



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

GABRIEL VARELA SOARES DA SILVA

**POTENCIALIDADE E LIMITAÇÕES DOS SOFTWARES GEOGEBRA E CABRI
GÉOMÈTRE II: uma análise à luz dos pressupostos apresentados pela Geometria
Projetiva**

RECIFE
2022

GABRIEL VARELA SOARES DA SILVA

**POTENCIALIDADE E LIMITAÇÕES DOS *SOFTWARES* GEOGEBRA E CABRI
GÉOMÈTRE II: uma análise à luz dos pressupostos apresentados pela Geometria
Projetiva**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, Centro de Educação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain

RECIFE
2022

Catálogo na fonte
Bibliotecário Danilo Leão, CRB-4/2213

S586p

Silva, Gabriel Varela Soares da.

Potencialidade e limitações dos softwares Geogebra e Cabri Géomètre II: uma análise à luz dos pressupostos apresentados pela Geometria Projetiva. / Gabriel Varela Soares da Silva. – Recife, 2022.

134 f.: il.

Orientador: Franck Gilbert René Bellemain.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2022.

Inclui Referências.

1. Geometria Projetiva. 2. Geometria Dinâmica. 3. Análise de Software. I. Bellemain, Franck Gilbert René. (Orientador). II. Título.

516 (23. ed.)

UFPE (CE2022-097)

GABRIEL VARELA SOARES DA SILVA

**POTENCIALIDADE E LIMITAÇÕES DOS SOFTWARES GEOGEBRA E CABRI
GÉOMÈTRE II: uma análise à luz dos pressupostos apresentados pela Geometria
Projetiva**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 17/06/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain (Orientador e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos (Examinadora Interna)
Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga (Examinador Externo)
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado a Marta Varela, minha mãe. Uma mulher guerreira que teve que criar dois filhos sozinha. Por circunstâncias da vida, hoje os papéis se inverteram, enquanto eu cuido dela, ela ora por mim. E assim vamos sobrevivendo a um dia de cada vez. E a Petrônio Soares (*In memoriam*), meu pai, com o qual tive pouco tempo de convívio, mas vive eternamente em meu coração.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente eu agradeço a Deus por tudo. Sei que se não fosse a Sua graça e misericórdia eu não estaria aqui.

À minha mãe, que tem sido uma inspiração e tem me motivado apesar das circunstâncias. Vale ressaltar que em março de 2020, início do mestrado, início do meu contrato como professor substituto da Universidade Federal de Pernambuco e início do isolamento social devido à pandemia do covid-19, minha mãe teve um Acidente Vascular Cerebral (AVC). Imediatamente tive que assumir as suas responsabilidades e com isso passei o primeiro ano do mestrado sem conseguir produzir nada para a minha pesquisa. Mas ela sempre esteve orando por mim e me incentivando a não desistir dos meus sonhos.

Ao professor Franck, que me orientou durante esses dois anos, sendo extremamente paciente, compreensível e sensível aos problemas pessoais que enfrentei durante esse período.

Às professoras Thyana Galvão e Sandra Melo, que me apoiaram durante esse tempo esclarecendo dúvidas ou trazendo palavras de apoio e motivação.

Aos parceiros geômetras: Polyana, Amanda Melo, Cesário e Gabrielly, que a Licenciatura em Expressão Gráfica trouxe para a minha vida. Especialmente Elizabeth e Amanda Rodrigues que informalmente foram minhas coorientadoras, foram “divã” e principalmente incentivadoras durante esses dois longos anos.

Às minhas colegas de turma: Anailde, Jaciele e Izabela, que também foram incentivadoras nesse processo. E mesmo sem nos conhecermos pessoalmente, nos identificamos bastante.

Aos meus amigos da igreja, que sei que torcem por minhas conquistas e estão sempre orando por mim.

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

(Johannes Kepler)

RESUMO

Essa pesquisa tem como objetivo efetuar uma análise epistemológica-cognitiva-didática-informática para determinar e validar quais requisitos um *software* educativo de Geometria Dinâmica deve satisfazer/respeitar para poder abordar situações que envolvem conceitos da Geometria Projetiva. A metodologia da pesquisa está apoiada na etapa das análises prévias apresentada pela Engenharia Didático-Informática (EDI). A EDI propõe quatro dimensões para analisar um objeto matemático, são elas: as dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática. O objeto matemático dessa pesquisa é a transformação homológica da circunferência. A dimensão epistemológica foi desenvolvida junto com a dimensão didática, na qual foi realizado um panorama da estruturação da Geometria Projetiva, bem como uma análise dos conteúdos necessários para compreender os traçados da transformação homológica da circunferência. Para fazer a análise da dimensão cognitiva foi realizado um levantamento bibliográfico dos trabalhos publicados nos últimos cinco anos que abordem temáticas da Geometria Projetiva. Através desse levantamento foi possível identificar indícios e etapas de como o aluno aprende os conteúdos da Geometria Projetiva, bem como as principais dificuldades. Já na dimensão informática foi realizada a análise de dois *softwares* de Geometria Dinâmica. Para a análise da dimensão informática tomamos como base teórica a Transposição Informática, na qual analisaremos dois *softwares* de Geometria Dinâmica para saber se eles atendem a adequação e a completude apresentadas pela Vigilância Epistemológica. Os *softwares* escolhidos para análise foram o GeoGebra e o Cabri-Géomètre II. A análise se apoia em alguns traçados da Geometria Projetiva. Dentre eles, destacamos a Transformação Homológica da Circunferência. Como resultado das análises dos traçados nos *softwares* escolhidos, foi possível observar que nenhum dos dois *softwares* são completos na representação do traçado da Transformação Homológica da Circunferência. Mesmo não atendendo os princípios da completude e da adequação, foi possível observar que os *softwares* potencializam o estudo da Geometria Projetiva, pois a partir do momento em que o usuário detém o conhecimento teórico do traçado em construção, a possibilidade de manipular o traçado conservando as propriedades melhora o processo de compreensão do conteúdo em questão.

Palavras-chave: Geometria Projetiva, Geometria Dinâmica, Transposição Informática, Curvas Cônicas, Análise de *Software*.

ABSTRACT

This research aims to carry out an epistemological-cognitive-didactic-computer analysis to determine and validate which requirements an Educational Dynamic Geometry software must satisfy/respect in order to address situations involving concepts of Projective Geometry. The research methodology is based on the previous analysis stage presented by Didactic-Informatics Engineering (EDI). EDI proposes four dimensions to analyze a mathematical object, they are: the epistemological, didactic, cognitive and computer dimensions. The mathematical object of this research is the homological transformation of the circumference. The epistemological dimension was developed along with the didactic dimension, in which an overview of the structure of Projective Geometry was carried out, as well as an analysis of the contents necessary to understand the traces of the homological transformation of the circumference. To carry out the analysis of the cognitive dimension, a bibliographical survey was carried out of works published in the last five years that address themes of Projective Geometry. Through this survey, it was possible to identify signs and stages of how the student learns the contents of Projective Geometry, as well as the main difficulties. In the informatics dimension, the analysis of two Dynamic Geometry software was carried out. For the analysis of the informatics dimension, we took the Informatics Transposition as a theoretical basis, in which we will analyze two Dynamic Geometry software to find out if they meet the adequacy and completeness presented by Epistemological Surveillance. The softwares chosen for analysis were GeoGebra and Cabri-Géomètre II. The analysis is based on some traces of Projective Geometry. Among them, we highlight the Homological Transformation of Circumference. As a result of the analysis of the traces in the chosen softwares, it was possible to observe that neither software is complete in the representation of the trace of the Homological Transformation of the Circumference. Even not meeting the principles of completeness and adequacy, it was possible to observe that the software enhances the study of Projective Geometry, because from the moment the user has theoretical knowledge of the layout under construction, the possibility of manipulating the layout conserving the properties improves the process of understanding the content in question.

Keywords: Projective Geometry, Dynamic Geometry, Computer Transposition, Conic Curves, Software Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Aportes da EDI.....	21
Figura 2 - Modelo de Processo de Software – Engenharia Didático-Informática	22
Figura 4 - Representação do círculo no universo interno, interface e universo externo	32
Figura 5 - Ilustração da completude.....	34
Figura 6 - Ilustração da Adequação	35
Figura 7 - Gerenciamento do infinito (GeoGebra)	36
Figura 8 - Gerenciamento do infinito (Cabri)	37
Figura 9 - Teorema de Menelau	39
Figura 10 - Teorema de Pappus	40
Figura 11 - Teorema de Pascal.....	41
Figura 12 - Formas de Primeira Espécie.....	43
Figura 13 - Formas de Segunda Espécie.....	45
Figura 14 - Radiação de Planos.....	46
Figura 15 - Princípio da Continuidade.....	50
Figura 16 - Regiões da reta.....	53
Figura 17 - Regiões do plano.....	53
Figura 18 – Planos de pontos	56
Figura 19 - Interseção entre planos de pontos.....	57
Figura 20 - Triláteros.....	58
Figura 21 - Interseção entre os planos.....	58
Figura 22 - Teorema de Desargues	59
Figura 23 - Eixo de Desvanecimento	61
Figura 24 - Eixo de Fuga.....	62
Figura 25 - Relação entre os eixos	63
Figura 26 - Afinidade Harmônica Ortogonal	64
Figura 27 - Homotetia.....	64
Figura 28 - Translação	65
Figura 29 - Homologia entre planos sobrepostos.....	66
Figura 30 - Caso de paralelismo	67
Figura 31 - Caso de angulação 1	68
Figura 32 - Caso de angulação 2	69

Figura 33 - Dimensão linear	70
Figura 34 - Superfície Cônica de Revolução e Cone de Revolução	72
Figura 35 - Circunferência.....	73
Figura 36 - Elipse	74
Figura 37 - Parábola	75
Figura 38 - Hipérbole	76
Figura 39 - Cônicas Degeneradas	77
Figura 40 – Elementos da Circunferência	78
Figura 41 - Elementos da Elipse	80
Figura 42 - Elementos da Parábola.....	81
Figura 43 - Elementos da Hipérbole.....	82
Figura 44 - Excentricidade de uma cônica	83
Figura 45 - Esferas de Dandelin.....	86
Figura 46 - Esferas de Dandelin (Elipse).....	87
Figura 47 - Esferas de Dandelin (Hipérbole)	88
Figura 48 - Esferas de Dandelin (Parábola)	89
Figura 49 - Análise do vértice na elipse e na circunferência	90
Figura 50 - Análise dos vértices e eixos na parábola.....	91
Figura 51 - Análise dos vértices e eixos na hipérbole	92
Figura 52 - Modelo das tangentes da elipse e da hipérbole.....	93
Figura 53 - Ilustração do Teorema de Bézout (circunferência)	94
Figura 54 - Circunferência objeto e eixo de desvanecimento.....	95
Figura 55 - Transformação homológica da circunferência (Elipse)	96
Figura 56 - Transformação homológica da circunferência (Parábola).....	97
Figura 57 - Transformação homológica da circunferência (Hipérbole).....	99
Figura 58 - Princípio da Continuidade	107
Figura 59 - Princípio da Continuidade (GeoGebra).....	108
Figura 60 - Princípio da Continuidade (Cabri)	109
Figura 62 - Teorema de Desargues (GeoGebra)	110
Figura 63 - Homologia entre planos sobrepostos.....	111
Figura 64 - Homologia entre planos sobrepostos (GeoGebra).....	112
Figura 65 - Homologia entre planos sobrepostos (Cabri).....	113
Figura 66 - Transformação Homológica da Circunferência	114
Figura 67 - Transformação Homológica da Circunferência 1 (GeoGebra).....	116

Figura 68 - Transformação Homológica da Circunferência no Cabri118

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Direcionamento para as análises prévias	23
Quadro 2 - Etapas para obtenção dos requisitos	24
Quadro 3 - Procedimentos para realizar a experimentação	26
Quadro 4 - Análise a posteriori e Validação Teórica – Questionamentos	27
Quadro 5 - Análise a posteriori e Validação Experimental – Questionamentos	28
Quadro 6 - Formas Elementares no Espaço Vulgar	47
Quadro 7 - Natureza das produções	100
Quadro 9 - Necessidades dos usuários identificadas	120
Quadro 10 - Funcionalidades existentes em produtos da área	122
Quadro 11 - Diferencial em relação aos softwares já existentes	124

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de teses e dissertações

DEG – Departamento de Expressão Gráfica

ES – Espírito Santo

EDI – Engenharia Didático-Informática

GD – Geometria Dinâmica

GP – Geometria Projetiva

LEG – Licenciatura em Expressão Gráfica

UFPE – Universidade Federal de Pernambuco

UFRPE – Universidade Federal Rural de Pernambuco

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	16
1. DIMENSÃO TEÓRICA OPERACIONAL	20
1.1. Engenharia Didático-Informática	20
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	30
2.1. Transposição Didático-informática.....	30
2.1.1. Transposição Didática.....	30
2.1.2. Transposição Informática	31
2.2. Geometria Dinâmica	33
3. ANÁLISES PRELIMINARES.....	38
3.1. A Geometria Projetiva.....	38
3.1.1. Aspectos Históricos da Geometria Projetiva	38
3.1.2. Postulados.....	42
3.1.3. Operações Projetivas	47
3.1.4. Princípio da Continuidade.....	48
3.1.5. Princípio da Dualidade	51
3.1.6. Região da reta e do plano	53
3.1.7. Razão dupla ou Bi-razão	54
3.1.8. Projetividade entre formas de segunda espécie.....	55
3.1.8.1. <i>Homografias.....</i>	55
3.1.8.1.1. Homografia entre dois planos de pontos	55
3.1.8.1.2. Teorema de Desargues.....	57
3.1.8.2. <i>Homologia.....</i>	59
3.1.8.3. <i>Homologia entre planos sobrepostos.....</i>	65
3.1.8.4. <i>Imagens pré-dimensionadas.....</i>	66
3.2. Curvas Cônicas	70
3.2.1. Aspectos Históricos	70
3.2.2. Como obter as curvas cônicas	72
3.2.3. Elementos das cônicas	77
3.2.4. Transformação Homológica da Circunferência	93
3.3. Revisão da bibliografia.....	100
3.4. Estudantes x Geometria Projetiva	103
3.5. O uso de tecnologias na Geometria Projetiva.....	105
3.5.1. Os softwares escolhidos.....	105
3.5.2. Critérios de análise.....	106

3.5.3. Análise dos softwares	107
4. ELICITAÇÃO E ANÁLISE DE REQUISITOS	120
4.1. Funcionalidades existentes em produtos da área e possíveis diferenciais	121
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	126
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	131

INTRODUÇÃO

A geometria é uma das vertentes da matemática que aproxima o estudante da realidade ao seu redor. O estudo de geometria proporciona ao aluno um desenvolvimento espacial, tendo noção do espaço onde vive e das formas que o circundam. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao estudar geometria estamos envolvendo diversos conceitos e procedimentos que nos proporcionam resolver problemas do mundo físico e de diversas áreas do conhecimento (BRASIL, 2016)

Quando falamos no estudo de geometria é comum que voltemos as atenções para a Geometria Euclidiana, que foi estruturada a partir dos postulados e axiomas desenvolvidos por Euclides. Porém outras geometrias, além da geometria plana, foram constituídas a partir de negações ou generalizações de axiomas de Euclides. Algumas dessas geometrias são consideradas como geometrias não-euclidianas. A que vamos destacar neste trabalho é a Geometria Projetiva, que mesmo negando que duas retas paralelas não possuem um ponto de concordância, como a geometria plana defende, ela não é classificada como uma geometria não-euclidiana¹.

Os pressupostos da Geometria Projetiva justificam vários traçados em diversas áreas, como o ponto de fuga estudado nas artes plásticas ou na arquitetura, como também os sistemas de projeções cônico e cilíndrico, trazendo uma relação projetiva entre ponto próprio² e ponto impróprio³ para justificar a posição do observador em relação ao plano de projeção.

A Geometria Projetiva tem como espaço de estudo alguns cursos de graduação, como o curso de Licenciatura em Expressão Gráfica (LEG) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). O Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) conta com a disciplina de Introdução à Geometria Projetiva em sua grade curricular. Bem como a Universidade de São Paulo (USP), que através do Instituto de Matemática e Estatística, oferece a disciplina de Geometria Projetiva e Desenho.

¹ Discussão retomada no capítulo 3;

² Ponto que podemos representar no plano de projeção;

³ Ponto infinitamente afastado que não pode ser representado no espaço vulgar.

Foi durante a graduação em Licenciatura em Expressão Gráfica que tive a oportunidade de cursar a disciplina de Geometria Projetiva, mas devido aos prazos para encerrar o semestre não foi possível chegar ao conteúdo de Transformação Homológica da Circunferência⁴. O primeiro contato que tive com esse conteúdo foi durante o curso de Geometria Projetiva para professores. O curso foi oferecido pelo Departamento de Expressão Gráfica (DEG) da UFPE. Desse modo surgiu o interesse pessoal por essa pesquisa, pois a partir da observação do traçado da Transformação Homológica da Circunferência percebi que a posição de um único elemento (ponto polo) em relação à circunferência objeto fazia com que a gente tivesse como figura imagem uma elipse, uma parábola, uma hipérbole ou outra circunferência.

Então a partir dessa inquietação fui buscar um *software* de Geometria Dinâmica, pois sabia que o *software* me daria a possibilidade de fazer a construção e alterar seus parâmetros sem perder a propriedade por trás da construção. Após a construção do traçado e da tão esperada manipulação, não alcancei meus objetivos. Para falar a verdade, consegui em partes, pois a partir da utilização da simulação era possível obter a elipse e a hipérbole, porém na hora de conseguir uma parábola, a simulação não funcionava. Daí surgiu a questão da minha pesquisa. Os *softwares* de Geometria Dinâmica, GeoGebra e Cabri-Géomètre, possuem os requisitos necessários para satisfazer e abordar o traçado da Transformação Homológica da Circunferência, estudado pela Geometria Projetiva?

Além da inquietação pessoal, a justificativa desse trabalho também está apoiada em duas circunstâncias diferentes. A primeira circunstância que evidenciamos é a dificuldade que os alunos apresentam em relação à representação bidimensional de objetos tridimensionais. Mariotti (2019) destaca que mesmo que na realidade todos os objetos sejam tridimensionais, a representação desses objetos sempre será uma representação bidimensional. Um exemplo de dificuldade na internalização da representação bidimensional citada por Mariotti (2019) é o caso da planificação de um sólido, no qual o aluno

⁴ A transformação Homológica consiste em uma transformação projetiva que conserva o grau da curva. No caso da circunferência, que é uma curva de 2º grau, o resultado dessa transformação vai ser outra curva de 2º grau, podendo ser uma outra circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

precisa resolver esse problema mentalmente, sem o auxílio do modelo físico. Essa dificuldade em relação à representação bidimensional pode ser estendida ao estudo da Geometria Projetiva, quando estudamos o espaço projetivo, que apresenta o plano próprio e o plano impróprio, sendo o segundo um plano que contém todos os pontos e retas impróprias, que estão infinitamente afastados.

A justificativa da pesquisa também está apoiada no fato de que a Geometria Projetiva é um objeto de estudo importante para a Licenciatura em Expressão Gráfica, que dedica uma disciplina obrigatória focada nos estudos dos pressupostos apresentados pela GP. Com isso, um estudo como este pode contribuir para a futura elaboração de um *software* de Geometria Dinâmica que atenda os pressupostos da GP.

A escolha de analisar o GeoGebra e o Cabri-Géomètre se deu pela possibilidade de manipulação, com o *mouse*, dos elementos construtivos sem que a figura perca as suas propriedades, sejam elas explícitas ou dedutíveis (BELLEMAIN e CORREIA, 2004). A escolha também se baseia através do resultado da pesquisa de Sousa (2016), que por meio da sua investigação observou limitações no GeoGebra em relação à representação da parábola.

Considerando os pressupostos da Geometria Projetiva e sua relevância no estudo da Geometria Gráfica, e buscando responder a nossa questão de pesquisa, temos por objetivo efetuar uma análise epistemológica-didática-cognitiva-informática para determinar quais requisitos um *software* educativo de Geometria Dinâmica deve satisfazer/respeitar para poder abordar o traçado da Transformação Homológica da Circunferência, estudado pela Geometria Projetiva. Para isso temos como objetivos específicos:

1. Realizar um estudo epistemológico dos conteúdos estudados pela Geometria Projetiva que são necessários para compreender o traçado da Transformação Homológica da Circunferência;
2. Construir e experimentar simulações utilizando *softwares* de Geometria Dinâmica;
3. Analisar os modelos representados pelos *softwares* com base nos aspectos da vigilância epistemológica, apresentada pela Transposição Informática.

A estrutura do texto foi dividida em 5 capítulos: no primeiro apresentaremos a dimensão teórica operacional da pesquisa. O segundo é destinado à fundamentação teórica da pesquisa. O capítulo 3 apresenta as análises preliminares da pesquisa com base nas dimensões estipuladas pela Engenharia Didático-Informática. O capítulo 4 é destinado à elicitación e análise dos requisitos obtidos a partir das análises preliminares. O último apresenta as considerações finais e apontamentos para futuras pesquisas.

1. DIMENSÃO TEÓRICA OPERACIONAL

A proposta desse capítulo é apresentar a teoria que participa da metodologia da pesquisa. Para elencar os requisitos necessários para um *software* de Geometria Dinâmica que respeita os pressupostos da Geometria Projetiva, utilizamos a Engenharia Didático-Informática, apresentada por Santos (2020).

1.1. Engenharia Didático-Informática

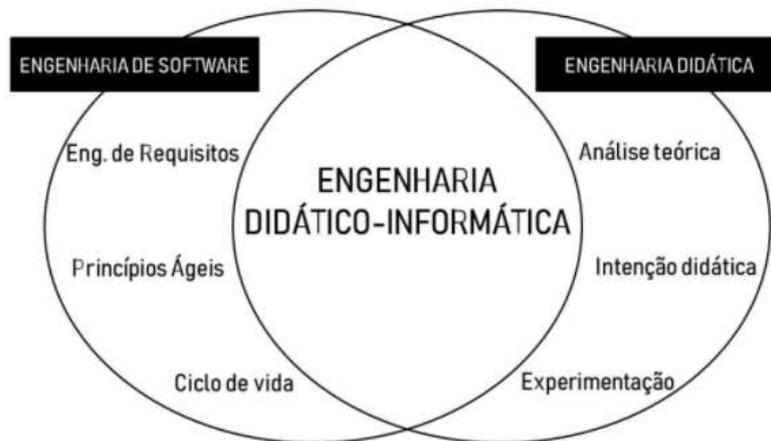
A produção de *softwares* educativos até então foi pautada a partir da adaptação de engenharias que tinham como objetivo desenvolver outros tipos de *softwares*, com isso surgiu a necessidade de uma engenharia específica para a produção de *softwares* educacionais. Nesse contexto, Santos (2020) apresenta a Engenharia Didático-Informática (EDI).

A Engenharia Didático-Informática, ancorada em aportes teóricos sobre o ensino e a aprendizagem, bem como aportes sobre auxílios e benefícios do uso das tecnologias para ensinar e aprender, possibilita a concepção (no sentido de ideias), desenvolvimento (no sentido da criação) e avaliação (no sentido de análise) de *software* classificados como micromundos. (SANTOS, 2020, p.64)

Com origem na década de 70, Papert (1980) descreve o micromundo como bem definiu Ana Paula Barros: “mundo autocontido, em que os alunos podem transferir seus hábitos de exploração da vida pessoal para o domínio da construção do conhecimento científico” (BARROS, 2013, p.51). O termo micromundo se refere a um sistema capaz de simular ou reproduzir elementos do ambiente, objetivado resolver problemas que precisam dos saberes matemáticos para serem solucionados (SANTOS, 2020).

Tendo como aporte teórico princípios da Engenharia Didática e da Engenharia de *softwares*, a Engenharia Didático-Informática é uma metodologia criada para a produção de *softwares* educativos. Ricardo Santos (2020) afirma que através de uma adaptação da organização metodológica da Engenharia Didática, ela pode contribuir para a criação de *softwares* educativos, em específico as dimensões delimitadas pela Engenharia Didática (epistemológica, didática e cognitiva). Ricardo verificou em sua pesquisa de mestrado que surgiu a necessidade de uma dimensão que tratasse das questões tecnológicas, inserida através da EDI chamada de dimensão informática.

Figura 1 - Aportes da EDI



Fonte: SANTOS, 2020, p.74

A EDI é composta por quatro fases: a analítica, a hipotética, a experimental e a operacional. Com base na observação dos modelos para a criação de softwares educativos e não educativos, notou-se uma falta de flexibilidade entre as etapas e procedimentos, bem como o retorno a fases consideradas como concluídas. Com isso foi pensada na composição da EDI a constituição de 4 ciclos, que são formados pela integração das quatro fases, sendo eles o analítico-hipotético, o hipotético-experimental, o experimental-operacional e o operacional-analítico. Esses ciclos simbolizam avanço no processo da criação do software, mas isso não significa que eles não podem acontecer de forma simultânea ou que não podem ser revisitados ao longo do processo (SANTOS, 2020).

Figura 2- Modelo de Processo de Software – Engenharia Didático-Informática



Fonte: SANTOS, 2020, p.168

O ciclo analítico-hipotético tem como objetivo realizar a especificação inicial do software a ser produzido, delimitando as situações que existem e que o software auxiliará na solução. Os problemas podem ser em relação a dificuldades na aprendizagem, contribuição das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem, situações que auxiliam na compreensão do conhecimento, entre outros. É nesse ciclo que também é definido o público-alvo do software, bem como quais os saberes que serão abordados e as hipóteses de como as tecnologias podem contribuir para a compreensão desses saberes (SANTOS, 2020).

Ricardo Santos (2020) elencou os questionamentos que norteiam a fase de especificação.

Quais são os problemas percebidos que o software poderá se apresentar como solução? Quais os conhecimentos se pretendem abordar na utilização do software? Considerando as relações entre os saberes delimitados, quais conceitos e definições devem estar presentes? Qual será a o diferencial da utilização desse software comparado a um ambiente papel e lápis? (SANTOS, 2020, p.170)

Para realizar uma EDI é necessário contar com uma equipe multidisciplinar, composta por pesquisadores, estudantes, professores, designers, entre outros, com a finalidade de aprimorar a construção do software com os *feedbacks* e as experiências dos integrantes (SANTOS, 2020).

Após a composição da equipe são iniciadas as análises prévias. Essa etapa tem como objetivo realizar um levantamento analítico que tem o objetivo de compreender as dimensões Didática, Epistemológica, Cognitiva e Informática do saber a ser trabalhado no software (SANTOS, 2020). Santos (2020) elencou alguns questionamentos norteadores que auxiliam a etapa das análises prévias.

Quadro 1 - Direcionamento para as análises prévias

DIMENSÕES	QUESTIONAMENTOS
<i>Cognitiva</i>	<i>Existem indicações na literatura de como o estudante aprende? Quais dificuldades de aprendizado são identificadas? Quais etapas são elencadas para a construção do conhecimento?</i>
<i>Didática</i>	<i>Qual é o estado atual do ensino do conhecimento? Quais são as consequências desse ensino? Quais são as dificuldades em ensinar esse conhecimento?</i>
<i>Epistemológica</i>	<i>Quais intervenções são realizadas para adaptar o saber matemático ao saber a ser ensinado? Quais são os aspectos do conhecimento que podem dificultar e/ou facilitar a aprendizagem?</i>
<i>Informática</i>	<i>Quais são as contribuições tecnológicas que o software deve conter para auxiliar na compreensão e ensino dos conhecimentos? Em que aspectos as tecnologias digitais influenciam no currículo e nas mudanças das práticas docente e discente?</i>

Fonte: SANTOS, 2020, p.171

O produto das análises prévias será uma descrição das características que o software deve ter para auxiliar nos problemas que foram elencados nas dimensões analisadas. Essa descrição precisa ser o mais detalhada possível e que seja de fácil compreensão para todos os integrantes da equipe transdisciplinar (SANTOS, 2020).

A transição entre a fase analítica e a fase hipotética consiste na etapa do levantamento dos requisitos. Ricardo Santos (2020) destaca que a análise dos

requisitos é feita a partir da observação do que foi verificado na fase analítica, sendo assim os requisitos vão ser determinados pelas contribuições identificadas nas dimensões Didática, Cognitiva, Epistemológica e Informática. Da mesma forma é destacado pelo autor que a fase do levantamento dos requisitos está suscetível a modificações. Sendo assim, o documento com os requisitos precisa ser claro (SANTOS, 2020).

São quatro as etapas para obter os requisitos. A tabela a seguir foi feita com base nos questionamentos determinados por Santos (2020).

Quadro 2 - Etapas para obtenção dos requisitos

ETAPA	OBJETIVO	QUESTIONAMENTOS
1	Realiza-se uma estimativa para que se verifique as necessidades dos usuários que foram identificadas e como elas podem ser satisfeitas utilizando as atuais tecnologias de hardware e software.	Como o ensino e a aprendizagem podem ser favorecidos? Como a compreensão dos saberes é auxiliada com o uso do software? Quais recursos e situações o software propõe para ajudar o usuário a compreender os conhecimentos?
2	É iniciado, nessa etapa, o processo de análise externa. Consideram-se aqui as possibilidades de outros softwares que versam sobre o mesmo conhecimento do produto que se pretende desenvolver a fim de propor situações e funcionalidades que vão além do que já está disponível.	Quais funcionalidades existem em produtos da área? Quais são os possíveis diferenciais do software que se pretende desenvolver? O que o software trará de novo referente ao que já existe?
3	Neste momento são colocadas, em linguagem clara e objetiva, as informações coletadas durante as etapas anteriores criando, assim, o documento de requisitos. Neste documento devem ser exibidas as características que o software precisa conter para alcançar os objetivos especificados.	XXXXXX
4	Neste momento, a equipe irá verificar os requisitos quanto à	XXXXXX

	pertinência, consistência e integralidade.	
--	--	--

Fonte: Adaptado de Santos (2020)

O segundo ciclo da EDI é o hipotético-experimental. Ricardo destaca que é nesse ciclo que ocorrem “as situações de uso, as hipóteses de interações dos usuários com o sistema, os problemas que podem surgir com a utilização do software e o desenvolvimento do protótipo para iniciar os testes na etapa seguinte” (SANTOS, 2020, p.174).

A concepção e análise a priori são fases que consistem em desenvolver as situações em que o software vai ser utilizado, bem como os referenciais teóricos e metodológicos que foram elencados pela equipe. Ainda nessa fase é levado em consideração a interação dos usuários com o software. Simultaneamente com a concepção e análise a priori deve acontecer a fase da prototipação do software. As situações de utilização do software e o seu protótipo devem levar em consideração o levantamento teórico das dimensões da EDI e o levantamento dos requisitos, e ter como objetivo superar os problemas de ensino e aprendizagem elencados anteriormente (SANTOS, 2020).

A etapa de desenvolvimento do software apresenta como resultado os componentes internos, que podem ser as especificações do sistema operacional, a linguagem de programação, entre outros, e os componentes externos, que consistem no layout, funcionalidade, interface do software, entre outros. Ao mesmo tempo em que a etapa do desenvolvimento está acontecendo, acontece a etapa da experimentação. Esta etapa consiste em registrar as experiências dos usuários com o objetivo de gerar elementos de análise e implementação do software (SANTOS, 2020).

A experimentação do software é norteada por um manual do usuário ou um documento que oriente as funcionalidades básicas do software. Santos (2020) destaca que esse manual deve conter informações como o Guia de instalação, o espaço de armazenamento que vai ocupar, quais os sistemas operacionais compatíveis, as exigências mínimas para que o hardware possa rodar o software, inicialização do software e a demonstração de como utilizar as suas ferramentas.

A experimentação também está presente no ciclo experimental-operacional. A EDI sugere a organização de uma oficina ou minicurso, no qual os objetivos do desenvolvimento do software, bem como o da pesquisa associada sejam detalhados para os participantes. Na tabela a seguir são indicados alguns procedimentos para realizar a experimentação.

Quadro 3 - Procedimentos para realizar a experimentação

PROCEDIMENTOS INTERNOS <i>organização da equipe de desenvolvedores antes da experimentação</i>	PROCEDIMENTOS EXTERNOS <i>organização do experimento com os sujeitos</i>
1. Justificativa e caracterização dos sujeitos;	1. Apresentação do projeto e objetivos;
2. Descrição das situações, objetivos e possíveis respostas dos usuários;	2. Descrição detalhada do experimento;
3. Elaboração de instrumentos de coleta de dados (questionários, entrevistas, etc.);	3. Ambientação no <i>software</i> ;
4. Análise e discussão dos dados;	4. Proposição das situações;
5. Coleta de sugestões e implementações a serem realizadas.	5. Oitiva dos sujeitos;
	6. Análise coletiva do experimento.

Fonte: Adaptado de Santos (2020)

A experimentação tem como um dos objetivos testar e validar as situações propostas. Então, conforme a experimentação vai ocorrendo, é necessário estar atento a algumas informações importantes que serão levantadas. Essa observação é dividida em duas categorias: a primeira é em relação aos requisitos levantados. Logo, é importante observar se o *software* atende as expectativas e se ele auxilia no processo de ensino e aprendizagem. A segunda categoria de análise tem como objetivo identificar falhas, *bugs*, sugestões dos usuários. Ocorrendo assim de forma simultânea a análise a posteriori e a validação do *software* (SANTOS, 2020).

O quarto ciclo da EDI é o ciclo operacional analítico, que contempla as análises conclusivas do processo com base no fim da fase de experimentação. Nesse ciclo ocorre a análise a posteriori, que consiste no processo de confrontar o resultado das observações com as hipóteses levantadas no início do processo, podendo acarretar novos requisitos a serem considerados. Ricardo (2020) afirma

que “essa análise deve se fundamentar na observação do conjunto dos dados coletados durante a experimentação bem como todo o ciclo da EDI” (SANTOS, 2020, p.179).

A fase da validação do *software* objetiva verificar se o *software* contribuiu para o ensino e aprendizagem dos saberes elencados, bem como se os objetivos para o *software* foram alcançados. A fase da validação é realizada de duas formas: a primeira é a validação teórica, que “consiste em verificar se as teorias e hipóteses, com as situações e funcionalidades do *software*, devem ser refutadas ou aprovadas” (SANTOS, 2020, p.179). A validação experimental busca saber “se a utilização do *software* apresenta contribuições efetivas para os problemas elencados na fase de sua concepção” (SANTOS, 2020, p.179). Para auxiliar no processo da validação, Santos (2020) também elenca alguns questionamentos que orientam como realizar essas análises.

Quadro 4 - Análise a posteriori e Validação Teórica – Questionamentos

VALIDAÇÃO TEÓRICA
A utilização do <i>software</i> contribuiu para superar/auxiliar nos problemas elencados quanto ao ensino e a aprendizagem?
Foi possível contemplar todos os conhecimentos idealizados na fase de análise?
O diferencial entre trabalhar com um ambiente papel e lápis foi alcançado?
A composição da equipe de desenvolvedores auxiliou na criação do <i>software</i> ?
O <i>software</i> apresentou diferenciais para outros que versam sobre a mesma temática?
Os referenciais teóricos adotados foram úteis para o desenvolvimento e criação de situações de uso do <i>software</i> ?
As possibilidades de <i>hardware</i> e recursos digitais auxiliaram na criação do <i>software</i> ?
Outros comentários

Fonte: SANTOS, 2020, p.179

VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL
Houve auxílio ao ensino dos conhecimentos com a utilização do <i>software</i> ?
As dificuldades de compreensão dos saberes foram auxiliadas com a utilização do <i>software</i> ?
As funcionalidades e recursos digitais contribuíram para as relações de ensino e aprendizagem dos conhecimentos?
Outros comentários
Os sujeitos envolvidos no experimento contribuíram de qual modo para o desenvolvimento do <i>software</i> ?
As situações propostas foram facilitadoras para compreender os conhecimentos trabalhados?
Quais foram as implementações que surgiram com a realização do experimento?
Houve incompreensões ou dificuldades de utilização do <i>software</i> ?
Outros comentários.

Fonte: SANTOS, 2020, p.180

Por fim temos a fase da evolução, que é a fase em que são implementadas as observações resultantes da etapa da validação. É nessa fase que os ciclos da EDI podem recomeçar, estando aberta para uma nova especificação e novos objetivos para o *software*. Faz parte da fase evolução o processo de manutenção do *software*. A proposta da EDI leva em consideração quatro tipos de manutenção: a corretiva, a adaptativa, a perfectiva e a preventiva. A manutenção corretiva busca reparar os erros e inconsistências observadas pelos usuários. A manutenção adaptativa busca alterar o produto para adaptá-lo ao ambiente em que ele vai ser inserido. A manutenção perfectiva tem o objetivo de modificar o programa com aprimoramentos para o *software*. A manutenção preventiva tem o objetivo de se antecipar e corrigir falhas que futuramente desencadeiem problemas maiores (SANTOS, 2020).

A pesquisa em questão não tem como objetivo realizar uma EDI completa. A EDI entra na pesquisa como um aporte teórico metodológico que estrutura as análises dos dados que vão servir de referência para o levantamento dos requisitos. Desse modo, serão realizadas as etapas da especificação, análises prévias e levantamento dos requisitos. Na etapa da especificação vamos detalhar quais os objetivos do *software*, o público-alvo e quais os saberes serão abordados. As análises prévias serão feitas através dos direcionamentos propostos para as quatro dimensões apresentadas pela EDI. O levantamento dos requisitos será elaborado a partir das necessidades identificadas para o

software a partir das análises prévias, como também a partir da análise das ferramentas em *softwares* já existentes no mercado.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos a descrição das teorias que fazem parte da pesquisa. Nele apontaremos alguns aspectos das Transposições Didática e Informática, constituídas por Chevallard e Balacheff.

2.1. Transposição Didático-informática

2.1.1. Transposição Didática

Segundo Chevallard (1991), a partir do momento em que um conteúdo do saber sábio é apontado como um saber a ensinar, ele sofre um conjunto de transformações adaptativas para torná-lo apto a ser um saber ensinado. A Transposição Didática é o trabalho de transformações adaptativas que tornam o saber a ensinar em um objeto de ensino.

O saber sábio é o saber científico produzido em um ambiente ou comunidade científica. O processo de transposição se inicia a partir do momento em que os professores, pesquisadores e especialistas transforma o saber sábio em uma versão mais didática. Esse processo é denominado por Chevallard (1991) de Transposição Didática Externa, ou *Stricto Sensu*. Para ele a noosfera é um termo designado para englobar os elementos que participam e regulamentam a seleção e as modificações que o saber científico vai sofrer para se tornar o saber a ser ensinado, sendo composta por professores, cientistas, educadores, autores de livros didáticos e políticos.

O produto da Transposição Didática Externa são os documentos oficiais que norteiam o ensino. Podemos citar como exemplo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as Orientações Curriculares e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Esses documentos são os que geralmente baseiam a produção dos livros didáticos, apostilas e hipertextos. Esses materiais são exemplos de saber a ensinar ou Transposição *Sensu Lato*. A transposição *Sensu lato* é o processo de transformação do objeto de saber produzido pela academia em objeto a ser ensinado (CHEVALLARD, 1991).

O saber a ensinar é transformado em saber ensinado a partir do momento em que o conhecimento é ministrado em sala de aula. Esse processo é conhecido como Transposição Didática Interna, que é o fruto da relação entre o

aluno, o professor e o saber dentro da sala de aula (SIQUEIRA E BELLEMAIN, 2016).

Um exemplo de Transposição Didática citado por Chevallard (1991) é a noção de distância entre dois pontos, que é utilizada de maneira espontânea desde o princípio. Porém, o conceito matemático de distância foi introduzido por Maurice Fréchet em 1906, e só aparece como saber a ser ensinado em 1971 no programa da turma do quarto ano do primeiro ciclo do ensino secundário francês (CHEVALLARD, 1991).

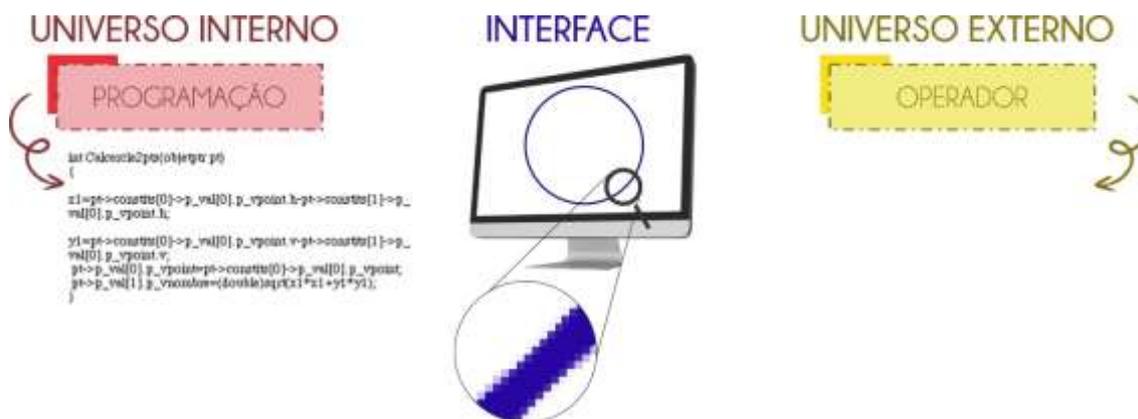
2.1.2. Transposição Informática

Segundo Balacheff (1994), a Transposição Informática é o procedimento de inserir e lidar com a tecnologia no processo de ensino e aprendizagem. A Transposição Informática não consiste apenas em uma simples transferência para um ambiente informatizado. Essa transposição é resultado de uma construção que proporciona novas reflexões acerca do objeto de ensino.

O mesmo autor apresenta também três elementos que são importantes para compreender as consequências da Transposição Informática em sala de aula: o universo interno, a interface e o universo externo. O universo interno consiste nos componentes eletrônicos que permitem o funcionamento do computador. As linguagens de programação podem ser consideradas como um elemento desse universo. A interface é o local de comunicação entre o usuário e o computador. É na interface que aparece a representação gráfica ou algébrica do que foi programado no universo interno. O terceiro elemento apresentado por Balacheff (1994) é o universo externo, que consiste no operador humano e a relação que ele faz entre os conhecimentos sobre as construções que estão no dispositivo.

Para exemplificar os elementos da transposição didática (Figura 3) Balacheff (1994) utiliza a circunferência, onde no universo interno ela está relacionada à linguagem da programação. Na interface temos a representação da circunferência através dos pixels da tela do dispositivo. E no universo externo, o conhecimento referente à construção por trás da representação da circunferência.

Figura 3 - Representação do círculo no universo interno, interface e universo externo



Fonte: Adaptado de Balacheff (1994)

Bellemain (2000) não enxerga a Transposição Informática simplesmente como um complemento da Transposição Didática, mas sim como um processo de Transposição Didática que insere a dimensão informática desde o início. A partir do momento em que a informática é inserida na Transposição Didática, é necessário rever a estrutura do ensino, quais os tipos de atividades, quais conteúdos serão ensinados e qual o papel do professor nesse processo. Ainda sobre a Transposição Informática, Bellemain afirma que:

Essa nova organização do ensino com a introdução do computador pode apoiar-se sobre uma gestão do tempo diferente, a possibilidade de organizar mais fases individuais e favorecer, de um modo geral, a aproximação entre o tempo de aprendizagem e o tempo de ensino. Na medida em que o computador executa algumas tarefas práticas tais como cálculo, construção de figuras, de gráficos, etc., ele permite a organização de mais atividades conceituais. (BELLEMAIN, 2000, p. 201)

Um exemplo apresentado por Bellemain na mesma obra referida acima são os *softwares* de Geometria Dinâmica, que ficam responsáveis pela representação dos objetos, enquanto o aluno fica concentrado em compreender os conceitos que fundamentam as representações.

Segundo Balacheff (apud BELLEMAIN, 2000), a criação de novos registros semióticos estudada anteriormente por Duval (1995), deve garantir a vigilância epistemológica, que é a necessidade de que o registro em questão tenha coerência. Balacheff apresenta duas dimensões em relação à coerência, sendo elas a completude e a adequação. Franck as descreveu da seguinte maneira: “a completude significa que qualquer objeto construtível com o modelo é

representável e a adequação significa que qualquer representação é a representação de um objeto possível do modelo.” (BELLEMAIN, 2000, pág. 202)

Ressaltamos que a vigilância epistemológica é uma questão relativa, pois depende das configurações do computador em questão. Quando se trata da representação de números no computador, a vigilância epistemológica não é absoluta, já que dois números só são considerados iguais se a diferença entre eles é menor do que a precisão que o computador é capaz de representar. Um número só é considerado infinito pelo computador quando ele é maior que o maior número que um computador pode representar.

Quando se trata de figuras geométricas dinâmicas, estamos falando de um subconjunto de figuras que podem ser construídas a partir de um enunciado inicial. Essas figuras são construídas a partir de pontos criados e deslocados pela tela, pontos estes cujas coordenadas sempre serão números inteiros, que não é o caso dos pontos calculados, pois estes pontos calculados são gerados a partir da interseção entre elementos ou pontos sobre objeto.

No próximo tópico falaremos sobre a Geometria Dinâmica, que segundo Bellemain (2000) é um exemplo de criação de um novo registro de representação semiótico no caso da geometria.

2.2. Geometria Dinâmica

Quando falamos sobre Geometria Dinâmica, nos referimos a um *software* que permite a análise de figuras geométricas a partir da manipulação, com o *mouse*, de seus elementos construtivos. O diferencial dos *softwares* de Geometria Dinâmica é que essas manipulações são feitas sem que a figura perca as suas propriedades sejam elas explícitas ou dedutíveis (BELLEMAIN e CORREIA, 2004). Os *softwares* de Geometria Dinâmica surgiram da problemática da inserção da geometria no computador, dando origem à necessidade de aproveitar as potencialidades do computador para criar uma forma de representar os objetos da geometria (BELLEMAIN, 2001).

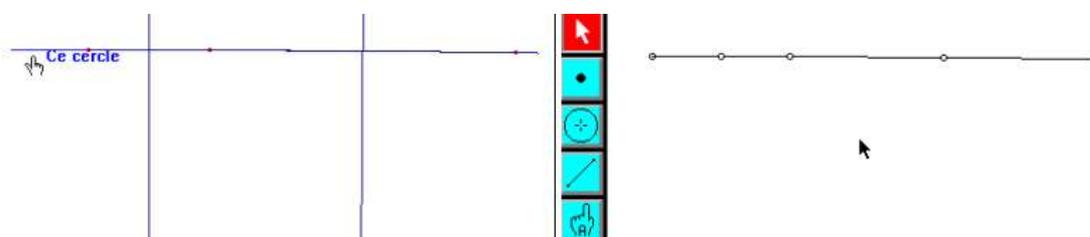
Bellemain e Correia (2004) destacam alguns princípios que são estabelecidos para a implementação de uma interface de manipulação direta da geometria. São eles a continuidade, a retroação imediata, reciprocidade ou a interpretação da intenção. Segundo os autores:

A continuidade significa que os objetos manipulados devem seguir os movimentos contínuos executados pelo usuário. A retroação imediata significa que o usuário deve receber, sem espera perceptível, uma reação a suas ações. A reciprocidade significa que, na exceção de caso particular e controlável, uma manipulação inversa de uma manipulação realizada, deve trazer a figura para o estado anterior ao movimento. O último princípio, a interpretação das intenções é, possivelmente o que apresenta maiores dificuldades para implementação [...]. Consideramos que a principal dificuldade, neste caso, reside na subjetividade que acompanha a ação do usuário, e a resposta coerente que lhe deve ser dada. (BELLEMAIN e CORREIA, 2004, p.9)

Bellemain desenvolve um estudo que tem por objetivo analisar como dois softwares de Geometria Dinâmica, o Cabri-géomètre e Geometer Sketchpad, tratam a questão da coerência, que possui duas dimensões, que é exigida pela vigilância epistemológica defendida por Balacheff (1999). A primeira dimensão analisada é a completude. Segundo Bellemain (2000) a completude é atingida na Geometria Dinâmica “quando qualquer objeto que pode ser definido com as especificações pode ser representado com o registro de representação da Geometria Dinâmica” (BELLEMAIN, 2000, p.202).

Como exemplo da ilustração da completude, o referido autor cita o caso da circunferência circunscrita a três pontos não alinhados, que existe na geometria euclidiana. No Cabri a representação da circunferência é realizada de acordo com a especificação do modelo em questão. No Sketchpad foi observado que existe pelo menos uma posição onde os três pontos não estão alinhados e a circunferência não pode ser mais representada (Figura 4). Logo, a implementação da Geometria Dinâmica no Sketchpad não é completa (BELLEMAIN, 2000).

Figura 4 - Ilustração da completude

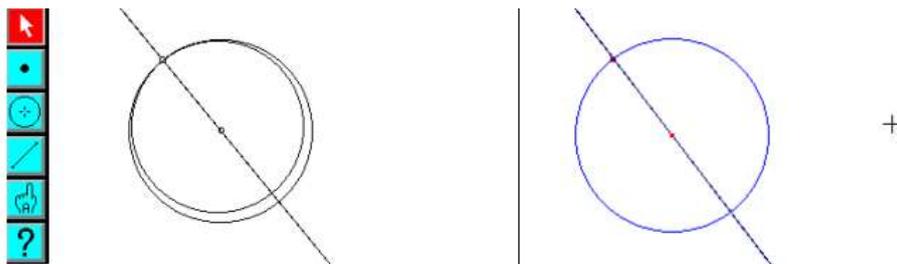


Fonte: Bellemain (2000)

A segunda dimensão analisada é a adequação. Para uma representação ser considerada adequada, ela não pode permitir a representação de objetos geométricos que não foram definidos no modelo (BELLEMAIN, 2000). Para

exemplificar a adequação, o autor utilizou uma circunferência circunscrita a três pontos sobre uma outra circunferência, onde as duas circunferências devem coincidir quando existentes. No caso do Cabri, as circunferências são coincidentes, mas quando a construção é realizada no Sketchpad é possível observar que a construção apresenta duas circunferências diferentes (Figura 5) (BELLEMAIN, 2000).

Figura 5 - Ilustração da Adequação

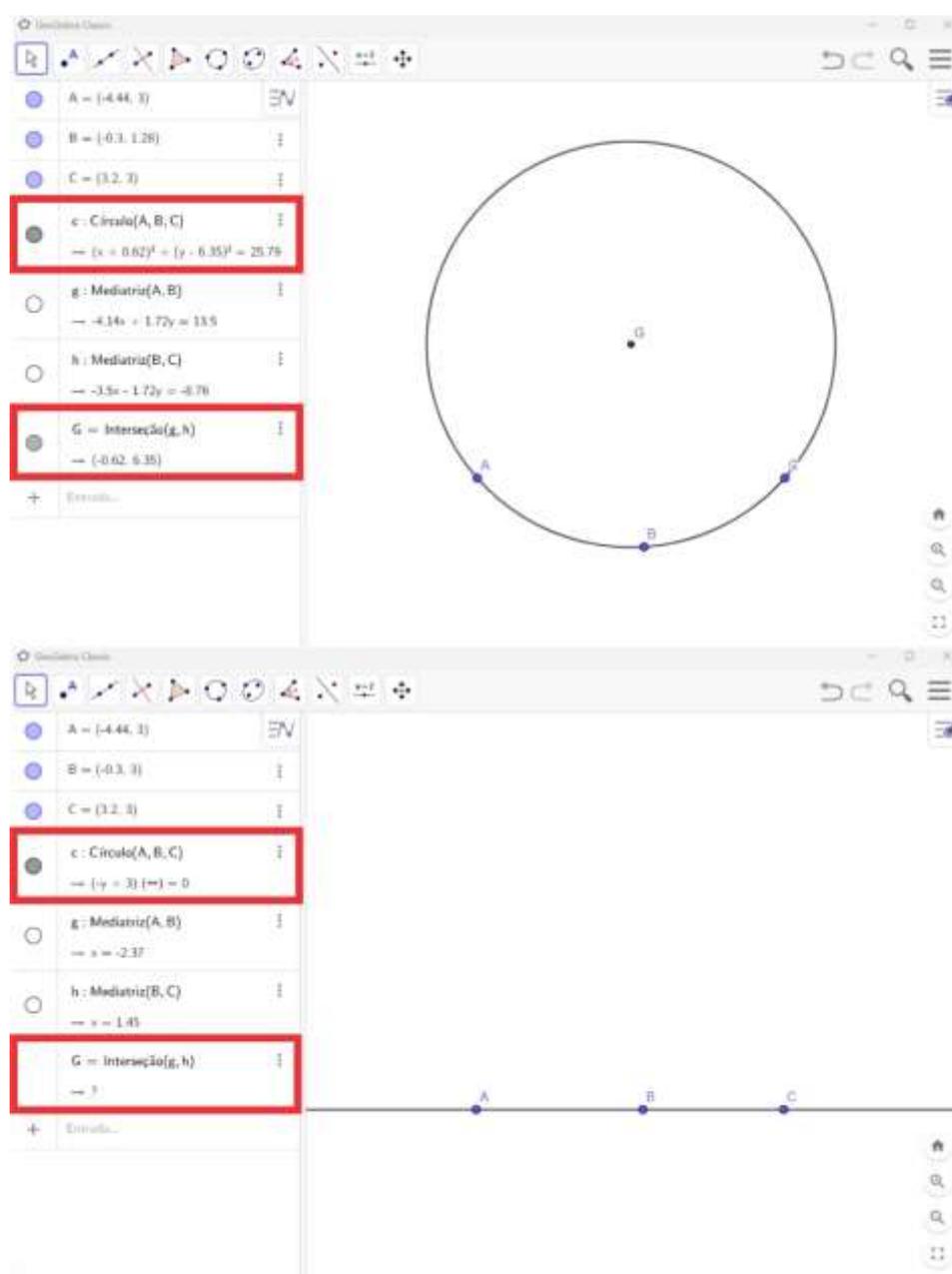


Fonte: Bellemain (2000)

Considerando os resultados da pesquisa apresentada, a Transposição Informática tem um papel importante na pesquisa a partir do momento em que percebemos que as estratégias utilizadas para fazer a construção dos traçados estudados pela Geometria Projetiva em um *software* de Geometria Dinâmica são diferentes das estratégias utilizadas no ambiente não informatizado, utilizando os instrumentos de desenho. Segundo Mariotti, as atividades desenvolvidas em um ambiente de Geometria Dinâmica são úteis para o desenvolvimento da relação entre o conceito e a representação figural. Com isso, a utilização de um *software* dinâmico “apresenta grandes potencialidades para o desenvolvimento do raciocínio geométrico” (MARIOTTI, 2019, p.157).

Queremos destacar como os *softwares* Geogebra e Cabri Géomètre 2 gerenciam o infinito. Para isso trazemos como exemplo a construção de uma circunferência a partir de três pontos. A primeira construção foi realizada no GeoGebra (Figura 6).

Figura 6 - Gerenciamento do infinito (GeoGebra)

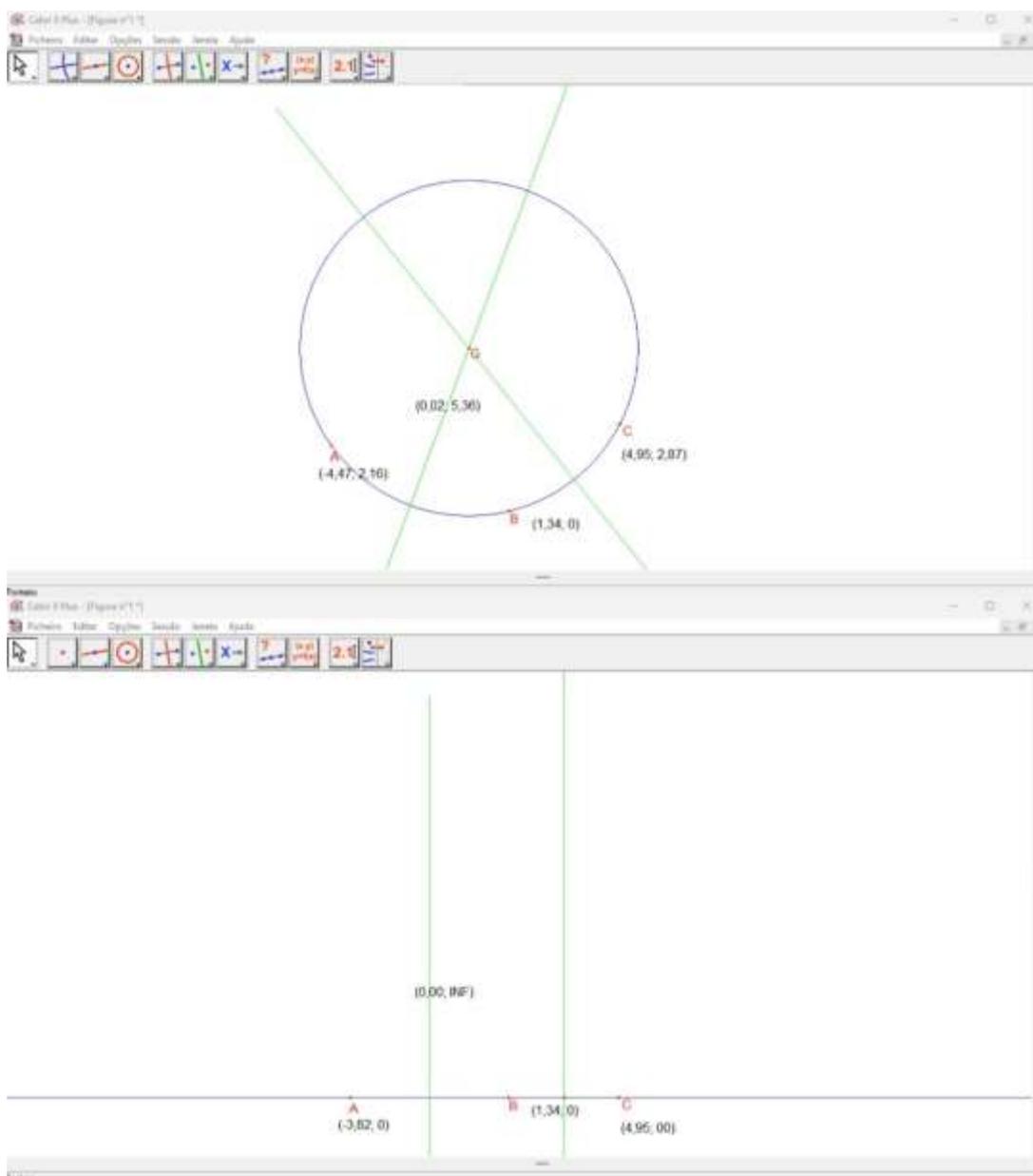


Fonte: Autoria Própria

Podemos observar na construção inicial que o *software* reconhece a circunferência através da equação reduzida e consegue identificar as coordenadas do centro da circunferência, que é o ponto G . Porém, a partir do momento em que os três pontos que determinam a circunferência são manipulados de tal forma que fiquem alinhados, é possível observar na equação da circunferência que as informações referentes ao eixo x são substituídas pelo símbolo do infinito, porém as coordenadas do ponto que representam o centro da circunferência aparecem como indefinidas.

Para compreender como o Cabri Géomètre 2 gerencia o infinito (Figura 7), determinamos três pontos quaisquer e a mediatriz entre os pontos A e B e outra mediatriz entre B e C. Tomando como centro o encontro das mediatrizes, traçamos a circunferência que passa pelos pontos A, B e C. Ao modificar as coordenadas dos pontos A, B e C de tal modo que eles fiquem alinhados é possível observar que o *software* altera as coordenadas do ponto G, centro da circunferência, passando a mostrar (0,00, INF), reconhecendo que o centro da circunferência está no infinito, na direção das mediatrizes entre os pontos.

Figura 7 - Gerenciamento do infinito (Cabri)



Fonte: Autoria Própria

3. ANÁLISES PRELIMINARES

“Somos simplesmente linhas paralelas, diz a geometria que no infinito elas se encontram.”

(Luana Barbosa)

Nesta seção apresentamos as análises preliminares que dão suporte à análise da Geometria Projetiva nas dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática. A análise das dimensões se deu a partir de uma revisão bibliográfica dos trabalhos desenvolvidos com a Geometria Projetiva, bem como a partir da investigação de livros didáticos.

3.1. A Geometria Projetiva

Neste tópico damos início ao estudo epistemológico da Geometria Projetiva. Vale ressaltar que a GP pode ser estudada a partir da representação algébrica, como também pode ser estudada a partir da representação gráfica. Para essa pesquisa vamos estudar a GP a partir da representação gráfica, fazendo um estudo morfológico do ponto, da reta e do plano à luz da GP⁵. A escolha por realizar esse estudo a partir das representações gráficas deu-se pela abordagem com a qual o curso de Expressão Gráfica utiliza no estudo da disciplina de GP.

3.1.1. Aspectos Históricos da Geometria Projetiva

Muitas geometrias foram criadas ao longo dos anos, dentre elas podemos destacar a geometria euclidiana que é baseada nos postulados de Euclides de Alexandria. Outras geometrias foram criadas partindo de pressupostos diferentes dos postulados desenvolvidos por Euclides. Neste capítulo queremos dar destaque à Geometria Projetiva.

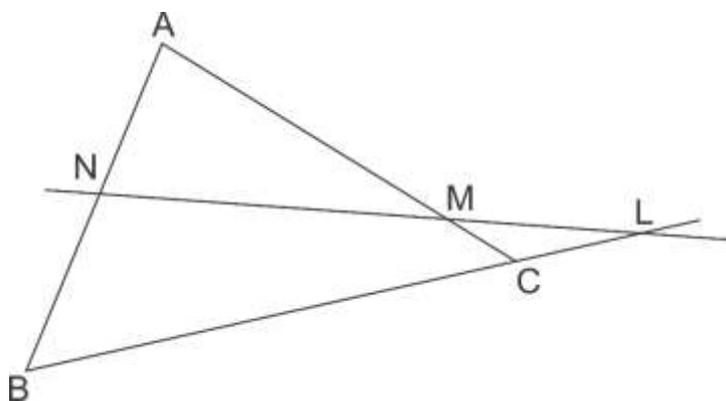
Com o surgimento do movimento renascentista na Europa entre os séculos XV e XVI, os artistas mostraram-se preocupados com a representação da

⁵ O estudo epistemológico apresentado nos tópicos com base na sequência de conteúdo do livro Geometria Gráfica Tridimensional Vol. 03 de Costa e Costa (1994).

realidade em suas obras. A partir dessa preocupação a Geometria Euclidiana já não era capaz de atender às necessidades dos artistas. Com isso, eles começaram a inserir os conceitos e propriedades de ponto de fuga e perspectiva em suas obras, com o objetivo de que as pessoas pudessem identificar com facilidade o que estava perto e o que estava longe.

Assim como outras ciências, a Geometria Projetiva não possui uma data específica para o seu início. Porém, estudos desenvolvidos por pesquisadores distintos em épocas diferentes corroboram para uma compreensão da constituição da Geometria Projetiva. O primeiro estudioso que destacamos é Menelau. Nascido no ano 70 d.C., em Alexandria. Menelau é um astrônomo e geômetra que ficou conhecido por se debruçar nos estudos de Hiparco sobre a trigonometria. A contribuição de Menelau para a Geometria Projetiva foi o teorema que leva o seu nome, no qual ele afirma que se uma reta transversal corta os três lados do triângulo ABC nos pontos L, M e N, logo $\left(\frac{AN}{NB}\right)\left(\frac{BL}{LC}\right)\left(\frac{CM}{MA}\right) = -1$.

Figura 8 - Teorema de Menelau

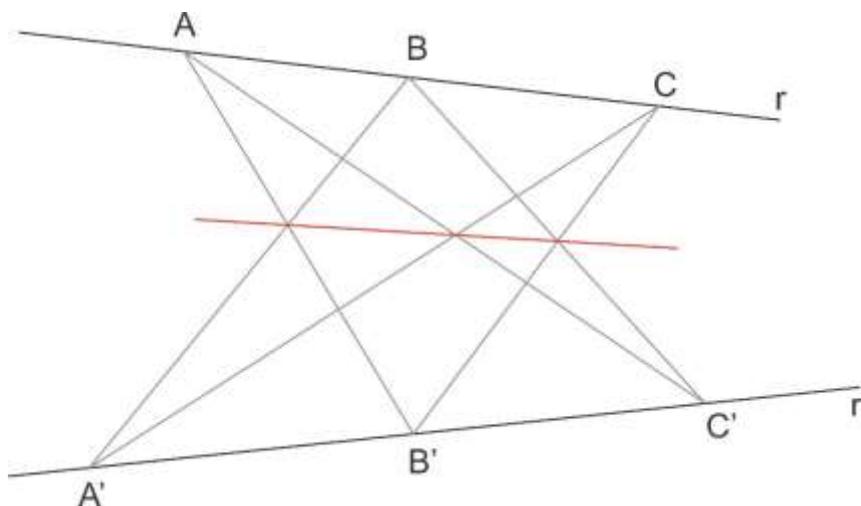


Fonte: Autoria Própria

Nascido também em Alexandria, Pappus foi um dos geômetras que fortaleceu a geometria grega. Pappus ficou conhecido por escrever comentários sobre os Elementos e Os dados de Euclides, bem como pela sua coleção matemática composta por oito livros, dos quais perderam-se o primeiro livro e parte do segundo. Outra apropriação da Geometria Projetiva foi o teorema de Pappus, no qual ele afirma que quando colocamos sobre duas retas r e r' , os pontos A, B, C e os pontos A', B', C', e traçamos os segmentos AB' e AC', BA' e

BC' , CA' e CB' , as interseções entre AB' e $A'B$, AC' e $A'C$, BC' e $B'C$ vão determinar uma terceira reta.

Figura 9 - Teorema de Pappus

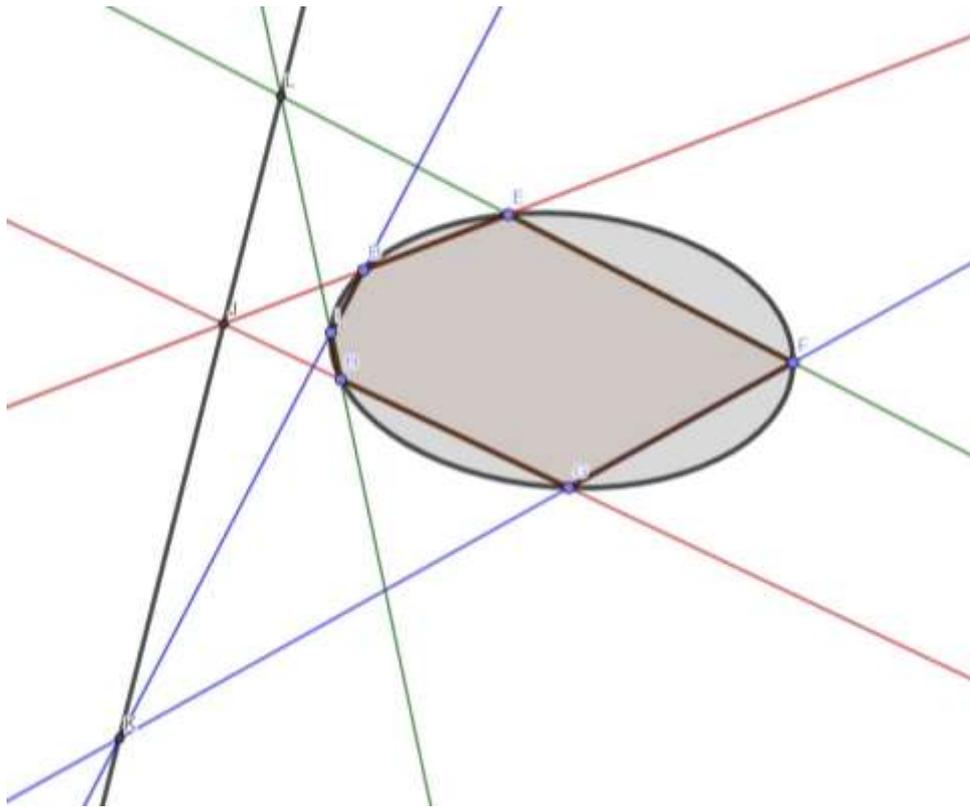


Fonte: Autoria Própria

O terceiro nome que destacamos é o do engenheiro e arquiteto Girard Desargues. Considerado o pai da Geometria Projetiva, em seus estudos desenvolvidos no século XVII, Desargues produziu vários teoremas e conceitos. Entre eles: investigação das seções cônicas e os pontos no infinito, a invariância da razão dupla e dos quaternos harmônicos, a teoria das retas polares, e ainda o famoso teorema que leva o seu nome, que veremos mais à frente, Teorema de Desargues.

Outro nome importante para a Geometria Projetiva foi Blaise Pascal, que conheceu Desargues na Academia Mersenne. Ao debruçar-se sobre os estudos de Desargues, Pascal investigou as cônicas e suas propriedades projetivas, desenvolvendo assim o teorema que leva o seu nome. O Teorema de Pascal afirma que: *Em um hexágono inscrito em uma cônica, as retas que contiverem os lados opostos interceptam-se em pontos colineares.*

Figura 10 - Teorema de Pascal



Fonte: Autoria Própria

Mesmo os primeiros estudos tendo surgido no século XVII, a Geometria Projetiva foi organizada, reunida e estruturada por Jean Victor Poncelet, mais tarde, no século XIX. Poncelet foi o primeiro a reconhecer a Geometria Projetiva como um ramo da matemática.

Com base nos estudos desenvolvidos por Desargues e Pascal, Poncelet desenvolveu os seus principais trabalhos. O primeiro deles foi a noção de figuras homólogas, que assegura que a partir de uma figura podemos obter outra por meio de projeções e seções.

O segundo trabalho desenvolvido foi o princípio de continuidade, que é um tópico discutido com mais profundidade ao longo do texto. Em suma afirma que duas retas paralelas se encontram em um ponto infinitamente distante, conhecido como ponto impróprio.

O terceiro trabalho desenvolvido por Poncelet foi a teoria da polaridade e o princípio da dualidade, que serviu de base para o estudo de outros matemáticos.

Por fim, a última contribuição de Poncelet para a Geometria Projetiva foi o conceito de razão dupla ou anarmônica.

Diferente das demais geometrias pós-euclidianas, a Geometria Projetiva não altera os principais elementos da Geometria Euclidiana: o ponto, a reta e o plano. Segundo Costa e Costa (1994), a Geometria Projetiva é mais uma generalização e aperfeiçoamento da geometria desenvolvida por Euclides. Os postulados da GP ultrapassaram os limites do espaço vulgar⁶. Para Costa e Costa (1994, p. 17) “o Espaço Projetivo constitui uma generalização de postulados intuídos a partir das dimensões euclidianas e estendidos a hiperespaços inteiramente desprovidos de uma visualização dentro do ambiente que nos cerca”. Ceppi e Fournier (1961) afirmam que a Geometria Projetiva se resume a duas operações: a de projetar, que pode ser desde um ponto a uma reta, e a de cortar, que pode ser por meio de uma reta ou plano.

A Geometria Euclidiana, em seus axiomas, afirma que dois pontos distintos determinam uma reta e que duas retas distintas têm no máximo um ponto em comum no qual são concorrentes. O segundo axioma possibilita que duas retas não tenham nenhum ponto em comum quando elas são paralelas. A Geometria Projetiva se apoia nos mesmos axiomas citados, não contradizendo nenhum axioma da Geometria Euclidiana. Porém, traz uma generalização admitindo que duas retas só serão paralelas no plano euclidiano se elas se encontrarem no infinito, que é o plano projetivo.

3.1.2. Postulados

São cinco os postulados da Geometria Projetiva que fundamentam os seus axiomas apresentados.

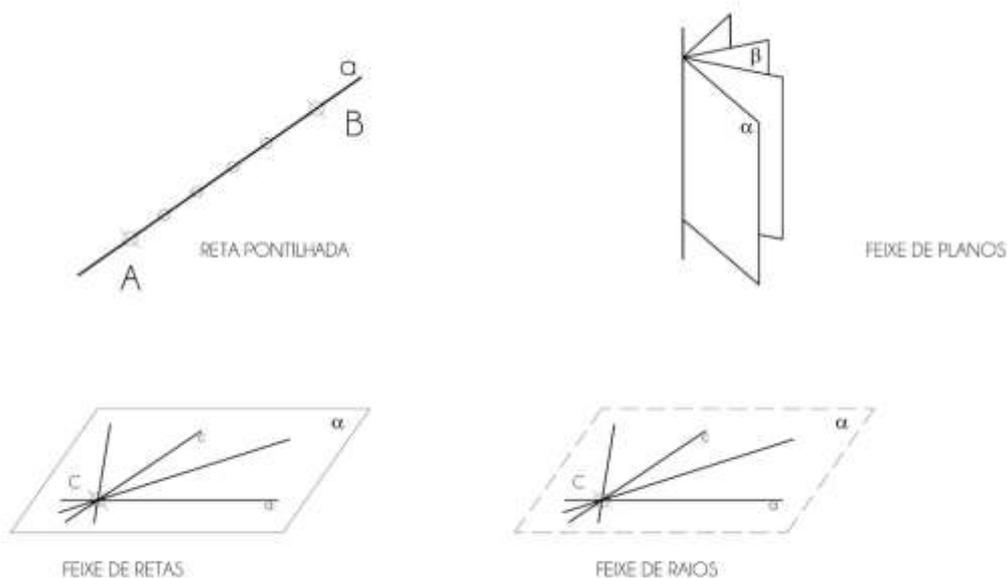
O 1º POSTULADO admite que dois E_0 diferentes, sejam eles pontos, retas, planos ou algo fora do espaço vulgar. O 2º POSTULADO assegura que dois E_0 independentes determinam uma infinidade de E_1 da qual eles fazem parte, constituindo um ESPAÇO DE UMA DIMENSÃO ou FORMA DE PRIMEIRA ESPÉCIE, chamamos de E_1 . Se o E_0 for um ponto, o E_1 será uma RETA DE PONTOS, ou RETA PUNTUAL, pois dois pontos distintos A e B [...] determinam uma reta m que possui uma infinidade de pontos. Se o E_0 for um PLANO, o E_1 será um FEIXE DE PLANOS, pois dois planos distintos α e β [...] determinam uma infinidade de planos que passam pela reta comum a α e β .” (COSTA E COSTA, 1994, p.18)

⁶ Entende-se por espaço vulgar o espaço finito.

Quando o E_0^7 é uma reta, temos como resultante duas formas de primeira espécie: o feixe de retas e o feixe de raios. O feixe de retas é obtido a partir do momento em que o E_0 reta é obrigado a pertencer a um plano α , e concorrem em um ponto C . Logo, todas as retas do plano α que passam por C vão determinar o feixe de retas. O feixe de raios é obtido quando o E_0 é uma reta que é obrigada a conter o ponto C . Quando temos duas retas que passam por C , determinamos um plano α , que vai conter todas as retas que contém o ponto C , dando origem a um feixe de raios.

Em resumo, as formas de primeira espécie geradas quando o E_0 é um ponto é a reta pontilhada. Quando o E_0 é um plano é o feixe de planos. Quando o E_0 é uma reta que pertence a um plano, a forma de primeira espécie é um feixe de retas, e quando é uma reta de um ponto, o E_1 é um feixe de raios (Figura 11).

Figura 11 - Formas de Primeira Espécie



Fonte: Autoria Própria

⁷ O E_0 é uma simbologia referente aos elementos da Geometria Projetiva (ponto, reta e plano) e dependendo de qual desses elementos ele está referenciando, se comportará de modo distinto. Quando esses elementos (ponto, reta e plano) assumem formas de primeira, segunda ou terceira espécie a numeração é alterada e observaremos, por exemplo, o uso das nomenclaturas E_1, E_2, E_3 .

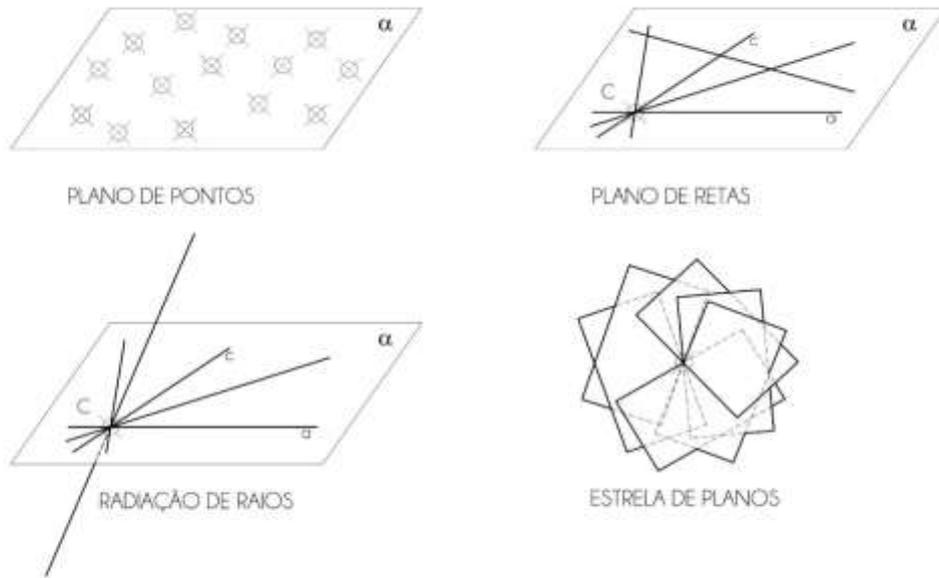
O 3º POSTULADO da Geometria Projetiva assegura que “fora do E_1 existe um E_0 que individualiza com aquele um ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES ou FORMAS DE SEGUNDA ESPÉCIE, chamado E_2 ”. (COSTA E COSTA, 1994, p.19)

Este postulado afirma que quando o E_0 é um ponto, existe um ponto fora da reta de pontos, que determina com a reta um plano de pontos α , já que uma reta e um ponto determinam um plano. Quando o E_0 reta de um plano é um feixe de retas no E_1 , o terceiro postulado determina que existe uma reta do plano que não pertença ao feixe de retas dado. Logo, qualquer reta de α que não contenha o ponto C , não pertence ao feixe de retas que contém o ponto C . Assim, o E_2 é constituído por todas as retas que pertencem ao plano α , e é denominado de Plano de Retas.

Já quando o E_0 reta de um ponto é um feixe de raios no E_1 , o terceiro postulado determina que, sendo dado um feixe de raios que possuem o ponto C em comum, existe um raio que contém o ponto C , mas não pertence ao plano do feixe de raios. Esse raio é qualquer reta que atravessa o plano α pelo ponto C . Logo, o E_2 é denominado de radiação de raios, onde todas as retas passam pelo ponto C , não sendo obrigadas a pertencer ao plano α . Quando o E_0 é um PLANO, o postulado determina que existe um ponto por onde passam diversos planos. Com isso a forma que obtemos é chamada de estrela de planos, que é o conjunto de planos que tem um único ponto em comum.

Então as formas de segunda espécie geradas são: um plano de pontos, quando o E_0 é um ponto; uma estrela de planos, quando o E_0 é um plano; quando o E_0 é uma reta que pertence a um plano, a forma de primeira espécie é um plano de retas; e quando é uma reta de um ponto, o E_2 é uma radiação de raios (Figura 12).

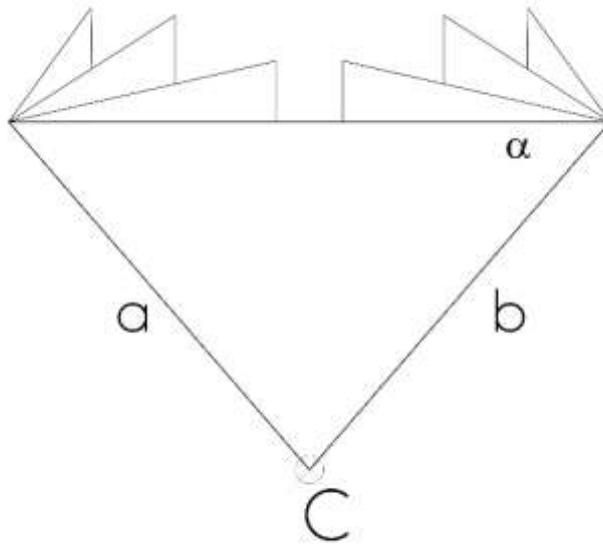
Figura 12 - Formas de Segunda Espécie



Fonte: Autoria Própria

O 4º POSTULADO da Geometria Projetiva assegura que “dois E_1 que tem um E_0 em comum determinam um e só um E_2 ” (COSTA E COSTA, 1994, p. 22). Com base nesse postuladado, quando o E_0 é um ponto, duas retas (que seriam duas formas de primeira espécie) que possuem um ponto em comum só determinam um único plano de pontos. Quando o E_0 é um plano, temos que dois feixes de planos que possuem um plano α em comum determinam apenas uma radiação de planos, onde todos os planos têm o ponto C e as retas a e b em comum (Figura 13).

Figura 13 - Radiação de Planos



Fonte: Autorial Própria

O 5º POSTULADO da Geometria Projetiva “estabelece que, fora do E_2 , existe um E_0 que individualiza com aquele uma FORMA DE TERCEIRA ESPÉCIE, chamada de E_3 ” (COSTA E COSTA, 1994, p. 22). Quando o E_0 é um ponto, o postulado assegura que existe um ponto fora do plano de pontos que determina com este um espaço pontilhado. Costa e Costa (1994) afirma que esse espaço pontilhado se confunde com o espaço vulgar tridimensional. Quando o E_0 é um plano, o postulado admite que fora de uma radiação de planos, existe um outro que com ele forma um espaço de planos, que contém todos os planos do espaço vulgar. Sobre o 5º postulado, Costa e Costa afirmam que:

Esse postulado gera formas impossíveis de visualizar no nosso espaço vulgar, quando aplicado ao E_0 RETA. De fato não dá pra imaginar uma reta contida em um PLANO DE RETAS e que não pertença a tal plano. [...]. Isso não quer dizer que o postulado seja falso para essas sequências. O que acontece é que o espaço vulgar é limitado para suportar o grau de generalização da GEOMETRIA PROJETIVA. (COSTA E COSTA, 1994, p. 623)

Para facilitar o entendimento das formas geradas, organizamos de acordo com a tabela a seguir:

Quadro 6- Formas Elementares no Espaço Vulgar

<i>E₀</i>	PONTO	PLANO	RETA DE UM PLANO	RETA DE UM PONTO
<i>E₁</i>	Reta de Pontos	Feixe de Planos	Feixe de Retas	Feixe de Raios
<i>E₂</i>	Plano de Pontos	Radiação de Planos	Plano de Retas	Radiação de Raios
<i>E₃</i>	Espaço de Pontos	Espaço de Planos		

Fonte: Adaptado de Costa e Costa (1994)

3.1.3. Operações Projetivas

São duas as operações projetivas: projetar e cortar. Quando falamos em projetar na Geometria Projetiva, podemos realizar essa operação a partir das próprias formas elementares que vimos no item anterior. Quando tomamos um ponto como centro de projeção, podemos projetar a partir deste ponto: uma reta de pontos; um feixe de retas; uma radiação de retas; ou uma radiação de planos. A partir do momento em que tomamos uma reta como eixo de projeção, podemos projetar dessa reta um feixe de planos (CEPPI E FOURNIER, 1961).

A segunda operação projetiva, dual da operação projetar, é a operação cortar, onde poderemos cortar uma forma elementar utilizando uma reta ou um plano. Quando tomamos um feixe de retas ou um feixe de planos e cortamos com uma reta m qualquer, o que vamos obter é uma reta pontual. Quando temos um feixe de retas e cortamos com um plano qualquer, o que obtemos é uma reta pontual. Quando cortamos uma radiação de raios a partir de um plano, o que vamos obter é um plano pontual. Quando cortamos um feixe de planos com um outro plano, o que vamos obter é um feixe de retas e quando cortamos uma radiação de planos com um outro plano, o que vamos obter é um plano de retas.

Costa e Costa (1994) apresentam os sistemas de projeção como um exemplo prático das operações de projetar e cortar. Esses sistemas trazem uma relação em que temos um observador, um objeto, um plano de projeção e projetantes que partem do observador. Isso acontece na projeção cônica, quando temos o observador próprio, e também na projeção cilíndrica, na qual o

observador é impróprio ou está infinitamente afastado. Em suma, podemos afirmar que o observador é um ponto, de onde parte as projetantes (operação projetar) que vão passar pelo objeto, a partir do momento em que cortamos (operação cortar) essas projetantes com o plano de projeção, o que vamos obter é a projeção daquele objeto.

3.1.4. Princípio da Continuidade

Retomando o segundo postulado da Geometria Projetiva, que admite que duas retas de um plano definem um feixe de retas ao se encontrarem em um ponto, sendo esse ponto o centro do feixe, é evidenciado uma exceção. Euclides defende em seus postulados que duas retas paralelas não têm nenhum ponto de intercessão, logo, não teríamos um centro no feixe de retas onde elas são paralelas entre si. Costa e Costa afirmam que:

O princípio da continuidade acarreta o conceito de que duas retas coplanares SEMPRE possuem um ponto em comum, até mesmo quando são paralelas. É consequência da ideia de continuidade que a geometria projetiva imprime à reta. Enquanto esse elemento axiomático foi concebido fundamentalmente diferente em várias geometrias pós-euclidianas, a geometria projetiva manteve as mesmas propriedades euclidianas de qualquer segmento finito da reta. Toda a divergência surge nos seus limites. (COSTA E COSTA, 1994, p. 26)

Ceppi e Fournier (1961) afirmam que a Geometria Projetiva superou esse obstáculo colocado por Euclides, estabelecendo que duas retas do mesmo plano sempre se cortam, assim como dois planos quaisquer do espaço também.

Enquanto na Geometria Euclidiana a reta é considerada aberta (ou seja, que tem um começo e um fim), podemos considerar que ela tem dois limites opostos. Levando em consideração que a reta é infinita, teremos o limite da esquerda como negativo e o limite da direita como positivo. Então, podemos afirmar que no sentido da esquerda teremos o $-\infty$ e no sentido da direita teremos o $+\infty$. Já na Geometria Projetiva esses dois limites se misturam. Ao percorrermos a reta no sentido da direita ou no sentido da esquerda o limite será o mesmo, logo, só temos um único limite ∞ .

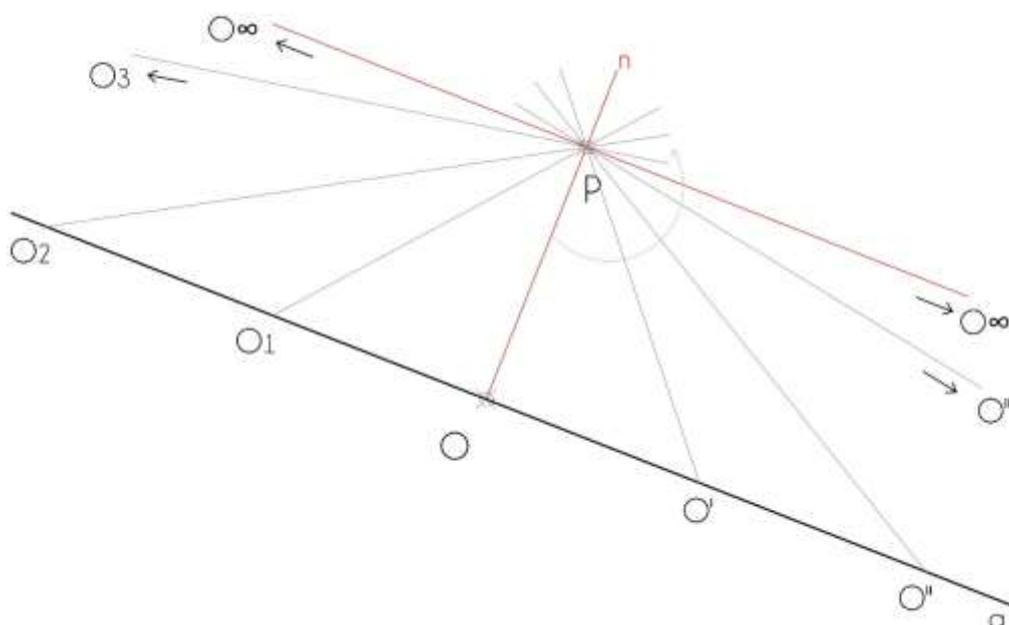
Para justificar o princípio da continuidade vamos usar o exemplo citado por Ceppi e Fournier (1961), no qual tomamos uma reta a e um ponto P qualquer fora da reta (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**).

Ao passarmos por P uma reta n perpendicular à reta a , vai gerar um ponto O na interseção de a com n , gerando a reta PO . Admitindo que a reta n começa a rotacionar no sentido anti-horário, como indicado, o ponto O vai se deslocando pela reta a , gerando os pontos O' , O'' , ..., sempre no sentido indicado. Podemos ver que mesmo quando a interseção não está no limite da figura, como ocorre com o ponto O''' , sabemos que esses pontos se encontram à direita do ponto O , enquanto a angulação entre a reta a e a reta PO é menor que 90° .

Segundo Costa e Costa (1994), quando essa angulação é igual a 90° , a reta n vai ficar paralela à reta a , e seguindo o que afirma Euclides, as duas retas não vão possuir um ponto de interseção. Mas a partir do momento em que o ângulo fica maior do que 90° , a interseção das duas retas volta a acontecer no ponto O_3 , que dessa vez ficará à esquerda do ponto O , mesmo que a figura não mostre as interseções que geram esses pontos. À medida que o ângulo de rotação vai aumentando, novas interseções vão acontecendo, como ocorre com os pontos O_1 e O_2 , mas sempre aparecendo à esquerda do ponto O , até que retorne ao ponto inicial.

Com base no movimento de rotação da reta n e da translação do ponto de interseção, Costa e Costa (1994) apresenta o seguinte questionamento: por que quando a reta n faz o ângulo de 90° em relação à reta a (onde seria o ponto O segundo a imagem) a interseção tem que ser interrompida?

Figura 14 - Princípio da Continuidade



Fonte: Adaptado de Ceppi e Fournier (1961)

A Geometria Projetiva determina que a reta n e a reta a , ainda que paralelas, irão se encontrar em um ponto O infinitamente afastado. Ao observarmos a reta n , podemos ver que quando deslizada no sentido da direita ou no sentido da esquerda, em algum momento ela vai ficar paralela à reta a . Então o ponto O infinitamente afastado pode ser alcançado independente da direção que a reta desliza. Logo estamos atendendo ao princípio de que a reta tem somente um limite. Essa consideração pode nos levar a conclusão de que uma reta tem apenas um ponto impróprio, o ponto no infinito, e esse ponto é comum a todas as retas paralelas a ela (CEPPI E FOURNIER, 1961).

Com isso foi estabelecido o princípio da continuidade para o ponto. Para diferenciar o ponto infinito O do ponto O euclidiano, o ponto passou a ser denominado como ponto impróprio, onde a sua representação dá-se pelo nome do ponto acompanhada do símbolo matemático de infinito (O^∞).

O princípio da continuidade não se resume apenas ao ponto. Dado uma reta a que possui o ponto impróprio A^∞ , a reta b que contém B^∞ não pode ser paralela à reta a , pois se isso acontecesse os pontos A^∞ e B^∞ seriam o mesmo

ponto. Com base no 2º POSTULADO, que estabelece que dois pontos distintos determinam uma reta, podemos admitir que A^∞ e B^∞ determinam uma reta, denominada de reta imprópria, na qual todos os seus pontos são impróprios. Da mesma forma que uma reta só possui um ponto impróprio, um plano só possui uma reta imprópria que é formada por todos os pontos impróprios desse plano (COSTA E COSTA, 1994).

Ainda sobre a reta imprópria, Costa e Costa afirmam que:

[Ela] ainda permite eliminar outra exceção presente na geometria euclidiana. De fato, dois planos distintos no espaço se interceptam segundo uma reta. A não ser quando são paralelos. Na estrutura projetiva a reta de interseção existe mesmo nesse caso. Qualquer reta de um dos planos é paralela ao outro, e o atravessa no seu ponto impróprio. E todos os pontos impróprios de um plano pertencem a sua reta imprópria. Então a reta imprópria de qualquer um deles é a mesma de todos os planos que lhe são paralelos. Portanto, assim como um ponto impróprio é dado através de uma reta que o contém, uma reta imprópria m^∞ é dada por um plano α que a contém [...], pois qualquer outro plano α [...] contém também a reta m . (COSTA E COSTA, 1994, p.32)

Ao definir o ponto impróprio e a reta imprópria podemos afirmar que existe um plano impróprio que contém todos os pontos e todas as retas impróprias do espaço. Todos os pontos, retas e planos que não pertencem ao plano impróprio são chamados de elementos próprios. (CEPPI E FOURNIER, 1961)

3.1.5. Princípio da Dualidade

Outro princípio importante para a Geometria Projetiva é o princípio da dualidade. Segundo Ceppi e Fournier a partir do momento em que desenvolvemos uma proposição geométrica seguindo um raciocínio apoiado nos postulados da Geometria Projetiva, e aplicamos à figuras formadas por pontos, retas e planos, a conclusão é que:

Mudando as palavras ponto por plano na proposição enunciada, e vice-versa, chegaremos a demonstrar uma propriedade que será chamada de dual ou correlativa da anterior no espaço, de tal forma que a segunda, sendo consequência lógica da primeira, não precisará ser comprovada (CEPPI E FOURNIER, 1961, p.12⁸)

Para Costa e Costa o princípio da dualidade

⁸ Tradução do autor a partir de “[...] cambiando en la proposición enunciada, las palabras punto por plano, y viceversa, llegaremos a demostrar una propiedad que se llamará dual o correlativa de la anterior en el espacio, de tal manera que la segunda, siendo consecuencia lógica de la primera, no necesitará ser demostrada” (CEPPI E FOURNIER, 1961, p.12)

[...] consiste em admitir que qualquer propriedade demonstrada para uma forma de espécie E_n será automaticamente verdadeira para qualquer outro E_n , das diversas sequências, desde que o enunciado seja adaptado ao respectivo E_0 e às espécies inferiores contidas no E_n . (COSTA E COSTA, 1994, p.35)

Assim, podemos ver que o princípio da dualidade consiste em corresponder elementos de uma figura a elementos que pertencem a outra figura. A partir do princípio da dualidade a Geometria Projetiva abre um amplo horizonte, permitindo duplicar o número de verdades geométricas demonstradas diretamente (CEPPI E FOURNIER, 1961).

As formas projetivas definidas se correspondem dualmente. A reta de pontos, que é formada por pontos que estão apoiados em uma reta, tem o seu dual no feixe de planos, que é formado por planos que pertencem a uma mesma reta. O feixe de retas, formado por retas de um plano, retas estas que possuem um ponto em comum, tem o seu dual no feixe de raios, que é formado por retas de um ponto que pertencem ao mesmo plano.

O plano de pontos, que é formado por pontos que pertencem ao mesmo plano, tem como seu dual a estrela de planos, que é o conjunto de planos que possuem apenas um ponto em comum. O plano de retas, formados por retas que pertencem ao mesmo plano tem o seu dual na radiação de raios, que é o conjunto de retas do espaço que possuem um mesmo ponto em comum.

O espaço de pontos, que é formado por todos os pontos do espaço tem o seu dual no espaço de planos, que é o conjunto de todos os planos que pertencem ao espaço. Logo podemos ver que as formas de mesma espécie se correspondem dois a dois pelo princípio da dualidade.

Costa e Costa (1994) elencam uma série de dualidades entre formas geométricas. Entre as figuras planas, podemos destacar o trivértice que tem o seu dual no trilátero, o quadrivértice tem como dual o quadrilátero. Entre as formas geométricas espaciais, o hexaedro tem o seu dual no octaedro e o icosaedro é dual do dodecaedro. Uma relação de dualidade pode ser apresentada entre o triângulo que tem como dual o triedro.

3.1.6. Região da reta e do plano

Euclidianamente falando, podemos afirmar que um ponto divide uma reta em duas regiões, pois estabeleceremos duas semirretas. Mas, seguindo o raciocínio do princípio da continuidade, projetivamente um único ponto não pode definir duas regiões em uma reta, pois partindo do ponto em direção a um dos dois sentidos vamos passar pelo ponto impróprio da reta e retornaremos ao ponto inicial pelo sentido oposto. Então para definir duas regiões em uma reta precisamos de pelo menos dois pontos distintos (Figura 15). Uma região vai ser determinada pelo segmento interno dos pontos dados, e a outra vai ser determinada pelo segmento externo que passa pelo ponto impróprio da reta.

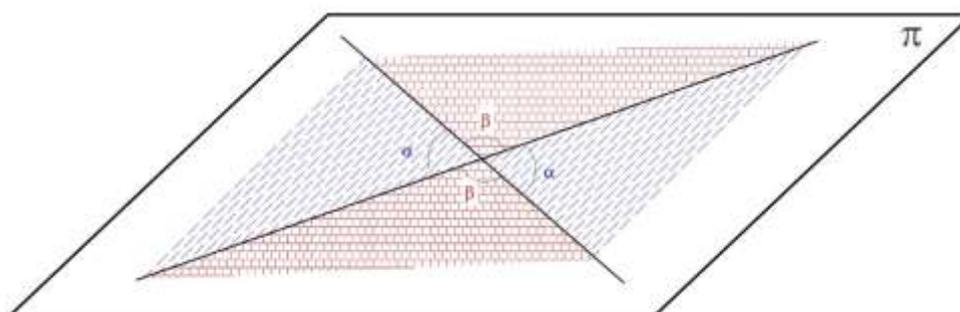
Figura 15 - Regiões da reta



Fonte: Autorial Própria

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para regiões de um plano, onde projetivamente uma reta não é suficiente para dividir o plano em duas regiões. Mas a partir do momento em que determinamos duas retas no plano, estabeleceremos duas regiões que são determinadas pelos ângulos opostos (Figura 16). A primeira região vai partir no sentido do ângulo α , vai passar pela reta imprópria do plano e finaliza no ângulo α no sentido oposto. O mesmo vai acontecer para o ângulo β .

Figura 16 - Regiões do plano



Fonte: Autorial Própria

3.1.7. Razão dupla ou Bi-razão

Dados quatro pontos quaisquer de uma reta, chamamos de razão dupla o quociente da razão dos segmentos de reta que dois pontos quaisquer formem com outros dois pontos (VIEIRA, 1941). Costa e Costa definem Razão Dupla ou Bi-razão como:

(...) um número adimensional, obtido como quociente de duas razões simples (ABC) e (ABD), cujo desenvolvimento leva à fórmula final mostrada na figura, que determina o valor da bi-razão em função das medidas de quatro segmentos de extremos A, B, C e D. (COSTA E COSTA, 1994, p.55)

Logo, a razão dupla entre os pontos de uma reta objeto A_1, B_1, C_1 e D_1 , pode ser escrita da seguinte forma $A_1B_1C_1D_1 = \frac{A_1C_1 \times B_1D_1}{A_1D_1 \times B_1C_1}$. A reta imagem da reta objeto em questão vai ter a razão dupla entre os pontos A_2, B_2, C_2 e D_2 , e essa razão dupla vai ser igual a da reta objeto, logo $(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2)$ (VIEIRA, 1941).

Quando temos quatro retas quaisquer de um feixe de retas, a razão dupla vai ser o quociente da razão dos senos dos ângulos que duas retas quaisquer formam com outras duas. Então a razão dupla entre as retas a_1, b_1, c_1 e d_1 vai ser escrita da seguinte maneira $a_1b_1c_1d_1 = \frac{\text{sen}(a_1c_1) \times \text{sen}(b_1d_1)}{\text{sen}(a_1d_1) \times \text{sen}(b_1c_1)}$. A razão dupla do feixe de retas imagem a_2, b_2, c_2 e d_2 vai ser igual a razão dupla do feixe objeto, logo $(a_2b_2c_2d_2) = (a_1b_1c_1d_1)$ (VIEIRA, 1941).

Quando temos quatro planos de um feixe de planos, a razão dupla vai ser o quociente formado entre os senos dos ângulos entre os diedros que dois planos quaisquer formam com outros dois. Dado o feixe de planos $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ objeto, a razão dupla vai ser escrita da seguinte forma $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 = \frac{\text{sen}(\alpha_1\gamma_1) \times \text{sen}(\beta_1\delta_1)}{\text{sen}(\alpha_1\delta_1) \times \text{sen}(\beta_1\gamma_1)}$. A razão dupla do feixe de planos imagem vai ser igual a razão dupla do feixe de planos objeto, logo, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$. (VIEIRA, 1941).

Segundo Costa e Costa (1994), quando temos uma razão dupla que o valor é igual a -1, ela é chamada de Harmônica.

Numa bi-razão harmônica, os dois pares de pontos são ditos CONJUGADOS. Assim, se $(ABCD) = -1$, dizemos que B é CONJUGADO HARMÔNICO DE A, em relação ao pra CD, e que D é o CONJUGADO HARMÔNICO DE C, em relação ao par AB. (COSTA E COSTA, 1994, p.64)

Uma propriedade envolvendo a bi-razão harmônica acontece quando temos um triângulo qualquer. Quando determinamos as bissetrizes interna e externa de um mesmo vértice, elas vão dividir o lado oposto harmonicamente.

3.1.8. **Projetividade entre formas de segunda espécie**

Neste tópico continuaremos apresentando o aporte teórico que embasa as transformações homológicas da circunferência.

Como vimos anteriormente, as formas de segunda espécie são o plano de pontos, a radiação de planos, o plano de retas e a radiação de raios. Essas formas de segunda espécie podem estabelecer uma relação biunívoca, sendo assim, cada elemento de uma forma corresponde unicamente a um elemento de outra, e cada forma de primeira espécie contida em um deles, corresponde a uma forma de primeira espécie contida na outra (CEPPI E FOURNIER, 1961).

3.1.8.1. **Homografias**

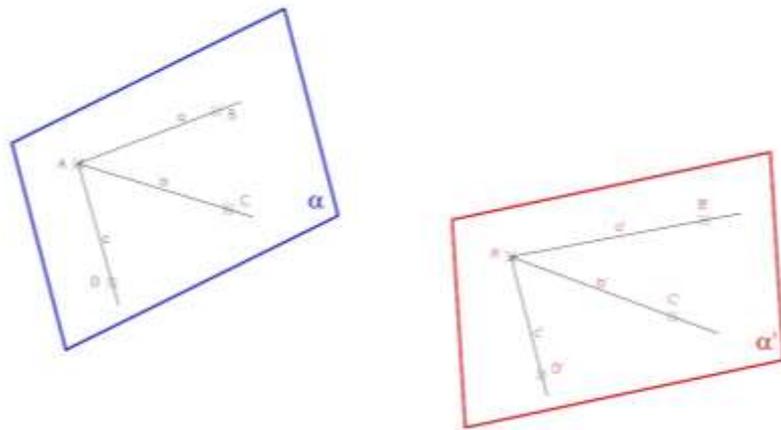
As homografias são projetividades onde a correspondência é entre elementos de mesma espécie. Assim podemos definir homografias que relacionem projetivamente um plano de pontos com plano de pontos, radiação de planos com radiação de planos, plano de retas com plano de retas, radiação de raios com radiação de raios (CEPPI E FOURNIER, 1961).

3.1.8.1.1. **Homografia entre dois planos de pontos**

A homografia entre dois planos distintos pode ser estabelecida quando os pontos de um plano são relacionados com os pontos do outro plano através de operações projetivas.

Para exemplificar a homografia entre dois planos de pontos, vamos usar o exemplo citado por Costa e Costa (1994). Ao tomarmos dois planos distintos α e α' e determinarmos os pontos A , B , C e D sobre α , de forma que eles não fiquem alinhados entre si, e determinarmos em α' os pontos A' , B' , C' e D' , respeitando a mesma condição de não alinhamento, um ponto qualquer de α define um feixe de retas com os outros pontos do plano, assim como um ponto qualquer de α' também vai definir um feixe de retas (Figura 17).

Figura 17 – Planos de pontos



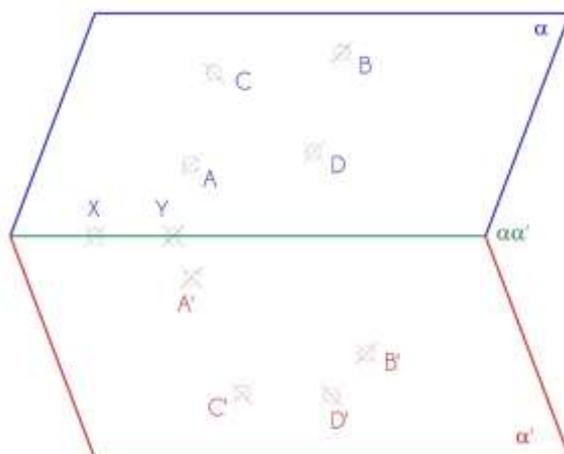
Fonte: Adaptado de Costa e Costa (1994)

A partir do momento em que determinamos um ponto E no plano α , o seu ponto imagem E' só poderá estar em uma única posição no plano α' . Com isso, estabeleceremos uma razão dupla no plano α que é a mesma no plano α' .

Quando estamos trabalhando com dois planos distintos que se correspondem através de uma homografia, eles terão uma reta de interseção $\alpha\alpha'$ (Figura 18). Ao determinarmos esses planos, teremos os pontos A, B, C e D do plano α . Também vamos determinar um ponto X que pertence a interseção entre os dois planos. Através dos pontos correspondentes A', B', C' e D' , que pertencem ao plano α' nós podemos definir a posição do ponto X' .

Costa e Costa (1994) levantam três hipóteses em relação a posição do ponto X' . A primeira é que X' não pertence a $\alpha\alpha'$, a segunda é que X' pertence a $\alpha\alpha'$ e por fim, o ponto X' pode ser coincidente com o ponto X , sendo um ponto duplo da projetividade entre α e α' . Ao determinarmos o ponto Y também sobre a reta $\alpha\alpha'$, teremos as mesmas hipóteses em relação ao ponto Y' .

Figura 18 - Interseção entre planos de pontos



Fonte: Adaptado de Costa e Costa (1994)

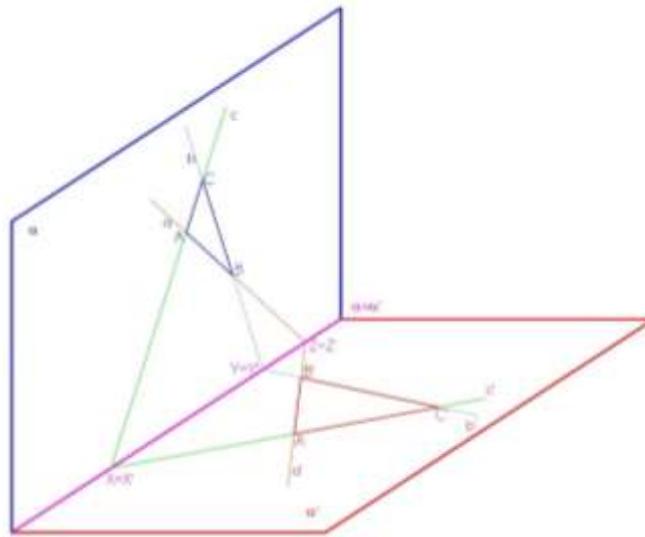
Costa e Costa (1994) apresentam as combinações das hipóteses em relação aos pontos X' e Y' , determinando algumas situações específicas para a reta XY . Quando X' e Y' não pertencem a $\alpha\alpha'$, a reta $X'Y'$ é uma reta qualquer de α' que é projetiva da reta XY . Quando X' não pertence a $\alpha\alpha'$ e Y' pertence a $\alpha\alpha'$, ou ao contrário, a reta $X'Y'$ é um caso comum de projetividade em relação a reta XY , pois não possuem nenhum ponto duplo. Se X' coincidir com o ponto X e Y' não pertencer a $\alpha\alpha'$, teremos um caso de perspectividade, pois as retas terão um ponto duplo.

Quando X' pertence a $\alpha\alpha'$ e Y' é coincidente com Y , ou X' e Y' pertencem a $\alpha\alpha'$ sem coincidir com os pontos objetos, teremos uma reta dupla entre os planos α e α' . Quando X' e Y' coincidem com os seus pontos objetos, teremos novamente uma reta dupla que necessariamente não é uma reta dupla de pontos duplos. Mas a partir do momento em que temos um ponto $Z=Z'$ sobre a reta $\alpha\alpha'$, essa reta passa a ser uma reta dupla de pontos duplos, deixando de ser uma homografia entre planos de pontos para ser uma homologia.

3.1.8.1.2. Teorema de Desargues

Para demonstrar o teorema de Desargues vamos tomar por base o trilátero formado pelas retas a , b e c , que tem como vértices os pontos A , B e C e pertencem ao plano α , que apresentam como imagens em α' o trilátero composto pelas retas a' , b' e c' , bem como os vértices A' , B' e C' (Figura 19).

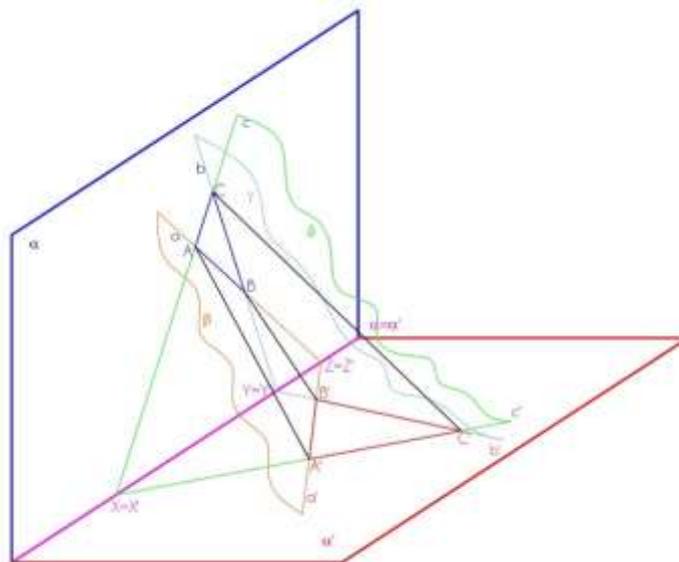
Figura 19 - Triláteros



Fonte: Autoria Própria

Podemos observar que as retas a e a' determinam um plano que chamaremos de β . As retas b e b' também determinam um plano que chamaremos de γ . Por fim, as retas c e c' também determinam um plano que chamaremos de δ . Ao traçarmos a reta AA' estamos determinando a interseção entre os planos β e δ . A reta BB' vai determinar a interseção entre os planos γ e β . Por fim, a reta CC' vai determinar a interseção entre os planos γ e δ (Figura 20).

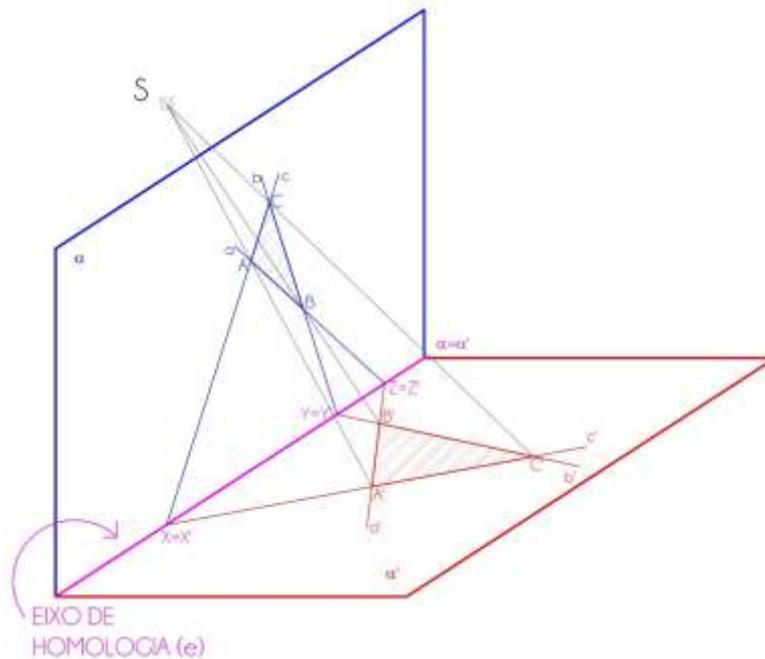
Figura 20 - Interseção entre os planos



Fonte: Autoria Própria

Ao prolongarmos as retas AA' , BB' e CC' encontraremos o ponto de interseção entre os três planos. Esse ponto que não pertence a α e nem α' , é o centro de homologia e chamaremos de S . Esse é o teorema desenvolvido por Desargues (Figura 21).

Figura 21 - Teorema de Desargues



Fonte: Autoria Própria

O ponto S é o centro de uma radiação de retas. Ao ser cortada pelo plano α , determinamos os pontos do plano α . Ao ser cortado por α' , determinamos os pontos do plano α' . Costa e Costa (1994) afirmam que os planos “ α e α' são PERSPECTIVOS entre si [...], uma vez que ambos são seções de uma mesma forma” (p.147). Podemos observar também que ao prolongarmos as retas a e a' , b e b' e c e c' elas vão determinar pontos que pertencem à reta de interseção entre os planos α e α' . Assim determinaremos uma reta dupla de pontos duplos, que será o eixo de homologia.

3.1.8.2. Homologia

Segundo Ceppi e Fournier (1961), a homologia é uma homografia entre formas planas sobrepostas que admite uma reta de pontos unidos. Costa e Costa (1994) definem a homologia como “uma perspectividade entre dois planos

pontuais, que também acarreta uma perspectividade entre dois planos de retas” (p.148).

Como demonstrado no Teorema de Desargues, em uma homologia entre dois planos de pontos α e α' , ao traçarmos uma reta entre os pontos homólogos A e A' eles estarão alinhados a um ponto S , que não pertence aos planos α e α' . Esse ponto é chamado de centro de homologia.

Ao prolongarmos as retas homólogas a e a' , elas vão se encontrar em um ponto que pertence à interseção de $\alpha\alpha'$, essa reta é chamada de Eixo de Homologia que será nomeada pela letra e . O eixo de Homologia tem como característica ser uma reta de pontos duplos, já que é uma reta que pertence tanto a α , como a α' . (Figura 22)

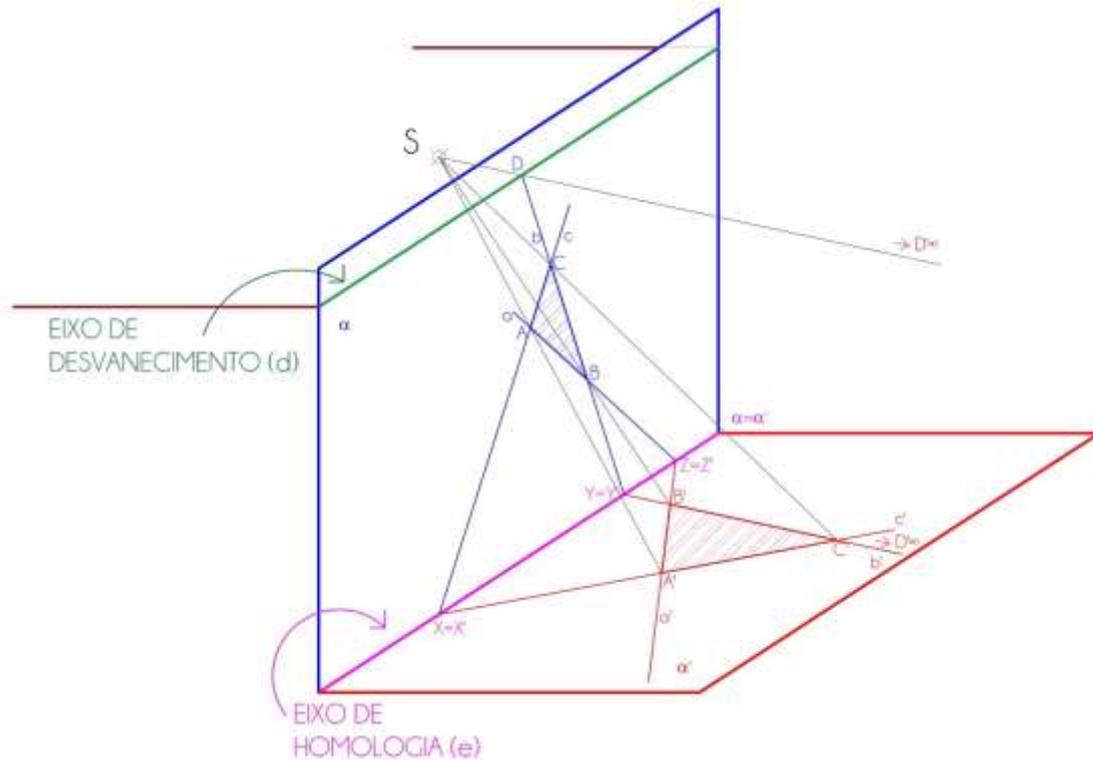
As retas limites de uma homologia são chamadas de retas que correspondem à reta imprópria. As retas limites na homologia são paralelas ao eixo de homologia. Portanto, ao encontrar um ponto podemos determinar as retas limites. (CEPPI E FOURNIER, 1961). Para apresentar os conceitos das retas limites vamos aproveitar o exemplo do trilátero usado para demonstrar o Teorema de Desargues.

Ao tomarmos o par de retas homólogas b e b' , determinamos um ponto impróprio D'^{∞} imagem que pertence a reta b' (Figura 22). Por D'^{∞} se tratar de um ponto que está infinitamente distante, será necessário passar uma paralela à reta b' pelo centro de homologia S para que o ponto D'^{∞} faça parte do feixe de raios que parte do ponto S .

A partir do momento em que a projetante de D'^{∞} encontra a reta b , determinaremos o ponto D que é o ponto objeto correspondente ao ponto D'^{∞} . Para Costa e Costa (1994) o lugar geométrico de todos os pontos que possuem a imagem imprópria será a reta que é resultante da interseção do plano formado por todas as retas que são paralelas a α' e passam pelo ponto S , com o plano α . Esse lugar geométrico contém o ponto D e a reta de interseção, que chamaremos de reta d , e ela é paralela ao eixo de homologia. Essa reta é denominada de “EIXO DE DESVANECIMENTO da homologia, pois é o limite de todos os pontos objetos cujas imagens DESVANECEM no infinito. Uma forma

elegante de definir o eixo d é como a reta objeto cuja imagem é a reta imprópria do plano α' , ou seja, d'^{∞} (COSTA E COSTA, 1994, p.149)

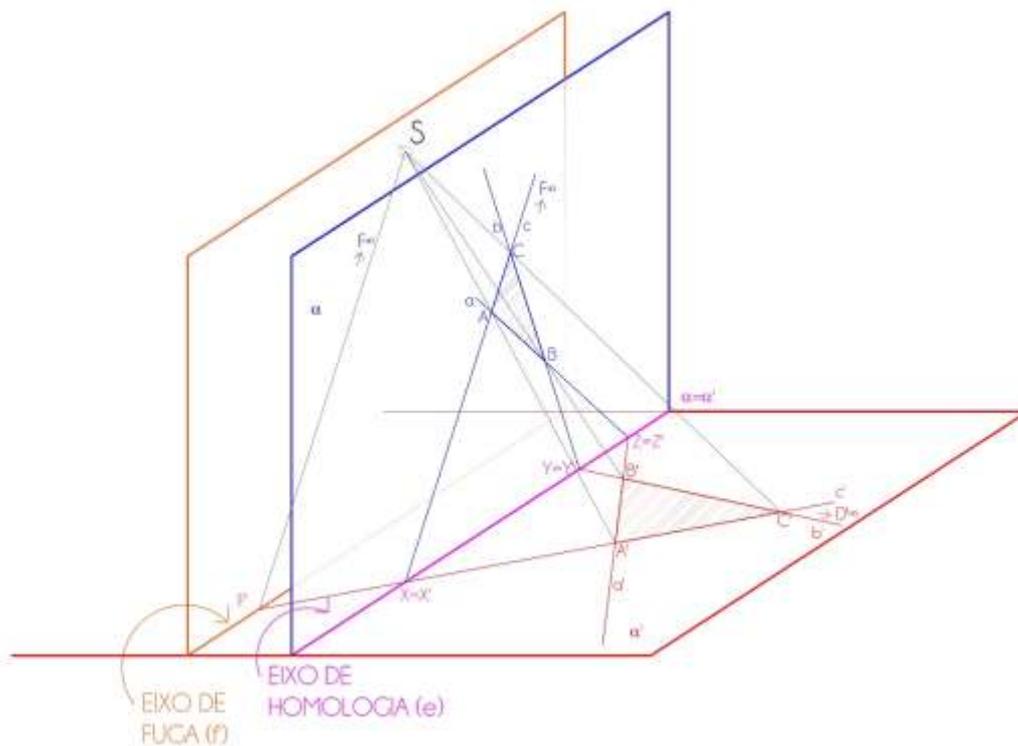
Figura 22 - Eixo de Desvanecimento



Fonte: Aatoria Própria

Agora ao tomarmos o par de retas homólogas c e c' , determinamos um ponto impróprio F^{∞} objeto, que pertence à reta c (Figura 23). Ao ligarmos F^{∞} ao centro de homologia S por meio de uma paralela à reta c , podemos determinar o ponto imagem F' , que pertence à reta c' . Assim como na situação anterior, as retas paralelas à α que passam pelo ponto S vão determinar um plano. A interseção desse plano com o plano α' vai determinar a reta f , que vai conter o ponto imagem F . Costa e Costa (1994) denominam essa reta de “EIXO DE FUGA da homologia. É o lugar para onde FOGEM os pontos imagens quando seus objetos se afastam indefinidamente sobre α .” (p. 150).

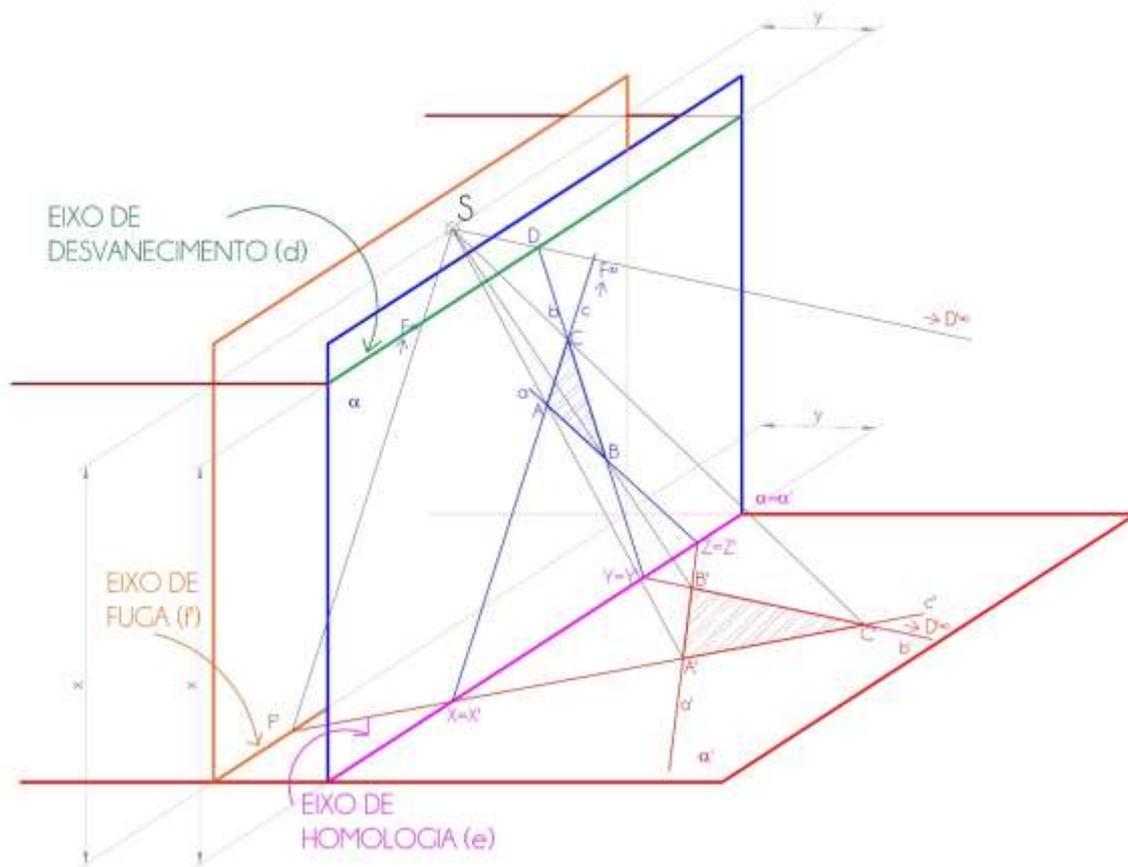
Figura 23 - Eixo de Fuga



Fonte: Autoria Própria

Como citado anteriormente, Ceppi e Fournier (1961) afirmam que as retas limites são paralelas entre si e paralelas ao eixo de homologia (Figura 24). Podemos perceber isso ao analisarmos a próxima figura. Os planos que determinam as retas limites são paralelos aos planos α e α' , em consequência as retas e , d e f vão ser paralelas entre si. Outra relação que podemos observar é que a distância de uma reta limite ao eixo de homologia é a mesma distância entre a outra reta limite o centro de homologia. Ou seja, a distância de S a d é a mesma distância de f a e , e a distância de S a f é a mesma de d a e .

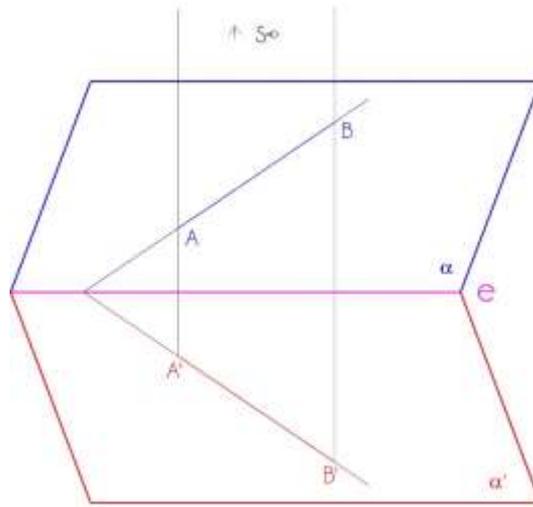
Figura 24 - Relação entre os eixos



Fonte: Autoria Própria

A homologia apresenta alguns casos particulares: o primeiro que apresentamos é quando o centro de homologia é impróprio e o eixo de homologia é próprio. Nesse caso, a homologia é chamada de afinidade. Nele, os pontos correspondentes estão em projetantes que são paralelas entre si e concorrem no centro impróprio S^∞ . Na afinidade pode ocorrer um caso ainda mais particular, no qual o centro S^∞ é o ponto impróprio das projetantes que são perpendiculares ao eixo de homologia (Figura 25). Quando isso acontece, teremos a afinidade harmônica ortogonal, que é uma simetria (CEPPI E FOURNIER, 1961).

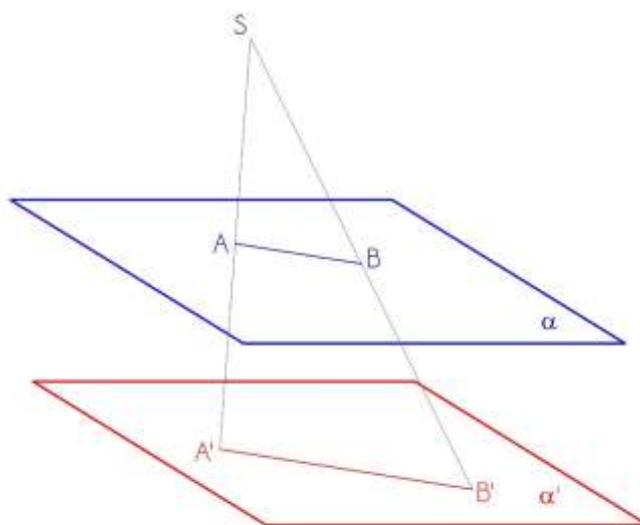
Figura 25 - Afinidade Harmônica Ortogonal



Fonte: Autoria Própria

Quando o eixo de homologia é impróprio e o centro de homologia é próprio, a homologia que vamos obter é chamada de homotetia. Neste caso, o eixo de homologia é impróprio pois os planos α e α' são paralelos entre si (Figura 26). Logo, o eixo de homologia vai ser impróprio assim como os eixos de desvanecimento e de fuga, já que os planos que determinam a interseção que dá origem aos eixos serão paralelos aos planos α e α' .

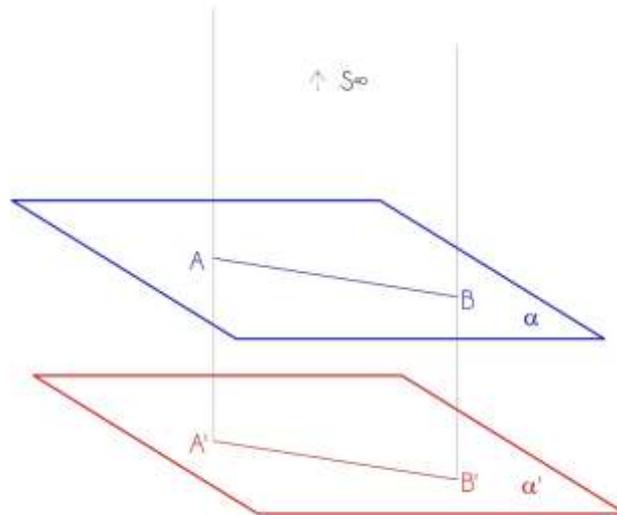
Figura 26 - Homotetia



Fonte: Autoria Própria

Outro caso específico da homologia é quando o centro e o eixo de homologia são impróprios. Neste caso a figura objeto vai ser igual à figura imagem. Essa homologia é conhecida como translação. Logo, a figura objeto será igual à figura imagem (Figura 27).

Figura 27 - Translação



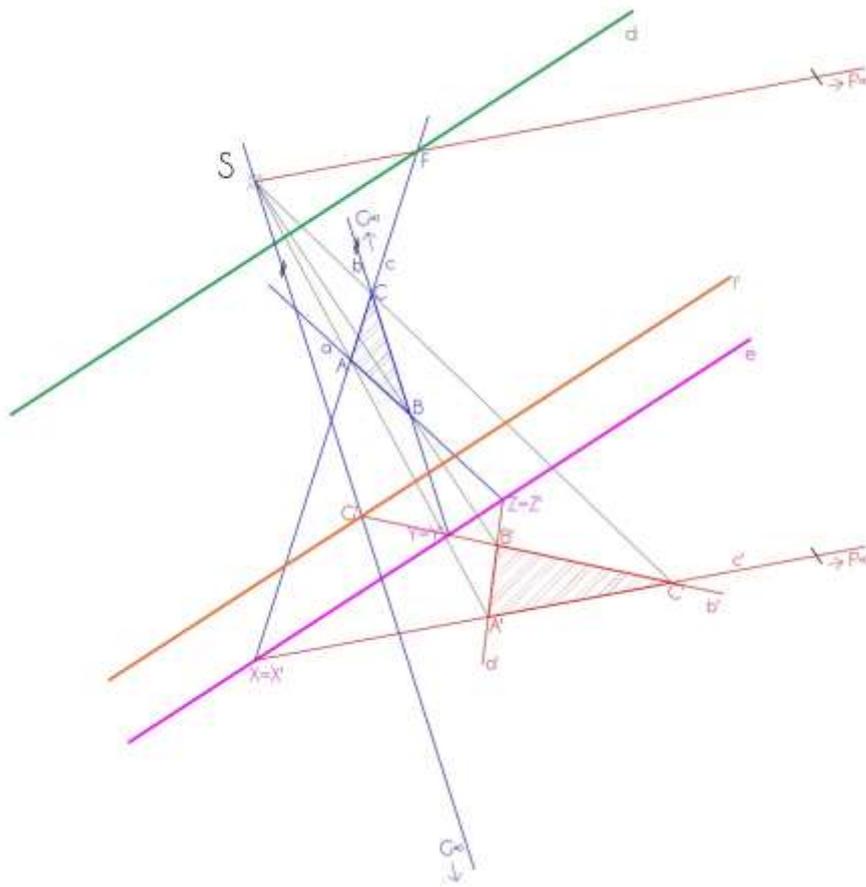
Fonte: Autoria Própria

3.1.8.3. Homologia entre planos sobrepostos

A partir de agora analisaremos a homologia entre planos sobrepostos, no qual α e α' pertencem ao mesmo plano onde é realizado o desenho, não havendo mais a necessidade de limitar os planos que estão sendo trabalhados. Mesmo trabalhando num plano bidimensional, os elementos do plano objeto são distintos dos elementos do plano imagem.

Na homologia entre planos sobrepostos os elementos da homologia continuam os mesmos, tendo as mesmas propriedades (Figura 28): o centro de homologia (S) é o centro do feixe de retas que projetam todos os pontos objetos e pontos imagens; o eixo de homologia será a reta de pontos duplos; o eixo de desvanecimento é o lugar geométrico de todos os pontos objetos no qual a imagem está no infinito; e o eixo de fuga é o lugar geométrico de todos os pontos impróprios cujo ponto objeto está no infinito.

Figura 28 - Homologia entre planos sobrepostos



Fonte: Autoria Própria

Quando tomamos o ponto S (centro de homologia), a reta e (eixo de homologia entre duas retas a e a'), os pares de pontos homólogos A e A', B e B' (que pertencem às retas a e a' respectivamente), as projetantes dos pontos A e A', B e B' (que cortam o eixo de homologia nos pontos EA e EB), teremos a razão dupla $(SEAAA') = (SEABB') = K$. Essa constante se chama constante de homologia e é igual à razão da distância entre a reta limite ao centro de homologia e ao eixo de homologia (VERA, 1941).

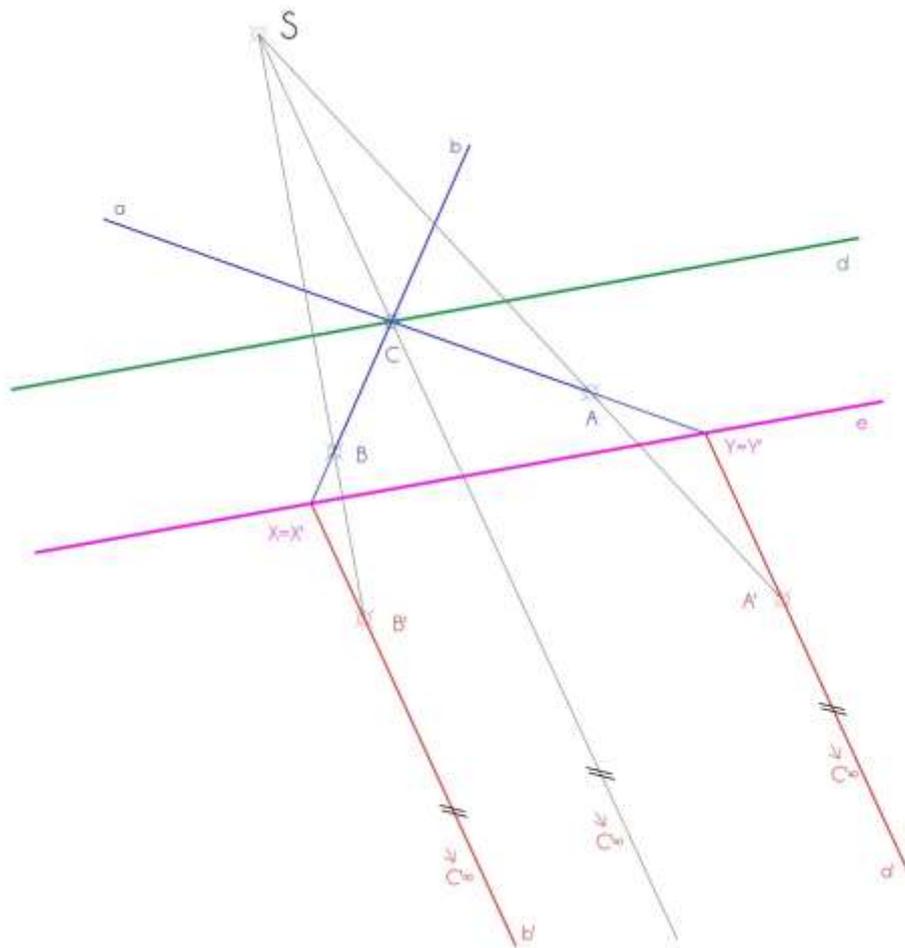
3.1.8.4. **Imagens pré-dimensionadas**

Em alguns casos específicos de homologia precisaremos que a figura objeto assuma posições específicas depois de transformada homologicamente. Para alcançar esse objetivo, alguns elementos como o centro de homologia (S) e o eixo de desvanecimento (d) precisam ocupar, de igual modo, algumas posições específicas.

O primeiro fator que podemos controlar nas figuras é o paralelismo. Dadas duas retas a e b no plano α (Figura 29), para que suas retas imagens sejam paralelas entre si, o ponto de interseção entre as duas retas objetos devem se apoiar no eixo de desvanecimento (d), já que ele é o lugar geométrico de todos os pontos objetos que têm sua imagem no infinito.

O centro de homologia pode ser escolhido arbitrariamente, e ele vai ser o responsável por determinar a direção que as retas paralelas vão ter. Outro elemento que pode ser escolhido arbitrariamente é o eixo de homologia (e).

Figura 29 - Caso de paralelismo

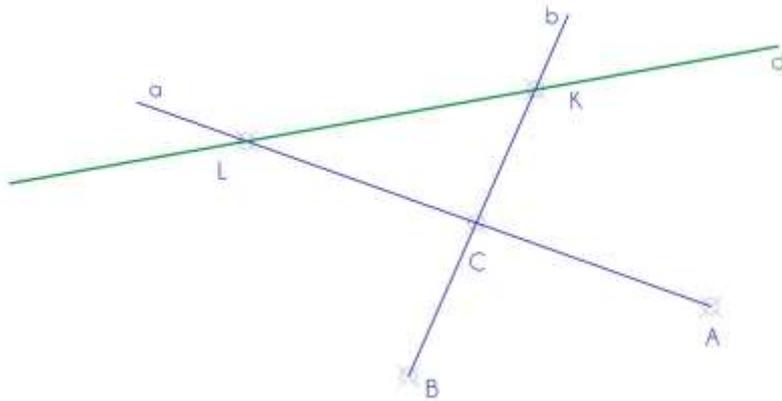


Fonte: Autoria Própria

Outro fator que podemos controlar é a angulação entre as retas imagens. Dadas as retas a e b no plano α , vamos determinar as retas imagens a' e b' tal que a angulação entre elas seja 45° . Nesse caso, o eixo de desvanecimento (d) pode ser arbitrário, contanto que não passe pelo ponto de interseção entre as

duas retas (Figura 30). Pois, se o ponto de interseção for impróprio, vamos voltar ao caso do paralelismo entre as retas imagens.

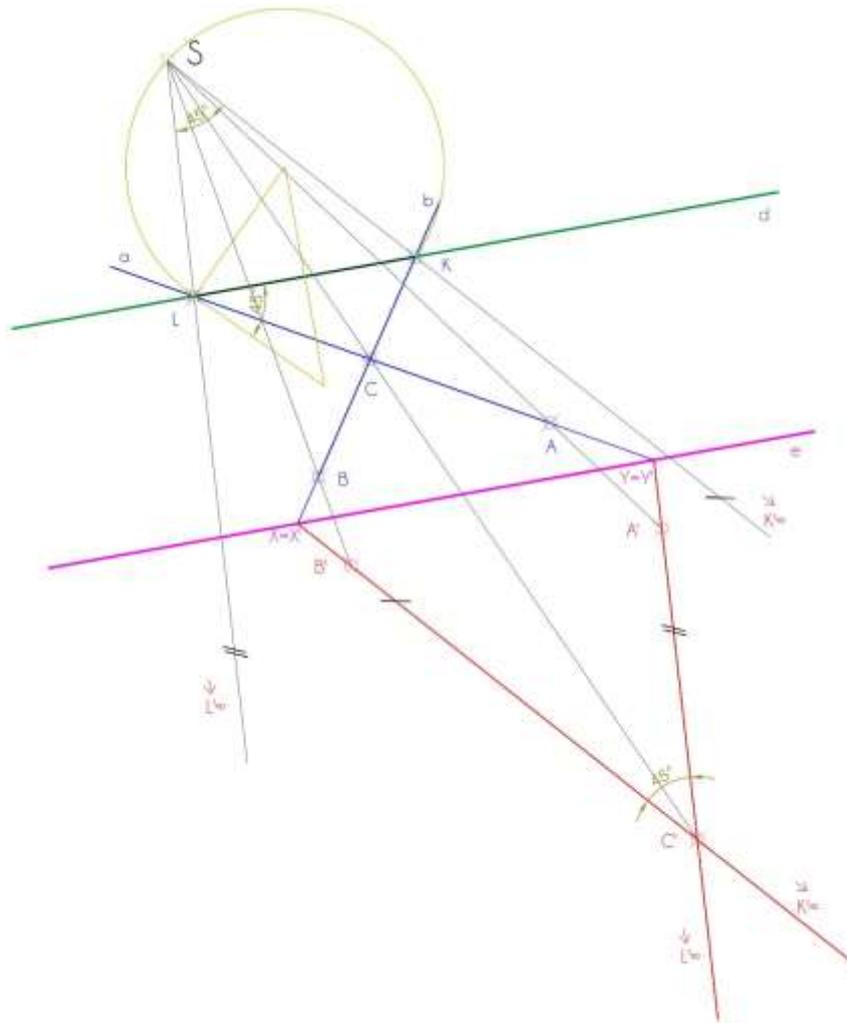
Figura 30 - Caso de angulação 1



Fonte: Autoria Própria

Diferente da situação anterior, o centro de homologia não pode ser arbitrário. A partir do momento que o eixo de desvanecimento corta as retas dadas, são gerados os pontos L e K, que terão seus pontos imagens correspondentes na reta d' que é imprópria. Assim como na situação anterior, o centro de homologia determinou a direção das retas imagens. Aqui o centro S vai continuar determinando a direção das retas imagens que precisam ter uma angulação de 45° entre si. Para isso, o ponto S precisa estar localizado no arco capaz de 45° determinado pelos pontos L e K (Figura 31), pois assim garantiremos que a direção das retas imagens que contém os pontos L' e K' farão a angulação determinada. O eixo de homologia nesse caso pode ser arbitrário.

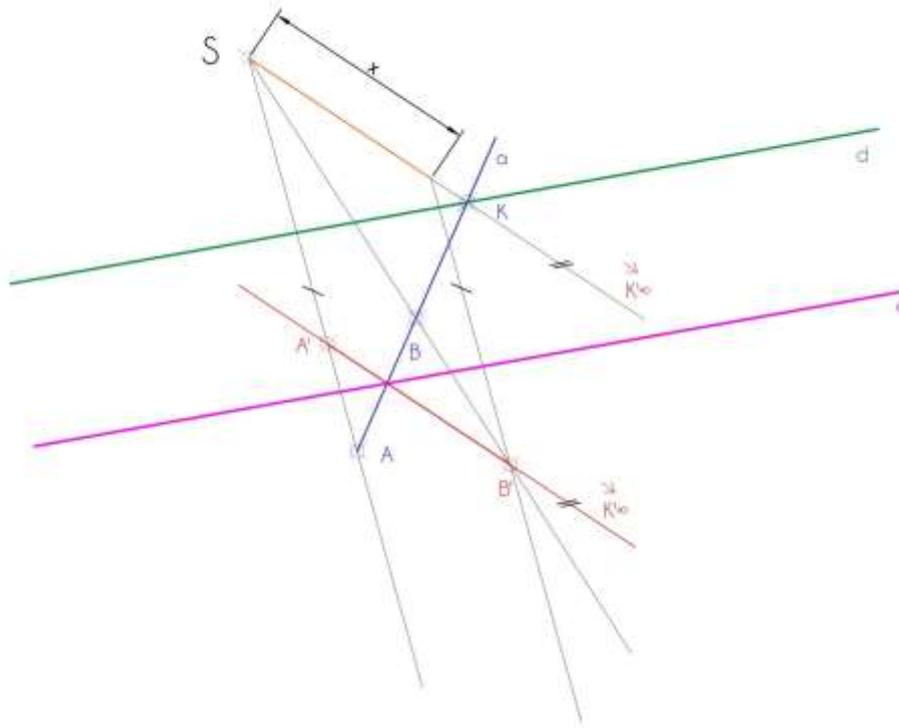
Figura 31 - Caso de angulação 2



Fonte: Autorial Própria

Outra transformação que podemos fazer na reta com base em um parâmetro definido anteriormente é a transformação de dimensão linear. Dada uma reta a objeto com os seus pontos A e B determinados (Figura 32), podemos transformar homologicamente a reta com o objetivo de que a reta imagem tenha uma dimensão específica. Se este for o objetivo, o eixo de desvanecimento deverá cortar a reta dada em qualquer um de seus pontos. O centro de homologia (S), que vai determinar a direção da reta, pode ser posicionado arbitrariamente a partir do momento em que a direção da reta está determinada.

Figura 32 - Dimensão linear



Fonte: Autoria Própria

3.2. Curvas Cônicas

Este tópico é dedicado ao principal objeto da nossa análise: as curvas cônicas. Por se tratar de um elemento de extrema importância para essa pesquisa, decidimos dar um destaque para elas. Aqui traremos alguns elementos históricos, bem como apresentaremos as maneiras que podemos estudá-las, além de fazer uma análise à luz da Geometria Projetiva, buscando entender o que acontece com os elementos das curvas cônicas. Por fim, vamos entender como podemos transformar uma curva homologicamente.

3.2.1. Aspectos Históricos

Quando pensamos na origem das curvas cônicas precisamos voltar à escola de Eudoxo, onde alguns matemáticos como Menaecmus e Aristeu descobriram as cônicas a partir do problema da duplicação do cubo. Para esses matemáticos, obtenção das cônicas dependia do ângulo vértice do cone quando ele era agudo, reto ou obtuso (ROQUE E CARVALHO, 2012).

Ainda falando sobre a história das cônicas, é impossível não fazer referência à Apolônio. Nascido em Perga, no Sul da Ásia Menor, por volta do ano 262 a.C, Apolônio era um dos três grandes matemáticos da sua época, dividindo esse posto com Euclides e Arquimedes. Mesmo sendo um grande astrônomo, Apolônio ficou conhecido como “O Grande Geômetra” pelo trabalho desenvolvido sobre o estudo das cônicas denominado de *Secções Cônicas*. Esse trabalho apresenta cerca de 400 proposições divididas em oito livros, no qual foi feito um estudo que superou trabalhos anteriores desenvolvidos por Aristeu e Euclides. (EVES, 2004)

No estudo das cônicas desenvolvido antes de Apolônio, os gregos precisavam de três tipos de cone de revolução, nos quais através da seção de um plano, perpendicular a uma geratriz do cone, se obtinha uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. No primeiro livro do seu tratado, Apolônio obtinha todas as seções cônicas a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo. Apolônio foi o responsável por introduzir os nomes elipse, parábola e hipérbole. (EVES, 2004). Ainda sobre os feitos de Apolônio, Eves destaca que no segundo livro ele trata das propriedades das assíntotas e hipérboles conjugadas e do traçado das tangentes.

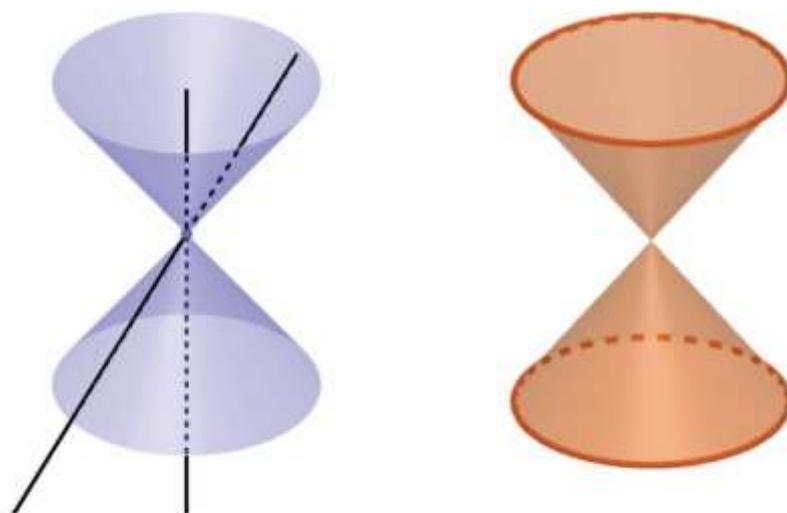
O Livro III contém teoremas variados, incluindo alguns sobre áreas como: se as tangentes a uma cônica em dois pontos A e B se interceptam em C e também interceptam os diâmetros p^or B e A em D e E, então os triângulos CBD e CAE têm áreas iguais. Encontram-se também propriedades harmônicas de polos e polares (um assunto familiar aos que fizeram um curso elementar de geometria projetiva) e teoremas relativos ao produto de segmentos de cordas que se interceptam. (EVES, 2004, p.199)

Em seu quarto livro, Apolônio prova algumas das proposições feitas no terceiro livro relativas à propriedades harmônicas de polos e polares. O livro V é o um dos livros que possuem mais destaque. Nele, Apolônio “aborda as [retas] normais como segmentos de reta máximos e mínimos tirados a um ponto da curva e ocupa-se da construção e enumeração de [retas] normais por um ponto dado.” (EVES, 2004, p. 200). No livro VI são vistos teoremas e problemas de construção das cônicas iguais e semelhantes, mostrando também como a partir de um cone reto dado podemos encontrar seções iguais a uma cônica dada. No livro VII são apresentados os teoremas envolvendo os diâmetros conjugados. (EVES, 2004)

3.2.2. Como obter as curvas cônicas

Com base no que vimos no tópico anterior, vamos levar em consideração os estudos de Apolônio, que admitiu que a partir da intercessão do cone reto ou oblíquo de duas folhas, podemos encontrar as curvas cônicas. Antes de mostrar como obter as curvas cônicas, queremos chamar atenção para duas definições importantes para a compreensão do conteúdo: a primeira definição é para superfície cônica de revolução (Figura 33), que é uma superfície gerada a partir da rotação de uma reta oblíqua em torno de um eixo fixo, onde essa reta concorre em um único ponto com o eixo, esse ponto é chamado de vértice. A segunda definição que queremos chamar atenção é a do cone de revolução (Figura 33), que é a rotação da região delimitada entre uma reta oblíqua (geratriz) a um eixo fixo (diretriz). (PEREIRA et al, 2017)

Figura 33 - Superfície Cônica de Revolução e Cone de Revolução



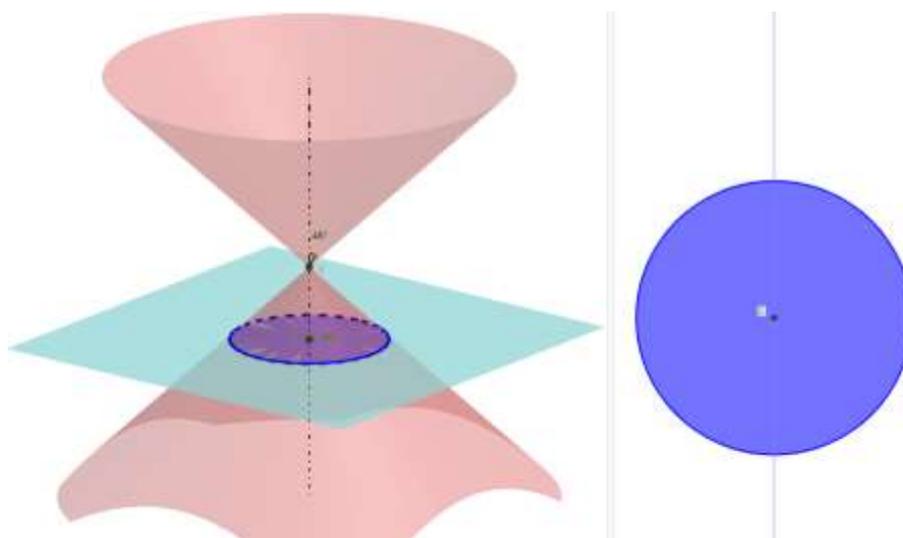
Fonte: Autoria Própria

Sabendo a diferença entre a superfície cônica de revolução e o cone de revolução, vamos agora analisar como obter as curvas cônicas a partir da interseção de uma superfície cônica de revolução com um plano α . Essa análise será feita com o auxílio de um modelo didático virtual elaborado por Ferreira (2017)⁹ utilizando o *software* GeoGebra, no qual através da manipulação dos parâmetros pré-definidos, é possível obter a representação das curvas cônicas.

⁹ O modelo pode ser acessado através do link: <https://www.geogebra.org/m/uj2bfSJV>

A primeira situação que vamos analisar é quando o plano α faz uma angulação de 90° em relação ao eixo da superfície cônica (Figura 34). A figura que vamos obter é uma circunferência e isso acontece porque o eixo gera um ponto de intercessão com o plano α e a superfície cônica também gera pontos de intercessão com o plano α , pontos esses que são equidistantes ao eixo.

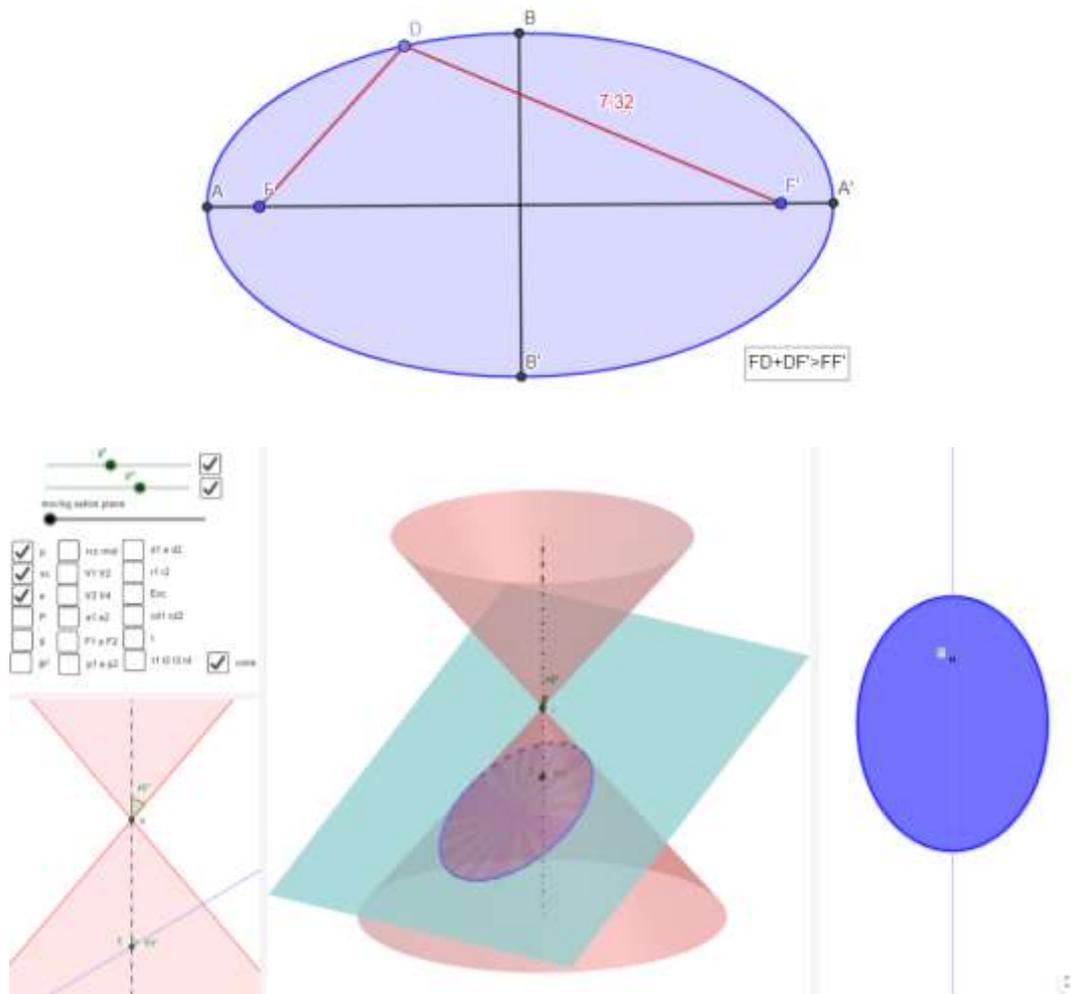
Figura 34 - Circunferência



Fonte: Gerado a partir de Ferreira (2017)

A próxima situação que vamos analisar é quando o plano α faz uma angulação menor do que 90° com o eixo, e uma angulação maior do que o ângulo formado entre a geratriz e o eixo da superfície cônica. A figura que vamos obter nessa situação é a elipse (Figura 35). Apresentamos uma definição para a elipse, que é “o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos distintos fixados é igual a uma constante, maior que a distância entre esses pontos” (LOPES, 2011, p.55)

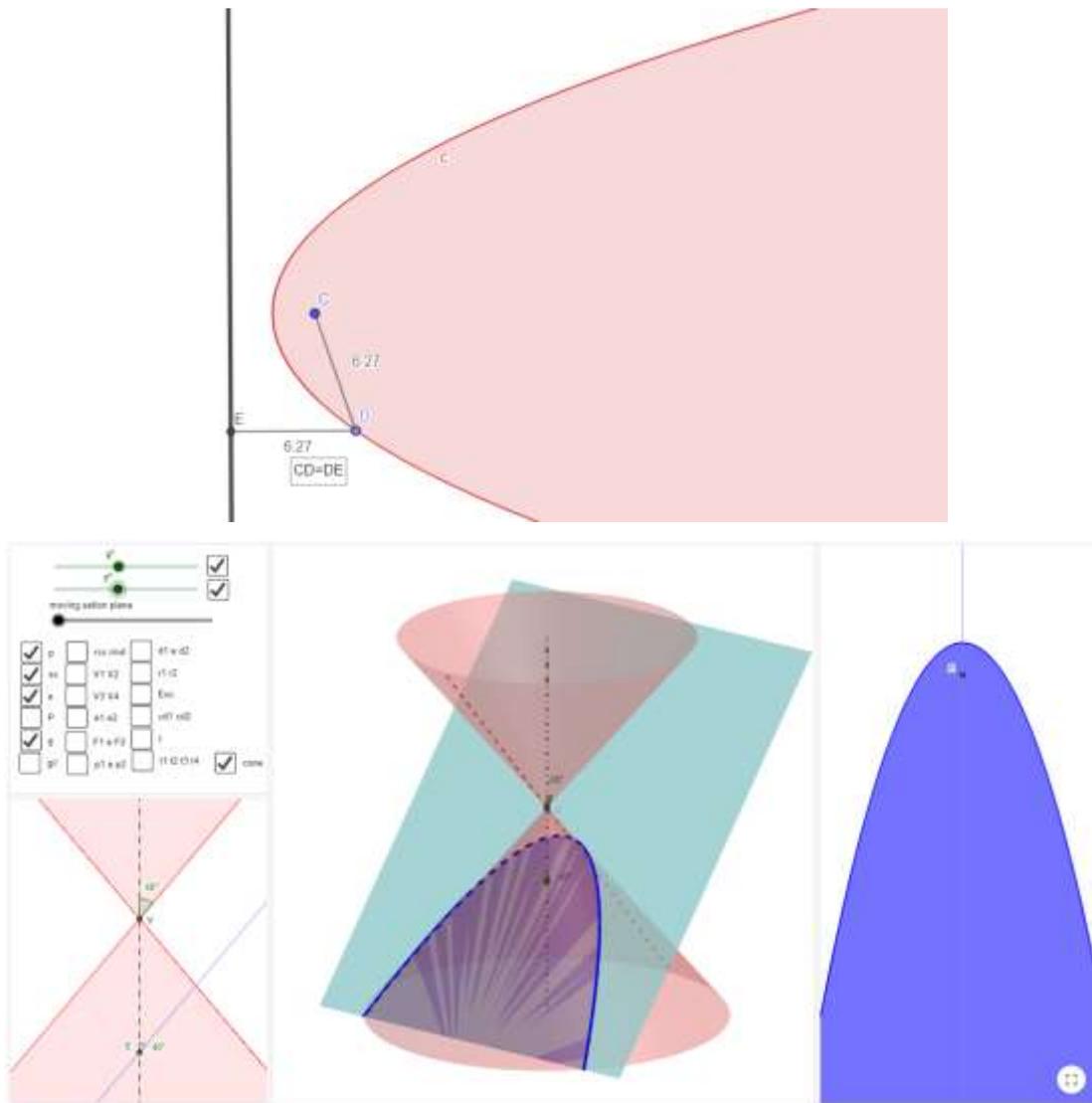
Figura 35 - Elipse



Fonte: Gerado a partir de Ferreira (2017)

Agora vamos posicionar o plano α em uma posição específica, de tal forma que a angulação entre ele e o eixo vai ser a mesma angulação entre a geratriz e o eixo. Quando o plano está nessa posição, o que vamos obter é uma parábola (Figura 36), que é o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes a uma reta e um ponto fixo. (LOPES, 2011)

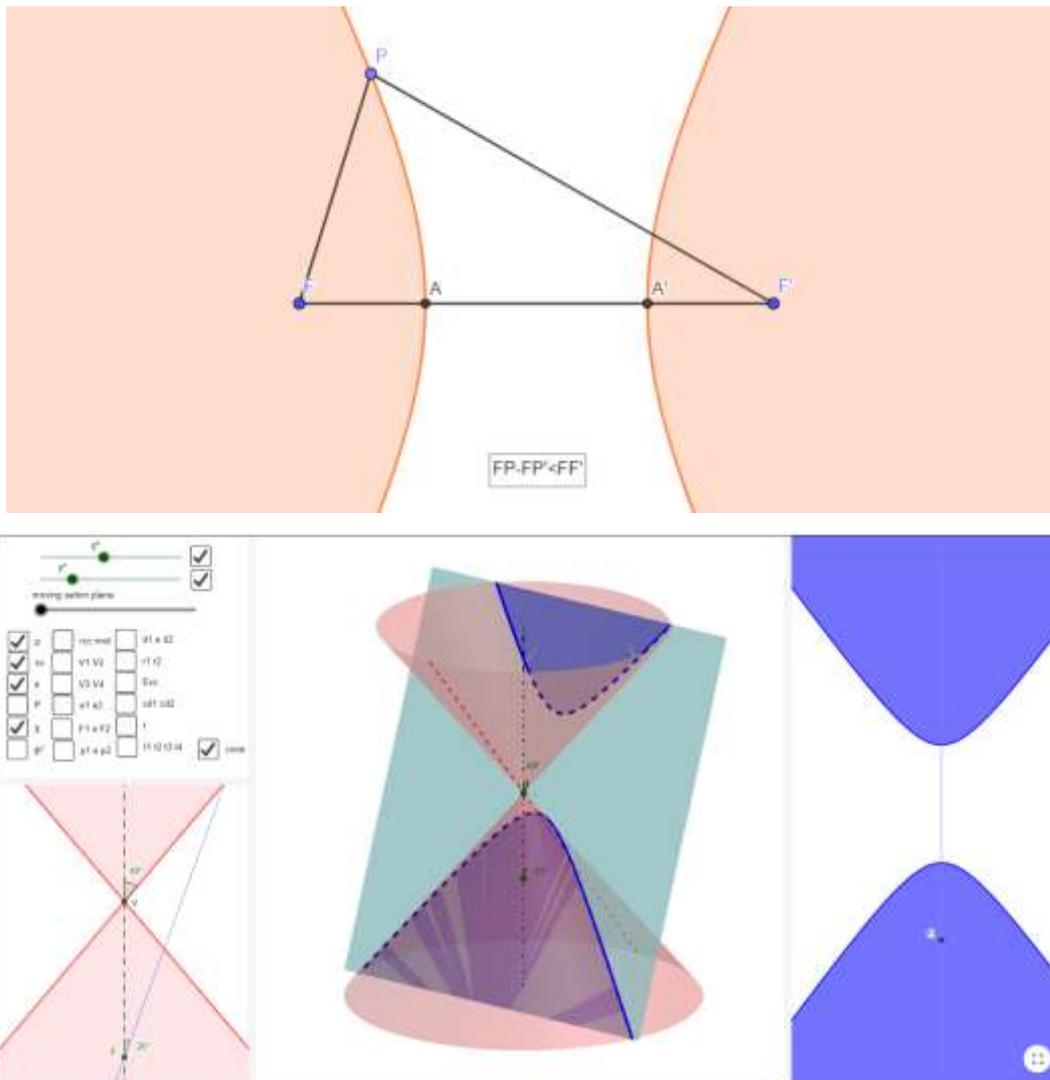
Figura 36 - Parábola



Fonte: Gerado a partir de Ferreira (2017)

Posicionando o plano α com uma angulação com o eixo menor do que a angulação da geratriz com o eixo, o plano vai passar a cortar as duas folhas da superfície cônica. Dessa forma obteremos a hipérbole que, por definição, “é o lugar geométrico dos pontos para os quais a diferença das distâncias a dois pontos distintos fixados é um valor absoluto igual a uma constante, menor que a distância entre esses dois pontos fixados” (LOPES, 2011, p.75).

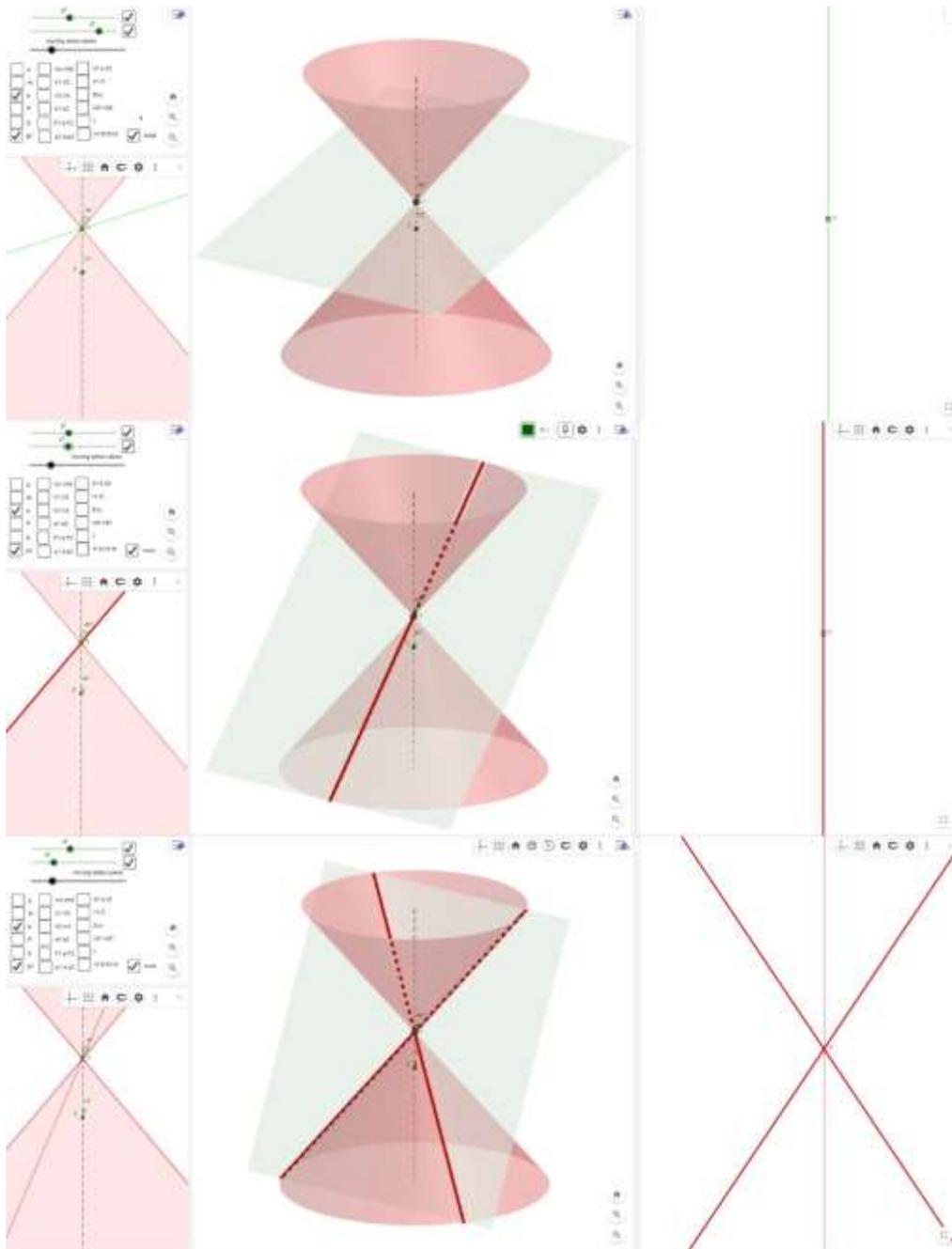
Figura 37 - Hipérbole



Fonte: Gerado a partir de Ferreira (2017)

Ainda manipulando o plano α de tal forma que o plano passe pelo vértice da superfície cônica, podemos obter as chamadas cônicas degeneradas (Figura 38). A primeira cônica degenerada que apresentamos é o ponto que obtemos a partir do momento em que o plano passa pelo vértice e tem uma angulação igual ou menor que 90° e maior que a angulação entre a geratriz e o eixo da superfície. Outra cônica degenerada acontece quando o plano α passando pelo vértice e fazendo com o eixo a mesma angulação que a geratriz faz com o eixo, o que vamos obter é uma reta. Uma terceira cônica degenerada pode ser obtida a partir do momento em que o plano α passa pelo vértice e faz uma angulação menor que a angulação da geratriz com a superfície cônica gerando, assim, as retas concorrentes.

Figura 38 - Cônicas Degeneradas



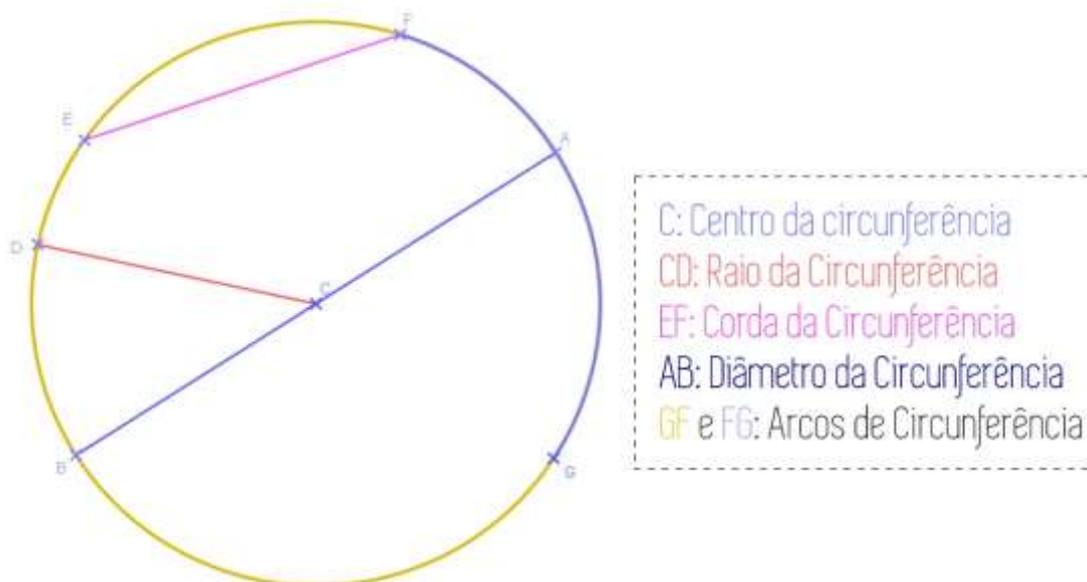
Fonte: Gerado a partir de Ferreira (2017)

3.2.3. Elementos das cônicas

Esta parte do texto está reservada para que possamos destacar quais são os elementos que compõem as curvas cônicas. A princípio vamos focar só nos elementos fazendo uma análise euclidiana das curvas cônicas, mas futuramente estaremos analisando, apoiado nos princípios da Geometria Projetiva, o que acontece com cada elemento quando mudamos a posição do plano com o

objetivo de encontrar outra curva cônica. Para este primeiro momento, vamos apresentar quais são os elementos relativos as propriedades geométricas da cônica quando a curva é uma circunferência (Figura 39).

Figura 39 – Elementos da Circunferência



Fonte: Autoria Própria

O primeiro elemento que destacamos é o centro da circunferência: ponto fixo que equidista de todos os pontos que pertencem à circunferência. Outro elemento que destacamos é o raio, que é o comprimento do segmento apoiado no centro da circunferência e em um ponto que pertence à circunferência. A corda é qualquer segmento de reta que tem suas extremidades apoiadas em dois pontos distintos da circunferência. Quando essa corda passa pelo centro da circunferência, chamamos ela de diâmetro, que é a maior corda possível e tem o dobro do tamanho do raio. Ainda temos o arco da circunferência, que é qualquer parte da circunferência apoiada em dois pontos pertencentes a ela (BARROS, 2018).

Agora vamos analisar os elementos que compõem a elipse (Figura 40): o primeiro que destacamos são os focos¹⁰, que são dois pontos distintos que não pertencem à elipse. Ao estabelecermos uma reta que passe por esses dois pontos, determinaremos a reta focal. Antes de falar um pouco mais sobre essa

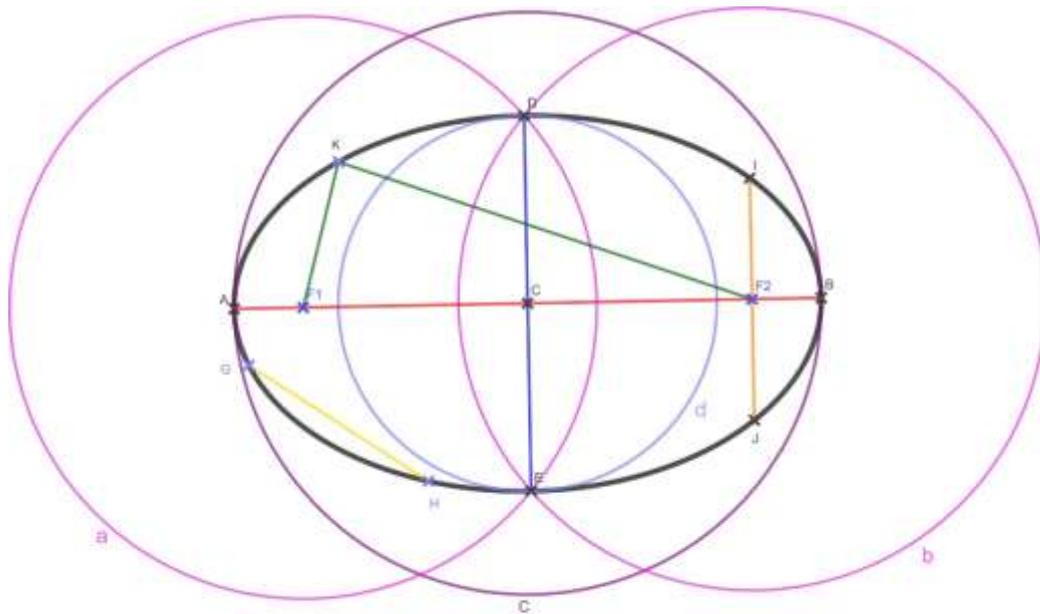
¹⁰ Ao longo do textos discutiremos as propriedades focais demonstradas por Dandelin e Morton.

reta focal, queremos chamar atenção para os vértices da elipse, que podem ser classificados em vértices principais e secundários. Os vértices principais são os pontos de intercessão da elipse com a reta focal, já os vértices secundários são os pontos de intercessão entre a reta que é perpendicular à reta focal, passando pelo ponto médio entre os focos. Esse ponto médio entre os focos é chamado de centro da elipse.

A reta focal também é conhecida como eixo maior ou eixo principal e ele está apoiado nos vértices principais da elipse. A reta que determina os vértices secundários é chamada de eixo menor ou eixo secundário. Outro elemento que destacamos são as cordas da elipse, que são segmentos que estão apoiados em dois de seus pontos distintos. Quando esse segmento é perpendicular ao eixo maior, passando por um dos focos, chamamos essa corda de corda focal.

O segmento de reta apoiado em um dos pontos da elipse e em um de seus focos é chamado de raio vetor. Como elementos da elipse ainda temos a circunferência principal, a circunferência secundária e as circunferências diretrizes. A circunferência principal é aquela cujo centro coincide com o centro da elipse e o seu diâmetro é a medida do eixo maior. A circunferência secundária é aquela que também coincide seu centro com o centro da elipse mas o seu diâmetro é a medida do eixo menor. Já as circunferências diretrizes são as que tem como centro os focos da elipse e os seus diâmetros têm a medida do eixo maior (BARROS, 2018).

Figura 40 - Elementos da Elipse



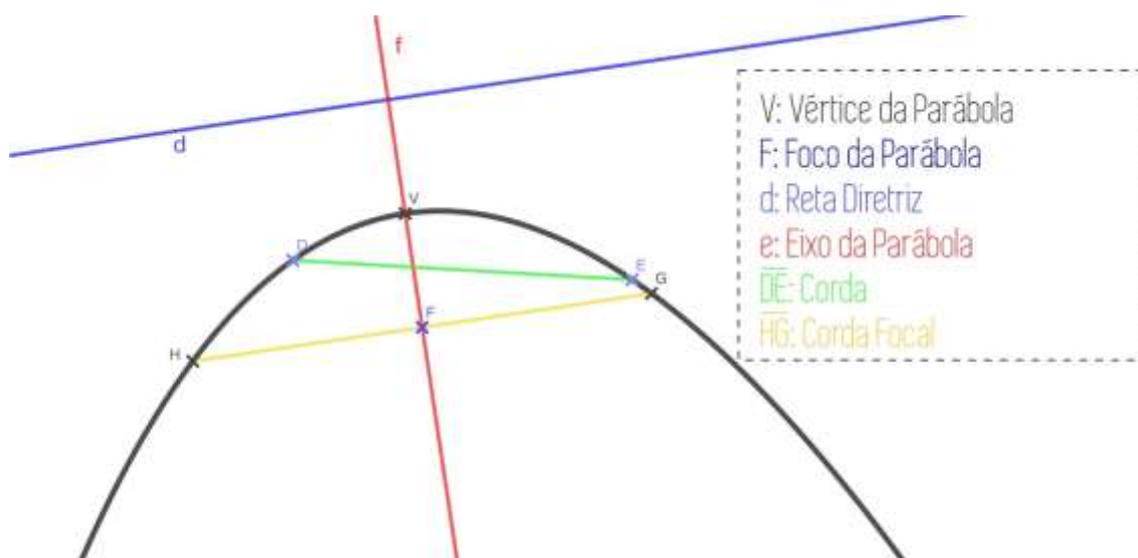
C: Centro da Elipse	\overline{GH} : Corda
F1 e F2: Focos da Elipse	\overline{IJ} : Corda Focal
\overline{AB} : Eixo maior ou Retas Focais	$\overline{F1K}$ e $\overline{F2K}$: Raios Vetores
\overline{DE} : Eixo Menor	a e b: Circunferências Diretrizes
A e B: Vértices Principais	c: Circunferência Principal
D e E: Vértices Secundários	d: Circunferência Secundária

Fonte: Autoria Própria

Vamos agora apontar os elementos da parábola (Figura 41). O primeiro elemento que destacamos é o foco: trata-se de um ponto fixo não pertencente à parábola cuja distância desse a um ponto qualquer da parábola em questão é igual à distância desse ponto a uma reta que chamamos de diretriz.

A reta que passa pelo foco da parábola e é perpendicular à reta diretriz é chamada de reta focal ou eixo da parábola. O vértice é o ponto de intercessão entre o eixo e a parábola. Ele é também o ponto médio entre o foco e a reta diretriz. A corda é o segmento que está apoiado em dois pontos distintos da parábola. Quando essa corda é perpendicular ao eixo e passa pelo foco, chamamos de corda focal. (BARROS, 2018)

Figura 41 - Elementos da Parábola



Fonte: Autoria Própria

Por último, vamos apontar os elementos da hipérbole (Figura 42): os focos da hipérbole são dois pontos fixos distintos, de onde é possível fazer a relação entre distâncias a um ponto qualquer da hipérbole. Esses dois pontos determinam a reta focal da hipérbole e a distância entre os dois pontos é chamada de segmento focal.

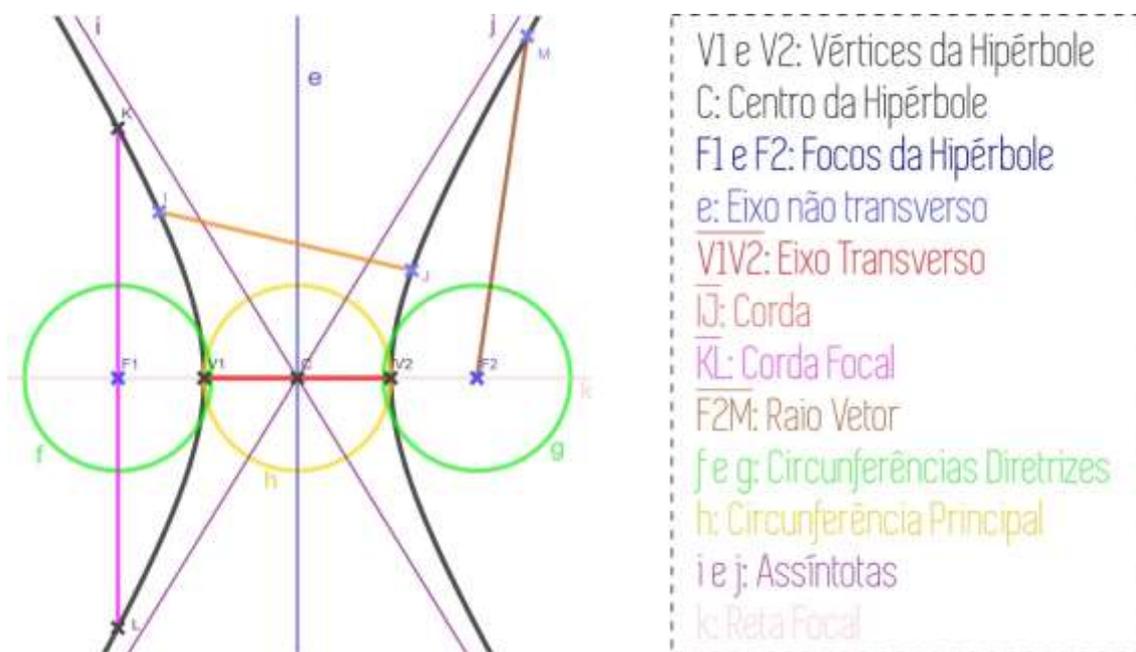
O ponto médio do segmento focal é o centro da hipérbole. Os seus vértices são determinados pelo encontro da reta focal com a hipérbole. O eixo transversal da hipérbole é o segmento de reta que une os vértices. A reta perpendicular ao eixo transversal, passando pelo centro da hipérbole é o eixo não transversal.

As assíntotas da hipérbole são as duas retas que passam pelas diagonais do quadrilátero que tem como lados as medidas do eixo real e do eixo imaginário, sendo paralelas a eles e passando pelas extremidades de cada eixo. As cordas são os segmentos de reta que estão apoiados em dois pontos distintos da hipérbole. Quando essa corda passa por um dos focos e é perpendicular à reta focal, chamamos de corda focal.

Quando ligamos um ponto qualquer da hipérbole a um dos focos, estamos determinando o raio vetor. A circunferência principal da hipérbole é aquela cujo centro coincide com o centro da hipérbole e o seu diâmetro é o tamanho do raio real. A circunferência secundária também tem como centro o centro da hipérbole, mas o seu diâmetro é o tamanho do eixo imaginário. Os últimos elementos da

hipérbole que queremos destacar são as circunferências diretrizes, que têm como centro os focos da hipérbole e os seus diâmetros são iguais à medida do eixo real. (BARROS, 2018)

Figura 42 - Elementos da Hipérbole



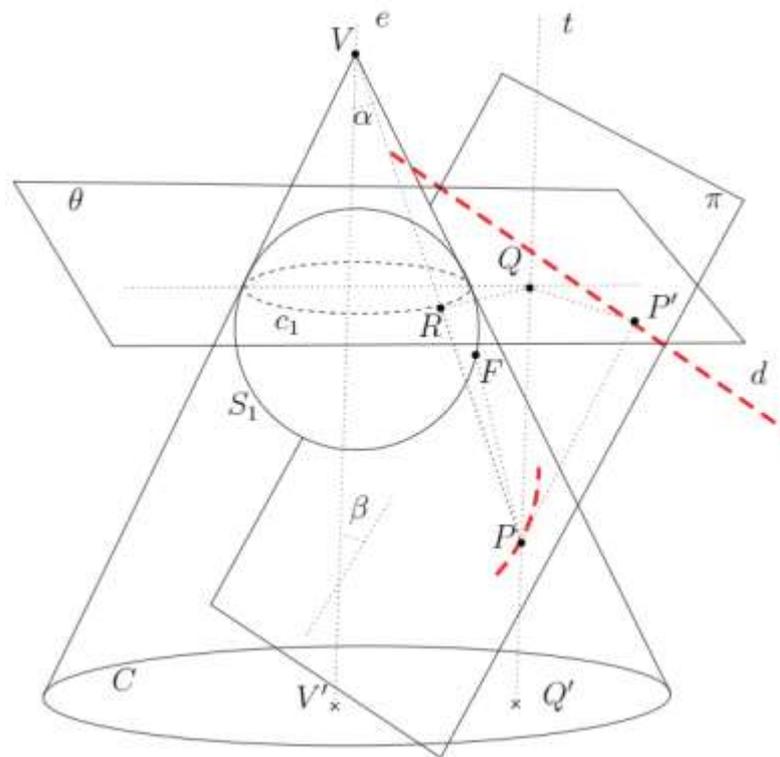
Fonte: Autoria Própria

Ainda sobre os elementos das curvas cônicas, vamos destacar agora a excentricidade, que é a razão constante determinada entre um ponto qualquer da curva cônica e uma reta de seu plano.

Tomando por base os estudos de Monteiro (2014), vamos analisar o teorema a seguir: “Seja C um cone reto sendo intersectado por um plano π . Se P é um ponto qualquer da interseção, então existe um ponto F e uma reta d fixos, pertencentes ao plano de corte π , tais que, as distâncias de P a F e de P a d mantêm uma razão constante”.

Considerando os elementos da figura a seguir (Figura 43), temos um cone reto com vértice V, que é cortado pelo plano π . S1 é uma esfera de Dandelin que está inscrita no cone C e é tangente ao plano π no ponto F, que é o foco da curva. O plano θ contém a circunferência c1, que é gerada a partir do ponto de tangência entre a esfera e o cone. A reta d é a interseção entre os planos π e θ .

Figura 43 - Excentricidade de uma cônica



Fonte: MONTEIRO, 2014, p.19

Vamos determinar um ponto P na cônica e um ponto P', tal que este esteja apoiado no pé do segmento de reta que passa pelo P e é perpendicular à reta d . Ao determinar a geratriz que passa pelo ponto P, ela vai interceptar a circunferência c_1 no ponto R. Ao passar uma reta paralela ao eixo pelo ponto P, ela vai interceptar o plano θ no ponto Q. Ao tomarmos o triângulo determinado pelos pontos PRQ, podemos observar que o ângulo no vértice P é igual ao ângulo formado entre a geratriz do cone e o eixo, já que eles são alternos internos. Por se tratar de um triângulo retângulo, o $\cos(\alpha) = \frac{PQ}{PR}$. Já no triângulo retângulo formado pelos pontos QPP', o ângulo formado no vértice P é igual ao ângulo β , logo o $\cos(\beta) = \frac{PQ}{PP'}$ (MONTEIRO, 2014).

Com isso, temos que $PQ = \cos(\alpha) \cdot PR = \cos(\beta) \cdot PP'$. Sabemos que PP' é igual a distância entre o ponto P e a diretriz, e que pela propriedade das tangentes às esferas, a distância entre os pontos P e R é a mesma distância entre os pontos P e F. Logo, o $\cos(\alpha) \cdot D(P,F) = \cos(\beta) \cdot D(P,d) \Leftrightarrow \frac{D(P,F)}{D(P,d)} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$.

A razão $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$ é chamada de excentricidade de uma cônica (e). Então todas as vezes que tivermos um ponto P resultante da interseção de um cone com um plano, vão existir um ponto F e uma reta diretriz, tais que $\frac{PF}{Pd} = e$ (MONTEIRO, 2014).

Quando a excentricidade é igual a zero, a curva que vamos ter é a circunferência, onde o foco é o centro da circunferência e a diretriz é uma reta imprópria. Quando a excentricidade é menor do que 1, a curva que vamos ter é a elipse, na qual o foco está dentro da curva e a diretriz é externa. Quando a excentricidade é igual a 1, a curva que vamos ter é a parábola, onde o foco estará na região convexa e a diretriz na região côncava. Quando a excentricidade é maior do que 1, a cônica que vamos ter é a hipérbole, com os focos externos aos ramos e a diretriz passando entre os ramos da hipérbole (COSTA E COSTA, 1978).

Agora que conhecemos os elementos das curvas cônicas vamos fazer uma análise com base na Geometria Projetiva. Para essa análise vamos, mais uma vez, utilizar o modelo didático desenvolvido por Ferreira (2017)¹¹. Com base na análise individual dos elementos de cada curva cônica vimos que elas possuem elementos em comum. Será que esses elementos são diferentes em cada curva cônica?

Vamos começar a fazer essa análise a partir da elipse. O primeiro elemento que queremos destacar são os focos. O que será que acontece com esses focos quando mudamos a posição do plano que vai cortar a superfície cônica? Mas, antes de trazer uma resposta para essa pergunta, queremos chamar a atenção para um elemento que ainda não foi tratado em pormenores até agora, que são as esferas de Dandelin.

Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) foi um matemático belga que se apoiou nos estudos desenvolvidos por Apolônio para fazer uma simplificação das cônicas e dar um destaque aos elementos comuns entre elas. A principal contribuição que destacamos são as justificativas para obter os focos e as retas diretrizes sem ser de forma bidimensional. Esse trabalho de Dandelin foi feito de

¹¹ O modelo pode ser acessado através do link: <https://www.geogebra.org/m/uj2bfSJV> acessado em...

forma colaborativa com outro matemático belga chamado Adolphe Quetelet. O teorema de Dandelin-Quetelet defende que quando temos uma superfície cônica que é cortada por um plano, podemos gerar duas esferas que vão tangenciar o plano e a superfície cônica ao mesmo tempo. Esses pontos de tangência entre as esferas e o plano secante são os focos da cônica em questão (SOUSA, 2016).

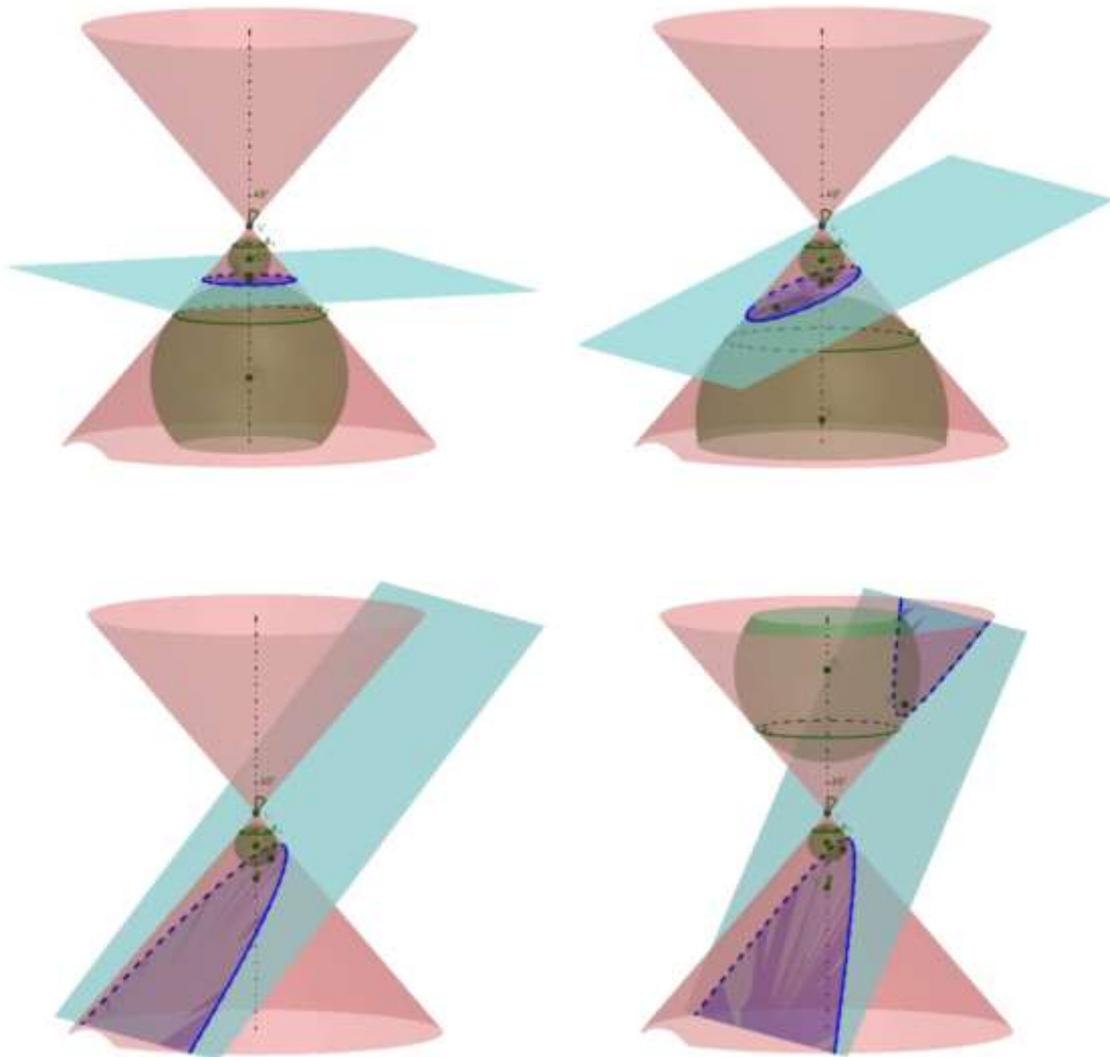
Segundo Monteiro (2014):

O trabalho de Dandelin foi mostrar que dado um plano que secciona um cone, existe uma ou duas esferas que são tangentes ao plano e ao cone. Estas esferas são as esferas de Dandelin. Trabalhando com a propriedade das retas tangentes a uma esfera que dado um ponto externo a uma esfera é possível traçar duas retas que a tangenciam em pontos distintos, cujas distâncias ao ponto dado são iguais, Dandelin consegue encontrar os focos e verificar a propriedade focal de uma só vez. (p.11)

Com base nos estudos desenvolvidos por Monteiro (2014) vamos analisar e ilustrar o teorema de Dandelin-Quetelet.

Para entender onde estão as esferas de Dandelin em cada cônica trazemos a figura a seguir (Figura 44), que mostra que quando temos uma elipse ou uma circunferência, vamos ter duas esferas próprias, que vão estar localizadas na mesma folha da superfície cônica. Quando temos a parábola, teremos uma esfera própria e uma esfera imprópria, justificando o único foco visível da parábola. Quando temos a hipérbole voltamos a ter duas esferas próprias, só que cada esfera vai estar em uma folha da superfície cônica.

Figura 44 - Esferas de Dandelin



Fonte: Gerado a partir de Ferreira (2017)

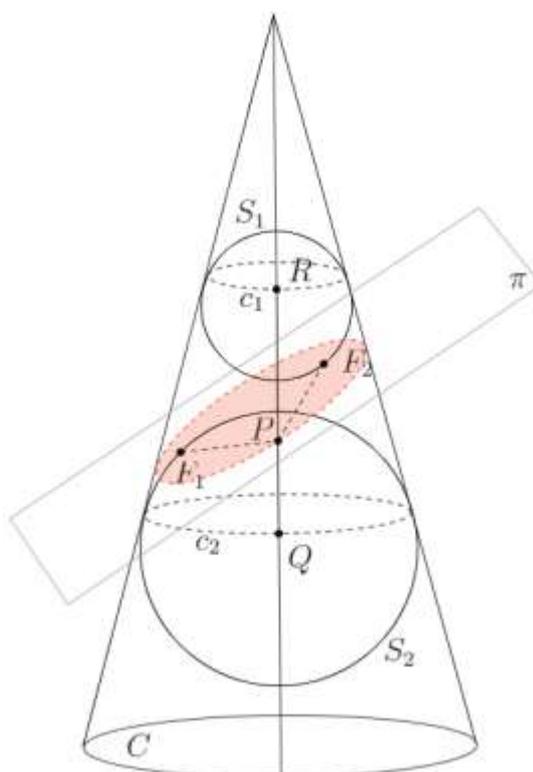
O primeiro caso que vamos analisar é quando o plano que secciona o cone de revolução tem uma angulação menor do que 90° com o eixo, e um angulação maior do que o ângulo formado entre a geratriz e o eixo da superfície cônica. Nessa situação é possível gerar duas esferas que tangenciam o cone e o plano, os pontos de tangência das esferas com o plano são os focos da elipse.

Podemos observar que as circunferências c_1 e c_2 foram geradas a partir da interseção do cone com as esferas (Figura 45 - Esferas de Dandelin (Elipse)). Pelo ponto P , que pertence a elipse, e a uma reta tangente às esferas nos pontos R e Q , passamos uma reta pelos focos 1 e 2 da elipse, que do mesmo modo serão

tangentes às esferas, sendo RQ o segmento que determina o comprimento entre c_1 e c_2 .

A propriedade das tangentes às esferas garante que $PF_1 = PQ$ e $PF_2 = PR$. Logo, $PF_1 + PF_2 = PQ + PR = RQ$. Essa soma sempre será uma constante, independentemente da posição em que o ponto P esteja em relação à elipse (MONTEIRO, 2014).

Figura 45 - Esferas de Dandelin (Elipse)



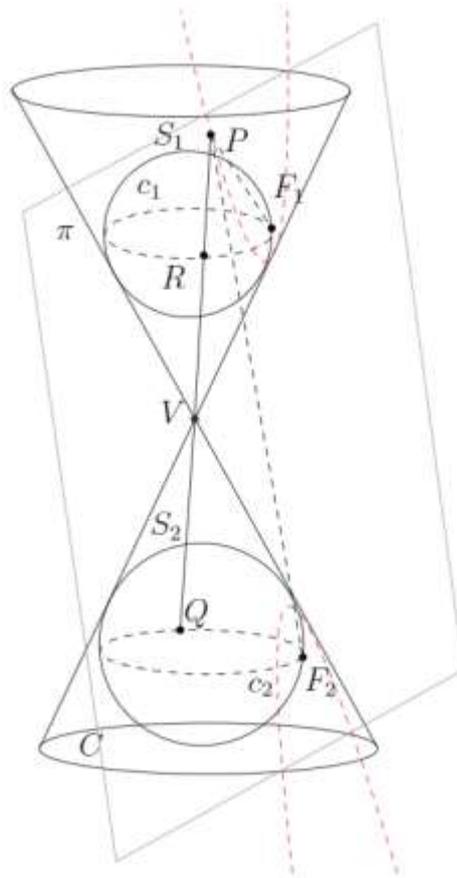
Fonte: MONTEIRO, 2014, p.12

O segundo caso é quando o plano que secciona o cone de revolução tem uma angulação com o eixo menor do que a angulação da geratriz com o eixo. Quando isso ocorre, as esferas vão continuar tangenciando o plano nos focos, porém, cada foco vai estar em uma folha do cone.

A partir do momento em que determinamos um ponto P qualquer na hipérbole e traçamos a geratriz que passa por esse ponto e pelo vértice do cone, podemos observar que essa geratriz vai interceptar as esferas nos pontos R e Q (Figura 46). O segmento RQ vai ser o comprimento entre c_1 e c_2 . Apoiado na propriedade das tangentes às esferas, $PF_1 = PR$ e $PF_2 = PQ$. Logo, $|PF_1 - PF_2|$

$= |PQ - PR| = RQ$. Essa diferença sempre será uma constante, independentemente da posição em que o ponto P esteja em relação à hipérbole (MONTEIRO, 2014).

Figura 46 - Esferas de Dandelin (Hipérbole)



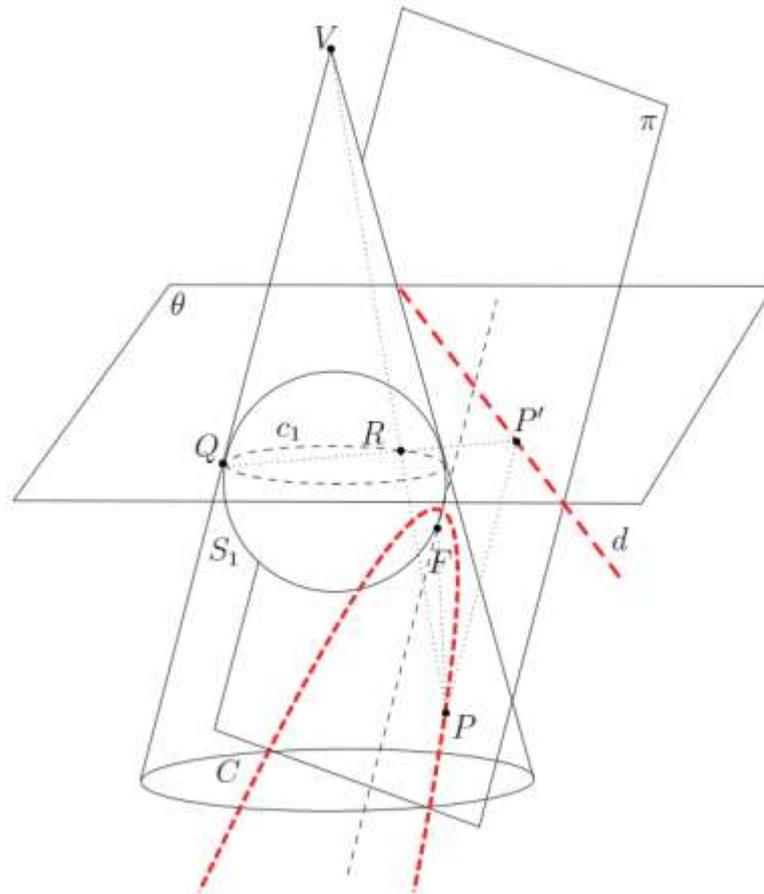
Fonte: MONTEIRO, 2014, p.13

O terceiro caso, que foi provado por Pierce Morton, é quando o plano intercepta o cone formando a mesma angulação que a geratriz do cone faz com o eixo. Visualmente vamos obter apenas uma esfera com interseção com o plano no espaço vulgar. Neste caso a reta diretriz, que é obtida a partir da interseção entre o plano que determina a curva cônica e o plano que contém o círculo c_1 , é um elemento necessário para a demonstração.

Ao determinarmos um ponto P qualquer na parábola (Figura 47), a geratriz que passa por esse ponto vai gerar um ponto R na interseção com c_1 . O ponto P' é a projeção ortogonal do ponto P na diretriz. O ponto Q é a interseção de c_1 com a geratriz paralela ao plano da curva. A propriedade das tangentes às esferas assegura que $VQ = VR$ e $PR = PF$. O triângulo isósceles que é

determinado pelos pontos VQR é semelhante ao triângulo determinado pelos pontos RPP', com isso $PP' = PR$. Logo, $PF = PP'$. Com isso, a distância de P ao foco é a mesma distância de P à diretriz.

Figura 47 - Esferas de Dandelin (Parábola)



Fonte: MONTEIRO, 2014, p.14

Agora que sabemos sobre as esferas de Dandelin e como elas geram os focos das cônicas, vamos retomar a pergunta feita anteriormente evidenciando os focos. Será que os focos são elementos diferentes em cada cônica? A resposta é não. O que vai acontecer é que, dependendo da posição do plano secante, esse ponto de intercessão com a esfera vai “mudar de lugar”, podendo ser pontos próprios ou pontos impróprios.

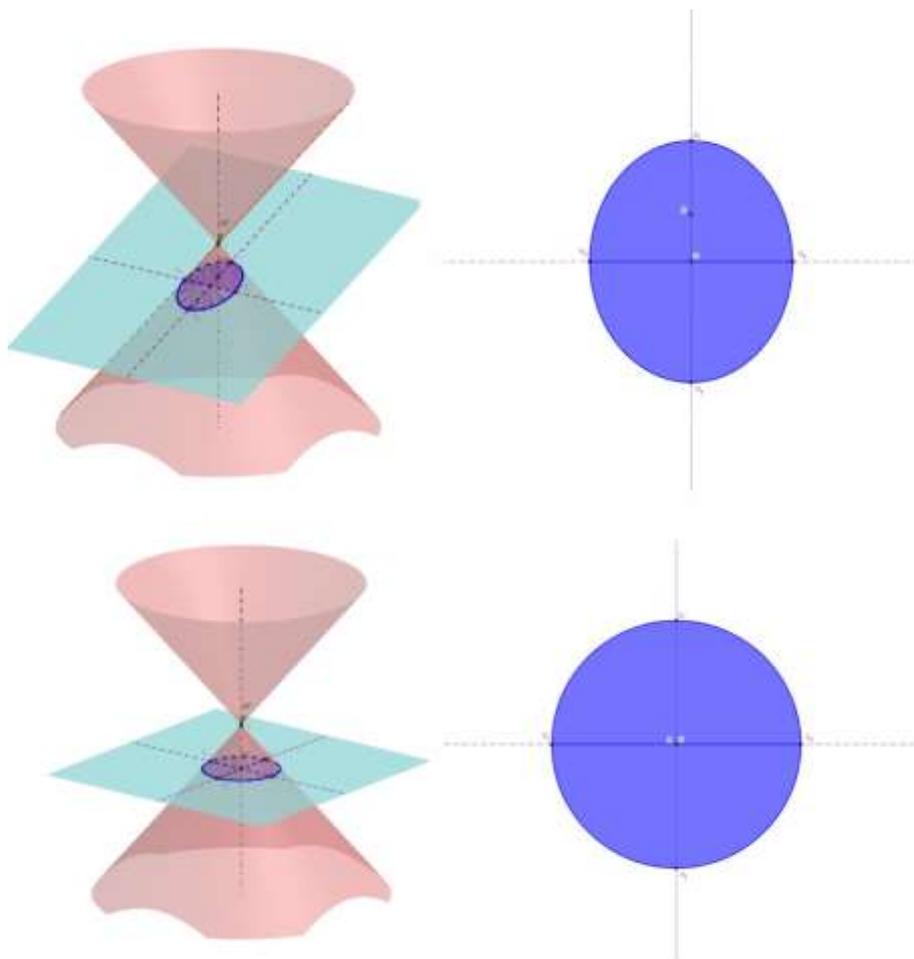
Então, sabendo que os focos da elipse são dois pontos próprios distintos, esses pontos passam a ser coincidentes no centro da circunferência quando o plano de seção está fazendo 90° em relação ao eixo da superfície cônica. Quando temos a parábola, sua reta focal vai ser paralela a uma geratriz do cone e ela vai ter um foco infinitamente afastado. Logo, o segundo foco da parábola é

um ponto impróprio. Quando temos a hipérbole, esse foco que ficou infinitamente afastado volta a aparecer na outra folha da superfície cônica, voltando a ser um ponto próprio.

O próximo elemento que vamos analisar são os vértices e os eixos das cônicas. Sabemos que o vértice é gerado a partir da intercessão da curva cônica com os eixos. Vamos fazer essa análise partindo da elipse (Figura 48), onde sabemos que os vértices principais estão apoiados no eixo maior e os vértices secundários estão apoiados no eixo menor.

A partir do momento em que mudamos a angulação do plano de tal forma que obtemos a circunferência, vemos que os eixos passam a ter o mesmo tamanho, que correspondem ao diâmetro da circunferência e os vértices ainda continuam apoiados na intercessão dos eixos com a curva.

Figura 48 - Análise do vértice na elipse e na circunferência

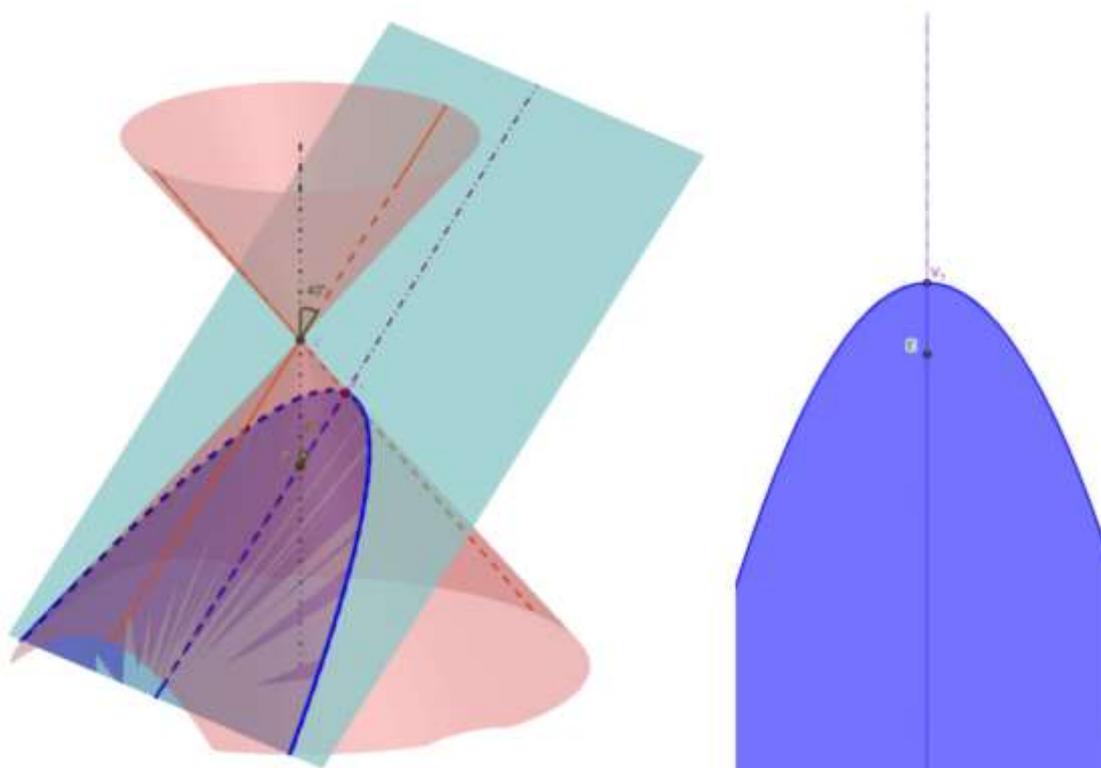


Fonte: Gerado a partir de Ferreira (2017)

Antes de analisar a parábola (Figura 49) vale lembrar que cada ponto da curva cônica está apoiado em uma geratriz dessa superfície. Isso não é diferente com os vértices das curvas cônicas. Sabendo disso, vamos agora analisar o que acontece com os vértices quando o plano está com a mesma inclinação da geratriz do cone, gerando a parábola.

A partir do momento em que vamos manipulando o plano para que ele fique com a mesma angulação da geratriz com o eixo da superfície cônica, podemos ver que um dos vértices principais vai ficando cada vez mais afastado. A geratriz desse vértice concorre com o eixo maior no vértice em questão, quando o plano está com a mesma angulação das geratrizes com o eixo, o plano vai estar paralelo a uma única geratriz, que é a geratriz do vértice. Logo, o vértice, que é o ponto de concorrência entre o eixo (que pertence ao plano), vai se encontrar com a geratriz do vértice em um ponto infinitamente afastado. Assim, o vértice é um ponto impróprio. O mesmo acontecerá com os vértices secundários e, por consequência, o eixo secundário também vai ser impróprio.

Figura 49 - Análise dos vértices e eixos na parábola

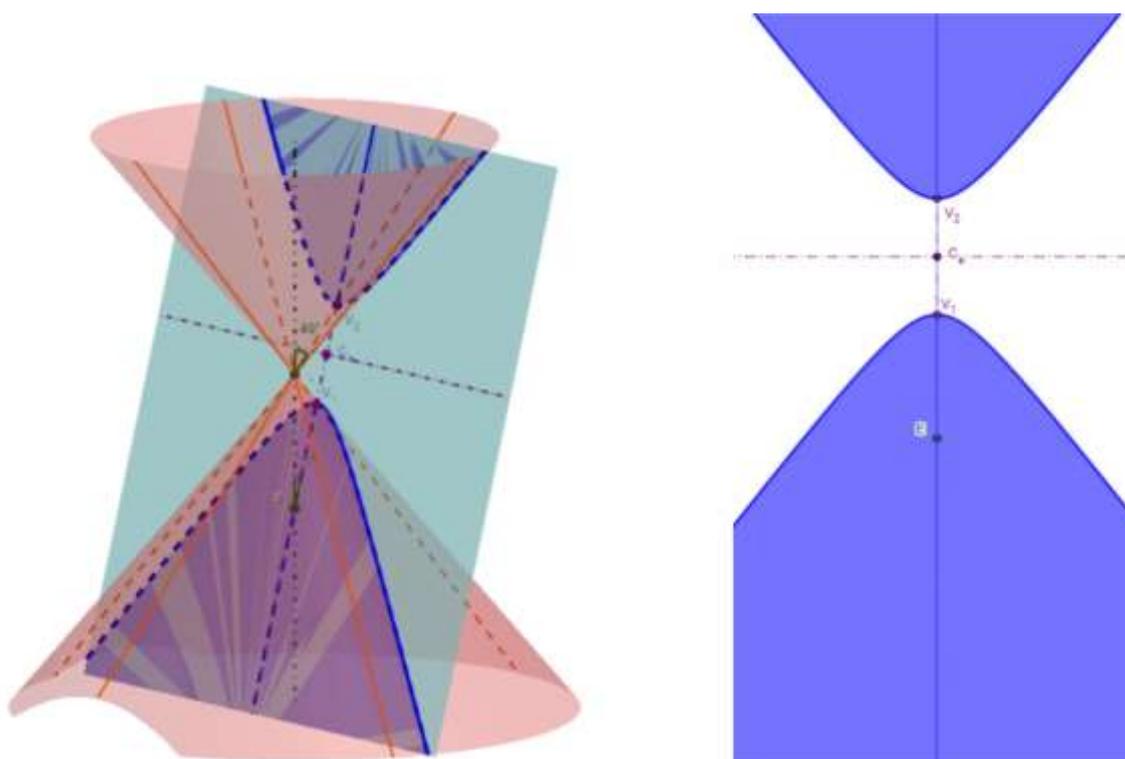


Fonte: Gerado a partir de Ferreira (2017)

Sabemos que quando o plano faz uma angulação com o eixo da superfície cônica menor do que a angulação da geratriz, a curva cônica que vamos obter é a hipérbole. E o que acontece com todos esses elementos que analisamos até agora? (Figura 50). A primeira coisa que podemos observar é que o plano deixa de ser paralelo à geratriz do vértice impróprio da parábola que está apoiado no eixo principal.

Porém, o vértice “volta do infinito” aparecendo na folha oposta a folha ao qual pertence o vértice principal que ficou próprio em todas as variações do plano. As geratrizes que determinam os vértices secundários permanecem paralelas ao plano. Logo, o eixo e os vértices secundários são impróprios. Já vimos a posição dos focos quando apresentamos as esferas de Dandelin. O centro que vemos determinado pelo eixo real e o eixo imaginário é o centro externo à curva.

Figura 50 - Análise dos vértices e eixos na hipérbole

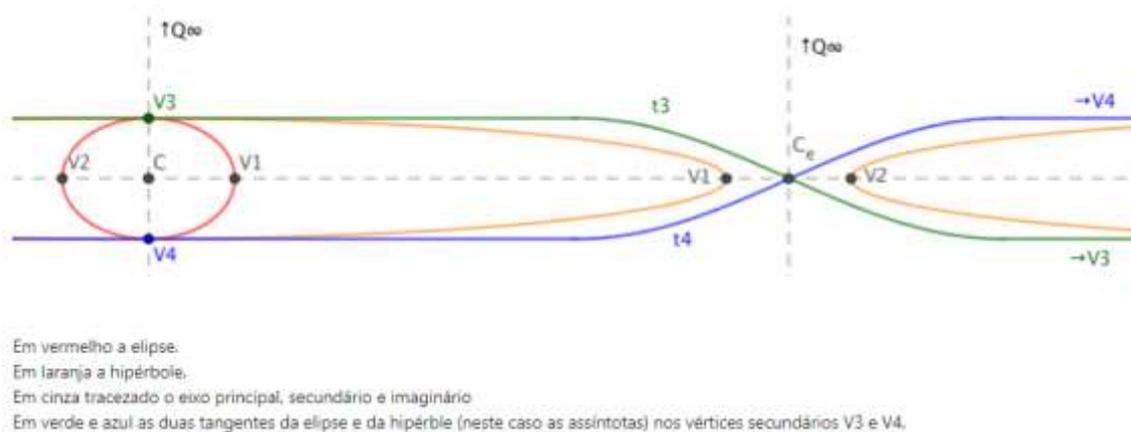


Fonte: Gerado a partir de Ferreira (2017)

Além dos elementos analisados até agora, a hipérbole apresenta um outro elemento que não aparece na análise bidimensional da elipse, circunferência e parábola, que são as assíntotas. Elas são retas tangentes aos vértices

impróprios da hipérbole e concorrem no centro externo, como vimos anteriormente. Quando manipulamos o plano a fim de obter a elipse e a circunferência, podemos ver que as assíntotas continuam sendo retas tangentes aos vértices secundários da curva. Porém, essas retas vão ser paralelas entre si e paralelas ao eixo principal das curvas. Logo, o centro externo passa a ser um ponto impróprio. Ferreira (2019) elaborou uma figura (Figura 51) com o objetivo de tentar aproximar a abstração por trás dessa reflexão das assíntotas da hipérbole.

Figura 51 - Modelo das tangentes da elipse e da hipérbole



Fonte: Ferreira (2019)

Resumindo toda essa análise feita dos elementos das cônicas, Ferreira conclui que:

Toda curva cônica possui dois focos, dois centros (um interno e um externo), dois eixos de simetria, diâmetros, duas regiões (uma interna e outra externa), excentricidade, soma dos raios focais constante, quatro vértices, tangentes, duas diretrizes e dois círculos diretores, ufa... acho que foi isso. O que vai diferenciar uma curva da outra é quais desses elementos são impróprios. (FERREIRA, 2019, p.149)

3.2.4. Transformação Homológica da Circunferência

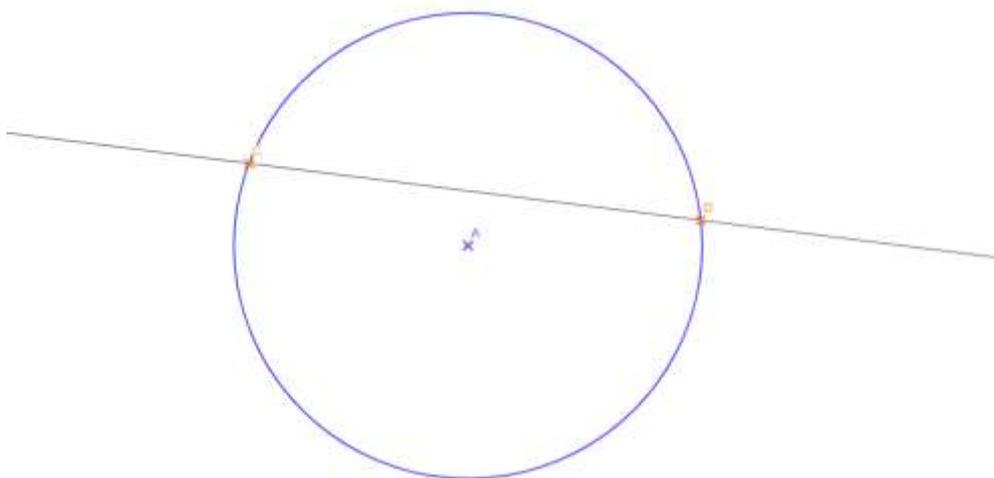
Após toda a análise dos elementos das cônicas, buscando entender como os elementos se comportam projetivamente falando, neste tópico vamos entender o que é a transformação homológica da circunferência. Nesse momento, vale resgatar os seguintes fatos: a transformação homológica da circunferência se trata de uma homologia entre planos sobrepostos, sendo um caso das imagens pré-dimensionadas, ou seja, determinamos os parâmetros para atingir o nosso objetivo.

Antes de entender como transformar homologicamente um elemento, que nesse caso é uma curva, precisamos destacar algumas propriedades. A primeira delas é que a transformação homológica conserva o grau de uma curva que Costa e Costa (1994) define como “o número máximo de pontos em que uma reta do plano pode interceptá-la” (p.173).

O grau da curva é consequência do teorema de Bézout, que é atribuído a Etienne Bézout. O teorema afirma que "sejam f e g duas curvas planas de graus n e m , respectivamente. Então, o número de pontos de interseção das duas curvas, contados com suas multiplicidades, é no máximo $m \cdot n$." (SILVA, 2012, p. 55).

No caso da circunferência, temos uma curva de segundo grau, logo uma reta do plano só pode interceptar a curva em até dois pontos (Figura 52). Com isso, sua homóloga vai ser também uma curva de segundo grau. Por esse motivo podemos obter qualquer curva cônica dependendo dos parâmetros.

Figura 52 - Ilustração do Teorema de Bézout (circunferência)



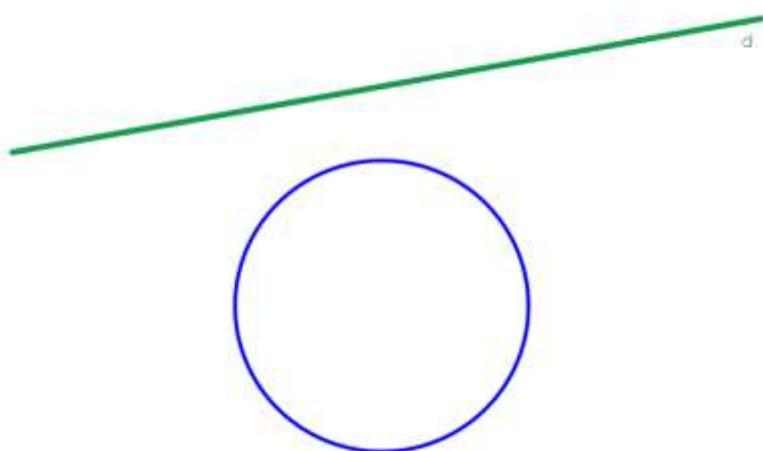
Fonte: Autoria Própria

A segunda propriedade que queremos chamar atenção é a tangência. Se um ponto A é o ponto de interseção entre duas retas quaisquer, o seu homólogo A' vai continuar sendo o ponto de tangência entre as homólogas dessas duas retas quaisquer. E por fim, a terceira propriedade que queremos chamar atenção é a propriedade Polo-Polar, que também é conservada após uma transformação homológica. Então, se temos o ponto P de uma reta polar p em relação a uma

circunferência, teremos um ponto polo imagem em relação a uma reta polar imagem.

Sabendo dessas propriedades vamos agora transformar uma circunferência objeto homologicamente¹². A reta polar da circunferência vai ser o eixo de desvanecimento da nossa transformação homológica. Nessa primeira situação vamos escolher passar o eixo de desvanecimento fora da circunferência (Figura 53), isso significa que a nossa curva não vai ter nenhum ponto impróprio. Logo essa curva só pode ser uma elipse ou uma circunferência.

Figura 53 - Circunferência objeto e eixo de desvanecimento



Fonte: Autoria Própria

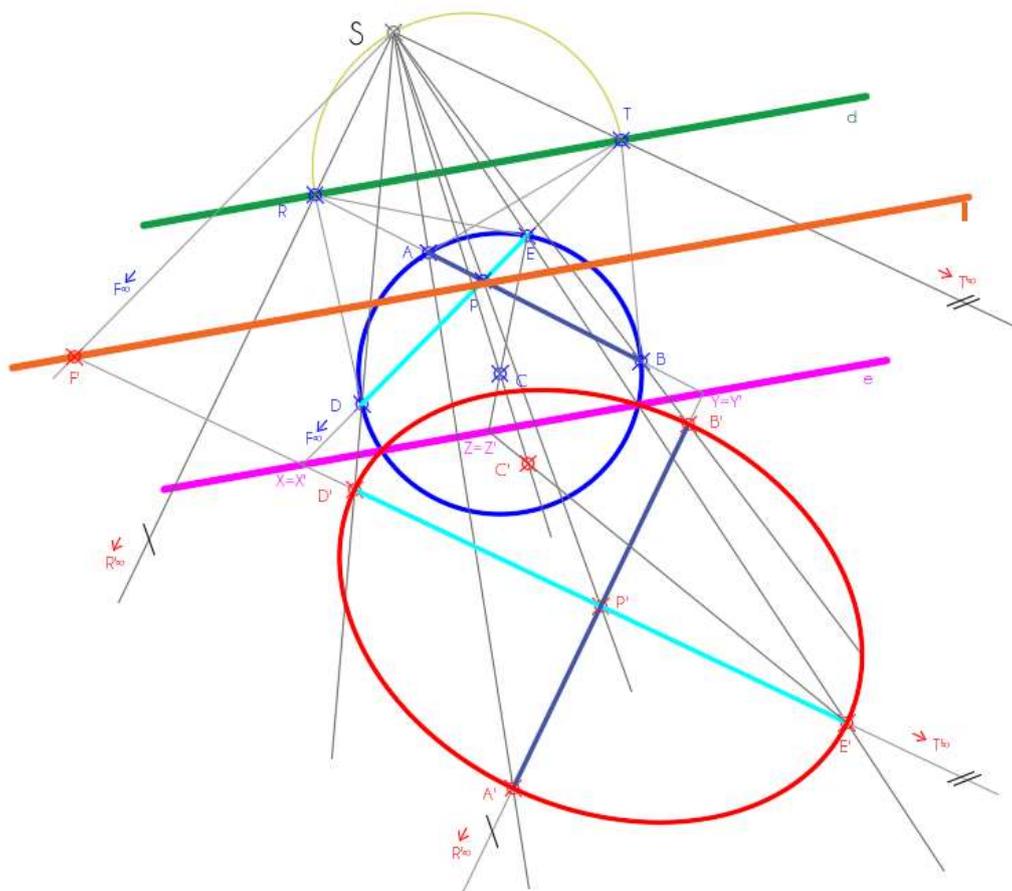
O ponto polo dessa transformação vai ser determinado por duas cordas da circunferência objeto, mas não são cordas quaisquer. O prolongamento de cada corda corta o eixo de desvanecimento no ponto onde passam retas tangentes à circunferência e nos pontos que determinam a outra corda. Nessa transformação homológica pode acontecer, por dedução, que o centro da circunferência imagem seja o centro da curva transformada. Porém, não é isso que vai acontecer, pois a imagem do ponto P objeto vai ser o centro da curva imagem. Logo, as cordas que determinam esse ponto vão ser os eixos dessa curva. A imagem do ponto C (centro da curva) vai ser o ponto polo imagem da curva que vai ter como reta polar o eixo de fuga.

¹² Transformação que ocorre através de uma homologia.

Para que os eixos façam uma angulação específica, é necessário que o centro de homologia esteja apoiado em um arco capaz de mesma angulação. Utilizaremos para exemplificar, o ângulo de 90° . Apoiando o centro de homologia num arco capaz também de 90° , que é determinado pelos dois pontos que estão no eixo de desvanecimento. Fazendo isso garantiremos que os eixos da curva imagem serão ortogonais entre si.

Nessa transformação ainda podemos colocar de forma arbitrária o eixo de homologia e a imagem de um dos pontos. A partir do momento que determinamos esses dois elementos de forma arbitrária, os outros elementos dessa homologia vão ser consequência dessa escolha, e para a transformação homológica com esses parâmetros o que vamos obter é a elipse (Figura 54) como curva imagem.

Figura 54 - Transformação homológica da circunferência (Elipse)

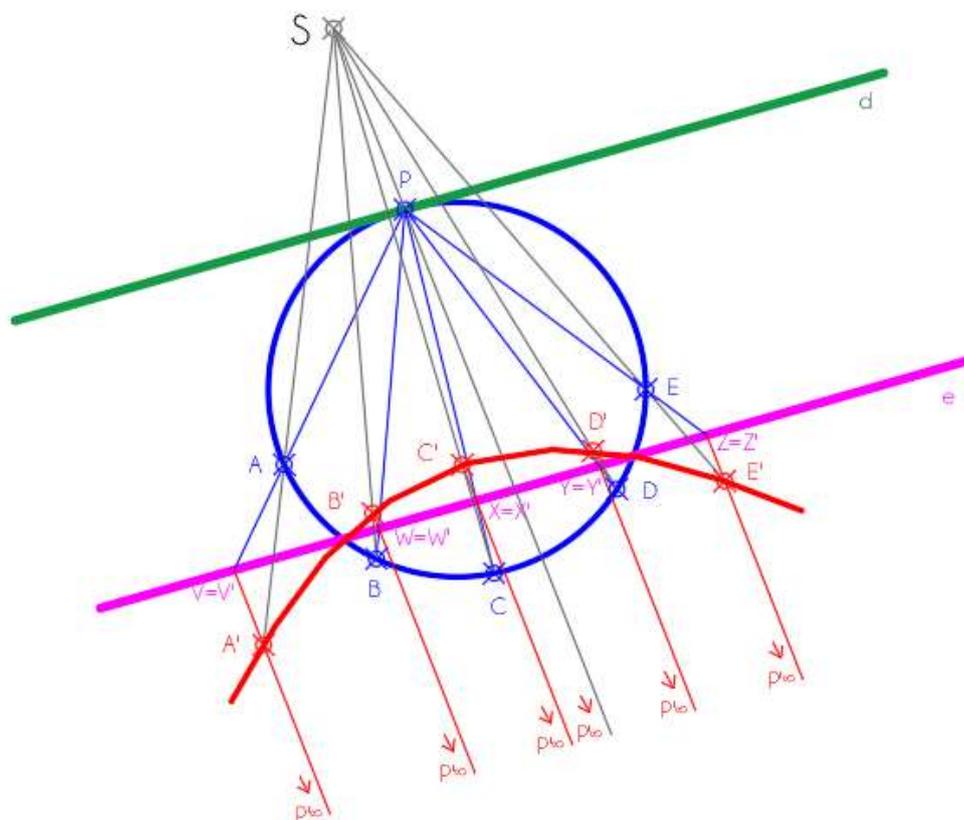


Fonte: Autoria Própria

Sabemos que a parábola é uma curva que possui o centro interno impróprio. Ou seja, para ter uma parábola como figura imagem de uma circunferência objeto, o eixo de desvanecimento precisa tocar em um ponto da circunferência, pois com isso garantiremos que esse ponto de tangência vai ter sua imagem infinitamente afastada. Esse ponto de tangência entre a circunferência e o eixo de desvanecimento é o ponto polo. Partindo do pressuposto de que a imagem do ponto polo é o centro da curva imagem, sabemos que o centro interno da transformação homológica em questão vai estar infinitamente afastado.

Para essa transformação podemos colocar de forma arbitrária o centro de homologia e o eixo de desvanecimento. Para encontrar os pontos da curva imagem podemos determinar cordas na circunferência objeto que tem como uma das extremidades o ponto polo, pois já sabemos a direção do ponto P' . Essa transformação homológica vai resultar em uma parábola (Figura 55).

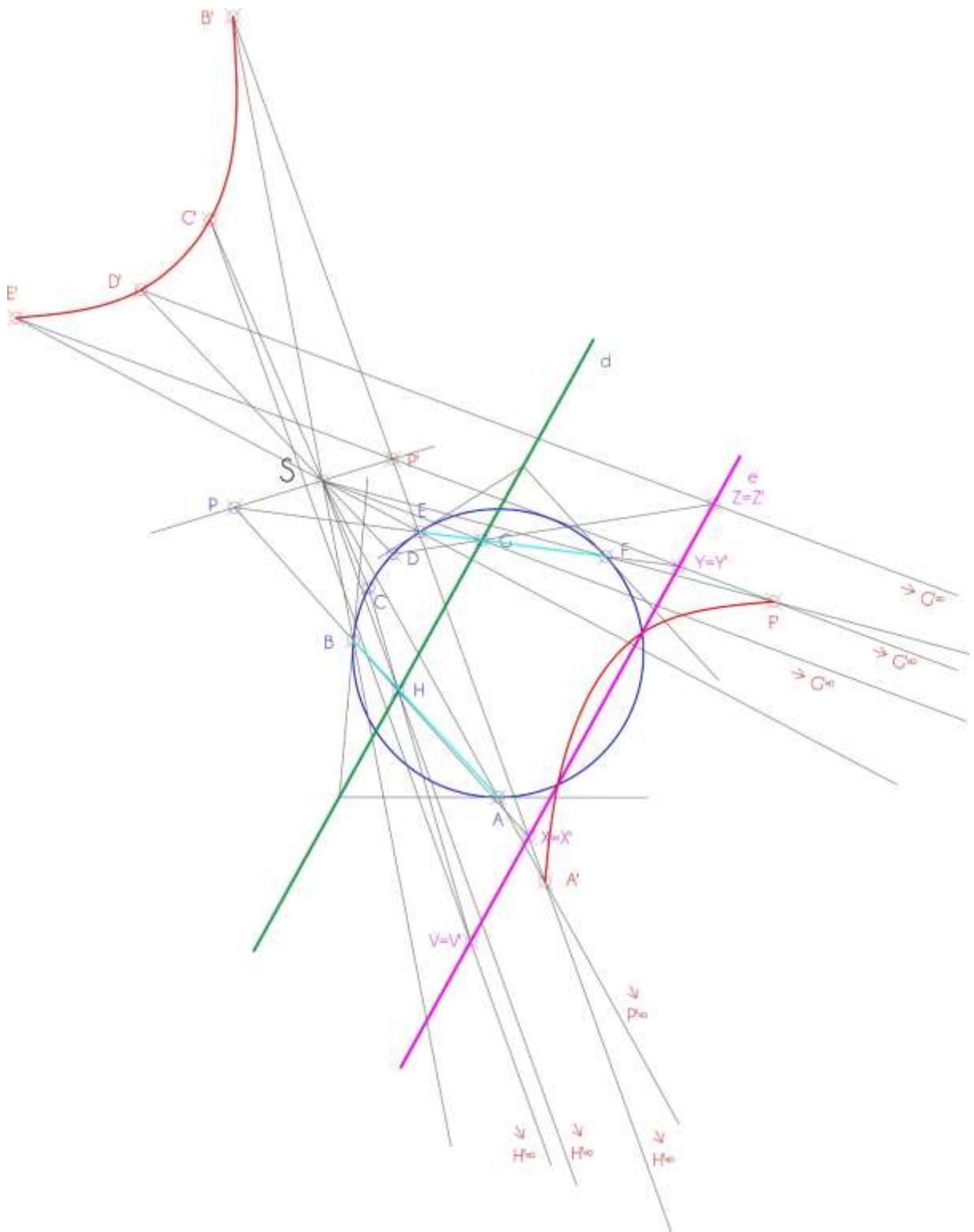
Figura 55 - Transformação homológica da circunferência (Parábola)



Agora vamos ver o que acontece com a curva quando o eixo de desvanecimento corta a circunferência objeto. Se escolhermos um ponto polo qualquer fora da circunferência, perceberemos que a reta polar vai cortar a circunferência em dois pontos. Para determinar a reta polar precisamos desenhar duas cordas quaisquer da circunferência que passem pelo ponto P. A partir do momento em que passamos retas tangentes à circunferência pelos pontos determinados pelas cordas, elas vão ter concordância em dois pontos distintos da reta polar, que vai ser o nosso eixo de desvanecimento.

Já vimos que o eixo de desvanecimento é consequência da posição que escolhemos para o ponto polo. Outros elementos que podem ser escolhidos de forma arbitrária é a posição do eixo de homologia, o centro de homologia e um dos pontos imagem. A partir do momento em que esses elementos são escolhidos de forma arbitrária, o restante vai ser consequência dessas escolhas. A transformação homológica que vamos obter é a hipérbole (Figura 56).

Figura 56 - Transformação homológica da circunferência (Hipérbole)



Fonte: Autoria Própria

3.3. Revisão da bibliografia

Com o objetivo de saber o que se pesquisa acerca da Geometria Projetiva nos últimos cinco anos, foi feito um levantamento das pesquisas disponíveis na Biblioteca Digital Brasileira de teses e dissertações (BDTD), o periódico Capes e o Scielo. Nessa revisão bibliográfica buscamos encontrar trabalhos que tivessem como foco central a Geometria Projetiva.

Esse levantamento foi dividido em três categorias: trabalhos que apresentam estudo teóricos, trabalhos que apresentam sequências de atividades e trabalhos que apresentam aplicações da Geometria Projetiva. O quadro 7 apresenta os resultados. O descritor utilizado para a pesquisa foi 'Geometria Projetiva'.

Quadro 7 - Natureza das produções

Estudos Teóricos	Nascimento (2017); Pádua (2019); Oliveira Júnior (2018); Giatti (2020); Cortese (2017); Cruz (2017).
Sequência de atividades	Rodrigues (2018); Vieira (2016); Figueiredo (2018); Cardoso Junior (2018); Pavaneli (2019); Silva (2018).
Aplicação da GP	Souza (2017); Sena (2017); Silva (2018); Ferreira (2019).

Fonte: Dados da Pesquisa

Dentre as pesquisas classificadas como estudo teórico, Nascimento (2017) apresenta em sua pesquisa o Porismo de Poncelet, que é um dos teoremas mais importantes da GP. Em sua pesquisa é apresentado tanto o caso base para triângulos como o caso geral para um polígono qualquer. O caso do triângulo junto com as cônicas é apresentado como uma possibilidade de ser explorado no Ensino Médio como o auxílio de *softwares* de Geometria Dinâmica (GD).

Pádua (2019) propõe em sua pesquisa um estudo sobre os invariantes afins, por transformações afins; invariantes projetivos, por transformações projetivas; e invariantes conformes, por transformações de Möbius, para certos pares de curvas.

Oliveira Junior (2018) buscou fazer uma análise das cônicas no contexto sintético, analítico e projetivo, como também conhecer algumas aplicações dessas curvas. Em sua pesquisa foi apresentado um contexto histórico sobre os estudos de Apolônio e Dandelin, bem como foram trabalhados os conceitos de

plano projetivo e aplicação das cônicas no contexto projetivo, além de demonstrar os Teoremas de Pascal e Brianchon.

Giatti (2020) estuda as isometrias no espaço com o apoio de um modelo euclidiano utilizando as coordenadas cartesianas, e um modelo homogêneo, através das coordenadas homogêneas. Além desse estudo, Giatti discute as vantagens teóricas e computacionais do modelo homogêneo.

Cortese (2017) apresenta uma reflexão histórica e linguística sobre o papel fundamental que o infinito desempenha de acordo com Pascal. A pesquisa foi estruturada em três partes: a primeira é dedicada à formulação de uma analogia retórica que é chamada de analogia de desproporção, inspirada por Secretan 1998. A segunda parte faz uma análise da prática matemática de Pascal e na última é feita uma análise filosófica sobre o infinito pequeno e o infinito grande, levando em consideração a matemática de Pascal.

Cruz (2017) estuda as transformações geométricas espaciais, que podem ser executadas através de transformações afins, lineares ou projetivas. Essas transformações foram analisadas a partir da estruturação em um espaço vetorial e verificando seu comportamento.

Dentre as pesquisas que propõem sequências de atividade, a pesquisa de Rodrigues (2018) tem como objetivo apresentar alguns resultados da GP de tal forma que possa ser compreendido por alunos do Ensino Médio, focando no conceito de perspectiva e projetividade, além de apresentar tópicos da Geometria Projetiva Analítica para demonstrar o teorema de Desargues e Pappus. É ainda apresentado definições para as cônicas do ponto de vista projetivo, bem como atividades para consolidar os conteúdos abordados.

Vieira (2016) estrutura um estudo em torno da Geometria Projetiva com o objetivo de enfatizar o papel de práticas curriculares alternativas. A pesquisa propõe um trabalho didático que une conceitos projetivos e é feita com a mediação de *softwares* de gráficos, levantando possibilidades para a inclusão da Geometria Projetiva em práticas curriculares em escolas.

Figueiredo (2018) busca na bibliografia como a Geometria Projetiva é apresentada, buscando confeccionar um modelo didático que mostre uma das

possibilidades de axiomatização desta teoria. O curso foi colocado em prática com um grupo de estudantes de licenciatura em matemática de uma universidade pública. Esses estudantes já tinham estudado a Geometria Euclidiana Plana.

Cardoso Junior (2018) apresenta em sua pesquisa soluções de problemas com a utilização dos axiomas da Geometria Projetiva e um problema com solução via Teorema de Desargues. Ainda em sua pesquisa é demonstrado o teorema de Pappus, Desargues e Pascal. O trabalho apresenta uma proposta de como fazer uma ponte entre os conceitos da Geometria Projetiva e a Geometria Analítica e como aplicar no Ensino Médio.

Pavaneli (2019) propõe uma sequência didática baseada na Engenharia Didática, na qual são apresentadas atividades em que os alunos aprendem algumas técnicas para melhorar a representação espacial usando o GeoGebra. Ainda é apresentado o jogo Dobble, onde foi feita uma exposição de conceitos matemáticos que envolvem a estrutura do jogo.

Silva (2018) leva para uma sala de aula do 3º ano do Ensino Médio elementos da Geometria Projetiva através da fotografia e arte, destacando ponderações apresentadas em documentos oficiais sobre o ensino de uma nova geometria para alunos da educação básica da rede estadual do Espírito Santo (ES). A sequência foi aplicada em uma escola estadual do ES, onde foram analisados os impactos na aprendizagem dos alunos. A pesquisa de Silva também aparece como uma pesquisa que traz a aplicação da Geometria Projetiva.

Dentre as outras pesquisas que apresentam a aplicação da Geometria Projetiva, Souza (2017) mostra a aplicação das técnicas da Geometria Projetiva na resolução de Problemas da Geometria Euclidiana. No seu texto foi traçado um paralelo entre as duas geometrias e é realizada uma contextualização histórica da Geometria Projetiva.

Sena (2017) usa construções projetivas e princípios da Geometria Projetiva para exibir técnicas de desenho, desenvolvendo uma metodologia para o Ensino Médio com o objetivo de desenvolver desenhos por meio de construções projetivas.

Ferreira (2019) busca em sua pesquisa elaborar compreensões sobre o processo de produção de significado para determinadas noções matemáticas em um contexto investigativo de aprendizagem. Como parte de sua pesquisa, foi organizado um Grupo de Estudos Independentes sobre curvas cônicas. A pesquisa trouxe reflexões com base nos pressupostos da Geometria Projetiva para analisar as curvas cônicas.

3.4. Estudantes x Geometria Projetiva

Neste tópico elencamos as dificuldades dos estudantes identificadas a partir da revisão bibliográfica. Foram identificadas dificuldades em relação aos conceitos básicos da Geometria Projetiva. Destacamos os conceitos de ponto impróprio e princípio da continuidade. Ainda nesse tópico apontamos indicações de como os estudantes aprendem e quais etapas podem ser elencadas para a construção do conhecimento.

Em sua pesquisa, Figueiredo (2018) indica possibilidades de como o estudante aprende os conteúdos estudados pela Geometria Projetiva. Na sua investigação, os estudantes compreenderam o que é a Geometria Projetiva a partir da distinção entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Projetiva, por meio da reconstrução do espaço projetivo. A familiaridade com a Geometria Euclidiana e as distinções em relação à Geometria Projetiva foram reconhecidos como elementos que instigaram os estudantes para se apropriar do novo pensamento geométrico.

Figueiredo (2018) também destaca que a utilização de recursos didáticos voltados para o conteúdo em questão serve de estímulo para o aprendizado, bem como a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica. Em sua pesquisa, Figueiredo utiliza o *software* GeoGebra. Mesmo não sendo um *software* pensado para trabalhar os conteúdos da Geometria Projetiva, é relatado que a opção por utilizar este *software* proporcionou aos estudantes um estudo investigativo, no qual o autor elabora as suas questões e realiza as descobertas no processo da construção do conhecimento.

Silva (2018) destaca em sua pesquisa a importância de contextualizar os conteúdos da Geometria Projetiva com outras áreas. A fotografia foi a área

escolhida para a sua pesquisa, e nela foi possível trabalhar conceitos como ponto de fuga, linha do horizonte e princípio da continuidade.

Buscamos identificar nos trabalhos encontrados quais as etapas para a construção do conhecimento acerca da Geometria Projetiva. Segundo Figueiredo (2018), um ponto de partida para o estudo da Geometria Projetiva é compreender o espaço euclidiano, bem como os postulados de Euclides, já que os principais elementos da Geometria Projetiva são os mesmos da Geometria Euclidiana. Schmidt (2015) ressalta que para compreender os conceitos projetivos é importante que o aluno compreenda e diferencie o que é projeção e o que é perspectiva.

Gonçalves (2013) também ressalta a importância de compreender o que é projeção e o que é perspectiva, bem como destacar as diferenças entre a projeção cônica e a projeção cilíndrica. O autor ainda destaca a importância de refletir sobre o princípio da continuidade para que os alunos compreendam que duas retas paralelas concorrem no ponto impróprio.

Após a revisão bibliográfica foi observado que os trabalhos encontrados abordam, em sua maioria, conceitos mais introdutórios da Geometria Projetiva, além de serem escassas as pesquisas realizadas com enfoque próprio. Por esses motivos poucas dificuldades foram elencadas com base no levantamento.

A primeira que destacamos é a relatada na pesquisa de Pavaneli (2019), na qual a pesquisadora identificou que os alunos possuem dificuldade em aceitar a possibilidade de que existe um plano impróprio, onde podemos trabalhar com retas impróprias e pontos impróprios. Com base no estudo epistemológico, é imprescindível que aceitemos a existência do espaço impróprio para poder compreender os conteúdos estudados pela Geometria Projetiva.

A segunda dificuldade dos estudantes que queremos destacar foi relatada por Schmidt (2015). Em sua obra, o pesquisador identifica que os estudantes se atrapalham na compreensão dos conceitos de perspectiva e de projeção.

As dificuldades citadas anteriormente fazem parte do repertório das dificuldades dos estudantes, porém quem tem contato mais frequente com a Geometria Projetiva sabe que as dificuldades vão mais além. Não podemos

deixar de fora dessa lista as dificuldades dos estudantes na compreensão de conceitos como o da Dualidade, bem como o conceito de invariante de uma transformação.

3.5. O uso de tecnologias na Geometria Projetiva

As pesquisas encontradas no levantamento realizado apontam a importância de utilizar *softwares* de Geometria Dinâmica para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Projetiva, dentre elas destacamos a de Figueiredo (2018) que na ausência de um *software* específico de geometria dinâmica para a Geometria Projetiva, utilizou o GeoGebra em sua pesquisa.

Nessa etapa da pesquisa vamos fazer uma análise dos *softwares* Geogebra e Cabri-Géomètre II, a fim de verificar se eles possuem os requisitos necessários para a representação dos teoremas e traçados apresentados pela Geometria Projetiva. Para atender a proposta da pesquisa, foram feitas algumas escolhas metodológicas que viabilizassem a análise.

Este subtópico é dividido em 3: o primeiro apresenta uma justificativa para a escolha dos *softwares* a serem analisados. No segundo subtópico apresentamos a explicação dos critérios de análise adotados e uma descrição de cada critério. E o terceiro subtópico apresenta o resultado da análise.

3.5.1. Os *softwares* escolhidos

O primeiro *software* que escolhemos para a análise é o Geogebra, que se trata de um *software* de matemática dinâmica gratuito e que apresenta multiplataforma, estando disponível para o uso online ou para download. O Geogebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e é um *software* educativo que combina a geometria gráfica, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único aplicativo.

O segundo *software* escolhido foi o Cabri-Géomètre II, é um *software* de construção geométrica desenvolvido pelo Institut d'Informatique et de Mathematiques Appliquees em Grenoble (IMAG). Ele é resultado de um trabalho colaborativo, que além de possibilitar as construções geométricas, permite a manipulação dessas construções sem que as suas propriedades sejam alteradas.

A escolha por *softwares* de Geometria Dinâmica se deu por alguns motivos pessoais. O primeiro motivo se dá através da participação do presente autor em um curso de extensão de Geometria Projetiva para professores, oferecido pelo Departamento de Expressão Gráfica (DEG) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) no ano de 2019.

Um dos conteúdos apresentados no curso de extensão foi a transformação homológica da circunferência, que é um dos traçados a serem analisados nessa pesquisa. Com isso surgiu o interesse em construir esse traçado utilizando *softwares* de geometria dinâmica com o objetivo de manipular o centro de homologia e ver o processo dinâmico da circunferência se transformando nas curvas cônicas. Daí o intuito em realizar experimentações com o GeoGebra e o Cabri-Géomètre II.

Outro motivo pessoal que gerou o interesse na escolha do *software* GeoGebra foi o relato do professor da disciplina de Geometria Projetiva, que é oferecida pelo DEG à turma do quinto período do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica (LEG) da UFPE. O GeoGebra foi o *software* escolhido para ser usado na disciplina, que foi ministrada de forma remota, no semestre de 2020.1 no período da pandemia do COVID-19. Em conversa com o professor, foi relatado que quando a transformação homológica da circunferência estava sendo o assunto em questão, o *software* não representou a parábola, mesmo o traçado sendo construído de forma correta.

Ainda como justificativa da escolha do *software*, Sousa em sua pesquisa destaca algumas potencialidades e limitações da utilização do Geogebra. Foi observado que o Geogebra 2D:

Não permite a criação de situações complexas em que se articule as representações gráficas bi e tridimensionais e algébricas de casos limites das cônicas. Ou seja, o mesmo não suporta interpretar as representações da parábola e demais degenerações, como limites. (SOUSA, 2016, p. 69)

3.5.2. Critérios de análise

Como critérios de análise, utilizaremos a Vigilância Epistemológica apresentada por Balacheff (1999). A coerência vai ser analisada em dois aspectos, a completude e a adequação. A completude de um registro é atingida a partir do momento em que, a partir das suas especificações, o objeto pode ser

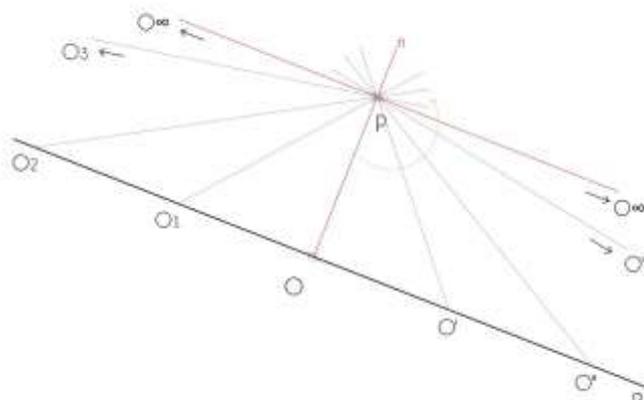
representado, por exemplo, com o auxílio da Geometria Dinâmica. Para esse registro ser considerado adequado, é necessário que ele permita a representação de objetos geométricos que não podem ser definidos no modelo (BELLEMAIN, 2000).

3.5.3. Análise dos softwares

Para compor a análise dessa pesquisa foram escolhidos alguns teoremas e traçados estudados na Geometria Projetiva. A versão do *software* GeoGebra escolhido para a análise foi a Classic 6 e a versão do *software* Cabri escolhida foi a 2.

O primeiro objeto de análise é o princípio da continuidade (Figura 57). O objetivo da análise desse traçado é saber se os *softwares* reconhecem um ponto de intercessão entre duas retas paralelas e qual a coordenada que é dada para esse ponto, caso ele exista.

Figura 57- Princípio da Continuidade



Fonte: Autoria Própria

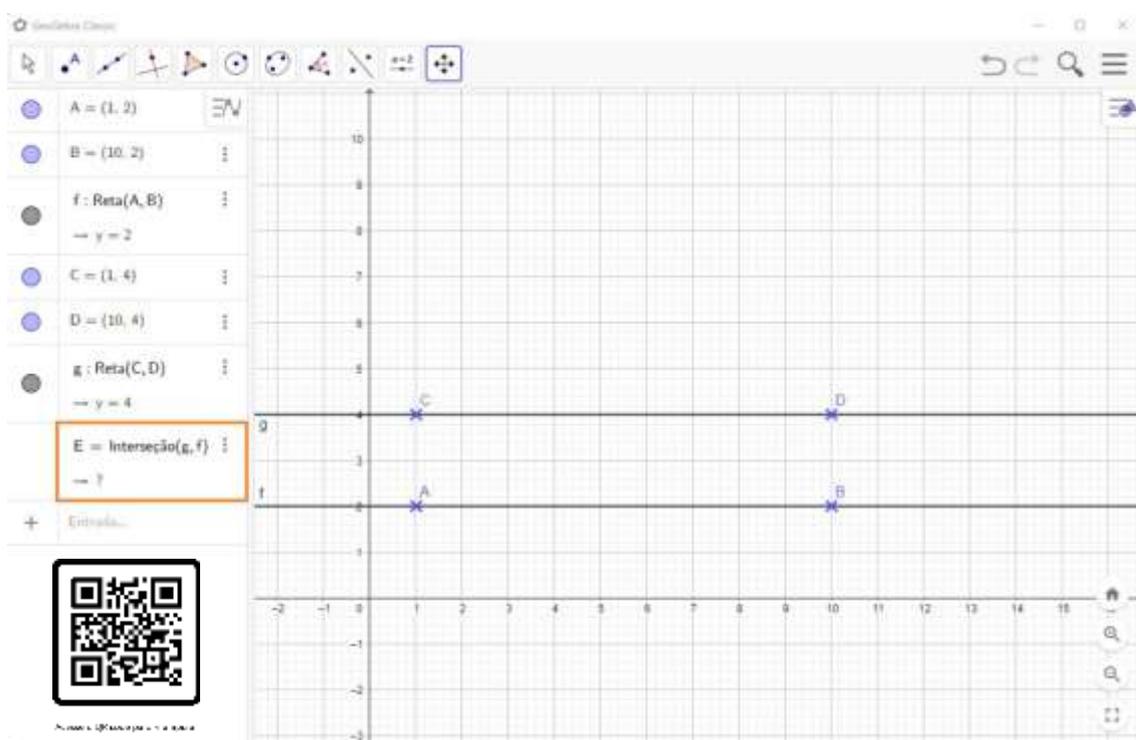
Sabemos que o princípio da continuidade garante que duas retas paralelas possuem um ponto de interseção, que é um ponto impróprio. Ao criar duas retas paralelas no GeoGebra (Figura 58), sendo a reta f apoiada nos pontos $A(1,2)$ e $B(10,2)$ e a reta g passando pelos pontos $C(1,4)$ e $D(10,4)$, pode-se perceber pelas ordenadas dos pontos que as duas retas são paralelas.

Ao gerar a interseção das retas pela ferramenta 'Interseção entre dois objetos' , o *software* reconhece um ponto E , porém, esse ponto possui

coordenadas indefinidas para o *software*. Ao manipularmos as coordenadas de um ponto de umas das retas de tal forma que as retas deixem de ser paralelas, é possível observar que o *software* reconhece imediatamente as coordenadas do ponto E em relação aos eixos X e Y.

Então, podemos considerar que o GeoGebra não atende aos requisitos da completude quando se trata do princípio da continuidade. Porém, o *software* não traz uma representação diferente do que é apresentado no modelo.

Figura 58 - Princípio da Continuidade (GeoGebra)



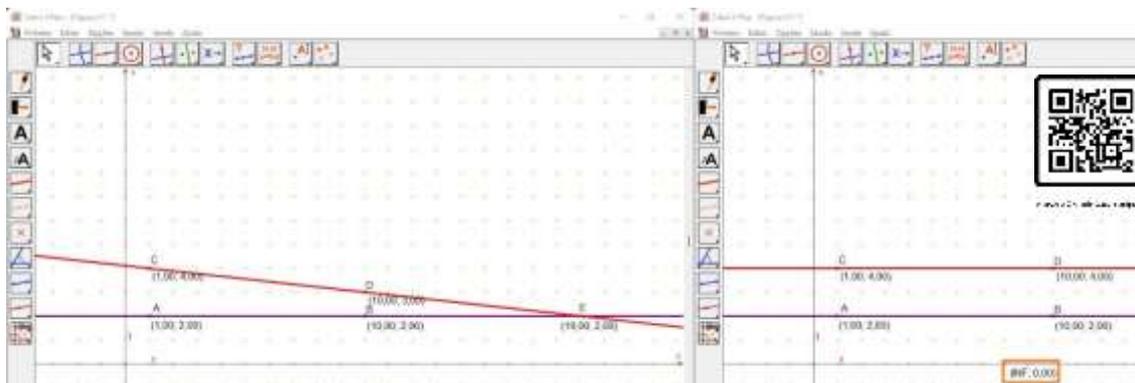
Fonte: Autoria Própria

Para analisar o princípio da continuidade no Cabri (Figura 59) criamos duas retas paralelas com as mesmas coordenadas utilizadas no GeoGebra e geramos a interseção através da ferramenta 'Ponto(s) de interseção '. Como o Cabri não possui uma janela de álgebra com todos os elementos da construção listados, manipulamos uma das retas para que elas deixassem de ser paralelas e a interseção se tornasse um ponto próprio, a fim de que fosse possível ativar as coordenadas do ponto E.

A primeira observação que destacamos é que o ponto de interseção foi gerado quando a ferramenta foi utilizada enquanto as retas estavam paralelas.

Ao manipularmos a reta para que elas ficassem paralelas novamente, as coordenadas do ponto E foram alteradas para (INF; 0,00). Logo, podemos afirmar que o *software* reconheceu que o ponto E é um ponto impróprio, atendendo as propriedades garantidas pelo modelo.

Figura 59 - Princípio da Continuidade (Cabri)



Fonte: Autoria Própria

O segundo objeto de análise é o Teorema de Desargues (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**), sobre o qual construiremos a demonstração do teorema utilizando a versão 3D do *software* GeoGebra e a partir da manipulação dos objetos vamos observar se as propriedades serão mantidas. Recapitulando o Teorema de Desargues, ele assegura que:

Se, em dois triângulos coplanares ABC e $A'B'C'$, não tendo elementos comuns (vértices ou lados) os três pares de vértices homólogos A e A' , B e B' , C e C' são ligados por três retas passando por um ponto, os três lados homólogos AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, CA e $C'A'$ encontram-se em três pontos de uma mesma reta. (RODRIGUES, 1968, p. 37)

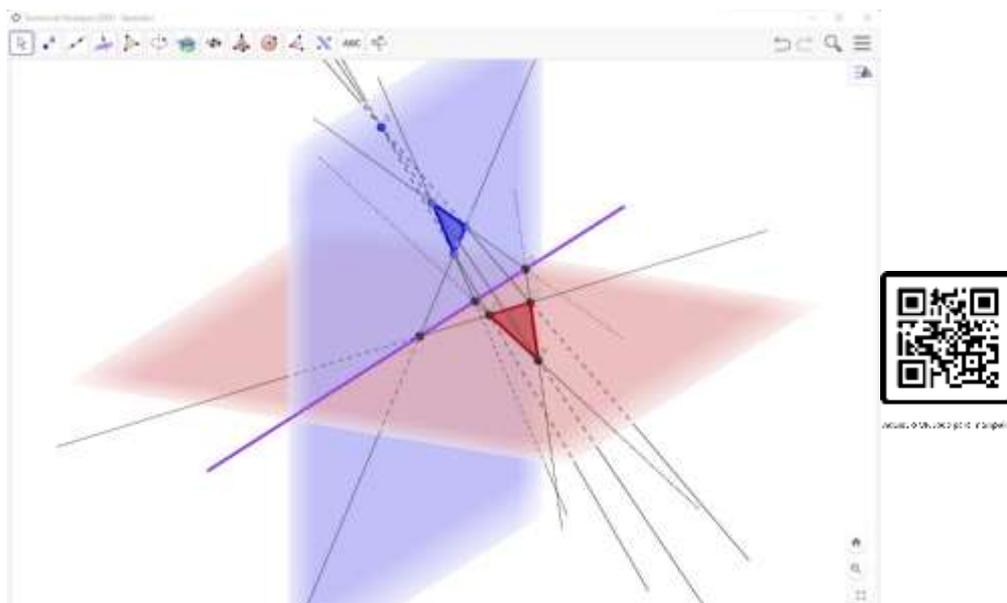
Para a construção do teorema de Desargues, é necessário saber que alguns elementos poderão ser determinados arbitrariamente, outros serão consequências das escolhas arbitrárias. Logo, os primeiros elementos arbitrários vão ser os que vão reger a manipulação do traçado criado. As construções no GeoGebra foram feitas na janela de visualização 3D, com o auxílio de janelas de visualização 2D dos planos objeto e imagem que foram determinados.

A primeira construção do teorema que fizemos no GeoGebra (Figura 60) foi escolhendo arbitrariamente o centro de homologia (S) e o triângulo objeto que é determinado pelos pontos A , B e C . O triângulo imagem foi consequência da

interseção das projetantes que partem do centro de homologia, passam pelos pontos objeto e cortam o plano imagem.

O primeiro objetivo da análise era verificar se os prolongamentos dos lados dos triângulos objeto e imagem se encontram no eixo de homologia, como garante o teorema. Ao determinar as retas que passam pelos lados AB e $A'B'$, foi possível encontrar o ponto J com a ferramenta de interseção. Ao determinar as retas que passam pelos lados AC e $A'C'$, bem como as retas que passam pelos lados BC e $B'C'$, as retas se encontraram nos pontos G e H , respectivamente. Os pontos G , H e J estão alinhados e estão na interseção entre o plano objeto e o plano imagem. Logo, estão apoiados no eixo de homologia, como garante o modelo.

Figura 60 - Teorema de Desargues (GeoGebra)



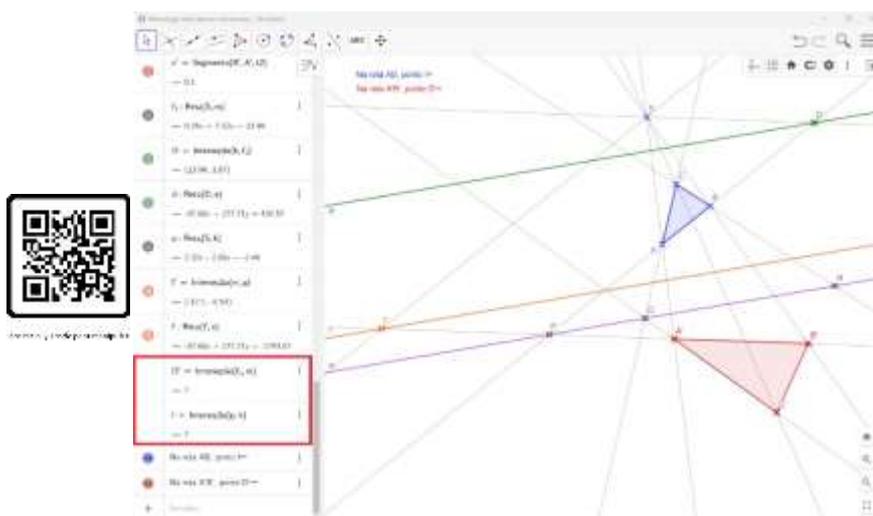
Fonte: Autoria Própria

Ao manipular a construção pelo centro de homologia, ou pelo triângulo objeto, que foram os elementos arbitrários da construção, é possível observar que toda a construção respeita as propriedades do teorema em questão, porém um elemento da construção não respeita as propriedades, que é o eixo de homologia.

A teoria nos assegura que o eixo de homologia se trata de uma reta dupla de pontos duplos. Logo, pela interseção entre o plano objeto e o plano imagem passam uma reta objeto e uma reta imagem, sendo os pontos dessas retas

A primeira que destacamos é que o *software* não reconhece as coordenadas do ponto imagem D'_{∞} , que tem seu homólogo no ponto D que pertence ao eixo de desvanecimento. Bem como não reconhece as coordenadas do ponto F_{∞} , que tem como homólogo o ponto F' que pertence ao eixo de fuga. Outra inconsistência na construção é o não reconhecimento por parte do *software* do eixo de homologia como uma reta dupla de pontos duplos.

Figura 62 - Homologia entre planos sobrepostos (GeoGebra)

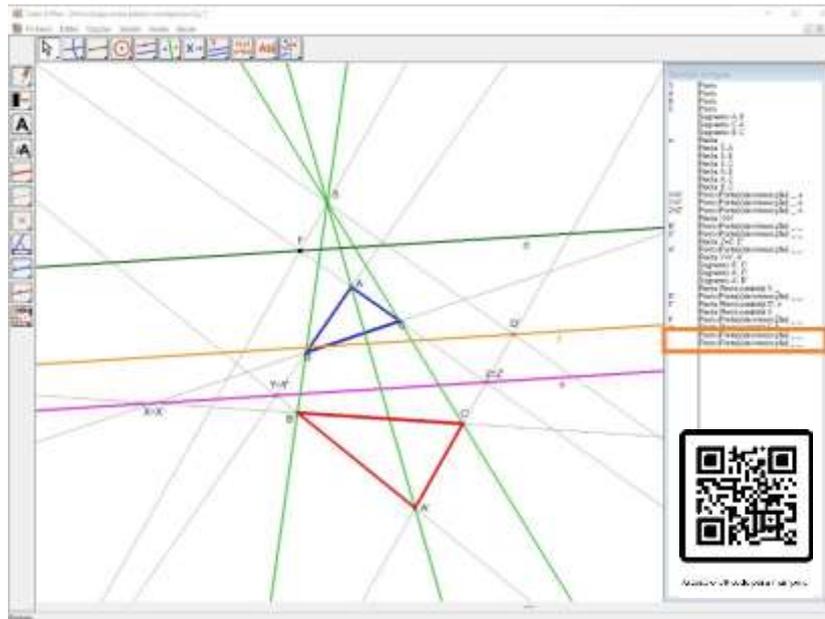


Fonte: Autoria Própria

A construção do traçado da homologia entre planos sobrepostos no Cabri (Figura 63) seguiu a mesma linha de raciocínio utilizada no GeoGebra, com isso o centro da homologia e o triângulo objeto foram os elementos manipuláveis. Assim como no GeoGebra, não foi possível determinar que o eixo de homologia fosse uma reta dupla de pontos duplos, mas diferente do GeoGebra, no Cabri é possível nomear um ponto utilizando o símbolo de igualdade, indicando que ali estão dois pontos coincidentes.

Com base na análise do Princípio da continuidade, sabemos que o Cabri reconhece as coordenadas de um ponto impróprio. Porém, na construção da homologia entre planos sobrepostos, não foi possível utilizar a ferramenta de coordenadas de um ponto em um ponto que está no espaço impróprio. Mas ao utilizar a ferramenta de interseção entre dois objetos é possível verificar na lista dos objetos da construção que as interseções foram criadas.

Figura 63- Homologia entre planos sobrepostos (Cabri)



Fonte: Autoria Própria

Mesmo sabendo que os *softwares* não atendem aos critérios da completude, vale a pena ressaltar alguns pontos positivos observados na manipulação das construções nos dois *softwares*. O primeiro deles é que os *softwares* atendem a propriedade que assegura que a distância entre o centro de homologia e o eixo de fuga precisa ser a mesma entre o eixo de desvanecimento e o eixo de homologia. Bem como a distância entre o centro de homologia e o eixo de desvanecimento tem que ser a mesma distância entre o eixo de fuga e o eixo de homologia. Destacamos também que ao manipular o centro de homologia, ou o triângulo objeto, as construções conservam as propriedades corretamente, até mesmo as propriedades que estão aparentemente corretas.

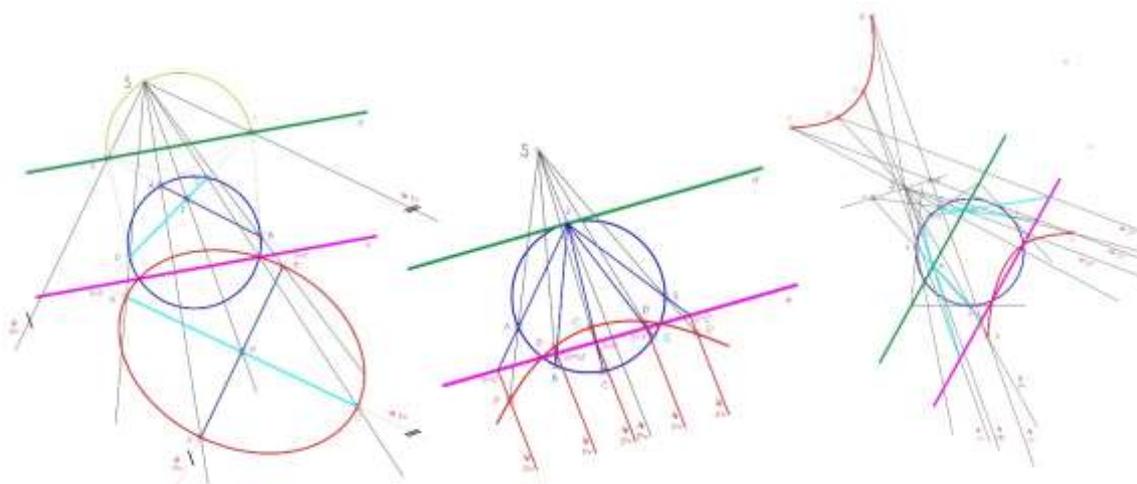
O último objeto de análise se trata de um caso de imagens pré-dimensionadas, que é a transformação homológica da circunferência (Figura 64). Como visto anteriormente, para obter as curvas cônicas o eixo de desvanecimento e o centro da homologia precisam ocupar posições específicas em relação à circunferência que vai ser transformada.

A partir do momento em que temos o centro de homologia dentro da circunferência, o eixo de desvanecimento vai aparecer fora da circunferência e a imagem que vamos obter dessa transformação é a elipse. Quando o centro de

homologia pertence à circunferência, o eixo de desvanecimento vai ser tangente à circunferência no centro de homologia. Logo, a figura imagem que vamos obter é a parábola.

Por fim, a partir do momento em que o centro de homologia está fora da circunferência, o eixo de desvanecimento vai cortar a circunferência em dois pontos distintos e a figura imagem que vamos obter é a hipérbole. Então, o objetivo dessa análise é criar uma manipulação onde o centro de homologia vai ser o objeto manipulável a fim de observar se os *softwares* vão fazer as transformações corretas dependendo da posição onde o centro de homologia estiver.

Figura 64 - Transformação Homológica da Circunferência



Fonte: Autoria Própria

A abstração para a construção do traçado da transformação homológica é perceptível para quem estuda a Geometria Projetiva. A primeira estratégia para realizar a construção no *software* GeoGebra foi partindo do pressuposto de que o ponto polo P está na região interna da circunferência. Logo, a reta polar não a corta.

Para determinar a reta polar, que é o eixo de desvanecimento dessa construção, utilizamos a ferramenta 'Reta Polar ou Diametral'. Então, quando manipulamos o ponto P, a reta polar acompanha a manipulação. Sabemos que o ponto P é o homólogo do ponto P', que é o centro da curva imagem. Com isso,

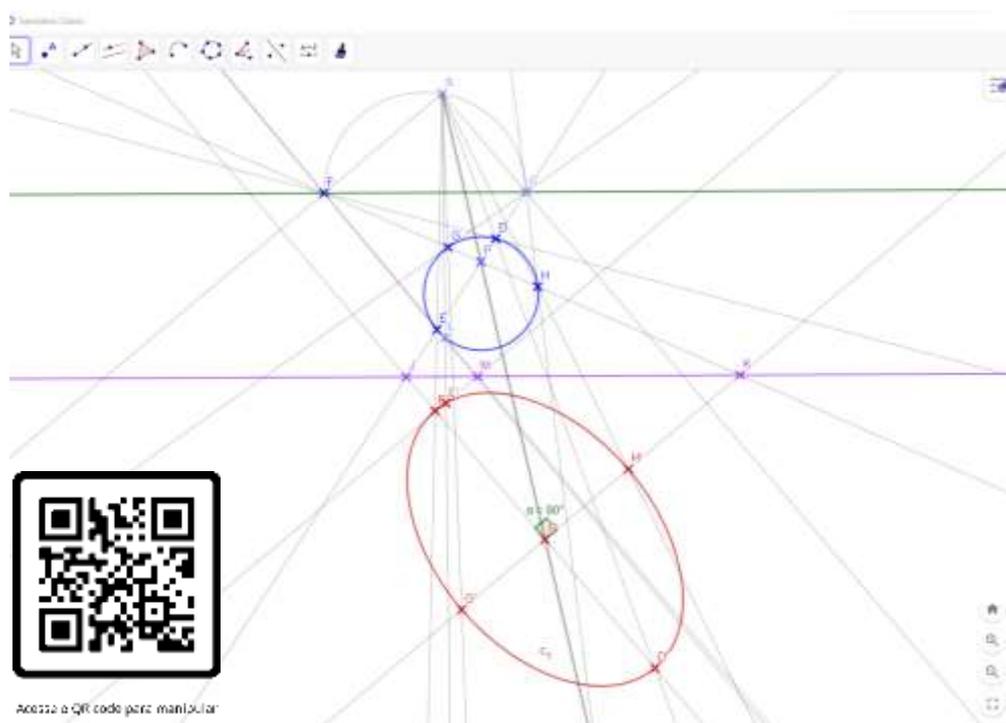
sabemos que na figura objeto, as retas homólogas aos eixos vão passar pelo ponto P.

Determinamos arbitrariamente a reta ED, que passa pelo ponto P e corta o eixo de desvanecimento no ponto C. Para determinar o outro eixo, determinamos as retas tangentes à circunferência objeto que passam pelo ponto C. Os pontos de tangência G e H vão determinar o segundo eixo e o segmento obrigatoriamente vai passar pelo ponto P e vai cortar o eixo de desvanecimento no ponto F.

Os pontos C e F, que possuem como pares homólogos pontos impróprios, vão determinar a direção dos eixos da curva imagem. Como o nosso objetivo era que os eixos formassem uma angulação de 90° entre si, o centro da homologia está em um arco-capaz de 90° apoiado nos pontos C e F, pois com isso garantimos que as retas GH e ED farão 90° entre si.

O eixo de homologia dessa construção é o último elemento da construção que pode ser escolhido de forma arbitrária, respeitando apenas a propriedade que garante que os eixos de uma homologia são paralelos. Definido os parâmetros, determinamos mais um ponto na circunferência objeto, pois aí teríamos cinco pontos imagem para poder utilizar a ferramenta 'Cônica por Cinco Pontos'. A consequência da construção foi uma elipse com eixos fazendo 90° entre si (Figura 65).

Figura 65 - Transformação Homológica da Circunferência 1 (GeoGebra)



Fonte: Autoria Própria

Ao manipular o ponto P para fora da circunferência, o *software* deveria representar uma hipérbole como resultado da transformação homológica, porém não é isso que ele apresenta. Temos como devolutiva apenas uma circunferência objeto, o eixo de desvanecimento cortando a circunferência, o ponto P e o eixo de homologia. Então decidimos refazer a construção, mas ao invés de partir da construção para obter uma elipse, a construção inicial tem que ter como resultado uma hipérbole.

Para essa construção optamos por uma versão mais simplificada, escolhendo arbitrariamente a circunferência objeto, o ponto P fora da circunferência, um ponto C pertencente ao eixo de homologia e o centro da homologia. Para encontrar a reta polar, que é o eixo de desvanecimento, utilizamos a ferramenta inversão, onde encontramos o ponto inverso ao P em relação à circunferência objeto.

A reta perpendicular ao segmento determinado pelo ponto P e o seu inverso, passando pelo ponto inverso, é o eixo de desvanecimento da construção. Paralelo ao eixo de desvanecimento, encontramos o eixo de homologia passando pelo ponto C. Determinados os elementos da homologia,

determinamos um ponto M na circunferência e encontramos o seu homólogo M' . Através da ferramenta de lugar geométrico, podemos encontrar o lugar geométrico de M' em função de M , e com isso determinamos 4 pontos no lugar geométrico para poder utilizar a ferramenta de cônicas por cinco pontos.

A curva imagem que obtemos para essa construção foi reconhecida pelo *software* como uma hipérbole. Porém, ao manipular o ponto P , as inconsistências começaram a aparecer. Quando o ponto P está interno à circunferência, o *software* apresentou como curva imagem tanto uma elipse como uma hipérbole. Ao colocar o ponto P pertencente à circunferência, a curva é reconhecida pelo *software* como uma hipérbole, quando na verdade deveria ser uma parábola.

Então podemos concluir que o GeoGebra não atende aos requisitos da completude, por não representar o que o modelo garante, como também não atende aos requisitos da adequação, a partir do momento que ele representa uma hipérbole quando a curva deveria ser uma elipse.

Para a análise do traçado da transformação homológica da circunferência no Cabri (Figura 66), a estratégia para a construção do traçado foi a mesma utilizada na análise do GeoGebra. Adotamos que o ponto polo está interno à circunferência objeto. Com a ferramenta inversão encontramos o ponto inverso ao ponto polo que pertence ao eixo de desvanecimento. Para encontrar o eixo de desvanecimento determinamos a reta que passa pelo ponto polo e pelo centro, pois o eixo de desvanecimento vai ser perpendicular a esta reta passando pelo ponto inverso.

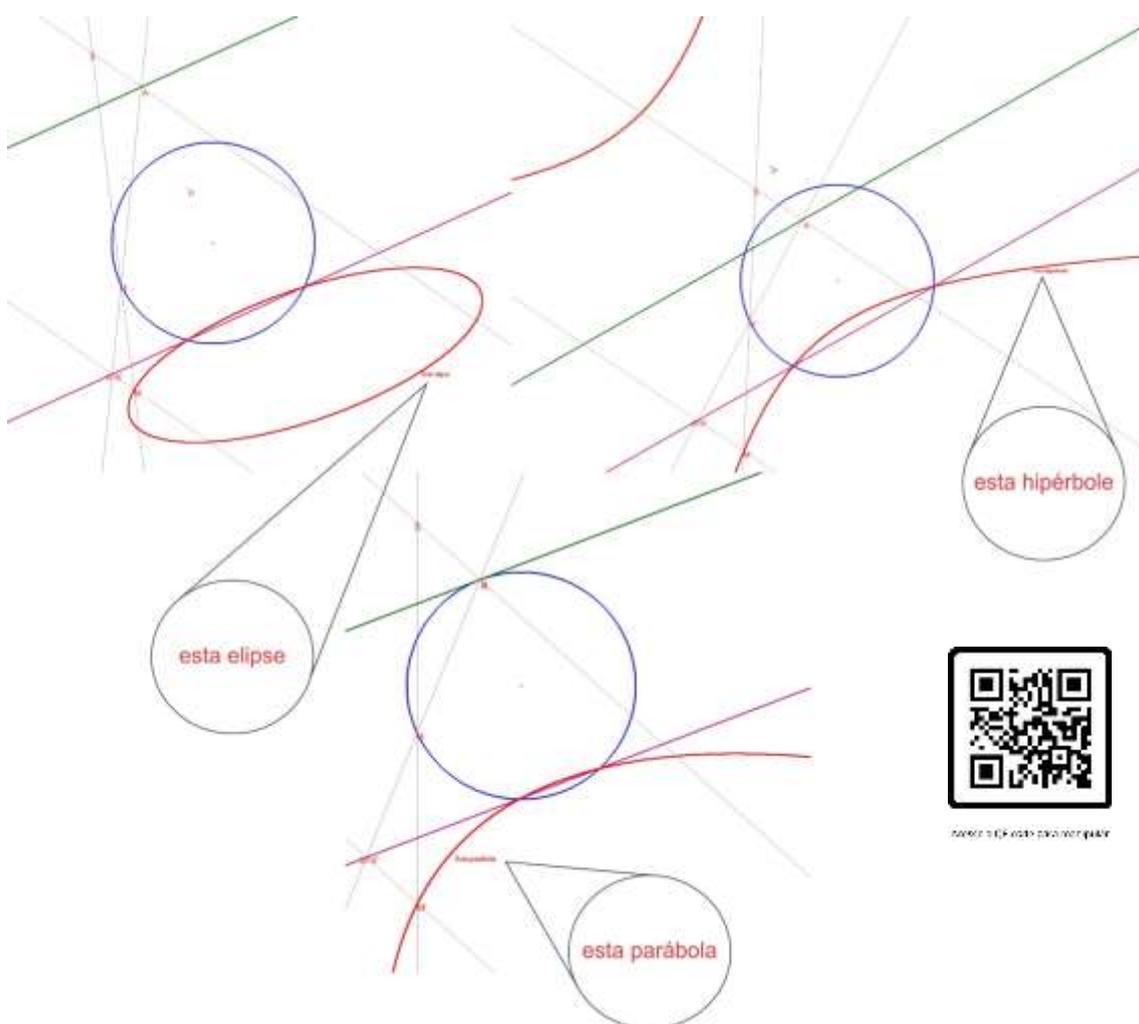
Determinado o eixo de desvanecimento, podemos escolher de forma arbitrária a posição do eixo de homologia, de tal forma que ele seja paralelo ao eixo de desvanecimento. Escolhemos também de forma arbitrária o centro da homologia em questão. Para determinar a curva imagem, determinamos cinco pontos na circunferência objeto, que determinavam retas com pontos apoiados no eixo de desvanecimento, com isso podemos determinar os pontos imagens e construir a curva imagem.

Como esperado, a figura imagem representada na interface é visualmente uma elipse, que podemos confirmar ao colocar o cursor do mouse em cima da curva e o *software* afirma que o nome da curva é uma elipse. Ao manipular o

ponto polo para fora da circunferência o eixo de desvanecimento passa a cortar a circunferência em dois pontos, reagindo de forma coerente ao comando do usuário.

Ao realizar essa manipulação a curva imagem passa a se assemelhar visualmente com uma hipérbole. Ao posicionar o cursor do mouse em cima da curva podemos observar que o *software* já não reconhece mais a curva como uma elipse, mas sim como uma hipérbole. Com o auxílio da ferramenta de redefinir o objeto vinculamos o ponto polo a circunferência objeto, com isso o eixo de desvanecimento passou a ter um ponto de tangência com a circunferência no ponto polo e a figura imagem sofreu mais uma transformação, deixando de ser uma hipérbole para ser uma parábola. Podemos observar que o *software* reconheceu que o traçado da transformação deveria resultar em uma parábola, diferente do GeoGebra.

Figura 66 - Transformação Homológica da Circunferência no Cabri



Ao olhar a construção realizada no *software* com base na completude e adequação, ficamos inclinados a dizer que o *software* atende os princípios da completude por realizar a transformação esperada. Porém, quando vamos analisar as propriedades de cada elemento da transformação homológica da circunferência, esbarramos na propriedade do eixo de homologia que se caracteriza como uma reta dupla que possui pontos duplos.

Refutando o que a teoria diz, a reta que representa o eixo de homologia na construção realizada no Cabri não atende a essa característica. Logo, podemos dizer que o *software* não atende aos princípios da completude. Mas, ao se tratar da adequação o *software* atende os princípios, pois a representação feita na interface condiz com o que as propriedades do traçado asseguram, não permitindo representações diferentes.

4. ELICITAÇÃO E ANÁLISE DE REQUISITOS

Para elicitar os requisitos necessários para um *software* de Geometria Dinâmica que atenda aos pressupostos da Geometria Projetiva, vamos utilizar o modelo proposto pela Engenharia Didático-Informática (EDI). Os requisitos serão obtidos a partir da articulação das dimensões didática, epistemológica, cognitiva e informática, que foram analisadas anteriormente no capítulo 1.

Antes de levantar os requisitos necessários para o *software* é fundamental definir as suas especificações. O *software* em questão conta como potenciais usuários docentes e discentes que estudam a Geometria Projetiva, porém o público não se restringiria apenas a esse grupo, já que o *software* proporcionará a vivência com outras situações geométricas.

O objetivo do *software* é se apresentar como uma contribuição tecnológica que auxilie na aprendizagem e no ensino dos conteúdos estudados pela Geometria Projetiva. A meta principal estipulada para o *software* é a representação da transformação homológica da circunferência e que através da manipulação possa se observar todas as situações de transformação.

Para que essa meta seja possível, o *software* precisa atender a algumas situações estudadas pela GP, que serão apresentadas ao longo deste capítulo. Acredita-se que um *software* de Geometria Dinâmica focado nos traçados da Geometria Projetiva possibilitará contribuições para compressão das transformações projetivas que os seus elementos sofrem, podendo acompanhar de forma dinâmica as demonstrações das propriedades por trás de cada traçado. Logo, temos a hipótese de que o *software* vai contribuir de maneira positiva para o ensino e aprendizagem.

Antes de estipular os requisitos do *software* em questão é necessário identificar quais as necessidades dos usuários. No quadro a seguir listamos as demandas identificadas:

Quadro 8 - Necessidades dos usuários identificadas

- Possibilidade de trabalhar com o ponto impróprio;
- Possibilidade de criar uma reta dupla de pontos duplos;

- Reconhecimento dos pontos homólogos, retas homólogas e planos homólogos;
- Reconhecimentos das regiões de uma reta e de um plano

Fonte: Dados da pesquisa

Para satisfazer a demanda de trabalhar com um ponto impróprio é necessário que o *software* trabalhe com o sistema de coordenadas homogêneas, que é o sistema de coordenadas utilizado em Geometria Projetiva. O sistema de coordenadas homogêneas permite que as coordenadas de pontos, incluindo os pontos impróprios, possam ser representados utilizando coordenadas finitas.

Para satisfazer a demanda de trabalhar com uma reta dupla de pontos duplos o *software*, em seus códigos ou algoritmos de programação, deve reconhecer a possibilidade de trabalhar com uma reta que atenda às propriedades do eixo de homologia.

Os *softwares* de Geometria Dinâmica que estão no mercado atualmente reconhecem os pontos de sua construção como elementos independentes ou como consequência de uma interseção entre elementos. Para a Geometria Projetiva é importante que um *software* reconheça quando um ponto, uma reta ou um plano é homólogo a outro. Para isso é necessário que o *software* possibilite ao usuário determinar o que é elemento próprio e o que é elemento impróprio, e que a partir da nomeação desses elementos determinados o *software* reconheça que eles estão vinculados homologicamente.

O *software* reconhecer as regiões de uma reta ou plano é uma demanda que pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos traçados projetivos. Quando estudamos os traçados das transformações projetivas, é necessário compreender a relação das regiões das retas objetos e retas imagens, ou figuras objetos e figuras imagens.

4.1. Funcionalidades existentes em produtos da área e possíveis diferenciais

Na análise da dimensão informática foram analisados dois *softwares* de Geometria Dinâmica, buscando identificar suas potencialidades e limitações em relação aos traçados estudados pela Geometria Projetiva. Destacamos na tabela

a seguir algumas ferramentas existentes que são pertinentes para o *software* a ser desenvolvido.

Quadro 9 - Funcionalidades existentes em produtos da área

FERRAMENTA	FUNCIONALIDADE
Mover/Selecionar	Move a tela ou seleciona algum objeto em tela
Caneta	Possibilita a criação de desenhos à mão livre
Ponto	Possibilita criar um ponto em qualquer lugar da área de trabalho
Ponto em objeto	Possibilita criar um ponto em um objeto já existente
Vincular/Desvincular ponto	Possibilita vincular ou desvincular um ponto a determinado objeto
Redefinir objeto	<p>Possibilita redefinir</p> <p>Ponto:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Em um ponto qualquer • Um ponto sobre um objeto • Um ponto de interseção • Transferir ponto para outro objeto <p>Reta:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Em uma reta qualquer • Em uma reta perpendicular • Em uma reta paralela • Em uma mediatriz • Em uma bissetriz • Transferir para outro objeto <p>Circunferência:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Em outra circunferência • Transferir para outro objeto
Interseção de dois objetos	Gera os pontos de interseção entre dois objetos
Ponto médio ou centro	Encontra o ponto médio entre dois pontos, ou o ponto médio de um segmento de reta, ou o centro de uma circunferência
Reta	Cria uma reta a partir de dois pontos
Segmento de reta	Cria um segmento de reta a partir de dois pontos
Segmento com comprimento fixo	Cria um segmento de reta com uma medida específica
Semirreta	Cria uma a semirreta com origem em um ponto e tem sentido determinado pelo segundo ponto
Reta perpendicular	Cria uma reta perpendicular a uma reta/semirreta/segmento de reta já existente

Reta paralela	Cria uma reta paralela a uma reta/semirreta/segmento de reta já existente
Mediatriz	Cria a mediatriz entre dois pontos ou segmento de reta
Bissetriz	Cria a bissetriz de um ângulo a partir de três pontos ou dos lados do ângulo
Reta tangente	Cria as retas tangentes a uma circunferência passando por um ponto externo a ela, ou cria a reta tangente a uma circunferência passando por um ponto da circunferência
Reta polar	Cria a reta polar de um ponto em relação a uma circunferência
Inversão	Cria um ponto inverso a outro ponto em relação a uma circunferência
Lugar Geométrico	Determina o lugar geométrico dos elementos construídos em tela
Polígono	Cria um polígono qualquer
Polígono regular	Cria um polígono regular de acordo com a quantidade de lados especificada
Polígono rígido	Cria um polígono em que as medidas lineares e angulares não podem ser alteradas, mas o polígono pode ser trasladado a partir do ponto inicial, ou rotacionado, tendo como centro o ponto inicial
Círculo dados centro e um de seus pontos	Cria um círculo de centro qualquer com um raio qualquer
Círculo: centro e raio	Cria um círculo com um centro qualquer e raio específico
Compasso	Transfere a medida de um elemento qualquer a partir de uma circunferência
Círculo definido por três pontos	Cria um círculo a partir de três pontos quaisquer
Semicírculo	Cria um semicírculo a partir de dois pontos distintos
Arco circular	Cria um arco de circunferência partir de um centro e dois pontos quaisquer
Arco circuncircular	Cria um arco circular a partir de três pontos que pertencem ao arco
Elipse	Cria uma elipse a partir dos focos e um ponto que pertence à curva
Parábola	Cria uma parábola a partir do foco e de uma reta diretriz
Hipérbole	Cria uma hipérbole a partir dos focos e um ponto que pertence à curva
Cônica por cinco pontos	Cria uma curva cônica que passa por cinco pontos distintos
Ângulo	Determina o ângulo entre duas retas ou a partir de três pontos
Ângulo com amplitude fixa	Cria um ângulo com uma medida específica

Distância, comprimento ou perímetro	Determina a distância entre dois objetos, o comprimento o perímetro de um objeto
Área	Determina a área de um polígono, um círculo ou uma elipse
Relação	Verifica a relação entre dois objetos
Reflexão em relação a uma reta	Cria a reflexão de um objeto em relação a uma reta
Reflexão em relação a um ponto	Cria a reflexão de um objeto em relação a um ponto
Rotação em torno de um ponto	Rotaciona um objeto em relação a um ponto
Translação por um vetor	Translada um objeto em relação a um vetor
Homotetia	Faz a homotetia de um objeto em relação a um centro e à razão da homotetia
Controle deslizante	Possibilita visualizar as variações em objetos manualmente ou automaticamente
Texto	Cria caixa de texto na área de trabalho
Inserir imagem	Possibilita inserir imagens na área de trabalho
Caixa para exibir/ esconder objetos	Cria uma caixa para exibir ou ocultar elementos vinculados a ela
Ampliar	Amplia o zoom da área de trabalho
Reduzir	Reduz o zoom da área de trabalho
Exibir/ esconder objetos	Exibe e esconde os objetos ocultos
Exibir/ esconder rótulos	Exibe e esconde os rótulos ocultos
Copiar estilo visual	Copia as configurações visuais de um elemento para outros
Apagar	Apaga os elementos da construção
Exibir rastro	Exibe a trajetória de um elemento quando manipulado
Renomear	Possibilita renomear os objetos

Fonte: Dados da pesquisa

Além das funcionalidades citadas anteriormente, o *software* a ser desenvolvido contará com possíveis ferramentas que serão diferenciais em relação aos *softwares* já existentes:

Quadro 10 - Diferencial em relação aos *softwares* já existentes

FERRAMENTA	FUNCIONALIDADE
Região	Exibe/ oculta as regiões de uma reta ou de um plano
Coordenadas	Exibe/ oculta as coordenadas de um ponto próprio ou impróprio
Ponto Impróprio	Ferramenta para criar um ponto impróprio em uma reta já existente
Eixo de Homologia	Ferramenta para determinar uma reta dupla de pontos duplos

Retas Limites	Ferramenta que determina os eixos de desvanecimento e de fuga em uma homologia de planos sobrepostos
---------------	--

Fonte: Dados da pesquisa

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa em questão teve como objetivo geral efetuar uma análise epistemológica-didático-informática para determinar e validar quais requisitos um *software* educativo de geometria dinâmica deve satisfazer/respeitar para poder abordar situações que envolvem conceitos da Geometria Projetiva.

Para a estrutura metodológica da nossa pesquisa nos baseamos na Engenharia Didático-Informática (EDI) que foi estruturada por Santos (2020), cujo objetivo é possibilitar a concepção, desenvolvimento e avaliação de *softwares*. A fundamentação teórica da nossa pesquisa está baseada na Transposição Didática desenvolvida por Chevallard (1991) e a Transposição Informática desenvolvida por Balacheff (1994).

Em relação a EDI, utilizamos a estrutura proposta por Santos (2020) para nortear as etapas da pesquisa, na qual foi realizada uma análise das quatro dimensões propostas pela EDI (didática, epistemológica, cognitiva e informática). A partir das análises de cada dimensão, buscamos obter os requisitos que um *software* de Geometria Dinâmica precisa ter para atender aos pressupostos da Geometria Projetiva.

Com base na proposta feita pela EDI, organizamos o documento dos requisitos para o *software* em questão, no qual a priori foram identificadas quais as ferramentas existentes em produtos que estão no mercado seriam úteis para o *software* a ser desenvolvido. Ainda nessa etapa identificamos qual seria o diferencial do *software* em relação a outros que estão no mercado. Por fim, organizamos a tabela dos requisitos, que também foi estruturada com base nas quatro dimensões da EDI.

A transposição didática entra na pesquisa para contribuir e justificar o processo de transpor os saberes da Geometria Projetiva de saber sábio para saber a ser ensinado, que consiste na análise epistemológica realizada com base no livro didático escrito por Mário Duarte. Já a transposição informática entrou na pesquisa para dar suporte teórico ao processo de inserir os conteúdos da Geometria Projetiva em um ambiente informatizado, onde a partir da análise dos *softwares* de GD realizada na dimensão informática, foi possível

compreender as possibilidades e limitações dos *softwares* analisados tanto no universo interno como no universo externo.

Ao iniciar o percurso metodológico apresentado pela EDI definiu-se que o *software* atenderia situações propostas pela Geometria Projetiva. Para elencar os requisitos para o *software*, escolhemos como objeto matemático a transformação homológica da circunferência. Com isso demos início à fase das Análises Preliminares que resultariam nos requisitos para o *software*.

A EDI propõe dividir as análises preliminares em quatro dimensões, sendo elas a epistemológica, cognitiva, didática e informática. Na dimensão epistemológica foi realizado um levantamento histórico da Geometria Projetiva, buscando identificar os principais nomes que desenvolveram os teoremas estudados pela Geometria Projetiva. Ainda na dimensão epistemológica foi realizado um percurso dos conhecimentos necessários para a compreensão do traçado da transformação homológica da circunferência.

A abordagem escolhida para análise foi a gráfica, com base nos estudos de Mário Duarte. A escolha por uma análise gráfica se deu devido à proposta de ensino que é abordada na disciplina de Geometria Projetiva do curso de Licenciatura em Expressão Gráfica.

Para a análise da dimensão cognitiva foi realizado um levantamento bibliográfico das pesquisas que envolvem a Geometria Projetiva nos últimos cinco anos. A partir desse levantamento foi possível identificar indicadores de como os estudantes aprendem os conceitos apresentados pela Geometria Projetiva, bem como as etapas para a construção do conhecimento e as dificuldades por eles apresentadas.

Na dimensão didática buscamos identificar o cenário atual do ensino da Geometria Projetiva. Com isso foi realizado um levantamento dos cursos de instituições públicas federais que oferecem a disciplina de Geometria Projetiva, sendo classificada pelo tipo de oferta.

Na dimensão informática foi realizada a análise de dois *softwares* de Geometria Dinâmica. A análise teve como objetivo identificar se os *softwares* conseguem representar os traçados estudados pela Geometria Projetiva. O

critério de análise utilizado foi a Vigilância Epistemológica, apresentada por Balacheff (1999).

A análise dos *softwares* apresentou resultados riquíssimos para a pesquisa. Destacamos aqui as possibilidades de interpretação que os *softwares* apresentam de acordo com as escolhas determinadas pelo usuário. Ao construir o traçado da transformação homológica da circunferência no GeoGebra é possível observar que, a depender da abordagem inicial, o *software* vai apresentar um resultado mais satisfatório para a representação. Isso pode ser observado quando a construção foi feita para obter uma elipse e a partir da manipulação dos elementos não obtemos mais nenhuma curva cônica.

Esse resultado foi diferente de quando partirmos com o objetivo de obter uma hipérbole. Pois, quando manipulamos o traçado, o *software* reconhece a elipse. Por mais que o *software* não reconheça a parábola a partir da manipulação, a construção e manipulação do traçado da transformação homológica da circunferência é uma oportunidade riquíssima para o processo de ensino e aprendizagem.

Outra situação que podemos destacar é a possibilidade de modelar tridimensionalmente os traçados. A construção do teorema de Desargues no GeoGebra 3D traz a possibilidade de manipular os elementos da construção para compreender a função do centro de homologia, das projetantes, da figura objeto e figura imagem, bem como os planos objeto e imagem. O fato de a reta de intercessão entre os planos não atender aos requisitos do eixo de homologia, sendo uma reta dupla de pontos duplos, não invalida que o modelo criado auxilia no processo de aprendizagem.

Se interpretarmos literalmente o que a completude e a adequação propõem, os modelos representados nos *softwares* não são coerentes. Porém, vale a pena ressaltar que mesmo não atendendo aos critérios da completude e adequação, os *softwares* se apresentam como ferramentas potenciais para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Projetiva.

A partir do momento em que o usuário já detém o conhecimento teórico por trás do traçado que pretende realizar, é possível realizar as construções

mantendo as suas propriedades e com isso consegue realizar a manipulação dos elementos para analisar como o traçado se comporta.

Podemos destacar que o enfoque da pesquisa foram as análises realizadas no Cabri. Pelo fato de trabalhar com coordenadas homogêneas, o *software* já se sobressai, pois reconhece o espaço impróprio e os pontos impróprios que têm grande relevância para a Geometria Projetiva. O destaque maior é para a construção do traçado da transformação homológica da circunferência. Diferentemente do GeoGebra, através da manipulação do ponto polo é possível obter a representação da elipse, da parábola e da hipérbole no Cabri.

Por mais que na programação a reta que representa o eixo de homologia da construção não é uma reta dupla de pontos duplos, graficamente a construção está correta e a manipulação apresenta os resultados esperados pelo usuário. Daí surge o seguinte questionamento: Levando em consideração o fato de que o Cabri possibilita as representações de forma correta, é necessário a construção de um *software* de Geometria Dinâmica que atenda aos requisitos da Geometria Projetiva?

Acredita-se que a resposta é sim, pois a possibilidade da construção de um *software* de Geometria Dinâmica que atenda os pressupostos apresentados pela Geometria Projetiva é uma oportunidade de inserir ferramentas que respeitem as propriedades por trás de cada elemento projetivo.

Vale ressaltar também a importância de um *software* que permite a articulação entre vários registros de representação dos objetos matemáticos em questão. Nele o usuário poderia transitar entre a versão espacial e a versão plana de um mesmo traçado, além de que essa ferramenta computacional pode trazer contribuições como aprimoramento da capacidade de abstração e construção dos traçados com rapidez e eficiência para os estudantes da Geometria Projetiva.

Diante a finalização dessa pesquisa, é possível observar que este estudo deixa lacunas em aberto para futuras pesquisas. Desde o início, a pesquisa já deixa claro que trata-se apenas de uma etapa de um longo processo proposto pela EDI.

A partir dessa pesquisa podemos vislumbrar alguns percursos possíveis, como a produção de um *software* que leve em consideração todos os requisitos aqui apresentados. Ou ainda uma extensão para o *software* GeoGebra, que contenha as ferramentas propostas e atualizações na linguagem de programação para que o mesmo passe a ser coerente com os traçados da Geometria Projetiva.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALACHEFF, N. **La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique.** Vingt ans de didactique des mathématiques em France, La pensée Sauvage Editions, Grenoble, 1994, p. 364-370.

BARROS, A. P. R. M. **Contribuições de um micromundo composto por recursos de GeoGebra e da coleção M³ para a aprendizagem do conceito de volume de Pirâmide.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 2013. Disponível em: <http://www1.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissertacoes/barros_aprm_fe_uni_camp.pdf> Acesso em: 13 de abr. 2021.

BARROS, R. L. **Cônicas.** Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. 1. ed. São Carlos, São Paulo: Novas Edições Acadêmicas, 2018. v. 1. 143p.

BELLEMAIN, F. **A transposição didática na engenharia de softwares educativos.** In: I SIPEM, Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Serra Negra. I SIPEM, Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, p. 198-204. 2000. Disponível em: <<http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/files/sipeml.pdf>>. Acesso: 24 de abr. 2021.

BELLEMAIN, F. **Geometria dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem,** 15^o Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico e IV International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design, 5-9 novembro de 2001, São Paulo, Brasil. 2001

BELLEMAIN, F; CORREIA, A. M. A. **Geometria Dinâmica: Fundamentos Epistemológicos.** Egrafia 4^o Congresso Nacional y 1ro Internacional. Rosário. 2004.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2016. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>> Acesso em 14 de abr. 2021

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5^a a 8^a séries): Matemática.** Brasília, 1998. 147 p. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12657-parametros-curriculares-nacionais-5o-a-8o-series>> Acesso em 16 de abr. 2021.

CARDOSO JUNIOR, D. A. **Uma proposta para a solução de problemas com a utilização dos axiomas da geometria projetiva.** Dissertação – (mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, PR, 2018. 89 p.

CEPPI, H.; FOURNIER, A. M. **Geometría Proyectiva.** Buenos Aires: Guillermo Kraft Limitada, 1961.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado,** Buenos Aires: Aique, 1991.

CORTESE, J. F. N. **O infinito em peso, número e medida: a comparação dos incomparáveis na obra de Blaise Pascal**. Tese de Doutorado. UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS.). 2017. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/8/8133/tde-08082018-153153/publico/2017_JoaoFigueiredoNobreCortese_VCorr_POR.pdf Acesso em: 13 de abr. 2021.

COSTA, M. D.; COSTA, A. P. A. V. **Curvas Cônicas - apostila**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1978.

COSTA, M. D.; COSTA, A. V. **Geometria Gráfica Tridimensional**. Vol 03. Recife: Editora Universitária, 1994.

CRUZ, G. E. Aplicação de matrizes em transformações lineares, afins e projetivas no espaço. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2017. Disponível em: < <https://ri.ufs.br/handle/riufs/6523>> Acesso em 14 de abr. 2021.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 2a Edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, B. L. **Modelo didático do cone no GeoGebra**. 2017. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/uj2bfSJV> Acesso em 22 de abr. 2021.

FERREIRA, B. L. **O que sabem sobre as curvas cônicas?: uma possível leitura para o processo de produção de significado em um grupo de estudos**. 271 f. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Paulista “Julio de Mesquita Filho”. Campus de Rio Claro. 2019. Disponível em: < <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/182512?locale-attribute=es>> Acesso em 21 de abr. 2021.

FIGUEIREDO, M. C. **Uma proposta de trabalho didático com a geometria projetiva**. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, MG. 2018. 60 p. Disponível em: < <https://www2.ufjf.br/mestradoedumat/wp-content/uploads/sites/134/2011/05/Dissertacao-Marina.pdf>> Acesso em 20 de abr. 2021.

GIATTI, C. A. **Isometrias no R^3 : modelos euclidiano e homogêneo**. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP. 2020. Disponível em: <https://ime.unicamp.br/pos-graduacao/isometrias-no-r3-modelos-euclidiano-homogeneo> Acesso em 19 de abr. 2021.

GONÇALVES, T. S. **Uma introdução à geometria projetiva para o ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013. Disponível em: < <https://repositorio.furg.br/handle/1/6550>> Acesso em 21 de abr. 2021.

LOPES, J. F. **Cônicas e aplicações**. Dissertação - mestrado - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011. 184 p. Disponível em: < <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91061>> Acesso em 23 de abr. 2021.

MARIOTTI, M. A. **A geometria em sala de aula: reflexões sobre o ensino e aprendizagem.** Recife: Editora UFPE, 2019.

MONTEIRO, R. M. **Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o Geogebra.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional. UFES, Vitória, 2014. Disponível em: < <http://repositorio.ufes.br/handle/10/4819>> Acesso em 20 de abr. 2021.

NASCIMENTO, E. D. **O Porismo de Poncelet.** Dissertação - mestrado – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: 2017. 48 p. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/32326/32326.PDF> Acesso em 23 de abr. 2021.

OLIVEIRA JÚNIOR, J. W. **Três pontos de vista sobre cônicas.** Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2018. Disponível em: < <https://ri.ufs.br/handle/riufs/9321>> Acesso em 21 de abr. 2021.

PÁDUA, N. V. **Invariantes geométricos de pares de curvas planares.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2020. Disponível em: < <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/10440/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Nathanni%20Vieira%20de%20P%C3%A1dua%20-%202020.pdf>> Acesso em 20 de abr. 2021.

PAVANELI, M. D. D. **Geometria Projetiva no ensino do espaço tridimensional e na estrutura de jogo de Dobble.** Dissertação – mestrado – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, SP. 2019. Disponível em: < <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11289?show=full>> Acesso em 14 de abr. 2021.

PEREIRA, L. R., et al. **Usando o GeoGebra para o ensino de sólidos de revolução.** Ciência e Natura, v. 39, n. 3, 2017. Disponível em: < <https://www.redalyc.org/journal/4675/467553545016/html/>> Acesso em 21 de abr. 2021.

RODRIGUES, A. A. **Geometria Projetiva na Educação Básica.** Dissertação – (mestrado) – Universidade Federal do ABC. Santo André, SP. 2019. 128 p. Disponível em: < https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4561&id2=150531961> Acesso em: 19 de abr. 2021.

RODRIGUES, A. J. **Geometria Descritiva - Projetividades Curvas e Superfícies.** 3ª Edição. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1968.

ROQUE, T; DE CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática.** 2012. Disponível em: < https://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/Topicos_20de_20Historia_20da_20Matematica_28PROFMAT_29_TatianaRoque_Pitombeira.pdf> Acesso em: 24 de abr. 2021.

SANTOS, R. T. dos. **A engenharia didático-informática: uma metodologia para a produção de software educativo.** Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife: 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/39121>
Acesso em: 25 de abr. 2021.

SENA, D. E. L. A. L. **Da geometria euclidiana à geometria projetiva: algumas aplicações de homotetias e de construções projetivas.** Dissertação (Mestrado Acadêmico ou Profissional em 2017) - Universidade Estadual do Ceará, 2017. Disponível em: <https://siduece.uece.br/siduece/trabalhoAcademicoPublico.jsf?id=86452>
Acesso em 7 de abr. 2021.

SIQUEIRA, J, E, M. BELLEMAIN, F. **A transposição didática do conceito de função do ensino superior para o ensino fundamental e médio.** 22º Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, 2016.

SILVA, L. J. F. **Ensino de Geometria e Perspectiva: Um Olhar pelas Fotografias.** 2018. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, ES. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/11354>
Acesso em 9 de abr. 2021.

SILVA, I. A. **Problema de Apolônio alguns números característicos das cônicas planas.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Recife: PE. 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/11691>
Acesso em: 12 de abr. 2021.

SOUSA, N. S. **Curvas Cônicas: do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/29078>
Acesso em: 23 de abr. 2021.

SOUZA, F. D. F. **Resolução de problemas de geometria euclidiana utilizando técnicas de geometria projetiva.** Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/24512>
Acesso em: 20 de abr. 2021.

VERA, F. **Tratados de Geometria Projectiva.** Habana: Cultural, S. A., 1941.

VIEIRA, M. D. **Uma proposta de trabalho didático com a geometria projetiva.** Dissertação – mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, MG. 2016. 150 p. Disponível em <https://www2.ufjf.br/mestradoedumat/wp-content/uploads/sites/134/2011/05/Dissertacao-Marina.pdf>
Acesso em: 28 de abr. 2021.