



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

JOSÉ ALBERTO DA SILVA

**ANÁLISE DE PROBLEMAS SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL À LUZ DA
TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

**RECIFE
2022**

JOSÉ ALBERTO DA SILVA

**ANÁLISE DE PROBLEMAS SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL À LUZ DA
TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

Trabalho apresentado à Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Ciências Exatas e da Natureza, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Verônica Gitirana

RECIFE

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, José Alberto da.

Análise de problemas sobre função exponencial à luz da teoria dos registros
de representação semiótica / José Alberto da Silva. - Recife, 2022.
47 : il., tab.

Orientador(a): Veronica Gitirana Gomes Ferreira
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática -
Licenciatura, 2022.

1. Resolução de problemas. 2. Função exponencial. 3. Semiótica. 4. Análise a
priori. I. Ferreira, Veronica Gitirana Gomes. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

FOLHA DE APROVAÇÃO

JOSÉ ALBERTO DA SILVA

ANÁLISE DE PROBLEMAS SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de conclusão de curso
apresentado como requisito parcial para
obtenção do título de Licenciatura em
Matemática, pela Universidade Federal de
Pernambuco.

Aprovado em: 10/11/2022

Banca Examinadora

Verônica Gitirana Gomes Ferreira
PhD Educação Matemática
Universidade Federal de Pernambuco

Marcelo Lins Muniz de Melo Santos
Mestre em Educação Matemática e Tecnológica
ABA Global School

Airton Temistocles Gonçalves de Castro
Dr. em Matemática
Universidade Federal de Pernambuco

Aos
meus
irmãos,
primos e
amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao cosmos por proporcionar esse encontro entre eu e todos os elementos que participam e participaram da minha vida.

À UFPE, por incentivar a caminhada acadêmica com auxílio e apoio.

À Profa. Dra. Verônica Gitirana, pela orientação, paciência, por me incentivar e nunca ter desistido de mim.

Ao meu pai que, certamente, estaria muito feliz nesse momento.

Aos meus irmãos que me apoiam o tempo todo, meus primos que sempre estiveram por perto, aos amigos que me ouviram e me aconselharam durante todos esses anos.

Aos colegas da turma pela caminhada nesse curso.

"Nossas maiores realizações não podem ficar para trás porque nosso destino está
acima de nós". - Cooper

RESUMO

Este trabalho trata-se de uma análise teórica de dois problemas sobre função exponencial à luz da teoria dos registros de representação semiótica. Seu objetivo foi analisar como os diferentes registros possibilitam o desenvolvimento dos conceitos matemáticos de forma mais aprofundada. Para tanto, analisamos de forma teórica, a resolução de duas questões matemáticas utilizando diferentes representações. A escolha por essas questões deu-se por trabalhar dentro de uma função tipo exponencial em um contexto social hipotético e outra de função exponencial, dentro do contexto da matemática pura. Após análise das questões, foram selecionadas da prova do vestibular da Unicamp-SP (2001) e da UEPG-PR. Nos problemas selecionados é possível que o sujeito, ao buscar resolver, utilize apenas propriedades de potência utilizando o registro algébrico, sem muitos ganhos conceituais. Porém, por meio do uso de outros registros, fazendo-se as conversões e tratamentos necessários, é possível trabalhar o conteúdo de forma mais completa, o que pode gerar um maior ganho conceitual durante a resolução de problemas. Portanto, verificou-se que, ao utilizar mais de um registro para resolver problemas, é possível ter um estudo mais aprofundado, abarcando assim um maior ganho conceitual durante as atividades.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Função exponencial. Semiótica. Análise a priori.

ABSTRACT

This research is a theoretical analysis of two problems about exponential function in the light of the theory of semiotic representation registers. Its aim was to analyze how the different registers enable the development of mathematical concepts in a deeper level. For this end, we analyzed, in a theoretical way, the resolution of two mathematical questions using different representations. The choice for these questions was due to work within an exponential type function in a hypothetical social context and another exponential function, within the context of pure mathematics. After analyzing the questions, they were selected from the vestibular exams of Unicamp-SP (2001) and UEPG-PR. In the selected problems it is possible that the subject, when trying to solve them, uses only properties of potency using the algebraic register, without many conceptual gains. However, through the use of other registers, making the necessary conversions and treatments, it is possible to work the content in a more complete way, which can generate a greater conceptual gain during problem solving. Therefore, it was verified that by using more than one register to solve problems, it is possible to have a more in-depth study, thus achieving a greater conceptual gain during the activities.

Keywords: Problem solving. Exponential function. Semiotic. A priori analysis

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Primeira questão a ser analisada	33
Figura 2 -	Segunda questão a ser analisada	36

LISTA DE GRÁFICO

Gráfico 1 -	Relação entre tempo e indivíduo definido por três pontos	34
Gráfico 2 -	Relação entre tempo e indivíduo definido por cinco pontos	34
Gráfico 3 -	Intersecção entre dois gráficos	37
Gráfico 4 -	Crescimento e decrescimento entre gráficos	37
Gráfico 5 -	Intersecção entre dois gráficos decrescentes	38

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Síntese de diferentes representações de funções	28
Quadro 2 - Resolução da primeira questão em duas representações	33
Quadro 3 - Resolução da segunda questão em duas representações	37

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
COVID	Coronavírus
GERE	Grupo de Estudos em Recursos para a Educação
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
TICs	Tecnologia da Informação e Comunicação
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
Unicamp-SP	Universidade de Campinas - São Paulo
UEPG-PR	Universidade Estadual de Ponta Grossa - Paraná

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}^*$ - Sem o zero)
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}_+$ - Positivos)
$\subset$	Está contido
$\rightarrow$	Implica
$ $	Tal que
$\forall$	Para todo
$>$	Maior que
$\%$	Porcentagem

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1 Fundamentação Matemática	19
2.2 Fundamentação da Educação Matemática	26
3 REVISÃO DE LITERATURA	30
4 METODOLOGIA	31
5 ANÁLISE E DISCUSSÃO	33
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
REFERÊNCIAS	43

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da Matemática acontece desde os primórdios da civilização, os egípcios, os gregos, os árabes e os romanos, são exemplos de grandes civilizações que influenciaram em seu desenvolvimento. Porém, quando analisamos a influência da área da Educação Matemática - mesmo encontrando fontes sobre o ensino da Matemática na antiguidade -, a existência da Educação Matemática é muito mais recente, inicia no século passado, e é apenas na década de 60 que ela se populariza aqui no Brasil, com criações de programas de pós-graduação na referida área (MAFRA; SÁ, 2020). Com isso, a pesquisa nesta área bifurcou-se na finalidade de natureza pragmática e profissional, produzindo pesquisas que desenvolvam uma perspectiva na qualidade do ensino, e de natureza teórica, que produz conteúdo para explicar os fenômenos ligados ao ensino e aprendizagem da matemática. Esta pesquisa se enquadra no primeiro caso, tem natureza pragmática.

A Educação Matemática, que em nossa formação, é estudada nas metodologias do ensino da matemática, nos estágios e programa de incentivo a docência como a Residência Pedagógica e Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid), dedica-se não somente à investigar a docência, como também conhecimentos produzidos dentro da universidade e como são explorados fora dela, em instituições de ensino básico e outras redes de ensino. Nesse viés, observou-se a necessidade de estudar as questões do tipo exploratória à luz dos possíveis registros de representações semióticas, com a intenção de compreender como as diferentes representações permitem um entendimento mais aprofundado dos diversos conceitos trabalhados em problemas matemáticos, permitindo uma compreensão mais completa possível.

Mediante a situação em que o mundo se encontrou, como a da pandemia ocasionada pela COVID-19, e em outros viés como o crescimento de pessoas nos meios digitais como *Tik Tok*, ou, o movimento antirracista caracterizado como *Black Lives Matter* (Vidas Negras Importam) e a pouca exploração da função exponencial em pesquisas científicas - revisão sistemática de 2015 a 2020 -, surge a importância de analisar este tipo de função. A relevância desta discussão dá-se por sua

aplicabilidade em diversas áreas de conhecimentos, como para modelar: a disseminação e contaminação do vírus Sars-Cov-2, o espalhamento de um vídeo postado ao ser compartilhado inúmeras vezes nos meios sociais e digitais e o estudo da árvore genealógica para entender as raízes e ancestralidade das pessoas.

Nessa perspectiva, pretende-se analisar como os diferentes registros de representações possibilitam uma exploração mais completa dentro dos pressupostos de uma tarefa exploratória. Para tanto, escolheu-se o conteúdo de função exponencial, e o trato com questões abertas, em que se possa resolver por meio de diferentes representações. Para Ponte (2005, p. 08), uma tarefa exploratória caracteriza-se pela sua estrutura, contendo questões abertas com um menor grau de dificuldade, ele afirma que “se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planejamento, estaremos perante uma tarefa de exploração”. Ou seja, para este autor, uma tarefa exploratória busca do sujeito um raciocínio a partir das etapas que o problema está definindo, onde, é por meio dessas etapas que articulam a regularidade.

Portanto, estudar os conceitos presentes e emergentes desse conteúdo matemático de forma mais aprofundada possível é, de certo modo, poder reconhecer tais conceitos em suas diversas áreas de utilização por meio de suas representações. Com isso, a busca por meios que favoreçam uma abordagem mais completa sobre um determinado tema, como o uso de tecnologia, a utilização de diferentes registros surge de forma natural, concomitante com isso faz parte do regulamento da BNCC (BRASIL, 2018).

Partimos, assim, para trabalhar este conteúdo matemático utilizando algumas representações da função. Para isso, utilizaremos a plataforma dinâmica gráfica GeoGebra, para gerar os gráficos por meio de sua representação algébrica e a tabular. A Geometria Dinâmica (SILVA; PENTEADO, 2009), mesmo se utilizando das representações comuns da matemática como o Gráfico Cartesiano e a linguagem algébrica, traz a esses elementos dinâmicas que oferecem outras possibilidades aos objetos representados, como poder traçar uma figura geométrica, em vez de apenas um exemplo estático dela. Já a tabela permite um trabalho iterativo por meio de uma rotina de operações, por meio de somas e multiplicações sucessivas, e compreendendo a estrutura iterativa da função exponencial. A escolha pela

representação gráfica dá-se por auxiliar na verificação da função, fornecendo um estudo gráfico de como descrevê-lo, podendo possibilitar implicações. Já a representação tabular auxilia no desenvolvimento da observação de regularidades, como dito, relacionando cada número a uma aplicação gerando outro número, sucessivamente, chegando a caracterizar a função.

Em uma revisão de literatura sobre ensino e aprendizagem de funções (GITIRANA et al., a publicar), foram observados diversas formas de aplicações do conteúdo citado (função) para uma melhoria tanto no ensino como no aprendizado. Disto, em grande parte da revisão, foi comum encontrar textos que remetem ao uso de artefatos para representar e trabalhar funções. Artefatos esses que vão desde o uso do GeoGebra até o uso de planilha e winplot, todos com o mesmo objetivo, explorar o comportamento das funções em sua forma algébrica e gráfica. Além da pouca exploração, caracterizando aproximadamente 3% dos 34 artigos revisados sobre o conteúdo de função exponencial, os artigos que trabalham o tema, ensino de funções, não focam nas aplicações e desenvolvimento do conteúdo após sua caracterização.

A fundamentação teórica tem por base o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003). Este teórico defende a importância dos registros de representação semiótica na cognição matemática, e por conseguinte na aprendizagem de matemática e de suas aplicabilidades. Para ele, um objeto matemático é uma entidade puramente abstrata, podendo adquirir existência real somente por meio de representações semióticas. Sendo assim, trazemos neste trabalho um olhar mais singular de duas situações que envolvem função exponencial em alguns de seus diferentes registros de representação, a algébrica, o tabular e a gráfica, para compreender a importância dos registros em um estudo mais aprofundado sobre os conceitos trabalhados.

O texto se desenvolve partindo de uma análise teórica por meio de elencar tratamentos e conversões necessários para resolver as questões exploratórias. Concomitante com isso, debruça-se na representação tabular na primeira questão para resolver o problema proposto e, na segunda questão, em um recurso didático dinâmico com a perspectiva de explorar as modificações na potencialidade dos diferentes registros, focando assim na representação tabular e gráfica. Encerrando com o detalhamento que a abordagem da utilização de mais de um registro por meio

dos recursos, além do algébrico, permite trabalhar dentro de uma perspectiva de problemas do tipo exploratória.

Com isso, este trabalho de conclusão de curso inicia-se por uma apresentação da fundamentação teórica da matemática, elencando algumas definições e teoremas que demonstram ser necessárias para trabalhar a função, e especificamente, trabalhar dentro das questões selecionadas para esse trabalho. Em seguida, trata-se da educação matemática, trazendo a teoria dos registros de representações semióticas e quais elementos desta são importantes para este trabalho. Após a fundamentação, encontra-se a revisão de literatura, que aborda um trabalho escolhido da revisão bibliográfica do Grupo de Estudos em Recursos para a Educação (GERE). Seguindo, encontra-se a metodologia, definindo como serão trabalhadas as questões, apresentando o motivo de escolha da mesma e apresentando-as. Para encerrar, trabalha-se no último capítulo a análise e discussão sobre as questões escolhidas, apresentando a questão e desenvolvendo duas estratégias de resolução para cada questão, após isso, faz-se a análise de cada uma por vez, finalizando assim o trabalho. A partir daí, encontram-se as considerações finais do trabalho e suas referências.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, inicialmente, trata-se de fundamentar matematicamente o conceito de função, particularmente o de função exponencial, elencando definições, propriedades e algumas proposições relevantes para o estudo deste texto. Logo após, trabalha-se a fundamentação sobre sistemas semióticos de representações dos conceitos matemáticos dentro de uma perspectiva educativa da teoria descrita por Raymond Duval (2012) sobre Registros de Representações Semióticas. Teoria de cunho cognitivo que se preocupa com a relação entre a representação e o conhecimento do indivíduo.

2.1 Fundamentação Matemática

Para fundamentar a função exponencial iniciaremos retomando alguns conceitos de potências, com definições e propriedades.

Definição 1: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, define-se a potência a^n como o produto de a por ele mesmo em n fatores iguais a a , onde $a \neq 0$ é a base e n o expoente dessa potência.

Para $n = 0$, temos $a^n = 1$, pela propriedade de quociente de potências de mesma base.

A definição goza das seguintes propriedades:

Proposição 1: A potência assume as seguintes propriedades:

Sejam a, b, m e $n \in \mathbb{N}$, com $a, b \neq 0$ temos que:

1. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ e $(a / b)^n = a^n / b^n$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $a^n = a^m \Leftrightarrow n = m$

:

Para construir a ideia de potência com expoente negativo, vejamos:

$$a^{n-n} = a^0 = 1$$

Para que a potência satisfaça à Propriedade 1, precisa que

$$1 = a^{n-n} = a^n \times a^{-n}, \text{ portanto, } a^{-n} = 1/a^n.$$

Para se construir a potência com expoente racional podemos fazer o seguinte, tomando $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$, $a^{n/m} = (a^n)^{1/m}$.

Portanto, basta definir a potência das frações unitárias com denominador natural.

_____ m vezes _____

Veja que $a = a^{(1/m+1/m+\dots+1/m)}$

Para que a potência obedeça a propriedade 1

$$a = a^{(1/m+1/m+\dots+1/m)} = a^{1/m} \times a^{1/m} \times \dots \times a^{1/m} = (a^{1/m})^m$$

$$(a^{1/m})^m = a \Rightarrow a^{1/m} = \sqrt[m]{a}. \text{ Portanto, podemos definir } a^{1/m}$$

Definição 1.2: Sejam $a \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$ definimos a potência de expoentes Racionais

como $a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$ ou seja é o número que elevado a m resulta em a .

Lema 1: Seja $a \in \mathbb{R}_+$, com $a \neq 1$. Então em todo intervalo de números reais positivos existe uma potência a^r com $r \in \mathbb{Q}$.

Vamos definir a^x com x irracional da seguinte forma, vamos tomar a^x como sendo o único número real cujas aproximações por falta são a^r com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$ e cujas

aproximações por excesso são $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$. Se $0 < a < 1$, a^x será o único número real cujas aproximações por falta são a^r e por excesso são a^s .

O número a^x está bem definido, pois, se existisse outro número com tais propriedades, teríamos que para $a > 1$ (de forma análoga para $0 < a < 1$) existam dois números reais distintos A e B tais que $r < x < s \Rightarrow a^r < A < B < a^s$. Mas aí, o intervalo $[A, B]$ não teria nenhuma potência de a com expoente racional. O que contraria o Lema 1.

Em termos práticos, podemos estender a ideia de potência com número irracional da seguinte forma: Tome uma sequência de números racionais $(1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots)$, onde essa sequência converge para o número irracional $\sqrt{2}$. Tome agora a sequência $(2^{1,4}; 2^{1,41}; 2^{1,414}; 2^{1,4142}; \dots)$, essa sequência se aproxima do número real $2^{\sqrt{2}}$. Dessa forma, a medida que o número r se aproxima de $\sqrt{2}$ mais próximo o número 2^r se aproxima de $2^{\sqrt{2}}$, aproximação por falta. Como essa sequência de números racionais é crescente, podemos fazer de forma análoga uma sequência decrescente, de forma que, essa se aproxime de $2^{\sqrt{2}}$ por excesso. Basta tomar a sequência $(1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; \dots)$ que se aproxima de $\sqrt{2}$ a medida que essa sequência decresce, com isso, tomando a sequência $(2^{1,5}; 2^{1,42}; 2^{1,415}; 2^{1,4143}; \dots)$ por sua vez se aproxima de $2^{\sqrt{2}}$.

Teorema 1: Sejam dados $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$ e x irracional. Seja (r_n) uma sequência monótona de números racionais convergindo para x , então a sequência (a^{r_n}) converge. Tomando uma outra sequência monótona de números racionais (s_n)

convergindo para x , então $(a^{r_n} - a^{s_n})$ converge para zero, ou seja, tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}.$$

Não provaremos aqui tal teorema, mas com base nele definiremos a potência de um irracional.

Definição 1.3: Seja $a \in \mathbb{R}_+$ e tomando x irracional, definimos a^x como sendo o número que satisfaz o teorema acima.

Definição 2: Dados dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$, uma função f é uma relação entre os dois conjuntos, tal que, para cada elemento $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$ tal que $f(x) = y$.

Notação: $f: A \rightarrow B; x \rightarrow y$

Definição 2.1: O conjunto A é definido como o domínio da função f e o conjunto B é definido como o contradomínio de f . A imagem de f denotado por $Im(f)$ é um subconjunto de B , definido como $C \subset \mathbb{R}$ tal que, para todo elemento $y_1 \in C$ existe $x_1 \in A$ tal que $f(x_1) = y_1$.

Definição 2.2: Seja $f: A \rightarrow B$ uma função, então o conjunto $G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}$ é chamado de gráfico da função f . Desta forma, G_f é um subconjunto do conjunto de todos os pares (x, y) de números reais, ou seja, o conjunto G_f é o lugar geométrico de todos os pontos $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f .

Definição 3: Um assíntota a uma função é uma reta que se aproxima de uma determinada curva mas que não tem incidência na mesma.

Definição 4: Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita injetora se $\forall x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 5: Uma função f é dita não-decrescente se, e somente se, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Definição 6: Uma função f é dita crescente se, e somente se, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos que, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Definição 7: Uma função f é dita não-crescente se, e somente se, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos que, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Definição 8: Uma função f é dita decrescente se, e somente se, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos que, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Definição 9: Seja f uma função definida no conjunto dos números reais, esta função será monótona, se, é crescente, decrescente, não-crescente ou não-decrescente.

Lema 2: Se a função é crescente, também é não-decrescente, da mesma forma para a decrescente e não-crescente.

Vale salientar que a função constante é não-crescente e não-decrescente ao mesmo tempo, assim, ela não é crescente e nem decrescente.

Definição 10: Uma sequência de números reais é uma função $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida no domínio dos números naturais, maiores ou igual a zero, associando a valores dos números reais, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos um $x_n = \phi(n) \in \mathbb{R}$. O n -ésimo termo da sequência será representado por x_n , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 10.1: Dada uma sequência de números reais

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$$

Definimos uma PA (Progressão aritmética infinita) se existir $r \in \mathbb{R}$ tal que $x_n - x_{n-1} = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Definição 10.2: Dada uma sequência de números reais

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots)$$

Definimos uma PG (Progressão geométrica infinita) se existir $q \neq 0$, $q \in \mathbb{R}$ tal que $y_n = y_{n-1} \cdot q$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Definição 11: (Função Exponencial) Seja $a \in \mathbb{R}_+$, com $a \neq 1$, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função exponencial se $f(x) = a^x$, onde a é chamado de base.

Esta função associa cada elemento da progressão aritmética, um único elemento da progressão geométrica, transformando a progressão aritmética $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$

em uma progressão geométrica $(y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), \dots)$.

Para quaisquer valores $x, y \in \mathbb{R}$ valem as seguintes propriedades:

1. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$
2. $f(1) = a$
3. Se $a > 1$ se então $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ e se $0 < a < 1$ então se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

A propriedade 3 diz que para $0 < a < 1$ a função definida acima é decrescente, e, para $a > 1$, a função é crescente.

Teorema: (Caracterização da função exponencial) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, uma função injetora e monótona, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = f(x)^n, \forall n \in \mathbb{Q} \text{ e } x \in \mathbb{R};$
2. $f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ onde } a = f(1);$
3. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

(1) $\rightarrow$ (2) Vamos supor que o item (1) é verdadeiro para todo racional $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}_*$, onde $f(rx) = f(x)^r$. Tomando $r \cdot q = p$ temos que, $f(rx)^q = f(qxr) = f(px) = f(x)^p$.

Logo, $f(rx) = f(x)^{p/q} = f(x)^r$

Para $f(1) = a$ temos, $f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r \forall r \in \mathbb{Q}$

Vamos supor agora que f seja decrescente - segue de forma análoga para f crescente -. Logo, temos que $1 = f(0) > f(1) = a$. Vamos supor, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Se $f(x) > a^x$, então, tomando que, se $a \in \mathbb{R}_+$ com $a \neq 1$ então existe um intervalo em $\mathbb{R}_+$ que comporta uma potência $a^r \forall r \in \mathbb{Q}$, logo, existe um número racional r tal que $f(x) > a^r > a^x \Rightarrow f(x) > f(r) > a^x$. Como f é decrescente, então $f(x) > f(r) \Rightarrow x > r$ mas $a^r > a^x$ o que é uma contradição, provando que (1) $\Rightarrow$ (2) para f decrescente, e prova-se de forma análoga para f crescente.

(2) $\rightarrow$ (3) De $f(x) = a^x$, pela proposição 1, item 1, temos que $f(x + y) = a^{x+y}$ que implica em, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$

(3) $\rightarrow$ (1) De $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, temos que

$$f(nx) = f(\underbrace{x+x+\dots+x}_n) = f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x) = f(x)^n$$

Para $f(-nx) = f(x)^{-n}$ vamos observar para $f(-x)$

Temos por (3) que, $f(-x) \cdot f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = 1/f(x)$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} f(-nx) &= f(\underbrace{-x - x - x \dots - x}_n) = f(-x) \cdot f(-x) \cdot f(-x) \cdot \dots \cdot f(-x) \\ &= 1/f(x) \cdot 1/f(x) \cdot 1/f(x) \cdot \dots \cdot 1/f(x) = 1/f(x)^n = f(x)^{-n}. \end{aligned}$$

Definição 12: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é do tipo exponencial se temos $f(x) = ba^x$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ com a, b sendo constantes positivas.

Uma função do tipo exponencial detém as mesmas propriedades da função exponencial, ou seja, ela é injetora, monótona e crescente quanto $a > 1$ ou decrescente quanto $0 < a < 1$.

2.2 Fundamentação da Educação Matemática

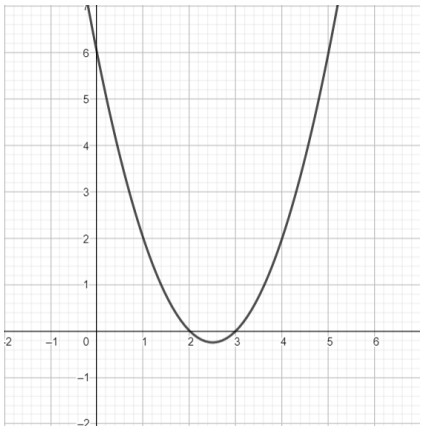
Explorar conteúdos matemáticos, antes de qualquer coisa, significa explorá-los por meio de suas formas de serem representados. Nesse sentido, uma análise dos elementos que compreendem as definições a serem estudadas, os objetos matemáticos, necessita estudos de suas representações. Por exemplo, ao explorar uma multiplicação, torna-se necessário compreender um sistema que representa essa multiplicação e/ou uma compreensão das partes. Desta forma, o estudo de função não foge à regra, como elemento abstrato, só pode ser estudada por meio de representações. É possível trabalhar com diversas funções dentro e fora do contexto matemático, porém, a utilização dos registros que representam as funções apresenta-se como uma possibilidade de alcançar determinado objeto abstrato, mesmo que esses registros não sejam convencionais, como é o caso dos contextos. A utilização de registros para representar um conhecimento matemático é de extrema importância para trabalhar um tema dentro de uma sala de aula, uma vez que é por meio deles que podemos chegar aos objetos matemáticos.

Duval (2012, tradução de MORETTI), em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), aborda a utilização de registros para a compreensão de conceitos matemáticos. As representações semióticas correspondem aos diversos registros de um dado objeto abstrato, onde cada registro diferencia-se do outro, de forma que, o sujeito que utiliza diversos registros para um mesmo objeto desenvolve uma compreensão mais completa. Dessa forma, essas representações são essenciais para o desenvolvimento cognitivo de cada um. Definem-se, assim, duas características da apreensão de um dado objeto, o da *semiose*, do qual corresponde a produção/apreensão de uma representação semiótica e a *noesis*, sendo este correspondente a apreensão conceitual do objeto, e ambos se relacionam de forma que, não há semiose sem noesis. Em termos práticos, quando o sujeito se apropria de um objeto físico ou mental que foi utilizado para representar um conhecimento, esse tratamento é observado por Duval como o processo de *semiose*, enquanto que, quando o sujeito compreende os conceitos de um objeto, sua gênese, este processo é definido como *noesis*, de forma que, esses dois processos andam lado a lado.

Duval (2012) define, ainda, que o sistema semiótico trata-se de um conjunto de signos que seguem regras próprias de formação e conversões, onde, essas regras de conversões apresentam-se relacionadas de forma a identificar os objetos a serem representados. Com isso, o autor define esses sistemas semióticos como registros, onde a aquisição conceitual de um dado conteúdo se dá por meio da mobilização desses registros e por duas atividades cognitivas, o tratamento e a conversão. De outra forma, os registros de representações se baseiam na comunicação, nas funções cognitivas e no tratamento, de forma a utilizar a linguagem natural, o sistema de escrita (numérica, algébrica e simbólica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas. Sendo assim, a semiótica permite uma pluralidade de representações para um mesmo objeto matemático dado, fazendo com que o sujeito minado de vários sistemas de representações, fazendo as devidas conversões, tenha uma maior apreensão do objeto matemático estudado, pois, cada representação revela diferentes conceitos com diferentes propriedades, ou seja, nenhuma representação define propriamente o objeto, porém demonstra um outro ponto de vista de interpretação e tratamento dos conhecimentos oriundos dos objetos matemáticos estudados.

O tratamento de um conhecimento matemático, que é um conhecimento abstrato, refere-se a trabalhar o mesmo dentro de um único sistema de representação, ou seja, é a manipulação de um sistema de forma a alcançar objetivos próprios que os conceitos trabalhados permitem. Quanto à conversão, trabalha a manipulação de mais de um registro, onde, o objetivo principal, e particular, é utilizar de uma outra representação de forma a representar um objeto mental dentro de uma ótica e converter, mantendo as propriedades do objeto, para uma outra ótica, e, dentro dessa outra representação, seja possível alcançar os mesmos objetivos alcançados durante o tratamento. Abaixo segue um exemplo de tratamento e conversão dentro de uma estrutura matemática.

Quadro 1 - Síntese de diferentes representações de funções

Representação algébrica	Representação gráfica
$x^2 - 5x + 6 = 0$	
$(x - 3) \cdot (x - 2) = 0$	
Representação linguagem natural	Representação geométrica
Existem dois números que somado resulta em 5 e multiplicado resulta em 6. Sabe-se ainda que esses números são raízes reais de uma equação do segundo grau. Qual equação trata-se e quais esses números?	

Fonte: elaborado pelo autor

Denardi (2017) defende que "na matemática muito mais do que em qualquer outra área do conhecimento, a diversidade dos sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos". Porém, é fundamental que durante a concepção de objetos matemáticos, como no desenvolvimento de representações mentais, ou mobilização de diferentes funções

cognitivas e até na produção do conhecimento, a representação não seja confundida com o objeto matemático em si, para isso, Duval afirma que

A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado. (DUVAL, 2012, p. 05.)

Vale pensar que utilizar sistemas representativos para ter acesso a um objeto de estudo é uma mobilização que pode gerar grandes frutos tanto para o ensino como para a aprendizagem. De outra forma, apropriar-se de registros de representação para trabalhar a função exponencial dentro de um contexto de sala de aula não apenas conduz a trabalhar a função de forma representativa, mas, de forma a melhor conceitualizar o objeto de estudo. A partir disso, possibilita um aumento das mobilizações que os sujeitos podem realizar durante uma atividade, uma vez que trabalhando com diferentes registros, existe a possibilidade de trabalhar diferentes aplicações e estudos mais aprofundados sobre o devido tema trabalhado em aula.

3 REVISÃO DE LITERATURA

A revisão bibliográfica deu-se por meio de uma iniciativa de participar de um grupo de pesquisa em recursos para educação, onde a imersão no grupo fez com que desenvolvesse, em conjunto com outros participantes do mesmo, um livro sobre revisão de literatura sobre funções. Desta forma, o capítulo desenvolvido por este autor trata-se de uma revisão de literatura, entre o período de 2015 a 2020, sobre o ensino de funções, onde foram localizados alguns textos e apenas um (1) tratava de função exponencial. Sendo assim, houve uma necessidade de discutir tal tema pelo poder de sua aplicabilidade e suas representações em diversas esferas sociais.

O texto selecionado que trabalhava o tema citado é o trabalho de mestrado de Bonotto e Bisognin (2015), sendo a mestranda a primeira autora, utiliza-se de TICs (Tecnologia da Informação e Comunicação) para trabalhar a conceitualização da função exponencial dentro da sala de aula, para isso, ela baseia seus estudos nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) e a TRRS de forma a promover diferentes sistemas de representação da função. Contudo, a autora afirma que utilizar de TICs e de diferentes registros de representação não torna-se suficiente para a conceitualização de forma completa do tema proposto, ela afirma a necessidade de um mediador para gerar discussões a respeito do que foi feito, para assim chegar a conclusões mais assertivas.

Dessa forma, por mais que trabalhe os diferentes tipos de representações, é necessário um acompanhamento eficaz, com orientações e análise das tomadas de decisões dos sujeitos envolvidos nas atividades que pode se propor. Desta forma, surge uma necessidade de analisar quais instrumentos podem ser mobilizados para que essa configuração não perdue.

4 METODOLOGIA

Para alcançar o objetivo de discutir como os diferentes registros de representações possibilitam uma exploração mais completa dentro dos pressupostos de uma tarefa exploratória. Para tanto, desenvolveram-se estratégias para resolução de problemas com o uso de uma tabela e um aplicativo (o GeoGebra), faremos uma análise teórica em dois problemas de função exponencial. Iniciamos a análise buscando duas estratégias distintas de resolução dos problemas: uma utilizando uma representação tabular e outra da utilização do aplicativo dinâmico GeoGebra. Nessa etapa, o foco principal é mapear caminhos para resolver questões que envolvem função exponencial, identificando os tratamentos e conversões que podem-se explorar com tais artefatos a fim de argumentar sobre a completude que esses artefatos permitem nas conceitualizações das funções.

Nesse sentido, analisamos duas questões sobre o tipo de função citada, de modo a explorar até três tipos de representações, a algébrica, a gráfica e a tabular. Elencando estratégias para resolução dos problemas, utilizando as propriedades de potência, fazendo as manipulações algébricas para resolver os problemas, que serão listados na coluna esquerda para ambas questões, e, na primeira questão, fazendo uma relação que transforma uma progressão aritmética, achando a razão de proporcionalidade, para geométrica, também compreendendo a razão de proporcionalidade, por meio de uma representação tabular, e, na segunda questão, a utilização de gráficos, com o auxílio do GeoGebra, ambas elencadas na coluna direita. Com isso, elencou-se os benefícios que essas representações da coluna direita possibilitam em comparação com a coluna esquerda com relação à completude dos conceitos que demonstram.

A primeira questão foi escolhida por se tratar de um recorte social. A escolha específica desta dá-se pelo modelo de estudar o conteúdo por partes, ou seja, de forma exploratória. O problema trata-se de um decaimento de uma sociedade ao longo dos anos, evidenciado por meio de uma função, que ao passar dos anos os indivíduos de uma sociedade podem ser extintos. O problema trata-se de uma função exponencial que descreve o decaimento de uma população ao longo dos

anos, partindo assim para um estudo por meio de três etapas. A primeira etapa propõe a caracterização da função, a segunda propõe uma análise de um ponto da função, enquanto que a terceira propõe a descrição do gráfico dentro de um intervalo dado.

A segunda questão envolve conceitos matemáticos apenas, com isso, a análise será nos tratamentos e conversões necessárias para resolver o problema dado com a utilização do geogebra. Esta questão foi escolhida também pela forma exploratória que o permite, analisando o comportamento de duas funções e de composição dessas, além da possibilidade que esta permite do estudo pelo seu gráfico. Este problema é dividido em cinco etapas, em início são dadas duas funções exponenciais, onde, nas tópicos propostos para realizar as resoluções, tem-se a proposta de análise da intersecção das funções na primeira etapa, na segunda observa-se sobre o crescimento ou decrescimento das funções, na terceira parte analisa a multiplicação entre dois pontos das funções com relação a igualdade em um outro ponto, na quarta etapa tem uma análise da função composta e por último a soma de função pela igualdade em determinados pontos.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO

A análise das duas questões sobre função exponencial, sendo uma com uma perspectiva de aplicação e outra na perspectiva de matemática pura terá suas resoluções em duas colunas, onde a coluna da esquerda será desenvolvido o tratamento necessário para resolver o problema utilizando propriedades de potência e algumas operações matemáticas, além de conhecimentos próprios para a resolução, da representação algébrica. Fazendo a conversão necessária, a partir das funções e pontos dados e obtidos durante a resolução, na coluna da direita, será desenvolvido em dois ambientes distintos (Tabela e GeoGebra), sendo tabela para a primeira questão e GeoGebra para a segunda questão.

Figura N-1 - 1ª questão

Questão 1: (Unicamp-SP) Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função: $F(t) = a \cdot 2^{-bt}$, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes.

- Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial ($t = 0$) seja igual a 1024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.
- Qual o tempo mínimo para que a população se reduza a $1/8$ da população inicial?
- Esboce o gráfico da função $F(t)$ para $t \in [0, 40]$.

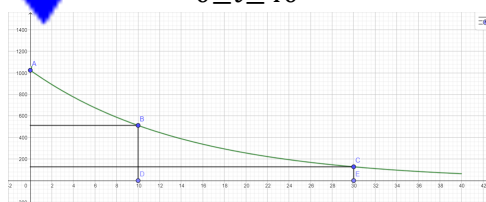
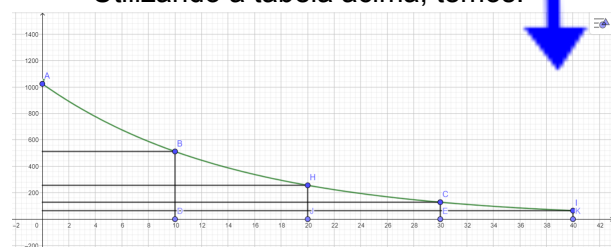
Fonte: Adaptado da Unicamp-SP (vestibular do ano 2001)

Quadro 2: Resoluções da Questão 1

Representação Algébrica	
	letra (a) Para $t = 0$, temos: $F(0) = 1024 = a \cdot 2^{-b \cdot 0}$ $1024 = a \cdot 1 = a$
	Para $t = 10$, temos: $F(10) = 1024/2 = 1024 \cdot 2^{-b \cdot 10}$ $512 = 1024 \cdot 2^{-b \cdot 10}$ $2^9 = 2^{10} \cdot 2^{-b \cdot 10}$ $2^{-1} = 2^{-b \cdot 10}$ $-1 = -b \cdot 10$ $b = 1/10$

Fonte: elaborado pelo autor

Quadro 2 continuação...

Representação algébrica	Representação tabular																								
letra (b) Para $F(t) = 1024/8$ $1024 \cdot 2^{-t/10} = 128$ $2^{-t/10} = 128/1024$ $2^{-t/10} = 2^{-3}$ $t = 30$	letra (b) <table><tr><td></td><td>t</td><td>$F(t) = 1024 \cdot 2^{-t/10}$</td><td></td></tr><tr><td>+10</td><td>0</td><td>1024</td><td>$\times \frac{1}{2}$</td></tr><tr><td>+10</td><td>10</td><td>512</td><td>$\times \frac{1}{2}$</td></tr><tr><td>+10</td><td>20</td><td>256</td><td>$\times \frac{1}{2}$</td></tr><tr><td>+10</td><td>30</td><td>128</td><td>$\times \frac{1}{2}$</td></tr><tr><td></td><td>40</td><td>64</td><td></td></tr></table>		t	$F(t) = 1024 \cdot 2^{-t/10}$		+10	0	1024	$\times \frac{1}{2}$	+10	10	512	$\times \frac{1}{2}$	+10	20	256	$\times \frac{1}{2}$	+10	30	128	$\times \frac{1}{2}$		40	64	
	t	$F(t) = 1024 \cdot 2^{-t/10}$																							
+10	0	1024	$\times \frac{1}{2}$																						
+10	10	512	$\times \frac{1}{2}$																						
+10	20	256	$\times \frac{1}{2}$																						
+10	30	128	$\times \frac{1}{2}$																						
	40	64																							
letra (c) $F(t) = 1024 \cdot 2^{-t/10}$ $0 \leq t \leq 40$ 	letra (c) Utilizando a tabela acima, temos: 																								

Fonte: elaborado pelo autor

O primeiro problema, que trata-se de uma função do tipo exponencial, foi selecionado de um vestibular da Unicamp-SP. Para a primeira resolução, o sujeito pode se apropriar do sistema de representação algébrica, utilizando as propriedades de potenciação para realizar as etapas da atividade (Proposição 1). O que Duval coloca como tratamento é justamente esse processo de resolução do problema, onde, o sujeito utiliza dessa representação algébrica para chegar a resolução esperada da atividade. Nas duas primeiras etapas (a e b da coluna esquerda) é possível verificar que o tratamento envolve: as propriedades de potência, que encontra-se no quociente de potência de bases iguais (definição 1 e 1.2 + propriedade 2), na qual dado qualquer base, se o expoente for igual a zero, o resultado da potência será sempre igual a um; reconhecimento da potência de base

igual a dois; e a igualdade de potências de bases iguais (propriedade 5); além de operações matemáticas básicas, como divisão e inverso de um número, para resolvê-lo. Na última etapa, referente a letra c também da coluna esquerda, com o intervalo proposto $([0, 40])$ na questão, o gráfico que foi construído a partir de 4 pontos, os extremos do intervalo, e os pontos cujo domínio foram utilizados nos itens a e b, envolve a conversão. Porém, os pontos apresentados não definem uma característica evidente da função, uma vez que o aluno pode conectá-los por uma poligonal - conjunto de segmentos de reta não colineares -. Com isso, utilizou-se um conhecimento importante que é o formato da curva determinada por uma função exponencial com base positiva menor que um. Portanto, ao utilizar a conversão entre algébrico e gráfico, sem o conhecimento global do gráfico desse tipo de função, o sujeito pode ser levado ao erro, uma vez que necessita de um conhecimento à priori da curva formada por uma função exponencial. O conhecimento global das características de um gráfico de uma função exponencial com base entre 0 e 1, é necessário para essa conversão, e, muitas vezes, é simplesmente esquecido no ensino.

O processo de conversão dá-se de forma a explorar ainda mais as definições e propriedades que a função possui, no qual a partir do gráfico fica mais explícito que a função vai se aproximando do zero, formando uma assíntota. Além disso, a diminuição do decrescimento é visível por meio do gráfico. Já que o gráfico da função é automatizado pelo aplicativo, a sua utilização fornece uma informação sobre a curva da função sem o risco do estudante traçar por segmentos. A partir da construção da curva pelo software, é possível para o estudante verificar a sua estrutura para valores de t bem grandes. Ele consegue também ter uma visão global do gráfico, podendo perceber, com a ajuda da ferramenta zoom, o comportamento assintótico da curva.

O enunciado do problema já traz a representação algébrica da função, com alguns parâmetros (constantes) a serem calculados pelos estudantes. Na resolução algébrica, há a identificação inicial dos valores desses parâmetros, porém não se explora os seus significados na situação, perdendo-se uma grande oportunidade de gerar conhecimento.

Por meio da representação tabular, pode-se perceber a caracterização do comportamento da função, chegando assim ao objetivo proposto no problema, como pode ser verificado na etapa b. O sujeito pode observar a transformação de uma

progressão aritmética, analisando ao somar 10 (razão da PA) para cada valor de t no domínio, para uma progressão geométrica, quando em comparação a imagem, necessita de uma razão da PG entre os números correspondente a cada ciclo. A razão da PA é de 10, chegando a caracterizar a função também nesse aspecto. Percebe-se, ainda, que com a representação tabular, o número de informações sobre a construção do gráfico é maior, pois torna-se possível somar 10 repetidas vezes, de forma iterativa, somando na coluna da esquerda e multiplicando-se na coluna da direita e aplicar a função de forma a gerar outros pontos para além do intervalo dado. Assim, somar 5 repetidas vezes e multiplicar por $\frac{1}{4}$, observando, ainda, intervalos menores da função.

Além disso, ao desejar utilizar o GeoGebra, que, por sua vez, gera o gráfico automaticamente, o sujeito não tenderá a erro de descrever a função, pois o próprio aplicativo fará essa conversão. Com essa dinâmica, o sujeito poderá fazer um estudo mais completo da função e observar os pontos e as características da função pelo gráfico. Ele pode fazer tratamento para esse novo registro; porém, este permite um estudo mais completo e dinâmico. Dessa forma, o sujeito poderá fazer uma análise mais completa da função, podendo ainda fazer inferências sobre seu comportamento para valores muito menores ou maiores.

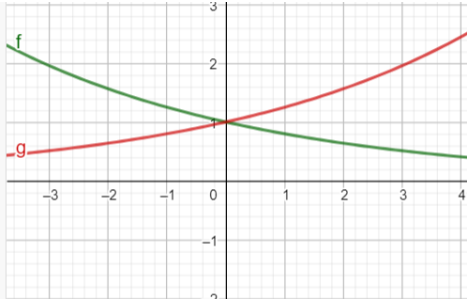
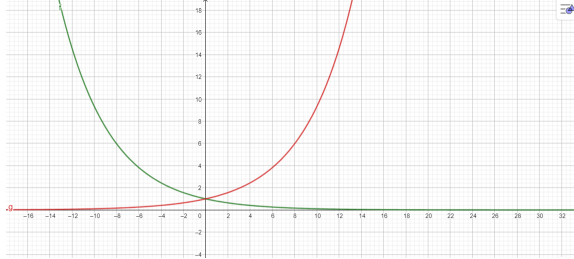
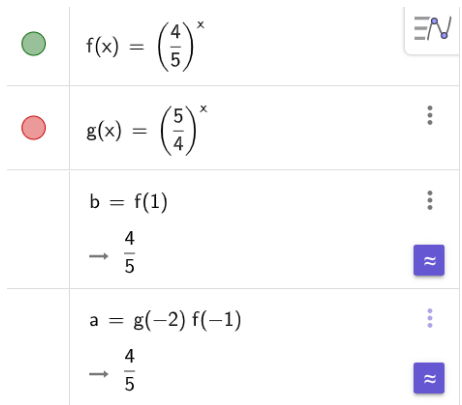
Figura N 2 - 2ª questão

Questão 2: (UEPG-PR) Dadas as funções definidas por $f(x) = (4/5)^x$ e $g(x) = (5/4)^x$, é correto afirmar que:

1. Os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ não se interceptam.
2. $f(x)$ é crescente e $g(x)$ é decrescente.
3. $g(-2) \cdot f(-1) = f(1)$
4. $f(g(0)) = f(1)$
5. $f(-1) + g(1) = 5/2$

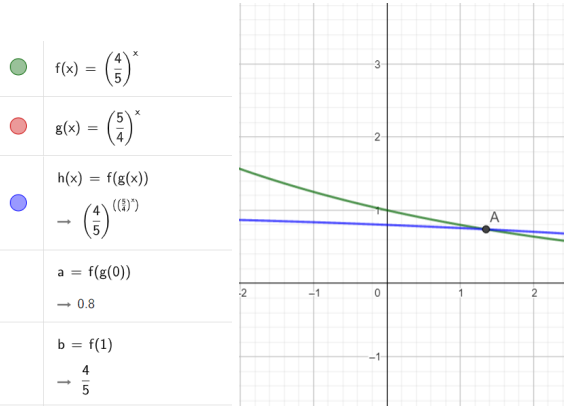
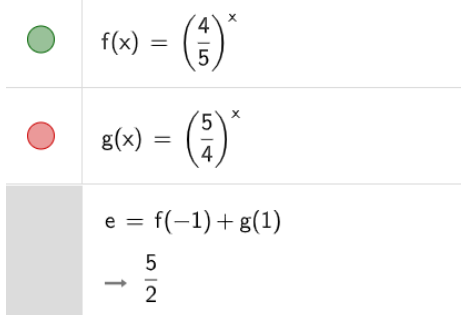
Fonte: Adaptado da UEPR-PR (vestibular do ano XXXX)

Quadro 3: Resolução da questão 2

Representação Algébrica	Representação Gráfica/Auxílio do aplicativo GeoGebra
$f(x) = g(x)$ $(4/5)^x = (5/4)^x$ $(4/5)^x = [(4/5)^x]^{-1}$ tomando $y = (4/5)^x$, temos $y = y^{-1}$ $y = 1$, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(4/5)^x = -1$ $(4/5)^x = 1 = (4/5)^0$ $x = 0$ temos o ponto de interseção $(0, 1)$	 Ponto de interseção $(0, 1)$
De $f(x) = 4^x/5^x$ temos que a base $a = 4/5$ está definida entre $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, portanto, pela definição 11, $f(x)$ é decrescente, logo, para $g(x) = 5^x/4^x$ temos o inverso $a > 1$, portanto, crescente.	 É possível verificar pelo tratamento gráfico que $f(x)$ decresce enquanto que $g(x)$ cresce.
$g(-2) = 5^{-2}/4^{-2} = 16/25$ $f(-1) = 4^{-1}/5^{-1} = 5/4$ $f(1) = 4/5$ $g(-2) \cdot f(-1) = f(1)$ $16/25 \cdot 5/4 = 4/5$	 Com o auxílio do GeoGebra, percebe-se a igualdade

Fonte: elaborado pelo autor

Quadro 3 - Resolução da questão 2 (Continuação)

Representação Algébrica	Auxílio do aplicativo GeoGebra
$g(0) = 5^0/4^0 = 1$ $f(1) = 4^1/5^1 = 4/5$ $f(g(0)) = 4/5 = f(1)$	 Com o auxílio do GeoGebra, percebe-se a igualdade na representação algébrica e na representação gráfica
$f(-1) = 4^{-1}/5^{-1} = 5/4$ $g(1) = 5^1/4^1 = 5/4$ $f(-1) + g(1) = 5/4 + 5/4 = 5/2$	 Com o auxílio do GeoGebra, conclui-se a igualdade

Fonte: elaborado pelo autor

O segundo problema, que trata de funções exponenciais, foi retirado do vestibular da UEPG-PR, porém, diferentemente da primeira, trabalha-se com comparação entre duas funções exponenciais, analisando-as e observando pontos em comum.

Na análise da coluna esquerda do Quadro 3, verifica-se mais uma vez que para responder às etapas do problema, o sujeito pode apropriar-se das propriedades de potência e definição (definição 1 e 1.2 + propriedade 2 + extensão da propriedade 1), resolvendo o problema dentro do campo algébrico. Logo, o tratamento utilizado para resolução fica limitado às representações algébricas com definição (definição 11) e propriedades de potência, já mencionado. A utilização do GeoGebra para o processo de conversão objetiva, além da resolução do problema, o trabalho que o sujeito terá com a dinamicidade da função. Isso pode fazer com que ele se

questione ou possa verificar pontos de intersecção e aproximação dos eixos do plano cartesiano. Ao plotar a função no GeoGebra, processo para resolver a etapa um (1), o aplicativo instantaneamente disponibiliza a visualização gráfica das duas funções, mostrando dentre outros elementos, a intersecção entre os gráficos e o crescimento e decrescimento das funções trabalhadas. Além disso ao resolver a etapa um (1), o sujeito resolve também a etapa dois (2), e, ainda, é possível verificar que a função $f(x)$ se aproxima de zero quando x tende a valores grandes. Possui, portanto, uma assíntota horizontal, que coincide com o eixo das abcissas. Já a função $g(x)$ se afasta do zero à medida que os valores vão aumentando, por se tratar de uma função crescente, ou seja, a leitura dos gráficos das funções são diferentes e torna-se mais visível quando utilizado o aplicativo gráfico. Além dessa possibilidade de visualização do gráfico, é possível adicionar um controle deslizante de forma a explorar ainda mais os comportamentos das funções, variando dentro do intervalo dado e definir outro intervalo para comparar as funções.

Ao escolher o GeoGebra como ferramenta de auxílio para resolver o problema, o sujeito pode facilmente resolver as próximas etapas não apenas pela interface gráfica, pois, essa plataforma também permite trabalhar as funções dentro de sua representação algébrica. Nesse sentido, o aplicativo permite uma conversão entre dois ou mais registros de representações ao lidar com um mesmo objeto matemático, auxiliando o aluno a desenvolver um bom desempenho para a apreensão mais completa deste, e outros, objeto de estudo. Assim, é possível explorar a representação algébrica realizando os tratamentos e verificar na representação gráfica a função obtida. No caso da etapa 4, verifica-se a função composta, e, ainda, os pontos de intersecção das funções, além dos disponibilizados na questão, quando se faz as comparações das funções graficamente¹, como é possível observar na etapa 4. Dessa forma, esse mecanismo pode ser utilizado para resolver as etapas, 3, 4 e 5. Sendo assim, a plataforma permite que, além do tratamento algébrico e gráfico da função, ela realiza a conversão de forma instantânea na mesma interface. Portanto, ao se trabalhar com o recurso tecnológico, pode-se permitir explorar, questionar, levando a possíveis conjecturas com auxílio do professor, firmando assim a importância de se trabalhar um conteúdo dentro do máximo de representações possíveis.

¹ Para visualização da representação gráfica no GeoGebra, acesse o link: <https://www.geogebra.org/m/gzvreq5n>

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo a análise teórica de duas questões sobre função exponencial, especificamente uma função do tipo exponencial e duas exponenciais. A fim de elencar em como a utilização de alguns registros, sendo um algébrico, um tabular e um gráfico, podem demonstrar um aprofundamento na análise de diferentes conceitos matemáticos, perpassa-se por três estratégias para resolver as atividades propostas. Com isso, foi escolhida uma questão para trabalhar com a representação tabular e outra com a representação gráfica, ambas convertidas da representação algébrica. Ambas questões estão dentro de uma perspectiva exploratória, onde o sujeito realiza a atividade por partes.

Desse modo, utilizando estratégias para a primeira resolução da atividade, foi selecionada uma representação tabular, onde, por meio de regularidades, ou seja, de compreender a soma e multiplicação sucessiva, chegou-se a concluir o comportamento da função desejada e pode-se elencar diversos pontos para definir o gráfico da mesma. Essa abordagem demonstrou que as informações a respeito da função, seu comportamento e sua estrutura ficaram mais evidentes, pois foi possível verificar com mais clareza o decrescimento da função, os pontos que podem formar uma curva e a aproximação do zero por seus diversos pontos definidos formando a assíntota. Além disso, a descrição correta do gráfico da função é verificada, enquanto que na representação algébrica, vários desses elementos não demonstram serem visíveis.

A segunda atividade proposta, a estratégia de resolução da questão foi a utilização de um aplicativo de Geometria dinâmica. A representação algébrica mostrou-se limitada, pois a realização da atividade limitou-se às propriedades de potência e aplicação de valores na função dada, comparando-as. Porém, quando utilizado o aplicativo de geometria dinâmica, além da compreensão clara do comportamento de ambas funções, a comparação entre funções, crescimento e decrescimento e possibilidades de estudar a função para valores de x muito altos tornaram-se mais evidentes. Como o GeoGebra permite algumas representações dentro da mesma plataforma, torna-se existente a possibilidade de trabalhar o registro algébrico e gráfico da mesma função, o que pode levar o sujeito a analisar os pontos de cada função, acompanhar o comportamento gráfico da função

composta $f(g(x))$ e da $g(f(x))$, além de fazer soma, multiplicação, divisão e outras operações com estas funções e gerar novos gráficos. Foi possível, ainda, notar nos gráficos das funções que, enquanto uma tende a formar uma assíntota horizontal ($f(x)$) para valores de x muito alto, a outra ($g(x)$) faz outro caminho, afastando-se de zero para valores muito altos.

Contudo, conclui-se que a utilização de diversos registros para trabalhar conceitos matemáticos, que, por sua vez, o sujeito só terá acesso pelos sistemas de representação, possibilita uma leitura mais aprofundada sobre as definições e os conceitos, analisando os conteúdos e explorando os elementos que os compõem por meio desses outros sistemas de representação, além de apenas utilizar a algébrica. E mais, como a utilização da representação tabular desenvolve um aspecto de regularidade, chegando a caracterizar a função, atividade próxima a modelagem matemática, o sujeito pode chegar a considerar a transformação da progressão aritmética para a progressão geométrica. Por outro lado, a representação gráfica, por meio do GeoGebra, possui uma dinamicidade, podendo fazer com que o sujeito desenvolva uma criatividade ou curiosidade em explorar funções por sua representação gráfica após fazer a conversão da representação algébrica.

Mostrou-se, ainda, que a utilização de questões do tipo exploratória, por serem questões realizadas por partes a fim de chegar a um objetivo final, pode ser muito eficaz para se utilizar dentro de práticas de aprendizado com o uso de mais de um registro. Por fim, como visto ao longo do texto, ao se trabalhar com diferentes registros, é possível conceber conceitos matemáticos de forma mais aprofundada. A partir disso, fica a cargo do professor, as implicações que esses conhecimentos podem trazer para um desenvolvimento, tanto social, como dentro da própria matemática. Este trabalho mostra a possibilidade de um desenvolvimento mais profundo quando se utiliza de vários sistemas para representar um conhecimento matemático à luz da TRRS para realizar atividades matemáticas.

REFERÊNCIAS

BONOTTO, Aline Kempa; BISOGNIN, Eleni. Contribuições de um Objeto de Aprendizagem e dos Registros de Representações Semióticas no Estudo da Função Exponencial. **RENOTE**, v. 13, n. 2, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DA SILVA, Guilherme Henrique Gomes; PENTEADO, Miriam Godoy. **O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa. I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia – 2009 ISBN: 978-85-7014-048-7**. p. 1066-1079, 2009.

DANTAS, E. O. **A função exponencial**. Dissertação de Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal Rural de Pernambuco. Pernambuco. 2014.

DENARDI, Vânia Bolzan. Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. XXI ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017, Pelotas/RS. **Anais...** Rio Grande do Sul, 2017.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad Mércles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; SILVA, Carmen Kaiber da; MORA, Castor David. Perspectivas em educação matemática. **Acta Scientiae**, v. 6, n. 1, p. 37-55, 2004.

OLIVEIRA, Rafael Henrique de. **Um estudo sobre a função exponencial**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2015.

ORTIGÃO, Maria Isabel Ramalho. A Sala de Aula de Matemática: avaliação das práticas docentes. **Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 33, p. 117-140, 2009.

PIANO, C. **Diferentes abordagens para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2016.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. Investigações em estatística. _____. **Investigações matemáticas em sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.**

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. p. 11-34. Lisboa: APM. 2005.

RICARDO, José; MAFRA, Souza; DE SÁ, Pedro Franco. Abordagens na pesquisa em educação Matemática: algumas reflexões e perspectivas epistemológicas. **Revista Tempos e Espaços em Educação**, v. 13, n. 32, p. 55, 2020.

