization of a microworld. The Didactic-Informatic Engineering (EDI) was chosen as a methodological contribution, with an adaptation of the process model to describe the investigation stages and with the analysis of the didactic, cognitive, epistemological and informatics dimensions. The modeling process was carried out with the connection between the TAD and the T4TEL approach to study the fundamental theorem through praxeologies and be able to characterize the microworld. The analysis of dimensions and textbooks allowed specifying a set of requirements and functionalities to describe the microworld. The system of variables that was created for the generators of types of tasks showed the role of the ostensible dimension in the development of techniques and allowed us to conjecture about the existence of other objects that can be mobilized with the intermediation of a software and, consequently, for the production of new techniques or solving new tasks.

Keywords: Educational software. Fundamental Theorem of Calculus. T4TEL. Didactic-Informatics Engineering. Anthropological Theory of Didactics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Diagrama geral de um micromundo transicional 31
Figura 2 - Comparativo entre engenharias 43
Figura 3 - Processo de desenvolvimento de software educativo 45
Figura 4 - Modelo de Processo de Software – Engenharia Didático-Informática 46
Figura 5 - Etapas no processo de transposição didática 52
Figura 6 - Escala dos níveis de codeterminação 55
Figura 7 - Níveis inferiores da escala de codeterminação de nosso estudo 56
Figura 8 - Correspondência entre OM e os níveis de codeterminação didática 64
Figura 9 - Correspondência entre visualização e simbolização. 68
Figura 10 - Exemplo de estruturação de tipos de tarefas. 72
Figura 11 - Representação dos eixos x e y por Descartes 105
Figura 12 - Triângulo característico 110
Figura 13 - O momento da área segundo Newton 112
Figura 14 - Representação da área sob a curva por Leibniz 117
Figura 15 - Volume de água (L) 124
Figura 16 - Estimativa do volume de água por acumulação 125
Figura 17 - Volume de água representado pela área sob o gráfico de r_2 126
Figura 18 - Representação gráfica da velocidade constante desenvolvida pelo móvel 147
Figura 19 - Representação gráfica da velocidade linear desenvolvida pelo móvel 147
Figura 20 - Divisão do período de tempo em subintervalos 148
Figura 21 - Questão 8 do questionário da pesquisa 150
Figura 22 - Utilização do software GeoGebra para investigar somas de Riemman 169
Figura 23 - Exemplo 1 do LD1 186
Figura 24 - Exemplo 1 do LD2 190
Figura 25 - Exemplo 2 do LD2 191
Figura 26 - Exemplo 3 do LD2 192
Figura 27 - Exemplo 4 do LD2 192
Figura 28 - Exemplo 5 do LD2 193
Figura 29 - Exemplo 7 do LD2 194
Figura 30 - Exemplo 8 do LD2 196
Figura 31 - Pacote 1 de questões "Usando o computador" 198
Figura 32 - Esboço dos gráficos de *f* e *F* 199

Figura 33 - Esboço dos gráficos de f' e F 200
Figura 34 - Gráficos das funções f' e F com os pontos A e B de f' e os pontos de inflexão G e H de F 201
Figura 35 - Exemplo 1 do LD3 202
Figura 36 - Interpretação do autor no exemplo 3 do LD3 204
Figura 37 - Exemplo 9 do LD3 204
Figura 38 - Exercícios 5 e 6 do LD3 205
Figura 39 - Área abaixo do gráfico de $ft = t2$ no intervalo [1, x] 206
Figura 40 - Exercício 66 do LD3 207
Figura 41 - Tarefa 2, seção 3, da sequência didática 213
Figura 42 - Visualização da Tarefa 2, seção 3, da sequência didática 214
Figura 43 - Modelo do Sólido S obtido em impressora 3D 215
Figura 44 - Questão 3 do questionário 216
Figura 45 - Etapa inicial com a imagem inserida no GeoGebra 219
Figura 46 - Árvore hierárquica para todos os valores das variáveis 224
Figura 47 - Propriedades da Integral 230
Figura 48 - Representação da área do retângulo 231
Figura 49 - Propriedade 5 da Integral 231
Figura 50 - Área total sob f de a até b 231
Figura 51 - Outras propriedades da integral 232
Figura 52 - Representação gráfica do máximo e do mínimo absolutos de f 232
Figura 53 - Representação do gráfico de uma função 236
Figura 54 - Gráfico da equação linear 237
Figura 55 - Como classificar os máximos e mínimos 239
Figura 56 - Definição de função crescente e decrescente 240
Figura 57 - Teste da primeira derivada para extremos locais 241
Figura 58 - Teste da segunda derivada para extremos locais 242
Figura 59 - Visualização do gráfico de f em diferentes escalas 243
Figura 60 - Determinação da janela de visualização 244
Figura 61 - Triângulos VOP e VHB 245
Figura 62 - Interface do GeoGebra com a representação das funções e os gráficos correspondentes 255
Figura 63 - Representação gráfica no software Autograph 257
Figura 64 - Interface do site do Apllet Descartes 258

Figura 65 - Interface do Maple (versão 13) 259
Figura 66 - Aproximação da área sob a curva $y = x^2$ 260
Figura 67 - Exemplo de utilização de comandos no Maple 261
Figura 68 - Etapas do método a diferenciação no *Microsoft Mathematics* 263
Figura 69 - Gráficos 2D e 3D da derivada da função $f(x) = x^2 - 3 + 4$ 263
Figura 70 - Caixa de texto do Wolfram|Alpha 266
Figura 71 - Tela do Wolfram|Alpha com o comando “Mostrar etapas” 267
Figura 72 - Atividade “Soma de Riemann” no *MathWorld* 268
Figura 73 - Interface do *Modellus* com as múltiplas representações da função X(t) para três valores de um parâmetro 270

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Modelo de processo de software adaptado da EDI 47
Quadro 2 - Percurso metodológico 83
Quadro 3 - Etapa de Especificação 83
Quadro 4 - Etapa de Análises Prévias 85
Quadro 5 - Etapa de Levantamento de Requisitos 85
Quadro 6 - Etapa de Concepção e Análise a priori 87
Quadro 7 - Etapa de Desenvolvimento e Experimentação 89
Quadro 8 - Etapa de Análise a Posteriori e Validação 90
Quadro 9 - Descritores identificados na literatura 177
Quadro 10 - Documentação de requisitos 179
Quadro 11 - Relação dos livros de Cálculo escolhidos que abordam o teorema fundamental 180
Quadro 12 - Integrais imediatas 188
Quadro 13 - Descrição da bloco prático-técnico e do bloco tecnológico-teórico de T_8 201
Quadro 14 - Descrição da bloco prático-técnico e do bloco tecnológico-teórico de T_{10} 207
Quadro 15 - Sistema de Variáveis 212
Quadro 16 - Valores de V_{ost} : Ostensivos 215
Quadro 17 - Algumas instanciações de V_f *: Função* 217
Quadro 18 - Valores de V_{f_op} : Operação entre funções 218
Quadro 19 - Valores do Intervalo do domínio da função 218
Quadro 20 - Valores de V_{mod} : Situação da modelação 220
Quadro 21 - Tarefas de GT_{int} e GT_{der} 220
Quadro 22 - Organização praxeológica 221
Quadro 23 - Síntese das representações das funções básicas 227
Quadro 24 - Resumo das Propriedades satisfeitas pelas integrais definidas 233
Quadro 25 - Métodos de integração 235
Quadro 26 - Esboço do gráfico de função: organização praxeológica (LD1) 238
Quadro 27 - Funcionalidades do micromundo 249
Quadro 28 - Mapeamento de softwares no ensino do TFC 254
Quadro 29 - Apresentação de atividades utilizando o *Microsoft Mathematics* 264
Quadro 30 - Presentation of Activities Utilizing Microsoft Mathematics 264
Quadro 31 - Características dos Softwares Matemáticos 271

Quadro 32 - Outros requisitos especificados 274

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Organização regional (capítulo 5) 183
Tabela 2 - Quantidade de tarefas em cada livro analisado 185
Tabela 3 - Valores correspondentes de $y = x^2$ 226

SUMÁRIO

1 O MODELO COMO QUESTÃO CENTRAL **19**

INTRODUÇÃO **20**

1.1 A REPRESENTAÇÃO E A NATUREZA EPISTEMOLÓGICA DOS OBJETOS DO CONHECIMENTO 22

1.2 O CONTEXTO DA PESQUISA 26

1.2.1 O ambiente computacional de nosso estudo **26**

1.2.2 O Micromundo **27**

1.2.3 Modelização de domínios do conhecimento **34**

1.3 A PROBLEMÁTICA DA TESE 36

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA **40**

INTRODUÇÃO 1 **41**

2.1 A ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA (EDI) 42

2.1.1 Questões epistemológica e didática **48**

INTRODUÇÃO 2 **51**

2.2 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD) 56

2.2.1 Termos primitivos da TAD **57**

2.2.2 O modelo epistemológico proposto pela TAD **60**

2.2.3 Objetos ostensivos e não ostensivos **64**

2.3 T4TEL: UMA ABORDAGEM DE MODELIZAÇÃO DO CONHECIMENTO 70

2.3.1 Caracterização para a implementação de uma estrutura T4TEL **70**

CONCLUSÃO **78**

3 PERCURSO METODOLÓGICO **80**

INTRODUÇÃO **81**

3.1 O MODELO DE PROCESSO DE SOFTWARE DA EDI ADAPTADO À PESQUISA 81

3.1.1 Etapa de Especificação **83**

3.1.2 Etapa de Análises Prévias **84**

3.1.3 Etapa de Levantamento de Requisitos **85**

3.1.4 Etapa de Concepção e Análise a Priori **87**

3.1.5 Etapa de Desenvolvimento e Experimentação **89**

3.1.6 Etapa de Análise a Posteriori e Validação **90**

CONCLUSÃO **91**
4 DINÂMICA OPERACIONAL **92**
INTRODUÇÃO 1 **93**
COMPREENSÃO DO DOMÍNIO NAS DIFERENTES DIMENSÕES **93**
4.1 O MICROMUNDO E O CONTEXTO DO TFC 94
4.2 ASPECTOS HISTÓRICOS E CONCEITUAIS DO TFC 97
4.2.1 Da Grécia Antiga ao Século XVII **98**
4.2.2 O Cálculo com Newton e Leibniz **110**
4.2.3 O rigor e o método de Cauchy **119**
4.2.4 Conceituação do Teorema Fundamental do Cálculo **122**
4.2.5 Síntese da dimensão epistemológica **127**
4.3 PESQUISAS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL 129
4.3.1 Síntese da dimensão cognitiva **152**
4.3.2 Síntese da dimensão didática **154**
4.4 SOFTWARES EDUCATIVOS NO ENSINO DO CÁLCULO 159
4.4.1 Síntese da dimensão informática **170**
INTRODUÇÃO 2 **174**
MODELIZAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO **174**
4.5 REQUISITOS DO DOMÍNIO 177
4.6 AS PRAXEOLOGIAS NOS LIVROS DIDÁTICOS 180
4.6.1 LD1 – Leithold **186**
4.6.2 LD2 – Thomas **190**
4.6.3 LD3 – Stewart **202**
4.6.4 Síntese da análise dos livros **208**
4.7 CONSTRUÇÃO DO MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA 210
4.7.1 O Sistema de Variáveis **211**
4.7.2 As Técnicas **220**
4.7.3 O Bloco do Saber **225**
4.8 ANÁLISE DESCRITIVA DE UM MICOMUNDO PARA O ENSINO DO TFC 247
4.8.1 Mapeamento de softwares: um olhar sobre os objetos **253**
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **281**
REFERÊNCIAS **293**

1 O MODELO COMO QUESTÃO CENTRAL

> Ao contrário do que se diz, na vida científica, os problemas não se colocam a si próprios. É precisamente este o sentido do problema que deixa a marca do verdadeiro espírito científico. Para um espírito científico, todo conhecimento é uma resposta a uma questão. Não havendo questão, não pode haver conhecimento científico. Nada é isolado. Nada é dado. Tudo se constrói. (BACHELARD, 1934)

Objetivos do capítulo: Fazer uma discussão introdutória sobre os princípios para a concepção de ambientes computacionais para a aprendizagem, a representação dos objetos e as relações imbricadas nas situações didáticas em ambiente computacional. Apresentar o contexto da pesquisa. Formalizar a problemática.

INTRODUÇÃO

A história da utilização de softwares na educação está relacionada à evolução da tecnologia e das teorias de ensino e aprendizagem. O avanço na Ciência da Computação, com novos conceitos e técnicas, como hipertexto, hipermídia, inteligência artificial, redes e tecnologias móveis, abriu novas possibilidades para o desenvolvimento de softwares e configurações pedagógicas inovadoras.

Os primeiros sistemas desenvolvidos eram conhecidos como "máquinas de ensinar"[1], seguindo a metodologia de aprendizagem behaviorista, em que a aprendizagem se dá através dos estímulos do meio. A ideia era que o aluno pudesse aprender sozinho com os estímulos que recebia, ao mesmo tempo fosse avançando no conhecimento. Com o advento do computador, empresas passaram a investir no desenvolvimento de softwares com o objetivo de "facilitar a aprendizagem" com a modalidade de instrução assistida por computador[2], na década de 1960.

Seguindo a metodologia de aprendizagem instrucionista, com base na transmissão da informação, o computador foi utilizado para auxiliar o processo de comunicação, automatizando o processo de ensino. Segundo essa abordagem, o aluno é receptor passivo do conhecimento, enquanto o professor repassa o conhecimento e as instruções.

Já as tendências interacionista e construcionista[3] consideram a característica cognitiva como essencial nos sistemas de aprendizagem baseados em computador. Por meio da abordagem construcionista o aprendiz constrói o seu próprio conhecimento por meio do computador, considerando o professor como mediador nessa interação. Conforme Balacheff e Kaput discutem,

> "Essa característica cognitiva gerou grandes expectativas no ensino da matemática, partindo do princípio de que os computadores permitirão uma experiência mais profunda e direta. Essa expectativa educacional é de natureza diferente da expectativa enraizada na Instrução Assistida por Computador, porque envolve a mudança da experiência matemática dos alunos no nível epistemológico, em vez de facilitar ou

[1] Por volta de 1920, Sidney L. Pressey desenhou várias máquinas destinadas a testar automaticamente a inteligência e a informação. Em 1954, B. F. Skinner também lançou a sua máquina de ensinar com o método de "instrução programada". Para maior aprofundamento, queira consultar: SKINNER, B. F. Tecnologia do Ensino. São Paulo: Herder e Edusp, 1972.

[2] Conhecida como CAI, do inglês *Computer Assisted Instruction*.

[3] Seymour Papert criou o termo construcionismo a partir da metodologia de aprendizagem construtivista de Jean Piaget, dando um novo sentido às atividades construtivistas realizadas a partir do uso do computador. Isto será discutido posteriormente.

> automatizar um estilo pedagógico específico". (BALACHEFF e KAPUT, 1997, p. 469-470, tradução nossa)[4]

A evolução no desenvolvimento e nas diferentes concepções de utilização dos softwares na Educação nos mostra que essas tecnologias fornecem hoje maneiras de fazer e experimentar a matemática como não imaginávamos a décadas atrás, com experiências através da manipulação direta de objetos e relações matemáticas.

Mas para se chegar hoje a esse nível de experimentação, a implementação de softwares educativos precisou levar em consideração as escolhas na representação do conhecimento. Nesse processo, o conhecimento é transformado tanto por restrições computacionais quanto a restrições didáticas (BALACHEFF e KAPUT, 1997, p. 477).

Chevallard explica a transformação do conhecimento matemático a ser ensinado através da noção de transposição didática (CHEVALLARD, 1991). Em sua teoria, ele assume a representação triangular do sistema didático através das relações entre o saber, aquele que ensina (o didata) e aquele que aprende (o aprendiz), expondo a distância existente entre o saber ensinado e os saberes de referência, bem como o resgate da sua especificidade epistemológica. Ou seja, as questões que um determinado saber busca responder diferencia-se em diferentes contextos, como o da produção de saberes e o das relações didáticas. Com a introdução do computador surge uma nova fonte de transformação do saber, através das representações computacionais (BALACHEFF e BELLEMAIN, 2007).

Balacheff (1993) denomina de transposição informática o processo de especificação e implementação de um modelo do saber, sendo um complemento da transposição didática. Indo mais além, consideramos a transposição informática como um processo da transposição didática que incorpora a dimensão informática desde o seu início. Isso significa que a inserção do computador no ensino faz repensar as relações no sistema didático, com um redimensionamento das práticas docentes buscando favorecer o desenvolvimento de autonomia de pensamento e criatividade dos estudantes, assim como uma mudança nos tipos de atividade propostas e no ensino dos conteúdos.

Desde a concepção e o desenvolvimento dos ambientes computacionais, os resultados obtidos desses processos se colocam sob o problema da transposição didática, pois levam a questionar sobre as razões de ser do saber ensinado, evoca conteúdos que não eram ensinados

[4] Texto original: "This cognitive characteristic has bred lofty expectations in mathematics education on the assumption that computers will enable a deeper, more direct mathematical experience. This educational expectation is of a different nature from the expectation rooted in Computer Aided Instruction, because it involves changing the mathematical experience of learners at the epistemological level, rather than facilitating or automating a particular pedagogical style."

e até mesmo a criação de novos objetos de ensino (BALACHEFF, 1994, p. 18). A inteligência artificial[5] deu uma nova dimensão a esses ambientes levando a uma modificação da própria matemática, colocando em jogo a modelização dos objetos de ensino com suas características sendo construídas na interação ocorrida dentro do sistema didático.

A questão que se coloca em jogo é a representação do conhecimento e a sua implementação informática. Como transmutar os saberes e suas especificidades para o ambiente computacional de aprendizagem de forma a permitir uma interação entre a sua manipulação pelo usuário, as retroações do sistema e as intenções didáticas, considerando tanto as restrições computacionais quanto as restrições didáticas?

Concordamos que essa transmutação "não é o resultado de um simples processo de tradução de um sistema de representação para outro, mas de um processo real de modelagem e, portanto, de teorização de objetos de ensino e suas condições de existência." (BALACHEFF, 1994, p. 18, tradução nossa)[6]. Portanto, é necessário entender esse processo e, em particular, as características que o irão constituir.

1.1 A REPRESENTAÇÃO E A NATUREZA EPISTEMOLÓGICA DOS OBJETOS DO CONHECIMENTO

Retomando historicamente o panorama da evolução da aplicação da informática na educação, percebemos que a visão tecnicista dos anos 1950 era de aperfeiçoar os métodos de ensino, quando este era influenciado pela tecnologia industrial. Passamos, então, a focar no conhecimento e na sua gênese, saindo de uma visão individualizada de aprendizagem para uma visão mais coletiva e mais colaborativa dessa aprendizagem. Em relação aos sistemas informáticos, por um lado era considerado como "tutor" e, por outro, como ferramenta. (BRUILLARD, 1997).

Contribuindo a essa evolução, Bruillard (1997), bem como, Balacheff e Bellemain (2007), sublinham a importância do conhecimento em seu aspecto social e que impulsionou a pesquisa e o desenvolvimento dos sistemas computacionais. Embora a aprendizagem esteja no centro de qualquer problemática que envolve os ambientes computacionais na educação,

[5] Também conhecida como IA, a inteligência artificial é um ramo da Ciência da Computação que surgiu nos anos 1940 com o objetivo de implementar modelos para a construção de sistemas informáticos capazes de resolver problemas (BALACHEFF, 1994).

[6] Texto original: "[...] n'est pas le résultat d'un simple processus de traduction d'un système de représentation vers un autre, mais celui d'un véritable processus de modélisation et donc de théorisation des objets d'enseignement et de leurs conditions d'existence".

concordamos que o objetivo é a “aprendizagem de algum objeto”, portanto a compreensão do que vem a ser conhecimento é uma condição estratégica para a criação desses ambientes, tanto do ponto de vista teórico quanto computacional (BALACHEFF e BELLEMAIN, 2007).

Segundo Balacheff e Bellemain (2007, p. 36), o conhecimento é resultado de construções dinâmicas e, como o ambiente computacional é um dispositivo com o qual o usuário interage, atua e recebe retroações, essa interação também está no centro da caracterização de conhecimento.

Na acepção da palavra, os autores distinguem conhecimento e saber, sendo a primeira relativa à perspectiva de aprendizagem, enquanto a segunda numa perspectiva de ensino, mais institucional. De forma mais abrangente, eles se referem ao conhecimento como um “conjunto de contextualizações em diversas situações”, ou ainda, como “um conjunto de concepções. Cada concepção é caracterizada pelo equilíbrio dinâmico do ciclo ação/retroação de interação entre o sujeito conhecedor (S) e o meio específico (M) organizado por certas restrições.” (BALACHEFF e BELLEMAIN, 2007, p. 36).

Isso quer dizer que, nas situações didáticas envolvendo o software, o aprendiz interage com as representações através de artefatos e estes influem sobre as estratégias e processos de resolução do aprendiz, gerando ciclos de ação/retroação de tal forma que quando se observe um certo estado de equilíbrio no sistema S/M, é razoável inferir que o indivíduo aprendeu alguns objetos do conhecimento.

Discutimos anteriormente que, sendo um objeto do saber identificado como um objeto de ensino, uma série de transformações deverão ser aplicadas para que ele seja efetivamente ensinado e aprendido. A introdução de um dispositivo informático no ambiente de aprendizagem resulta em uma nova fonte de transformação do saber.

Como explica Balacheff (1994), a implementação da representação dos objetos faz com que esses dispositivos sejam constituídos por: universo interno, interface e universo externo. O universo externo é o espaço onde se encontram os conhecimentos mobilizados e as representações construídas pelos sujeitos através da interação com o sistema computacional, podendo envolver também outros atores ou dispositivos. O universo interno é constituído pelos componentes que permitem o funcionamento do dispositivo, como as linguagens de programação e os componentes eletrônicos. As representações nesta região são caracterizadas

pela granularidade e compilação[7] que se combinam para limitar as possibilidades de análise dos processos traduzidos em linguagens de programação. Já a interface é o espaço de comunicação entre o usuário e o dispositivo informático onde ocorre a visualização das representações do conhecimento. A inteligência artificial abriu novas possibilidades de explorações da interface por meio das várias mídias (som, imagem, gestos, etc.) e entidades abstratas (vetores, gráficos de funções numéricas, objetos geométricos, etc.) por meio das ferramentas de visualização e manipulação direta.

Os sistemas de representações com suas características particulares, o universo interno e a interface combinam efeitos e fenômenos extrínsecos às entidades representadas. Assim, as transmutações ocorridas com o saber nas suas representações computacionais podem ser caracterizadas, segundo Balacheff e Bellemain (2007):

- pelo suporte material disponível para representar os objetos do saber,
- pelos objetivos dos criadores/desenvolvedores de softwares,
- pela natureza dos saberes manipulados e suas estruturas.

Independente de qual transmutação relativa à representação do saber, cada uma possui suas características e limitações oferecidas pelo computador. No caso da geometria, os softwares de geometria dinâmica implementam em suas interfaces o princípio de manipulação direta. Para isso, há pelo menos dois sistemas de representação dos objetos geométricos interconectados: um gráfico (os pixels da tela) e um analítico (um sistema de coordenadas). Pode-se acrescentar ainda o simbólico (as especificações geométricas), sendo que cada um tem características próprias que transmutam o saber.

No caso das representações dos saberes usando estrutura de dados, números e algoritmos de cálculo, as representações são caracterizadas pelas noções de completude e adequação[8]. "A completude significa que qualquer objeto construtível com o modelo é representável e a adequação significa que qualquer representação é a representação de um objeto possível do modelo." (BELLEMAIN, 2000). Essas noções estão relacionadas à coerência e consistência do dispositivo, que dizem respeito tanto ao universo interno como à interface, que Balacheff (1994) chama de "domínio de validade epistemológica".

[7] Termos da Ciência da Computação no tratamento dos dados. Na compilação, os dados são traduzidos em "linguagem de máquina" de um programa em linguagem de programação para que o processador e o sistema operacional consigam entender a mensagem, portanto faz a passagem de um sistema de linguagem alto nível para uma linguagem simbólica. A granulação se refere ao tamanho em que os campos de dados são divididos, sendo que quanto mais subdivisões e granulares forem os dados, mais detalhados eles serão. Balacheff chama a atenção para a perda de informações na transformação desses dados associada à expressão formal do conhecimento.

[8] Para ilustrar essas duas noções, o leitor pode consultar Bellemain (2000).

Assim dizendo, no processo de transformação do saber que ocorre entre o universo interno e o universo externo existem restrições gerais próprias da computação para implementar e adaptar o saber às exigências da representação simbólica e computacional. No caso da matemática, os sistemas de representação têm uma importância particular (DUVAL, 2007) e a aprendizagem desse domínio intervém no conhecimento e na manipulação e articulação de diversos sistemas de representação. Portanto, as representações necessariamente precisam ser validadas para garantir a manutenção das características e propriedades dos conceitos relacionados ao saber.

Nos trabalhos de pesquisa em desenvolvimento de softwares educativos, a Engenharia Didático-Informática (EDI) surgiu com o intuito de articular os vários domínios da matemática, informática, didática e psicologia cognitiva, integrando esses aspectos da transposição didática e informática. Contribui, portanto, em resolver as limitações da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) nas questões relativas à criação de softwares educativos para matemática, bem como as limitações da Engenharia de Softwares no âmbito do ensino e da aprendizagem.

Com a EDI, a especificidade dos objetos do saber intervém na concepção dos softwares educativos, exigindo uma vigilância epistemológica[9] e um amplo domínio do saber de referência. A questão que diz respeito tanto ao universo interno como a interface é essencial porque as representações determinam o feedback do aprendiz e, consequentemente, o nível de aprendizagem alcançada.

A representação de domínios do conhecimento é discutida na área da inteligência artificial com a proposta de modelar o conhecimento para o desenvolvimento de sistemas informáticos. Esse processo de modelização requer a transmutação do mundo fenomenal para um espaço de representação, considerando os objetos com seus conceitos e propriedades relacionados. É diferente do desenvolvimento de sistemas baseados em processamento de dados, no contexto a orientação a objetos, em que os objetos que constituem o mundo real são compostos com a sua própria representação (CAMPOS, 2004).

Nesse sentido, a concepção de um software educativo deve levar em consideração, dentre os diferentes modelos de implementação e do tipo de ambiente (micromundo, tutor inteligente, simulação, etc.), um modelo de domínio do conhecimento. O nosso interesse em particular é voltado para a modelização do domínio da matemática para a concepção de suporte

[9] O processo de transposição didática pode causar uma eventual distância necessária do saber sábio para o saber ensinado, portanto, cabe aos agentes de ensino e comunidade científica exercer a vigilância epistemológica no sentido de questionar sobre as razões de ser do objeto do saber e como ensinar de forma a manter a fidelidade conceitual (CHEVALLARD, 1991, p. 16).

informático à atividade matemática no ambiente computacional. Para tanto, achamos necessário buscar fundamentos teóricos da didática e da informática para a elaboração desse modelo de representação. Antes disso, vamos entender sobre o ambiente computacional de nosso estudo.

1.2 O CONTEXTO DA PESQUISA

Apresentamos, nesta parte, o contexto da pesquisa e definimos os objetos de nossas análises, o que nos permitirá avançar na problemática da tese.

1.2.1 O ambiente computacional de nosso estudo

A ideia que temos de aprendizagem baseada em ambiente computacional é que ela é resultado da interação dos usuários com esses ambientes que levam consequentemente a construir diferentes resultados (SUTHERLAND e BALACHEFF, 1999; BALACHEFF e BELLEMAIN, 2007). Portanto, a interação está no centro do design desses tipos de sistemas e, consequentemente, no centro da caracterização de conhecimento.

Para constituir a base dessa caracterização, Balacheff e Bellemain (2007) elencam alguns princípios:

- O conhecimento não pode ser reduzido a um texto;
- A aprendizagem é um processo dinâmico;
- Os aprendizes não recebem passivamente conhecimentos, eles são construtores ativos de sentidos;
- Os erros são sintomas da natureza da compreensão do aprendiz;
- O conhecimento tem sua origem na necessidade de resolver problemas;
- A eficiência na resolução de problemas é o critério de sobrevivência do conhecimento.

Os dois últimos são os princípios de Vergnaud[10], que destacam a existência da relação entre conhecimento[11] e problema.

[10] VERGNAUD, G. Conceptual fields, Problem-Solving and Intelligent Computer Tools. In: DE CORTE, E. et al (eds.). Computer Based Learning Tools Environments and Problem-Solving. Berlin: Springer-Verlag, 1992. p. 287-308.

[11] Balacheff chama a atenção na compreensão das ideias a respeito do conhecimento quando, na língua inglesa, a palavra *knowledge* é associada tanto para as construções intelectuais institucionalizadas pela sociedade quanto para as construções intelectuais produzidas pelo ser humano como resultado da resolução de problemas ou da execução de tarefas. Enquanto as primeiras são consideradas fixas e estáticas, as segundas são mutantes e dinâmicas. Já no latim, são utilizadas as palavras "saber" e "conhecimento" para caracterizar ambas as ideias, respectivamente. (BALACHEFF e BELLEMAIN, 2007).

Essa relação tem a ver com o tipo de ambiente computacional pelo qual nos interessamos, pois é também uma maneira de o caracterizar em relação a um domínio do conhecimento, tornando possível fazer uma análise a priori dos significados que os alunos poderão construir ao interagir com o sistema.

Considerando o processo da transposição didática e informática, consideramos o micromundo como um produto desse processo e condiz com a nossa ideia de aprendizagem. Sob o ponto de vista da concepção, percebemos a complexidade e a grandeza dessa concepção para a aprendizagem, em que a origem está na resolução de problemas.

Hoyles descreve a ideia de micromundo, com origem na comunidade de inteligência artificial, inicialmente para descrever um domínio relativamente simples e restrito, onde sistemas computacionais poderiam resolver problemas, e evoluindo para um ambiente mais bem concebido com a incorporação concreta de uma estrutura de conhecimento, formada por ferramentas e objetos com relações e representações que os tornam acessíveis (HOYLES, 1993). Logo podemos dizer que, para a construção de micromundos, há um ponto de convergência que está ao nível da representação e modelização do conhecimento e da resolução de problemas.

Esse aspecto está relacionado também à Matemática, em que as representações têm um papel central na elaboração e evolução dos saberes e na construção dos conhecimentos pelos sujeitos. O micromundo tem contribuições nessa área, constituindo uma interface entre o usuário e o espaço interno de representações digitais (BELLEMAIN, 2002) onde esses novos conhecimentos matemáticos podem ser produzidos.

Para entender melhor sobre essa concepção, trazemos alguns aspectos da epistemologia e da didática referentes a esse tipo de ambiente.

1.2.2 O Micromundo

Nesta seção iremos abordar a noção de micromundo, retomando a sua origem e algumas definições a partir da concepção de pesquisadores, psicólogos e matemáticos que as descrevem. Pretendemos mostrar que algumas características particulares permeiam a ideia de micromundo e influenciam tanto a concepção quanto a sua utilização.

No final da década de 1960, o desenvolvimento de computadores sofreu forte influência da área de Inteligência Artificial. Marvin Minsky e Seymour Papert, do laboratório do MIT (Massachusetts Institute of Technology), sugeriram que a pesquisa em IA fosse voltada para

situações artificialmente simples conhecidas como "micromundos". A ideia era de que "não se tratava mais de programar o computador para o aprendiz, mas de dar ao aprendiz a possibilidade de programar a máquina." (BRUILLARD, 1997, p. 129, tradução nossa)[12]. Esse controle a ser dado ao aprendiz levaria, portanto, a disponibilizar, de início, uma forma de comunicação mais simples com a máquina que, nesse caso, a linguagem fornecida pela inteligência artificial facilitava.

As primeiras versões de micromundo serviam para descrever um pequeno domínio do mundo real com objetos e atividades implementados na forma de um programa de computador (HOYLES, 1993, p. 1). Várias pesquisas foram investidas em testar versões simplificadas da realidade, como os trabalhos realizados com o *blocks world* que consistia em blocos coloridos, de variadas formas e tamanhos, dispostos sobre uma superfície plana. O programa SHRDLU[13], de Terry Winograd, do MIT, foi um dos grandes destaques dessa abordagem, que simulava a orientação de um braço robótico manipulando cubos sobre a mesa.

Mas essa não era a interpretação para os micromundos voltados para a educação. Embora fossem concebidos para resolver problemas dentro de um domínio relativamente simples e restrito, Seymour Papert levou esse domínio a fazer parte de um domínio de conhecimento com significado epistemológico (HOYLES, 1993, p. 2). Na visão de Papert, a criança era construtora do conhecimento e suas ideias tinham forte influência dos trabalhos de Piaget, embora para Piaget a aprendizagem em ambientes escolares não fosse objeto de pesquisa (BALACHEFF e SUTHERLAND, 1994, p. 138). Além disso, Papert se opunha em relação à teoria dos estágios[14] de Piaget ao considerar que as pesquisas não levaram em conta a implementação do computador. Para ele, os desenvolvimentos tecnológicos baseados em IA permitiam uma forma mais interativa de trabalhar com o computador e facilitar na compreensão.

---

[12] Texto original: "il ne s'agit plus que l'ordinateur programme l'apprenant mais de donner à l'apprenant la possibilité de programmer la machine."

[13] https://hci.stanford.edu/winograd/shrdlu/

[14] Piaget defende a teoria que as fases do desenvolvimento das estruturas cognitivas acontecem em quatro estágios: sensório motor (do nascimento até aos 2 anos aproximadamente), pré-operatório (de 2 a 7-8 anos), operatório concreto (7-8 aos 11-12 anos) e operações formais (a partir dos 12 anos). A passagem desses estágios acontece por adaptação, acomodação e assimilação do conhecimento, ocorrendo um equilíbrio de maturação entre um estágio e outro (Disponível em: < https://acervodigital.unesp.br/bitstream/123456789/224/1/01d11t01.pdf >. Acesso em: 18 out. 2020). Balacheff e Sutherland (ibid., p. 139) explicam que Papert não via o pensamento abstrato e formal como um desenvolvimento do pensamento concreto. Para ele, "um programa de computador escrito interagindo com o computador é um objeto concreto, enquanto um computador planejado no papel longe do computador é um objeto abstrato formal" (*For Papert a computer program written by interacting with the computer is a concrete object, whereas a computer planned on paper away from the computer is a formal abstract object...*). Com essa visão, ele se opunha aos pensadores abstratos sobre a educação matemática da época, que se centrava no desenvolvimento do currículo de uma "nova Matemática", com ênfase em um sistema formal da Matemática.

Papert (1985) se referia a esse termo descrevendo-o como um subconjunto da realidade ou realidade construída, cuja estrutura se assemelha com a estrutura cognitiva de maneira a prover um ambiente em que se pode operar efetivamente.

Esse tipo de ambiente permite ao aprendiz estruturar grandes ideias e habilidades intelectuais, como o micromundo da Geometria da Tartaruga com sua linguagem de Programação Logo. A Tartaruga é um objeto gráfico capaz de caminhar na tela, deixando seu rastro que acaba produzindo gráficos na tela. Os comandos utilizados pelo usuário para fazer a tartaruga se movimentar descrevem os procedimentos de construção. Os traços da Tartaruga na tela revelam a atuação do usuário no ambiente e, em atividade de resolução de problemas, servem de *feedback* que podem levá-lo a reformular as descrições dadas para movimentação da Tartaruga. (VALENTE, 1999).

Noss e Hoyles (2019) discutem que as possibilidades do Logo permitiram generalizar a ideia de construcionismo, levando à sua evolução bem como a do espaço digital em torno dele. Atualmente encontramos, por exemplo, outros produtos inspirados nos mesmos objetivos, focados no conhecimento e com visões semelhantes de aprendizagem, como as linguagens de programação NetLogo[15], Scratch[16] e Sketchpad[17] e os sistemas de geometria dinâmica. Bruillard (1997) defende que adquirir conhecimento por meio da programação pode apoiar ou gerar novos conhecimentos. Ou seja, na aprendizagem por meio de programação, as linguagens usadas são um meio para se construir alguma coisa, assemelhando-se à expressão usada por Paper, como "ferramenta para pensar".

A evolução dessas noções originárias do Logo levou ao surgimento do micromundo.

Hoyles (1993, p. 2) cita alguns psicólogos piagetianos interessados em matemática que foram influenciados por essa noção de micromundo, que o consideravam como "mini domínios da matemática piagetiana[18]", referindo-se a um meio para produzir abstrações espontâneas e construir novas estruturas lógico-matemáticas.

Bruillard (1997, p. 140-141) traz uma caracterização de micromundo como mundos virtuais para as pessoas exercerem a sua criatividade, formados por objetos que têm propriedades comuns aos objetos formais da ciência e aos objetos concretos resultantes da

[15] Endereço eletrônico: https://ccl.northwestern.edu/netlogo/
[16] Endereço eletrônico: https://scratch.mit.edu/
[17] Endereço eletrônico: https://sketch.io/sketchpad/
[18] O termo "matemática piagetiana" foi utilizado para restringir à Matemática que interessava aos psicólogos que seguiam a teoria de Piaget e diferenciava-se da matemática escolar pois era considerada como epistemologicamente trivial (HOYLES, 1993, p. 2).

experiência direta com o ambiente. Papert denominou de “objetos transicionais que ajudam a manipular os objetos abstratos, pontes entre a aprendizagem intuitiva e formal”[19].

Essa caracterização, de uma semântica dinâmica para um sistema formal como o centro de um sistema axiomático intuitivo (como descrito por Bruillard), foi também considerada por Thompson para definir um micromundo matemático como “um sistema composto de objetos, relações entre objetos e operações que transformam objetos e relações” (THOMPSON, 1985, p. 85, tradução nossa)[20]. Na visão de Thompson, um micromundo matemático se diferencia das outras definições, como ele mesmo descreve:

> Na prática, um micromundo matemático incorpora uma exibição gráfica que representa uma visualização dos objetos iniciais do micromundo. A exibição em conjunto com operações sobre os objetos do micromundo constitui um modelo do conceito ou conceitos sendo propostos aos alunos. Em um sentido muito real, o micromundo incorpora a estrutura do conceito. A tarefa dos alunos é internalizar essa estrutura e torná-la sua.
> O último critério listado - que o sistema contém operações pelas quais novo objetos podem ser feitos - é essencial. Isso é o que torna matemático um micromundo matemático. Em certo sentido, força o sistema a ser uma linguagem de programação matemática. No entanto, o resultado da programação não é um "programa".
> O resultado é um novo objeto matemático. Ou seja, um micromundo matemático constitui o núcleo de um sistema axioma intuitivo, onde os alunos podem definir novos objetos e operações e investigar interativamente suas propriedades. (THOMPSON, 1985, p. 85-86, tradução nossa)[21].

Segundo Bruillard, o micromundo faz a ligação semântica entre o formal (ou abstrato) e o real (simulado ou de referência) através de um processo de modelização ou exemplificação, como mostra a Figura 1:

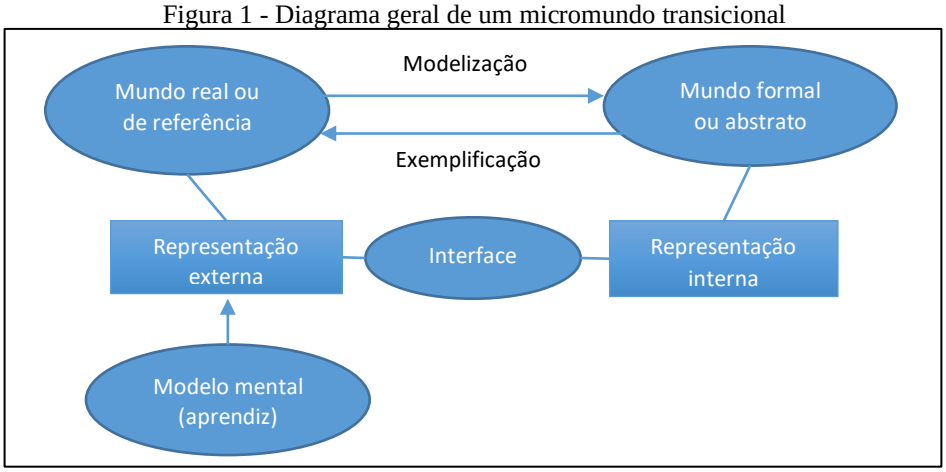
---

[19] Texto original : “Ce sont des objets transitionnels qui aident à manipuler les objets abstraits, des passerelles entre les apprentissages intuitifs et formels”.

[20] Texto original: “I will use "mathematical microworld" to mean a system composed of objects, relationships among objects, and operations that transform objects and relation-ships.”.

[21] Texto original: “In practice, a mathematical microworld incorporates a graphical display that depicts a visualization of the microworld's initial objects. The display in conjunction with operations upon the microworld's objects constitutes a model of the concept or concepts being proposed to the students. In a very real sense, the microworld embodies the structure of the concept. The students' task is to internalize that structure and make it their own. The last criterion listed-that the system contain operations by which new can be made-is essential. This is what makes a mathematical micro world mathematical. In a sense, it forces the system to be a mathematical programming language. However, the result of programming is not a "program." The result is a new mathematical object. That is, a mathematical microworld constitutes the core of an intuitive axiom system, where students can define new objects and operations and interactively investigate their properties”.

Figura 1 - Diagrama geral de um micromundo transicional



Fonte: A autora, adaptado de Bruillard (1997, p. 142).

O diagrama, na visão do autor, mostra os elementos que constituem um micromundo transicional baseado na ideia de um modelo mental, que é uma representação cujos objetos visíveis na interface são consistentes com o modelo formal, e a sua aparência, na interface, lembra os objetos do mundo real. Isto é, os objetos simbólicos se comportam de maneira semelhante aos objetos nas situações em que são representados.

Na prática, os micromundos permitem aos usuários agirem sobre os objetos por meio da interface e estes se comportam com certas restrições de fidelidade e coerência. Nessa interação, novos objetos são construídos e os alunos têm a oportunidade de investigar as suas propriedades. Balacheff e Sutherland (1994) destacam o conceito de manipulação direta para descrever essa ligação entre a interface e o pressuposto micromundo (com sua representação interna), no sentido de que um não pode ser separado do outro. A definição de micromundo é composta pelas seguintes características inter-relacionadas:

- um conjunto de objetos primitivos e suas operações elementares, com regras que agem sobre essas operações, que é um sistema formal no sentido matemático;
- um domínio da fenomenologia que relaciona objetos e ações sobre os objetos a fenômenos na superfície da tela. O domínio vai fornecer o tipo de *feedback* que o micromundo irá produzir com as ações do usuário.

Bellemain ainda acrescenta, a essa definição, um terceiro componente:

- um sistema de interpretação que determina as possíveis ações do usuário. O seu conjunto de interfaces interpreta as ações do sujeito transformando-as em operações sobre os elementos do sistema formal. As representações do sistema fenomenal podem ser artefatos em que o sujeito age sobre os elementos do sistema formal que os representam. (BELLEMAIN, 2002, p. 59).

Os autores vislumbram, então, a possibilidade de os usuários poderem transformar objetos complexos e operações em novos objetos, numa perspectiva de que "o micromundo se desenvolve enquanto o usuário aprende." (BALACHEFF e SUTHERLAND, 1994, p. 142, tradução nossa)[22]. Esta observação pode ser verificada examinando do ponto de vista da validade epistemológica, como no caso dos micromundos matemáticos definidos por Thomson.

Alguns questionamentos podem ser levantados, a partir dessa caracterização, como sugerem:

> - dada a *especificação* de um objeto ou um fenômeno na superfície da tela, será que existe uma *construção* a partir dos objetos primitivos e das operações elementares do micromundo que produzirão esse objeto ou esse fenômeno?
> - é possível dar uma caracterização 'simples' abrangente do fenômeno que o micromundo pode produzir? Trata-se de propor uma teoria da fenomenologia do micromundo que vai além de um mero estilo manual do usuário?
> - dado um domínio da fenomenologia, é possível construir um micromundo que o produza?
> (BALACHEFF e SUTHERLAND, 1994, p. 143, tradução nossa)[23].

De forma resumida, o domínio de validade epistemológica de um micromundo matemático pode ser caracterizado por quatro dimensões: o conjunto de problemas que o micromundo pode apresentar; a natureza das ferramentas e objetos de sua estrutura formal; a natureza da fenomenologia sobre sua estrutura formal; e o tipo de controle que o micromundo disponibiliza aos usuários e o *feedback* resultante.

Essa forma de caracterizar um micromundo em relação a um determinado domínio do conhecimento permite fazer uma análise a priori dos significados que os alunos provavelmente construirão ao interagir com o dado micromundo. Ao mesmo tempo, fornece a possibilidade de entender as diferenças entre os diversos micromundos e a sua contribuição para a instituição de ensino.

Mas além dessa especificação, saber o que é potencialmente aprendido no contexto de um determinado ambiente precisa levar em conta as restrições institucionais. Essa questão também é discutida por Balacheff e Sutherland, que se referem ao domínio didático de validade de um micromundo (SUTHERLAND e BALACHEFF, 1999).

Embora os micromundos forneçam acesso ao "mundo da Matemática" por causa da sua natureza intrinsicamente formal, o professor desempenha o papel de mediador fundamental

[22] Texto original: "From this perspective, we would say that the microworld develops while the user learns.".
[23] Texto original : "- given the *specification* of an object or a phenomenon at the surface of the screen, does there exist a *construction* using the primitive objects and the elementary operations of the microworld which will produce this object or this phenomenon? – is it possible to give a 'simple' comprehensive characterization of the phenomenology of the microworld which goes beyond a mere user-manual style? – given a domain of phenomenology, is it possible to construct a microworld which produces it?".

entre o conhecimento construído individualmente e o conhecimento construído socialmente (SUTHERLAND e BALACHEFF, 1999, p. 2)[24]. Segundo os autores, os professores são responsáveis pelo que ensinam e este é limitado pelas instituições que organizam todos os meios necessários para que os indivíduos construam o conhecimento. O conhecimento que o professor deseja ensinar é chamado de conhecimento intencional, mas não no sentido de transmissão.

Essa discussão feita pelos autores ressaltam a tensão existente entre esses aspectos do conhecimento e que o professor desempenha o papel crucial de desenvolver o complexo processo de ensino em relação ao conhecimento a ser ensinado e ainda considerar os conhecimentos individuais dos alunos.

Na visão dos autores, qualquer que seja o meio, computacional ou não, os alunos sempre podem construir significados diferentes daqueles que o professor pretende. Mas, no meio computacional, os significados que os alunos constroem são muito mais visíveis. Um exemplo prático é a noção de praxeologia pessoal (CROSET e CHAACHOUA, 2016), que analisa a organização praxeológica da atividade de sujeitos institucionais. Nessa abordagem, um tipo de tarefas pessoal não corresponde, necessariamente, ao da instituição, por isso considera-se importante analisar o conhecimento a ser ensinado e a ser aprendido a partir dos componentes da praxeologia para captar melhor as suas especificidades.

Em relação à questão da atividade a ser desenvolvida com os micromundos matemáticos, Bruillard (1997, p. 143) destaca que é essencialmente importante, tanto no uso quanto na concepção desses sistemas, determinar um conjunto estruturado de atividades que leve em conta um equilíbrio entre "uma estrutura imposta e a livre exploração" do conhecimento que deve ser negociado. Ao mesmo tempo, essa negociação é complexa no sentido de que se deve, por um lado, dar aos alunos autonomia suficiente, sem que não haja construção significativa do conhecimento e, por outro lado, deve garantir que as intenções do professor sejam cumpridas (BALACHEFF e SUTHERLAND, 1994, p. 146).

No contexto da Matemática, as atividades desenvolvidas para o micromundo são exploratórias por natureza (pelo menos para garantir uma compreensão mínima do comportamento dos objetos do micromundo), portanto levam à resolução de problemas (para mudar os modelos mentais), à construção de objetos específicos para modelagem, e ainda poder criar novas atividades. Embora o foco de nossa investigação esteja centrado na modelização do

[24] Os autores reconhecem dois tipos diferentes de conhecimento: o conhecimento como construções intelectuais compartilhadas que permitem o trabalho cooperativo, comunicação e controle mútuo; e o conhecimento como construções intelectuais pessoais, sendo este último considerado como um "organismo vivo" que se desenvolve a partir da interação com um ambiente e que evolui em situações eficazes de resolução de problemas. Para distinguir, chama o primeiro de "conhecimento" (*knowledge*) e o segundo de "saber" (*knowing*).

conhecimento para um micromundo, os aspectos epistemológicos e didáticos subjacentes da concepção e uso desse tipo de ambiente ampliam a nossa visão sobre a complexidade que envolve a criação de objetos matemáticos por meio de aprendizagem.

1.2.3 Modelização de domínios do conhecimento

No âmbito das ciências da computação, em particular a área de Inteligência Artificial, a modelização (ou representação e organização) de domínios de conhecimentos tem se apoiado na Ontologia[25]. Uma das definições de ontologia está relacionada à especificação explícita de uma conceitualização, isto é, do significado de conceitos e suas relações, dado o contexto do domínio (GRUBER, 1993, p. 199). Dentre as contribuições na utilização da ontologia nessa área estão a apropriação sobre um domínio e a possibilidade de compartilhamento e o reuso do conhecimento.

Do ponto de vista da Didática da Matemática, tanto o conhecimento como a atividade matemática são construções sociais realizadas nas instituições e o estudo das condições de produção e disseminação desse conhecimento requer a sua descrição e análise obtidas através de um modelo epistemológico. Bosch (2001) explica que

> Os componentes do modelo, que constituem, por assim, dizer, a "anatomia" da atividade matemática, devem corresponder aos componentes do "conhecimento matemático" entendido como uma organização teórica que emerge da atividade matemática ao mesmo tempo que a implementa. Ao mesmo tempo, a descrição anterior deve ser articulada com um modelo da "fisiologia" da atividade, ou seja, com as condições sob as quais ela é realizada e evolui, seja para criar novo saber matemático (pesquisa pura ou aplicada) ou para reconstruir esse saber, o que constitui a própria atividade didática. (BOSCH, 2001, p. 16, tradução nossa)[26]

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) descreve a atividade matemática e o saber que emerge dela através de organizações matemáticas ou praxeologias, que são entidades compostas por: tipos de tarefas (ou tarefas problemáticas), tipos de técnicas que permitem resolver os problemas de algum tipo, tecnologias (ou *logos*) que descrevem e explicam as técnicas e uma teoria que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos.

---

[25] O campo de estudo da Ontologia tem origem na Filosofia com questões voltadas à existência dos seres.

[26] Texto original: "Las componentes del modelo, que conforman, por así decirlo, la "anatomía" de la actividad matemática, deben corresponderse con las componentes del "saber matemático" entendido como organización teórica que emerge de la actividad matemática a la vez que la instrumenta. Al mismo tiempo, la descripción anterior debe articularse con un modelo de la "fisiología" de la actividad, esto es, con las condiciones bajo las cuales se realiza y evoluciona, ya sea para crear nuevo saber matemático (la investigación pura o aplicada) o para reconstruir dicho saber, lo que constituye la actividad didáctica propiamente dicha."

Os tipos de tarefas e tipos de técnicas constituem o "saber fazer" matemático, enquanto os discursos tecnológicos e teóricos constituem o próprio "saber" matemático. Nesse modelo epistemológico, "fazer matemática" consiste em ativar uma organização matemática, isto é, resolver certos problemas/tarefas com técnicas específicas e de forma justificada por meio do "saber", que pode levar à construção de novas organizações ou à reprodução de organização já construídas.

Bosch (2001) ressalta que na TAD não se discute sobre a "compreensão de um conceito", pois a unidade elementar de análise da atividade matemática não é o conceito, mas sim a organização matemática ou praxeologia. Nesse caso, o estudo da compreensão de um conceito em uma dada instituição requer a explicitação das atividades, isto é, das praxeologias que vão dar sentido aos dados conceitos.

Quanto à pluralidade de registros e a articulação entre eles, Bosch (2001, p. 19) esclarece que a especificidade da conceituação proposta pela TAD situa-se, por um lado, na indiferenciação entre os registros do ponto de vista de sua função no trabalho matemático, e por outro lado, na importância atribuída ao valor instrumental que se atribui aos "objetos de representação" (chamados de objetos ostensivos) ao lado de seu valor semiótico (signo). Portanto, os conceitos aparecem ao se trabalhar com os objetos ostensivos nas tarefas matemáticas com seu entorno tecnológico-teórico, em que a manipulação destes objetos é controlada pela ativação ou evocação de objetos não ostensivos cujas características podem ser modificadas ao longo da atividade.

É importante destacar que a manipulação dos ostensivos inclui também a sua ativação por meio do computador, tanto através da escrita quanto através dos gráficos e dos gestos, possibilitando também a criação de novos tipos de ostensivos e de articulação entre os diferentes registros.

Considerando essa abordagem da TAD, Hamid Chaachoua e equipe desenvolvem pesquisas na área de ambientes computacionais de aprendizagem tendo como questão central a modelagem do conhecimento. Nesse contexto, ele desenvolveu a estrutura T4TEL (CHAACHOUA, 2010) como uma formalização e extensão da abordagem praxeológica, referindo-se ao quarteto praxeológico (tipo de tarefas, técnica, tecnologia e teoria) e à aprendizagem aprimorada por tecnologia[27].

Segundo o autor, no T4TEL as praxeologias foram representadas segundo o modelo ontológico e as suas aplicações permitiram desenvolver ferramentas didáticas, como a produção

[27] Do francês: Technology Enhanced Learning (TEL).

de perfis de alunos e de testes diagnósticos, além de outras pesquisas que estão sendo desenvolvidas em torno de serviços de diagnóstico e feedback, indexação de recursos e inclusive em outras áreas fora da computação. (CHAACHOUA, 2020).

Com essa adaptação do modelo praxeológico para a questão da modelização do conhecimento para ambientes computacionais de aprendizagem é que pretendemos modelizar o conhecimento, em particular o Teorema Fundamental do Cálculo, para ambientes do tipo micromundo, integrando os elementos da TAD à ontologia utilizada no T4TEL, em um percurso teórico-metodológico fornecido pela EDI[28].

1.3 A PROBLEMÁTICA DA TESE

Com base na teorização que desenvolvemos, assumimos como hipótese que:

A análise das praxeologias permitem modelizar o domínio do conhecimento para a concepção de micromundos e essa modelização ativa a representação e mobilização de novos objetos digitais.

> Com a modelização do saber matemático em termos de praxeologias, a análise dos processos de transposição didática adquire uma nova funcionalidade. Dos saberes sábios "oficiais" encontrados em tratados matemáticos ou mais informais "ativados" pelos investigadores no seu trabalho diário, aos conteúdos explicitamente ensinados em sala de aula ou aos saberes, menos explícitos, apreendidos e, portanto, disponibilizados a um grupo de estudantes, todos as etapas do processo de transposição podem ser descritas em termos de praxeologias. Essa ferramenta torna-se especialmente útil para esclarecer os modelos epistemológicos de referência que norteiam a análise dos pesquisadores (...). (BOSCH e GASCÓN, 2006, p. 10, tradução nossa)[29]

As mudanças no ensino do Cálculo, nas últimas décadas, se relacionam ao advento da tecnologia, que possibilitou o uso de calculadoras gráficas e softwares educativos, trazendo maior ênfase no desenvolvimento dos conceitos e na resolução de problemas. A disponibilidade desses instrumentos trouxe à realidade o papel das técnicas, que antes parecia bem estabilizado quando havia apenas papel e lápis.

---

[28] Nos capítulos posteriores nos aprofundaremos na discussão dessas abordagens.

[29] Texto original: “Con la modelización del saber matemático en términos de praxeologías, el análisis de los procesos de transposición didáctica adquiere una nueva funcionalidad. Desde el saber sabio “oficial” que se encuentra en los tratados matemáticos o aquel más informal “activado” por los investigadores en su trabajo diario, hasta los contenidos explícitamente enseñados en el aula o el saber, menos explícito, aprendido por, y por tanto disponible para, un grupo de estudiantes, todas las etapas del proceso transpositivo se pueden describir en términos de praxeologías. Esta herramienta llega a ser especialmente útil para clarificar los modelos epistemológicos de referencia que guían el análisis de los investigadores (...).”

Com a noção de praxeologia, compreendemos que esses instrumentos possibilitam interpretar fenômenos por meio de técnicas que podem ser desenvolvidas pelos alunos, constituindo uma ponte entre as tarefas e as teorias. Não podemos deixar de enfatizar a importância do papel do professor como sendo o responsável em organizar a situação de aprendizagem, mas queremos nos concentrar nas transformações do saber em suas representações computacionais.

O Teorema Fundamental do Cálculo traz implícita a relação inversa entre dois conceitos que são muito utilizados no ensino e aprendizagem do Cálculo, a Derivada e a Integral. A maneira como eles são abordados no ensino provém das relações que os professores mantêm com suas instituições de origem, ou ainda, o objeto do saber existe se houver uma relação com esse objeto, isto é, se um sujeito ou uma instituição o reconhece como um objeto (BOSCH e CHEVALLARD, 1999).

Essa noção de relação refere-se às práticas sociais que são realizadas na instituição em torno do objeto do saber, descritas por meio de praxeologias. A questão da natureza dos objetos refere-se, portanto, aos tipos de tarefas e técnicas que compõem as praxeologias institucionais nas quais o objeto está envolvido e aos elementos tecnológicos e teóricos que vão descrever e justificar essas práticas. É nesse sentido que a abordagem antropológica vai modelar o conhecimento matemático, em termos de objetos e inter-relações entre os objetos (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 8).

Considerando que a organização matemática a ser ensinada é um modelo praxeológico do currículo matemático obtido de programas e livros didáticos (BOSCH e GASCON, 2004), em nossa pesquisa constituímos um modelo praxeológico a partir de livros de Cálculo utilizados nas instituições de ensino superior para analisar e descrever o Teorema Fundamental do Cálculo. Também levamos em conta os objetos, materiais ou não, que dão suporte à atividade matemática, ou seja, os objetos ostensivos e não ostensivos emergentes nessa organização.

Na matemática lidamos com diferentes registros de representação e cada um é instrumentalizado por objetos ostensivos, simbolismos matemáticos em particular, que são essencialmente escritos. Por exemplo, a expressão $\int_0^1 f(x)\,dx$ pode parecer estranha ao falar "soma de zero a um de efe de xis de xis", portanto essa inter-relação não pode ser reduzida apenas à leitura e escrita no trabalho matemático, pois está em jogo um sistema de objetos ostensivos. Bosch e Chevallard (1999) ressaltam a manipulação do sinal de igualdade no trabalho algébrico, descrita pelo antropólogo Jack Goody, da seguinte forma:

> É a existência de um sistema de notação muito distante da fala que torna o pensamento e as operações matemáticas possíveis. [...] A fórmula tem uma capacidade particular que nos permite realizar o raciocínio matemático: ela preserva o equilíbrio ou a igualdade entre os dois lados sobre os quais se realiza as mesmas operações (subtração de 2x ou divisão por n –1, por exemplo). Não há como fazer isso sem visualizar a operação. Só a fala é incapaz disso, a escrita, sim. A sua dimensão espacial e visual permite o desenvolvimento deste tipo de manipulação. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 18)[30]

O que os autores querem dizer é que as organizações praxeológicas se materializam em sistemas de objetos ostensivos, geralmente pertencentes a vários registros. Um objeto ostensivo é considerado como um possível instrumento da atividade matemática que permite adaptar técnicas para realizar determinadas tarefas. Essa instrumentalidade depende da quantidade de técnicas nas quais o objeto ostensivo pode intervir. Por exemplo, o diferencial *dx* permite uma certa quantidade de técnicas no Cálculo Diferencial e Integral (derivadas, cálculo de áreas ou volumes, mudança de variável, etc.), mas pode ser pouco utilizado na Física.

Essa ostensividade dos objetos tem a capacidade de evocar objetos complexos e variados de objetos ostensivos e não ostensivos que se inter-relacionam. E o envolvimento deles em atividades matemáticas utilizando o computador pode ativar outros objetos ostensivos associados. Pois, como explicam Bosch e Chevallard (1999), o que evoca os objetos ostensivos é todo o conjunto de praxeologias institucionais nas quais eles participam como instrumentos.

> "A pesquisa em Ambiente Computacional para a Aprendizagem Humana (EIAH) geralmente leva à representação computacional de objetos a serem ensinados e a fornecer-lhes ferramentas de cálculo para produzir diagnósticos, feedback para o aluno ou professor..."[31] (CHAACHOUA, FERRATON e DESMOULINS, 2014).

Em nosso trabalho, com a análise das praxeologias a partir dos livros didáticos, buscamos uma modelização do Teorema Fundamental do Cálculo considerando os objetos ostensivos e não ostensivos como um conjunto de variáveis que permitem desenvolver técnicas para os tipos de tarefas ou problemas que o micromundo pode ajudar a resolver.

Em suma, o objetivo geral está centrado em: realizar uma modelização do Teorema Fundamental do Cálculo para constituir a caracterização de um micromundo.

---

[30] Texto original : "C'est l'existence d'un système de notation très éloigné de la parole qui rend possible la pensée et les opérations mathématiques. [...] La formule a une capacité particulière qui nous permet de mener à bien les raisonnements mathématiques : elle conserve l'équilibre ou l'égalité entre les deux côtés sur lesquels on effectue les mêmes opérations (soustraction de 2x ou division par n–1, par exemple). Il n'y a aucun moyen de le faire sans visualiser l'opération. La parole seule en est incapable, l'écriture le peut. Sa dimension spatiale et visuelle permet le développement de ce genre de manipulation."

[31] Texto original: "Les recherches en Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain (EIAH) amènent souvent à représenter informatiquement des objets à enseigner et à les doter d'outils de calcul afin de produire des diagnostics, des rétroactions vers l'élève ou l'enseignant…"

Precisamos enfatizar que o foco de nossa tese diz respeito à concepção de suporte informático à atividade matemática no ambiente computacional, sendo o micromundo uma proposta de suporte. Assim, escolhemos a Engenharia Didático-Informática (EDI) como aporte metodológico, pois integra os princípios da Engenharia de Software e da Engenharia Didática considerando os processos de transposição didática e informática do conhecimento matemático envolvido na pesquisa.

A partir dessa fundamentação, o desenvolvimento da tese está alinhado com os seguintes objetivos específicos:

- Realizar a análise praxeológica de livros de Cálculo Diferencial e Integral em relação ao Teorema Fundamental do Cálculo;
- Analisar as dimensões da Engenharia Didático-Informática com base na revisão de literatura;
- Descrever os requisitos de software relativos ao Teorema Fundamental do Cálculo;
- Implementar um modelo praxeológico de referência com base na abordagem T4TEL;
- Realizar a descrição de micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo.

O percurso metodológico foi delineado utilizando o modelo de processo de desenvolvimento de software educativo proposto por Tibúrcio (2016; 2020), em que relacionamos e descrevemos as etapas da investigação com os procedimentos desse modelo e com a análise das dimensões da EDI.

Dado que os elementos teóricos e metodológicos dão sentido significativo em nossa pesquisa, trazemos, no Capítulo 2, a fundamentação teórico-metodológica constituída pela Engenharia Didático-Informática, a Teoria Antropológica do Didático e a abordagem T4TEL e, no Capítulo 3, o percurso metodológico. A dinâmica operacional do que foi realizado é apresentada no Capítulo 4, tomando como base as dimensões da EDI, as praxeologias encontradas nos livros didáticos e o modelo praxeológico de referência. E, finalmente, apresentamos as considerações finais no Capítulo 5, fundamentadas nas análises realizadas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

> Uma engenharia pressupõe a implementação de métodos e técnicas com base no "saber". Devemos, portanto, estar interessados no trio problema-teoria-método: considerando um problema específico, quais são as teorias (possivelmente concorrentes) nas quais basear (ou cujos resultados são relevantes para basear) os métodos e, possivelmente, as ferramentas? Trata-se, portanto, de estudar a obra em sua relação com as teorias (com o saber), ou seja, com o "meios" disponíveis para fundamentar e supervisionar o processo de concepção. (TCHOUNIKINE, 2002, p. 17, tradução nossa)[32]

Objetivos do capítulo: Apresentar conceitos teórico-metodológicos que fundamentam a escolha da pesquisa sobre softwares educativos.

[32] Texto original: " Une ingénierie suppose la mise en place de méthodes et de techniques sur la base de « savoirs ». Il faut donc s'intéresser au triplet problématique – théorie – méthode : considérant une problématique précise, quelles sont les théories (éventuellement concurrentes) sur lesquelles fonder (ou dont les résultats sont pertinents pour fonder) les méthodes et, éventuellement, les outils ? Il s'agit donc d'étudier les travaux dans leur rapport aux théories (aux savoirs), c'est-à-dire aux « moyens » dont on dispose pour fonder et encadrer le processus de conception."

INTRODUÇÃO 1

O trabalho de pesquisa em ambiente computacional de aprendizagem envolve tanto aspectos relativos ao uso quanto ao desenvolvimento, necessitando de uma metodologia que leve em conta os fundamentos teóricos da Didática e da Informática.

No campo da Didática da Matemática, a metodologia da Engenharia Didática (ED) (ARTIGUE, 1996) surgiu para desenvolver métodos de estudo adaptados ao seu próprio domínio e possui como características a concepção, implementação, observação e análise de sequências de ensino.

Artigue explica que, na década de 1980, dentro da comunidade didática francesa, a Engenharia Didática era tida como a metodologia de pesquisa mais utilizada, e que, a partir da década seguinte, outras metodologias foram disseminadas, como por exemplo os estudos das praxeologias institucionais motivados pelo surgimento da TAD (ARTIGUE, 2020, p. 35). Além da TAD, como Artigue mostra, a Engenharia Didática tem participado, desde então, de várias praxeologias de pesquisa "que ela instrumentaliza e que por sua vez a influenciam." (ARTIGUE, 2020, p. 30, tradução nossa)[33].

Na área de desenvolvimento de softwares educativos, a pesquisa de Tibúrcio (2016) evidenciou as potencialidades e também limitações nos processos de desenvolvimento para atender as necessidades do ensino e da aprendizagem de um determinado saber utilizando esses ambientes (TIBÚRCIO, 2016). E encontrou na Engenharia Didática elementos de caráter teórico e experimental que contemplavam essas limitações.

Ele partiu da hipótese que a "construção de situações de ensino poderia ser útil para levantar os requisitos e orientar na produção dos recursos tecnológicos a serem desenvolvidos." (TIBÚRCIO, 2020, p. 33). Em nossa pesquisa também pressupomos, no âmbito da TAD, que a análise das praxeologias matemáticas permitem esse alcance vislumbrado por Tibúrcio e essa foi a principal motivação para a nossa escolha metodológica.

Ao mesmo tempo, o autor revela que as limitações da Engenharia Didática não conseguem abranger todos os aspectos referentes ao desenvolvimento dos softwares educativos, como foi observado em outros estudos:

> A escolha da ED para auxiliar nosso trabalho de concepção e desenvolvimento tem também seus limites. Os elementos da ED como instrumento metodológico não são necessariamente todos pertinentes, como não são suficientes para resolver todas as

[33] Texto original : "Je montrerai aussi que cette méthodologie est en fait un objet pris dans une dynamique, celle des praxéologies de recherche qu'elle instrumente et qui l'influencent en retour."

> questões relativas levantadas pela criação *software* educativos para matemática. Entretanto, ela auxiliou efetivamente nosso trabalho sistematizando questionamentos importantes para essa criação. (BELLEMAIN, RAMOS e TIBÚRCIO, 2015, p. 6).

Essas constatações levaram à criação da Engenharia Didático-Informática (EDI), buscando integrar as contribuições da Engenharia Didática aos processos e princípios da Engenharia de Software "para fundamentar um modelo que atenda tanto às necessidades do ensino e da aprendizagem da área a ser abordada pelo software, como as exigências das metodologias de sua concepção e desenvolvimento." (SILVA, 2016, p. 25).

Na sessão seguinte explicaremos melhor os fundamentos que culminaram na EDI.

2.1 A ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA (EDI)

A Engenharia Didática, em sua versão clássica (ARTIGUE, 1996), é constituída por quatro fases:

- Análise preliminar – esta fase inclui três dimensões: análise epistemológica do conteúdo matemático, análise das condições e restrições institucionais e análise da pesquisa didática para apoiar a concepção;
- Concepção e Análise a priori – o objetivo é construir um referencial para contrastar com a análise a posteriori a partir de variáveis gerais ou específicas do conteúdo ensinado. É nessa fase que se elaboram as sequências didáticas;
- Experimentação – nessa fase a sequência didática é o esquema experimental da pesquisa, podendo envolver recursos previstos na fase de análise a priori;
- Análise a posteriori e Validação – se apoia no conjunto de dados coletados com a experimentação, onde se confrontam a análise a priori e análise a posteriori, validando ou não a hipótese da pesquisa.

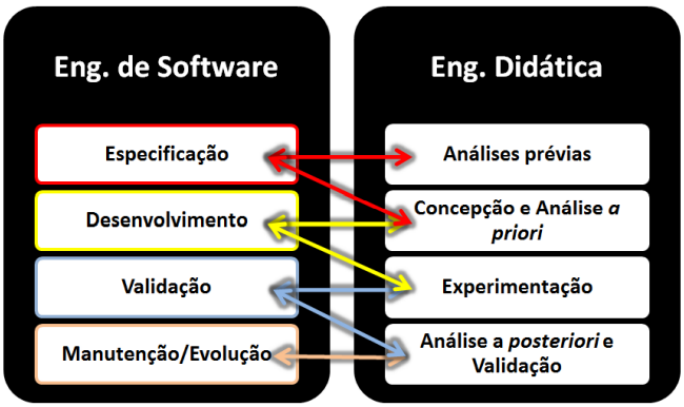
Artigue enfatiza a importância de identificar, na análise preliminar, as dimensões envolvidas no trabalho de investigação: a dimensão epistemológica, que é associada às características do saber considerado; a dimensão cognitiva, relativa às características cognitivas do público ao qual o ensino se dirige; e a dimensão didática, ligada às características do

funcionamento do sistema de ensino (ARTIGUE, 1995, p. 40). Essa classificação, como ela explica, é paralela à proposta de Guy Brousseau para o estudo dos obstáculos[34].

Em seu artigo *La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*[35], Artigue (1995) evidencia as dificuldades dos alunos em compreender conceitos de Cálculo, como derivadas e integrais, embora sejam ensinados a resolver "mecanicamente" alguns problemas triviais. Essa evidência levou, de um lado, ao desenvolvimento de pesquisas didáticas nesse campo, e por outro lado, motivou inúmeros projetos de inovação educacional com a renovação de currículos ou experimentações, muitas vezes envolvendo tecnologias como calculadoras e computadores. (ARTIGUE, 1995, p. 98-99).

Essas experiências nos levam a concordar que as pesquisas associadas ao uso ou desenvolvimento de ambientes computacionais de aprendizagem devem levar em conta essas dimensões, além dos aspectos relativos à dimensão informática. Nesse sentido, Tibúrcio (2016) buscou integrar essas dimensões para embasar a criação da Engenharia Didático-Informática. Nessa perspectiva, foi feita a articulação entre a Engenharia Didática e a Engenharia de Software com a integração de suas fases, como mostra a Figura 2:

Figura 2 - Comparativo entre engenharias



Fonte: Tibúrcio (2016).

[34] Resumidamente, Brousseau caracteriza o obstáculo não como uma dificuldade ou falta de conhecimento, mas como uma concepção e apresenta várias origens para os obstáculos identificados na Didática da Matemática, que podem ser: epistemológica, didática, ontogênica e cultural. Para esse estudo, o pesquisador propõe: identificar os possíveis erros e agrupá-los em torno de concepções; e buscar obstáculos na história da matemática e confrontá-los com os obstáculos da aprendizagem para constituir o caráter epistemológico. O leitor poderá se aprofundar na teoria consultando a obra: BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques. RDM, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

[35] Tradução: "O ensino dos princípios do cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos e didáticos".

Nessa junção, enquanto o desenvolvimento dos produtos é realizado com as etapas da Engenharia de Software, que servem de fundamentação metodológica, as etapas da Engenharia Didática vão proporcionando reflexões sobre o ensino e a aprendizagem.

O conjunto de procedimentos que são realizados durante o desenvolvimento é denominado “modelo de processo” ou “ciclo de vida” do software. Existem alguns modelos genéricos que são muito utilizados e a escolha depende do tipo de software e da abordagem escolhida pelo desenvolvedor. Na Engenharia Didático-Informática, o modelo de processo tem como base as atividades elementares apontadas pela Engenharia de Software, que são: a Especificação, voltada para a escolha da tipologia do software, os requisitos e suas características; o Desenvolvimento, que é etapa da produção do software; a Validação, em que se realizam os testes e as situações propostas; e a Manutenção/evolução, que é a etapa em que se verificam possíveis melhorias.

A respeito dos requisitos, a EDI utiliza a classificação empregada por Sommerville (2011), sendo os “requisitos do usuário” e os “requisitos do sistema”. Segundo Tibúrcio (2020, p. 56), “Os do usuário são declarações, em linguagem natural e também em diagramas, sobre as funções que o sistema deve fornecer e as restrições sob as quais deve operar; os requisitos do sistema, estabelecem detalhadamente as funções e as restrições de sistema.”. No conjunto de requisitos do usuário, interessamo-nos no contexto desta tese aos relacionados ao domínio (o saber em cada dimensão da EDI) e à atividade (praxeologias ou organizações didáticas e matemáticas).

Concordamos com Tibúrcio (2020) que é necessário atender as especificidades dos softwares educativos considerando as relações de ensino e aprendizagem, diferentemente dos demais tipos de softwares. Sendo assim, essas atividades da Engenharia de Software devem não somente apontar um quadro teórico de referência, mas também usá-lo para fundamentar o processo de concepção do software. (TCHOUNIKINE, 2002, p. 24).

Em relação à Engenharia Didático-Informática, ela está

> ancorada em aportes teóricos sobre o ensino e a aprendizagem, bem como aportes sobre auxílios e benefícios do uso das tecnologias para ensinar e aprender, possibilita a concepção (no sentido de ideias), desenvolvimento (no sentido da criação) e avaliação (no sentido de análise) de software classificados como micromundos. (TIBÚRCIO, 2020, p. 64).

Tibúrcio explica ainda que esse alicerce da EDI fornece as condições para que os micromundos, além de outras tipologias, sejam desenvolvidos dentro do paradigma Construtivista.

Para situar o lugar da EDI dentro deste trabalho, diremos que está voltada para a concepção de micromundos que abordam o Teorema Fundamental do Cálculo, mas no sentido de antecipar algumas situações didáticas e situações de uso através da modelização do conhecimento e da análise das dimensões. Concordamos com Tibúrcio (2020, p. 75) que a análise teórica permite compreender as necessidades e demandas do ensino e aprendizagem e identificar os requisitos iniciais aos quais o software poderá auxiliar. Essa análise prevê também as situações que serão criadas, levando em conta os distintos contextos e usuários, e que serão testadas na experimentação com o software.

Tanto a análise teórica quanto a experimental são consideradas no modelo de processo desenvolvido por Tibúrcio (2016; 2020), como podemos ver na Figura 3:

Figura 3 - Processo de desenvolvimento de software educativo

Fonte: Tibúrcio (2016).

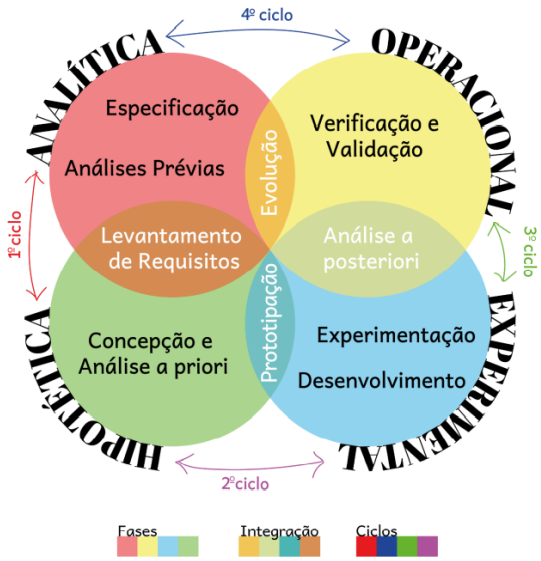
Nessa versão, as etapas não precisam seguir uma sequência rígida e podem ser revisitadas, na medida que os questionamentos e observações em cada fase vão se relacionando com as análises das dimensões. Nós fizemos uma adaptação desse modelo de processo para desenvolver o percurso metodológico de nossa investigação, no qual apresentaremos com detalhes no Capítulo 3.

De forma resumida, a descrição dos procedimentos é dada por:

- Delimitação do campo – em que ocorre a definição dos saberes matemáticos ao serem abordados com o software, a escolha da equipe pluridisciplinar e as respectivas contribuições para a concepção e desenvolvimento do software.
- Análises preliminares – faz-se o levantamento de pesquisas em Educação Matemática sobre o saber considerado, com base nas dimensões epistemológica, didática, cognitiva e didática. As análises conduzirão ao fornecimento dos primeiros requisitos.
- Análise de requisitos – acontece o levantamento dos requisitos do software com base no apanhado teórico realizado.
- Prototipação e Análise a priori – são concebidas as situações de uso, os problemas que podem surgir, as previsões de respostas dos usuários e o desenvolvimento do protótipo.
- Fase experimental – ocorre a testagem do protótipo para verificar possíveis falhas e melhorias.
- Análise a posteriori e Validação – confronto entre o estudo teórico e a experimentação. Validar significa verificar a eficácia do software, considerando o que foi levantado nas fases anteriores, e se contribui para o ensino e a aprendizagem.

No modelo mais atual, Tibúrcio (2020) o compôs em quatro ciclos formados pela integração das fases. Os ciclos são: analítico-hipotético, hipotético-experimental, experimental-operacional e operacional-analítico (Figura 4).

Figura 4 - Modelo de Processo de Software – Engenharia Didático-Informática



Fonte: Tibúrcio (2020).

Para a condução do processo, Tibúrcio (2020) sugere que sejam feitos questionamentos relativos aos procedimentos em algumas fases. Para ilustrar, adaptamos o modelo de processo para integrar esses questionamentos nas fases de Especificação, Análises Prévias e Levantamento de Requisitos:

Quadro 1 - Modelo de processo de software adaptado da EDI

ETAPAS	DIMENSÕES			
	COGNITIVA	DIDÁTICA	EPISTEMOLÓGICA	INFORMÁTICA
ESPECIFICAÇÃO	- Quais são os problemas percebidos que o software poderá se apresentar como solução? - Quais saberes matemáticos se pretende abordar na utilização do software? - Considerando as relações entre os saberes delimitados, quais conceitos e definições devem estar presentes? - Qual será o diferencial da utilização desse software comparado a um ambiente papel e lápis?			
ANÁLISES PRÉVIAS	- Existem indicações na literatura de como o estudante aprende? - Quais dificuldades de aprendizado são identificadas? - Quais etapas são elencadas para a construção do conhecimento?	- Qual é o estado atual do ensino do saber visado? - Quais são as consequências desse ensino? - Quais são as dificuldades em ensinar esse saber?	- Quais intervenções são realizadas para adaptar o saber matemático ao saber a ser ensinado? - Quais são os aspectos do saber que podem dificultar e/ou facilitar a aprendizagem?	- Quais são as contribuições tecnológicas que o software deve conter para auxiliar na compreensão e ensino dos saberes? - Em que aspectos as tecnologias digitais influenciam no currículo e nas mudanças das práticas docente e discente?
LEVANTAMENTO DE REQUISITOS	Documentar os requisitos considerando as dimensões e respondendo: - Como o ensino e a aprendizagem podem ser favorecidos? - Como a compreensão dos saberes é auxiliada com o uso do software? Quais recursos e situações o software propõe para ajudar o usuário a compreender os saberes? - Quais funcionalidades existem em produtos da área? Quais são os possíveis diferenciais do software que se pretende desenvolver? O que o software trará de novo referente ao que já existe?			

Fonte: A autora (2020).

As respostas a esses questionamentos darão embasamento para as fases seguintes. Na Validação, outras questões, que não apresentamos no quadro, também são sugeridas para verificar as teorias e as situações de uso no atendimento quanto aos objetivos esperados e as contribuições no ensino e aprendizagem.

A pesquisa de Silva (2016) foi desenvolvida em paralelo com a pesquisa de Tibúrcio (2016) e teve como objetivo prototipar e validar um software para abordar a taxa de variação de funções, utilizando o modelo de processo da EDI. Uma de suas conclusões foi a importância atribuída aos “recursos que constituíram o protótipo”, oriundos das necessidades levantadas nas

Análises Prévias que foram traduzidas em requisitos. Portanto, podemos inferir que as dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática contribuem, de fato, para compreender os processos de ensino e aprendizagem envolvendo o ambiente computacional e elicitar os primeiros requisitos para a concepção de softwares educativos.

Com esses fundamentos da EDI e a compreensão dos processos de transposição didática e informática, buscamos caracterizar um micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo. Isso convém uma vigilância epistemológica, como diria Chevallard (1991), que necessita contemplar a dimensão epistemológica e a dimensão didática no estudo desse sistema.

2.1.1 Questões epistemológica e didática

A escolha dos corpos de conhecimento a serem ensinados passa pela noosfera[36] formada pelos matemáticos, pelos representantes da sociedade que concebem e implementam os programas curriculares, os membros do sistema de ensino (inclusive o professor), além das condições e restrições institucionais a que se impõem. No entanto, Chevallard argumenta que

> Corpos de conhecimento, com poucas exceções, não são concebidos para serem ensinados, mas para serem *usados*. Ensinar um corpo de conhecimento é, portanto, uma tarefa altamente artificial. A transição do conhecimento considerado como uma ferramenta a ser posta em prática, para o conhecimento como algo a ser ensinado e aprendido, é o que eu tenho chamado de *transposição didática* do conhecimento. (CHEVALLARD, 2013, p. 9)

A problemática epistemológica que se coloca é de questionar de onde vêm os conteúdos do saber estudados em uma sala de aula e qual a origem desses conteúdos, saindo do contexto da sala de aula e considerando outras instituições onde vive o sistema didático considerado.

Em nosso trabalho, nos interessamos pelo nível superior de ensino e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real. Nessa disciplina, o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) tem uma dada relevância pelo estabelecimento da relação entre os processos de Integração e Derivação.

Nas instituições de ensino superior, assim como do ensino básico, o conhecimento é organizado a partir das escolhas da noosfera (governo, MEC[37], CAPES[38], programas curriculares, etc.). Esse conhecimento acadêmico "nada mais é do que o conhecimento

[36] "Essa interface, chamada *Noosfera* (do grego *voũς* "intelecto", "espírito" porque é o lugar onde, em princípio, "pensamos" sobre que conteúdo deve ser ensinado." (CHEVALLARD, 2018, p. 23).
[37] Ministério da Educação e Cultura.
[38] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

utilizado, tanto para a *produção* de novos conhecimentos como para a *organização* do conhecimento recém-produzido em um conjunto teórico coerente." (CHEVALLARD, 2013, p. 12). Portanto, o conhecimento ensinado nessas instituições sofreu transposições do saber produzido pelos matemáticos e vivem segundo as condições e restrições impostas pela noosfera.

Em relação ao TFC, o processo de Integração já era conhecido pelos matemáticos gregos da antiguidade, onde se calculavam áreas e volumes usando um processo de aproximação que ficou conhecido como *Método da exaustão*. Por outro lado, as ideias básicas do processo de Derivação já apareciam no século XIV e está ligado ao problema de se determinar a reta tangente a uma curva em um ponto. Agora, a natureza inversa dessas duas classes de problemas emergiu como central pois permitiu resolver qualquer problema relacionado à variação cumulativa de uma grandeza e à sua taxa de variação através da determinação da área sob a curva e da tangente à curva. No entanto, o que se observa é que essa abordagem não prevalece no ensino atual, em que os conceitos são ensinados geralmente de forma independente e de difícil compreensão por parte dos alunos[39].

A questão didática insere-se na relação existente entre professor, aluno e conhecimento, mas o que confronta essa questão é o "fato de que a maioria dos professores e pessoas da noosfera aparentemente evitam a questão do conhecimento" (CHEVALLARD, 2013, p. 6). Ele é dado, portanto, como certo, não deve ser questionado. Esse modelo epistemológico, que é dominante em determinadas instituições, organiza os corpos específicos de conhecimento a ser ensinado e afeta as condições para a sua aprendizagem (FLORENSA, BOSCH e GASCÓN, 2015). No entanto, como aponta Brousseau (2002)[40], é possível propor ações pedagógicas para melhorar os processos de ensino e aprendizagem a partir de formas específicas de organizar os conteúdos matemáticos e projetar atividades matemáticas para os alunos.

Tanto a questão epistemológica quanto a questão didática levam a concluir que o estudo da gênese e desenvolvimento do conhecimento não pode ser separado do estudo da difusão, uso e transposição do conhecimento (CHEVALLARD, 1991). Nesse aspecto, Guy Brosseau, com a noção de "situação", foi o primeiro a formular a existência de fenômenos didáticos na forma de modelos epistemológicos do conhecimento matemático.

Uma situação, em sua definição, "é o conjunto de circunstâncias em que uma pessoa se encontra e as relações que a unem ao seu ambiente. Tomar como objeto de estudo as

[39] Ver trabalho de SILVA, B. A. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo, v.13, n.3, p. 393-413, 2011.

[40] BROUSSEAU, G. Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques. Mathematics Education Library, vol. 19, versão em inglês editada e traduzida por Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland e Virginia Warfield, Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 1970-1990.

circunstâncias que presidem à difusão e à aquisição do conhecimento leva, portanto, ao interesse pelas situações." (BROUSSEAU, 1997, p. 2, tradução nossa)[41]. Ainda segundo o autor, não há como conhecer o conhecimento matemático sem que o tenha definido por uma situação. As situações didáticas, portanto, são as situações que servem para ensinar.

Assim surge o modelo epistemológico de referência[42], sendo um modelo geral de praxeologias estruturado em um conjunto articulado de modelos das diferentes áreas da atividade matemática, para descrever e analisar os conteúdos específicos que estão no cerne dos processos de ensino e aprendizagem, como descrevem Florensa, Bosh e Gascón (2015, p. 2637). Como ferramenta para modelar com mais detalhes as práticas matemáticas e o conhecimento matemático como seus componentes, a TAD fornece a noção de praxeologia matemática. Essa ferramenta torna-se especialmente útil para esclarecer os modelos epistemológicos de referência que norteiam a análise dos pesquisadores, permitindo-lhes apontar as estritas restrições que as "praxeologias a ensinar" causam nas práticas de professores e alunos. (BOSCH e GASCÓN, 2006, p. 59)

A modelização do conhecimento matemático em nossa tese parte do princípio de descrever e analisar conhecimentos relativos ao Teorema Fundamental do Cálculo com o objetivo de obter respostas para situações que podem ser criadas para a utilização de ambientes computacionais de aprendizagem, em particular dos micromundos. Ao mesmo tempo, sob o ponto de vista da concepção desses ambientes, embora não seja esta a nossa pretensão neste trabalho, precisamos antecipar as novas conceptualizações sugeridas ao aprendiz e específicas do novo meio produzido pelo ambiente informatizado a ser construído (TCHOUNIKINE, 2004).

[41] Texto original: "Une situation est l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu. Prendre comme objet d'études les circonstances qui président à la diffusion et à l'acquisition des connaissances conduit donc à s'intéresser aux situations. Les situations didactiques sont, dans la langue française, des situations qui servent à enseigner."

[42] Não iremos nos aprofundar aqui sobre o tema, mas iremos retomar essa discussão em outro capítulo. Para mais esclarecimentos, o leitor poderá consultar GASCÓN, J. Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos de emancipação da Didática e da história da Matemática. *In:* ALMOLOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (Orgs.). A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos. 1. ed. Curitiba: CRV, 2018. p. 51-76.

INTRODUÇÃO 2

> Que mecanismos de sujeição em posição *p* de uma pessoa *x* a uma instituição *I* conduz à formação, à modificação, ou à confirmação das relações pessoais de *x* num objeto *o*, *R (x; o)*? A resposta reside na atividade própria à *I*, ou melhor dizendo, nas atividades das quais os sujeitos de *I*, em posição *p*, participarão. Especificamente, essas atividades são reguladas por praxeologias que os sujeitos das instituições, nela atores, implementarão. (CHEVALLARD, 2018, p. 34)

Em nossa investigação, tomamos como pressuposto que a análise das praxeologias permite modelizar o domínio do conhecimento para a concepção de micromundos e essa modelização ativa a representação e mobilização de novos objetos digitais. Assim, nos colocamos a estudar o saber matemático e suas condições de criação e difusão em diferentes instituições sociais, considerando a integração de ferramentas computacionais no sistema didático.

Essa perspectiva foi apoiada na Teoria Antropológica do Didático (TAD), cuja origem se deu a partir da ampliação de duas abordagens: a transposição didática e a ecologia dos saberes. A primeira estuda o processo que permite que um saber passe de uma instituição de ensino para outra, enquanto a segunda refere-se ao meio de questionar a realidade sobre a existência e suas condições e restrições relativas a um objeto do saber (CHAACHOUA e BITTAR, 2019).

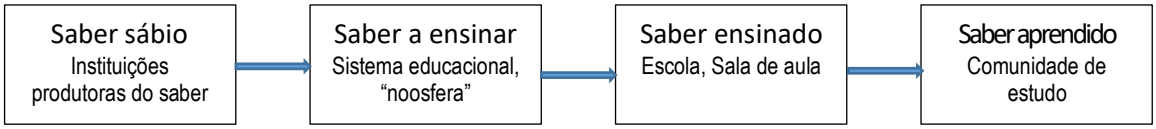
A abordagem antropológica no estudo da didática mostra que

> "não é possível interpretar a matemática ou a atividade matemática que se estuda na escola sem levar em consideração o estudo dos fenômenos relacionados aos processos de (re)construção da matemática que tem sua origem na instituição que produz os saberes matemáticos" (LUCAS, 2010, p. 20, tradução nossa)[43].

A transposição didática, nesse âmbito, distingue os diferentes tipos de saberes matemáticos: o "original" ou "sábio", produzido por matemáticos e outros pesquisadores; aquele "a ensinar" como consta nos programas oficiais e livros; o saber ensinado pelos professores; e o "aprendido", que está disponível aos alunos.

[43] Texto original: "(…) no es posible interpretar la matemática ni la actividad matemática que se estudia en la escuela sin tomar en consideración el estudio de fenómenos relacionados con los procesos de (re)construcción de las matemáticas que tienen el origen en la institución productora de los saberes matemáticos".

Figura 5 - Etapas no processo de transposição didática



Fonte: Adaptado de Lucas (2010, p. 22).

O que se evidencia é a distância entre o saber que foi designado como "a ensinar" e o que é efetivamente implementado nas aulas. Portanto, não é suficiente considerar apenas os aspectos cognitivos de aprendizagem, mas também analisar quais as noções matemáticas que os alunos devem aprender e questionar por que essa noção e não outra, como fazê-lo, enfim,

> Esta análise do "saber a ensinar" não pode ignorar a origem ou a "razão de ser" desta noção, porque foi inicialmente construída, em que área, contexto ou problema, e como ela participa do desenvolvimento do saber matemático, até chegar às possíveis funções da noção nas atividades (matemáticas ou não matemáticas) que ocorrem na sociedade e que, em certo sentido, são as que justificam e legitimam a sua escolha como "saber a ensinar". (BOSCH e GASCÓN, 2006, p. 6, tradução nossa)[44].

Essa investigação sobre as noções a serem ensinadas é ampliada quando se considera o estudo das condições e restrições impostas pelo processo de transposição didática. Daí surge a necessidade de um modelo epistemológico para descrever o saber matemático em qualquer uma das instituições, que é o modelo teórico básico para o pesquisador elaborado a partir dos dados empíricos das instituições consideradas nas etapas de transposição (como mostra a Figura 5): a comunidade matemática, o sistema educacional e a sala de aula.

Josep Gascón chama de "emancipação epistemológica" a postura do pesquisador de analisar criticamente os modelos epistemológicos da matemática dominante nas instituições e se libertar de visões acríticas desses modelos. E "emancipação institucional" é a necessidade de libertar-se das dependências que assujeitam a posição de professor, a de sujeito da noosfera e a de matemático, à ideologia dominante nas instituições que fazem parte de seu objeto de estudo. (GASCÓN, 2018, p. 51-52).

Nesse sentido, Chevallard defende a necessidade das ciências didáticas se libertarem dos assujeitamentos das disciplinas escolares, e assume que o objeto de estudo de qualquer disciplina científica não é dado de antemão, deve ser construído de forma autônoma pela comunidade científica envolvida. (CHEVALLARD, 1982, p. 4).

---

[44] Texto original: "Este análisis del "saber a enseñar" no puede entonces obviar el origen o la "razón de ser" de esta noción, por qué se construyó inicialmente, en qué ámbito, contexto o problemática, y cómo participa en el desarrollo del saber matemático, hasta llegar a las posibles funciones de la noción en las actividades (matemáticas o no-matemáticas) que tienen lugar en la sociedad y que, en cierto sentido, son las que justifican y legitiman su elección como "saber a enseñar"."

A respeito da didática da matemática, a teoria da transposição didática fez com que essa disciplina tivesse que assumir, de forma explícita, a análise dos modelos epistemológicos vigentes nas instituições.

> Qualquer pesquisa em didática que se propõe a estudar os fenômenos relacionados a um campo da matemática (por exemplo, álgebra elementar), e em uma determinada instituição didática, não deveria assumir como é o modelo explícito que prevalece na instituição, mas deveria leva-lo em conta como um objeto de estudo, ou seja, como parte dos fatos didáticos que constituem a base "empírica" da pesquisa. Para isso, o pesquisador precisa de um "ponto de vista" particular, isto é, um modelo alternativo do campo de atividade matemática ensinado que serve como um quadro de referência para interpretar o modelo dominante na instituição que está estudando. No entanto, qualquer modelo local utilizado para estudar um determinado campo de matemática ensinada tomará seu lugar em um modelo global da atividade matemática que permanecerá, dependendo do caso, mais ou menos explicado pelo pesquisador. (GASCÓN, 2018, p. 59).

Os modelos alternativos, que Gascón se refere, são construídos pelo pesquisador para a interpretação e/ou formulação dos fenômenos didáticos, de como são gerados e desenvolvidos os conhecimentos matemáticos envolvidos em tais fenômenos, e que devem ser avaliados e contrastados tanto com os dados históricos quanto os fatos didáticos. Além disso,

> O *modelo epistemológico dominante* de certo domínio do saber matemático ensinado (numa determinada instituição) condiciona fortemente não apenas o tipo de atividades matemáticas que são possíveis de realizar numa instituição em torno do campo matemático em questão, mas também as atividades didáticas correspondentes que são materializadas em um *modelo docente*. (GASCÓN, 2018, p. 60).

Percebe-se, portanto, que há uma relevância metodológica de explicitar os modelos epistemológicos alternativos como forma de questionar os modelos epistemológicos da matemática dominante e utilizá-los como sistema de referência para construir fenômenos didáticos[45], bem como formular e abordar os problemas didáticos relacionados a esses fenômenos.

Os modelos epistemológicos alternativos passaram a ser chamados de modelos epistemológicos de referência (MER). Com a ampliação do objeto de estudo das ciências didáticas em abarcar as praxeologias desenvolvidas nas instituições, o MER foi generalizado à noção de modelo praxeológico de referência (MPR). Assim poderiam se constituir distintas praxeologias sobre o mesmo conteúdo matemático.

[45] Gascón ressalta que, na didática da matemática, a noção de "fenômeno didático" não tinha um papel central e não era considerada como um objeto de estudo. Com o surgimento da Teoria das Situações Didáticas, Guy Brousseau evidenciou a didática matemática como a ciência que tem o propósito essencial do conhecimento de fenômenos didáticos, conceituando diversos fenômenos que antes eram desconhecidos, como por exemplo, "efeito Topázio" e "deslize cognitivo". (*ibid.*, p. 57-58)

A praxeologia é reconhecida pela TAD como "a unidade básica na qual se pode analisar a ação humana em geral". (CHEVALLARD, 2006, p. 3, tradução nossa)[46]. A teoria parte do pressuposto de que a atividade matemática deve ser interpretada como mais uma atividade humana e, consequentemente, propõe um modelo geral de atividades humanas que formula em termos de praxeologias, considerando uma dimensão prática (práxis) e uma dimensão teórica (logos).

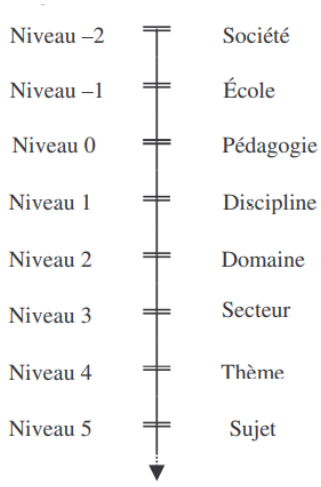
Com a modelização matemática em termos de praxeologias, a análise dos processos de transposição didática adquire uma nova funcionalidade. Bosch e Gascón (2006) explicam que "essa ferramenta se torna especialmente útil para esclarecer os modelos epistemológicos de referência que norteiam a análise dos pesquisadores, permitindo-lhes apontar as estritas restrições que as "praxeologias a ensinar" causam nas práticas de professores e alunos." (BOSCH e GASCÓN, 2006, p. 10, tradução nossa)[47].

Assim como o saber pode ser descrito em termos de praxeologias, a atividade matemática apresenta-se sob dois aspectos: o processo de construção de novos conhecimentos, também chamado processo de estudo ou didático; e o resultado dessa construção. Assim, temos, respectivamente, as praxeologias ou Organizações Didáticas (OD) e as praxeologias ou Organizações Matemáticas (OM), que é o que vão definir o objeto de estudo da didática da matemática.

A Didática se preocupa com o estudo das condições e restrições sob as quais as praxeologias existem, mudam, migram, morrem, desaparecem, revivem, etc., dentro dos grupos humanos. Ou seja, as "condições e restrições" são regidas pelo estudo da ecologia institucional das praxeologias matemáticas e didáticas. (BOSCH e GASCON, 2004, p. 12). Quer dizer que quando o professor e os alunos se deparam com um saber a ser ensinado ou aprendido, pode acontecer um conjunto de condições e restrições que não se atém somente aquelas identificadas na sala de aula, como material didático disponível, conhecimento prévio dos alunos, etc. Para

[46] Texto original: "But what I shall call a praxeology is, in some way, the basic unit into which one can analyse human action at large."

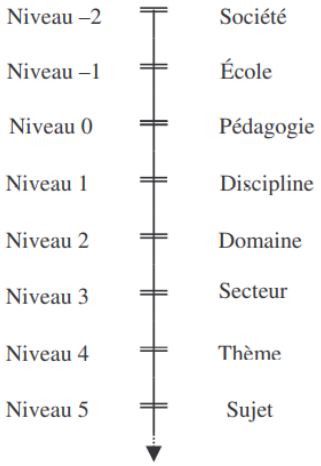
[47] Texto original: "Esta herramienta llega a ser especialmente útil para clarificar los modelos epistemológicos de referencia que guían el análisis de los investigadores, permitiéndoles señalar las restricciones estrictas que las "praxeologías a enseñar" provocan sobre las prácticas de profesores y estudiantes."

ajudar a identificar outros elementos desse conjunto, Chevallard (2002) propôs considerar uma escala de “níveis de codeterminação” (Figura 6 

).

Lucas (2010) explica que em cada um dos níveis dessa escala existem restrições mútuas particulares entre a organização matemática e a organização didática, tal que: a estruturação das OM em cada nível condiciona as formas possíveis de organização de seu estudo; e a natureza e as funções dos dispositivos didáticos existentes em cada nível determinam o tipo de OM que será possível reconstruir ou estudar na referida instituição (LUCAS, 2010, p. 34).

Figura 6 - Escala dos níveis de codeterminação



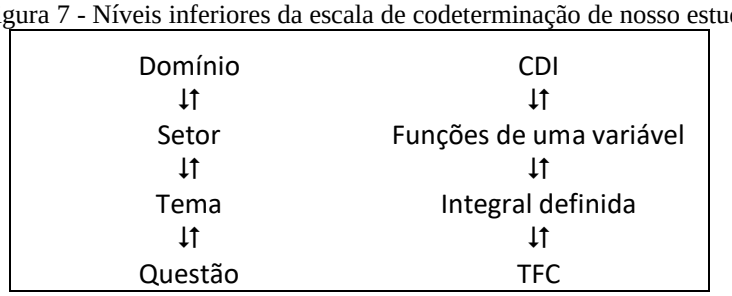
Fonte: Chevallard (2002, p. 50).

De acordo com a escala, dado um determinado tipo de tarefas tomado como objeto de estudo, se reunirmos um conjunto de tipos de tarefas a serem resolvidas por um conjunto de técnicas, que se justificam pela mesma tecnologia, obteremos um tema de estudo. Tendo um amálgama de vários temas de estudo, ligados por uma mesma teoria, definirá, portanto, um setor de estudo. Na sequência, definir-se-á domínios que irão se constituir em uma disciplina. Além da disciplina, o saber a ser ensinado recebe influências da noosfera sobre como fazê-lo.

Segundo Artaud (2019), os tipos de tarefas didáticas, que permitem o estudo do saber, têm dificuldade em existir por causa das condições e restrições relacionadas aos níveis mais elevados dessa escala, ou seja, da noosfera. Ao mesmo tempo, pode-se ter um discurso que mencione as coisas a serem aprendidas, mas com dificuldade no mesmo tipo de discurso sobre o que fazer para aprendê-los. (ARTAUD, 2019, p. 248-249).

O contexto de nosso estudo é relativo à matemática do ensino superior, em que os níveis inferiores da disciplina, na escala de codeterminação, estão representados na Figura 7.

Figura 7 - Níveis inferiores da escala de codeterminação de nosso estudo



Fonte: A autora (2021).

O domínio é o Cálculo Diferencial e Integral, cujo setor é o de Funções de uma única variável, onde escolhemos focar no Teorema Fundamental do Cálculo que é um assunto do tema Integral Definida. Para estudar esse assunto e as suas relações no sistema didático, situamos a nossa investigação no âmbito da Teoria Antropológica do Didático, pois esta fornece elementos para analisar e lançar luz sobre os efeitos restritivos dos processos de transposição. E com o objetivo de ter um modelo didático que possa ser implementado em um ambiente computacional, utilizamos os fundamentos do T4TEL, sendo uma formalização e uma extensão do modelo praxeológico (CHAACHOUA, 2020). Em seguida, apresentaremos os elementos primordiais dessas abordagens neste trabalho.

2.2 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

O surgimento da TAD se deu a partir da ruptura epistemológica no estudo do "didático", quando coloca que é necessário considerar as condições e restrições nos processos de transposição dos saberes.

Chevallard apresenta que

> "o *didático* é feito de qualquer "gesto", de qualquer ação que diante de uma *instância*, isto é, diante de uma *pessoa* ou uma *instituição*, ou mais precisamente, diante de uma certa *posição institucional*, parece ser susceptível de ajudar alguma instância para

> avançar perante uma outra instância em seu conhecimento relativo a algum objeto." (CHEVALLARD, 2018, p. 22).

Isso quer dizer que, a instância que Chevallard se refere, age por intermédio das pessoas que ocupam alguma posição institucional. Em sua "teoria das relações" ele vai designar uma instância para estabelecer a relação aos objetos, que discutiremos mais adiante.

O caráter antropológico está no cerne dessa ruptura e o ponto de partida é a Teoria da Transposição Didática, que vai questionar a origem dos conteúdos estudados, saindo do contexto da sala de aula e passando a considerar outras instituições, que constituem a noosfera.

No que tange a Didática da Matemática, o objeto primário de estudo não é o sujeito que aprende ou que ensina, é o saber matemático, assim como a atividade matemática que eles são levados a estudar. A noção de situação, no sentido de Brousseau, propõe ainda caracterizar os saberes matemáticos, portanto, eles só podem ser apreendidos através das atividades que permitem realizar e, consequentemente, dos problemas que permitem resolver (BROUSSEAU, 1997).

A nossa problemática se situa nessa modelagem do saber matemático evidenciando os meios que instrumentalizam a atividade matemática. Para isso, convidamos o leitor, inicialmente, a conhecer os elementos fundamentais do modelo geral que propõe a abordagem antropológica.

2.2.1 Termos primitivos da TAD

Chevallard apresenta algumas noções fundamentais, tal que a sua articulação permite pensar uniformemente em variados fenômenos didáticos.

A noção de "objeto" é a primeira a ocupar uma posição privilegiada: todas as coisas são objetos. Também são objetos as pessoas e qualquer entidade que seja material ou não. Chevallard explica que um objeto *O* existe a partir do momento em que uma pessoa *X* ou uma instituição *I* reconhece a sua existência.

> Mais precisamente, podemos dizer que o objecto O *existe para X* (respectivamente, *para I*) se existir um objecto, que denotarei por R(X, O) (resp. R_I(O)), a que chamarei *relação pessoal de X com O* (resp. *relação institucional de I com O*). Por outras palavras, o objecto O existe se existir ao menos para uma pessoa X ou para uma instituição I, isto é, se pelo menos uma pessoa ou uma instituição *tiver uma relação com esse objecto*. (CHEVALLARD, 1996, p. 127).

A noção de "relação" é essencial quando se analisa o sistema formado por objeto – pessoa – instituição. A relação pessoal de um indivíduo X com um objeto O é estabelecida,

portanto, com todas as interações que X pode ter com O, como usar, manipular, falar, etc. Ao mesmo tempo, os objetos se articulam com as instituições, como descreve Chevallard:

> A cada instituição I está associado um conjunto de objectos O_I, chamado conjunto dos objectos *institucionais* (para I), que é o conjunto de objectos O que I conhece, ou seja, para os quais existe uma relação institucional $R_I(O)$. Um objecto O é institucional para I ou, dito de outro modo, existe para I, quando I define uma relação (institucional) com O. (CHEVALLARD, 1996, p. 129).

Ou seja, a relação com o objeto vai existir se uma pessoa ou uma instituição o reconhecer como um objeto. Chevallard ainda vai falar da noção de "sujeito": X torna-se um sujeito de I "entrando em I". É válido destacar que todo sujeito aqui é considerado uma pessoa que, evidentemente, com o tempo, o sistema de relações pessoais evolui. Por exemplo, os objetos que não existiam para ele começam a existir, outros deixam de existir, ou seja, o relacionamento pessoal muda. Logo, o invariante nessa evolução é o indivíduo e o que muda é a pessoa.

> Quando um objeto *o* existe para uma pessoa *x*, dizemos ainda que *x* conhece *o*, a relação R(x, o) especifica *a maneira como x conhece o*. Em seguida, chamamos *universo cognitivo de x* o conjunto $U(x) = \{(o, R(x, o)) / R(x, o) \neq \emptyset\}$. Deve-se notar que o adjetivo *cognitivo* não é adotado aqui no seu atual sentido intelectual: tenho uma relação pessoal com a minha escova de dentes, a máquina de café na cafeteria, o pedal do freio do meu carro, etc., todos os objetos que fazem parte do meu universo *cognitivo*, da mesma forma que fazem parte dele, por exemplo, a noção de equação de segundo grau ou de derivada. (CHEVALLARD, 2003, p. 81-82, tradução nossa)[48].

O fato de X se tornar um sujeito de I introduz alterações cognitivas, que se justifica com a ocorrência da aprendizagem quando a relação R(X, O) se altera. Por outro lado, caso não haja alteração em R(X, O), pode-se dizer que X não aprendeu. Chevallard explica ainda que não há nada de didático aí, pois não está pressuposto que a instituição I tenha manifestado intenção de fazer com que as relações pessoais de X com determinados objetos se alterem "cognitivamente".

Antes de continuarmos com essa intencionalidade, daremos atenção à noção de "instituição", que é outro conceito fundamental da TAD, sendo considerada

> "um dispositivo social "total", que pode certamente não ser mais do que uma extensão muito reduzida no espaço social (existem "micro instituições"), mas que permite – e impõe – a seus *sujeitos*, ou seja, às pessoas *x* que passam a ocupar diferentes *posições*

[48] Texto original: "Lorsqu'un objet o existe pour une personne x, on dit encore que x connaît o, le rapport R(x, o) précisant la manière dont x connaît o. On appelle alors univers cognitif de x l'ensemble $U(x) = \{ (o, R(x, o)) / R(x, o) \neq \emptyset \}$. Il convient de souligner que l'adjectif cognitif n'est pas pris ici dans son acception intellectualiste courante: j'ai un rapport personnel à ma brosse à dents, à la machine à café de la cafétéria, à la pédale de frein de ma voiture, etc., tous objets qui font partie de mon univers cognitif, de la même manière qu'en font partie, par exemple, la notion d'équation du second degré ou celle de dérivée."

> *p* oferecidas em *I*, pondo em jogo *maneiras próprias de fazer e de pensar*." (CHEVALLARD, 2003, p. 82, tradução nossa)[49].

A partir dessa definição, podemos dizer que uma turma, com as posições de professor e alunos, é uma instituição, assim como a escola, a universidade, o sistema educacional, onde se ocupam outras posições. No contexto desta tese, os cursos do ensino superior que oferecem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral representam a instituição que habita os objetos de nossa investigação: o Teorema Fundamental do Cálculo e o micromundo.

Cada pessoa já é sempre dotada de um certo universo cognitivo U(x) e, ao entrar na instituição I ocupando uma determinada posição p, fica sujeito às relações institucionais, que remodelarão suas relações pessoais, ou seja, a relação pessoal de X a O, R(X,O), tenderá a se assemelhar à relação institucional $R_I(p, O)$. Assim, podemos concluir que as nossas relações pessoais são fruto da história das nossas sujeições institucionais passadas e presentes, assim como as instituições não podem existir sem os sujeitos.

Essa dialética é explicada por Chevallard envolvendo instituições, objetos e pessoas. Na medida em que essa relação é estabelecida através da manifestação de uma "intenção didática", Chevallard vai caracterizar a estrutura base de um sistema didático. "Um sistema didático (SD) comporta um ou vários sujeitos de I, que nele ocupam uma *posição de aluno* a, e finalmente um objecto O, pertencente a $P_I(a)$, que é o conjunto dos investimentos didácticos para I." (CHEVALLARD, 1996, p. 133).

De um modo geral, existe uma relação didática onde se supõe que os envolvidos têm problemas a resolver. O saber é, então, colocado em jogo e deve ser reconstruído pelo aluno. Para que isso ocorra, Chevallard explica que é necessário que se estabeleça um contrato didático[50] e um dos protagonistas (o professor) deve ter a intenção de ensinar o outro (o aluno), e de ensinar-lhe "alguma coisa", como por exemplo, matemática.

Acrescentamos ainda, nessa relação, a integração de um objeto técnico em particular, o micromundo. Para esse estabelecimento, as condições que caracterizam a relação didática em relação ao objeto do saber se mantém as mesmas, desde que seja dado um status epistemológico e didático compatível com o funcionamento do sistema didático.

---

[49] Texto original : "Une institution I est un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet – et impose – à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans I, la mise en jeu de manières de faire et de penser propres."

[50] A Teoria das Situações Didáticas considera o contrato didático como estratégia da situação didática, em que o professor é obrigado a ensinar, e o aluno é obrigado a aprender. Ocorre de maneira implícita, logo, tanto o aluno quanto o professor estão sempre ocupados, inventando novas formas de comportamento e interação que esperam estar de acordo com o contrato em suas interpretações (BROUSSEAU, 1997).

> Se a chegada de um novo objeto técnico modifica claramente o meio didático, ele apresenta, de maneira mais secreta, mas de maneira não menos certa, o problema da integração funcional desse objeto no sistema didático. Como candidatos à integração no meio didático, os objetos técnicos nunca são, epistemológica ou didaticamente, neutros. É o caso dos objetos mais "simples", que a tradição e o costume têm, há muito tempo, diante de nós, vestida de evidência - o quadro-negro e o giz, a caneta e o papel. [...] Mas se um status não lhes é rapidamente dado como elementos que entram na relação didática sobre o conhecimento ensinado, eles logo se encontrarão marginalizados, privados de uma existência epistemológica e didática a princípio, depois relegados materialmente. (CHEVALLARD, 1992, p. 183, tradução nossa)[51].

Como já destacamos anteriormente, é importante levar em conta o papel do professor na integração dos objetos computacionais no meio didático. Essa relação faz parte também dos processos de transposição do objeto matemático nas instituições de referência. A sua análise permite identificar outros fenômenos que podem ocorrer na integração desse objeto técnico, obtida através de um modelo epistemológico da atividade matemática.

2.2.2 O modelo epistemológico proposto pela TAD

A noção de relação com o objeto, definida por Chevallard, diz respeito às práticas sociais que são realizadas na instituição. Portanto, o saber matemático é resultado da ação humana institucional, que é ensinado, que é usado e que é transposto para as instituições. Ele é construído como resposta ao estudo de questões problemáticas, aparecendo como o resultado de um processo de estudo. Esse processo, como atividade que leva à construção (ou reconstrução) do conhecimento matemático, faz parte da atividade matemática.

A TAD propõe um modelo geral de atividades humanas, e assim descrever o conhecimento matemático, que formula em termos de praxeologias.

> Uma praxeologia é, de certa forma, a unidade básica na qual se pode analisar a ação humana em geral. [...] O que exatamente é uma praxeologia? Podemos confiar na etimologia para nos guiar aqui - pode-se analisar qualquer ação humana em dois componentes principais inter-relacionados: a *práxis*, isto é, a parte prática, por um lado, e o *logos*, por outro. "*Logos*" é uma palavra grega que, desde os tempos pré-Socráticos, tem sido constantemente usada para se referir ao pensamento e raciocínio humanos - particularmente sobre o cosmos. [...] [De acordo com] um princípio fundamental da TAD - a teoria antropológica do didático-, não pode haver ação humana sem ser, pelo menos parcialmente, "explicada", tornada "inteligível", "justificada", "contabilizada", em qualquer estilo de "raciocínio" que possa abranger

[51] Texto original: "Si l'arrivée d'un nouvel objet technique modifie clairement le milieu didactique, elle pose, plus secrètement mais de manière non moins certaine, le problème de l'intégration fonctionnelle de cet objet au système didactique. En tant que candidats à l'intégration au milieu didactique, en effet, les objets techniques ne sont jamais, ni épistémologiquement, ni didactiquement, neutres. Il en va ainsi des objets les plus « simples », ceux que la tradition et l'habitude ont, depuis longtemps, à nos yeux, habillés d'évidence – le tableau noir et la craie, la plume et le papier. [...] Or, si un statut ne leur est pas rapidement donné en tant qu'éléments entrant dans la relation didactique à propos du savoir enseigné, ils se trouveront vite marginalisés, privés d'existence épistémologique et didactique d'abord, puis matériellement relégués."

> tal explicação ou justificativa. A *práxis*, portanto, implica o *logos* que, por sua vez, implica um retorno à *práxis*. Com efeito, toda *práxis* requer um apoio no *logos* porque, a longo prazo, nenhuma tarefa humana fica sem questionamento. Claro, uma praxeologia pode ser deficiente, por exemplo, porque sua parte "práxis" é composta de uma técnica ineficaz - "técnica" é aqui a palavra oficial para um "modo de fazer" - e seu componente "logos" consiste quase inteiramente de puro absurdo - pelo menos do ponto de vista do praxeologista! (CHEVALLARD, 2006, p. 23, tradução nossa)[52].

Essa noção de praxeologia no contexto da matemática, denominada praxeologia matemática ou Organização Matemática (OM), refere-se, portanto, à concepção de atividade matemática como um estudo de tipos de tarefas problemáticas[53].

O saber matemático aparece organizado nos dois níveis citados por Chevallard, a *praxis*, que se refere aos tipos de tarefas que são estudados e às técnicas utilizadas, e o *logos*, que inclui o discurso tecnológico, que é a justificativa da técnica, e a teoria que permite dar sentido aos problemas, interpretar as técnicas e fundamentar as descrições tecnológicas. A união desses dois termos forma a noção de praxeologia e, os tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria, são as quatro categorias de elementos que compõem uma OM.

Descreveremos cada componente de uma praxeologia nos baseando nos anais de um curso ministrado em *La Rochelle Université* (França), em 1998, por Yves Chevallard, intitulado *Analysis of Teaching Practices and Mathematics Didactics* (Análise de Práticas de Ensino e Didática da Matemática).

Chevallard descreve a primeira componente de uma praxeologia com a noção de tarefas, representada por *T*. A tarefa deve ser escrita por um verbo, por exemplo: "Calcular a integral $\int_0^1 x^2\,dx$", "Adicionar dois números inteiros", etc.

Pode-se ter uma tarefa *t* que pertence a um tipo de tarefas *T*. Nesse caso, denotaremos por $t \in T$ e chamaremos *t* de subtarefa de *T*. Para contextualizar, vejamos a tarefa:

T_1: Achar o valor médio de uma função *f* no intervalo $[a, b]$.

---

[52] Texto original: "But what I shall call a praxeology is, in some way, the basic unit into which one can analyse human action at large. [...] What exactly is a praxeology? We can rely on etymology to guide us here – one can analyse any human doing into two main, interrelated components: praxis, i.e. the practical part, on the one hand, and logos, on the other hand. "Logos" is a Greek word which, from pre-Socratic times, has been used steadily to refer to human thinking and reasoning – particularly about the cosmos. […] The answer draws on one fundamental principle of ATD – the anthropological theory of the didactic –, according to which no human action can exist without being, at least partially, "explained", made "intelligible", "justified", "accounted for", in whatever style of "reasoning" such an explanation or justification may be cast. Praxis thus entails logos which in turn backs up praxis. For praxis needs support – just because, in the long run, no human doing goes unquestioned. Of course, a praxeology may be a bad one, with its "praxis" part being made of an inefficient technique – "technique" is here the official word for a "way of doing" –, and its "logos" component consisting almost entirely of sheer nonsense – at least from the praxeologist's point of view!".

[53] Dizer que uma tarefa é problemática significa que, para os pesquisadores, não há uma praxeologia adequada, ou, no caso dos alunos, não se conhece uma praxeologia adequada para resolver. (BOSCH, ESPINOZA e GASCÓN, 2003).

Uma subtarefa relacionada à T_1 poderia ser obtida atribuindo adequadamente uma função específica e os valores *a* e *b* do intervalo.

Uma praxeologia relativa a um tipo de tarefas *T*, especifica uma maneira de realizar as subtarefas $t \in T$. Agora nos referimos à segunda componente, a técnica τ.

O tipo de tarefas *T* e a técnica τ relacionada à *T* constitui o bloco prático [T / τ], que é usualmente chamado de saber-fazer, pois para cada tipo de tarefas *T* existem certas maneiras de fazer tarefas desse tipo. A esse respeito, Chevallard chama a atenção que uma técnica – uma "maneira de fazer" – só consegue realizar uma parte de T a qual é relativa, que é chamada de "escopo da técnica". Quando a técnica τ tende a falhar na execução de alguns tipos de tarefas T, pode-se dizer que "geralmente não se sabe realizar as tarefas do tipo T". Nesse caso, uma técnica pode ser superior a outra. É comum, em uma determinada instituição, existir apenas uma técnica, ou pelo menos uma quantidade limitada de técnicas que são reconhecidas, sem falar de possíveis técnicas alternativas que podem surgir. (CHEVALLARD, 1998, p. 92-93).

A terceira componente de uma praxeologia é a tecnologia θ, que é o discurso racional sobre a técnica e tem como objetivo justificar a técnica, certificando-se de que ela permite executar bem as tarefas do tipo *T*. Deve-se admitir, segundo Chevallard, que uma técnica sempre será acompanhada de pelo menos uma evidência da tecnologia, sendo que em alguns casos os elementos tecnológicos estão integrados na técnica. Além disso, o fato de existir na instituição uma técnica canônica, uma única técnica utilizada, confere a esta técnica o critério de "autotecnológica", quer dizer que não exige justificação já que ela própria é considerada como uma boa "maneira de fazer".

De maneira geral, a primeira função da tecnologia é justificar a técnica, garantindo que a técnica dê o que é reivindicado a ela, e a segunda função é explicar e tornar inteligível a técnica. Do ponto de vista da matemática, a função de justificação é a que mais prevalece por meio da demonstração. Uma terceira função correspondente ao emprego mais usual da tecnologia é a função de produção de técnicas. Neste caso, existem tecnologias à espera de técnicas, que ainda não foram exploradas ou são muito pouco exploradas. Chevallard denomina de "fenômeno da *subexploração* das tecnologias disponíveis"[54], tanto do ponto de vista da justificativa quanto da produção de técnicas.

Finalmente, a quarta componente é a teoria Θ, que é a justificativa da técnica. Chevallard explica que a teoria desaparece com frequência nas instituições, no sentido de que a justificativa a uma determinada tecnologia faz referência a outra instituição. Por exemplo,

[54] Texto original: "phénomène de *sous-exploitation* des technologies disponibles". (CHEVALLARD, 1998, p. 94).

utilizar argumentos da Física ou da Geometria para justificar a tecnologia. Mas, de um modo geral, a descrição dos níveis técnica / tecnologia / teoria é suficiente para explicar a atividade a ser analisada.

O conjunto [T, τ, θ, Θ] constitui, assim, uma praxeologia "pontual", relacionada a um único tipo de tarefas T. Essa praxeologia (ou organização praxeológica), ou qualquer parte dela, refere-se, comumente, ao saber. Mas, essa abordagem, segundo Chevallard, reduz o caráter do saber-fazer, especialmente na produção e disseminação de praxeologias.

> De fato, raramente encontramos praxeologias pontuais. Geralmente, em uma dada instituição I, uma teoria Θ responde a *várias tecnologias* θ_j, cada uma delas justificando e tornando inteligíveis *várias técnicas* τ_{ij} correspondentes a *tantos tipos de tarefas* T_{ij}. As organizações pontuais serão assim agregadas, primeiro nas organizações *locais*, $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$, focadas em uma tecnologia θ específica, depois nas organizações *regionais*, $[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta]$, formadas em torno de uma teoria Θ. (Além disso, chamaremos de organização *global* o complexo praxeológico $[T_{ijk} / \tau_{ijk} / \theta_{jk} / \Theta_k]$ obtido, em uma instituição, pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k.) A mudança de uma praxeologia pontual [T / τ / θ / Θ] para uma praxeologia local $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ apresenta a tecnologia θ, da mesma maneira que a transição subsequente para a praxeologia regional $[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta]$ trará à tona a teoria Θ. Nos dois casos, a visibilidade do bloco do saber aumenta, em detrimento do saber-fazer. Tal desequilíbrio, sem dúvida, não é sem justificativa: pois se é verdade que, em muitos casos, o tipo de tarefas T precede *geneticamente* o bloco [θ / Θ] (que é então construído como um meio de produzir e de justificar uma técnica τ apropriada para T), ainda assim, *estruturalmente*, o saber [θ / Θ] possibilita gerar τ (para dado T). Por esse motivo, o saber-fazer [T / τ] pode ser classicamente *apresentado*, no *texto* do saber, como uma simples *aplicação* de "saber" [θ / Θ]. (CHEVALLARD, 1998, p. 95, tradução nossa)[55].

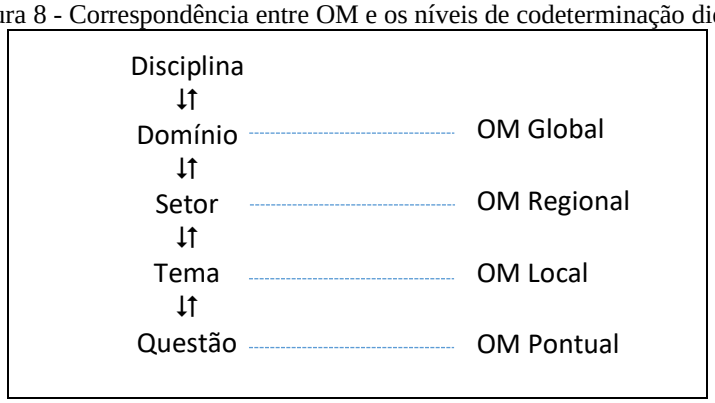
A escala de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2002) permitirá localizar os diferentes níveis que determinam um saber a ser trabalhado, de acordo com o currículo de estudo. Assim, as organizações locais serão reunidas ao nível Tema, estudado a partir de várias organizações pontuais, ou seja, ao nível do Assunto/Questão que o tema envolve e em torno de uma mesma tecnologia; uma organização regional é o nível Setor, portanto integra o estudo dos

---

[55] Texto original: "On ne rencontre en fait que rarement des praxéologies ponctuelles. Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de *plusieurs technologies* θj, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles *plusieurs techniques* τij correspondant à *autant de types de tâches* Tij. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations *locales*, [Ti/τi/θ/Θ], centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations *régionales*, [Tij/τij/θj/Θ], formées autour d'une théorie Θ. (Au-delà, on nommera organisation *globale* le complexe praxéologique [Tijk/τijk/θjk/Θk] obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θk.) Or le passage d'une praxéologie ponctuelle [T/τ/θ/Θ] à une praxéologie locale [Ti/τi/θ/Θ] met en avant la technologie θ, de la même façon que le passage ultérieur à une praxéologie régionale [Tij/τij/θj/Θ] portera au premier plan la théorie Θ. Dans les deux cas la visibilité du bloc du savoir s'accroît, au détriment de celle du savoir-faire. Un tel déséquilibre, sans doute, n'est pas sans justification : car s'il est vrai que, en bien des cas, le type de tâches T précède *génétiquement* le bloc [θ/Θ] (lequel se construit alors comme moyen de produire et de justifier une technique τ appropriée à T), il n'en reste pas moins que, *structuralement*, le savoir [θ/Θ] permet d'engendrer τ (pour T donné). Pour cette raison, le savoir-faire [T/τ] pourra être classiquement *présenté*, dans le *texte* du savoir, comme une simple *application* du « savoir » [θ/Θ]."

temas em torno de uma mesma teoria; a organização global forma o nível Domínio, que está imerso no nível Disciplina (Figura 8).

Figura 8 - Correspondência entre OM e os níveis de codeterminação didática



Fonte: A autora (2021).

Podemos observar que, no ensino de matemática, um tema de estudo é identificado frequentemente como uma tecnologia ou fazendo parte do bloco do saber [θ / Θ]. No entanto, outros tópicos de estudo são expressos em termos de tipos de tarefas. Pode também acontecer que o mesmo tópico seja identificado como tecnologia que justifica determinada técnica de um certo tipo de tarefas, assim como aparecer como técnica para resolver tarefas de outro tipo. Além disso, o tipo de tarefas pode ser mal identificado ou a técnica não ser adequada, e ainda, a tecnologia e a teoria serem mal explicadas ou ocultas. Nesse sentido, Chevallard (1998) explica que nem sempre uma organização praxeológica, mesmo pontual, será totalmente conforme aos agrupamentos que ele menciona mais acima.

Bem, não encontraremos praxeologias bem adaptadas para realizar todas as tarefas de maneira eficaz e inteligível. Mas é possível obter novas praxeologias para um melhor funcionamento da instituição considerada, por meio do processo transpositivo, retrabalhando a praxeologia, simplificando, enriquecendo com outros elementos. O primeiro passo é analisar as praxeologias que já existem. O modelo fornecido pela TAD pode contribuir para esse estudo.

A partir da análise praxeológica de livros de Cálculo, estudamos a relação institucional com o objeto Teorema Fundamental do Cálculo, buscando identificar a OM a ensinar. Assim, construímos uma OM de referência baseando-se em uma análise epistemológica, cognitiva, didática e informática. Para isso, achamos necessário especificar os tipos de objetos que compõem os diferentes elementos das organizações matemáticas.

2.2.3 Objetos ostensivos e não ostensivos

O trabalho de modelização do saber matemático que nos propusemos realizar permite identificar alguns objetos que vão estar inter-relacionados. A partir da caracterização da TAD em que “tudo é objeto”, passou-se a questionar sobre a natureza dos objetos matemáticos.

> Se formos à busca do objeto "primitiva de uma função", o que encontraremos nunca será o próprio objeto - "em si e para si" -, mas atividades humanas onde *outros* objetos serão colocados em jogo. Encontraremos, por exemplo, *declarações* sobre o objeto procurado, que classificaremos sob o título "definição" ou "teorema", [...] declarações que são atividades que consistem em dar uma definição ou em declarar um teorema. Também encontraremos *escrituras* desse objeto, como o *nome* do objeto ou outros objetos gráficos correlatos, ou atividades nas quais escreveremos, leremos, ouviremos ou pronunciaremos esses "objetos". [...] Da mesma forma, descobriremos que o objeto "método de pivô de Gauss" só existe através da manipulação de certos objetos no contexto de certas práticas, onde encontramos atores que manipulam certos gráficos, criando certos gestos e pronunciando certas frases - em um discurso oral ou escrito. Mas jamais colocaremos as mãos no próprio objeto. Portanto, quando procuramos o que talvez seja esse objeto, descobrimos que ele é composto de outros objetos, sempre de natureza material, em particular sonoros (discursivos), gestuais, escritural (gráfico) e muito "vazio" ao redor. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 84, tradução nossa)[56].

Esse questionamento leva à descrição das práticas institucionais onde o objeto está presente, então precisamos perguntar quais são os tipos de tarefas e as técnicas que constituem as praxeologias em torno desse objeto e quais são os elementos tecnológicos e teóricos que irão descrever e justificar essas práticas e criar um discurso sobre o objeto. Dessas praxeologias institucionais é que vão emergir os conceitos matemáticos.

Além da natureza dos objetos matemáticos, Bosch e Chevallard vão também explicar sobre a sua função na atividade matemática.

> A conceituação atual da atividade matemática tende a reprimir as ferramentas *materiais* que ela envolve e, se levar em conta esses objetos sensíveis particulares que são discursos, escritos e gráficos, não para centrar atenção sobre esses próprios objetos (e as maneiras de manipulá-los), mas sobre o que eles devem se referir, o que eles "representam" ou "significam", em resumo: seu "sentido". Para fazer matemática é preciso de discursos, de figuras e de símbolos, mas *o que é importante está além das*

[56] Texto original: “Si nous partons à la recherche de l’objet « primitive d’une fonction », ce que nous allons trouver n’est jamais l’objet lui-même – « en soi et pour soi » – mais des activités humaines où seront mis en jeu d’*autres* objets. Nous trouverons par exemple des *déclarations* sur l’objet cherché, qu’on rangera sous la rubrique « définition » ou « théorème » [...], déclarations qui sont elles-mêmes des activités consistant à donner une définition ou à énoncer un théorème. Nous trouverons aussi des *écritures* de cet objet, tel le *nom* de l’objet ou d’autres objets graphiques corrélés, soit des activités où l’on écrira, lira, entendra ou prononcera ces « objets ». [...] Semblablement, on découvrira que l’objet « méthode du pivot de Gauss » n’existe qu’à travers la manipulation de certains objets dans le cadre de certaines pratiques où nous trouvons des acteurs qui manipulent certains graphismes, en faisant certains gestes et en prononçant certaines phrases – en un discours oral ou écrit. Mais on ne mettra jamais la main sur l’objet lui-même. Ainsi donc, quand on cherche ce que peut-être un tel objet, on découvre qu’il se compose d’autres objets, de nature toujours matérielle, en particulier sonore (discursive), gestuelle, scripturale (graphique), et de beaucoup de « vide » autor.”

> *palavras e das escrituras*. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 85, tradução nossa)[57].

Os autores explicam que a atividade matemática não é realizada apenas com a ajuda de ferramentas racionais, intuitivas, pois dependem de certos instrumentos, como papel e lápis, quadro e giz, régua e compasso, calculadora, computador, e de forma equivalente, esses instrumentos necessitariam ter uma função própria na atividade[58]. Outros objetos de natureza "sensível"[59], como os sons, os gráficos e os gestos, desempenham também sua especificidade enquanto signos, ocupando o lugar de outros objetos que eles representariam.

Essa distinção entre os tipos de objetos que compõem os elementos das organizações matemáticas, ocasionada entre a natureza dos objetos e a sua função na atividade matemática, leva à seguinte classificação:

- Objetos ostensivos: são aqueles que são perceptíveis (ostensivo é originário do latim *ostendere*, isto é, "apresentar com insistência"), portanto, são vistos, tocados, ouvidos, etc. Podemos dizer que são providos de certa materialidade e, de forma geral, podem ser "manipulados"[60]. As escritas, os gráficos, os gestos, os discursos, são exemplos de objetos ostensivos;
- Objetos não ostensivos: são objetos reconhecidos institucionalmente, mas não são perceptíveis, não estão visíveis, como por exemplo as ideias, os conceitos, os teoremas, etc. Eles só podem ser evocados pela manipulação adequada de objetos ostensivos associados a eles. Assim, a noção "integral de uma função" é um objeto não ostensivo que identificamos e ativamos por meio de uma expressão, escrita ou gráfico específicos, a depender da situação.

A essa coexistência entre os objetos ostensivos e os não ostensivos, Bosch e Chevallard vão chamar de "dialética do ostensivo e do não ostensivo": os objetos não ostensivos emergem

---

[57] Texto original: "La conceptualisation courante de l'activité mathématique tend à refouler les outils *matériels* que celle-ci engage et, si elle prend en compte ces objets sensibles particuliers que sont les discours, écritures et graphismes, c'est pour se centrer, non sur ces objets eux-mêmes (et les façons de les manipuler), mais sur ce à quoi ils sont censés renvoyer, ce qu'ils « représentent » ou « signifient », bref : leur « sens ». Pour faire des mathématiques on a besoin de discours, de figures et de symboles, mais *ce qui est important serait au-delà des mots et des écritures*."

[58] Raymond Duval, em sua Teoria de Registros de Representação, vai explicar que as transformações de representações em outras representações semióticas estão no cerne da atividade matemática e daí vai se preocupar com as dificuldades ligadas aos diferentes registros (DUVAL, 1993). A TAD, no entanto, se volta para o valor instrumental e semiótico atribuído aos objetos.

[59] A sensibilidade é uma característica atribuída a determinados objetos para que possam adquirir certa materialidade e fornecer uma realidade perceptível para o ser humano.

[60] No sentido que a sua representação pode ser manuseada, controlada, operada por um sujeito agente. Portanto, designa os vários usos que o sujeito pode realizar com o objeto.

da manipulação de objetos ostensivos, mas, ao mesmo tempo, tal manipulação é sempre guiada e controlada por objetos não ostensivos. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999; BOSCH, 2001).

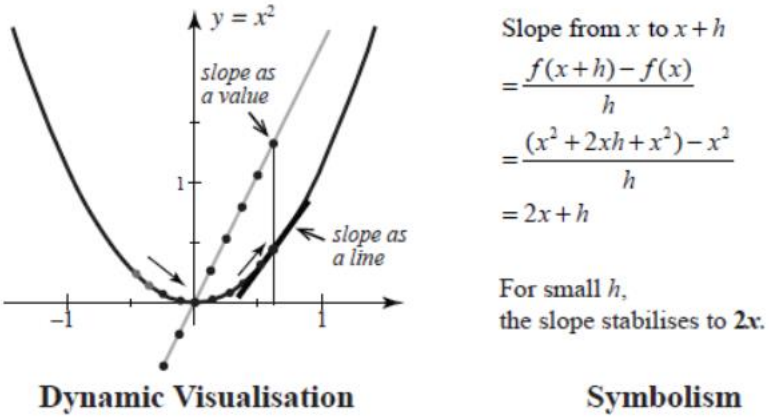
A manipulação dos objetos ostensivos também vai ser ativada a partir da realização de atividades por meio do computador, incluindo o registro escrito, o registro gráfico e o registro gestual, gerando a criação de novos tipos de objetos ostensivos e de articulação entre os registros. Nesse sentido, a função atribuída a diferentes objetos ostensivos é fortemente influenciada pelo registro ao qual eles pertencem (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 96).

A representação gráfica de um objeto matemático em um micromundo, por exemplo, vai permitir a ativação da manipulação de objetos ostensivos e não ostensivos associados que não seria possível de serem evocados a partir da representação gráfica no papel, sem falar da possível articulação entre os registros que o micromundo pode permitir.

Em um dos trabalhos de David Tall, ele busca uma "abordagem sensata ao cálculo" (TALL, 2010) com base na evidência dos sentidos humanos para desenvolver conceitos do Cálculo Diferencial e Integral a partir da manipulação simbólica fornecida pelo computador. Para desenvolver o conceito de derivada, ele mostra que é possível usar o software para plotar o valor numérico da inclinação em um ponto. Como isso acontece dinamicamente, pode-se ver o gráfico da função de inclinação x^2 se estabilizar no gráfico de 2*x*. Em seguida, ele utiliza a notação simbólica para representar a função inclinação *Df*, sendo esta a derivada da função original.

Com essa ideia, Tall mostra a relação entre a visualização dinâmica à operação simbólica correspondente (Figura 9) para fornecer uma fórmula simbólica para a operação da derivada em casos gerais. E só então, a partir dessa articulação entre o registro gráfico e o registro algébrico, é que ele sugere que forneça a notação para o cálculo da derivada: $Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Figura 9 - Correspondência entre visualização e simbolização.



Fonte: Tall (2010, p. 13).

Concordamos, nesse sentido, com Lagrange (2000) que, em situações de uso de computador, e até mesmo da calculadora, o recurso às várias representações seja incentivado. Para que existam várias representações de um conceito, é necessário que existam também técnicas associadas a essas representações. No entanto, a técnica de obtenção de um resultado simbólico em um desses ambientes tende a ser mais simples e eficiente do que outras técnicas baseadas em outras representações e que exigem mais trabalho. (LAGRANGE, 2000, p. 12).

As técnicas implementadas vão resultar na manipulação dos objetos ostensivos regulados pelos não ostensivos. Ao mesmo tempo, a presença de um ou outro objeto não ostensivo em uma atividade matemática só pode ser declarada a partir das manipulações de ostensivos reconhecidos institucionalmente.

Bosch e Chevallard (1999) explicam que as relações institucionais é que vão determinar a coexistência desses tipos de objetos nos níveis de organização da atividade matemática. Por exemplo, não vai haver sentido para que a escrita $\int f(x)\,dx$ esteja associada ao conceito de integral, a menos que a instituição considere que a escrita ostensiva $\int f(x)\,dx$ e a oral ostensiva "integral de efe de x de x" façam parte das organizações matemáticas que estão institucionalmente vinculadas à não ostensiva "integral" que é invocada com a ostensiva oral. O mesmo ocorre no caso do objeto gráfico, representado ou não no software, em que a instituição deve reconhecer a sua associação com o referido conceito.

Assim, considera-se que os objetos ostensivos podem funcionar como signos de uma praxeologia matemática, possuindo uma valência semiótica que permite evocar um complexo de objetos ostensivos e não ostensivos, isto é, organizações matemáticas mais ou menos amplas. Ao mesmo tempo, os objetos ostensivos são os ingredientes primários das tarefas, técnicas,

tecnologias e teorias, adquirindo uma valência instrumental da atividade matemática, cujas ferramentas materiais não se poderia realizar a atividade.

> "Como em outras áreas da atividade humana, há, na matemática, um *progresso*: progresso das teorias, das tecnologias, das técnicas. Um dos fatores desse progresso está, sem dúvida, na *criação de ostensivos*, eficazes tanto do ponto de vista instrumental quanto do ponto de vista semiótico." (CHEVALLARD, 1994, p. 199, tradução nossa)[61].

Mesmo que o progresso da Matemática esteja associado à criação de ostensivos eficazes, Chevallard destaca que este progresso leva muito tempo para ser utilizado pelos estudantes. Por isso, consideramos importante levar em conta os objetos ostensivos e não ostensivos no ensino atual, de modo particular no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo, constituindo um modelo praxeológico que possibilite encontrar novas técnicas associadas a esses objetos, podendo surgir durante a mediação com as ferramentas de um micromundo.

Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, evidencia-se uma baixa utilização de certos tipos de objetos ostensivos na construção do conhecimento matemático, como os gráficos e os gestos, em detrimento de objetos para o registro da escrita e do formalismo algébrico. Bosh chama de "redução ostensiva" a esse fenômeno que, à medida que avança a construção do conhecimento matemático, "tende a confinar os instrumentos ostensivos utilizados para o registo do que está escrito ou, pelo menos, do que pode ser captado no papel. Os outros registros, mesmo que ainda estejam presentes, são relegados ao reino do "acessório" e são difíceis de "ensinar"" (BOSCH, 2001, p. 24, tradução nossa)[62].

Esse fenômeno, no âmbito do programa epistemológico, deve buscar soluções na própria natureza da atividade matemática, em suas condições de gênese e desenvolvimento, tanto histórica quanto institucional. Ou seja, é necessário um trabalho de reconstrução da atividade matemática e um processo de gestão de estudo, considerando as necessidades matemáticas e os tipos de ostensivos que são colocados à disposição dos alunos e a importância atribuída aos diferentes registros.

O conceito de "dimensão ostensiva da atividade matemática", apresentado por Bosch e Chevallard (1999), foi considerado em nosso trabalho de modelização do saber matemático, ou

---

[61] Texto original: "Comme en d'autres domaines de l'activité humaine, il existe, en mathématiques, un *progrès*: progrès des théories, des technologies, des techniques. L'un des facteurs de ce progrès se trouve indubitablement dans la *création d'ostensifs*, efficaces tant du point de vue instrumental que du point de vue sémiotique."

[62] Texto original: "En realidad, se puede mostrar que, a medida que se avanza en la construcción del conocimiento matemático, aparece un fenómeno de reducción ostensiva que tiende a recluir los instrumentos ostensivos utilizados al registro de lo escrito o, cuanto menos, de lo que se puede plasmar en el papel. Los demás registros, a pesar de que siguen estando presentes, quedan relegados al ámbito de "lo accesorio" y resultan difícilmente "enseñables"".

mais precisamente, da atividade matemática. Com a integração do micromundo no sistema didático, consideramos que novas praxeologias serão construídas e, com isso, a ativação da manipulação de outros objetos ostensivos. Assim, teremos uma modelização do saber integrando objetos informáticos, e para essa implementação, apresentaremos a estrutura T4TEL como uma extensão do modelo praxeológico.

2.3 T4TEL: UMA ABORDAGEM DE MODELIZAÇÃO DO CONHECIMENTO

Escolhemos utilizar essa abordagem por convergir com a nossa pesquisa ao se interessar pela representação de modelos praxeológicos em ambientes computacionais. A estrutura T4TEL faz parte da TAD e foi desenvolvido por Hamid Chaachoua (2010) como uma formalização e extensão do modelo praxeológico. O termo "T4" refere-se ao quarteto praxeológico (tipos de Tarefas, Técnica, Tecnologia, Teoria) e TEL significa *Technology Enhanced Learning* (Aprendizagem Aprimorada por Tecnologia).

No trabalho de modelização da atividade matemática com a T4TEL, a noção de tipos de tarefas, assim como na TAD, é considerada primária e essencial. O tipo de tarefas T agrupa as tarefas que podem ser realizadas pela mesma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ e ela própria legitimada por uma determinada teoria Θ. A partir da descrição das praxeologias pontuais é necessário definir e estruturar as praxeologias por níveis: pontual, local e regional e, a partir daí, criar funções e processos didáticos capazes de fazer as implementações computacionais necessárias.

Para a utilização dessa abordagem, apresentaremos, a seguir, algumas definições e descrições que constituirão a metodologia desse processo (CHAACHOUA, 2018).

2.3.1 Caracterização para a implementação de uma estrutura T4TEL

I) Tipo de tarefas

No primeiro momento, o pesquisador analisa as tarefas em uma instituição: como definir uma tarefa? Como relacionar e organizar tarefas em torno do mesmo tipo de tarefas?

O primeiro passo é agrupar os mesmos tipos de tarefas, considerando os objetos comuns sobre os quais a ação se relaciona e em relação aos meios comuns de realização das tarefas. (CHAACHOUA, 2018, p. 7). Ou seja, é preciso levar em conta que os tipos de tarefas estudadas possuem pelo menos uma técnica que permite a sua realização.

Assim, um tipo de tarefas T é um conjunto de tarefas tal que satisfazem algumas condições:

- Qualquer tarefa é descrita por um determinado verbo de ação e um complemento, representado por: *T (Verbo de ação, Complemento)*. O verbo de ação caracteriza os tipos de tarefas, como "Calcular", "Integrar", etc. O complemento pode ser definido de acordo com diferentes níveis de granularidade, do específico ao genérico, a partir das noções de sistema de variáveis e de gerador de tipos de tarefas (CHAACHOUA e BESSOT, 2019). Mais adiante explicaremos sobre os dois últimos.
- Existe pelo menos uma técnica τ que realiza pelo menos uma tarefa de T, tal que, ou o escopo da técnica $P(\tau)$ é um subconjunto de T, ou T é um subconjunto de $P(\tau)$.

Tomemos como base o seguinte exemplo:

Em um curso de Cálculo de uma instituição de ensino superior, encontramos o seguinte tipo de tarefas: T_{int1}: Calcular a integral de uma função $f(x)$ definida em um intervalo real $[a, b]$. Encontraremos uma quantidade limitada de técnicas associadas a esse tipo de tarefas, uma delas consiste no uso do teorema fundamental do cálculo. O escopo dessa técnica é um subconjunto de T que tende a falhar para funções compostas caso não seja utilizada outra técnica associada (regra da cadeia para antidiferenciação). Em outro caso, podemos utilizar transformações algébricas (e gráficas) em áreas de regiões planas limitadas e cujo escopo contém T, ou seja, a integração de funções definidas em intervalos reais.

Agora, veremos outra definição.

II) Subtipo de tarefas

Dizemos que T' é um subtipo de tarefas do tipo T se:

- T' é um subconjunto de T;
- T' é um tipo de tarefas.

Observe o seguinte exemplo: O tipo de tarefas "Calcular a integral de uma função $f(x)$ definida em um intervalo real $[a, b]$" é um subtipo de "Achar a área de uma região limitada por determinadas curvas", que é um subtipo de "Calcular a integral de uma função $f(x)$".

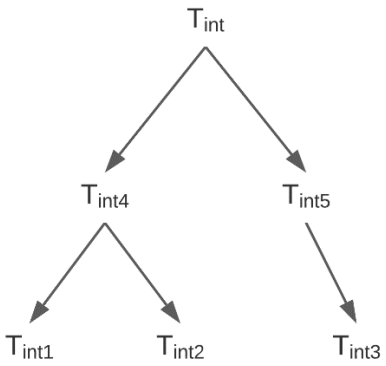
A partir dessa caracterização, descreveremos um gerador de tipo de tarefas.

III) Gerador de tipos de tarefas

A partir do exemplo anterior, podemos criar uma representação hierárquica das relações entre os tipos tarefas (Figura 10). Acrescentaremos outros tipos de tarefas, vejamos: o tipo de tarefas T_{int1}: Calcular a integral de uma função $f(x)$ definida em um intervalo real $[a, b]$ é um

subtipo de T_{int4}: Achar a área de uma região limitada por curvas determinadas, ou um subtipo de T_{int}: Calcular a integral de uma função $f(x)$. Também é subtipo de T_{int4} ou de T_{int}, o tipo de tarefas T_{int2}: Calcular a integral de uma função composta $f\big(g(x)\big)g'(x)$ no intervalo $[a, b]$. Acrescentamos a essa relação, o tipo de tarefas T_{int3}: Achar o valor médio da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, que é um subtipo de T_{int5}: Determine o centro de massa de uma barra, dado a massa e a densidade linear da barra em um ponto a uma distância x de um extremo, que também é subtipo de T_{int}.

Figura 10 - Exemplo de estruturação de tipos de tarefas.



Fonte: A autora (2021).

Nesta representação, temos uma estruturação dos tipos de tarefas em relação a "ser um subtipo de tarefas de", que coloca em jogo essencialmente o tipo de função e a natureza do intervalo. Logo, os critérios adotados vão determinar a estruturação que vai ser feita.

Na sucessão dessa relação, podemos dizer que o tipo de tarefas T_{int4} é mais genérico que $T_{int1,}$ ou que T_{int1} é mais específico que T_{int4}. Com a noção de gerador de tarefas, iremos gerar tipos e subtipos de tarefas, a partir de um sistema de variáveis e de uma estrutura que relaciona os níveis de granularidade, do específico ao genérico.

Assim, o gerador de tipo de tarefas é definido por:

GT = [Verbo de ação, Complemento fixo; Sistema de variáveis], tal que:

- O par (verbo de ação, complemento fixo) é um tipo de tarefas, como definido anteriormente; e
- O sistema de variáveis é constituído por uma lista de variáveis com os valores que podem assumir.

Chaachoua (2018) destaca que um gerador de tipo de tarefas em T4TEL não é um tipo de tarefas, mas permite gerar, a partir de um sistema de variáveis, tipos e subtipos de tarefas de

acordo com uma estrutura hierárquica. O nível mais genérico é definido sem nenhuma instanciação de variável, ou seja, é formado pelo verbo de ação e o complemento. As diferentes instanciações das variáveis permitem gerar tipos de tarefas mais específicos.

Vejamos mais um exemplo: Considere o tipo de tarefas T_1 = (Calcular, integral definida) e as variáveis V_1: função polinomial, V2: grau do polinômio, V3: natureza do número que é limite inferior do intervalo de integração, V4: natureza do número que é limite superior do intervalo de integração. O gerador de tipo de tarefas é dado por GT_{int} = [Calcular, integral definida; V1, V2, V3, V4]. Outra escolha possível é considerar como complemento fixo "integral", que é mais genérico, e adicionar outra variável sobre o tipo de integral (indefinida, definida, imprópria, ...).

Na geração de tipos de tarefas, a escolha do nível de granularidade é importante e vai depender essencialmente de três critérios: um deles é a instituição, que determina as escolhas sobre os objetos matemáticos que vão ser ensinados, mediante os programas curriculares; o outro, é a determinação das possíveis técnicas e o seu escopo, utilizando as variáveis; e, não menos importante, os geradores de tipos de tarefas, que são construídos pelo pesquisador (CHAACHOUA, 2018, p. 9).

A respeito das variáveis, Chaachoua e Bessot (2019) introduziram essa noção à estrutura T4TEL com base na teoria das situações didáticas, que define um conhecimento por uma "situação". As situações, na concepção dos autores, "são modelos *mínimos* para estudar como um conhecimento intervém nas relações particulares que uma pessoa estabelece com um *meio* para aí exercer uma determinada ação" (CHAACHOUA e BESSOT, 2019, p. 234, tradução nossa)[63].

A noção de variável é inserida como uma ferramenta metodológica nesse processo de modelação, que vai considerar distintas possibilidades de variação de situações ligadas a um saber ou a um conhecimento. Com isso, essa noção vai adquirir três funções. A primeira delas é gerar tipos e subtipos de tarefas regulando os valores da variável. Neste caso, a escolha de variáveis e valores adequados devem levar em conta os escopos das técnicas e as condições e restrições institucionais. A segunda função é caracterizar o escopo das técnicas. Aqui, o sentido é o mesmo dado por Chevallard[64], por isso Chaachoua e Bessot assumem mais uma definição que colocamos em evidência.

---

[63] Texto original: "Les situations sont des modèles *minimaux* pour étudier comment une connaissance intervient dans les rapports particuliers qu'une personne établit avec un *milieu* pour y exercer une action déterminée".

[64] Embora já tenhamos destacado antes, vamos relembrar: uma técnica tem sucesso apenas em uma parte $P(\tau)$ das tarefas do tipo T às quais é relativa, chamada escopo da técnica. Ela tende a falhar no $T\backslash P(\tau)$, de modo que podemos dizer que não sabemos como realizar tarefas do tipo T. (CHEVALLARD, 1998, p. 92).

IV) Escopo (pragmático)

O escopo de uma técnica é o conjunto de tarefas em que a técnica é confiável, pois fornecem pouco risco de falha e a um custo razoável. Uma propriedade é acrescentada a essa definição: O escopo de uma técnica, teórica ou pragmática[65], é um tipo de tarefas. Devido a essa propriedade, para a geração dos tipos de tarefas, que são escopos de técnicas, teremos que escolher as variáveis que irão intervir.

Essas duas funções das variáveis, gerar tipos e subtipos de tarefas e caracterizar os escopos das técnicas, segundo a visão dos autores,

> parecem ser particularmente interessantes para realizar análises *a priori* (do ponto de vista epistemológico e didático) e calcular caminhos de aprendizagem a partir de um jogo sobre essas variáveis e seus valores. Em particular, a construção de um modelo praxeológico de referência para um domínio matemático (no sentido da escala de codeterminação) inclui de fato para nós o esclarecimento das variáveis e seus valores possíveis. (CHAACHOUA e BESSOT, 2019, p. 239, tradução nossa)[66].

No contexto da nossa tese, nos baseamos na Engenharia Didático-Informática para realizar a análise a priori sugerida por Chaachoua e Bessot, considerando as dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática.

No âmbito institucional, as restrições e condições impostas vão restringir não só o tipo de tarefas, mas também as possíveis variáveis e seus valores. Assim, buscamos identificar essas variáveis institucionais que vão modelizar as situações de ensino do Teorema Fundamental do Cálculo. Dentre essas variáveis, estão as ostensivas, pois, embora elas desempenham um papel nos tipos de tarefas e nas tarefas, mas, como afirmam Bosch e Chevallard (1999, p. 90), elas são os ingredientes primários de uma técnica.

A respeito da descrição de uma técnica, Chaachoua e Bessot levaram em conta o questionamento levantado por Chevallard sobre a sua construção, constituição e implementação: "(...) de que é feita uma determinada técnica? de que "ingredientes" ela é

[65] O âmbito teórico de uma técnica é o conjunto de tarefas em que a técnica permite cumprir qualquer tarefa deste conjunto; a técnica é analisada apenas do ponto de vista epistemológico. E o escopo pragmático de uma técnica é o conjunto de tarefas em que a técnica é confiável, isto é, permite que as tarefas sejam realizadas com pouco risco de falha e a um custo razoável; a técnica tende a ser bem-sucedida nesse escopo e tende a falhar na parte externa. (KASPARY, CHAACHOUA e BESSOT, 2020, p. 247).

[66] Texto original: "Ces deux fonctions apparaissent comme particulièrement intéressantes pour conduire des analyses *a priori* (point de vue épistémologique et didactique) et calculer des parcours d'apprentissage à partir d'un jeu sur ces variables et leurs valeurs. En particulier, la construction d'un modèle praxéologique de référence pour un domaine mathématique (au sens de l'échelle de codétermination) inclut de fait pour nous l'explicitation de variables et de ses valeurs possibles".

composta? Novamente: em que consiste a "implementação" de uma técnica?" (CHEVALLARD, 1994, p. 193, tradução nossa)[67].

Na abordagem T4TEL, uma técnica é descrita por um conjunto de tipos de tarefas, que são chamados ingredientes da técnica. Dois tipos de tarefas são evidenciados: tarefas intrínsecas e tarefas extrínsecas.

As tarefas intrínsecas são os tipos de tarefas que existem apenas através da implementação das técnicas de outros tipos de tarefas. As tarefas extrínsecas são os tipos de tarefas que existem fora das técnicas e podem ser prescritas institucionalmente aos alunos.

Há também um tipo de tarefas em que a instituição ou o pesquisador consideram que não precisa explicar a(s) técnica(s) para esse tipo de tarefas; elas são chamadas de tarefas elementares. A escolha do pesquisador em designar as tarefas como elementares vai estar relacionada com as questões de pesquisa.

Para dar um exemplo, consideraremos a seguinte tarefa t_1: Calcule a integral de $f(x) = x^2 dx$ no intervalo [0, 3]. Esta é uma tarefa que se enquadra no tipo de tarefas T_{int2}: Calcular a integral de uma função polinomial de grau 2 no intervalo [a, b], em que $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}^*$. Uma técnica esperada é transcrita da seguinte forma:

$$\int_0^3 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 \qquad (T_{int2,1})$$

$$= \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} \qquad (T_{int2,2})$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{0}{3} \qquad (T_{int2,3})$$

$$= \frac{27-0}{3} \qquad (T_{int2,4})$$

$$= \frac{27}{3} \qquad (T_{int2,5})$$

$$= 9$$

Uma forma de descrever a tarefa é usando os tipos de tarefas. Reconhecemos nas etapas da tarefa t_1, tipos de tarefas como: ($T_{int2,1}$) Encontrar uma função primitiva (antiderivada), ($T_{int2,2}$) Aplicar o teorema fundamental do cálculo, ($T_{int2,3}$) Resolver a potenciação, ($T_{int2,4}$) Calcular a diferença entre números fracionários, ($T_{int2,5}$) Reduzir a fração a um número inteiro.

Uma tarefa intrínseca nessas etapas que não evidenciamos é "Organizar a integral como o limite da soma de Riemman". Ela não é prescrita pela instituição enquanto se tem uma

[67] Texto original: "de quoi est faite une technique donnée ? de quels « ingrédients » se compose-t-elle ? Et encore: en quoi consiste la « mise en œuvre » d'une technique ?".

praxeologia, particularmente uma técnica e uma tecnologia. Os tipos de tarefas que aparecem nas etapas são extrínsecos porque são prescritas pelas instituições de ensino.

Ao nível da instituição considerada, uma tarefa é classificada como "elementar" a partir do contrato didático e vai mudando ao longo do tempo. No exemplo que citamos, a instituição que nos referimos é do ensino superior e, os tipos de tarefa ($T_{int2,3}$), ($T_{int2,4}$) e ($T_{int2,5}$), embora não sejam elementares no ensino fundamental, tornam-se elementares a partir do ensino médio.

Na descrição da técnica que realizamos para o tipo de tarefas T_{int2}, poderia ser feita outra implementação. Por exemplo, o tipo de tarefas ($T_{int2,5}$) é ingrediente da técnica do tipo de tarefas ($T_{int2,4}$). De forma mais genérica, poderia descrever um tipo de tarefas "Reduzir a diferença entre dois números fracionários a um número real". Surge, então, uma questão metodológica: qual é o nível de granularidade para descrever uma técnica? Ou ainda, quais são os critérios para escolher os tipos de tarefas que são ingredientes de uma técnica? Chaachoua (2018) sugere alguns critérios e aqui destacaremos mais uma definição:

V) Ingredientes de uma técnica

Seja τ uma técnica de um tipo de tarefas T_0 de um gerador GT. Os tipos de tarefas que constituem a técnica τ podem ser:

- Tipos de tarefas intrínsecas
- Tipos de tarefas extrínsecas T_e geradas por GT e que T_0 não é um subtipo de tarefas de T_e
- Tipos de tarefas extrínsecas geradas por outros geradores de tipos de tarefas, mas que podem ser do nível mais genérico. Ou seja, o tipo de tarefas obtido pelo verbo e pelo complemento fixo sem qualquer instanciação de variáveis.

Com essa formalização em torno dos tipos de tarefas e das técnicas que permitem realizá-las, o próximo passo é descrever o bloco do saber.

VI) Descrição de tecnologias e teorias

Na abordagem T4TEL, a tecnologia é um conjunto de declarações que possuem um *status* (condição privilegiada) e um domínio de validade. Em relação ao *status*, pode ser, por exemplo: definição, propriedade, teorema, regra, etc. Já o domínio de validade indica a validade da declaração em relação a um domínio de referência.

A tecnologia, na TAD, estabelece um discurso racional sobre a técnica, da mesma forma que a teoria exerce sobre a tecnologia. Sendo assim, a mesma descrição de uma serve para a outra.

Para finalizar, voltemos à discussão das variáveis. A abordagem T4TEL considera uma terceira função das variáveis, que é descrever as praxeologias pessoais[68]. Isso diz respeito ao trabalho de transposição interna[69], considerado por Chevallard, já que existem tipos de tarefas pessoais distintas de tipos de tarefas institucionais e, portanto, praxeologias pessoais distintas de praxeologias institucionais. Não entraremos em detalhes nesta parte, pois não faz parte do escopo de nossa tese questionar a dimensão cognitiva do sujeito. No entanto, consideramos relevante na modelização do conhecimento do aluno, analisar as práticas pessoais na relação com a instituição de referência.

[68] Para obter mais informações, o leitor pode consultar Croset e Chaachoua, 2016.
[69] CHEVALLARD, Y. La Transposición Didáctica: Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

CONCLUSÃO

O nosso trabalho está na intersecção entre a Didática da Matemática e o Desenvolvimento de Software Educativo com o olhar voltado para a modelização de conhecimentos matemáticos para o micromundo. A necessidade de contemplar uma metodologia que auxiliasse a essa investigação, que levasse em conta os fundamentos teóricos da didática e da informática, nos motivou a escolher a Engenharia Didático-Informática (EDI), com o modelo de processo de software educativo.

Nesse modelo de processo, os procedimentos de cada fase são desenvolvidos juntamente com os questionamentos baseados nas dimensões epistemológica, cognitiva, didática e informática. A análise dessas dimensões permite constituir os primeiros requisitos para a concepção de softwares.

O micromundo, como objeto de nossa investigação, é um produto da transposição didática e informática, em nossa concepção, pois transforma um dado saber em objetos e representações que podem ser manipulados na tela do computador, com o objetivo de apoiar a aprendizagem. As definições que retomam desde a sua origem permitiram descrever suas características principais e levar em conta as especificidades de um micromundo matemático com seus objetos e operadores e suas representações que permitem que "outras matemáticas" sejam construídas na interação entre o sujeito e o sistema.

O desenvolvimento conceitual e a resolução de problemas são as principais características associadas ao micromundo matemático e o conhecimento é construído na manipulação direta dos objetos, em que ocorre a interação entre o sistema formal, o sistema fenomenal e o sistema de interpretação

Tanto na concepção quanto na utilização de micromundos, o domínio de validade epistemológico deve ser verificado. Nesse sentido, concebemos da ideia que podemos especificar um micromundo capaz de resolver problemas do Teorema Fundamental do Cálculo.

Para o processo de modelização, escolhemos a Teoria Antropológica do Didático com a integração da abordagem T4TEL para estudar a relação institucional com esse objeto matemático por meio das praxeologias presentes nos livros didáticos.

Essa escolha nos levará à análise praxeológica a partir da identificação da organização matemática a ensinar com a caracterização dos tipos de tarefas institucionais. Com isso, a nossa pretensão é de construir uma organização matemática de referência.

Vamos, então, utilizar esse modelo para descrever os ingredientes praxeológicos que compõem a organização em torno do Teorema Fundamental do Cálculo, ou seja, os tipos de tarefas e as técnicas utilizadas, que estão no nível do saber-fazer, e a tecnologia e a teoria, que estão no nível do saber.

A abordagem T4TEL fornece uma caracterização para a implementação da estrutura praxeológica que utilizamos para fazer a descrição de um micromundo. O primeiro passo é analisar os tipos de tarefas institucionais e as possíveis técnicas que permitem realizá-las. Algumas condições devem ser satisfeitas para permitir a criação de uma representação hierárquica das relações entre os tipos de tarefas, através do gerador de tipos de tarefas.

Nesse processo, a escolha das variáveis e seus valores é relevante e está relacionada às questões de pesquisas, às condições e restrições institucionais e às técnicas mobilizadas. Nessa fase, achamos interessante fazer uma análise a priori, considerando as dimensões fornecidas pela Engenharia Didático-Informática, buscando a construção do modelo praxeológico de referência.

Consideramos também levar em conta as variáveis ostensivas que permeiam toda a atividade matemática. A esse respeito, concordamos com Lagrange (2000, p. 16) que a aprendizagem envolve o desenvolvimento de técnicas em respostas às tarefas e o desenvolvimento teórico dos problemas colocados por essas técnicas. Assim, a disponibilidade de novos instrumentos fornecidos pelo computador pode constituir uma ponte entre tarefas e teorias na atividade matemática, e nesse meio, outras variáveis serão evidenciadas.

Com a formalização dos tipos de tarefas e técnicas, segue a descrição das tecnologias e teorias, organizando o discurso explicativo sobre o campo do saber-fazer.

Todo esse processo de modelização tem a finalidade de prever as situações de ensino que podem ser implementadas em um micromundo. Com isso, descrevemos um ambiente considerando a análise praxeológica dos livros didáticos e levando em conta as dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática. Para alcançar esse objetivo, o processo metodológico foi organizado através de etapas adaptadas do modelo de processo da Engenharia Didático-Informática, que contribuiu com essa análise e com o levantamento de requisitos referentes ao domínio do Teorema Fundamental do Cálculo.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

> No seu uso corrente, e de acordo com a etimologia, a palavra metodologia designa mais do que um método ou mesmo um conjunto de métodos; refere-se a este método ou conjunto de métodos e ao discurso que os descreve, explica e justifica. Uma metodologia se situa, portanto, na conexão entre o bloco prático e o bloco teórico das praxeologias de pesquisa e participa de suas relações dialéticas. É um ingrediente essencial na dinâmica das praxeologias de pesquisa (...). (ARTIGUE, 2020, p. 28, tradução nossa)[70]

Objetivos do capítulo: Desenvolver um plano geral da metodologia. Descrever as etapas e os métodos.

[70] Texto original: "Dans son usage courant, et en accord avec son étymologie, le mot méthodologie désigne plus qu'une méthode ou même un ensemble de méthodes; il renvoie à la fois à cette méthode ou cet ensemble de méthodes et au discours qui la (les) décrit, explique et justifie. Une méthodologie se situe donc à la connexion entre bloc pratique et bloc théorique des praxéologies de recherche et elle participe de leurs relations dialectiques. Elle est un ingrédient essentiel de la dynamique des praxéologies de recherche (...)."

INTRODUÇÃO

A investigação que realizamos surgiu a partir de discussões teóricas no grupo de pesquisa Atelier Digitas, essencialmente sobre a concepção e o desenvolvimento de micromundos matemáticos. Dadas as especificidades relativas a esse ambiente em particular e por ser um objeto de investigação em nossa tese, escolhemos a metodologia da Engenharia Didático-Informática (EDI), que leva em conta tanto os métodos de desenvolvimento e captação de requisitos de softwares quanto os processos de ensino e aprendizagem do conhecimento.

Como já ressaltamos, o desenvolvimento do micromundo não está no escopo desta tese, mas partimos da conjectura que a análise das praxeologias permite modelizar o domínio do conhecimento para a concepção de micromundos e essa modelização ativa a representação e mobilização de novos objetos digitais. E uma parte crucial das questões relativas à concepção de um software, segundo Tchounikine (2002, p. 17), diz respeito à representação do conhecimento. Compreendemos que essa é uma questão epistemológica que envolve a transformação do conhecimento em objetos e representações que podem ser manipuladas pelo software, assim como Balacheff (1993) denominou de transposição informática.

Nos situando no quadro da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a modelização de um conhecimento é feita em termos de praxeologias. Assim, buscamos analisar as práticas onde o conhecimento é desenvolvido, levando em conta os objetos que são mobilizados e os processos de transposição envolvidos e assim constituir uma caracterização do micromundo, descrevendo os tipos de situações que irão representar os objetos. Em nossa concepção, essa é uma das grandes contribuições da TAD para a EDI, no sentido de poder antecipar essas situações e especificar um micromundo em relação a algum domínio do conhecimento.

Partindo do pressuposto que a noção de praxeologia pode ser utilizada para modelizar qualquer prática desenvolvida pelo homem, e não somente aquelas ligadas à produção e disseminação de conhecimento matemático, adotamos a posição dada por Artigue que é possível modelizar nossas práticas de pesquisa (ARTIGUE e BOSCH, 2014, p. 249). Nesse sentido, organizamos esta metodologia a partir de uma adaptação do modelo de processo da EDI, estruturada como uma "praxeologia de pesquisa", como explicaremos adiante.

3.1 O MODELO DE PROCESSO DE SOFTWARE DA EDI ADAPTADO À PESQUISA

Iniciamos esta seção retomando o objetivo geral, em que nos propomos a realizar uma modelização do TFC para constituir a caracterização de um micromundo. Assim, faz parte de nossa investigação compreender as praxeologias que envolvem as relações institucionais dos sujeitos (professores e alunos) com o saber (TFC) diante de situações envolvendo o micromundo.

Alguns objetivos específicos estão imbricados a esse objetivo geral, como já evidenciamos anteriormente:

- Realizar a análise praxeológica de livros de Cálculo Diferencial e Integral em relação ao Teorema Fundamental do Cálculo;
- Analisar as dimensões da Engenharia Didático-Informática com base na revisão de literatura;
- Descrever os requisitos de software relativos ao Teorema Fundamental do Cálculo;
- Implementar um modelo praxeológico de referência com base na abordagem T4TEL;
- Realizar a descrição de micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo.

Com essa expectativa, organizamos as etapas do percurso metodológico alinhadas com estes objetivos, adequando o modelo de processo da Engenharia Didático Informática, como mostra o Quadro 2. A integração entre a TAD e a EDI acontece durante essas etapas à medida que as tarefas de investigação e as técnicas utilizadas, fornecidas por estas abordagens, vão compondo as justificativas pelos resultados obtidos. Com isso, dizemos que há uma dinâmica praxeológica no modelo de processo com o vínculo entre a parte prática e a parte teórica, no sentido de que uma influencia e ao mesmo tempo depende da outra.

Como já havíamos explicado no Capítulo 2, para a realização de algumas etapas, Tibúrcio (2020) sugere que sejam feitos questionamentos para dar encaminhamento aos procedimentos. As etapas de especificação, análises prévias e levantamento de requisitos, no Quadro 2, trazem esses questionamentos. As demais etapas indicam os respectivos procedimentos que foram realizados. Tanto os questionamentos quanto os procedimentos evidenciados neste quadro foram considerados como tipos de tarefas, que exigiram a escolha de determinadas técnicas, justificadas pelas abordagens teóricas que adotamos como referencial.

Quadro 2 - Percurso metodológico

ETAPAS	DIMENSÕES			
	COGNITIVA	DIDÁTICA	EPISTEMOLÓGICA	INFORMÁTICA
ESPECIFICAÇÃO	- Quais são os saberes que se pretende abordar? - Quais são os problemas percebidos que o software poderá se apresentar como solução? - Considerando as relações entre os saberes delimitados, quais conceitos e definições devem estar presentes? - Qual será o diferencial da utilização do software visado comparado a um ambiente papel e lápis?			
ANÁLISES PRÉVIAS	- Existem indicações na literatura de como o estudante aprende?	- Qual é o estado atual do ensino do saber? Quais são as consequências desse ensino?	- Quais são os aspectos do saber que podem dificultar e/ou facilitar a aprendizagem?	- Quais são as contribuições tecnológicas que o software deve conter para auxiliar na compreensão e ensino do saber?
LEVANTAMENTO DE REQUISITOS	Documentar os requisitos considerando as dimensões e respondendo: Como o ensino e a aprendizagem podem ser favorecidos? Como a compreensão dos saberes é auxiliada com o uso do software? Quais recursos e situações o software propõe para ajudar o usuário a compreender o saber? Quais funcionalidades existem em produtos da área? Quais são os possíveis diferenciais do software visado? O que o software deverá fornecer de novo referente ao que já existe?			
CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI	Análise da praxeologia apresentada nos livros didáticos.			
DESENVOLVIMENTO E EXPERIMENTAÇÃO	Criação do modelo praxeológico de referência com o gerador de tarefas.			
ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	Análise de micromundo para o ensino do TFC a partir do modelo praxeológico.			

Fonte: A autora (2020), adaptado do modelo de processo de software de Tibúrcio (2016; 2020).

A partir da adoção desse modelo de processo e da abordagem praxeológica, explicaremos cada uma das etapas dessa dinâmica operacional.

3.1.1 Etapa de Especificação

As questões levantadas nesta etapa nos levaram a designar os seguintes tipos de tarefas e técnicas correspondentes (ver Quadro 3):

Quadro 3 - Etapa de Especificação

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS
Descrever sobre o objeto matemático e os conceitos relacionados.	Consultar documentos curriculares e livros didáticos.
Descrever os problemas que o software poderá resolver.	Pesquisar sobre os problemas relativos ao ensino e à aprendizagem do Cálculo e sobre a utilização de softwares nesse domínio.
Descrever as características que diferenciam o software em questão de outros.	Pesquisar sobre as tipologias de software educativo.

Fonte: A autora (2021).

A delimitação dos objetos de pesquisa (Teorema Fundamental do Cálculo e conceitos relacionados) foi realizada nesta etapa levando em conta que, por se tratarem de objetos institucionais, eles estão presentes nos programas curriculares e nos livros didáticos das instituições de referência. É uma escolha do pesquisador, mas é importante destacar o grau de relevância que mantém a sua relação com a instituição de ensino.

A descrição dos problemas existentes que o software poderá solucionar é um tipo de tarefas que vai estar relacionada a questões do ensino e/ou da aprendizagem. Pode se basear, nessa etapa, em dados empíricos, mas consideramos que as publicações de trabalhos, em forma de artigos, dissertações e teses, podem revelar outros dados não previstos. Diante disso, consultamos o portal de periódico da CAPES/MEC[71], que possui um vasto acervo de trabalhos publicados em diversas línguas, a plataforma ERIC[72], que é um banco de dados com uma grande quantidade de textos na área educacional, e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações[73] (BDTD). Com isso, selecionamos as publicações que se referiam ao ensino e aprendizagem de Cálculo, com e sem utilização de softwares educativos, o que nos permitiu fazer as primeiras descrições.

Para descrever as características do software, que é objeto de nossa pesquisa, em comparação com outros, fizemos uma pesquisa, também em periódicos, sobre as tipologias de software educativo, que permitiu diferenciá-lo dentre as distintas classificações que foram encontradas.

Finalmente, a descrição dessa etapa foi realizada justificando a razão das escolhas dos objetos e problemas de pesquisa e levantando conjecturas para serem confrontadas com as etapas seguintes.

3.1.2 Etapa de Análises Prévias

Nesta etapa, as questões abordadas no Quadro 2 nos levaram a fazer um levantamento analítico da revisão de literatura para compreender os fenômenos relativos às dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática do Teorema Fundamental do Cálculo. Com isso, os primeiros requisitos de software e variáveis específicas do objeto matemático foram identificados.

---

[71] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior/Ministério da Educação do Brasil. Disponível em: < https://www-periodicos-capes-gov-br.ezl.periodicos.capes.gov.br/index.php?>. Acesso em: 05 nov. 2021.
[72] *Education Resources Information Center*. Disponível em: < https://eric.ed.gov/>. Acesso em: 05 nov. 2021.
[73] Disponível em: < https://bdtd.ibict.br/vufind/ >. Acesso em: 05 nov. 2021.

O tipo de tarefas e a técnica aplicada nesta etapa estão no Quadro 4.

Quadro 4 - Etapa de Análises Prévias

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS
Fazer um levantamento analítico com base nas dimensões da EDI	Fazer nova pesquisa na literatura sobre os objetos de pesquisa; Analisar os trabalhos escolhidos na revisão de literatura com base nas dimensões da EDI; Descrever os resultados em uma tabela.

Fonte: A autora (2021).

Mesmo com a revisão de literatura realizada na etapa de Especificação, houve a necessidade de fazer uma outra busca para atender aos questionamentos realizados nas distintas dimensões. Com isso, outras referências foram agregadas, como alguns livros que tratavam sobre a história do Cálculo e outras referências sobre os softwares matemáticos.

A análise epistemológica do Teorema Fundamental permitiu caracterizar esse conceito em sua gênese histórica e o seu lugar atual na diversidade de problemas onde ele intervém como ferramenta, e ainda, identificar outros conceitos que estão relacionados a ele.

Em relação à dimensão didática, o Teorema Fundamental foi analisado do ponto de vista que geralmente é ensinado nas instituições. Já a dimensão cognitiva, a análise levou em conta as características cognitivas dos estudantes diante do ensino habitual (erros, dificuldades, concepções, etc.).

Quanto à perspectiva informática, a integração do software traz mudanças que interferem tanto na dimensão didática quanto na dimensão cognitiva. Assim, a análise buscou identificar os tipos de mudanças, contribuições e restrições no sistema didático com essa integração.

A descrição dos resultados das análises numa tabela permitiu a categorização dos requisitos na etapa seguinte, como iremos discutir na próxima seção.

3.1.3 Etapa de Levantamento de Requisitos

O Quadro 5 apresenta os tipos de tarefas e técnicas utilizadas nesta etapa.

Quadro 5 - Etapa de Levantamento de Requisitos

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS
Identificar as necessidades para o ensino e a aprendizagem e como estas podem ser satisfeitas com o software	Categorizar os resultados das análises das dimensões epistemológica, didática e cognitiva
Propor funcionalidades e situações de outros softwares	

Identificar as características que o software precisa conter para alcançar os objetivos especificados	Categorizar os resultados das análises da dimensão informática
Organizar os requisitos por dimensões	Selecionar e mapear os requisitos; Desenhar um quadro, separando os requisitos por cada dimensão
Analisar os requisitos quanto à pertinência, consistência e integralidade	Comparar os requisitos levantados em relação à especificação e à análise prévia

Fonte: A autora (2021).

A categorização dos resultados obtidos nas análises prévias foi realizada a partir da organização, em um quadro, dos descritores[74] relativos às dimensões cognitiva, didática, epistemológica e informática. Com isso, selecionamos os requisitos e organizamos em uma tabela, onde pudemos analisar quanto aos critérios elencados pela EDI.

A respeito da análise de requisitos, esta é uma etapa essencial na engenharia de softwares, mas os critérios são muito pouco discutidos na literatura. Em diversos trabalhos envolvendo a criação ou adaptação de processos de software percebe-se que a seleção desses critérios ainda é feita de maneira *ad-hoc*, deixando a responsabilidade unicamente para o engenheiro de software (BRASIL, 2014). Isto possibilita que o processo gerado possa vir a ter requisitos incompletos e/ou inconsistentes impactando diretamente na qualidade do produto construído e no tempo gasto para a execução do processo.

O levantamento de requisitos da Engenharia Didático-Informática é realizado em quatro etapas, sendo que na última é recomendado fazer a análise dos requisitos.

> 4. Neste momento, a equipe irá verificar os requisitos quanto à pertinência, consistência e integralidade. Neste processo podem ser descobertos erros quanto aos requisitos levantados. Assim, os requisitos podem ser modificados, a fim de corrigir os problemas encontrados. (TIBÚRCIO, 2020, p. 173).

Apesar desses critérios não serem discutidos por Tibúrcio, acreditamos que a sua garantia possa tornar os requisitos mais adequados às características de um micromundo. Então, adotamos aqui uma estratégia para a análise dos requisitos, considerando os critérios citados, e assim poder também contribuir para o aperfeiçoamento do processo de software educativo da EDI.

No caso de um software do tipo educativo, precisamos verificar a sua pertinência educacional, ou seja, se ele propicia situações que garantam a eficácia dos resultados na aprendizagem, utilizando critérios relativos aos aspectos cognitivo e didático, levando também em conta os aspectos epistemológicos, além das características informáticas que possuem para favorecer o processo de construção do conhecimento.

[74] Conjunto de características que descrevem ou especificam o saber.

A consistência de um requisito tem a ver com a relação existente entre o conjunto de requisitos. Será consistente se nenhum subconjunto destes requisitos entrar em conflito com os demais. Além disso, deve garantir certa estabilidade ao longo do tempo, mas concomitantemente, permitir ajustes para favorecer a sua evolução. A consistência entre os requisitos também deve ser verificada, sendo que neste caso se observa a não duplicação ou contradição. Por exemplo, dois requisitos que satisfazem o mesmo objetivo ou dois requisitos que se contradizem para a realização de uma determinada tarefa podem afetar a consistência do processo de software. Deve-se, portanto, garantir a completude e contribuir com a integralidade.

A verificação da integralidade tem o propósito de averiguar se os requisitos estão de acordo com as especificações preestabelecidas, se representam os objetivos que se pretende atingir e se está bem descrito ou precisa ser melhor clarificado.

A utilização desses critérios se faz necessária para que se possa conhecer o software em relação aos seus limites e possibilidades para a educação, ao passo que se pretende garantir a qualidade no processo de software.

Nesta etapa já conjecturamos sobre possíveis variáveis que irão intervir na modelização do Teorema Fundamental com o gerador de tarefas, na etapa de Desenvolvimento e Experimentação.

3.1.4 Etapa de Concepção e Análise a Priori

Esta etapa corresponde à análise de livros de Cálculo escolhidos nos programas curriculares das instituições e o desenvolvimento dos principais conceitos teóricos que fundamentam a pesquisa, como evidenciado no Quadro 6.

Quadro 6 - Etapa de Concepção e Análise a priori

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS
Desenvolver os referenciais teóricos e metodológicos	Pesquisar sobre os conceitos teóricos metodológicos
Analisar a praxeologia apresentada nos livros de Cálculo	Escolher os livros de Cálculo que serão analisados; Descrever a organização praxeológica em torno do TFC

Fonte: A autora (2021).

A análise a priori realizada nesta etapa permitiu descrever e analisar, de um modo geral, o modelo praxeológico do saber a ensinar nos cursos de Cálculo das instituições de ensino superior. A concepção se refere às situações de uso, portanto teve o objetivo de prever os tipos de situações que poderiam ser criadas com a integração do micromundo com base nas análises prévias e identificação dos requisitos e com a análise a priori.

A Teoria Antropológica do Didático e a abordagem T4TEL forneceram fundamentos teóricos e metodológicos, dentre os quais, as noções de praxeologia, objetos ostensivos, sistema de variáveis e gerador de tipos de tarefas, para a descrição e análise dos modelos praxeológicos do saber a ensinar e a construção do modelo praxeológico de referência para constituir a caracterização do micromundo.

A Engenharia Didático-Informática permitiu modelizar a praxeologia desta pesquisa, fornecendo o modelo de processo para organizar as etapas com embasamento teórico que justifica a dinâmica operacional entre os tipos de tarefas e as maneiras de realizá-las.

Na estrutura teórica da TAD, a relação institucional com os objetos do saber matemático, em particular com o Teorema Fundamental do Cálculo, é percebida a partir da análise dos programas dos cursos, dos livros didáticos e das observações *in loco* do funcionamento do seu ensino. A análise do livro é bastante representativa, visto que apenas os programas não permitem definir completamente essa relação. E além do mais, quando não se tem acesso ao funcionamento da sala de aula, a análise dos livros é o principal elemento para entender ou caracterizar o sistema didático em um determinado momento. (CHAACHOUA e COMITI, 2010, p. 772)

Uma técnica ou maneira de realizar essa análise é descrever a organização praxeológica. Mas, antes, é preciso escolher os livros que serão analisados. Segundo os autores, com a escolha dos livros, o pesquisador faz perguntas de acordo com uma metodologia de análise que permite identificar elementos que especificam as suas características, o contexto de sua produção e os aspectos da relação institucional. Portanto, realizamos uma busca de programas curriculares com a disciplina de Cálculo em instituições de ensino superior brasileiras e relacionamos em torno de 10 (dez) livros. Destes, escolhemos 3 (três) que apareciam em cursos de distintas áreas (Matemática, Engenharia, Economia, etc.) e por serem mais acessíveis.

A organização praxeológica foi inicialmente realizada a partir do modelo de estruturas organizacionais (HENRIQUES, NAGAMINE e NAGAMINE, 2012), com base em uma leitura vertical e horizontal, descrevendo as organizações didáticas e matemáticas a nível global, regional e local. Pretendendo uma análise situada no local onde “vive” o Teorema Fundamental do Cálculo nesses livros, focalizamos nosso olhar sobre os conceitos que envolvem o teorema fundamental e consideramos as técnicas desenvolvidas pelos autores de acordo com os critérios apresentados por Chevallard (1998, p. 25-27):

- Quanto aos tipos de tarefa:

(i) *Critério de identificação:* Os tipos de tarefas estão claramente apresentados e bem identificados? Eles são representados por um *corpus* de conhecimentos em torno do teorema fundamental do cálculo suficientemente numeroso e de adequado grau de dificuldade?

(ii) *Critério das razões de ser:* As justificativas para as razões de ser dessas tarefas estão explícitas?

(iii)*Critério de relevância:* Os tipos de tarefas favorecem o detalhamento dos conceitos matemáticos relacionados ao teorema fundamental do cálculo?

- Quanto aos tipos de técnicas: Além de se apoiar nos mesmos critérios discutidos para a avaliação de tipos de tarefa, é preciso também questionar: Elas são efetivamente desenvolvidas ou somente esboçadas? São fáceis de usar? São suficientemente inteligíveis?
- Quanto ao bloco teórico-tecnológico: Os critérios anteriores também foram aqui considerados, além de avaliar: Para cada técnica é oferecida uma justificativa, ou ela é apenas dada como certa ou óbvia? As justificativas são próximas às formas canônicas em matemática (cientificamente válidas)? São adaptadas às suas condições de uso? Os resultados tecnológicos são disponibilizados e otimizados de forma eficaz, ou seja, podem ser explorados para produzir novas técnicas ou resolver novas tarefas?

A análise levou em conta a influência dos objetos ostensivos no desenvolvimento das técnicas para realizar as tarefas e permitiu conjecturar sobre a existência de outros objetos que podem ser mobilizados com a intermediação do software.

3.1.5 Etapa de Desenvolvimento e Experimentação

Nesta etapa, o objetivo principal foi criar o modelo praxeológico de referência com o gerador de tarefas. No entanto, foi necessário também definir o sistema de variáveis. No Quadro 7 apresentamos as técnicas que utilizamos para realizar esses tipos de tarefas.

Quadro 7 - Etapa de Desenvolvimento e Experimentação

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS
Definir o sistema de variáveis	Escolher as variáveis e os valores; Organizar uma tabela com as variáveis e os valores que podem assumir; Criar a representações hierárquica das relações entre as variáveis
Criar o modelo praxeológico com o gerador de tarefas	Definir os tipos e subtipos de tarefas;

	Analisar tipos e subtipos de tarefas a partir do gerador de tarefas e do sistema de variáveis; Caracterizar os escopos das técnicas; Descrever as tecnologias e teorias

Fonte: A autora (2021).

A escolha das variáveis foi realizada com base no levantamento de requisitos e na análise praxeológica dos livros de Cálculo. A organização em uma tabela permitiu sistematizar os tipos de variáveis, considerando a dimensão ostensiva, com seus respectivos valores que podem assumir, formando com isso um sistema de variáveis.

A criação do modelo praxeológico fundamentou-se na abordagem T4TEL com o gerador de tipos de tarefas e o sistema de variáveis.

3.1.6 Etapa de Análise a Posteriori e Validação

Assim como está evidenciado no Quadro 8, esta etapa foi destinada a fazer a caracterização de um micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo. Para isso, descrevemos as funcionalidades com os tipos de situações a serem implementadas no micromundo, aditada a uma análise descritiva com base no modelo praxeológico de referência.

Quadro 8 - Etapa de Análise a Posteriori e Validação

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS
Fazer a caracterização de um micromundo para o ensino do TFC	Organizar uma tabela com as funcionalidades do micromundo em cada tipo de situação; Analisar o micromundo com base no modelo praxeológico

Fonte: A autora (2021).

Finalizamos a explicação desta última etapa reconhecendo que a dimensão teórica-tecnológica da praxeologia desta pesquisa, constituída pelos elementos da EDI e da TAD, permitiu descrever e justificar a modelização realizada em torno do Teorema Fundamental do Cálculo. A validação consistiu em verificar o domínio de validade do modelo praxeológico de referência para a análise do micromundo. Portanto, consideramos útil questionar sobre o atendimento aos objetivos esperados e as contribuições do micromundo no ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental.

No próximo capítulo, descrevemos os resultados e as análises dessa praxeologia de pesquisa, como definido por Artigue (2020) no início deste capítulo, que assim acabamos de apresentar.

CONCLUSÃO

O objetivo deste capítulo foi desenvolver a metodologia que adotamos em nossa pesquisa, em que nos propomos a realizar uma modelização do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) para constituir a caracterização de um micromundo.

A Engenharia Didático-Informática, a EDI, forneceu o modelo de processo que adaptamos às etapas da pesquisa, constituindo uma dinâmica praxeológica na medida em que as tarefas de investigação e as técnicas utilizadas foram sendo justificadas pela integração entre as abordagens da TAD e da EDI.

Assim, o percurso metodológico foi composto por seis etapas: Especificação; Análises Prévias; Levantamento de Requisitos; Concepção e Análise a Priori; Desenvolvimento e Experimentação; e Análise a Posteriori e Validação. Em cada uma foi apresentado um conjunto com os tipos de tarefas e técnicas para realizá-las, bem como um discurso que justificava tais escolhas. Os tipos de tarefas foram formulados principalmente pelas questões de pesquisa e os problemas abordados. E as técnicas, correspondendo às maneiras de realizar os tipos de tarefas.

A etapa de Especificação foi organizada para definir e descrever os objetos de pesquisa; as Análises Prévias, para fazer um levantamento analítico desses objetos; o Levantamento de Requisitos teve como objetivo mapear, organizar e analisar o conjunto de requisitos; a etapa de Concepção e Análise a Priori foi para desenvolver os referenciais teóricos e metodológicos e fazer a análise dos livros de Cálculo; a etapa de Desenvolvimento e Experimentação destinou a organizar o sistema de variáveis e criar o modelo praxeológico com o gerador de tarefas; e, por fim, a Análise a Posterior e Validação foi a etapa destinada a fazer a caracterização de um micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo.

Esta organização levou a uma maior produtividade no desenvolvimento da pesquisa ao permitir considerar tanto a parte prática como a parte teórica interagindo em todas as etapas do processo. Nesse sentido, podemos dizer que o confrontamento das análises a priori e posteriori, a validação das hipóteses, e até mesmo o levantamento dos dados e a experimentação, permitiram identificar algumas condições e restrições institucionais na produção de conhecimentos que levam à concepção de micromundos.

4 DINÂMICA OPERACIONAL

> Mas raras são as situações de ensino e acção colectiva nas quais a origem desses dados é exposta e criticada. No entanto qualquer um sabe que esses *factos* que são tidos como *dados*, para serem *factos* tiveram que ser *feitos*, e que esses dados representando *feitos* (mais do que *factos*) tiveram que ser *construídos ou modelizados*, sob a forma de sistemas de símbolos artificiais. (LE MOIGNE, 2007, p. 112)

Objetivos do capítulo: Apresentar os resultados obtidos nas etapas metodológicas. Analisar a construção do modelo praxeológico. Propor a caracterização de um micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo.

INTRODUÇÃO 1

Apresentamos, nesta Primeira Parte do Capítulo 4, os resultados obtidos nas etapas de Especificação e Análises Prévias. Faremos inicialmente um apanhado geral sobre a problemática em torno da compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo nas dimensões epistemológica, cognitiva, didática e informática. Em seguida, discutiremos, em cada seção, os resultados correspondentes, fazendo uma análise sintética ao final de cada uma.

COMPREENSÃO DO DOMÍNIO NAS DIFERENTES DIMENSÕES

> Então por que pinta?
> Por nada. Procuro simplesmente reproduzir o que vejo.
> (W. Somerset Morgan)[75]

Perante o objetivo proposto nesta tese, buscamos conhecer com maior profundidade, e o Teorema Fundamental do Cálculo, em sua origem, nas relações com o ensino e com a aprendizagem, enfim, questionando sobre a sua real existência, ou não, nas instituições, e quais as condições que influenciam a sua produção, utilização e transposição.

Para a Didática da Matemática, esse estudo se refere à ecologia do saber, preocupando-se com os modos de "vida" e as funcionalidades do objeto do saber. Para a Teoria Antropológica do Didático, a existência do objeto vai depender do reconhecimento e da relação existente ao menos com uma pessoa ou uma instituição com esse objeto. Além disso, para a Transposição Didática, um objeto do saber que foi instituído para ser ensinado, passa por um conjunto de transformações adaptativas para torná-lo apto a se tornar um objeto de ensino. E com a introdução do computador e, de modo particular, o micromundo, novos fenômenos ocorrem com a transposição do saber, agora implementados no computador e modelizados através do processo de Transposição Informática.

Com o nosso olhar de pesquisadores, à luz dessas abordagens teóricas, buscamos compreender como esses fenômenos se revelam por meio das praxeologias que existem, através das relações com o Teorema Fundamental do Cálculo, no sistema didático que o micromundo faz parte. Essa compreensão foi possível mediante uma revisão sistemática da literatura sobre o tema e também uma série de análises baseadas nas dimensões propostas pela Engenharia Didático-Informática, consistindo em:

---

[75] Citado por MEDEIROS, L. A. Aspectos do Teorema Fundamental do Cálculo. Conferência proferida na Faculdade de Matemática – UFPA. Belém, 2008. Disponível em: <http://www2.im.ufrj.br/medeiros/Linked Documents/AspectosTeoremaFundamentalCalculo.pdf>. Acesso em: 07 nov. 2021.

- análise epistemológica, evidenciando os conceitos relacionados, como eles foram construídos ao longo da história, problemas que culminaram na sua origem, além de avaliar as condições e restrições que levaram à sua criação e difusão;
- análise cognitiva, percebendo as concepções, dificuldades e obstáculos na aprendizagem dos estudantes;
- análise didática, identificando as condições e restrições no ato de ensinar, os tipos de tarefas que são apresentados aos alunos e os meios para resolvê-los; e
- análise informática, em relação à influência que o software exerce sobre o ensino e a aprendizagem, às características e funcionalidades dos distintos softwares e sobre as possibilidades e restrições computacionais.

Apesar de cada uma ter sido evidenciada de modo particular, pudemos observar as relações existentes entre estas dimensões, o que contribuiu, posteriormente, para a análise dos requisitos.

As seções seguintes trazem o resultado dessas análises.

4.1 O MICROMUNDO E O CONTEXTO DO TFC

Na etapa de Especificação, nos propusemos a fazer a delimitação do objeto matemático e contextualizar o micromundo nas situações envolvendo esse objeto.

Como já evidenciado, o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é o objeto matemático de nossa pesquisa, possuindo grande relevância para o Cálculo Diferencial e Integral pela relação existente entre os processos de integração e derivação.

Esse teorema foi desenvolvido ao longo da história do Cálculo enquanto os matemáticos buscavam resolver dois problemas em particular, que hoje conhecemos como integração e derivação. O processo de integração já era conhecido pelos matemáticos gregos da antiguidade, onde se calculavam áreas e volumes usando um processo de aproximação que ficou conhecido como “método da exaustão”. Por outro lado, as ideias básicas do processo de derivação já apareciam no século XIV e está ligado ao problema de se determinar a reta tangente a uma curva em um ponto.

Diante da relação inversa que existe de um processo sobre o outro, os referidos problemas podem ser resolvidos juntos, e é aí que está a origem do Teorema Fundamental. No entanto, o que evidenciamos é que, no ensino, se dá pouca ênfase a essa relação, e os estudantes têm apresentado muitas dificuldades com os conceitos envolvidos, como função e taxa de

variação (CARLSON, SMITH e PERSSON, 2003). Nesse aspecto, os ambientes computacionais têm sido valiosos ao fornecer novas possibilidades de aprendizagem. Atividades que envolvem experimentação e uso do computador têm forte influência no desenvolvimento cognitivo em matemática, pois consideram aspectos numéricos e simbólicos do pensamento matemático, além de aspectos visuais (TALL, 2000).

O aspecto visual foi enaltecido em todas as pesquisas que envolviam o teorema fundamental como um dos requisitos primordiais para a apreensão e mobilização dos conceitos. Alonso (2017) investigou esse aspecto e reconheceu a importância do uso de softwares para explorar a visualização e o dinamismo na representação dos objetos. Também inferiu sobre a necessidade de propor atividades variadas que representem a ideia expressa pelo Teorema Fundamental para que a imagem conceitual seja ampliada.

Além do aspecto visual e da manipulação entre os objetos, Grande (2013) também destacou a importância da interação entre os alunos e o software para estabelecer a inter-relação entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal, sendo que estes devem ser explorados na atividade matemática.

Em nossa investigação, um pressuposto que levantamos é que a implementação das atividades depende, em grande parte, das orientações do professor, pois a interação com o software exigirá dos alunos a mobilização de novas técnicas, além das produzidas nas atividades realizadas no ambiente papel e lápis. A esse respeito, a pesquisa de Vianna (1998) ressaltou uma dificuldade dos alunos, a de associarem os objetos aos conceitos. Por exemplo, as imagens dos gráficos de $f'(x)$ e $F(x)$ não eram concebidos como representantes das próprias funções. Esse é um obstáculo que deve ser levado em consideração no desenvolvimento das atividades, associado aos objetos ostensivos e não ostensivos a que se referem. Portanto, as atividades que vão ser desenvolvidas com o software devem ajudar a mobilizar técnicas que deem importância a esses objetos.

Buscamos conhecer os tipos de software educativo disponíveis para o ensino de Cálculo e, dadas as especificidades relativas à aprendizagem do objeto visado, consideramos que o micromundo permite abordar e resolver problemas de distintas classes, possibilitando a interação dinâmica entre os sujeitos e os objetos matemáticos por meio de suas ferramentas de construção, dinamismo, visualização e validação, aspectos preponderantes evidenciados nas pesquisas.

Inicialmente, nos questionamos se os softwares educativos disponíveis oferecem funcionalidades como de um micromundo, que sejam eficazes para a resolução de tarefas

modeladas de Cálculo, dada a extensa dimensão de conteúdo, áreas de aplicação e distintos usuários referentes a esse campo do conhecimento. Com as pesquisas que analisamos, identificamos alguns recursos de software que contribuem para a aprendizagem do TFC, dentre eles: representação e mudança de representação, construção de conceitos, construção de registros algébrico e gráfico, manipulação dinâmica e interativa e visualização.

Percebemos que essas características devem ser consideradas no desenvolvimento de micromundos, relacionando à possibilidade de promover a interação e possibilitar a construção de novos objetos. Com a interação, "o usuário aciona os operadores de criação, manipulação de objetos e relações e recebe respostas diversas (representação, movimento, etc.)" (BELLEMAIN, 2002, p. 56). Nesse duplo processo ocorre a construção de conhecimentos sobre os objetos e as respostas (*feedback*) que vão determinar novos comandos de ação.

Para uma estrutura geral de micromundo, Hoyles (1993) defende que ele deve:

- Oferecer um conjunto cuidadosamente projetado de ferramentas de software, funcional e divertido;
- Envolver os alunos e incentivá-los a distinguir a maneira como as ferramentas formam construções e as relações entre os feedbacks, para que eles possam se apropriar das características matemáticas incorporadas no micromundo;
- Estruturar as atividades de forma a promover a generalização e síntese de ideias em uma estrutura matemática coerente.

É preciso considerar, no desenvolvimento das atividades com o micromundo, as possíveis relações que os alunos vão ter com os objetos para a construção dos significados. Espera-se que elas sejam de natureza exploratória, pois segundo Balacheff e Kaput (1997, p. 479), uma característica típica de um micromundo é a de oferecer um ambiente aberto, onde os estudantes podem explorar livremente situações problemáticas. Ao mesmo tempo, pode fornecer em sua configuração a personalização das restrições sobre o que pode ser manipulado para a resolução dos problemas (BALACHEFF e SUTHERLAND, 1994, p. 147).

No entanto, apesar da variedade de experiências que o micromundo pode desempenhar, isso não é suficiente para garantir o aprendizado de um conteúdo específico (BALACHEFF e KAPUT, 1997, p. 479), sendo necessário novas pesquisas para identificar as possíveis variáveis

didáticas[76] que poderão intervir no ambiente para validar o seu domínio epistemológico (BALACHEFF e SUTHERLAND, 1994, p. 148).

As análises relativas às dimensões da Engenharia Didático-Informática, discutidas nas próximas seções, vão poder mostrar outros aspectos que irão constituir algumas dessas variáveis.

4.2 ASPECTOS HISTÓRICOS E CONCEITUAIS DO TFC

Reconhecemos que o Cálculo Diferencial e Integral ocupa um lugar de destaque entre as disciplinas de Matemática do ensino superior devido às extensas contribuições e aplicações em diversas áreas do conhecimento. Como dizia Eves (2011, p. 417), os seus principais conceitos "têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta".

Essas contribuições atribuídas ao Cálculo se devem ao empenho dos matemáticos em resolver problemas de diversas naturezas, desenvolvendo e aperfeiçoando cada vez mais os métodos de resolução. Por meio da evolução histórica, observamos como as ideias surgiram, como a sociedade foi se desenvolvendo e como os conceitos matemáticos foram se originando e sendo transformados e utilizados.

Como já ressaltamos, dois problemas particulares permearam os pensamentos de vários filósofos e matemáticos ao longo do tempo: um deles foi a quadratura (processo de determinar áreas) e, o outro, o traçado de tangentes a curvas. Eles originaram os processos que conhecemos hoje como integração e derivação que, não aparentemente, são inversos um do outro, sendo que essa relação se estabelece com o Teorema Fundamental do Cálculo.

Nesse contexto, realizamos uma análise epistemológica, buscando aspectos relativos à transposição desse saber, como ele foi produzido e passou a ser ensinado, e como os conceitos matemáticos envolvidos a esse teorema podem interferir na aprendizagem. A seguir, mostraremos os resultados dessa análise.

[76] Os autores apoiam-se em Artigue para se referirem a "Essas variáveis, que podem ser manipuladas pelos professores a fim de apoiar os alunos a terem uma forma direta ou indireta de influenciar os procedimentos e estratégias que utilizam [...] (Artigue, 1992, p. 50)". (Texto original: Such variables which can be handled by teachers in order to support learners to have a direct or an indirect way of influencing the procedures and strategies they use, are what we call *didactical variables* (Artigue, 1992, p. 50)).

4.2.1 Da Grécia Antiga ao Século XVII

O estudo do Cálculo nos tempos atuais é resultado de um longo processo histórico que perdurou por vários séculos, desde quando os antigos gregos buscavam resolver questões relacionadas com o cálculo de áreas.

Na Grécia Antiga, o filósofo Zenão de Eleia (c. 450 a.C.) em seus paradoxos, já propunha a questão da continuidade e infinitésimos em oposição aos discretos e finitos, que mais tarde culminou no estudo dos limites.

O sofista Antífon (c. 430 a.C.) deu grande contribuição ao problema da quadratura do círculo, antecipando a ideia de que, duplicando sucessivamente a quantidade de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono finalmente se exauria, originando assim a ideia do método de exaustão de Eudoxo (c. 370 a.C.), com a seguinte proposição:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 419).

Eudoxo resolveu os problemas de incomensurabilidade que outros matemáticos não haviam resolvido em sua época. Um dos problemas era inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e por fora da figura curva, e ir multiplicando-se indefinidamente o número de lados, mas não sabiam como concluir, pois não conheciam o conceito de limite. Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o axioma que hoje tem o nome de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego do cálculo integral.

Boyer (1974, p. 68) aponta[77] Eudoxo como o provável originador do cálculo integral, com a maior contribuição à matemática dos membros da Academia Platônica. Um dos exemplos mais antigos de Eudoxo, aplicado por Arquimedes para determinação de áreas, foi da quadratura de um segmento parabólico:

> Sejam C, D, E os pontos do arco de segmento parabólico (ver Figura 97) obtidos traçando-se LC, MD, NE paralelos ao eixo da parábola pelos pontos médios L, M, N de AB, CA, CB. Usando a geometria da parábola, Arquimedes mostrou que
>
> $$\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}.$$

[77] Consideração feita a partir da demonstração do teorema que diz que as áreas dos círculos são proporcionais aos quadrados sobre seus diâmetros, como sendo o primeiro teorema preciso relativo a figuras curvilíneas (BOYER, 1974, p.68).

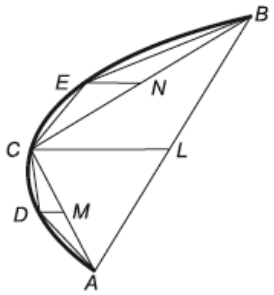


Figura 97

Repetindo sucessivamente esse raciocínio conclui-se que a área do segmento parabólico é dada por

$$\Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \cdots$$
$$= \Delta ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right)$$
$$= \frac{4}{3}\Delta ABC$$

(EVES, 2011, p. 421).

Nessa demonstração foi utilizada a fórmula da soma geométrica, enquanto Arquimedes fazia pelo método de dupla *reductio ad absurdum*[78], quando mostra que a área do segmento parabólico não pode exceder 4/3 da área do primeiro triângulo inscrito e, da mesma forma, que não pode ser nem maior nem menor do que esse valor. Atualmente, para nós, bastaria utilizar o conceito de limite, no entanto, como os matemáticos gregos, e assim como Arquimedes, evitavam o infinito a todo custo, ele conclui então que o resultado da soma dos triângulos deve ser igual a esse número.

Ávila (2009) destaca a preocupação com o rigor e com a estrutura lógica das demonstrações nas obras de Arquimedes (287-212 a.C.), sem dar vestígios dos processos de descoberta, o que era comum entre os gregos. No livro "O Método", descoberto, estudado e codificado pelo professor dinamarquês de filosofia Johan Ludvig Heiberg (1845-1928), Arquimedes descreve um "método mecânico" para investigar questões matemáticas, que ele encaminhou ao amigo Erastóstenes acompanhado de uma carta que dava indícios da sua utilidade para descobertas matemáticas. Assim destaca a semelhança desse método com o "método dos indivisíveis", criado no século XVII e que originou o Cálculo Diferencial e Integral.

> Essa semelhança entre os dois métodos deixa claro que os matemáticos do século XVII seguiam a mesma trilha de Arquimedes, com a única diferença de que Arquimedes, com ele próprio diz, entendesse claramente que "certas coisas (...)

[78] Termo em latim que significa "redução ao absurdo", que consiste em um método de demonstração indireta em que se admite inicialmente a negação de determinada afirmação como verdadeira e, durante o processo de prova, surge como consequência uma contradição que torna um absurdo a negação da hipótese inicial.

> tivessem de ser demonstradas pela Geometria". Mas, enquanto Arquimedes conseguiu suprir essas demonstrações em seu tempo, o mesmo não aconteceu com os matemáticos dos séculos XVII e XVIII, que cuidaram mais em desenvolver as novas técnicas do Cálculo do que em lhes suprir fundamentos lógicos. Mas acertaram muito bem, pois foi esse desenvolvimento que levou a uma grande maturação do Cálculo e acabou por abrir caminho, a partir de fins do século XVIII e início do século XIX, à construção do rigor no Cálculo e nas outras disciplinas matemáticas. (ÁVILA, 2009, p. 100).

Contudo, a abordagem feita no livro "O Método" por meio de fatos geométricos era considerada por Arquimedes apenas como instrumentos de descoberta. Sob o ponto de vista do rigor, demonstrava em seu livro "Sobre a Esfera e o Cilindro" os resultados sobre o volume e a área da esfera através do método de exaustão e o método de dupla redução ao absurdo, já citados anteriormente, e que podemos considerar como os primeiros resultados significativos na resolução do problema da quadratura.

Os matemáticos do Ocidente durante o século XIV tinham interesse por séries infinitas e, embora Arquimedes já tivesse apresentado o cálculo da soma de uma progressão geométrica infinita, assim como os gregos, evitavam o infinito – o chamado *horror infiniti*; enquanto que os filósofos do fim da Idade Média já faziam referência ao infinito. A matemática arquimediana, essencialmente estática, perdurou por vários séculos. Nesse meio tempo, acontecimentos históricos influenciaram sobremaneira o progresso da matemática.

> Acompanhamos a história da matemática na Europa através da Idade das Trevas desde os primeiros séculos medievais ao ponto alto no tempo dos escolásticos. Desde o nadir no sétimo século até a obra de Fibonacci e Oresme no século treze e no quatorze o progresso foi notável; mas os esforços somados de todas as civilizações medievais não foram em nenhum sentido comparáveis às realizações matemáticas da Grécia antiga. (BOYER, 1974, p. 194).

O século XIV enfrentou várias crises, provocando perturbações à inspiração matemática. A Inglaterra e a França foram devastadas pela Guerra dos Cem Anos e pela Guerra das Rosas, conquanto as universidades italianas, alemãs e polonesas durante o século quinze avançaram no desenvolvimento matemático.

Cerca de dezoito séculos depois de Arquimedes, o matemático francês François Viète (1540 – 1603), em seus trabalhos em trigonometria, encontrou uma fórmula notável envolvendo o número π:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

> Em 1593, a descoberta desse produto infinito, escrito pela primeira vez como uma fórmula matemática, foi um marco na história da matemática, permitindo assim a aceitação dos processos infinitos na matemática. (MAOR, 2008, p. 66).

Johannes Kepler (1571 – 1630) foi também um matemático que necessitava dos métodos de Arquimedes, no entanto buscava evitar o rigor do método de exaustão, fazendo uso dos indivisíveis ou quantidades infinitamente pequenas. Segundo Eves (2011, p. 424), ele foi um dos primeiros europeus modernos a desenvolver ideias relativas a infinitésimos recorrendo a procedimentos de integração a fim de calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho.

Kepler descreve em seu livro *Nova stereometria doliorum vinartorum* (Nova geometria sólida dos barris de vinho, 1615) a aplicação do método dos indivisíveis em três dimensões para encontrar os volumes de sólidos de revolução. De um modo intuitivo para o moderno cálculo integral, ele considerava um sólido como um conjunto de infinitas fatias finas, ou lâminas, e somava seus volumes individuais.

Embora o método dos indivisíveis funcionasse em muitos casos particulares, ainda dependia muito de se encontrar alguma fórmula adequada para o somatório. Como exemplo, para a área da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ não existia fórmula para o somatório dos inversos dos inteiros, ou seja, faltava a generalidade e a moderna técnica de integração. Neste caso específico, não era possível obter uma quadratura por meios puramente geométricos com o método da exaustão, mas com a introdução dos processos infinitos esse problema estava próximo da solução, com a invenção da geometria analítica no século XVII.

> O Grego "horror do infinito" impedira o desenvolvimento de uma teoria utilizável dos limites para substituir as onipresentes provas de dupla *redutio ad absurdum*. Mas, como resultado das especulações escolásticas medievais sobre o infinito e o continuum, os matemáticos do século XVII não estavam mais relutantes em introduzir técnicas infinitesimais. Enquanto a insistência grega no rigor absoluto havia banido as magnitudes irracionais do campo do número (e, portanto, o número da geometria), agora os números irracionais passaram a ser empregados livremente, embora ainda não tivessem base lógica como números e só pudessem ser interpretados rigorosamente como magnitudes geométricas. Além disso, a álgebra simbólica de Viète e Descartes facilitou o desenvolvimento de técnicas formais que enfatizavam o método computacional mais do que a prova lógica. Finalmente, a representação algébrica de curvas (geometria analítica) permitiu a formulação rápida e fácil de novos

> e diversos problemas de área e volume para investigação. (EDWARDS JR., 1979, p. 99, tradução nossa)[79].

Não há certezas sobre quem inventou a geometria analítica, mas há de se compreender, segundo Eves (2011, p. 382), que a sua essência reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente, tendo que esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim é que a maioria dos historiadores considera que a origem desse campo da matemática é atribuída aos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat, mas outros matemáticos que o precederam fizeram também contribuições essenciais com o método da quadratura.

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), discípulo de Galileu, foi estimulado por ele e por Kepler, a organizar seus infinitésimos no livro *Geometrie indivisibilibus continuorum* (1635), que se baseia na ideia de que "uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos." (BOYER, 1974, p. 241).

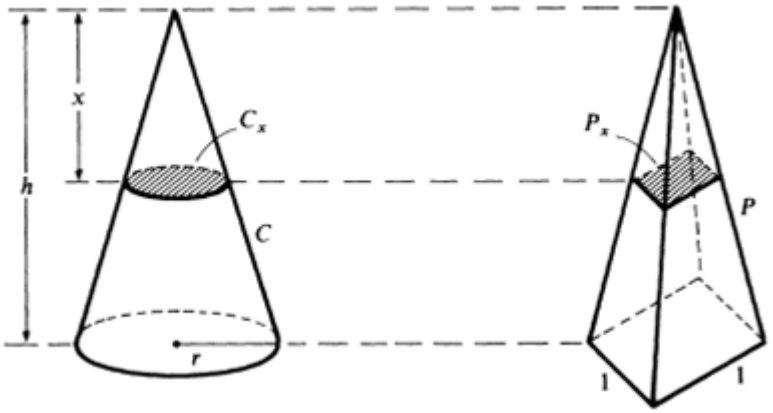
Enquanto Kepler imaginou que uma determinada figura geométrica fosse decomposta em figuras infinitesimais, cujas áreas ou volumes ele somava para obter a área ou o volume da figura fornecida, Cavalieri estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os elementos indivisíveis de duas figuras geométricas dadas; se estes elementos correspondentes tivessem uma certa razão (constante), então concluía-se que as áreas ou volumes tinham a mesma razão. Ainda considerava que uma figura geométrica era composta por um número indefinidamente grande de indivisíveis de menor dimensão.

O seu método de comparar duas figuras geométricas, comparando os indivisíveis de um com os indivisíveis de outro, baseia-se no conhecido Teorema de Cavalieri:

> Se dois sólidos têm altitudes iguais e se seções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais estão sempre em uma determinada proporção, então os volumes dos sólidos também estão nessa proporção. (BOYER, 1974, p. 242).

[79] Texto original: "The Greek "horror of the infinite" had prevented the development of a usable theory of limits to replace the ubiquitous double *reductio ad absurdum* proofs. But, as a result of the medieval scholastic speculations on infinity and the continuum, seventeenth century mathematicians were no longer reluctant to introduce infinitesimal techniques. Whereas the Greek insistence on absolute rigor had banished irrational magnitudes from the field of number (and hence number from geometry), irrational numbers now came to be freely employed, even though they still had no logical basis as numbers, and could only be interpreted rigorously as geometrical magnitudes. In addition, the symbolic algebra of Viète and Descartes facilitated the development of formal techniques that emphasized computational method more than logical proof. Finally, the algebraic representation of curves (analytic geometry) permitted the rapid and easy formulation of new and diverse area and volume problems for investigation".

A maneira como ele buscou provar esse teorema foi através de superposição, que envolvia mover um dos sólidos, peça por peça, de forma a um sobrepor o outro. Na prática, o teorema oculta o papel dos processos de limite nos cálculos de volume[80], como demonstrado após décadas seguintes pelos matemáticos franceses Fermat, Pascal e Roberval.



O efeito prático do teorema de Cavalieri é encobrir ou "ocultar" o papel dos processos de limite nos cálculos de volume. Por exemplo, se duas pirâmides triangulares têm a mesma altura *h* e a mesma área da base *A*, um argumento fácil de similaridade mostra que suas seções transversais triangulares de alturas iguais têm áreas iguais, então o Teorema de Cavalieri implica que as duas pirâmides têm volumes iguais. Lembre-se (do capítulo 1) de que esse resultado é a principal etapa na prova da fórmula de volume da pirâmide *V = Ah / 3*.
Para derivar a fórmula para o volume de um cone circular *C* com raio base *r* e altura *h*, comparamos com uma pirâmide *P* com altura *h* e base unitária quadrada. Se *Cx* e P_x são as seções indicadas na Figura 6, um cálculo de similaridade fornece
$a(C_x) = \frac{\pi r^2 x^2}{x^2}$ e $a(P_x) = \frac{x^2}{h^2}$
(EDWARDS JR., 1979, p. 105, tradução nossa)[81].

A *Geometrica indivisibilibus* de Cavalieri facilitou o problema das quadraturas, enquanto ele trabalhava simultaneamente com geometria analítica e Cálculo antes que qualquer desses assuntos fosse formalmente inventado.

Também aluno de Galileu, o matemático italiano Evangelista Torricelli (1608 – 1647) se interessou pela curva descrita por um ponto em um círculo ao rolar em uma linha tangente a ele, a qual Galileu denominou de cicloide. Juntamente com Pierre de Fermat (1601 – 1665),

[80] O leitor pode consultar exemplos de aplicação na obra "The historical development of the Calculus", de C. H. Edwards Jr (1979, p. 105-109).
81 Texto original: "The practical effect of Cavalieri's Theorem is to gloss over or "hide" the role of limit processes in volume computations. For example, if two triangular pyramids have the same altitude *h* and the same base area *A*, then an easy similarity argument shows that their triangular cross-sections at equal heights have equal areas, so Cavalieri's Theorem implies that the two pyramids have equal volumes. Recall (from Chapter 1) that this result is the principal step in the proof of the pyramid volume formula *V = Ah* /3. To derive the formula for the volume of a circular cone *C* with base radius *r* and height *h*, we compare it with a pyramid *P* with height h and unit square base. If C_x and P_x are the sections indicated in Figure 6, then a similarity computation gives $a(C_x) = \frac{\pi r^2 x^2}{x^2}$ and $a(P_x) = \frac{x^2}{h^2}$".

René Descartes (1596 – 1650) e Gilles Persone de Roberval (1602 – 1675), participavam do "grupo de Mersenne", o frade Minimita, Marin Mersenne (1588 – 1648), que serviu, através de correspondência, como centro de distribuição de informação matemática.

Torricelli publicou na obra *De parabole*, em 1644, a primeira demonstração matemática de que a área delimitada por um arco de curva é exatamente o triplo da área do círculo gerador. Nessa obra ele inclui tanto a quadratura do cicloide quanto a construção da tangente, a qual Roberval o acusou de plágio por ter sido ele quem chegou aos resultados, primeiro. Mas coube a Torricelli a prioridade na publicação, que provavelmente fizeram independentemente, já que Roberval usara o método dos indivisíveis para o problema da área, enquanto Torricelli deu duas quadraturas, uma usando o método dos indivisíveis de Cavallieri e a outra pelo método da exaustão de Arquimedes.

Em conjunto com o professor Roberval, Torricelli desenvolveu uma abordagem às linhas tangentes a partir do conceito intuitivo de movimento instantâneo. Eles consideravam

> uma curva como a trajetória de um ponto em movimento e a linha tangente como a linha de movimento instantâneo do ponto em movimento. Se o movimento do ponto que gera a curva é o resultado ou a combinação de dois movimentos suficientemente simples, a linha de movimento instantâneo pode ser determinada pela composição dos movimentos constituintes. (EDWARDS JR, 1097, p. 134, tradução nossa)[82].

A aplicação dos conceitos da Física (tempo e movimento) ao estudo de curvas levou Torricelli a pelo menos uma compreensão intuitiva da relação inversa entre problemas de tangente e quadratura, ou seja, entre as operações de diferenciação e integração. Neste caso, representando em um gráfico que relaciona velocidade x tempo, o movimento de um ponto ao longo de uma linha reta com uma velocidade variável, tem-se que a distância total percorrida pelo ponto é igual à área sob a curva velocidade.

Como já citado anteriormente, muitos historiadores atribuem a René Descartes (1596 - 1650) a origem da geometria analítica, através da obra "La Géométrie", publicada em 1637, que encerrou a geometria grega clássica, baseada na construção geométrica e prova, tornando-se inseparável da álgebra, e que mais tarde se juntariam ao cálculo.

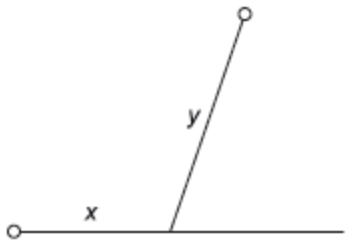
> A idéia inicial de Descartes era descrever cada ponto em um plano através de dois números, suas distâncias a partir de duas linhas fixas, chamadas de *coordenadas* do

[82] Texto original: "During the 1630s and 1640s an approach to tangent lines that stemmed from the intuitive concept of instantaneous motion was developed by Torricelli and especially by Gilles Persone de Roberval […]. Their idea (not itself a new one) was to consider a curve as the path of a moving point, and the tangent line as the line of instantaneous motion of the moving point. If the motion of the point generating the curve is the resultant or combination of two sufficiently simple motions, then the instantaneous line of motion can be determined by composition of the constituent motions."

> ponto. Essa forma permitia que Descartes transformasse relações geométricas em equações algébricas. Para ele, a curva era uma série de pontos que possuíam uma propriedade comum e, considerando as coordenadas de um ponto na curva como variáveis, ele podia expressá-la como uma equação que relacionava essas variáveis. (MAOR, 2008, p. n.)

La géométrie possui cerca de cem páginas e está dividida em três partes. Na primeira parte são apresentados os princípios da geometria algébrica, já com um avanço em relação aos gregos. Enquanto que os gregos consideravam uma variável sendo o comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de um retângulo e o produto de três variáveis ao volume de um paralelepípedo retângulo, Descartes ia mais além com a aritmetização da geometria. Já na primeira parte de sua obra, marcava *x* num eixo dado e um comprimento *y*, formando com esse eixo um ângulo fixo, construindo, assim, pontos cujos *x* e *y* satisfizessem a relação (Figura 11).

Figura 11 - Representação dos eixos x e y por Descartes

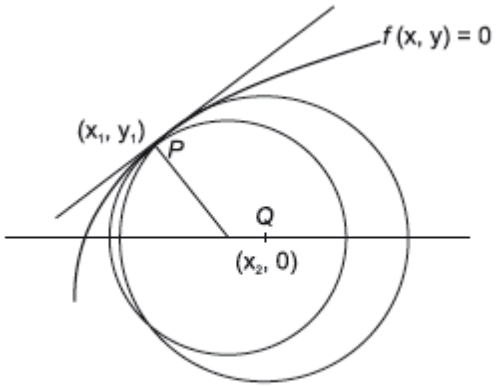


Fonte: (EVES, 2011, p. 385).

A partir de um segmento unitário seria possível representar qualquer potência de uma variável, ou produto de variáveis, por meio de um segmento de reta e atribuir valores a essas variáveis para construir o segmento de reta. Por exemplo, seja a relação $y = x^2$, para cada valor de *x*, há de se construir o *y* correspondente. Descartes demonstrou interesse especial em obter relações como essa para curvas descritas cinematicamente, mostrando casos em grau maior que dois (EVES, 2011). Vale destacar que seu sistema de coordenadas era oblíquo, e não retangular, e ele considerava apenas os pontos no primeiro quadrante – coordenadas positivas.

Na segunda parte de *La géométrie*, Descartes expõe uma classificação de curvas e um método de construir tangentes a curvas, que Eves argumenta:

> Sejam $f(x, y) = 0$ a equação da curva dada e (x_1, y_1) as coordenadas do ponto *P* da curva pelo qual se deseja traçar a tangente. Seja *Q* um ponto do eixo *x*, de coordenadas (x_2, 0). Então a equação da circunferência de centro *Q* pelo ponto *P* é
> $(x - x_2)^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + {y_1}^2$.
> Eliminando-se *y* do sistema formado pela equação acima e por $f(x, y) = 0$, obtém-se uma equação em *x* que leva às abscissas dos pontos onde a circunferência corta a curva

> dada. Determina-se a seguir x_2 de modo que essa equação em x tenha um *par* de raízes iguais a x_1. Essa condição faz com que Q seja a intersecção do eixo x com a normal à curva em P, uma vez que a circunferência é agora tangente à curva dada em P. Desenhada essa circunferência, pode-se facilmente construir a tangente desejada.
>
> 
>
>
> Figura 91
>
> (EVES, 2011, p. 385).

Esse método de construir tangentes foi muito utilizado por Descartes a variados tipos de curvas, mas em casos mais complicados, em que a álgebra é necessária, esse processo da geometria analítica elementar não seria eficaz.

A terceira parte discute, entre outros, a resolução das equações de grau maior que dois, utilizando a *regra de sinais de Descartes*. O objetivo dessa regra é determinar limites para o número de raízes positivas e o número de raízes negativas de um polinômio.

Toda a *La géométrie*, praticamente, dedica-se a uma completa aplicação da álgebra à geometria e vice-versa, pouco se assemelhando ao que hoje se considera como geometria analítica, como destaca Boyer (1974).

> Não há nada de sistemático sobre coordenadas retangulares, pois ordenadas oblíquas são geralmente assumidas; portanto, não há fórmulas para distâncias, inclinação, ponto de divisão, ângulo entre duas retas, ou outro material introdutório semelhante. Além disso, em toda a obra não há uma única curva nova traçada diretamente a partir da equação, e o autor se interessava tão pouco por esboçar curvas que nunca entendeu completamente o significado de coordenadas negativas. Ele sabia de modo geral que as ordenadas negativas são orientadas em sentido oposto ao tomado como positivo, mas nunca usou abscissas negativas. Ainda mais, o princípio fundamental da geometria analítica – a descoberta de que equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares – só aparece no segundo livro, e mesmo então só incidentalmente. (BOYER, 1974, p. 251).

Em apenas um caso, segundo Boyer, Descartes examinou detalhadamente um lugar, no problema do lugar das três e quatro retas de Papus, que ele derivou a equação geral da cônica que passa pela origem: $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$. Ele indicou as condições sobre os coeficientes sob as quais a cônica é uma reta, uma parábola, uma elipse, ou uma hipérbole,

fazendo reconhecer a característica da equação da cônica. A partir de uma escolha apropriada da origem e dos eixos, Descartes sabia que podia obter a forma mais simples da equação, mas não forneceu nenhuma das formas canônicas.

Para Boyer, embora Descartes tivesse razão ao dizer que o problema de achar a normal (ou tangente) a uma curva fosse de grande importância, mas o seu método era menos eficiente que o que Fermat tinha desenvolvido na mesma época. Além disso, a sua geometria analítica estava longe das considerações práticas que utilizamos hoje associadas com o uso de coordenadas.

Pierre de Fermat (1601 - 1665), assim como Descartes, iniciou o uso de coordenadas a partir da aplicação da álgebra a problemas geométricos da antiguidade, embora com pontos de vista diferentes, pois Fermat dava ênfase ao esboço de soluções de equações indeterminadas, em vez de à construção geométrica das soluções de equações algébricas determinadas.

Reconhecido como um dos precursores da moderna teoria dos números e também como um dos criadores da geometria analítica e do cálculo diferencial, Fermat deixou contribuições significativas, embora não tenha escrito obras completas, sendo que muitos dos seus trabalhos permaneceram manuscritos em vida e ficaram conhecidos através de cartas a seus amigos e colaboradores.

Em 1629, Fermat se propôs a reconstruir o *Lugares planos* de Apolônio, baseado em referências apresentadas na *Coleção matemática* de Papus, no qual descobriu o princípio fundamental da geometria analítica: uma equação envolvendo duas variáveis descreve uma curva no plano. Essa descoberta foi feita um ano antes da publicação de *La géométrie* de Descartes, por isso Fermat pode ser considerado coinventor da geometria analítica. Ele realizou estudos sobre equações de retas e de cônicas em um pequeno tratado intitulado *Ad lócus planos et sólidos isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos), que foi publicado após a sua morte. Sua exposição era muito mais sistemática e didática que a de Descartes e sua geometria analítica era mais próxima que a dos tempos atuais pelo fato de se utilizar um sistema de eixos coordenados ortogonais.

Assim como Descartes, Fermat considerava a existência de uma geometria analítica para além de duas dimensões, como ele mesmo escreveu:

> Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só, e esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para

> satisfazer à equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc. (BOYER, 1974, p. 255).

Em 1629, Fermat fez duas descobertas significativas sobre lugares, sendo uma delas o tratado chamado *Método para achar máximos e mínimos*. Ele estudou curvas do tipo $y = x^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$, conhecidas hoje como "parábolas" ou "hipérboles de Fermat", nos casos em que *n* é positivo ou negativo, respectivamente, o que descreve uma geometria analítica de curvas planas de grau superior. Além disso, para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$, produziu um método para encontrar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo. Nesse método, ele considera por hipótese que, em um ponto de máximo ou de mínimo *x*, os valores de *f(x)* e de *f(x+e)*, para *e* pequeno, são próximos. Daí ele comparou o valor de *f(x)* num ponto com o valor *f(x + e)* num ponto vazio, sendo a variação quase imperceptível, então igualou *f(x) = f(x+e)*, em seguida, dividiu o resultado por *e*, e fez *e* = 0. Os pontos de máximo e de mínimo eram então calculados igualando-se a zero a expressão obtida:

$$g(x) = \frac{f(x+e)-f(x)}{e}\Big|_{e=0.}$$

Essa expressão é igual à derivada da função *f(x)*:

$$g(x) = \lim_{e\to 0} \frac{f(x+e)-f(x)}{e} = f'(x).$$

Em essência, esse processo tem hoje o nome de diferenciação e destaca Fermat como um dos precursores do cálculo diferencial.

Para encontrar tangentes a uma curva polinomial do tipo $y = f(x)$, Fermat desenvolveu também uma técnica, mas sem apresentar as justificativas convincentes. Limitou-se a dizer que era similar ao método usado para encontrar máximos e mínimos. A respeito de áreas sob curvas, Fermat obteve resultados produzindo um método para calcular, na notação moderna, $\int_a^b x^n dx$, para *n* fracionário, com $n \neq 1$, generalizando um resultado de Cavalieri.

Embora Fermat tenha se ocupado com muitos aspectos da análise infinitesimal – tangentes, quadraturas, volumes, comprimentos de curvas, centros de gravidade, não aparece em seus escritos a relação que denota a natureza inversa dos problemas de área e tangente, que conhecemos hoje como o teorema fundamental do cálculo.

Em 1655, o matemático inglês John Wallis (1616 - 1703) publicou um texto sobre geometria analítica chamado *Tratactus de Sectionibus Conicis* (Tratado sobre seções cônicas), buscando substituir conceitos geométricos por numéricos sempre que fosse possível. No mesmo ano, publicou *Arithmetica Infinitorum*, também buscando aritmetizar a geometria de indivisíveis de Cavalieiri. Para calcular quadratura de curvas $y = x^n$, com *n* inteiro e $n \neq -1$,

Wallis usou um método envolvendo séries infinitas, denotando o infinito com o símbolo ∞ pela primeira vez em sua obra.

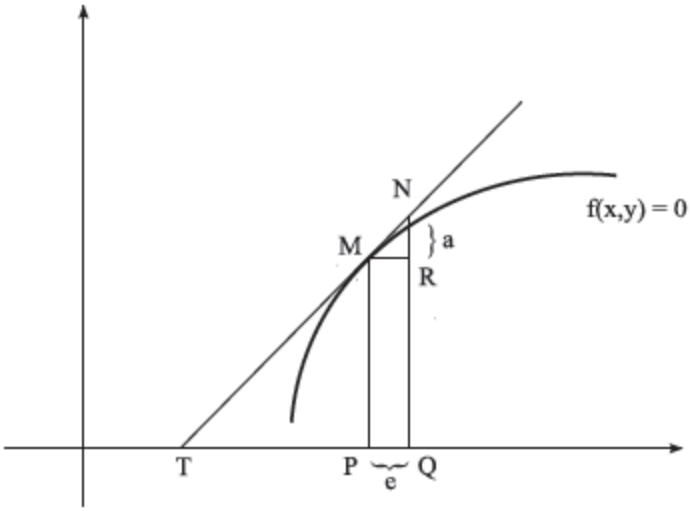
Segundo Boyer (1974), Wallis seria o principal matemático inglês antes de Newton e fez suas contribuições mais importantes em análise infinitesimal, como a de calcular a integral da área sob o semicírculo $y = \sqrt{x - x^2}$, que fez por seu método de indução e interpolação, antecipando um resultado da obra de Euler sobre a função gama ou fatorial.

Outros matemáticos se envolveram na resolução de problemas com o teorema binomial para potências inteiras, como o escocês James Gregory (1638 – 1675), predecessor de Newton e que teve contato com a matemática de vários países. Em 1663 foi à Itália onde conheceu, dentre outros, Stefano decli Angeli (1623 – 1682) e com quem estudou durante alguns anos (1664 – 1668) sobre as expansões de funções em séries de potências e processos infinitos em geral, que o fez publicar *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, em 1667, resultados em análise infinitesimal. No ano seguinte, Gregory publicou mais duas obras, reunindo resultados de vários países entre suas novas descobertas. Ele não fazia distinção entre métodos algébricos e geométricos, como fazia Descartes. Boyer (1974) e Baron (1969) concordam que Gregory poderia ter se antecipado a Newton na invenção do cálculo, se tivesse expressado sua obra analiticamente, pois conhecia muito bem o problema da quadratura e provavelmente percebia que era inverso do problema da tangente.

Outro matemático inglês, Isaac Barrow (1630 – 1677), desenvolveu um método para encontrar tangentes que se assemelha com o que é usado atualmente no cálculo diferencial. O método seria parecido com o de Fermat, só que ao invés de usar uma única letra *e*, usou duas quantidades equivalentes aos Δx e Δy. Para uma curva definida pela equação polinomial $f(x, y) = 0$, substituía x ao equivalente $x + e$, e substituía y por $y + a$, e então desprezava os termos que não continham a ou e, para em seguida eliminar os termos com grau maior do que um em a e e. Barrow considerava o "triângulo característico" da curva (Figura 12) e observava que a razão $a/e = MP/TP$ por semelhança de triângulos, e finalmente calcular o valor da subtangente *TP*.

Eves ressalta que "apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra" (EVES, 2011, p. 435) e que a descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo aparece enunciada e provada nas *Lectiones* de Barrow.

Figura 12 - Triângulo característico



Fonte: Eves (2011, p. 435).

O maior avanço do Cálculo se deu na segunda metade do século XVII, quando suas principais ideias já eram mais ou menos bem conhecidas pela comunidade matemática. O método dos indivisíveis tinha sido aplicado com efeito a um conjunto de curvas e sólidos, o método da exaustão de Arquimedes, aperfeiçoado, revisado, havia resolvido a quadratura da família de curvas $y = x^n$ e já havia uma concepção da ideia de limite e o reconhecimento do teorema fundamental. O que faltava era unificá-los em um único sistema, com um procedimento geral e sistemático, que permitisse resolver esses problemas com facilidade e eficiência. Finalmente, tal procedimento foi fornecido por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, que realizaram seus trabalhos independentes um do outro.

4.2.2 O Cálculo com Newton e Leibniz

Como já ressaltado anteriormente, a base do Cálculo Diferencial e Integral é o seu teorema fundamental, que surgiu principalmente para resolver problemas relacionados à quadratura e o traçado de tangentes em um determinado ponto de uma curva. Conquanto, um importante destaque feito por Edward Jr (1979) é que esses problemas foram estudados desde a antiguidade até o início do século XVII para aplicação de métodos especiais a problemas particulares. Concordando com Eves (2011), há de se reconhecer a importância daqueles que unificaram os procedimentos e desenvolveram métodos gerais de cálculo para a resolução de classes inteiras de problemas relacionados, como fizeram Issac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716).

> Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Foi à primeira dessas duas coisas, ou seja, à criação de um *cálculo* manipulável e proveitoso, que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram sua contribuição. Assim, embora Newton e Leibniz tenham sido precursores, a criação do cálculo em geral é atribuída a eles. (EVES, 2011, p. 435).

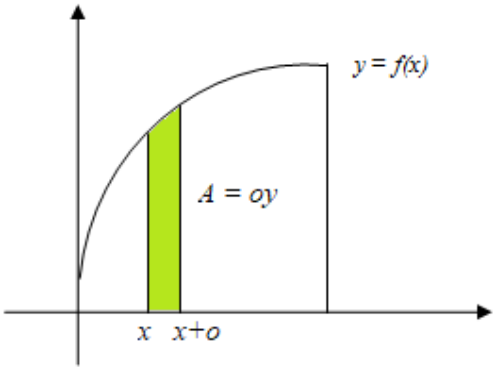
Esse redesenvolvimento dos conceitos fundamentais do cálculo, citado por Eves, aconteceu posteriormente, de modo rigoroso e aceitável, no período de aplicação do assunto, através de Cauchy e seus sucessores, que abordaremos na seção futura. Antes desse período, Newton e Leibniz fizeram o trabalho de sistematização, transformando o cálculo infinitesimal em uma área com vida própria, independente da geometria.

No início do século XVIII, Newton publicou três trabalhos sobre o cálculo diferencial, após anos depois de escritos. Considerada a sua obra mais importante, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural), publicada em 1687, ele propôs suas leis de movimento e a lei de gravitação universal, apresentando os fundamentos da mecânica clássica e sua teoria de fluxões. Newton apresentou nessa obra diversas proposições sobre velocidades, acelerações, tangentes e curvaturas que motivaram suas pesquisas sobre o cálculo infinitesimal.

O cálculo diferencial é o estudo das taxas de mudança de uma quantidade variável. Se considerarmos os fenômenos físicos ao nosso redor, a maioria envolve quantidades que mudam com o tempo, como exemplos, a velocidade de um carro em movimento ou as leituras de temperatura de um termômetro. Chamamos, atualmente, essas quantidades de variáveis, enquanto Newton denominava “fluente”. O cálculo diferencial está relacionado à descoberta da taxa de mudança de uma variável, ou como diria Newton, a “fluxão” de um determinado fluente.

Newton apresentou em sua obra *Principia* três concepções distintas para o cálculo: a concepção infinitesimal, o método das fluxões e o método das primeiras e últimas razões. Na concepção infinitesimal, ele trabalhou com quantidades infinitesimalmente pequenas, chamada de “momentos”. O momento da área seria o cálculo da área abaixo de uma curva, isto é, o crescimento da área da região quando a variável x aumenta da quantidade infinitesimal o. A taxa de crescimento da área no ponto de abscissa x é igual à ordenada $y = f(x)$ (Figura 13), como a calculou.

Figura 13 - O momento da área segundo Newton



Fonte: A autora (2020).

Ao mesmo tempo, ele determinou que a área sob a curva era dada pelo modo inverso ao da derivação, quer dizer, calculando a integral definida de *f*. Na obra *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (Sobre a Análise de Equações com um Número Ilimitado de Termos), publicada em 1711, Newton definiu a relação entre quadratura e derivada, embora não haja definições precisas de derivada ou de integral, nem de quantidade infinitesimais.

> Tendo calculado $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$ a partir da equação polinomial $f(x, y) = 0$, Newton coloca o problema inverso: Para encontrar *y* em termos de *x*, dada uma equação que expressa a relação entre *x* e a razão $\dot{y}/\dot{x}$ de suas fluxões. Caso esta equação seja da forma simples
>
> $$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \Phi(x)$$
>
> este é simplesmente o problema do que chamamos agora de antidiferenciação, enquanto o caso geral $g(x, \dot{y}/\dot{x}) = 0$ é uma equação diferencial.
>
> (EDWARDS JR., 1979, p. 194, tradução nossa)[83].

Assim Newton discute o cálculo de áreas por meio da antidiferenciação, o que aponta como a primeira aparição história do teorema fundamental do cálculo na forma explícita $\frac{dA}{dx} = y$, sendo *A* a área sob a curva *y = f(x)*.

Em *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum* (Método das Fluxões e das Séries Infinitas), publicada em 1736, Newton introduziu o seu método das fluxões, mostrando avanços

[83] Texto original: "Having calculated $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$dy from the polynomial equation $f(x, y) = 0$, Newton poses the converse problem: To find *y* in terms of *x*, given an equation expressing the relationship between *x* and the ratio $\dot{y}/\dot{x}$ of their fluxions. In case this equation is of the simple form $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \Phi(x)$".

conceituais sobre o método dos infinitesimais. Considerava as quantidades matemáticas como sendo de natureza contínua, como se fossem o espaço descrito por um corpo em movimento, que possuía velocidades chamadas de “fluxões”.

Newton considerava duas variáveis que se relacionavam através de uma equação, como por exemplo, o que chamamos hoje de “função”, se tomarmos $y = x^2$ representamo-la por um gráfico de uma parábola no plano *xy*. Newton pensou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel *P(x, y)* e à medida que *P* percorre a curva, as coordenadas *x* e *y* variam continuamente com o tempo, como se o próprio tempo fosse “fluindo” a uma taxa uniforme, por isso denominou “fluente”. Daí ele foi determinar suas fluxões, ou seja, as taxas de mudança de *x* e *y* em relação ao tempo, considerando a diferença nos valores de *x* e de *y* dividindo-a pelo intervalo de tempo transcorrido. Logo após, fez o intervalo de tempo transcorrido igual a 0, pensando nele como tão pequeno a ponto de ser desprezível.

> Ele não tenta definir as “velocidades fluxionais” dos pontos A e B as fluxões $\dot{x}$ *e* $\dot{y}$ de *x* e *y*, com as quais os dois pontos se movem com o fluxo (ou fluente) do tempo. Em vez disso, o conceito de velocidade de um ponto que se move ao longo de uma linha reta é considerado intuitivamente aparente em termos físicos. Em termos modernos, as fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ são simplesmente as derivadas de *x* e *y* em relação a *t*,
>
> $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$,
>
> e sua razão é a derivada de *y* em relação a *x*,
>
> $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$.
>
> (EDWARDS JR., 1979, p. 192, tradução nossa)[84].

Segundo o método de Newton, aplicado a $y = x^n$:

Se *o* é um “período de tempo infinitamente pequeno”, $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ são os crescimentos infinitamente pequenos de *x* e de *y*. Substituindo $y + \dot{y}o$ e $x + \dot{x}o$ na relação (entre as quantidades fluentes) $y = x^n$ obtém:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n = x^n + nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2 + \cdots$$

Cancelando $y = x^n$ e dividindo por *o*, tem-se:

[84] Texto original: “He does not attempt to define the "fluxional speeds" of the points *A* and *B*, the *fluxions* $\dot{x}$ and $\dot{y}$ of *x* and *y*, with which the two points move with the "flux" (or flowing) of time. Instead, the concept of the speed of a point moving along a straight line is regarded as intuitively apparent on physical grounds. In modem terms, the fluxions $\dot{x}$ and $\dot{y}$ are simply the derivatives of *x* and *y* with respect to *t*, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ and $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, and their ratio is the derivative of *y* with respect to *x*, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$.”.

$$\dot{y} = n.x^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o + \cdots$$

Newton elimina todos os termos que contém *o* como fator para obter:

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$$

O problema central do cálculo consistia, portanto, não em calcular a fluxão de uma quantidade, e sim em encontrar a razão entre duas fluxões que se relacionem um com o outro através de uma equação.

Na terceira exposição de seu Cálculo, *De quadratura curvarum*, publicada em 1704, Newton tenta evitar as quantidades infinitamente pequenas e as quantidades que fluem, explicando o seu método baseando-se no conceito de primeiras e últimas razões.

Como no método das fluxões explicado anteriormente, só que ao final do processo, ao invés de eliminar as parcelas contendo *o*, Newton considera a razão entre as variações de *x* e de *y* para, em seguida, fazer com que *o* seja igual a 0.

$$\frac{(x + \dot{x}o) - x}{(y + \dot{y}o) - y} = \frac{\dot{x}o}{(x + \dot{x}o) - x^n}$$

$$= \frac{\dot{x}o}{nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2 + \cdots}$$

$$= \frac{1}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}o + \cdots}$$

Com *o* igual a zero, o resultado é $1/nx^{n-1}$, que Newton chama de "a última razão entre as variações evanescentes".

Esse processo equivale ao cálculo da derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, e embora Newton não tivesse definição formal de limite, ele revela em seus *Principia* possuir uma noção de limite, como destaca:

> Pela razão final de quantidades evanescentes (isto é, aquelas que se aproximam de zero), deve ser entendida a razão das quantidades não antes que elas desapareçam, nem depois, mas com as quais elas desaparecem. Estas razões finais com as quais as quantidades desaparecem não são verdadeiramente as razões das quantidades finais, mas os limites para os quais as razões das quantidades decrescentes sem limite sempre convergem; e às quais eles se aproximam mais do que por qualquer diferença, mas

> nunca vão além, nem atingem efetivamente, até que as quantidades sejam diminuídas no *infinito*. (NEWTON, 1687 apud EDWARDS JR, 1979, p. 225, tradução nossa)[85].

Assim, como explica Edwards Jr, a "razão final de quantidades evanescentes" é simplesmente o limite de sua razão. E, com efeito, o lema I do livro I dos Principia é a tentativa de Newton de definir o conceito de limite: "Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade e, antes do final desse tempo, se aproximam mais perto de si uns aos outros do que por qualquer diferença dada, tornam-se finalmente iguais" (NEWTON, 1687 apud EDWARDS JR, 1979, p. 225, tradução nossa)[86].

Para Newton, a exposição em termos de indivisíveis ou infinitesimais seria simplesmente uma abreviação conveniente (mas não um substituto) para uma prova matemática rigorosa em termos de proporções finais (limites).

Leibniz tinha uma abordagem diferente de Newton. Ele concebeu seu cálculo diferencial e integral por volta de 1675 e dois anos depois já tinha um sistema completamente desenvolvido e funcional. Enquanto as ideias de Newton eram baseadas na Física e ele considerava a fluxão como uma taxa de mudança, ou velocidade, de um ponto em que o movimento contínuo gerava uma curva $y = f(x)$, Leibniz se aproximava mais da filosofia e moldou suas ideias de um modo mais abstrato, pensando em termos de "diferenciais", pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y. (MAOR, 2008).

A operação fundamental no cálculo de Leibniz era o cálculo de diferenças, equivalente à derivada, cuja operação inversa era a soma, equivalente à integral. Ele tinha noção da importância para o pensamento matemático de uma notação apropriada. Por conseguinte, em 29 de outubro de 1675, usou pela primeira vez um *S* alongado como símbolo de integral, proveniente da primeira letra da palavra latina *summa* (soma), que pretendia indicar uma soma de indivisíveis. Daí então passou a chamar seu método de cálculo de tangentes de *calculus diferentialis*, e o cálculo de áreas e volumes por *calculus summatorius* ou *integralis*, que denominamos diferenciais e derivadas atualmente, escrevendo $\int xdy$ e $\int ydx$ para integrais. Sua terminologia originou o termo "cálculo diferencial e integral".

---

[85] Texto original: "By the ultimate ratio of evanescent quantities (i.e., ones that are approaching zero) is to be understood the ratio of the quantities not before they vanish, nor afterwards, but with which they vanish. . .. Those ultimate ratios with which quantities vanish are not truly the ratios of ultimate quantities, but limits towards which the ratios of quantities decreasing without limit do always converge; and to which they approach nearer than by any given difference, but never go beyond, nor in effect attain to, till the quantities are diminished in *infinitum*".

[86] Texto original: "Quantities, and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and before the end of that time approach nearer to each other than by any given difference, become ultimately equal".

Em 1684 Leibniz publicou seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial, sob o título *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua Nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais) vinte anos antes da publicação *De Quadratura* de Newton em 1704, onde define *dx* como um intervalo finito arbitrário e *dy* pela proporção $\frac{dy}{dx} = y$: subtangente (EVES, 2011, p. 443). Ele já havia percebido que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças entre as ordenadas e as abscissas quando estas se tornam infinitesimalmente pequenas, assim como a quadratura dependia da soma de retângulos com bases sobre o eixo das abscissas infinitesimalmente pequenas. O "triângulo característico" (ou infinitesimal)[87] foi o ponto de partida para o seu estudo do cálculo diferencial.

A notação para o cálculo era "mais conveniente e flexível", como disse Eves (EVES, 2011, p. 443), do que a de Newton. No entanto, seu cálculo era considerado mais complicado em relação ao desenvolvido por Newton, mas pode-se dizer que o cálculo de Leibniz facilitou hoje a resolução de problemas que antes exigiam um grande esforço.

> De fato, foi precisamente (e somente) na matemática que Leibniz alcançou completamente seu objetivo. Seu cálculo infinitesimal é o exemplo supremo, em toda a ciência e matemática, de um sistema de notação e terminologia tão perfeitamente acoplado ao seu assunto que espelha fielmente as operações e processos lógicos básicos desse assunto. (EDWARDS JR., 1979, p. 232, tradução nossa)[88].

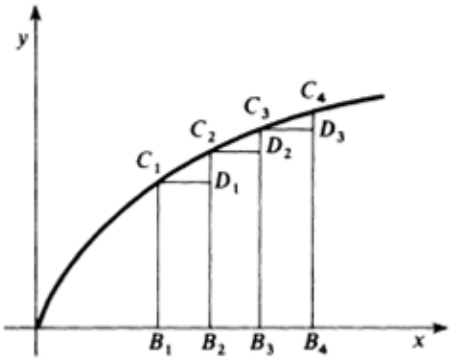
Em *Acta Eruditorum*, de 1686, Leibniz explicou o cálculo integral mostrando que as quadraturas são casos especiais do método inverso do das tangentes, destacando a relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo. A integral $\int ydx$ é definida como a área sob uma curva, composta por uma variedade de retângulos verticais infinitesimais com alturas *y* e largura *dx*, como mostra a Figura 14.

.

[87] O "triângulo característico" já tinha sido usado por Pascal para achar a quadratura de senos e Barrow o aplicara ao problema de tangentes, como mostramos na Figura 12.

[88] Texto original: "Indeed, it was precisely (and only) in mathematics that Leibniz fully accomplished his goal. His infinitesimal calculus is the supreme example, in all of science and mathematics, of a system of notation and terminology so perfectly mated with its subject as to faithfully mirror the basic logical operations and processes of that subject.".

Figura 14 - Representação da área sob a curva por Leibniz



Fonte: Edwards Jr. (1979, p. 257).

Leibniz faz a discussão:

> Eu represento a área de uma figura pela soma de todos os retângulos contidos pelas ordenadas e pelas diferenças das abscissas, isto é, por $B_1D_1 + B_2D_2 + B_3D_3 +$ etc. Para os triângulos estreitos, $C_1D_1C_2$, $C_2D_2C_3$, etc., uma vez que são infinitamente pequenos em comparação com os referidos retângulos, podem ser omitidos sem risco; e, portanto, represento em meu cálculo a área da figura por $\int y\,dx$, ou os retângulos contidos por cada y e o dx que corresponde a ele. (LEIBNIZ, 1686 apud EDWARDS JR, 1979, p. 257, tradução nossa)[89].

Na sequência, Leibniz apresenta, como é conhecido hoje, o Teorema Fundamental do Cálculo: "nós, agora montando em maiores alturas, obtemos a área de uma figura encontrando a figura de seu somatório ou quadratura."[90]. E assim o descreve, Edwards Jr:

> Dada uma curva com a ordenada z, cuja área é procurada, suponha que seja possível encontrar uma curva com a ordenada y *tal que*
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a}$$
>
> onde a é uma constante (presumivelmente incluída por uma questão de homogeneidade dimensional). Então:
> $zdx = ady$,
> então a área sob a curva original é
> $\int zdx = a\int dy = ay$, (30)
> assumindo (como de costume com Leibniz) que a curva passa pela origem. Assim, problemas de quadratura reduzem no cálculo de Leibniz para problemas tangentes inversos. Ou seja, para encontrar a área sob a curva com a ordenada z, basta encontrar uma curva cuja tangente satisfaça a condição
> $\frac{dy}{dx} = z$.
> Subtraindo a área acima de [0, a) daquela acima de [0, b) e definindo a = 1 em (30), segue-se que

[89] Texto original: "I represent the area of a figure by the sum of all the rectangles contained by the ordinates and the differences of the abscissae, i.e., by $B_1D_1 + B_2D_2 + B_3D_3 +$ etc. For the narrow triangles $C_1D_1C_2$, $C_2D_2C_3$, etc., since they are infinitely small compared with the said rectangles, may be omitted without risk; and thus I represent in my calculus the area of the figure by $\int y\,dx$, or the rectangles contained by each y and the dx that corresponds to it".

[90] Texto original: "we, now mounting to greater heights, obtain the area of a figure by finding the figure of its summatrix or quadratrix." (LEIBNIZ, 1686 apud EDWARDS JR, 1979, p. 257).

$\int_a^b z\,dx = y(b) - y(a)$.
(EDWARDS JR., 1979, p. 257-258, tradução nossa)[91].

Segundo Boyer (1974, p. 296), o cálculo de Newton e Leibniz mostrou a importância das curvas não-algébricas na nova análise, que a geometria de Descartes tinha excluído, bem como viram que as operações da nova análise podiam ser aplicadas tanto a séries infinitas como a expressões algébricas finitas. Não restam dúvidas que as abordagens separadas desses dois desenvolveram o cálculo como uma disciplina atualizada e coerente, como Edwards Jr compara:

> No que diz respeito ao cálculo em si, diferenças infinitesimais discretas de variáveis geométricas desempenharam o papel central na abordagem de Leibniz, enquanto o conceito fundamental de Newton era a taxa de mudança de fluxo ou tempo, com base em ideias intuitivas de movimento contínuo. Como consequência, a notação e terminologia de Leibniz disfarçam efetivamente o conceito de limite, que por outro lado é bastante explícito no cálculo de Newton.
> Para Leibniz, os diferenciais separados *dx* e *dy* são fundamentais; sua razão *dy/dx* é "meramente" um quociente geometricamente significativo. Para Newton, no entanto, especialmente em seus trabalhos posteriores, a própria derivada – como uma razão de fluxões ou uma "razão última de quantidades evanescentes" – é o cerne da questão. Uma segunda derivada é simplesmente uma fluxão de uma fluxão, cada fluxão envolvendo apenas infinitesimais de primeira ordem; portanto, Newton não precisa dos infinitesimais de ordem superior de Leibniz.
> A integral de Newton é uma integral indefinida, um fluente a ser determinado a partir de sua dada fluxão; ele resolve problemas de área e volume, interpretando-os como taxa inversa de problemas de mudança. A integral de Leibniz, por outro lado, é uma soma infinita de diferenciais. Obviamente, ambos calculam suas integrais pelo processo de antidiferenciação; a exploração computacional da relação inversa entre problemas de quadratura e tangente foi sua principal contribuição. (EDWARDS JR., 1979, p. 266, tradução nossa)[92].

---

[91] Texto original: "Given a curve with ordinate *z*, whose area is sought, suppose it is possible to find a curve with ordinate *y* such that $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a}$ where a is a constant (presumably included for the sake of dimensional homogeneity). Then $zdx = ady$, so the area under the original curve is $\int zdx = a\int dy = ay$ (30), assuming (as usual with Leibniz) that they *y*-curve passes through the origin. Thus quadrature problems reduce in Leibniz' calculus to inverse tangent problems. That is, in order to find the area under the curve with ordinate *z*, it suffices to find a curve whose tangent satisfies the condition $\frac{dy}{dx} = z$. Subtracting the area over [0, *a*) from that over [0, *b*), and setting *a* = 1 in (30), it follows that $\int_a^b z\,dx = y(b) - y(a)$".

[92] Texto original: "In regard to the calculus itself, discrete infinitesimal differences of geometric variables played the central role in Leibniz' approach, while Newton's fundamental concept was the fluxion or time rate of change, based on intuitive ideas of continuous motion. As a consequence, Leibniz' notation and terminology effectively disguises the limit concept, which by contrast is fairly explicit in Newton's calculus. For Leibniz, the separate differentials *dx* and *dy* are fundamental; their ratio *dy / dx* is "merely" a geometrically significant quotient. For Newton, however, especially in his later work, the derivative itself – as a ratio of fluxions or an "ultimate ratio of evanescent quantities" – is the heart of the matter. A second derivative is simply a fluxion of a fluxion, each fluxion involving only first-order infinitesimals, so Newton has no need of Leibniz' higher-order infinitesimals. The integral of Newton is an indefinite integral, a fluent to be determined from its given fluxion; he solves area and volume problems by interpreting them as inverse rate of change problems. Leibniz' integral, by contrast, is an infinite sum of differentials. Of course, both ultimately compute their integrals by the process of antidifferentiation; the computational exploitation of the inverse relationship between quadrature and tangent problems was their key common contribution.".

O trabalho formal de Newton sobre o cálculo compreendia o período de 1664 a 1666 e, embora tenha mostrado a colegas da Inglaterra, não publicou nada até seus *Principia*, em 1687, e *Opticks*, de 1704. Enquanto que o período que Leibniz trabalhou com cálculo foi de 1672 a 1676, publicando seus artigos *Acta Eruditorum* em 1684 a 1686. Apesar de Newton ter sido o precursor de uma teoria de cálculo bem desenvolvida, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. E isso rendeu uma verdadeira disputa no início do século XVIII, por parte de seguidores de Newton contra os trabalhos de Leibniz que o acusaram de plágio. Contudo, a história da matemática reconhece que Newton e Leibniz desenvolveram independentemente o Teorema Fundamental do Cálculo e, atribui concomitantemente a honra da criação do Cálculo Infinitesimal.

4.2.3 O rigor e o método de Cauchy

O século XVIII e os dois seguintes foram muito produtivos para a história da matemática. Dentre toda a intensa atividade matemática, o cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático e se mostrou poderoso e eficiente para resolver problemas antes insuperáveis (EVES, 2011, p. 462). Assim como o século XVIII foi dedicado a explorar novos métodos do cálculo, foi no século XIX que o cálculo recebeu uma fundamentação lógica rigorosa e o século XX foi o de generalizar os progressos alcançados. Há de se levar em conta os vários fatores do desenvolvimento social, como a construção de grandes navios, a industrialização da Europa Ocidental e dos Estados Unidos, o clima de guerra mundial, o desenvolvimento da computação eletrônica, e tantos outros, que culminou em uma divisão da matemática em pura e aplicada, sendo esta última relativa a aplicações práticas dos problemas vigentes.

O rigor dado aos resultados do cálculo infinitesimal é atribuído ao francês Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), um precursor da análise matemática. Apesar de ter iniciado a sua carreira como engenheiro civil, dedicou-se em seguida à matemática, tornando-se professor na *École Polytechnique* e publicando frequentemente seus resultados que, dentre vários tópicos, destacava-se especialmente a teoria das funções de variável complexa.

> ... Os métodos que segui diferem em muitos aspectos daqueles expostos em outras obras do mesmo tipo. Meu principal objetivo foi conciliar o rigor, que fiz uma lei para mim mesmo no meu *Cours d'analyse*, com a simplicidade que produz a consideração direta de quantidades infinitamente pequenas. Por esse motivo, acreditava ser meu dever rejeitar o desenvolvimento de funções em séries infinitas cada vez que as séries obtidas não são convergentes... No cálculo integral, pareceu-me necessário demonstrar de modo geral a existência de *integrais* ou *funções primitivas* antes de

> tornar conhecidas suas diversas propriedades. Para atingir esse objetivo, foi necessário estabelecer desde o início a noção de *integrais tomadas entre limites determinados* ou *integrais definidas*. (CAUCHY, s.d. *apud* EDWARDS JR, 1979, p. 309, tradução nossa)[93].

Segundo Boyer (1974, p. 380), para representar graficamente uma função $w = f(z)$, sendo w e z variáveis complexas, ao necessitar de quatro dimensões reais, não era possível o recurso à visualização geométrica. A teoria de variáveis complexas implicava, portanto, um grau mais alto de abstração que a de funções de uma variável real, o que justificaria a necessidade de definições mais precisas dos conceitos. Em suas três obras *Cours d'analyse de l'Écola Polytechnique* (1821), *Résumé des leçõns sur Le calcul infinitesimal* (1823) e *Leçons sur Le calcul différentiel* (1829), Cauchy deu ao cálculo elementar o caráter que tem hoje.

O conceito de limite de d'Alembert ele deu um caráter aritmético, definindo o infinitésimo como uma variável dependente:

> Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a finalmente diferir deste de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros.
> (...) Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero. (CAUCHY, s.d. *apud* BOYER, 1974, p. 380).

Os conceitos de função e de limite de função eram fundamentais no Cálculo de Cauchy. Para a definição da derivada de $y = f(x)$, considerou um incremento $\Delta x = i$ e estabeleceu a razão:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Em seguida, calculou o limite quando Δx e Δy tendem a zero.

A integração, diferentemente como era tratada anteriormente, como uma operação inversa à diferenciação, foi apresentada por Cauchy com uma definição de maneira particular, considerando o limite de somas integrais, como destaca Boyer:

> Se $S_n = (x_i - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ então o limite S dessa soma S_n, quando os comprimentos dos intervalos $x_t - x_{t-1}$ decrescem indefinidamente é a integral definida da função $f(x)$ no intervalo de $x = x_0$ a $x = X$. (BOYER, 1974, p. 380).

[93] Texto original: "...The methods which I have followed differ in many respects from those which are expounded in other works of the same type. My principal aim has been to reconcile rigor, which I have made a law to myself in my *Cours d'analyse*, with the simplicity which the direct consideration of infinitely small quantities produces. For this reason, I believed it to be my duty to reject the development of functions into infinite series each time that the series obtained is not convergent ... In the integral calculus, it has appeared to me necessary to demonstrate generally the existence of the *integrals* or *primitive functions* before making known their diverse properties. In order to attain this object, it was found necessary to establish at the outset the notion of *integrals taken between given limits* or *definite integrals*.".

A sua definição permitiu as generalizações como são apresentadas atualmente da noção de integral.

Na prova da relação usual entre a integral e a antiderivada, Cauchy utilizou o teorema do valor médio como uma generalização evidente do já conhecido teorema de Rolle, como é apresentado por Boyer:

> Se $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) então existirá algum valor x_0 tal que $a < x_0 < b$ e $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$. (BOYER, 1974, p. 381).

Até então o teorema do valor médio não havia chamado atenção, o que acabou tendo um papel fundamental na análise, ficando conhecido como teorema do valor médio de Cauchy, apresentado por Boyer (1974) na forma geral:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(y_0)}$$

considerando algumas restrições sobre $f(x)$ e $g(x)$.

Com essa prova, o Teorema Fundamental do Cálculo que relaciona as duas operações como inversas deixou de ser um corolário da definição de integração. O teorema afirma que: Se f é uma função contínua em $[x_0, X]$, se $x \in [x_0, X]$ e se $F(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx$, então $F'(x)=f(x)$.

Cauchy apresenta a formulação rigorosa do teorema em sua vigésima sexta *Lessons Given at the École Royale Polytechnique on the Infinitesimal Calculus*, em 1823, como descreve Edwards Jr (1997):

> Dada uma função contínua $f(x)$ no intervalo $[x_0, X]$, ele quer provar que a nova função $\tilde{F}(x)$ definida para $x \in [x_0, X]$ por
> $\tilde{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ (27)
> é uma função primitiva ou antiderivada de $f(x)$, ou seja, $\tilde{F}'(x) = f(x)$ em $[a, b]$. A única mudança de detalhe em sua exposição que se poderia fazer hoje seria escrever $f(t)\,dt$ em vez de $f(x)\,dx$ no integrando de (27), de modo a distinguir a falsa variável de integração da variável do limite superior.
> Ao aplicar a propriedade (26) e a propriedade de valor médio (24), Cauchy observa que
> $$\tilde{F}(x + \alpha) - \tilde{F}(x) = \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx$$
> $\tilde{F}(x + \alpha) - \tilde{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha)$ (28)
> por algum $\theta \in [0, 1]$. Dividindo os dois lados de (28) por α e tomando limites com $\alpha \to 0$, ele conclui da definição de derivada e de continuidade de f que
> $\tilde{F}'(x) = f(x)$ (29)
> como desejado. Portanto
> $\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x)$ (30)
> se f é contínua.
> Para deduzir dessa primeira forma a segunda forma familiar do teorema fundamental, Cauchy considera uma função arbitrária $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ em $[x_o, X]$. Se

$\omega(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$,
então, $\omega'(x) = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, então o teorema do valor médio fornece

$$\omega(x) = \omega(x_0) + (x - x_0)\omega'(\bar{x}) = \omega(x_0)$$

para todo $x \in [x_0, X]$. Portanto
$\tilde{F}(x) - F(x) = \tilde{F}(x_0) - F(x_0) = -F(x_0)$,
$\tilde{F}(x) = F(x) - F(x_0)$,
$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0)$ (31)
para alguma antiderivada F de f.
(EDWARDS JR., 1979, p. 321-322, tradução nossa)[94].

E assim, segundo Edward Jr (1979), Cauchy completa a teoria geral da integração de funções contínuas em intervalos fechados. Embora a Análise de Cauchy tenha buscado substituir os princípios da aritmética pela intuição geométrica nos fundamentos da Análise, foram apenas em parte, pois antes do final do século XIX, os próprios números reais eram entendidos apenas de maneira intuitiva. Outros matemáticos posteriores, no entanto, levaram o mérito de fundamentar o Cálculo.

Nesse período histórico que percorremos, vimos que alguns problemas particulares motivaram o desenvolvimento do Teorema Fundamental e a sua criação tornou possível o desenvolvimento algorítmico do que conhecemos hoje como o Cálculo. Várias técnicas foram criadas e aperfeiçoadas, ao mesmo tempo que os conceitos foram sendo representados por objetos ostensivos. Atualmente, eles permeiam também os problemas que são abordados nas situações didáticas e que o micromundo poderá ajudar a resolver. Assim, buscamos fazer um apanhado geral para evidenciar esses conceitos envolvidos na relação entre a derivada e a integral.

4.2.4 Conceituação do Teorema Fundamental do Cálculo

[94] Texto original: "Given a continuous function $f(x)$ on the interval $[x_0, X)$, he wants to prove that the new function $\tilde{F}(x)$ defined for $x \in [x_0, X)$ by $\tilde{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ (27) is a primitive function or antiderivative of $f(x)$, that is, $\tilde{F}'(x) = f(x)$ on $[a, b]$. The only change of detail in his exposition that one might make today would be to write $f(t)\,dt$ instead of $f(x)\,dx$ in the integrand of (27), so as to distinguish the dummy variable of integration from the variable upper limit. Applying property (26) and then the mean value property (24), Cauchy notes that $\tilde{F}(x + \alpha) - \tilde{F}(x) = \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx$, $\tilde{F}(x + \alpha) - \tilde{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha)$ (28) for some $\theta \in [0, 1)$. Dividing both sides of (28) by α and then taking limits as $\alpha \to 0$, he concludes from the definition of the derivative and the continuity of f that $\tilde{F}'(x) = f(x)$ (29) as desired. Thus $\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x)$ (30) if f is continuous. To deduce from this first form the second familiar form of the fundamental theorem, Cauchy considers an arbitrary function $F(x)$ such that $F'(x) = f(x)$ on $[x_0, X)$. If $\omega(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$ then $\omega'(x) = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, so the mean value theorem gives $\omega(x) = \omega(x_0) + (x - x_0)\omega'(\bar{x}) = \omega(x_0)$ for all $x \in [x_0, X]$. Therefore $\tilde{F}(x) - F(x) = \tilde{F}(x_0) - F(x_0) = -F(x_0)$, $\tilde{F}(x) = F(x) - F(x_0)$, $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0)$ (31) for any antiderivative F of f".

A história do Teorema Fundamental e os desenvolvimentos ocorridos levaram ao cálculo que conhecemos hoje. A formulação rigorosa realizada por Cauchy continua sendo reproduzida hoje em grande parte dos livros de Cálculo. A relação entre a derivada e a integral é declarada da seguinte forma:

> Teorema Fundamental do Cálculo
> Suponhamos *f* contínua em um intervalo fechado [a, b].
> **Parte I** Se a função *G* é definida por
> $$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$
> para todo *x* em [a, b], então *G* é uma antiderivada de *f* em [a, b].
> **Parte II** Se *F* é qualquer antiderivada de *f* em [a, b], então
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
> (SWOKOWSKI, 1994, p. 362).

A relação entre o acúmulo de uma quantidade e a taxa de variação de seu acúmulo é um dos marcos principais no desenvolvimento do Cálculo. Antes do teorema fundamental demonstrado por Newton e Leibniz, o que chamamos de integração foi concebido principalmente como a determinação de uma quantidade cumulativa, como comprimento do arco, área, volume ou massa, e o que chamamos de diferenciação foi concebido como velocidade angular, tangência e curvatura. Como afirma Thompson (1994, p. 234), essas duas classes de problemas foram concebidas separadamente, cada uma com técnicas limitadas ao tipo de problema abordado.

> Embora ambas as classes de problemas sejam prontamente consideradas capazes de inversão separadamente, portanto, dada a área sob a curva ou a tangente à curva em termos de abscissa ou ordenada, para encontrar a curva, a relação entre o método tangente e a quadratura não é tão óbvio imediatamente. A relação entre tangente e arco acabou se tornando um dos elos mais significativos entre processos diferenciais e integrais e, por essa e outras razões, o problema da retificação tornou-se crucial no século XVII. A natureza inversa das duas classes de problemas foi abordada em termos de um modelo geométrico por Torricelli, Gregory e Barrow, mas somente com Newton a relação emergiu como central e geral. (BARON, 1969, p. 4-5, tradução nossa)[95].

Esse foco nas duas classes de problemas se desenvolveu como resultado de realizações anteriores, como discute Thompson (1994, p. 235), de que a covariância de duas magnitudes

[95] Texto original: "Although both classes of problems are readily seen to be separately capable of inversion, thus, given the area under the curve or the tangent to the curve in terms of abscissa or ordinate, to find the curve, the relation between tangent method and quadrature is not so immediately obvious. The relation between tangent and arc ultimately became one of the most significant links between differential and integral processes and, for this and other reasons, the problem of rectification became crucial in the seventeenth century. The inverse nature of the two classes of problems was approached in terms of a geometric model by Torricelli, Gregory and Barrow but only with Newton did the relation emerge as central and general.".

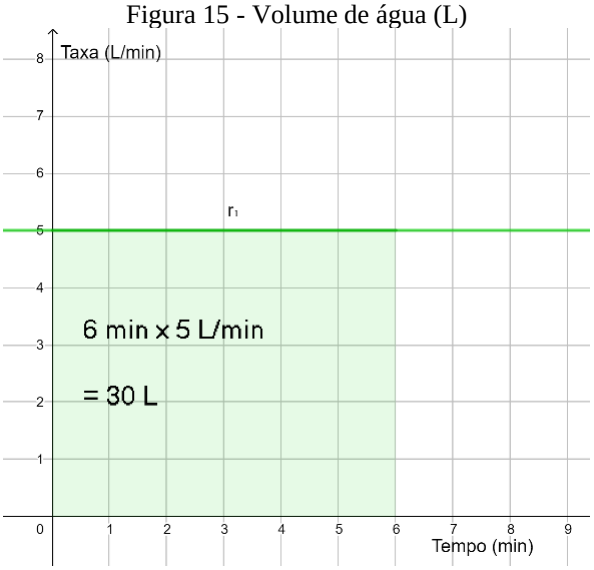
pode ser representada graficamente, ou seja, qualquer problema relacionado à acumulação pode ser representado como a determinação de uma área e qualquer problema relacionado à taxa de mudança pode ser representado como a determinação da tangente.

Para contextualizar, daremos um exemplo[96]:

Supomos um reservatório que esteja enchendo de água a uma taxa constante de 5 litros por minuto, durante 6 minutos. Encontramos o volume (V) da água multiplicando o tempo (t) pela taxa (*i*). Daí, temos: V = t x *i* = 6 min · 5 L/min = 30 L.

Dado que a função que exprime a taxa é $r_1(t) = 5$, graficamente, representamos o volume de água, após 6 minutos, através da área do retângulo delimitado pelo gráfico de r_1 e o eixo das abscissas em $0 \leq t \leq 6$, como mostra a Figura 15.

Figura 15 - Volume de água (L)



Fonte: A autora (2021).

Vamos, agora, supor outro reservatório enchendo à taxa $r_2(t) = 6\text{sen}(0{,}3t)$. Para estimar o volume de água neste reservatório, após 6 minutos, iremos construir uma soma de Riemman[97].

---

[96] Adaptado de uma lição apresentada no site educacional Khan Academy. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-1/a/accumulation-and-net-change-in-context>. Acesso em: 11 nov. 2021.

[97] Após Cauchy ter abordado a necessidade de fornecer uma definição geral e prova da existência da integral para uma ampla classe de funções, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) formulou a generalização da sua integral por meio das séries trigonométricas que convergem uniformemente (chamada série de Fourier). A definição da integral de Riemman foi mais geral, sendo baseada na ideia de Cauchy de aproximar somas associadas a partições do intervalo de integração em subintervalos. Segundo Edwards Jr (1979, p. 326), durante as três últimas décadas do século XIX, essa definição foi reformulada de várias maneiras e rendeu importantes generalizações adicionais no século posterior. Atualmente, a soma de Riemman possui várias utilidades, como a aproximação de áreas sob curvas, a construção de modelos matemáticos em problemas aplicados e para fornecer uma definição formal de área.

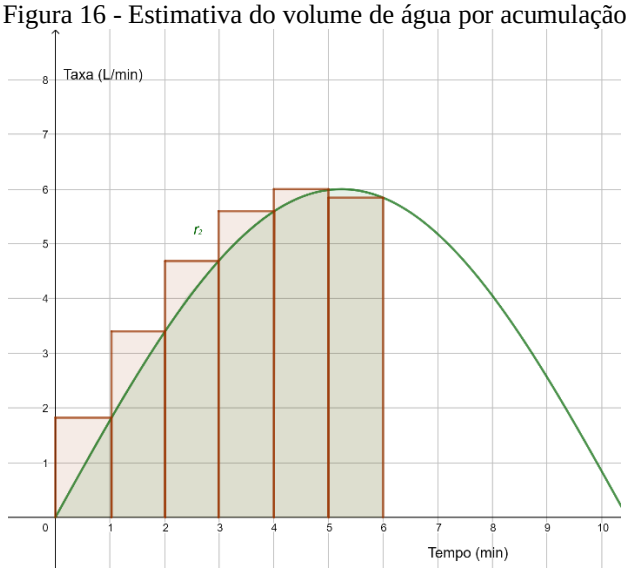
Seguindo este método, dividimos o intervalo $0 \leq t \leq 6$ em subintervalos. Em cada subintervalo t_1, t_2, ..., t_6, tomamos um ponto qualquer e traçamos retângulos cujas alturas se aproximam da região sob o gráfico de r_2. Assim, sabendo que Δt é o comprimento do subintervalo, a área de cada retângulo é dada por:

[área do primeiro retângulo] = [altura][largura] = $r_2(t_1)\Delta t$

[área do segundo retângulo] = [altura][largura] = $r_2(t_2)\Delta t$, e assim por diante.

Continuando desta forma, construímos n retângulos que, juntos, têm uma área $r_2(t_1)\Delta t + r_2(t_2)\Delta t + ... + r_2(t_n)\Delta t$, ou ainda, $[r_2(t_1) + r_2(t_2) + ... + r_2(t_n)]\Delta t$, que é a soma de Riemman, a qual fornece uma aproximação para o gráfico abaixo de $r_2(t)$. De fato, quando a quantidade de subintervalos cresce indefinidamente, as somas Riemman se aproximam de um valor limite, que corresponde à área sob o gráfico.

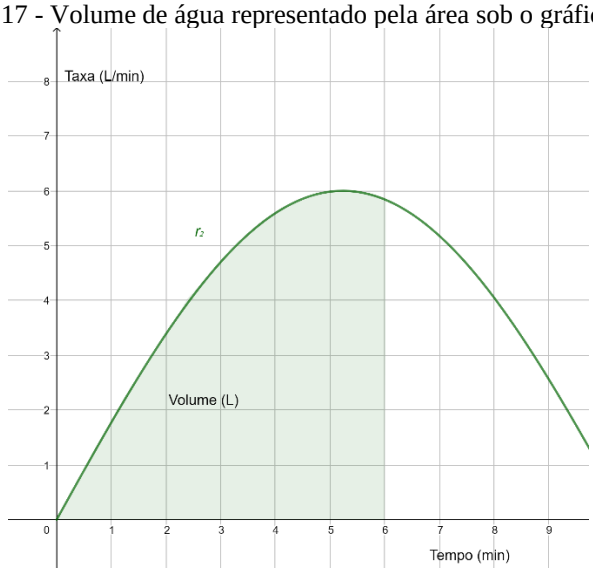
Figura 16 - Estimativa do volume de água por acumulação



Na Figura 16, o intervalo [0, 6] foi subdividido em subintervalos de 1min de largura. Cada retângulo representa um volume em litros, portanto, neste caso, cada retângulo na soma de Riemman é uma aproximação do volume de água que foi adicionada ao reservatório por minuto. Ao somarmos todas as áreas, ou seja, quando todos os volumes são "acumulados", obtemos uma aproximação do volume total de água depois de 6 minutos.

Uma aproximação melhor será obtida ao usar mais retângulos com larguras cada vez menores. E, levando isso a um limite de acúmulo de retângulos infinitos, obteremos a integral definida $\int_0^6 r_2(t)\,dt$. Portanto, o volume de água, após 6 minutos, é igual a área delimitada pelo gráfico de r_2 e o eixo das abscissas entre t = 0 e t = 6, como mostra a Figura 17.

Figura 17 - Volume de água representado pela área sob o gráfico de r_2



Fonte: A autora (2021).

Resolvendo a integral, encontramos o volume almejado:

$$\int_0^6 r_2(t)\,dt = \int_0^6 6\,\mathrm{sen}(0{,}3t)\,dt = -\frac{6}{0{,}3}[cos(0{,}3t)]_0^6 = -\frac{6}{0{,}3}[\cos(1{,}8) - \cos(0)] \approx 24{,}5\ L$$

Thompson (1994, p. 239) supunha que esse processo de acumulação das taxas de variação já era visualizado mentalmente por Newton, apesar deste não fazer uma demonstração lógica, mas que o levou a ter ciência do teorema fundamental.

Uma outra noção que Newton percebeu foi a de fluxões e fluentes, como foi mencionado anteriormente, que hoje chamamos de funções. Seu método era começar com uma expressão analítica para uma função *f* que fornece a taxa de variação de alguma quantidade e derivar uma expressão analítica para uma função *F* que fornece a quantidade cumulativa dessa quantidade.

Ou seja, algumas imagens apoiaram o *insight* de Newton, como observou Thompson (1994, p. 131): a de quantidades dinâmicas, em fluxo contínuo; que o movimento era o conceito unificador de seus métodos para determinar a tangência (taxa de mudança), a curvatura, o comprimento do arco e a quadratura (acumulação); e a ideia do continuum sendo composto por infinitesimais. Essas noções combinadas esclarecem intuitivamente o teorema fundamental: "em uma quantidade multiplicativa e variável, a acumulação total muda à taxa de acumulação das quantidades constitutivas" (THOMPSON, 1994, p. 131, tradução nossa)[98].

Não é esperado que os alunos recriem essas ideias de Newton, mas é possível desenvolver abordagens didáticas para promover a visualização dos alunos e o incentivar a

[98] Texto original: "In a changing, multiplicative quantity, the total accumulation changes at the rate of the accruals of the constitutive quantities".

produção de novas técnicas para apoiar a compreensão acerca dos conceitos relacionados. As pesquisas que discutem sobre o ensino e a aprendizagem do TFC relatam algumas experiências e evidenciam aspectos relevantes que irão complementar a nossa análise.

4.2.5 Síntese da dimensão epistemológica

Na tentativa de resolver os problemas propostos, ao longo da história do Cálculo, muitas técnicas foram desenvolvidas e aperfeiçoadas, dadas as limitações de cada época. E assim os objetos de representação foram surgindo, de acordo com a necessidade e a imaginação dos matemáticos.

As ideias relativas aos infinitésimos, que culminou, tempos mais tarde, no estudo de limites, foram propostas desde a Grécia Antiga, mas perdurou por muitos séculos o *horror infiniti* entre os matemáticos do Ocidente. Embora as realizações de Arquimedes tenham contribuído para o progresso matemático, houvera a necessidade de desenvolver novos métodos e, o possível caminho a ser empregado, era introduzir técnicas infinitesimais.

A matemática arquimediana, baseada na utilização do método de exaustão e do método de dupla redução ao absurdo, contribuíram, durante muitos séculos, na investigação de questões matemáticas, como os resultados sobre o volume da esfera e a área da sua superfície, considerados como os primeiros resultados significativos na resolução do problema da quadratura (área). Apenas dezoito séculos depois de Arquimedes iniciaram as ideias relativas a infinitésimos por Kepler, fazendo uso dos indivisíveis ou quantidades infinitamente pequenas. Com isso, os números irracionais passaram a ser utilizados, embora ainda não houvesse base lógica para os números e eram interpretados como magnitudes geométricas. Mas ocorreu um avanço nas técnicas formais com a utilização da álgebra simbólica, levando à representação algébrica de curvas, contribuindo assim para o surgimento da geometria analítica.

Podemos inferir com isso que as ideias e intuições dos matemáticos precisaram ser materializadas, o que justificamos pela dialética entre os objetos ostensivos e não ostensivos. Os gestos utilizados para explicar as técnicas não eram suficientes e foi necessário, então, desenvolver um sistema que representasse o trabalho matemático realizado. Um exemplo é o de Cavalieri em recorrer à comparação e intuição para determinar a medida do volume de um sólido. Mas isso não foi o bastante para convencer os críticos da época, levando-o a descrever os registros com representações simbólicas e gráficas do seu experimento baseado em indivisíveis, que contribuiu, mais tarde, com a noção de limite.

A intuição, dessa forma, foi um instrumento muito utilizado, como forma de representação, para alcançar possíveis interpretações dos fatos observados. E para dar autenticidade ao raciocínio lógico é que se buscava a formalização do conhecimento. Descartes, em sua obra "O Método", propôs justamente isto, o emprego da razão como uma junção entre a intuição e a dedução.

A evolução dos registros de representação também é percebida, levando ao advento da geometria analítica. Fermat fazia uso de um sistema de eixos coordenados ortogonais, bem próxima ao que utilizamos atualmente, e que já considerava mais de duas dimensões. Mas, antes do século XVII, não havia um sistema bem definido de representação, ou seja, "para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo" (EVES, 2011, p. 384). Ou seja, as figuras geométricas eram associadas aos números e, nesse sentido, havia uma relação entre o signo e o significado da própria coisa. Por exemplo, um número poderia ser uma grandeza quadrada, um segmento de reta ou outra coisa. E, a partir do século XVII, o signo passou a ser analisado em termos de representação. Aqui podemos inferir que a própria necessidade de quantificar, de estabelecer a ordem natural das coisas, dado pelo contexto social e político da época, no mundo ocidental, promoveu o estabelecimento de uma nova relação, agora entre signo e significado, ou ainda, o ostensivo que coativa o não ostensivo. Vimos que, com Descartes, o saber matemático tomou uma nova forma com a função da representação simbólica e, como resultado, a separação entre o registro e o significado. Com o cálculo de Leibniz, novos símbolos, técnicas e formas de representação foram criadas.

Reconhecemos que, historicamente, um conceito matemático incorporado à uma terminologia ou notação, facilitava a sua aplicação em novas investigações. Por exemplo, Fermat estabeleceu a relação $\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\Big|_{E=0}$, que hoje conhecemos por derivada e denotamos por $f'(A)$, mas ele não atribuiu nenhuma notação específica. Se o tivesse feito, teria favorecido outras aplicações.

Em termos de significância, o teorema fundamental do cálculo é um exemplo notável na história do cálculo que declara explicitamente a relação inversa entre diferenciação e integração, que antes estava apenas implícita nos resultados dos problemas de área e tangente. Barrow chegou a demonstrar um teorema geométrico que enunciava essa relação, mas não deu tanta ênfase como fez Newton e Leibniz. Estes o reconheceram como um "[...] amálgama rico

de técnicas infinitesimais anteriores, um poderoso instrumento algorítmico para cálculo sistemático" (EDWARDS JR., 1979, p. 190, tradução nossa)[99].

Diante dessas considerações, reconhecemos que esses aspectos epistemológicos do saber de certa forma irão influenciar o ensino e a aprendizagem nos processos de transposição. Nesse âmbito, a revisão de literatura contribuiu para que pudéssemos identificar outros aspectos que podem dificultar e/ou facilitar a aprendizagem. Nas seções seguintes apresentamos os resultados dessa análise.

4.3 PESQUISAS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO TEOREMA FUNDAMENTAL

Vimos uma breve abordagem sobre o desenvolvimento histórico do Teorema Fundamental do Cálculo e os aspectos conceituais que estão relacionados a esse objeto matemático. No entanto, a sua transposição para o campo didático como acontece hoje, mostra que a Matemática continua se desenvolvendo tanto pela necessidade de explorar novos conceitos e descobertas, como também de se fazer útil para outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, o ensino é um meio de transpor esse conhecimento.

Mas assim como a Matemática, a sociedade evoluiu e as necessidades se modificaram, consequentemente passou a haver uma preocupação com os sujeitos aprendizes e como eles aprendem através da interação com os pares, os ambientes, os recursos e atividades. E assim como a ciência passa pelo processo de mudança paradigmática, a educação também vem passando, mesmo que em velocidades diferentes, mas ao mesmo tempo sofrendo forte influência dos meios de comunicação e tecnologias.

> Educar nesse tempo de mundialização instiga a refletir sobre o processo de globalização que tem passado a integrar os sistemas financeiros, econômicos, políticos e sociais das nações. Esse contexto torna as nações cada vez mais interdependentes e inter-relacionadas e, ao mesmo tempo, mais dependentes de uma estrutura econômica com uma versão neoliberal. Paralelamente, ocorre a transição da sociedade industrial, voltada para a produção de bens materiais, para a sociedade do conhecimento, voltada para a produção intelectual com uso intensivo de tecnologias. (BEHRENS, 2010, p. 73)

Nesse panorama, a educação superior se sente desafiada no sentido de oferecer o acesso ao conhecimento compatível com as necessidades deste momento histórico, demandando ações

[99] Texto original: "[The contribution of Newton and Leibniz, for which they are properly credited as the discoverers of the calculus, was not merely that they recognized the, "fundamental theorem of calculus" as a mathematical fact, but that they employed it to distill] from the rich amalgam of earlier infinitesimal techniques a powerful algorithmic instrument for systematic calculation".

que levem tanto o professor quanto o aluno a buscar mudanças em seus papeis, preocupando-se em ensinar, a aprender, bem como a divulgar o conhecimento, utilizando-se de novas abordagens, novos recursos e novas relações.

Behrens ainda destaca que

> O inegável desenvolvimento científico e tecnológico leva a refletir sobre a dicotomia homem-máquina. Essa questionável relação precisa adquirir sentido e significado, observando-se, criteriosamente, os impactos das tecnologias sobre a sociedade e sobre a cultura. A tecnologia precisa ser contemplada na prática pedagógica do professor, a fim de instrumentalizá-lo a agir e interagir no mundo com critério, com ética e com visão transformadora. (BEHRENS, 2010, p. 78-79)

Esse processo de uso da tecnologia na prática do professor leva também a novos comportamentos de ensino e de aprendizagem, novos estímulos perceptivos, novas possibilidades de acesso à informação e de construção do conhecimento. Em nossa pesquisa, preocupamo-nos em analisar também os tipos de situações, com seus recursos e relações, que se configuram com a presença da tecnologia, particularmente, os softwares voltados para o ensino de Cálculo, bem como o desenvolvimento desse tipo de tecnologia para sua utilização como ferramenta nos processos de ensino e de aprendizagem. Partimos do pressuposto que podemos identificar requisitos de software que podem ser úteis em resolver problemas na construção do conhecimento matemático e que talvez ambientes tradicionais não sejam suficientes.

Podemos dizer que o Cálculo Diferencial e Integral é o alicerce da ciência e da tecnologia desenvolvidas nos últimos séculos. E como já foi dito antes, em seu centro está o teorema fundamental que conecta dois conceitos essenciais, que são a derivada e a integral. Em nosso trabalho, nos propomos analisar as praxeologias em torno do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) para constituir a caracterização de um micromundo. Portanto, além de conhecer o desenvolvimento histórico do TFC, buscamos também na literatura os trabalhos que já foram realizados com essa temática.

Apresentamos, assim, nesta e nas próximas seções, as principais abordagens de pesquisas já realizadas (artigos, dissertações e teses) que discutem sobre o ensino e a aprendizagem do TFC, destacando os aspectos relativos às dimensões didática, cognitiva e informática, e que contribuem para a nossa compreensão do estado atual nessas dimensões, a fim de identificar requisitos para a caracterização de um micromundo.

Encontramos em nossa investigação alguns trabalhos vinculados ao grupo de pesquisa "O Elementar e o Superior em Matemática", com o projeto "Componentes do processo de

ensino e aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor", supervisionado pelo professor Dr. Benedito Antônio da Silva, na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo. Um deles é uma tese de doutorado (GRANDE, 2013), e mais quatro dissertações de mestrado (PICONE, 2007; CAMPOS, 2007; ANACLETO, 2007; ANDERSEN, 2011), sendo que todos versam sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.

Grande (2013) destaca em sua pesquisa, além da preocupação com as dificuldades relacionadas à aprendizagem dos alunos em cursos de Cálculo, a abordagem de ensino do Teorema Fundamental do Cálculo sem relacionar os conceitos de integração e derivação como operações inversas. E julga que essa abordagem aliada à escassez da utilização do registro gráfico podem ser causas da incompreensão do teorema pelos alunos.

Destarte, ele questiona: "uma intervenção de ensino baseada nos princípios da intuição contribui na compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, por meio de uma situação-problema que propicie emergir e evidenciar tais relações?" (GRANDE, 2013, p. 32). Além de tentar buscar resposta para essa pergunta, o autor almejou também avaliar qual o alcance que uma intervenção desse tipo traz para o ensino e aprendizagem do TFC.

O referencial teórico utilizado pelo autor baseia-se nas ideias de Henri Poincaré, ligadas ao uso da intuição na construção do conhecimento matemático, nas noções e características do raciocínio indutivo, descritas por Efrain Fischbein, e no papel da visualização no ensino do Cálculo com as inter-relações entre a intuição e o rigor, discutidos por David Tall.

O autor, então, elaborou uma intervenção de ensino e, a partir de um questionário-piloto, buscou aferir os procedimentos, estratégias e recursos utilizados pelos alunos que participaram da pesquisa, assim como as dificuldades na resolução de questões referentes a alguns tópicos de Cálculo.

Segundo Grande, os alunos mostraram uma intuição geométrica que favoreceu a resolução da questão relacionada com o volume dos sólidos, o que não aconteceu a respeito ao cálculo de áreas, justificando que provavelmente o volume de um sólido geométrico seja mais intuitivo para os alunos do que o cálculo de áreas. Além disso, os alunos apresentaram dificuldade na compreensão da variação da área e o significado da variável t e não apresentaram uma visão dinâmica na compreensão dos conceitos de acumulação e variação.

O autor encontra também no trabalho de Vianna (1998) a falta de interpretação e identificação do TFC na representação gráfica e conclui que este é um fator preponderante para o entendimento do teorema, além de poder auxiliar na resolução de questões que envolvam de maneira explícita ou implícita o teorema. Ele enfatiza que isso leva a refletir sobre como

elaborar uma tarefa concernente ao TFC que explore e contemple a questão da representação gráfica, tanto no caso de acumulação quanto no de variação e suas representações.

Isso impulsionou Grande (2013) a construir a sequência de ensino com tarefas buscando explorar os conceitos de acumulação e variação de duas grandezas por meio da representação gráfica de funções. Esta foi constituída por duas tarefas e o autor questiona sobre qual situação-problema pode ser criada e quais conceitos devem ser explorados inicialmente nessa situação para auxiliar a compreensão das relações presentes no TFC.

As questões levantadas por Grande (2013) convergem com a nossa reflexão sobre como o professor desenvolve as tarefas para resolver situações-problema sobre o ensino do TFC, e ainda, particularmente mediadas pelo uso de software. Neste caso, seriam as mesmas tarefas produzidas para o ambiente papel e lápis? E ainda, quais ferramentas um software educativo pode fornecer para contribuir com o ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos? Estas e outras questões fizeram parte de nossas análises sobre as pesquisas que encontramos.

Assim como Grande (2013) destacou, também constatamos na pesquisa de Campos (2007) que os livros didáticos de Cálculo quase não exploram a representação gráfica e a diversidade de registros de representação. Ponderamos que esse fato pode gerar dificuldades tanto de ensino quanto de aprendizagem, já que o livro didático exerce grande influência na preferência de escolha dos materiais didáticos. Picone (2007) também observou em sua pesquisa a ausência da mobilização do registro gráfico e da coordenação dos registros de representação por parte dos professores no ensino do TFC. Podemos considerar, portanto, que estas são características que devem ser observadas na escolha de um software educativo por parte do professor, assim como no seu desenvolvimento.

A Tarefa 1 da sequência de ensino elaborada por Grande buscou a exploração geométrica e gráfica das relações existentes entre o volume e a área da seção transversal de um sólido com altura, destacando os conceitos de acumulação e variação, variáveis dependentes e independentes de uma relação ou função e continuidade. Para isso ele considerou as ideias por trás do princípio de Cavalieri para a elaboração da tarefa.

Já a segunda tarefa, visou a formalização dos resultados da tarefa anterior, utilizando o rigor para a demonstração do TFC. Esta teve como objetivo explicar a relação de acumulação e variação de forma geral, utilizando-se das representações gráfica e algébrica, e obter formalizações sobre como se dá a relação entre as operações de integração e derivação e estabelecer finalmente o TFC.

O autor considerou o fato de que o movimento se relaciona com a variação e a acumulação, assim como ressaltamos na seção anterior sobre Newton ter feito essa relação séculos atrás, e que isso deve ser um fator relevante na elaboração da intervenção de ensino. E por serem conceitos dinâmicos, essa tarefa requeria a utilização de um recurso computacional. Para isso, foi utilizado o software GeoGebra que, segundo ele, na sua pesquisa estava ligado à questão da interação, da manipulação dinâmica, da visualização e a relação desses elementos com a intuição e o rigor, sem ter, necessariamente, associação com um curso sobre o software.

Avaliamos o software GeoGebra como do tipo micromundo, dado principalmente a essas características levantadas por Grande. Na pesquisa que ele realizou, a utilização dos recursos foi limitada segundo à proposta ou necessidade da tarefa, servido apenas como "ferramenta na elaboração da intervenção de ensino na construção do modelo de uma situação-problema (...) e os alunos puderam manipular de maneira dinâmica apenas alguns elementos (...)." (GRANDE, 2013, p. 211).

Com a resolução dessa tarefa, Grande analisou que os conceitos de acumulação e variação parecem mais perceptíveis quando se trabalha com um sólido geométrico as noções de área de uma seção transversal e o volume do sólido, buscando de início formular intuitivamente algumas conjecturas e relações.

A Tarefa 2 consistiu de um problema que trata de um gráfico representando a taxa da variação de água em um reservatório ao longo do tempo e se quer obter o gráfico do volume da água nesse reservatório. Grande destaca que as tarefas possuem elementos que estão relacionados ao TFC e são primordiais para a sua compreensão, como taxa de variação, acumulação e continuidade de uma função.

Para Grande, nas duas tarefas, o software contribuiu tanto para a exploração das cognições intuitivas dos alunos e construção de resultados, bem como para a validação de conjecturas formuladas pelos alunos auxiliando-os na formalização de alguns conceitos essenciais para o estabelecimento do TFC, como a noção de acumulação. Além disso, a interação entre os alunos com o software permitiu estabelecer a inter-relação entre os componentes algorítmico, intuitivo e formal.

Em relação às atividades matemáticas, verificou-se a necessidade de relacionar e confrontar esses componentes, pois individualmente não se mostrou uma estratégia eficiente na resolução das questões. Essas relações, trabalhadas simultaneamente com as noções de acumulação e variação, promoveram a compreensão do TFC ao se estabelecer a relação de reciprocidade entre as operações de integração e derivação. Ao mesmo tempo, foi possível

identificar algumas dificuldades dos alunos na compreensão de conceitos, como: representação gráfica e continuidade de uma função, variação entre duas grandezas.

A pesquisa de Picone (2007) pretendeu investigar as representações sobre o Teorema Fundamental do Cálculo que os professores mobilizam em suas aulas, embasando-se nos pressupostos teóricos dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Também buscou entender a inter-relação entre as variáveis visuais pertinentes na interpretação dos gráficos e nas argumentações da língua natural.

A autora elaborou um questionário, dividido em duas etapas, e aplicou a oito professores de Cálculo de Universidades públicas e particulares na Grande São Paulo. A primeira etapa continha oito questões e, a segunda, nove. Posteriormente, foi realizada uma entrevista com o fim de obter detalhes sobre as respostas dos questionários. Também foi feito um estudo piloto antecedente ao questionário e aplicado a um professor de Cálculo que contribuiu com questões propostas na investigação.

A primeira etapa do questionário teve a intenção de identificar o perfil dos professores que participaram da pesquisa sobre a sua formação profissional, experiência docente na disciplina de Cálculo, livros didáticos que utiliza e como aborda o TFC. O objetivo da segunda etapa foi investigar qual o enfoque dado ao TFC pelos professores de Cálculo sobre a conexão entre a derivação e integração e a sua utilização como ferramenta para o cálculo de integrais definidas ou se, além desses aspectos, considera outros que podem ser relevantes.

A ideia geral das questões nas duas etapas, segundo a autora, foi verificar se os professores mobilizam e/ou propiciam a mobilização dos registros de representação semiótica, privilegiam um ou outro registro e se costumam fazer a coordenação entre eles quando ministram suas aulas referentes ao TFC.

A entrevista, denominada por terceira etapa, pretendeu obter alguns detalhes que aprofundassem as respostas obtidas, como por exemplo, identificar a exploração da inter-relação entre as variáveis visuais pertinentes ao analisar as situações propostas no questionário.

Na segunda etapa foram utilizadas duas questões da pesquisa de Vianna (1998), que investigou sobre a compreensão dos alunos sobre o TFC, uma delas a partir da relação entre o gráfico de funções derivadas, integrais e integrandas, e a outra, através do cálculo algébrico. E Picone buscou verificar se os professores enfatizavam o relacionamento entre essas funções e valorizavam a relação gráfica, como também o entendimento do Teorema no registro algébrico. Uma outra questão foi baseada num exemplo e enunciado do livro “Curso de Análise” de Elon

Lages Lima, em que Picone pretendeu verificar se o professor valoriza a condição de existência da primitiva a partir da sua conversão entre os registros algébrico e gráfico.

Fazendo destaque para o uso de livros utilizados ou indicados pelo professor, a autora justifica que a intenção é de identificar elementos que revelem ou não a valorização de variados registros de representação na escolha do livro didático e relacioná-lo com as situações propostas. Ela concorda com Barufi (1999)[100] que a escolha do livro didático feita pelo professor pode revelar as suas preocupações e escolhas metodológicas (PICONE, 2007, p. 63).

De fato, também concordamos que o livro didático (LD) é o recurso primordial do trabalho do professor, particularmente no ensino de Cálculo, e revela muito sobre os diferentes "habitats" e "nichos"[101] ocupados pelos objetos matemáticos, que neste caso, é o Teorema Fundamental do Cálculo, bem como as práticas institucionais propostas nas instituições em torno do ensino e da aprendizagem. A estrutura de um LD é organizada geralmente em torno da apresentação do assunto, das atividades e dos comentários dos autores que sugerem abordagens e objetivos esperados pelo leitor, seja estudante ou professor. A Teoria Antropológica do Didático, nesse sentido, fornece elementos teóricos para a análise de materiais presentes nas instituições de ensino, como os LD. A definição seguinte explica o sentido institucional que adotamos:

> O *manual escolar* ou livro didático é uma publicação especializada, com identidade própria, que nasceu como resposta às necessidades do sistema educativo geral e público e do modelo de ensino simultâneo, sendo assim, representa muito bem o saber institucional tal como surge no sistema escolar. (LUCAS *et al.*, 2018, p. 212)

Os resultados da pesquisa de Picone revelaram, segundo a autora, que embora alguns professores considerarem importante a coordenação de registros de representação no ensino de conceitos fundamentais do Cálculo, nem todos coordenam os registros de representação no ensino do TFC. Questionando sobre a possibilidade de mais professores não explorarem graficamente o Teorema e não buscarem uma maior significação da sua relação, sugere que as atividades propostas por professores poderiam servir de ponto de partida para a elaboração de uma sequência de ensino com o objetivo de contribuir na aprendizagem do TFC.

A autora destaca, portanto, uma preocupação também com as atividades de ensino. E concordamos com Artigue (1997) que deve haver uma flexibilidade na utilização de diversos

---

[100] BARUFI, M. C. B. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Tese de Doutorado. USC, 1999.

[101] Chevallard (1994, p. 4) explica que o *habitat* significa o lugar onde vive o objeto do saber, e o *nicho* seria a função desse objeto no sistema de objetos que ele interage.

registros de representações (gráficos, simbólicos, linguagem natural, ...) e na articulação sistemática de diferentes interpretações do mesmo objeto matemático como condições necessárias para desenvolver uma atividade matemática genuína. O software educativo pode fornecer ferramentas úteis nessa flexibilização, mas isso levanta uma inquietação em nossa pesquisa, como já citamos, referente às tipologias de software matemático disponíveis e os tipos de tarefas elaboradas pelos professores para ensinar Cálculo, em particular o TFC, com a utilização desses softwares.

Quanto a essas escolhas, assim como Picone revelou, podemos encontrar alguns indícios na análise de livros didáticos para questionar as praxeologias presentes nas instituições e identificar os fenômenos didáticos. Para Henriques (2019, p. 103), a análise do LD não deve ser omitida "pois revela os indicadores linguísticos do saber a ensinar, sendo, portanto, a fonte do texto do saber ensinado, visando o saber aprendido, mediante o processo da transposição didática (CHEVALLARD, 1985)"[102].

Em relação a esse aspecto, a pesquisa de Campos (2007) analisou quatro livros didáticos com tratamento ao Teorema Fundamental do Cálculo, buscando as diferenças fundamentais que são evidenciadas no enfoque dado pelos diferentes autores e se os textos exploram a coordenação dos registros de representação na apresentação do TFC. O autor parte do princípio que a forma como este Teorema vem sendo apresentado em alguns livros e apostilas pode dificultar a apreensão dos objetos matemáticos e dos tópicos inerentes aos mesmos. Também critica a abordagem dos professores de Cálculo que dão relevância ao uso das técnicas e à reprodução de situações de algoritmização do assunto, discorrendo alguns trabalhos da literatura pesquisada.

Para a análise, fundamentou-se nos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que considera que, para a aquisição do conhecimento matemático, é necessário utilizar, simultaneamente, ao menos dois registros de representação. E como os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, é preciso fazer uso das representações (símbolos, sinais, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, etc.).

Para a noção de representação, segundo o autor, Duval determina três abordagens: as representações mentais (têm a função de objetivação e o método para seu estudo é o de

[102] No processo da Transposição Didática, segundo Henriques (2019): *Saber Sábio* é o saber extraescolar ou acadêmico que precede culturalmente o trabalho científico. Trata-se do saber de referência sábio, fruto de descobertas pessoais ou grupos de pessoas, cientistas; *Saber a ensinar* é o saber descrito/propostos nos livros didáticos e/ou em outras fontes literárias; *Saber ensinado* é o saber organizado pelo professor com base no saber a ensinar; *Saber aprendido* é o saber adquirido pelo aluno/estudante a partir do saber ensinado em uma determinada instituição.

conversão); as representações computacionais (são internas e não conscientes do sujeito, privilegiando o tratamento ao traduzir informações externas a um sistema de forma que seja possível recuperá-las e combiná-las no interior do sistema); e as representações semióticas (são externas e conscientes do sujeito, relativas aos signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica, gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático).

E, ainda, para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, são necessários: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. A conversão influencia na escolha do registro a serem efetuados os tratamentos e que, segundo Duval, conduz à compreensão.

O autor traz essas explicações buscando justificar um problema no ensino de Matemática ao se levar somente em consideração as atividades cognitivas de formação de representação e os tratamentos em cada registro, sem garantir a coordenação entre os vários registros de representação. Como Campos (2007) revela, a teoria garante que essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o objeto e sua representação. Logo, é necessário analisar o objeto e as suas possíveis representações passivas a uma conversão de um registro para outro, e não somente os tratamentos, pois a capacidade de converter uma representação de um objeto, entre registros distintos, pode contribuir no desenvolvimento da capacidade de coordenação. Com base nisso, ele buscou identificar os tratamentos e as conversões presentes nos textos de livros didáticos, por considerar que eles estão sempre presentes no trabalho do professor na sala de aula.

Os livros analisados pelo autor foram:

- Curso de Análise, volume 1, de Elon Lages Lima. 3a edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1982.
- Um curso de Cálculo, volume 1, de Hamilton Luiz Guidorizzi. 5ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro. 2001.
- Cálculo, volume 1, de James Stewart. 5ª edição. Editora Pioneira Thomson Learning. São Paulo. 2006.
- Cálculo: um curso universitário, volume 1, de Edwin. E. Moise. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo. 1970.

Para a escolha e organização das análises dessas obras, foram utilizados alguns princípios teóricos-metodológicos da Análise de Conteúdo, de Bardin, que sugere cronologicamente a organização em três etapas: pré-análise; exploração do material; e tratamento dos resultados obtidos e interpretação.

A escolha das obras, na etapa de pré-análise, baseou-se em critérios que evidenciassem a preocupação de apresentar ou não a condição de existência da Integral, como: a função ser contínua, ser ou não limitada, a existência do supremo, do ínfimo, o fato de o integrando possuir ou não primitiva, considerados essenciais para o entendimento do TFC, e a sua utilização. Outro critério baseou-se na apresentação do assunto. Na escolha de Campos, baseando-se nos registros de representação semiótica, observou-se abordagens distintas em relação à apresentação do TFC.

O autor utilizou indicadores para organizar a análise dos livros que pudessem revelar o tipo de abordagem do Teorema, no que diz respeito: 1) à contextualização; 2) se partem de casos particulares aos casos gerais ou vice-versa; 3) a condições de existência; 4) à questão da continuidade e integrabilidade; 5) à referência sobre a inter-relação derivada-integral; 6) à demonstração; 7) às aplicações: práticas e/ou intrínsecas à matemática; 8) aos exemplos e exercícios. E como ferramentas de análise, utilizou indicadores que pudessem revelar a exploração da coordenação dos registros de representação semiótica: A) simbólico (correspondendo ao numérico e ao algébrico); B) figural (correspondendo ao gráfico e ao geométrico); e C) língua natural. Em cada registro, buscou-se descrever os tratamentos envolvidos.

Em suas análises, Campos evidencia a contribuição da integração dos indicadores na busca para as questões de pesquisa, mas aponta algumas dificuldades. Uma delas é relativa à utilização de todos os indicadores, justificando que eles não são mutuamente exclusivos e às vezes o são, causando imprecisão, em alguns momentos, na caracterização detalhada de alguns tópicos referentes ao tema. A causa se deveu ao número elevado de indicadores elaborados e devido os livros possuírem abordagens distintas. E a outra dificuldade foi evidenciar e/ou descrever possíveis tratamentos no registro da língua natural. Notou-se mais facilmente a conversão deste registro para outro ou vice-versa.

Dentre todos os resultados, destacaremos aqui apenas o concernente à inter-relação Derivada-Integral. Segundo o autor, Lima sugere logo na introdução do capítulo “Integral de Riemmann”:

> É uma circunstância notável que a noção de área esteja relacionada com as derivadas. Esta interdependência entre derivação e integração é expressa pelo fato de que o conjunto S, acima associado à função *f*, tem como área o número *F(b) – F(a)*, desde que *F* seja uma função cuja derivada é *f*. Neste capítulo [...] estabeleceremos as relações mais importantes entre a integral e a derivada. (LIMA, 1982, p. 239, *apud* (CAMPOS, 2007, p. 189).

E discute essa conexão fazendo uso também dos registros gráfico e língua natural, fornecendo conversões entre estes e o simbólico, bem como a coordenação entre eles. Já Guidorizzi não evidencia essa inter-relação utilizando outros registros que não seja o simbólico, embora utilize o registro gráfico para evidenciar outros aspectos do TFC, como a relação entre o gráfico de f e F mas em eixos distintos, assim como Lima. A relação inversa é explicitada por Stewart, que inclusive utiliza-se do registro gráfico ao relacionar uma função e sua integral, no mesmo sistema de eixos, utilizando-se dos exemplos e sugerindo nos exercícios. Dessa forma, segundo Campos, propicia a coordenação entre os diferentes registros de representação. Nesse aspecto, nos baseamos em Henriques (2019) para inferir que entre o fato de "sugerir" o uso do registro gráfico e "propiciar" a coordenação, há uma questão não explícita que é a visualização, bem como a mobilização de ferramentas computacionais, que possibilitam o entendimento do TFC.

Ainda sob o nosso ponto de vista, embora a representação de objetos matemáticos no registro gráfico ocupe um espaço significativo na organização de um livro didático, e mesmo que se apresente simultaneamente em outro registro, como o algébrico, a coordenação desses registros requer a mobilização de conceitos matemáticos associados ao Teorema, bem como a utilização de tarefas que explicitem essa mudança nos registros, ou seja, com técnicas que possam permitir a obtenção dessas representações e que inexistem no livro didático. Logo, esse domínio é do professor, cabendo a ele o papel de utilizar os recursos necessários para suprir essa deficiência.

Segundo Campos, a análise dos resultados de sua investigação mostra que todos os autores dos livros analisados justificam o próprio enfoque na condução do texto, sendo mais reveladores em Lima, Stewart e Moise, e, em relação aos registros, a diversificação nos prefácios ocorre mais com estes autores. Quanto à questão da exploração da coordenação dos registros de representação na apresentação do TFC, em geral, verificou-se que, apesar de utilizarem mais de um registro, a abordagem na apresentação do TFC poderia ser mais bem conduzida no que diz respeito à diversidade dos registros de representação semiótica. E essa diversidade deveria ser explorada tanto nos exemplos quanto nos exercícios, no sentido de mobilizar, em uma mesma atividade, pelo menos dois registros de representação, permitindo o tratamento em ambos os registros ao mesmo tempo.

Encontramos também na tese de Palaro (2006) um estudo de como alguns livros didáticos de Cálculo e Análise definem a integração e como abordam o Teorema Fundamental do Cálculo, com o objetivo de levantar os aspectos caracterizadores da concepção de Educação

Matemática de Henri Lebesgue (1875-1941). Segundo a autora, Lebesgue dava ênfase à atividade e que tanto no ensino como na prática de fazer matemática, deveria iniciar com uma atividade a partir da qual poderiam ser abstraídos conceitos, fazer generalizações, deixando as definições axiomáticas por último.

Palaro analisou três livros de Cálculo e um de Análise, justificando que as abordagens ou perspectivas encontradas neles eram repetidas de alguma forma nos outros livros. Foram eles:

- Cálculo com Geometria Analítica, volume 1, de George F. Simmons;
- Cálculo, volume 1, de George B. Thomas Jr.;
- Elementos de Cálculo Diferencial e Integral, de Willian Anthony Granville, Percey F. Smith e William Raymond Longley; e
- Curso de Análise, volume 1, de Elon Lages Lima.

Ela buscou identificar como esses livros didáticos introduzem as integrais e sob qual perspectiva abordam o teorema fundamental, ou seja, em que período histórico que os caracterizam. Para a análise, a autora considera que, com o TFC, o difícil problema de calcular integrais definidas através do cálculo de limites de somas pode ser mais simples ao buscar encontrar antiderivadas. E apresentando o TFC como consequência da definição da composta da função derivada com sua inversa, dá dois sentidos para a palavra "integrar":

(A) Sendo dada uma função f definida sobre um intervalo fechado $[a, b]$ da reta, encontrar uma função F tal que $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, ou seja, determinar uma primitiva ou antiderivada.

(B) Sendo dada uma função f definida sobre um intervalo fechado $[a, b]$ da reta, determinar a área delimitada pela curva de f, o eixo das abscissas e as retas de equações $x = a$ e $x = b$; ou seja, encontrar uma integral definida.

A estes dois problemas, Palaro chama de "equivalentes" se a resolução de um implicar a resolução do outro, e, neste sentido, o TFC indicará uma equivalência se f obedecer a certas condições. A autora lembra que, antes de Riemann, assumia-se que f era contínua e era condição suficiente para o TFC, que diz que podemos resolver o problema (B) por meio da resolução de (A). Com o conceito de integral dado por Riemann e, após, Lebesgue, buscaram-se condições necessárias para a "equivalência" dos problemas (A) e (B), portanto escolheram classes mais amplas de funções.

Sobre a obra de Simmons, Palaro faz duas observações: a primeira é que o TFC estabelece uma equivalência entre os dois sentidos da palavra *integrar*, no sentido de Simmons;

a segunda é que a classe das funções às quais se aplica esse teorema é a das contínuas definidas nos intervalos fechados [a, b].

Na obra de Thomas Jr, Palaro observa que, por ter o autor definido a integração como operação inversa da diferenciação, o TFC passou a ser uma consequência da definição, daí o que precisou ser provado é que a integração neste sentido tem relação com o problema da medição da área. Para isso, o autor usou o Teorema sob a condição de continuidade das funções às quais o teorema se aplica.

Em Granville, Smith e Longley, segundo Palaro, a integração foi definida como operação inversa da diferenciação e apresentam o TFC como uma definição. Usaram esse teorema para provar que a integração, como foi definida, tem relação com o problema da medição da área. E a classe das funções para as quais se aplica tal teorema foi estabelecida pelos autores como sendo a de funções contínuas definidas em um intervalo [a, b].

No livro de Análise, de Elon Lages Lima, Palaro identificou que o termo "integrar" no sentido (B) foi utilizado para determinar a integral definida. O autor usou o TFC para mostrar que podemos calcular áreas por meio das antiderivadas. Palaro observou que, diferente dos outros autores, a formulação do Teorema evidencia que, para mostrar a equivalência entre os problemas (A) – determinar uma primitiva – e (B) – determinar uma área –, Lima não se baseia em condições suficientes (continuidade da função f em [a, b]), mas sim em condições necessárias (integrabilidade da função f em [a, b]), o que mostra uma perspectiva mais moderna, que se baseia no Cálculo de Riemann.

Além dessas observações, Palaro percebeu que algumas obras definem a integração geometricamente, como sendo uma medição de área (limite de um somatório). E que, neste caso, como fizeram Simmons e Lima, é necessário provar que existe uma relação entre a integração e a diferenciação, ou seja, que se pode resolver o problema (B) por meio da solução de (A) e mostram essa "equivalência" usando o TFC. Outras a definem algebricamente, como operação inversa da diferenciação. Já neste caso, como fizeram Thomas Jr e Granville, Smith e Longley, a integração e a diferenciação são apenas operadores inversos na álgebra das funções, lembrando o espírito algébrico dominante de definir a integral nos séculos XVII e XVIII com a típica atividade de transformar fórmulas em outras fórmulas. Dessa forma, o TFC é uma consequência da definição, precisando provar que a integração tem relação com o problema da medição da área e para isso se usa esse teorema.

Nós compreendemos, com essa análise de Palaro, que o Teorema Fundamental tem sido utilizado tanto como técnica, constituindo o bloco da práxis, para resolver questões de área, por

exemplo, quanto como tecnologia, fazendo parte do bloco do saber, para provar (justificar) a integração.

A abordagem dos livros didáticos também foi uma preocupação de Mateus (2006), que inferiu que este seria um dos fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo. O objetivo da sua pesquisa foi analisar e compreender melhor como, atualmente, os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral são tratados em alguns livros didáticos disponíveis. Para tal, utilizou como referências: a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, para buscar entender como os livros articulam para aceder aos objetos matemáticos; a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, para buscar a explicação de como os livros escolhidos expõem o conteúdo matemático para promover a construção do conhecimento do aluno; e a Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard, para discutir as organizações matemática e didática dos livros selecionados em termos de tipos de tarefas, técnicas e justificações da sua razão de ser.

Mateus selecionou, para a sua análise, oito livros didáticos, concentrada na parte introdutória do Cálculo Diferencial e Integral, pois entende que é a base de toda a construção do Cálculo. São 3 de autores brasileiros, 2 de autores moçambicanos na língua portuguesa e 3 livros norte-americanos traduzidos no Brasil:

> - **Livro 1:** FILHO, B. B.; SILVA, C. X. *Matemática aula por aula. Geometria analítica, Números complexos, Polinômios, Limites e Derivadas, Estatística, Matemática financeira. 3º ensino médio (2º grau), São Paulo, FTD S. A. 1998.*
> - **Livro 2:** GIOVANNI, J. R.; DANTE, L. R. *Matemática. Teoria – Exercícios – Aplicações. Geometria analítica, Números complexos, Polinômios, Limites e Derivadas. São Paulo, FTD S.A. 1992.*
> - **Livro 3:** CARVALHO, A.; BERQUEMBAEV, E.; CHERBAKOV, E.; MOZOLEVSKI, I.; ALEXANDROV, R. *Matemática, Volume 1. Introdução à Análise Matemática. Limites e Derivadas. Manual da 11ª classe. Ministério da Educação e Cultura. Maputo, 1981.*
> - **Livro 4:** GRUPO DE MATEMÁTICA. *Matemática, Volume 2. Ensino Técnico Profissional Médio. Serviço de Planificação Curricular. Secretaria do Estado da Educação Técnico Profissional. Maputo, 1981.*
> - **Livro 5:** TAN, S. T. *Matemática aplicada à Administração. 5ª Edição Norte-Americana. Tradução: Edson de Faria. São Paulo. Pioneira Thomson Learning. 2003.*
> - **Livro 6:** ÁVILA, G. S. S. *CÁLCULO 1. Funções de uma variável. Livros Técnicos e Científicos Editoras S. A. Rio de Janeiro. 1981.*
> - **Livro 7:** LEITHOLD, L. *Cálculo com Geometria Analítica. Volume 1, 2ª edição. Tradução: Antônio Paques, Otília Teresinha W. Paques e Sebastião Antônio Filho. Editora Harper & Row do Brasil Ltda. São Paulo. 1982.*
> - **Livro 8:** SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica, volume 1, 2ª edição. Tradução: Alfredo Alves de Farias. Makron Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo. 1995.*
>
> (MATEUS, 2006, p. 99)

A análise dos resultados da organização didática dos livros evidenciou que todos eles constroem a noção de derivada usando a definição formal de Cauchy, baseada no limite da razão incremental, sendo que o livro 4 busca uma estratégia diferente, partindo da determinação experimental da função derivada e do declive da reta tangente. No entanto, essa discussão experimental cria uma motivação para um tratamento formal do conceito, o que contraria as opções tradicionais dos autores dos demais livros, segundo Mateus. Além disso, a análise mostra que há diversas concepções associadas ao conceito de derivada e Mateus chama atenção que o conceito de derivada não fica completo quando apenas se destaca um aspecto, como, segundo ele, muitas vezes acontece no ensino onde a atenção tem sido o limite da razão incremental em si, sem muita reflexão do que tal limite significa para os diferentes conceitos.

Outra observação é a falta de discussão, nos livros 1 e 4, dos casos onde a derivada de uma função não existe, sem dar informação completa das características do objeto matemático, sendo que os demais livros fazem essa discussão de forma completa, articulando os procedimentos algébricos com a visualização gráfica que, segundo Mateus, constitui uma opção didática correta.

Em relação aos tipos de atividades, constatou-se que nos livros analisados há muito mais atividades de repetição, visando a rotinização da técnica. Mateus chama a atenção para a importância de aliar o desenvolvimento de habilidades de técnicas com a compreensão do significado para poder garantir a flexibilidade do uso da técnica em outros contextos diferentes daqueles onde ela é produzida. Além disso, foi percebido que os problemas resolvidos são, na maioria, os mesmos das classes de problemas com os quais a humanidade vem defrontando há séculos, como problemas de tangente, de máximos e mínimos e estudo do movimento, o que, segundo Mateus, confirma o valor do estudo da evolução histórica e epistemológica dos conceitos, ajudando a perceber o que fazemos hoje.

Em relação à integral, os livros introduzem uma discussão sobre a antiderivada de uma função f de maneiras diferentes, sendo que o livro 5, na concepção de Mateus, é apresentada de forma didática que motiva o aluno. A integral definida traz, em todos os livros, a ideia de área sob o gráfico, sendo que os livros 7 e 8 recorrem à notação sigma desenvolvendo um conjunto de exercícios sobre as séries numéricas. O Teorema Fundamental do Cálculo é apresentado em seguida, em todos os livros, na mesma ordem: área sob o gráfico → soma de Riemman → análise de algumas propriedades → TFC → resolução de problemas aplicando o TFC. Segundo Mateus, há variações no tipo de exercícios e na qualidade de aprofundamento, principalmente nos livros 7 e 8.

Quanto à utilização dos registros de representação semiótica, constatou-se que os livros analisados usam mais os registros "monofuncionais" em que os tratamentos são algoritmizáveis, com recursos predominantemente à representação discursiva através de sistemas de escritas algébricas. E que raramente ocorre "conversões de registros", segundo Mateus. Chamamos aqui atenção ao fato de que, como afirma Henriques (2019, p. 75), "a conversão é versada ao registro e não a representação", que entendemos que seria o que Mateus buscou enfatizar e que leva a gerar uma interpretação equivocada. Ou seja, não é o registro que se converte, mas sim a representação do objeto de um registro para outro.

A análise ainda mostra que os livros não asseguram a realização plena da coordenação entre os registros de representação semiótica, como também Campos (2007) evidenciou em sua pesquisa, e, por isso, podem não proporcionar a compreensão genuína dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral ou levar a confundir os objetos matemáticos com suas representações. Sobre isso, Mateus destaca que os objetos são acessíveis através de sua representação semiótica e a distinção entre a representação e o objeto só é possível se essa representação é diversificada. Logo, é possível que a situação dos livros analisados seja obstáculo à aprendizagem dos alunos. Complementamos a essa análise, presumindo que isso tenha relação também com a falta de coordenação dos registros por professores, assim como foi ressaltada na pesquisa de Picone (2007), discutida anteriormente.

Em relação aos tipos de tarefas, os livros analisados, segundo Mateus, valorizam mais as tarefas de reprodução de técnica, sendo que alguns apresentam tarefas de interpretação e de prova. Ele destaca que algumas técnicas são simplesmente dadas e a partir daí são utilizadas, já outras, resultam de algumas justificações (demonstrações). Outro aspecto destacado é que os livros 1 a 4 estão mais inclinados para aplicação das técnicas, enquanto os livros 5 a 8 tendem para uma combinação entre as aplicações e as justificações e explicações de por que é que as técnicas produzem resultados certos ou questionamentos de situações que podem motivar a produção de técnicas.

Mateus sugere que, iniciar a discussão dos conceitos, como o de derivada de funções ou integrais, de maneira puramente formal, dificulta o leitor na motivação da discussão e, esse tipo de exposição elimina uma fase importante, preconizada na teoria das situações didáticas, que é a fase de colocação do problema matemático ao aluno para ele agir. E que, embora a teoria diga respeito à ação do professor em sala de aula, sente que o livro também deveria conter esta fase em que se identifica um problema que desencadeia a discussão, que depois se identifica o conhecimento que emerge da análise do problema e, em seguida, é feita a sua formalização. Ele

ainda destaca que, didaticamente, é importante a produção de significado das questões de aprendizagem, ilustrando com o exemplo seguinte.

> Como referimos anteriormente na análise dos resultados, os 4 livros que introduzem a noção da integral definida usam o conceito de área sob o gráfico de uma dada função *f*. Mas não se questiona sobre se pode conceber uma função de área sob o gráfico. Se a gente faz $\int_a^b ax^2\,dx = \left[\frac{ax^3}{3} + C\right]_a^b$ é porque $g(x) = \frac{ax^3}{3} + C$ é uma função de área sob o gráfico de $f(x) = ax^2$. A gente coloca os limites a e b porque estamos interessados com uma porção de área. Então, por que é que não se fala claramente que $g(x) = \frac{ax^3}{3} + C$ representa a área de toda região sob o gráfico de $f(x) = ax^2$? (MATEUS, 2006, p. 179).

Para Mateus, didaticamente esta questão é importante, pois procura saber a origem de um ato que parece não ter uma justificação clara.

Quanto ao Teorema Fundamental do Cálculo, segundo o pesquisador, o tratamento é dado por: calcular o valor de uma primitiva, diferenciar uma primitiva, desenhar o gráfico de uma primitiva a partir da informação que se tem da sua derivada, desenhar o gráfico de uma função derivada a partir da sua expressão analítica. Quando surge uma situação do tipo: "desenhar o gráfico de uma primitiva dado o gráfico da sua derivada ou vice-versa", aparecem dificuldades reportadas aos alunos, pois falta discussão da relação gráfico da primitiva para gráfico da derivada e vice-versa. Isso gera uma condicionante para aquisição incompleta do Teorema Fundamental do Cálculo e, segundo Mateus, é encorajado pelos livros didáticos porque não sugerem atividades de análise gráfica, sendo um caso expresso de dificuldades na articulação entre os registros de representação semiótica. Outra sugestão dele é de juntar as duas ideias, a integração e a diferenciação, para serem introduzidas, já que os livros analisados não deixam muito clara essa relação e onde surgem muitos problemas de interpretação por parte dos alunos.

Concordamos com Mateus que há muitos aspectos didáticos e matemáticos que merecem atenção no tratamento do Cálculo Diferencial e Integral e devem ser objetos de reflexão no livro didático, como os tipos de tarefas e as técnicas associadas a eles.

Arredondo, Armenta e Moll (2014, p. 70) explicam que, embora o cálculo, assim como o teorema fundamental, esteja ligado à articulação entre objetos complexos, como a derivada e

a integral, entre outros, o problema de complexidade[103] e articulação geralmente não está explícito no ensino. Segundo os autores, para o professor, apresentar o teorema fundamental pode ser suficiente para assumir que o aluno compreenda a relação entre a derivada e integral.

No artigo "Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo", eles apresentam uma proposta de sequência de tarefas de ensino do TFC que leva em conta a complexidade dos objetos matemáticos essenciais do Cálculo e o papel essencial que esse teorema desempenha na articulação dessa complexidade. O objetivo é que os alunos utilizem a intuição para compreender a relação por trás do teorema fundamental, levando em conta a complexidade e a articulação, e favorecer o desenvolvimento de processos matemáticos essenciais através de tarefas projetadas para serem realizadas com o software *Applet Descartes*[104].

Para fundamentar a pesquisa, eles utilizaram a teoria APOE (Ação, Processo, Objeto e Esquema) e a abordagem Ontosemiótica para explicar, respectivamente, a modelização do conhecimento matemático pelas construções do sujeito e as configurações epistêmicas do objeto matemático.

Na construção das tarefas, eles consideraram os seguintes aspectos, baseados nas contribuições dos trabalhos analisados na revisão de literatura:

- as limitações do ensino formalista de Cálculo e do modelo mecanicista – com base nesse prognóstico, os autores deram ênfase na conceituação e apresentaram tarefas levando em conta a complexidade das noções essenciais de Cálculo;
- a importância das perspectivas gráficas e geométricas para dar sentido aos processos de derivação e integração – com isso, eles promoveram a visualização, dentre outros processos, através dos recursos visuais do software;
- a adoção do modelo de ensino construtivista, dando maior responsabilidade do aluno – essa perspectiva influenciou os autores a favorecerem a abordagem de intuição e conjectura através do uso de ambientes interativos, com a participação ativa do aluno em sua aprendizagem; e

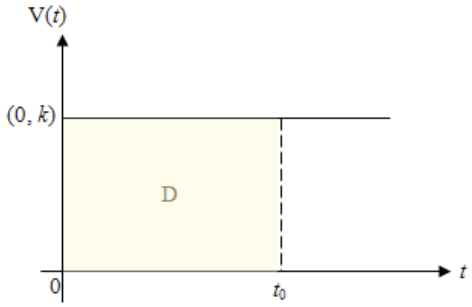
[103] Os autores utilizam a noção de configuração epistêmica para modelar a complexidade. E explicam que, ao longo da história, surgiram diferentes configurações epistêmicas que relacionam o conceito ao objeto matemático. Para o objeto "derivada", eles caracterizam a complexidade segundo nove configurações epistêmicas: 1) tangente na matemática grega; 2) variação na Idade Média; 3) métodos algébricos para encontrar tangentes; 4) conceitos cinemáticos para desenho tangente; 5) ideias intuitivas de limite para calcular máximos e mínimos; 6) métodos infinitesimais no cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxões; 8) cálculo das diferenças e 9) derivada como limite. E para o objeto "integral", eles consideram as seguintes configurações epistêmicas: 1) geométrica, 2) resultado de um processo de mudança, 3) inversa da derivada, 4) abordagem por limites, 5) métodos generalizados (Lebesgue, Riemann, etc.), 6) algébricos, 7) numéricos. (ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014, p. 75)

[104] Este e outros softwares evidenciados na revisão de literatura serão discutidos na seção posterior.

– a importância do uso de recursos tecnológicos – que serviu de base para o uso do *Applet Descartes*.

Para iniciar a proposta de fornecer um caminho alternativo para a compreensão do TFC, os autores solicitaram aos alunos para calcular a distância percorrida por um móvel em movimento a uma velocidade constante durante um certo período. Portanto, os autores utilizam noções elementares da Física para desenvolver a interpretação geométrica da situação apresentada, utilizando a representação gráfica da velocidade constante desenvolvida pelo móvel (Figura 18). Isso levou os alunos a evocar o conceito de área sob a curva de velocidade para determinar a distância percorrida pelo móvel.

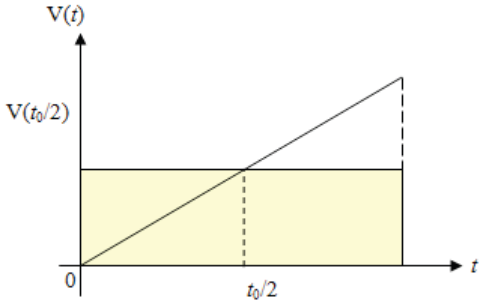
Figura 18 - Representação gráfica da velocidade constante desenvolvida pelo móvel



Fonte: Arredondo, Armenta e Moll (2014, p. 82).

Na sequência, os autores utilizaram a mesma ideia para o movimento uniformemente acelerado, ou seja, considerando que o gráfico da velocidade contra o tempo agora é linear (Figura 19).

Figura 19 - Representação gráfica da velocidade linear desenvolvida pelo móvel

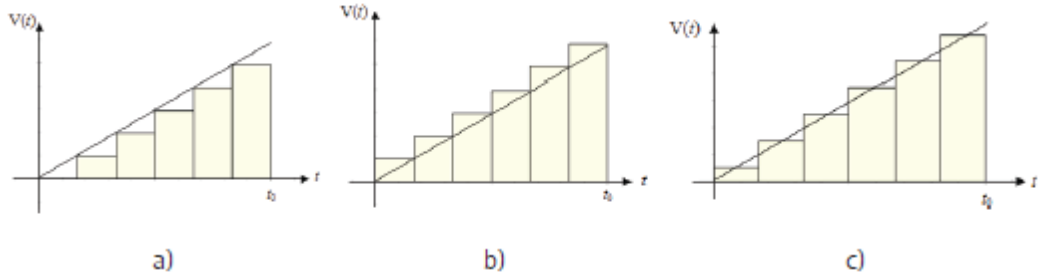


Fonte: Arredondo, Armenta e Moll (2014, p. 83).

Daí, então, propõem a divisão do período de tempo em subintervalos, de modo que a distância percorrida seja determinada pela área do retângulo em cada subintervalo (Figura 20).

Consequentemente, a soma das áreas dos retângulos constituirá uma aproximação da distância total percorrida.

Figura 20 - Divisão do período de tempo em subintervalos



Fonte: Arredondo, Armenta e Moll (2014, p. 84).

Os autores consideram que essa abordagem, embora pareça simples para o caso da variação linear e, neste caso, ser até dispensável o uso de tecnologia, é interessante para estabelecer o ponto de partida que permite evoluir para a determinação da área sob qualquer outro tipo de curva, dada a possibilidade de poder "construir, geometricamente, a função integral como limite de integrais das funções escalonadas" (ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014, p. 84, tradução nossa)[105]. Outra observação dos autores é que os alunos podem descobrir, dependendo do contexto em que surge um problema, que a determinação da área sob a curva representará alguma magnitude específica, por exemplo distância, trabalho, etc., logo se justifica a abordagem da integral a partir do cálculo de áreas.

Outras tarefas foram realizadas, utilizando o *Applet Descartes* e planilhas elaboradas pelos autores, com base nos critérios de adequação proposta pela abordagem APOE, e que, segundo eles, pudessem levar os alunos a descobrir o Teorema Fundamental do Cálculo, inicialmente a partir daS representações nas formas geométricas e, posteriormente, sendo enriquecidas por uma abordagem com representações analíticas.

Com a realização da sequência de tarefas, os autores consideraram que a proposta indicada contribui para promover a compreensão do TFC, pois permite uma melhor articulação entre a integral e a derivada, relaciona as configurações epistêmicas desses objetos matemáticos e permite que alguns processos relevantes sejam ativados durante a atividade. Além disso, eles também ressaltam a importância das representações dinâmicas para promover uma melhor articulação entre as representações numérica, gráfica e analítica.

[105] Texto original: "[…] nos brinda la posibilidad de construir, geométricamente, la función integral como límite de integrales de funciones escalonadas".

Alonso (2017) também se preocupou com os aspectos da visualização. Ele investigou sobre a utilização de recursos visuais e gráficos e os conceitos matemáticos que os alunos evocam ao participarem de atividades relacionadas ao Teorema Fundamental.

A fundamentação teórica seguiu as ideias e noções apresentadas por David Tall e Shlomo Vinner, que ressaltam a importância da visualização e da intuição precedendo o rigor em matemática. Assim como Grande (2013), Alonso também se fundamentou nas ideias de Efraim Fischbein, segundo o qual considera como componentes básicos da atividade matemática, o componente formal, o algorítmico e o intuitivo.

A sua pesquisa foi realizada em três etapas: um questionário piloto, um questionário experimental e uma oficina com dezoito estudantes. Uma análise prévia de livros textos de cálculo foi realizada para elaborar as questões do questionário, planejar a oficina e, posteriormente, contrastar as definições conceituais dos alunos e as definições formais apresentadas nos livros.

Para o questionário, foram produzidas oito questões com o objetivo de investigar os aspectos referentes à: imagem e definição conceitual relacionados à noção de função contínua; os modos como os alunos desenvolvem os cálculos básicos de integral e os recursos (algébricos, geométrico, gráfico) que são utilizados; a noção de integral e de área; as estratégias de encontrar uma integral definida que não corresponde a um número real específico; as relações entre uma função, sua integral e a derivada da integral; como os alunos evocam e usam a ideia central do TFC.

Quanto à oficina, aconteceu em dois dias, sendo que no primeiro dia foi explicado sobre a utilização do software GeoGebra. Segundo o autor, a escolha por este software foi por permitir a interação, a visualização e a concretização dos conceitos matemáticos. No segundo dia, foram realizadas quatro atividades com o software para explorar a visualização dos conceitos de continuidade, função, derivação e integração.

A questão 8 do questionário (Figura 21), por exemplo, tinha a intenção de investigar se os alunos conseguiam relacionar as ideias centrais do TFC utilizando recursos visuais e gráficos.

Segundo o autor, o interesse era de investigar qual é a imagem conceitual que os alunos evocam ao se depararem com uma questão que necessita apenas da visualização e das ideias do TFC para resolver o problema. Neste caso em particular, a intenção era saber se os alunos conseguiam entender que a área sob o gráfico de f em [-1, 1] é igual a $g(1) - g(-1)$, onde g é uma primitiva de f.

Figura 21 - Questão 8 do questionário da pesquisa

Questão 8

8) Nas figuras abaixo estão representados os gráficos das funções f e g. Sabendo-se que g' = f (ou seja, g é a primitiva de f), calcule a área sob o gráfico de f (ilustrado na figura 1) no intervalo [-1, 1]. Justifique sua resposta, explicitando o método usado.

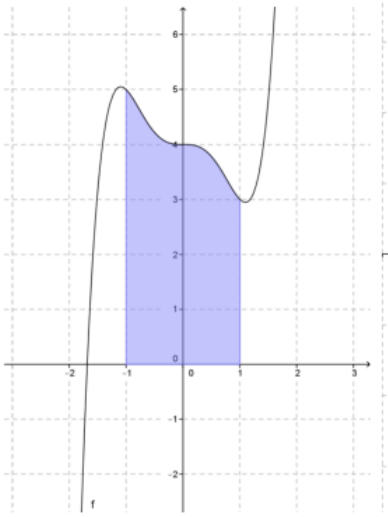


Figura 1: Gráfico da função **f**

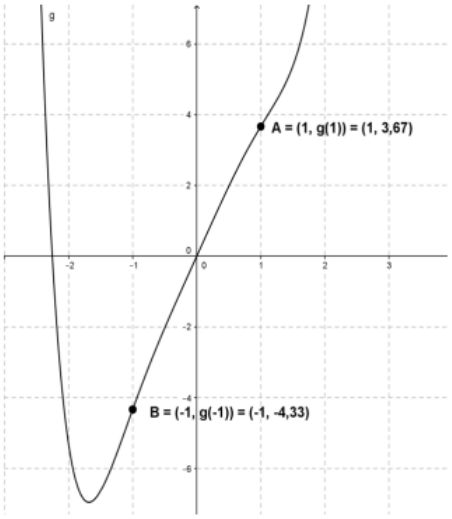


Figura 2: Gráfico da função **g**

Fonte: Alonso (2017, p. 69).

Observamos que, embora as imagens sejam estáticas, a visualização gráfica pode contribuir de maneira substancial para associar os conceitos aos objetos ostensivos. Acreditamos que foi essa a intenção do autor. Mas isso vai depender também das condições institucionais que permitem ou não o trabalho com os ostensivos, com novas criações ou novas maneiras de manipulá-los (BOSCH e CHEVALLARD, 1999). Embora não trouxemos nesta parte alguma das questões da oficina, em que foi utilizado o software GeoGebra, mas percebemos que este forneceu a possibilidade de mobilizar outros objetos para a compreensão dos conceitos relacionados.

Dentre os resultados da pesquisa de Alonso, ele destaca a evidência de que os alunos:

- exploraram e relacionaram as informações visuais entre os gráficos fornecidos pelo GeoGebra;
- evocaram definições conceituais e conceitos trabalhados em sala de aula e buscaram relações entre estes e as representações visuais investigadas;
- apresentaram alguns fatores de conflito entre as imagens conceituais da integral e a área entre o gráfico e o eixo x com regiões negativas; e
- não evocaram conceitos formais relacionados ao TFC para solucionar problemas.

O autor completa ainda, que os alunos mostraram grandes dificuldades para resolver questões relativas ao Teorema Fundamental, tanto no ambiente estático quanto no dinâmico. Assim, sugere que sejam proporcionadas atividades aos estudantes que explorem as características visuais e gráficas, com auxílio do computador, de forma dinâmica, para construir ideias de teoremas, resultados e definição de conceitos, desenvolvendo os aspectos intuitivos antes de estabelecer uma prova formal.

Quintero e Salinas (2015) realizaram um estudo sobre a maneira pela qual os recursos linguísticos e extralinguísticos são importantes para o surgimento de resultados matemáticos fundamentais em um curso de Cálculo.

Os autores justificam que a abordagem tradicional para explicar o Teorema Fundamental do Cálculo é através da representação algébrica, fazendo a conexão entre os conceitos de derivada e integral. No entanto, a interpretação geométrica apresentada nos livros sobre esses conceitos, aparentemente, de forma independente, deixa de lado a relação inversa. Diante disso, eles propõem uma abordagem para o ensino levando em conta essa relação.

O estudo aborda a necessidade de investigar o papel dos gestos no processo de apropriação de conceitos de Cálculo, sendo de interesse dos alunos, apoiado na teoria sociocultural de Vygotsky sobre a relação mútua entre o usuário e as ferramentas (estudante e software) e o papel do ambiente de estudo.

A discussão segue uma perspectiva em que a interação dinâmica e bidirecional entre o usuário e o ambiente computacional é estudada. Além disso, os autores abordam a noção de "produção multimodal de signos", que se baseia na ideia de que a linguagem usa várias modalidades relacionadas, tais como visão, audição, tato, ações motoras, etc. Com isso, o professor pode utilizar gestos como ferramentas de comunicação, de maneira consciente, assim como os alunos, de maneira menos consciente, pois permitem formas alternativas de representar e organizar informações que os alunos não conseguem expressar através de formas puramente formais ou verbais (QUINTERO e SALINAS, 2015, p. 745).

A pesquisa foi realizada em uma universidade do México, com 65 estudantes de cursos de Engenharia, através de duas fases. A primeira foi a fase qualitativa, em que foi aplicada uma sequência de ensino para identificar os processos de apropriação pelos alunos quando eles interagem com o software e as generalizações que eles fazem em relação ao Teorema Fundamental do Cálculo. O software escolhido foi o SimCalc, segundo os autores, por permitir observar dinamicamente uma função através de representações de diferentes registros. Os alunos se reuniram em pares diante dos computadores e foram realizadas gravações das telas,

para capturar as ações do cursor do mouse, e dos alunos, para capturar as falas e gestos durante a interação. A segunda fase, quantitativa, contemplou a aplicação de um instrumento de avaliação, buscando avaliar o impacto da sequência de ensino aplicada aos alunos na fase anterior.

Os autores concluíram que a produção multimodal de sinais ajuda a explicar a maneira pela qual os sistemas simbólicos são empregados para lidar com uma atividade matemática, não só na sua estrutura como do ponto de vista da sua apropriação. Nesse sentido, os gestos, olhares e linguagem corporal revelaram recursos semióticos cruciais. A análise também evidenciou que, para que o feedback dinâmico oferecido pelo software funcione, uma orientação investigativa em relação à atividade é essencial.

Sob o nosso ponto de vista, a pesquisa de Quintero e Salinas evidencia a importância em considerar os objetos ostensivos e não ostensivos na atividade matemática. Para resolver as tarefas propostas, os alunos colocaram em prática ostensivos diferentes (gestos, falas, etc.), o que possivelmente gerou técnicas associadas a eles. E isso foi possível graças à interação com o software, que forneceu o dinamismo para a mobilização desses objetos.

Com a discussão dos trabalhos apresentados nesta seção, constatamos que o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo está diretamente ligado à compreensão de distintos fenômenos que tem como consequência a aprendizagem. Isto quer dizer que cada um trouxe aspectos das dimensões didática e cognitiva que, de alguma forma, estão relacionados. No entanto, achamos necessário destacar esses aspectos sob cada perspectiva para que pudéssemos identificar requisitos que contribuíssem para a nossa caracterização de um micromundo. Assim, trazemos uma síntese dessas análises em cada dimensão.

4.3.1 Síntese da dimensão cognitiva

Quando analisamos a história que levou à criação do Teorema Fundamental do Cálculo, percebemos que foi necessário muito estudo desempenhado pelos matemáticos que viveram no passado e, a cada nova descoberta, é como se fosse apenas mais uma etapa para constituir esse saber que hoje é universal. No entanto, as pesquisas apontam que os estudantes apresentam muitas dificuldades com os conceitos relacionados a esse objeto matemático, evidenciando a distância que existe entre o saber sábio, produzido pelos matemáticos, e o saber a ensinar proposto pela noosfera (MEC/CAPES, instituições de ensino superior, etc.), assim como o saber ensinado em um curso de Cálculo e o saber que é de fato implementado ou aprendido.

Para a TAD, o estudo das condições de produção e divulgação do saber matemático exige a análise da atividade que está sendo desenvolvida. Com as pesquisas que tivemos acesso, não pretendíamos descrever as praxeologias, mas identificar os fenômenos que emergiam das análises realizadas pelos pesquisadores. Assim, focamos em buscar responder à questão de pesquisa concernente à dimensão cognitiva: Existem indicações na literatura de como o estudante aprende? Deste modo, a nossa análise levou em conta as características cognitivas dos estudantes diante do ensino habitual (erros, dificuldades, concepções, etc.).

Encontramos uma variedade maior de características relativas à dimensão cognitiva na pesquisa de Grande (2013). Ele apontou alguns aspectos que estão relacionados às dificuldades dos alunos, como:

- incompreensão da variação da área;
- incompreensão do significado da variável *t*;
- não apresentam visão dinâmica na compreensão dos conceitos de acumulação e variação;
- dificuldades relacionadas à representação gráfica e continuidade de uma função;
- dificuldades relacionadas à variação entre duas grandezas;
- Outros aspectos também foram identificados:
- a intuição geométrica favorece a compreensão das questões relacionadas ao TFC;
- a escassez de exploração de representação gráfica e diversificação de registros nos livros didáticos geram dificuldades de aprendizagem.

A pesquisa de Alonso (2017) também apontou o aspecto da intuição para a compreensão dos alunos, em atividades que explorem as características visuais e gráficas. Além disso, destacou que os alunos apresentam dificuldades em:

- relacionar as representações do mesmo objeto em diferentes registros, como a integral;
- evocar conceitos formais relacionados ao TFC para solucionar problemas.

As pesquisas de Campos (2007) e Mateus (2006) analisaram livros didáticos e ambos apontaram que os livros apresentam escassez na coordenação dos registros de representação. Além disso, Mateus destacou, assim como Grande, que a escassez de exploração gráfica e de diversificação de registros de representação nos livros geram dificuldades na aprendizagem. Outro aspecto evidenciado foi a dificuldade dos estudantes em associar o gráfico da primitiva de uma função com o gráfico da derivada.

Percebemos o potencial que as representações e os seus respectivos significados influenciam na compreensão dos saberes. No entanto, a explicitação das atividades, ou seja, das praxeologias, é que, em certo sentido, vão dar vida aos conceitos (BOSCH, 2001, p. 18), isto é, eles surgem da manipulação dos objetos ostensivos dentro de certas organizações matemáticas. Quando o objeto ostensivo é institucionalizado, há o estabelecimento de vínculo entre o ostensivo e o não ostensivo que vai permitir evocar um associado ao outro nas atividades matemáticas que forem desenvolvidas. (BOSCH, 2001, p. 20).

Por exemplo, a representação gráfica foi apontada como uma das dificuldades apresentadas pelos alunos. E os livros analisados nas pesquisas apresentaram escassez na exploração gráfica e na diversificação de registros de representação. Podemos, com isso, presumir que o ostensivo gráfico não possui uma relação bem definida institucionalmente. Portanto, não há razão para associar a ostensiva gráfica a algum conceito matemático, como função, integral, etc., a não ser que ela faça parte das organizações matemáticas das instituições que reconhecem (ou possuem relação com) estes conceitos.

Considerando os professores como sujeitos das instituições que reconhecem os conceitos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo, passamos a analisar os aspectos didáticos que vão influenciar na aprendizagem.

4.3.2 Síntese da dimensão didática

Como já enfatizamos, quando o professor se depara com um saber que deve ser ensinado, os fenômenos que acontecem são determinados por um conjunto de condições e restrições em que ele se depara na sala de aula, como o conhecimento prévio dos alunos, os materiais didáticos disponíveis, mas também muitos outros que estão fora da sala de aula. Isso vai ser refletido nas praxeologias que eles irão desenvolver na instituição de ensino.

Segundo Bosh, ““Ensinar e aprender matemática” corresponde à atividade de reconstrução das organizações matemáticas para poder utilizá-las em novas situações e sob diferentes condições.” (BOSCH, 2001, p. 16, tradução nossa)[106]. Ou seja, a função do ensino é fazer essa reconstrução, criando as condições adequadas.

106 Texto original: ““Enseñar y aprender matemáticas” corresponde a la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones.”.

Assim, nessa etapa da pesquisa, buscamos compreender qual o estado atual do ensino do Teorema Fundamental do Cálculo e as consequências desse ensino. A partir dessa análise, destacamos algumas características relativas à dimensão didática.

Encontramos uma ampla variedade na caracterização didática, relacionada à forma de ensinar, os tipos de atividades, os conceitos matemáticos e as escolhas didáticas.

Os aspectos que se referiam à abordagem didática ou maneiras de ensinar os conceitos matemáticos foram os mais discutidos nas pesquisas analisadas, referindo-se principalmente à:

- Abordagem de ensino sem relacionar os conceitos de integração e derivação como operações inversas, levando à incompreensão do Teorema Fundamental (GRANDE, 2013);
- Nem todos os professores coordenam os registros de representação no ensino do TFC (PICONE, 2007);
- Os professores dão relevância ao uso de técnicas e à reprodução de situações de algoritmização do assunto (CAMPOS, 2004);
- A prática ou o ensino deveria iniciar com uma atividade/problema para abstrair conceitos e fazer generalizações, somente depois com as definições axiomáticas/formalização (PALARO, 2006; MATEUS, 2006);
- Importância de aliar o desenvolvimento de técnicas com a compreensão do significado, como juntar as ideias de integração e derivação para introduzir a noção de TFC (MATEUS, 2006);
- A articulação entre a derivada e a integral geralmente não está explícito no ensino (ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014);
- Limitações do ensino formalista do Cálculo e modelo mecanicista (ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014);
- Importância das perspectivas gráficas e geométricas para dar sentido aos processos de integração e derivação (ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014);
- Adoção do modelo construtivista, dando maior responsabilidade ao aluno (ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014);
- Utilizar gestos como ferramentas de comunicação para permitir formas alternativas de representar e organizar as informações (QUINTERO e SALINAS, 2015);
- A orientação investigativa à atividade realizada pelos estudantes é essencial para que o feedback dinâmico oferecido pelo software funcione (QUINTERO e SALINAS, 2015).

Relativamente à abordagem de ensino, Lucas *et al* (2018, p. 205) discutem que o ensino deve fornecer oportunidades para a investigação matemática, permitir o diálogo e que sejam lançadas questões exploratórias para os alunos. No entanto, o caráter formal da matemática leva os alunos a terem dificuldades para trabalhar com tarefas de investigação, pois

> "A visão tradicional, que não é combatida pelo atual currículo, de uma *matemática rígida*, onde em particular as definições têm carácter como que absoluto, aparece assim oposta àquela que as tarefas de investigação, se aceites com as suas características próprias, podem veicular." (LUCAS *et al.*, 2018, p. 205).

E podemos dizer que, mesmo com a introdução das tecnologias, não há garantia que haja mudança na abordagem de ensino, e isso é bem evidente a partir do caráter que é dado às atividades matemáticas que são desenvolvidas. Lagrange mostra que, de fato, muitas vezes "[,,,] superestimam a possibilidade de os alunos desenvolverem conceitos espontaneamente a partir de sua atividade com o software" (LAGRANGE, 2000, p. 28, tradução nossa)[107]. No entanto, ele destaca a importância de desenvolver com os alunos, simultaneamente, os conceitos e as técnicas, como apontou a pesquisa de Mateus (2006), e, para isso, que seja incentivado o recurso a várias representações de um conceito.

Em relação ao desenvolvimento das atividades, as pesquisas apontaram:

- Atividades com escassez da utilização do registro gráfico, levando à incompreensão do teorema (GRANDE, 2013);
- Explorar atividades que relacionem a variação e a acumulação (GRANDE, 2013);
- A importância da produção do significado das questões de aprendizagem (MATEUS, 2006);
- Explorar características visuais e gráficas nas atividades para desenvolver aspectos intuitivos dos conceitos (ALONSO, 2017);
- A produção multimodal de sinais ajuda a explicar a maneira pela qual os sistemas simbólicos são empregados para lidar com uma atividade matemática (QUINTERO e SALINAS, 2015).

Os objetos que são manipulados durante a atividade matemática, sejam eles gestos, gráficos, escrita, etc., têm uma valência semiótica e uma valência instrumental. Ou seja, um objeto ostensivo pode funcionar como signo de uma praxeologia matemática que vai adquirir significado quando for manipulado, e, neste caso, servindo como instrumento da atividade matemática.

---

[107] Texto original: "[D'autres obstacles viennent de la conception des situations d'apprentissage qui] surestiment la possibilité pour les élèves à dégager spontanément des concepts à partir de leur activité avec un logiciel".

No caso do Teorema Fundamental do Cálculo, as atividades envolvem questões e habilidades de raciocínio relacionadas à aprendizagem dos conceitos envolvidos, necessitando da coordenação de imagens dos referidos conceitos, assim como motivou Newton a desenvolver o Teorema Fundamental. Segundo Lucas *et al* (2018), durante a atividade matemática, as técnicas tendem a identificar-se com os objetos ostensivos que se utilizam para descrevê-las ou implementá-las. Logo, quando se desenvolve pouca variedade de tarefas ou representações de um conceito, a tendência é provocar um grande obstáculo para os alunos. (LUCAS *et al.*, 2018, p. 231).

A referência aos conceitos matemáticos apareceu muitas vezes nas indicações da abordagem didática, formas de ensinar ou escolhas didáticas, mas, de modo particular, as pesquisas apontaram:

- Relacionar e confrontar os componentes algorítmico, intuitivo e formal (GRANDE, 2013);
- O cálculo de integrais definidas através do cálculo de limites de somas, pode ser mais simples para se buscar antiderivadas (PALARO, 2006);
- A apresentação conceitual de limite no conceito de derivada leva a uma aquisição incompleta do significado do conceito de derivada (MATEUS, 2006);
- Importância das representações dinâmicas para uma melhor articulação entre as representações numérica, gráfica e analítica (ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014).

Podemos observar que há algumas regularidades que acontecem no ensino, como o predomínio do formalismo e a dificuldade de articular os registros. Bosch (2001, p. 23) explica que, alguns fenômenos que ocorrem no sistema didático, dizem respeito às dificuldades que o professor tem ao ministrar algum conhecimento que não faz parte da atividade matemática, mas que é necessário para que os alunos possam realizá-la. Isso quer dizer que o professor não tem condições de exigir de seus alunos certos conhecimentos que ele não ensina, ou não pode ensinar, mas que os alunos precisam para o desenvolvimento de sua aprendizagem.

Esses fenômenos de certa forma afetam a gestão didática de alguns registros ostensivos, como por exemplo, o registro gráfico, evidenciado por Grande (2013) e Alonso (2017), ou o registro gestual, apontado por Quintero e Salinas (2015). Concordamos com Bosch (2001, p.

24, tradução nossa)[108] que "[...]o domínio do formalismo algébrico acaba confinando ao "canto do quadro negro" a maioria dos instrumentos gráficos e gestuais que [...] são essenciais para a produção, explicação e reconstrução de muitas demonstrações matemáticas". Mesmo assim, a diminuição do uso de diferentes ostensivos não está completamente relacionada à diminuição da compreensão matemática.

Segundo Bosch, as escolhas dos tipos de ostensivos e a importância atribuída aos diferentes registros devem também levar em conta as restrições (culturais ou matemáticas) que afetam o seu uso em sala de aula (BOSCH, 2001, p. 26).

Os instrumentos ostensivos vão ser revelados também nas escolhas didáticas quanto à utilização dos recursos disponibilizados para o ensino, como o livro didático, os softwares, etc. Nesse aspecto, identificamos as seguintes características nos trabalhos analisados:

- A escolha do livro didático pelo professor pode revelar as suas preocupações e escolhas metodológicas (PICONE, 2007);
- A abordagem dos livros didáticos se diferencia em relação à definição de integração, uns geometricamente, como sendo uma mediação de área (limite de um somatório), e outros algebricamente, como operação inversa de diferenciação (PALARO, 2006);
- Os livros não asseguram a realização plena da coordenação entre os registros de representação (MATEUS, 2006);
- As tarefas apresentadas nos livros valorizam mais a reprodução de técnicas (MATEUS, 2006);
- Importância dos recursos tecnológicos (ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014).

A utilização dos recursos didáticos põe em causa o papel das técnicas. Como afirma Lagrange (2000),

> Tornou-se então evidente que as técnicas não podem existir isoladamente no ensino e na aprendizagem, e dessa observação surgiu a ideia da praxeologia. Um assunto matemático, uma obra, para usar as palavras de Chevallard (1999), existe em uma instituição como um todo coerente em vários níveis. O primeiro nível é o das tarefas. No segundo nível, o das teorizações, trata-se de questionar as técnicas sobre sua consistência e seu domínio de validade. Este é o nível onde surge uma determinada linguagem, onde emergem os conceitos. E numa situação escolar, as tarefas são problemas e as técnicas precisam ser construídas. Ir para um nível teórico requer um

[108] Texto original: "[También en la matemática sabia,] el reino del formalismo algebraico acaba confinando al "rincón de la pizarra" la mayoría de instrumentos gráficos y gestuales que[, de hecho, y para el trabajo "privado" del investigador,] resultan imprescindibles para la producción, explicación y reconstrucción de muchas demostraciones matemáticas".

> "trabalho técnico" que não é espontâneo nem natural (Gascón, 1998). (LAGRANGE, 2000, p. 15, traduçao nossa)[109].

Podemos concluir que o professor poderá utilizar o lápis e o papel, bem como o livro ou o software para organizar a atividade matemática. A aprendizagem de conceitos pelos alunos pressupõe que, qualquer que seja o recurso, eles desenvolvam técnicas de resolução como bases para desenvolver a compreensão. No entanto, como já destacamos, os softwares, e em particular o micromundo, podem permitir aos alunos desenvolver novas técnicas para resolver as questões propostas. Para isso, é preciso a elaboração de praxeologias que privilegiem esse trabalho.

Para completar esta etapa de Análises Prévias, agora sob o ponto de vista informático, consideramos importante conhecer outros trabalhos na literatura que evidenciassem novos aspectos, relativos aos softwares matemáticos.

4.4 SOFTWARES EDUCATIVOS NO ENSINO DO CÁLCULO

Nesta seção, buscamos analisar as pesquisas realizadas em torno da utilização de softwares educativos no ensino do Cálculo Diferencial e Integral e identificar as possíveis contribuições que um micromundo deve conter para auxiliar na compreensão e ensino do seu Teorema Fundamental. Como forma de destacar as suas implicações, consideramos que tanto a dimensão didática quanto a cognitiva trazem aspectos relevantes para a discussão da dimensão informática nesta seção.

Encontramos alguns estudos realizados pelo professor e pesquisador David Tall, da Universidade de Warwick, que desenvolveu a teoria do Pensamento Matemático Avançado, com foco no Cálculo. Em seu artigo *Cognitive development in advanced mathematics using technology*[110], Tall destaca que "Os ambientes computacionais são particularmente valiosos no incentivo à experimentação" (TALL, 2000, p. 212, tradução nossa)[111] e que a sua exploração

---

[109] Texto original: "Il est apparu ainsi que des techniques ne peuvent exister de façon isolée dans l'enseignement et l'apprentissage, et de cette observation est née l'idée de praxéologie. Un sujet mathématique, une œuvre, pour reprendre les termes de Chevallard (1999) existe dans une institution comme ensemble cohérent sur plusieurs niveaux. Le premier niveau est celui des tâches. Au second niveau, les techniques sont les façons particulières, "adéquates", d'accomplir ces tâches dans l'institution. Au troisième niveau, celui des théorisations, il s'agit d'interroger les techniques sur leur consistance et leur domaine de validité. C'est le niveau où un langage spécifique apparaît, où des concepts émergent. En situation scolaire, les tâches sont des problèmes, et les techniques sont à construire. Passer à un niveau théorique demande un "travail sur la technique" qui n'est ni spontané ni naturel (Gascón, 1998)".

[110] Publicado em: Mathematics Education Research Journal, 2000, vol. 12, nº 3, 196-218.

[111] Texto original: "Computer environments are particularly valuable in encouraging experimentation [...].".

tem um papel importante por si mesmo e as pessoas podem se beneficiar com isso para obter *insights* sobre ideias matemáticas.

Ele dá o exemplo de uma de suas pesquisas em que os alunos de um curso começaram com uma exploração inicial a aspectos teóricos e passaram depois a experimentação computacional para obter mais informações, o que o motivou a desenvolver um curso de análise experimental usando software para explorar teorias de maneira intuitiva, incluindo o uso de abordagens intuitivas para definições formais, como a ideia de que uma função real é diferenciável se for "localmente reta" e é contínua se, quando puxada horizontalmente, uma pequena porção "se retrai" (TALL, 2000, p. 214).

Tall relata a sua surpresa, dada a capacidade dos alunos de visualizarem e discutirem conceitos de análise, que ele achava difícil de imaginar. Finalmente, conclui que "é possível, com um micromundo bem projetado, construir um ambiente para explorar teorias altamente sutis de maneira informal" (TALL, 2000, p. 215, tradução nossa)[112], chamando a atenção que o papel do professor como mentor é fundamental para obter ideias dos alunos e incentivá-los a expressar verbalmente o que eles veem visualmente.

Esses aspectos da visualização e intuição fizeram parte da pesquisa de Alonso (2017), como já discutimos, que se fundamentou, entre outros, nos estudos de David Tall, para investigar a utilização de recursos visuais e gráficos na aprendizagem do TFC e os conceitos matemáticos que os alunos evocam ao participar de atividades relacionadas a esse teorema. Ele utilizou o software GeoGebra em oficina com alunos da graduação para a realização de quatro atividades que explorassem a visualização dos conceitos envolvidos, como continuidade, derivação, integração e o Teorema Fundamental.

Alonso destaca que os alunos exploraram as informações visuais e as relacionaram entre dois gráficos fornecidos pelo GeoGebra na atividade proposta. E ainda, mais de um quarto das respostas apontavam que evocaram o conceito da integral definida e do TFC e que os recursos de geometria dinâmica se mostraram eficientes na tentativa de construção visual da relação expressa pelo TFC. Dentre outros aspectos, Alonso considera ainda que:

> o ensino de Cálculo, mais especificamente o ensino do TFC, necessita ser mais amplo, explorando seus variados aspectos, porém de forma dinâmica, utilizando softwares que forneçam estas possibilidades. Além disso, a variação de exemplos que efetivamente representem a ideia expressa pelo TFC, pelas definições de continuidade, de diferenciabilidade, de integrabilidade, para que a imagem conceitual dos alunos seja ampliada com exemplos do que caracteriza e do que não caracteriza

[112] Texto original: "[…] it is possible, with a well-designed microworld, to build an environment for exploring highly subtle theories in an informal way.".

> sua definição, com exemplos que causem conflitos conceituais para que sejam explorados e solucionados em conjunto com os alunos. (ALONSO, 2017, p. 147).

Essa preocupação levantada por Alonso também é discutida por David Tall quando ele sugere como os conceitos de Cálculo poderiam ser abordados usando gráficos dinâmicos de computador (TALL, 1986; 1991).

Na pesquisa de Grande (2013), ele também utilizou o software GeoGebra durante uma intervenção de ensino com estudantes de uma faculdade, como já foi salientado.

Grande destaca as dificuldades dos alunos, apresentadas no questionário-piloto, ao interpretarem um gráfico que envolvia implicitamente o conceito de acumulação de uma função, em que solicitava a compreensão da representação gráfica da função área. Assim, na constituição da sequência didática, foram contemplados os conceitos de acumulação e variação, continuidade de uma função, intuição e rigor, aspectos históricos do desenvolvimento do Cálculo e a questão da visualização.

Ele ressalta que o software serviu como ferramenta na elaboração da intervenção de ensino na construção do modelo da situação-problema e os alunos puderam manipular de maneira dinâmica apenas alguns elementos.

Na primeira seção da Tarefa 1 foi solicitado que as duplas de alunos explicassem como elas fariam para determinar o volume do sólido S e, em seguida, a partir do modelo criado em 2D, determinar o raio da seção obtida pela intersecção do plano π a uma distância h do vértice do sólido S. Com os resultados obtidos, Grande concluiu que

> o uso do *software* GeoGebra exerceu duas funções: tornou-se um local ou "habitat" em que o sólido S – objeto de estudo das seções – pode ser concretizado pelos alunos, mesmo sua representação sendo feita em 2D, além da possibilidade do estudo dinâmico do conceito de variação por meio da manipulação de objetos geométricos, o que permitiu a elaboração, por parte das duplas, de conjecturas que posteriormente poderiam ser confirmadas ou refutadas. (GRANDE, 2013, p. 250)

A seção 2 procurou explorar a ideia de acumulação por meio do cálculo do volume. De maneira semelhante ao que foi observado anteriormente, o software GeoGebra foi uma ferramenta que permitiu a visualização da situação proposta e explorar ideias e intuições geométricas relacionadas aos conceitos de variação e acumulação, segundo o autor.

Nas seções 3 e 4, os alunos fizeram explorações e manipulações geométricas no GeoGebra, permitindo assim comprovar algumas conjecturas formuladas, buscando estabelecer uma ligação entre o intuitivo e o rigoroso, como ele mesmo afirma:

> mesmo não se obtendo geometricamente as leis de formação dos gráficos estudados, os alunos tiveram a oportunidade, por meio das imagens dos gráficos geradas pelo GeoGebra, de obter alguns resultados significativos na busca da formalização da relação existente entre variação e acumulação, que constitui a essência do TFC. (GRANDE, 2013, p. 257)

Grande ainda destaca que, além da visualização e da manipulação dinâmica dos objetos fornecidas pelo software GeoGebra, a interação entre os alunos com o software permitiu estabelecer a inter-relação entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal, já que em algumas seções os alunos foram colocados em situação conflitante com o que haviam conjecturado, mas de forma positiva na elaboração das conclusões a respeito da relação existente entre derivada e integral. Nesse sentido, o software também se torna útil no processo de formalização dos conceitos, sendo que esses três componentes devem ser explorados na atividade matemática. (GRANDE, 2013, p. 278-279).

Essa questão sobre a elaboração da atividade matemática com o uso de software já foi discutida anteriormente e merece ser enfatizada. Desenvolver uma abordagem de ensino de objetos matemáticos auxiliado por computador não pode ser pensada simplesmente para facilitar a resolução de problemas. Concordamos com Lagrange (2005, p. 13) que isso requer reflexão sobre quais conhecimentos prévios os alunos precisam tanto em matemática quanto sobre a máquina e sobre quais questões podem servir para provocar o pensamento indutivo e em quais formas de representação dos conceitos.

Como discutido em Joubert (2013, p. 75), embora a importância do aprendizado pretendido de uma tarefa pareça óbvia, para entender o que é que a tarefa deve "ensinar", é necessária uma análise cuidadosa da matemática que pode ser provocada pela tarefa, das ferramentas usadas para mediar a atividade dos alunos e sua aprendizagem prévia. Logo, é preciso considerar que nenhuma tarefa é imutável, ela deve ser adaptada às necessidades dos alunos, considerando que cada aluno interage com o ambiente de maneira diferente, dependendo, por exemplo, do seu conhecimento prévio e dos feedbacks que obtém durante a situação.

E quando os computadores são usados, os feedbacks podem fornecer oportunidades para observar padrões, fazer generalizações, criar estratégias e testar as ideias. Devido ao potencial de feedback que o computador pode fornecer, tanto o professor quanto os desenvolvedores de softwares devem levar em consideração os significados que os usuários apreendem nesse feedback. Nessa interação,

> Os artefatos devem ser projetados para permitir uma transformação eficiente em instrumentos. […] A importância de projetar artefatos abertos e flexíveis que possam

> ser modificados pelos usuários e ajustados para várias tarefas, incluindo tarefas imprevistas e a necessidade de os projetistas levarem em conta a transformação real das práticas e as reais necessidades dos usuários ao longo do processo de apropriação de um artefato. (KAPTELININ; NARDI, 2006, p. 110, apud (MACHKRELL, MASCHIETTO e SOURIY-LAVERGNE, 2013, p. 81)[113].

Portanto, uma das grandes vantagens acerca do uso do computador decorre das tarefas que usamos com ele. Por outro lado, a implementação dessas tarefas depende na maior parte das orientações do professor e a sua resolução exigirá certas técnicas dos alunos que, na mediação por computador, poderá sofrer modificação da técnica.

Nesse aspecto, Andersen (2011) se propôs a analisar uma sequência de atividades para o ensino do TFC. A sua questão de pesquisa diz respeito a: "Quais processos mentais intervêm e são combinados quando se insere atividades que se apoiam em figuras construídas pelo aluno tanto em folha de papel quanto pelo software *Winplot* ao se tratar da expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$? Esse tipo de atividade favorece a compreensão das ideias centrais que envolvem o TFC?".

A autora se fundamenta em Dreyfus (1991)[114] e Borges e Santana (2000)[115] para justificar o uso do software como possibilidade de reconhecer novas relações de um fenômeno e ajudar a melhorar o aprendizado por meio de atividades adaptadas para esse fim. Além disso, o *Winplot* foi escolhido, segundo ela, por sua gratuidade, pela interface simples de fácil utilização e possuir recursos que permitem a construção de gráficos de funções de duas ou três variáveis, exibir expressões de polinômios que passam por determinados pontos, definir campos de vetores a partir de equações diferenciais e poder visualizar a derivada e a integral de função. (ANDERSEN, 2011, p. 17-18).

Os sujeitos da pesquisa de Andersen foram alunos concluintes do 2º ou 3º semestres do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular da cidade de São Paulo. O instrumento foi aplicado em quatro sessões de noventa minutos, sendo que apenas a segunda foi realizada no laboratório de informática com uso do software *Winplot*. A intenção das

---

[113] Texto original: "artefacts should be designed to enable efficient transformation into instruments. […] the importance of designing flexible, open artefacts that can be modified by users and adjusted for various tasks, including unanticipated tasks and the need for designers to take into account the actual transformation of practices and the real needs of users over the course of appropriating an artefact".

[114] DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (org.). Advanced Mathematical Thinking. Dordretch, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

[115] BORGES, H.; SANTANA, R. O Uso da Interface Computacional no Ensino de Matemática: Limites e Possibilidades do Computador quando o Assunto é Demonstração. XXIII CNMAC – Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. Santos-SP, 2000.

atividades, segundo a autora, era de levar o aluno a conjecturar as relações e as propriedades dos conceitos envolvidos na expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Ela apresentou na segunda sessão uma única atividade dividida em duas partes, sendo a primeira com nove itens e, a segunda, com cinco, com o principal objetivo de definir as somas amostrais de Riemann visando à construção do conceito de integral. A primeira parte tinha como objetivo fazer o aluno perceber que conforme se aumenta o número de retângulos utilizados para fazer o cálculo da área, melhor será aproximação obtida para a área desejada, assim como proporciona uma melhor familiarização com os termos $f(t)$ e Δt, relacionando-os com as medidas da altura e da base de cada retângulo, respectivamente. Já na segunda parte, segundo a autora, o cálculo da área foi feito a partir de um número fixo de retângulos cujas bases possuem a mesma medida e cujas alturas são os valores da função em um ponto arbitrário (escolhido pelo software) de cada intervalo da partição.

A autora chama atenção, em nota de rodapé, que as somas amostrais de Riemann consideram também a arbitrariedade do tamanho da base de cada retângulo, ou seja, as bases não precisam ter a mesma medida, mas o programa *Winplot* não contempla essa particularidade. Esse fato nos leva a concluir que as limitações de determinadas funcionalidades do software para resolver problemas pontuais das tarefas devem ser discutidas com os alunos para promover a apreensão do conceito ou problema matemático.

A autora completa que estas atividades mediadas por ferramenta tecnológica podem propiciar o desenvolvimento dos processos de Pensamento Matemático Avançado, desde que a ferramenta esteja focalizada corretamente e direcionada para fenômenos interessantes, contribuindo para a visualização e o reconhecimento de relações antes desconhecidas (ANDERSEN, 2011, p. 45).

Vianna (1998) também utilizou atividades mediadas por computador em sua pesquisa, que tinha como objetivo investigar a compreensão dos alunos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. Foram coletados dados de estudantes do primeiro ano da Universidade Federal do Rio de Janeiro, em amostra composta por estudantes de três áreas: matemática, ciências da computação e engenharia. Um estudo piloto foi aplicado em 1994 e o estudo principal em 1995 e 1996. Foram utilizados questionário, entrevistas baseadas em respostas ao questionário e entrevistas baseadas em tarefas por computador.

Dos nove alunos que responderam as atividades com uso do software *Graphic Calculus*[116], sete foram analisadas em detalhe. Embora a autora tenha destacado que não houvesse intenção de avaliar o software ou de utilizar as atividades como intervenção pedagógica e que o computador tenha sido usado na pesquisa como mais uma opção para examinar a compreensão dos alunos sobre o TFC, a sua análise mostra as dificuldades dos alunos em torno das imagens dos gráficos de $f'(x)$ e de $F(x)$, parecendo ser novas para eles. E que esses gráficos teriam sido mais bem compreendidos se as imagens das linhas tangentes e da área estivessem em suas mentes não apenas como imagens estáticas, mas como uma construção dinâmica, o que levou a autora a concluir que as imagens gráficas são utilizadas pelo professor principalmente para ilustrar os conceitos e não como ferramentas para resolver problemas (VIANNA, 1998, p. 254).

Essa discussão nos leva a inferir que a incorporação dos objetos nas tarefas deveria evocar os conceitos ligados a eles, corroborando com Chevallard (1994) que toda implementação de uma técnica supõe o recurso aos objetos ostensivos e não ostensivos. No entanto, podemos ver que, apesar de a imagem gráfica fazer associação aos objetos ostensivos, por exemplo, linha tangente e área, ela não ajudava a mobilizar os objetos não ostensivos associados, como integral e derivada.

Isso pode justificar o que Vianna destacou em sua pesquisa em relação às dificuldades com as funções $f'(x)$ e $F(x)$, sendo que um dos obstáculos é que os alunos não os percebem como representantes das próprias funções. Ela ressalta que o gráfico de $f'(x)$ é construído avaliando o valor da inclinação da reta tangente em cada ponto x do domínio (um processo local) e, por outro lado, o gráfico de $F'(x)$ é feito calculando o valor da área de a ao ponto x (um processo cumulativo), sendo de alguma forma incomum para os exemplos de funções com os quais eles estão acostumados a trabalhar, assim como também é incomum representar esses conceitos dessa forma (VIANNA, 1998, p. 254).

No sentido de Chevallard (1994), quando um professor deseja que os alunos usem um conceito, teorema ou propriedade, ele privilegia determinada ferramenta em vez de outra. O mesmo acontece quando há mediação do computador. Assim, é importante entender e analisar, no desenvolvimento de tarefas, os objetos ostensivos e não ostensivos, em cada técnica utilizada para executá-las.

Destacaremos o exemplo de Tall (1991) que, assim como Vianna, utilizou o *Graphic Calculus*. Ele quis mostrar como podemos visualizar as propriedades de f olhando o gráfico de

[116] Disponível em: <https://www.vusoft.eu/GraphicCalculus.htm>. Acesso em: 17 nov. 2021.

maneira diferente. Segundo ele, não devemos olhar para o gráfico de $y = f(x)$, mas para o gráfico de $y = I(x)$ onde $I'(x) = f(x)$.

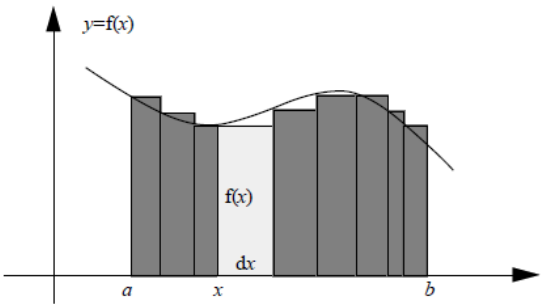


figure 3 : The area sum Σ_a^b f(x) dx

Dado um tal I em que I'(x) = f (x), simplesmente desenhamos a figura correspondente para y = I(x) com a mesma subdivisão do intervalo [a, b] em subintervalos (fig. 3). Em cada ponto x da subdivisão, atraímos a tangente para a curva I(x), então o incremento correspondente à tangente é

$$dy = I'(x)dx = f(x)dx$$

Assim, a soma $\sum_a^b f(x)$ é vista como a soma dos comprimentos $\sum dy$, em que cada dy é o componente vertical do vetor tangente ao gráfico de y = I(x). A soma $\sum dy$ é a soma dos segmentos de linha verticais e, desde que dx seja considerado pequeno, de modo que o gráfico seja relativamente reto de x a $x + dx$, isso será aproximadamente igual ao incremento no gráfico, I($x + dx$) – I(x). A soma dos incrementos ao gráfico de $x = a$ a $x = b$ simplesmente fornece I(b) – I(a). Assim, a soma dos degraus verticais dy pode, em certo sentido, aproximar-se de I(b) – I(a). A Figura 4 fornece uma indicação justa dessa ideia.

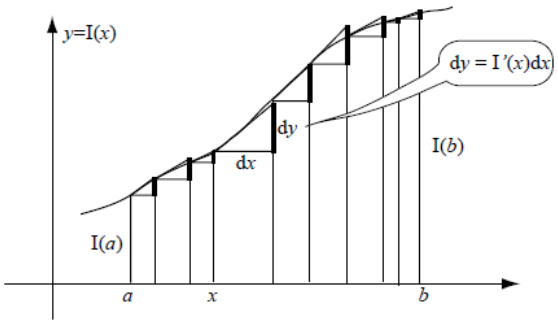


figure 4: The sum Σ_a^b f(x) dx as a sum of lengths Σ dy

Ele falha em parte porque tivemos que fazer as tiras bastante largas para ver o que está acontecendo, e isso, por sua vez, significa que o gráfico pode ser tão curvado em uma tira que dy é claramente diferente de I ($x + dx$) – I(x). Mas imagine-o como tendo um grande número de tiras e imagine uma parte do gráfico sendo ampliada para ver sua retidão local com algumas tiras próximas uma da outra (fig. 5).

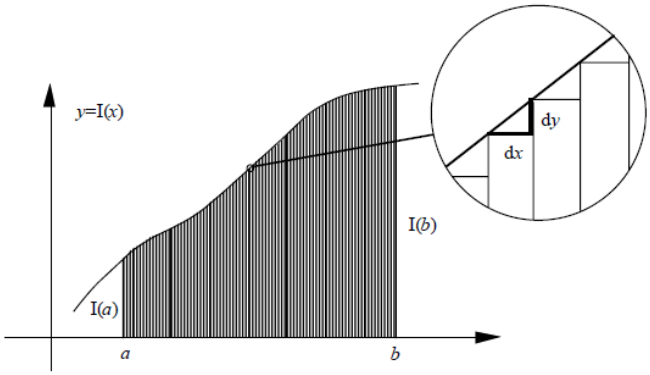


figure 5: looking closely at the summation process

(TALL, 1991, p. 4-5, tradução nossa)[117].

Tall destaca que o processo de ampliação deve sugerir algo mais. À medida que se aproxima, o gráfico curvado fica menos curvado e os alunos visualizam imediatamente esse fenômeno. À medida que se obtém um valor menor de *dx*, o valor correspondente de *dy* aproxima-se mais do passo até a curva e, à medida que os comprimentos *dx* diminuem, a soma dos degraus verticais, *S dy*, se aproxima de I(b) – I(a). À medida que *dx* diminui, atinge o limite $\sum_a^b f(x)dx$, representado por $\int_a^b f(x)dx$. Com isso é possível intuir por que esse limite é dado por $\int_a^b f(x)dx = I(b) - I(a)$.

Neste caso, o autor mostrou como se pode visualizar as possíveis propriedades necessárias de *f*, olhando o seu gráfico de maneira diferente, recorrendo a objetos ostensivos e não ostensivos por meio das ferramentas do software. A compreensão do significado do diferencial *dx* – dado por Leibniz em suas primeiras publicações sobre o Cálculo – agora assume uma nova forma de apreensão pelos estudantes, dado pela mobilização de novas técnicas proporcionadas pela integração com o software.

No trabalho de Thomas e Lin (2013), eles defendem que, para que as tarefas possam gerar uma ampla variedade de técnicas, elas precisam levar os alunos para além do trabalho de rotina. Assim, são exigidos dos alunos que eles demonstrem técnicas que são classificadas com

[117] Texto original: "Given such an I where I'(x) = f(x) we simply draw the corresponding picture for y = I(x) with the same subdivision of the interval [a, b] into sub-intervals (figure 3). At each point x of the subdivision we draw the tangent to the curve I(x), then the corresponding increment to the tangent is $dy = I'(x)dx = f(x)dx$. Thus the sum $\sum_a^b f(x)$ is seen as the sum of the lengths $\sum dy$ where each dy is the vertical component of the tangent vector to the graph of y = I(x). The sum $\sum dy$ is the sum of the vertical line segments, and, provided that the dx are taken to be small so that the graph is relatively straight from x to $x + dx$, then this is approximately equal to the increment to the graph, I($x + dx$) – I(x). Adding together the increments to the graph from $x = a$ to $x = b$ simply gives I(b) – I(a). Thus adding together the vertical steps dy may in some sense approximate to I(b) – I(a). Figure 4 gives a fair indication of this idea. It fails in part because we had to make the strips fairly wide to see what is going on and this, in turn, means that the graph may be so curved in a strip that dy is clearly different from I($x + dx$) – I(x). But imagine it instead as having a large number of strips, and imagine a part of the graph being magnified to see its local straightness with a few strips next to each other (figure 5).".

valor epistêmico (relativo à produção de conhecimento do objeto matemático) ou pragmático (quanto ao potencial produtivo), conceitos dados por Artigue (2002, apud (THOMAS e LIN, 2013).

Portanto, em um ambiente mediado por tecnologia, uma tarefa processual (com valor pragmático), como por exemplo, "Determine $\int_1^3 (3x - 2)\, dx$", tem pouco ou nenhum valor epistêmico, pois a tecnologia da "caixa preta" não ajudará os alunos a entender as construções da matemática.

Segundo eles, o mesmo ocorre em tarefas em que o esquema manual é transferido para uma ferramenta tecnológica, com uma subsequente mudança de técnica. Neste caso, para construir tarefas com valor epistêmico, os autores sugerem abordar um conceito ou ideia matemática, examinar o papel da linguagem e pedir aos alunos que escrevam sobre como interpretam seu trabalho, considerando as representações, tratamentos e conversões, bem como suas interações, integrando técnicas tecnológicas e manuais, para que os alunos façam generalizações, pensem sobre a prova e o desenvolvimento da teoria matemática (THOMAS e LIN, 2013, p. 111).

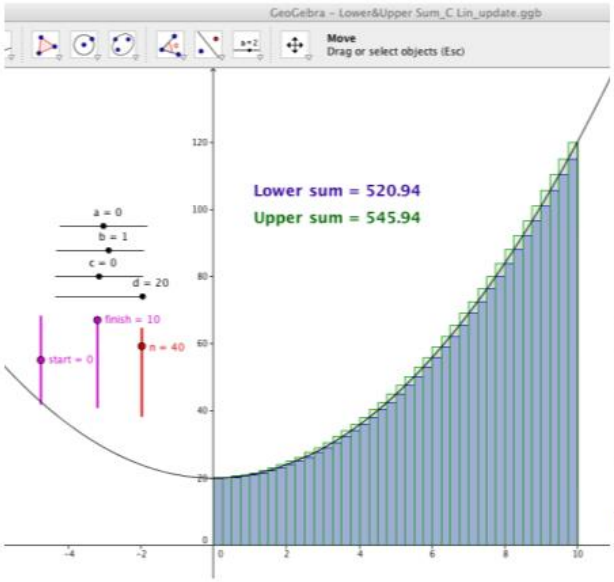
Thomas e Lin produziram tarefas incorporando o uso do software GeoGebra para ajudar os alunos a desenvolverem uma imagem conceitual ampliada da integral definida e a capacidade de coordenar o esquema visual das somas de Riemman e o esquema analítico do limite das sequências numéricas.

Os recursos algébricos, gráficos e numéricos (planilha) do GeoGebra foram utilizados e as tarefas consistiam de conjuntos de subtarefas com questões de construção, exploração, reflexão e sistematização, ao tempo que tinham que escrever o que notavam no programa e os resultados na tabela, respondendo aos questionamentos.

Uma das tarefas que foi construída relacionava-se ao conceito de somas de Riemman, utilizando números variáveis de retângulos (cerca de 5 a 500) para aproximar a área sob a curva de $t = 0$ a $t = 10$ horas (Figura 22). Os alunos anotavam o valor aproximado da área, enquanto o número de subintervalos ou retângulos ia sendo alterado dinamicamente com o controle deslizante[118], em uma tabela que foi fornecida (como mostra a Figura 22 à direita).

[118] O controle deslizante, neste caso, se refere a um componente do software que possui um marcador que o usuário pode mover para ajustar o parâmetro em um intervalo de valores pré-definidos e, com isso, controlar o movimento de um determinado objeto na tela do computador.

Figura 22 - Utilização do software GeoGebra para investigar somas de Riemman



Number of subintervals (rectangles)	Actual Area = 533.33			Other method for better approximation?
	Area Approximation			
	Left Rectangle (Left-hand sum)	Right Rectangle (Right-hand sum)	Accuracy Difference	Using Trapezium
5	440	640	200	540
10	485	585	100	535
20	508.75	558.75	50	533.75
30	516.85	550.19	33.33	533.52
40	520.94	545.94	25	533.44
50	523.4	543.4	20	533.4
60	525.05	541.71	16.67	533.38
80	527.11	539.61	12.5	533.36
100	528.35	538.35	10	533.35
500	532.33	534.33	2	533.33

Filling in the table provided

Fonte: Thomas e Lin (2013, p. 114).

Thomas e Lin seguiram uma trajetória de ensino que inicializava com perguntas introdutórias, enquanto auxiliavam os alunos a resolverem a tarefa, como eles explicam:

> De acordo com os princípios de design da tarefa, os alunos foram incentivados a escrever sobre o que notaram no programa e os resultados na tabela, usando as perguntas: O que você notou sobre a diferença entre a soma da mão esquerda e a soma da mão direita (Diferença de Precisão) à medida que [a quantidade] de retângulos aumenta?; À medida que aumentamos o número de retângulos desenhados entre t = 0 para t = 10 horas, o que você notou sobre a relação entre os retângulos e a área sob a curva? Como esse recurso se relaciona com a precisão da aproximação da área?; e Você pode pensar em outros métodos para aproximar a área e produzir uma estimativa melhor? Um método usando trapézios seguidos. Isso preparou os alunos para a apresentação de uma generalização algébrica do limite das somas de Riemann. (THOMAS e LIN, 2013, p. 114-115, tradução nossa)[119].

Segundo eles, a realização da tarefa utilizando o GeoGebra ajudou os estudantes a entender melhor o conceito de integração, a partir da visualização da aproximação de área, à medida que aumentava a quantidade de retângulos ou trapézios, o que seria difícil explicar sem o auxílio dessa tecnologia.

[119] Texto original: “In line with the task design principles, the students were then encouraged to write about what they noticed from the program and the results in the table, using the questions: What did you notice about the difference between the left-hand sum and right-hand sum (Accuracy Difference) as the number of rectangles increases?; As we increase the number of rectangles drawn between t = 0 to t = 10 hours, what did you notice about the relationship between the rectangles and the area under the curve? How does this feature relate to the accuracy of the area approximation?; and Can you think about other methods to approximate the area to produce a better estimate? A method using trapeziums followed. This prepared students for presentation of an algebraic generalisation of the limit of Riemann sums”.

Além dessas contribuições do software para a atividade matemática, enfatizamos a necessidade de que o professor entenda o papel do software e forneça situações para que os estudantes desenvolvam a ação, a formulação e a validação durante a realização das tarefas. Já se sabe que o software é capaz de resolver muitas tarefas rotineiras, como por exemplo, efetuar cálculos e criar gráficos, no entanto, o professor precisa ter a consciência sobre a matemática que ele quer que os alunos "façam". E se tratando de um micromundo, o potencial que ele fornece para obter feedback deve ser levado em consideração ao se construir as tarefas, ou seja, é preciso levar em conta o domínio epistemológico de validade (BALACHEFF e SUTHERLAND, 1994), dado a capacidade de resolver distintos problemas.

Considerando as características dos softwares que influenciam o ensino e a aprendizagem, elaboramos uma análise sintética para melhor identificar as contribuições e restrições dessa integração.

4.4.1 Síntese da dimensão informática

Para esta análise, nos guiamos sob a questão específica à dimensão informática: "Quais são as contribuições tecnológicas que o software deve conter para auxiliar na compreensão e ensino do Teorema Fundamental do Cálculo?".

Concordamos com Sutherland e Balacheff (1999) que

> Do ponto de vista da aprendizagem, o computador pode ser visto como um novo elemento no ambiente do aluno, oferecendo oportunidades para novas experiências e construção de novos significados. Do ponto de vista do ensino, pode ser visto como o que poderíamos chamar de um novo detentor de conhecimento e também de outro agente docente. O conhecimento implementado na máquina pode aparecer como uma referência para o aluno, e o feedback da máquina como um oráculo, possivelmente desafiando a posição do professor. (SUTHERLAND e BALACHEFF, 1999, p. 6, tradução nossa)[120].

Nesse sentido, o professor desempenha um papel crucial tanto no desenvolvimento da atividade matemática quanto em entender o que está se passando entre o aluno, o computador e a tarefa. Os autores explicam que, qualquer que seja a situação informática configurada pelo professor, ele provavelmente terá que intervir, assumindo uma responsabilidade essencial que envolve o que ele deseja que o aluno aprenda. (SUTHERLAND e BALACHEFF, 1999, p. 23).

[120] Texto original: "From the point of view of learning the computer can be viewed as a new element in the student's environment, offering opportunities for new experiences and the construction of new meanings. From the point of view of teaching it can be viewed as what we could call a new knowledge holder as well as another teaching agent. The knowledge implemented in the machine could appear as a reference for the learner, and the machine feedback as an oracle, possibly challenging the teacher's position".

Como já discutimos, a escolha das atividades é importante e um dos aspectos informáticos evidenciado nas pesquisas é a importância da experimentação (TALL, 2000). A esse respeito, o desenvolvimento de uma atividade que envolve os conceitos do Teorema Fundamental do Cálculo deve levar em conta a natureza exploratória que levem os alunos a estabelecer a inter-relação entre os componentes intuitivo, algoritmo e formal, como ressaltado por Grande (2013), em que ele diz em sua pesquisa que, para isso, a interação entre o aluno e o software foi fundamental.

Segundo Hoyles, a interação com o micromundo ocorre a partir das suas funções comunicativas e cognitivas, logo eles não são usados "meramente como ferramentas, mas como ambientes exploratórios e como meio de comunicação simbólica de relações matemáticas" (HOYLES, 1993, p. 11, tradução nossa)[121]. Assim, ela chama atenção para o papel da representação simbólica no pensamento matemático, segundo o qual o aluno ganhará pouco com a interação com o software se nesse processo não evocar a mobilização do conhecimento matemático.

O reconhecimento das novas relações entre os objetos matemáticos foi ressaltado na pesquisa de Andersen (2011) dado pela possibilidade de se utilizar diferentes registros de representação. Os recursos de visualização e dinamismo, fornecidos pelo software, foram também apontados em todas as pesquisas, reconhecidos pela capacidade de contribuir com a mobilização dos conceitos ligados ao Teorema Fundamental nesses registros. Essas características estão ligadas ao conceito de manipulação direta, em que o usuário tem acesso aos objetos por meio da interface e age sobre eles, consequentemente obtendo uma referência sobre o conhecimento que é construído (BALACHEFF, 1993).

Deste modo, a funcionalidade de exibir diferentes representações em registros distintos permite ao usuário realizar "gestos", isto é, emitir comandos para manipular os objetos por meio de suas representações. Para Lagrange (2000),

> Um "gesto" é, por exemplo, calcular um limite, obter a derivada de uma determinada função. O "sistema" inclui recursos gráficos que também permite gestos como a obtenção do gráfico de uma função em uma determinada janela, os diferentes zooms, a localização de um ponto característico no gráfico ou em uma tabela de valores. (LAGRANGE, 2000, p. 4, tradução nossa)[122].

[121] Texto original: "[Thus computers are not used in microworlds] merely as tools but as exploratory environments and as media of symbolic communication of mathematical relationships".
[122] Texto original: "Un "geste", c'est par exemple, calculer une limite, obtenir la dérivée d'une fonction donnée. Le "système" comporte des facilités graphiques qui permettent aussi des gestes tels que l'obtention du graphe d'une fonction dans une fenêtre donnée, les différents zooms, le repérage d'un point caractéristique sur le graphe ou sur une table de valeurs".

A partir dessa abordagem, um conjunto de gestos pode determinar uma possível técnica, cujo significado matemático tem relação, de um lado, com as tarefas que ela permite realizar e, por outro lado, com o discurso tecnológico-teórico que a justifica. Assim, novas técnicas podem surgir com a realização dos gestos ou a habilidade de manipulação dos instrumentos informáticos.

A manipulação direta dos objetos na tela do computador é uma característica bem peculiar aos softwares de geometria dinâmica ou, de maneira mais geral, matemática dinâmica. Balacheff e Bellemain (2007) afirmam que

> para implementar esse princípio, são dois sistemas interconectados de representação dos objetos do saber geométrico que são necessárias: um gráfico (os pixels na tela) e um analítico (um sistema de coordenadas). A razão da necessidade desse duplo sistema de representação dos objetos é que não existe mecanismo de manipulação dos pixels da tela sem passar pelas coordenadas desses pixels. A rigor, podemos falar de três sistemas de representação: gráfico (os pixels representando os objetos), analítico (as coordenadas dos objetos) e simbólico (as especificações geométricas). De fato, para implementar o princípio de manipulação direta dos objetos geométricos, de uma certa forma, temos uma tripla transmutação do saber. Cada um desses sistemas tem características próprias que não existem nos outros dois, características que conduzem os desenvolvedores a completar cada sistema de representação das informações que não são disponíveis nos outros. (BALACHEFF e BELLEMAIN, 2007, p. 47).

Esses atributos podem ajudar na construção de modelos do domínio, por exemplo na representação da soma de Riemann, como sugeriu a pesquisa de Andersen (2011), e em algumas experiências vivenciadas pelos matemáticos, como foi abordado na pesquisa de Grande (2013), para explorar os conceitos envolvidos no Teorema Fundamental do Cálculo através da ideia de acumulação e sua variação para que os estudantes possam compreender a relação mútua entre integração e derivação como operações inversas uma da outra.

Outra evidência foi o papel da interface em facilitar a experiência para o usuário (ANDERSEN, 2011). Essa questão é discutida por Thompson (1985) na concepção de um micromundo matemático. Segundo ele, dentre os requisitos principais, além de estabelecer as funções, tem que se definir os comandos e o formato em que os alunos usarão para agir sobre o micromundo e o ideal é que seja parecido com a notação formal da matemática. Por exemplo, utilizar o símbolo "∫" em um comando para corresponder à integral. A escolha de um comando pode também ter correspondência com o registro de representação e o significado matemático.

E um outro requisito essencial são os problemas que se deseja apresentar sobre o saber que está em jogo. Nesse aspecto, concordamos com a análise das praxeologias em torno dos tipos de tarefas, das técnicas, como maneiras de realizar as tarefas, e o discurso tecnológico-

teórico que os justificam, podendo revelar esses problemas os quais o micromundo permitirá resolver.

INTRODUÇÃO 2

Nesta Segunda Parte do Capítulo 4, descrevemos os resultados obtidos nas etapas de Levantamento de Requisitos, Concepção e Análise a Priori, Desenvolvimento e Experimentação e Análise a Posteriori e Validação. A princípio, retomaremos sucintamente a problemática em torno da modelização do conhecimento e, nas seções seguintes, discutiremos o que foi produzido.

MODELIZAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

> *E o cientista da computação disse: "Como é possível que esse cara não entenda o quão inteligente e pedagogicamente útil é o meu sistema?"*
> *E o pedagogo disse: "Que solução técnica brilhante! Agora, qual é o problema?"*
> (Pierre Tchounikine, abril de 2011)[123]

Um aspecto adverso evidenciado na engenharia de software educativo é a interação entre programadores e educadores, segundo Tchounikine (2002), devido às dificuldades em compartilhar os conhecimentos das áreas correspondentes. Geralmente, os projetos apontam apenas referências sobre o tipo de abordagem seguida, sem especificar claramente a influência sobre a aprendizagem.

Essa evidência também foi levantada por Tibúrcio (2020) que, referindo-se aos softwares educativos, comunga com a ideia de que "a utilização de teorias de ensino e aprendizagem pode auxiliar a criação de produtos tecnológicos" (TIBÚRCIO, 2020, p. 43) e o resultado se reflete na qualidade do produto a ser gerado.

Gomes e Wanderley (2003) observam outra questão importante, que é em relação às dificuldades encontradas por engenheiros de software para elicitar requisitos em domínios muito específicos. Segundo os autores, as abordagens por meio de entrevistas aos usuários não são suficientes para captar os requisitos de um sistema, pois não permitem ao pesquisador informações mais precisas sobre o contexto de uso do novo artefato.

> A maior dificuldade parece estar relacionada em listar um conjunto adequado de requisitos e na criação de casos de uso que atenda às reais necessidades dos usuários.

[123] Extraído do prefácio do livro: TCHOUNIKINE, P. Computer Science and Educational Software Design. A Resource for Multidisciplinary Work in Technology Enhanced Learning. Springer-Verlag Berling Heildelberg, 2011. Texto original (grifo do autor): "*And the computer scientist said: "How is it possible that this guy doesn't understand how smart and pedagogically useful my system is?" And the educationalist said: "What a brilliant technical solution! Now, what's the problem?"* (Pierre Tchounikine, April 2011)".

> A modelagem inicial de um software educativo está relacionada à aprendizagem dos conceitos visados, a prática de ensino no contexto de uso e ao currículo (MacKougall e Squires, 1994). Uma primeira característica desse conjunto de requisitos é que ele recebe influência do tipo de domínio de conhecimento para a qual a interface está sendo criada. Em segundo lugar, requisitos e especificações devem levar em consideração a estrutura da atividade dos diferentes usuários que utilizarão a interface (Lins e Gomes, 2003). (GOMES e WANDERLEY, 2003, p. 121).

Ou seja, os requisitos do domínio e do contexto de uso, das práticas sociais, são essenciais para desenvolvimento de softwares que tem cunho educacional. Eles destacam que os requisitos do domínio podem ser obtidos por meio de publicações de resultados de pesquisas, bem como a realização de estudos sistemáticos. Nesse sentido, a Engenharia Didático-Informática privilegia a compreensão do domínio de um saber no âmbito das dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática que intervém tanto no uso, na concepção e no desenvolvimento de softwares educativos.

E no caso particular do micromundo, ele convém ser adequado para a aquisição de aprendizagem, desempenhando o papel de mediador entre o sujeito e os objetos que ele manipula por meio de sua interface, fornecendo assim feedbacks para o confronto e as adaptações do sujeito às suas especificidades. Desta maneira,

> as representações das noções matemáticas e dos operadores inseridos no micromundo, bem como a interface que permite a sua manipulação, têm um papel central no conhecimento que os alunos irão construir dessas noções. Além disso, as situações em que o micromundo será utilizado devem ter características particulares (BELLEMAIN, 1993-1994, p. 3, tradução nossa)[124].

Portanto, os requisitos estão relacionados com o que a interface deve fornecer em termos de aprendizagem, pois "são essas interfaces que servem para veicular situação e viabilizar contextos nos quais as ações dos usuários são possíveis. Em segundo lugar, porque são essas interfaces que servem de meio mediador para os profissionais de ensino na tarefa de ensinar." (GOMES e WANDERLEY, 2003, p. 122).

No contexto da didática da matemática e de outras ciências, as situações de ensino e o saber que emerge delas podem ser analisados por meio das praxeologias. Nesse aspecto, o modelo praxeológico é essencial para conhecer e analisar as práticas didáticas que revelam as condições (e restrições) predominantes do ensino e as possibilidades de aprendizagens, bem como as relações pessoais e institucionais discutidas por Chevallard (1999).

---

[124] Texto original: "En particulier, les représentations des notions mathématiques et les opérateurs embarqués dans le micromonde ainsi que l'interface qui en permet la manipulation ont un rôle central dans les connaissances que construirons les élèves de ces notions. De plus les situations dans lesquelles le micromonde sera utilisées doivent avoir des caractéristiques particulières".

Concordamos com Farias, Carvalho e Souza (2018) que essas praxeologias são passíveis de reconstrução quando se pode garantir ao menos a sua completude, ou seja, a constituição de tarefa – técnica – tecnologia – teoria.

> Desconstruir praxeologias, pensamos ser uma ação de atuar diretamente sobre aquilo que é passível de manipulação, no que se refere a atividade matemática institucional, ou seja, sobre as ferramentas matemáticas ligadas aos saberes, tais como técnicas, noções, conceitos, propriedades. Talvez pareça ser algo muito complexo pensar na reconstrução de ferramentas matemáticas no que se refere a conceitos, sendo isso possível apenas para o matemático. Mas algo está mais próximo do trabalho do professor e do estudante, as técnicas (como fazer), que podem ser manipuladas mediante aprofundamento do estudo de tecnologias e teorias que as justifiquem. (FARIAS, CARVALHO e SOUZA, 2018, p. 183)

Podemos questionar, contudo, a respeito do ensino do Teorema Fundamental do Cálculo mediado pelo micromundo, que tipos de tarefas existem ou podem existir, realizadas com quais técnicas? Quais são as organizações matemáticas e como fazer progredi-las e implementá-las?

No campo da Matemática, os objetos não existem em si mesmos, mas emergem de sistemas de práticas institucionais (CHEVALLARD, 1992). Assim, qualquer atividade matemática surge da ativação das técnicas baseadas em objetos ostensivos. Nos interessamos, particularmente, a esse respeito no contexto desta tese, onde a introdução de um micromundo para a atividade matemática pode desestabilizar o campo da prática (ARTIGUE, 1997) associada ao ensino do Teorema Fundamental do Cálculo e ajudar a mobilizar novas técnicas com a ativação de novos objetos (informáticos).

Destarte, a representação do saber passa também por restrições evidenciadas na transposição informática (BALACHEFF, 1993) que precisam ser abordadas para tentar compreender as possibilidades e as lacunas que podem existir.

> O trabalho analítico de identificação de restrições é essencial para compreender as possíveis funções do saber permitidas por um determinado software, para analisar as lacunas necessariamente existentes com as funções escolares habituais desse saber e para identificar conflitos e problemas, questões de legitimidade institucional que podem surgir. Permite também, em um segundo nível, como enfatiza Balacheff, abordar a questão da validade epistemológica do software, validade que se inscreve em pelo menos três dimensões: a do espaço dos problemas a que o ambiente dá acesso, a das características funcionais e semióticas da interface, a da coerência interna e da

> tolerância do dispositivo que põe em jogo o universo interno e a interface. (ARTIGUE, 1997, p. 139-140, tradução nossa)[125].

Com base nesses argumentos, buscamos validar a nossa hipótese de que a análise das praxeologias permite modelizar o saber para a concepção de micromundos e essa modelização ativa a representação e mobilização de novos objetos digitais. Assim, as próximas seções consistem na organização dos resultados (requisitos) obtidos na etapa anterior, na análise a priori das situações, no desenvolvimento do modelo praxeológico e no confronto a posteriori com a validação do modelo na análise de micromundos.

4.5 REQUISITOS DO DOMÍNIO

Com a análise prévia dos trabalhos escolhidos na literatura, organizamos os descritores relativos às dimensões cognitiva, didática, epistemológica e informática, como mostra o Quadro 9.

Quadro 9 - Descritores identificados na literatura

DIMENSÃO COGNITIVA	Representação, visualização, mudança entre diferentes representações, abstração, generalização, síntese, intuição, descoberta, definição, validação (ANDERSEN, 2007).
	Resolução de tarefas com interações entre os componentes algorítmico, formal e intuitivo em conjunto com a visualização (GRANDE, 2013).
DIMENSÃO DIDÁTICA	Conteúdo como pronto e acabado; método de ensino baseado no modelo exposição teórica-exemplos-exercícios; prejuízos no entendimento dos conceitos e exploração de atividades de elaboração de hipóteses e conjecturas (ANDERSEN, 2007).
	Não se dá um tratamento da relação mútua entre as operações de integração e derivação nas atividades dos professores ou nos livros didáticos; escassez da utilização do registro gráfico em sua abordagem; incompreensão do resultado do teorema pelos estudantes (GRANDE, 2013).
	Livros didáticos de Cálculo não discutem explicitamente a inter-relação entre derivada e integral; Dificuldades de aprendizagem dos conceitos; necessidade de mobilização e tratamento, em uma atividade, de pelo menos dois registros de representação (CAMPOS, 2007).
	Os professores consideram importante a coordenação simultânea dos registros de representação, mas não costumam propor esse tipo de atividade aos alunos; Dificuldades na interpretação da relação entre derivada e integral (PICONE, 2007).
	O TFC é utilizado como ferramenta para resolução de problemas; utilização excessiva da representação algébrica e técnicas memorizáveis como derivação e integração; o emprego de imagens gráficas é utilizado apenas para ilustrar

[125] Texto original: “Le travail analytique d’identification des contraintes est essentiel pour comprendre les fonctionnements possibles du savoir permis par un logiciel donné, pour analyser les décalages nécessairement existants avec les fonctionnements scolaires usuels de ce savoir et identifier les conflits et les problèmes de lègitimité institutionnelle qui peuvent en résulter. Il permet aussi, à un second niveau, comme le souligne Balacheff, d’aborder la question de la validité épistémologique du logiciel, une validité qui s’inscrit dans trois dimensions au moins: celle de l’espace de problèmes auquel l’environnement donne accès, celle des caractéristiques fonctionnelles et sémiotiques de l’interface, celle enfin de la cohérence interne et de la tolérance du dispositif qui met en jeu à la fois l’univers interne et l’interface.”.

	conceitos; dificuldades em solucionar problemas relacionados à visualização; dificuldades na apresentação de gráficos estáticos (SEGADAS, 1998).
DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA	Dificuldades em distinguir as funções derivada f e primitiva F; alguns alunos não percebem a necessidade de a função f ser contínua. (ANDERSEN, 2007).
	Dificuldade de associar os gráficos de uma função ao de sua primitiva (GRANDE, 2013).
	Dificuldades na compreensão do TFC relativas à mobilização incompleta, ou parcial, das noções de derivada, integral e continuidade; os estudantes tendem a não focar atenção aos aspectos conceituais do teorema, apenas memorizando o algoritmo; dificuldades na visualização e interpretação geométrica das operações (ANACLETO, 2007).
	Dificuldade na conexão entre as representações gráfica e analítica de uma função; Dificuldades na compreensão e resolução de questões de TFC, integração e diferenciação de uma função, continuidade e diferenciabilidade, ligadas à compreensão e à representação gráfica da função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e o significado das variáveis *x* e *t* (SEGADAS, 1998).
DIMENSÃO INFORMÁTICA	Visualização, representação e mudança entre diferentes representações; favorecer a mobilização dos processos de intuição, descoberta e validação (ANDERSEN, 2007).
	Visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo e sua relação com a intuição e o rigor; desenvolvimento ou manifestação das intuições a partir das explorações ou representações proporcionadas pela atividade com o software; criação de modelo para uma situação-problema, permitindo aos alunos acessar, interagir, manipular, possibilitando a exploração de cognições; permitiu a visualização e concretização dos conceitos envolvidos e que os componentes intuitivo, algorítmico e formal fossem inter-relacionados e confrontados (GRANDE, 2013).
	Explorar o registro gráfico na construção dos conceitos e contrapor em seguida com o registro algébrico; visualização geométrica; Coordenação simultânea dos registros envolvidos (PICONE, 2007).

Fonte: A autora (2019).

A análise nos permitiu identificar uma mesma espécie de descritor correspondente a diferentes dimensões, o que contribuiu na categorização dos requisitos. De fato, no sistema didático podem ocorrer fenômenos que coexistem nas dimensões didática e cognitiva, por exemplo, dificuldades de aprendizagem relacionadas com o ensino.

Assim, com essa organização, categorizamos os resultados nos guiando pelas seguintes questões:

- Como o ensino e a aprendizagem podem ser favorecidos?
- Como a compreensão dos saberes é auxiliada com o uso do software?
- Quais recursos e situações o software propõe para ajudar o usuário a compreender os saberes?
- Quais funcionalidades existem em produtos da área?
- Quais são os possíveis diferenciais do software em questão?
- O que o software deverá fornecer de novo referente ao que já existe?

Na sequência, selecionamos e organizamos os requisitos, onde passamos a analisá-los quanto aos critérios de pertinência, consistência e integralidade.

A documentação de requisitos é apresentada no Quadro 10.

Quadro 10 - Documentação de requisitos

COGNITIVA	DIDÁTICA	EPISTEMOLÓGICA	INFORMÁTICA
• Representação • Mudança entre diferentes representações • Visualização • Abstração • Generalização • Síntese • Intuição • Descoberta • Validação • Interação entre os componentes algorítmico, formal e intuitivo	• Tratamento da relação inversa do TFC • Atividades de elaboração de hipóteses e conjecturas • Utilização de registro gráfico • Mobilização e tratamento de pelo menos dois registros de representação	• Função • Função primitiva • Função derivada • Função integral • Continuidade/Função contínua • Associação entre os gráficos de funções • Aspectos conceituais do TFC • Visualização e interpretação geométrica da integral e da derivada • Conexão entre as representações gráfica e analítica da função • Significado das variáveis x e t • Representação gráfica da função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$	• Visualização • Representação e mudança entre diferentes representações • Mobilização nos processos de intuição, descoberta e validação • Relação entre a visualização, intuição e rigor • Atividades exploratórias • Criação de modelo para acessar, interagir, manipular, explorar cognições • Inter-relação entre os campos intuitivo, algorítmico e formal

Fonte: A autora (2021)

A representação de objetos em diferentes registros, bem como a mobilização e o tratamento dessas representações, no sentido de Duval (1993), é pertinente em todas as dimensões, portanto torna-se um requisito essencial que pode favorecer o ensino e a aprendizagem. Além do mais, é consistente com a visualização, que é outro requisito evidenciado nas pesquisas e que é potencializado pelo software.

A criação de um modelo, embora ter sido pouco evidenciada, integra a ideia de relação inversa do Teorema Fundamental e é consistente com os demais requisitos, podendo auxiliar os usuários na compreensão dos saberes. Aditado a isso, podemos pensar que, em relação ao aspecto didático, o software poderá também fornecer modelos pré-concebidos para serem consistentes com os demais requisitos, como por exemplo, explorar as ideias conceituais, elaborar hipóteses, generalizar, relacionar os componentes intuitivo, algorítmico e formal, provar, etc.

Em relação aos requisitos relativos à dimensão informática, ponderamos a possibilidade de que outras funcionalidades sejam percebidas, ao se analisar softwares distintos aos que foram apontados nas pesquisas, e que estas, talvez, não tenham evidenciado.

Os aspectos conceituais relativos ao Teorema Fundamental foram bastante elucidados nos trabalhos examinados, como função, função primitiva, função derivada, função integral, continuidade e função contínua. Observamos, com isso, uma grande necessidade da exploração de tarefas que ajudem a mobilizar os objetos ostensivos e não ostensivos. Nesse sentido, buscamos analisar as praxeologias onde esses objetos são utilizados para realizá-las.

Com a análise da atividade matemática, iremos conjecturar sobre os possíveis objetos digitais que o micromundo deve possuir para serem utilizados como ferramentas para executar as tarefas.

4.6 AS PRAXEOLOGIAS NOS LIVROS DIDÁTICOS

De acordo com Artaud (1998), os objetos matemáticos e os objetos didáticos vivem em associação, desde a origem das organizações matemáticas, por meio de pessoas ou instituições. No ecossistema didático identificado por Artaud, buscamos localizar e estudar o lugar onde "vive" o Teorema Fundamental do Cálculo.

Como já foi ressaltado, o Livro Didático (LD) é o principal elemento institucional utilizado pelo professor, que revela as praxeologias em torno dos objetos do saber existentes em uma dada instituição. Para analisar como o Teorema Fundamental é proposto a ser ensinado, por meio dos LD, escolhemos as três obras que estão apresentadas no Quadro 11, com as respectivas referências, a quantidade de páginas da obra (*P*) e a quantidade de páginas ocupadas por esse Teorema (*n*).

Quadro 11 - Relação dos livros de Cálculo escolhidos que abordam o teorema fundamental

Referência do livro **Título, autor, tradutor, edição, editor, ano de edição**	*P/n*
O Cálculo com Geometria Analítica. LEITHOLD, Louis. Tradução Cyro de Carvalho Patarra. 3ª ed. Volume I. Editora HARBRA Ltda, São Paulo, 1994.	749/9
Cálculo. THOMAS, George. B. Jr. Tradução Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11ª ed. Volume 1. Editora Addison-Wesley/Pearson, São Paulo, 2009.	786/13
Cálculo. STEWART, James. Tradução EZ2Translate. 6ª ed. Volume I. Editora Cengage Learning, São Paulo, 2014.	667/9

Fonte: A autora (2020).

O livro de Leithold contém 11 capítulos, enquanto que o livro de Thomas possui 9 capítulos e, o de Stewart, 8 capítulos, identificados com cada assunto. Eles são iniciados com uma breve apresentação do autor sobre os tópicos que serão abordados em suas respectivas seções. Cada capítulo contém, aproximadamente, de quatro a onze seções, sendo que cada uma é organizada em: Curso – Exemplos – Exercícios. Com exceção da parte dos Exercícios, nos

livros de Leithold e Thomas a apresentação do assunto é feita ao lado direito de uma margem larga (aproximadamente 7 cm). Nessa margem constam, eventualmente: ilustrações, numeradas, produzidas por meio de software; e algumas notas do autor. Leithold ainda traz nessa margem os títulos numerados dos enunciados, tais como definições e teoremas. O livro de Stewart também possui uma margem (aproximadamente 5 cm) contendo essas ilustrações, no entanto, apresentando o assunto ao lado direito nas páginas pares e ao lado esquerdo nas páginas ímpares, permitindo ao leitor a visualização da leitura concentrada na parte central do livro aberto.

A parte correspondente ao Curso começa com o tópico de cada nova seção, em que vão se intercalando: Ilustração (aplicações de Propriedades e Definições), Exemplo (com Solução) e Prova (de Teoremas e Corolários). Cada seção termina com pacotes de exercícios com a mesma numeração da seção, correspondentes a um mesmo tipo de tarefas, bem como ao final de cada capítulo contém exercícios de revisão.

Thomas organizou e agrupou os exercícios por tópicos, progredindo de problemas de cálculo até problemas teóricos e aplicados, e ele justifica, no prefácio do livro, que "essa estrutura permite aos alunos ganhar desenvoltura no uso dos métodos de cálculo, bem como aprofundar seu entendimento sobre suas aplicações e estrutura matemática correspondente" (THOMAS, 2009, p. ix). A edição brasileira inclui ainda a Seção "Exercícios avançados", ao final de cada capítulo, contemplando questões de aprimoramento das teorias e aplicações abordadas no capítulo. Concordamos com Henriques (2019, p. 135) que

> "isso deixa supor que são mais exercícios de treinamento do que exercícios de investigação. Podemos, por conseguinte, dizer que os exercícios propostos são elaborados para permitir ao estudante mobilizar conhecimentos adquiridos no *Curso* e as técnicas *rotineiras* para resolver tipos de *tarefas* bem selecionadas". (HENRIQUES, 2019, p. 135)

Leithold ressalta também a importância das demonstrações dos teoremas:

> Espero que o leitor tome consciência de que as demonstrações dos teoremas são necessárias; procurei torná-las bastante motivadoras e explicá-las cuidadosamente, de forma que sejam compreensíveis para o estudante que adquiriu um nível razoável de conhecimentos das secções que as precedem. Se um teorema está enunciado sem demonstração, a sua discussão foi ampliada com figuras e exemplos e, em tais casos, sempre ressaltei que se trata de uma ilustração do conteúdo do teorema, e não de uma demonstração. (LEITHOLD, 1994, p. ix)

Nesse sentido, na obra não há vestígios de abordagem histórica, enfatizando a importância do rigor no desenvolvimento do Cálculo e o desenvolvimento de técnicas que permitiam suprir os fundamentos lógicos da demonstração. Contudo, compreendemos que, o

aluno tomar consciência sobre a importância das demonstrações perpassa sobre a prática institucional do professor e a sua relação com o saber.

O livro também não faz referência ao uso de calculadora gráfica e software, mas sugere o esboço de gráficos para resolução de determinados exercícios. Logo, supomos que a utilização desse tipo de tecnologia não é evocada na prática institucional dos estudantes que fazem uso desta obra.

Quanto ao livro de Stewart, o autor explica que concebeu diversos tipos de problemas: alguns com solicitações para explicar os significados dos conceitos básicos da seção, iniciando com a Verificação de Conceitos e um Teste de Verdadeiro ou Falso; outros testam a compreensão de conceitos através de gráficos ou tabelas; e outros utilizam a descrição verbal para testar a compreensão de conceitos. Segundo o autor explica no prefácio do livro, ele particularmente valoriza problemas que combinam e comparam abordagens gráficas, numéricas e algébricas. E ressalta que cada grupo de exercícios é "cuidadosamente classificado, progredindo de exercícios conceituais básicos e problemas que visam ao desenvolvimento de habilidades, até problemas mais desafiadores, envolvendo demonstrações e aplicações" (STEWART, 2014, p. xi). O autor baseia-se na estratégia de resolução de problemas proposta por George Polya para apresentar, após o Capítulo 1, seções denominadas "Problemas Quentes", dando exemplos de como lidar com problemas de cálculo mais desafiadores.

Quanto ao uso de tecnologia, os livros de Thomas e Stewart fazem menção sobre a importância dos computadores e calculadoras gráficas como ferramentas úteis na descoberta e compreensão dos conceitos. Ambos trazem uma simbologia para identificar os exercícios que exigem o uso de tecnologia. No livro de Thomas eles são apontados por quando adequados ao uso de uma calculadora ou de um computador e, neste último caso, o autor sugere um sistema de álgebra por computador, como SAC, Maple ou o Mathematica. Já no livro de Stewart, o símbolo , segundo o autor, indica um exercício que definitivamente requer o uso dessas tecnologias e que não quer dizer que seu uso nos demais exercícios seja proibido, e o símbolo aparece em problemas nos quais são empregados todos os recursos de um sistema de computação algébrica, como o Derive, Maple, Mathematica ou o TI-89/92, tal como ele explica. E ainda justifica que, frequentemente, são preferíveis os cálculos e esboços feitos a mão, para ilustrar e reforçar alguns conceitos, e que, tanto professores e estudantes precisam aprender a discernir quando é mais adequado o uso das máquinas ou o cálculo a mão.

Notamos que o livro de Stewart traz uma abordagem mais moderna e atualizada, que destaca uma preocupação no enriquecimento do conteúdo, com aplicações em diversas áreas

do conhecimento por meio de exercícios e projetos e, ainda, recursos complementares que podem ser acessados por sistema on-line (através do site em inglês www.stewartcalculus.com) para auxílio visual de animação, atividades tutoriais e lições de casa. O livro de Thomas também traz uma indicação para acessar o Material Adicional (incluindo soluções, exercícios adicionais, manuais de tecnologia, etc.) para professores e alunos, embora o link fornecido (www.aw.com/thomas_br) tenha apresentado erro ao acessá-lo, pelo menos até a data final da revisão deste texto.

Embora não seja objetivo nosso analisar esses recursos adicionais, consideramos que eles podem ser úteis para o trabalho do professor e para os alunos, com possibilidades de explorar o aspecto visual do Cálculo e ampliar os conhecimentos com o auxílio desses materiais. Mas não podemos garantir que, de fato, sejam utilizados, sendo necessária uma investigação mais aprofundada sobre essas relações nas instituições, pois entendemos que eles são restritos à aquisição da obra e isso geralmente fica a cargo da instituição.

Na análise da estrutura organizacional regional, ou seja, do capítulo que abrange o Teorema Fundamental do Cálculo, este assunto está apresentado no capítulo 5, nos três livros, geralmente após a apresentação de Integral Definida, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1 - Organização regional (capítulo 5)

LIVRO DE LEITHOLD										
Seção	Título da Seção	D	T	C	F	I	E	Ex	Pc	P
5.1	Antidiferenciação	1	13	0	0	3	8	54	19	10
5.2	Algumas Técnicas de Antidiferenciação	0	2	0	0	2	9	68	17	8
5.3	Equações Diferenciais e Movimento Retilíneo	0	0	0	0	2	6	50	14	8
5.4	Área	2	6	0	0	3	5	60	15	12
5.5	A Integral Definida	5	1	0	0	0	2	38	10	8
5.6	Propriedades da Integral Definida	0	9	0	0	4	4	49	10	10
5.7	O Teorema do Valor Médio para Integrais	1	1	0	0	1	2	32	15	4
5.8	Os Teoremas Fundamentais do Cálculo	0	2	0	0	2	8	56	9	9
5.9	Área de uma Região Plana	0	0	0	0	0	7	54	17	7
5.10	Integração numérica	0	5	0	0	0	5	49	17	10
Exercícios de revisão		0	0	0	0	0	0	111	52	4
LIVRO DE THOMAS										
Seção	Título da Seção	D	T	C	F	I	E	Ex	Pc	P
5.1	Estimando com somas finitas	0	0	0	0	0	4	26	8	12
5.2	Notação sigma e limites de somas finitas	0	0	0	3	0	6	40	4	9
5.3	A integral definida	3	2	0	0	0	5	96	9	14
5.4	O teorema fundamental do cálculo	0	2	0	0	0	8	94	8	14
5.5	Integrais indefinidas e a regra da substituição	0	1	0	0	0	11	69	4	9
5.6	Substituição e área entre curvas	1	2	0	0	0	7	122	6	11
Questões de revisão		0	0	0	0	0	0	14	0	1
Exercícios práticos		0	0	0	0	0	0	138	10	5
Exercícios adicionais		0	0	0	0	0	0	45	6	5
Exercícios avançados		0	0	0	0	0	0	12	0	2

Projetos de aplicação de tecnologia		0	0	0	0	0	0	0	0	1
LIVRO DE STEWART										
Seção	Título da Seção	D	T	C	F	I	E	Ex	Pc	P
5.1	Áreas e Distâncias	1	0	0	1	0	4	30	10	11
5.2	A Integral Definida	1	2	0	7	0	8	73	18	13
5.3	O Teorema Fundamental do Cálculo	0	2	0	0	0	9	80	15	10
5.4	Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total	1	1	0	0	0	7	72	10	9
5.5	A Regra da Substituição	0	0	0	0	0	11	92	8	6
Revisão		0	0	0	0	0	0	97	7	3
Problemas Quentes		0	0	0	0	0	1	18	0	2

Nota: D: Definições; T: Teoremas; C: Corolários; F: Fórmulas; I: Ilustrações; E: Exemplos; Ex: Exercícios; P: Pacotes; P: Páginas.

Fonte: A autora (2020)

Observamos na Tabela 1 que a seção 5.8 do livro de Leithold, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, é apresentada com dois teoremas, oito exemplos e cinquenta e seis exercícios agrupados em nove pacotes, completando nove páginas do livro. Referindo-se ao mesmo tema, a seção 5.4 do livro de Thomas traz dois teoremas, oito exemplos e noventa e quatro exercícios agrupados em oito pacotes, ao longo de quatorzes páginas, enquanto a seção 5.3 do livro de Stewart possui dois teoremas, nove exemplos, oitenta exercícios agrupados em quinze pacotes, distribuídos em dez páginas. O livro de Thomas possui, portanto, uma quantidade maior de exercícios, mas o livro de Stewart apresenta mais pacotes de exercícios, que corresponde a mais tipos de tarefas.

Ao longo do estudo do Cálculo, alguns conteúdos utilizam o teorema fundamental, então é possível que esse tema seja abordado em outros capítulos. Mas pretendemos analisar o enfoque dado pelos autores na estrutura organizacional local, ou seja, na seção que aborda o tema, e pontual, referindo-se aos tipos de tarefas.

Para Artaud (1998), um tipo de tarefas didática *T* vive no sistema de ensino se existe um conjunto de técnicas que permitem realizá-la, bem como um discurso tecnológico que as justifique e uma teoria que explique a tecnologia. Portanto, daqui por diante, faremos a análise da organização praxeológica dos exercícios resolvidos (exemplos) e exercícios propostos, levando em consideração os tipos de tarefas, organizados em torno do conjunto de técnicas, tecnologias e teorias. Chamaremos de LD1 o livro de Leithold, LD2 será o livro de Thomas e, LD3, o livro de Stewart.

Algumas tarefas não foram categorizadas como um tipo de tarefas de TFC, como por exemplo, questões que solicitavam verificar a continuidade ou derivabilidade da função e determinar os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão. Das tarefas consideradas, relacionamos as que dependem do conhecimento do teorema fundamental para serem

resolvidas. Cada questionamento foi considerado como uma tarefa, então, nas tarefas que constam os itens *a, b, c, d*, computamos quatro tarefas. Dessa forma, identificamos 60 tarefas no primeiro livro, 88 no segundo e 76 no terceiro, que categorizamos em 11 tipos de tarefas relacionadas abaixo, sendo algumas contempladas em dois ou três exemplares, outras em apenas uma das obras.

(T_1) Determinar a derivada da integral dada por $\int_a^x f(t)dt$;

(T_2) Calcular o valor da integral definida $\int_a^b f(t)dt$;

(T_3) Calcular a integral definida $\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx$;

(T_4) Achar o valor médio de uma função *f* no intervalo [a, b];

(T_5) Determinar uma função *y = f(x)* em um dado domínio com derivada e valor determinados;

(T_6) Calcular a área total delimitada entre o gráfico de *y = f(x)* e o eixo *x* no intervalo [a, b];

(T_7) Determinar a área da região sombreada no gráfico dado;

(T_8) Analisar a relação do TFC;

(T_9) Esboçar a região compreendida entre os gráficos de funções em um dado intervalo;

(T_{10}) Mostrar graficamente a relação inversa entre a derivada e a integral da função *f*;

(T_{11}) Determinar a derivada da função $y = \int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx$.

Na Tabela 2 é apresentado o percentual de tipo de tarefas por cada livro analisado.

Tabela 2 - Quantidade de tarefas em cada livro analisado

Tarefas	**LD1 (%)**	**LD2 (%)**	**LD3 (%)**
T1	20	14,9	23,7
T2	66,7	34,1	19,7
T3	5	9,1	22,3
T4	8,3	1,1	0
T5	0	18,2	0
T6	0	11,4	7,9
T7	0	4,5	0
T8	0	2,2	1,1
T9	0	0	13,4
T10	0	4,5	5,3
T11	0	0	6,6
TOTAL	100%	100%	100%

Fonte: A autora (2021).

Conforme se pode analisar nesta tabela, o maior percentual em relação à quantidade de tarefas adotadas no LD1 e no LD2 é "(T_2) Calcular o valor da integral definida $\int_a^b f(t)dt$", usando a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo. No LD3, o maior percentual de

tarefas é "(T_1) Determinar a derivada da integral dada por $\int_a^x f(t)dt$", embora as tarefas do tipo T_2 e T_3 também foram bem contempladas neste livro. Observamos que o cálculo de integrais e derivadas constituem os principais tipos de tarefas nas praxeologias adotadas pelos autores dos livros didáticos analisados, como era esperado, já que são tipos de tarefas que exigem necessariamente a aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo.

Em relação ao cálculo de áreas, o LD1 não contemplou nenhuma tarefa na seção analisada e, mesmo que tenha abordado em seção posterior, julgamos que, pelo fato de que o teorema fundamental ter se desenvolvido para resolver problemas de áreas de regiões limitadas, esta questão deveria estar sendo tratada na apresentação do referido teorema, assim como fizeram os autores do LD2 e LD3.

As análises das praxeologias presentes em cada um dos livros, que contemplam esses tipos de tarefas, serão apresentadas nas subseções seguintes.

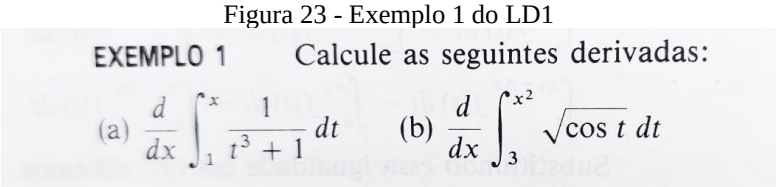
4.6.1 LD1 – Leithold

O autor inicia o tema com uma abordagem histórica sobre a utilização dos conceitos da integral definida a partir de procedimentos que atualmente conhecemos como Teoremas Fundamentais do Cálculo. Em seguida, discute as integrais definidas com um limite superior variável e enuncia e prova o "primeiro teorema fundamental do Cálculo", que dá a derivada da função *F* expressa como uma integral definida tendo um limite superior variável:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Um exemplo trazido pelo autor, com os itens (a) e (b), ilustra uma aplicação do primeiro teorema fundamental (Figura 23).

Figura 23 - Exemplo 1 do LD1


EXEMPLO 1 Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\,dt$

Fonte: Leithold (1994, p. 346).

O tipo de tarefas T_1 é apresentado com o verbo "calcular", seguido do complemento "a derivada da integral definida". Ou ainda, podendo utilizar os ostensivos $\frac{dy}{dx}$ para a derivada de

y e $\int_a^x f(t)\,dt$ para a integral definida, escrevemos: "calcular $\frac{dy}{dx}$, dado que $y = \int_a^x f(t)\,dt$", utilizando-se as técnicas de resolução:

τ_{1a}: Substituir a variável *t* da função, no segundo membro da equação, pelo valor do limite superior de integração (primeiro teorema fundamental).

τ_{1b}: Aplicar a regra da cadeia para a função composta e aplicar τ_{1a} .

Levando em conta que, no Cálculo, algumas convenções notacionais são adotadas, o autor enfatiza que, se os limites de uma integral definida forem variáveis, deverão ser usados símbolos diferentes para esses limites e para a variável independente no integrando. Assim, como *x* é o limite superior, utiliza-se a letra *t* como a variável independente do integrando. Esse é um dos obstáculos evidenciados na pesquisa de Vianna (1998), que associa, em cada caso, uma variável ostensiva ao seu valor.

Para provar o "segundo teorema Fundamental do Cálculo", ele utiliza o primeiro teorema, concluindo que:

$$[g(b) - g(a)] = \int_a^b f(t)\,dt$$

Com o intuito de encontrar o valor exato de uma integral definida, o autor apresenta uma ilustração em que substitui a notação $[g(b) - g(a)]$ por $g(x)]_a^b$:

> Vamos aplicar o segundo teorema fundamental do Cálculo para determinar $\int_1^3 x^2\,dx$. Aqui $f(x) = x^2$. Uma antiderivada de x^2 é $\frac{1}{3}x^3$. Daí escolhemos $g(x) = \frac{x^3}{3}$. Logo, do Teorema 5.8.2,
>
> $$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^3$$
> $$= 9 - \frac{1}{3}$$
> $$= \frac{26}{3}$$
>
> (LEITHOLD, 1994, p. 348).

O tipo de tarefas T_2 é, então, destacado com o verbo "determinar" com o mesmo sentido do verbo "calcular" que é utilizado nos próximos quatro exemplos. As técnicas empregadas para "determinar o valor da integral definida" consistem nas seguintes subtarefas:

$\tau_{2,1}$: Encontrar uma antiderivada da função integranda.

$\tau_{2,2}$: Substituir a antiderivada e os intervalos de integração na expressão $g(x)]_a^b$.

$\tau_{2,3}$: Aplicar o teorema fundamental do cálculo.

$\tau_{2,4}$: Realizar os cálculos algébricos.

Em particular, a regra da cadeia para antidiferenciação é apresentada pelo autor como mais uma técnica para calcular a integral definida, através da fórmula:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Para aplicá-la, é sugerido mudar as variáveis na integral dada, tomando $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$. Os limites em *x* de integração *a* e *b* também deverão ser mudados pelos limites de integração em *u*, que são $g(a)$ e $g(b)$.

Essa técnica é utilizada em tarefas do tipo T_3 para "calcular integrais de funções compostas", em que o autor apresenta uma ilustração e dois exemplos.

No último exemplo resolvido pelo autor, nesta seção do livro, ele solicita o tipo de tarefas T_4 "achar o valor médio de uma função dada em um intervalo $[a, b]$".

O Teorema do Valor Médio é utilizado para provar o primeiro teorema fundamental do Cálculo. Ele é desenvolvido por Leithold na seção anterior a dos Teoremas Fundamentais do Cálculo, a partir de uma interpretação geométrica que leva à definição do valor médio. Essa definição também é encontrada em outros livros de Cálculo: Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a, b]$, o valor médio de f em $[a, b]$ será

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

A aplicação dessa fórmula e do teorema fundamental do Cálculo são as técnicas empregadas na resolução de tarefas do tipo T_4.

Além disso, é importante considerar as técnicas que utilizam a aplicação de teoremas no cálculo de integrais para distintas funções: polinomial, exponencial, logarítmica e trigonométrica, além das propriedades e das operações entre as funções. No livro de Leithold elas são apresentadas na primeira seção do capítulo 5, que introduz a Antidiferenciação. Como a antidiferenciação é a operação inversa da diferenciação, os teoremas sobre a antidiferenciação são obtidos imediatamente dos teoremas sobre diferenciação, daí são chamadas de integrais imediatas, como mostra alguns exemplos do Quadro 12.

Quadro 12 - Integrais imediatas

c e a são constantes e $a \neq -1$			
01)	$\int (du \pm dv) = \int du \pm \int dv$	02)	$\int b\,dw = b\int dw$
03)	$\int du = u + c$	04)	$\int \frac{du}{u} = \int u^{-1}\,du = \ln\lvert u\rvert + c$
05)	$\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + c, a \neq 1$	06)	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

07)	$\int e^u du = e^u + c$	08)	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$
09)	$\int sen\,u\,du = -\cos u + c$	10)	$\int cos\ u\,du = sen\,u + c$
11)	$\int sec^2 u\ du = -tg\,u + c$	12)	$\int cosec^2 u\ du = -cotg\,x + c$
13)	$\int sec\,u\,tg\,u\,dx = \sec x + c$	14)	$\int cosec\ u \cdot cotg\,u\,du = -cosec\,u + c$

Fonte: A autora (2021).

Vejamos um exemplo fornecido por Leithold (1994, p. 351):

Dada $fx) = sec^2x$. Ache o valor médio de *f* no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Seja V.M. o valor médio de *f* em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Pela definição do valor médio,

$$\text{V.M.} = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi\right)} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} sec^2 x\,dx$$

Aplicação da fórmula do valor médio

$$= \frac{2}{\pi}[tgx]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

Determinação da integral imediata (11)

$$= \frac{2}{\pi}[1 - (-1)]$$

Aplicação do T.F.C.

$$= \frac{4}{\pi}$$

A interpretação gráfica não é explorada nesta seção do capítulo, restringindo-se apenas na introdução do primeiro teorema fundamental, em que o autor discute sobre as integrais definidas com um limite superior variável.

Referindo-se à expressão $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ele comenta:

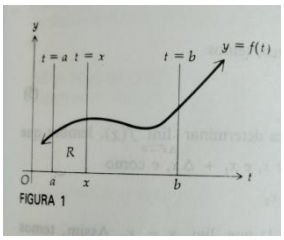


FIGURA 1

> Se, na expressão (1), $f(t) \geq 0$ para todos os valores de *t* em [a, b], então os valores funcionais de *F(x)* poderão ser interpretados geometricamente com a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é *y = f(t)*, pelo eixo *t* e pelas retas *t = a* e *t = x*. (Veja a Figura 1). Note que $F(a) = \int_a^a f(t)dt$, o que pela Definição 5.5.6 é igual a 0. ((LEITHOLD, 1994, p. 345)

A seção posterior a dos teoremas fundamentais vai tratar sobre problemas envolvendo áreas de regiões planas, mas em nenhuma parte o autor desenvolve a praxeologia correspondente, já que não explicita as técnicas de realização. Nesse sentido, os trabalhos de Grande (2013) e Vianna (1998) enfatizam a importância de se explorar a representação gráfica para o entendimento do teorema e que o recurso computacional fornece a possibilidade de se obter o movimento que relaciona os conceitos envolvidos.

Quanto aos exercícios propostos, os tipos de tarefas fazem correspondência com os exercícios resolvidos (exemplos), sendo que alguns possuem grau de complexidade maior, ou seja, sendo necessário que o aluno saiba qual a técnica de integração que deverá aplicar para determinadas funções. Em quatro exercícios, pede-se para achar o valor de *x* onde ocorre o valor médio de *f* e fazer o esboço. Portanto, é esperado que o aluno desenvolva a técnica apropriada e saiba fazer a construção e interpretação gráfica.

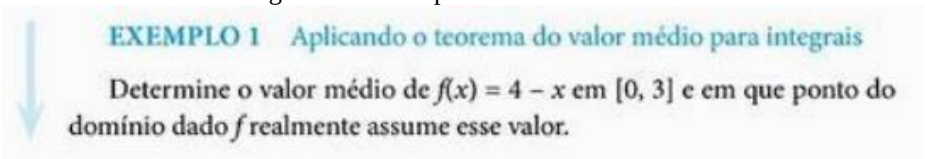
O discurso tecnológico-teórico que legitima o desenvolvimento das técnicas é justificado pelos teoremas e definições apresentados na parte Curso, não se restringindo localmente no que diz respeito aos teoremas fundamentais, mas no âmbito regional, ou seja, de todo o capítulo que trata sobre a Integração.

Vejamos as praxeologias presentes no livro de Thomas e de Stewart para que possamos estabelecer um comparativo.

4.6.2 LD2 – Thomas

Thomas inicia a seção 5.4 do livro destacando a importância do teorema do valor médio (TVM) para as integrais definidas. A partir de uma demonstração gráfica e geométrica, ele prova esse teorema e resolve o primeiro exemplo (Figura 24).

Figura 24 - Exemplo 1 do LD2



EXEMPLO 1 Aplicando o teorema do valor médio para integrais

Determine o valor médio de $f(x) = 4 - x$ em $[0, 3]$ e em que ponto do domínio dado f realmente assume esse valor.

Fonte: Thomas (2009, p. 387).

Além da tarefa do tipo T_4 como já definimos, o exercício também solicita "determinar o valor do domínio em que a função assume o valor médio", que é um subtipo de tarefas de T_4. Vejamos a resolução apresentada pelo autor:

O valor médio é dado por $M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Assim,

$$M(f) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x)\,dx$$

Aplicação da fórmula do valor médio

$$= \frac{1}{3}\left(\int_0^3 4\,dx - \int_0^3 x\,dx\right)$$

Aplicação da integral imediata (01)

$$= \frac{1}{3}\left(4(3-0) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right)$$

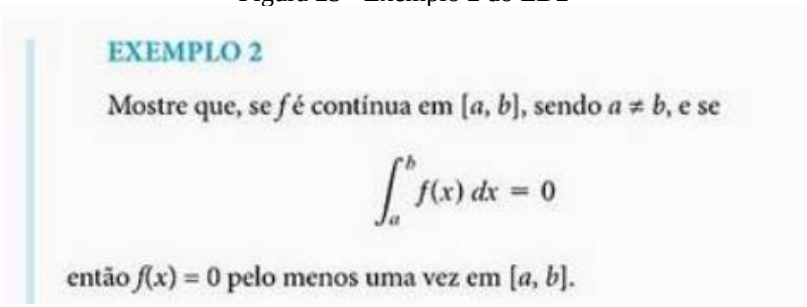
Aplicação do TFC

$$= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Portanto, em "$T_{4,4}$: Aplicação do TFC", temos que determinar o valor de x quando $f(x) = 4 - x = \frac{5}{2}$. Daí, $x = \frac{3}{2}$. Mas Thomas mostra, no próximo exemplo, que nem sempre é tão fácil achar esse valor.

O exemplo 2 consiste em um tipo de tarefas cujo verbo de ação é "mostrar", ou seja, provar. No ensino de Cálculo, é comum nos depararmos com tarefas desse tipo, que consiste em criar um discurso para justificar a técnica evidenciada no enunciado.

Figura 25 - Exemplo 2 do LD2



EXEMPLO 2

Mostre que, se f é contínua em $[a, b]$, sendo $a \neq b$, e se

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

então $f(x) = 0$ pelo menos uma vez em $[a, b]$.

Fonte: Thomas (2009, p. 388).

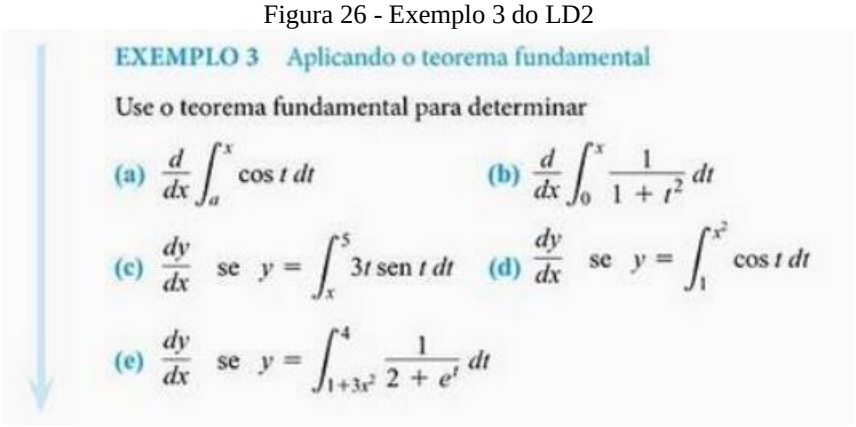
Nessa situação, pretende-se determinar o valor médio de f em $[a, b]$. Logo,

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot 0 = 0$$

Pelo T.V.M., f assume esse valor em algum ponto do domínio.

Thomas discute a primeira parte do teorema fundamental com argumentos algébricos e geométricos e, antes de provar, mostra dois exemplos: o primeiro, com o intuito de aplicar o teorema, e o segundo, para construir uma função com derivada e valor determinados, que analisaremos com o Exemplo da Figura 26.

Figura 26 - Exemplo 3 do LD2



EXEMPLO 3 Aplicando o teorema fundamental

Use o teorema fundamental para determinar

(a) $\frac{d}{dx}\int_a^x \cos t\, dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$

(c) $\frac{dy}{dx}$ se $y = \int_x^5 3t \operatorname{sen} t\, dt$ (d) $\frac{dy}{dx}$ se $y = \int_1^{x^2} \cos t\, dt$

(e) $\frac{dy}{dx}$ se $y = \int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+e^t}\, dt$

Fonte: Thomas (2009, p. 389).

O exemplo 3 refere-se a tarefas do tipo T_1. Nesta parte, Thomas enfatiza a técnica a ser empregada "use o teorema fundamental" e ainda apresenta as expressões de maneiras distintas para levar o estudante a mobilizar a variável *y*, que representa uma função derivável de *x*.

No item *c*, a técnica empregada é τ_{1b} com a aplicação da regra da propriedade que permite a mudança da ordem de integração:

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Portanto, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t\ sen\ t\ dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t\ sen\ t\ dt\right)$$

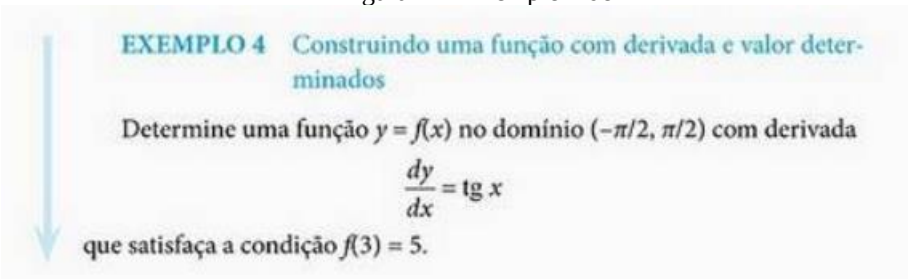
$$= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t\ sen\ t\ dt$$

$$= -3x\ sen\ x$$

Nos itens *d* e *e* são também aplicadas a regra da cadeia.

Vejamos o exemplo 4, como mostra a Figura 27.

Figura 27 - Exemplo 4 do LD2



EXEMPLO 4 Construindo uma função com derivada e valor determinados

Determine uma função $y = f(x)$ no domínio $(-\pi/2, \pi/2)$ com derivada

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x$$

que satisfaça a condição $f(3) = 5$.

Fonte: Thomas (2009, p. 390).

A tarefa é do tipo T_5, "determinar uma função em um dado domínio com a derivada determinada".

Na resolução, o autor mostra que o teorema fundamental facilita a construção de uma função com derivada *tg x* que seja igual a 0 em $x = 3$:

$$y = \int_3^x tg\ t\ dt$$

Como $y(3) = \int_3^3 tg\ t\ dt = 0$, basta adicionar 5 a essa função para construir outra com a derivada *tg x* com valor 5 em $x = 3$:

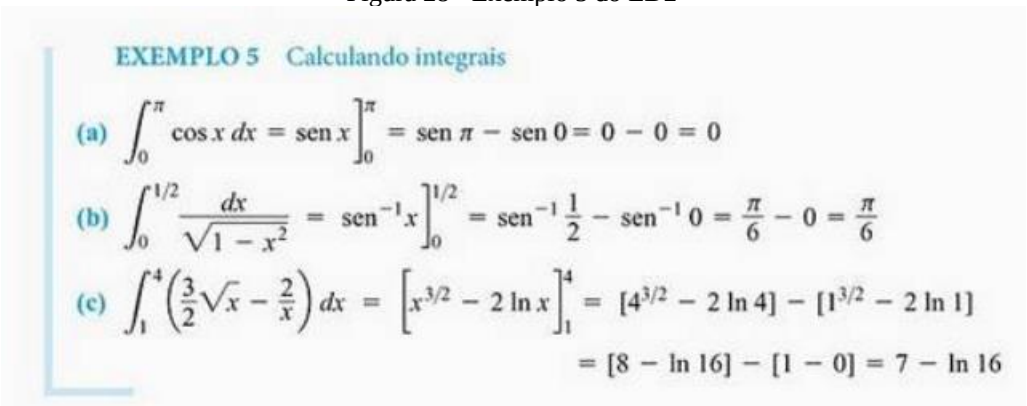
$$f(x) = \int_3^x tg\ t\ dt + 5$$

Em relação à segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, Thomas a descreve encontrando e calculando uma primitiva nos limites de integração superior e inferior, e em seguida faz a prova descrevendo o escopo da técnica para calcular a integral definida de *f* em $[a, b]$:

1. Determinar uma primitiva *F* de *f*.
2. Calcular o número $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Assim como Leithold, Thomas também chama atenção da notação usual para $F(b) - F(a)$, que é $F(x)]_a^b$ ou $[F(x)]_a^b$, dependendo de *F* ter um ou mais termos. O exemplo 5 contém três tarefas do tipo T_2, como apresentado na Figura 28.

Figura 28 - Exemplo 5 do LD2



EXEMPLO 5 Calculando integrais

(a) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0 - 0 = 0$

(b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x\Big]_0^{1/2} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} - \operatorname{sen}^{-1} 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$

(c) $\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right) dx = \left[x^{3/2} - 2\ln x\right]_1^4 = [4^{3/2} - 2\ln 4] - [1^{3/2} - 2\ln 1]$

$= [8 - \ln 16] - [1 - 0] = 7 - \ln 16$

Fonte: Thomas (2009, p. 393).

Nestes termos, o estudante deve ter conhecimento das formas de integrais imediatas. Em geral, elas são apresentadas no final do livro, assim como encontramos nos livros consultados. No exemplo 5 do livro de Thomas são aplicadas as seguintes formas em cada item:

(a) $\int \cos u \ du = sen\, u + c$

(b) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sen^{-1}\frac{u}{a} + c$

(c) $\int \left(\sqrt[m]{u^n} + \frac{1}{u}\right) du = \int u^{\frac{n}{m}} du + \int \frac{1}{u} du = \frac{m}{n} u^{\frac{n}{m}+1} + \ln|u| + c$

O autor, no entanto, não evidencia essa praxeologia para o estudante, podendo causar confusão no entendimento das aplicações das referidas técnicas.

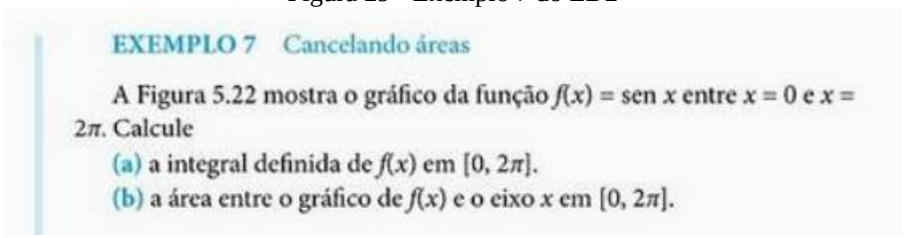
A relação inversa entre a derivação e a integração é explicada a partir das equações que representam os teoremas fundamentais, mas não apresenta nenhuma aplicação "dinâmica", como uma interpretação gráfica de como ocorre.

Ao contrário de Leithold, na mesma seção que apresenta o TFC, Thomas traz três exemplos do cálculo da área de uma região delimitada pela curva de uma função $y = f(x)$ por meio da integral definida, chamando atenção para se ter cautela especial caso a função assuma valores positivos e negativos. Neste caso, a maneira de se obter a área total é explicada sendo necessário adicionar o valor absoluto da integral definida em cada subintervalo onde $f(x)$ não muda de sinal. E o autor apresenta um resumo para facilitar a compreensão:

> Resumo
> Para determinar a área entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $[a, b]$, faça o seguinte.
> 1. Subdivida $[a, b]$ nas raízes de f.
> 2. Integre f em cada subintervalo.
> 3. [Adicionar] os valores absolutos das integrais.
> (THOMAS, 2009, p. 394)

Portanto, para tarefas do tipo T_6, "calcular a área total delimitada entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $[a, b]$", o autor propõe ao menos três subtarefas que compõem a técnica utilizada na resolução da tarefa. Vejamos dois dos exemplos.

Figura 29 - Exemplo 7 do LD2



EXEMPLO 7 Cancelando áreas

A Figura 5.22 mostra o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ entre $x = 0$ e $x = 2\pi$. Calcule

(a) a integral definida de $f(x)$ em $[0, 2\pi]$.

(b) a área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo x em $[0, 2\pi]$.

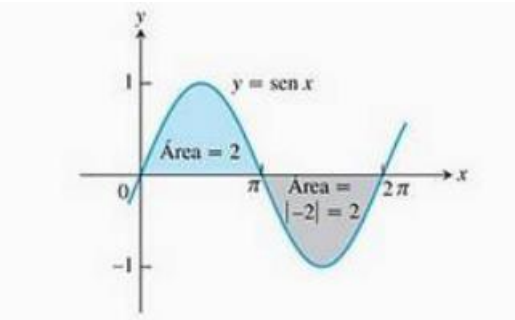


FIGURA 5.22 A área total entre $y = \text{sen } x$ e o eixo x para $0 \leq x \leq 2\pi$ é a soma dos valores absolutos de duas integrais (Exemplo 7).

Fonte: Thomas (2009, p. 394).

Como é apresentado por Thomas, a solução da integral definida para $f(x) = sen\ x$ é dada por

$$\int_0^{2\pi} sen\ x\ dx = -\cos x]_0^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos 0] = -[1 - 1] = 0$$

A integral definida é zero, pois as partes do gráfico acima e abaixo do eixo *x* se cancelam mutuamente.

Já a área entre o gráfico de *f*(*x*) e o eixo de *x* em [0, 2π] é calculada dividindo o domínio de *sen x* em duas partes: o intervalo [0, π], no qual ela é não negativa, e [π, 2π], no qual é não positiva. Em seguida, adicionando os valores absolutos.

$$\int_0^{\pi} sen\ x\ dx = -\cos x]_0^{\pi} - [\cos \pi - \cos 0] = -[-1 - 1] = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} sen\ x\ dx = -\cos x]_{\pi}^{2\pi} - [\cos 2\pi - \cos \pi] = -[1 - (-1)] = -2$$

$$\text{Área} = |2| + |-2| = 4$$

Nos exemplos 6 e 8, é necessário determinar o intervalo de integração a partir das raízes de *f*. Vejamos um deles.

Figura 30 - Exemplo 8 do LD2

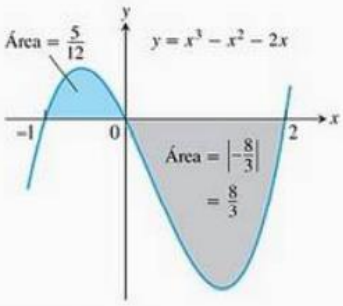


FIGURA 5.23 A região entre a curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ e o eixo x (Exemplo 8).

EXEMPLO 8 Determinando áreas com primitivas

Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, sendo $-1 \le x \le 2$.

SOLUÇÃO Primeiro determine as raízes de f. Como

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2)$$

as raízes são $x = 0, -1$ e 2 (Figura 5.23). As raízes dividem $[-1, 2]$ em dois subintervalos: $[-1, 0]$, em que $f \ge 0$, e $[0, 2]$, em que $f \le 0$. Integramos f ao longo de cada subintervalo e somamos os valores absolutos das integrais calculadas.

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

A área total incluída é obtida somando-se os valores absolutos das integrais calculadas.

$$\text{Área total incluída} = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$

Fonte: Thomas (2009, p. 395).

O primeiro ingrediente da técnica para calcular a área da região, apresentado por Thomas, é o tipo de tarefas "determinar as raízes de f". A técnica desenvolvida nos exemplos não é explicada, mas pode ser justificada pelo "teorema da decomposição de um polinômio", obtido a partir do "teorema fundamental da álgebra" (TFA), segundo o qual todo polinômio $P(x)$ de grau $n \ge 1$ possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não). Sendo f uma função polinomial, o processo é o mesmo.

Assim, considerando um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com grau $n \ge 1$, o TFA garante que existe uma raiz complexa r_1, tal que $P(r_1) = 0$. E pelo teorema de D´Alembert, se $P(r_1) = 0$, então $P(x)$ é divisível por $(x - r_1)$. Sendo $Q_1(x)$ o polinômio de grau $n - 1$ resultante dessa divisão, podemos escrever $P(x)$ na forma $(x - r_1) \cdot Q_1(x)$. Da mesma forma, sendo $Q_1(x)$ um polinômio de grau $n - 1$, se tivermos $n - 1 \ge 1$, o TFA garante que $Q_1(x)$ possui pelo menos uma raiz complexa r_2, ou seja, podemos escrever $Q_1(x)$ como $(x - r_2) \cdot Q_2(x)$. Consequentemente, substituindo $Q_1(x)$ em $P(x)$, temos

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot Q_2(x)$$

Sequencialmente, repetindo esse procedimento para $Q_2(x)$, $Q_3(x)$, ..., $Q_n(x)$, o polinômio pode ser escrito como:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdots \cdot (x - r_n) \cdot Q_n(x)$$

E pela identidade de polinômios, $Q_n(x)$ deve ser igual ao coeficiente dominante a_n de $P(x)$. Logo,

$$P(x) = a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdots \cdot (x - r_n).$$

No entanto, encontrar as raízes para distintos graus de polinômio pode requerer regras diferentes. Por exemplo, caso seja de segundo grau, pode-se utilizar o método de Bháskara ou método da soma e produto de raízes, e para polinômios maiores que dois graus, o método de Ruffini.

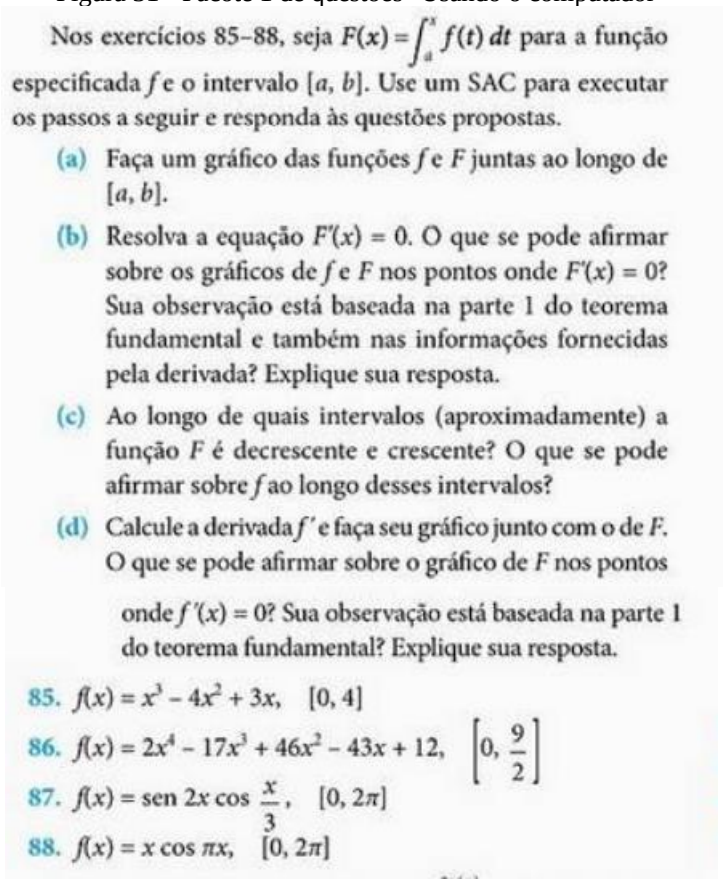
Esse tipo de tarefas é elementar, se considerar que ela é apresentada aos alunos no ensino médio e levando em conta o contrato didático estabelecido na instituição. Por outro lado, pode ser classificada como um tipo de tarefas extrínseca, gerada a partir de um tipo de tarefas mais genérico, por exemplo "determinar as raízes de uma função f ", a um nível regional, em que o estudo de funções faz parte de um dos capítulos do livro de Cálculo.

Dentre os pacotes de exercícios fornecidos, além dos tipos de tarefas apresentados nos exemplos, é solicitado também a tarefa do tipo T_7: "determinar a área da região sombreada no gráfico dado". Neste caso, a área da região é delimitada por duas curvas f_1 e f_2, superior e inferiormente, no intervalo $[a, b]$, e o autor não apresenta a técnica para determinar a área região nesse caso. Portanto, é exigido do aluno "estabelecer a função" que representa a região a ser integrada sem a referência de algum exemplo semelhante.

Outros exercícios são fornecidos como "problemas", "aplicação", "tirando conclusões", "teoria" e "usando o computador". Ele justifica, na introdução do livro, que "essa estrutura permite aos alunos ganhar desenvoltura no uso dos métodos de cálculo, bem como aprofundar seu entendimento sobre suas aplicações e estrutura matemática correspondente". (THOMAS, 2009, p. ix). No entanto, leva a supor que cabe ao professor a incorporação da tecnologia, a aplicações em outras áreas e o desenvolvimento do rigor, da intuição e prova.

Analisaremos agora os tipos de tarefas que o autor sugere na parte "Usando o computador". A Figura 31 apresenta o primeiro pacote de exercícios.

Figura 31 - Pacote 1 de questões "Usando o computador"



Nos exercícios 85–88, seja $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para a função especificada f e o intervalo $[a, b]$. Use um SAC para executar os passos a seguir e responda às questões propostas.

(a) Faça um gráfico das funções f e F juntas ao longo de $[a, b]$.

(b) Resolva a equação $F'(x) = 0$. O que se pode afirmar sobre os gráficos de f e F nos pontos onde $F'(x) = 0$? Sua observação está baseada na parte 1 do teorema fundamental e também nas informações fornecidas pela derivada? Explique sua resposta.

(c) Ao longo de quais intervalos (aproximadamente) a função F é decrescente e crescente? O que se pode afirmar sobre f ao longo desses intervalos?

(d) Calcule a derivada f' e faça seu gráfico junto com o de F. O que se pode afirmar sobre o gráfico de F nos pontos onde $f'(x) = 0$? Sua observação está baseada na parte 1 do teorema fundamental? Explique sua resposta.

85. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad [0, 4]$

86. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \quad \left[0, \frac{9}{2}\right]$

87. $f(x) = \text{sen } 2x \cos \frac{x}{3}, \quad [0, 2\pi]$

88. $f(x) = x \cos \pi x, \quad [0, 2\pi]$

Fonte: Thomas (2009, p. 398-399).

Cada item é um tipo de tarefas que associa uma praxeologia própria, com técnicas que dependem das ferramentas do SAC utilizado. Além disso, envolve a análise pessoal do resultado obtido através dos conhecimentos prévios envolvidos. Por exemplo, desenvolveremos o que pode ser esperado na atividade sugerida, resolvendo o exercício 85. Diremos que a tarefa genérica é do tipo T_8: “Analisar o TFC”.

No item (a), o tipo de tarefas é “fazer o gráfico de uma função *f* e de sua função integral *F* no intervalo [*a, b*]”. Dentre os subtipos de tarefas, estão:

t_1: Digitar a função *f* delimitada em [*a, b*] no campo de entrada;

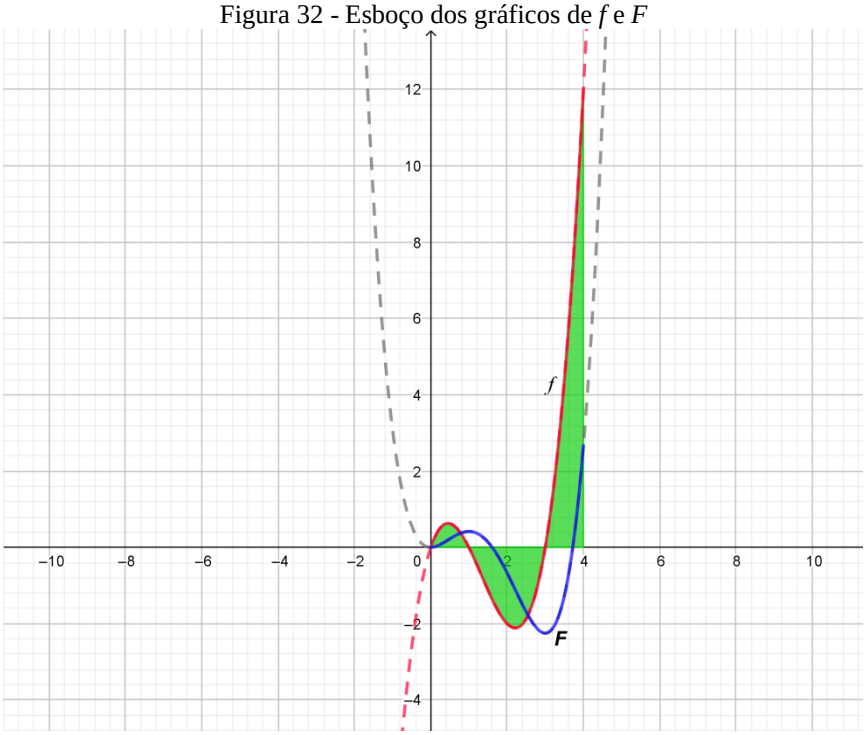
t_2: Plotar o gráfico da função *f*

t_3: Determinar a função integral *F* de *f* no intervalo [*a, b*]

t_4: Plotar o gráfico de *F*

Desse modo, utilizando o software GeoGebra, esboçamos o gráfico das funções *f* e *F* no intervalo [0, 4], como mostra a Figura 32 . A função *F* é representada pela região limitada pela curva de $y = f(x)$ e o eixo *x*.

Figura 32 - Esboço dos gráficos de *f* e *F*



Fonte: A autora (2020).

Agora, analisaremos o item (b) da questão, que contempla três tipos de tarefas: "resolver a equação $F'(x) = 0$", "analisar o gráfico nos pontos em que $F'(x) = 0$" e "justificar a análise realizada com base na derivada e no TFC". Espera-se, nesse caso, que o estudante recorra à parte teórica sobre a primeira parte do teorema fundamental para a referida análise. Assim:

Dados $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, pela primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = x^3 - 4x^2 + 3x$$

E fazendo $F'(x) = 0$:

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x = 0 \;\; e \;\; x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x' = 0; x'' = 1; \; x''' = 3$$

Em relação aos gráficos de *f* e *F* nos pontos onde $F'(x) = 0$, pode-se observar que: $f(x) > 0$, quando $0 < x < 1$ ou $3 < x < 4$, logo *F* é crescente até $x = 1$ ou $x = 4$, nos respectivos intervalos, onde atinge seus valores máximos; e $f(x) < 0$, quando $1 < x < 3$, portanto, *F* decresce.

Isso nos dá a confirmação visual da Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo, dado que $F'(x) = f(x)$.

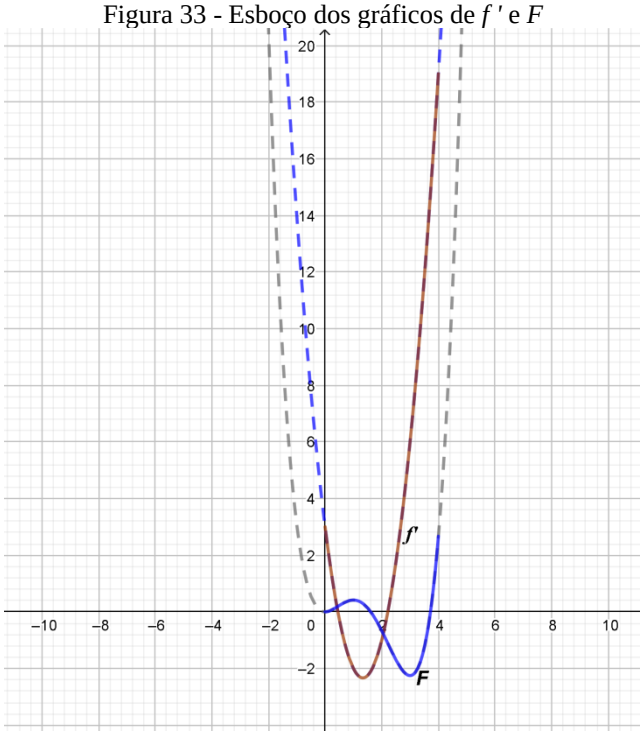
Observando o item (c), destacamos os tipos de tarefas "identificar os intervalos em que F é decrescente e crescente" e "analisar o gráfico de f nos intervalos identificados". Nesse caso, temos que: F decresce no intervalo $1 < x < 3$, onde f é negativa; e F cresce nos intervalos $0 < x < 1$ e $3 < x < 4$, onde f é positiva.

Finalmente, o item (d) solicita "calcular a derivada f ' ", "fazer o gráfico de f ' e de F no mesmo plano cartesiano" e "analisar o gráfico de F nos pontos onde $f'(x) = 0$". Elaboramos a seguinte análise prévia:

Seja $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, temos que: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$.

Os gráficos de F e f', representados na Figura 33, foram produzidos no software GeoGebra.

Figura 33 - Esboço dos gráficos de f ' e F

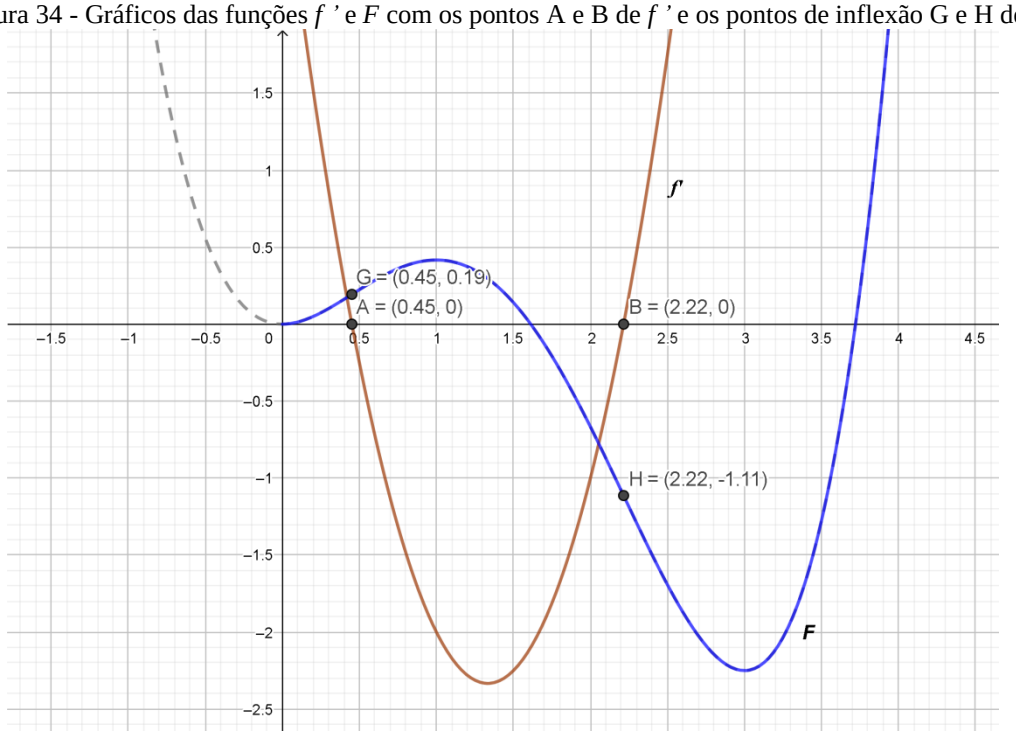


Fonte: A autora (2020).

Dado que $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$, obteremos as abscissas dos pontos em que $f'(x) = 0$. Daí, $3x^2 - 8x + 3 = 0$, de onde se obtém, aproximadamente, $x = 0{,}45$ e $x = 2{,}22$. Nesses pontos, respectivamente, F é crescente e decrescente. Com base na primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$. Podemos, portanto, interpretar que $F''(x) = f'(x)$ e, com isso, $f'(x) = 0$ nos dá os pontos de inflexão na curva de F,

ou seja, os pontos que alteram o sentido da concavidade de *F*. De fato, isso é comprovado no GeoGebra ao se obter os pontos de inflexão de *F*, como observamos na Figura 34.

Figura 34 - Gráficos das funções *f '* e *F* com os pontos A e B de *f '* e os pontos de inflexão G e H de *F*



Fonte: A autora (2020).

Com essa análise, descrevemos a organização praxeológica envolvida na realização da questão proposta por Thomas (Figura 31) no Quadro 13.

Quadro 13 - Descrição da bloco prático-técnico e do bloco tecnológico-teórico de T_8

Bloco prático-técnico	Bloco tecnológico-teórico
Usar um SAC e digitar a função *f* no intervalo [*a, b*].	Função limitada em um intervalo.
Determinar a função *F* no intervalo [*a, b*] e digitar no SAC	Integral definida de uma função.
Calcular *F'*(*x*) = 0	Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo. Obtenção de raízes de uma equação.
Analisar os gráficos de *f* e *F* nos pontos onde *F'*(*x*) = 0 e justificar com base na parte 1 do TFC e na derivada	Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.
Identificar os intervalos em que *F* é decrescente e crescente	Estudo do sinal da função.
Calcular a derivada *f'*	Derivada de uma função.
Esboçar os gráficos de *f'* e *F* no mesmo plano cartesiano	Gráfico de uma função.
Analisar o gráfico de *F* nos pontos onde *f'*(*x*) = 0 com base na parte 1 do TFC	Derivadas de 1ª e 2ª ordens. Pontos de inflexão. Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.

Fonte: A autora (2021).

Em comparação com a abordagem praxeológica apresentada por Leithold (1994), a utilização de um SAC sugerida por Thomas (2009) permite a mobilização de outros objetos ostensivos que permitem ampliar a compreensão acerca do teorema fundamental. Em nossa análise, julgamos que a relação inversa entre a integração e a derivação ainda é pouco explorada, embora propicie a visualização, o levantamento de conjecturas e provas, além de outros recursos fornecidos pelo software.

4.6.3 LD3 – Stewart

No livro de Stewart, o autor explicita, durante toda a seção 5.3, a relação inversa entre a derivada e a integral dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Na introdução, contextualiza historicamente o cálculo de áreas e integrais, assim como fez Leithold e Thomas, e faz a interpretação geométrica da primeira parte do teorema fundamental.

Stewart apresenta o primeiro exemplo com o tipo de tarefas T_6, para determinar a área sob o gráfico de uma função *f* no intervalo de *a* até *x*, onde *x* pode variar de *a* até *b*, como mostra a Figura 35.

Figura 35 - Exemplo 1 do LD3

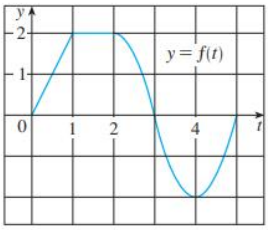


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Se f é a função cujo gráfico é mostrado na Figura 2 e $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encontre os valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ e $g(5)$. A seguir, faça um esboço do gráfico de g.

SOLUÇÃO Primeiro, observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. A partir da Figura 3, sabemos que $g(1)$ é a área de um triângulo:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para achar $g(2)$, somamos $g(1)$ à área de um retângulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estimamos que a área abaixo da curva definida por f no intervalo de 2 a 3 é aproximadamente 1,3, assim

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1{,}3 = 4{,}3$$

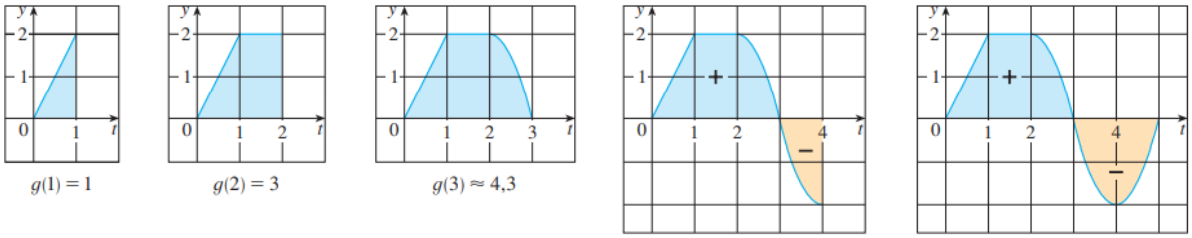


FIGURA 3

Para $t > 3$, $f(t)$ é negativa e, dessa forma, começamos a subtrair as áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4{,}3 + (-1{,}3) = 3{,}0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1{,}3) = 1{,}7$$

Usamos esses valores para fazer o esboço do gráfico de g apresentado na Figura 4. Observe que, pelo fato de $f(t)$ ser positiva para $t < 3$, continuamos adicionando área para $t < 3$ e assim g é crescente até $x = 3$, onde atinge o seu valor máximo. Para $x > 3$, g decresce porque $f(t)$ é negativa.

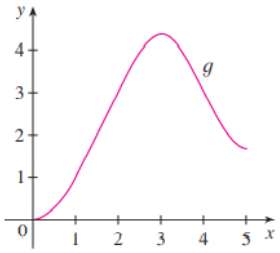


FIGURA 4
$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Se tomarmos $f(t) = t$ e $a = 0$, então, usando o Exercício 27 da Seção 5.2, temos

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Fonte: Stewart (2014, p. 350).

Para a referida tarefa, o autor sugere a seguinte técnica:

$\tau_{6,1}$: Subdividir o intervalo $[a, b]$

$\tau_{6,2}$: Estimar a área de cada região abaixo do gráfico, nos subintervalos

$\tau_{6,3}$: Adicionar as áreas resultantes

$\tau_{6,4}$: Esboçar o gráfico de g, resultante da soma das áreas

Apesar de percebermos uma linguagem mais explicativa no livro de Stewart do que os dois outros livros analisados, em algumas situações ainda apresenta escassez no discurso tecnológico. Por exemplo, na resolução do exemplo 1, ao estimar a área abaixo da curva definida por f no intervalo [2, 3], ele afirma que é aproximadamente 1,3 sem mostrar como chegou a essa estimativa. E replica para os intervalos [3, 4] e [4, 5]. Assim, julgamos que essa técnica pode ser útil em casos de funções simples, mas é falível para casos mais gerais, em que uma alternativa mais viável seria a utilização de recursos computacionais.

Com a prova da primeira parte do teorema fundamental, Stewart mostra a aplicação em três exemplos. No exemplo 3, Stewart traz uma aplicação da fórmula $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ do teorema fundamental na Física, com a função de Fresnel $S(x) = \int_0^x sen\,(\pi t^2/2)dt$ e mostra que, pelo TFC (parte 1), a derivada de S (x) é $S'(x) = sen(\pi x^2/2)$. Além disso, faz uma análise sobre o gráfico dessas funções (Figura 36).

Figura 36 - Interpretação do autor no exemplo 3 do LD3

A Figura 7 mostra os gráficos de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$ e da função de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Um computador foi usado para construir um gráfico de S, calculando o valor dessa integral para vários valores de x. De fato, parece que $S(x)$ é a área sob o gráfico de f de 0 até x [até $x \approx 1{,}4$, quando $S(x)$ torna-se a diferença de áreas]. A Figura 8 mostra uma parte maior do gráfico de S.

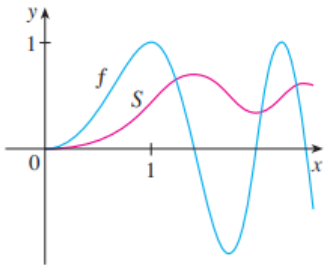


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$

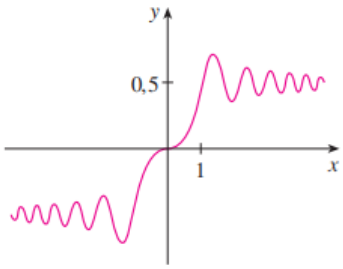


FIGURA 8
A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$

Se começarmos agora com o gráfico de S da Figura 7 e pensarmos sobre como deve ser sua derivada, parece razoável que $S'(x) = f(x)$. [Por exemplo, S é crescente quando $f(x) > 0$ e decrescente quando $f(x) < 0$.] Logo, isso nos dá a confirmação visual da Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.

Fonte: Stewart (2014, p. 353).

Com a demonstração da segunda parte do teorema fundamental, Thomas resolve outros cinco exemplos, como os tipos de tarefas T_2 e T_6. O exemplo 9, em particular, solicita "verificar o erro" (Figura 37).

Figura 37 - Exemplo 9 do LD3

EXEMPLO 9 O que está errado no seguinte cálculo?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUÇÃO Para começarmos, observamos que esse cálculo deve estar errado, pois a resposta é negativa, mas $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ e a Propriedade 6 de integrais afirma que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ quando $f \geqslant 0$. O Teorema Fundamental do Cálculo aplica-se a funções contínuas. Ele não pode ser aplicado aqui, pois $f(x) = 1/x^2$ não é contínua em $[-1, 3]$. De fato, f tem uma descontinuidade infinita em $x = 0$, portanto

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{não existe}$$

Fonte: Stewart (2014, p. 356).

O autor chama a atenção da condição de continuidade da função para garantir a integrabilidade. Geralmente, os exercícios sobre o cálculo de integrais são fornecidos para funções contínuas e, portanto, não há uma preocupação em verificar a continuidade da função. Tarefas desse tipo podem ter o intuito de trazer compreensão para o estudante e colocar à prova a condição para a integração em um intervalo, em que toda função contínua num intervalo fechado é integrável nesse mesmo intervalo, mas nem toas as funções integráveis são contínuas.

Para finalizar a seção referente ao Teorema Fundamental do Cálculo, Stewart apresenta uma subseção, diferentemente dos livros de Leithold e de Thomas, cujo tema é "Diferenciação e Integração como Processos Inversos", para justapor as duas partes do Teorema Fundamental, e explica que essa junção mostra que a derivação e a integração são processos inversos, ou seja, "Cada um desfaz o que o outro fez", como afirma Stewart (2014, p. 356). O primeiro exercício proposto pede que o aluno explique essa relação inversa, buscando a sua compreensão.

Nos exercícios 2 a 4, o tipo de tarefas que está implícito é T_8, semelhante ao que foi fornecido por Thomas, buscando a compreensão do TFC, com a evidência de outros subtipos de tarefas. Considerando a função integral $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ e o gráfico da função *f*, solicita-se algumas tarefas, podendo até ser consideradas elementares, dos tipos:

- Calcular o valor numérico de g(x) para alguns valores de x;
- Determinar os intervalos em que g cresce;
- Determinar o valor em que g possui valor máximo e/ou valor mínimo;
- Fazer um esboço do gráfico de g.
- Esboçar o gráfico de g'(x) e comparar com o gráfico de f.

Esse conjunto de tarefas constituem uma outra técnica para o mesmo tipo de tarefas. O exemplo 1, desenvolvido pelo autor, sugere a maneira como o estudante poderá resolvê-las.

Analisaremos outro exercício proposto no livro de Stewart (Figura 38).

Figura 38 - Exercícios 5 e 6 do LD3

5–6 Esboce a área representada por $g(x)$. A seguir, encontre $g'(x)$ de duas formas: (a) utilizando a Parte 1 do Teorema Fundamental e (b) calculando a integral usando a Parte 2 e, então, derivando.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$ **6.** $g(x) = \int_0^x (2 + \operatorname{sen} t)\,dt$

Fonte: Stewart (2014, p. 357).

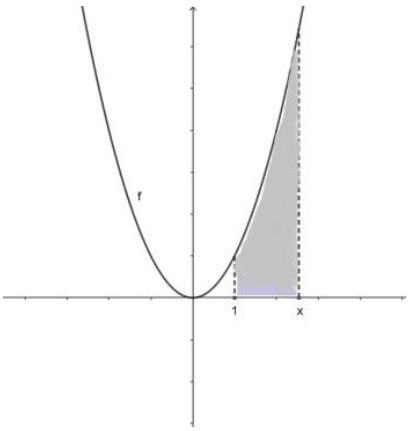
Identificamos dois tipos de tarefas, T_9: Esboçar a área representada por $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$; e T_1 com o "cálculo da derivada da integral de uma função" com duas técnicas sugeridas:

$\tau_{1,1}$: utilizar a parte 1 do T.F.C.

$\tau_{1,2}$: calcular a integral usando a parte 2 do T.F.C. e, em seguida, derivar.

Escolhemos o exercício 5 para desenvolver uma análise prévia e esboçamos o gráfico de $f(t) = t^2$, que é uma parábola que possui a concavidade voltada para cima e o vértice na origem do plano cartesiano. Em seguida, marcamos o intervalo [1, *x*] e destacamos a área sob o gráfico de *f* nesse intervalo, como mostra a Figura 39.

Figura 39 - Área abaixo do gráfico de $f(t) = t^2$ no intervalo [1, *x*]



Fonte: A autora (2020).

Para encontrar *g*'(*x*), fazemos:

Em (a): A primeira parte do TFC afirma que: Se $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, então *g*'(*x*) = *f*(*x*).

Portanto, $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$ e *g*'(*x*) = x^2.

Em (b): A segunda parte do TFC afirma que: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde *F* é qualquer primitiva de *f*, isto é, uma função tal que *F' = f*.

Logo, $g(x) = \int_1^x t^2\,dt = F(x) - F(1)$ e, sabendo que $F(t) = \frac{t^3}{3}$, obtemos:

$g(x) = \int_1^x t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$.

Daí, $g'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{3x^2}{3} - 0 = x^2$.

Dessa maneira, o exercício propõe a compreensão da relação inversa, comprovando, de fato, que cada processo (derivação e integração) desfaz o que o outro fez (STEWART, 2014, p. 356).

No Quadro 14, apresentamos a organização praxeológica desse exercício, que especificaremos como um tipo de tarefas T_{10}: Mostrar a relação inversa entre a derivada e a integral de uma função.

Quadro 14 - Descrição da bloco prático-técnico e do bloco tecnológico-teórico de T_{10}

Bloco prático-técnico	Bloco tecnológico-teórico
Esboçar o gráfico da função $f(t)$ e delimitar a região sob o gráfico de f de 1 até x.	Área de uma região sob o gráfico de uma função.
Calcular $g'(x) = f(x)$	Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.
Calcular $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$, em que F é qualquer primitiva de f; em seguida, determinar $g'(x)$	Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo. Derivada de uma função.

Fonte: A autora (2021).

Outros exercícios são propostos com base nos exemplos que o autor apresenta e complementando com exercícios de prova e de aplicação em outras áreas. Achamos importante destacar que, no âmbito local, alguns tipos de tarefas, de outras organizações regionais, são requeridos. Por exemplo, neste exercício proposto por Stewart:

Figura 40 - Exercício 66 do LD3

SCA **66. A função seno integral**

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

é importante em engenharia elétrica. [O integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ não está definido quando $t = 0$, mas sabemos que seu limite é 1 quando $t \to 0$. Logo, definimos $f(0) = 1$ e isso faz de f uma função contínua em toda parte.]

(a) Trace o gráfico de Si.

(b) Em que valores de x essa função tem valores máximos locais?

(c) Encontre as coordenadas do primeiro ponto de inflexão à direita da origem.

(d) Essa função tem assíntotas horizontais?

(e) Resolva a seguinte equação com precisão de uma casa decimal:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

Fonte: Stewart (2014, p. 358).

Veja que o autor sugere a utilização de um Sistema Algébrico de Computação para a resolução, o que deve permitir a análise da função seno integral e, para isso, alguns tipos de tarefas são propostos. Destacamos que "Determinar os valores de x em que a função assume valores máximos locais", "Encontrar as coordenadas dos pontos de inflexão" e "Identificar as assíntotas horizontais" são tipos de tarefas intrínsecas, ou seja, elas fazem parte do referido exercício para implementar a técnica de certos outros tipos de tarefas de Cálculo, em particular,

de organizações em torno dos temas Limites e Derivadas, e que são relevantes, por exemplo, em tarefas do tipo “fazer o estudo de uma função”.

E para concluir, ressaltamos que esta análise permitiu identificarmos os principais tipos de tarefas ligados ao Teorema Fundamental do Cálculo, algumas delas fazendo parte de técnicas de outros tipos de tarefas, ou ainda, algumas tecnologias fazendo parte da técnica e vice-versa.

4.6.4 Síntese da análise dos livros

Nesta parte, apresentamos os principais resultados das análises dos livros consultados que representam o modelo epistemológico dominante (MED) adotado pelas instituições.

Historicamente, as razões que levaram à construção de praxeologias matemáticas do Teorema Fundamental do Cálculo estão associadas aos problemas de área e de tangente desde a Grécia Antiga. Os autores dos livros que analisamos abordam esses objetos, mas fazem pouca ou nenhuma referência aos problemas históricos que culminaram no desenvolvimento do Cálculo que utilizamos hoje, como forma de apoiar a investigação e a compreensão dos conceitos mencionados.

As demonstrações dos teoremas são consideradas relevantes pelos autores, embora a intuição seja pouco estimulada nos exercícios fornecidos. Assim como Grande (2013) evidenciou em sua pesquisa, a relação entre os componentes intuitivo, algoritmo e formal constituem uma estratégia eficiente na resolução de questões, principalmente quando trabalhadas simultaneamente com as noções de acumulação e variação.

Um outro aspecto importante a destacar é sobre a notação simbólica dada como objetos ostensivos associados aos conceitos matemáticos, os objetos não ostensivos. Em determinados enunciados feitos pelos autores, há uma preocupação em explicar o significado dos símbolos utilizados, sendo este um obstáculo dos estudantes de Cálculo, como revelado na pesquisa de Vianna (1998). Observamos que os livros de Leithold e Thomas não exploram graficamente a relação do teorema fundamental e uma maior significação da sua relação, no entanto, a manipulação dos objetos ostensivos no registro gráfico pode ser associada à manipulação dos ostensivos no registro algébrico, contribuindo assim para a melhor compreensão dos conceitos envolvidos.

Quanto aos tipos de tarefas, categorizamos em 11 tipos e o cálculo de integrais e de derivadas constituem a maior parte nas praxeologias adotadas pelos autores, o que já era esperado pelo fato de que o TFC está diretamente ligado a esses dois tipos de tarefas.

A identificação dos tipos de tarefas nos livros analisados está explícita, com exercícios resolvidos, exercícios de aplicação, de prova e de investigação. Os livros de Thomas e Stewart fornecem, ainda, sugestões de exercícios para serem realizados com a utilização de calculadora gráfica e/ou software matemático. As razões de ser dos tipos de tarefas fornecidos são justificadas no Prefácio de cada livro pelos autores e percebemos que as edições mais recentes receberam atualizações com aplicações em outras áreas, como Física e Engenharia.

Em relação ao detalhamento dos conceitos relacionados ao TFC nos tipos de tarefas e técnicas empregadas, a maior parte evidencia os objetos matemáticos envolvidos, mas em alguns casos encontramos ausência dessa evidência. Por exemplo, em LD2, Thomas (2009, p. 393) calcula as integrais utilizando a segunda parte do teorema fundamental, mas não explicita a aplicação das integrais imediatas.

Outra situação que observamos é que a interpretação gráfica é um requisito relevante para o entendimento do teorema fundamental e em grande parte das tarefas ela é ausente. Em LD1, Leithold (1994, p. 345) explica a expressão da função integral e comenta que a expressão pode ser interpretada geometricamente com a medida da área da região representada abaixo do gráfico, mas não fornece detalhes como ocorre essa associação. Já em LD3, Stewart (2014, p. 350) explica com um passo a passo como a área sob o gráfico pode ser determinada. Por outro lado, no mesmo exemplo, Stewart não evidencia como faz a estimativa da área em alguns subintervalos.

Ainda em relação às técnicas, além do teorema fundamental ser utilizado principalmente para o cálculo de integrais e derivadas, outras técnicas, provenientes de outras organizações matemáticas, são evocadas. Por exemplo, a regra da cadeia e a regra da substituição são técnicas que facilitam o cálculo de integrais de funções compostas. Outros teoremas e propriedades também fazem parte das técnicas desenvolvidas, mas nem sempre explícitas pelos autores dos livros. Em LD2, Thomas (2009, p. 395) utiliza o teorema da decomposição de um polinômio para determinar os zeros de uma função, mas não deixa evidente, apenas apresenta o resultado.

O bloco tecnológico-teórico constitui um *corpus* de conhecimento em torno do ensino do Teorema Fundamental do Cálculo que justifica os tipos de tarefas presentes nas praxeologias dos livros analisados. Algumas falhas são cometidas na ausência de justificativa sobre as técnicas empregadas, como o caso em que os teoremas das integrais imediatas são utilizados, como já destacamos, sem nem sequer mencioná-los. Além disso, a ausência da mobilização do registro gráfico dificulta a articulação de objetos ostensivos para a compreensão da relação inversa do TFC.

Apesar de os livros de Thomas e Stewart apontarem exercícios de investigação, eles nada mais são do que “exercícios de treinamento”, como declara Henriques (2019, p. 135), que visam “mobilizar conhecimentos adquiridos no *Curso* e as técnicas *rotineiras* para resolver tipos de *tarefas* bem selecionadas”, sem utilidade prática.

A partir dessa análise, constatamos que as restrições que incidem sobre o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo apontam que as organizações matemáticas são pontuais e pouco articuladas entre si, suscitando a necessidade de propor um Modelo Praxeológico de Referência (MPR).

Com o levantamento de requisitos, conjecturamos sobre a existência de outras técnicas que podem ser mobilizadas com a intermediação do software, portanto definimos um sistema de variáveis para geradores de tarefas, com base na abordagem T4TEL, que apresentamos na seção seguinte.

4.7 CONSTRUÇÃO DO MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA

Nesta parte, nos concentramos no modelo como a questão central para modelizar o Teorema Fundamental do Cálculo para um micromundo, dadas as suas especificidades para a resolução de problemas. O modelo a que nos propomos construir possui fundamentos desde a etapa de Análises Prévias, com a revisão de literatura, em que se deu o primeiro contato com a organização didática, sem perder de vista a análise do modelo epistemológico dominante. Ou seja, os tipos de atividades matemáticas foram modelados ou remodelados com a ampliação do sistema de variáveis.

Segundo Chaachoua e Bessot (2019, p. 120), a inserção de variáveis permite organizar um conjunto de situações específicas de um conhecimento ou de um saber, além de poder computar essa modelação. Na prática, organizamos uma árvore hierarquizada a partir de um sistema de variáveis e seus valores para um tipo de gerador de tarefas para obtermos tipos mais específicos de tarefas e os escopos das técnicas.

Assim, com o intuito de estudar o Teorema Fundamental do Cálculo como uma relação inversa entre a Derivação e a Integração e considerando que o MED dá pouca relevância a essa relação, estruturamos praxeologias pontuais ligadas a tipos de tarefas do Teorema Fundamental do Cálculo incorporada à mesma organização local. A questão que buscamos examinar é “Como otimizar a ideia conceitual do Teorema Fundamental como relação inversa entre derivada e integral?”.

Essa questão lida com dois conceitos distintos, derivada e integral, e pode ser modelada a partir de tipos de tarefas que devem ser realizadas por meio das duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo:

1ª) Calcular a integral de uma função contínua *f* e depois derivar o resultado;

2ª) Derivar a função primitiva de *f* e depois integrar o resultado no intervalo $[a, b]$

Para isso, buscamos nos apoiar:

- nas ideias de Thompson (1994), que descreve o TFC como um meio de expressar a relação entre a acumulação de uma quantidade e a taxa de variação da acumulação;
- nas pesquisas de referência sobre o tema, que apresentam propostas de tarefas de ensino do TFC buscando explorar os conceitos e a relação inversa do TFC e utilizar recursos visuais, gráficos e gestuais;
- nos requisitos com base nas análises das dimensões cognitiva, didática, epistemológica e informática.

As praxeologias são engendradas por instanciações do sistema de variáveis dos geradores de tarefas:

$$GT_{int} = [Encontrar; integral\ (área\ acumulada);\ SV]$$

$$GT_{der} = [Encontrar; derivada\ (taxa\ de\ variação);\ SV]$$

Destacamos que o cálculo da integral corresponde a "encontrar a área acumulada", assim como o cálculo da derivada" condiz a "encontrar a taxa de variação". E ainda, a realização dos dois tipos de tarefas equivalem à relação inversa do TFC.

Nesse âmbito, a apresentação do nosso modelo se dá, inicialmente, com a identificação das variáveis e dos valores que são relevantes na descrição dos tipos de tarefas GT_{int} e GT_{der} e, a partir daí, avaliamos o alcance das técnicas e descrevemos os principais elementos do bloco do saber.

4.7.1 O Sistema de Variáveis

A partir dos geradores de tarefas que definimos, GT_{int} e GT_{der}, podemos determinar um conjunto de situações suscetíveis que produzirão as noções de integração e derivação, ou respectivamente, acumulação e variação, assim como a relação inversa entre elas.

Assim, levando em conta a natureza genérica dos tipos de tarefas “encontrar a derivada” e “encontrar a integral”, diversos subtipos de tarefas mais específicos são considerados a partir das instanciações das variáveis. No Quadro 15 descrevemos essas variáveis para GT_{int} e GT_{der}.

Quadro 15 - Sistema de Variáveis

***SV*: Sistema de Variáveis**			
V_{ost} **: Ostensivos**	V_{ost_num}: registro numérico		
	V_{ost_alg}: registro algébrico		
	V_{ost_geo}: registro geométrico		
	V_{ost_gr}: registro gráfico		
	V_{ost_fig}: registro figural		
V_f **:** **Função**	V_{f_op}: Operação	$V_{f_op+/-}$: adição ou subtração	
		$V_{f_op_prod}$: produto	
		$V_{f_op_quo}$: quociente	
		$V_{f_op_comp}$: composição	
		$V_{f_op_un}$: união	
	$V_{f_nat_i}$: Natureza da i-ésima função ou sentença	$V_{f_nat_cte_i}$: constante	
		$V_{f_nat_pol_i}$: polinomial	
		$V_{f_nat_exp_i}$: exponencial	
		$V_{f_nat_log_i}$: logarítmica	
		$V_{f_nat_trig_i}$: trigonométrica	
	V_{f_in}: Extremos do intervalo (ou subintervalo) do domínio	$V_{f_in_esq}$: natureza do i-ésimo extremo à esquerda	$V_{f_in_esq_n_i}$: número
		$V_{f_in_dir}$: natureza do i-ésimo extremo à direita	$V_{f_in_dir_n_i}$: número
			$V_{f_in_dir_vs}$: variável simples
			$V_{f_in_dir_vc}$: variável composta
V_{mod} **: Situação da modelação**	V_{mod_us}: Uso de um modelo		
	V_{mod_cons}: Construção de um modelo		
	V_{mod_nat}: Natureza do modelo		$V_{mod_nat_a}$: matemático
			$V_{mod_nat_b}$: extra matemático
****null*** indicará a não instanciação da variável			

Fonte: A autora (2021).

Explicaremos, nos parágrafos seguintes, as escolhas para cada uma dessas variáveis e de seus valores.

1) V_{ost} **: Ostensivos**

No T4TEL, os objetos ostensivos constituem o principal ingrediente das técnicas e funcionam como instrumentos da atividade matemática.

Além disso, levamos em conta que, durante a implementação de uma praxeologia matemática, deve-se também dar importância à articulação entre os registros ativados, pois, segundo Bosch e Chevallard (1999, p. 105), essa noção deve ser comparada à noção de registro

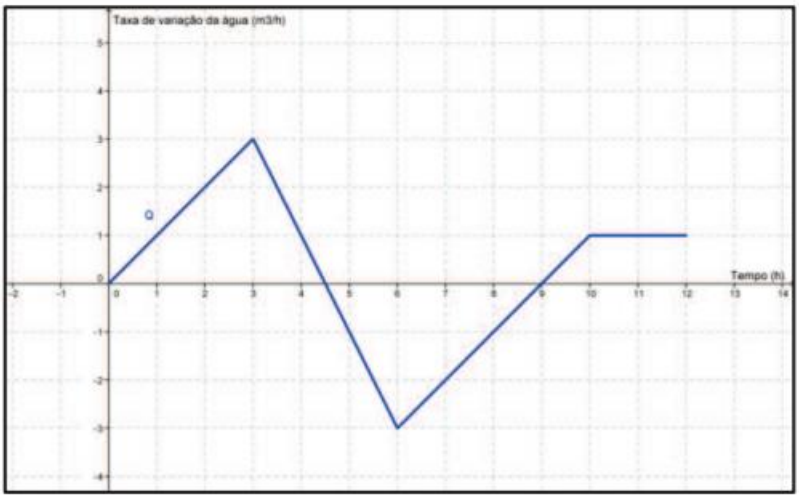
de representação semiótica, proposta por Raymond Duval, como princípio de que a mobilização de uma pluralidade de registros desempenha um papel fundamental na matemática.

Diante disso, em nosso modelo praxeológico, caracterizamos os vários objetos ostensivos pelo registro a que pertencem.

Por exemplo, tomamos a seguinte tarefa, adaptada de Grande (2013, p. 234):

O gráfico a seguir representa a taxa, em m^3/h na qual a quantidade de água variou, num reservatório inicialmente vazio, em função do tempo, em horas, durante um determinado dia do mês:

Figura 41 - Tarefa 2, seção 3, da sequência didática



Fonte: Grande (2013, p. 234).

Sendo *Q* a função que representa a taxa na qual a quantidade de água variou no reservatório em função do tempo *t*, determine:

(a) O volume de água no reservatório nos instantes t = 3, t = 6, t = 9 e t = 12;

(b) A representação gráfica que representa o volume no reservatório em função do tempo.

As tarefas relacionadas aos itens (a) e (b) tem o objetivo comum de "encontrar a integral no intervalo dado", mas não representam o mesmo nível de modelagem, sendo que cada uma requer uma implementação de técnicas que vão distingui-las pela natureza dos objetos ostensivos envolvidos.

Grande (2013, p. 235) explica que, para determinar o volume de água em cada instante, pode-se recorrer a duas técnicas. A primeira é intuir que o volume pode ser determinado por uma acumulação, logo é calculado pela integral da função *Q* nos pontos considerados. A outra opção é obter o volume no reservatório através do produto da taxa de variação da água pelo

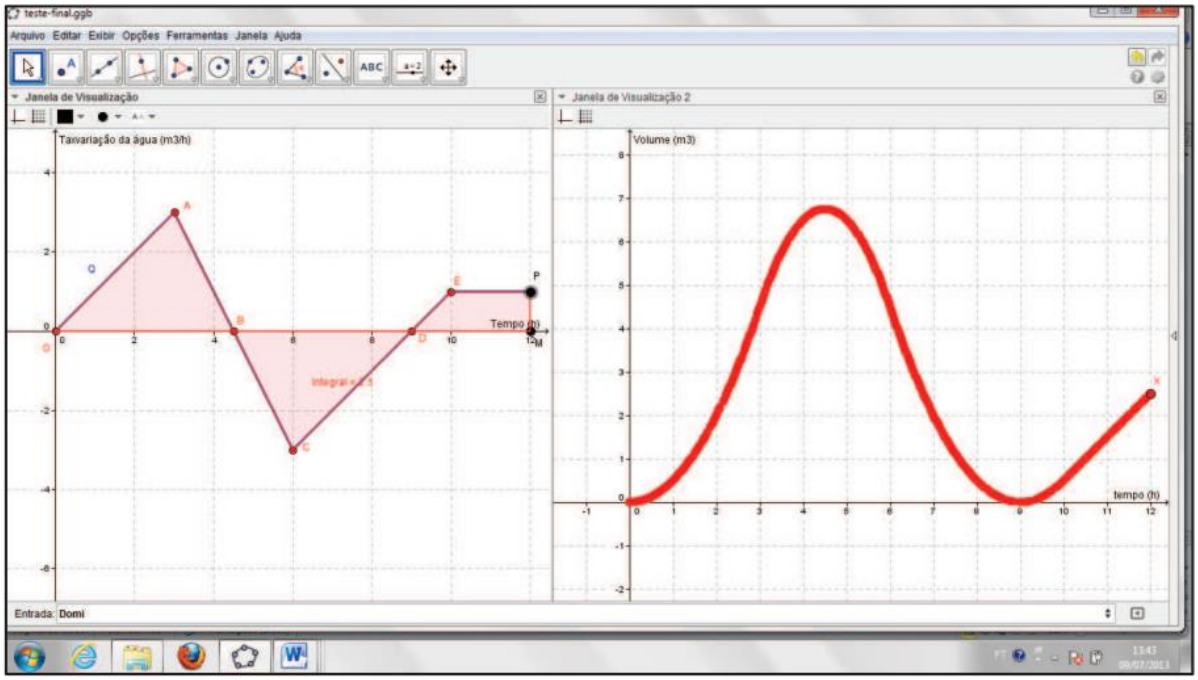
intervalo de tempo dado, o que equivaleria numericamente ao cálculo da área limitada pelo gráfico e o eixo das abscissas no intervalo; nesse caso, ter o cuidado de considerar que, nos intervalos em que a taxa de variação é negativa ($Q(t) < 0$), há uma redução da quantidade de água no reservatório. Tem-se que a tarefa de "determinar a lei de formação da função Q" faz parte também do escopo da técnica para resolver a tarefa (a).

Assim, as técnicas são acessíveis nos registros algébrico e geométrico.

Já as técnicas para resolver (b) serão mobilizadas através da manipulação de objetos acessíveis, considerando o registro gráfico. Por exemplo, Grande (2013) utilizou o software GeoGebra com a representação do gráfico de Q e criou um ponto P sobre ele para fazer a manipulação dinâmica, movimentando-o livremente sobre o gráfico. Para resolver a tarefa (b) ele sugere utilizar o comando "Integral" do software para obter o volume acumulado $V(t) = \int_0^t Q(x)\,dx$, considerando o ponto P de abscissa variável t, em que $t \in [0, 12]$; assim, selecionando a função Q e o intervalo em que se deseja calcular, obtém o valor da integral definida. Movimentando o ponto P sobre o gráfico de Q, dá pra confirmar que o volume de água no reservatório assume os valores encontrados na tarefa (a).

Na Figura 42 evidencia-se o gráfico da função V em uma nova janela de visualização. O ponto X foi criado para descrever o volume de água no reservatório em função do tempo.

Figura 42 - Visualização da Tarefa 2, seção 3, da sequência didática



Fonte: Grande (2013, p. 238).

As técnicas para resolver a tarefa (b) são acessíveis, portanto, no registro gráfico. E os comandos digitais e as funções de entrada do software vão constituir um novo conjunto de objetos ostensivos que são ingredientes das técnicas.

Inicialmente, consideraremos para a variável ostensiva valores associados aos registros, como mostra o Quadro 16.

Quadro 16 - Valores de V_{ost} : Ostensivos

V_{ost} : Ostensivos	V_{ost_num}: registro numérico
	V_{ost_alg}: registro algébrico
	V_{ost_geo}: registro geométrico
	V_{ost_gr}: registro gráfico
	V_{ost_fig}: registro figural

Fonte: A autora (2021).

Ainda em referência ao exemplo que apresentamos, a tarefa relacionada ao item (a) pode ser instanciada com os valores V_{ost_alg} e V_{ost_geo} e a tarefa relacionada ao item (b) com o valor V_{ost_gr}. Veja que podemos também conjugar dois ou mais valores. O valor V_{ost_num} poderia também ter sido adicionado à tarefa (a), considerando que a tarefa de calcular o valor numérico da função faz parte da técnica para resolver (a), recorrendo assim ao registro numérico.

Quanto ao registro figural, não pudemos deixar de considerar os modelos apresentados nesse tipo de ostensivo. Por exemplo, a Tarefa 1 da sequência didática desenvolvida por Grande (2013) mostra o modelo de um sólido composto por um cilindro circular reto apoiado na base de um cone, com bases concêntricas e raios distintos, que foi obtido a partir de uma Impressora 3D, como mostra a Figura 43.

Figura 43 - Modelo do Sólido S obtido em impressora 3D

Fonte: Grande (2013, p. 211).

A tarefa consistia em analisar a variação da área transversal obtida pela intersecção de um plano π paralelo à base com o sólido S, bem como o volume do sólido formado pelo tronco que vai desde o vértice até a área da seção transversal em questão. Para isso, foi utilizado o software GeoGebra para construir o modelo do sólido com altura e seção transversal variáveis, podendo assim manipular alguns elementos de maneira dinâmica. Assim, a exploração das propriedades geométricas do sólido também foi necessária.

Neste caso, as instanciações foram dadas com os valores V_{ost_fig}, V_{ost_geo} e V_{ost_gr}.

A seguir descreveremos outra variável que identificamos para o nosso sistema, que é central na aplicação do teorema fundamental, a Função.

2) V_f**: Função**

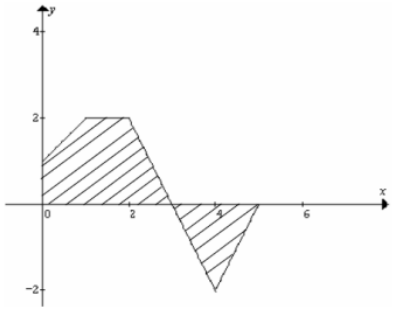
Os problemas relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo envolvem a relação de dependência entre duas grandezas, especificamente uma função, que são estudados por meio de suas representações.

Esta variável V_f, que estabelecemos, assume a representação algébrica da função, basicamente podendo ser de natureza polinomial, exponencial, logarítmica ou trigonométrica. Cada uma possui um domínio próprio, definido implicitamente.

Outras funções podem ser formadas através das operações, como veremos mais adiante. Em outro caso, pode haver uma função definida por mais de uma sentença, cada uma associada a um subdomínio. Neste aspecto, tivemos também que estabelecer a quantidade de funções ou sentenças que o gerador de tarefas irá receber. Por exemplo, no questionário aplicado por Alonso (2017) em sua pesquisa, a terceira questão pede para calcular a área da região hachurada do gráfico de cada função. Um dos itens está na Figura 44.

Figura 44 - Questão 3 do questionário

c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \\ -2x+6, & 2 \le x \le 4 \\ 2x-10, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$



Fonte: Alonso (2017, p. 157).

Para resolver a questão, inicialmente deve-se decompor o domínio em subintervalos, sendo que, para cada um deles, tem uma sentença associada.

Pensando nisso, a variável V_f poderá assumir, inicialmente, os valores definidos no Quadro 17.

Quadro 17 - Algumas instanciações de V_f *: Função*

V_f: Função	$V_{f_nat_i}$: Natureza da i-ésima função ou sentença	$V_{f_nat_cte_i}$: constante
		$V_{f_nat_pol_i}$: polinomial
		$V_{f_nat_exp_i}$: exponencial
		$V_{f_nat_log_i}$: logarítmica
		$V_{f_nat_trig_i}$: trigonométrica

Fonte: A autora (2022).

Feito isso, definimos algumas operações com funções.

Como dissemos, novas funções são formadas a partir das funções dadas, através da adição, subtração, multiplicação e divisão de valores funcionais. Consequentemente, essas novas funções são conhecidas como a soma, a diferença, o produto e o quociente das funções originais. Em cada caso, o domínio da função resultante é composto pelos valores comuns das funções, com exceção no caso em que a operação for divisão em que se deve excluir os valores para os quais a função quociente se anula.

Outra operação com funções consiste em obter a função composta de duas funções dadas. O domínio é formado por todos os números do domínio da segunda função tal que esta função esteja no domínio da primeira função.

Assim, dadas duas funções, uma operação entre elas acarretará na aplicação de técnicas apropriadas específicas. Por exemplo, Leithold (1994, p. 349) mostra no exemplo 5 uma tarefa para calcular a integral $\int_0^2 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$, ou seja, temos uma integral da composição de duas funções f e g tal que a maneira de resolvê-la consiste em aplicar o teorema da regra da cadeia para antidiferenciação.

Para completar, adicionamos a operação de união para o caso de termos uma função formada pela união de várias sentenças associadas a um subdomínio da função original. Assim, seu domínio também será formado pela união desses subconjuntos.

Daí, então, definimos a variável V_{f_op} com os seguintes valores apresentados no Quadro 18.

Quadro 18 - Valores de V_{f_op} : Operação entre funções

V_{f_op} : Operação entre funções	$V_{f_op+/-}$: adição ou subtração
	$V_{f_op_prod}$: produto
	$V_{f_op_quo}$: quociente
	$V_{f_op_comp}$: composição
	$V_{f_op_un}$: união

Fonte: A autora (2021).

No exemplo que apresentamos, a tarefa é instanciada com o valor $V_{f_op_comp}$. Em relação às técnicas possíveis de serem alcançadas, deixaremos para discutir na seção seguinte.

Com as funções já instanciadas, consequentemente o domínio precisa estar definido.

O Teorema Fundamental lida diretamente com funções definidas por uma equação da forma $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, onde f é uma função contínua do intervalo $[a, b]$ e x varia entre a e b. Para esclarecer, o limite inferior da integral é o valor do extremo à esquerda do intervalo e o limite superior da integral é o valor do extremo à direita do intervalo.

A função g depende somente de x, portanto o valor do extremo à esquerda do intervalo poderá ser qualquer número real e, o valor de x, um número fixo ou variável.

Daremos um exemplo:

Em Stewart (2014, p. 353), pede que encontremos, nos exemplos 2 e 4, a derivada das funções em cada caso:

(a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\,dt$

(b) $y = \int_1^{x^4} \sec t\,dt$

A técnica desenvolvida para encontrar a derivada nessas duas tarefas é a mesma, utilizando a 1ª parte do teorema fundamental, que afirma que a derivada de uma integral definida com relação a seu limite superior é seu integrando calculado no limite superior. No entanto, devemos observar um aspecto em particular nos limites superiores, em relação à variável x. No item (a), x é uma variável simples e, no item (b), uma variável composta. Dessa forma, a maneira de realizar (a) é substituir a variável t na função integranda pela variável x, enquanto que em (b) é necessário usar a Regra da Cadeia junto à 1ª parte do TFC.

Considerando esses casos e dado que os extremos do intervalo pertencem ao domínio, definimos os valores dessa variável da seguinte forma:

Quadro 19 - Valores do Intervalo do domínio da função

V_{f_in}: Extremos do intervalo (ou subintervalo) do domínio	$V_{f_in_esq}$: natureza do extremo à esquerda	$V_{f_in_esq_n}$: número
	$V_{f_in_dir}$: natureza do extremo à direita	$V_{f_in_dir_n}$: número
		$V_{f_in_dir_vs}$: variável simples

		$V_{f_in_dir_vc}$: variável composta

Fonte: A autora (2022).

Dado que o intervalo contém extremos à esquerda e à direita, definimos variáveis quanto à natureza e o valor de cada extremo. O extremo à esquerda do intervalo vai receber um valor cuja natureza é um número real. E o extremo à direita, um valor tal que a natureza pode ser um número real, uma variável simples ou uma variável composta. Vale destacar também que, dada uma função com várias sentenças, cada uma delas será instanciada com um intervalo.

Analisaremos a última variável que completa o nosso sistema de variáveis, mas sem deixar de considerar que outras variáveis podem ser incorporadas.

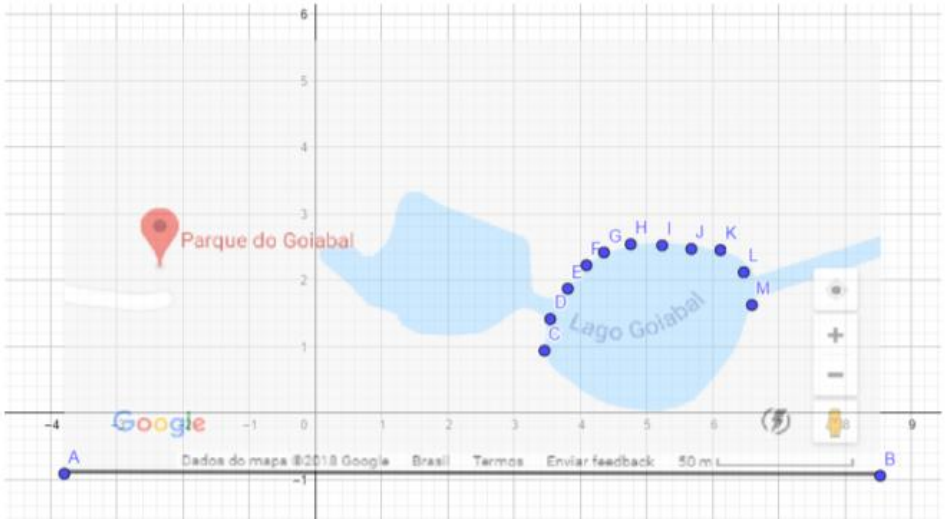
3) V_{mod} **: Situação da modelação**

A razão de ser que motivou a escolha dessa variável provém dos diferentes contextos que identificamos nas atividades que envolviam o teorema fundamental que incluíam a construção ou manipulação de modelos.

Nós apresentamos os exemplos das tarefas que Grande (2013) utilizou em sua pesquisa e agora mostraremos um outro exemplo, adaptado da pesquisa de Nascimento e Pires (2019). A tarefa consiste em calcular a medida das áreas das regiões das superfícies visíveis de dois lagos presentes em um parque municipal situado em Ituiutaba, interior de Minas Gerais, que foi adotado por intermédio das Unidades de Conservação (UC) para preservar o ecossistema natural, proporcionar o lazer e o turismo e realizar pesquisas científicas.

Para realizar essa tarefa foi feita uma modelação usando o TFC, consistindo na captura das imagens via satélite, disponibilizadas pelo Google, e nos cálculos realizados no software GeoGebra. A Figura 45 mostra a etapa inicial da modelagem no software.

Figura 45 - Etapa inicial com a imagem inserida no GeoGebra



Fonte: Nascimento e Pires (2019, p. 5).

Com os comandos do software, foi possível marcar os pontos e ir ajustando a curva, obtendo assim a equação algébrica que representa o modelo matemático para a resolução do problema proposto.

Assim, consideramos que as tarefas poderão surgir a partir de uma situação em que a natureza pode ter um contexto matemático ou extra matemático, bem como incluir a construção e manipulação do modelo. No Quadro 20 apresentamos esses valores.

Quadro 20 - Valores de V_{mod}: Situação da modelação

V_{mod}: Situação da modelação	V_{mod_us}: Uso de um modelo	
	V_{mod_cons}: Construção de um modelo	
	V_{mod_nat}: Natureza do modelo	$V_{mod_nat_a}$: matemático
		$V_{mod_nat_b}$: extra matemático

Fonte: A autora (2021).

As variáveis envolvidas no exemplo que apresentamos tem como instanciações V_{mod_cons} e $V_{mod_nat_b}$.

De posse do sistema de variáveis, descrevemos sobre as técnicas que identificamos nas maneiras de resolver as tarefas dos geradores GT_{int} e GT_{der}.

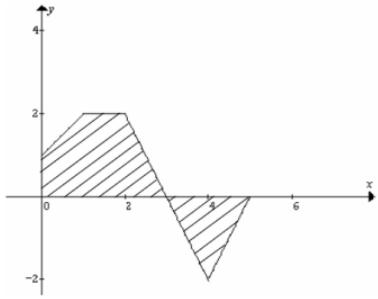
4.7.2 As Técnicas

Nesta parte, nos baseamos no questionamento levantado por Bosch e Chevallard (1999) sobre a composição e a implementação de uma técnica. Sendo assim, de que ela é feita? De quais ingredientes ela consiste? Qual é a sua implementação?

Com os tipos de tarefas geradas por GT_{int} e GT_{der}, iremos caracterizar o escopo das técnicas τ_i, definido pelo conjunto de subtarefas que podem ser realizadas por τ_i. Temos no Quadro 21 as seguintes tarefas:

Quadro 21 - Tarefas de GT_{int} e GT_{der}

t_1	Dado o gráfico que representa a taxa de variação da quantidade de água (Q) em função do tempo (t), determinar o volume de água em cada instante t dado e a sua representação gráfica.
t_2	Dado um sólido composto por um cilindro circular reto (raio da base = 1 e altura = 4) apoiado na base de um cone (raio da base = 2 e altura = 4), com bases concêntricas e raios distintos, (a) analisar a variação da área transversal obtida pela intersecção de um plano paralelo à base com o sólido e (b) determinar o volume do sólido formado pelo tronco (do vértice até a área da seção transversal).
t_3	Determinar a derivada das funções: a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ e b) $y = \int_1^{x^4} \sec t\,dt$
t_4	Calcular a área da região hachurada no gráfico da função

	c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \\ -2x+6, & 2 \le x \le 4 \\ 2x-10, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$ 
t_5	Calcular a integral $\int_0^2 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$
t_6	Calcular a medida das áreas das regiões das superfícies visíveis de dois lagos presentes em um lago municipal situado em Ituiutaba, interior de Minas Gerais.

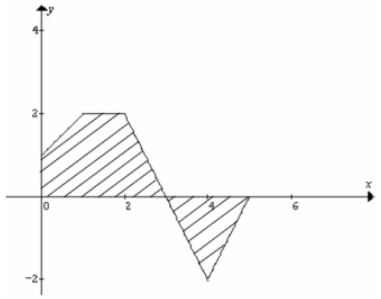
Fonte: A autora (2022).

As tarefas t_1, t_{2b}, t_4, t_5 e t_6 estão associadas ao GT_{int}, enquanto as tarefas t_{2a} e t_3 dizem respeito ao GT_{der}. O que há em comum? É o que analisarem a seguir.

Consideramos, a priori, a organização de tais tarefas, composta pela técnica (τ) com as subtarefas e suas respectivas justificativas (θ-Θ), como apresentado no Quadro 22.

Quadro 22 - Organização praxeológica

t_1	Dado o gráfico que representa a taxa de variação da quantidade de água (Q) em função do tempo (t), determinar o volume de água em cada instante t dado e a sua representação gráfica.	
τ_1	1- Determinar a função Q 2- Calcular a integral da função Q nos intervalos indicados 3- Somar os resultados das integrais nos intervalos indicados 4- Esboçar o gráfico de Q no plano cartesiano	$(\theta\text{-}\Theta)_1$: Sistema linear de f $(\theta\text{-}\Theta)_2$: 2ª parte do TFC $(\theta\text{-}\Theta)_3$: Cálculo do volume total $(\theta\text{-}\Theta)_4$: Esboço de gráfico
t_2	Dado um sólido composto por um cilindro circular reto (raio da base = 1 e altura = 4) apoiado na base de um cone (raio da base = 2 e altura = 4), com bases concêntricas e raios distintos. Seja π um plano paralelo à base do cone e do cilindro circular reto de distância variável real h em relação ao ponto V, com $0 \le h \le 8$, (a) analisar a variação da área transversal obtida pela intersecção de um plano paralelo à base com o sólido, (b) determinar o volume do sólido formado pelo tronco (do vértice até a área da seção transversal) e (c) construir o gráfico da variação da área da seção transversal.	
τ_2	5- Mover com o cursor o ponto O e observar a variação da altura do plano e do raio da seção transversal 6- Determinar a expressão da área transversal em relação à altura do plano 7- Determinar a expressão do volume 8- Esboçar o gráfico da variação da área transversal	$(\theta\text{-}\Theta)_5$: Manipulação de objeto. Verificação de propriedades geométricas $(\theta\text{-}\Theta)_6$: Teorema de Tales. Função com várias sentenças $(\theta\text{-}\Theta)_7$: Volume do cone e do cilindro $(\theta\text{-}\Theta)_8$: Esboço de gráfico
t_3	Determinar a derivada das funções: a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ e b) $y = \int_1^{x^4} \sec t\,dt$	
τ_3	9- Verificar o limite superior de integração. Se for x, substituí-la na variável t da função integranda; caso contrário, trocar por outra variável e aplicar a regra da cadeia para diferenciação	$(\theta\text{-}\Theta)_9$: 1ª parte do TFC. Regra da Cadeia.
t_4	Calcular a área da região hachurada no gráfico da função	

	c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \\ -2x+6, & 2 \le x \le 4 \\ 2x-10, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$ 	
τ_4	10- Dividir a área hachurada no gráfico em sub-regiões 11- Calcular a integral nos intervalos considerados 12- Somar os resultados das integrais	$(\theta\text{-}\Theta)_{11}$: 2ª parte do TFC. $(\theta\text{-}\Theta)_{12}$: Cálculo da área total
t_5	Calcular a integral $\int_0^2 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$	
τ_5	13- Mudar as variáveis na integral dada e os limites de integração 14- Aplicar a 2ª parte do TFC 15- Efetuar os cálculos	$(\theta\text{-}\Theta)_{13}$: Regra da Cadeia para antidiferenciação $(\theta\text{-}\Theta)_{14}$: 2ª parte do TFC
t_6	Calcular a medida das áreas das regiões das superfícies de dois lagos presentes em um lago municipal situado em Ituiutaba, interior de Minas Gerais.	
τ_6	16- Capturar, no Google, a imagem via satélite 17- Adicionar a imagem no software 18- Marcar os pontos em uma parte da margem de um dos lagos 19- Esboçar e ajustar a curva 20- Obter a equação algébrica da curva 21- Determinar a integral no intervalo obtido 22- Calcular a medida das áreas das regiões que não pertencem ao lago 23- Subtrair as regiões que não pertencem ao lago 24- Converter os cálculos e valores obtidos com a escala equivalente à medida real	$(\theta\text{-}\Theta)_{16}$: GPS do Google $(\theta\text{-}\Theta)_{17}$: Software GeoGebra $(\theta\text{-}\Theta)_{18}$: Software GeoGebra. Sistema cartesiano $(\theta\text{-}\Theta)_{19}$: Software GeoGebra. Sistema cartesiano. Curvas $(\theta\text{-}\Theta)_{20}$: Software GeoGebra. Equações e curvas $(\theta\text{-}\Theta)_{21}$: Software GeoGebra. Integral $(\theta\text{-}\Theta)_{22}$: Software GeoGebra. Sistema cartesiano, equações e curvas. Integral $(\theta\text{-}\Theta)_{24}$: Escala cartográfica

Fonte: A autora (2022).

Para a TAD, cada tipo de tarefas T possui (pelo menos) uma técnica (τ), uma tecnologia de τ, θ, e uma teoria de θ, Θ, constituindo uma praxeologia pontual [T, τ, θ, Θ]. De modo similar, em T4TEL define-se uma praxeologia pontual elementar para cada técnica que realiza o mesmo tipo de tarefas T (CHAACHOUA e BESSOT, 2019). Chevallard (1998, p. 93) aponta, nesse sentido, que em determinado nível de escolaridade há uma quantidade limitada de técnicas reconhecidas pela instituição, podendo existir técnicas alternativas em outras instituições.

Assim, podemos observar que "Aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo" é a principal técnica ou justificativa tecnológica associada ao cálculo de integrais e da sua inversa. No entanto, a introdução da noção de gerador de tarefas leva o pesquisador a "calcular caminhos de aprendizagem a partir de um jogo sobre as variáveis e seus valores", como ressalta

Chaachoua e Bessot (2019, p. 239), e assim poder gerar um conjunto estruturado de subtipos de tarefas.

Analisando os dados apresentados no Quadro 25, identificamos os mesmos subtipos de tarefas associados a geradores de tarefas com diferentes instanciações do sistema de variáveis. Por exemplo, nas tarefas t_1 e t_6, "Determinar a expressão algébrica da curva" é um subtipo de tarefas necessário para realizar o cálculo da integral. As variáveis, no entanto, mudam, já que em t_6 foi utilizado a variável V_{mod}, com a construção de um modelo matemático, enquanto que em t_1 não utilizou. Com a escolha dessa variável, poderá ser desenvolvida uma outra maneira de determinar a expressão algébrica da curva, mobilizando novos ostensivos fornecidos, neste caso, pelo software.

A escolha da variável "V_f : Funções" também exigirá a escolha da quantidade de funções e de sua natureza. No caso da tarefa envolver mais de uma função, além da natureza, outra variável deverá ser instanciada, a V_{f_op}, para determinar o tipo de operação que há entre elas. Neste caso, não só o teorema fundamental será aplicado para resolver o problema, mas também técnicas oriundas de outras organizações regionais.

Para ilustrar, denotamos o gerador de tipo de tarefas:

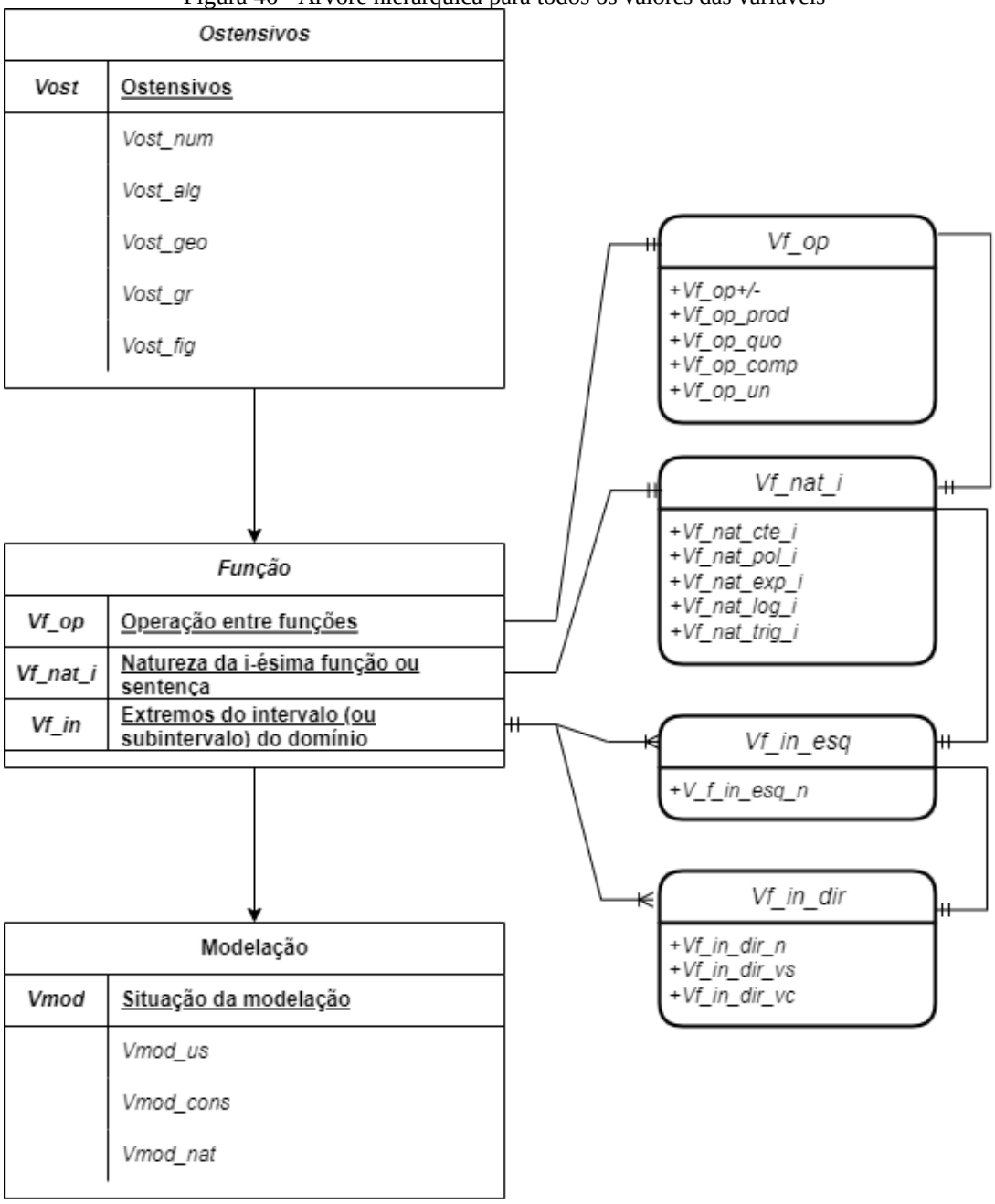
$$GT_{int} = [Encontrar; integral; V_{ost_gr}, V_{f_tp_var}, null]$$

Instanciaremos os valores da variável $V_{f_tp_var}$ para gerar um conjunto estruturado de subtipos de tarefas.

O subtipo de tarefas de GT_{int}, I_1: "Calcular a integral, dada a representação gráfica de uma função de várias sentenças", é mais genérico do que, por exemplo, I_2: [Calcular a integral; V_{ost_gr}, $V_{f_op_un}$, ($V_{f_nat_pol_1} = x + 2$, $V_{f_in_esq_n} = 0$, $V_{f_in_dir_n} = 1$), ($V_{f_nat_cte_2} = 2$, $V_{f_in_esq_n} = 1$, $V_{f_in_dir_n} = 2$), ($V_{f_nat_pol_3} = -2x + 6$, $V_{f_in_esq_n} = 2$, $V_{f_in_dir_n} = 4$), ($V_{f_nat_pol_4} = 2x - 10$, $V_{f_in_esq_n} = 4$, $V_{f_in_dir_n} = 5$), *null*].

De um modo geral, as distintas combinações podem ser simuladas a partir da árvore hierárquica representada na Figura 46, para todos os valores das variáveis. Do mesmo modo acontece com o GT_{der}.

Figura 46 - Árvore hierárquica para todos os valores das variáveis



Fonte: A autora (2022).

Os valores que algumas variáveis podem assumir podem depender dos valores de outras. Por exemplo, I_3: [Calcular a integral; V_{ost_alg}, *null*, ($V_{f_nat_pol_1} = x^2$, $V_{f_in_esq_n} = 0$, $V_{f_in_dir_n} = 4$), *null*]. Neste caso, V_{f_op} = *null* indica que não há operação entre as funções, portanto o gerador receberá apenas 1 (uma) função. Por outro lado, em I_2, $V_{f_op} = V_{f_op_un}$, então a operação instanciada foi união, que ocorre entre sentenças de uma função. Assim, o gerador recebeu 1 (uma) função com quatro sentenças.

Necessariamente, percebe-se que há uma hierarquia na variável Função, de modo que se deve declarar se há ou não operação entre funções ou sentenças de uma função. Esta escolha

vai determinar, em caso afirmativo, a escolha da Operação, seguida das instanciações da natureza das funções/sentenças com seus valores e os valores extremos do(s) intervalo(s); ao contrário, determinará uma única função com suas instanciações.

Ao compararmos t_1 e t_5, ambas exigem o cálculo da integral, em que a função está representada em diferentes registros, gráfico e algébrico, respectivamente. Bosch e Chevallard (1999, p. 92-93) ressaltam que a atividade matemática articula fortemente diferentes registros ostensivos, assim como vemos neste caso, em que na primeira deverá ser feita uma implementação de técnica algébrica para obter a equação da curva.

Em outras situações observamos também a manipulação de outros objetos ostensivos, como ocorre em t_6, com a inserção de ambientes computacionais. De fato, o aprimoramento dos ostensivos depende das condições e restrições ecológicas (matemáticas, culturais e didáticas) fornecidas durante a atividade matemática (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 98-99), portanto, a possibilidade de analisar os softwares que permitem resolver esses tipos de tarefas pode levar à criação de novos objetos ostensivos. Esse aspecto será discutido mais adiante.

Em suma, visando um MPR para a análise de um micromundo focando o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo, utilizamos um sistema de variáveis e buscamos as relações entre diferentes tipos de tarefas pertencentes aos geradores GT_{int} e GT_{der}. Nos concentramos na exploração das técnicas diagnosticadas a fim de produzir a estruturação da análise que queremos realizar.

Levando em conta os estudos abordados até aqui, propomos uma apresentação das justificativas sobre as escolhas das técnicas que foram evocadas.

4.7.3 O Bloco do Saber

Para fundamentar o discurso sobre as maneiras de realizar os tipos de tarefas referentes ao Teorema Fundamental do Cálculo, apresentamos um conjunto de noções, propriedades, teoremas e definições do campo do Cálculo Diferencial e Integral.

Além da revisão de literatura realizada previamente, foram relevantes, em particular, os trabalhos de: Thompson (1994) sobre acumulação de uma quantidade e a sua taxa de variação; Stewart (2014), Thomas (2009) e Leithold (1994) sobre os conceitos que envolvem o TFC; Lima (2009) e Eves (2011) sobre algumas conceituações históricas.

- Função e domínio

Uma função pode ser considerada como uma correspondência de um conjunto X de números reais x a um conjunto Y de números reais y, onde o número y é único para um valor

específico de *x* (LEITHOLD, 1994). Quer dizer que podemos considerar intuitivamente o número real *y* no conjunto *Y* como uma "função" do número real *x* no conjunto *X*, se houver uma lei pela qual um valor específico de *y* seja atribuído a um valor de *x*, representada, geralmente, por uma equação.

Por exemplo, a equação $y = x^2$ define uma função em que *X* é o conjunto de todos os números reais e *Y* é o conjunto de números não negativos. O valor de *y* em *Y*, atribuído ao valor de *x* em *X*, é obtido quando multiplicamos *x* por xi mesmo. Apresentam-se, na Tabela 3, os valores de *y* atribuindo alguns valores específicos a *x*, onde há uma correspondência de cada $x \in X$ com um e único valor $y \in Y$.

Tabela 3 - Valores correspondentes de $y = x^2$

x	$y = x^2$
1	2
3/2	9/4
4	16
0	0
-1	1
-3/2	9/4
-4	16

Fonte: A autora (2022).

O domínio de uma função é descrito pelo conjunto *X* de números reais, e o conjunto *Y* de números reais atribuídos aos valores de *x* em *X* contém a imagem da função.

Leithold apresenta ainda a seguinte definição:

> Uma **função** é um conjunto de pares ordenados de números (*x*, *y*), sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. O conjunto de todos os valores admissíveis de *x* e chamado de **domínio** da função e o conjunto de todos os valores resultantes de *y* é chamado a **imagem** da função. (LEITHOLD, 1994, p. 32)

Ao definirmos uma função, o domínio deve ser dado implícita ou explicitamente. Por exemplo:

Seja $f(x) = 3x^2 – 5x + 2$, logo *x* pode ser qualquer número real.

Mas, caso tenhamos $f(x) = 3x^2 – 5x + 2$, com $1 \leq x \leq 10$. Então, o domínio de *f* será formado por todos os números reais entre 1 e 10, incluindo os extremos.

Da mesma forma, seja $g(x) = \frac{5x-2}{x+4}$. Isto quer dizer que $x \neq -4$, pois o quociente não está definido para $x = -4$, portanto o domínio de *g* é o conjunto de todos os números reais, exceto – 4.

Agora, se $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$, então *x* está no intervalo fechado [– 3, 3], pois $\sqrt{9 - x^2}$ não é um número real para *x* > 3 ou *x* < – 3. Assim, o domínio de *h* é [– 3, 3] e a imagem é [0, 3].

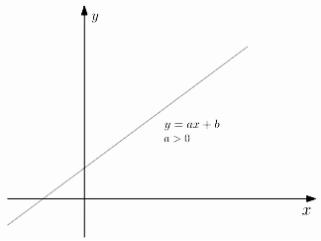
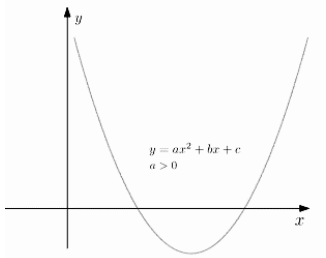
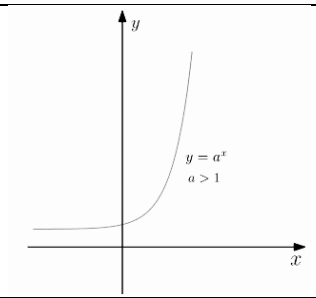
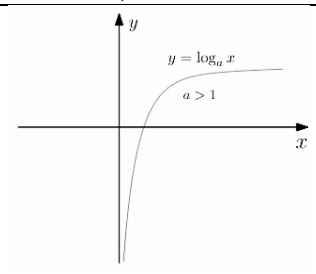
Assim, quando não especificado, o domínio de uma função é o maior subconjunto $X \subset IR$ tal que a função esteja definida, considerando as possíveis restrições.

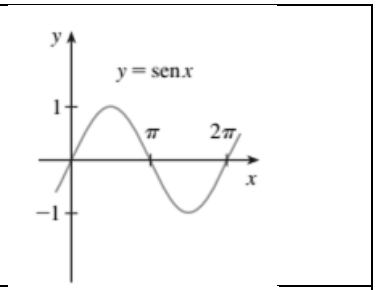
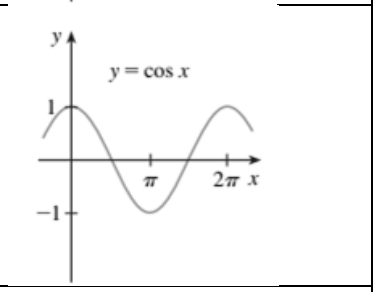
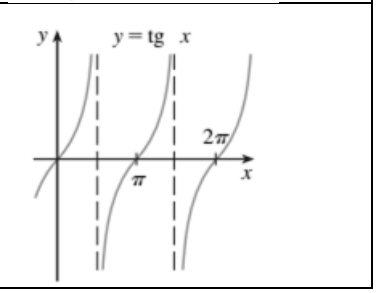
- Sistema linear de *f*. Equação da Curva

Encontrar a lei de formação de uma função *f* é um tipo de tarefas extrínseca que é necessária para resolver tipos de tarefas de integração e derivação em que a lei de formação não está explícita. Isso é possível para funções conhecidas.

O Quadro 23 mostra estas funções básicas.

Quadro 23 - Síntese das representações das funções básicas

Função	Equação	Gráfico	Esboço
Afim (1º grau)	$y = ax + b$, $a \neq 0$	Reta	
Quadrática (2º grau)	$y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	Parábola	
Exponencial	$y = a^x$, a >0 e a ≠1		
Logarítmica	$y = \log_a x$, a>0 e a ≠1 e x > 0		

Seno	$y = sen\ x$	Senoide	
Cosseno	$y = \cos x$	Cossenoide	
Tangente	$y = tg\ x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathrm{Z}$	Tangentoide	

Fonte: A autora (2022).

Encontramos também as funções definidas por partes (funções de várias sentenças). Neste caso, as funções são definidas por fórmulas distintas em diferentes partes de seus domínios.

O método para resolver o sistema linear consiste em:

- Impor as condições do gráfico na expressão da função; e

- Resolver o sistema.

Como vimos nas tarefas $t_{1.1}$ e t_4, o gráfico é formado por retas nos respectivos intervalos. Como a equação do gráfico de uma reta é $f(x) = ax + b$, impomos as condições do gráfico, substituindo o x e o $f(x)$ por pares de pontos que pertencem à reta, o que, possivelmente irá formar um sistema que permitirá determinar os parâmetros e encontrar a lei de formação da função.

Descartes e Fermat conceberam as ideias da geometria analítica moderna (EVES, 2011, p. 382), estabelecendo uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, de maneira que para cada curva do plano está associada uma equação bem definida $f(x, y) = 0$ e para cada uma desta está associada uma curva (ou um conjunto de pontos)

bem definida do plano. Além disso, estabelece-se uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação $f(x, y) = 0$ e as propriedades geométricas da curva associada.

Utilizando uma tarefa de modelação no software, a tarefa t_6 correspondia ao cálculo da medida das áreas das regiões das superfícies visíveis de dois lagos e exigia, dentre outras subtarefas, obter a equação da curva. Neste caso, uma outra maneira foi utilizada com as ferramentas disponíveis em um sistema computacional, como o Google e o GeoGebra.

O Google disponibiliza imagens panorâmicas capturadas via satélite que podem ser copiadas através da ferramenta *print screen* disponível no teclado ou no computador. A imagem é salva na área de transferência do computador e, em seguida, copiada para o software que será utilizado.

O GeoGebra é um software de Matemática gratuito que permite adicionar imagens e, a partir delas, desenvolver equações que representam funções por meio de pontos colocados estrategicamente. Com a ferramenta de ajuste de curva é possível obter a equação que descreve algebricamente a curva que contém os pontos. A equação que representa a curva é obtida simultaneamente na janela algébrica do software. Ela é o modelo matemático que possibilita a resolução do problema de calcular a medida das áreas das regiões das superfícies visíveis dos lagos. Na barra de entrada é possível digitar o comando "Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>) e inserir os respectivos valores, obtendo assim a medida da área da região sob a curva. Os mesmos procedimentos deverão ser realizados para calcular a medida das áreas que não pertencem ao lago. Esta deverá ser descontada para se obter a área total das regiões das superfícies visíveis dos lagos.

A medida da área encontrada deve ser convertida para uma medida real. Assim, para fazer a conversão das escalas, calcula-se proporcionalmente a medida no GeoGebra e a medida real e, em seguida, calcula-se a área real dos lagos, que é igual ao produto da área encontrada no software e o quadrado da medida da imagem real.

- 1ª e 2ª partes do TFC

Em vista dos aspectos históricos, enquanto as técnicas infinitesimais eram baseadas na determinação de uma área como um limite de uma soma, Newton introduzia a técnica de determinar a taxa de variação da área desejada (em relação a x), e então calcular a área por antidiferenciação, evidenciando pela primeira vez a relação inversa entre problemas de tangentes e de áreas.

Assim, a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que, se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é contínua em $[a, b]$ e

derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$. Podemos interpretar que a derivada de uma integral definida com relação a seu limite superior é seu integrando calculado no limite superior. Caso o limite superior seja uma variável diferente de x, utiliza-se a Regra da Cadeia.

Agora, para calcular a integral de uma função em determinados intervalos, toma-se como base a segunda parte do TFC, que diz ser necessário:

- Determinar uma primitiva F de f ; e

- Calcular $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Por definição, $a < b$. Mas, caso se tenha $b < a$, temos que $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. E ainda, se $a = b$, então $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

A depender da função f, diferentes técnicas de integração poderão ser aplicadas. Além das operações usuais entre funções, é preciso considerar as propriedades da Integral Definida.

- Propriedades da Integral

Stewart (2014, p. 343) aborda as seguintes propriedades da integral:

Figura 47 - Propriedades da Integral

Propriedades da Integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, onde c é qualquer constante
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, onde c é qualquer constante
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Fonte: Stewart (2014, p. 343).

Pela 1ª propriedade, a integral de uma função constante, $f(x) = c$, é o produto entre a constante e o comprimento do intervalo. Espera-se que $c > 0$ e $a < b$, pois $c(b – a)$ é a área do retângulo sombreado (Figura 48).

Figura 48 - Representação da área do retângulo

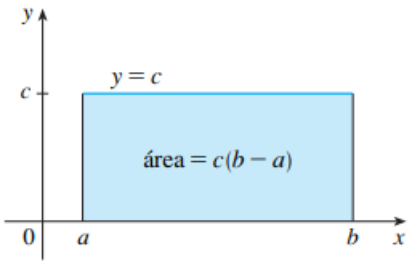


FIGURA 13

$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

Fonte: Stewart (2014, p. 343).

Pela 2ª propriedade, a integral de uma soma é a soma das integrais. Sendo as funções positivas, a área sob $f + g$ é a área sob f adicionada à área sob g.

Pela 3ª propriedade, o produto da integral de uma constante e uma função é igual ao produto entre a constante e a integral da função.

A 4ª propriedade é demonstrada escrevendo $f - g = f + (-g)$ e usando a 2ª e a 3ª propriedades com $c = -1$.

A 5ª propriedade também é apresentada (Figura 49), sobre como combinar integrais da mesma função em intervalos adjacentes.

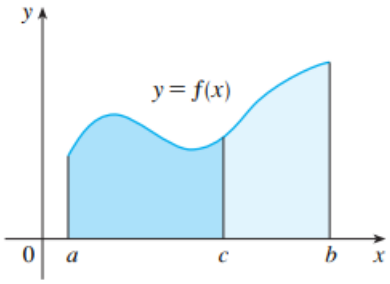
Figura 49 - Propriedade 5 da Integral

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Fonte: Stewart (2014, p. 345).

Neste caso, tendo $f(x) \geq 0$ e $a < c < b$, a interpretação geométrica pode ser vista através da Figura 50, em que a área sob $y = f(x)$ de a até c adicionada à área de c até b é igual à área total de a até b.

Figura 50 - Área total sob f de a até b



Fonte: Stewart (2014, p. 345).

As propriedades 1 a 5 são válidas para $a < b$, $a = b$ ou $a > b$. As seguintes propriedades são verdadeiras somente se $a \leq b$.

Figura 51 - Outras propriedades da integral

Propriedades Comparativas da Integral

6. Se $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Se $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

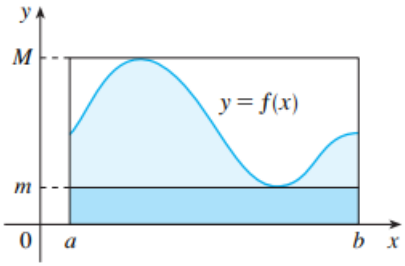
Fonte: Stewart (2014, p. 345).

A 6ª propriedade diz que, se $f(x) \geq 0$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área sob o gráfico de f e a intepretação geométrica é que as áreas são positivas.

Já a 7ª propriedade, diz que uma função maior tem uma integral maior.

Pela 8ª propriedade, se f for contínua, poderemos tomar m e M como o máximo e o mínimo absolutos de f no intervalo $[a, b]$, como mostra a Figura 52.

Figura 52 - Representação gráfica do máximo e do mínimo absolutos de f



Fonte: Stewart (2014, p. 345).

Neste caso, a área sob o gráfico de f é maior que a área do retângulo com altura m e menor que a área do retângulo com altura M.

Estas regras estão resumidas no Quadro 24. Utilizamos a mesma denominação dada por Thomas (2009, p. 378).

Quadro 24 - Resumo das Propriedades satisfeitas pelas integrais definidas

Ordem de integração	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
Intervalo de largura zero	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
Multiplicação por constante	$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
Adição e subtração	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
Aditividade	$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
Desigualdade max-min	Se f tem o valor máximo max f e o valor mínimo min f em $[a, b]$, então $\min f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f \cdot (b-a)$
Dominação	$f(x) \geq g(x)$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ $f(x) \geq 0$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Fonte: A autora (2022).

Outras técnicas de integração são apresentadas, a nível regional, em outros capítulos. No entanto, elas são necessárias quando a atividade matemática envolve distintas funções e aplicações variadas.

- Regra da Cadeia para antidiferenciação

Algumas integrais podem ser resolvidas com a aplicação do método da substituição de variável, em decorrência da regra da cadeia para antiderivação (ou antidiferenciação). Faremos uma demonstração.

Pela regra da cadeia, temos que

(1) $\left[F\left(g(x)\right)\right]' = F'[g(x)] \cdot g'(x)$

Pela definição de integral,

$$\int f(t)\,dt = F(t) + c \iff F'(t) = f(t)$$

Substituindo $t = g(x)$, fica $F'[g(x)] = f[g(x)]$

Substituindo em (1): $\left[F\left(g(x)\right)\right]' = f[g(x)] \cdot g'(x)$

Integrando a equação:

$$\int \left[F\left(g(x)\right)\right]' dx = \int f[g(x)] \cdot g'(x)dx$$

$$F[g(x)] = \int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$$

Fazendo $g(x) = u$, então $du = g'(x)dx$. Substituindo:

$$\int f(u)\,du = F(u) + c$$

Na aplicação dessa técnica, deve-se analisar qual a função em que fará a substituição, para que a integral obtida seja mais simples.

- Integrais Imediatas

A integração de algumas funções elementares, chamadas de integrais imediatas, também fazem parte do conjunto de técnicas para resolver o cálculo de integrais. Já apresentamos as regras no Quadro 12, agora descreveremos cada uma.

A integral (1) $\int(du \pm dv) = \int du \pm \int dv$ é decorrente da propriedade da adição e subtração.

Em (2) $\int b\,dw = b\int dw$, a integral de uma constante equivale à constante multiplicada pela integral.

Em (3) $\int du = u + c$, tem-se que a integral da unidade é igual à *u* adicionado a uma constante *c*.

A integral (4) $\int \frac{du}{u} = \int u^{-1}du = \ln|u| + c$ compreende a integral da inversa de *u*, que é igual ao logaritmo neperiano de *u* mais a constante *c*.

A integral (5) $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$ estabelece a integral da potência. É possível demonstrar que $\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$.

Em (6) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se que a integral da exponencial é o produto da exponencial pelo inverso do logaritmo neperiano de *a* mais a constante *c*.

Em (7) $\int e^u du = e^u + c$, tem-se a integral da exponencial de base *e*, igual à própria exponencial mais a constante *c*.

Em (8) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, temos o método da integração por partes, dado que, parte se integra e parte se deriva. Neste caso, primeiro é preciso definir quem é *u* e quem é *dv* na função. Para visualizar melhor antes de aplicar a fórmula, metodologicamente torna-se necessário que se derive *u*, obtendo *du*. Em seguida, integrar *dv*, obtendo *v*. Daí, é só substituir na fórmula, onde *u* e *v* são as funções primitivas e *du* e *dv* são as funções derivadas.

De (9) a (14), dizem respeito às integrais de funções trigonométricas, sendo consequências dos teoremas para as derivadas dessas funções. As demonstrações também são imediatas, obtidas com o cálculo da derivada do segundo membro das fórmulas.

Com estes métodos, ampliamos o quadro das propriedades com outros métodos de integração.

Quadro 25 - Métodos de integração

Ordem de integração	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
Intervalo de largura zero	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
Multiplicação por constante	$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
Adição e subtração	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
Aditividade	$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
Desigualdade max-min	Se f tem o valor máximo max f e o valor mínimo min f em $[a, b]$, então $\min f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f \cdot (b-a)$
Dominação	$f(x) \geq g(x)$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ $f(x) \geq 0$ em $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
Regra da cadeia ou método da substituição para antidiferenciação	$\int [F(g(x))]'\,dx = \int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$
Regra da constante	$\int b\,dw = b\int dw$
Regra da unidade	$\int du = u + c$
Regra do ln	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$
Regra da potência	$\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$
Regra do exponencial	$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$
Regra do exponencial de base e	$\int e^u\,du = e^u + c$
Integração por partes	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$
Integral do seno	$\int sen\,u\,du = -\cos u + c$
Integral do cosseno	$\int sen\,u\,du = -\cos u + c$
Integral da secante	$\int sec^2 u\;du = -tg\,u + c$
Integral da cossecante	$\int cosec^2 u\;du = -cotg\,x + c$
Integral do produto entre secante e tangente	$\int sec\,u\,tg\,u\,dx = \sec x + c$
Integral do produto da cossecante e cotangente	$\int cosec\;u \cdot cotg\,u\,du = -cosec\,u + c$

Fonte: A autora (2022).

- Esboço de gráfico

Em muitas situações, a correspondência entre os elementos do domínio e do contradomínio não tem uma regra explícita, a não ser através de uma tabela de valores que, a partir de técnicas apropriadas, pode-se encontrar uma expressão para uma função que aproxime esses valores. A representação gráfica é uma maneira útil de visualizar a função e estudar o seu comportamento.

Leithold (1994, p. 27-29) define o gráfico de uma equação em R^2 como o conjunto de todos os pontos (x, y) cujas coordenadas são números que satisfazem a equação. O referido gráfico é também chamado de curva.

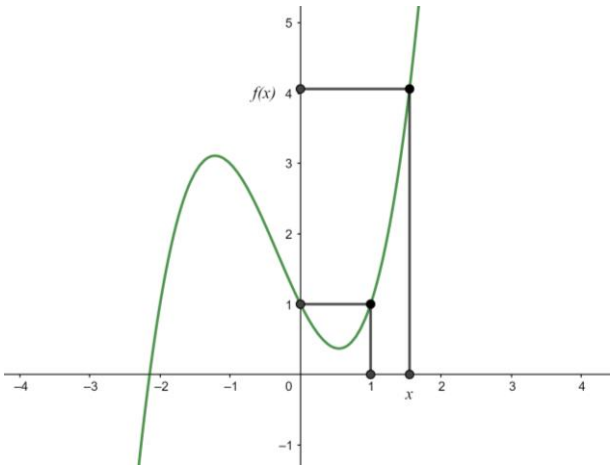
Segue a definição de gráfico de uma função:

Seja f: $A \rightarrow B$ uma função. O gráfico de f, denotado por G_f, é o seguinte subconjunto do produto cartesiano $A \times B$:

$$G_f = \{(x, f(x)) \in A \times B | x \in A\}$$

O comportamento da função pode ser analisado através do gráfico da função. Por exemplo, dado que $y = f(x)$, podemos interpretar o valor de $f(x)$ como sendo a "altura" do ponto no gráfico acima de x. Assim, cada ponto elemento x do domínio é associado a um elemento do contradomínio $f(x)$.

Figura 53 - Representação do gráfico de uma função

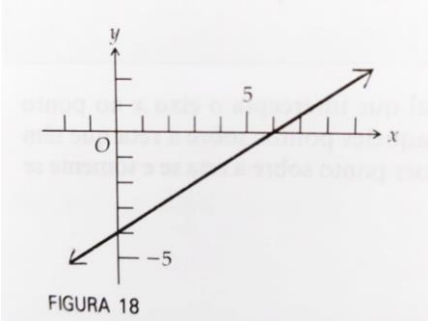


Fonte: A autora (2022).

O gráfico da equação $Ax + By + C = 0$, onde A, B e C são constantes e onde A e B não são ambos nulos, é uma linha reta. Uma vez que dois pontos determinam uma reta, para fazer o esboço do gráfico de uma reta precisamos apenas determinar as coordenadas de dois pontos

dela, marcar os pontos no gráfico e então traçá-la. Qualquer par de pontos é suficiente, mas em geral convém marcar no gráfico os dois pontos onde a reta intercepta os dois eixos.

Figura 54 - Gráfico da equação linear



Fonte: (LEITHOLD, 1994, p. 19).

O gráfico da equação $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$, é uma parábola. A solução dessa equação é um par ordenado de números reais, um para x e o outro para y, que satisfaça a equação. Uma tabela poderá ser preenchida com as soluções. Se marcarmos os pontos que têm como coordenadas os pares de números (x, y) e o número de pontos for suficientemente grande, ligando-os por uma curva suave, obteremos um esboço do gráfico da equação.

O gráfico de uma função f é um retrato útil de seu comportamento. Se (x, y) é um ponto no gráfico, então $y = f(x)$ é a altura do gráfico acima do ponto x. A altura pode ser positiva ou negativa, dependendo do sinal de $f(x)$ (Figura 1.4).

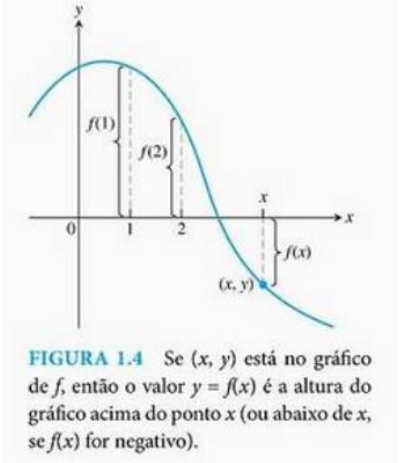


FIGURA 1.4 Se (x, y) está no gráfico de f, então o valor $y = f(x)$ é a altura do gráfico acima do ponto x (ou abaixo de x, se $f(x)$ for negativo).

(THOMAS, 2009, p. 4)

O capítulo 4 do livro de Leithold traz uma seção sobre o esboço do gráfico de uma função, onde sugere a aplicação de algumas propriedades provenientes do estudo de Limites e Derivadas. Organizamos no Quadro 26 a praxeologia correspondente.

Quadro 26 - Esboço do gráfico de função: organização praxeológica (LD1)

BLOCO PRÁTICO	BLOCO DO SABER
1. Determinar o domínio de *f*	Domínio de uma função
2. Achar os interceptos *y* do gráfico. Localizar os interceptos *x* do gráfico, se a equação resultante for fácil de resolver	Pontos de intersecção com os eixos coordenados
3. Testar a simetria em relação ao eixo *y* e a origem	Eixos de simetria
4. Calcular *f* '(*x*) e *f* "(*x*)	Derivadas de primeira e segunda ordens
5. Determinar os números críticos de *f*. Esses são os valores de *x* no domínio de *f* para os quais ou *f* '(*x*) não existe ou *f* '(*x*) = 0	Ponto crítico
6. Aplicar o teste da derivada primeira ou o teste da derivada segunda para determinar se nos números críticos existe um valor máximo relativo, um valor mínimo relativo, ou nenhum dos dois	Teste das derivadas de primeira e segunda ordens para extremos relativos
7. Determinar os intervalos nos quais *f* é crescente, encontrando os valores de *x* para os quais *f* '(*x*) é positiva; determinar os intervalos nos quais *f* é decrescente, encontrando os valores de *x* para os quais *f* '(*x*) é negativa. Ao localizar os intervalos nos quais *f* é monótona, verificar os pontos críticos onde *f* não tem um extremo relativo	Estudo do sinal da função Teste das derivadas de primeira e segunda ordens para extremos relativos Ponto crítico
8. Para obter os pontos de inflexão possíveis, achar os números críticos de *f* ', isto é, os valores de *x* para os quais *f* "(*x*) não existe ou *f* "(*x*) = 0. Em cada um desses valores de x, verificar se *f* "(*x*) muda de sinal e se o gráfico tem uma reta tangente nele, a fim de determinar se realmente existe um ponto de inflexão	Ponto de inflexão
9. Verificar a concavidade do gráfico. Achar os valores de *x* para os quais *f* "(*x*) é positiva e negativa, a fim de obter os pontos nos quais a concavidade é para cima e para baixo, respectivamente	Ponto de inflexão
10. Determinar a inclinação da reta tangente nos pontos de inflexão	Inclinação da reta tangente
11. Verificar a existência de possíveis assíntotas horizontais, verticais ou oblíquas	Assíntotas

Fonte: A autora (2022).

Algumas aplicações das derivadas são úteis para determinar e analisar o formato de gráficos de funções.

A derivada de uma função f é definida pela equação $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, interpretada geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto (*x*, *f*(*x*)). O domínio de *f'* é o conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ e pode ser menor que o domínio de *f*. Outras notações são utilizadas, tais como:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Os símbolos *D* e *d/dx* são chamados operadores diferenciais, pois indicam a operação de diferenciação, que é o processo de cálculo de uma derivada.

Por definição, uma função *f* é derivável ou diferenciável em a, se *f'*(*a*) existir. É derivável ou diferenciável em um intervalo aberto (*a*, *b*) ou (*a*, ∞] ou [-∞, *a*) ou (-∞, ∞) se for diferenciável em cada número do intervalo. E ainda, pelo teorema, se *f* for diferenciável em *a*, então *f* é contínua em *a* (a recíproca é falsa).

Se *f* for uma função diferenciável, então sua derivada *f'* também é uma função, de modo que *f'* pode ter sua própria derivada, denotada por (*f'*)' = *f''*. Esta nova função *f''* é chamada segunda derivada ou derivada de ordem dois de *f*. Usando a notação de Leibnitz, escrevemos a segunda derivada de $y = f(x)$ como $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Podemos interpretar *f''*(*x*) como a inclinação da curva $y = f'(x)$ no ponto $(x, f'(x))$, sendo a taxa de variação da inclinação da curva original $y = f(x)$. Em geral, podemos interpretar uma segunda derivada como uma taxa de variação de uma taxa de variação. O processo de encontrar derivadas de outras ordens é igual ao processo de derivar sucessivamente a derivada da função original *n* vezes, sendo *n* a ordem da derivada.]

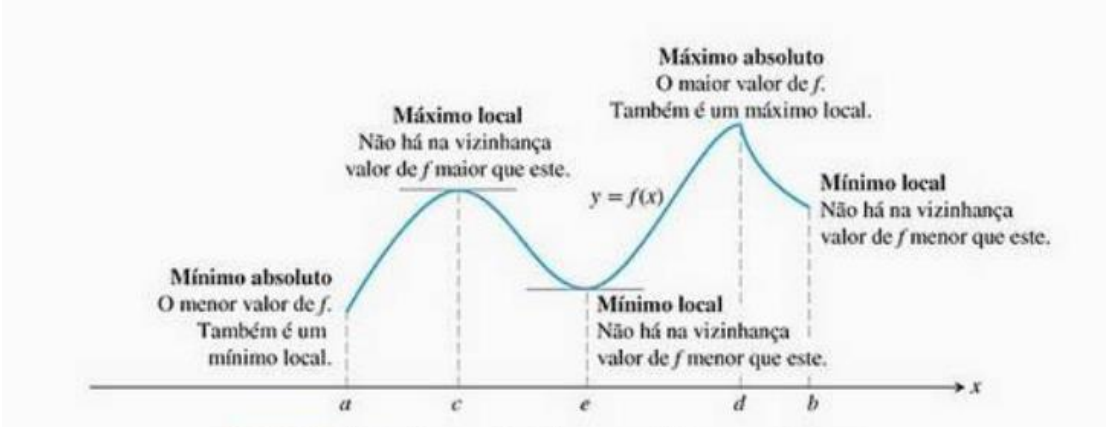
Iremos fazer algumas aplicações da derivada.

Os valores extremos de uma função contínua podem ser obtidos a partir de sua derivada. Uma função *f* de domínio *D* tem um valor máximo absoluto neste domínio em *c* se $f(x) \leq f(c)$ e um valor mínimo absoluto se $f(x) \geq f(c)$, para qualquer *c* em *D*. Máximos e mínimos absolutos são chamados extremos absolutos ou extremos globais (para diferenciar dos extremos locais).

Sendo *f* uma função contínua em um intervalo fechado [*a*, *b*], então *f* assume tanto um valor máximo *M* como um valor mínimo *m* nesse intervalo. Ou seja, há números x_1 e x_2 em [*a*, *b*] tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer outro valor de *x* em [*a*, *b*].

Na Figura 55 mostra-se um gráfico com alguns pontos nos quais a função tem valores extremos em seu domínio [*a*, *b*].

Figura 55 - Como classificar os máximos e mínimos



Fonte: Thomas (2009, p. 268).

Por definição, uma função *f* tem um valor máximo local em cada número assumido por c pertencente ao seu domínio se $f(x) \leq f(c)$, e um valor mínimo local se $f(x) \geq f(c)$, para qualquer *x* em um intervalo aberto que contenha *c*. Essa definição é ampliada também para extremidades de intervalos. Na Figura, a função *f* tem máximos locais em *c*, *d* e mínimos locais em *a, e, b*. Extremos locais também são chamados extremos relativos.

Com base no teorema da derivada para valores de extremos locais, se *f* possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto *c* interior de seu domínio e se *f'* é definida em *c*, então $f'(c) = 0$. Isso explica o porquê geralmente precisamos investigar apenas alguns valores para determinar o extremo de uma função. Ou seja, o teorema diz que a primeira derivada de uma função é sempre zero em um ponto interior onde a função tenha um valor extremo local e a derivada seja definida.

Assim, os únicos locais onde uma função *f* pode ter valores extremos (locais ou globais) são: pontos interiores onde $f' = 0$; pontos interiores onde *f'* não existe; e extremidades do domínio de *f*. Isso quer dizer que os únicos pontos do domínio em que uma função pode assumir valores extremos são os pontos críticos e as extremidades. Pela definição, um ponto interior do domínio de uma função *f* onde *f'* é zero ou indefinida é um ponto crítico de *f*.

A primeira derivada nos diz onde uma função é crescente e onde é decrescente. Em um ponto crítico de uma função derivável, o teste da primeira derivada nos diz se existe lá um mínimo ou máximo local, ou se o gráfico simplesmente continua a subir ou a cair.

Thomas (2009) traz a seguinte definição:

Figura 56 - Definição de função crescente e decrescente

Definições Função crescente, função decrescente

Seja *f* uma função definida em um intervalo *I* e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer em *I*.

1. Se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que *f* é **crescente** em *I*.
2. Se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que *f* é **decrescente** em *I*.

Uma função que é crescente ou decrescente em *I* é chamada **monotônica** em *I*.

Fonte: Thomas (2009, p. 287).

Essa definição precisa ser satisfeita para qualquer par de valores x_1 e x_2 em *I* no qual $x_1 < x_2$. Alguns autores afirmam que *f* é estritamente crescente ou decrescente em *I*. O intervalo *I* pode ser finito ou infinito.

Tomando como exemplo a função representada por $f(x) = x^2$. Observamos na figura que mostra o seu gráfico, que *f* decresce no intervalo (-∞, 0] e cresce em [0, ∞). Ela é monotônica em (-∞, 0] e [0, ∞), mas não em (-∞, -∞).

Podemos observar que no intervalo (-∞, 0) as tangentes apresentam coeficientes angulares negativos, de modo que a primeira derivada é sempre negativa; e em (0, ∞), as tangentes apresentam coeficientes angulares positivos e a primeira derivada é positiva. Assim, o Teste da primeira derivada para funções monotônicas afirma:

Suponha que *f* seja contínua em [*a, b*] e derivável em (*a, b*). Se *f'*(*x*) > 0 em qualquer ponto *x* ∈ (*a, b*), então *f* é crescente em [*a, b*]; e se *f'*(*x*) < 0 em qualquer ponto *x* ∈ (*a, b*), então *f* é decrescente em [*a, b*].

Thomas (2009) descreveu o teste que detecta a presença e a natureza de valores extremos locais em funções deriváveis (ou extremidades do intervalo), como mostra a Figura 57.

Figura 57 - Teste da primeira derivada para extremos locais

O teste da primeira derivada para extremos locais

Suponha que *c* seja um ponto crítico de uma função contínua *f*, e que *f* seja derivável em qualquer ponto de certo intervalo que contenha *c*, exceto possivelmente no próprio ponto *c*. Movendo-se ao longo de *c*, da esquerda para a direita,

1. se *f'* muda de negativa para positiva em *c*, então *f* possui um mínimo local em *c*;
2. se *f'* muda de positiva para negativa em *c*, então *f* possui um máximo local em *c*;
3. se *f'* não muda de sinal em *c* (ou seja, *f'* é positiva ou negativa em ambos os lados de *c*), então *c* não é um extremo local de *f*.

Fonte: Thomas (2009, p. 289).

Em relação à concavidade da curva, é possível analisar o comportamento da inclinação e mudança de direção, segundo a definição:

O gráfico de uma função derivável *y* = *f*(*x*) é côncavo para cima em um intervalo aberto *I*, se *f'* é crescente em *I*, e côncavo para baixo se *f'* é decrescente em *I*.

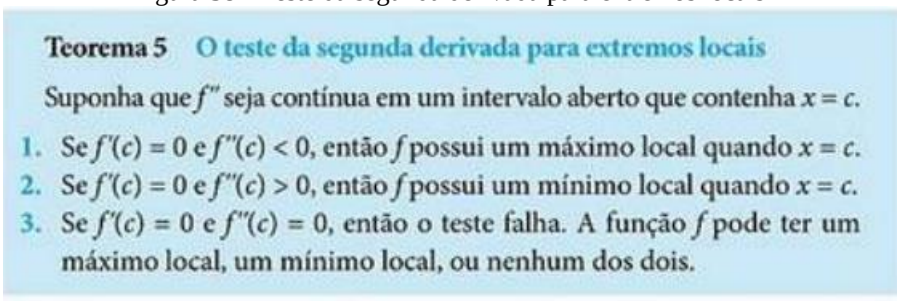
Caso a função *y* = *f*(*x*) possui uma segunda derivada, então podemos aplicar o teste da segunda derivada para concavidade:

Seja *y* = *f*(*x*) uma função duplamente derivável em um intervalo *I*, se *f''* > 0 em *I*, o gráfico de *f* ao longo de *I* é côncavo para cima, e se *f''* < 0, o gráfico é côncavo para baixo.

Um ponto onde o gráfico de uma função possui uma reta tangente e onde há mudança de concavidade é um ponto de inflexão. Nesse ponto *f''* é zero ou é indefinida. E ainda, se *f* é uma função duplamente derivável, *f''* = 0 em um ponto de inflexão e *f''* possui um máximo ou um mínimo local.

Thomas (2009) explica que, em vez de procurarmos a mudança de sinal nos pontos críticos de *f'*, às vezes podemos usar o teste a seguir para determinar a presença de extremos locais.

Figura 58 - Teste da segunda derivada para extremos locais



Teorema 5 O teste da segunda derivada para extremos locais

Suponha que f'' seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$.

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f possui um máximo local quando $x = c$.
2. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo local quando $x = c$.
3. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então o teste falha. A função f pode ter um máximo local, um mínimo local, ou nenhum dos dois.

Fonte: Thomas (2009, p. 295).

Esse teste exige que conheçamos *f''* apenas em *c*, e não em um intervalo em torno de *c*. No entanto, o teste é inconclusivo quando *f''* = 0 ou *f''* não existe para *x* = *c*. Quando isso ocorre, deve-se voltar ao teste da primeira derivada para extremos locais.

As funções *f'* e *f''*, juntas, informam sobre o formato do gráfico da função, isto é, onde os pontos críticos se localizam e o que acontece em um ponto crítico, onde a função é crescente e onde é decrescente, e como a curva muda de direção ou se inclina, conforme definido por sua concavidade. Essas informações são úteis para esboçar o gráfico da função que aproveite todos esses aspectos.

Thomas (2009) e Stewart (2014) abordam acerca de uma maneira mais precisa para construir gráficos para funções mais complicadas e resolver problemas mais complexos que, segundo eles, de outra forma não poderiam ser resolvidos. Ambos chamam a atenção em relação à tela (ou janela) de visualização (ou tela/janela retangular) que pode fornecer uma visualização incompleta ou enganadora do gráfico.

> Quando um gráfico aparece na janela-padrão, a unidade do eixo *x* pode ser diferente da unidade de escala do eixo *y*, a fim de se adequar ao gráfico que está sendo mostrado. Para estabelecer a janela de visualização, o usuário especifica os valores mínimos e máximos das variáveis independentes e dependente. Ou seja, especifica um intervalo $a \leq x \leq b$, bem como um contradomínio $c \leq y \leq d$. A máquina seleciona determinado números de valores de *x* entre a e b, a intervalos regulares. Começando com um

> primeiro valor de x, se ele estiver dentro do domínio da função f cujo gráfico está sendo construído, e se $f(x)$ estiver de $[c, d]$, então o ponto $(x, f(x))$ será representado no sistema de coordenadas. Se x estiver fora do domínio de f, ou se $f(x)$ estiver fora do contradomínio especificado $[c, d]$, então a máquina simplesmente passará para o próximo valor de x, já que não pôde representar $(x, f(x))$ e consegue, assim, uma curva que representa aproximadamente o gráfico; para isso, traça um pequeno segmento de reta entre cada ponto inserido e o próximo ponto contíguo a ele, como faríamos manualmente. Em geral, pontos adjacentes são tão próximos que a representação gráfica tem a aparência de uma curva contínua. (THOMAS, 2009, p. 30)

O autor ainda afirma que alguns erros podem acontecer durante esse processo computacional. Por exemplo, quando um gráfico é mostrado, a unidade do eixo x pode ser diferente da unidade do eixo y e o resultado é uma distorção no desenho, como é mostrado na Figura 59.

Figura 59 - Visualização do gráfico de f em diferentes escalas

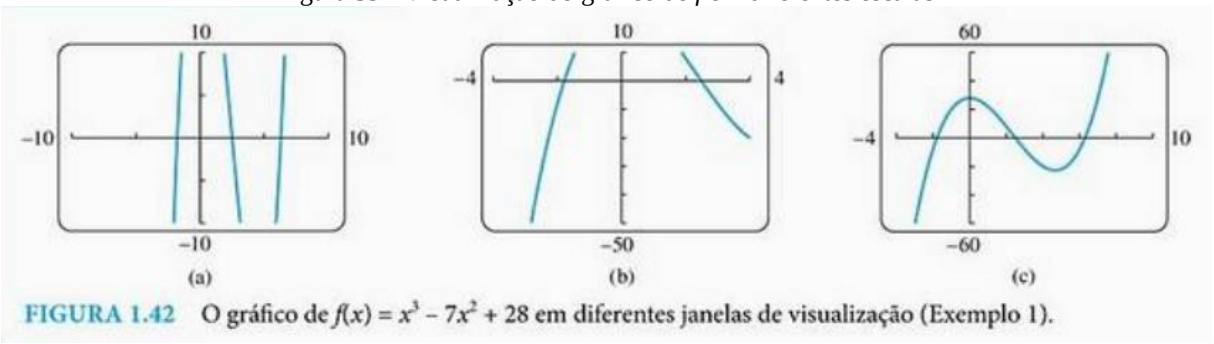


FIGURA 1.42 O gráfico de $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ em diferentes janelas de visualização (Exemplo 1).

Fonte: Thomas (2009, p. 30).

Uma alternativa para corrigir a distorção é tornar quadrada a janela de visualização, comprimindo ou alongando as unidades em um dos eixos, de modo que se ajustem à escala do outro. Caso o sistema não possua essa opção, será útil fazer alguns cálculos e definir manualmente o tamanho da janela para torná-la “quadrada”.

Stewart (2014, p. 43) mostra que o conhecimento prévio do domínio e da imagem da função dá pistas de como selecionar a janela apropriada.

Figura 60 - Determinação da janela de visualização

EXEMPLO 2 Determine uma janela apropriada para a função $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ e utilize-a para fazer o gráfico de f.

SOLUÇÃO A expressão para $f(x)$ é definida quando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Portanto, o domínio de f é o intervalo $[-2, 2]$. Também,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

logo, a imagem de f é o intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Escolhemos a janela retangular de forma que o intervalo sobre o eixo x fosse um pouco maior que o domínio e o intervalo sobre o eixo y fosse um pouco maior que a imagem. Tomando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtemos o gráfico da Figura 3.

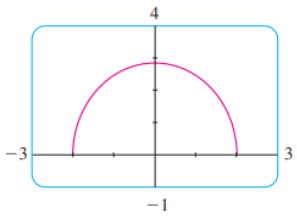


FIGURA 3
$f(x) = \sqrt{8-2x^2}$

Fonte: Stewart (2014, p. 43).

Percebe-se, portanto, que independentemente do tipo de gráfico que representa a função, é importante levar em conta as propriedades algébricas e analíticas da equação e as propriedades geométricas da curva associada, que correspondem efetivamente a função representada.

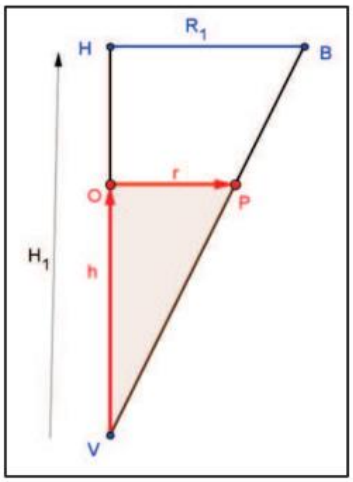
- Teorema da Semelhança

Ao discutir semelhança entre figuras, Lima (2009) traz a definição: "Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo. Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca σ: $F \rightarrow F$', entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedade: se X,Y são pontos quaisquer de F e $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ são seus correspondentes em F' então $d(X',Y') = r \cdot d(X,Y)$ [onde d é a aplicação distância usual]. A correspondência biunívoca σ: $F \rightarrow F$' com esta propriedade de multiplicar distâncias pelo fator constante r, chama-se uma semelhança de razão r entre F e F'. Se $X' = \sigma(X)$, diz-se que os pontos X e X' são homólogos (LIMA, 2009, p. 33). A interpretação geométrica irá completar a sua demonstração.

Sabendo disto, retomamos à tarefa t_2 para expressar a área transversal em relação à altura do plano. Esta requer o conhecimento de área de figuras planas e do teorema da semelhança, que é um dos postulados básicos da Geometria.

Na Figura 61 mostra-se a área da seção transversal em função da altura, representada pelo triângulo retângulo.

Figura 61 - Triângulos VOP e VHB



Fonte: Grande (2013, p. 228).

Pelo teorema fundamental da semelhança, dois triângulos são semelhantes quando seus lados correspondentes são proporcionais e seus ângulos, em ordem, são congruentes (MOISE e DOWNS, 1971, p. 299). Na figura acima, temos o caso dos triângulos VOP e VHB semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Esse teorema é também conhecido como Teorema de Tales no Triângulo, segundo o qual possui um ângulo comum aos dois triângulos e segmentos laterais proporcionais.

Assim, para $0 \leq h \leq 4$, tem-se que: $\frac{r}{R_1} = \frac{h}{H_1}$. E como a área da seção transversal A_1 é um círculo de raio *r*, esta pode ser calculada por: $A_1 = \pi r^2$.

Para $4 \leq h \leq 8$, a área transversal é constante e igual à área da base do cilindro circular reto, com raio da base igual a 1. Ou seja, no intervalo [0, 4], a área da seção transversal é diretamente proporcional ao quadrado do valor da altura e, no intervalo [4, 8] tem-se o valor constante para a referida área. Vale considerar que, no ponto de abscissa $h = 4$, podem ser obtidos dois valores para a área da seção.

A questão requer obter uma função que representa a variação dessa área. Então, para que essa relação seja uma função, pode-se atribuir o valor que corresponde à base do cone. Sendo assim, a função é representada por:

$$A_S = \begin{cases} \frac{\pi h^2}{4}, & se\ 0 \leq h \leq 4 \\ \pi, & se\ 4 < h \leq 8 \end{cases}$$

Assim como este, outros casos de semelhança de figuras são tratados na etapa escolar do ensino básico, utilizados eventualmente em situações que envolvem tanto a Geometria

quanto outras áreas de conhecimento, como a Física. No ensino superior, eles são utilizados como técnicas em distintos tipos de tarefas.

- Volume do cone e do cilindro

Dado um cone circular reto de altura igual a *h* e raio da base igual a *r*, o teorema diz que o seu volume é igual a um terço do produto da altura pela área da base (LIMA, 2009, p. 77). Portanto, o volume do cone é calculado através da fórmula:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot r^2 h}{3}.$$

O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura, ou seja,

$$V_2 = \pi \cdot r^2 h$$

Na tarefa t_2 foi dado um sólido composto por um cilindro reto com a medida do raio da base igual a 1 e a altura igual a 4, apoiado na base de um cone com a medida do raio igual a 2 e altura igual a 4. Entre as duas bases há um plano paralelo π com uma distância variável *h* em relação ao ponto V, com $0 \leq h \leq 8$. O objetivo inicial é determinar uma expressão que representa a função do volume do sólido V_S formado pelo tronco.

Sendo o raio do cone dado por $r = \frac{h}{2}$, o volume é igual a $V_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi h^3}{12}$.

No intervalo $4 < h \leq 8$, o volume do sólido corresponde ao volume V_1 do cone de base igual a 2 e altura igual a 4, adicionado ao volume do cilindro de base igual a 1 e altura $(h - 4)$, expressado pela relação: $V_2 = V_1 + \pi r^2 (h - 4)$. Substituindo, encontra-se:

$$V_2 = \frac{\pi 4^3}{12} + \pi 1^2 (h - 4) = \frac{16\pi}{3} + \pi h - 4\pi = \frac{4\pi}{3} + \pi h$$

Com as duas relações, obtém-se a função:

$$V_S = \begin{cases} \frac{\pi h^3}{12}, & se\ 0 \leq h \leq 4 \\ \frac{4\pi}{3} + \pi h, & se\ 4 < h \leq 8 \end{cases}$$

Sobre o cálculo de volumes, é importante destacar o Princípio de Cavalieri que, historicamente, mostrou ser essencial para a compreensão do conceito de integral.

Seguindo o seu enunciado:

Sejam *A* e *B* dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona *A* e *B* segundo figuras planas com áreas iguais, então *vol*(*A*) = *vol*(*B*).

Por exemplo, dadas duas fatias muito finas de dois sólidos, com a mesma altura e áreas das bases iguais, com volumes aproximadamente iguais. Quanto mais fina se torne a fatia, mais

aproximados se tornam seus volumes. Se adicionarmos todas as fatias, obteremos volumes iguais para os sólidos.

Esse princípio auxilia, portanto, a encontrar os volumes de vários sólidos geométricos.

Com essa apresentação dos elementos tecnológicos e teóricos que descrevem e justificam as práticas relativas ao Teorema Fundamental do Cálculo, destacamos a participação decisiva dos objetos ostensivos em todos os níveis da atividade, tanto em termos da técnica quanto de ambiente tecnológico-teórico. Por exemplo, a técnica que descreve $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = sen\, \pi - sen\, 0 = 0$ envolve a manipulação de ostensivos escritos (símbolos, letras, número, etc.), orais (discursos do tipo "integral do cosseno, seno...") e gestos (por exemplo, aplicar a 2ª parte do teorema fundamental e obter a diferença entre o seno de π e o seno de zero). Essa manipulação é orientada por não ostensivos, como os conceitos e noções, que vão justificar e explicar as ações.

Além disso, pequenas modificações ostensivas no nível técnico da atividade, podem provocar mudanças no nível tecnológico, quando é necessário descrever, organizar, justificar as produções ostensivas e não ostensivas obtidas (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 104). A esse respeito, vimos que a modelagem de uma situação em ambiente computacional ativou vários registros de representação, ou seja, a necessidade de implementar novas técnicas matemáticas utilizando elementos que foram disponibilizados nesse ambiente ("capturar imagem", "marcar os pontos na figura", "ajustar a curva", "obter a equação da curva", ...).

Esses aspectos e o que construímos do nosso modelo praxeológico dizem respeito ao nosso questionamento inicial sobre como otimizar a ideia conceitual do Teorema Fundamental como relação inversa entre derivada e integral. Devemos lembrar que as necessidades das técnicas que estão na origem das praxeologias (BOSCH e CHEVALLARD, 1999), portanto, a disponibilidade dos ostensivos irão ajudar a modelar as práticas sociais, seus componentes e sua evolução.

Dessa forma, de posse da lente praxeológica do nosso modelo de referência, buscamos analisar e descrever os tipos de situações que um micromundo poderá desenvolver.

4.8 ANÁLISE DESCRITIVA DE UM MICOMUNDO PARA O ENSINO DO TFC

O objetivo desta análise é caracterizar um micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo levando em conta as especificações relativas aos tipos de tarefas que ajudam a otimizar a relação inversa entre os processos de integração e derivação.

Partimos do pressuposto que o aprendiz interage com as representações através dos artefatos, assim como estes agem sobre as estratégias do aprendiz, esperando-se que a aprendizagem ocorra. Neste processo, o saber passa por transformações para que ele seja efetivamente ensinado e aprendido, e o micromundo, a esse respeito, é uma nova fonte de transformação desse saber.

Em nossa tese, constituímos um modelo praxeológico para auxiliar na implementação da representação dos objetos em um ambiente computacional do tipo micromundo. Ou seja, ele serve para analisar e descrever os tipos de situações sobre o teorema fundamental que um micromundo poderá desenvolver.

Em particular, a análise privilegiou os objetos que podem ser representados na interface (objetos ostensivos) mas se referindo as funcionalidades conceituais, isto é, cada objeto é considerado como um possível instrumento da atividade matemática que permite desenvolver técnicas para realizar certas tarefas. Ou melhor, cada um tem sua participação numa praxeologia correspondente às tarefas modelizadas pelos geradores de tarefas GT_{der} e GT_{int} definidos no Modelo Praxeológico de Referência (MPR).

O sistema de variáveis que constituímos no MPR permitiu considerar distintas possibilidades de variação de situações ligadas ao teorema fundamental. Algumas situações são essenciais para o estudo da relação inversa entre os processos de integração e derivação.

Como já dissemos, as organizações praxeológicas se materializam em sistemas de objetos pertencentes a vários registros ostensivos, levando também em conta a articulação entre eles. Assim, concordamos com Bosch e Chevallard (1999, p. 96) que a função atribuída a cada objeto é influenciada pelo registro ao qual ele pertence.

Diante disso e tomando como base as análises já realizadas, bem como nosso modelo praxeológico, organizamos no Quadro 27 as funcionalidades do micromundo relacionadas a situações prototípicas dos geradores de tarefas do Teorema Fundamental do Cálculo.

Cada situação engloba tipos e subtipos de tarefas originárias de GT_{der} e GT_{int} que associam funcionalidades do micromundo ao tipo de registro ostensivo. Estas funcionalidades constituem as técnicas para realizar as tarefas, pois concordamos com Lagrange que "as técnicas de utilização de instrumentos tecnológicos, longes de serem triviais ou apenas relacionadas com o software, podem ser visas como elementos fundamentais para o necessário "trabalho da técnica"" (LAGRANGE, 2000, p. 19, tradução nossa)[126].

[126] Texto original: "Ainsi les techniques d'utilisation d'instruments technologiques, loin d'être triviales ou seulement liées au logiciel peuvent être vues comme des éléments fondamentaux pour le nécessaire "travail sur la technique"".

Por exemplo, “conhecer as raízes da função” é requisito para a obtenção do gráfico, mas a representação em cada registro será diferente; consequentemente, a técnica associada também se distinguirá. No registro numérico, a funcionalidade é “determinar as raízes da função”, portanto o micromundo deverá ter um comando que receba a expressão da função e forneça o valor numérico das raízes. Já no registro algébrico, a funcionalidade associada é “calcular as raízes da função”, então irá desenvolver a equação com as técnicas apropriadas para determinar o(s) valor(es) do domínio em que a função se anula. E no registro gráfico, as raízes da função serão marcadas no plano cartesiano também através de algum comando que receba como parâmetro a função.

Com base no MPR, percebemos que esse tipo de tarefas associa uma praxeologia correspondente a cada registro, que vai ativar diferentes objetos ostensivos na interface. Como a interação está centrada no usuário, é possível escolher qual a técnica mais apropriada para resolver a tarefa. Para isto, ele deverá analisar quais objetos estão ao seu alcance.

Como afirma Lagrange (2000, p. 16), a disponibilidade de novos instrumentos leva a questionar o papel das técnicas onde pareciam bem estabelecidas quando havia apenas papel e lápis. No entanto, técnicas de exploração e problematização são necessárias. Por isso, consideramos importante combinar os tipos de situações.

Quadro 27 - Funcionalidades do micromundo

SITUAÇÕES	FUNCIONALIDADES
S_1 - Esboçar o gráfico da função	***V_{ost_num}*** *- Determinar o valor da integral em determinado intervalo* *- Determinar o valor da primeira derivada em determinado ponto* *- Determinar o valor da segunda derivada em determinado ponto* *- Determinar o valor da função em determinado ponto* *- Determinar as raízes da função* *- Determinar os pontos críticos dada a expressão da função* *- Determinar valores extremos máximo e mínimo da função* *- Determinar os pontos de inflexão* *- Determinar o coeficiente angular da tangente em determinado ponto* ***V_{ost_alg}*** *- Inserir coordenadas do ponto* *- Inserir expressão da curva* *- Calcular a soma de áreas* *- Calcular as raízes da função* *- Calcular a integral da função* *- Calcular a derivada da função integral* *- Calcular números críticos* *- Calcular extremos relativos* *- Determinar os pontos em que a concavidade é para cima ou para baixo* *- Inserir texto* *- Inserir nova janela algébrica (associada a nova janela gráfica)* *- Determinar as assíntotas* ***V_{ost_geo}*** *- Inserir ponto*

	- Inserir reta *- Inserir polígono* *- Medir comprimento* ***V**ost_gr* *- Plotar o gráfico da função integral dada a expressão* *- Plotar o gráfico da derivada de uma função dada a expressão* *- Plotar o gráfico da integral de uma função dado o gráfico* *- Plotar o gráfico da derivada de uma função dado o gráfico* *- Marcar os raízes da função* *- Desenhar as assíntotas* *- Desenhar eixos simétricos* *- Criar tabela vinculada ao gráfico* *- Marcar pontos* *- Desenhar curva* *- Preencher (hachurar, pintar) região determinada* *- Renomear objetos* *- Criar seletor* *- Inserir nova janela gráfica (associada a nova janela algébrica)* *- Inverter eixos coordenados* *- Escolher escala dos eixos coordenados* ***V**ost_fig* *- Inserir texto* *- Mudar cor* *- Inserir, copiar, recortar, colar, mover, deletar imagem* *- Sobrepor objeto* *- Inserir, escolher, esconder malha* *- Clicar botão "Ajuste de curva"*
S_2 - Analisar o gráfico da função	***V**ost_gr* *- Calcular área total dado o gráfico* *- Determinar os pontos críticos dado o gráfico* *- Mostrar intervalos em que a função cresce* *- Mostrar intervalos em que a função decresce* *- Mostrar pontos de inflexão* *- Mostrar raízes da função* *- Mover ponto sobre gráfico* *- Mover seletor* *- Inter-relacionar as representações da mesma função* *- Aplicar "zoom" em parte do gráfico* ***V**ost_alg* *- Determinar os intervalos em que a função é crescente* *- Determinar os intervalos em que a função é decrescente* ***V**ost_num* *- Determinar o valor da área hachurada no gráfico* *- Determinar o valor da inclinação em um ponto do gráfico* ***V**ost_geo* *- Dividir a região hachurada em sub-regiões dados os intervalos*
S_3 - Encontrar a expressão da função	***V**ost_alg* *- Determinar pontos da função dado o gráfico* *- Inserir os pontos na expressão da função* *- Resolver o sistema* *- Inserir o ponto encontrado na solução do sistema na expressão da função* ***V**ost_gr* *- Clicar no botão "Função" e selecionando o gráfico* ***V**ost_fig* *- Marcar pontos sobre o objeto* *- Clicar no botão "Ajuste de curva"*
S_4 - Encontrar a derivada de uma função integral	***V**ost_alg* *- Inserir função integral através do comando "Derivada" (ou inserir função através do comando "TFC parte 1"); expandir o cálculo*

	- Clicar no botão "Derivada" dada a expressão da função integral (ou inserir a função e clicar no botão "TFC parte 1") *- O botão "TFC parte 1" expande o cálculo* ***V**ost_gr* *- Clicar no botão "Derivada" dado o gráfico da função integral (inter-relação entre as representações algébrica e gráfica)*
S_5 - Encontrar a integral de uma função	***V**ost_alg* *- Inserir função e intervalo do domínio; - inserir operação, funções e intervalo do domínio; - expandir o cálculo* *- Inserir a função e clicar no botão "Integral" (ou no botão "TFC parte 2"); - o botão "TFC parte 2" expande o cálculo* ***V**ost_gr* *- Clicar no botão "Integral" dado o gráfico da função (inter-relação entre as representações algébrica e gráfica)*
S_6 - Resolver problemas de acumulação e de taxa de variação	***V**ost_gr* *- Vincular a acumulação de uma grandeza com a representação gráfica* *- Vincular a mudança de taxa de acumulação com a representação gráfica* *- Mover ponto sobre o gráfico da função integral associado ao movimento do ponto sobre o gráfico da função derivada* *- Criar animação entre dois gráficos* ***V**ost_geo* *- Medir dimensões do objeto* *- Determinar as expressões das funções que compõem o objeto* ***V**ost_num* *- Determinar o valor da área de uma região* *- Determinar o valor da tangente no ponto determinado* ***V**ost_fig* *- Inserir texto* *- Mudar cor* *- Inserir, copiar, recortar, colar, mover, deletar imagem* *- Sobrepor, esconder objeto* *- Inserir, escolher, esconder malha* *- Clicar botão "Ajuste de curva"*

Fonte: A autora (2022).

Um requisito muito evidenciado nas análises prévias e a priori foi a conexão e a mudança entre diferentes representações. Portanto, este aspecto deve estar integrado às funcionalidades do micromundo. Por exemplo, a cada janela algébrica pode associar simultaneamente uma janela gráfica, de modo que os objetos estejam vinculados e possam ser mobilizados em ambas as janelas. Caso seja inserida a expressão de uma função na janela algébrica, é possível obter o gráfico correspondente na janela gráfica e, modificando ou mobilizando um objeto em uma janela, haverá modificação ou mobilização na outra janela. Além disso, uma tabela poderá ser vinculada ao gráfico e os parâmetros também poderão ser modificados simultaneamente.

Essa funcionalidade atende também ao requisito de visualização ao permitir estabelecer a inter-relação entre as diferentes representações associadas ao mesmo objeto não ostensivo. Outras funcionalidades relativas a este requisito também foram contempladas, como "plotar o gráfico" através de um comando ou botão e "aplicar *zoom*" ao analisar o gráfico.

Em todas as situações, as funções e as suas representações são os principais objetos evocados e, associadas a elas, devem ser declaradas as "variáveis de controle", ou seja, a natureza, a operação, os extremos do intervalo (ou subintervalos) domínio. Diversas funcionalidades do micromundo estão associadas às funções, originalmente constituindo praxeologias locais. No entanto, elas devem ser associadas ou integradas a outras praxeologias para ajudar a otimizar a relação inversa do TFC.

Por exemplo, "resolver problemas de acumulação" é um tipo de situação considerado também como um tipo de tarefa de aplicação. Assim, utilizamos o sistema de variáveis para definir um modelo matemático ou não, que deverá ser construído ou manipulado, para realizar o estudo da função envolvida. Ao longo das distintas áreas do conhecimento permeiam problemas de acumulação e variação dessa acumulação, como otimização do tempo de produção, maximização do lucro em função das despesas, minimização do consumo de material, massa em função da densidade, momento de inercia dos objetos, a aceleração em função da velocidade, centro de massa, etc. O estudo desses problemas envolverá algum tipo de função em que será necessário obter a sua representação. Assim, as "novas" técnicas, como diz Lagrange, são produzidas pelos gestos e pela produção de inúmeros observáveis (LAGRANGE, 2000, p. 24). As técnicas usuais não desaparecerão da atividade, pelo contrário, elas podem servir como suporte para a reflexão teórica sobre os objetos que manipulam. É interessante, no entanto, discutir previamente as diferentes formas de resolução do problema, levando em conta os aspectos relacionados com o instrumento e fazendo a fundamentação e reflexão teórica.

Balacheff e Kaput (1997, p. 482) ressaltam sobre a adaptação dos ambientes computacionais aos objetivos das atividades e considerar apenas as variáveis cuja modificação provavelmente influenciará as estratégias dos alunos. Seria como "esconder" alguns comandos ou menus em determinadas situações. Por exemplo, a funcionalidade de "obter a derivada da função em determinado ponto", disponível como um item do menu, poderá ser suprimida para que o estudante utilize outras funcionalidades no desenvolvimento da técnica. Por outro lado, pode-se também adicionar macro construções como novos itens do menu, como por exemplo, para auxiliar na análise da relação inversa do teorema fundamental.

Algumas funcionalidades foram especificadas como ações vinculadas a algum comando ou botão da interface. Elas estão diretamente associadas à técnica empregada. Por exemplo, "clicar no botão "Derivada" dado o gráfico da função integral" corresponde a aplicar a primeira parte do teorema fundamental na função representada no gráfico e resolver no registro

algébrico. Neste caso, há uma inter-relação entre as representações algébrica e gráfica de modo que o gráfico está vinculado à expressão da função. Então, selecionando o gráfico (e implicitamente a expressão da função), o botão “Derivada” irá “copiar” a função e irá desenvolver o teorema no registro algébrico.

Outros casos semelhantes são explorados, ressaltando, desta forma, o vínculo entre as diferentes representações do mesmo objeto.

Algumas funcionalidades ligadas ao *design* dos elementos de interação, mas que são úteis para a visualização, também foram adicionadas, como inserção de texto e imagens, mudança de cores, etc. Elas não se esgotam, podendo surgir outras quanto maior for a interação e usabilidade.

Sutherland e Balacheff (1999) sugerem identificar as variáveis para um determinado problema que estão disponíveis em um ambiente, mas não em outro, ou que estão disponibilizados com características diferentes por um outro, como uma maneira de especificar a validade didática de um ambiente computacional. Pensando nisto, realizamos um mapeamento de softwares com o intuito de buscar identificar outras funcionalidades que poderiam ser contempladas no micromundo para o ensino do TFC. Apresentamos, a seguir, esse resultado que irá completar a nossa análise.

4.8.1 Mapeamento de softwares: um olhar sobre os objetos

Vimos que a literatura apontou para diversas tecnologias utilizadas nas pesquisas, sendo que o software GeoGebra foi o que mais apareceu nos resultados sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, em particular sobre os conceitos ligados ao Teorema Fundamental. Mas partimos do pressuposto que outros softwares poderiam fornecer também características que seriam úteis para caracterizar um micromundo. Para conhecer melhor estes softwares, realizamos um mapeamento sobre suas funcionalidades que pudesse apontar as suas potencialidades e limitações.

Nesta parte, apresentamos os softwares que foram citados nas pesquisas encontradas na revisão de literatura que discutiam sobre o ensino de Cálculo por meio de tecnologias. Foram selecionados 44 trabalhos, a partir do ano 2009, cujas tecnologias utilizadas foram organizadas no Quadro 28.

Quadro 28 - Mapeamento de softwares no ensino do TFC

TECNOLOGIA INFORMÁTICA	QUANT	TECNOLOGIA INFORMÁTICA	QUANT	TECNOLOGIA INFORMÁTICA	QUANT
Geogebra	16	Maple	1	PHGrade Assist	1
Autograph	1	Computador Infinity	1	Graphmatica	1
Applet Descartes	1	Clickers	3	Maxima	1
Sistema de Álgebra Computacional	3	Moodle	2	Winplot	2
Calculadora	1	Tablet	1	Matlab	1
SimCalc	1	Microsoft Mathematics	1	Cmap Tools	1
Modellus	2	Wolfram Alpha	1	Geometria dinâmica (não especificado)	2

Fonte: A autora (2019).

Dentre as tecnologias utilizadas pelos pesquisadores no ensino de Cálculo, algumas não correspondiam aos softwares matemáticos, portanto, estes não foram considerados na nossa discussão, como calculadora, computador Infinity, Clickers, Moodle, Tablet, PHGrade Assist e Cmap Tools. O Quadro 28 evidencia que o software GeoGebra foi o mais citado nas pesquisas, dentre os trabalhos selecionados.

O GeoGebra[127] é classificado como um software de geometria dinâmica. Sobre os programas que se inscrevem nessa classificação, Gravina (1996) explica que

> São programas que se opõem aos do tipo CAI (Computer Assisted Instruction[128]). São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento. (GRAVINA, 1996, p. 6).

Apesar dessa classificação, o GeoGebra combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação, provavelmente por essa razão é que o seu *site* o caracteriza como software de "matemática dinâmica". Ele foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e atualmente é utilizado em diversos países que traduziram para os seus respectivos idiomas, tendo recebido vários prêmios por suas contribuições. É um software

[127] Endereço eletrônico: https://www.geogebra.org/
[128] Instrução assistida por computador (tradução nossa).

gratuito e de código aberto e tem sido amplamente utilizado no ensino e na pesquisa, em todos os níveis de ensino.

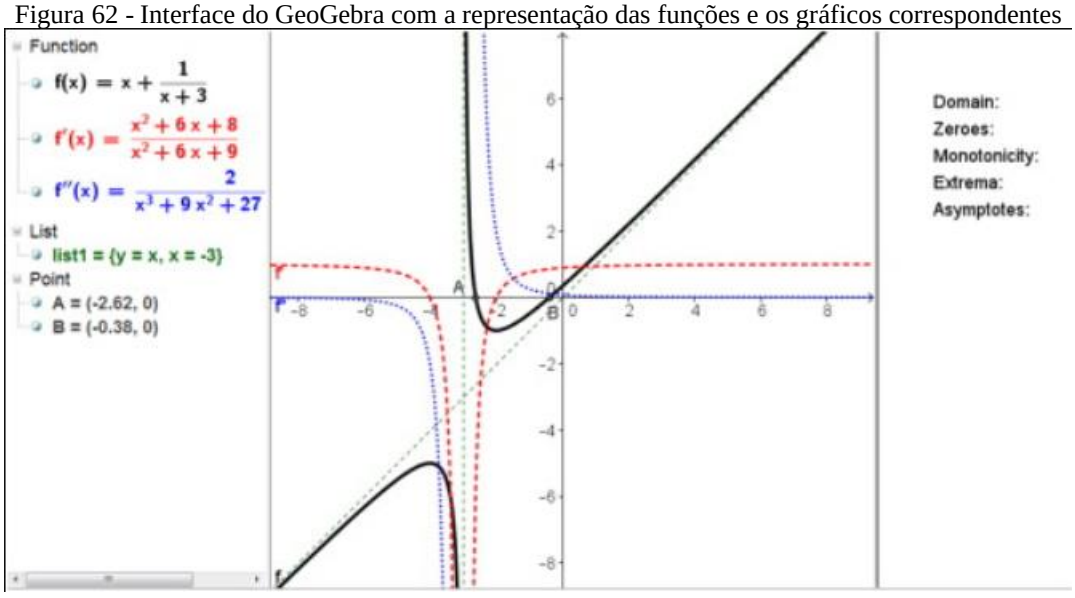
O GeoGebra permite que

> Ao representar o gráfico de uma função na tela do computador, outras janelas se abrem apresentando a correspondente expressão algébrica e, por vezes, outra janela com uma planilha contendo as coordenadas de alguns pontos pertencentes ao gráfico. As alterações no gráfico imediatamente são visíveis na janela algébrica e na planilha de pontos. É a apresentação do dinamismo de situações que permitem ao professor e aluno levantar conjecturas e testar hipóteses. Estas são as possibilidades que se apresentam no software GeoGebra. (Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 04 jan. 2021).

Essa característica dos registros de representação foi valorizada por Takaci, Stankov e Milanovic (2015) que utilizaram o GeoGebra em um grupo colaborativo que envolvia alunos de um curso de Cálculo. Eles explicam que as propriedades da função podem ser analisadas a partir das fórmulas (limites, derivadas, equações, etc.) e dos gráficos correspondentes, como mostrado na Figura 62, possibilitando a visualização em cada etapa do cálculo e, consequentemente, auxiliando na análise adequada das propriedades da função.

Em relação à interação com o ambiente, os autores relataram que "Os alunos têm a qualquer momento um feedback imediato da correção de qualquer propriedade determinada da função e do seu gráfico, que podem ver na tela e comparar com o seu próprio desenho." (TAKACI, STANKOV e MILANOVIC, 2015, p. 430, tradução nossa)[129].

Figura 62 - Interface do GeoGebra com a representação das funções e os gráficos correspondentes



Fonte: Takaci, Stankov e Milanovic (2015, p. 424).

[129] Texto original: "The students have at any time an immediate feedback of the correctness of any determined property of the function and its graph which they can see on the screen and compare with their own drawing".

O software *Autograph*[130] é um software matemático gratuito que também permite a visualização e a manipulação dinâmica de objetos matemáticos em 2D e 3D, sendo dirigido a vários níveis de ensino. Ele possibilita a ligação entre recursos como a Internet, o Excel, o Word e o próprio programa, podendo fazer a importação ou exportação de dados.

As suas ferramentas permitem:

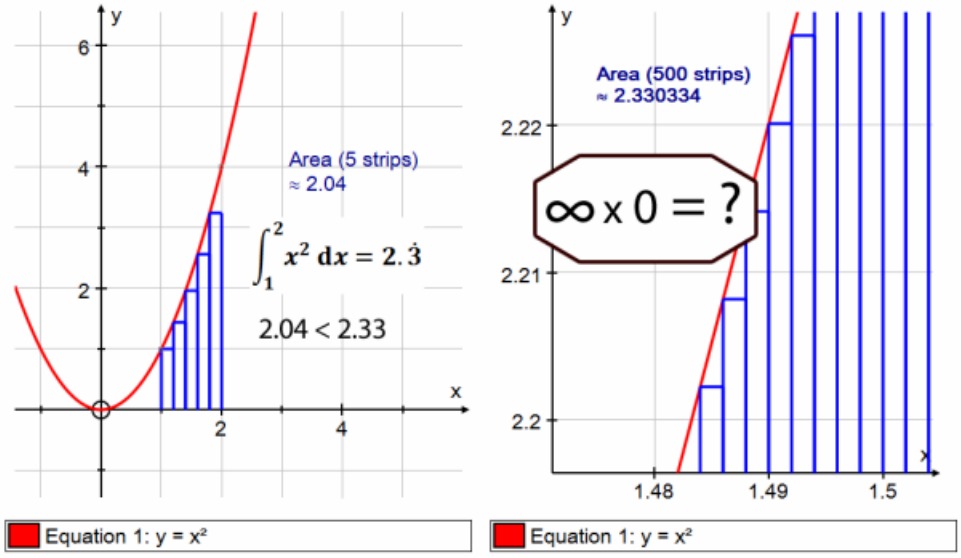
- construir gráficos como histogramas e gráficos cumulativos;
- construir gráficos com duas dimensões e gráficos de dispersão;
- introduzir expressões e verificar a imagem visual gráfica em duas ou três dimensões;
- criar objetos e poder fazer rotações, translações, ampliações, reduções ou transformações através de matrizes.

Butler (2012) desenvolveu atividades online usando o *Autograph* para explorar conceitos do Cálculo, como diferenciação, máximos, mínimos e pontos de inflexão, gradientes, integração e volume. O autor justifica a escolha do software por acreditar que os alunos podem melhorar a compreensão dos conceitos por visualizar e controlar animações na tela e o software permitir essa abordagem utilizando recursos gráficos.

Através dos comandos do software, o autor vai mostrando as técnicas de resolução das tarefas e as possibilidades dadas pelas ferramentas. Uma das atividades consiste em mostrar o resultado da integração $0 \times \infty \Rightarrow 7/3$. Partindo da condição que a integração envolve adicionar um infinito número de faixas de largura zero para formar uma área, conclui que é possível descobrir o limite de um produto, pois se um termo tende ao infinito e o outro tende a 0, pode ser infinito. O resultado é obtido integrando $y = x^2$ de $x = 1$ a $x = 2$ a partir das configurações do software. Aplicando o *zoom* repetidamente, centralizado na curva, é possível observar a retidão local e o ressurgimento dos retângulos de forma recursiva.

[130] Endereço eletrônico: https://completemaths.com/autograph

Figura 63 - Representação gráfica no software Autograph



Fonte: Butler (2012).

Esta atividade remete à discussão feita por Tall (1991), que ressaltamos anteriormente. Ele utilizou o software *Graphic Calculus* para mostrar que a ampliação do gráfico permite a visualização e a compreensão dos conceitos associados à integração.

Na seção 5.3, falamos sobre a pesquisa de Arredondo, Armenta e Moll (2014), que desenvolveram uma sequência de ensino sobre o Teorema Fundamental do Cálculo utilizando o *Applet* Descartes. Eles justificam que a escolha deste software se deu pela possibilidade de utilizar os recursos visuais na construção de cenários interativos para implementar tarefas e que os estudantes pudessem identificar padrões e conjecturas, além de poder promover a visualização, a argumentação e outros processos (ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014, p. 71).

O *Applet* Descartes[131] é um software livre e gratuito, de propriedade do Ministério da Educação do Governo da Espanha, que é distribuída sob uma licença *Creative Commons*[132] (

Figura 64). É um programa desenvolvido na linguagem Java que, por ter a característica de ser configurável, permite projetar cenas interativas na forma de quadros brancos eletrônicos que podem ser inseridos em uma página web.

[131] Endereço eletrônico: http://recursostic.educacion.es/descartes/web

[132] Garante o direito de autor, seja criador individual ou empresa, ao seu trabalho, podendo ser copiado, distribuído, editado, remixado e utilizado para a criação de outros trabalhos, desde que sejam respeitados os limites da legislação, sem fins comerciais. Disponível em: < https://br.creativecommons.net/licencas/>. Acesso em: 17 nov. 2021.

Figura 64 - Interface do site do Apllet Descartes

Fonte: Disponível em: < http://recursostic.educacion.es/descartes/web >. Acesso em: 17 nov. 2021.

Segundo os autores, no desenvolvimento das tarefas abordando o Teorema Fundamental, o software deu a possibilidade para que os alunos pudessem:

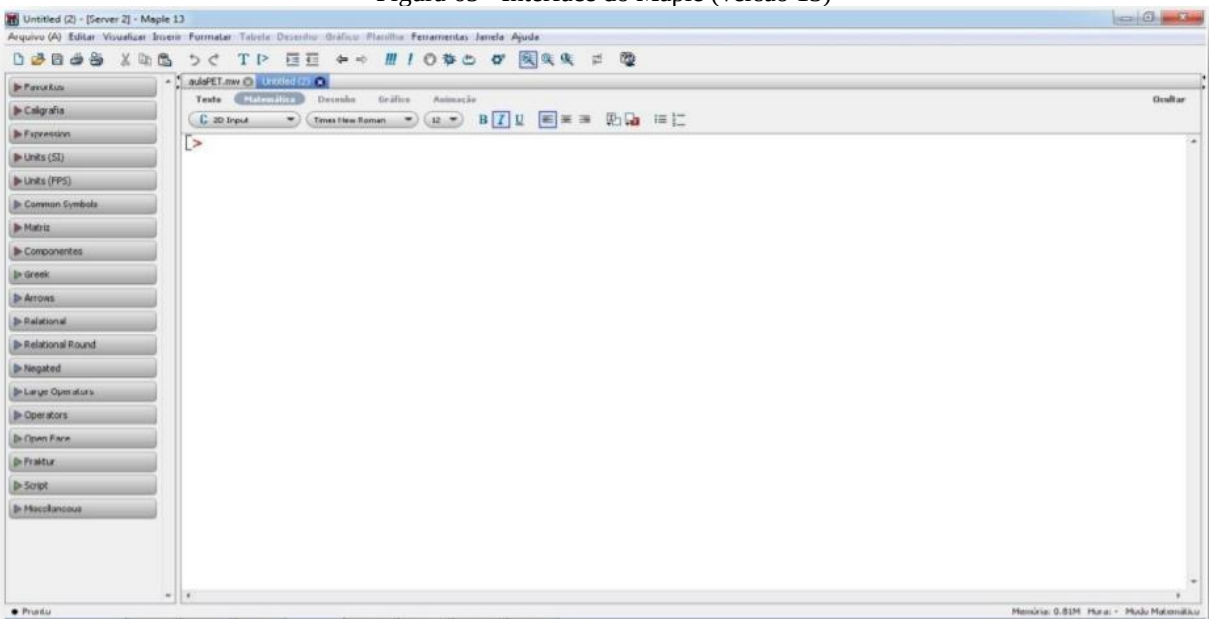
- Dividir o intervalo de trabalho em um número suficientemente grande de subintervalos, para ilustrar as somas de Riemann construídas por cima da extremidade esquerda sobre a extremidade direita ou o ponto central de cada um, enquanto o valor numérico exibido no ecrã dá a soma correspondente.
- Estimar com precisão suficiente o valor exato da área sob a curva em um determinado intervalo, simulando a etapa até o limite de uma soma de Riemann, fazendo com que o número de subintervalos cresça o *suficiente*.
- Observar na tela a variação da área acumulada sob uma curva em um intervalo, pois a extremidade direita da curva varia, enquanto é mostrado um traço que permite observar graficamente o comportamento da referida variação.
- Construir o gráfico da *função área acumulada* ou *função integral*, *a* partir da variação da extremidade direita do intervalo, com a possibilidade de observar as características da curva resultante (comportamento crescente ou decrescente, pontos de não derivabilidade, máximo e mínimo, etc.).
- Fazer aproximações sucessivas à curva da função integral para visualizar sua linearidade local.

(ARREDONDO, ARMENTA e MOLL, 2014, p. 85-86, tradução nossa)[133].

Os recursos do software, segundo os autores, facilitaram o desenvolvimento da sequência de ensino, tomando como ponto de partida tarefas com representações geométricas e sendo complementadas e enriquecidas por uma abordagem com representações analíticas.

O outro software abordado nas pesquisas foi o *Maple*[134] (Figura 65), desenvolvido e comercializado pela empresa canadense *Maplesoft* para as áreas de engenharia, ciências e matemática. Ele é classificado como um Sistema Algébrico Computacional (CAS) e pode ser utilizado para diversas transformações matemáticas, construção de modelos matemáticos e criação de documentação técnica.

Figura 65 - Interface do Maple (versão 13)



Fonte: Disponível em: Alencar e Matias (2012, p. 3)

Gratzer e Krishnan (2009) analisaram a capacidade de alunos do ensino médio descobrirem conceitos de cálculo que levam ao entendimento do Teorema Fundamental, através

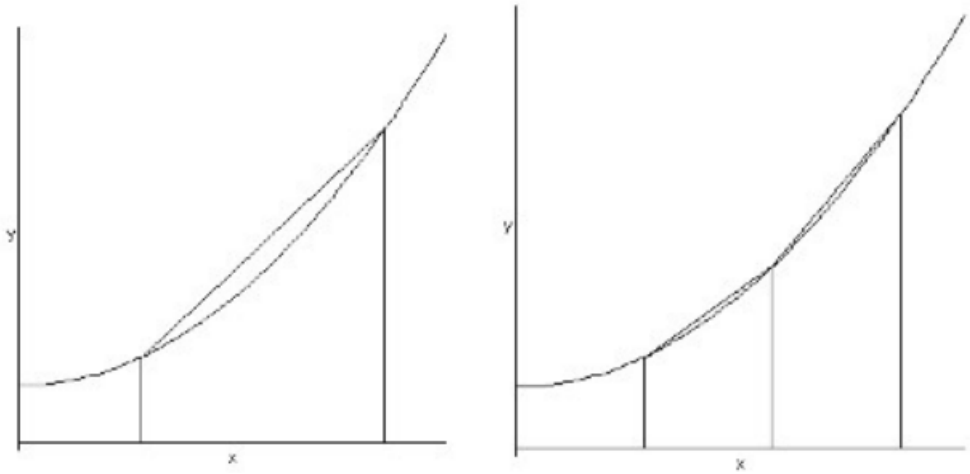
[133] Texto original: "Dividir el intervalo de trabajo en un número suficientemente grande de subintervalos, para ilustrar las sumas de Riemman construidas con altura sobre el extremo izquierdo, sobre el extremo derecho o sobre el punto medio de cada uno de ellos, mientras se aprecia en pantalla el valor numérico de la suma correspondiente. • Estimar con suficiente precisión el valor exacto del área bajo la curva en un intervalo dado, mediante la simulación del paso al límite de una suma de Riemman, haciendo crecer lo suficiente el número de subintervalos. • Observar en pantalla la variación del área acumulada bajo una curva en un intervalo, conforme varía el extremo derecho de este, mientras se muestra una traza que permite observar gráficamente el comportamiento de dicha variación. • Construir la gráfica de la función área acumulada o función integral, a partir de la variación del extremo derecho del intervalo, con la posibilidad de observar las características de la curva resultante (comportamiento creciente o decreciente, puntos de no derivabilidad, máximos y mínimos, etcétera). • Realizar acercamientos sucesivos a la curva de la función integral para visualizar su linealidad local.".

[134] Endereço eletrônico: https://www.maplesoft.com/

da indução matemática. Através de uma sequência de técnicas, os alunos iam utilizando os comandos e fazendo inferências sobre os resultados obtidos. Os alunos utilizaram a calculadora gráfica TI 83/84 e o software *Maple* para encontrar resultados de área e, por não terem aprendido uma fórmula para área sob a curva, entraram no processo de descoberta, através do método de indução, para encontrar uma aproximação.

Com um número variável de instanciações, o software permitiu fazer subdivisões para aproximar a área sob a curva, mesmo sem os alunos conhecerem a demonstração da soma de Riemann e de integral. Por exemplo, foi sugerido aos alunos que explorassem curvas não lineares, já que eles não haviam aprendido uma fórmula para a área sob esse tipo de curva. Então, iniciaram com $y = x^2$ e, a partir da análise do gráfico (Figura 66) buscaram uma aproximação pela área de um trapézio e, sucessivamente, fazendo subdivisões, para deduzirem uma fórmula.

Figura 66 - Aproximação da área sob a curva y = x²



$$Area \approx \left\{\frac{x_1 + x_0}{2}\left[x_1^2 - x_0^2\right] + \left[(k_p - x_1 x_0)(x_1 - x_0)\right]\right\} + \left\{\frac{x_2 + x_1}{2}\left[x_2^2 - x_1^2\right] + \left[(k_p - x_2 x_1)(x_2 - x_1)\right]\right\}$$

Fonte: Gratzer e Krishnan (2009, p. 467; 470).

Para a realização do método utilizado, os autores apontam as seguintes tarefas a serem realizadas por professores:

- Permita que os alunos usem um triângulo para aproximar a área desejada
- Permita que os alunos descubram a conexão entre triângulos, declive e área
- Peça aos alunos que usem um trapézio para aproximar a área desejada
- Permita que os alunos descubram a conexão entre trapézios, declive e área
- Sugira que mais trapézios resultem em uma melhor aproximação
- Deduza a regra trapezoidal e valide usando indução matemática
- Mostre que a área de um trapézio é a média das áreas de dois retângulos
- Desenhe uma imagem mostrando uma aproximação usando retângulos para a direita

> • Desenhe uma imagem mostrando uma aproximação usando retângulos para a esquerda
> • Sugira que mais retângulos resultam em uma melhor aproximação
> • Introduza a Soma de Riemann
> • Introduza limites e defina a integral definida
> (GRATZER e KRISHNAN, 2009, p. 475, tradução nossa)[135].

Como abordagem inicial, eles sugerem que seja iniciado com um problema envolvendo o uso de funções polinomiais de baixo grau e, em seguida, dê liberdade aos alunos para seguirem um caminho de descoberta usando a intuição.

Esses procedimentos sugeridos pelos autores poderão ser convertidos em tipos de tarefas que irão exigir a mobilização de técnicas desenvolvidas durante a integração com o software. No caso do *Maple*, a computação algébrica utilizada para a modelagem dos problemas demanda o conhecimento de certos comandos para escrever os algoritmos em que novos objetos ostensivos vão ser evidenciados. Um exemplo simples é dado quando se deseja obter resultados de divisões com casas decimais. Deve-se colocar um ponto após o número que está no numerador, caso contrário, o *Maple* retornará o resultado na forma simbólica. Poderia, então, utilizar o comando *evalf*, que pode retornar um número com até dez casas decimais. Caso coloque o símbolo "%", o comando retorna o último valor.

Figura 67 - Exemplo de utilização de comandos no Maple

Fonte: Alencar e Matias (2012, p. 9).

[135] Texto original: "Allow students to use a triangle to approximate a desired area • Allow students to discover the connection among triangles, slope, and area • Have students use a trapezoid to approximate a desired area • Allow students to discover the connection among trapezoids, slope, and area • Suggest that more trapezoids result in a better approximation • Deduce the trapezoidal rule and validate using mathematical induction • Show that the area of a trapezoid is the mean of the areas of two rectangles • Draw a picture showing an approximation using left-handed rectangles • Draw a picture showing an approximation using right-handed rectangles • Suggest that more rectangles result in a better approximation • Introduce Riemann Sums • Introduce limits and define the definite integral.".

Para a derivada, o sistema fornece os comandos “diff” e “Diff”. Utilizando *diff*(*f*(*x*), *x*), retornará a derivada da função *f* em relação a *x*. Já o comando *Diff*(*f*(*x*), *x*) vai mostrar a expressão da derivada que é usualmente utilizada, sem calculá-la. Para a integral, os comandos fornecidos são “int” e “Int”. Ao utilizar *int*(*f*(*x*), *x*), o sistema irá retornar a integral da função *f* em relação a *x*, podendo calcular uma integral indefinida ou definida. Se for integral definida, o parâmetro *x* deve ser substituído por *x* = *a* ..*b*, em que *a* e *b* são os extremos do intervalo de integração. O comando *Int*(*h*(*x*), *x* = *a* ..*b*), de modo análogo ao comando “Diff”, mostra a expressão da integral que usualmente é utilizada, sem calculá-la.

Portanto, a interação com o ambiente vai acontecer a partir da instrumentalização com as ferramentas do *Maple* que, em suas versões mais recentes, tem buscado o desenvolvimento de uma interface mais intuitiva para o usuário, por exemplo, ao fornecer sintaxes dos comandos similares às notações já utilizadas na Matemática, como o sinal da derivada, da integral e outras operações mais elementares.

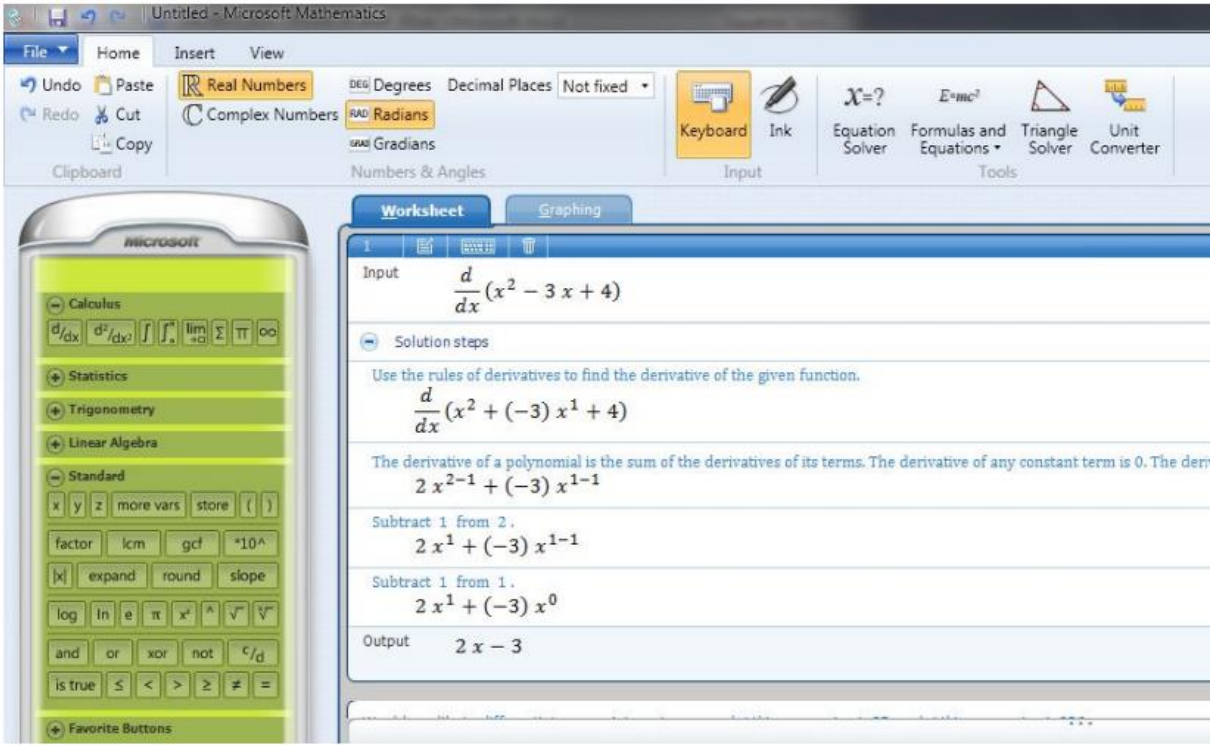
O software *Microsoft Mathematics*[136], também citado nas pesquisas, é mais limitado que o Maple em termos de funcionalidades, mas possui um sistema de computação simbólica e trabalha com expressões matemáticas.

Este aplicativo é gratuito, feito pela *Microsoft Corporation* e é destinado a auxiliar os alunos a resolverem problemas de Álgebra Linear, Estatística, Cálculo e Trigonometria, fornecendo a possibilidade de calcular resultados numéricos, manipular expressões algébricas e traçar gráficos em duas ou três dimensões com animação.

Oktaviyanthi e Supriani (2015) fizeram um estudo experimental para investigar a utilização do *Microsoft Mathematics* no ensino e aprendizagem de Cálculo, baseado na resolução de problemas. Segundo explicam, a solução era apresentada por etapas, da maneira como é feita manualmente. Por exemplo, para a função $f(x) = x^2 - 3x + 4$, ao investigar a primeira derivada de *f*(*x*) no software, são mostradas as etapas correspondentes (Figura 68).

[136] Endereço eletrônico: https://www.microsoft.com/pt-br/download/details.aspx?id=17786

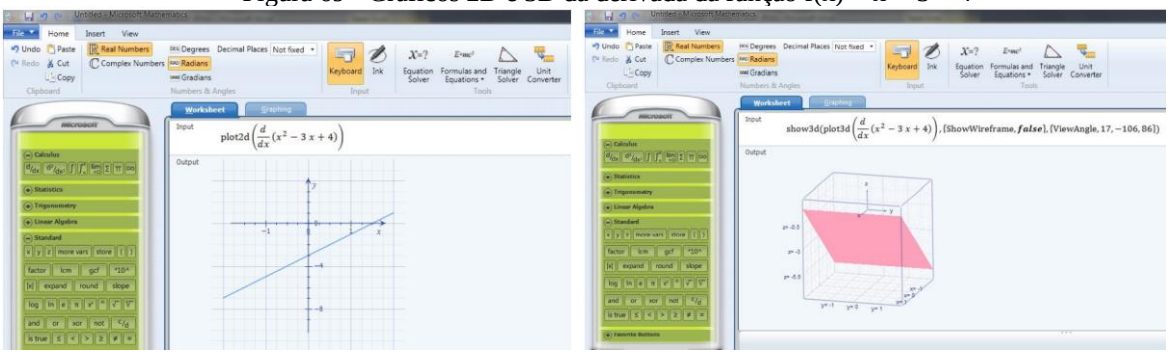
Figura 68 - Etapas do método a diferenciação no *Microsoft Mathematics*



Fonte: Oktaviyanthi e Supriani (2015, p. 66).

Os gráficos 2D e 3D da derivada também foram obtidos, como mostra a Figura 69.

Figura 69 - Gráficos 2D e 3D da derivada da função f(x) = x² - 3 + 4



Fonte: Oktaviyanthi e Supriani (2015, p. 66).

Oktaviyanthi e Supriani organizaram as atividades de utilização do software com base em três finalidades, como mostra o Quadro 29. Eles ressaltam que o software recomenda aos alunos não apenas descobrir os conceitos de Cálculo, mas também comunicar os conceitos matematicamente.

Segundo os resultados apresentados por esse estudo, com a utilização do *Microsoft Mathematics*, os alunos puderam apresentar as suas soluções utilizando diferentes abordagens, reduzindo o tempo de resolução e fornecendo feedback imediato ao professor durante a aula.

Quadro 29 - Apresentação de atividades utilizando o *Microsoft Mathematics*

Objetivo de usar a ferramenta		Descrição	Benefícios pedagógicos
Promovendo exercícios e prática	Como solução de problemas	Os alunos usaram o Microsoft Mathematics para tentar diferentes abordagens para resolver um determinado problema de cálculo. Por exemplo, ao resolver problemas, os alunos podem começar a procurar uma solução com a abordagem gráfica, numérica ou algébrica.	Redução do tempo necessário para praticar habilidades básicas Todos os alunos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem
	Como um cálculo	Os alunos aplicaram o Microsoft Mathematics para determinar os valores da função ou para estimar várias expressões do Cálculo.	
Variação de parâmetros	Como uma visualização	Os alunos utilizaram o Microsoft Mathematics para facilitar a melhor visualização de uma função, do conceito que é ensinado ou da situação-problema. Por exemplo, os alunos alterando os parâmetros da função Cálculo e observando as alterações nas características do gráfico	O feedback direto é útil para fazer a relação entre os parâmetros nas funções de Cálculo e ajudar a construir um efeito variável na representação gráfica
	Como um gráfico	Os alunos usaram o Microsoft Mathematics para representar graficamente a função e resolver problemas relacionados à área sob uma curva ou área de interseção das duas curvas.	
Compreensão conceitual	Como um exploratório	Microsoft Mathematics aplicado para investigar e reconhecer conceitos de integração. Para ilustração, os alunos exploraram e apresentaram a integração de uma ou mais funções usando o Microsoft Mathematics nas representações algébrica e gráfica	Ênfase no reconhecimento de aprender o algoritmo para resolver equações de funções
	Como um confirmatório	Os alunos aplicaram o Microsoft Mathematics para validar suas respostas em tarefas de resolução de problemas.	

Fonte: Oktaviyanthi e Supriani (2015, p. 68-69, tradução nossa).

O conteúdo original desse quadro, conforme ao que aparece no estudo de Oktaviyanthi e Supriani, está apresentado no Quadro 30.

Quadro 30 - Presentation of Activities Utilizing Microsoft Mathematics

Purpose of using the tool		Description	Pedagogical benefits
Promoting drill and practice	As a problem solving	Students used Microsoft Mathematics to try different approaches to solve a given Calculus problem. For example, in solving problems students may start looking for a solution with the graphical, numerical, or algebraic approach.	Reduction time required to practice basic skills All students involved in teaching and learning process

	As a calculation	Students applied Microsoft Mathematics to determine of the values of the function or to estimate Calculus multiple expressions.	
Variation of parameters	As a visualization	Students utilized Microsoft Mathematics to facilitate the better visualization of a function, the concept that is taught or problem situation. For example, students changing parameters of the Calculus function and looking at the changes in the graphical characteristics.	Direct feedback is helpful to make the relation between the parameters in Calculus functions and assist to construct a variable effect the graphical representation
	As a graphing	Students used Microsoft Mathematics to graph function and to solve problems related to area under a curve or area of intersection of the two curves.	
Conceptual understanding	As an exploratory	Microsoft Mathematics applied to investigate and recognize concepts of integration. For illustration, students explored and presented integration of one or more function using Microsoft Mathematics in the algebraic and graphical representation.	Emphasis on recognizing of learning the algorithm for solving function equations
	As a confirmatory	Students applied Microsoft Mathematics to validate their answers in problem solving tasks.	

Fonte: Oktaviyanthi e Supriani (2015, p. 68-69).

Observamos que, além da descrição das etapas de resolução, o aspecto visual do software foi um elemento essencial evidenciado pelos autores.

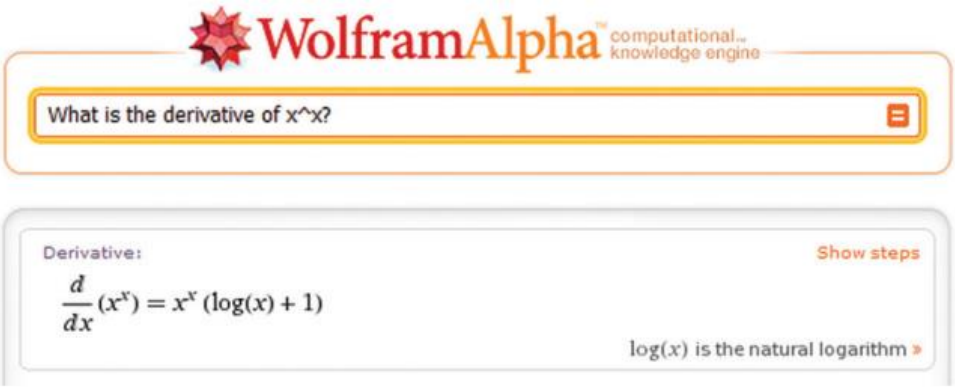
> A visualização interativa, que é um ramo da visualização gráfica na ciência da computação, é um componente essencial oferecido pela Microsoft Mathematics. Facilita aos alunos uma melhor compreensão do conteúdo matemático e envolve o estudo de como os alunos interagem com o computador para melhorar a representação que não é obtida com o ensino convencional. (OKTAVIYANTHI e SUPRIANI, 2015, p. 74, tradução nossa)[137].

O software Wolfram|Alpha foi também citado nas pesquisas. Dimiceli, Lang e Locke (2010) descreveram as vantagens e desvantagens de usá-lo como plataforma para o ensino de conceitos de Cálculo usando um Sistema de Álgebra Computacional (CAS), além de discutirem também sobre as suas limitações.

[137] Texto original: "Interactive visualization which is a branch of graphic visualization in computer science is essential components offered by Microsoft Mathematics. It facilitates students to better understand in mathematical content and involve studying how students interact with computer to improve representation that is not obtained with conventional teaching".

O Wolfram|Alpha[138] é um sistema *online* gratuito, desenvolvido pela *Wolfram Research*, que calcula dinamicamente os resultados de consultas feitas em linguagem natural, aplicando algoritmos em seu extenso banco de dados interno. Os usuários podem consultar ou enviar solicitações de cálculo como "Qual é a derivada de x^x?" por meio de uma caixa de texto padrão. O Wolfram|Alpha responde com dados e resultados computados em representações textuais, simbólicas e gráficas (Figura 70).

Figura 70 - Caixa de texto do Wolfram|Alpha



Fonte: Dimiceli, Lang e Locke (2010, p. 1062).

Os autores justificam que a escolha pelo sistema se deu, inicialmente, pela equipe de Cálculo da universidade ter formado uma colaboração com a equipe da *Wolfram Research*. A outra motivação foi a de que os alunos, segundo eles, não utilizam muitos dos componentes de um CAS completo, como o *Mathematica*[139] e, portanto, reduz o custo para a universidade. Uma terceira vantagem é a oportunidade para os alunos terem acesso de qualquer lugar, não tendo que ficar dependentes do laboratório que possui quantidade limitada de computadores.

Outras vantagens também foram ressaltadas, como:

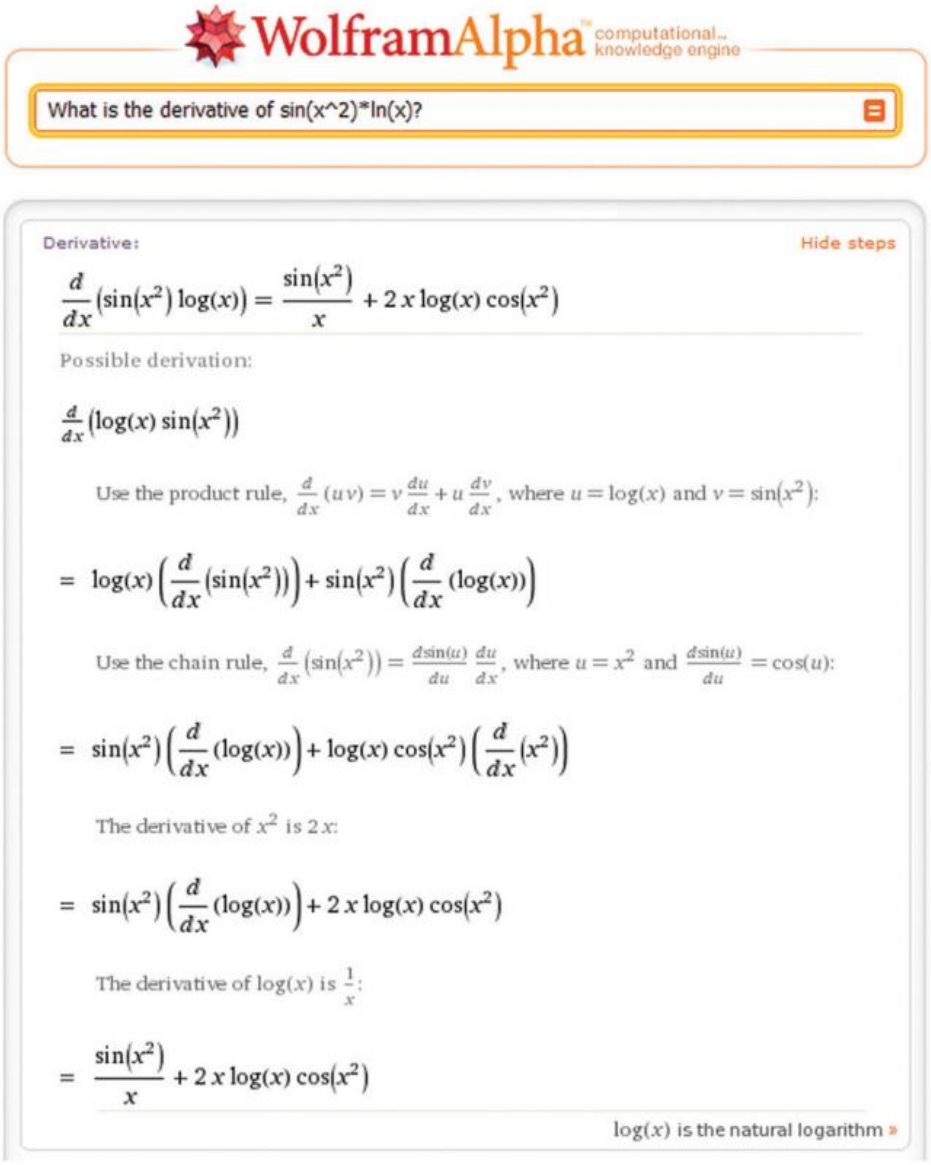
- redução da sintaxe para fazer perguntas;
- fornece muitas informações sobre a pergunta inicial, pois reporta todo o conhecimento do seu banco de dados;
- exibe as etapas para chegar a uma solução (Figura 71);
- permite copiar os resultados de saída, incluindo gráficos;
- oferece mais recursos do que uma calculadora gráfica.

Quanto à apresentação de problemas no software, os autores relataram que a maioria foi resolvida muito rapidamente à medida que se comunicava com a *Wolfram Research*. Por

[138] Endereço eletrônico: https://www.wolframalpha.com/
[139] Endereço eletrônico: https://www.wolfram.com/mathematica/

exemplo, para avaliar uma derivada em um ponto, foi possível no início, mas só poderia ser obtida usando uma sintaxe que não era natural para o aluno, mas já foi solucionado. Um problema ainda pendente, segundo eles, é a questão de controlar a proporção e a janela exata para certos gráficos.

Figura 71 - Tela do Wolfram|Alpha com o comando “Mostrar etapas”



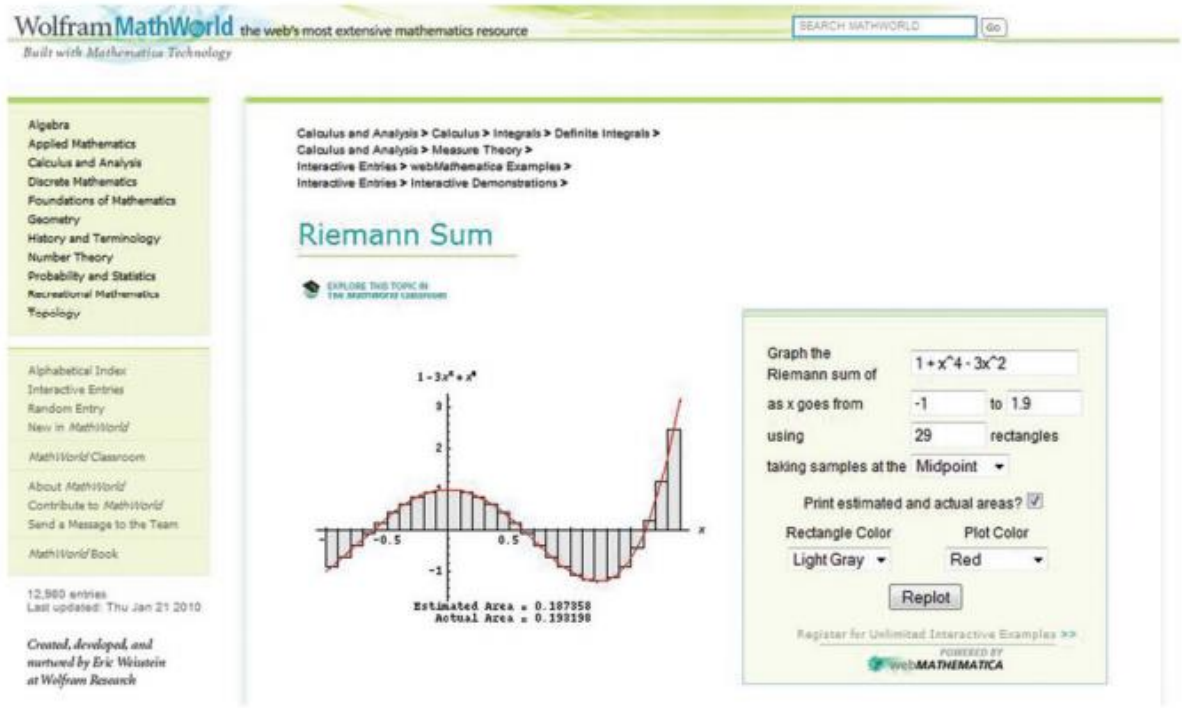
Fonte: Dimiceli, Lang e Locke (2010, p. 1064).

Uma outra observação feita pelos autores é que existem alguns conceitos que o Wolfram|Alpha não pode abordar diretamente, como a técnica de aproximação para integração. O sistema não retorna a um resultado numérico ou gráfico de uma solicitação para aproximar uma integral, usando o trapézio ou a regra de Simpson. Mas apesar disso, o aluno pode acessar

o link para o *Wolfram Demonstration Project*[140], do site do Wolfram|Alpha ou visitar o *MathWorld*[141], outra criação *Wolfram*.

Acessando o site *MathWorld* e digitando "*Riemann Sum*" na caixa de busca, o aluno tem acesso a um reprodutor que permitirá inserir a função, o intervalo, a quantidade de subintervalos e selecionar o método de aproximação (Figura 72).

Figura 72 - Atividade "Soma de Riemann" no *MathWorld*



Fonte: Dimiceli, Lang e Locke (2010, p. 1068).

O *Wolfram Demonstration Project* é uma página de internet criada para hospedar diversas aplicações computacionais, chamadas de "Demonstrações", para permitir a visualização e interação em distintas áreas. Dimiceli, Lang e Locke explicam que, para visualizar as atividades listadas no *Wolfram Demonstration Project*, o aluno deve baixar (sem custo) um *Mathematica Player*. Se o aluno estiver utilizando o seu próprio computador, isso não é um problema; no entanto, se estiver em uma sala de aula do laboratório da universidade, pode haver alguns problemas de tecnologia da informação (TI) ao permitir que os alunos façam o download gratuitamente. (DIMICELI, LANG e LOCKE, 2010, p. 1068).

Na avaliação dos autores, a utilização do Wolfram|Alpha como mecanismo de computação para os laboratórios de cálculo iniciantes não só é possível, mas também oferece

[140] Endereço eletrônico: http:// demonstrations.wolfram.com
[141] Endereço eletrônico: https://mathworld.wolfram.com/

vantagens sobre os CAS padrão. Dentre as vantagens, estão: independência de plataforma, processamento de linguagem natural, estar sempre atualizado, recurso de detalhes e custo (para alunos e instituições). Ainda revelaram que, apesar de o Wolfram|Alpha não ser tão poderoso quanto um CAS padrão, a experiência de converter os laboratórios baseados em CAS para esse sistema foi, em geral, boa, com exceção para o caso de ser utilizado para disciplinas além do Cálculo 2. (DIMICELI, LANG e LOCKE, 2010, p. 1070).

A respeito do *Modellus*[142], evidenciado nas pesquisas, este software foi desenvolvido e continua sendo aprimorado pelo grupo liderado pelo Prof. Vitor Teodoro, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Ele permite explorar modelos matemáticos de determinados fenômenos, podendo modificar os parâmetros, as condições iniciais, etc.

Dentre as suas principais funções, estão a de:

- realizar cálculos numéricos baseados em equações e dados especificados pelo usuário;
- apresentar os resultados na forma de gráficos e tabelas;
- facultar a montagem de animações;
- fazer medidas de distâncias e ângulos sobre uma imagem.

Soares e Borba (2014) investigaram o papel do software *Modellus* no desenvolvimento de uma abordagem de ensino de Cálculo para os alunos de Biologia, em que eles propuseram a análise de um fenômeno biológico no início do curso para que fosse inter-relacionada com alguns conceitos matemáticos.

Na opinião dos autores,

> o potencial do software em contribuir significativamente para a compreensão de conceitos matemáticos não é predeterminado pela estrutura do software. Segundo nossa observação, esse potencial está parcialmente relacionado ao desenho da atividade e às intervenções do professor, o que pode contribuir para a conscientização dos alunos sobre a utilidade de determinados recursos do software para trabalhar com o problema em foco. (SOARES e BORBA, 2014, p. 576, tradução nossa)[143].

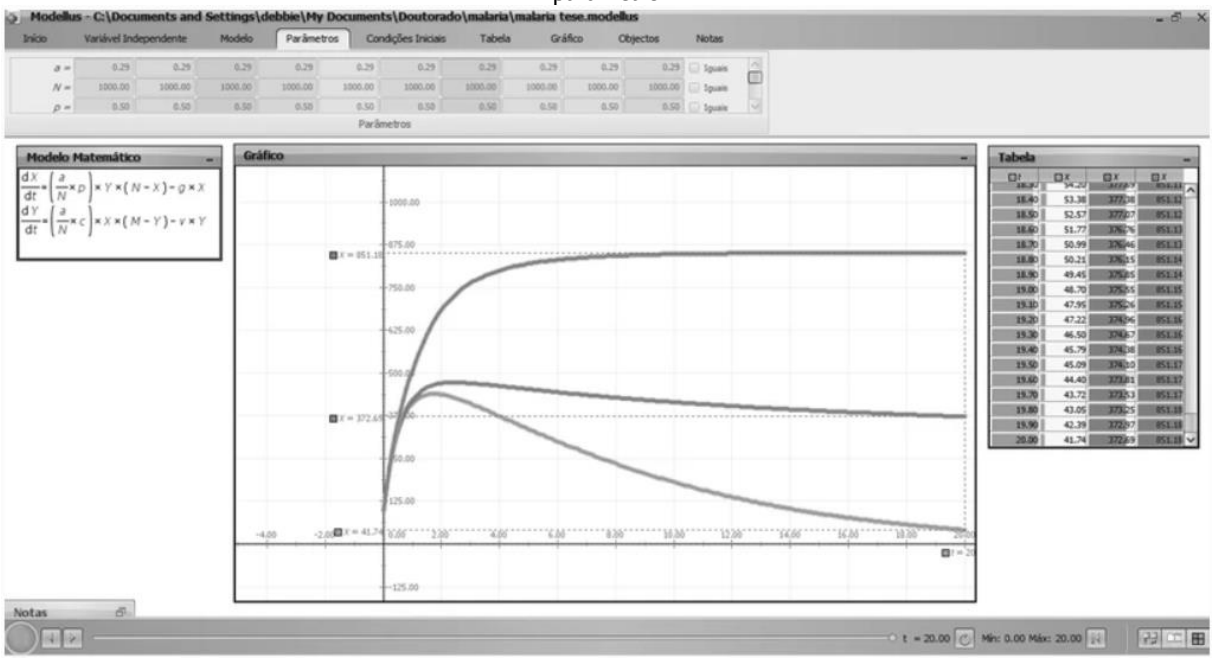
Sobre a análise proposta, os autores explicam que não envolvia a obtenção de expressões analíticas, já que era uma análise qualitativa com foco na compreensão do significado das

[142] Endereço eletrônico: https://docentes.fct.unl.pt/vdt/pages/modellus-software-documents

[143] Texto original: "[Specifically, we argue that] the potential for the software to contribute significantly to the comprehension of mathematical concepts is not predetermined by the structure of the software. According to our observation, this potential is partially related to the design of the activity and to the teacher's interventions, which can contribute to raising students' awareness about the utility of certain resources of the software to work with the problem in focus".

equações e também no comportamento das soluções. Nesse sentido, o software *Modellus* desempenhou um papel importante, pois "permite definir valores para parâmetros e condições iniciais do model e fornece representações gráficas e tabulares para as soluções." (SOARES e BORBA, 2014, p. 578, tradução nossa)[144], além da possibilidade de visualizar múltiplas representações (Figura 73).

Figura 73 - Interface do *Modellus* com as múltiplas representações da função X(t) para três valores de um parâmetro



Fonte: Soares e Borba (2014, p. 578).

Uma das atividades consistia em discutir a interpretação da derivada de uma função relacionada ao fenômeno biológico e, para isso, os alunos utilizaram calculadora assim como o software GeoGebra nos trabalhos em grupo. Além disso, utilizaram o software *Modellus* para que pudessem refletir sobre a interpretação com base na análise de uma função a qual não conheciam a expressão analítica, apenas o gráfico e os valores numéricos.

Os autores observaram que o *Modellus* cumpriu a função de fornecer informações sobre o fenômeno, com representações familiares aos alunos (gráfico, tabela) que os auxiliaram nas discussões sobre o fenômeno. Com o feedback visual e os comandos de *zoom*, os alunos puderam acessar e analisar as informações, construir argumentos e tomar decisões baseadas na compreensão dos conceitos envolvidos.

[144] Texto original: "[Modellus] enables one to set values for parameters and initial conditions of the model and provides graphical and tabular representations for the solutions.".

Considerando que qualquer que seja o(s) recurso(s) que o professor utilize para ensinar, seja o GeoGebra combinado com o *Modellus*, a calculadora ou a explicação no quadro, os autores expõem que o desafio é melhorar o desenho da sequência pedagógica para ajudar os alunos a interagirem com o software.

Sobre esse aspecto, ressaltamos anteriormente que a exploração dos softwares oferece muitas experiências, mas não garante que o aprendizado ocorra. Uma possibilidade é desenvolver situações de ensino que possibilite interações entre os alunos, o software e o conhecimento, e o professor assumindo uma posição diante do ambiente que possa mediar o processo de aprendizagem, seus resultados e o significado que os alunos construirão.

Concordamos com Balacheff e Kaput (1997) que

> Uma maneira de gerenciar essa complexidade é explorar a sensibilidade da resolução de problemas dos alunos às modificações da situação do problema e considerar como variáveis da situação aquelas características cujas modificações podem influenciar as estratégias dos alunos (Artigue 1992, p. 50). A atividade longe do computador pode ser uma variável, uma vez que pode desempenhar um papel importante na mudança dos alunos de fazer para pensar sobre sua ação. Outras variáveis mais especificamente relacionadas com os problemas em consideração podem desempenhar um papel semelhante [...]. (BALACHEFF e KAPUT, 1997, p. 484, tradução nossa)[145].

O estudo dessas variáveis fez parte de nossa investigação ao buscar estruturar situações específicas relativas ao Teorema Fundamental do Cálculo, analisando as praxeologias relacionadas a esse objeto do saber e desenvolvendo a sua modelização computacional.

Nessa perspectiva, buscamos olhar para os softwares matemáticos e identificamos algumas especificidades que avaliamos no que diz respeito ao domínio da fenomenologia, ou seja, dos principais recursos e características disponíveis na interface que podem ser manipulados pelo sujeito para a construção de significados.

Os trabalhos que tivemos acesso apontaram alguns aspectos, os quais apresentamos no Quadro 31.

Quadro 31 - Características dos Softwares Matemáticos

GEOGEBRA	Ao representar o gráfico de uma função na tela do computador, outras janelas se abrem apresentando a correspondente expressão algébrica e, por vezes, outra janela com uma planilha contendo as coordenadas de alguns pontos pertencentes ao gráfico.

145 Texto original: "A way to manage this complexity is to explore the sensitivity of learners' problem-solving to modifications of the problem situation, and to consider as variables of the situation those characteristics whose modification is likely to influence learners' strategies (Artigue 1992, p. 50). Activity away from the computer can be such a variable, since it may play an important role in shifting learners from doing to thinking about their action. Other variables more specifically related to the problems being considered could play a similar role […]. To identify those variables for a given problem that are available within one environment but not another, or that are made available with different characteristics by one or the other, is one way to specify the didactical validity of a computer environment".

	As alterações no gráfico imediatamente são visíveis na janela algébrica e na planilha de pontos.
	As propriedades da função podem ser analisadas a partir das fórmulas (limites, derivadas, equações, etc.) e dos gráficos correspondentes, possibilitando a visualização em cada etapa do cálculo e, consequentemente, auxiliando na análise adequada das propriedades da função.
AUTOGRAPH	Permite a visualização e a manipulação dinâmica de objetos matemáticos em 2D e 3D.
	Possibilita a ligação entre recursos como a Internet, o Excel, o Word e o próprio programa, podendo fazer a importação ou exportação de dados.
	As suas ferramentas permitem: construir gráficos como histogramas e gráficos cumulativos; construir gráficos com duas dimensões e gráficos de dispersão; introduzir expressões e verificar a imagem visual gráfica em duas ou três dimensões; criar objetos e poder fazer rotações, translações, ampliações, reduções ou transformações através de matrizes.
	Aplicando o *zoom* repetidamente, centralizado na curva, é possível observar a retidão local e o ressurgimento dos retângulos de forma recursiva.
APLLET DESCARTES	Permite decompor o intervalo de trabalho em uma quantidade suficientemente grande de subintervalos, para ilustrar as somas de Riemann construídas por cima da extremidade esquerda sobre a extremidade direita ou o ponto central de cada um, enquanto o valor numérico exibido na tela dá a soma correspondente.
	Estimar com precisão suficiente o valor exato da área sob a curva em um determinado intervalo, simulando a etapa até o limite de uma soma de Riemann, fazendo com que a quantidade de subintervalos cresça o suficiente.
	Observar na tela a variação da área acumulada sob uma curva em um intervalo, pois a extremidade direita da curva varia, enquanto é mostrado um traço que permite observar graficamente o comportamento da referida variação.
	Construir o gráfico da *função área acumulada* ou *função integral*, *a* partir da variação da extremidade direita do intervalo, com a possibilidade de observar as características da curva resultante (comportamento crescente ou decrescente, pontos de não derivabilidade, máximo e mínimo, etc.).
	Fazer aproximações sucessivas à curva da função integral para visualizar sua linearidade local.
MAPLE	Com um número variável de instanciações, o software permite fazer subdivisões para aproximar a área sob a curva.
	Fornece os comandos “diff” e “Diff”. Utilizando *diff*(*f*(*x*), *x*), retornará a derivada da função *f* em relação a *x*. Já o comando *Diff*(*f*(*x*), *x*) vai mostrar a expressão da derivada usual, sem calculá-la. Para a integral, os comandos fornecidos são “int” e “Int”. Ao utilizar *int*(*f*(*x*), *x*), o sistema retornará a integral da função *f* em relação a *x*, podendo calcular uma integral indefinida ou definida. Se for integral definida, o parâmetro *x* deve ser substituído por *x* = *a* ..*b*, em que *a* e *b* são os extremos do intervalo de integração. O comando *Int*(*h*(*x*), *x* = *a* ..*b*), de modo análogo ao comando “Diff”, mostra a expressão da integral usual, sem calculá-la.
	Fornece sintaxes dos comandos similares às notações já utilizadas na matemática, como o sinal da derivada, da integral e outras operações mais elementares.
MICROSOFT MATHEMATICS	Fornece solução com a abordagem gráfica, numérica ou algébrica.
	Determinar os valores da função ou estimar várias expressões do Cálculo.
	Alterar os parâmetros da função Cálculo e observar as modificações nas características do gráfico.
	Representar graficamente a função e resolver problemas relacionados à área sob uma curva ou área de interseção das duas curvas.
	Explorar e apresentar a integração de uma ou mais funções nas representações algébrica e gráfica.
	Validar as respostas em tarefas de resolução de problemas.

WOLFRAM|ALPHA	Calcula dinamicamente os resultados de consultas feitas em linguagem natural, aplicando algoritmos em seu extenso banco de dados interno.
	Os usuários podem consultar ou enviar solicitações de cálculo como "Qual é a derivada de x^x?" por meio de uma caixa de texto padrão. O Wolfram|Alpha responde com dados e resultados computados em representações textuais, simbólicas e gráficas.
	Redução da sintaxe para fazer perguntas; fornece muitas informações sobre a pergunta inicial, pois reporta todo o conhecimento do seu banco de dados; exibe as etapas para chegar a uma solução; permite copiar os resultados de saída, incluindo gráficos; oferece mais recursos do que uma calculadora gráfica.
	Para avaliar uma derivada em um ponto, só poderia ser obtida usando uma sintaxe que não era natural para o aluno, mas já foi solucionado.
	Um problema ainda pendente é a questão de controlar a proporção e a janela exata para certos gráficos.
	Existem alguns conceitos que o software não pode abordar diretamente, como a técnica de aproximação para integração. O sistema não retorna a um resultado numérico ou gráfico de uma solicitação para aproximar uma integral, usando o trapézio ou a regra de Simpson. Mas apesar disso, o aluno pode acessar o link para o *Wolfram Demonstration Project*, do site do Wolfram|Alpha ou visitar o *MathWorld*, outra criação *Wolfram*.
	Acessando o site *MathWorld* e digitando "*Riemann Sum*" na caixa de busca, o aluno tem acesso a um reprodutor que permitirá inserir a função, o intervalo, a quantidade de subintervalos e selecionar o método de aproximação.
MODELLUS	Permite explorar modelos matemáticos de determinados fenômenos, podendo modificar os parâmetros, as condições iniciais, etc.
	Realizar cálculos numéricos baseados em equações e dados especificados pelo usuário; apresentar os resultados na forma de gráficos e tabelas; facultar a montagem de animações; fazer medidas de distâncias e ângulos sobre uma imagem.
	Permite definir valores para parâmetros e condições iniciais do modelo e fornece representações gráficas e tabulares para as soluções, além da possibilidade de visualizar múltiplas representações.
	Fornece informações sobre o fenômeno, com representações familiares aos alunos (gráfico, tabela) que os auxiliaram nas discussões sobre o fenômeno. Com o feedback visual e os comandos de *zoom*, os alunos podem acessar e analisar as informações, construir argumentos e tomar decisões baseadas na compreensão dos conceitos envolvidos.

Fonte: A autora (2022).

Estas características dos softwares foram apontadas pelos autores como relevantes na resolução de problemas de derivação e integração. Essa descrição do domínio e o tipo de feedback que ela permite é fundamental, considerando que a aprendizagem será obtida através da adaptação do aluno às restrições de comunicação com a interface e o seu comportamento (BALACHEFF e SUTHERLAND, 1994, p. 145).

Na caracterização que realizamos anteriormente, já havíamos apontados alguns desses aspectos evidenciados na análise dos softwares. Daí, fizemos uma categorização, analisamos[146] e os relacionamos, no Quadro 32, com as funcionalidades do Micromundo em cada tipo de situação.

[146] Utilizamos os critérios de pertinência, consistência e integralidade para especificar aqueles que pudessem atender aos tipos de situações relativas ao teorema fundamental.

Quadro 32 - Outros requisitos especificados

FUNCIONALIDADES	REQUISITOS
S_1 - Esboçar o gráfico da função	
V_{ost_num} *- Determinar o valor da integral em um dado intervalo* *- Determinar o valor da primeira derivada em determinado ponto* *- Determinar o valor da segunda derivada em determinado ponto* *- Determinar o valor da função em determinado ponto* *- Determinar as raízes da função* *- Determinar os pontos críticos dada a expressão da função* *- Determinar valores extremos máximo e mínimo da função* *- Determinar os pontos de inflexão* *- Determinar o coeficiente angular da tangente em determinado ponto*	• Comando "Integral" que recebe como parâmetros a função integranda e um valor do domínio • Comando "Primeira Derivada" que recebe como parâmetros a função e um valor do domínio • Comando "Segunda Derivada" que recebe como parâmetros a função e um valor do domínio • Comando "Valor da Função" que recebe como parâmetros a função um valor do domínio • Comando "Raízes da Função" que recebe como parâmetro a função • Comando "Pontos críticos" que recebe como parâmetro a função • Comando "Valor máximo" que recebe como parâmetro a função • Comando "Valor mínimo" que recebe como parâmetro a função • Comando "Pontos de inflexão" que recebe como parâmetro a função • Comando "Coeficiente angular" que recebe como parâmetro a equação da reta tangente e um valor do domínio • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos
V_{ost_alg} *- Inserir coordenadas de um ponto* *- Inserir expressão de uma curva* *- Calcular soma de áreas de regiões finitas* *- Calcular as raízes de uma função* *- Calcular a integral de uma função* *- Calcular a derivada de uma função integral* *- Calcular números críticos* *- Calcular extremos relativos* *- Determinar os pontos em que a concavidade é para cima e para baixo* *- Inserir texto* *- Inserir nova janela algébrica (associada a nova janela gráfica)* *- Determinar as assíntotas*	• Campo de entrada recebe como parâmetros as coordenadas do ponto • Campo de entrada recebe como parâmetro a função • Campo de entrada recebe como parâmetros as coordenadas do ponto • Coordenação entre os diferentes registros de representação • Mobilização e coordenação das representações do mesmo objeto • Abertura simultânea de janelas de visualização de mais de uma função • Visualização analítica das etapas de resolução • Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Importação e exportação de dados para Excel e Word • Copiar resultados da saída • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Feedback de respostas de questões • Consulta de resolução de questões em banco de dados em qualquer representação • Importação de técnicas que permite a inserção de parâmetros
V_{ost_geo} *- Inserir ponto* *- Inserir reta* *- Inserir polígono* *- Medir comprimento*	• Botão que permite inserir ponto com menu de opções (ponto solto, ponto vinculado à objeto, ponto de intersecção)

	• Botão que permite inserir reta com menu de opções (reta solta, reta perpendicular, reta paralela, reta tangente, assíntotas, eixo simétrico) • Botão que permite inserir polígono com menu de opções (polígono qualquer, polígono regular) • Marcar o comprimento sobre o gráfico e acionar o botão "medir" e o resultado aparecerá na tela • Esconder, mostrar, renomear, mudar de cor, apagar objetos • Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Importação e exportação de dados para Excel e Word • Criar objetos e fazer rotações, translações, ampliações, reduções • Controles de animação • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Realização de medidas e ângulos sobre imagens
***V**ost_gr* *- Plotar o gráfico da função integral dada a expressão* *- Plotar o gráfico da derivada de uma função dada a expressão* *- Plotar o gráfico da integral dado o gráfico de uma função* *- Plotar o gráfico da derivada dado o gráfico de uma função* *- Marcar os raízes da função* *- Desenhar as assíntotas* *- Desenhar eixos simétricos* *- Criar tabela vinculada ao gráfico* *- Marcar pontos* *- Desenhar curva* *- Preencher (hachurar, pintar) região determinada* *- Renomear objetos* *- Criar seletor* *- Inserir nova janela gráfica (associada a nova janela algébrica)* *- Inverter eixos coordenados* *- Escolher escala dos eixos coordenados*	• Comando que recebe como parâmetro a função • Comando "Derivada", "Integral", "Raízes", que recebe como parâmetro a função que está "incorporada" ao gráfico. Clicando no gráfico, a função é "copiada" • Comando "Tabela" que recebe como parâmetros a classe e a amplitude do intervalo da classe • Comando "Ponto" recebe as coordenadas • Comando recebe as expressões da função que representa a área e botão pinta a região • Esconder, mostrar, renomear, mudar de cor, apagar objetos • Criar controle deslizante e receber como parâmetro os valores do intervalo • Abertura simultânea de janelas de visualização de mais de uma função • Botão inverte os eixos coordenados • Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Importação e exportação de dados para Excel e Word • Copiar resultados da saída • Incorporação de objetos na Internet • Criar objetos e fazer rotações, translações, ampliações, reduções • Controles de animação • Controle de *zoom* • Subdividir intervalos em região do gráfico • Estimar o valor da área sob a curva (ou intersecção de duas curvas) em um intervalo, fazendo crescer o número de subintervalos (animação) • Fazer variar a área acumulada sob uma curva em um intervalo (animação) e mostrar simultaneamente o gráfico da variação (mobilização entre registros) • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Controlar a proporção e janela exata para os gráficos • Realização de medidas e ângulos sobre imagens

***V**ost_fig* *- Inserir texto* *- Mudar cor* *- Inserir, copiar, recortar, colar, mover, deletar imagem* *- Sobrepor objeto* *- Inserir, escolher, esconder malha* *- Clicar botão "Ajuste de curva"*	• Criar objetos e fazer rotações, translações, ampliações, reduções • Controles de animação • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Realização de medidas e ângulos sobre imagens
***S*2 - Analisar o gráfico da função**	
***V**ost_gr* *- Calcular área total dado o gráfico* *- Determinar os pontos críticos dado o gráfico* *- Mostrar intervalos em que a função cresce* *- Mostrar intervalos em que a função decresce* *- Mostrar pontos de inflexão* *- Mostrar raízes da função* *- Mover ponto sobre gráfico* *- Mover seletor* *- Inter-relacionar as representações da mesma função* *- Aplicar "zoom" em parte do gráfico*	• Comando "Área", "Pontos críticos", "Ponto de inflexão", "Raízes" que recebe como parâmetro a função que está "incorporada" ao gráfico. Clicando no gráfico, a função é "copiada" • Comando "*f* positiva", "*f* negativa", que recebe como parâmetro a função que está "incorporada" ao gráfico. Clicando no gráfico, a função é "copiada" • Controles de animação • Subdividir intervalos em região do gráfico • Estimar o valor da área sob a curva (ou intersecção de duas curvas) em um intervalo, fazendo crescer o número de subintervalos (animação) • Fazer variar a área acumulada sob uma curva em um intervalo (animação) e mostrar simultaneamente o gráfico da variação (mobilização entre registros) • Controlar a proporção e janela exata para os gráficos • Controle de *zoom* • Coordenação entre os diferentes registros de representação • Mobilização e coordenação das representações do mesmo objeto
***V**ost_alg* *- Determinar os intervalos em que a função é crescente* *- Determinar os intervalos em que a função é decrescente*	• Comando que recebe como parâmetros a função e o intervalo do domínio • Visualização analítica das etapas de resolução • Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Feedback de respostas de questões • Importação de técnicas que permite a inserção de parâmetros
***V**ost_num* *- Determinar o valor da área hachurada no gráfico* *- Determinar o valor da inclinação em um ponto do gráfico*	• Comando "Área" que recebe como parâmetro a função que está "incorporada" ao gráfico. Clicando no gráfico, a função é "copiada" • Comando "Inclinação" que recebe como parâmetros a função que está "incorporada" ao gráfico e um ponto do gráfico. Clicando no gráfico, a função é "copiada" e clicando no ponto, as coordenadas são "copiadas". • • Mostrar resultado da soma de áreas na tela
***V**ost_geo* *- Dividir a região hachurada em sub-regiões dados os intervalos*	• Subdividir intervalos em retângulos sob o gráfico. O comando recebe quantidade de intervalos e a função que está "incorporada" ao gráfico. Clicando no gráfico, a função é "copiada"

S_3 - Encontrar a expressão da função	
V_{ost_alg} *- Determinar pontos da função dado o gráfico* *- Inserir os pontos na expressão da função* *- Resolver o sistema* *- Inserir o ponto encontrado na solução do sistema na expressão da função*	• Comando recebe as coordenadas dos pontos. Clicando no gráfico, as coordenadas do ponto são "copiadas" • Comando recebe as coordenadas dos pontos e a expressão de uma função (polinomial, exponencial, etc. • Visualização analítica das etapas de resolução • Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Copiar resultados da saída • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Feedback de respostas de questões • Importação de técnicas que permite a inserção de parâmetros
V_{ost_gr} *- Clicar no botão "Função" e selecionando o gráfico*	• Clicando no gráfico, as coordenadas do ponto são "copiadas" • Copiar resultados da saída • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Controlar a proporção e janela exata para os gráficos
V_{ost_fig} *- Marcar pontos sobre o objeto* *- Clicar no botão "Ajuste de curva"*	• Quanto maior a quantidade de pontos, o comando "Ajuste de curva" tornará a curva mais suave • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos
S_4 - Encontrar a derivada de uma função integral	
V_{ost_alg} *- Inserir função integral através do comando "Derivada" (ou inserir função através do comando "TFC parte 1"); expandir o cálculo* *- Clicar no botão "Derivada" dada a expressão da função integral (ou inserir a função e clicar no botão "TFC parte 1")* *- O botão "TFC parte 1" expande o cálculo*	• Visualização analítica das etapas de resolução • Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Importação e exportação de dados para Excel e Word • Copiar resultados da saída • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Feedback de respostas de questões • Importação de técnicas que permite a inserção de parâmetros
V_{ost_gr} *- Clicar no botão "Derivada" dado o gráfico da função integral (inter-relação entre as representações algébrica e gráfica)*	• Copiar resultados da saída • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Controlar a proporção e janela exata para os gráficos
S_5 - Encontrar a integral de uma função	
V_{ost_alg} *- Inserir função e intervalo do domínio; - inserir operação, funções e intervalo do domínio; - expandir o cálculo* *- Inserir a função e clicar no botão "Integral" (ou no botão "TFC parte 2"); - o botão "TFC parte 2" expande o cálculo*	• Visualização analítica das etapas de resolução • Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Importação e exportação de dados para Excel e Word • Copiar resultados da saída • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Feedback de respostas de questões • Importação de técnicas que permite a inserção de parâmetros
V_{ost_gr}	• Copiar resultados da saída • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos

- Clicar no botão "Integral" dado o gráfico da função (inter-relação entre as representações algébrica e gráfica)	• Controlar a proporção e janela exata para os gráficos
S_6 - Resolver problemas de acumulação e de taxa de variação	
V_{ost_gr} *- Vincular a acumulação de uma grandeza com a representação gráfica* *- Vincular a mudança de taxa de acumulação com a representação gráfica* *- Mover ponto sobre o gráfico da função integral associado ao movimento do ponto sobre o gráfico da função derivada* *- Criar animação entre dois gráficos*	• Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Criar objetos e fazer rotações, translações, ampliações, reduções • Controles de animação • Controle de *zoom* • Subdividir intervalos em região do gráfico • Fazer variar a área acumulada sob uma curva em um intervalo (animação) e mostrar simultaneamente o gráfico da variação (mobilização entre registros) • Fornecer parâmetros para modelos • Exploração de modelos com a modificação de parâmetros e condições • Montagem de animações • Realização de medidas e ângulos sobre imagens • Fornecer informações do modelo em diferentes representações
V_{ost_geo} *- Medir dimensões do objeto* *- Determinar as expressões das funções que compõem o objeto*	• Criar objetos e fazer rotações, translações, ampliações, reduções • Fornecer parâmetros para modelos • Exploração de modelos com a modificação de parâmetros e condições • Montagem de animações • Realização de medidas e ângulos sobre imagens • Fornecer informações do modelo em diferentes representações
V_{ost_num} *- Determinar o valor da área de uma região* *- Determinar o valor da tangente no ponto determinado*	• Mostrar resultado da soma de áreas na tela • Fornecer parâmetros para modelos
V_{ost_fig} *- Inserir texto* *- Mudar cor* *- Inserir, copiar, recortar, colar, mover, deletar imagem* *- Sobrepor, esconder objeto* *- Inserir, escolher, esconder malha* *- Clicar botão "Ajuste de curva"*	• Criar objetos e fazer rotações, translações, ampliações, reduções • Controles de animação • Fornecer parâmetros para modelos • Exploração de modelos com a modificação de parâmetros e condições • Montagem de animações • Realização de medidas e ângulos sobre imagens

Fonte: A autora (2022).

Achamos válido ressaltar que a grande vantagem do micromundo, do nosso ponto de vista, é a possibilidade de poder ser modelado e permitir a interação entre o aluno e a sua interface, através da manipulação direta, em situações de resolução de problemas relativamente novas.

Dessa forma, a combinação dos requisitos apontados nas pesquisas integra a caracterização de um micromundo que ajuda a otimizar a ideia da relação inversa do teorema fundamental através das situações que poderão ser desenvolvidas.

Podemos ver no Quadro 32 que outras funcionalidades foram integradas como requisitos, podendo ainda serem aperfeiçoadas ou ampliadas para que se tornem mais específicas e garantam a eficiência das práticas.

A transposição informática dos objetos matemáticos foi cuidadosamente escolhida através de um sistema de variáveis que visou a exploração dos fenômenos que podem surgir na interface. Ou seja, a combinação entre as funcionalidades e requisitos podem levar à implementação dos elementos que a compõem, os "objetos digitais". Portanto, eles podem ser utilizados pelo desenvolvedor para o design de interação, fornecendo ações a serem executadas pelo usuário.

Finalmente, a partir dessa caracterização do Micromundo, podemos responder às seguintes perguntas:

- Dada essa especificação do objeto matemático, é possível desenvolver situações de ensino que privilegie a relação inversa do teorema fundamental?

- É possível fornecer uma caracterização simples de um fenômeno que envolve acumulação e taxa de variação dessa acumulação que o micromundo pode produzir?

Na problemática da nossa tese, conjecturamos que a análise das praxeologias permite modelizar o saber para a concepção de micromundos e essa modelização ativa a representação e mobilização de novos objetos digitais. Diante disso, realizamos análises prévias a fim de compreender sobre as razões de ser do Teorema Fundamental do Cálculo nas instituições de ensino, descrevendo requisitos a nível didático, cognitivo, epistemológico e informático e modelizando esse saber em termos de praxeologias observando as etapas dos processos de transposição (didático-informática).

De fato, concordamos com Bosch e Gascón (2006) que, com essa modelização, a análise desses processos adquiriram uma nova funcionalidade, pois conseguimos esclarecer o modelo epistemológico de referência para apontar os tipos de situações que o micromundo pode produzir. Por conseguinte, a descrição do saber para o sistema evidencia os tipos de objetos que o sujeito irá manipular durante a sua interação, dadas as suas funcionalidades.

Do nosso ponto de vista, a questão central da resolução de problemas através do micromundo está no desenvolvimento de técnicas. Em uma instituição de ensino, as tarefas são problemas e as técnicas precisam ser construídas. Para ir a um nível teórico é necessária a realização de um "trabalho técnico" que não é espontâneo e nem natural (LAGRANGE, 2000), então perpassa por um conjunto de gestos que ajudam a manipular a técnica e estabelecer relações entre a prática e a teoria.

Se considerarmos um fenômeno simples para ser analisado e possamos criar um modelo que o represente no micromundo. Devemos, primeiramente, pensar nos gestos (importar imagem, desenhar eixos cartesianos, criar uma tabela dinâmica, pintar a área da região abaixo do gráfico, decompor o intervalo em *n* retângulos, realizar cálculos, ...) para desenvolver a modelação. Cada gesto realizado carrega consigo uma técnica e um conjunto de ostensivos que ajudarão a implementar a atividade. À medida que se tem um conjunto de objetos elementares e um conjunto de ferramentas, simulações serão construídas permitindo analisar o fenômeno estudado.

Essa articulação entre o sistema formal e a fenomenologia é o que permite caracterizar o micromundo (BALACHEFF, 1994), criando condições para que o sistema evolua à medida que o conhecimento do aluno evolui. É claro que o ambiente sozinho não tem condições de garantir a aprendizagem, mas o meio em que ele será utilizado poderá fornecer procedimentos e ferramentas específicas para a sua constituição.

Para os desenvolvedores, a contribuição deste trabalho se enquadra no nível da modelização do saber, da representação do Teorema Fundamental do Cálculo em termos de praxeologias, elucidando os tipos de situações que o micromundo vai ajudar a resolver.

Para a didática, a Matemática lida com duas questões cruciais: a atribuição dos problemas e o lugar da manipulação de sistemas simbólicos. A ligação entre elas está no reconhecimento de que um depende do outro e, nesse processo, deve haver uma negociação do significado das situações que o micromundo busca organizar. Nesse sentido, as interações só vão ter significado relativo à intenção que o aluno atribuirá ao sistema.

Será importante que, nos avanços que esta pesquisa proporcionará, levar sempre em conta uma relação constante e estreita com o estudo do meio e a implementação de micromundos no sistema didático.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> A criação de problemas para os alunos não faz parte da concepção de um micromundo matemático em si, mas os problemas exercem uma forte influência sobre um projeto de um micromundo. [...] Ou seja, o projetista de um micromundo matemático deve ter uma ideia dos tipos de problemas que se deseja apresentar, de modo que o micromundo permita que os problemas sejam propostos de maneira significativa. (THOMPSON, 1985, p. 101, tradução nossa)[147]

Historicamente, tanto o desenvolvimento quanto a utilização dos softwares na Educação avançaram em paralelo com o surgimento das teorias de ensino e aprendizagem, ampliando cada vez mais as experiências com a matemática. Para ter esse alcance, a implementação dos ambientes computacionais precisou levar em conta as escolhas na representação de um dado saber, considerando as transformações ocorridas tanto por restrições computacionais quanto didáticas.

Dessa forma, os processos de concepção e desenvolvimento desses ambientes se colocam sobre o problema da transposição didática, pois levam a questionar sobre as razões de ser do saber ensinado, evoca conteúdos que não eram ensinados e até mesmo a criação de novos objetos de ensino, bem como da transposição informática, com a especificação e implementação de um modelo do saber.

Comungamos com a ideia de que a aprendizagem baseada em ambiente computacional é o resultado da interação dos usuários com esses ambientes que levam a construir diferentes resultados. Portanto, a interação está no centro do design desses tipos de sistemas e, consequentemente, no centro da caracterização do domínio do conhecimento. Para isso, a inserção da representação dos objetos no dispositivo informático faz com que ele seja constituído de universo interno, interface e universo externo. É na interface que o usuário se comunica, pois é onde ocorre a visualização dessas representações.

O nosso interesse pelo micromundo se deu por considerá-lo como um produto do processo de transposição didática e informática. Para a sua concepção, há um ponto de convergência que está no nível da representação e modelização do conhecimento e da resolução de problemas. Esse aspecto também está relacionado à Matemática, em que as representações

[147] Texto original: “The creation of problems for students is not part of designing a mathematical microworld per se, but the problems exert a strong influence upon a microworld's design. […] That is, the designer of a mathematical microworld must have an idea of the kinds of problems one wishes to pose so that the microworld allows the problems to be posed meaningfully.”

têm um papel central na elaboração e evolução dos saberes e na construção dos conhecimentos pelos sujeitos.

Através da manipulação direta, os micromundos permitem aos usuários agirem sobre os objetos por meio da interface e estes se comportam com certas restrições e, nessa interação, novos objetos são construídos e os alunos têm a oportunidade de investigar as suas propriedades. Daí há uma expectativa em que os usuários podem transformar objetos complexos e operações em novos objetos e, nesse sentido, o professor desempenha o papel crucial de mediador entre o saber a ser ensinado e aquilo que é aprendido.

No contexto da Matemática, as atividades desenvolvidas para o micromundo são de natureza exploratória, portanto levam à resolução de problemas, à construção de objetos específicos para modelagem e à criação de novas atividades. Para a Didática, a atividade matemática e o saber que emerge dela são construções sociais realizadas nas instituições e o estudo das condições de sua produção e disseminação requer a descrição e análise obtidas através de um modelo praxeológico. Nesse modelo, "fazer matemática" consiste em ativar uma organização matemática, isto é, resolver certos tipos de tarefas com técnicas específicas e de forma justificada por meio do saber, que pode levar à construção de novas organizações ou à reprodução de organizações já construídas. Os conceitos aparecerão ao se trabalhar com os objetos ostensivos nas tarefas matemáticas, em que a manipulação será controlada pela ativação ou evocação de objetos não ostensivos. Quando o ambiente de estudo é o computador, há uma possibilidade de se criar novos tipos de ostensivos.

Considerando que a organização matemática a ser ensinada é um modelo praxeológico do currículo matemático obtido de programas e livros didáticos, em nossa pesquisa constituímos um modelo praxeológico a partir de livros de Cálculo utilizados nas instituições de ensino superior para analisar e descrever o Teorema Fundamental do Cálculo. Ele traz implicitamente a relação inversa entre dois conceitos que são muito utilizados no ensino e aprendizagem do Cálculo, a Derivada e a Integral. Então, para essa análise, levamos em conta os objetos, materiais ou não, que dão suporte à atividade matemática, ou seja, os objetos ostensivos e não ostensivos emergentes nessa organização.

Com base nessa problemática, assumimos como hipótese que a análise das praxeologias permite modelizar o domínio do conhecimento para a concepção de micromundos e essa modelização ativa a representação e mobilização de novos objetos digitais. As organizações praxeológicas se materializam em sistemas de objetos ostensivos e cada um desses objetos é considerado como um possível instrumento da atividade matemática que permite adaptar

técnicas para realizar determinadas tarefas. Essa ostensividade tem a capacidade de evocar objetos complexos e variados de objetos ostensivos e não ostensivos que se inter-relacionam, especialmente quando se utiliza o computador.

O objetivo geral da tese se baseou em realizar uma modelização do Teorema Fundamental do Cálculo para constituir a caracterização de um micromundo. Com isso, buscamos a concepção de um suporte informático à atividade matemática no ambiente computacional, sendo o micromundo uma proposta de suporte.

A Engenharia Didático-Informática (EDI) foi escolhida como aporte metodológico, pois integra os princípios da Engenharia de Software e da Engenharia Didática considerando os processos de transposição didática e informática. Com uma adaptação no modelo de processo de software da EDI, relacionamos e descrevemos as etapas de investigação com os procedimentos desse modelo e com a análise da dimensões didática, cognitiva, epistemológica e informática mediante uma revisão sistemática da literatura sobre o tema.

Para o processo de modelização, nos fundamentamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) com a integração da abordagem T4TEL para estudar a relação institucional com esse objeto matemático por meio das praxeologias presentes nos livros didáticos e construir uma Organização Matemática de Referência (OMR).

A dimensão epistemológica revelada nas análises prévias possibilitou uma visita às razões de ser do teorema fundamental nos níveis do setor e do domínio da escala de codeterminação didática. Com isso, foi possível identificar elementos inerentes a esse conceito, como os problemas onde ele intervém como ferramenta, além de evidenciar ingredientes que integram o ensino e a aprendizagem.

Ao longo da história, muitas técnicas foram desenvolvidas e aperfeiçoadas com a tentativa de resolver os problemas propostos pelos matemáticos, levando ao surgimento dos objetos de representação. As técnicas infinitesimais foram introduzidas após muitos séculos ter perdurado a repulsa ao infinito. O método da exaustão e do método de dupla redução ao absurdo contribuíram, durante muito séculos, na investigação de questões matemáticas, como o volume da esfera e área da sua superfície, obtendo-se os primeiros resultados significativos do problema da quadratura. A utilização da álgebra simbólica levou ao avanço nas técnicas formais, levando à representação algébrica das curvas e o surgimento da Geometria Analítica.

Portanto, a intuição que, inicialmente, era o instrumento utilizado como forma de representação para alcançar possíveis interpretações dos fatos observados, foi sendo complementada com os registros de representações simbólicas e gráficas para a formalização

do conhecimento, contribuindo, assim, para a evolução dos registros de representação. Entre os objetos passou a ter uma relação entre o signo e o significado, ou ainda, a dialética do objeto ostensivo que coativa o objeto não ostensivo correspondente. Assim, com Descartes, o saber matemático tomou uma nova forma com a função da representação simbólica e, como resultado, a separação entre o registro simbólico e o das significações. Com o cálculo de Leibnitz, novos símbolos, técnicas e formas de representação foram criadas.

Em termos de significância, o Teorema Fundamental do Cálculo é um exemplo notável na história do cálculo que declara explicitamente a relação inversa entre diferenciação e integração, que antes estava apenas implícita nos resultados dos problemas de área e de tangente. Barrow chegou a demonstrar um teorema geométrico que enunciava essa relação, mas não deu tanta ênfase como fez Newton e Leibniz. Estes o reconheceram como um "[...] amálgama rico de técnicas infinitesimais anteriores, um poderoso instrumento algorítmico para cálculo sistemático" (EDWARDS JR., 1979, p. 190, tradução nossa)[148].

No âmbito educacional, as pesquisas apontam que os estudantes apresentam muitas dificuldades com os conceitos relacionados a esse objeto matemático, evidenciando a distância que existe entre o saber sábio, produzido pelos matemáticos, e o saber a ensinar proposto pela noosfera (MEC/CAPES, instituições de ensino superior, etc.), assim como o saber ensinado em um curso de Cálculo e o saber que é de fato implementado ou aprendido.

A análise das pesquisas em relação à dimensão cognitiva apontou dificuldades na compreensão dos conceitos de variação e acumulação da área, do significado de variáveis, continuidade de uma função e representação gráfica. Outros aspectos também foram evidenciados, como a necessidade de explorar a intuição e a exploração na diversificação dos registros de representação.

Percebemos o potencial que as representações e os seus respectivos significados influenciam na compreensão dos saberes. No entanto, a explicitação das atividades, ou seja, das praxeologias, é que, em certo sentido, vão dar vida aos conceitos, isto é, eles surgem da manipulação dos objetos ostensivos dentro de certas organizações matemáticas. Quando o objeto ostensivo é institucionalizado, há o estabelecimento de vínculo entre o ostensivo e o não ostensivo correspondente que vai permitir evocar um associado ao outro nas atividades matemáticas que forem desenvolvidas.

---

[148] Texto original: "[The contribution of Newton and Leibniz, for which they are properly credited as the discoverers of the calculus, was not merely that they recognized the, "fundamental theorem of calculus" as a mathematical fact, but that they employed it to distill] from the rich amalgam of earlier infinitesimal techniques a powerful algorithmic instrument for systematic calculation".

Por exemplo, a representação gráfica foi apontada como uma das dificuldades apresentadas pelos alunos. Ademais, os livros analisados nas pesquisas apresentaram escassez na exploração gráfica e na diversificação de registros de representação. Podemos, com isso, presumir que o ostensivo gráfico não possui uma relação bem definida institucionalmente. Portanto, não há razão para associar a ostensiva gráfica a algum conceito matemático, como função, integral, etc., a não ser que ela faça parte das organizações matemáticas das instituições que reconhecem (ou possuem relação com) estes conceitos.

Do ponto de vista didático, identificamos algumas características relacionadas à forma de ensinar, os tipos de atividades, os conceitos matemáticos e as escolhas didáticas.

A ausência da relação inversa entre os conceitos de integração e derivação, da coordenação entre os registros de representação, a priorização de situações de algoritmização e mecanicismo do assunto, as limitações na exploração gráfica, foram os mais apontados nas pesquisas. Ficou evidente que o ensino deve fornecer oportunidades para a investigação matemática, permitir o diálogo e que sejam lançadas questões exploratórias para os alunos. No entanto, o caráter formal da matemática leva os alunos a terem dificuldades para trabalhar com tarefas de investigação. Para favorecer o ensino, os pesquisadores apontam sobre a importância de aliar o desenvolvimento de técnicas com a compreensão do significado, a adoção do modelo construtivista para oportunizar maior responsabilidade ao aluno, iniciar com atividades de abstração de conceitos e generalizações antes da formalização dos conceitos, utilização de gestos como ferramentas de comunicação e orientação investigativa para contribuir no feedback dinâmico fornecido pelo software.

Em relação ao desenvolvimento das atividades, as pesquisas apontaram, principalmente, a necessidade de explorar as características visuais e gráficas e a produção de significados. No caso do Teorema Fundamental do Cálculo, as atividades envolvem questões e habilidades de raciocínio relacionadas à aprendizagem dos conceitos envolvidos, necessitando da coordenação de imagens dos referidos conceitos, assim como motivou Newton a desenvolver o Teorema Fundamental. Evidenciamos que, durante a atividade matemática, as técnicas tendem a identificar-se com os objetos ostensivos que se utilizam para descrevê-las ou implementá-las. Logo, quando se desenvolve pouca variedade de tarefas ou representações de um conceito, a tendência é provocar um grande obstáculo para os alunos.

No que tange aos conceitos matemáticos, observamos que há algumas regularidades que acontecem no ensino, como o predomínio do formalismo e a dificuldade de articular os registros. Diante dos fenômenos que ocorrem no sistema didático, alguns dizem respeito às

dificuldades que o professor tem ao ministrar algum conhecimento que não faz parte da atividade matemática, mas que é necessário para que os alunos possam realizá-la. Esses fenômenos, de certa forma, afetam a gestão didática no tocante à mobilização dos ostensivos em diferentes registros, como por exemplo, o registro gráfico, evidenciado por Grande (2013) e Alonso (2017), ou o registro gestual, apontado por Quintero e Salinas (2015).

Dentre as escolhas didáticas, o livro didático revela a abordagem do ensino e dos tipos de atividades, com a valorização de reprodução de técnicas, e a importância dos recursos tecnológicos. O professor poderá utilizar o lápis e o papel, bem como o livro ou o software para organizar a atividade matemática e, qualquer que seja o recurso, eles desenvolvam técnicas de resolução como bases para desenvolver a compreensão. No entanto, os softwares, e em particular o micromundo, podem permitir aos alunos desenvolver novas técnicas para resolver as questões propostas. Para isso, é preciso a elaboração de praxeologias que privilegiem esse trabalho.

A análise da dimensão informática buscou identificar as contribuições dos softwares para auxiliar na compreensão e ensino do teorema fundamental. Ressaltamos que o computador pode oferecer oportunidades para novas experiências e construção de significados tanto para o aluno quanto para o professor. Destarte, qualquer que seja a situação informática configurada pelo professor, ele provavelmente terá que intervir para atender ao seu desejo de que o aluno aprenda.

Um dos aspectos evidenciados nas pesquisas é a importância da experimentação no desenvolvimento das atividades. Como a interação com o micromundo ocorre a partir das suas funções comunicativas e cognitivas, logo ele não é utilizado meramente como ferramenta, mas como ambiente exploratório e como meio de comunicação simbólica de relações matemáticas. Assim, ressalta-se que, durante a atividade, o aluno deve ser levado a evocar a mobilização do conhecimento matemático durante a interação com o software.

Os recursos de visualização e dinamismo, fornecidos pelo software, foram também apontados em todas as pesquisas, reconhecidos pela capacidade de contribuir com a mobilização dos conceitos ligados ao Teorema Fundamental do Cálculo nos diferentes registros de representação. Essas características estão ligadas ao conceito de manipulação direta, em que o usuário tem acesso aos objetos por meio da interface e age sobre eles, consequentemente obtendo uma referência sobre o conhecimento que é construído. Deste modo, a funcionalidade de exibir diferentes registros de representação permite ao usuário realizar “gestos”, isto é, emitir comandos para manipular os objetos por meio de suas representações. Assim, novas técnicas

podem surgir com a realização dos gestos ou a habilidade de manipulação dos instrumentos informáticos.

Esses atributos podem ajudar na construção de modelos do domínio, por exemplo na representação da soma de Riemann, como sugeriu a pesquisa de Andersen (2011), e em algumas experiências vivenciadas pelos matemáticos, como foi abordado na pesquisa de Grande (2013), para explorar os conceitos envolvidos no Teorema Fundamental do Cálculo através da ideia de acumulação e sua variação para que os estudantes possam compreender a relação mútua entre integração e derivação como operações inversas uma da outra.

A outra evidência foi o papel da interface em facilitar a experiência para o usuário (ANDERSEN, 2011). Essa questão é discutida por Thompson (1985) na concepção de um micromundo matemático. Segundo ele, dentre os requisitos principais, além de estabelecer as funções, tem que se definir os comandos e o formato em que os alunos utilizarão para agir sobre o micromundo e o ideal é que seja parecido com a notação formal utilizada em Matemática.

O outro requisito essencial consiste nos problemas que se deseja apresentar sobre o saber que está em jogo. Nesse aspecto, concordamos com a análise das praxeologias em torno dos tipos de tarefas, das técnicas, como maneiras de realizar as tarefas, e o discurso tecnológico-teórico que os justificam, que pode revelar esses problemas que o micromundo permitirá resolver.

Esses resultados obtidos nas análises das dimensões constituíram os descritores que foram categorizados e organizados em um conjunto de requisitos. Dentre os principais, que favorecem o ensino e a aprendizagem do teorema fundamental por meio do software, estão a representação em diferentes registros, bem como a mobilização e o tratamento dessas representações nos referidos registros, a criação de um modelo que integra a ideia da relação inversa do teorema fundamental e os conceitos relativos à função, com a necessidade de explorar tarefas que ajudem na mobilização dos objetos ostensivos e não ostensivos.

Com a análise a priori da atividade matemática, pudemos descrever o modelo epistemológico adotado pelas instituições a partir da organização praxeológica apresentada nos livros didáticos. Os livros consultados fazem pouca ou nenhuma referência aos problemas históricos que culminaram no desenvolvimento do Cálculo que utilizamos hoje, além de haver uma escassez na exploração da relação inversa do teorema fundamental, assim como na manipulação dos objetos ostensivos em diferentes registros.

Quanto aos tipos de tarefas, o cálculo de integrais e de derivadas constituem a maior parte nas praxeologias adotadas pelos autores, o que já era esperado pelo fato de que o TFC

está diretamente ligado a esses dois tipos de tarefas. Em relação ao detalhamento dos conceitos relacionados ao TFC nos tipos de tarefas e técnicas empregadas, a maior parte evidencia os objetos matemáticos envolvidos, mas em alguns casos encontramos ausência dessa evidência.

Ainda em relação às técnicas, além do teorema fundamental ser utilizado principalmente para o cálculo de integrais e derivadas, outras técnicas, provenientes de outras organizações matemáticas, são evocadas. Por exemplo, a regra da cadeia e a regra da substituição são técnicas que facilitam o cálculo de integrais de funções compostas. Outros teoremas e propriedades também fazem parte das técnicas desenvolvidas, mas nem sempre explicitadas pelos autores dos livros.

O bloco tecnológico-teórico constitui um *corpus* de conhecimento em torno do ensino do Teorema Fundamental do Cálculo que justifica os tipos de tarefas presentes nas praxeologias dos livros analisados. Algumas falhas são cometidas na ausência de justificativa sobre as técnicas empregadas, como o caso em que os teoremas das integrais imediatas são utilizados, como já destacamos, sem nem sequer mencioná-los. Além disso, a ausência da mobilização do registro gráfico dificulta a articulação de objetos ostensivos para a compreensão da relação inversa do TFC.

A partir dessa análise, constatamos que as restrições que incidem sobre o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo apontam que as organizações matemáticas são pontuais e pouco articuladas entre si, o que suscitou a necessidade de propor um Modelo Praxeológico de Referência (MPR).

A construção desse modelo levou em conta os fundamentos desde os resultados das Análises Prévias, em que se deu o primeiro contato com a organização didática, sem perder de vista a análise do Modelo Epistemológico Dominante (MED). Ou seja, os tipos de atividades matemáticas foram modelados ou remodelados com a ampliação do sistema de variáveis.

A questão norteadora para essa construção foi "Como otimizar a ideia conceitual do Teorema Fundamental do Cálculo como relação inversa entre derivada e integral?". As praxeologias relativas aos tipos de tarefas a serem modelizadas foram engendradas por instanciações do sistema de variáveis dos geradores de tarefas: GT_{int} = [*Encontrar; integral; SV*] e GT_{det} = [*Encontrar; derivada; SV*].

A abordagem T4TEL auxiliou na constituição de um conjunto de variáveis e de seus respectivos valores relevantes na descrição dos tipos de tarefas, bem como na avaliação das técnicas e dos elementos do bloco do saber.

A variável V_{ost}*: Ostensivos* foi escolhida levando em conta que os objetos ostensivos que emergem do nosso modelo praxeológico são caracterizados pelos registros de representação a que pertencem. Essa noção é comparada à noção de registro de representação semiótica, proposta por Raymond Duval, como princípio de que a mobilização de uma pluralidade de registros desempenha um papel fundamental na matemática. Os valores associados a essa variável, correspondem, portanto, ao tipo de registro onde será realizada a atividade matemática.

A outra variável escolhida é V_f*: Função*, considerando que os problemas relativos ao teorema fundamental envolvem esse tipo de relação entre duas grandezas e suas representações. A natureza varia conforme os tipos básicos de função, cada uma com um domínio próprio definido implicitamente. As funções constituídas por meio de operações ou sentenças também foram instanciadas, considerando os extremos do intervalo quanto à natureza e o valor de cada extremo.

Para completar, a variável V_{mod}*: Situação da modelação* foi designada devido aos diferentes contextos que identificamos nas atividades que envolviam o teorema fundamental. A instanciação se deu através da natureza matemática ou extra matemática e o tipo referente à construção ou manipulação do modelo.

O escopo das técnicas foi constituído pelo conjunto de subtarefas que elas podem realizar. Assim, pudemos observar que "Aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo" é a principal técnica ou justificativa tecnológica associada ao cálculo de integrais definidas e da sua inversa. No entanto, a introdução da noção de gerador de tarefas leva o pesquisador a calcular caminhos de aprendizagem a partir de um jogo sobre as variáveis e os seus respectivos valores e assim poder gerar um conjunto estruturado de subtipos de tarefas.

Ao mesmo tempo, identificamos os mesmos subtipos de tarefas associados a geradores de tarefas com diferentes instanciações do sistema de variáveis, o que contribuiu para simularmos distintas combinações a partir de uma árvore hierárquica para todos os valores das variáveis. Por exemplo, percebemos uma hierarquia na variável Função de modo que se deve declarar se há ou não operação entre funções ou sentenças de uma função. Esta escolha vai determinar, em caso afirmativo, a escolha da Operação, seguida das instanciações da natureza das funções/sentenças com seus valores e os valores extremos do(s) intervalo(s); ao contrário, determinará uma única função com suas instanciações.

Considerando que a atividade matemática articula fortemente os ostensivos em diferentes registros, percebemos que, em cada registro onde a atividade poderia ser

desenvolvida, é necessária a implementação de determinadas técnicas para realizar a tarefa almejada. Além disso, a integração de um ambiente computacional promove o aprimoramento dos objetos ostensivos e, quiçá, a criação de novos objetos.

O conjunto de teorias e os seus desdobramentos, em termos de noções, teoremas, corolários, propriedades e definições, fundamentou o discurso sobre as maneiras de realizar os tipos de tarefas sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.

Destacamos, nessa parte da construção do Modelo Praxeológico de Referência (MER), a participação decisiva dos objetos ostensivos em todos os níveis da atividade, tanto em termos da técnica quanto de ambiente tecnológico-teórico. E pudemos perceber que pequenas modificações ostensivas no nível técnico podem provocar mudanças no nível tecnológico, quando é necessário descrever, organizar, justificar as produções ostensivas e não ostensivas obtidas.

Além disso, vimos que a modelagem de uma situação em ambiente computacional ativou vários registros de representação, ou seja, a necessidade de implementar novas técnicas matemáticas utilizando elementos que foram disponibilizados nesse ambiente ("capturar imagem", "marcar os pontos na figura", "ajustar a curva", "obter a equação da curva", ...).

Esses aspectos, em particular, contribuíram para caracterizar um micromundo levando em conta as especificações relativas aos tipos de tarefas que ajudam a otimizar a relação inversa entre os processos de integração e derivação. A análise privilegiou os objetos que podem ser representados na interface com as suas funcionalidades conceituais, ou seja, cada objeto é considerado como um possível instrumento da atividade matemática que permite desenvolver técnicas para realizar certas tarefas.

O sistema de variáveis permitiu considerar distintas possibilidades de variação de situações ligadas ao teorema fundamental, sendo que cada uma engloba os tipos e subtipos de tarefas originárias de GT_{der} e GT_{int} que associam funcionalidades do micromundo ao tipo de ostensivo mobilizado em um determinado registro. Estas funcionalidades constituem as técnicas para realizar as tarefas.

Assim, cada tipo e tarefa associa uma praxeologia correspondente a cada registro, que vai ativar diferentes objetos ostensivos na interface. Com a interação centrada no usuário, então é possível ele escolher qual a técnica mais apropriada para resolver a tarefa. Para isto, ele deverá analisar os objetos que estão ao seu alcance.

Os requisitos de conexão e mudança entre diferentes representações e de visualização, evidenciados nas análises prévias e a priori, devem estar integrados às funcionalidades do

micromundo, pois permitem estabelecer a inter-relação entre as diferentes representações associadas ao mesmo objeto não ostensivo.

Em todas as situações, as funções e as suas representações são os principais objetos evocados e, associadas a elas, devem ser declaradas as "variáveis de controle", ou seja, a natureza, a operação, os extremos do intervalo (ou subintervalos) domínio. Diversas funcionalidades do micromundo estão associadas às funções, originalmente constituindo praxeologias locais. No entanto, elas devem ser associadas ou integradas a outras praxeologias para ajudar a otimizar a relação inversa do TFC.

Pode-se adaptar o micromundo aos objetivos das atividades e considerar apenas as variáveis cuja modificação, provavelmente, influenciará as estratégias dos alunos. Seria como "esconder" alguns comandos ou menus em determinadas situações. Por outro lado, pode-se também adicionar macro construções como novos itens do menu, como por exemplo, para auxiliar na análise da relação inversa do teorema fundamental.

Algumas funcionalidades foram especificadas como ações vinculadas a algum comando ou botão da interface. Elas estão diretamente associadas à técnica empregada. Além disso, algumas funcionalidades ligadas ao *design* dos elementos de interação também foram adicionadas, como inserção de texto e imagens, mudança de cores, etc. Elas não se esgotam, podendo surgir outras quanto maior for a interação e usabilidade.

Para completar, levamos em conta a possibilidade de identificar características que estariam disponíveis em outros softwares e que ainda não havíamos especificados, então complementamos a nossa análise a partir de um mapeamento que culminou na categorização de novas funcionalidades do micromundo em cada tipo de situação. Elas podem, ainda, serem aperfeiçoadas ou ampliadas para que se tornem mais específicas e garantam a eficiência das práticas.

A transposição informática dos objetos matemáticos foi cuidadosamente escolhida através de um sistema de variáveis que visou a exploração dos fenômenos que podem surgir na interface. Ou seja, a combinação entre as funcionalidades e requisitos podem levar à implementação dos elementos que a compõem, os "objetos digitais". Portanto, eles podem ser utilizados pelo desenvolvedor para o design de interação, fornecendo ações a serem executadas pelo usuário.

Com a modelização que realizamos, inferimos que a análise dos processos de transposição adquiriu uma nova funcionalidade, pois conseguimos esclarecer o Modelo Epistemológico de Referência para apontar os tipos de situações que o micromundo pode

produzir. Por conseguinte, a descrição do saber para o sistema evidenciou os tipos de objetos que o sujeito irá manipular durante a sua interação, dadas as suas funcionalidades, o que confirma a nossa hipótese. Nesse sentido, o T4TEL contribuiu com a emancipação do Modelo Praxeológico de Referência (MPR).

Por outro lado, o MPR não levou em conta a noção de praxeologia pessoal, que é uma terceira função das variáveis. Então, vislumbra-se, para trabalhos futuros, essa implementação com alunos através de um trabalho de transposição interna (CHEVALLARD, 1991) a fim de explorar as técnicas conhecidas ou a produção de novas técnicas. Dessa forma, permitiria a validação do domínio para garantir a manutenção das características e propriedades dos conceitos no micromundo.

É relevante destacar, por fim, o potencial da comunicação entre a EDI e a TAD, por meio da conexão dinâmica entre o bloco prático e o bloco teórico da praxeologia de pesquisa, e poder antecipar as situações para especificar um micromundo em relação a algum domínio do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, L. B. S. D.; MATIAS, B. D. S. **1ª Temporada de Minicursos. Maple 13**. Universidade Federal do Ceará. Programa de Educação Tutorial da Engenharia Civil. [S.l.], p. 44. 2012.

ALONSO, E. P. **Aspectos visuais e gráficos do Teorema Fundamental do Cálculo**. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 193. 2017.

ANACLETO, G. M. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 136. 2007.

ANDERSEN, É. **As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizadas por alunos de Licenciatura em Matemática**. Pontifiícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 128. 2011.

ARREDONDO, M. G. R.; ARMENTA, E. T.; MOLL, V. F. Una propuesta de acercamento alternativo al teorema fundamental del cálculo. **Educación Matemática**, 26, n. 2, 2014. 69-109.

ARREDONDO, M. G. R.; ARMENTA, E. T.; MOLL, V. F. Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. **Educación Matemática**, 26, n. 2, 2014. 69-109.

ARTAUD, M. **Introduction à l'approche écologique du didactique - L'écologie des organisations mathématiques et didactique**. Actes de la IXième École d'été de Didactique des Mathématiques. Caen: ARDM&IUFM. 1998. p. 101-139.

ARTAUD, M. Des liens entre l'organisation de savoir et l'organisation de l'étude dans l'analyse praxéologique. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, 21, n. 4, 2019. 248-264.

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática:** un esquema para la investigación y la innovación en a ensenanza y el aprendizaje de las matemáticas. 1ª. ed. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 33-59.

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L. **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**. 1ª. ed. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 97-140.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4, p. 193-217.

ARTIGUE, M. Le logiciel 'DERIVE' comme revelateur de phenomenes didactiques lies a l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. **Educational Studies in Mathematics**, n. 33, 1997. 133-169.

ARTIGUE, M. Le logiciel “DERIVE” comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l’utilisation d’environnements informatiques pour l’apprentissage. **Educational Studies in Mathematics**, n. 33, 1997. 133-169.

ARTIGUE, M. Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous? **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, 3, 2020. 25-64.

ARTIGUE, M.; BOSCH, M. Reflection on Networking Through the Praxeological Lens. **Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education**, 2014. 249-265.

ASSUDE, T. De l’écologie et de l’économie d’un système didactique : une étude de cas. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, 1, n. 16, 1996. 47-72.

ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**. 2ª. ed. [S.l.]: Edgar Blucher, 2009.

BACHELARD, G. **Le Nouvel Esprit Scientifique**. Paris: PUF, 1934. 10-11 p.

BALACHEFF, N. La trasposition informatique. In: ARTIGUE ET AL (EDS.) **20 ans de didactique des mathématiques en France**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1993.

BALACHEFF, N. Didactique et intelligence artificielle. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 1994. 9-42.

BALACHEFF, N.; BELLEMAIN, F. Conhecimento, a Pedra Angular do Design de Tel. **Revista Tópicos Educacionais**, Recife, 17, n. 1-3, 2007. 31-59.

BALACHEFF, N.; KAPUT, J. Computer-based learning environment in mathematics. In: International Handbook of Mathematics Education. **International Handbook of Matheatics Education**, 1997. 469-501.

BALACHEFF, N.; SUTHERLAND, R. Epistemological domain of validity of microworlds: the case of LOGO and Cabri-géomètre. In: LEWIS, R.; MENDELSOHN, P. **Lessons from Learning**. North-Holland: Elsevier Science, 1994. p. 137-150.

BARON, M. E. **The Origins of the Infinitesimal Calculus**. Oxford: Pergamon, 1969.

BEHRENS, M. A. **O Paradigma Emergente e a Prática Pedagógica**. 4. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

BELLEMAIN, F. Un point de vue didactique sur la conception de micromondes: le cas de Cabri-Géomètre. **Publications de l'Institute de recherche mathématiques de Rennes**, n. 4, 1993-1994. 1-23.

BELLEMAIN, F. **A transposição informática na engenharia de softwares educativos**. I SIPEM. Serra Negra (SP): [s.n.]. 2000. p. 198-294.

BELLEMAIN, F. O Paradigma Micromundo. **História e Tecnologia no Ensino da Matemática**, 1, 2002. 51-63.

BELLEMAIN, F.; GITIRANA, V.; BELLEMAIN, P. M. B. Elementos da engenharia de software educativos para a concepção de ferramentas computacionais para o CSCL. In: ROSA, M.; BAIRRAL, M. A.; AMARAL, R. B. **Educação Matemática, Tecnologias**

Digitais e Educação a Distância: pesquisas contemporâneas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. p. 223-262.

BELLEMAIN, F.; RAMOS, C. S.; TIBÚRCIO, R. S. **Engenharia de software educativos, o caso do bingo dos racionais**. 6 Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM. Goiás: SBEM. 2015.

BOSCH, M. **Un punto de vista antropológico:** la evolución de los 'instrumentos de representacion' en la actividad matemática. (Anais) IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva: [s.n.]. 2001. p. 15-28.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 1999. 77-124.

BOSCH, M.; ESPINOZA, L.; GASCÓN, J. El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. **Research In Mathematics Didactics**, 1, n. 23, 2003. 79-136.

BOSCH, M.; GASCON, J. La praxélogie comme unité d´analyse des procesus didactiques. **Balises pour la didactique des mathématiques**, Grenoble, 2004. 1-15.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Twenty-five years of the didactic transposition. **ICMI Bulletin**, 58, June 2006. 51-65.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL, M. A. B. **Uma estratégia para validação da completude e consistência em processos de software**. Universidade Federal de Santa Maria. [S.l.], p. 145. 2014.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques. **RDM**, 2, 1983. 165-198.

BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques**. Conferencia del Doctor honoris causa en la Universidad de Montréal. [S.l.]: [s.n.]. 1997.

BRUILLARD, É. Des micromondes aux environnements d'apprentissage ouverts. In: _____ **Des machines à enseiner aux instruments pour apprendre**. Paris: Hermès Paris, 1997. p. 129-175.

BRUILLARD, É. **Les machines à enseigner**. [S.l.]: Hermès science publications, 1997.

BUTLER, D. Douglas Butler uses autograph to explore the geometry of calculus. **Mathematics Teaching**, 229, 2012. 44-46.

CAMPOS, M. L. D. A. Modelização de domínios de conhecimento: uma investigação de princípios fundamentais. **Ciência da Informação**, Brasília, 33, n. 1, jan./abril 2004. 22-31.

CAMPOS, R. P. **A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 202. 2007.

CARLSON, M. P.; SMITH, N.; PERSSON, J. **Developing and connecting calculus students notions of rate of change and accumulation:** The fundamental theorem of calculus. Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA. [S.l.]: [s.n.]. 2003. p. 165-172.

CHAACHOUA, H. **La praxéologie comme mdèle didactique pour la problématique EIAH. Eatude de cas: la modélisation des connaissances des élèves**. Unversité Joseph Fourier. Grenoble. 2010.

CHAACHOUA, H. **T4TEL:** um cadre de référénce didcatique pour la conception des EIAH. Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM. [S.l.]: [s.n.]. 2018. p. 5-22.

CHAACHOUA, H. T4TEL: Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, 4, 2020. 103-118.

CHAACHOUA, H.; BESSOT, A. La notion de variable dans le modèle praxéologique. **Educação Matemática Psquisa**, São Paulo, 4, n. 21, 2019. 234-247.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, 9, n. 1, 2019. 29-44.

CHAACHOUA, H.; COMITI, C. **L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique**. Actes du 2ème congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. Uzès: [s.n.]. 2010. p. 771-789.

CHAACHOUA, H.; FERRATON, G.; DESMOULINS, C. **Utililisation du modèle praxéologique de reférence dasns un EIAH**. 3e congrès pour la Théorie Anthopologique du Didactique. Toulouse, France: [s.n.]. 2014.

CHEVALLARD, Y. **Pourquoi la Transposition Didactique?** Université scientifique et médicale de Grenoble. [S.l.], p. 167-194. 1982.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, 1985.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition didactique**. 2ª. ed. Grenoble, France: La pensée sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné**. [S.l.]: La Pensée Sauvage Éditions, 1991.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, 1, n. 12, 1992. 73-112.

CHEVALLARD, Y. Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. In: CORNU, B. **L'ordinateur pour enseigner les mathématiques**. [S.l.]: PUF, 1992. p. 183-203.

CHEVALLARD, Y. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**. Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis. Turin: [s.n.]. 1994. p. 190-200.

CHEVALLARD, Y. Conceitos fundamentais da Didáctica: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 115-153.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**. University La Rochelle. [S.l.], p. 91-120. 1998.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 2, n. 19, 1999. 221-266.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude:** 3. Ecologie & régulation. Cours donné à la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001). Grenoble: La Pensée Sauvage. 2002. p. 41-56.

CHEVALLARD, Y. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactiques des mathématiques**. Rapport au savoir et didactiques. Paris: Éditions Fabert. 2003. p. 81-104.

CHEVALLARD, Y. Steps towards a new epistemology in mathematics education. **Procedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)**, Sant Feliu de Guixols, 2006. 21-30.

CHEVALLARD, Y. Sobre a Teoria da Transposição Didática: algumas considerações introdutórias. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, 3, n. 2, mai/ago 2013. Acesso em: 17 Setembro 2021.

CHEVALLARD, Y. A Teoria Antropológica do DIdático face ao professor de Matemática. In: ALMOULOUD, S.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. **A Teoria Antropológica do Didático:** princípios e fundamentos. 1. ed. Curitiba, PR: CRV, 2018. p. 31-50.

CHEVALLARD, Y. Uma ruptura epistemológica em ato. In: ALMOLOUD, S.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. **A Teoria Antropológica do Didático:** princípios e fundamentos. Curitiba, PR: CRV, 2018. p. 21-29.

CHEVALLARD, Y. Uma ruptura epistemológica em ato. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. **A Teoria Antropológica do Didático:** princípios e fundamentos. 1ª. ed. Curitiba, PR: CRV, 2018. p. 21-29.

CROSET, M.-C.; CHAACHOUA, H. Une reponse a la prise en compte de l'apprenant la TAD: la praxeologie personnelle. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 36, n. 2, 2016. 161-186.

DIMICELI, V. E.; LANG, A. S.; LOCKE, L. Teaching Calculus with Wolfram|Alpha. **International Journal of Mathematical Education**, 8, n. 41, 2010. 1061-1071.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, n. 5, 1993. 37-65.

DUVAL, R. La conversion des représentations: un des deux processus fondamentaux de la pensée. In: BAILLÉ, J. **Du mot au concept, onversion**. Grenoble: PUG, 2007. p. 9-45.

EDWARDS JR., C. H. **The historical development of the calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Tradução Hygino H. Domingues.

FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F.; SOUZA, E. S. D. Reconstrução de praxeologias matemáticas: percurso para desenvolvimento da atividade matemática. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. **A Teoria Antropológica do Didático:** princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. p. 181-201.

FLORENSA, I.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **The epistemological dimension in didactics:** two problematic issues. CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME. 2015. p. 2635-2641.

GASCÓN, J. Os modelos epistemológicos de referência como instrumenos de emancipação da didática e da história da matemática. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. **A Teoria Antropológica do Didático:** princípios e fundamentos. 1ª. ed. Curitiba: CRV, 2018. p. 51-76.

GOMES, A. S.; WANDERLEY, E. G. Elicitando requisitos em projetos de Software Educativo. **IX Workshop de Informática na Escola - XIE**, 2003. 119-130. Disponivel em: <https://www.researchgate.net/publication/269279601_Elicitando_requisitos_em_projetos_de_Software_Educativo>.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 324. 2013.

GRATZER, W.; KRISHNAN, S. From trapezoids to the fundamental theorem of calculus. **The Mathematics Enthusiast**, 6, n. 3, 2009. 459-476.

GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica:** uma nova abordagem para o aprendizado de geometria. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. Belo Horizonte: [s.n.]. 1996. p. 1-13.

GRUBER, T. R. A translation approach to portable ontologies. **Knowledge Acquisition**, 5, 1993. 199-220. Disponivel em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1042814383710083?np=y>. Acesso em: 11 Outubro 2021.

HENRIQUES, A. **Saberes universitários e as suas relações na educação básica:** uma análise institucional em torno do cálculo diferencial e integral e das geometrias. Ibicaraí: [s.n.], 2019.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. Reflexões sobre análise institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), 26, n. 4, 2012.

HOYLES, C. Microworld/schoolworlds: The transformation of an innovation Learning fom Computers. In: KEITEL, C.; RUTHVEN, K. **Learning from computers:** Mathematics Education and Techonology. OTAN ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences). ed. Berlin: Springer-Verlag, v. 121, 1993. p. 1-17.

JOUBERT, M. **Using computers in classroom mathematical tasks:** revisiting theory to develop recommendations for the design of tasks. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom: [s.n.]. 2013. p. 69-78.

KASPARY, D.; CHAACHOUA, H.; BESSOT, A. Qu'apporte la notion de portée d'une technique à l'étude de la dynamique praxéologique? **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, 25, 2020. 243-269.

LAGRANGE, J. B. L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. **Educational Studies in Mathematics**, 1, n. 43, 2000. 1-30.

LAGRANGE, J.-B. Transposing Computer Tools from the Mathematical Sciences into Teaching: some possible obstacles. **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument**, 36, 2005. 1-15.

LE MOIGNE, J.-L. Inteligência da complexidade: Os objectivos éticos da investigação e da intervenção em educação e formação não remetem a um 'novo discurso do método de estudo do nosso tempo'? **Revista de Ciências da Educação**, 4, 2007. 117-128.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. 3ª. ed. São Paulo: HARBRA Ltda, v. I, 1994.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria:** Comprimento, Área, Volume e Semelhança. 4ª. ed. Rio De Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

LUCAS, C. et al. Incompletude da matemática escolar no ensino secundário de Portugal e Espanha. In: ALMOULOUD, S.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. **A Teoria Antropológica do Didático:** princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. p. 203-234.

LUCAS, C. O. **Organizaciones matemáticas locales relativamentes completas**. Universidade de Vigo. Vigo, Espanha, p. 255. 2010.

MACHKRELL, K.; MASCHIETTO, M.; SOURIY-LAVERGNE, S. **The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem**. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom: [s.n.]. 2013. p. 79-87.

MAOR, E. **e:** a história de um número. Tradução de Jorge Calife. 5ª. ed. [S.l.]: Record, 2008. Disponivel em: <https://lelivros.love/book/baixar-livro-e-a-historia-de-um-numero-eli-maor-em-pdf-epub-e-mobi-ou-ler-online/>.

MATEUS, P. **Cálculo Diferencial e Integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 2006. 2006.

MOISE, E.; DOWNS, F. **Geometria Moderna**. Tradução de Renate G Watanabe e Dorival A Mello. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, v. 1, 1971.

NASCIMENTO, N. O.; PIRES, R. F. **Teorema Fundamental do Cálculo:** aplicações para o cálculo de área utilizando o GeoGebra. XV CIAEM Conferência Interamericana de Educación Matemática. Colombia: Universidad de Medellin. 2019. p. 1-8.

NOSS, R.; HOYLES, C. Microworlds, Constructionism and Mathematics. **Revista Educación Matemática**, 31, n. 2, 2019. Disponivel em: <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol31/2/01_REM31-2_i.pdf>. Acesso em: 12 Abril 2021.

OKTAVIYANTHI, R.; SUPRIANI, Y. Utilizing Microsoft Mathematics in Teaching and Learning Calculus. **IndoMS-journal on mathematics educations**, 6, n. 1, 2015. 63-76.

PALARO, L. A. **A concepção de educação matemática de Henri Lebesgue**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 340. 2006.

PAPERT, S. **LOGO:** computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PESSOA, F. **Mensagem**. 10ª. ed. Lisboa: Ática, 1972.

PICONE, D. F. B. **Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 126. 2007.

QUINTERO, E.; SALINAS, P. Producción multimodal de signos en la apropiación de relaciones entre función y derivada. **Opción**, Maracaibo, Velezuela, 31, n. 5, 2015. 739-762.

SILVA, C. T. J. **A Engenharia Didático-Informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação**. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 163. 2016.

SOARES, D. D. S.; BORBA, M. C. The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. **ZDM**, n. 46, 2014. 575-587.

SOMMERVILLE, I. **Engenharia de Software**. 9. ed. São Paulo: Pearson Education, 2011.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução de EZ2 Translate. 6ª. ed. São Paulo: Cengane Learning, v. I, 2014.

SUTHERLAND, R.; BALACHEFF, N. Didactical complexity of computational environments for the learning of Mathematics. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 4, 1999. 1-26.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2ª. ed. São Paulo: Makron Books, v. 1, 1994.

TAKACI, D.; STANKOV, G.; MILANOVIC, I. Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. **Computers & Education**, 82, 2015. 421-431.

TALL, D. Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. **Mathematics Education Research Centre. Mahematics Teaching**, 113, 1986. 48-51.

TALL, D. A Graphical Approach to Integration and the Fundamental Theorem. **Mathematics Education Research Centre. Mathematics Teaching**, 137, 1991. 29-32.

TALL, D. Cognitive development in Advanced Mathematics using techonology. **Mathematics Education Research Journal**, 3, n. 12, 2000. 196-218.

TALL, D. A sensible approach to the Calculus. **Planary at The National and Internationa Meeting on the Teaching of Calculus**, Puebla, Mexico, 2010. 1-29.

TCHOUNIKINE, P. Pour une ingéniere des Environnements Informatiques pour l'Aprentissage Humain. **Revue 13 information - interaction - intelligence**, 1, 2002. Disponivel em: <https://www.irit.fr/journal-i3/volume02/numero01/article02_01_02.pdf>. Acesso em: 17 Setembro 2021.

TCHOUNIKINE, P. Platon-1: quelques dimensions pour l'analyse des travaux de recherche en conception d'EIAH, 2004. Disponivel em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00190179>. Acesso em: 17 Setembro 2021.

TCHOUNIKINE, P. **Computer Science and Educational Software Design. A Resource for Multidisciplinary Work in Techonology Enhanced Learning**. [S.l.]: Springer-Verlag Berling Heildelberg, 2011.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. Tradução de Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. 11ª. ed. São Paulo: Addison-Wesley/Pearson, v. 1, 2009.

THOMAS, M. O. J.; LIN, C. **Designing Tasks for Use With Digital Technology**. Procedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom: [s.n.]. 2013. p. 109-117.

THOMPSON, P. W. Mathematical Microworlds and Intelligent Computer-Assisted Instruction. **Invitational Workshop on Intelligent Computer-Assisted Instruction and Personal Computers**, San Diego, CA, 1985. 83-109.

THOMPSON, P. W. Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. **Educational Studies in Mathematics**, 26, 1994. 229-274.

TIBÚRCIO, R. S. **Processo de desenvolvimento de software educativo: um estudo da prototipação de um software para o ensino de Função**. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 112. 2016.

TIBÚRCIO, R. S. **A Engenharia Didático-Informática: uma metodologia para a produção de software educativo**. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 195. 2020.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999.

VIANNA, C. C. D. S. **Students' understanding of the fundamental Theorem of calculus: an exploration of Definitions, theorems and visual imagery**. Institute of Education University of London. [S.l.], p. 285. 1998.