



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE ARTES E COMUNICAÇÃO
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
CURSO DE LICENCIATURA EM EXPRESSÃO GRÁFICA

MATHEUS HENRIQUE CORDEIRO DOS SANTOS

**GEOMETRIA FRACTAL: possibilidades de utilização na Matemática do Ensino
Básico**

Recife - PE

2022

MATHEUS HENRIQUE CORDEIRO DOS SANTOS

**GEOMETRIA FRACTAL: possibilidades de utilização na Matemática do Ensino
Básico**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Expressão
Gráfica da Universidade Federal de
Pernambuco, como requisito parcial para
obtenção do título de Licenciado em
Expressão Gráfica.

Orientadora: Andiará Valentina de Freitas e Lopes

Recife - PE

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Santos, Matheus Henrique Cordeiro dos.

Geometria Fractal: possibilidades de utilização na Matemática do Ensino Básico / Matheus Henrique Cordeiro dos Santos. - Recife, 2022.

177 : il., tab.

Orientador(a): Andiará Valentina de Freitas e Lopes

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Artes e Comunicação, Expressão Gráfica - Licenciatura, 2022.

Inclui referências, apêndices.

1. Geometria Fractal. 2. Geometria. 3. Matemática. 4. Geometria Dinâmica. 5. Expressão Gráfica. I. Lopes, Andiará Valentina de Freitas e. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Artes e Comunicação
Curso de Licenciatura em Expressão Gráfica

ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Às 16h, do dia 18/11/2022, reuniu-se no Laboratório de Pranchetas 2, a Banca Examinadora composta pelos membros: externo, interno e orientadora, abaixo indicados para julgar o trabalho intitulado **"GEOMETRIA FRACTAL: POSSIBILIDADES DE UTILIZAÇÃO NA MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO"**, desenvolvido pelo aluno **Matheus Henrique Cordeiro dos Santos**, como requisito final para a obtenção do Grau de Licenciado em Expressão Gráfica, de acordo com as normas em vigor.

A sessão foi aberta pela **Profª Drª Andiará Valentina de Freitas e Lopes**, orientadora do trabalho, seguindo-se a apresentação do discente aos membros da Banca Examinadora e aos demais presentes. Posteriormente, foram realizadas as colocações e a arguição dos membros examinadores, com a respectiva defesa do aluno. Ao final, a Banca Examinadora se reuniu em segredo para julgamento e composição da nota do aluno, declarando-o APROVADO, com a nota 10,0 (Dez). O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pela coordenação da Banca Examinadora. Todos os membros presentes assinaram a Ata.

Profº Gustavo Antunes Costa
Examinador Externo

Profº Drº José Edeson de Melo Siqueira
Examinador Interno

Profª Drª Andiará Valentina de Freitas e Lopes
Orientadora

Matheus Henrique Cordeiro dos Santos
Discente

MATHEUS HENRIQUE CORDEIRO DOS SANTOS

**GEOMETRIA FRACTAL: possibilidades de utilização na Matemática do Ensino
Básico**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Expressão
Gráfica da Universidade Federal de
Pernambuco, como requisito parcial para
obtenção do título de Licenciado em
Expressão Gráfica.

Aprovado em: 18/11/2022

BANCA EXAMINADORA

Profa. Andiará Valentina de Freitas e Lopes (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. José Edeson de Melo Siqueira (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Gustavo Antunes Costa (Examinador Externo)
Instituto Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço muito à minha companheira, Letícia. Foi ela quem trouxe pra mim o livro “Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula” de Ruy Madsen Barbosa no dia 6 de outubro de 2021, em meio ao final de uma Bienal do Livro extremamente lotada. Eu estava completamente perdido em meio às possibilidades de temas para o projeto de TCC, e por conta disso, fui em busca de algum livro que pudesse me ajudar, nem que fosse um pouco nesse processo. Parecia que aquele livro (a última unidade presente na loja) estava só esperando por mim, e ela, sentindo isso, foi me chamar enquanto eu olhava alguns discos antigos do Djavan. No momento que eu li o título, toda aquela tempestade de pensamentos e inseguranças foi embora e deu lugar à uma empolgação e a um desejo de estudar cada vez mais aquele tema que já era tão querido por mim, e que surgiu em meio à uma monitoria em Desenho Aplicado às Artes Visuais, ministrada pela professora Auta (a quem também agradeço por ter me selecionado como monitor da disciplina e por ter me colocado para dar uma aula sobre Geometria Fractal na arte).

Sem Letícia provavelmente este trabalho teria outro tema e eu não teria me encantado cada vez mais pelos fractais. E além disso, sem a ajuda e a companhia dela nos meus piores dias eu não conseguiria escrever metade do que escrevi. Foram incontáveis noites em claro e dias amanhecendo que desbravei para poder desenvolver esta pesquisa, e as mensagens dela de encorajamento foram o que utilizei de combustível para ter força de vontade, associadas aos inúmeros energéticos e cafés que tomei para me manter acordado. Muito obrigado também por todos os doces acompanhados de bilhetes que você me trouxe na volta do trabalho, amo você.

Outra pessoa a quem agradeço é Isabel. Nossa amizade floresceu tardia, eu sei, muito tempo depois de nos conhecermos, mas foi por meio dela que conseguimos sobreviver juntos a todos os trabalhos, relatórios e seminários intermináveis que desenvolvemos em dupla ao longo da nossa jornada acadêmica. Amiga, muito obrigado por esse laço que fortalecemos através de muitas crises de riso, boas músicas e arte compartilhadas.

Agradeço também ao meu amigo Caio, pela sua cumplicidade e por todas as vezes que conseguiu tirar boas gargalhadas de mim. Obrigado por todos os conselhos que trocamos, histórias que compartilhamos e caminhadas à tarde que fizemos, você é meu irmão e eu te admiro muito. Também agradeço à Marina, que mesmo deixando

o nosso curso e seguindo seu rumo na Matemática, foi muito importante no começo da minha jornada em Expressão Gráfica e ainda faz questão de manter viva a nossa amizade e continuar presente na minha vida.

Obrigado à Amanda e à Olga, que com toda organização e jeito metódico de fazerem tudo certinho mesmo com milhares de obrigações ao mesmo tempo, foram de grande exemplo me ensinando a ser um pouquinho menos desorganizado. Olga, obrigado pelas aulas de AutoCad, me salvaram nas cadeiras de arquitetura. E Amanda, obrigado por todas as reflexões sobre a vida e por todas as palhaçadas que fizemos para o outro sorrir em momentos ruins.

Agradeço ao meu professor Edeson, que sempre acreditou no meu potencial e que me deu diversas oportunidades para exercer a minha vocação como professor, por meio de monitorias em Matemática Aplicada e em Geometria Analítica. Através destas monitorias eu pude desenvolver cada vez mais a minha relação com a sala de aula e a me sentir cada vez mais confortável no meu futuro ambiente de trabalho.

Agradeço também aos meus pais, que apoiaram minha decisão de mudar de curso por diversas vezes e de recomeçar toda a minha vida acadêmica. Este trabalho é para mostrar a vocês o quanto eu estou feliz por ter escolhido o curso de Licenciatura em Expressão Gráfica e para dizer que eu finalmente me encontrei.

E, por fim, agradeço à minha orientadora Andiara e lamento em não ter a conhecido antes. A senhora é um grande exemplo de profissional e alguém em quem me espelharei no futuro. Muito obrigado por todas as sugestões, correções e contribuições dadas sempre que pedi a sua ajuda, com certeza sem a sua orientação este trabalho não estaria completo.

RESUMO

É notável que o ensino atual da Geometria no Brasil é bastante problemático. Por diversas vezes, os alunos em formação não conseguem desenvolver um bom pensamento geométrico e os motivos geradores desta situação são os mais diversos. Quando existe o tratamento dos conteúdos da Geometria, isso ocorre nas disciplinas de Matemática. Além disso, percebe-se uma grande polarização ao tratar apenas da Geometria Euclidiana, o que pode gerar uma desinformação no tocante às possibilidades de se pensar, representar e analisar geometricamente. Nesse sentido, percebemos a necessidade de se trazer abordagens que contribuam para o bom desenvolvimento do pensamento geométrico e uma aprendizagem significativa para os estudantes. E para tal, defendemos o uso de Geometrias não-euclidianas, mais precisamente o uso da Geometria Fractal. Com tudo isso em vista, esse trabalho tem como objetivo investigar a possibilidade de se utilizar a Geometria Fractal ao abordar os conteúdos de Matemática (conteúdos de contagem, perímetros, áreas e volumes) do Ensino Básico. Sendo assim, apresentaremos um estudo pautado nas teorias da Geometria Fractal, iniciadas por Benoit Mandelbrot e continuados por outros matemáticos. Demonstraremos a construção dos fractais: Ilha de Koch, Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Esponja de Menger e Pirâmide de Sierpinski, utilizando softwares de manipulação geométrica e ressaltaremos também a importância da Geometria Dinâmica neste processo, no tocante à facilidade proporcionada por softwares em se obter representações e de se refazer construções geométricas. A metodologia do trabalho é de natureza qualitativa, a pesquisa é do tipo dialógica, no sentido em que propõe um diálogo com os autores trabalhados na pesquisa documental, e em termos de procedimentos técnicos-metodológicos trata-se de uma pesquisa bibliográfica e documental, cujo objetivo central é estabelecer uma análise aprofundada do material bibliográfico e documentar com o intuito de trazer à tona aspectos de base na proposta desenvolvida ao final pesquisa.

Palavras-chave: Geometria Fractal; Geometria; Matemática; Geometria Dinâmica; Expressão Gráfica.

ABSTRACT

It is noticeable that the current teaching of Geometry in Brazil is quite problematic. On several occasions, students aren't able to develop a good geometric thinking and the reasons for this situation are the most diverse. When there is a treatment of the contents of Geometry, this occurs within the contents of Mathematics. In addition, there is a great polarization when dealing only with Euclidean Geometry, which can generate misinformation regarding the possibilities of thinking, representing and analyzing geometrically. In this, we perceive the need to bring approaches that contribute meaning to the good development of geometric thinking and a meaningful learning for students. And for that, we defend the use of non-Euclidean Geometries, more precisely the use of Fractal Geometry. With all that in mind, this work aims to investigate the possibility of using Fractal Geometry when approaching the contents of Mathematics (counting, perimeters, areas and volumes) of Basic Education. Therefore, we will present a study based on the theories of Fractal Geometry, initiated by Benoit Mandelbrot and continued by other mathematicians. We'll demonstrate the construction of the fractals: Koch Island, Koch Curve, Sierpinski Triangle, Sierpinski Carpet, Menger's Sponge and Sierpinski's Pyramid, using two geometric manipulation software and we'll also emphasize the importance of Dynamic Geometry in this process by the ease provided by software in obtaining representations and redoing geometric constructions. The methodology of this work is qualitative and the research is dialogic, in the sense in which it proposes a dialogue with the authors that we referred in the documental research, and in terms of technical-methodological procedures it is a bibliographical and documental research, whose objective central is to establish an in-depth analysis of the bibliographic material and to document it in order to bring to light basic aspects in the proposal developed for the final research.

Keywords: Fractal Geometry; Geometry; Mathematics; Dynamic Geometry; Graphic Expression.

SUMÁRIO

1	Introdução	14
1.1	Objetivos	15
1.1.1	<i>Objetivo Geral</i>	16
1.1.2	<i>Objetivos Específicos</i>	16
2	A Geometria Fractal	17
2.1	O Fractal e Mandelbrot	17
2.2	Fractais e a Beleza	21
2.3	Curva e Ilha de Koch	23
2.5	Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger	27
3	Relações numéricas e geométricas nos fractais	29
3.1	Ilha de Koch	30
3.1.1	<i>Contagem</i>	30
3.1.2	<i>Perímetro</i>	31
3.1.3	<i>Área</i>	32
3.2	Triângulo de Sierpinski	34
3.2.1	<i>Contagem</i>	34
3.2.2	<i>Perímetro</i>	35
3.2.3	<i>Área</i>	36
3.3	Tapete de Sierpinski	37
3.3.1	<i>Contagem</i>	37
3.3.2	<i>Perímetro</i>	38
3.3.3	<i>Área</i>	39
3.4	Esponja de Menger	40
3.4.1	<i>Contagem</i>	40
3.4.2	<i>Volume</i>	42
3.5	Pirâmide de Sierpinski	42
3.5.1	<i>Contagem</i>	42
3.5.2	<i>Volume</i>	43
4	Educação, Tecnologia, Geometria Dinâmica e Fractais	44
4.1	As origens da computação na educação brasileira	44
4.2	A Geometria Dinâmica e a Tecnologia	46

4.2.1	<i>O Tradicionalismo no ensino sob a ótica da computação</i>	46
4.2.2	<i>O Pensamento Geométrico e a Geometria Dinâmica</i>	47
4.2.3	<i>Fractais e a Geometria Dinâmica</i>	51
5	Metodologia	56
6	Análises e discussões	59
6.1	O currículo escolar e as possibilidades no ensino básico	59
6.1.1	<i>Análise da BNCC</i>	59
6.1.2	<i>Análise dos Currículos de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco</i>	66
6.1.3	<i>Reflexões sobre as pesquisas realizadas</i>	67
6.2	Análise de artigos que propõem a utilização da Geometria Fractal no Ensino Básico	70
6.2.1	<i>Fractais: progressão e série geométrica (Andrios Bemfica, Cassiana Alves, 2010)</i>	70
6.2.2	<i>Fractais e o GeoGebra: Construindo a Curva de Koch (Fuzzo et al, 2011)</i>	75
6.2.3	<i>A Matemática Fractal e o GeoGebra no Ensino de Matemática (Vielmo e Dalberto, 2013)</i>	80
6.2.4	<i>Geometria Fractal No Ensino Fundamental e Médio (Valim e Colucci, 2013)</i>	86
7	Desenvolvimento e apresentação da proposta para o Ensino Básico	91
7.1	Apontamentos e contribuições	91
7.2	Sobre o artigo - Fractais: progressão e série geométrica (Andrios Bemfica, Cassiana Alves, 2010)	91
7.2.1	<i>Triângulo de Sierpinski</i>	91
7.2.2	<i>Pirâmide de Sierpinski</i>	94
7.2.3	<i>Tapete de Sierpinski</i>	97
7.3	Sobre o artigo - Fractais e o GeoGebra: Construindo a Curva de Koch (Fuzzo et al, 2011)	101
7.4	Sobre o artigo - A Matemática Fractal e o GeoGebra no Ensino de Matemática (Vielmo e Dalberto, 2013)	110

7.5	Sobre o artigo - Geometria Fractal No Ensino Fundamental e Médio (Valim e Colucci, 2013)	112
7.6	Proposta para o Ensino Básico	112
7.7	Plano de Ensino com Sequência Didática	113
7.8	Planos de aula	120
7.8.1	<i>Aula 1</i>	120
7.8.2	<i>Aula 2</i>	122
7.8.3	<i>Aula 3</i>	124
7.8.4	<i>Aula 4</i>	125
7.8.5	<i>Aula 5</i>	127
7.9	Considerações Finais	129
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	131
	APÊNDICE A – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (1º Ano)	137
	APÊNDICE B – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (2º Ano)	140
	APÊNDICE C – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (3º Ano)	143
	APÊNDICE D – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (4º Ano)	147
	APÊNDICE E – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (5º Ano)	150
	APÊNDICE F – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (6º Ano)	153
	APÊNDICE G – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (7º Ano)	158

APÊNDICE H – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (8º Ano)	162
APÊNDICE I – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (9º Ano)	166
APÊNDICE J – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Médio selecionadas do Currículo de Pernambuco (1º Ano)	169
APÊNDICE K – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Médio selecionadas do Currículo de Pernambuco (2º Ano)	173
APÊNDICE L – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Médio selecionadas do Currículo de Pernambuco (3º Ano)	175

1 Introdução

A partir da análise de como são conduzidos os conteúdos matemáticos na Educação Básica podemos perceber um cenário que não favorece a abordagem de conceitos, propriedades e representações geométricas. Por diversas vezes os alunos em formação não conseguem desenvolver um bom pensamento geométrico e os motivos geradores desta situação são os mais diversos. Pavanello (1993) destacou um caráter crescente no abandono do ensino da Geometria, inclusive sendo este mais evidente nas escolas públicas, observado após a promulgação da Lei 5692/71, que permitiu uma grande autonomia às escolas referente aos programas de ensino.

Segundo a autora, tal autonomia levou a muitos professores de matemática evitarem de incluir a Geometria nos seus programas, ou propositalmente colocarem-na para o final do ano letivo, e, por conta da falta de tempo, não ser abordada em sala de aula. Tal fato pode ser justificado pela insegurança destes professores frente à Geometria, causada muitas vezes pela quantidade insatisfatória de conteúdos desta área tratados na formação acadêmica do profissional. Guimarães e Santos (2013) afirmam que:

Muitas pessoas, até mesmo alguns professores da educação básica, restringem o conhecimento matemático apenas ao que se relaciona com números: quantificação, registro, operações, propriedades, ou seja, ao campo da matemática conhecido como aritmética, pois não se sentem à vontade para explicar sobre geometria. (p. 8)

Além disso, quando existe a abordagem dos conteúdos da Geometria no ensino da Matemática, percebe-se uma grande polarização dos professores ao tratarem apenas da Geometria Euclidiana, o que pode gerar uma desinformação no tocante às possibilidades de se pensar, representar e analisar geometricamente algo. Nesse sentido, percebemos a necessidade de serem trazidas novas abordagens, que contribuam para o bom desenvolvimento do pensamento geométrico e para uma aprendizagem significativa nos alunos.

Para isso, defendemos o uso de Geometrias não-euclidianas no processo, mais precisamente o uso da Geometria Fractal. E assim, surge a necessidade do desenvolvimento de uma pesquisa que responda à pergunta: “Existem possibilidades de se utilizar a Geometria Fractal ao abordar os conteúdos de Matemática do Ensino Básico?”. Por meio do trabalho realizado, não apenas respondemos à esta pergunta,

mas também determinamos análises, trazemos contribuições e desenvolvemos materiais didáticos que forneçam alternativas para a tal utilização.

Sendo assim, apresentamos um estudo pautado nas teorias da Geometria Fractal, iniciadas por Benoit Mandelbrot e continuados por outros matemáticos. Demonstraremos a construção dos fractais: Ilha de Koch, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Esponja de Menger e Pirâmide de Sierpinski, utilizando softwares de manipulação geométrica e Ressaltaremos também a importância da Geometria Dinâmica neste processo, no tocante à facilidade proporcionada por softwares de se obter representações e de se refazer várias vezes construções geométricas.

Também exploraremos relações numéricas, examinando a possibilidade de se traçar paralelos observáveis a partir de iterações sucessivas entre elementos e propriedades de fractais e os conceitos matemáticos de contagem, perímetros, áreas e volumes estudados na educação básica. Além disso, analisaremos materiais e documentos que defendem o uso da geometria dinâmica em atividades propostas para o ensino básico, relacionando a geometria fractal aos conteúdos da matemática que podem ser abordados por intermédio dela. Também indicaremos as nossas propostas para a utilização da Geometria Fractal por meio de apontamentos e da produção de materiais didáticos.

A metodologia do trabalho é de natureza qualitativa, a pesquisa do tipo dialógica, no sentido em que propõe um diálogo com os autores trabalhados na pesquisa documental e em termos de procedimentos técnicos-metodológicos trata-se de uma pesquisa bibliográfica e documental, cujo objetivo central é estabelecer uma análise aprofundada do material bibliográfico e documentar com o intuito de trazer à tona aspectos de base na proposta desenvolvida ao final pesquisa. Nesse sentido, o trabalho possui 7 capítulos, arranjados em três grandes etapas: a apresentação da pesquisa bibliográfica para a fundamentação teórica, a análise documental realizada e a construção e apresentação da proposta para a utilização da Geometria Fractal no ensino.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

- Investigar a possibilidade de se utilizar a Geometria Fractal ao abordar os conteúdos de Matemática (conteúdos de contagem, perímetros, áreas e volumes) do Ensino Básico.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar o conceito de fractal desenvolvido por Benoit Mandelbrot e suas características, junto aos fractais de: Koch (Ilha e Curva de Koch), Sierpinski (Triângulo, Tapete e Pirâmide de Sierpinski) e Menger (Esponja), utilizando softwares de Geometria Dinâmica (GeoGebra e Fragmentarium) para demonstrar sua construção e apontando características dos mesmos;
- Explorar relações numéricas, examinando a possibilidade de se traçar paralelos observáveis entre elementos e comportamento de fractais a partir de sucessivas iterações, e conceitos matemáticos da Educação Básica. Os fractais utilizados nestes estudos desenvolvidos serão:
 - a) Ilha de Koch, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski (nos conteúdos de contagem, perímetros, áreas);
 - b) Esponja de Menger e Pirâmide de Sierpinski (nos conteúdos de contagem e volumes).
- Analisar a BNCC, os Currículos de Pernambuco do Ensino Fundamental e Médio (buscando possíveis referências à geometria fractal ou a conteúdos que possam abordá-la) e quatro artigos (buscando trazer esclarecimento para alguns pontos apresentados pelos autores e também propostas sugeridas para a utilização da Geometria Fractal no ensino), a fim de desenvolver uma proposta para o Ensino Básico norteada pelos pontos destacados nestes documentos oficiais e em atividades selecionadas dos artigos.
- Desenvolver um Plano de Ensino com Sequência Didática para a disciplina de Matemática, acompanhado de cinco Planos de Aula, apresentando possibilidades do uso dos fractais no Ensino Básico.

2 A Geometria Fractal

Neste capítulo traremos definições, discussões e representações gráficas acerca do tema central do trabalho, a Geometria Fractal, e por meio dele serão feitas reflexões sobre o termo “fractal” e suas características. Também discutiremos sobre a possibilidade de utilização dos fractais em sala de aula, bem como a possível relação entre os fractais e a beleza. Além disso, serão mostrados os fractais Curva de Koch, Ilha de Koch, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Pirâmide de Sierpinski, Esponja de Menger e suas construções.

2.1 O Fractal e Mandelbrot

A denominação “Fractal” foi realizada pelo matemático Benoit Mandelbrot, em 1975, surgindo da necessidade de estudar e representar formas reais da natureza por meio de uma ótica geométrica, mas não da maneira como era feita pela geometria euclidiana reduzindo estes formatos a elementos simples que não refletem a realidade. Mandelbrot afirmava que as nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, os litorais não são círculos, as cascas das árvores não são lisas, tampouco os raios se deslocam em linha reta. Portanto, é necessário tratar desses elementos, fenômenos e formas com a seriedade e análise que merecem, sabendo que:

[...] temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas (BARBOSA, 2005, p. 10,12)

Surge então o termo fractal, a partir da observação e constatação de ordem e padrões onde antes se via o irregular e a desordem. Anteriormente a Mandelbrot, estes temas matemáticos mais problemáticos para a comunidade científica já tinham sido notados, porém eram tratados como “monstros” e era evitado o seu estudo, sendo desenvolvidos avanços com poucos matemáticos, mais corajosos e interessados, mesmo que ainda não se fossem apontadas muitas direções ou relações com o real, ficando mais no abstrato.

O matemático francês, Benoit Mandelbrot, escolheu a palavra fractal para nomear os estudos que ele se dedicou e trouxe mais conhecimento a nós.

Pois na verdade os fractais não foram descobertos nem criados por Mandelbrot, ele apenas os nomeou, visto que estes já eram conhecidos antes de sua descoberta. Existem indicações de que os fractais já existiam antes do século XX. Na época eram conhecidos como “monstros matemáticos”, na Grécia Homérica, Índia e China. Até mesmo Euclides, a mais de dois mil anos, observou que a areia da praia se assemelhava a uma espécie que é bidimensional, embora fosse constituída por pequenas partes tridimensionais. Mandelbrot ao definir os fractais se apoiou muito em matemáticos, cientistas, que já haviam se dedicado a este estudo sistemático dos fractais, mas não chegaram a ter uma conclusão exata dos seus estudos. (BEMFICA, 2010, p. 9)

A palavra ‘fractal’ aponta sua origem para no adjetivo *fractus*, do verbo *frangere* do latim, correspondendo a *quebrar*, no português, devido à propriedade dos fractais chamada autossimilaridade, que confere a eles uma imagem de si em cada uma de suas partes. Ou seja, o todo é semelhante às partes e vice-versa, os configurando como objetos autossemelhantes. Os desdobramentos depois da teorização da Geometria Fractal foram diversos e continuam sendo observados e, segundo Miranda et al (2008), a partir deste trabalho de Mandelbrot, questões relativas à similitude entre uma figura e a sua ampliação começaram a aparecer, cada vez com maior frequência, na literatura científica.

Mandelbrot começou seus estudos numa época que, na França, as ideias e método axiomático do grupo Bourbaki eram muito influentes, uma comunidade científica que prezava muito mais por uma matemática “pura”, sem “influências enganosas” pelo visual geométrico. No contexto da Segunda Guerra Mundial, muitos países da Europa tiveram a educação bastante comprometida pelo momento, e as crianças por diversas vezes eram educadas informalmente por parentes ou tutores, nas suas casas, sendo a Polônia, local de nascimento de Benoit, bastante prejudicada pela guerra. A infância de Mandelbrot foi marcada por diversas mudanças de local onde sua família morou, e seus estudos inicialmente foram ministrados por seus familiares, apenas encontrando uma formalidade na França, onde foi aprovado na Escola Politécnica. (BARBOSA, 2005)

Afirma-se que desde novo, Mandelbrot tinha interesse pela geometria, e que mesmo atuando posteriormente em diversas áreas do conhecimento, ela sempre foi sua aliada, mesmo recebendo diversas críticas pelos matemáticos da época, visto o contexto anti-geométrico da França naquele período e também pela educação do matemático não ter sido desenvolvida de uma maneira formal, na sua infância. Uma

pergunta feita por Mandelbrot com grande frequência em suas palestras era a seguinte: “Que extensão tem o litoral da Grã-Bretanha?”, a fim de instigar o debate sobre como funcionam as utilizações da geometria euclidiana simplificando as formas (BARBOSA, 2005).

A tal extensão já teria sido determinada na época e era um dado disponível e conhecido por todos, porém o matemático trazia algumas diferentes formas de se pensar, propostas, ou situações para se medir esse comprimento da costa, que acabavam gerando uma dúvida nos ouvintes ou no mínimo uma inquietação sobre a realidade. Os ouvintes eram indagados pelo cientista sobre como mudaria o tal comprimento se fosse medido a partir dos passos de um homem dando uma volta em toda a ilha a pé, depois como seria a mesma situação trocando-se o homem por um lagarto, e depois por uma formiga. Os obstáculos percorridos com facilidade pelo homem, eram muito maiores agora para a formiga, que em um só passo não conseguiria passar pelos acidentes no relevo ignorados pelos longos passos do homem, ou seja, de acordo com a escala com que se mede determinada dimensão, mais precisão se encontra, e mais próximo da dimensão real se chega, isso posteriormente foi conhecido como o paradoxo do litoral. (FOLHA, 2010)

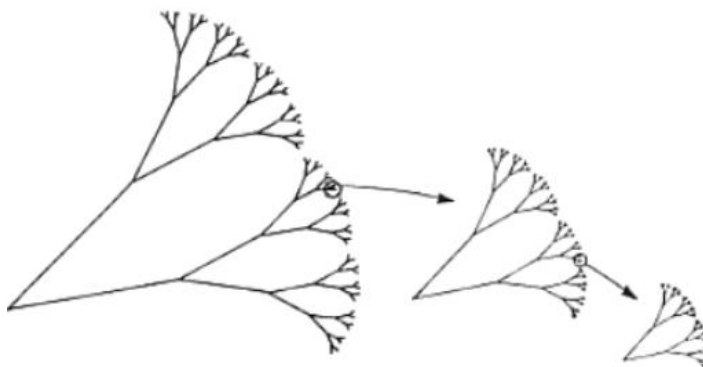
A definição inicialmente por Mandelbrot foi melhor fundamentada a partir dos estudos posteriores, sendo considerado como fractal por Feder (1988) uma forma cujas partes se assemelham ao todo sob alguns aspectos. Já Falconer (1985 e 1990) define um conjunto F como fractal se:

- a) F possui alguma forma de “autossimilaridade” ainda que aproximada ou estatística;
- b) a dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
- c) o conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo. (BARBOSA apud FALCONER, 2005)

Tais definições são retomadas por Miranda et al (2004) que destaca como propriedades dos fractais a autossemelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão. Bemfica (2010) semelhantemente à Miranda, também destaca que:

Além de se apresentarem como formas geométricas, os fractais apresentam determinadas características: **autossemelhança, dimensionalidade e complexidade infinita**. A autossemelhança é a simetria através das escalas, que consiste em cada pequena função do fractal, é tal qual uma réplica do original, porém numa escala menor. Esta propriedade pode ser vista em variados elementos da natureza. (p.2)

Figura 1 – Exemplo de autossemelhança numa estrutura fractal



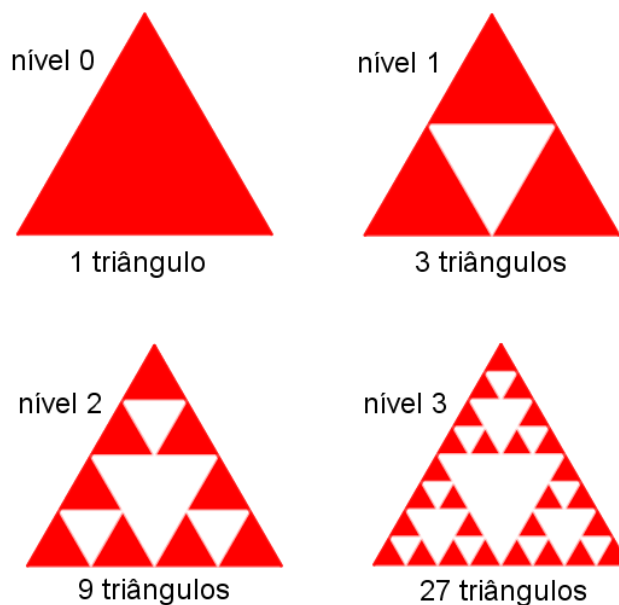
Fonte: Assis et al¹, 2008, p.2.

É importante destacar a determinação dos **níveis** de um fractal, que servem para indicar a quantidade de iterações² existentes naquele estado que o fractal está sendo apresentado, indo de 0 até “n” (um número qualquer de iterações). Por exemplo, o Triângulo de Sierpinski no nível 0, como todo fractal neste nível, ainda não apresentou nenhum processo iterativo, sendo então representado por um triângulo equilátero, porém no nível 1, a partir da retirada de um triângulo equilátero de lado igual a metade do lado do triângulo do nível 0 (primeira iteração), são gerados então 3 novos triângulos equiláteros.

Figura 2 – 4 níveis no Triângulo de Sierpinski

¹ Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/NkxTkGKJJdBX6Zy95zWHZkG/?format=pdf&lang=pt> , acessado em novembro de 2022.

² Iteração e Interação são palavras diferentes, a primeira se refere o ato de iterar, de repetir um processo. No caso dos fractais, a iteração é a aplicação do processo recursivo para a obtenção da sua forma.



Fonte: O autor (2022).

2.2 Fractais e a Beleza

O aproveitamento de relações entre conteúdos que tragam novidades interessantes, admiráveis, ferramentas novas ou até atividades lúdicas para os estudantes é um grande potencializador na vida do professor frente ao desinteresse dos estudantes, pois “a utilização de diferentes materiais, atividades e, até mesmo, métodos de ensino, facilitaria o ensino e aprendizagem da geometria, sempre indo ao encontro do aluno.” (GUIMARÃES E SANTOS, 2013). E, sendo assim, notando a possível contemplação do belo, do simétrico e do harmonioso, justificados sob a ótica da Estética, ramo da Filosofia, como uma destas oportunidades de facilitar o ensino da geometria dentro da matemática estudada no ensino básico, apresenta-se a possibilidade de despertar o interesse do aluno pelos conceitos matemáticos sendo observados através de ferramentas, elementos geométricos e propriedades presentes nos fractais.

Algumas áreas da Matemática, como a Geometria, possibilitam o surgimento de prazer e gozo que merecem ser explorados pelos educadores. Assim são as situações de contemplação de aspectos harmoniosos ou de contrastes na arte, na pintura ou na própria natureza. A visualização de simetrias, por exemplo, é um fator poderoso para sentir o belo. [...] É um fator determinante de emoções, tanto é que pensadores, talvez exorbitando um pouco, consideram-na a ordem da beleza estável ou o ritmo estático. Ela individualiza um objeto e lhe fornece caráter de expressão. (BARBOSA, 2005, p. 13)

A Estética possui diversos campos de análise, e dentro destes se encontra a Beleza, estudada por diversos autores e muito bem documentada e analisada pelo escritor Ariano Suassuna em seu livro “Iniciação à Estética”. Uma destas é a Teoria Aristotélica da Beleza, e por meio dela afirma-se que a beleza decorre “de certa harmonia, ou ordenação, existente entre as partes desse objeto entre si e em relação ao todo” (SUASSUNA, 2012, p.24), ou seja, é necessário existir uma determinada proporção e organização das partes que compõem um objeto para que ele, neste pensamento, seja considerado belo.

[...] pode-se dizer que, para Aristóteles, a Beleza é uma propriedade do objeto e consiste, principalmente quando aparece como Belo, na harmonia das partes de um todo que possua grandeza e medida. As três características principais da Beleza são, portanto, harmonia, grandeza e proporção. A fórmula que traça as fronteiras da Beleza é “a unidade na variedade”. (SUASSUNA, 2012, p.26)

Sendo assim, sob a ótica desta teoria, os fractais como objetos geométricos que são, por serem formados por partes semelhantes ao todo dada a sua propriedade de autossimilaridade (**proporção**), mantendo organizações lógicas que geram as tais partes (**harmonia**), e, além disso, por admitirem possibilidade de gerar infinitos processos iterativos, proporcionando **grandeza** a si, poderiam ser considerados e observados como objetos dotados de beleza, e assim, passíveis de admiração. Segundo Aristóteles, citado por Suassuna (2012): “A Beleza — seja a de um ser vivo, seja a de qualquer coisa que se componha de partes — não só deve ter estas partes ordenadas mas também uma grandeza que obedeça a certas condições.” (p. 24).

Seria então uma estratégia chamar a atenção dos alunos por meio da beleza dos fractais, causando ao mesmo tempo uma admiração e curiosidade pelo tema, algo que não é comum ser visto na matemática do ensino básico. A partir disto, analisando a geometria presente nos elementos dos fractais por meio de sua proporção, harmonia e grandeza poderão ser tratados os conceitos matemáticos de área, volume e contagem. Os fractais escolhidos para o desenvolvimento deste pensamento foram a Curva e Ilha de Koch, o Triângulo, a Pirâmide e o Tapete de Sierpinski, e a Esponja de Menger.

“Um dos caracteres mais fundamentais da Beleza é a harmonia, a ordem, o equilíbrio. Presente na Natureza, a justa proporção reencontra-se na

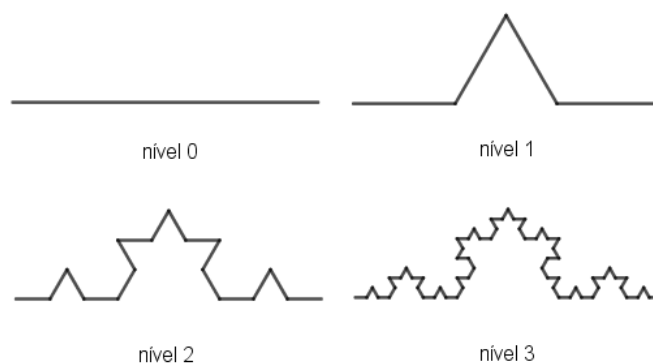
Matemática. Ela é o termo da atividade racional. A lei fundamental do agir humano é a concepção e a criação da harmonia. Em toda vida humana, enquanto racional, encontrar-se-á a harmonia. A Ciência é um sistema, logo é uma harmonia. A vida moral unifica todos os atos para um fim supremo único: logo, desenvolve-se na harmonia. Enfim, nas criações da Arte, a multiplicidade converge para a unidade e realiza a harmonia.” (BRUYNE, 1930, p. 290 apud SUASSUNA, 2012, p. 25)

2.3 Curva e Ilha de Koch

Existem alguns fractais que são tidos como clássicos por conta do seu estudo ter servido de grande referência e importância para os futuros estudos sobre o tema. Um exemplo é a Curva de Koch, desenvolvida pelo matemático sueco Helge Von Koch em 1904, que é definida pelo criador como “uma curva contínua sem tangente, obtida a partir de uma construção geométrica elementar”. De fato, sua construção é bastante simples, feita a partir das sucessivas transformações de um segmento de reta em segmentos congruentes contendo um formato de triângulo equilátero sem um dos lados. Para ser produzida no GeoGebra, por exemplo, a construção da Curva de Koch pode ser obtida seguindo as regras sugeridas por Barbosa (2005):

- 1- Considerar um segmento de reta;
- 2- Dividir o segmento em 3 segmentos iguais, substituindo-os por 4 congruentes; intermediário, por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário (que seria sua base);
- 3- Substituir cada um dos segmentos conforme a regra 2, e assim sucessivamente e iterativamente. (BARBOSA, 2005)

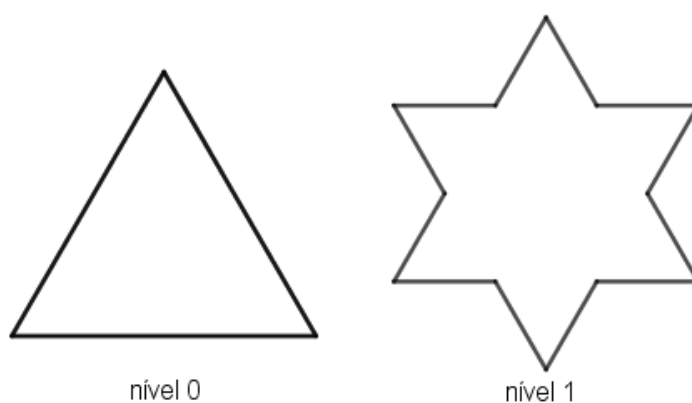
Figura 3 – 4 níveis da Curva de Koch



Fonte: O autor (2022).

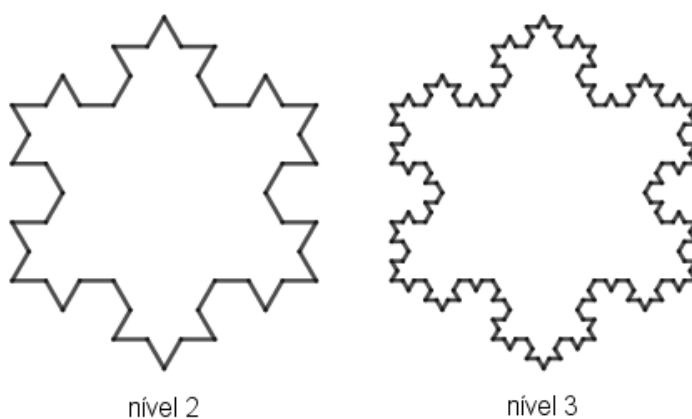
A partir da curva de Koch foi gerada a Ilha de Koch, um polígono obtido de um triângulo equilátero tendo seus lados modificados seguindo o princípio gerador da curva referida, o que nos proporciona uma figura com uma aparência semelhante a um floco de neve, daí também surge o nome “Floco de Neve de Koch” para se referir à esta estrutura. Dependendo da quantidade de vezes que o processo gerador é realizado, a quantidade de lados do polígono varia, e, conseqüentemente também é variado o perímetro da figura, sendo seguro afirmar que para um número infinito de repetições do processo, o perímetro da ilha torna-se infinito.

Figura 4 – Níveis 0 e 1 na Ilha de Koch



Fonte: O autor (2022).

Figura 5 – Níveis 2 e 3 na Ilha de Koch



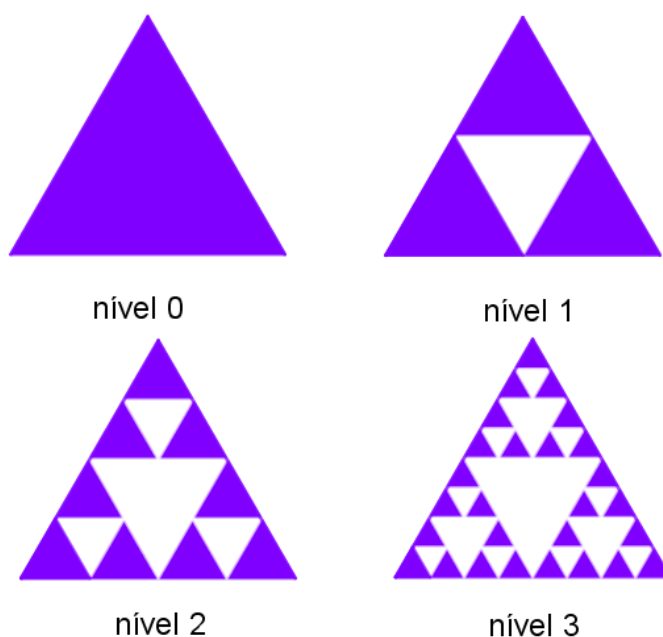
Fonte: O autor (2022).

2.4 Triângulo e Pirâmide de Sierpinski

O Triângulo e a pirâmide de Sierpinski foram desenvolvidos com os estudos de Waclaw Sierpinski e são modelos fractais obtidos a partir de subtração. O primeiro, inicia-se da subtração de um triângulo equilátero de área igual a $1/4$ da área de outro triângulo maior, e o segundo, da subtração de um volume é igual a $1/2$ do volume do tetraedro regular maior. O triângulo pode ser produzido no GeoGebra segundo o passo a passo sugerido por Barbosa (2005):

- 1 – Considerar inicialmente um triângulo equilátero;
- 2 – Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos equiláteros;
- 3 – Eliminar (remover) o central;
- 4 – Repetir em cada um dos triângulos não eliminados as construções 2 e 3;
- 5 – Repetir a operação 4 sucessivamente. (BARBOSA, 2005)

Figura 6 – Triângulo de Sierpinski

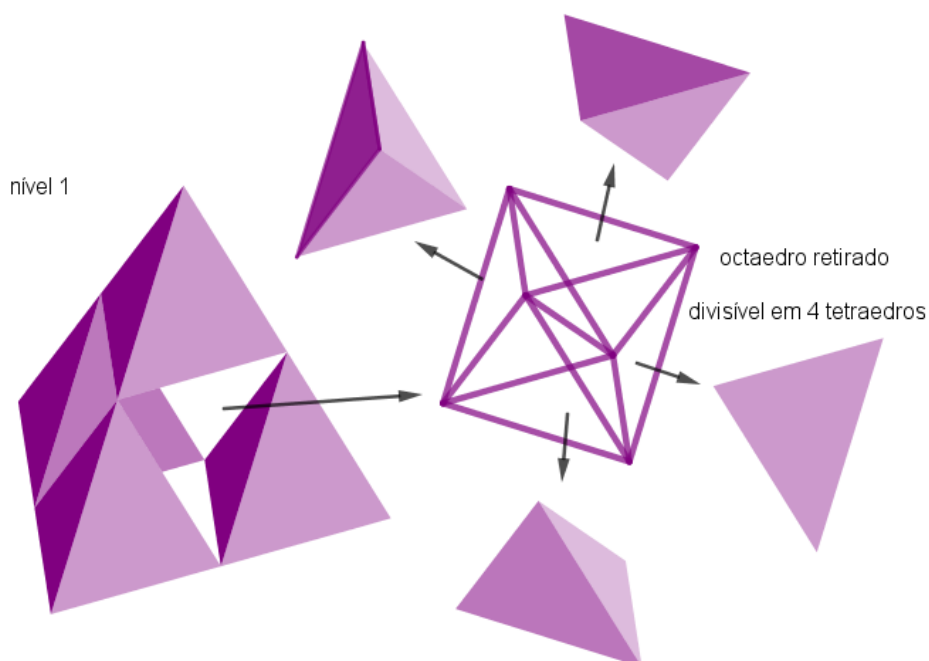


Fonte: O autor (2022).

No caso da Pirâmide de Sierpinski, o processo feito no Triângulo de Sierpinski é feito semelhantemente para um tetraedro regular. São feitas subtrações consecutivas de um octaedro (por conta da estrutura tridimensional) da estrutura

inicial, resultando em 4 tetraedros na primeira iteração.

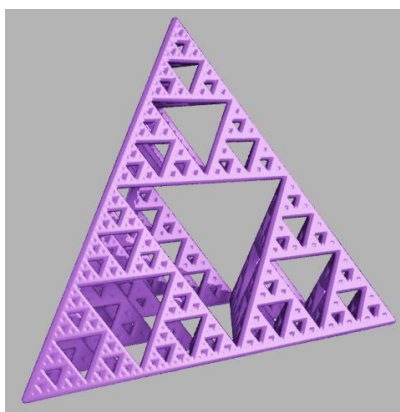
Figura 7 – Geração da Pirâmide de Sierpinski



Fonte: O autor (2022).

- 1 – Considerar inicialmente um tetraedro regular;
- 2 – Marcar os segmentos dos pontos médios das arestas do tetraedro formando um octaedro (4 tetraedros regulares);
- 3 – Eliminar (remover) o octaedro;
- 4 – Repetir em cada um dos tetraedros não eliminados as construções 2 e 3;
- 5 – Repetir a operação 4 sucessivamente.

Figura 8 – Pirâmide de Sierpinski



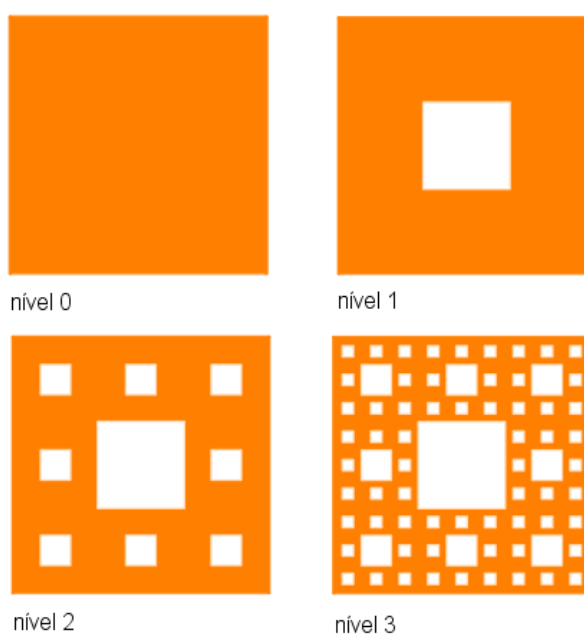
Fonte: O autor (2022).

2.5 Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger

Já o Tapete de Sierpinski é gerado a partir das sucessivas remoções de um pequeno quadrado do centro de um quadrado com 9 vezes a sua área, num processo semelhante ao feito no triângulo de Sierpinski. Segundo Barbosa (2005):

Pode-se aplicar a mesma técnica de eliminação (remoção) usada no Triângulo de Sierpinski, partindo de um quadrado, dividindo-o em 9 pequenos quadrados congruentes, e eliminando o central. Em seguida, aplicar esse mesmo procedimento em cada um dos 8 quadrados restantes, e assim sucessivamente e iterativamente. (BARBOSA, 2005, p. 44)

Figura 9 – Tapete de Sierpinski níveis 0 a 3



Fonte: O autor (2022).

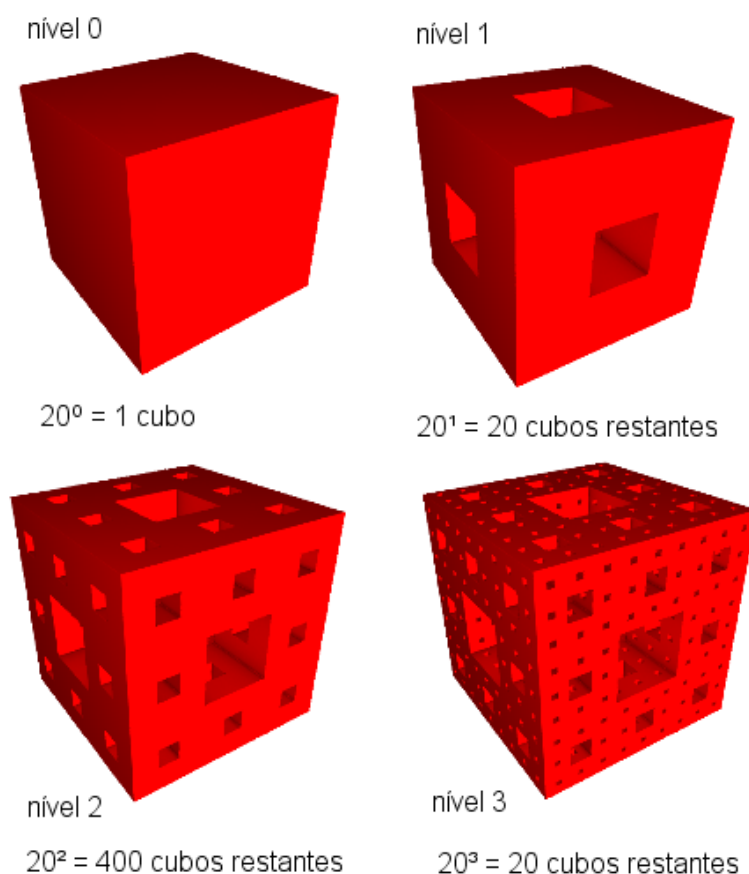
A Esponja de Menger surge de um processo semelhante ao processo de obtenção da pirâmide de Sierpinski, e possui o tapete de Sierpinski em cada uma de suas faces. Pode ser produzida em um software de manipulação geométrica 3D, como o Rhinoceros 3D seguindo o passo a passo dado por Oliveira (2020):

A Esponja de Menger é construída a partir de um cubo através do seguinte processo recursivo:

1. Tome um cubo qualquer.

2. Divida cada face do cubo em 9 quadrados. Desse modo o cubo inicial fica subdividido em 27 cubos menores.
3. Remova o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central, deixando apenas 20 cubos restantes. Este é o primeiro nível da Esponja de Menger.
4. Repita os passos 2 e 3 para cada um dos 20 pequenos cubos restantes do nível anterior. Assim, obtemos o segundo nível da Esponja. Note que, neste nível, estamos dividindo cada um dos 20 cubos do nível anterior em outros 20 cubos menores, obtendo no final 202 cubos.
5. A Esponja de Menger é o limite deste processo depois de um número infinito de interações. (OLIVEIRA, 2020)

Figura 10 – Esponja de Menger níveis 0 a 3



Fonte: O autor (2022).

3 Relações numéricas e geométricas nos fractais

A partir do estudo das características e das gerações dos fractais apresentados, surgem possibilidades de se abordar alguns conteúdos tratados no ensino básico utilizando-se de fractais, como contagem, perímetros, áreas e volumes. O livro “Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula” de Barbosa, em conjunto a diversos estudos feitos recentemente (com destaque para a dissertação feita em 2020 por Oliveira, “A geometria do Conjunto de Cantor, do Tapete de Sierpinski e da Esponja de Menger”) trazem paralelos entre as características de alguns fractais e sua abordagem seguindo uma perspectiva educacional.

Neste capítulo faremos apontamentos e representações acerca dos fractais: Ilha de Koch, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Pirâmide de Sierpinski e Esponja de Menger. Traremos relações numéricas fundamentadas em representações visuais produzidas no GeoGebra e no Fragmentarium a fim de explorar os elementos presentes nestes fractais por meio dos conceitos matemáticos de contagem, área, perímetro e volume. Estas relações e representações, em conjunto à nossa pesquisa bibliográfica, servirão de fundamentação para a análise de artigos que propõem a utilização da Geometria Fractal no Ensino Básico no capítulo 5 e posteriormente para a nossa proposta de plano de ensino para o ensino básico utilizando-se desta Geometria para tratar de conceitos matemáticos no capítulo 6.

Em relação aos tópicos de **Contagem**, faremos análises em relação ao número de elementos presentes em cada fractal, podendo ser observados, por exemplo, a quantidade de segmentos que compõem aquele fractal em cada nível, ou a quantidade de figuras repetidas que fazem parte daquela estrutura em cada nível, e a partir destas contagens, apresentar expressões matemáticas que determinem a quantidade destes elementos contados no nível “n”.

Em relação aos tópicos de **Perímetro**, buscaremos determinar o perímetro ou de todo o fractal no nível “n” em função do lado da sua estrutura no nível 0 (como é o caso da ilha de Koch), ou então determinar o perímetro de uma estrutura repetida naquele fractal no nível “n” com seu lado em função da estrutura original (por exemplo: o Triângulo de Sierpinski é um fractal que surge no nível 0 como um triângulo equilátero de lado “c”, e a partir da primeira iteração são obtidos 3 triângulos equiláteros cujo lado é “c/2”, sendo o perímetro de um triângulo menor então “3.c/2”,

e o perímetro do triângulo original “3.c”). Podemos ainda relacionar o perímetro de uma estrutura repetida no nível “n” à quantidade de figuras iguais a ela neste nível, determinada no tópico de contagem anterior, obtendo assim o perímetro em conjunto de todas as estruturas do fractal no nível “n”.

Em relação aos tópicos de **Área**, buscaremos determinar a área no nível “n” da figura repetida no fractal em função da área da figura geradora inicial, podendo assim relacioná-la ao número de estruturas determinadas no tópico de contagem, obtendo assim a área total da figura no nível “n” em função da área original.

Semelhantemente, em relação aos tópicos de **Volume**, buscaremos determinar o volume no nível “n” do sólido repetido no fractal em função do volume do sólido gerador inicial, podendo assim relacioná-lo ao número de sólidos contados no tópico de contagem, obtendo assim o volume total da figura no nível “n” em função do volume original.

3.1 Ilha de Koch

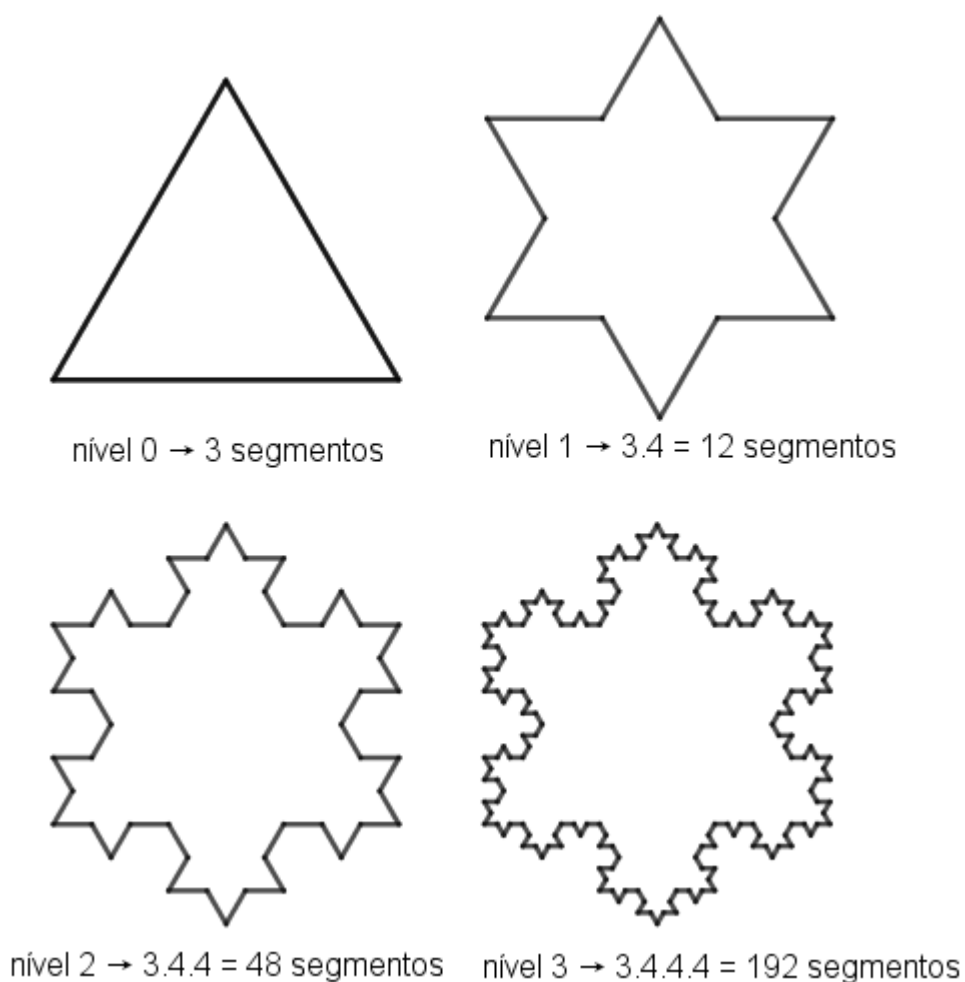
3.1.1 Contagem

Esse tipo de fractal é ótimo para as aplicações em contagem, área e perímetro. Primeiramente falando sobre contagem, observa-se que a quantidade de segmentos formadores desta estrutura aumenta de acordo com a quantidades de repetição do processo iterativo, ou seja, quanto mais se criam divisões nos segmentos que formam o polígono seguindo a lei de geração do fractal, mais arestas esse polígono irá possuir. Pode ser trazido como fenômeno observável na sala de aula, sendo criado o modelo do fractal pelos próprios alunos e auxiliado pelo professor.

A contagem dos segmentos indica que, inicialmente a Ilha de Koch possui 3 segmentos, os 3 lados do triângulo equilátero (nível 0). Após a primeira aplicação da geração da curva de Koch em cada um desses lados, temos então no primeiro nível, 12 segmentos ao total, visto que cada um dos 3 segmentos anteriores foi transformado em 4 agora ($3 \cdot 4 = 12$). Continuando o processo com uma nova iteração, teremos cada um dos segmentos anteriores gerando 4 novos, ou seja, a figura terá 48 segmentos ($12 \cdot 4 = 48$) no nível 2, e aplicando o processo mais uma vez, terá 192 segmentos ($48 \cdot 4 = 192$) no nível 3. A partir destes dados e do caráter constante e previsível das características do fractal nos próximos níveis, podemos concluir que o número de

segmentos do fractal (S_n) para o nível “n” é dado pela expressão: $S_n = 3 \cdot 4^n$ (Barbosa, 2005, p. 72).

Figura 11 – Níveis de 0 a 3 da Ilha de Koch



Fonte: O autor (2022).

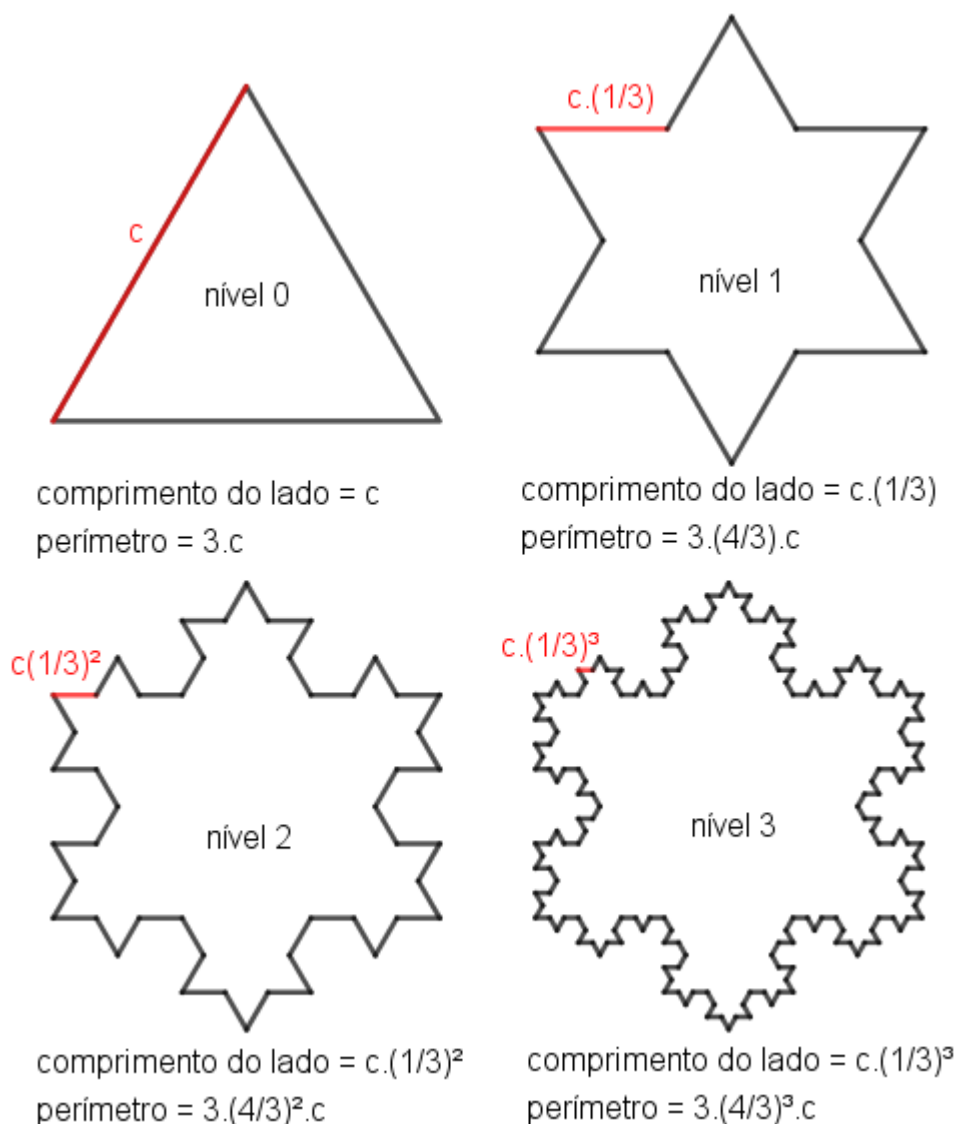
3.1.2 Perímetro

No que se refere ao perímetro da estrutura, é necessário anteriormente entender como funciona o comprimento dos segmentos, sendo assim, considerando “c” o comprimento do lado do triângulo equilátero inicial:

Dividimos em 3 partes iguais e ficamos com 4 para o nível 1, então cada uma tem comprimento $c \cdot 1/3$. Para o nível 2, novamente cada uma foi dividida em 3 partes iguais e ficamos com 4; então, cada uma tem comprimento $c \cdot (1/3)^2$. Da mesma maneira, descobrimos que ao nível 3 cada segmento tem comprimento $c \cdot (1/3)^n$. (BARBOSA, 2005, p. 73)

Multiplicando então a contagem de números de segmentos $S_n = 3 \cdot 4^n$ pela expressão de tamanho de segmento $c \cdot (1/3)^n$, temos então o perímetro da figura definido por: $\text{perímetro} = 3 \cdot (4/3)^n \cdot c$.

Figura 12 – Níveis de 0 a 3 da Ilha de Koch



Fonte: O autor (2022).

3.1.3 Área

Em relação a área do fractal, sabendo se que a área inicial do triângulo equilátero que irá gerar o fractal é $A = (c^2 \sqrt{3})/4$, sendo “c” o comprimento do lado, Barbosa (2005) aponta que cada lado no processo das iterações será acrescido de um triângulo equilátero de área Δ , que é $1/9$ da área A . Em relação ao que acontece

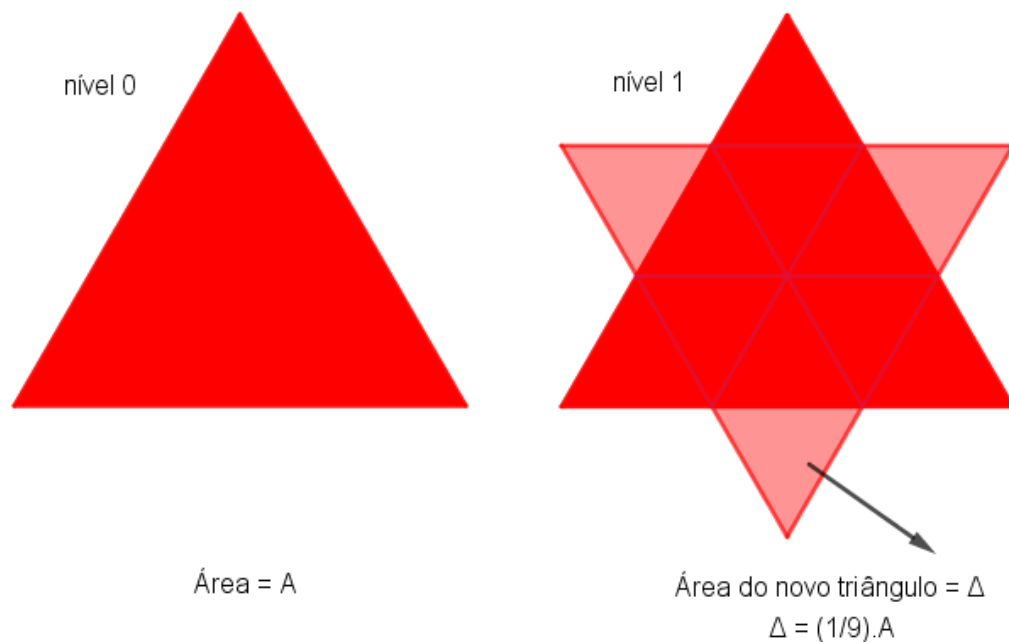
em apenas um dos lados, pois ao final é só necessário multiplicar pelo fator 3 e somar à área do triângulo original A, temos então que:

No nível 2 a área é acrescida de 4 pequenos triângulos equiláteros com áreas iguais a $1/9$ do anterior. Ficamos então com área $\Delta + 4 \cdot (1/9) \cdot \Delta$. No nível 3 a área é acrescida da área de $4^2 = 16$ triângulos equiláteros, cada um de área igual a $1/9$ da área de cada um anterior; portanto ficamos com área dada por: $\text{Área} = \Delta + 4 \cdot (1/9) \cdot \Delta + 4^2 \cdot (1/9^2) \cdot \Delta = \Delta + (4/9) \cdot \Delta + (4/9)^2 \cdot \Delta$.

De onde induzimos que ao nível n deveremos ter a área dada por:

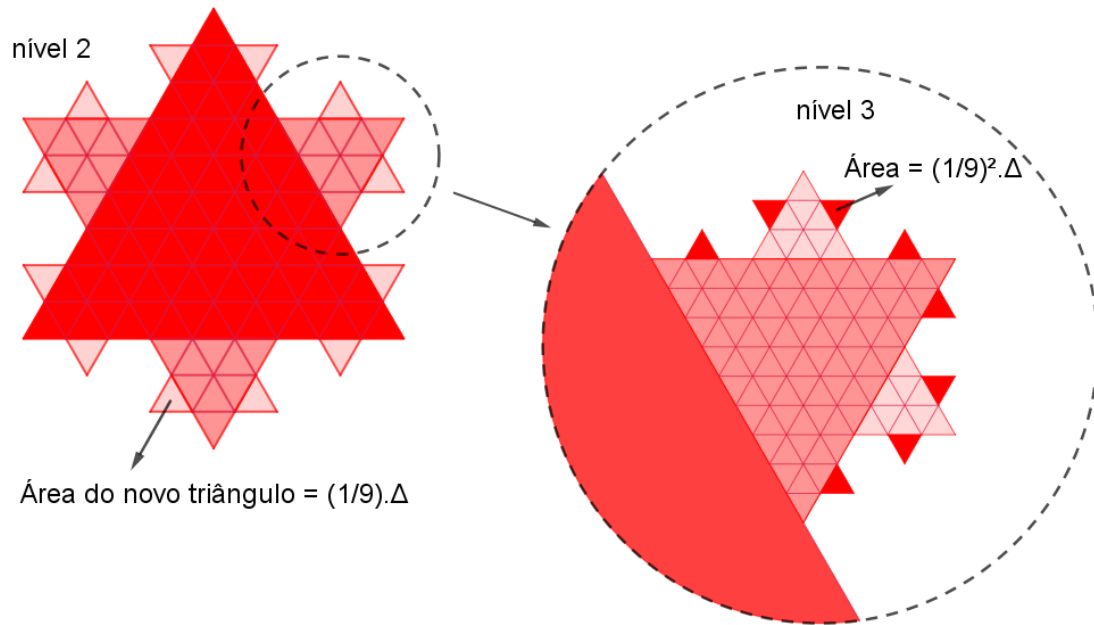
$$\text{Área} = [1 + (4/9) + (4/9)^2 + \dots + (4/9)^{n-1}] \Delta. \text{ (BARBOSA, 2005, p. 74, 75)}$$

Figura 13 – Níveis de 0 a 1 da Ilha de Koch



Fonte: O autor (2022).

Figura 14 – Níveis de 2 a 3 da Ilha de Koch



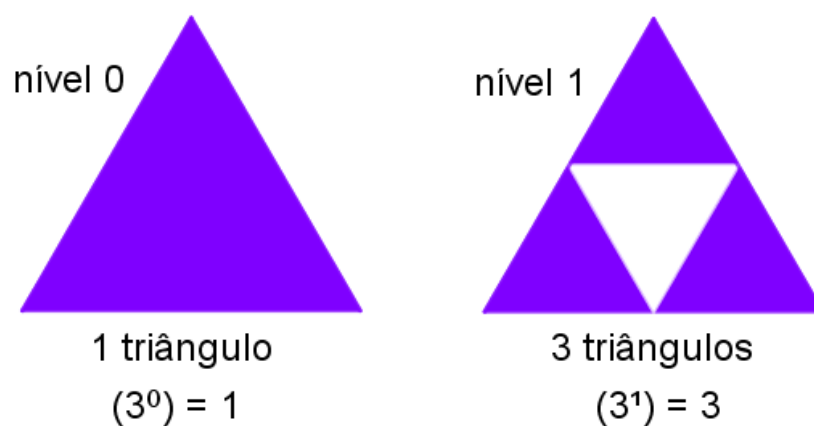
Fonte: O autor (2022).

3.2 Triângulo de Sierpinski

3.2.1 Contagem

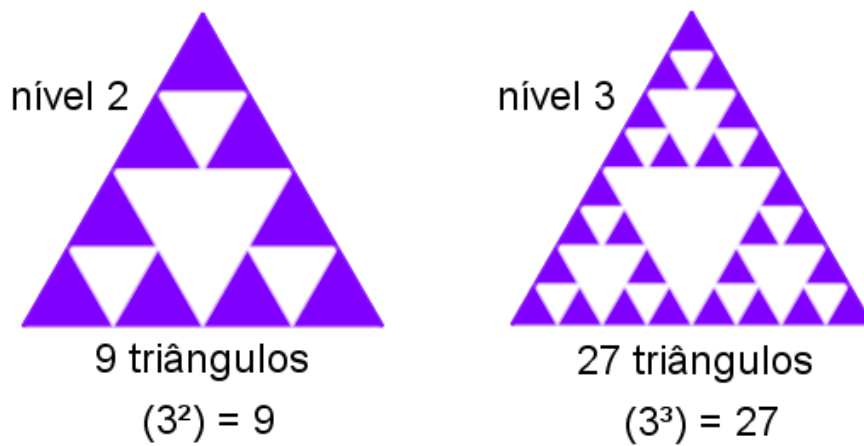
No tocante à contagem, o Triângulo de Sierpinski é um dos fractais mais fáceis de se observar devido ao seu processo de geração a partir da subtração de um triângulo com $\frac{1}{4}$ da área do triângulo inicial, restando 3 triângulos na fase 1, 9 triângulos na fase 2 e 27 triângulos na fase 3. Ou seja, na fase n teremos 3^n triângulos.

Figura 15 – Níveis de 0 a 1 do Triângulo de Sierpinski



Fonte: O autor (2022).

Figura 16 – Níveis de 2 a 3 do Triângulo de Sierpinski

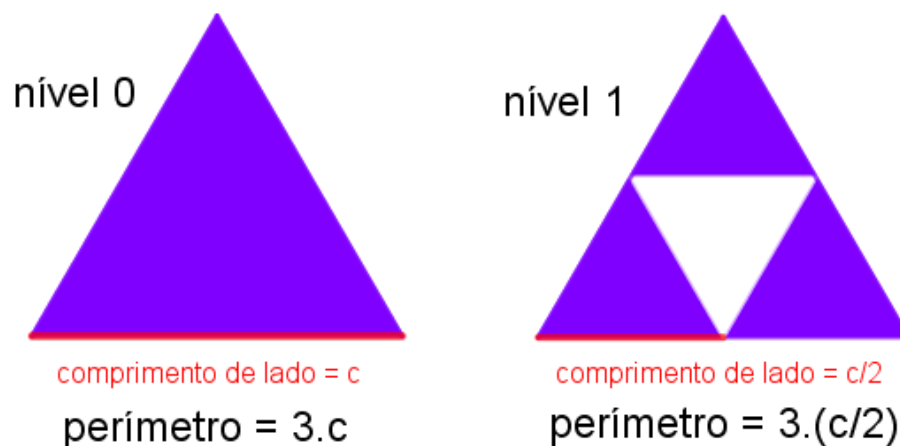


Fonte: O autor (2022).

3.2.2 Perímetro

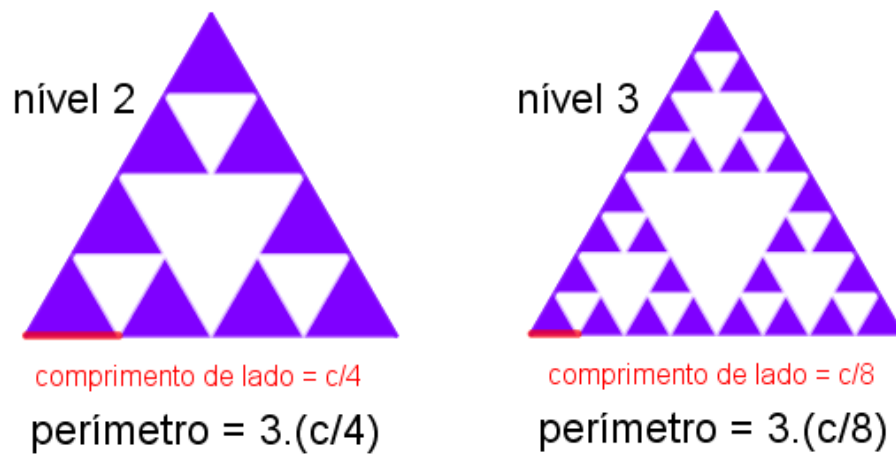
Sendo o comprimento do lado do triângulo obtido numa iteração sempre metade do lado do triângulo anterior, na fase 1 temos o comprimento do lado sendo $c/2$, na fase 2 temos $c/4$ (para o lado do triângulo novo gerado), e na fase 3 temos $c/8$, teremos então na fase n : $c/(2^n)$ de comprimento para o lado dos triângulos gerados no nível n . Concluimos então que o perímetro, surgindo a partir da multiplicação por 3 dos comprimentos dos lados dos triângulos será: **$3 \cdot c/(2^n)$** . Para se obter a soma dos perímetros de todos os triângulos no nível n devemos multiplicar pela quantidade de triângulos nesse nível: **$3^n \cdot (3 \cdot c/(2^n))$** .

Figura 17 – Níveis de 0 a 1 do Triângulo de Sierpinski (perímetro)



Fonte: O autor (2022).

Figura 18 – Níveis de 2 a 3 do Triângulo de Sierpinski (perímetro)

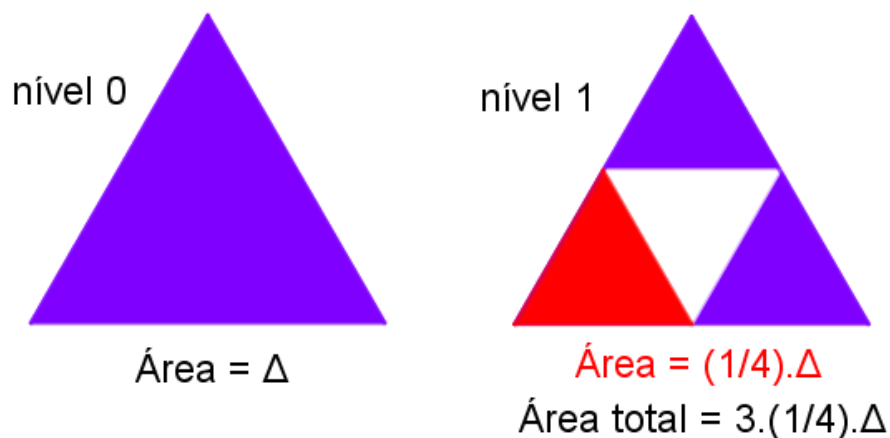


Fonte: O autor (2022).

3.2.3 Área

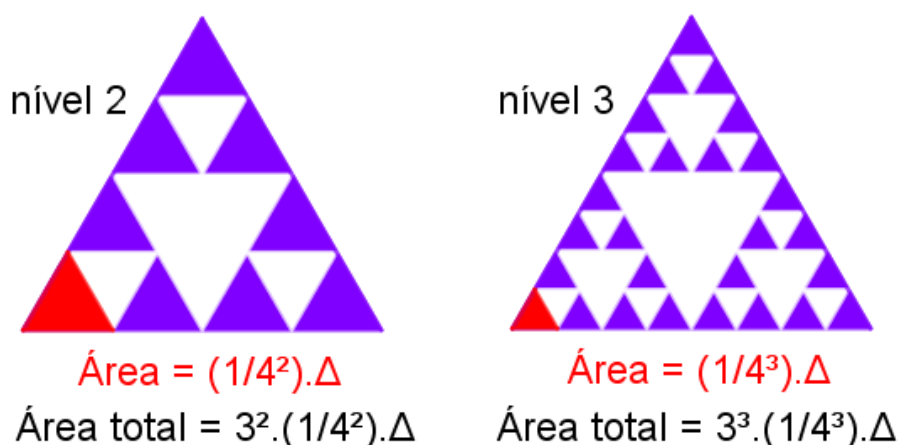
Embora o perímetro aumente no triângulo de Sierpinski com cada iteração, por se tratar de um fractal obtido por subtração, sua área diminui a cada iteração. Sendo Δ a área inicial do triângulo equilátero, cada novo triângulo tem área igual a $\frac{1}{4}$ do anterior, sendo assim temos como área $(1/4).\Delta$ no nível 1 (de cada triângulo novo), $(1/4^2).\Delta$ no nível 2 e $(1/4^3).\Delta$ no nível 3, concluindo então que a área de cada triângulo no nível n é dada por $(1/4^n) \Delta$. Multiplicando a área por 3^n , teremos então como área total: **$(3/4^n).\Delta$** .

Figura 19 – Níveis de 0 e 1 do Triângulo de Sierpinski (área)



Fonte: O autor (2022).

Figura 20 – Níveis de 2 e 3 do Triângulo de Sierpinski (área)



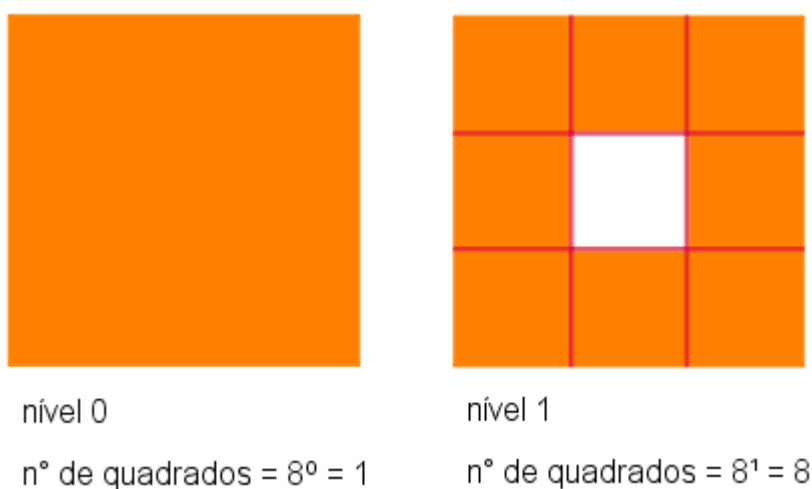
Fonte: O autor (2022).

3.3 Tapete de Sierpinski

3.3.1 Contagem

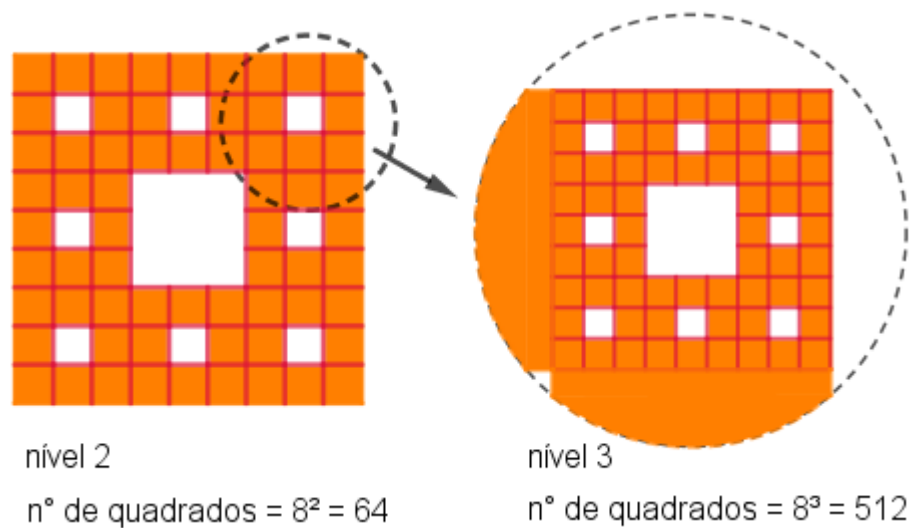
No tocante à contagem, o Tapete de Sierpinski é outro fractal fácil de se observar devido ao seu processo de geração a partir da subtração de um quadrado com $1/9$ da área do quadrado inicial, restando uma área correspondente a 8 quadrados no nível 1, 64 quadrados no nível 2 e 512 quadrados no nível 3. Ou seja, na fase n teremos 8^n quadrados.

Figura 21 – Níveis de 0 e 1 do Tapete de Sierpinski (contagem)



Fonte: O autor (2022).

Figura 22 – Níveis de 2 e 3 do Tapete de Sierpinski (contagem)

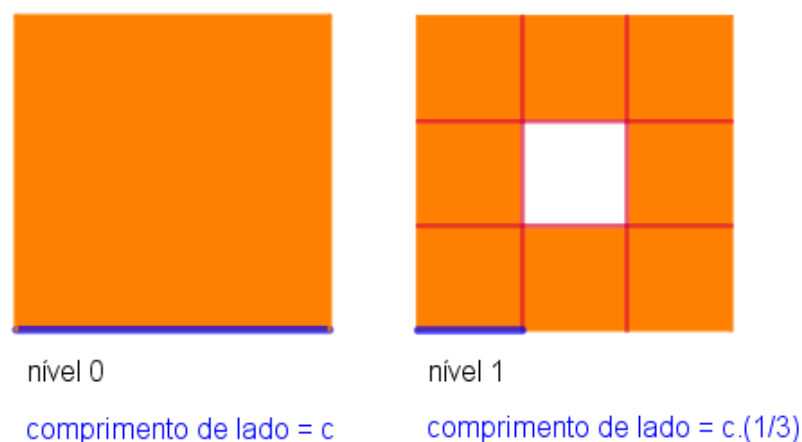


Fonte: O autor (2022).

3.3.2 Perímetro

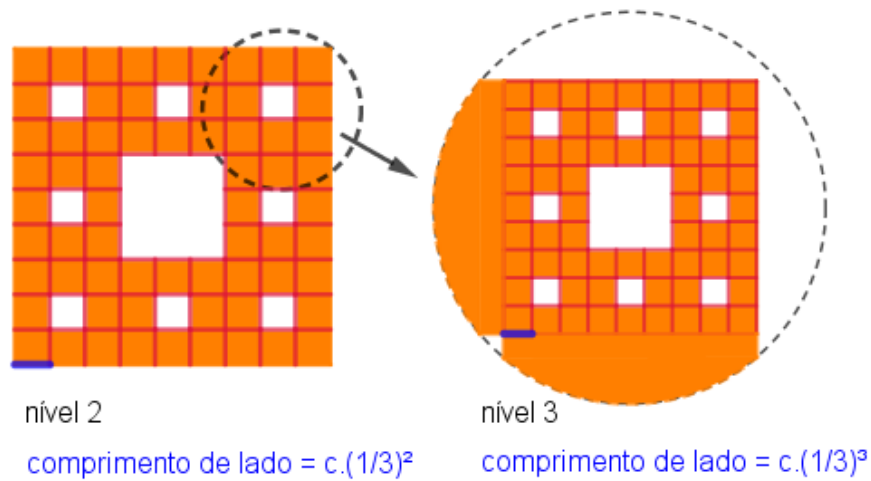
Sendo o comprimento do lado do quadrado obtido numa iteração sempre $1/3$ do lado do quadrado anterior, no nível 1 temos o comprimento do lado sendo $c(1/3)$, no nível 2 temos $c(1/3)^2$, e no nível 3 temos $c(1/3)^3$, teremos então na fase n : $c(1/3)^n$. Concluimos então que o perímetro de um quadrado retirado na figura final, será: $4.c(1/3)^n$, logo o perímetro (se considerarmos separadamente cada um dos quadrados restantes na estrutura, gerados no nível n) será dado pelo número de quadrados no nível n (8^n) multiplicado pelo perímetro de cada quadrado: **$8^n \cdot 4.c(1/3)^n$** .

Figura 23 – Níveis de 0 e 1 do Tapete de Sierpinski (perímetro)



Fonte: O autor (2022).

Figura 24 – Níveis de 2 e 3 do Tapete de Sierpinski (perímetro)

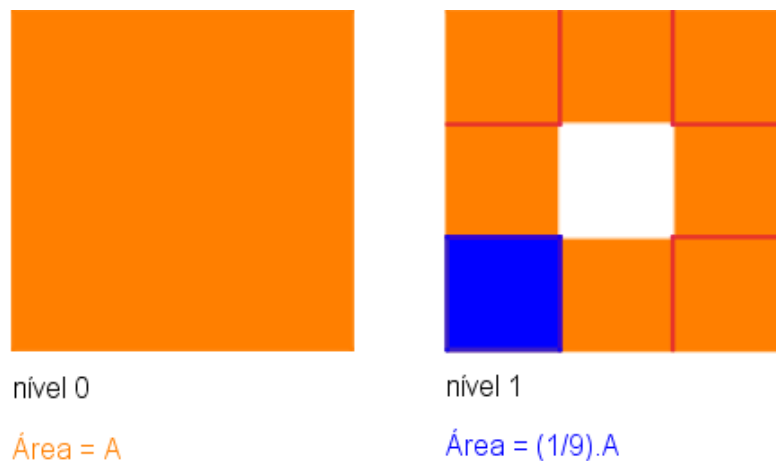


Fonte: O autor (2022).

3.3.3 Área

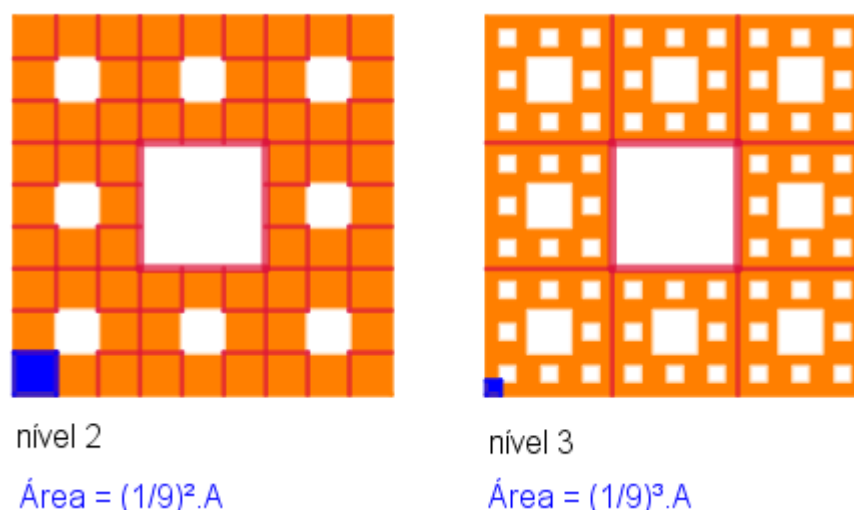
Embora o perímetro aumente no triângulo de Sierpinski com cada iteração, por se tratar de um fractal obtido por subtração, sua área diminui a cada nível de iteração. Sendo “A” a área inicial do quadrado, cada novo quadrado tem área igual a $1/9$ do anterior, sendo assim temos como área de cada quadrado $(1/9) \cdot A$ no nível 1, $(1/9^2) \cdot A$ na fase 2 e $(1/9^3) \cdot A$ na fase 3, concluindo então que a área de cada quadrado no nível n é dada por $\left(\frac{1}{9^n}\right) \cdot A$. Multiplicando a área por 8^n , teremos então como área total: **$(8/9)^n A$.**

Figura 25 – Níveis de 0 a 1 do Tapete de Sierpinski (área)



Fonte: O autor (2022).

Figura 26 – Níveis de 2 a 3 do Tapete de Sierpinski (área)



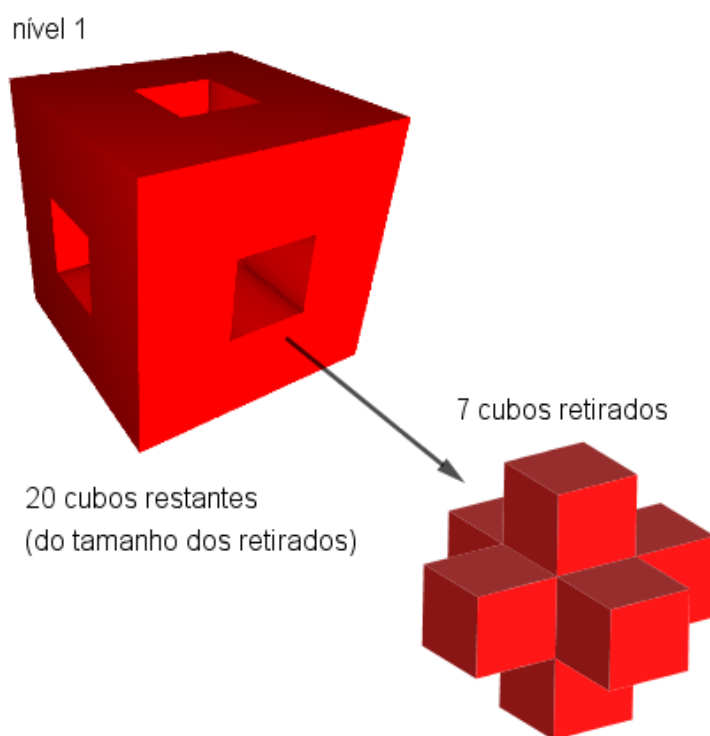
Fonte: O autor (2022).

3.4 Esponja de Menger

3.4.1 Contagem

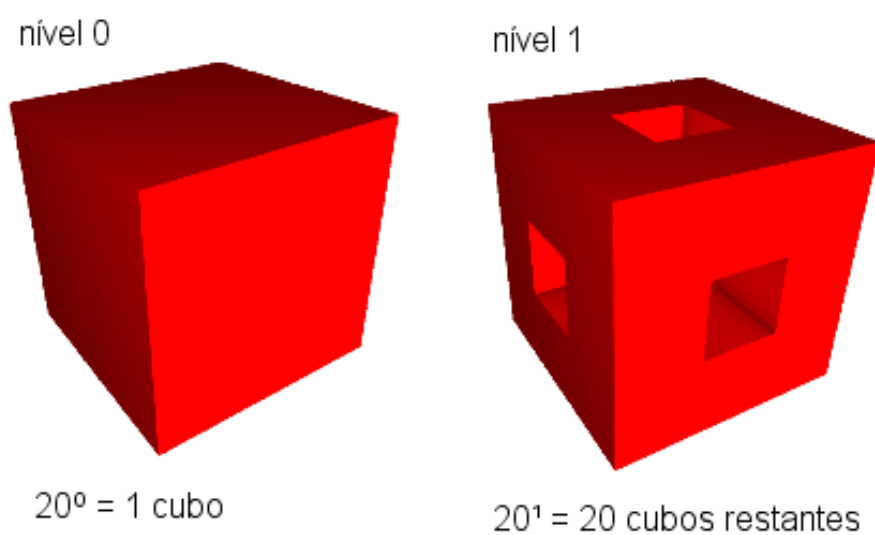
Sendo mais um fractal obtido por subtração, temos inicialmente um cubo cheio no nível 0, do qual serão removidos cubos menores com aresta igual a $1/3$ da aresta do cubo maior. Para o nível 1 temos 7 cubos removidos e 20 cubos restantes, para o nível 2 temos em cada um dos 20 cubos restantes, 7 cubos removidos, sendo removidos $7 \cdot 20$ cubos nesse nível, restando 20^2 cubos (20 para cada cubo restante), e, para o nível 3 são removidos $7 \cdot 20^2$, restando 20^3 cubos. Sendo assim, teremos 20^n cubos restantes para o nível n .

Figura 27 – Retirada de 7 cubos no primeiro nível da Esponja de Menger



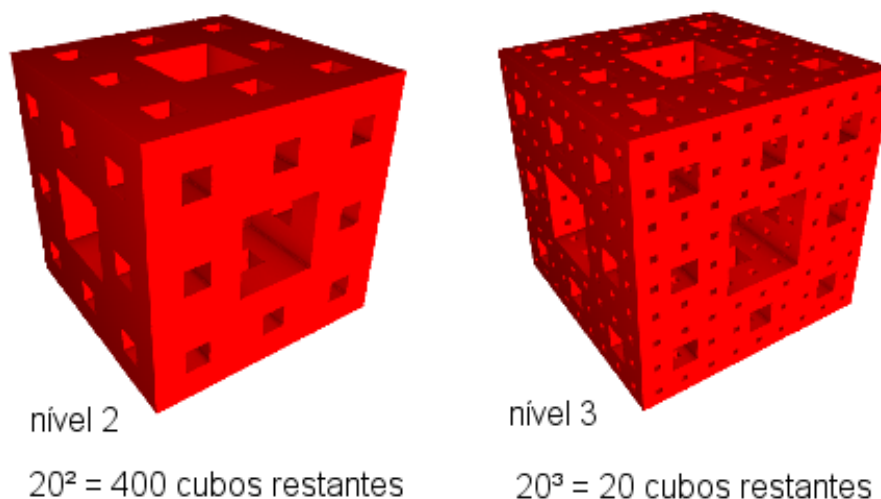
Fonte: O autor (2022).

Figura 28 – Níveis de 0 a 1 da Esponja de Menger (contagem)



Fonte: O autor (2022).

Figura 29 – Níveis de 2 a 3 da Esponja de Menger (área)



Fonte: O autor (2022).

3.4.2 Volume

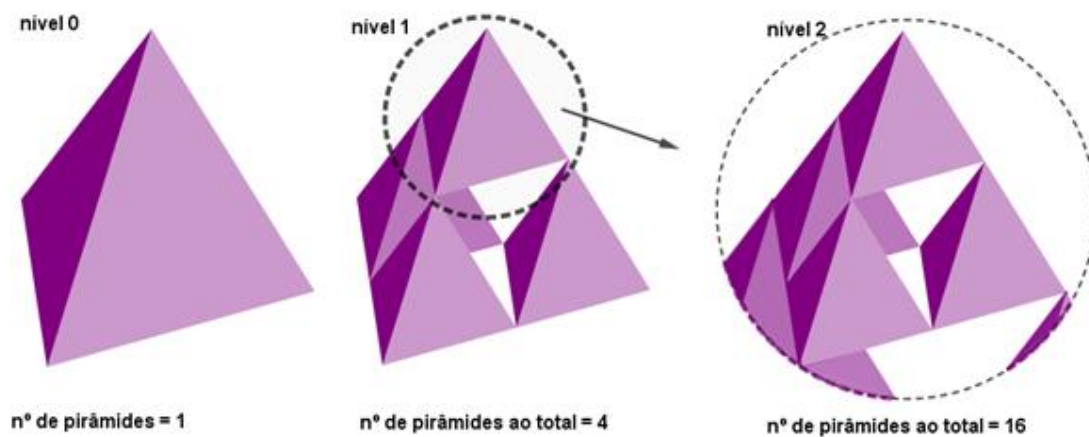
Sabendo que o volume do cubo inicial é V , no primeiro nível como são retirados 7 cubos cujo volume é $(1/27)V$, temos então $(20/27)V$ sobrando no nível 1, $(20/27)^2V$ no nível 2, e $(20/27)^3V$ no nível 3, tendo então no nível n : $(20/27)^nV$.

3.5 Pirâmide de Sierpinski

3.5.1 Contagem

Sendo mais um fractal obtido por subtração, temos inicialmente um tetraedro no nível 0, do qual serão gerados tetraedros menores com aresta igual a $1/2$ da aresta do tetraedro maior. Para o nível 1 temos 4 tetraedros restantes, para o nível 2 temos em cada um dos 4 tetraedros restantes, 4 tetraedros novos, gerando 16 tetraedros, e, para o nível 3 são gerados 256 tetraedros. Sendo assim, teremos 4^n tetraedros restantes para o nível n .

Figura 30 – Níveis de 0 a 2 do Tapete de Sierpinski (contagem)



Fonte: O autor (2022).

3.5.2 Volume

Existem referências incorretas que apontam o volume subtraído como igual a um tetraedro de aresta igual a metade da aresta do tetraedro maior, talvez devido à sua geometria que pode causar um engano sendo vista, já que cada face do tetraedro por ser um triângulo de Sierpinski possui um triângulo removido da mesma, porém isso não configura como uma remoção de um tetraedro da figura tridimensional. Como aponta Rabay:

O volume a ser retirado a cada iteração não tem uma forma regular, porém pode ser calculado comparando-se o volume inicial V_i com o volume V_f , que são quatro pirâmides com o fator de redução $r = 2$, logo
 $V_f = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_i = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot V_i$
 Ou seja, o volume retirado é metade do volume inicial. (RABAY, 2013, p. 32)

Nos levando a concluir que, para o nível n teremos um volume igual a $\left(\frac{1}{2}\right)^n V_i$, visto que o volume a cada nível é metade do volume anterior.

4 Educação, Tecnologia, Geometria Dinâmica e Fractais

Neste trabalho ressaltamos a importância da Geometria Fractal e propor a utilização de softwares de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento da representação visual de fractais no Ensino Básico. Porém, o uso da computação na Educação Brasileira é algo relativamente tardio e que não era visto com bons olhos pela sociedade brasileira inicialmente. Sendo assim, neste capítulo, apresentaremos uma contextualização sobre os processos históricos que levaram à implementação da computação na educação brasileira, a fim de trazer reflexões sobre de que formas a Geometria Dinâmica, como um produto da computação, pode ser utilizada no Ensino Básico associada à Geometria Fractal.

4.1 As origens da computação na educação brasileira

O acesso dos indivíduos à tecnologia é algo que está bastante ligado à forma de se obter informação na sociedade. Não é novidade que o desenvolvimento tecnológico vem propiciando cada vez mais facilidade ao aprendizado, sendo os avanços nesta área utilizados de uma maneira mais formal com instituições de ensino dispondo de equipamentos modernos para as salas de aula e de softwares voltados para a educação, ou de maneira mais autodidata por estudantes com pesquisas feitas em casa com seus smartphones e computadores. A computação tem grande culpa no aumento das possibilidades para se aprender, propiciando gradativamente a partir do desenvolvimento tecnológico as facilidades de acesso a bancos de dados, literatura e vídeos informativos. De acordo com Tiburcio et al (2000)

A utilização de recursos tecnológicos digitais para auxiliar o ensino e a aprendizagem de conhecimentos é uma realidade global: tutoriais, jogos, simuladores, linguagem de programação, robótica, entre outros recursos, são utilizados com frequência em ambientes de aprendizagem (virtuais ou presenciais). (p. 2)

Segundo Baldini (2004), grandes discussões vêm ocorrendo a respeito do papel da educação frente ao desenvolvimento tecnológico que tanto tem alterado os paradigmas da nossa sociedade. A autora também aponta o aumento do acesso a recursos tecnológicos por meio da população e o crescimento da preocupação dos educadores ao integrar a tecnologia e informática nas práticas pedagógicas. Também é comentado por Tavares (2002) o surgimento de projetos e pesquisas do governo que auxiliaram a implementação e utilização da informática educacional.

A realização de pesquisas em informática educacional, seu emprego na educação escolarizada e a formação de professores para uso educacional das novas tecnologias nas escolas públicas dependem exclusivamente da estruturação de políticas governamentais. São as instâncias dos governos federal, estadual e municipal que devem planejar e organizar ações, de forma a atender os objetivos e fornecer os subsídios necessários para que aqueles sejam alcançados, com base em pesquisas que devem ser realizadas. (TAVARES, 2002, p. 1)

De acordo com Tavares (2002), o primeiro projeto público que teve a função de tratar com a informática educacional foi o EDUCOM, com seu surgimento em meados da década de 80, época onde o Brasil se encontrava em uma situação em que não se era possível adquirir equipamentos e softwares estrangeiros. Além disso, não existiam indústrias no país que pudessem produzir estes tipos de tecnologias, configurando assim um cenário bastante difícil para a introdução da informática nas escolas públicas. Foram necessárias então uma série de metas propostas pelo projeto, bem como a formação de uma equipe formada por diversos órgãos relacionados à ciência, educação, cultura e tecnologia, a saber: Secretaria Especial de Informática (SEI), Ministério da Educação e Cultura (MEC), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Financiadora de Estudos e Projetos (Finep).

Por conta da falta de contato e acesso às novas tecnologias da época, existia uma resistência da sociedade em aceitar ou até mesmo enxergar a possibilidade da utilização de computadores nas salas de aula por conta do tradicionalismo presente na educação, até mesmo era presente um medo de que os computadores seriam implantados ali para substituir o papel dos professores. “O medo que o computador pudesse substituir o professor chegou a preocupar alguns docentes na década de 80, mas devido aos resultados das pesquisas que investigavam o papel deste na prática pedagógica, tal receio foi se dissipando.” (RICHIT, 2008, p. 35). Sendo assim, segundo Tavares (2002), uma das primeiras atitudes tomadas pela equipe formada pelo EDUCOM no 1º Seminário Nacional de Informática Educacional, em 1981, foi de propor o uso do computador como uma ferramenta ampliadora das funções do professor, e não um substituto.

Também se recomendou que a informática educacional fosse adaptada à realidade brasileira, valorizando a cultura, os valores sócio-políticos e a educação nacional. Essas recomendações influenciam até hoje as políticas públicas da área. [...] Várias foram as metas do projeto EDUCOM, uma delas era desenvolver a pesquisa do uso educacional da informática (entenda-se na época o uso da linguagem Logo e da linguagem Basic, disponíveis no Brasil), ou seja, perceber como o aluno aprende sendo apoiado pelo recurso da informática e se isso melhora efetivamente sua aprendizagem. Outra meta

era levar os computadores às escolas públicas, para possibilitar as mesmas oportunidades que as particulares ofereciam a seus alunos. (TAVARES, 2002, p. 1)

De acordo com Valente (2006), o EDUCOM mesmo com sua proposta de projeto sendo enviada ao MEC em 1983, só teve seu início nas escolas em meados de 1986 por conta das mudanças políticas com o fim do governo militar. Além disso, o projeto nunca foi encerrado formalmente, mesmo tendo recebido o último recurso financeiro em 1989. Depois da iniciativa tomada pelo EDUCOM, outros projetos do governo foram sendo criados para que a informática pudesse estar mais presente no ensino do Brasil como aponta Baldini (2004):

A realização de vários projetos desenvolvidos com o apoio de órgãos governamentais e em parcerias com as universidades, como EDUCOM, FORMAR, PRONINFE e PROINFO, muito contribuiu para expansão e uso eficiente da informática. Esses projetos envolveram desde a criação de laboratórios de informática até formação de recursos humanos e ainda recursos didático-pedagógicos, proporcionando a chegada da informática a muitas escolas da rede pública. Atualmente, existem vários grupos de estudos e pesquisas que desenvolvem projetos na busca de contribuir para que a informática permeie cada vez mais as atividades desenvolvidas nas salas de aulas. (BALDINI, 2004, p. 25)

4.2 A Geometria Dinâmica e a Tecnologia

4.2.1 O Tradicionalismo no ensino sob a ótica da computação

Mesmo sendo produzidos avanços na área computação voltada à educação, as formas de se utilizar deles começaram a ser questionadas no tocante ao modelo de aprendizado utilizado em ambientes informatizados. As novidades tecnológicas estavam atuando dentro da educação, porém, os alunos estariam de fato criando conhecimento em conjunto aos professores no processo?

Se almeja-se uma mudança de paradigma na educação, é necessário ser crítico e cuidadoso neste processo de uso da informática. A informática por si só não garante esta mudança, e muitas vezes engana pelo visual atrativo dos recursos tecnológicos que são oferecidos, os quais simplesmente reforçam as mesmas características do modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento. (GRAVINA E SANTAROSA, 1999, p. 2)

A preocupação subsequente ao processo de integrar a computação à educação foi de buscar alternativas no ensino para que os problemas, que já eram presentes antes, não comessem a fazer parte desta nova realidade. E, mesmo assim, nos dias atuais ainda é notável que a matemática e geometria ainda lidam com

o despreparo dos professores, devido a uma formação acadêmica deficiente em termos de tecnologia, e também por meio de metodologias herdadas do ensino pautado no Tradicionalismo, tratando a maneira de se ensinar estas disciplinas de uma forma bastante massiva, onde o estudante necessita memorizar esquemas, passos e fórmulas para se resolver questões em exames, obtendo como resultado uma grande dificuldade nos alunos de se desenvolver o pensamento geométrico de fato.

Muitas mudanças estavam rapidamente acontecendo e o modelo de ensino brasileiro, preso ao fracassado método Tradicionalista, não estava acompanhando o mesmo ritmo. O principal problema consiste nos docentes que não abrem mão da utilização do Tradicionalismo, e continuam usando a avaliação de ensino para aprovar ou reprovar alunos, bem como se negavam a abrir mão do autocontrole de suas turmas, apesar das punições mais severas terem sido proibidas (FERNANDES ET AL, 2018, apud PISTRÁK, 2005, p. 141)

Como aponta Baldini (2004 apud GRAVINA, 1998; HENRIQUES, 1999), grande parte dos alunos que chegam às universidades ainda não desenvolveu direito as habilidades de visualização, interpretação e representações gráficas, fruto de uma dificuldade de se construir conceitos geométricos e também da falta de conhecimentos geométricos dos professores de matemática/geometria que tiveram nas escolas. Porém, buscando mudanças nesta situação, Gravina e Santarosa (1998) apontam que a Matemática pode ser utilizada dentro de uma perspectiva construtivista para valer-se de programas e dispositivos como potentes ferramentas para o ensino e a aprendizagem, criticando o que aconteceu com a implementação inicial feita pelo EDUCOM da linguagem Logo de programação nos ambientes escolares.

Atualmente dispõe-se de programas [...] onde os alunos podem modelar, analisar simulações, fazer experimentos, conjecturar. Nestes ambientes os alunos expressam, confrontam e refinam suas idéias, e 'programam' o computador sem precisar usar recursos de linguagem de programação, diferentemente do que acontece com micro-mundos no ambiente Logo. Utilizam, pelo contrário, processos de representação muito próximos dos processos de representação com "lápis e papel", não sendo-lhes exigido o conhecimento e domínio de uma nova sintaxe e morfologia, aspectos inerentes a uma linguagem de programação. (GRAVINA E SANTAROSA, 1999, p. 74)

4.2.2 O Pensamento Geométrico e a Geometria Dinâmica

Frente à dificuldade no desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, Baldini (2002) afirma que diversos softwares proporcionam a manipulação de figuras e diferentes visualizações de diversas propriedades geométricas, podendo

ser ótimas ferramentas para a construção da percepção espacial. Segundo a autora, os ambientes informatizados que fornecem as melhores condições para ser desenvolvida uma abordagem construtivista no ensino da geometria estão construídos dentro dos princípios da Geometria Dinâmica.

Os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. É a possibilidade de "mudar os limites entre o concreto e o formal" (PAPEAT, 1988). Ou ainda segundo HEBENSTREINT (1987): "o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos 'concreto-abstratos'. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais." Por exemplo, uma rotação não é mais somente um objeto matemático abstrato (dado por uma definição formal) acompanhado eventualmente de uma representação estática (desenho), mas um objeto que pode ser manipulado e entendido a partir de suas invariâncias (ao mudar-se o centro de rotação, o ângulo de rotação, ao transformar figuras). (GRAVINA E SANTAROSA, 1999, apud PAPEAT, 1998; HEBENSTREINT, 1987, p. 78)

A Geometria Dinâmica traz muitas possibilidades para as representações, visualizações e manipulações geométricas, e por meio do dinamismo e praticidade oferecidos por ela, o professor pode demonstrar com bastante clareza elementos geométricos. De fato, ela não foi desenvolvida para substituir de vez a prática manual com instrumentos analógicos e lousa/papel para representações geométricas, mas é inegável que sua praticidade abre muitas possibilidades para a modificação rápida de uma figura. Bellemain (2000) determina que a Geometria Dinâmica "tem por objetivo fornecer representações dos objetos e relações geométricas que permitem ultrapassar as limitações dos desenhos geométricos no ambiente papel-lápis e facilitam a visualização de propriedades geométricas" (BALDINI, 2004, apud BELLEMAIN, p. 202). Além disso, numa sala de aula, tendo em vista a limitação por conta do tempo curto de uma aula, o professor com o auxílio da geometria dinâmica poderia fornecer e criar imagens com bastante rapidez, evitando a construção manual na lousa e ainda assim fornecendo muito mais precisão nas representações, e com a possibilidades de transformação destas representações com apenas poucos cliques.

Os cálculos, as transferências de pontos, retas e figuras, por meio da Geometria Dinâmica são feitos com extrema rapidez e auxiliados por softwares, trazendo fluidez para o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico, e através deles, o professor pode ter mais recursos visuais para criar mais discussões em sala de aula sobre propriedades geométricas que com uma apenas com uma lousa seria difícil de ser representada. As transformações geométricas de rotação e

translação de um objeto tridimensional por exemplo, são processos simples de ser mostrados em um software que se utiliza de Geometria Dinâmica, podendo mostrar esse objeto de diversos pontos de vista, e também movendo esse objeto livremente em um espaço visual, coisa que com a limitação da representação estática torna-se difícil ou impossível de acontecer.

Historicamente os sistemas de representação do conhecimento matemático tem caráter estático. Vê-se isto observando os livros ou assistindo uma aula 'clássica'. Este caráter estático muitas vezes dificulta a construção do significado, e o significante passa a ser um conjunto de símbolos e palavras ou desenho a ser memorizado. Assim sendo, não deve ser surpreendente quando os alunos não conseguem transferir um conceito ou teorema para situação que não coincide com a prototípica registrada a partir da apresentação do livro ou do professor (GRAVINA E SANTAROSA, 1999, p. 79)

A interatividade com o ambiente geométrico virtual é algo que confere liberdade ao aluno, onde ele pode testar diversas situações, porém, é necessário afirmar que “o diálogo entre alunos e a reflexão, não acontecem naturalmente em ambientes permeados pelo computador, mas sim, acontecem se forem promovidas pela ação consciente e qualificada do professor” (RICHT, 2005 p. 37). Segundo a autora, a utilização de softwares pode conferir autonomia para planejar ações, executá-las e refletir sobre elas, modificando a ação do alunos frente aos cenários e situações sugeridas na aula de Geometria, caracterizando assim um ambiente **construcionista** de aprendizagem. Baldini (2004) também afirma que o espírito de investigação do aluno pode ser desenvolvido através dos softwares que oportunizam a investigação e exploração das propriedades geométricas por conta da sua característica dinâmica, conferindo ao estudante a possibilidade de “fazer conjecturas, desenvolver atividades manipulativas, ter seu ritmo individual, proporcionando, com isso, as novas formas de pensar e novas formas de resolver problemas.” (p. 29)

E mesmo quando existe a possibilidade de ações sobre objetos físicos, a transposição destes objetos para ambientes informatizados também apresenta vantagens: é a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta. É a primazia da ação favorecendo o processo de investigação e abstração, com a conseqüente construção de conceitos e relações. (GRAVINA E SANTAROSA, 1999, p. 79)

No que se refere ao desenvolvimento de fractais, a representação gráfica é algo muito importante, é por meio dela que podem se analisar visualmente estes objetos matemáticos. Por se tratarem de estruturas que podem adquirir um grande

nível de complexidade devido ao processo das iterações recursivas, o cálculo para gerar determinadas estruturas e também a representação visual das mesmas seria de extrema dificuldade para serem feitos à mão ou com instrumentos analógicos, coisa que acabou limitando e atrasando bastante os cientistas nos estudos iniciais sobre fractais. Por meio dos softwares é que foram feitos diversos avanços nos estudos da Geometria Fractal, que ao mesmo tempo que facilitaram a visualização de determinados sistemas complexos, dando mais possibilidades para os pesquisadores manipularem as estruturas com um número gigantesco de iterações, também puderam simular variações nos cálculos fornecendo novos resultados e representações de imediato.

No campo da pesquisa em Matemática alguns exemplos são ilustrativos. A teoria do caos nasceu do estudo de equações diferenciais feito por Lorentz; ao implementar sistemas que diferenciavam minimamente nas condições iniciais, Lorentz constatou que a evolução do sistema, no tempo, se tornava imprevisível e a partir disto surgem os resultados teóricos sobre a instabilidade dos sistemas dinâmicos. Um segundo exemplo: a representação gráfica de computações massivas tornou possível o avanço da teoria de fractais. Figuras surpreendentes foram fontes de conjecturas que desencadearam a pesquisa na direção de demonstrações formais. Estes exemplos são paradigmáticos quanto ao suporte oferecido pelos ambientes informatizados na concretização mental de ideias matemáticas. Este suporte favorece a exploração, a elaboração de conjecturas e o refinamento destas, e a gradativa construção de uma teoria matemática formalizada. (GRAVINA E SANTAROSA, 1999, p. 78)

Existem diversos softwares especializados em Geometria Dinâmica, alguns deles foram até concebidos com o intuito de serem utilizados para educação, como o GeoGebra, bastante estudado e utilizado no curso de Licenciatura em Expressão Gráfica da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) pelos professores e licenciandos, por exemplo. Richit (2005) também aponta outros softwares como o Geometricks, Cabri Géomètre, Cinderella, Doctor Geo, Geometer's Sketchpad que por meio da representação e manipulação de formas, favorecem a “investigação dos conceitos e propriedades geométricas e a reflexão sobre a aplicação destes em diversas situações” (p. 36) trazendo assim contribuições para o ensino de Geometria tanto no ensino presencial, quanto no remoto.

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre

si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para criar-se ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS. (NASCIMENTO, 2012, p. 113)

4.2.3 *Fractais e a Geometria Dinâmica*

É defendido por Nascimento (2012) o uso do termo Geometria Dinâmica Interativa (GDI). Segundo ele, esta seria a implementação computacional da Geometria Tradicional (que se utiliza as ferramentas analógicas de régua, compasso e esquadro - TRCE), justificando o uso dos termos “Dinâmica” para se opor a estrutura estática das construções da geometria tradicional e “Interativa” por conta da possibilidade do software redesenhar construções preservando as propriedades dos objetos a partir da alteração feita pelo aluno das posições dos objetos iniciais criados. O autor também afirma que:

Em função desta possibilidade de alterar objetos preservando-se a construção, podemos dizer que a GDI é uma geometria do tipo: uma construção por N testes, enquanto a tradicional TRCE é do tipo uma construção por um teste, desta forma torna um laboratório dentro do computador, onde possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes, o que seria praticamente impossível com a TRCE. (NASCIMENTO, 2012, p. 114)

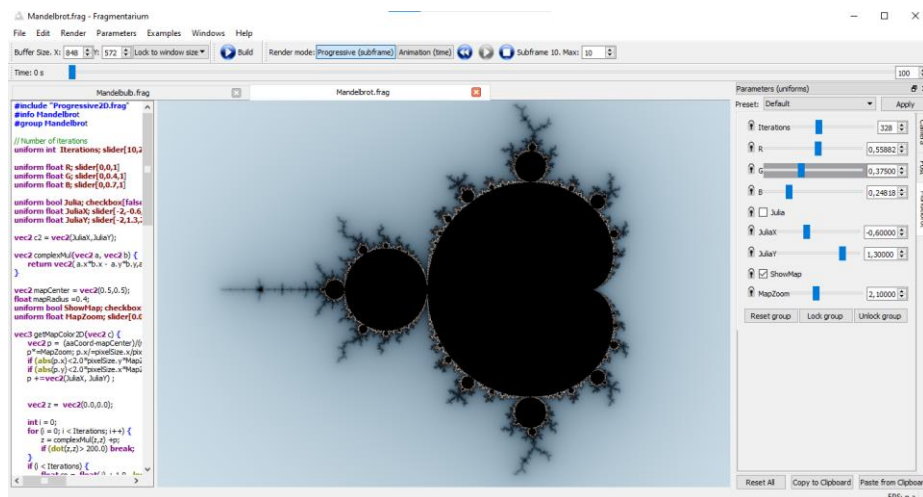
Existem softwares que tratam especificamente da representação de fractais por meio da Geometria Dinâmica, como é o caso do Fragmentarium, desenvolvido por Mikael Hvidtfeldt Christensen, que pode ser utilizado na sala de aula para fazer simulações e demonstrar propriedades dos fractais. O Fragmentarium é um software gratuito³, com sua primeira versão disponível em 2012 e que dispõe de uma biblioteca de exemplos de estruturas fractais que podem ser executadas em sua tela como o conjunto de Mandelbrot (um dos fractais mais famosos, desenvolvido a partir dos estudos de Mandelbrot por Pierre Fatou em 1905) e vários outros conjuntos clássicos disponíveis para manipulação num display interativo e programável em C++, OpenGL/GLSL, e Qt 4. O software surgiu a partir de fóruns na internet e possui uma galeria no flickr⁴ com diversas fotos artísticas produzidas com geometria fractal por seus usuários, e ainda está sendo desenvolvido por meio de open-source, ou seja, é um software que pode ser modificado pelos usuários, porém, infelizmente, na sua

³ O software pode ser obtido através do link: <https://syntopia.github.io/Fragmentarium/>

⁴ A comunidade no flickr pode ser acessada através do link: <https://www.flickr.com/groups/fragmentarium/>

página oficial não aparecem atualizações feitas desde o ano de 2013, quando foi lançada sua versão V1.0.

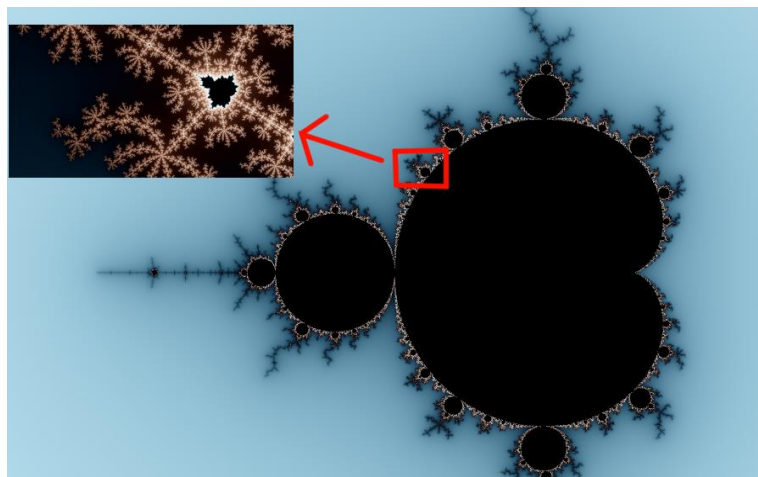
Figura 31 – Conjunto de Mandelbrot no Fragmentarium



Fonte: compilação do autor, 2021.

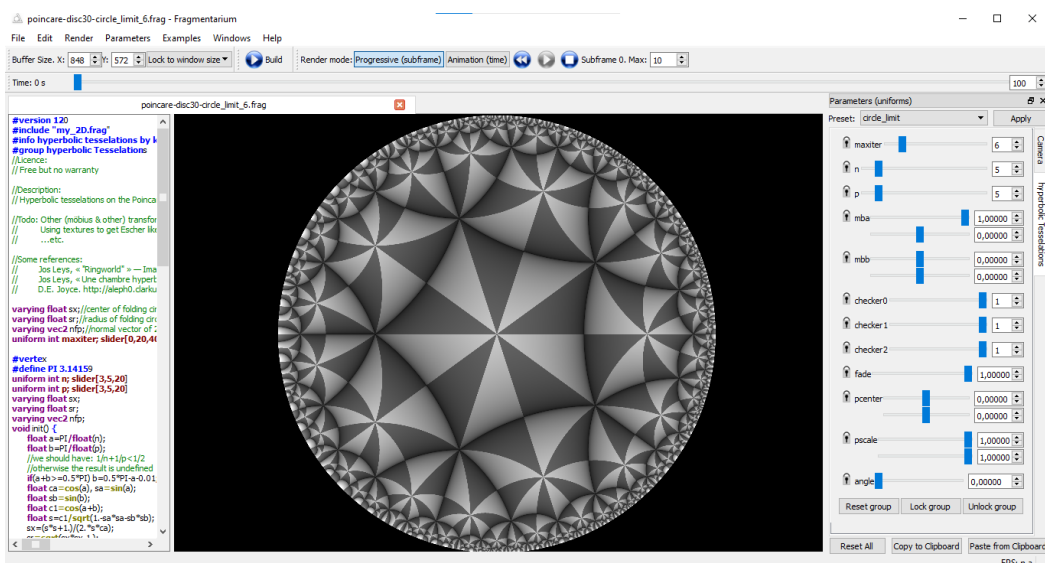
A partir da manipulação do conjunto de Mandelbrot simulado a partir do Fragmentarium, o observador pode perceber a beleza presente nos conjuntos fractais e a grandiosidade deles. É uma boa alternativa para mostrar a simulação/criação de fractais complexos a partir de softwares de manipulação geométrica no ensino básico, e pode ser melhor explorado e aprofundado no ensino superior no tocante à programação e criação artística utilizando-se destes conjuntos fractais. Existem vários fóruns na internet com produções artísticas feitas a partir do software, as possibilidades de utilização são diversas e cabe ao professor saber utilizar bem essa ótima ferramenta.

Figura 32 – Conjunto de Mandelbrot com zoom no Fragmentarium



Fonte: compilação do autor, 2021.

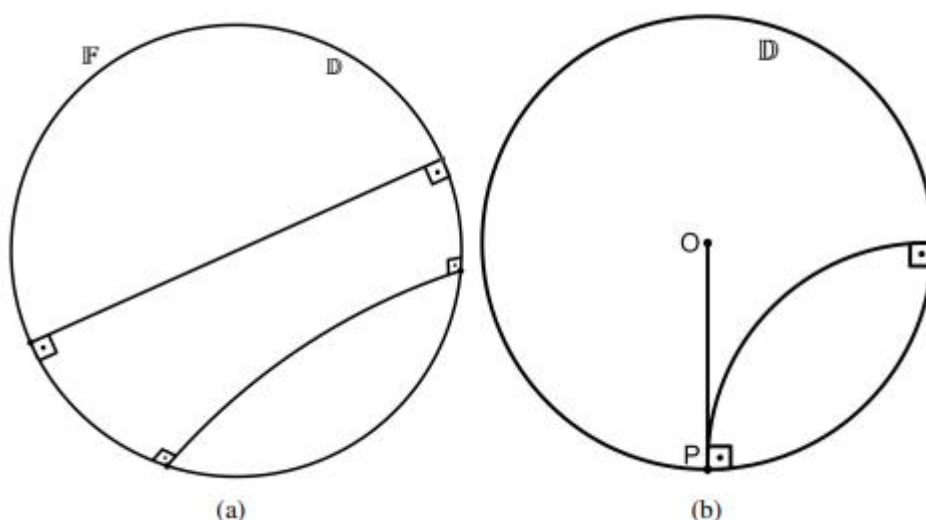
Figura 33 – Disco de Poincaré no Fragmentarium



Fonte: compilação do autor, 2022

Um outro exemplo de utilização do Fragmentarium é comparar as representações de polígonos regulares no Disco de Poincaré, que por conta de utilizar-se da geometria hiperbólica, trazem características dos fractais como a auto-similarança e complexidade infinita, na sua representação. Por meio destas representações, é possível debater a existência de outras geometrias além da euclidiana, as chamadas não-euclidianas, e que possuem diferentes princípios para a representação geométrica, como por exemplo, afirma Albon (2021) “no modelo do disco de Poincaré, algumas retas são curvilíneas (arcos de circunferências), enquanto outras são segmentos de reta Euclidianos. Essas retas são denominadas geodésicas ou d-linhas.” (p. 36)

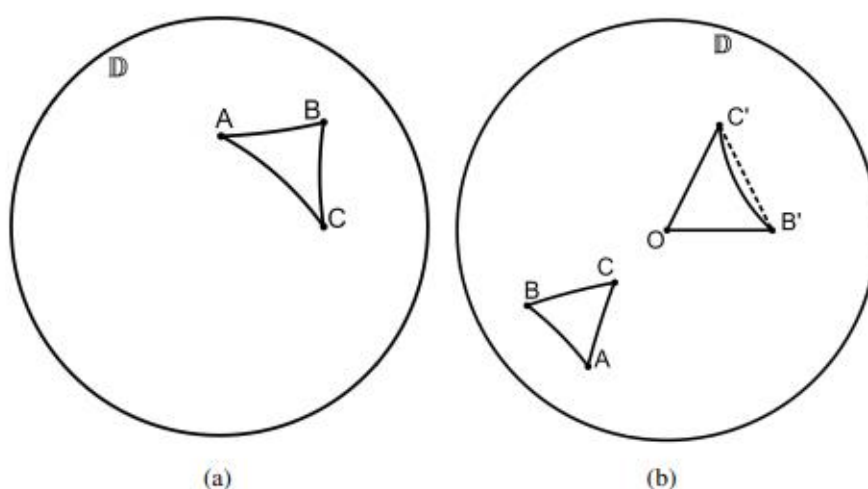
Figura 34 – (a) Retas d-linhas no disco de Poincaré e pontos de fronteira; (b) raio OP, tangente em P a uma d-linha no disco de Poincaré



Fonte: ALBON, A Geometria do Disco de Poincaré. (2021, p. 36)

Segundo Albion (2021), uma d-linha é uma parte de uma circunferência Euclidiana contida no disco D e que intersecta a fronteira F de D em dois pontos distintos, determinando nesses pontos de fronteira dois ângulos retos. Sendo assim, todo diâmetro de D , um segmento de reta Euclidiano, também é uma d-linha. A Figura - (a) ilustra d-linhas no disco de Poincaré. O que nos leva a imaginar que polígonos sendo representados no disco de Poincaré possuem suas arestas deformadas (do ponto de vista da geometria euclidiana, do ponto de vista da geometria hiperbólica, tornam-se d-linhas), transformando-se polígonos hiperbólicos.

Figura 35 – (a) Triângulo hiperbólico ABC no disco de Poincaré; (b) triângulo hiperbólico ABC e triângulo Euclidiano $OB'C'$

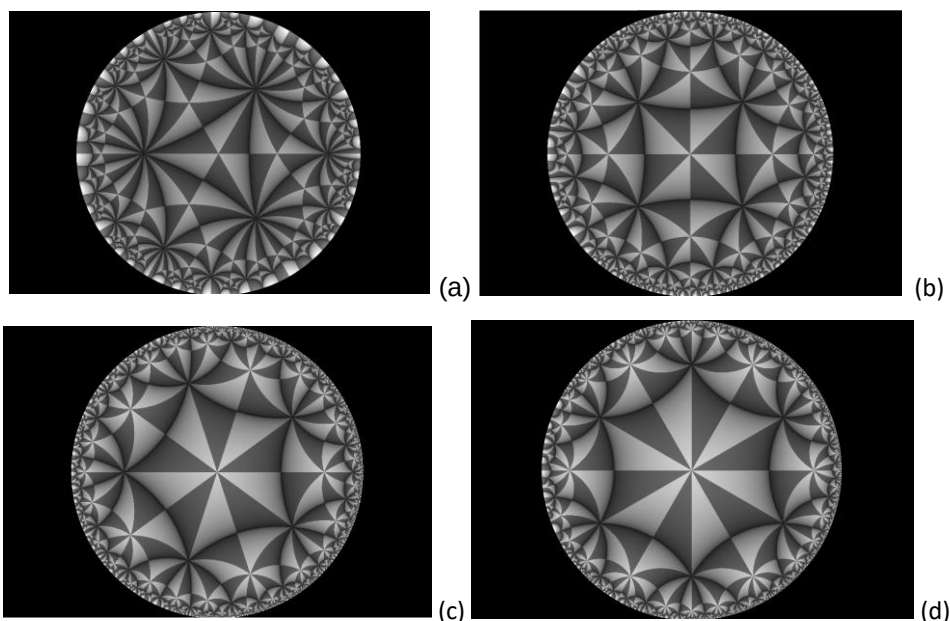


Fonte: ALBON, A Geometria do Disco de Poincaré. (2021, p. 43)

Através da utilização do Fragmentarium para demonstrar aplicações do disco de Poincaré em sala de aula, podem ser obtidos diversos exemplos de representações

manipuláveis de malhas geométricas feitas a partir da repetição de polígonos no sistema hiperbólico, como mostram as Figuras 35 “a”, “b”, “c” e “d”. O software possibilita modificar diversos fatores como a quantidade de lados do polígono e o tamanho do lado do mesmo, com comandos que ficam no lado direito sua interface, como pode ser visto na Figura 32.

Figura 36 – (a) Malha geométrica com triângulo hiperbólico no disco de Poincaré; (b) Malha geométrica com quadrado hiperbólico no disco de Poincaré; (c) Malha geométrica com pentágono hiperbólico no disco de Poincaré; (d) Malha geométrica com hexágono hiperbólico no disco de Poincaré.



Fonte: compilação do autor, 2022

A partir dos apontamentos feitos neste capítulo, buscaremos trazer a utilização tanto do GeoGebra quanto do Fragmentarium na educação básica como ferramentas da Geometria Dinâmica no desenvolvimento, representação visual e manipulação de fractais. Essa proposta será feita no capítulo 6 por meio da apresentação de um plano de ensino, desenvolvido a partir das análises da Base Nacional Comum Curricular, dos Currículos de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio com base nos parâmetros curriculares do Estado de Pernambuco, e também de quatro artigos que apresentam propostas para a utilização da Geometria Fractal para o ensino básico (feitas no capítulo 5). Por meio do plano de ensino apresentado, pretendemos apresentar então **possibilidades de utilização da Geometria Fractal na abordagem de conteúdos da Matemática no Ensino Básico.**

5. Metodologia

Como o trabalho se propõe a investigar possíveis relações entre os conteúdos de Matemática utilizados no ensino básico e a Geometria Fractal, trazendo propostas para a utilização da mesma, partimos de uma fundamentação baseada no trabalho “Fundamentos de Metodologia Científica” desenvolvido por Marconi e Lakatos (2003) para determinar os processos e métodos realizados.

O desenvolvimento do trabalho iniciou-se de uma pesquisa bibliográfica, segundo Marconi e Lakatos (2003), este tipo de pesquisa tem a finalidade de colocar o pesquisador em contato direto com tudo que foi escrito, dito, ou filmado sobre determinado assunto, propiciando o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras. Portanto, foram pesquisadas publicações relacionadas ao tema disponíveis digitalmente, por meio da ferramenta Google Acadêmico, e também foram feitas pesquisas de impressas escritas, disponíveis digitalmente em sites de jornais. Além disso, foram feitas pesquisas em livros, disponíveis na sua forma física, e todo o processo de pesquisa seguiu os processos de identificação, localização, compilação e fichamento, apontados por Marconi e Lakatos (2003).

A metodologia do trabalho é de natureza qualitativa, a pesquisa do tipo dialógica, no sentido em que propõe um diálogo com os autores trabalhados na pesquisa documental e em termos de procedimentos técnicos-metodológicos trata-se de uma pesquisa bibliográfica e documental, cujo objetivo central é estabelecer uma análise aprofundada do material bibliográfico e documental com o intuito de trazer à tona aspectos de base a proposta desenvolvida ao final pesquisa. Nesse sentido, a pesquisa será desenvolvida em três grandes etapas.

A pesquisa bibliográfica realizada neste trabalho configura-se como um levantamento sobre estudos, materiais, e conhecimentos disponíveis relacionados aos temas “Geometria Fractal”, “Ensino da Matemática” e “Educação Básica” é feito com o intuito de qualificar os dados obtidos, trazendo sua devida interpretação segundo nosso método de análise. Utilizando-se do método dialógico, proposto por Marconi e Lakatos (2003) partimos do problema da falta de utilização da Geometria Fractal para tratar de conteúdos da Matemática no Ensino Básico e buscamos

fornecer propostas e análises que contribuam para uma utilização proveitosa desta Geometria neste campo educacional.

O trabalho desenvolvido é então dividido em três etapas: a primeira é uma pesquisa bibliográfica, baseada na seleção, leitura e reflexão para a construção do aporte teórico. A segunda etapa é uma análise documental e a terceira etapa utilizada para a construção de propostas a partir das análises realizadas e conteúdos abordados na pesquisa bibliográfica.

A primeira etapa compreende aos capítulos iniciais do trabalho (de 2 a 4). O capítulo 1 é de introdução ao trabalho e busca determinar os processos que serão realizados no trabalho. No capítulo 2 estão determinados conceitos relacionados à Geometria Fractal, como as contribuições de Benoit Mandelbrot para o seu estudo, as características dos fractais “Curva de Koch”, “Ilha de Koch”, “Triângulo de Sierpinski”, “Pirâmide de Sierpinski”, “Tapete de Sierpinski” e “Esponja de Menger”, além de relações entre a Estética estudada pela Filosofia e a Geometria Fractal. No capítulo 3 são feitas observações referentes à Educação Brasileira, Tecnologia, Geometria Dinâmica e a relação destes temas com a Geometria Fractal. Já no capítulo 4 são trazidas relações numéricas e geométricas nos fractais descritos no capítulo 2, no sentido de determinar análises numéricas e relações algébricas referentes aos conceitos matemáticos de contagem, perímetro, área e volume.

A segunda etapa compreende às partes de análise documental e de discussões realizadas no capítulo 6. O capítulo 5 pretende determinar a metodologia utilizada no trabalho como um todo. As análises realizadas no capítulo 6 surgiram da necessidade de se determinar em documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular e Currículos de Matemática para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio do Estado de Pernambuco) indicações feitas pelos mesmos que poderiam ser relacionadas à Geometria Fractal ou desenvolvidas por meio dela. Além das análises realizadas, são trazidas reflexões que levam às próximas análises feitas neste capítulo, relacionadas à quatro artigos selecionados, que possuem propostas para a utilização da Geometria Fractal no Ensino Básico. As análises realizadas em relação aos artigos têm o objetivo de buscar as contribuições trazidas pelos autores e também para determinar pontos que necessitam de mais aprofundamento/esclarecimento nestes trabalhos.

Por meio de pesquisa bibliográfica, foi possível ter acesso aos artigos: **Fractais: progressão e série geométrica** (BEMFICA E ALVES, 2010), que analisa fractais estabelecendo relações numéricas de acordo com a quantidade de iterações geradas, e que também propõe o uso de um software (Shapari) para o ensino; **Fractais e o GeoGebra: Construindo a Curva de Koch** (FUZZO et al, 2011), que indica a criação de uma ferramenta no GeoGebra para a criação da Curva de Koch; **A Matemática Fractal e o GeoGebra no Ensino de Matemática** (VIELMO E DALBERTO, 2013), que propõe a realização de uma oficina com atividades que utilizam fractais e matemática no Ensino Básico; e **Geometria Fractal No Ensino Fundamental e Médio** (VALIM E COLUCCI, 2013), que traz propostas para a utilização da Geometria Fractal por meio de atividades destinadas ao ensino Fundamental e Médio. Foram feitas análises de cada um dos materiais encontrados, no que se refere às contribuições para o estudo dos fractais (como cada autor traz a sua pesquisa sobre os fractais utilizados por ele) e às possibilidades apresentadas pelos autores para a utilização de fractais na educação (como cada autor justifica as abordagens que propõe). Cada trabalho foi analisado individualmente a partir de observações, reflexões e referências apresentadas.

Os apontamentos delimitados no capítulo 6 em relação aos artigos são realizados na terceira etapa, no capítulo 7. Este capítulo é dividido em duas partes, a primeira traz contribuições para os estudos iniciados pelos autores e serve para delimitar alguns conteúdos, atividades e técnicas selecionadas para fundamentar a criação da proposta trazida posteriormente. Sendo assim, por meio de um Plano de Ensino composto de Sequência Didática, a segunda parte do capítulo 7 propõe cinco aulas para o 3º ano do Ensino Médio, descritas através de Planos de Aula, determinando assim **possibilidades de utilização da Geometria Fractal nos conteúdos de Matemática do Ensino Básico**.

6 Análises e discussões

6.1 O currículo escolar e as possibilidades no ensino básico

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo criado pelo Governo Brasileiro com o intuito de definir o conjunto de aprendizagens julgadas essenciais para serem desenvolvidas por todos alunos ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2018). Nesta parte do capítulo buscamos indicar, através da análise da mesma, quais seriam as indicações para o ensino da Matemática determinadas pela BNCC que poderiam ao nosso ver serem relacionadas à Geometria Fractal, ou que poderiam fornecer indícios para a utilização da Geometria Fractal no Ensino Básico, nas etapas de Ensino Fundamental e Ensino Médio. Posteriormente também serão feitas análises sobre os Currículos de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio com base nos parâmetros curriculares do Estado de Pernambuco, dois documentos criados pela Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco a fim de encontrar a presença dos conteúdos próprios da Geometria Fractal ou de conteúdos que possam ser abordados através da utilização da mesma.

6.1.1 Análise da BNCC

De acordo com a BNCC, a matemática no Ensino Fundamental, por meio da articulação da Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, deve garantir que os alunos façam relações a partir de observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas (BRASIL, 2018). Dito isto, vemos a Geometria Fractal como uma área do conhecimento matemático que consegue tanto fazer parte do processo de observações empíricas do mundo real, quanto do processo da representação gráfica, possuindo propriedades e características passíveis de reflexão.

Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 265)

Já no Ensino Médio, em relação ao pensamento geométrico é determinado pela BNCC que os estudantes desenvolvam habilidades para identificar transformações isométricas, produzir ampliações e reduções de figuras. Também é dito que eles

sejam solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. Além disso, no que se refere aos conhecimentos de Grandezas e Medidas, é ampliada a noção de medida por meio do estudo de diferentes grandezas e da obtenção de expressões para o cálculo da medida de áreas de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos (BRASIL, 2018). Defendemos que a Geometria Fractal se relaciona com cada um destes pontos citados e poderia ser tratada com mais aprofundamento no Ensino Médio, visto que o repertório de conceitos matemáticos relacionados à geometria é bem maior, bem como a maturidade dos alunos para serem feitas reflexões utilizando a Geometria Dinâmica nesse processo como ferramenta.

A BNCC apresenta algumas competências específicas de matemática para os ensinos fundamental e médio, a seguir, representaremos competências específicas que julgamos que podem ser desenvolvidas por meio do estudo da Geometria Fractal nos respectivos ensinos:

Quadro 1 – Competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental selecionadas da BNCC

Número da Competência na BNCC	Competência específica
2.	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3.	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
5.	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6.	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Quadro 2 – Competências específicas de matemática para o Ensino Médio selecionadas da BNCC

Número da Competência na BNCC	Competência específica
1.	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
3.	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4.	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5.	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: BRASIL (2018).

A BNCC propõe a divisão do ensino da Matemática nas seguintes cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística, tanto para o ensino Fundamental, quanto para o ensino médio. Em relação às unidades no Ensino fundamental, destacaremos alguns pontos indicados para o ensino nos anos iniciais e nos anos finais que podem ser desenvolvidos com a utilização da geometria fractal.

A BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p. 268)

Quadro 3 – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas da BNCC

Unidade	Atividades desenvolvidas (anos iniciais)	Atividades desenvolvidas (anos finais)
Números	1. Resolução de problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações. 2. Argumentação e justificativa dos procedimentos utilizados para a resolução e avaliação da plausibilidade dos resultados encontrados. 3. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras.	1. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais.
Álgebra	1. As ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. 2. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação.	1. Compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. 2. Estabelecer conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos.

Geometria	1. Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. 2. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. 3. O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica.	1. Devem ser enfatizadas as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. 2. Reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo. 3. Aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica
Grandezas e medidas	1. Resolver problemas oriundos de situações cotidianas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos) e capacidade e volume (de sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, recorrendo, quando necessário, a transformações entre unidades de medida padronizadas mais usuais.	1. Reconhecer comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais. 2. Determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, e as de volumes de prismas e de cilindros.
Probabilidade e estatística	1. Verbalizar, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral.	1. aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. 2. Os problemas de contagem, devem inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os

		casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. 3. Resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica.
--	--	---

Fonte: BRASIL (2018).

Em relação às Competências Específicas selecionadas no que se refere ao Ensino Médio, a BNCC determina habilidades indicadas para o desenvolvimento das mesmas, sendo assim, fizemos uma seleção de habilidades que podem ser construídas com a utilização da Geometria Fractal, relacionadas aos números das suas respectivas competências específicas.

Quadro 4 – Habilidades relacionadas às competências específicas para o Ensino Médio selecionadas da BNCC

Número da Competência na BNCC	Habilidades selecionadas
1.	(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais , construções civis, obras de arte, entre outras).
3.	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a

	variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
4.	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

5.	(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
----	--

Fonte: BRASIL (2018).

6.1.2 Análise dos Currículos de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco

Baseados na BNCC e nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco, foram desenvolvidos os Currículos de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco. A partir da análise dos mesmos, forneceremos uma seleção fundamentada no Organizador Curricular dos Parâmetros Curriculares de 2019 (mais recente), buscando fornecer nas Unidades Temáticas (as 5 provenientes da BNCC) de todos os anos do Ensino Fundamental e Médio, os Objetos de Conhecimento e as Habilidades (especificamente determinadas em Pernambuco) onde pode ser encontrada a presença dos conteúdos próprios da Geometria Fractal ou de conteúdos que possam ser abordados através da utilização da mesma. Os quadros contendo estas análises estarão dispostos na seção de apêndices.

6.1.3 Reflexões sobre as pesquisas realizadas

Em todos os materiais analisados, a pesquisa sobre os termos “Geometria Fractal”, “fractais” ou “fractal” resulta em pouquíssimos resultados. Na BNCC é encontrado o termo “fractais” apenas **duas** vezes, porém o texto onde se encontra é o mesmo – a descrição da Habilidade (EM13MAT105).

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p. 533, 545)

Tal Habilidade é citada pela primeira vez por fazer parte da Competência Específica 1 na parte do material que se refere à “Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio: Competências específicas e Habilidades”. Pela segunda vez a Habilidade é citada em “Considerações sobre a organização curricular” por estar disposta na unidade de “Geometria e Medidas”. Isso nos mostra que a Base Nacional Curricular Comum ainda não prioriza o ensino dessa geometria ou não percebe as possibilidades de utilização da mesma.

Porém, em cada um dos quadros apresentados buscamos mostrar que a Geometria Fractal poderia ser utilizada de alguma forma, sendo por exemplo, uma **ferramenta** do ensino através da qual pode ser desenvolvido aquele conteúdo, habilidade ou competência determinado no quadro (os elementos triangulares e quadrados presentes nos fractais Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski poderiam, por exemplo, ser utilizados em situações de contagem, servindo de espaço amostral para diversas situações, ainda mais por serem estruturas que aumentam ou diminuem a sua quantidade dependendo do nível de iterações). A Geometria Fractal poderia também ser tratada como **área do conhecimento**, que já possui conceitos e propriedades que são consequências da utilização de conteúdos, processos e habilidades da matemática como instrumento para si e que podem ser exemplificados por meio dela (como por exemplo, o processo de construção do Triângulo de Sierpinski pode ser demonstrado para apresentar a utilização da divisão do lado de um triângulo equilátero em partes iguais por meio do seu ponto médio com uma finalidade prática, determinar a formação dos próximos triângulos da estrutura).

Na pesquisa feita no Currículo de Pernambuco do Ensino Fundamental, **não se encontra** citação dos termos “Geometria Fractal”, “fractais” ou “fractal” na área de Matemática. Já a análise feita do Currículo de Pernambuco do Ensino Médio, a busca pelos termos gera o total de **11** correspondências, sendo 3 delas na determinação de “Habilidades da Área BNCC”, “Habilidades Específicas do Componente” e “Objetos de Conhecimento” do 3º Ano do Ensino Médio, e estão destacadas no apêndice J, em cinza. As 8 citações restantes se encontram num quadro determinado para uma “Trilha”, um plano curricular proposto pelo material com temáticas específicas que buscam dialogar com experiências da vida de cada um dos alunos. A seguir, mostraremos um quadro com algumas informações da trilha específica e das suas citações à Geometria Fractal.

A partir da Reforma do Ensino Médio (2017), apresenta-se, para os estudantes, a possibilidade da escolha como uma estratégia de flexibilização do currículo e de superação do currículo único que marcou a educação brasileira nas últimas décadas. Escolhas essas que serão feitas a partir das experiências de cada um em sua vida escolar ou extraescolar; das expectativas pessoais e profissionais; da sua visão de mundo; dos seus projetos de vida. Embora a lei determine a elaboração dos itinerários formativos pelos sistemas de ensino, não estabelece que essa escolha é única e determinante para o percurso acadêmico dos jovens. Cabe aos sistemas a normatização de mudanças de rumos ao longo do Ensino Médio.

Nesse sentido, foram elaboradas Trilhas para compor os Itinerários Formativos, a partir de campos de discussão de ampla relevância social e, considerando que cada uma representa uma discussão histórica pertinente, visando não incorrer na efemeridade de preocupações pontuais e passageiras. As temáticas apresentadas para os itinerários se propõem a ter ampla relação com as discussões de cada tempo, mesmo a partir de possíveis e necessárias mudanças sociais, políticas ou econômicas, uma vez que representam condições fundamentais da convivência humana nos diversos países e momentos históricos. (PERNAMBUCO, 2019, p. 81)

Quadro 5 – Trilha: MatematizAÇÃO, Design e Criatividade (MATEMÁTICA E LINGUAGENS)

TRILHA INTEGRADA - LINGUAGENS E MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS
Trilha: MatematizAÇÃO, Design e Criatividade
Perfil do egresso: Realizar uma leitura de mundo sensível, articulada, concreta e abstrata, favorecendo e ampliando o seu potencial criativo e inovador, a partir de estudos e práticas do universo das linguagens e da matemática, se utilizando de produções de imagens, formas, sons, sólidos e de expressões corporais e artísticas sob diversas perspectivas.
Cursos Superiores Relacionados
Economia, Marketing, Design, Engenharia de Telecomunicações, Jornalismo, Arte (cênica e visual), Jornalismo, Matemática, entre outros relacionados
3º Ano – 2º Semestre

Unidade Temática: IDEIAS E INOVAÇÃO				
Objetivo do Semestre: Propor e testar estratégias para resolução de questões (problemas) socioculturais e ambientais, através de ações e projetos individuais e/ou coletivos de maneira criativa, ética, inovadora e responsável, comunicando suas produções de maneira diversa, em ambientes digitais ou não.				
PERÍODO	UNIDADE CURRICULAR OBRIGATÓRIA	EIXO ESTRUTURANTE	HABILIDADE DA UNIDADE CURRICULAR	TÓPICOS
3º ano 2º semestre	Fractais (40h) Formação docente: Matemática	Investigação Científica	(EMIFMAT01PE) Investigar e analisar situações-problema, selecionando e determinando conhecimentos matemáticos, associados aos fractais contribuindo com a leitura de uma dada situação, identificando e elaborando modelos para sua representação	Aplicação da Geometria Fractal e dos conhecimentos tais como segmentos de reta, ângulos, sequência numérica, potência, padrões e regularidades, relação algébrica e geométrica, visualização 3D, investigação de padronização fractal, padrões geométricos, cultura fractal, números complexos. Utilização das tecnologias digitais como softwares ou aplicativos voltados para a Geometria Fractal.
		Processos Criativos	(EMIFMAT04PE) Reconhecer produtos e/ou processos criativos por meio de fruição, vivências e reflexão crítica na produção dos conhecimentos relacionados à Geometria Fractal e sua aplicação no desenvolvimento de processos tecnológicos diversos.	
		Mediação e Intervenção Sociocultural	(EMIFMAT07PE) Identificar e explicar questões socioculturais e ambientais aplicando conhecimentos e habilidades da Geometria Fractal para avaliar e tomar decisões em relação ao que foi observado.	

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

Por meio deste quadro e da pesquisa feita, podemos concluir que de fato, a Geometria Fractal ainda não possui destaque dentro do ensino da matemática, sendo referenciada em casos muito pontuais, tanto na BNCC, quanto nos Currículos observados. Porém, enxergamos que a participação desta geometria pode ser muito mais frequente e proveitosa no ensino da Matemática, e por conta disso, buscamos também analisar trabalhos acadêmicos que trazem propostas educacionais para a implementação da mesma, trazendo reflexões sobre cada material observado.

6.2 Análise de artigos que propõem a utilização da Geometria Fractal no Ensino Básico

Alguns trabalhos foram desenvolvidos com o intuito de trazer propostas para se utilizar a Geometria Fractal no ensino básico. Através da utilização da Geometria Dinâmica ou até mesmo de processos manuais, autores propõem o uso de determinadas propostas didáticas que buscam, ao seu ver, enriquecer o ensino da Matemática e Geometria por meio do desenvolvimento, manipulação e análise de estruturas fractais.

Por meio de pesquisa bibliográfica, foi possível ter acesso aos trabalhos desenvolvido pelos autores Andrios Bemfica e Cassiana Alves (**Fractais: progressão e série geométrica**), Regis Alessandro Fuzzo, Talita Secorum dos Santos e Luciano Ferreira (**Fractais e o GeoGebra: Construindo a Curva de Koch**), Sandra Eliza Vielmo e Francéli Dalberto (**A Matemática Fractal e o GeoGebra no Ensino de Matemática**) e João Cesar Maciel Valim e Viviane Colucci (**Geometria Fractal No Ensino Fundamental e Médio**). Neste capítulo faremos análises de cada um dos materiais encontrados, no que se refere às contribuições para o estudo dos fractais (como cada autor traz a sua pesquisa sobre os fractais utilizados por ele) e às possibilidades apresentadas pelos autores para a utilização de fractais na educação (como cada autor justifica as abordagens que propõe). Cada trabalho será analisado individualmente a partir de observações, reflexões e referências apresentadas.

6.2.1 *Fractais: progressão e série geométrica (Andrios Bemfica, Cassiana Alves, 2010)*

Este trabalho de 2010 foi publicado na revista Modelos da Faculdade Cenecista de Osório (FACOS) em 2011, uma publicação online do curso de Licenciatura em Matemática. Teve como objetivos: apresentar o que são os fractais; mostrar o Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski e o Conjunto de Cantor; realizar o cálculo da área e do “volume” do Triângulo de Sierpinski e o cálculo da área do Tapete de Sierpinski após n iterações, utilizando os conceitos de progressões e séries geométricas oriundos do cálculo, geometria e da álgebra; e abordar o tema não somente como uma curiosidade geométrica, mas discutir as possibilidades do uso deste como uma metodologia para a matemática do ensino médio (BEMFICA E ALVES, 2010). Foi desenvolvido por Andrios Bemfica e Cassiana Alves, ambos graduados em Licenciatura Matemática na FACOS.

O trabalho se inicia afirmando que na metodologia do ensino da matemática, os fractais ainda são pouco utilizados e podem ser aplicados nos conteúdos de progressões geométricas, no ensino médio (BEMFICA E ALVES, 2010). Os autores trazem a definição de fractal introduzida por Mandelbrot e afirmam que os fractais podem ser divididos em duas categorias: “os fractais **geométricos**, que repetem continuamente um modelo padrão, e os **aleatórios** que são feitos através dos computadores” (Bemfica e Alves, 2010, p.7). O que é uma divisão bastante confusa, visto que os fractais geométricos justamente por repetirem continuamente um modelo padrão é que podem ser feitos com facilidade através de computadores e também por meio do advento da computação é que foram se avançando os estudos sobre a geometria fractal.

Já em relação aos fractais aleatórios, pode até ser afirmado que eles podem ser feitos através dos computadores, mas não é isso que os define. Segundo Sakamoto e Ávilla (2014), por exemplo, “quando o todo é uma ampliação perfeita de uma parte conclui-se que o fractal é geométrico” (p. 4) e “quando o todo é uma ampliação semelhante a uma parte define-se que o fractal é aleatório ou natural” (p. 5), ou seja, o que difere um fractal geométrico para um fractal natural deveria ser a relação entre o todo e as partes componentes de um fractal, e não fatores como a possibilidade de serem feitos por computadores ou a repetição de um modelo padrão, como afirma o trabalho de Bemfica e Alves.

Os autores também apontam que os fractais apresentam as características: “auto-semelhança [sic], dimensionalidade e complexidade infinita” (Bemfica e Alves,

2010, p. 7), porém, só tratam sobre a autossimilaridade, não elaborando sobre os outros temas.

Após isso, falam sobre Teoria do Caos e relacionam a temática aos fractais afirmando que:

Um exemplo tradicional de caos no mundo cotidiano, e também conhecido como um provérbio é o “efeito borboleta”, que diz que: “uma borboleta bate as asas na China e causará um furacão na América”, por mais absurdo que pareça esta metáfora, os fenômenos climáticos são de comportamento caótico e de difícil previsibilidade. E também podemos citar as formas do litoral e das ilhas, umas são alongadas, outras circulares, diferem de tamanho, mas podem ser de formas análogas. São como fractais, a sua formação deve-se a um conjunto de forças complexas que resultaram num formato padrão, pois se observarmos a natureza não veremos ilhas quadradas. (BEMFICA E ALVES, 2010, p. 8)

Uma colocação no mínimo estranha, pois não relaciona de forma consistente a Teoria do Caos e a Geometria Fractal. Concordamos, que de fato, esta relação existe, porém fica muito mais clara no trabalho desenvolvido por Ruy Madsen Barbosa (2002), que afirma que a ciência chamada CAOS surgiu a partir do interesse de diversas áreas como biologia, física, economia e meteorologia em questões da natureza, buscando dar enfoques adequados às suas complexidades. Os estudos sobre a Geometria Fractal se desenvolveram principalmente pelo aprimoramento das técnicas computacionais, então auxiliaram bastante a trazer melhores representações visuais, mais aproximadas e adequadas para formas na natureza que possuem bastante irregularidade e caos (mares, ilhas, plantas, nuvens, montanhas, etc) que antes eram simplificadas por formas da geometria euclidiana (triângulos, cones, círculos, esferas, etc). Segundo o autor, “os fractais revolucionaram a geração e reprodução de imagens” (p.10), além disso, o autor também afirma que:

Essa ciência trouxe consigo o ver ordem e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o caótico. Entretanto, nota-se que o Caos colocou elos entre temas não relacionados, justamente pelas suas irregularidades. Seus cientistas, de áreas diversas, tiveram dificuldades e desânimo até mesmo para publicar, para colocar suas ideias e resultados de forma publicável. Temas como desordem na atmosfera, turbulência nos fluidos, variação populacional de espécies, oscilações do coração e cérebro, interligações microscópicas de vasos sanguíneos, ramificações alveolares, cotações da bolsa, forma das nuvens, relâmpagos, aglomerações estelares etc. eram estudados buscando se então ligações entre diferentes tipos de irregularidades:

e surpreendentes ordens no caos foram descobertas. (BARBOSA, 2002, p. 10,)

Após tratar um pouco mais sobre a definição da Geometria Fractal, Bemfica e Alves se iniciam a falar sobre fractais como metodologia de ensino. Eles defendem que essa geometria tem um campo vasto de aplicação dos conceitos matemáticos em suas diversas áreas como álgebra, cálculo, geometria plana e espacial e progressões, e que cabe ao educador inserir este tema em suas aulas e cativar o aluno no aprendizado de conceitos, utilizando dos recursos disponíveis na escola e os conteúdos curriculares. Eles também apontam que as tecnologias no ensino são ferramentas que auxiliam tanto os alunos quanto os professores, e que diferentes formas de se abordar conteúdos tornam as aulas de matemática mais atraentes e produtivas, defendendo a formação de estudantes que saibam reconhecer, relacionar, questionar e criar, e não apenas calcular, escrever e saber a capital de determinado país. É também afirmado que no campo extenso das aplicações dos fractais “é necessário que o professor perceba a potencialidade que existe nesta área da geometria, podendo assim trabalhar conceitos de simetria, relacionando arte com matemática.” (BEMFICA E ALVES, 2010, p.11).

Nesse sentido, podemos afirmar que esta área da geometria passa a ser uma importante e eficaz metodologia de ensino, visto que possibilita a abordagem e aplicação de vários conceitos, diversificando assim a prática do professor. Propor uma aula com situações novas, onde o educando possa descobrir e fazer relações entre o que visualiza e o que estuda, torna o acontecimento em sala de aula favorável a aprendizagem. Esta abordagem possibilitará ao educando a visualização do conteúdo trabalhado, não ficando apenas na formalidade que é própria da disciplina de matemática. (BEMFICA E ALVES, 2010, p. 11)

Após esses apontamentos sobre metodologia, os autores começam a tratar dos fractais “Triângulo de Sierpinski”, “Pirâmide de Sierpinski”, “Tapete de Sierpinski”, “Conjunto de Cantor” e “Curva de Koch” trazendo descrições sobre os mesmos, características e análises matemáticas de alguns, tratando sobre áreas, volumes, quantidade de iterações e contagem de partes retiradas. Vale salientar que algumas vezes, inclusive desde o início do trabalho, os autores falam sobre “**volume** do Triângulo de Sierpinski”, algo que não faz sentido, já que triângulos não apresentam volume, porém interpreta-se que os autores se referem ao volume da Pirâmide de Sierpinski.

os mais novos, usando o mouse, sintam um a possibilidade da coloração da alteração das formas. Os usuários avançados podem projetar seus próprios manipuladores da forma usando um editor gráfico e/ou umas descrições Matemáticas. Estes manipuladores podem então ser aplicados iterativos para criar testes padrões fractal. Shapari oferece algo para apenas aproximadamente todos. Uma exploração clara de muitos conceitos matemáticos incluindo a forma, o tamanho, a contagem, a multiplicação, a simetria, as transformações, a periodicidade, a convergência, o crescimento exponencial, a recursividade e a geometria fractal. (BEMFICA E ALVES, 2010, p. 23, 24)

O trabalho de Bemfica e Alves inegavelmente apresenta informações de muita importância para as reflexões acerca da relação dos fractais com a matemática, por conta disso, será retomado e explicitado no capítulo 6 do nosso trabalho. Porém, ao final do artigo não é possível identificar quais seriam as propostas dos autores para a utilização dos fractais no ensino da matemática. É apresentado o Shapari, mas não são mostrados exemplos de utilização do mesmo, apenas são indicadas funções e conteúdos matemáticos que este software poderia ser utilizado para abordar. Com o devido aprofundamento e esclarecimento de dados, pretendemos contribuir para que o trabalho possa ser enriquecido e que sejam indicadas possibilidades de utilização da Geometria Fractal no Ensino Básico por meio do Shapari.

6.2.2 Fractais e o GeoGebra: Construindo a Curva de Koch (Fuzzo et al, 2011)

O artigo foi publicado em 2011, na 13ª Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), em Recife, Pernambuco por Regis Alessandro Fuzzo, Talita Secorum dos Santos e Luciano Ferreira, os três da Universidade Estadual do Paraná. Tem por objetivo propor o ensino da Geometria Fractal em um ambiente de geometria dinâmica auxiliado pelo software GeoGebra e surgiu da observação dos autores acerca da falta de atividades relacionadas ao ensino de Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica do estado do Paraná, mesmo sendo este conteúdo presente nas Diretrizes Curriculares Educacionais (DCE) do estado. Por meio do trabalho, propõem uma atividade de construção da Curva de Koch utilizando o GeoGebra e a aplicação de uma ferramenta do software que permite aplicar a recursividade nessa estrutura e uma análise das peculiaridades desse Fractal. Os autores defendem que desse modo se pode permitir aos alunos do Ensino Médio uma aprendizagem de alguns conceitos da Geometria Euclidiana, da Geometria Fractal e relacioná-las à Álgebra (FUZZO et al, 2011).

O trabalho se inicia a partir das análises das Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática do Estado do Paraná (2008), e os autores identificam que é sugerida a inserção da Geometria Fractal em sala de aula tanto no Ensino Fundamental, quanto no Médio por conta das Diretrizes se referirem a “noções básicas de Geometria Não-euclidiana” como parte dos desdobramentos do conteúdo estruturante das Geometrias (FUZZO et al, 2011). Além disso, analisando também os Parâmetros Curriculares – PCN (2002), os autores concluem que também é sugerido que na abordagem dos conteúdos de geometria, sejam mostrados diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas, com linguagens e raciocínios diferentes dos aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana (FUZZO et al, 2011).

Esses tipos de análise são necessários para justificar a utilização da Geometria Fractal no ensino básico, visto que ela se encontra classificada como Geometria Não-euclidiana, e inclusive abrem margem para a inserção de outras geometrias deste mesmo conjunto, como por exemplo a geometria hiperbólica, geometria do táxi e geometria esférica, temáticas pouco abordadas porém muito interessantes para serem trazidas à sala de aula, visto que trazem diferentes formas para se pensar geometricamente. É pertinente frisar que não é defendida uma retirada da Geometria Euclidiana do ensino, mas sim a possibilidade de mostrar outras formas de se ver e formular o pensamento geométrico, que já este começou a ser desenvolvido a partir da utilização da Geometria Euclidiana. É interessante então debater com os alunos sobre novos tipos de pensamento geométrico, e sobre o ensino da Geometria Fractal os autores defendem a análise por outra perspectiva que não seja apenas devido “ao fato dela estar inserida nas DCE, sendo vista apenas como uma obrigação, mas também como um saber escolar que desperte o interesse do aluno para um novo conhecimento diferente daqueles tradicionalmente ensinados” (FUZZO et al, 2011, p. 3).

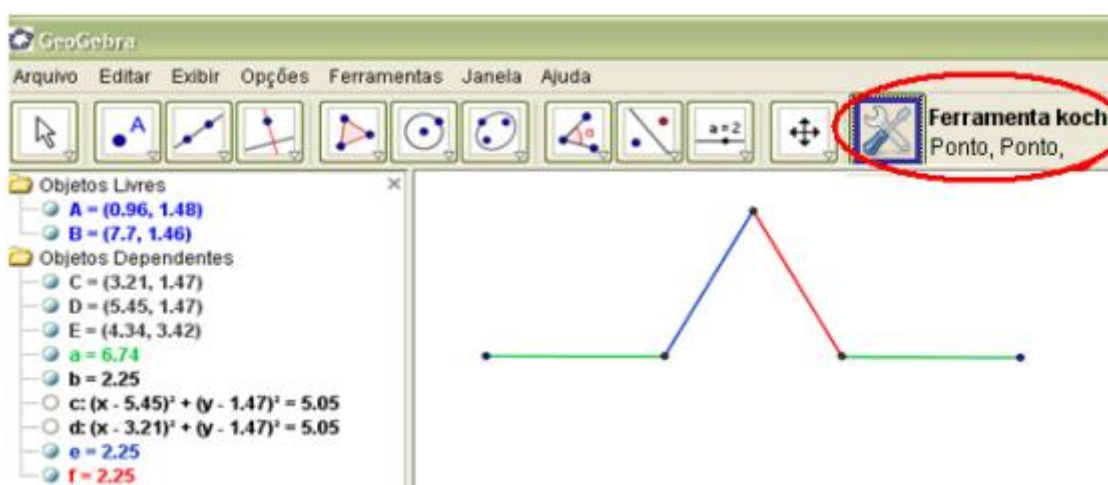
Os autores destacam a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) como facilitadores do processo de ensino e aprendizagem, e escolhem o GeoGebra como ferramenta digital para auxiliar tanto o ensino da Geometria Fractal, quanto a Geometria Euclidiana por conta da gratuidade deste software e da sua acessibilidade na grande parte das escolas da rede estadual do Paraná. Também salientam uma iniciativa de promover a inclusão digital nas escolas

do paraná chamada Programa Paraná Digital, feita pelo Governo do Estado (FUZZO et al, 2011).

Os autores apontam que as DCE (2008) informam a importância de se trabalhar a Geometria Fractal no Ensino Médio, e segundo estas diretrizes podem ser explorados na geometria dos fractais: o floco de neve, a curva de Koch, o triângulo e o tapete de Sierpinski, “conduzindo o aluno a refletir e observar o senso est tico presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades” (FUZZO et al, 2011, p. 3 apud DCE, 2008, p. 57). Segundo os autores, as TIC trazem dinamismo às representações de conceitos matemáticos e isso é refletido positivamente no processo de aprendizagem e concretizações mentais, e ao introduzir o estudo da Geometria Fractal através do GeoGebra, “os alunos têm, por meio dele, a oportunidade de fazerem conexões tanto dentro da própria Matemática e o mundo da Natureza e do Homem, e de explorarem a Matemática por caminhos não-analíticos” (FUZZO et al, 2011, p. 3).

A construção da Curva de Koch por meio do GeoGebra   então mostrada pelos autores, e   destacada por eles a possibilidade da criação de uma ferramenta no software com a finalidade de serem feitas iterações nos segmentos de reta seguindo as regras determinadas pelo processo recursivo desta curva.

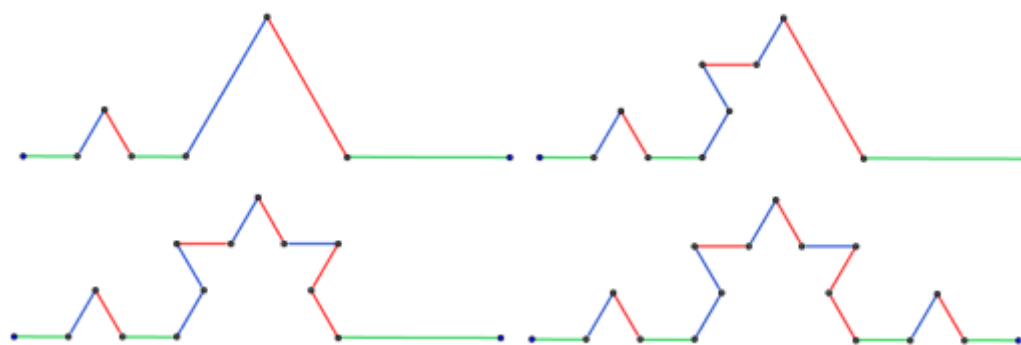
Figura 38 – Construção feita pelos autores da Curva de Koch (nível 1) com destaque para a “Ferramenta Koch” criada.



Fonte: FUZZO et al (2011, p. 4).

A ferramenta desenvolvida pelos autores funciona a partir do clique nos pontos extremos (começando pelo ponto mais à esquerda) de cada um dos segmentos constituintes da curva, que são os objetos de entrada para a ferramenta. O processo de geração do nível 2 do fractal é mostrado na imagem a seguir:

Figura 39 – Construção do nível 2 da Curva de Koch utilizando a “Ferramenta Koch”



Fonte: FUZZO et al (2011, p. 5).

A figura no canto superior esquerdo mostra o surgimento dos primeiros segmentos menores em azul e vermelho a partir da utilização da ferramenta no segmento em verde da esquerda na figura 39. A seguir, a ferramenta foi utilizada no segmento maior em azul, que gerou novos segmentos menores em azul e vermelho, como mostra a figura no canto superior direito. O processo é repetido para os segmentos maiores restantes em vermelho e verde, como é mostrado na figura do canto inferior esquerdo e na figura do canto inferior direito, respectivamente, obtendo então a Curva de Koch no nível 2. Porém, todo esse processo, desde a criação do primeiro nível da curva, não é explicado pelos autores no material, necessitando então de esclarecimento.

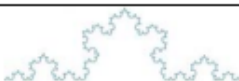
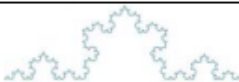
A utilização desta ferramenta é uma atividade que, segundo os autores, permite explorar algumas características fractais da Curva de Koch: a estrutura fina (detalhamento infinito), a auto-semelhança (formação de réplicas menores através da sua divisão), a simplicidade na lei de formação, e o processo repetitivo de construção (FUZZO et al, 2011). Entendemos que existem alguns fractais cuja lei de formação é simples, e isso é o caso da Curva de Koch, mas é necessário afirmar que esta característica não é algo obrigatório para as estruturas fractais, cujas leis de formação podem ser mais elaboradas dependendo do comportamento do fractal.

Acreditamos que os autores citaram algumas das características dos fractais indicadas por Denise Pallesi, que por sua vez afirma que, no livro *Techniques in Fractal Geometry*, Kenneth Falconer determina que um fractal geralmente possui todas ou a maioria das características a seguir: estrutura fina, auto-afinidade, **simplicidade na lei de formação**, difícil descrição e dimensão fractal (PALLESI, 2007 apud FALCONER, 1997). Quando trata da simplicidade na lei de formação, Pallesi (2007) afirma que:

A lei de formação do fractal é o processo que é repetido a cada iteração. De fato, geralmente esse procedimento a ser repetido é bastante simples. No caso do conjunto de Cantor [...], a lei de formação é: divide-se cada segmento em 3 partes, e retira-se o terço médio. (PALLESI, 2007, p. 11)

É também mostrada pelos autores a possibilidade da construção de uma tabela, proposta por Pallesi (2007), a partir da análise algébrica do número de segmentos, comprimento de cada segmento e comprimento total da curva. Segundo os autores, por meio da proposta de ensino feita, buscou-se divulgar o ensino da Geometria Fractal com o auxílio do GeoGebra, sendo possível trabalhar conceitos de “triângulos, funções, aplicações de progressões geométricas, noções intuitivas de limites no infinito, cálculos de área, noções de perímetro de figuras complexas e com ‘buracos’ e utilização de tabelas.” (FUZZO et al, 2011, p.11, 12).

Quadro 6 – Características da Curva de Koch analisadas por Pallesi (2007)

	Nível	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
	0	1	ℓ	ℓ
	1	4	$\frac{\ell}{3}$	$4\frac{\ell}{3}$
	2	4^2	$\frac{\ell}{3^2}$	$4^2\frac{\ell}{3^2}$
	3	4^3	$\frac{\ell}{3^3}$	$4^3\frac{\ell}{3^3}$
	4	4^4	$\frac{\ell}{3^4}$	$4^4\frac{\ell}{3^4}$
	...	...	...	...
	N	4^n	$\frac{\ell}{3^n}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \ell$

Fonte: PALLES (2007, p. 15).

Concordamos que todos estes conceitos podem ser trabalhados por meio da utilização do GeoGebra, e o trabalho dos autores explorando a construção da Curva de Koch fornece aos professores uma ótima estratégia para a sala de aula. Porém, o processo da criação da ferramenta no GeoGebra e sua utilização para a criação da curva a partir do nível 0 de um segmento de reta são pontos que não foram esclarecidos, ou seja, caso um professor queira se utilizar da ferramenta desenvolvida no trabalho, o mesmo deveria recriá-la. Vista então a importância desta ferramenta e das suas aplicações, no próximo capítulo mostraremos todo o processo de desenvolvimento da mesma. Também será feita a reflexão sobre como a criação e utilização desta ferramenta pode auxiliar professores de matemática e alunos do ensino básico.

6.2.3 A Matemática Fractal e o GeoGebra no Ensino de Matemática (Vielmo e Dalberto, 2013)

O trabalho foi publicado em 2013, no VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), por meio da Sociedad de Educación Matemática Uruguay (SEMUR), em Montevideu, Uruguai, e foi desenvolvido por Sandra Eliza Vielmo e Francéli Dalberto, da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM. Tem por objetivo apresentar atividades computacionais e matemáticas desenvolvidas utilizando o GeoGebra e relacionadas aos fractais: Tapete de Sierpinski, Árvore Pitagórica e Sequência de Fibonacci. As atividades propostas serão desenvolvidas por meio de uma oficina, e os autores objetivam por meio disso contribuir no desenvolvimento de novas práticas e experiências pedagógicas, melhorando assim a qualidade do processo de ensino e aprendizagem nos vários níveis de ensino (VIELMO E DALBERTO, 2013).

A partir destas construções, serão propostas atividades matemáticas que propiciem escrever fórmulas gerais, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, trabalhar com progressões geométricas, funções exponencial e logarítmica, bem como seqüências de forma geral, somatórios e convergência. (VIELMO E DALBERTO, 2013, p. 923)

Os autores caracterizam os fractais como objetos autossimilares e apontam que os estudos de Mandelbrot trouxeram consigo a possibilidade de se ver ordens e

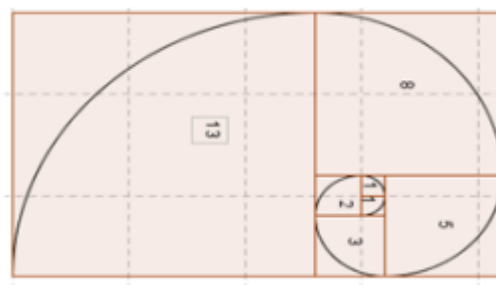
padrões onde anteriormente só se observava o irregular, aleatório e imprevisível, podendo então explicar fenômenos da natureza e estruturas do corpo humano. Além disso, também afirmam que as propriedades dos fractais estão sendo empregadas de diversas formas atualmente, como a construção de filtros, superfícies seletivas em frequência, circuitos sintonizados e antenas, servindo assim para a telefonia celular e aplicações militares (VIELMO E DALBERTO, 2013). Também é defendido por eles o estudo dos fractais no ensino de Matemática na Educação Básica, de acordo com a ideia “de que estamos inseridos em um mundo cercado por imagens, sons e movimentos que englobam a natureza, a informática, as relações humanas e suas organizações.” (VIELMO; DALBERTO, 2013, p. 924, apud BAIER, 2005)

Por meio dos fractais, conexões com várias ciências podem ser realizadas; deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza podem ser minimizadas; o despertar e desenvolver do senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais é possibilitado; e também é possível provocar a sensação de surpresa nos alunos diante da ordem na desordem. Além disso, [...] a difusão e acesso às tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização têm ampliado as formas de se estudar fractais na sala de aula. (VIELMO E DALBERTO, 2013, p. 924 apud BARBOSA, 2005)

É defendido pelos autores o uso da Geometria Dinâmica (GD), pois os padrões dos fractais “ganham vida” assim, ou seja, deixam de ser estáticos quando potencializados pelos recursos dinâmicos ao serem feitas iterações ao decorrer dos níveis em uma única construção (VIELMO E DALBERTO, 2013). Ao longo do trabalho são apresentadas características, definições e reflexões acerca dos fractais: Espiral de Fibonacci, Árvore Pitagórica e Tapete de Sierpinski, intercaladas por descrições de atividades de construção destes fractais no GeoGebra, questões a serem perguntadas na sala de aula (no caso da Árvore Pitagórica) e análises de elementos geométricos e matemáticos observados no Tapete de Sierpinski.

A atividade 1 consiste na construção da Espiral de Fibonacci no GeoGebra, e embora os autores afirmem que a estrutura pode ser obtida “ao associar os números da sequência de Fibonacci às medidas dos lados de quadrados, dispostos de maneira apropriada” (VIELMO E DALBERTO, 2013, p. 925), a construção apresentada por meio da imagem a seguir não é realizada por meio de quadrados, e sim, de retângulos.

Figura 40– Construção da Espiral de Fibonacci no GeoGebra por Vielmo e Dalberto

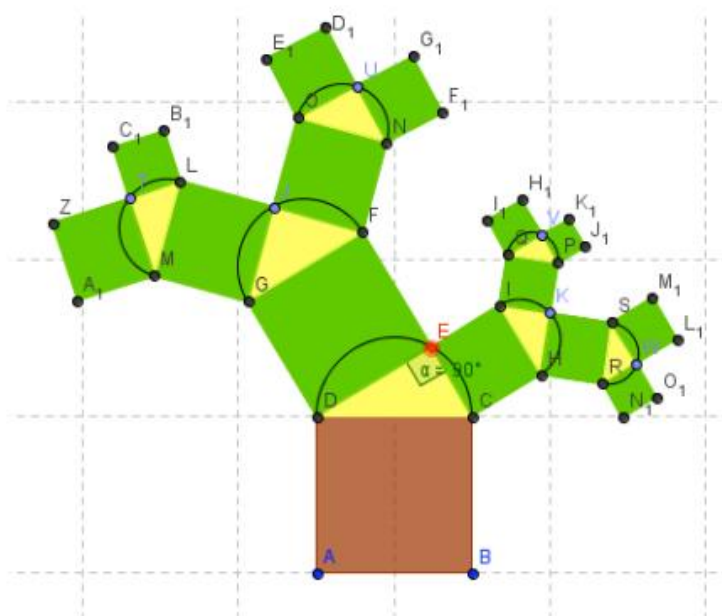


Fonte: VIELMO E DALBERTO (2013, p. 925).

A atividade 2 consiste na construção da Árvore Pitagórica no GeoGebra, por meio da seguinte orientação e figura a seguir:

A partir de um triângulo retângulo, é construído um quadrado cuja medida de seu lado é a medida da hipotenusa. Da mesma forma, em cada um dos catetos do triângulo é construído um quadrado. Este processo é realizado sucessivamente e sua construção no GeoGebra é mostrada na figura [...]. Observamos que o ponto E, vértice oposto a hipotenusa do triângulo retângulo do nível 0, pode ser movido alterando as medidas dos catetos do triângulo retângulo. (VIELMO E DALBERTO, 2013, p. 926)

Figura 41 – Construção da Árvore Pitagórica no GeoGebra por Vielmo e Dalberto



Fonte: VIELMO E DALBERTO (2013, p. 926).

A atividade 3 é relacionada à Árvore Pitagórica e consiste em um questionário aplicado a partir da atividade 2 a fim de estabelecer relações matemáticas decorrentes do processo iterativo do fractal obtido, a saber:

- i) Quantos quadrados existem em cada nível?
 - ii) Qual é o número total de quadrados ao final do n -ésimo nível?
 - iii) Qual é o comprimento do lado dos quadrados em cada nível?
 - iv) Qual é a área de cada quadrado em cada nível?
 - v) Qual é a área total dos quadrados ao final do n -ésimo nível?
- (VIELMO E DALBERTO, 2013, p. 926)

A atividade 4 também é relacionada à Árvore Pitagórica e é uma pergunta que surge da análise dos diferentes níveis neste fractal.

Nesta atividade cada nível consiste na figura representativa do Teorema de Pitágoras, formada por um triângulo retângulo e os três quadrados representados sobre os lados, onde alguns níveis estão apresentados na figura 3. Qual é o número de figuras que representam o Teorema de Pitágoras no n -ésimo nível? (VIELMO E DALBERTO, 2013, p. 926)

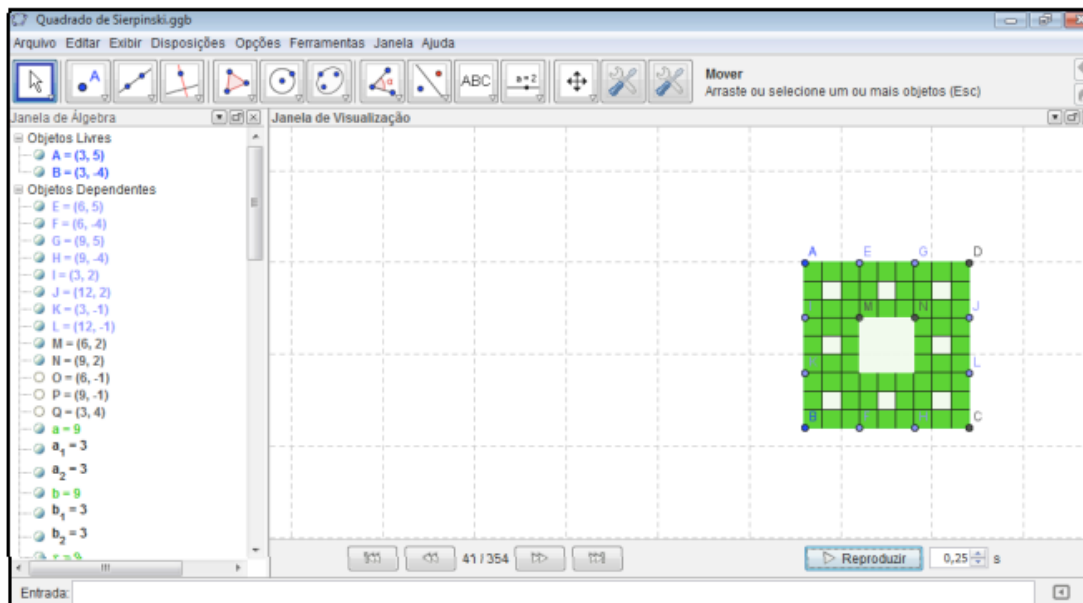
Figura 42 – Níveis da Árvore Pitagórica



Fonte: VIELMO E DALBERTO (2013, p. 927).

A atividade 5 consiste na construção do Tapete de Sierpinski no GeoGebra. O processo descrito pelos autores é que, partindo de um quadrado, a cada nível iterativo, este quadrado é dividido em nove quadrados congruentes e eliminado o quadrado central. (VIELMO E DALBERTO, 2013)

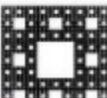
Figura 43 – Construção do Tapete de Sierpinski feita por Vielmo e Dalberto



Fonte: VIELMO E DALBERTO (2013, p. 928).

A partir desta construção, se propõe uma análise de variáveis no Tapete de Sierpinski. Os autores então apresentam um quadro contendo representações visuais de diferentes níveis de iteração, números de quadrados, comprimento do lado do quadrado e área dos quadrados em cada nível. (VIELMO E DALBERTO, 2013)

Quadro 7 – Processo iterativo do Tapete de Sierpinski por Vielmo e Dalberto

Iteração	Nível	Número de quadrados	Comprimento do lado	Área
	0	$8^0=1$	L	$A_0 = L^2$
	1	$8^1=8$	$L\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$A_0\left(\frac{1}{9}\right)$
	2	$8^2 = 64$	$L\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$A_0\left(\frac{1}{81}\right)$
∞	∞	∞	∞	∞
	n	8^n	$L\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$A_0\left(\frac{1}{9^n}\right)$

Fonte: VIELMO E DALBERTO (2013, p. 928).

A partir da análise dos dados observados no quadro 7, os autores identificam a formação de sequências numéricas (que descrevem progressões geométricas) nas últimas três colunas (VIELMO E DALBERTO, 2013). É montado então um novo quadro que compara as variáveis “Número de quadrados”, “Comprimento do lado” e “Área” com suas PGs e Razões respectivas.

Quadro 8 – Progressões geométricas decorrentes do processo iterativo por Viemo e Dalberto

Variável	PG	Razão
Número de quadrados	$(1, 8, 64, 512, \dots 8^n, \dots)$	$q = 8$
Comprimento do lado	$\left(L, \frac{L}{3}, \frac{L}{3^2}, \frac{L}{3^3}, \dots, \frac{L}{3^n}, \dots \right)$	$q = \frac{1}{3}$
Área	$\left(A_0, \frac{A_0}{9}, \frac{A_0}{81}, \dots, \frac{A_0}{9^n}, \dots \right)$	$q = \frac{1}{9}$

Fonte: VIELMO E DALBERTO (2013, p. 929).

Por meio da análise do quadro 8, os autores definem, estendendo o caso discreto para o caso contínuo, as seguintes funções, sendo x o número de iterações:

- i) $T(x) = 8^x$, para descrever o número de quadrados;
- ii) $C(x) = L \left(\frac{1}{3} \right)^x$, para descrever o comprimento do lado do quadrado retirado;
- iii) $A_T(x) = A_0 \left(\frac{1}{9} \right)^x$, para descrever a área do quadrado retirado. (VIELMO E DALBERTO, 2013)

Após definirem as funções, os autores levantam as indagações: “qual o número mínimo de iterações necessárias de modo que o número de quadrados seja superior a 64? Ou para que o comprimento do lado seja inferior a 0,1?”. Não se informa, de fato, se essas questões, interpretações e quadros devam ser levados para a sala de aula ou feitos com os alunos e não fica claro, de fato, qual deveria ser a atividade 6.

O material desenvolvido por Viemo e Dalberto aponta um conjunto de várias atividades que podem ser desenvolvidas utilizando a Geometria Dinâmica através do software GeoGebra para integrar a Geometria Fractal ao ensino básico. Porém a forma com que estas atividades são expostas para o leitor não é muito clara, servindo mais como dicas e sugestões do que como de fato, uma série de atividades propostas num modelo de oficina desenvolvido pelos autores. Até mesmo o termo “oficina” só é citado

uma vez no texto todo (no resumo, mais precisamente), e a metodologia por meio da qual essa oficina poderia ser feita não é elucidada pelos autores. Os objetivos que os autores buscam obter com cada atividade não são esclarecidos, ficando o trabalho mais no campo descritivo dos processos a serem realizados e menos no campo da preocupação acerca das habilidades geométricas/matemáticas que aquelas atividades estariam desenvolvendo ou instigando a surgir nos alunos a partir da utilização da Geometria não-euclidiana apresentada.

É inegável a importância do trabalho de Vielmo e Dalberto, porém é necessária uma maior reflexão sobre a contribuição de cada uma das atividades frente ao pensamento geométrico que se quer ser desenvolvido nos alunos a partir da utilização da Geometria Fractal com o GeoGebra. Seguindo a lógica proposta pelos autores, os alunos construiriam diversos fractais com o auxílio da GD, mas é necessário entender o intuito de se propor uma determinada construção, explorando sempre que possível o viés criativo dos alunos. As perguntas feitas em algumas atividades propostas instigam o aluno a estabelecer relações matemáticas observando o processo iterativo dos fractais, mas o que pretende ser observado a partir das respostas dos alunos? E de que forma a construção dos quadros apresentados estaria auxiliando o processo de análise de uma estrutura fractal? No próximo capítulo, então, será feita uma reflexão acerca das possíveis contribuições e habilidades a serem desenvolvidas nos alunos a partir da utilização do material proposto por Vielmo e Dalberto.

6.2.4 Geometria Fractal No Ensino Fundamental e Médio (Valim e Colucci, 2013)

O artigo foi publicado em 2008, na XXII Semana Acadêmica da Matemática, em Cascavel, Paraná, por João Cesar Maciel Valim e Viviane Colucci, ambos da Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Tem por objetivo apresentar propostas de atividades sobre fractais para serem aplicadas em sala de aula com alunos do ensino fundamental e médio. Também é afirmado pelos autores que a inserção dos fractais nestes ensinos colabora com o ensino da matemática, levando os alunos a perceber a aplicação dos elementos da matemática em nosso cotidiano (VALIM E COLUCCI, 2008).

Os autores discutem conceitos sobre fractais (definições, características) e, assim como alguns dos outros trabalhos analisados neste capítulo, reafirmam a

importância da Geometria Fractal para o estudo de formas irregulares da natureza. Após argumentarem sobre a Dimensão Fractal proposta por Mandelbrot, passam a justificar a utilização das atividades que serão propostas mais a frente, bem como a inserção da Geometria no ensino fundamental e médio.

A inserção de fractal nos ensinos fundamental e médio vem colaborar com o ensino da Matemática, preenchendo algumas lacunas que foram deixadas pela geometria euclidiana, principalmente no que diz respeito às formas existentes na natureza, possibilita trabalhar a interdisciplinaridade e o acesso ao computador. Atividades envolvendo fractais possibilitam ao aluno o desenvolvimento do raciocínio - lógico matemático, a integração entre conceitos matemáticos e elementos do cotidiano, desenvolvimento do senso estético, criatividade, entre outras habilidades. (VALIM E COLUCCI, 2008, p. 8, 9)

A primeira atividade proposta pelos autores consiste na construção do “Fractal Triminó”, segundo os autores, ela oportuniza o trabalho com sequências e progressão geométrica, e por meio da aplicação dela os autores objetivam “reconhecer uma sequência numérica, estimar a quantidade de peças em cada iteração, organizar dados em tabela, identificar a razão da progressão geométrica e construir a fórmula do termo geral da progressão geométrica.” (VALIM E COLUCCI, 2008, p.4) O processo para se obter o fractal proposto, é descrito pelos autores da seguinte maneira:

Para se construir tal fractal, deve-se pegar pecinhas quadradas (ou cubinhos) e, primeiramente fazer a conexão de 3 quadrados (ou cubinhos) em forma de L, de modo que este será um fractal triminó de nível 1. Para obter o fractal de nível 2 devemos substituir cada peça por um triminó L, obtendo-se assim um fractal triminó de nível 2. Repete-se o processo empregado na obtenção do fractal de nível 2, para se obter o fractal de nível 3. Os passos para obtenção dos próximos níveis são análogos. (VALIM E COLUCCI, 2008, p. 4)

Após descrever o processo, os autores mostram uma tabela relacionando a quantidade de peças utilizadas em cada iteração ao nível do fractal, e a partir da criação da mesma, propõem induzir os alunos a descobrir a lei de formação do fractal, obtendo assim 3^n quadrados a serem utilizados no nível n deste fractal.

Nível do Fractal	Quantidade de quadrados
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
3	$27 = 3^3$
4	$81 = 3^4$
5	$243 = 3^5$
N	N
n	3^n

Fonte: VALIM E COLUCCI (2008, p. 4).

Também é observado pelos autores a possibilidade de se determinar uma progressão geométrica, onde o primeiro termo seria $a_1 = 3$, a razão $r = 3$ e último termo $a_n = 3^n$, sendo o termo geral dessa PG dado por: $a_n = 3 * 3^{n-1}$ (VALIM E COLUCCI, 2008).

Outra atividade interessante é sugerir que cada aluno crie seu próprio fractal, usando desenho geométrico, algarismo ou até mesmo letra do alfabeto. O processo de construção dos fractais de nível superior ao tomado de molde é análogo ao processo para o fractal triminó, descritos anteriormente. Após a construção os alunos deveram determinar a razão da P.G. bem como a lei de formação da P.G. (VALIM E COLUCCI, 2008, p. 5)

Todos os processos da atividade são explicados pelos autores, e, além disso, os objetivos buscados com ela são também descritos. Porém, poderia ser mostrado o fractal através de uma imagem, visto que este não é muito conhecido e sua visualização forneceria alguma referência ao profissional que queira desenvolver a atividade.

A segunda atividade consiste na criação do Triângulo de Sierpinski, porém os autores não especificam de que maneira esta construção deverá ser feita, no sentido da possível utilização de algum software ou até mesmo uma construção manual. O processo para a obtenção do fractal é descrito por eles, além disso é apresentada uma tabela que relaciona o nível do fractal, o número de triângulos neste nível, a área de cada triângulo e a área total da figura. Segundo os autores, a construção deste fractal aborda conceitos sobre triângulos equiláteros, mediatriz e ponto médio de um segmento. (VALIM E COLUCCI, 2008)

Nível	0	1	2	3		n
Nº de triângulos	1	3	3^2	3^3		3^n
Área de cada triângulo	A	$\left(\frac{1}{4}\right) * A$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 * A$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 * A$		$\left(\frac{1}{4}\right)^n * A$
Área Total	A	$\left(\frac{3}{4}\right) * A$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 * A$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 * A$		$\left(\frac{3}{4}\right)^n * A$

Fonte: VALIM E COLUCCI (2008, p. 6)

Após a apresentação da tabela, os autores concluem que a área total $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n * A$ tende a zero, porém a justificativa não fica muito clara. O desenvolvimento relacionado ao trabalho de Bemfica e Alves que será feito no próximo capítulo também servirá para esclarecer este processo.

Figura 44 – Justificativa feita por Valim e Colucci

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0$$

Fonte: VALIM E COLUCCI (2008, p. 6)

A terceira atividade proposta é a construção da Ilha de Koch por meio do GeoGebra. Segundo os autores, um dos objetivos da atividade é estimular a construção de figuras com régua e compasso (VALIM E COLUCCI, 2008), e todo o processo para a construção da figura é detalhado passo a passo no trabalho, inclusive destacando a utilização do Teorema de Tales para dividir o lado do triângulo em três partes congruentes.

Figura 45 – Processo de criação da Ilha de Koch por Valim e Colucci

7 Desenvolvimento e apresentação da proposta para o Ensino Básico

7.1 Apontamentos e contribuições

Como analisado no capítulo 5, algumas partes dos artigos mostrados poderiam ter um maior esclarecimento. Foram apresentados cálculos ilegíveis, softwares que necessitam de mais descrição e atividades com falta de exemplos visuais ou de detalhamento. Por conta disso, pretendemos trazer nossas contribuições para o estudo da geometria fractal e para as propostas trazidas pelos autores para o ensino básico fazendo apontamentos para cada um dos artigos observados a fim de enriquecer as pesquisas feitas.

7.2 Sobre o artigo - Fractais: progressão e série geométrica (Andrios Bemfica, Cassiana Alves, 2010)

Iniciaremos o capítulo com apontamentos relacionados ao trabalho de Bemfica e Alves, apresentando análises do Triângulo de Sierpinski, Pirâmide de Sierpinski e Tapete de Sierpinski em relação ao número de iterações, número de elementos a serem retirados, áreas e volumes de elementos retirados nos processos geradores dos fractais citados. A partir da apresentação das análises feitas por meio de tabelas, determinaremos por meio do cálculo de séries numéricas relacionado à área ou volume daquele fractal, o comportamento dos elementos analisados para um nível infinito de iterações.

7.2.1 Triângulo de Sierpinski

Como podemos observar nos elementos destacados nas figuras de 15 a 20, e nas expressões apresentadas no capítulo 2, o Tapete de Sierpinski pode ser analisado da seguinte forma, sendo o lado do triângulo equilátero inicial no nível 0 dado por (l):

Quadro 11 – Análise do triângulo de Sierpinski após as interações

Iterações	Nº de triângulos a serem retirados no próximo nível	Área do triângulo retirado no próximo nível
0	1	$\frac{l^2\sqrt{3}}{16 \cdot 4^0}$

1	3	$\frac{l^2\sqrt{3}}{16 \cdot 4^1}$
2	9	$\frac{l^2\sqrt{3}}{16 \cdot 4^2}$
3	28	$\frac{l^2\sqrt{3}}{16 \cdot 4^3}$
...	...	...
n	3^n	$\frac{l^2\sqrt{3}}{16 \cdot 4^n}$

Fonte: O autor (2022).

Pela análise da tabela e das características deste fractal, podemos perceber que com o aumento das iterações, a quantidade de triângulos retirados aumenta. Também nota-se que mesmo que a área de cada triângulo retirado esteja diminuindo a cada nível, a cada iteração é subtraído 1/4 da área de cada triângulo maior, como mostramos nas figuras 19 e 20, no capítulo 2, o que resulta numa diminuição progressiva na área total do fractal.

Se quiséssemos determinar então, a área total retirada (A_r) num nível “ n ” qualquer deste fractal, teríamos que multiplicar a área do triângulo retirado pelo número de triângulos retirados neste nível, obtendo a seguinte expressão:

$$A_r = \frac{l^2\sqrt{3}}{16 \cdot 4^n} \cdot 3^n$$

Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$A_r = \frac{l^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{3^n}{4^n}$$

$$A_r = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Como entendemos que o número de iterações pode ser qualquer, segundo Simmons (1988), se levássemos o número “n” a tender ao infinito ($n \rightarrow \infty$), a soma de todas as áreas dos triângulos retirados seria dada pela série numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Se quiséssemos então calcular a área restante no Triângulo de Sierpinski (A_r) quando o número de iterações tende ao infinito, deveríamos subtrair esta série da área inicial do triângulo equilátero (A_t), dada por:

$$A_t = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

Sendo assim, teríamos a área restante no Triângulo de Sierpinski (A_r) obtida pelo seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} A_r &= A_t - \sum_{n=0}^{\infty} l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ A_r &= \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ A_r &= \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} - l^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (I) \end{aligned}$$

De acordo com Simmons (1988), o desenvolvimento de uma série

$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$ é dado por: $S_n = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \dots + a \cdot r^n$, e o resultado desta soma (quando $n \rightarrow \infty$) é dado por: $S_n = \frac{a}{1-r}$. Sendo assim, temos na nossa expressão os seguintes valores para a e r :

$$l^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{16}}_a \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)}_r^n$$

Convergindo esta série então, para um valor finito, segundo Simmons (1988), por conta do módulo de r ser menor que 1:

$$|r| = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} > 1$$

A soma de todos os termos da série será dada por:

$$S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{16}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \therefore l^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Voltando para (I), teremos:

$$A_r = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} - l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_r = 0$$

O que nos faz inferir que quando o número de iterações tende ao infinito, a área do Triângulo de Sierpinski tende a zero, como apresentado por Bemfica e Alves (2010).

Portanto a soma das áreas das n iterações do Triângulo de Sierpinsky [sic] resultam na mesma área do triângulo inicial. Isso quer dizer que, se tivéssemos um triângulo e fossemos retirando os novos triângulos gerados pelas iterações deste fractal a área resultante seria zero. (BEMFICA E ALVES, 2010, p. 15)

7.2.2 Pirâmide de Sierpinski

Como podemos observar nos elementos destacados na figura 30, e nas expressões apresentadas no capítulo 2, a Pirâmide de Sierpinski pode ser analisada da seguinte forma, sendo a aresta do tetraedro regular inicial no nível 0 dada por (c) :

Iterações	Nº de tetraedros a serem gerados	Nº de octaedros a serem retirados	Volume de um novo octaedro
0	4	1	$\frac{c^3\sqrt{2}}{3 \cdot 8^1}$
1	16	3	$\frac{c^3\sqrt{2}}{3 \cdot 8^2}$
2	64	9	$\frac{c^3\sqrt{2}}{3 \cdot 8^3}$
3	256	28	$\frac{c^3\sqrt{2}}{3 \cdot 8^4}$
...	...	...	...
<i>n</i>	4^{n+1}	4^n	$\frac{c^3\sqrt{2}}{3 \cdot 8^{n+1}}$

Fonte: O autor (2022).

Pela análise da tabela e das características deste fractal, podemos perceber que com o aumento das iterações, a quantidade de octaedros retirados aumenta. Também nota-se que mesmo que o volume de cada octaedro retirado esteja diminuindo a cada nível, a cada iteração é subtraído 1/2 do volume de cada tetraedro, como apontado por Rabay (2013), o que resulta numa diminuição progressiva no volume total do fractal.

Se quiséssemos determinar então, o volume total retirada (V_r) num nível “n” qualquer deste fractal, teríamos que multiplicar o volume do octaedro retirado pelo número de octaedros retirados neste nível, obtendo a seguinte expressão:

$$V_r = \frac{c^3\sqrt{2}}{3 \cdot 8^{n+1}} \cdot 4^n$$

Que pode ser escrito da seguinte forma:

$$V_r = \frac{c^3 \sqrt{2}}{3 \cdot 8} \cdot \frac{4^n}{8^n}$$

$$V_r = c^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 8} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^n$$

Seguindo o raciocínio apresentado no tópico anterior, a soma de todos os volumes dos octaedros retirados seria dado pela série numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 8} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^n$$

Se quiséssemos então calcular o volume restante na Pirâmide de Sierpinski (V_r) quando o número de iterações tende ao infinito, deveríamos subtrair esta série do volume inicial do Tetraedro regular (V_t), dado por:

$$v_t = \frac{c^3 \sqrt{2}}{12}$$

Sendo assim, teríamos o volume restante na Pirâmide de Sierpinski (V_r) obtido pelo seguinte desenvolvimento:

$$V_r = v_t - \sum_{n=0}^{\infty} c^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 8} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^n$$

$$V_r = \frac{c^3 \sqrt{2}}{12} - \sum_{n=0}^{\infty} c^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 8} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^n$$

$$V_r = \frac{c^3 \sqrt{2}}{12} - c^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^n \quad (I)$$

Sendo assim, temos na nossa expressão os seguintes valores para a e r :

$$c^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{24}}_a \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{8}\right)}_r^n$$

Convergindo esta série então, para um valor finito, por conta do módulo de r ser menor que 1:

$$|r| = \frac{4}{8}$$

$$\frac{4}{8} > 1$$

A soma de todos os termos da série será dada por:

$$S_n = \frac{\frac{\sqrt{2}}{24}}{1 - \frac{4}{8}}$$

$$S_n = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{12} \therefore c^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^n = c^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Voltando para (I), teremos:

$$V_r = \frac{c^3 \sqrt{2}}{12} - c^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$V_r = 0$$

O que nos faz inferir que quando o número de iterações tende ao infinito, o volume da Pirâmide de Sierpinski tende a zero, como apresentado por Bemfica e Alves (2010).

Portanto a soma dos volumes das n interações da Pirâmide de Sierpinsky [sic] resultam no mesmo volume da pirâmide inicial. Isso quer dizer que, se tivéssemos uma pirâmide e fossemos retirando as novas pirâmides geradas pelas interações deste fractal o volume resultante seria zero. (BEMFICA E ALVES, 2010, p. 17)

7.2.3 Tapete de Sierpinski

Como podemos observar nos elementos destacados nas figuras de 21 a 26, e nas expressões apresentadas no capítulo 2, o Tapete de Sierpinski pode ser analisado da seguinte forma, sendo o lado do quadrado inicial no nível 0 dado por (l):

Quadro 13 – Análise do Tapete de Sierpinski após as interações

Iterações	Nº de quadrados restantes	Área de um novo quadrado
0	1	$\frac{l^2}{9}$
1	8	$\frac{l^2}{81}$
2	64	$\frac{l^2}{729}$
3	512	$\frac{l^2}{6561}$
...	...	...
n	8^n	$\frac{l^2}{9 \cdot 9^n}$

Fonte: O autor (2022).

Pela análise da tabela e das características deste fractal, podemos perceber que com o aumento das iterações, a quantidade de quadrados retirados aumenta. Também nota-se que mesmo que a área de cada quadrado retirado esteja diminuindo a cada nível, a cada iteração é subtraído 1/9 da área de cada quadrado maior, como mostramos nas figuras 25 e 26, o que resulta numa diminuição progressiva na área total do fractal.

Se quiséssemos determinar então, a área total retirada (A_r) num nível “n” qualquer deste fractal, teríamos que multiplicar a área do quadrado retirado pelo número de quadrados retirados neste nível, obtendo a seguinte expressão:

$$A_r = \frac{l^2}{9 \cdot 9^n} \cdot 8^n$$

Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$A_r = \frac{l^2}{9 \cdot 9^n} \cdot 8^n$$

$$A_r = l^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Como entendemos que o número de iterações pode ser qualquer, segundo Simmons (1988), se levássemos o número “n” a tender ao infinito ($n \rightarrow \infty$), a soma de todas as áreas dos quadrados retirados seria dada pela série numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} l^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Se quiséssemos então calcular a área restante no Tapete de Sierpinski (A_r) quando o número de iterações tende ao infinito, deveríamos subtrair esta série da área inicial do quadrado (A_Q), dada por:

$$A_Q = l^2$$

Sendo assim, teríamos a área restante no Triângulo de Sierpinski (A_r) obtida pelo seguinte desenvolvimento:

$$A_r = A_Q - \sum_{n=0}^{\infty} l^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

$$A_r = l^2 - \sum_{n=0}^{\infty} l^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

$$A_r = l^2 - l^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n \quad (\text{I})$$

De acordo com Simmons (1988), o desenvolvimento de uma série

$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$ é dado por: $S_n = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \dots + a \cdot r^n$, e o resultado desta soma (quando $n \rightarrow \infty$) é dado por: $S_n = \frac{a}{1-r}$. Sendo assim, temos na nossa expressão os seguintes valores para a e r :

$$l^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Convergindo esta série então, para um valor finito, segundo Simmons (1988), por conta do módulo de r ser menor que 1:

$$|r| = \frac{8}{9}$$

$$\frac{8}{9} > 1$$

A soma de todos os termos da série será dada por:

$$S_n = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{8}{9}}$$

$$S_n = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{1} = 1 \therefore l^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n = l^2 \cdot 1$$

Voltando para (I), teremos:

$$A_r = l^2 - l^2 \cdot 1$$

$$A_r = 0$$

O que nos faz inferir que quando o número de iterações tende ao infinito, a área do Tapete de Sierpinski tende a zero, como apresentado por Bemfica e Alves (2010).

Portanto a soma das áreas das n iterações do quadrado de Sierpinski resultam na mesma área do quadrado inicial. Isso quer dizer que, se pegarmos um quadrado e retirarmos os novos quadrados gerados pelas iterações deste fractal, a área resultante seria zero. (BEMFICA E ALVES, 2010, p. 20)

Com isso, pretendemos trazer contribuições no que se refere aos dados analisados e apresentados pelos autores, bem como os desenvolvimentos de cálculos mostrados. Também foi indicado pelos autores o uso do software Shapari, e mediante pesquisa podemos determinar algumas sugestões feitas por outros autores no tocante às possibilidades de utilização deste software para a construção de fractais no Ensino Básico. Acreditamos que os estudos sobre este software feito nos trabalhos “Estudando matrizes a partir de transformações geométricas” de Vandoir Stormowski (2008), “Possibilidades para a Educação a Distância em Matemática” de Thiago Crestani Gajko (2011), e “Imagine e Shapari – Software gráficos no Ensino e Aprendizagem de Matemática” de Melissa Meier, Susana Seidel e Marcus V. de A. Basso (2005) são capazes de fornecer informações sobre o funcionamento do Shapari e propostas para a sua utilização no Ensino Básico.

7.3 Sobre o artigo - Fractais e o GeoGebra: Construindo a Curva de Koch (Fuzzo et al, 2011)

Em relação ao trabalho de Fuzzo et al. (2011), pretendemos contribuir mostrando a criação de uma ferramenta semelhante à proposta por eles, para fazer a construção da Curva de Koch. Além disso, buscamos trazer possibilidades de utilização desta curva e desta construção de ferramenta por meio do GeoGebra para o ensino de conteúdos de matemática e desenvolvimento de habilidades apresentadas no Currículo de Pernambuco. Para a construção da ferramenta então, sugerimos os passos detalhados a seguir:

Consideraremos um segmento AB, qualquer:

Figura 47 – Segmento AB



Fonte: O autor (2022).

Posteriormente, dividiremos o segmento AB em três partes iguais, contudo, como no processo de criação de ferramentas no GeoGebra é necessário que os objetos finais dependam dos objetos iniciais, ou seja, sejam formados a partir de A e B, não poderíamos pegar um segmento qualquer partindo de A ou de B para iniciar o processo de divisão. Sendo assim, sugerimos que o operador utilize a função “ângulo com amplitude fixa” para determinar um ponto que depende exatamente destes dois pontos iniciais. Neste exemplo, utilizaremos 30° para a situação ficar mais visível, gerando o ponto B' automaticamente.

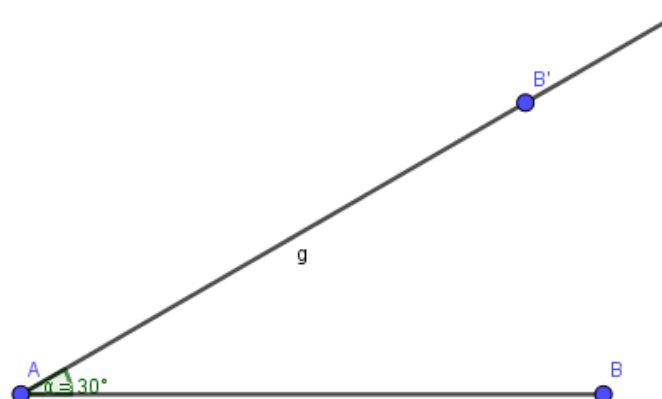
Figura 48 – Criação do ponto B', determinado a partir do ângulo de 30°



Fonte: O autor (2022).

A partir de B, determinaremos a semirreta g :

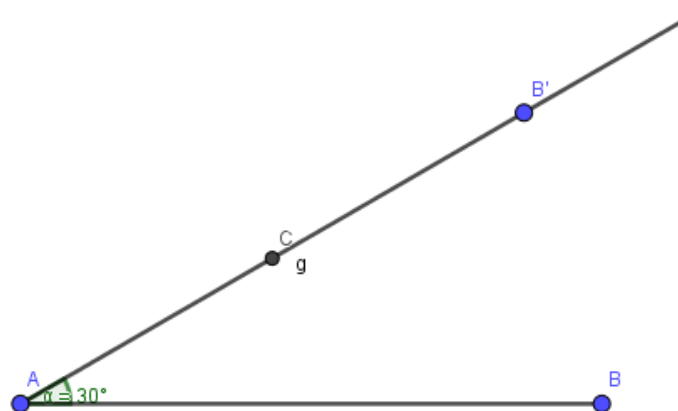
Figura 49 – Semirreta g , passando por AB'



Fonte: O autor (2022).

Na semirreta g , utilizaremos o segmento AB' como referência para se determinar um novo ponto, o ponto médio C (no processo utilizamos a ferramenta “Ponto Médio”):

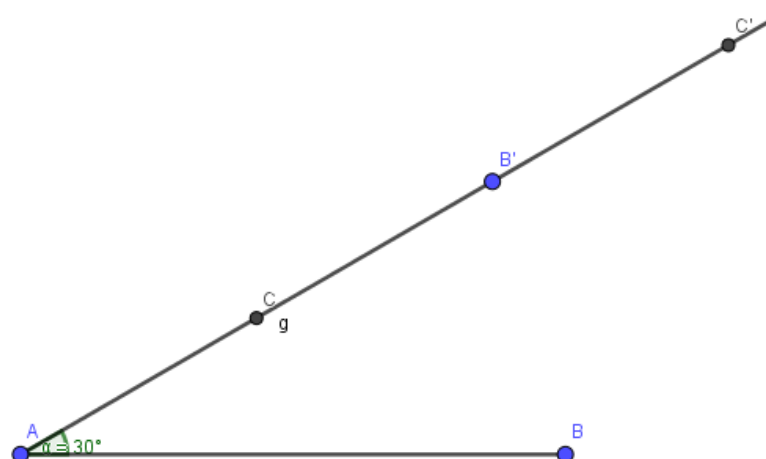
Figura 50 – Determinação do ponto C



Fonte: O autor (2022).

Seguindo o processo, como precisaremos de três pontos para dividir o segmento AB em três, determinaremos o ponto C' utilizando o comando “Reflexão em relação a um ponto”, ao clicar no ponto C e fazer sua reflexão na semirreta g pelo ponto B':

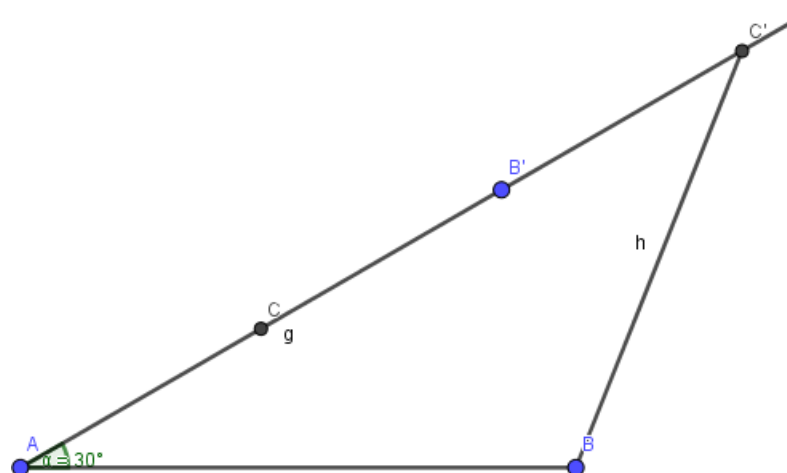
Figura 51 – Determinação do ponto C'



Fonte: O autor (2022).

Determinados os três pontos, criaremos o segmento h, ligando C' a B, que nos servirá de referência para fazermos as retas i e j, paralelas a h, passando por B' e C, respectivamente.

Figura 52 – Criação do segmento h



Fonte: O autor (2022).

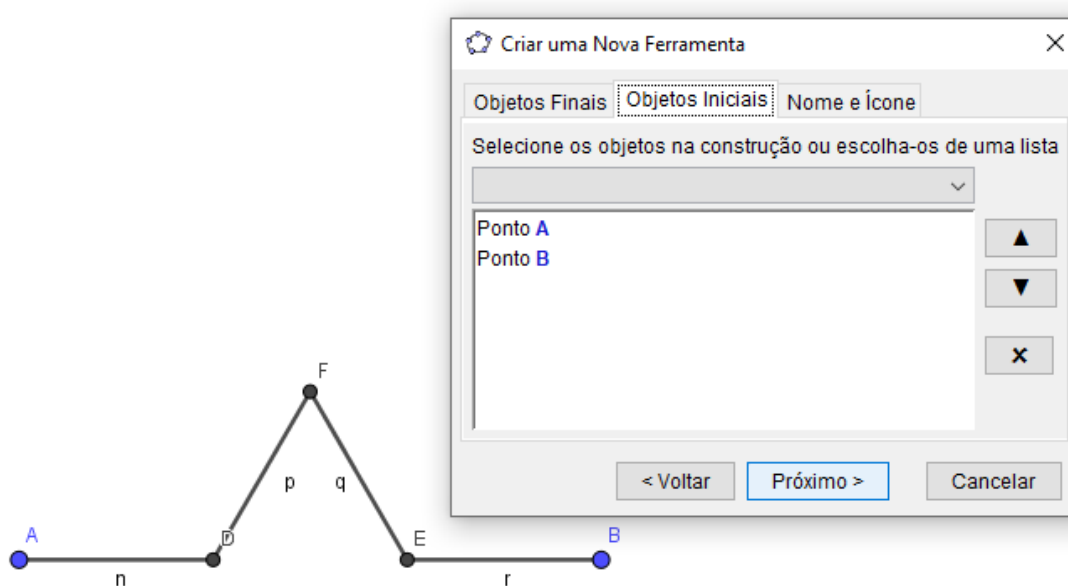
As retas i e j determinarão então, os pontos D e E, no segmento AB, e servirão como base para o triângulo equilátero DFE, que será feito com a ferramenta “Polígono Regular” (com 3 lados), nos pontos D e E (nesta ordem):

Figura 53 – Determinar os pontos D e E

Fonte: O autor (2022).

Será então criada a ferramenta para reproduzir esta curva utilizando dois pontos quaisquer, na função “Ferramenta”, e os objetos iniciais serão os pontos A e B, apresentados na figura a seguir:

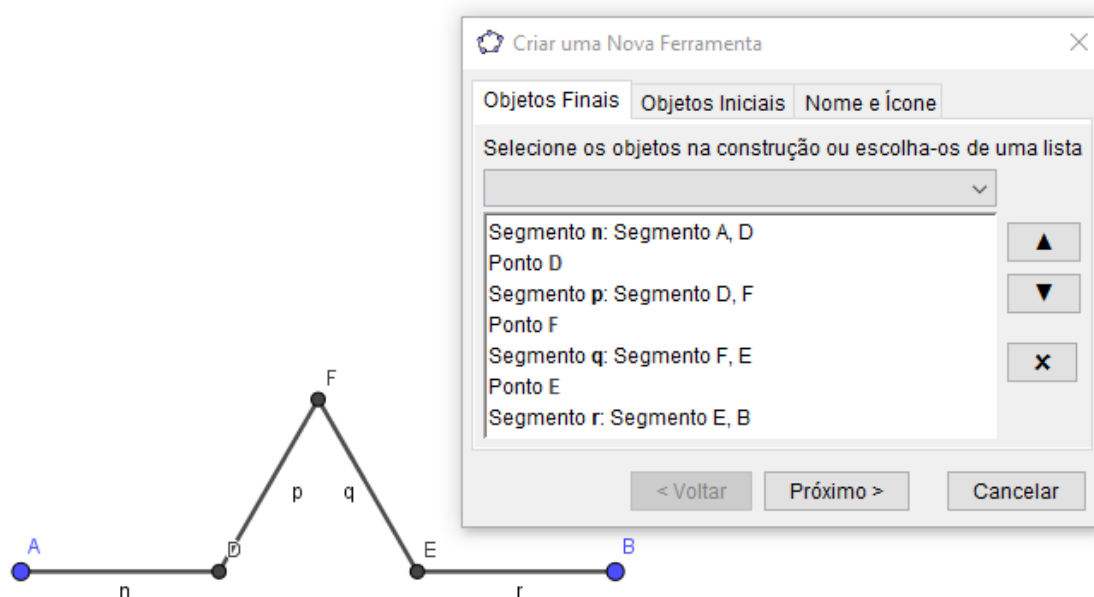
Figura 56 – Processo de criação da ferramenta (objetos iniciais)



Fonte: O autor (2022).

Os Objetos finais serão também selecionados, porém, cabe ao operador determinar tais elementos, podendo assim selecionar apenas os segmentos n, p, q e r, por exemplo, ou até apenas os pontos D, F e E. Como fizemos uma ferramenta padrão, selecionaremos todos os objetos mostrados na figura a seguir:

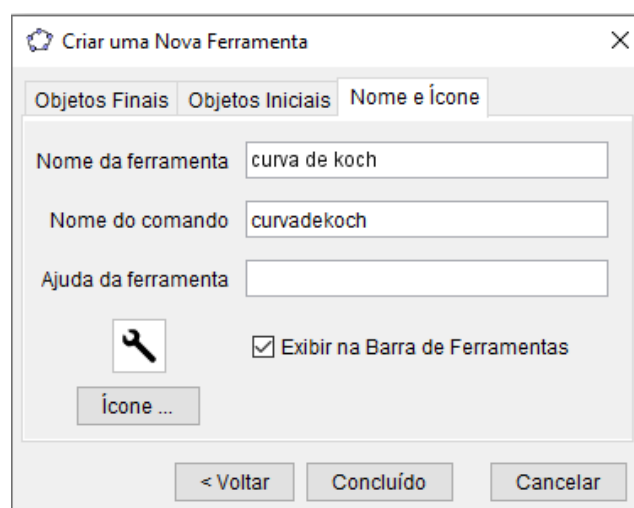
Figura 57 – Processo de criação da ferramenta (objetos finais)



Fonte: O autor (2022).

O último processo é a criação do nome e ícone, feito da seguinte maneira:

Figura 58 – Processo de criação da ferramenta (nome e ícone)



Fonte: O autor (2022).

Assim, temos uma ferramenta semelhante à ferramenta proposta por Valim e Colucci, agora podendo ser utilizada no Ensino Básico a partir do processo que apresentamos. O processo de criação da ferramenta curva de Koch pode ser trazido para a sala de aula por exemplo, para tratar da construção de retas paralelas para

dividir um segmento de reta em três partes com o auxílio do software GeoGebra. Outra habilidade matemática que poderia ser desenvolvida com o auxílio do GeoGebra é a construção de triângulos equiláteros com o software (EF06MA22PE). Ambas habilidades podem ser encontradas no currículo do 6º ano, apresentado no apêndice E, junto também à habilidade de construção de um algoritmo para resolver situações passo a passo (EF06MA23PE), que seria a própria ferramenta desenvolvida. Podemos destacar deste apêndice as informações a seguir:

Quadro 14 – Habilidades desenvolvidas no 6º Ano (1)

6º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Geometria	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares	(EF06MA22PE) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
		(EF06MA23PE) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Fonte: O autor (2022).

Sendo assim o professor poderia tanto ensinar todo o processo de construção manual de retas paralelas passando por pontos específicos (simulando o uso de régua e compasso no software), como também poderia utilizar a ferramenta própria para a construção de retas paralelas disponibilizada no software. Da mesma forma, o professor também poderia ensinar o processo de criação de um triângulo equilátero a partir de um de seus lados (simulando o uso de régua e compasso no software), ou poderia utilizar a ferramenta própria para a construção do mesmo. É importante ressaltar que o uso de ferramentas sem o devido entendimento do processo envolvido

não traz muitos benefícios para o aluno em relação ao desenvolvimento do seu pensamento geométrico, por isso é indicado que primeiramente o aluno entenda o processo sem o auxílio da ferramenta própria para a obtenção imediata dele, assim ele compreenderá o processo geométrico de construção quando utilizar a ferramenta.

Além destas propostas para o 6º anos, podemos supor que a construção da ferramenta da Curva de Koch pode servir para a aplicação de construções geométricas de ângulos, mediatrizes e bissetrizes, no 8º ano. Nos passos que detalhamos, optamos pelo uso da função “Ângulo de amplitude fixa” para determinar o ângulo de 30°, porém defendemos que a construção deste ângulo ou de outros pode ser feita de maneira convencional (simulando o uso de régua e compasso no GeoGebra) no 8º ano, inclusive podendo incluir também as construções de mediatriz e bissetriz neste processo. Apresentamos assim o quadro 14, proveniente das análises feitas no apêndice G:

Quadro 14 – Habilidades desenvolvidas no 8º Ano

8º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Geometria	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA15PE) Construir, utilizando instrumentos de desenho e/ ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problema	(EF08MA17PE) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

Fonte: O autor (2022).

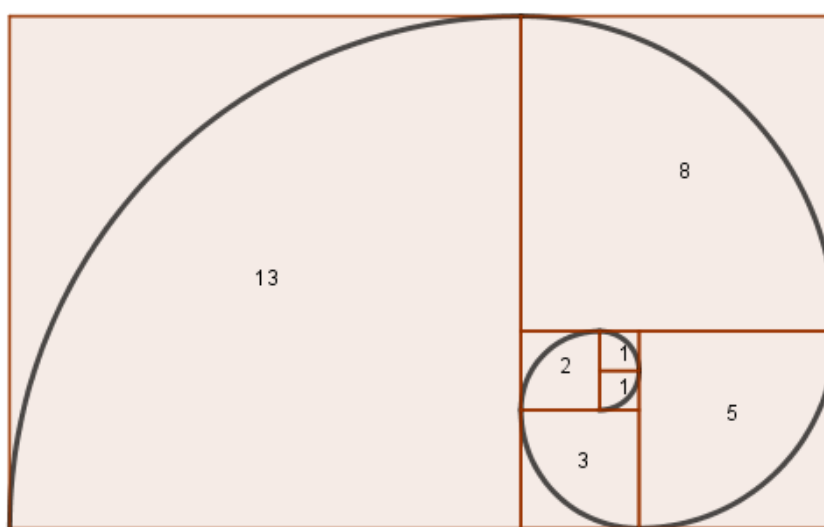
O desenvolvimento da ferramenta poderá também ser útil para professores na questão da praticidade de mostrar o processo do desenvolvimento da Curva e da Ilha

de Koch em sala de aula. Com a ferramenta criada num software de geometria dinâmica como o GeoGebra, o professor poderia utilizá-la rapidamente em diversas situações, podendo inclusive simular o processo recursivo deste fractal a partir de utilizações sucessivas, o que levaria bastante tempo caso fosse feito passo a passo sem o seu auxílio.

7.4 Sobre o artigo - A Matemática Fractal e o GeoGebra no Ensino de Matemática (Vielmo e Dalberto, 2013)

A primeira atividade proposta pelos autores consiste na construção da Espiral de Fibonacci, pode ser por exemplo utilizada no 6º ano para desenvolver as habilidades (EF05MAXPE) e (EF05MA17PE). Por meio desta construção os estudantes podem reconhecer os ângulos de um quarto de volta presentes nos quadrados e relacioná-los aos quartos de circunferência desenhados.

Figura 59 – Processo de criação da Espiral de Fibonacci proposto por Valim e Colucci



Fonte: O autor (2022).

Apresentamos assim o quadro 15, proveniente das análises feitas no apêndice E:

Quadro 15 – Habilidades desenvolvidas no 6º Ano (2)

6º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Geometria	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos	(EF05MAXPE) Reconhecer ângulo de um quarto de volta, de meia volta e de uma volta.
		(EF05MA17PE) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

Fonte: O autor (2022).

Na segunda atividade, é proposto pelos autores a construção da Árvore Pitagórica no GeoGebra, que serve para também para as atividades 3 e 4. A construção desse fractal pode ser utilizada também para o desenvolvimento da habilidade EF05MA17PE (presente no apêndice E), relacionando a mesma aos elementos de um triângulo retângulo. A partir da contagem dos elementos no processo iterativo, pretende-se que os alunos façam relações numéricas utilizando os conceitos de comprimento, área e volume.

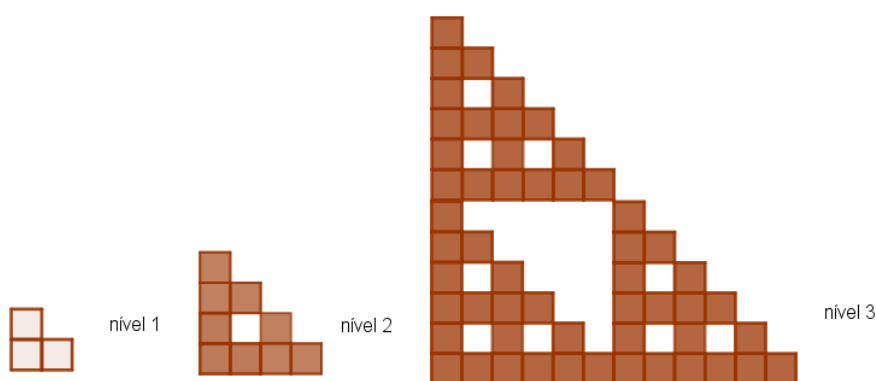
Na quinta atividade, os autores propõem a construção do Tapete de Sierpinski no GeoGebra, e se o quadro proposto pelos autores fosse construído pelos alunos, estariam sendo feitas diversas análises ao mesmo tempo. Primeiramente, uma análise geométrica da forma que está sendo gerada a partir de cada iteração, sendo representada no quadro a partir das figuras do fractal nos diferentes níveis. Depois, estariam sendo feitas análises numéricas de contagem, para determinar o número de quadrados formadores de cada estrutura. E por último, análises referentes às grandezas área e comprimento do lado do quadrado. Todas as análises preocupadas em determinar expressões para o nível “n” de cada elemento observado, utilizando dos conceitos de progressões geométricas.

7.5 Sobre o artigo - Geometria Fractal No Ensino Fundamental e Médio (Valim e Colucci, 2013)

A contribuição que buscamos trazer ao material desenvolvido por Valim e Colucci é referente à construção do fractal triminó. O desenvolvimento em relação à tendência a zero da expressão da área total do triângulo de sierpinski (quando o número de iterações tende a infinito) já foi feito nos apontamentos em relação ao artigo de Bemfica e Alves, portanto não repetiremos o processo aqui.

Em relação ao processo de construção do fractal triminó descrito por Valim e Colucci, mostraremos o uso do software GeoGebra para a criação de 3 níveis deste fractal:

Figura 60 – Processo de criação do Fractal Triminó proposto por Valim e Colucci



Fonte: O autor (2022).

Os objetivos esperados a partir da realização da atividade proposta já foram determinados pelos autores e já tratamos sobre estes no capítulo anterior, ficando nossa contribuição apenas no quesito de representação visual.

7.6 Proposta para o Ensino Básico

A partir das análises feitas no capítulo 6 e dos apontamentos e contribuições apresentados a partir dos artigos trazidos, fundamentamos uma proposta para o 3º ano do Ensino Médio. Desenvolvida com o interesse de abordar conteúdos da Matemática através da Geometria Fractal, foi baseada em habilidades, objetivos,

competências e conteúdos programáticos observados na BNCC e no Currículo de Matemática para o Estado de Pernambuco. Assim, trazemos então um Plano de Ensino com Sequência Didática apresentando cinco aulas, que serão descritas nos seus devidos Planos de Aula aqui também apresentados e detalhados.

7.7 Plano de Ensino com Sequência Didática

PLANO DE ENSINO COM SEQUÊNCIA DIDÁTICA				
DISCIPLINA		CARGA HORÁRIA		
ÁREA DE ESTUDO	NOME DA DISCIPLINA	GERAL	TEÓRICA	PRÁTICA
Ciências Exatas e da Natureza	Matemática	8h	3h	5h
		SÍNCRONA		ASSÍNCRONA
		5h	3h	
NÍVEL E TURMA				
NÍVEL	TURMA			
Ensino Médio	3º ano			
EMENTA				
Desenvolvimento do pensamento geométrico e matemático através da utilização da Geometria Fractal. Aplicação de fractais no desenvolvimento dos conceitos de área, volume, perímetro, contagem, transformações e construções geométricas. Utilização da Geometria Dinâmica como elemento de auxílio do ensino da matemática por meio dos softwares GeoGebra e Fragmentarium para a produção de fractais,				
HABILIDADES (BNCC e Currículo de Pernambuco)				

No tocante às habilidades da BNCC já desenvolvidas pelos alunos no ensino fundamental e que serão utilizadas neste processo, queremos destacar as seguintes:

(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.

(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.

(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Em relação às habilidades que serão desenvolvidas no 3º ano do Ensino Médio e determinadas pelo Currículo de Pernambuco, destacamos as seguintes:

(EM13MAT105PE10) Identificar e interpretar as transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) para construir figuras, analisando elementos da

natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.

(EM13MAT105PE11) Aplicar as transformações homotéticas para construir e analisar figuras da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras), analisando os seus elementos, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.

(EM13MAT308PE24) Aplicar as relações métricas e as leis de seno e cosseno ou as noções de congruência e semelhança para resolver e elaborar situações-problema que envolvam triângulos em variados contextos, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.

(EM13MAT504PE44) Investigar e compreender processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas, incluindo o princípio de Cavalieri, para a dedução das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.

(EM13MAT407PE40) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas, tabelas e gráficos, como por exemplo, histogramas de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros, identificando os mais eficientes para a análise de uma determinada situação problema, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.

OBJETIVOS/COMPETÊNCIAS

Procedimentais

- Utilização de softwares de geometria dinâmica no desenvolvimento de representações geométricas e criação de ferramentas;
- Compreendimento e utilização com flexibilidade e precisão, de diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas;
- Investigação e estabelecimento de conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

- Utilização de estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Pensamento Geométrico

- Ampliação da capacidade de visualização espacial;
- Exploração do domínio cognitivo;
- Visualização e manipulação de modelos mentais;
- Abstração de elementos a partir de modelos digitais;
- Desenvolvimento do pensamento não-euclidiano.

Conceituais

- Aquisição de conhecimentos contextualizados na geometria fractal;
- Correlação dos conhecimentos matemáticos de área, volume, perímetro e contagem à construções geométricas de fractais;
- Compreensão e aplicação de propriedades de transformações geométricas;
- Identificação e estabelecimentos de paralelos entre estruturas fractais, polígonos e poliedros regulares;
- Utilização do processo recursivo dos fractais para a análise de elementos geométricos e numéricos.

METODOLOGIA

As aulas serão realizadas de maneira síncrona e presencial, visto que incluem a utilização de softwares de geometria dinâmica pelos estudantes, assim, a interação pessoal com o professor e com os colegas de classe poderá trazer uma experiência mais dinâmica para o processo. Dessa maneira, serão compostas de cinco encontros síncronos, contendo cinco atividades práticas síncronas, momentos teóricos de

discussão, e também de três atividades práticas assíncronas. As aulas serão realizadas em uma sala que possua os recursos tecnológicos necessários para que cada um dos alunos realize individualmente as construções geométricas no computador, e que também possam ver as construções do professor no quadro a partir de projeção.

Os softwares utilizados serão o GeoGebra e o Fragmentarium, e para a realização das atividades compreende-se que os alunos já tenham no mínimo um contato prévio com a geometria dinâmica por meio do GeoGebra, tornando assim mais fácil as construções propostas nele e também a manipulação do Fragmentarium. Também é necessário que os alunos tenham acesso a um repositório de conteúdo, por meio do qual serão disponibilizados os materiais utilizados pelo professor nas aulas (apresentações, fichas, links).

Por conta da Geometria Fractal ser um conteúdo que não é abordado com frequência no Ensino Básico, a primeira aula tem o propósito de introduzir este conteúdo aos alunos, e contará com uma apresentação de slides que será feita pelo professor, contendo explicações sobre este novo tema para os alunos, apontamentos sobre as geometrias não-euclidianas, apresentação de fractais famosos e exemplos de utilizações da geometria fractal em diversas áreas.

Iniciando o processo de atividades práticas, a segunda aula contará com a construção de duas estruturas: a Espiral de Fibonacci, e o Fractal Triminó. Ambas serão feitas com o auxílio do GeoGebra e serão norteadas segundo as propostas feitas por Viêlmo e Dalberto (2013) e Valim e Colucci (2008), respectivamente

A terceira aula servirá para a atividade de construção do Triângulo de Sierpinski e análise deste fractal segundo os apontamentos sugeridos por Bemfica e Alves (2010). Também será proposta a construção e análise do Tapete de Sierpinski, que será feita de forma assíncrona pelos alunos.

A quarta aula servirá para a apresentação do Fragmentarium para os alunos. Nela serão apresentadas algumas funções do software a partir da manipulação de malhas geométricas hiperbólicas e de alguns fractais de exemplo no software. Será visualizada a Esponja de Menger e os alunos farão análises segundo os

apontamentos de Barbosa (2005), Bemfica e Alves (2010). Também será proposta a análise da Pirâmide de Sierpinski, que será feita de forma assíncrona pelos alunos.

A última aula será para a construção da Curva e da Ilha de Koch, e estas construções serão feitas a partir da criação da ferramenta proposta por Fuzzo et al (2011). Os alunos também farão análises baseadas nos apontamentos feitos pelos autores, de forma assíncrona, e assim terminam as aulas e atividades propostas.

REPOSITÓRIO DE CONTEÚDO

Google Classroom

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

AULA	CONTEÚDO	CARGA HORÁRIA	
		SÍNCRONA	ASSÍNCRONA
1	Introdução à Geometria Fractal.	1h	-
2	Construção da Espiral de Fibonacci e do Fractal Triminó • Contagem de elementos; • Progressões Geométricas.	1h	-
3	Construção do Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski • Polígonos Regulares e sua construção; • Ponto médio de segmentos de reta; • Mediatriz, Bissetriz e Construção de ângulos; • Retas Paralelas e Perpendiculares; • Divisão de um segmento em partes iguais; • Contagem de elementos; • Área de Triângulo e de Quadrado.	1h	1h

4	Utilização do Fragmentarium para a manipulação de fractais • Malhas Geométricas hiperbólicas e fractais diversos; • Esponja de Menger • Pirâmide de Sierpinski • Volume do cubo, do tetraedro e do octaedro; • Contagem;	1h	1h
5	Construção da Curva e Ilha de Koch • Criação de ferramenta no GeoGebra; • Ponto médio de segmentos de reta; • Mediatriz, Bissetriz e Construção de ângulos; • Retas Paralelas e Perpendiculares; • Divisão de um segmento em partes iguais; • Contagem de elementos; • Área de Triângulo equilátero; • Perímetro;	1h	1h
RECURSOS DIDÁTICOS			
Internet; Apresentações de slide; Computador; GeoGebra; Fragmentarium.			
AVALIAÇÃO			
A avaliação será realizada de forma processual e diagnóstica, considerando o desempenho dos alunos quanto às atividades assíncronas propostas em sala de aula e síncronas realizadas na mesma. A participação durante as aulas também será considerada na avaliação dos alunos. O processo avaliativo servirá para analisar se os alunos desenvolveram as competências determinadas no tocante à utilização da geometria fractal nos conteúdos matemáticos abordados.			
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS			

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. Ed. Belo Horizonte, Minas Gerais, Autêntica, 2005.

BEMFICA, Andrios, ALVES, Cassiana. **Fractais: progressão e série geométrica**. Uma metodologia de ensino, 2011. Disponível em: http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf/ . Acesso em: 08 nov. 2022.

FUZZO, Regis Alessandro; SANTOS, Talita Secorum dos; FERREIRA, Luciano. **Fractais e o GeoGebra: Construindo a curva de Koch (PO)**, 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1791/ . Acesso em: dezembro de 2021.

VALIM, João César Maciel; COLUCCI, Viviane. Geometria Fractal no ensino fundamental e médio. Cascavel: UNIOESTE, 2008. Disponível em: <https://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

VIELMO, Sandra Eliza; DALBERTO, Francéli. **A matemática fractal e o GeoGebra no ensino de matemática**. Montevideu: Sociedad de Educación Matemática Uruguay, VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática, 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/19194/>. Acesso em: 08 nov 2022.

7.8. Planos de Aula

7.8.1 Aula 1

AULA 1	PLANO DE AULA	Ano: 2022
	Disciplina: Matemática	
Códigos do Currículo de PE:	Docente: Matheus Henrique C. dos Santos	Nível: Médio
		CH: 1h

(EM13MAT105PE10) (EM13MAT105PE11)		Conteúdo: Introdução à Geometria Fractal.		Aula: 1/5			
OBJETIVO GERAL: Através de uma apresentação de slides, instruir os estudantes sobre conceitos da geometria fractal, das geometrias não-euclidianas, apresentar exemplos de fractais e da utilização dos mesmos.							
DURAÇÃO		CONTEÚDOS		OBJETIVOS ESPECÍFICOS		METODOLOGIA	
25 min		As geometrias não-euclidianas		Desenvolver nos alunos o interesse por outras geometrias diferentes da euclidiana. Apresentar conceitos da geometria hiperbólica e esférica, e mostrar exemplos da utilização das mesmas em jogos por meio de vídeos no Youtube.		O professor se utilizará de uma apresentação de slides exposta por meio de projetor.	
10 min		Fractais		Mostrar aos alunos o conceito de fractal descrito por Benoit Mandelbrot e determinar as características de autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão.			
15 min		Fractais		Mostrar alguns dos principais fractais por meio de imagens, GIFs e vídeos no Youtube.			
10 min		Fractais		Apresentar aplicações dos fractais em diversos tipos de arte, por meio de imagens.			
RECURSOS DIDÁTICOS: Computador, Projetor, Vídeos do Youtube.							
MATERIAIS DIDÁTICOS: Apresentação de slides.							
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS: BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula. 3. Ed. Belo Horizonte, Minas Gerais, Autêntica, 2005.							

7.8.2 Aula 2

AULA 2		PLANO DE AULA	Ano: 2022
		Disciplina: Matemática	
Códigos do Currículo de PE: (EM13MAT105PE10) (EM13MAT105PE11) (EM13MAT407PE40)	Docente: Matheus Henrique C. dos Santos		Nível: Médio
	Conteúdo: Construção da Espiral de Fibonacci e do Fractal Triminó.	CH: 1h	
		Aula: 2/5	
OBJETIVO GERAL: Através de uma atividade síncrona, propor a construção da Espiral de Fibonacci e do Fractal triminó para tratar dos conceitos de contagem de elementos e progressões geométricas.			
DURAÇÃO	CONTEÚDOS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	METODOLOGIA
30 min	Espiral de Fibonacci	Construção da Espiral de Fibonacci, a fim de se desenvolver a habituação ao processo recursivo da criação dos fractais por meio do GeoGebra, observando a relação entre os lados dos quadrados, os ângulos retos e os quartos de circunferência.	Desenvolvimento de duas atividades, utilizando o software GeoGebra.
30 min	Fractal Triminó Contagem Progressões geométricas	Construção do Fractal Triminó para a identificação através da contagem da quantidade de quadrados presente em cada nível do fractal; Tratamento das informações observadas na criação de um quadro, e por meio dele, investigação da possibilidade de se conjecturar expressões contendo progressões geométricas.	
RECURSOS DIDÁTICOS: Computador, Projetor, GeoGebra.			
MATERIAIS DIDÁTICOS: Tabela.			

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES:

A construção da Espiral de Fibonacci segue os apontamentos feitos por Viélmo e Dalberto (2013) é bastante simples e será realizada para que os alunos se habituem ao processo recursivo da criação dos fractais, observando a relação entre os lados dos quadrados, os ângulos retos e os quartos de circunferência, sendo auxiliados pelo professor caso surjam dúvidas em relação à utilização do GeoGebra para fazer tais construções. A segunda construção também é simples (Fractal Triminó), e os alunos por meio dela deverão analisar a estrutura criada segundo os parâmetros determinados por Valim e Colucci (2008). Os alunos então identificarão através da contagem, a quantidade de quadrados presente em cada nível dos fractais e farão o tratamento das informações observadas na criação de um quadro, e por meio dele, investigarão a possibilidade de se conjecturar a expressão do termo geral de uma progressão geométrica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. Ed. Belo Horizonte, Minas Gerais, Autêntica, 2005.

VALIM, João César Maciel; COLUCCI, Viviane. Geometria Fractal no ensino fundamental e médio. Cascavel: UNIOESTE, 2008. Disponível em: <https://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

VIELMO, Sandra Eliza; DALBERTO, Francéli. **A matemática fractal e o GeoGebra no ensino de matemática**. Montevideu: Sociedad de Educación Matemática Uruguay, VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática, 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/19194/>. Acesso em: 08 nov 2022.

7.8.3 Aula 3

AULA 3		PLANO DE AULA	Ano: 2022
		Disciplina: Matemática	
Códigos do Currículo de PE: (EM13MAT105PE10) (EM13MAT105PE11) (EM13MAT308PE24) (EM13MAT407PE40)	Docente: Matheus Henrique C. dos Santos	Nível: Médio	
	Conteúdo: Construção do Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski	CH: 2h	
		Aula: 3/5	
OBJETIVO GERAL: Através da construção dos Fractais Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski no GeoGebra, e também da análise de seus elementos, abordar conteúdos da matemática.			
DURAÇÃO	CONTEÚDOS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	METODOLOGIA
1h	- Triângulo de Sierpinski; - Tapete de Sierpinski; - Polígonos Regulares; - Ponto Médio; - Mediatriz, Bissetriz e Construção de ângulos; -Retas Paralelas e Perpendiculares; - Divisão de um segmento em partes iguais; - Contagem de elementos e Área de Triângulo e de Quadrado.	Criar os fractais no GeoGebra, Manipular o Triângulo de Sierpinski com o GeoGebra e analisar os elementos da estrutura.	- Atividade síncrona da construção dos fractais no GeoGebra; - Análise em sala de aula dos elementos no Triângulo de Sierpinski;
1h	Tapete de Sierpinski - Polígonos Regulares; - Contagem de elementos e Área de Triângulo e de Quadrado.	Manipular o Tapete de Sierpinski com o GeoGebra e analisar os elementos da estrutura.	- Atividade assíncrona para a análise dos elementos no Tapete de Sierpinski.
RECURSOS DIDÁTICOS: Computador, Projetor, GeoGebra.			

MATERIAIS DIDÁTICOS: Quadros com análise dos fractais.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES:

As construções do Triângulo e do Tapete de Sierpinski no GeoGebra seguirão os apontamentos feitos por Bemfica e Alves (2010) e por meio delas podem ser mostradas as utilizações de diversos conteúdos matemáticos. Pode ser tratada a construção dos polígonos regulares (triângulo e quadrado) por conta do formato inicial destes fractais, e a partir do processo iterativo serão utilizadas retas paralelas, perpendiculares, construções de ângulos, bissetrizes, mediatrizes e divisões de segmentos em partes iguais. Após a construção, serão construídos os quadros 11 e 13 pelos alunos, sendo o primeiro feito presencialmente e o 13 de maneira assíncrona.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. Ed. Belo Horizonte, Minas Gerais, Autêntica, 2005.

BEMFICA, Andrios, ALVES, Cassiana. **Fractais: progressão e série geométrica**. Uma metodologia de ensino, 2011. Disponível em: http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf . Acesso em: 08 nov. 2022.

7.8.4 Aula 4

AULA 4	PLANO DE AULA	Ano: 2022
	Disciplina: Matemática	
Códigos do Currículo de PE: (EM13MAT105PE10) (EM13MAT105PE11) (EM13MAT504PE44) (EM13MAT407PE40)	Docente: Matheus Henrique C. dos Santos	Nível: Médio
	Conteúdo: Utilização do Fragmentarium para a manipulação de fractais	CH: 2h
		Aula: 4/5
OBJETIVO GERAL: Através da utilização do software Fragmentarium, fazer a manipulação de fractais e analisar a Esponja de Menger e Pirâmide de Sierpinski.		

DURAÇÃO	CONTEÚDOS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	METODOLOGIA
20 min	Fractais, malhas hiperbólicas	Desenvolver nos alunos o interesse pela utilização do Fragmentarium na manipulação de fractais Mostrar a produção de malhas hiperbólicas	Manipulação do Software mostrada pelo professor e explorada posteriormente pelos alunos
40 min	Esponja de Menger Contagem Volume	Manipular a Esponja de Menger com o software e analisar os elementos da estrutura.	Atividade síncrona
1h	Pirâmide de Sierpinski Contagem Volume	Manipular a Pirâmide de Sierpinski com o software e analisar os elementos da estrutura.	Atividade assíncrona
RECURSOS DIDÁTICOS: Computador, Projetor, Fragmentarium.			
MATERIAIS DIDÁTICOS: Quadros com análise dos fractais.			
DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE: A atividade proposta sincronamente será a análise em relação aos apontamentos realizados por Barbosa (2005) em relação a determinar o volume dos cubos retirados nas iterações em função do volume do cubo inicial, e também de determinar, por meio de contagem a quantidade de cubos removidos e cubos restantes para cada nível. A atividade assíncrona será para analisar a estrutura fractal em relação aos apontamentos feitos por Bemfica e Alves (2011), os alunos deverão recriar o quadro 12 a partir de tal análise, determinando o número de tetraedros a serem gerados nas iterações, o número de octaedros a serem retirados e o volume dos octaedros retirados.			

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. Ed. Belo Horizonte, Minas Gerais, Autêntica, 2005.

BEMFICA, Andrios, ALVES, Cassiana. **Fractais: progressão e série geométrica**. Uma metodologia de ensino, 2011. Disponível em: http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progresao_e_serie_geometrica.pdf/ . Acesso em: 08 nov. 2022.

7.8.5 Aula 5

AULA 5		PLANO DE AULA	Ano: 2022
		Disciplina: Matemática	
Códigos do Currículo de PE: (EM13MAT105PE10) (EM13MAT105PE11) (EM13MAT308PE24) (EM13MAT407PE40)		Docente: Matheus Henrique C. dos Santos	Nível: Médio
		Conteúdo: Construção da Curva e Ilha de Koch	CH: 2h
			Aula: 5/5
OBJETIVO GERAL: Através da construção de uma ferramenta no GeoGebra para a geração da Curva e Ilha de Koch, desenvolver a análise dos seus elementos e abordar conteúdos da matemática.			
DURAÇÃO	CONTEÚDOS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	METODOLOGIA
1h	Curva de Koch; Polígonos Regulares; Ponto Médio de segmentos de reta; Mediatriz, Bissetriz e Construção de ângulos; Retas Paralelas e Perpendiculares;	Relacionar a construção de uma ferramenta para a geração fractal no GeoGebra; Desenvolver a Curva de Koch com a ferramenta criada e analisar os elementos da estrutura.	Atividade síncrona, seguindo as orientações dadas pelo professor para a criação de uma ferramenta no GeoGebra para a geração da Curva de Koch.

	Divisão de um segmento em partes iguais;		
1h	Ilha de Koch; Contagem de elementos; Área e perímetro do Triângulo Equilátero.	Desenvolver a Ilha de Koch com a ferramenta criada e analisar os elementos da estrutura.	Atividade assíncrona, a partir da utilização da ferramenta criada em sala de aula.
RECURSOS DIDÁTICOS: Computador, Projetor, GeoGebra.			
MATERIAIS DIDÁTICOS: Quadros com análise dos fractais.			
DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE: A atividade síncrona consiste no desenvolvimento de uma ferramenta para a geração da curva de Koch, como proposto pelo trabalho de Fuzzo et al (2008), possibilitando posteriormente a criação da ilha de Koch. Assim como as atividades desenvolvidas na aula 3, por meio da criação dessa ferramenta podem ser mostradas as utilizações de diversos conteúdos matemáticos. Por conta do formato dessa curva, pode ser tratada a construção do triângulo equilátero, e para tal, são utilizadas retas paralelas, perpendiculares, construções de ângulos, bissetrizes, mediatrizes e divisões de segmentos em partes iguais. A atividade assíncrona consiste na utilização da ferramenta criada para a criação da ilha de Koch, e por meio disso, desenvolver um quadro determinando para os elementos deste fractal semelhantemente aos apontamentos de Pallesi (2007) para as características da Curva de Koch. Os elementos analisados são o nível do fractal, o número de arestas, comprimento da aresta, perímetro da Ilha e área da ilha.			
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:			

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. Ed. Belo Horizonte, Minas Gerais, Autêntica, 2005.

FUZZO, Regis Alessandro; SANTOS, Talita Secorum dos; FERREIRA, Luciano. **Fractais e o GeoGebra: Construindo a curva de Koch (PO)**, 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1791/ . Acesso em: dezembro de 2021.

7.9 Considerações Finais

Este trabalho teve por objetivo tratar sobre as possibilidades de se utilizar a Geometria Fractal ao abordar conteúdos da Matemática no Ensino Básico. Por meio dele, determinamos análises, apontamentos e materiais didáticos que fornecem alternativas para a tal utilização. Foi utilizada uma metodologia de pesquisa definida da seguinte forma: com relação ao método, utiliza o dialético; com relação ao tipo de pesquisa, descritiva e documental; com relação à natureza, qualitativa. Portanto, foi feita uma pesquisa bibliográfica e documental sobre “Geometria Fractal”, “Educação Matemática Brasileira” e “Geometria Dinâmica”.

O estudo realizado apresentou as teorias da Geometria Fractal, iniciadas por Benoit Mandelbrot e continuadas por outros matemáticos. Foram demonstradas a construção dos fractais: Ilha de Koch, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Esponja de Menger e Pirâmide de Sierpinski, utilizando softwares de manipulação geométrica e foi ressaltada a importância da Geometria Dinâmica neste processo, no tocante à facilidade proporcionada por softwares em se obter representações e de se refazer construções geométricas.

Também foram exploradas relações numéricas, determinando a possibilidade de se traçar paralelos observáveis a partir de iterações sucessivas entre elementos e propriedades de fractais e os conceitos matemáticos de contagem, perímetros, áreas e volumes estudados na educação básica. Além disso, foram analisados materiais e documentos que defendem o uso da geometria dinâmica em atividades propostas

para o ensino básico, relacionando a geometria fractal aos conteúdos da matemática que podem ser abordados por intermédio dela.

Por fim, foram indicadas as nossas contribuições para a utilização da Geometria Fractal, e para isso foram feitas análises das atividades propostas por quatro artigos. Vista a necessidade do esclarecimento de alguns pontos nos trabalhos observados, foram feitos apontamentos sob à luz da geometria, da matemática e levando em consideração as propostas que os documentos oficiais da educação brasileira e pernambucana trazem para o ensino da matemática.

As contribuições trazidas a partir das análises feitas serviram de fundamento para o desenvolvimento e apresentação de um Plano de Ensino com Sequência Didática que conta com cinco aulas de matemática descritas em seus respectivos Planos de Aula. Concluindo assim as propostas feitas pelo autor para a utilização da geometria fractal na Matemática do Ensino Básico.

Em relação aos problemas encontrados no desenvolvimento do trabalho, ressaltamos a grande abrangência dos conceitos matemáticos relacionados à Geometria Fractal, tratar de cada um destes demandou de bastante tempo, o que acarretou em uma pesquisa extensa, muito maior do que a que se esperava ser feita ao início do trabalho. Além disso, desde o processo de desenvolvimento do projeto deste trabalho de conclusão de curso, tivemos que lidar com a COVID-19, que além de ter trazido grandes perdas de pessoas queridas, dificultou drasticamente a possibilidade dos encontros síncronos, modificando os períodos letivos nos quais foi desenvolvido o trabalho.

Para estudos futuros, vista a grande possibilidade das utilizações da Geometria Fractal no ensino da matemática apresentada aqui, indicam-se a criação de propostas para a modificação da BNCC e dos Currículos de Pernambuco, no que se refere à uma inserção mais frequente e mais influente desta geometria e de outras geometrias não-euclidianas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBON, Alfred James Dias. **A geometria no disco de Poincaré**. Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/29010/1/modelodiscopoincare.pdf> . Acesso em 08 nov. 2022.

ALMEIDA, Cínthia Soares de. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área**. Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2006. Disponível em: <https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1766/1/Cinthia%20Soares%20de%20Almeida.pdf>. Acesso em: 08 nov. 2022.

ASSIS, Thiago Albuquerque de; MIRANDA, José Garcia Vivas; MOTA, Fernando de Brito; ANDRADE, Roberto Fernandes Silva; CASTILHO, Caio Mário Castro de. **Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideais**. São Paulo: Revista Brasileira de Ensino de Física, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172008000200005/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira. **Construção do conceito de área e perímetro: Uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica**. Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2004. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/dissertacao_loreni.pdf. Acesso em: 08 nov. 2022.

BARBOSA, Lara Martins; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da. **Sobre pensamento computacional na construção de um Triângulo de Sierpinski com o GeoGebra**. Juiz de Fora: Pesquisa e debate em educação, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufjf.br/index.php/RPDE/article/view/31129/20857/> . Acesso em: 08 nov. 2022.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. Ed. Belo Horizonte, Minas Gerais, Autêntica, 2005.

BECKER, Fernando. **Modelos pedagógicos e modelos epistemológicos**. Porto Alegre: Educação e realidade, 1994. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/231918/> . Acesso em: 08 nov. 2022.

BEMFICA, Andrios, ALVES, Cassiana. **Fractais: progressão e série geométrica.** Uma metodologia de ensino, 2011. Disponível em: http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf/ . Acesso em: 08 nov. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. **Matemática – Volume 17 (Coleção Explorando o Ensino).** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7842-2011-matematica-capa-pdf&category_slug=abril-2011-pdf&Itemid=30192/. Acesso em: 01 nov. 2022.

FUZZO, Regis Alessandro; SANTOS, Talita Secorum dos; FERREIRA, Luciano. **Fractais e o GeoGebra: Construindo a curva de Koch (PO),** 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1791/ . Acesso em: dezembro de 2021.

FOLHA DE SÃO PAULO, **Intuições Fractais,** São Paulo: Revista Piauí, edição 50, 2010. Disponível em: <https://piaui.folha.uol.com.br/materia/intuicoes-fractais/>. Acesso em: 08 nov. de 2022

GAJKO, Thiago Crestani, **Possibilidades para a educação a distância em matemática.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/37128> . Acesso em: 14 nov. 2022.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucília Maria Costi. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados,** Porto Alegre: Informática na educação: teoria e prática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1999. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/20962/000243348.pdf?sequence=1> . Acesso em 08 nov. 2022.

GUIMARÃES, Bruno Alysson Andrade; SANTOS, Wilson Luiz de Souza. **A Problemática no Ensino da Geometria**. 2014. Disponível em: https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD_EaD/article/view/1210/ . Acesso em: dezembro de 2021.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar geometria?** São Paulo: Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1995. Disponível em: https://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf/. Acesso em: 08 nov. 2022.

MACHADO, Ivete Alves. **Algumas dificuldades do ensino da Matemática na 7ª série do ensino fundamental**, Taguatinga: Universidade Católica de Brasília, 2005. Disponível em: <https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/handle/10869/1817/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MEIER, Melissa; SEIDEL, Suzana; BASSO, Marcus V. de A. **Imagine e Shapari - Software gráficos no Ensino e Aprendizagem de Matemática**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/13813> . Acesso em: 14 nov. 2022.

NASCIMENTO, Eimard Gomes Antunes do. **Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de Geometria: reflexão da prática na escola**. Fortaleza, Universidade Federal do Ceará, 2012. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf>. Acesso em 08 nov. 2022

OLIVEIRA, Marcos Aurélio Tomaz de. **A geometria do conjunto de Cantor, do tapete de Sierpinski e da esponja de Menger**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/57647/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti. **Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio**, João Pessoa: Revista Principia, Instituto Federal da Paraíba, 2017. Disponível em:

<https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/1612/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

PALLES, Denise Maria. **Motivação do estudo de progressões aritméticas e geométricas através da Geometria Fractal**, Curitiba, 2007: Universidade Federal do Paraná. Disponível em:
<https://docs.ufpr.br/~ewkaras/especializa/pallesimono07.pdf>. Acesso em : 08 nov 2002

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**, Campinas: Revista Zetetiké, Universidade Estadual de Campinas, 1993. Disponível em:
<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco: ensino fundamental - área de matemática**. Pernambuco, 2019. Disponível em:
[http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica\(2\).pdf](http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica(2).pdf). Acesso em: 08 nov. 2022.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação de Esportes. **Currículo de Pernambuco: ensino médio**. Pernambuco, 2021. Disponível em:
http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/523/CURRICULO_DE_PERNAMBUCO_DO_ENSINO_MEDIO_2021_ultima_versao_17-12-2021.docx.pdf. Acesso em: 08 nov. 2022.

RABAY, Yara S. F. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal**. Tese (Mestrado) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7651?locale=pt_BR. Acesso em: 08 nov. 2022.

RICHIT, Adriana. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica: Repensando a formação inicial docente em matemática**. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2005. Disponível em:
https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91153/richit_a_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 08 nov. 2022.

SANTOS, Jamison Luiz Barros; SANTOS, Gracineide Barros; ARAGÃO, Ildema Gomes. **Possibilidades e Limitações: as dificuldades existentes no processo ensino-aprendizagem da Matemática**, Aracajú: 6º Encontro de Formação de Professores, 2013. Disponível em: <https://www.infoescola.com/pedagogia/possibilidades-e-limitacoes-as-dificuldades-existentis-no-processo-de-ensino-aprendizagem-da-matematica/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

SILVA, Douglas Cabral da. **Construindo o triângulo de Sierpinski e a curva de Koch no GeoGebra: possibilidade de inserção da Geometria Fractal no 9º ano do Ensino Fundamental**. Disponível em: <http://repositorioinstitucional.uea.edu.br/handle/riuea/3250/> . Acesso em: dezembro de 2021.

SIMMONS, George Finlay. **Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução: Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1988

STORMOWSKI, Vandoir. **Estudando matrizes a partir de transformações geométricas**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/14965> . Acesso em: 14 nov. 2022.

SUASSUNA, Ariano. **Iniciação à Estética**. Rio de Janeiro: José Olympio, 2012.

TAVARES, Neide Rodriguez Barea. **História da informática educacional no Brasil observada a partir de três projetos públicos**. São Paulo: Faculdade de educação de São Paulo, 2001. Disponível em: <https://www.apadev.org.br/pages/workshop/historialnf.pdf/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

TIBURCIO, Ricardo; BELLEMAIN, Franck; RODRIGUEZ, Amanda. **Concepção e evolução da engenharia didático-informática: uma proposta de metodologia para a produção de software educativo**. Pernambuco: Universidade Federal de Pernambuco, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/249773/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

VIELMO, Sandra Eliza; DALBERTO, Francéli. **A matemática fractal e o GeoGebra no ensino de matemática**. Montevideu: Sociedad de Educación Matemática Uruguay, VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática, 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/19194/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

VALIM, João César Maciel; COLUCCI, Viviane. Geometria Fractal no ensino fundamental e médio. Cascavel: UNIOESTE, 2008. Disponível em: <https://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

VALENTE, José Armando. **A história do projeto Educom**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2006. Disponível em: <https://www.nied.unicamp.br/projeto/educom/>. Acesso em: 08 nov. 2022.

**APÊNDICE A – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental
selecionadas do Currículo de Pernambuco (1º Ano)**

1º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Números	Contagem de rotina	(EF01MA01PE) Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem (valor monetário, número de estudantes em sala de aula, etc.) em diferentes situações cotidianas e reconhecer situações em que os números não indicam contagem nem ordem, mas sim código de identificação (número de telefone, casa, placa de carro, etc.).
	Contagem ascendente e descendente	
	Reconhecimento de números no contexto diário: indicação de quantidades, indicação de ordem ou indicação de código para a organização de informações.	
	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação	(EF01MA02PE) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA03PE) Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar “tem mais”, “tem menos” ou “tem a mesma quantidade”.

	Leitura, escrita e comparação de números naturais (até 100) Reta numérica	(EF01MA04PE) Contar a quantidade de objetos de coleções até 100 unidades e apresentar o resultado por registros verbais e simbólicos em situações de seu interesse como jogos, brincadeiras, materiais da sala de aula, entre outros. (EF01MA05PE) Comparar números naturais de até duas ordens em situações cotidianas, com e sem suporte da reta numérica, como também de materiais manipuláveis diversos
	Construção de fatos básicos da adição	(EF01MA06PE) Construir fatos básicos da adição (utilizando-se de diversas estratégias de cálculos: composição e decomposição por meio de adições; procedimentos de contagem, diversas formas de representação) e utilizá-los em procedimentos de cálculo para resolver problemas.
	Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar)	(EF01MA08PE) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
Álgebra	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências	(EF01MA09PE) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida

	Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	(EF01MA10PE) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
Geometria	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico	(EF01MA13PE) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.
	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais	(EF01MA14PE) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos (explorando o uso de figuras planas para criação de desenhos, por exemplo colagem, lápis e papel, "carimbos", entre outros).
Grandezas e Medidas	Estimativas e Medidas de comprimento, massa e capacidade: comparações e unidades de medida não convencionais	(EF01MA15PE) Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano. (EF01MAXPE) Utilizar estimativa de comprimentos, capacidades e massas não convencionais (por exemplo: palmos, passos, copos d'água, entre outros).

Probabilidade e Estatística	Leitura de tabelas e de gráficos de colunas simples	(EF01MA21PE) Ler dados expressos em tabelas e em gráficos de colunas simples.
	Coleta e organização de informações	(EF01MA22PE) Realizar pesquisa, envolvendo até duas variáveis categóricas de seu interesse e universo de até 30 elementos, e organizar dados por meio de representações pessoais.
	Registros pessoais para comunicação de informações coletadas	

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE B – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (2º Ano)

2º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Números	Leitura, escrita, comparação e ordenação de números de até três ordens pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e papel do zero)	(EF02MA01PE) Ler, comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero) e de sua representação na reta numérica. (EF02MA02PE) Fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades). (EF02MA03PE) Comparar quantidades de objetos de dois conjuntos, por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois, entre outros), para indicar “tem mais”, “tem menos” ou “tem a mesma quantidade”, indicando,

		quando for o caso, quantos a mais e quantos a menos.
	Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar)	(EF02MA06PE) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até três ordens, com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar e comparar, utilizando estratégias pessoais ou convencionais.
	Problemas envolvendo adição de parcelas iguais (multiplicação)	(EF02MA07PE) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.
	Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte	(EF02MA08PE) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
		(EF02MAXPE) Resolver problemas em linguagem verbal, envolvendo as ideias de repartir uma coleção em partes iguais e de determinar quantas vezes uma quantidade cabe em outra.
Álgebra	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas	(EF02MA09PE) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.

	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	((EF02MA10PE) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11PE) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
Geometria	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento e características	(EF02MA14PE) Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico.
	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características	(EF02MA15PE) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) por meio de características comuns em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos, utilizando materiais manipuláveis e/ou recursos digitais.
Grandezas e Medidas	Medida de comprimento: unidades não padronizadas e padronizadas (metro, centímetro e milímetro)	(EF02MA16PE) Estimar, medir e comparar comprimentos de lados de salas (incluindo contorno) e de polígonos, utilizando unidades de medida não padronizadas (por exemplo: palmo, passo, pé, etc.) e padronizadas (metro, centímetro e milímetro) e instrumentos adequados (régua, fita métrica e etc.).
	Medida de capacidade e de massa: unidades de medida não convencionais e convencionais (litro, mililitro, cm^3 , grama e quilograma)	(EF02MA17PE) Estimar, medir e comparar capacidade e massa, utilizando estratégias pessoais e unidades de medida não padronizadas (copo, xícara, garrafa, colher, etc.) ou padronizadas (litro, mililitro, centímetro cúbico, grama e quilograma) e

		instrumentos adequados (balança, recipiente graduado, etc.).
Probabilidade e Estatística	Coleta, classificação e representação de dados em tabelas simples e de dupla entrada e em gráficos de colunas	(EF02MA22PE) Comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada e em gráficos de colunas simples ou barras para melhor compreender aspectos da realidade próxima.
		(EF02MA23PE) Realizar pesquisa em universo de até 30 elementos, escolhendo até três variáveis categóricas de seu interesse, organizando os dados coletados em listas, tabelas e gráficos de colunas simples.

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE C – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (3º Ano)

3º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Números	Construção de fatos fundamentais da adição, subtração e multiplicação	(EF03MA03PE) Construir e utilizar fatos básicos da adição, subtração e da multiplicação (utilizando diversas estratégias de cálculos: composição e decomposição por meio de adições e multiplicações, procedimentos de contagem, diversas formas de representação, inclusive com sinais de adição, multiplicação e igualdade) para o cálculo mental ou escrito.

	Procedimentos de cálculo (mental e escrito) com números naturais: adição e subtração	(EF03MA05PE) Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração com números naturais.
	Problemas envolvendo significados da adição e da subtração: juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades	(EF03MA06PE) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo cálculo mental.
	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida	(EF03MA07PE) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição /configuração retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros. (EF03MA08PE) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida por meio de estratégias e registros pessoais. (EF03MAXPE) Reconhecer que a multiplicação e a divisão são operações inversas
	Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte	(EF03MA09PE) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes (por exemplo, $15:3 = 5$ pode ser escrito como $15/3 = 5$, indicando que 5 é a terça parte de 15).

Álgebra	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10PE) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes (por exemplo, 3, 13, 23, 33... – adição sucessiva de 10; ou 91, 85, 79, 73... – subtração sucessiva de 6).
Geometria	Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência	(EF03MA12PE) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência (por exemplo: siga em frente, vá à direita, a próxima quadra à esquerda, em cima, em baixo, atrás, em frente, entre a quadra esportiva e o portão da escola, etc).
	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações	(EF03MA13PE) Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras. (EF03MA14PE) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações e representando suas vistas a partir de diferentes posições (lateral, frontal e superior).
	Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características	(EF03MA15PE) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade,

		posições relativas e comprimento) e vértices. (EF03MAXPE) Compor e decompor figuras, a partir das figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo)
	Congruência de figuras geométricas planas	(EF03MA16PE) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais, apresentadas em diferentes disposições
Grandezas e Medidas	Significado de medida e de unidade de medida	(EF03MA17PE) Reconhecer que o resultado de uma medida depende da unidade de medida utilizada. (EF03MA18PE) Escolher a unidade de medida (metro, centímetro e milímetro; hora, minuto e segundo; litro e mililitro) e o instrumento mais apropriado para medições de comprimento (régua e fita métrica), tempo (relógio e calendário) e capacidade (recipiente graduado).
	Medidas de comprimento (unidades não convencionais e convencionais): registro, instrumentos de medida, estimativas e comparações	(EF03MA19PE) Estimar, medir e comparar comprimentos, utilizando unidades de medida não padronizadas (palmo, passos, pé, etc.) e padronizadas mais usuais (metro, centímetro e milímetro) e diversos instrumentos de medida (régua, fita métrica, "barbante" (para linhas curvas) e etc.).
	Medidas de capacidade e de massa (unidades não convencionais e convencionais): registro, estimativas e comparações	(EF03MA20PE) Estimar e medir capacidade e massa, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (litro, mililitro, quilograma, grama e miligrama), reconhecendo-as em leitura de rótulos e embalagens, entre outros.
	Comparação de áreas por superposição	(EF03MA21PE) Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces

		de objetos, de figuras planas ou de desenhos.
Probabilidade e Estatística	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos de barras	(EF03MA26PE) Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas.
	Coleta, classificação e representação de dados referentes a variáveis categóricas, por meio de tabelas e gráficos	(EF03MA28PE) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada e representá-los em gráficos de colunas simples, com e sem uso de tecnologias digitais.

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE D – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (4º Ano)

4º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Números	Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais	(EF04MA03PE) Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado.
		(EF04MA04PE) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.-
	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida	(EF04MA06PE) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização/ configuração retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas como

		cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
		(EF04MA07PE) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
	Problemas de contagem	(EF04MA08PE) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
	Números racionais: frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$)	(EF04MA09PE) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso, entre outros
Álgebra	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural	(EF04MA11PE) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	(EF04MA13PE) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão para aplicá-las na resolução de problemas.

	Propriedades da igualdade	(EF04MA14PE) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
		(EF04MA15PE) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
Geometria	Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido. Paralelismo e perpendicularismo	(EF04MA16PE) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.
	Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características	(EF04MA17PE) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais, apresentadas em diferentes posições
	Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e softwares	(EF04MA18PE) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria, inclusive, associando ângulo a giro ou mudança de direção
	Simetria de reflexão	(EF04MA19PE) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria
Grandezas e Medidas	Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de	(EF04MA20PE) Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando

	unidades de medida convencionais mais usuais	unidades de medidas padronizadas mais usuais (Milímetro (mm), centímetro (cm), metro (m), quilômetro (km), miligrama (mg), grama (g), quilograma (kg), mililitro (ml) e litro (l)) valorizando e respeitando a cultura local (uso de hectare e arroba, por exemplo).
	Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas	(EF04MA21PE) Medir, comparar e estimar área de figuras planas (incluindo seu perímetro) desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinhos, reconhecendo que duas figuras com formatos (perímetro) diferentes podem ter a mesma medida de área.
Probabilidade e Estatística	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e colunas e gráficos pictóricos	(EF04MA27PE) Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada e em gráficos de colunas ou pictóricos, com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise.
		(EF04MA28PE) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas e organizar dados coletados por meio de tabelas e gráficos de colunas simples ou agrupadas, com e sem uso de tecnologias digitais.

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE E – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (5º Ano)

5º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE

Números	Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	(EF05MA03PE) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica e outros materiais concretos como recurso.
	Cálculo de porcentagens e representação fracionária	(EF05MA06PE) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora em contextos de educação financeira, entre outros.
	Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita	(EF05MA07PE) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
	Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais	(EF05MA08PE) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos
Álgebra	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10PE) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.

		(EF05MA11PE) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
	Grandezas diretamente proporcionais	(EF05MA12PE) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros
	Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA13PE) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo
Geometria	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características	(EF05MA16PE) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos, utilizando e/ou recursos tecnológicos.
	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos	(EF05MAXPE) Reconhecer ângulo de um quarto de volta, de meia volta e de uma volta.
		(EF05MA17PE) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
	Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes	(EF05MA18PE) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

Grandezas e Medidas	Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais	(EF05MA19PE) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
	Áreas e perímetros de figuras poligonais: algumas relações	(EF05MA20PE) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.
	Noção de volume	(EF05MA21PE) Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos, como por exemplo o material dourado. (EFO5MAXPE) Compreender o significado de um metro quadrado e de um centímetro quadrado para comparar áreas e as relações entre centímetro cúbico, decímetro cúbico e metro cúbico com o litro.
Probabilidade e Estatística	Leitura, coleta, classificação interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráfico de colunas agrupadas, gráficos pictóricos e gráfico de linhas	(EF05MA25PE) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas, organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas, pictóricos e de linhas, com e sem uso de tecnologias digitais, e apresentar texto escrito sobre a finalidade da pesquisa e a síntese dos resultados.

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE F – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (6º Ano)

6º ANO

Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Números	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais	(EF06MA03PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escrito, exatos ou aproximados), com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, enfatizando os diferentes significados das operações fundamentais, com e sem uso de calculadora.
	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07PE) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros (parte/todo) e resultado de divisão e suas aplicabilidades no cotidiano por meio da utilização de materiais manipuláveis, identificando também frações equivalentes.
		(EF06MA08PE) Reconhecer, comparar e ordenar os números racionais positivos que podem ser expressos nas formas fracionária, decimal e percentual, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica
		(EF06MA09PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora, explorando situações do cotidiano.
		(EF06MA10PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA11PE) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação fracionária e decimal, envolvendo as quatro

		operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
	Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas sem fazer uso da “regra de três”	(EF06MA13PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora em contextos de educação financeira, entre outros.
Álgebra	Propriedades da igualdade	(EF06MA14PE) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas (por exemplo, explorando a metáfora da balança).
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	(EF06MA15PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão ou quociente entre as partes e entre uma das partes e o todo.
Geometria	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	(EF06MA16PE) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante em situações como a localização dos vértices de um polígono.
	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	(EF06MA17PE) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial,

		associando cada poliedro a sua planificação.
	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	(EF06MA18PE) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros, podendo utilizar materiais manipuláveis. (EF06MA19PE) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. (EF06MA20PE) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	(EF06MA21PE) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano e/ou tecnologias digitais.
	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares	(EF06MA22PE) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF06MA23PE) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).
Grandezas e Medidas	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	(EF06MA24PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e

		volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
	Ângulos: noção, usos e medida	(EF06MA25PE) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.
		(EF06MA26PE) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão.
		(EF06MA27PE) Determinar medidas da abertura de ângulos por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.
	Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado	(EF06MA29PE) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado representado em malhas quadriculadas (ou em outros meios, inclusive softwares) ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
Probabilidade e Estatística	Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas	(EF06MA31PE) Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico.
		(EF06MA32PE) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

	Coleta de dados, organização e registro	(EF06MA33PE) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos estudantes e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.
	Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações	
	Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas	(EF06MA34PE) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE G – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (7º Ano)

7º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Números	Múltiplos e divisores de um número natural	(EF07MA01PE) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
	Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples	(EF07MA02PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA05PE) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
		(EF07MA06PE) Reconhecer que as resoluções de um grupo

		de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
		(EF07MA07PE) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
		(EF07MA08PE) Reconhecer, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
		(EF07MA09PE) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA10PE) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos nas suas diferentes representações e associá-los a pontos da reta numérica.
		(EF07MA11PE) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
		(EF07MA12PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
	Álgebra	(EF07MA13PE) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
		(EF07MA14PE) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
		(EF07MA15PE) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades

		encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16PE) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF07MA17PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18PE) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
Geometria	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	(EF07MA19PE) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro, verificando as proporções entre os segmentos.
		(EF07MA20PE) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
	Simetrias de translação, rotação e reflexão	(EF07MA21PE) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros
	A circunferência como lugar geométrico	(EF07MA22PE) Construir circunferências, utilizando compasso e ou softwares, reconhecê-las como lugar

		geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes
	Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF07MA23PE) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica
	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	(EF07MA24PE) Construir triângulos, usando régua, compasso e/ou softwares, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
		(EF07MA25PE) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
		(EF07MA26PE) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	(EF07MA27PE) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
		(EF07MA28PE) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
Grandezas e Medidas	Problemas envolvendo medições	(EF07MA29PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de

		grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.
	Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais	(EF07MA30PE) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico) e suas conversões para medidas de capacidade (litros e mililitros).
	Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros	(EF07MA31PE) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros, explorando os diversos tipos de contextos.
	Medida do comprimento da circunferência	(EF07MA32PE) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas, inclusive com suporte em materiais manipuláveis e/ou tecnologias digitais.
Probabilidade e Estatística	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências	(EF07MA34PE) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculos de probabilidades ou estimativa por meio de frequência de ocorrências

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE H – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (8º Ano)

8º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Números	Notação científica	(EF08MA01PE) Identificar em diversos contextos valores numéricos muito altos ou muito pequenos, efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
	Potenciação e radiciação	(EF08MA02PE) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação para compreender a representação de uma raiz como potência de expoente fracionário.
		(EF08MAXPE) Reconhecer a radiciação como operação inversa da potenciação.
	O princípio multiplicativo da contagem	(EF08MA03PE) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
	Porcentagens	(EF08MA04PE) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais, em contextos de situações cotidianas e educação financeira.
Álgebra	Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07PE) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA08PE) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de

		equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano e tecnologias digitais como recursos.
	Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$	(EF08MA09PE) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$
	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10PE) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11PE) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12PE) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano (utilizando tecnologias digitais). (EF08MA13PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas.
Geometria	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	(EF08MA14PE) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA15PE) Construir, utilizando instrumentos de desenho e/ ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz,

		bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares.
		(EF08MA16PE) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros, compasso e/ou softwares.
	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problema	(EF08MA17PE) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18PE) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
Grandezas e Medidas	Área de figuras planas	(EF08MA19PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos) em situações como determinar medida de terrenos.
	Área do círculo e comprimento de sua circunferência	
Probabilidade e Estatística	Princípio multiplicativo da contagem	(EF08MA22PE) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
	Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados	(EF08MA23PE) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

	Organização dos dados de uma variável contínua em classes	(EF08MA24PE) Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
--	---	--

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE I – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Fundamental selecionadas do Currículo de Pernambuco (9º Ano)

9º ANO		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades PE
Números	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta	(EF09MA01PE) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono regular e alturas de um triângulo quando se toma a medida de cada lado como unidade).
	Potências com expoentes negativos e fracionários	(EF09MA03PE) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes negativos e fracionários e com as operações inversas.
	Números reais: notação científica e problemas	(EF09MA04PE) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações e utilizando tecnologias educacionais com vistas a aplicação nas ciências da natureza.
	Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	(EF09MA05PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias

		digitais, inclusive, no contexto da educação financeira.
Álgebra	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	(EF09MA06PE) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar e resolver situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, explorando diferentes tecnologias
	Razão entre grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07PE) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes em diversos contextos como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF09MA08PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis	(EF09MA09PE) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
	Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	
Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF09MA10PE) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, explorando o ambiente escolar e espaços extraescolares (praças, igrejas, monumentos e demais

		construções da circunvizinhança).
	Semelhança de triângulos	(EF09MA12PE) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, explorando o conceito de proporcionalidade, representados em malhas quadriculadas ou em outros meios.
	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA13PE) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos, explorando situações encontradas no ambiente escolar e espaços extraescolares. (EF09MA14PE) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	Polígonos regulares	(EF09MA15PE) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
	Distância entre pontos no plano cartesiano	(EF09MA16PE) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano

	Vistas ortogonais de figuras espaciais	(EF09MA17PE) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
Grandezas e Medidas	Volume de prismas e cilindros	(EF09MA19PE) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
Probabilidade e Estatística	Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos	(EF09MA22PE) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central (média aritméticas simples, ponderada e geométrica, moda e mediana).

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE J – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Médio selecionadas do Currículo de Pernambuco (1º Ano)

1º ANO - MÉDIO		
Habilidade de Área da BNCC	Habilidades específicas dos componentes	Objetos de conhecimento
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(EM13MAT301PE17) Resolver e elaborar situações-problema do cotidiano, envolvendo a matemática e/ou outros domínios do conhecimento em torno das equações lineares simultâneas, por exemplo, sistemas de equações do 1º grau, utilizando técnicas algébricas	Equações lineares e Sistemas de equações do 1º grau

	(substituição, escalonamento etc.) e gráficas, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(EM13MAT302PE18) Construir modelos matemáticos para resolver situações-problema em vários contextos, envolvendo funções polinomiais do 1º e 2º grau, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais	Funções Polinomiais do 1º e 2º Grau
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.	(EM13MAT401PE33) Converter representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos em que as funções tenham um comportamento proporcional, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Funções Polinomiais do 1º grau: proporcionalidade
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.	(EM13MAT402PE34) Converter e analisar representações algébricas de funções polinomiais do 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, reconhecendo o papel dos coeficientes a, b e c no gráfico, como também distinguir os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado de outra variável, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais	Funções Polinomiais do 2º grau: proporcionalidade
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	(EM13MAT501PE40) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	Função Polinomial do 1º grau: relações e representações

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.	(EM13MAT502PE41) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Função Polinomial do 2º grau: relações e representações
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	(EM13MAT507PE46) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de situações-problema em diversos contextos.	Função afim de domínio discreto. Progressão Aritmética
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	(EM13MAT508PE47) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de situações-problema em diversos contextos.	Função Exponencial de domínio discreto. Progressão Geométrica
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação é utilizar uma reta para descrever a relação observada.	(EM13MAT510PE49) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas de acordo com a lei de formação que determina o comportamento das variáveis, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levando em conta a variação e utilização de uma reta para descrever a relação observada	Variáveis numéricas e conjunto de dados numéricos.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes	(EM13MAT307PE23) Utilizar diferentes modelos de situações-problema para a obtenção da medida da área de uma superfície por meio, por exemplo, da aproximação	Área de figuras geométricas planas

etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais	por cortes, composição e decomposição, entre outros, deduzindo expressões de cálculos, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de Algarismos significativos e Algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro	(EM13MAT313PE29) Utilizar, quando necessário, a notação científica e sua ordem de grandeza, para expressar medida, compreendendo as noções de Algarismos significativos e duvidosos, reconhecendo que toda medida é uma aproximação, consequência das limitações de sentido e imprecisão dos instrumentos, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Notação Científica. Medidas. Ordem de Grandeza. Algarismos significativos e duvidosos.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).	(EM13MAT314PE30) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras, explorando a noção de grandezas como aceleração, densidade, energia elétrica, entre outras.	Grandezas: razão ou produto de outras grandezas
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.	(EM13MAT202PE15) Realizar pesquisa amostral, utilizando a coleta de dados, de acordo com a realidade da sua região, comunicando os resultados por meio de relatórios, contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão) com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Dados de Pesquisas Estatística. Gráficos Estatísticos. Medidas de Tendência Central e de Dispersão.

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatísticas, geometria e álgebra.	(EM13MAT406PE38) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados de pesquisas estatísticas relacionadas ao cotidiano (gravidez na adolescência, sexualidade, entre outros), com e/ou sem apoio de tecnologias digitais que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.	Gráficos e Tabelas de Frequências de Pesquisas Estatísticas.
--	---	--

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE K – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Médio selecionadas do Currículo de Pernambuco (2º Ano)

2º ANO - MÉDIO		
Habilidade de Área da BNCC	Habilidades específicas dos componentes	Objetos de conhecimento
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	(EM13MAT304PE20) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo funções exponenciais, interpretando a variação das grandezas envolvidas em diversos contextos como, por exemplo, no estudo da Matemática Financeira, entre outros, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Funções Exponenciais: variação de grandezas
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	(EM13MAT305PE21) Resolver e elaborar situações-problema, envolvendo funções logarítmicas, interpretando a variação das grandezas em contextos diferentes como, por exemplo, o estudo da radioatividade, Matemática Financeira, entre outros, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Funções Logarítmicas: variação de grandezas
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de	(EM13MAT403PE35) Analisar e estabelecer relações, com e/ou sem o uso de tecnologias	Funções Exponenciais e Logarítmicas: relações,

tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função	digitais, entre as representações de funções exponenciais e logarítmicas expressas em tabelas e em planos cartesianos para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento ou decrescimento, raízes, entre outras) de cada função, destacando-as como funções inversas.	representações e características
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	(EM13MAT309PE25) Resolver e elaborar situações-problema de diferentes contextos, envolvendo o cálculo de áreas totais e volumes de sólidos geométricos (prismas, pirâmides e corpos redondos) como, por exemplo, o gasto de material para revestir uma superfície ou para preencher o interior de uma caixa, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais	Áreas e volumes de sólidos geométricos
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.	(EM13MAT505PE45) Investigar e resolver situações-problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem o uso de aplicativos da geometria dinâmica, para conjecturar em torno dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.	Polígonos: tipos ou composições.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.	(EM13MAT506PE46) Representar e interpretar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas, com e/ou sem o uso de aplicativos da geometria dinâmica.	Polígonos Regulares: área e perímetro

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas	(EM13MAT102PE03) Interpretar e utilizar tabelas e gráficos a partir dos dados neles contidos, construindo argumentos e/ou inferências e identificando possíveis inadequações que induzam ao erro de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.	Tabelas e Gráficos: argumentos e/ou inferências, inadequações.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	(EM13MAT310PE26) Resolver e elaborar situações-problema de contagem, envolvendo agrupamentos que dependam da ordem dos elementos ou não (com ou sem repetição), por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, bem como da Análise Combinatória, utilizando estratégias diversas.	Agrupamentos de elementos que dependam da ordem ou não (com repetição ou não). Princípio multiplicativo e aditivo. Análise Combinatória: permutação, arranjo e combinação

Fonte: PERNAMBUCO (2019).

APÊNDICE L – Unidades e atividades desenvolvidas no Ensino Médio selecionadas do Currículo de Pernambuco (3º Ano)

3º ANO - MÉDIO		
Habilidade de Área da BNCC	Habilidades específicas dos componentes	Objetos de conhecimento
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	(EM13MAT105PE10) Identificar e interpretar as transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) para construir figuras, analisando elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Transformações Isométricas

	(EM13MAT105PE11) Aplicar as transformações homotéticas para construir e analisar figuras da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras), analisando os seus elementos, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Transformações Homotéticas
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	(EM13MAT308PE24) Aplicar as relações métricas e as leis de seno e cosseno ou as noções de congruência e semelhança para resolver e elaborar situações-problema que envolvam triângulos em variados contextos, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Relações Métricas, Congruência e Semelhança de Triângulos. Leis do seno e cosseno.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.	(EM13MAT504PE44) Investigar e compreender processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas, incluindo o princípio de Cavalieri, para a dedução das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras, com e/ou sem o uso de tecnologias digitais.	Volume dos Prismas, Pirâmides, Cilindros, Cones e Esferas. Princípio de Cavalieri.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.	(EM13MAT311PE27) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades para resolver e elaborar situações-problema que envolvam o cálculo da probabilidade.	Probabilidade: espaço amostral e contagem.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.	(EM13MAT511PE51) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.	Probabilidade: espaços amostrais discretos ou não; eventos equiprováveis ou não

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.	(EM13MAT407PE40) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas, tabelas e gráficos, como por exemplo, histogramas de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros, identificando os mais eficientes para a análise de uma determinada situação problema, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais.	Diagramas, Tabelas e Gráficos de pesquisas estatísticas.
--	--	---

Fonte: PERNAMBUCO (2019).