

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

JOSÉ GUILHERME BISPO DE ALBUQUERQUE LIMA

**CÁLCULO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO PARA TRINCAS DE
QUINA QUARTO-ELÍPTICAS UTILIZANDO MÉTODOS ANALÍTICOS E
SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS**

Recife

2019

JOSÉ GUILHERME BISPO DE ALBUQUERQUE LIMA

**CÁLCULO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO PARA TRINCAS DE
QUINA QUARTO-ELÍPTICAS UTILIZANDO MÉTODOS ANALÍTICOS E
SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Departamento de
Engenharia Mecânica da Universidade
Federal de Pernambuco como requisito
parcial para a obtenção do título de
Engenheiro Mecânico.

Orientador: Jorge Antonio Palma Carrasco

Recife

2019

Catálogo na fonte
Bibliotecário Gabriel da Luz, CRB-4 / 2222

L732cLima, José Guilherme Bispo de Albuquerque.

Cálculo dos fatores de intensidade de tensão para trincas de quina quarto-elípticas utilizando métodos analíticos e software de elementos finitos / José Guilherme Bispo de Albuquerque Lima – Recife, 2019.

73f., figs., tabs., simbol. e abrev.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Antonio Palma Carrasco.

TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Departamento de Graduação em Engenharia Mecânica, 2019.

Inclui Referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Mecânica de fratura. 3. Trincas de quina de quarto-elípticas. 4. Fatores de intensidade de tensão. 5. Método dos elementos finitos. I. Carrasco, Jorge Antonio Palma (Orientador). II. Título.

621 CDD (22. ed.)

UFPE

BCTG/2019 - 257

JOSÉ GUILHERME BISPO DE ALBUQUERQUE LIMA

**CÁLCULO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO PARA TRINCAS
DE QUINA QUARTO-ELÍPTICAS UTILIZANDO MÉTODOS ANALÍTICOS E
SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS**

Este trabalho de conclusão de curso foi julgado e aprovado para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico, no curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Pernambuco.

Recife, 11 de julho de 2019.

Prof. Dr. Jorge Antonio Palma Carrasco
Orientador

Prof. Dr. Pedro Manuel González del Foyo
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jorge Antonio Palma Carrasco

Prof. Dr. José Maria Andrade Barbosa

MSc. Jonatas da Silva Júnior

Aos meus pais por sempre acreditarem em mim e sempre estarem comigo, obrigado!

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais por toda dedicação e apoio prestados ao longo de todos esses anos de luta, sem eles, essa caminhada não teria sido possível. A todos os meus familiares que acompanharam de perto minha luta e estiveram comigo quando precisei.

Ao meu orientador Jorge Antonio Palma Carrasco, por todo conhecimento passado, suporte e dedicação para que esse trabalho fosse realizado.

Ao meu amigo Mateus Rattes, por todo suporte e ajuda que precisei ao longo de toda essa jornada. A todos os meus amigos que estiveram comigo nesses longos anos de dedicação, angústias e superações.

RESUMO

Ao longo das décadas, trincas de quina foram encontradas com frequência em componentes estruturais submetidos a condições particulares de carregamento. A necessidade de investigar a integridade mecânica desses componentes levou a implementar procedimentos analíticos para o cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão (FITs) dessas trincas com base na mecânica de fratura para estabelecer a sua aceitabilidade. Neste trabalho foram obtidos os FITs de trincas de quina quarto-elípticas inseridas numa placa retangular de espessura constante, variando o comprimento da placa e os parâmetros da trinca. As considerações para análise levaram em consideração diferentes razões de aspecto e de profundidade para uma mesma razão de comprimento a uma taxa de carregamento constante. O cálculo dos FITs foi implementado de forma analítica e de forma numérica, utilizando um software comercial de elementos finitos. Os resultados obtidos permitiram verificar que existe um comportamento semelhante entre os FITs obtidos através das abordagens analíticas e numérica, porém, foram observadas diferenças importantes entre os valores absolutos dos FITs encontrados, com erros relativos percentuais variando de 1.35% a 33%.

Palavras-chave: Mecânica de fratura. Trincas de quina quarto-elípticas. Fatores de intensidade de tensão. Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

Over the decades, corner cracks were frequently founded in mechanical structural components under particular loading conditions. The need to investigate the mechanical integrity of these components led to implementation of analytical procedures to calculate the Stress Intensity Factors (SIF) of these cracks, based on fracture mechanics, to establish their acceptability. In this work the SIFs of quarter-elliptic corner cracks inserted in a rectangular plate of constant thickness were obtained, varying the length of the plate and the parameters of the crack. For the analysis were considered different aspect ratio and deep ratio for a same length ratio at a constant loading rate. The SIF calculation was implemented analytically and numerically, using a commercial finite element software. The obtained results allowed to verify that there is a similar behavior between the SIFs obtained through the analytical and numerical approaches, however, important differences were observed between the absolute values of the SIFs found, with relative error varying between 1.35% to 33%.

Keywords: Fracture mechanics. Quarter-elliptic corner cracks. Stress intensity factors. Finite element method.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1- Diagrama força x deslocamento com comportamento tipo frágil (a) e tipo dúctil (b).
- Figura 2- Tensões ao redor na ponta de uma trinca de um material elástico.
- Figura 3 - Trinca inicial com deformação plástica resultando num deslocamento infinito.
- Figura 4- Modos de abertura para os diferentes deslocamentos de trinca.
- Figura 5- Posição e macromorfologia das trincas de quina transversais.
- Figura 6- Fratura no furo do parafuso de retenção.
- Figura 7- Geometria de uma trinca de quina.
- Figura 8- Definição da parametrização do ângulo de ponta.
- Figura 9- Geometria de uma trinca de quina num componente estrutural.
- Figura 10- Campos de tensões uniforme e linear para uma trinca de quina.
- Figura 11- Geometria de trincas semi-elíptica e quarto-elíptica.
- Figura 12- Configuração dos elementos QPE e nós em volta da trinca.
- Figura 13- Elementos triangulares do tipo *quarter-point* em detalhe.
- Figura 14- Sistema de coordenadas na ponta da trinca.
- Figura 15- Parametrização na ponta da trinca.
- Figura 16- Metodologia utilizada.
- Figura 17- Geometria da placa junto com suas cotas.
- Figura 18- Ambiente de modelagem e análise.
- Figura 19- Modelagem da placa e trinca.
- Figura 20- Interface de análise para a trinca.
- Figura 21- Procedimento para obtenção dos FITs.
- Figura 22- Method tetrahedrons escolhido.
- Figura 23- Detalhes da construção da trinca.
- Figura 24- Malhas da placa e da trinca.
- Figura 25- Suporte fixo na base da placa.
- Figura 26- Aplicação de pressão uniforme.
- Figura 27- FITs normalizados do ponto A.
- Figura 28- FITs normalizados do ponto A criado pelo autor.
- Figura 29- FITs normalizados do ponto B.
- Figura 30- FITs normalizados do ponto B criado pelo autor.
- Figura 31- FITs normalizados para o ponto A com $\frac{c}{W} = 0.25$.

Figura 32- FITs normalizados para o ponto B com $\frac{c}{W} = 0.25$.

Figura 33- Efeito da variação de aspecto na frente da ponta da trinca.

Figura 34- Contorno da trinca em detalhe.

Figura 35- FITs em função do comprimento da trinca.

Figura 36- FITs calculados com as equações de Raju e Newman e da norma BS 7910. Trincas 1,2,3 e 4.

Figura 37- FITs calculados com as equações de Raju e Newman e da norma BS 7910. Trincas 5,6,7 e 8.

Figura 38- FITs calculados com as equações de Raju e Newman e da norma BS 7910. Trincas 9, 10, 11 e 12.

Figura 39- FITs calculados com as equações de Raju e Newman e da norma BS 7910. Trincas 13, 14, 15, 16.

Figura 40- Curvas contínuas dos FITs para o ponto A.

Figura 41- Curvas contínuas dos FITs para o ponto B.

Figura 42- FITs calculados com o ANSYS. Trincas 1,2,3 e 4.

Figura 43- FITs calculados com o ANSYS. Trincas 5,6,7 e 8.

Figura 44- FITs calculados com o ANSYS. Trincas 9,10,11,12.

Figura 45- FITs calculados com o ANSYS. Trincas 13,14,15 e 16.

Figura 46- FITs normalizados para o ponto A.

Figura 47- FITs normalizados para o ponto B.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Dimensões das trincas.

Tabela 2- Dimensões das placas retangulares.

Tabela 3- Propriedades do aço adotado nas simulações.

Tabela 4- Erros relativos percentuais do ponto A.

Tabela 5- Erros relativos percentuais do ponto B.

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

a	Semi-eixo menor do quarto de elipse, profundidade da trinca.
A_i	Coefficientes.
B_i	Coefficientes.
C_i	Coefficientes.
c :	Semi-eixo maior do quarto de elipse, comprimento da trinca.
D_i	Coefficientes.
F	Parâmetro de correção geométrico específico para cada trinca.
F_0	Fator geométrico de correção de intensidade de tensão para o ponto superficial B de uma trinca submetida a um campo de tensões uniforme.
F_1	Fator geométrico de correção de intensidade de tensão para o ponto superficial B de uma trinca submetida a um campo de tensões linear.
f_θ	Termo de correção nos fatores de intensidade de tensão para trincas elípticas.
f_w	Termo de correção nos fatores de intensidade de tensão para trincas elípticas.
G	módulo de cisalhamento do material.
g_i	Termo de correção nos fatores de intensidade de tensão para trincas elípticas ($i= 1, 2$).
H	Altura da placa retangular.
K	Fator de intensidade de tensões.
K_A	Fator de intensidade de tensões para o ponto mais distante A.
K_B	Fator de intensidade de tensões para o ponto superficial B.
K_0^A	Fator de intensidade de tensões para o ponto mais distante A submetido a um campo de tensão uniforme.
K_0^B	Fator de intensidade de tensões para o ponto superficial B submetido a um campo de tensão uniforme.
K_I	Fator de intensidade de tensões aplicado no modo I de abertura.
l_c	Comprimento do elemento na ponta da trinca.
M	Fator de correção de abaulamento.

$m(x, a)$	Função peso conhecida para cada configuração de geometria de trinca.
M_{iA}	Coefficientes da função peso para o ponto mais distante A ($i= 1, 2, 3$).
M_{iB}	Coefficientes da função peso para o ponto superficial B ($i= 1, 2, 3$).
$m_A(x, a)$	Função peso para o ponto mais distante A.
$m_B(x, a)$	Função peso para o ponto superficial B.
M_m	Fator de intensidades de ampliação de tensão.
Q	Fator de forma da trinca.
t	Espessura da parede da placa.
W	Comprimento da placa.
Y	Fator de forma que depende da geometria da trinca.
Y_0	Fator geométrico de correção de intensidade de tensão para o ponto mais distante A submetido a um campo de tensões uniforme.
Y_1	Fator geométrico de correção de intensidade de tensão para o ponto mais distante A submetido a um campo de tensões linear.
$u, v e w$	Deslocamentos nas direções x, y e z.
$\frac{a}{c}$	Razão de aspecto da trinca.
$\frac{a}{t}$	Razão de profundidade da trinca.
$\frac{c}{W}$	Razão de comprimento entre os os comprimentos da trinca e da placa.
$\frac{h}{W}$	Razão entre a altura da placa e comprimento da placa.
θ	Ângulo de parametrização do quarto de elipse, ângulo da ponta da trinca.
θ_c	Ângulo de inclinação na ponta da trinca.
λ	Constante usada no cálculo do fator de intensidade de tensões.
ν	Razão de Poisson.
σ	Tensão aplicada.
$\sigma(x)$	Distribuição de tensões sobre o plano da trinca.
Φ	Integral elíptica de 2ª ordem.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	16
1.1.1	Objetivo Geral	16
1.1.2	Objetivos Específicos	16
2	REVISÃO DE LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Fratura frágil e dúctil dos metais	17
2.2	Teorias da mecânica de fratura	18
2.3	Tenacidade à fratura	19
2.3.1	Abordagens para determinação de tenacidade à fratura	19
2.3.2	Mecânica de fratura linear elástica (MFLE).....	20
2.3.3	Mecânica de fratura elasto-plástica (MFEP)	20
2.3.4	Modos de abertura de trinca	21
2.4	Trincas de quina	23
2.4.1	Geometria de uma trinca de quina	25
2.4.2	Cálculo do Fator de Intensidade de Tensão de Trincas quarto-elípticas	28
2.4.2.1	<i>Equações de Zheng</i>	28
2.4.2.2	<i>Equações de Raju e Newman</i>	34
2.4.2.3	<i>Equações da Norma BS 7910</i>	35
2.5	O método dos elementos finitos	37
2.5.1	Método dos elementos finitos na mecânica de fratura.....	37
2.5.1.1	<i>Elementos quarter-point</i>	38
3	METODOLOGIA	42
3.1	Cálculos analíticos	44
3.2	Simulação numérica em software de elementos finitos	44
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	52
4.1	Validação dos métodos analíticos	52
4.1.1	Equações de Zheng	52
4.1.2	Equações de Raju e Newman (1981) e da norma BS 7910 (2013)	55
4.1.3	Efeito da variação de aspecto na frente da ponta da trinca.....	56
4.2	Resultados específicos	57
4.2.1	Equações de Raju e Newman e da norma BS 7910.....	59
4.2.2	Equações de Zheng	63
4.2.3	Simulações numéricas no ANSYS	64
4.2.4	Comparação dos resultados obtidos	68
5	CONCLUSÕES	72
6	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	73
	REFERÊNCIAS	74

1 INTRODUÇÃO

Ao longo de muitas décadas, a análise de trincas em componentes estruturais recebeu atenção de muitos pesquisadores, como Zheng *et al.* (1996), Raju e Newman (1981), Kiciak *et al.* (1998), Toribio *et al.* (2017), assim como de normas de avaliação de integridade estrutural, como a BS 7910 (2013). Trincas de quina, como são conhecidas trincas que possuem geometria que pode ser associada à geometria de um quarto de elipse, são encontradas com frequência em componentes de estruturas aeronáuticas, como trens de pouso, discos de turbina, parafusos e reforços retangulares (BRANCO *et al.*, 2011). Também são encontradas em elementos estruturais metálicos de edifícios e maquinaria, como vergas, furos para rebites, juntas mecânicas, entre outros (HEO e YANG, 2002). Consequentemente, análises de fratura e fadiga de tais trincas são de grande interesse prático e requerem a determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) para as trincas envolvidas (ZHENG *et al.*, 1996).

A mecânica de fratura busca determinar, estando o material com um defeito tipo trinca, se um componente irá ou não fraturar e falhar de forma catastrófica, ou seja, ocorrer de fato fragmentação, quebra em tensões normais de serviço. O processo de fratura pode ser dividido em tipos fundamentais, dependendo do modo como a mesma ocorre: fratura frágil e fratura dúctil. Na fratura dúctil, é notável ocorrer uma apreciável deformação plástica antes e durante a propagação de trincas. Na fratura frágil, a propagação de trincas ocorre rapidamente e sem aviso prévio, normalmente com deformação plástica nula ou quase nula, devendo-se evitar esse tipo de fratura (LIEBOWITZ, 1969).

A Mecânica da Fratura Linear-Elastica estuda trincas em materiais de comportamento frágil na fratura e possui como parâmetro central de análise o FIT, o qual determina o campo de tensões nas proximidades da ponta de uma trinca encontrada em componentes estruturais de engenharia, e submetidos a uma condição particular de carregamento (ANDERSON, 2005).

As soluções dos FITs para trincas com geometria quarto-elíptica foram inicialmente desenvolvidas por Newman e Raju (1981) fazendo uso de uma análise tridimensional por elementos finitos e o método da força nodal. O método da função peso, no âmbito da mecânica de fratura linear elástica, é também uma forma de obtenção dos FITs de trincas superficiais, tendo sido empregado por Zheng *et al.* (1996) para trincas do tipo quarto de elipse.

Softwares de elementos finitos são muito empregados para o cálculo dos FITs de trincas em estruturas de geometria complexa. No entanto, não todas as funções disponibilizadas nesses softwares permitem por padrão modelar todas as diversas geometrias com que uma trinca real pode ser caracterizada, como é o caso da trinca de quina quarto-elíptica. Nesse sentido, a

motivação desse trabalho surgiu da necessidade de calcular numericamente os FITs de trincas de quina quarto-elípticas em componentes estruturais de forma retangular utilizando a ferramenta *arbitrary crack* do software comercial ANSYS®, e de comparar os valores obtidos com o resultado da aplicação de expressões analíticas obtidas da literatura científica.

1.1 Objetivos

A seguir serão descritos os objetivos geral e específico do presente trabalho.

1.1.1 Objetivo Geral

Calcular os Fatores de Intensidade de Tensão de trincas de quina com geometria quarto-elíptica encontradas em componentes estruturais de forma retangular, utilizando métodos analíticos e simulações computacionais com software de Elementos Finitos.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Selecionar da literatura científica as expressões analíticas para o cálculo do FIT em trincas de quina com geometria quarto-elíptica;
- Calcular analiticamente os FITs para trincas de quina quarto-elípticas;
- Calcular os FITs para trincas de quina quarto-elípticas via simulação numérica com software comercial de Elementos Finitos;
- Analisar os resultados obtidos comparando o erro percentual dos métodos analíticos com o dos obtidos via simulação numérica;
- Validar a metodologia computacional empregada.

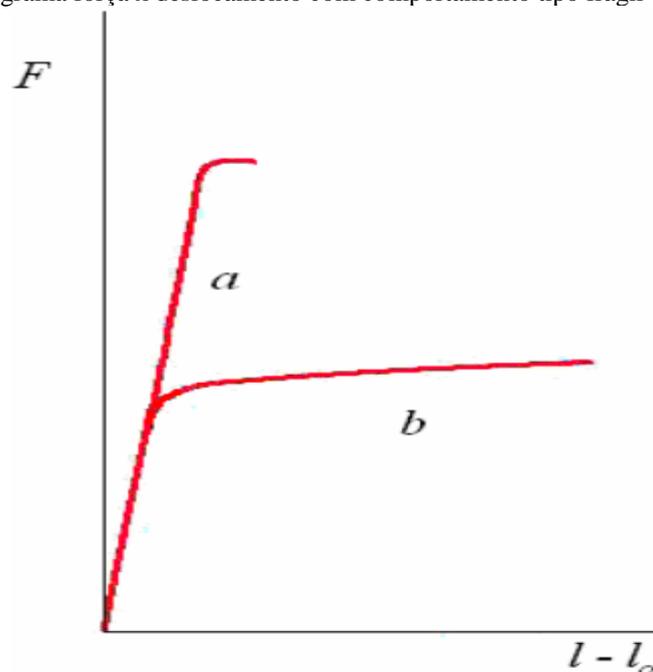
2 REVISÃO DE LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir serão descritas todas as revisões de literatura e fundamentações teóricas que foram a base para a construção de todo o trabalho e obtenção dos resultados.

2.1 Fratura frágil e dúctil dos metais

A fratura é a fragmentação, separação de um corpo sólido em duas ou mais partes quando submetido à ação de uma tensão aplicada. O processo de fratura fundamenta-se no comportamento da trinca no material, seu início e propagação é que determinarão as mudanças de resistência no corpo sólido e seu possível rompimento (DIETER, 1988).

Figura 1- Diagrama força x deslocamento com comportamento tipo frágil (a) e tipo dúctil (b).



Fonte: Heck (2012).

Como se pode observar na figura 1, um procedimento padrão afim de analisar como um material se comporta quando submetido à uma tensão aplicada crescente, é o típico ensaio de tração. O material representado pela curva “a” apresenta um comportamento frágil, visto que após a tensão aplicada ultrapassar o limite de escoamento do material, o mesmo mostra deformação plástica quase inexpressiva, se rompendo logo sem seguida. A curva “b” da figura 1 representa o comportamento típico de um material dúctil, apresenta uma resistência mecânica

menor, porém quando o limite de escoamento é ultrapassado, uma apreciável deformação plástica é observada nesses materiais.

2.2 Teorias da mecânica de fratura

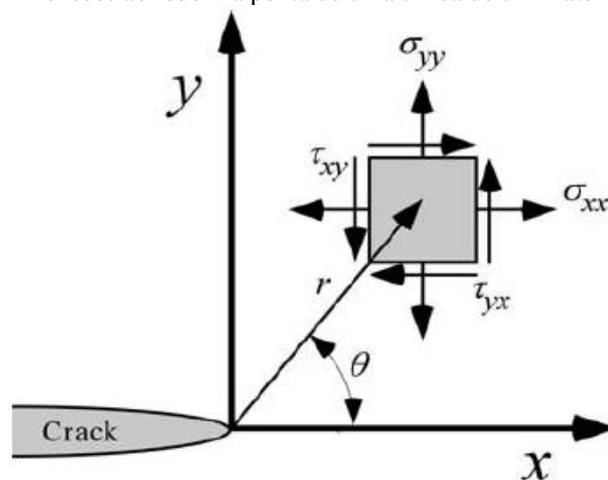
Essencialmente, a mecânica de fratura lida com o processo irreversível de ruptura devido à nucleação e crescimento de trincas. A formação de trincas pode ser um processo complexo que depende fortemente da microestrutura do sólido sendo cristalino ou amorfo, carga aplicada e ambiente. A microestrutura desempenha um papel muito importante devido à movimentação de precipitados, inclusões, tamanho de grãos e tipos de fases da própria microestrutura (PEREZ, 2004).

Existem duas abordagens distintas para análises de fratura: O critério da energia e o fator de concentração de tensões

A abordagem energética afirma que a extensão da trinca ocorre quando a energia disponível para o crescimento de trincas é suficiente para ultrapassar a resistência do material. A resistência do material pode incluir a energia de superfície, plasticidade e outros tipos de dissipação de energia associada com a propagação de trincas

Para um material com um defeito tipo trinca, é possível determinar o campo de tensões ao redor da ponta desta trinca. Cada componente de tensão é proporcional à uma constante K . Se esta constante for conhecida, toda a distribuição de tensões pode ser calculada. Esta constante, que é chamada de fator de intensidade de tensões caracteriza completamente as condições na ponta da trinca de um material elástico linear (ANDERSON, 2005).

Figura 2- Tensões ao redor na ponta de uma trinca de um material elástico.



Fonte: Anderson (2005).

2.3 Tenacidade à fratura

Dado um material já com uma trinca, tenacidade à fratura é o quanto este material resiste até fraturar. É a resistência do material à propagação de trinca. Cada abordagem para análise de fratura possui o seu parâmetro central para o cálculo da tenacidade à fratura. Para se determinar a resistência à fratura do material, ensaios com defeitos implantados nos corpos de prova do material são realizados (HERTZBERG, 1996).

2.3.1 Abordagens para determinação de tenacidade à fratura

Toda abordagem da mecânica de fratura precisa levar em consideração o estado plano de tensões e deformações junto a defeitos em componentes estruturais (STROHAECKER, 2007). Um material pode se encontrar em estado plano de tensões (EPT) ou estado plano de deformações (EPD). A tenacidade à fratura do material em EPT tem como parâmetro conhecido K_C , e se o mesmo estiver em EPD o parâmetro é conhecido como K_{IC} .

Duas abordagens da mecânica de fratura são utilizadas para a análise dos defeitos tipo trinca no material:

- Mecânica da fratura linear-elástica
- Mecânica da fratura elasto-plástica

A primeira abordagem é utilizada em materiais que apresentam um comportamento frágil em fratura, em que apresentam restrição à deformação plástica. Isso pode ocorrer para ligas de altíssima resistência mecânica ou mesmo algumas moderadas. Normalmente, a ponta da trinca nesses materiais é aguda. O parâmetro utilizado pela abordagem elástico-linear com o objetivo de avaliar a tenacidade à fratura das ligas é o valor crítico do fator de intensidade de tensões (K_{IC}), sendo o mesmo uma propriedade do material em análise. A segunda abordagem, a mecânica da fratura elasto-plástica, não possui uma ponta da trinca aguda e possui uma certa deformação plástica. Normalmente esta abordagem é empregada em ligas de aço de baixa resistência mecânica e elevada tenacidade. Existem dois métodos distintos a fim de determinar a tenacidade à fratura do material, sendo eles, CTOD e método da integral J. A validação dos valores críticos para esses dois métodos apresenta pouca dependência com as dimensões da amostra, e assim com limites dimensionais menos rigorosos que a abordagem da mecânica linear elástica (ANDERSON, 2005).

2.3.2 Mecânica de fratura linear elástica (MFLE)

Abordagem utilizada para materiais que apresentam um comportamento frágil em fratura, com deformação plástica nula ou quase nula. As propriedades mecânicas do material, fatores ambientais e fatores geométricos influenciam de forma definitiva para que o material se comporte de maneira frágil.

O fator de intensidade de tensões que descreve o campo de tensões em volta na ponta da trinca é dado pela equação (1) como:

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1)$$

onde:

K : Fator de intensidade de tensões;

Y : Fator de forma que depende da geometria da trinca;

σ : Tensão aplicada;

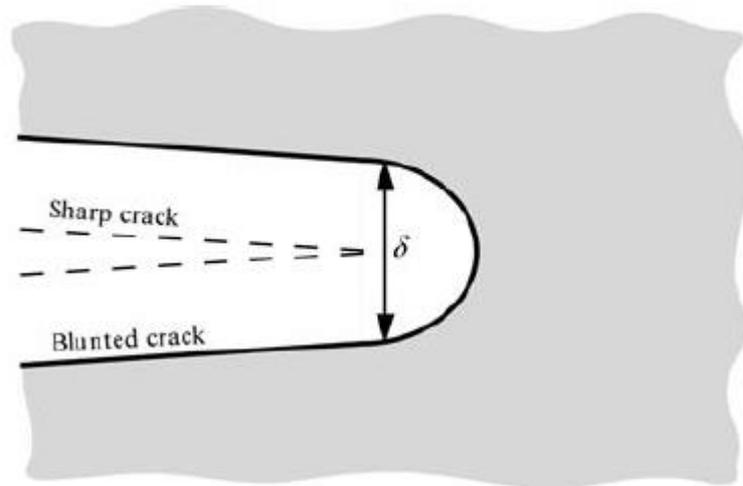
a : Profundidade da trinca.

2.3.3 Mecânica de fratura elasto-plástica (MFEP)

O mecanismo de fratura está relacionado com a deformação plástica na ponta da trinca onde altas tensões e deformações são desenvolvidas. Duas abordagens distintas foram desenvolvidas afim de determinar critérios para a fratura do material ao redor da ponta trinca: Crack Tip Opening Displacement (CTOD) e o método da integral J (PEREZ, 2004).

O método CTOD baseia-se no deslocamento sofrido na ponta da trinca à medida que o mesmo deforma plasticamente. Este método foi proposto por WELLS, onde a abertura na ponta da trinca é uma medida para a tenacidade à fratura do material.

Figura 3 - Trinca inicial com deformação plástica resultando num deslocamento infinito.



Fonte: Anderson (2005).

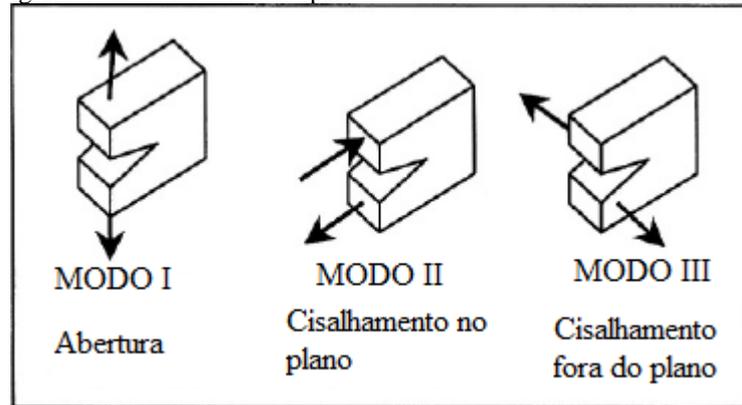
Como se pode observar na figura acima, tem-se uma trinca com uma pequena zona plástica. Conforme postulado por IRWIN, a plasticidade na ponta de uma trinca faz a mesma se comportar como se fosse um pouco mais longa. Assim, WELLS estimou o CTOD nos seus experimentos originais, resolvendo para o deslocamento na ponta da trinca.

O método da integral J se baseia num comportamento não-linear para materiais com deformação elástica-plástica. A integral J é um parâmetro de energia e um parâmetro de intensidade de tensão (ANDERSON, 2005).

2.3.4 Modos de abertura de trinca

Uma trinca em um corpo pode ser submetida a três diferentes modos de carregamento, o qual envolve deslocamentos na superfície da trinca. O comportamento mecânico de um sólido contendo uma trinca de geometria e tamanho específicos pode ser previsto pela avaliação dos fatores de intensidade de tensões associados com o modo de abertura da mesma (PEREZ, 2004).

Figura 4- Modos de abertura para os diferentes deslocamentos de trinca.



Fonte: Perez (2004).

Wastergaard (1939) foi um dos primeiros a encontrar expressões para as tensões externas atuando em certas configurações de trinca, considerando um comportamento de material linear elástico isotrópico. Assumindo um sistema de coordenadas polares com a origem na ponta da trinca, pode-se mostrar que o campo de tensões para qualquer corpo linear elástico trincado é dado por:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2)$$

Onde:

σ_{ij} : Tensor tensão

k : Constante

f_{ij} : Função adimensional de θ para o termo principal

Para os termos de ordem superior, A_m é a amplitude e g_{ij} é uma função adimensional de θ . A solução para qualquer configuração de carregamento dado contém um termo principal que é proporcional a $\frac{1}{\sqrt{r}}$. À medida que $r \rightarrow 0$, o termo principal aproxima-se de infinito, porém os outros termos continuam finitos ou aproximam-se de zero. Portanto, a tensão perto da ponta da trinca varia com $\frac{1}{\sqrt{r}}$, independente da configuração da ponta da trinca. A equação (2) descreve a singularidade de tensão, uma vez que a tensão é assintótica para $r = 0$ (ANDERSON, 2005).

Cada modo de carregamento produz a singularidade $\frac{1}{\sqrt{r}}$ na ponta da trinca, mas a constante de proporcionalidade, k , depende do modo. Para os objetivos de análise do presente trabalho, o modo de carregamento I é suficiente. O fator de intensidade de tensões K , aparece

na substituição de k pela seguinte equação, $K = k\sqrt{2\pi}$. As equações para a distribuição de tensões considerando modo I de carregamento, podem ser dadas assim:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2c)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (\text{Estado plano de tensão}) \quad (2d)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{Estado plano de deformação}) \quad (2e)$$

Onde ν é a razão de Poisson.

O fator de intensidade de tensões define a amplitude da singularidade da ponta da trinca. Assim, as tensões perto da ponta da trinca crescem quando K cresce também. O fator de intensidade de tensões define completamente as condições na ponta da trinca (ANDERSON, 2005).

2.4 Trincas de quina

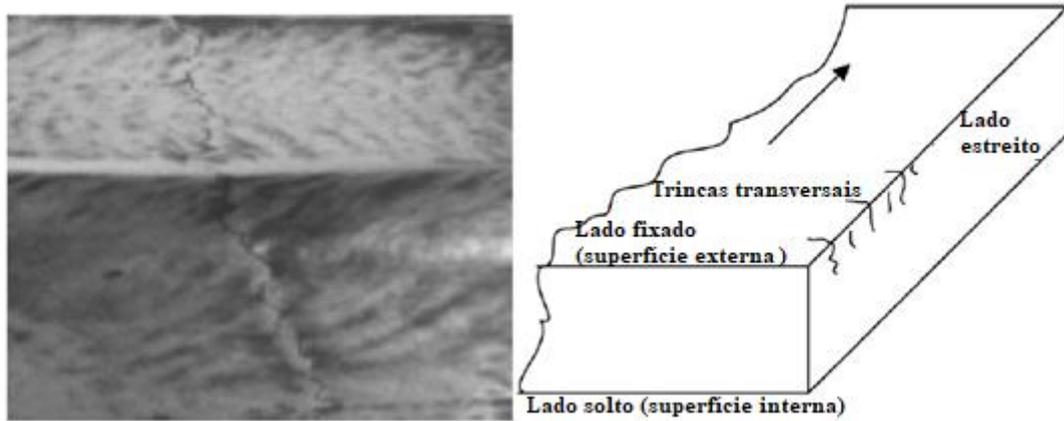
Muitos pesquisadores, entre eles Newman e Raju (1987), associaram a geometria de um quarto de elipse a trincas de quina reais encontradas em componentes estruturais de engenharia. O cálculo do FIT é importante pois visa avaliar o componente através da ótica da fratura e fadiga que o mesmo pode sofrer a partir das condições de carregamento submetidas.

No caso de trincas de quina, os valores máximos para os FITs ocorrem na superfície livre ao longo da direção da largura da peça para trincas em que a profundidade é maior do que outra dimensão, e na superfície livre ao longo da direção da espessura da parede da peça para trincas em que a profundidade é menor do que outra dimensão desta trinca (TORIBIO *et al.*, 2017).

Zheng *et al.* (1996) constataram com uma certa frequência a presença de trincas com geometria um quarto de elipse em estruturas de engenharia em condições de serviço. Branco *et al.* (2011) observaram a presença frequente de trincas de quina e trincas superficiais em discos

de turbina de avião. Ma (2010) verificou a presença de trincas de quina transversais em placas de aço com geometria aproximada de um quarto de elipse, como mostrado na figura 5.

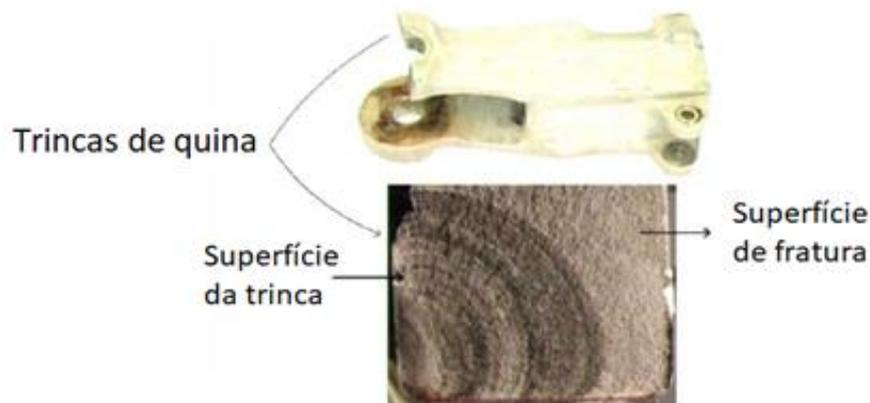
Figura 5- Posição e macromorfologia das trincas de quina transversais.



Fonte: adaptado de Ma (2010).

Como técnica de união, as juntas mecânicas, tais como juntas aparafusadas ou rebitadas, são amplamente utilizadas em estruturas aeroespaciais. Trincas geralmente ocorrem na borda do furo devido à concentração de tensão, à interação de contato entre o furo e o parafuso, ou devido ao processo de fabricação. É necessário determinar os FITs para avaliar o crescimento de trincas, a resistência residual e a vida em fadiga das estruturas trincadas. Lin (1999) observou a presença de trincas de quina ao longo do orifício dos furos de fixação. Na figura 6 observa-se em detalhes a superfície de fratura e a superfície da trinca encontradas no furo de fixação da hélice de um helicóptero.

Figura 6- Fratura no furo do parafuso de retenção.

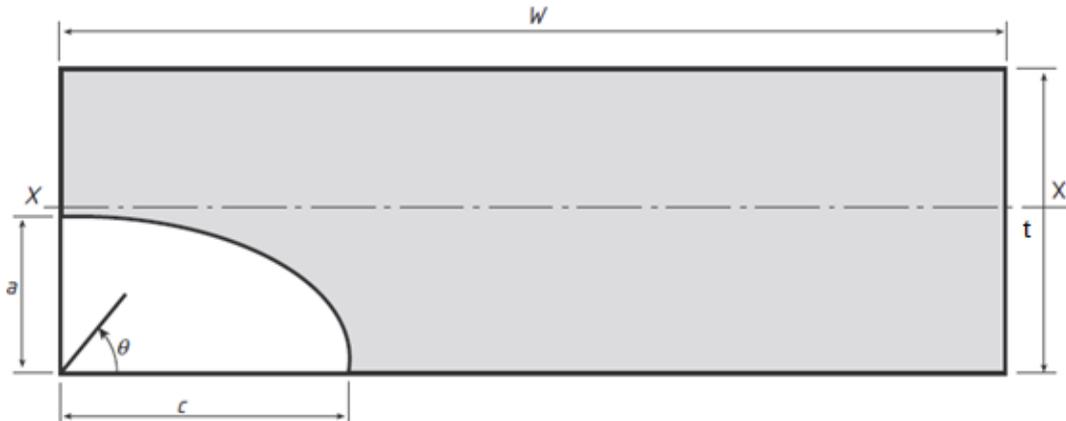


Fonte: adaptado de Lin (1999).

2.4.1 Geometria de uma trinca de quina

Na figura 7, pode ser observada a configuração típica em que essas trincas são encontradas, com os componentes em formas retangulares

Figura 7- Geometria de uma trinca de quina.



Fonte: Adaptado de BS7910 (2013).

onde:

a : semi-eixo menor do quarto de elipse

c : semi-eixo maior do quarto de elipse

θ : ângulo de parametrização do quarto de elipse

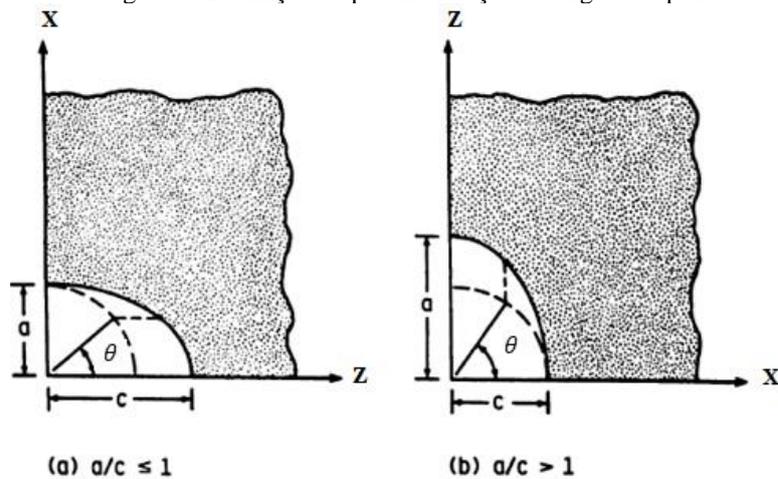
W : comprimento da placa

t : espessura da parede da placa.

A razão $\frac{a}{c}$ é conhecida como razão de aspecto da trinca, a razão $\frac{a}{t}$ é conhecida como razão de profundidade, ou profundidade relativa, e $\frac{c}{W}$ é a razão de comprimento, que estabelece a relação do comprimento da trinca em relação ao comprimento da placa. Todas essas razões determinam a configuração e comportamento da trinca ao longo da parede de espessura finita.

A figura 8 mostra duas configurações que uma trinca de quina um quarto de elipse pode apresentar, dependendo da razão de aspecto adotada.

Figura 8- Definição da parametrização do ângulo de ponta.

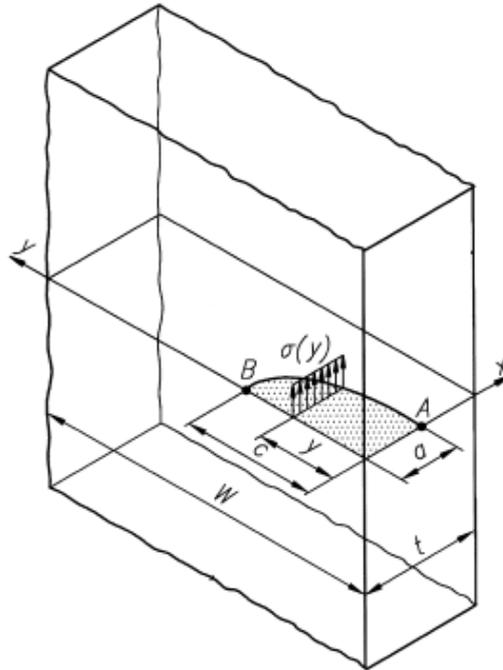


Fonte: Adaptado de Raju *et al.* (1987).

Raju e Newman (1987) definiram muito bem a variação que o ângulo de parametrização da trinca (ângulo de ponta) pode sofrer a partir das mudanças nas dimensões do quarto de elipse, fazendo com que a razão de aspecto também mude, pois isso altera profundamente o deslocamento da trinca em relação ao eixo x devido a uma parametrização diferente da trinca. Na figura 8 está mostrada a parametrização do ângulo da ponta para diferentes razões de aspecto (a) $\frac{a}{c} < 1$ e, (b) $\frac{a}{c} > 1$. A definição dessas razões é de extrema importância no cálculo dos FITs.

A figura 9 ilustra um componente estrutural retangular típico e a configuração geométrica de uma trinca um quarto de elipse, estando o componente submetido a um carregamento uniforme.

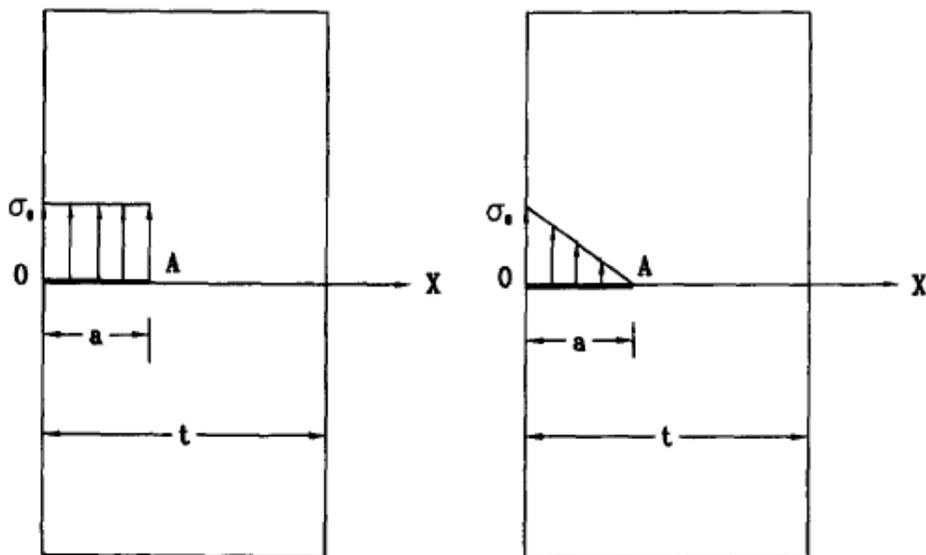
Figura 9- Geometria de uma trinca de quina num componente estrutural.



Fonte: Kiciak (1998).

Zheng *et al.* (1996) descreveram muito bem os campos de tensão encontrados nas configurações de trincas de quina, como pode ser observado na figura 10, em que o componente retangular foi submetido a tensões constantes e tensões com variação linear.

Figura 10- Campos de tensões uniforme e linear para uma trinca de quina.



Fonte: Zheng *et al* (1996).

2.4.2 Cálculo do Fator de Intensidade de Tensão de Trincas quarto-elípticas

As equações que regem os cálculos dos fatores de intensidade de tensão para trincas de quina quarto-elípticas serão descritas e fundamentadas a partir dos artigos e normas base utilizados.

2.4.2.1 Equações de Zheng

Zheng *et al.* (1996) obtiveram as expressões dos FITs para trincas quarto-elípticas numa placa de largura infinita e espessura finita utilizando o método da função peso (*weight function method*). A característica única deste método é, que uma vez que a função peso é determinada para uma trinca de geometria particular, os fatores de intensidade de tensão para qualquer sistema de carregamento aplicado ao corpo podem ser calculados por uma simples integração (ZHENG *et al.*, 1996). A atração do método se dá na separação da propriedade geométrica de uma configuração trincada da carga aplicada no componente estrutural (ZHAO *et al.*, 1995).

Utilizando funções peso aproximadas para pontos na frente da trinca localizados no plano de perfil e no plano frontal de uma trinca de quina quarto-elíptica, no modo I de abertura, as quais foram derivadas do método universal das funções peso feito por Glinka e Shen (1991), Kiciak *et al.* (1998) obtiveram os fatores de intensidade de tensão (FIT) para várias distribuições de tensões.

O método da função peso, considerando uma distribuição de tensão uniforme, pode ser dado pela seguinte integração:

$$K_I = \int_0^a \sigma(x)m(x, a) dx \quad (3)$$

onde:

$m(x, a)$: Função peso conhecida para cada configuração de geometria de trinca;

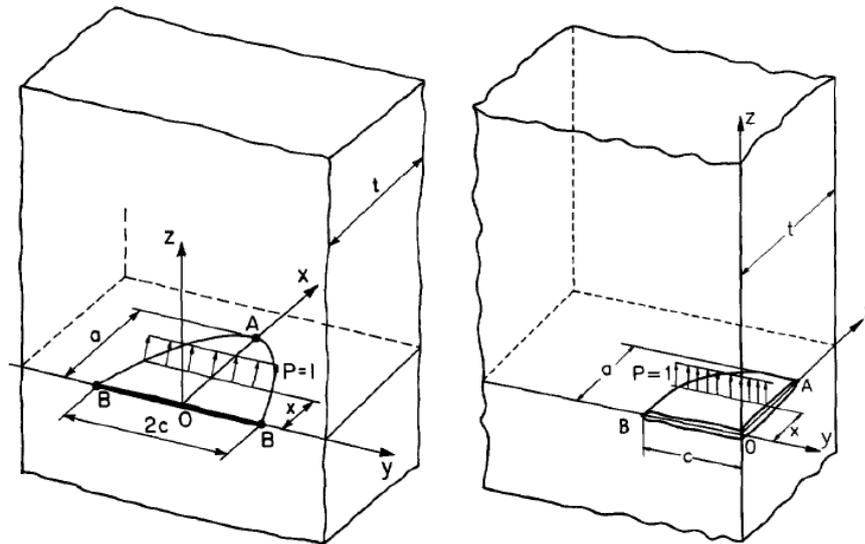
$\sigma(x)$: Distribuição de tensões sobre o plano da trinca;

a : profundidade da trinca.

Glinka e Shen (1991 *apud* ZHENG *et al.*, 1996) propuseram a forma geral do modo I de carregamento das funções peso para o ponto mais profundo A e para o ponto superficial B de uma trinca semi-elíptica, onde essas equações também são válidas para trincas de quina com

geometria quarto-elíptica encontradas em parede de espessura finita. Na figura 11, tem-se a geometria de uma trinca semielíptica de superfície numa parede retangular de um componente estrutural e a geometria de uma trinca de um quarto de elipse na quina da parede. Em ambos os casos o componente estrutural submetido a um carregamento de tensões irá deformar, provocando concentração de tensões, alterando o comportamento das trincas e gerando FITS de importância prática.

Figura 11- Geometria de trincas semielíptica e quarto-elíptica.



Fonte: Glinka e Shen (1991 *apud* ZHENG *et al.*, 1996).

- A função peso que caracteriza o ponto mais profundo A da trinca é dada por:

$$m_A(x, a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(a-x)}} \left[1 + M_{1A} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + M_{2A} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^1 + M_{3A} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (4)$$

- A função peso que caracteriza o ponto superficial B da trinca é dada por:

$$m_B(x, a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + M_{1B} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + M_{2B} \left(\frac{x}{a}\right)^1 + M_{3B} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (5)$$

Os fatores de intensidade de tensão podem ser determinados pela integração das funções pesos apropriadas multiplicadas pela distribuição de tensão $\sigma(x)$:

$$K_A = \int_0^a m_A(x, a) \sigma(x) dx \quad (6)$$

$$K_B = \int_0^a m_B(x, a) \sigma(x) dx \quad (7)$$

Deve-se enfatizar que as funções peso para a trinca de quina quarto elíptica podem ser consideradas apenas quantidades médias associadas com a camada limite perto dos pontos superficiais A e B. A razão se dá pela singularidade $\frac{1}{\sqrt{r}}$ do campo de tensão da trinca perto da ponta desaparecer na intersecção de três superfícies livres, como os pontos A e B. A ausência da singularidade $\frac{1}{\sqrt{r}}$ do campo de tensões da mecânica de fratura linear elástica implica que os fatores de intensidade clássicos desaparecem, em outras palavras $K \rightarrow 0$ (ZHENG *et al.*, 1996).

Os fatores de intensidade de tensão obtidos por distribuição de tensão foram dados na forma de um fator de correção geométrico Y_i ou F_i . Para a análise do sistema, a distribuição de tensões é uniforme, e, portanto, $\sigma(x) = \sigma_0$.

- Para o ponto mais profundo A, temos:

$$K_0^A = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} Y_0 \quad (8)$$

- Para o ponto de superfície B, temos:

$$K_0^B = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_0 \quad (9)$$

onde:

$$Q = 1 + 1.464 \left(\frac{a}{c}\right)^{1.65} \quad (10)$$

ou:

$$Q = 1 + 1.464 \left(\frac{c}{a}\right)^{1.65} \quad (11)$$

onde Q é o fator de forma para a geometria quarto-elíptica. A equação (10) é válida para $\frac{a}{c} < 1$ e a equação (11) para $\frac{a}{c} > 1$.

Os fatores de correção geométricos foram dados em uma forma tabular devido a variação da razão de profundidade e a razão de aspecto da trinca. Não foi possível encontrar na literatura referências sobre variações no FIT devido às variações da razão $\frac{t}{w}$, porém, a razão $\frac{c}{w}$ (razão de comprimento) foi avaliada por Shiratori e Miyoshi (1992 *apud* ZHENG, *et al.*, 1996): Se $\frac{c}{w} \leq 0.2$, a placa possui comprimento de parede grande comparado com o parâmetro da trinca.

Os fatores Mi_{AB} que definem as funções peso dos pontos A e B são descritos abaixo.

- Para o ponto mais profundo A da trinca, o fator de intensidade de tensão é dado por:

$$K_0^A = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} Y_0 = \int_0^a \frac{2\sigma_0}{\sqrt{2\pi(a-x)}} \left[1 + M_{1A} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + M_{2A} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^1 + M_{3A} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right] dx \quad (12)$$

- Para o ponto superficial B da trinca, o fator de intensidade de tensão é dado por

$$K_0^B = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_0 = \int_0^a \frac{2\sigma_0}{\sqrt{\pi x}} \left[1 + M_{1B} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + M_{2B} \left(\frac{x}{a}\right) + M_{3B} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right] dx \quad (13)$$

Os parâmetros Mi_A foram encontrados por Zheng *et al.*, (1996) para trincas com geometria semi-elíptica, cujas expressões também são válidas para trincas de quina quarto-elípticas. As descrições dos parâmetros em função das razões de aspecto e de profundidade são definidas para a geometria de uma placa de espessura finita, que é a mais simples para análise de uma trinca de quina.

- Ponto mais profundo da trinca A:

$$M_{1A} = \frac{2\pi}{\sqrt{2Q}} (2Y_0 - 3Y_1) - \frac{24}{5} \quad (14)$$

$$M_{2A} = 3 \quad (15)$$

$$M_{3A} = \frac{6\pi}{\sqrt{2Q}} (-Y_0 + 2Y_1) + \frac{8}{5} \quad (16)$$

As formas tabulares descritas abaixo foram obtidas por Shiratori e Miyoshi (1992 *apud* Zheng *et al.*, 1996). Por conveniência, a configuração dos parâmetros Y_0 e Y_1 foi definida para uma razão de aspecto $0.2 \leq \frac{a}{c} \leq 1$ e uma razão de profundidade $0.1 \leq \frac{a}{t} \leq 0.8$.

$$Y_0 = B_0 + B_1 \left(\frac{a}{t}\right) + B_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + B_3 \left(\frac{a}{t}\right)^3 + B_4 \left(\frac{a}{t}\right)^4 \quad (17)$$

$$B_0 = 1.041 + 0.016 \left(\frac{a}{c}\right) + 0.186 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 0.111 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (18)$$

$$B_1 = -0.599 + 1.953 \left(\frac{a}{c}\right) - 1.310 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 0.028 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (19)$$

$$B_2 = 4.972 - 13.216 \left(\frac{a}{c}\right) + 6.747 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 1.918 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (20)$$

$$B_3 = -1.293 + 1.857 \left(\frac{a}{c}\right) + 12.906 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 13.441 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (21)$$

$$B_4 = -0.572 + 3.073 \left(\frac{a}{c}\right) - 10.797 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 8.393 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (22)$$

A equação (17) descreve parametrizações considerando uma distribuição uniforme de carregamento aplicado.

$$Y_1 = A_0 + A_1 \left(\frac{a}{t}\right) + A_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + A_3 \left(\frac{a}{t}\right)^3 + A_4 \left(\frac{a}{t}\right)^4 \quad (23)$$

$$A_0 = 0.500 - 0.323 \left(\frac{a}{c}\right) + 0.213 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 0.052 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (24)$$

$$A_1 = -0.507 + 1.373 \left(\frac{a}{c}\right) - 0.740 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 0.184 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (25)$$

$$A_2 = 3.468 - 9.028 \left(\frac{a}{c}\right) + 6.349 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 0.135 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (26)$$

$$A_3 = -1.359 + 1.731 \left(\frac{a}{c}\right) + 5.357 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 6.370 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (27)$$

$$A_4 = -0.162 + 2.977 \left(\frac{a}{c}\right) - 8.250 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 5.804 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (28)$$

- Ponto superficial B:

$$M_{1B} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(-3F_0 + 5F_1) - 8 \quad (29)$$

$$M_{2B} = \frac{15\pi}{\sqrt{Q}}(2F_0 - 3F_1) + 15 \quad (30)$$

$$M_{3B} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(-7F_0 + 10F_1) - 8 \quad (31)$$

As formas tabulares descritas abaixo foram também obtidas por Shiratori e Miyoshi (1992 *apud* Zheng *et al.*, 1996). Por conveniência, a configuração dos parâmetros F_0 e F_1 foi definida para uma razão de aspecto $0.2 \leq \frac{a}{c} \leq 1$ e uma razão de profundidade $0.1 \leq \frac{a}{t} \leq 0.8$.

$$F_0 = \left[C_0 + C_1 \left(\frac{a}{t}\right) + C_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + C_3 \left(\frac{a}{t}\right)^3 + C_4 \left(\frac{a}{t}\right)^4 \right] \frac{a}{c} \quad (32)$$

$$C_0 = 3.340 - 4.495 \left(\frac{a}{c}\right) + 3.016 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 0.7278 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (33)$$

$$C_1 = 0.2318 - 0.2261 \left(\frac{a}{c}\right) - 1.658 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 1.504 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (34)$$

$$C_2 = 22.95 - 100.9 \left(\frac{a}{c}\right) + 152.2 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 72.92 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (35)$$

$$C_3 = -39.16 + 194.1 \left(\frac{a}{c}\right) - 302.0 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 145.9 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (36)$$

$$C_4 = 30.80 - 142.9 \left(\frac{a}{c}\right) + 212.6 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 99.92 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (37)$$

$$F_1 = \left[D_0 + D_1 \left(\frac{a}{t}\right) + D_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + D_3 \left(\frac{a}{t}\right)^3 + D_4 \left(\frac{a}{t}\right)^4 \right] \frac{a}{c} \quad (38)$$

$$D_0 = 2.831 - 3.840 \left(\frac{a}{c}\right) + 2.477 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 0.511 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (39)$$

$$D_1 = 4.600 - 20.498 \left(\frac{a}{c}\right) + 29.001 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 13.226 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (40)$$

$$D_2 = -4.019 + 15.057 \left(\frac{a}{c}\right) - 12.624 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 2.677 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (41)$$

$$D_3 = 9.682 - 15.932 \left(\frac{a}{c}\right) - 8.848 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 13.910 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (42)$$

$$D_4 = -1.141 - 9.176 \left(\frac{a}{c}\right) + 30.228 \left(\frac{a}{c}\right)^2 - 19.195 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \quad (43)$$

2.4.2.2 Equações de Raju e Newman

Raju e Newman (1981) obtiveram os fatores de intensidade de tensão ao longo da frente da trinca, com geometria quarto-elíptica da seguinte forma:

$$K_I = \sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F\left(\frac{a}{t}, \frac{a}{c}, \frac{c}{W}, \theta\right) \quad (44)$$

onde:

σ : Tensão aplicada

a : parâmetro da trinca, profundidade

Q : Fator de forma da trinca

t : Espessura da placa

c : parâmetro da trinca, comprimento

W : Comprimento da placa

F : Parâmetro de correção geométrico específico para cada trinca

θ : Ângulo da ponta da trinca

O fator de forma Q é dado pela equação (10).

2.4.2.3 Equações da Norma BS 7910

A norma BS 7910 (2013) estabelece critérios e intervalos de interesse para obtenção dos FIT a partir das equações clássicas de Raju e Newman (1981). A norma possui sua própria equação para o cálculo de K_I , atribuindo valores já conhecidos com outras variáveis, mas, o princípio é o mesmo da equação de K_I clássica.

O fator de intensidade de tensões é definido como segue:

$$K_I = (Y\sigma)\sqrt{\pi a} \quad (45)$$

onde $(Y\sigma)$ é um fator de correção que depende das geometrias da trinca e da placa, como também da tensão de carregamento máxima.

$$Y\sigma = M f_W M_m \sigma_{max} \quad (46)$$

onde M depende das condições de carregamento ($M = 1$ para carregamento uniforme). σ_{max} é máxima tensão de carregamento atuante na placa de espessura finita no momento da análise. Os fatores f_W e M_m são parâmetros que dependem exclusivamente das condições geométricas da trinca, que, para a presente análise tem geometria quarto-elíptica, e das dimensões da placa de espessura finita. Abaixo segue uma sequência de desmembramentos os quais os parâmetros acima estão em função. Existem equações diferentes dependendo do intervalo de análise desejado para cada razão de aspecto, profundidade e comprimento requeridas, limitadas a valores possíveis de se obter as configurações de curva para trincas de quina.

$$f_W = 1 - 0.2\lambda + 9.4\lambda^2 - 19.4\lambda^3 + 27.1\lambda^4 \quad (47)$$

$$\lambda = \left(\frac{c}{W}\right) \sqrt{\frac{a}{t}} \quad ; \quad \left(\frac{c}{W} \leq 0,5\right) \quad (48)$$

As equações paramétricas abaixo, devem utilizar as razões $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{t}$ e o ângulo θ , dentro dos seguintes intervalos de valores para ter validade: $0.2 \leq \frac{a}{c} \leq 2$; $\frac{a}{t} < 1$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$M_m = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{t}\right)^4 \right] g_1 g_2 f_\theta / \Phi \quad (49)$$

onde Φ é a integral elíptica de 2ª ordem, dada por:

$$\Phi = \left[1 + 1.464 \left(\frac{a}{c} \right)^{1.65} \right]^{0.5} \quad (50)$$

$$\Phi = \left[1 + 1.464 \left(\frac{c}{a} \right)^{1.65} \right]^{0.5} \quad (51)$$

$$M_1 = 1.08 - 0.03 \left(\frac{a}{c} \right) \quad (52)$$

$$M_1 = \left[1.08 - 0.03 \left(\frac{c}{a} \right) \right] \left(\frac{c}{a} \right)^{0.5} \quad (53)$$

$$M_2 = \left(\frac{1.06}{0.3 + \frac{a}{c}} \right) - 0.44 \quad (54)$$

$$M_2 = 0.375 \left(\frac{c}{a} \right)^2 \quad (55)$$

$$M_3 = -0.5 + 0.25 \left(\frac{a}{c} \right) + 14.8 \left(1 - \frac{c}{a} \right)^{15} \quad (56)$$

$$M_3 = -0.25 \left(\frac{c}{a} \right)^2 \quad (57)$$

$$g_1 = 1 + \left[0.08 + 0.4 \left(\frac{a}{t} \right)^2 \right] (1 - \sin\theta)^3 \quad (58)$$

$$g_1 = 1 + \left[0.08 + 0.4 \left(\frac{c}{t} \right)^2 \right] (1 - \sin\theta)^3 \quad (59)$$

$$g_2 = 1 + \left[0.08 + 0.15 \left(\frac{a}{t} \right)^2 \right] (1 - \cos\theta)^3 \quad (60)$$

$$g_2 = 1 + \left[0.08 + 0.15 \left(\frac{c}{t} \right)^2 \right] (1 - \cos\theta)^3 \quad (61)$$

$$f_\theta = \left[\left(\frac{a}{c} \right)^2 (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \right]^{0.25} \quad (62)$$

$$f_{\theta} = \left[\left(\frac{c}{a} \right)^2 (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \right]^{0.25} \quad (63)$$

A equação (50) é válida para $0 \leq \frac{a}{c} \leq 1$, enquanto que a equação (51) é válida para $0.2 \leq \frac{a}{c} \leq 1$. As equações (52), (54), (56), (58), (60) e (62) são válidas para $0.2 \leq \frac{a}{c} \leq 1$, enquanto que (53), (55), (57), (59) e (61) e (63) são válidas para $1 \leq \frac{a}{c} \leq 2$.

2.5 O método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico utilizado para a solução de problemas formulados em termos de equações diferenciais parciais e condições de contorno que pode ser empregado para calcular os FITs de trincas presentes em estruturas de configurações geométricas complexas, para as quais não existem soluções exatas simples.

É um método baseado no conceito de discretização espacial. Consiste na ideia de transformar um problema de ordem complexa, na soma de vários problemas simples e contínuos através da fragmentação em várias partes, onde são interconectados em pontos comuns de dois ou mais elementos através de nós ou pontos nodais (ANJOS, 2005).

Existem inúmeras abordagens de elementos finitos na literatura dependendo da análise que se deseja. É um procedimento que avalia muitas geometrias de processo, um maior número de informações (fluxo do material, distribuição de deformação e tensão, dano, entre outras), e principalmente, rapidez na geração de resultados (SANTOS, 2007).

Os softwares em elementos finitos, normalmente oferecem uma biblioteca de elementos de programa, contendo variados elementos, onde cada qual tem por objetivo representar um comportamento físico da mecânica estrutural (estado plano de tensões e deformações, placas, cascas, membranas, sólidos) (FILHO, 2006).

2.5.1 Método dos elementos finitos na mecânica de fratura

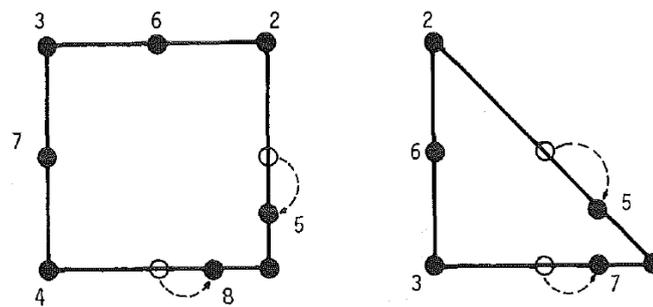
O MEF é umas das ferramentas numéricas mais poderosas na análise de trincas na mecânica de fratura. Sabe-se que este método possui um erro de 5 a 10% para elementos isoparamétricos. Devido a singularidade no campo de tensões, existe uma incerteza nas soluções encontradas nas proximidades na ponta da trinca (SAKAKIBARA, 2008).

Na mecânica de fratura, tenta-se correlacionar previsões analíticas de propagação e falha de trinca com resultados experimentais. Fatores de Intensidade de Tensão são correlacionados para estimar a taxa de crescimento de trinca. O método dos elementos finitos é uma das técnicas mais utilizadas para avaliar o FIT. A região mais importante na modelagem de fratura é a região ao redor da trinca (STAMENKOVIC, 2006).

2.5.1.1 Elementos quarter-point

A necessidade de uma malha refinada de elementos convencionais na vizinhança de regiões de ponta de trincas pode ser superada usando elementos especiais que incorporam ou podem gerar a singularidade de tensão requerida. A precisão e a eficiência alcançadas pelo uso desses elementos podem variar. As expressões matemáticas são frequentemente rigorosas e geralmente compartilham as desvantagens comuns, como a falta de continuidade entre elementos e o termo de deformação constante, programação excessiva e determinações propensas a erros dos FITs. O elemento *quarter-point* (QPE) está livre destes problemas, é mais eficiente e não requer programação adicional. Devido à precisão dos resultados o QPE é preferido em relação a qualquer outro elemento especial ao redor da trinca. A figura 12 ilustra as configurações típicas dos elementos QPE.

Figura 12- Configuração dos elementos QPE e nós em volta da trinca.

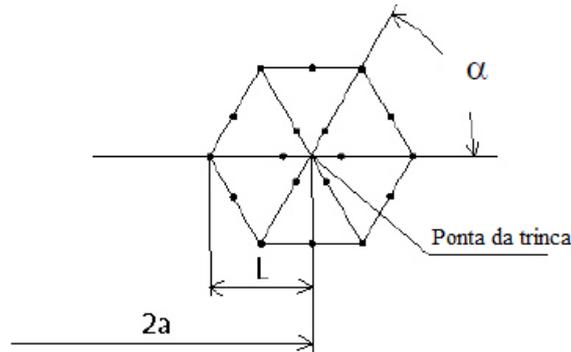


Fonte: Murti (1985).

Conforme pode ser observado na figura 12, os elementos são formados simplesmente colocando os nós do lado do meio adjacentes dos elementos isoparamétricos quadriláteros convencionais perto da ponta da trinca até as posições dos pontos de um quarto a partir do nó da ponta da trinca. O mesmo procedimento foi realizado anos mais tarde com os QPEs triangulares, cuja acurácia eficiência nos resultados mostram-se superiores aos quadriláteros convencionais (MURTI, 1985).

A figura 13 ilustra as configurações típicas de elementos QPEs em volta da ponta da trinca. Devido a singularidade que acontece nesta região, é comum ocorrer uma distorção na malha composta pelos elementos, em que os nós perto da ponta se encontram submetidos a cargas nodais transversais os quais fornecem as soluções aproximadas dos FITs (HENSHELL, 1975).

Figura 13- Elementos triangulares do tipo *quarter-point* em detalhe.



Fonte: Adaptado de Stamenkovic (2006).

O método mais simples e direto para encontrar as soluções dos FITs ao redor da ponta da trinca é conhecido como método de deslocamento de abertura de trinca (CTDO). Desprezando as tensões residuais e termos de ordem superior, os deslocamentos na ponta da trinca podem ser dados por:

$$u = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa + 3) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (64)$$

$$v = \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa - 1) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left((2\kappa + 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (65)$$

$$w = 2 \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (66)$$

Fonte: Anderson (2005).

onde:

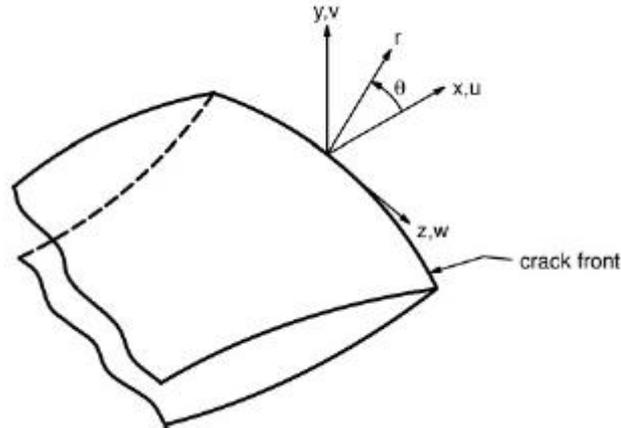
u, v e w os deslocamentos nas direções x, y e z ;

G : módulo de cisalhamento do material;

$\kappa = 3 - 4\nu$ para estado plano de deformação e $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ para estado plano de tensão.

A figura 14 ilustra o sistema de coordenadas cartesiano e tridimensional adotados para o cálculo dos deslocamentos ao redor da frente da trinca.

Figura 14- Sistema de coordenadas na ponta da trinca.



Fonte: ANSYS (1999).

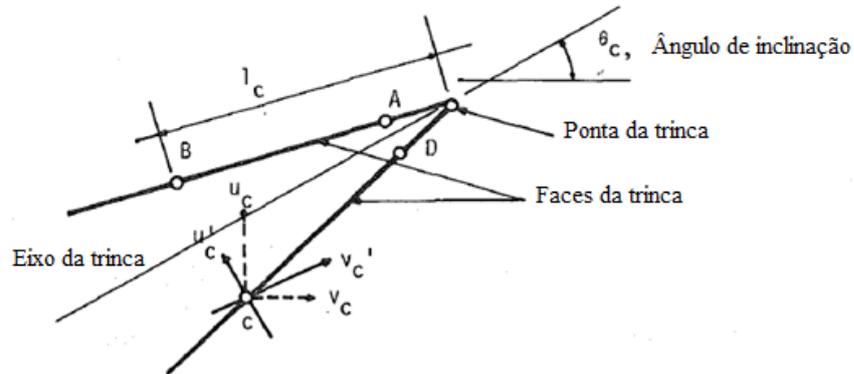
Das equações acima, os FITS ao redor da ponta da trinca podem ser estimados como:

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa+1} v'(r, \pi) \\ \frac{1}{\kappa+1} u'(r, \pi) \\ \frac{1}{\kappa+1} w'(r, \pi) \end{bmatrix} \quad (67)$$

Fonte: Anderson (2005).

Os termos v' , u' e w' são os deslocamentos aproximados na ponta da trinca. Para melhor visualização desses deslocamentos, a figura 15 mostra em detalhes os deslocamentos aproximados calculados.

Figura 15- Parametrização na ponta da trinca.



Fonte: Murti (1985).

A figura acima ilustra o processo de parametrização para a obtenção dos fatores de intensidade de tensão ao redor da ponta da trinca. É tomado um sistema de coordenadas na trinca em que os deslocamentos aproximados são calculados. Sendo:

l_c : Comprimento do elemento na ponta da trinca;

θ_c : Ângulo de inclinação na ponta da trinca.

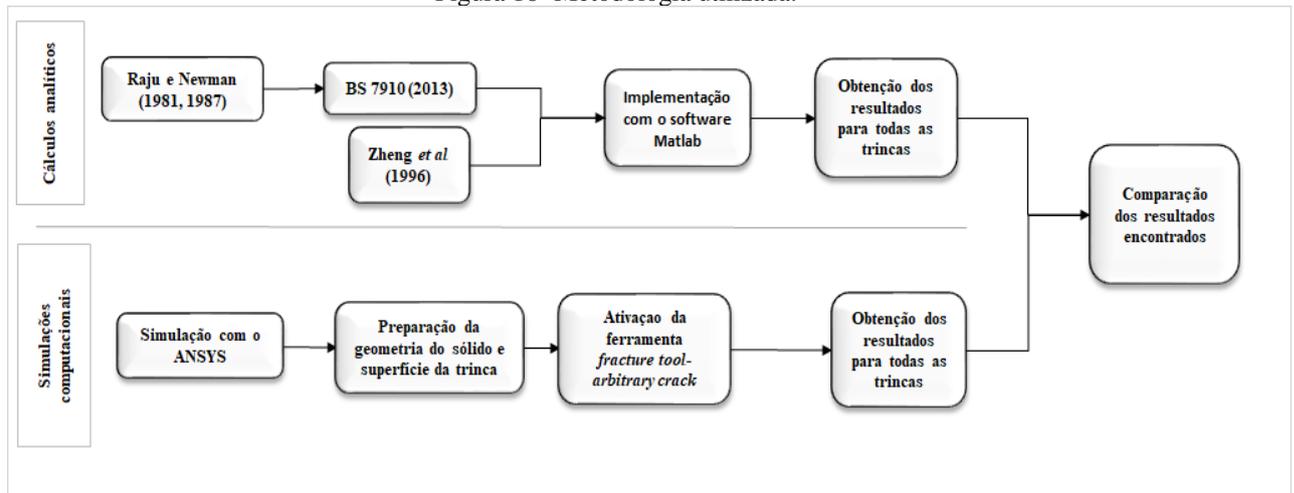
A partir da geometria, os FITS foram encontrados por Willians *et al.* (1957) e a equação abaixo ilustra K_I para o modo I de abertura.

$$K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{l_c}} \frac{G}{(\kappa + 1)} [4(u'_a - u'_d) - (u'_b - u'_c)] \quad (68)$$

3 METODOLOGIA

A figura 16 mostra o fluxograma de processo da metodologia que será empregada para obtenção dos FITS de trincas quarto-elípticas numa placa de dimensões finitas:

Figura 16- Metodologia utilizada.



Fonte: O autor (2019).

Para a presente análise, apenas carregamentos no modo I são de interesse. Os FITs em paredes trincadas com espessuras finitas são muito úteis na mecânica de fratura e em desenvolvimentos de tolerância do dano (TORIBIO *et al*, 2017).

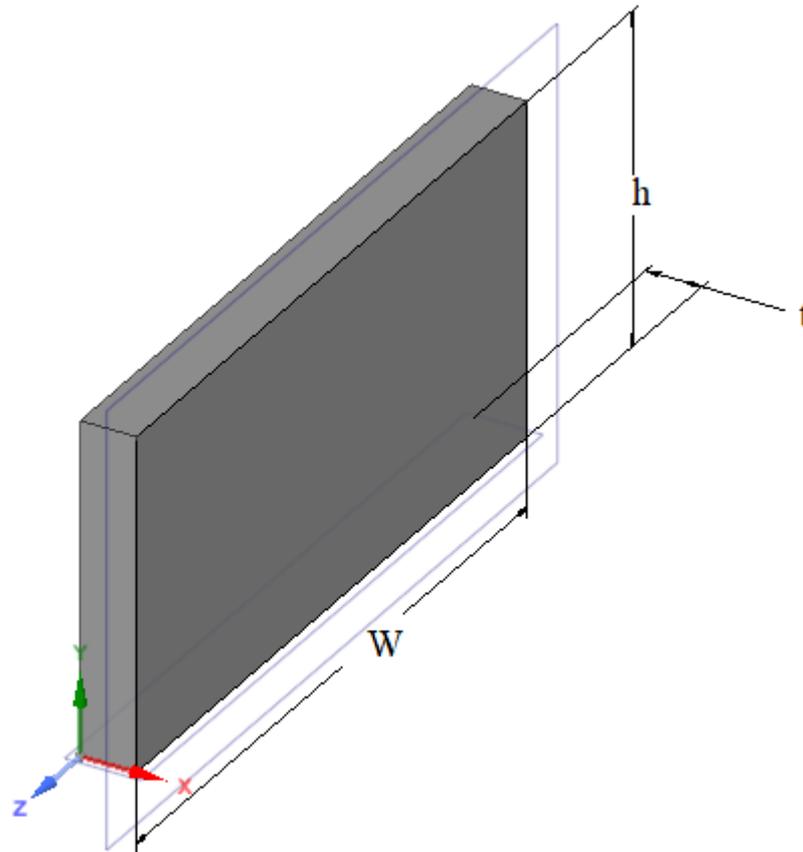
Foram previamente definidos os seguintes passos para obtenção dos resultados:

- Característica geométrica da placa retangular;
- Configuração geométrica da trinca de quina e posição na placa;
- Cargas que serão consideradas para análise analítica e computacional.

Foi escolhido uma razão de comprimento $\frac{c}{W} = 0,25$ tendo em vista a figura 7, já que norma BS 7910 (2013) estabelece a razão $\frac{c}{W} \leq 0,5$. As razões de profundidade e aspecto para a trinca foram definidas sendo $\frac{a}{t}, \frac{a}{c} = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. Mantendo-se a espessura da parede constante, 16 configurações de trinca, e 16 geometrias de placas retangulares foram obtidos. Raju e Newman (1981) observaram que para $\frac{h}{W} > 5$, onde h é a altura da placa retangular, os efeitos dos FITS ao longo da parede da placa são insignificantes, de modo que não há risco de ocorrer propagação instável da trinca. Assim, em toda a análise feita levou-se em consideração as condições críticas para propagação das trincas. Foi considerado $\frac{h}{W} = 0,5$ para que toda a análise tivesse importância. Foi considerado tensão constante $\sigma = 5$ MPa.

As tabelas 1 e 2 caracterizam as dimensões geométricas das trincas e placas retangulares modeladas e simuladas. É importante frisar, que a trinca 1 é exclusiva da placa 1, e assim sucessivamente. A figura 17 ilustra a geometria da placa junto com suas cotas que caracterizam suas dimensões.

Figura 17- Geometria da placa junto com suas cotas.



Fonte: O autor (2019).

Tabela 1- Dimensões das trincas.

Trinca	a (mm)	c (mm)	Trinca	a (mm)	c (mm)
1	100,0	500,0	9	100,0	166,7
2	200,0	1000,0	10	200,0	333,3
3	300,0	1500,0	11	300,0	500,0
4	400,0	2000,0	12	400,0	666,7
5	100,0	250,0	13	100,0	125,0
6	200,0	500,0	14	200,0	250,0
7	300,0	750,0	15	300,0	375,0
8	400,0	1000,0	16	400,0	500,0

Fonte: O autor (2019).

Tabela 2- Dimensões das placas retangulares.

Placa	W (mm)	h (mm)	t (mm)	Placa	W (mm)	h (mm)	t (mm)
1	2000,0	1000,0	500,0	9	666,7	333,3	500,0
2	4000,0	2000,0	500,0	10	1333,3	666,7	500,0
3	6000,0	3000,0	500,0	11	2000,0	1000,0	500,0
4	8000,0	4000,0	500,0	12	2666,7	1333,3	500,0
5	1000,0	500,0	500,0	13	500,0	250,0	500,0
6	2000,0	1000,0	500,0	14	1000,0	500,0	500,0
7	3000,0	1500,0	500,0	15	1500,0	750,0	500,0
8	4000,0	2000,0	500,0	16	2000,0	1000,0	500,0

Fonte: O autor (2019).

É também importante advertir que as dimensões das trincas não são reais pois, a intenção do trabalho é uma comparação dos cálculos analíticos já obtidos na literatura com a implementação da análise por elementos finitos no ANSYS.

3.1 Cálculos analíticos

Os cálculos analíticos utilizando as equações de Raju e Newman (1981), da norma BS 7910 (2013) e de Zheng *et al.* (1996) serão realizados através da implementação de códigos no software MATLAB®. As ferramentas de matrizes e vetores as quais o software fornece, possibilitarão a criação dos gráficos necessários para plotagem das curvas que descrevem o comportamento das trincas, permitindo toda armazenagem de dados, atendendo todas as necessidades do presente trabalho.

3.2 Simulação numérica em software de elementos finitos

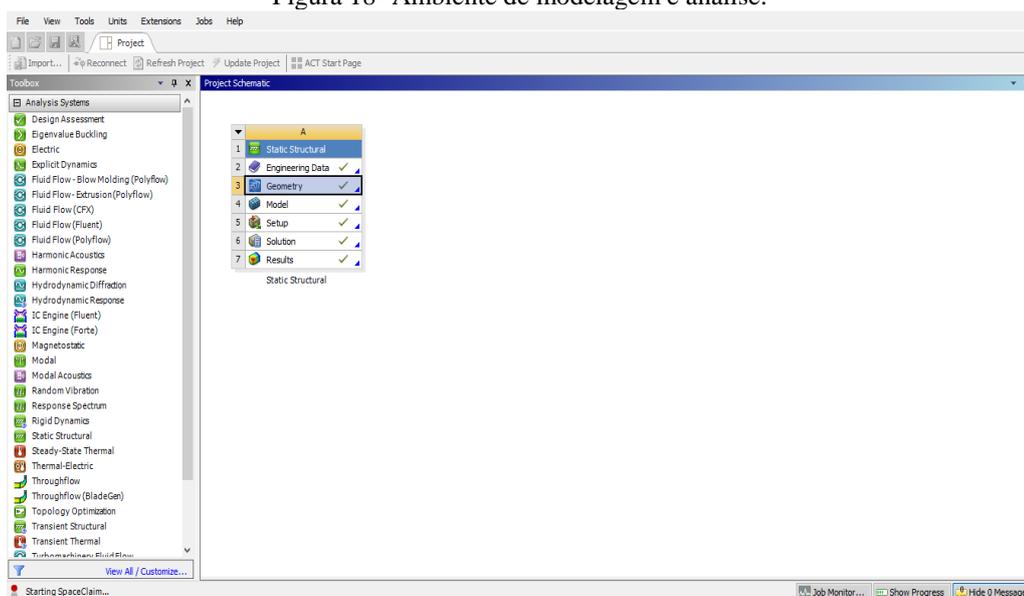
Para a obtenção dos FITs utilizando o MEF, a modelagem da placa de espessura finita onde será implementada toda a geometria da trinca de quina, será feita no software ANSYS e realizada a análise. A seguir, será descrito o procedimento a ser utilizado, desde a construção do modelo através do *SpaceClaim* até toda análise do sistema através da ferramenta *Static Structural*.

Como o software não tem uma ferramenta específica para trincas com geometria quarto de elipse, no procedimento *fracture tool* será utilizada a ferramenta *arbitrary crack* a fim de poder modelar a geometria da trinca no componente estrutural.

A figura 18 mostra o procedimento inicial para construção do modelo que será analisado. Inicialmente, a plataforma *Workbench* do ANSYS é aberta, e na caixa *Toolbox*, a ferramenta de análise *Static Structural* é selecionada. Para a obtenção dos FITS finais, os procedimentos do 1-7 precisarão ser realizados. O procedimento é apresentado a seguir.

- 1) Static Structural: A ferramenta de trabalho foi selecionada;
- 2) Engineering Data: Aqui as propriedades do material da peça são selecionadas;
- 3) Geometry: É aberto o *SpaceClaim* e toda modelagem da peça e da trinca são feitas;
- 4) Model: Nesta etapa é iniciada o procedimento de inserção da malha da placa e da trinca, sistema de coordenadas, condições de contorno;
- 5) Setup: Nesta etapa é inserida quais os parâmetros que se deseja analisar;
- 6) Solution: Nesta etapa é feita a análise e aquisição de dados;
- 7) Results: Os resultados são mostrados na tela.

Figura 18- Ambiente de modelagem e análise.



Fonte: O autor (2019).

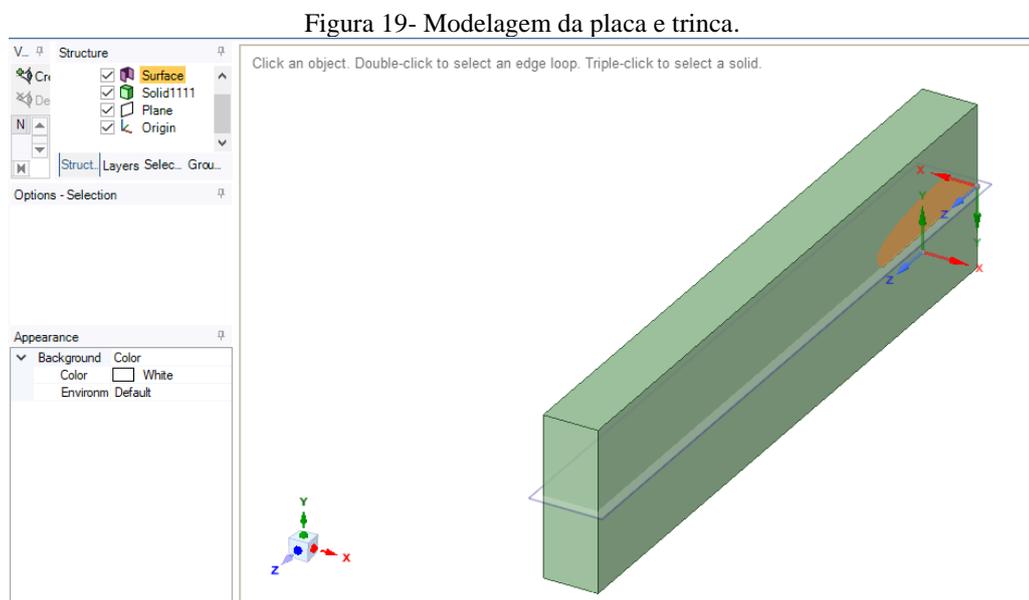
As equações de Zheng *et al* (1996), Raju & Newman (1981) e as contidas na norma BS (2013) não utilizam propriedades de material para análise dos FITs, visto que apenas os parâmetros geométricos da trinca e placa interessam. Também não existe nenhuma referência na literatura sobre propriedades de material e sua influência na obtenção dos FITs. O material adotado na presente análise feita foi o aço estrutural, material padrão do ANSYS. A tabela 3 descreve as propriedades do aço.

Tabela 3- Propriedades do aço adotado nas simulações.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Módulo de Young	E	200	GPa
Módulo de cisalhamento	G	76,9	GPa
Módulo volumétrico	K	166,67	GPa
Limite de escoamento a tração	σ_{Ys}	250	MPa
Limite de escoamento em compressão	σ_{Ys}^c	250	MPa
Limite de resistência à tração	σ_U	460	MPa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3	---

Fonte: O autor (2019).

Seguindo cada passo do procedimento, a próxima etapa é a modelagem do sistema. A figura 19 ilustra a placa e a trinca modeladas. É importante destacar que a trinca aqui é representada como uma superfície.



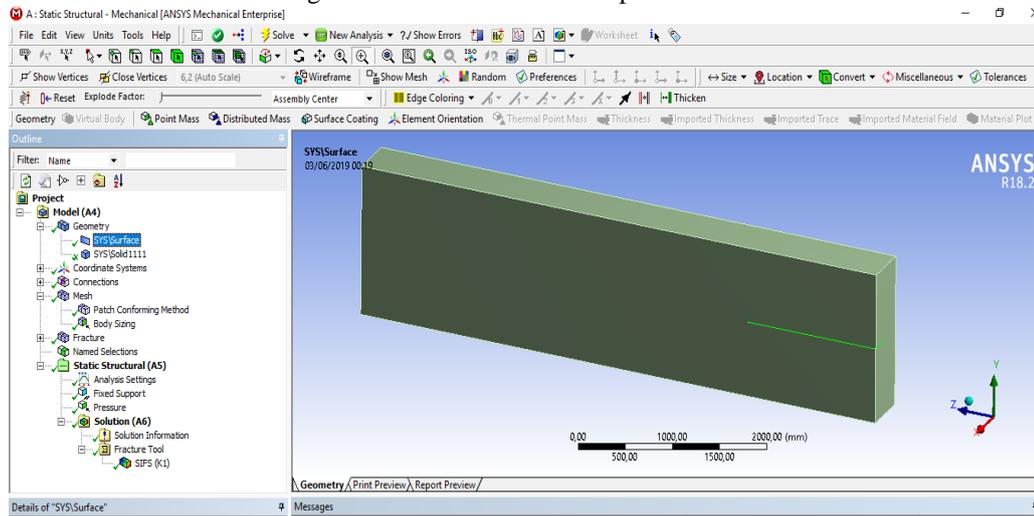
Fonte: O autor (2019).

Como se pode observar, é traçado um plano médio para que a trinca seja construída no meio da placa, da mesma forma como foram inseridas as trincas no trabalho de Zheng *et al.* (1996). Também foi definido um sistema de coordenadas adequado com origem no centro da elipse, estando a sentido positivo do eixo x no sentido de abertura da trinca, e o sentido positivo do eixo z no sentido do comprimento da trinca. Este sistema de coordenadas é de grande importância para que uma simulação correta seja possível.

O próximo passo é a construção da malha, e para isso, uma nova interface de análise é aberta, conforme mostrado nas figuras 20 a 24. Na figura 20, é apresentada a interface em que a análise por elementos finitos irá ocorrer. Todas as condições de malha da placa, quanto da

trinca são realizadas, onde as condições do método da malha e refinamento para melhor aproximação dos valores reais são de extrema importância.

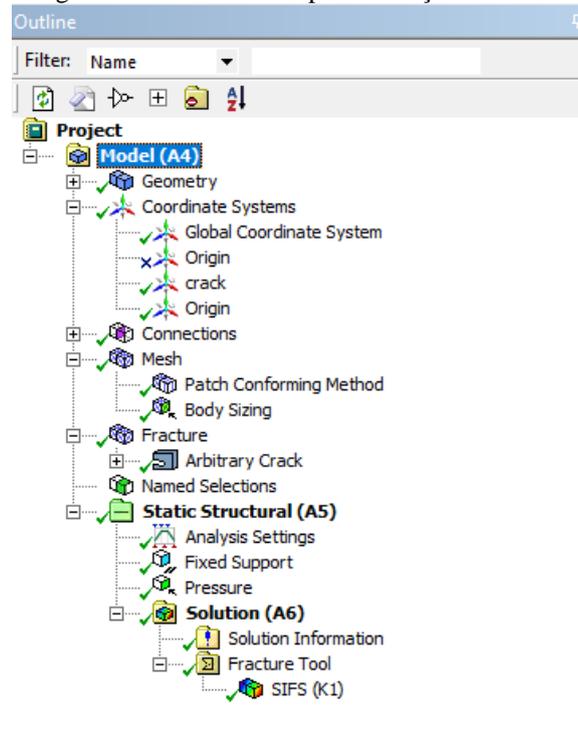
Figura 20- Interface de análise para a trinca.



Fonte: O autor (2019).

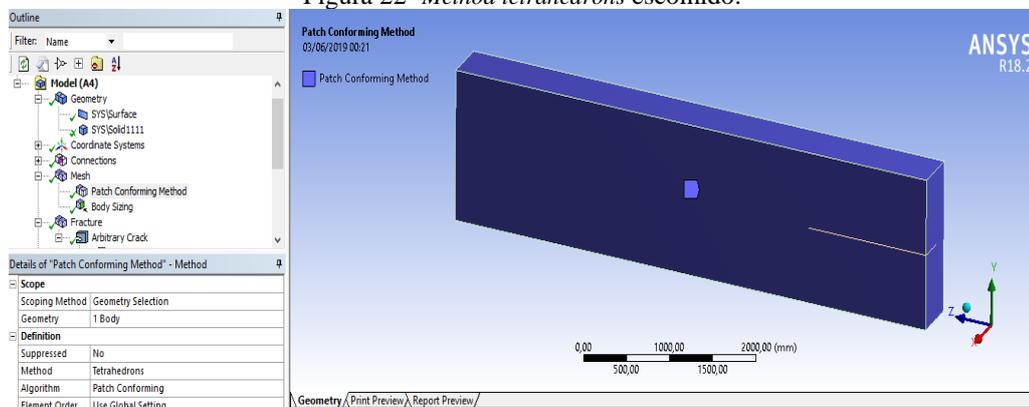
A figura 21 descreve as etapas para a construção do modelo em elementos finitos. Inicialmente, a malha do sistema é criada e um método de análise é escolhido (*Patch Conforming Method*), assim como o tamanho da malha do corpo (*Sizing*), vale ressaltar que quanto menor for o tamanho do elemento, e, portanto, maior sua quantidade, o corpo em análise terá um maior número de *nós*, a malha será mais refinada e os FITs obtidos serão mais próximos dos FITs calculados analiticamente, pois à medida que mais *nós* são acrescentados na discretização do corpo sólido, mais iterações numéricas são feitas, o que permite que os valores encontrados via simulação computacional converjam para cada vez mais perto dos valores exatos.

Figura 21- Procedimento para obtenção dos FITs.



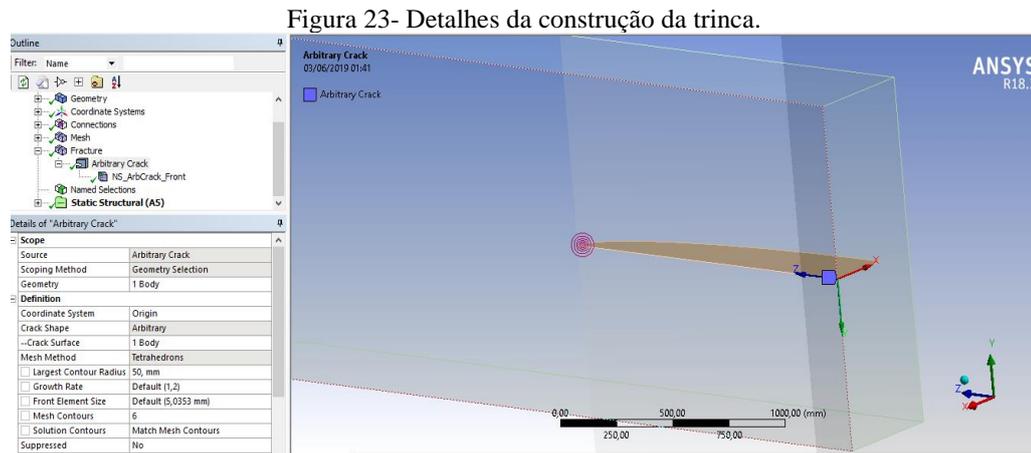
Fonte: O autor (2019).

Na figura 22, a opção *method tetrahedrons* é selecionada. Para que seja possível criar a malha da trinca na estrutura, somente esse método é aceito pelo programa. Foram testados todos os elementos que a biblioteca do ANSYS fornece para construção da malha do sólido e da trinca, e somente os elementos tetraedros aceitaram a convergência da malha da trinca, ou seja, este elemento permite a singularidade na ponta da trinca, logo, é o único método possível para o cálculo dos FITs.

Figura 22- *Method tetrahedrons* escolhido.

Fonte: O autor (2019).

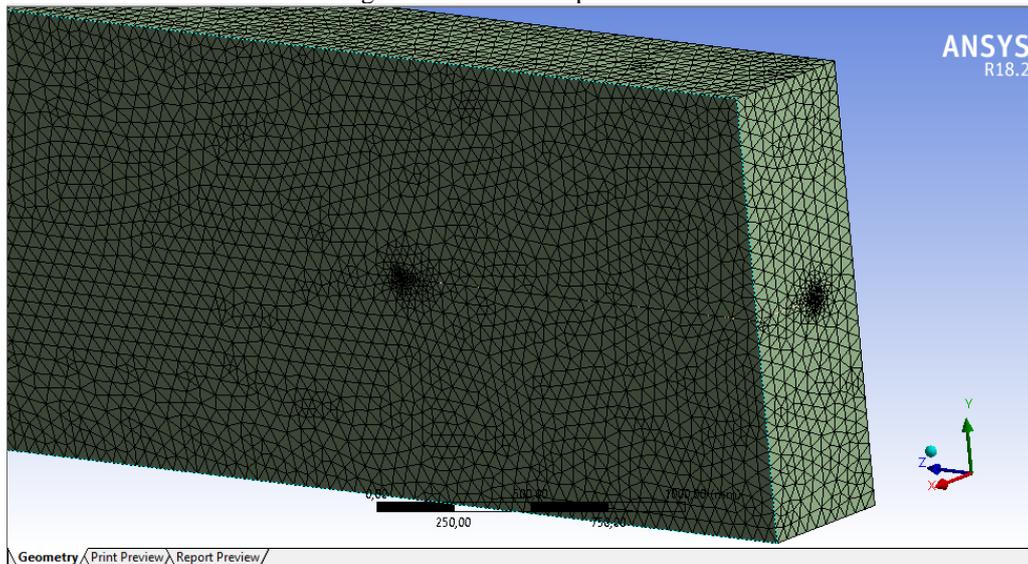
Em seguida, a ferramenta *Fracture* é selecionada e o modo *Arbitrary Crack* é escolhido. O modo trinca arbitrária trabalha com trincas de superfície, por esse motivo que a geometria da trinca foi construída como uma superfície anteriormente. A figura 23 a seguir ilustra em detalhe a construção da trinca arbitrária.



Fonte: O autor (2019).

Conforme pode ser visto na figura, o sistema de coordenadas criado anteriormente é de extrema importância, pois é ele que define a intersecção do corpo da trinca com o modelo do *arbitrary crack* para a construção da região de contorno que determinará os FITs. Os círculos em rosa na figura são os contornos que encontrarão as soluções para os FITs, de modo que quanto menor o raio do contorno, melhor a solução. Quanto menor o raio do contorno mais próximo do valor real do FIT, pois cada círculo irá percorrer toda trinca de $\theta=0$ a $\theta=\frac{\pi}{2}$, e quanto mais próximo da singularidade da ponta da trinca, ou seja, raios de contornos cada vez menores, mais exato serão os FITs. Inicialmente, a placa é selecionada, seguida com as definições do sistema de coordenada da trinca e superfície da trinca. As definições da malha da trinca são determinadas, principalmente, pelo tamanho do contorno e pelo número de contornos. Quanto maior o número de contornos, mais iterações são realizadas e mais soluções de FIT são encontradas. A figura 24 mostra a malha do sistema.

Figura 24- Malhas da placa e da trinca.

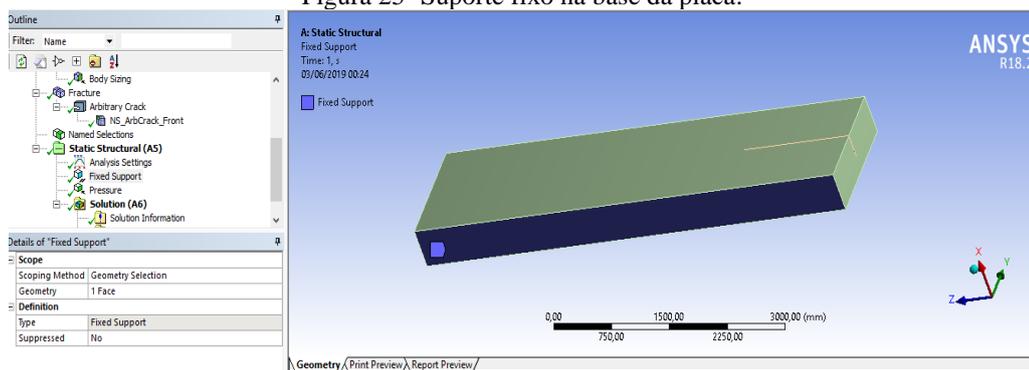


Fonte: O autor (2019).

O *method tetrahedrons* trabalha com elementos finitos tetraedros ao longo de todo o corpo da placa e da trinca. É importante observar que a região em volta da trinca criada possui elementos menores, pois é necessário um refinamento maior para que seja possível a convergência dos FITs.

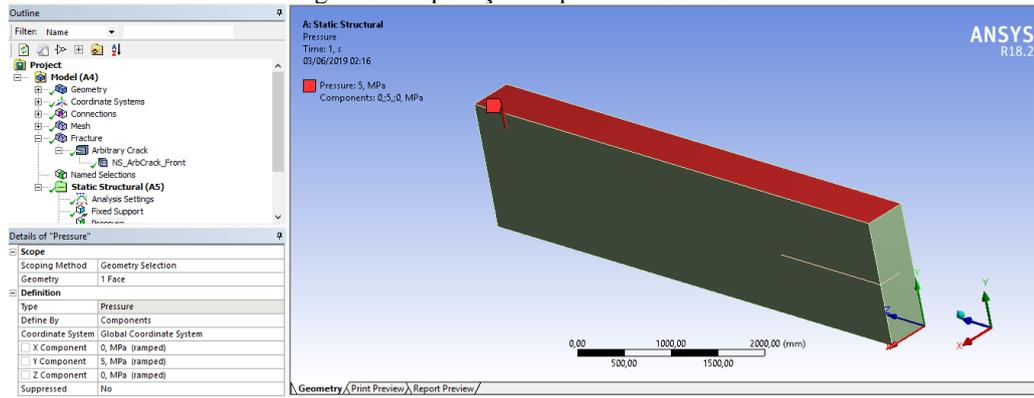
Determinadas estas etapas, as condições de contorno do sistema são necessárias para que sejam colocados um sistema de apoio e sistema de carregamento no sistema. As figuras a seguir mostram em detalhes as condições determinadas.

Figura 25- Suporte fixo na base da placa.



Fonte: O autor (2019).

Figura 26- Aplicação de pressão uniforme.



Fonte: O autor (2019).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente, os métodos analíticos serão validados através de comparação com resultados já publicados na literatura. Em sequência, resultados específicos serão obtidos para os cálculos analíticos e computacionais, e correlações entre os mesmos serão feitas seguindo a metodologia adotada.

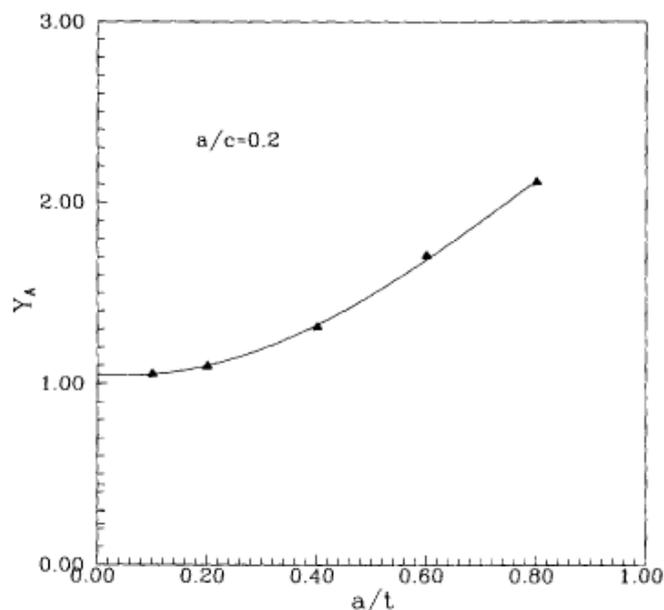
4.1 Validação dos métodos analíticos

Inicialmente foi feita uma validação dos métodos analíticos utilizados afim de comprovar a veracidade dos resultados encontrados.

4.1.1 Equações de Zheng

A figura 27 mostra os FITs normalizados para o ponto A da trinca, isto é, $Y_A = \frac{K_{IA}}{\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}}$, que são os FITs adimensionais para A. Y_A define a trajetória contínua para cada razão de aspecto e profundidade definidos. A figura é um resultado original dos autores Zheng *et al.* (1996).

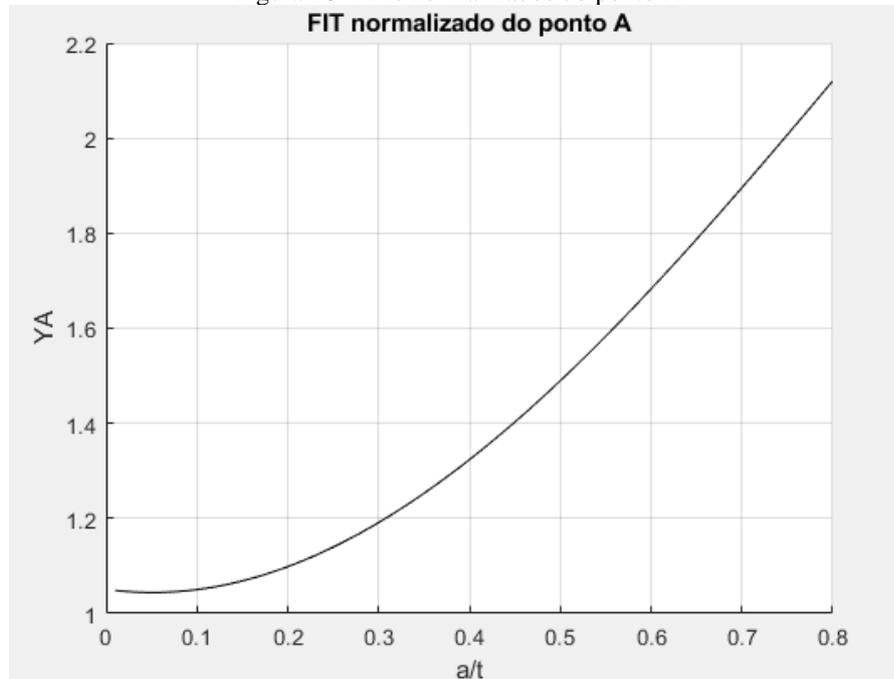
Figura 27- FITs normalizados do ponto A.



Fonte: Adaptado de Zheng *et al* (1996).

A figura 28 foi obtida através da implementação das equações analíticas de Zheng *et al.*, (1996) no MATLAB para $\frac{a}{c} = 0.2$. O ponto A foi considerado como sendo aquele em que o ângulo de ponta da trinca $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Figura 28- FITs normalizados do ponto A

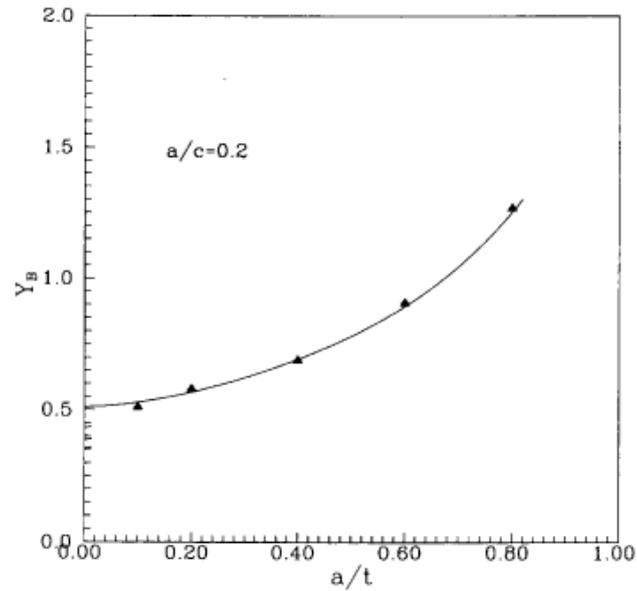


Fonte: O autor (2019).

Foi encontrado um erro de 2.3% entre as curvas das figuras 27 e 28, validando a implementação das equações no MATLAB, e conseqüentemente, as análises que serão feitas com configurações específicas.

Da mesma forma, foram obtidos os FITs normalizados para o ponto superficial B, com $Y_B = \frac{K_{IB}}{\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}}$, conforme ilustrado na figura 29, adaptado do original Zheng *et al* (1996).

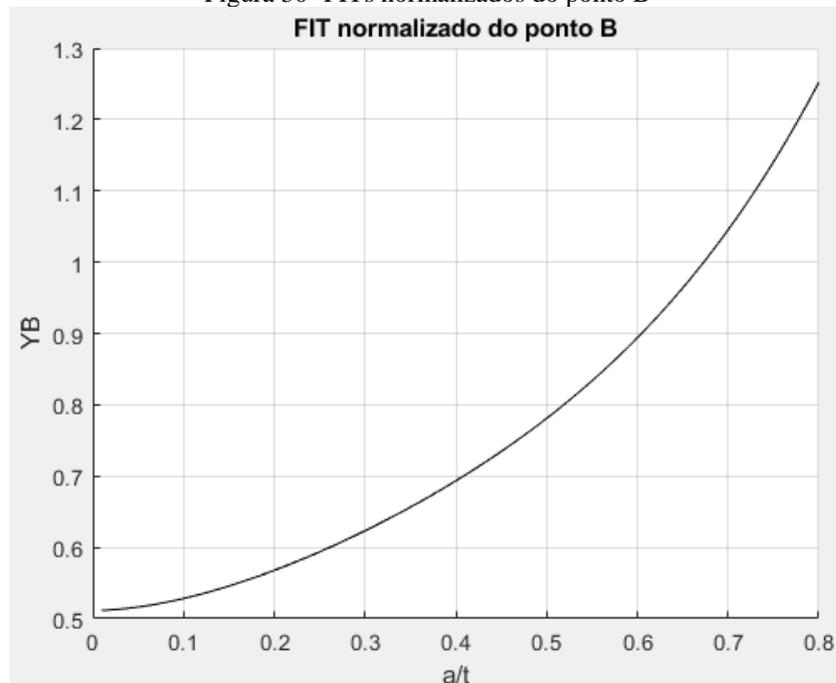
Figura 29- FITs normalizados do ponto B.



Fonte: Adaptado de Zheng *et al* (1996).

A figura 30 foi obtida através da implementação das equações da literatura no MATLAB para $\frac{a}{c}=0.2$. O ponto B foi considerado como sendo aquele em que o ângulo de ponta da trinca $\theta = 0$.

Figura 30- FITs normalizados do ponto B



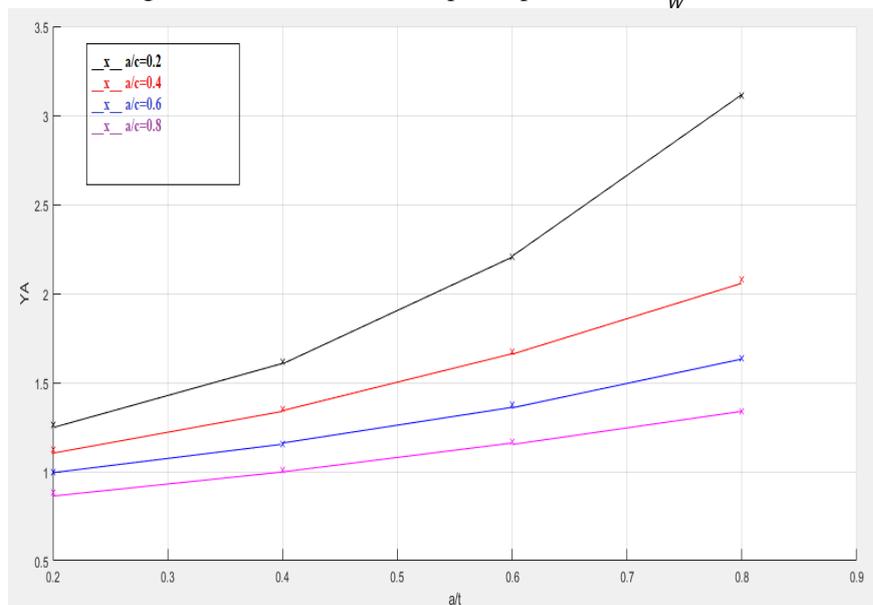
Fonte: O autor (2019).

É notável das figuras o efeito de transição à medida em que a razão de aspecto $\frac{a}{c}$ e razão de profundidade $\frac{a}{t}$ variam ao longo das inúmeras trincas representadas pelas curvas contínuas. As curvas das figuras 28 e 30 foram validadas comparando os resultados obtidos por Zheng *et al* (1996), em que o erro percentual foi considerado desprezível para o ponto B, podendo as curvas das figuras 29 e 30 serem consideradas idênticas.

4.1.2 Equações de Raju e Newman (1981) e da norma BS 7910 (2013)

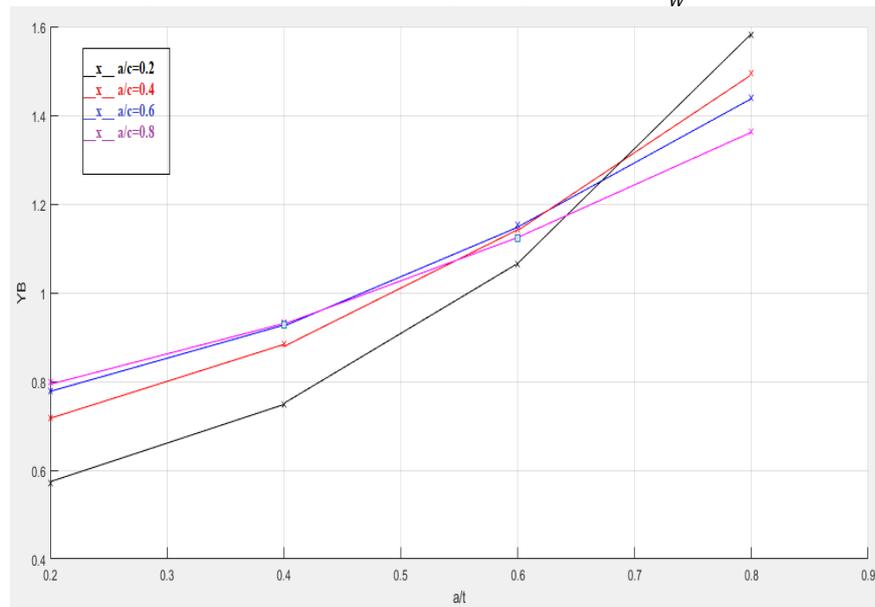
As figuras 31 e 32 descrevem o comportamento das curvas obtidas usando as equações da norma BS (2013), semelhante ao das curvas do trabalho de Zheng *et al.*, (1996). Da mesma forma, foram encontrados os fatores normalizados através da equação $Y = \frac{K1}{\sigma\sqrt{\pi a}}$, que são os FITs adimensionais para os pontos A e B.

Figura 31- FITs normalizados para o ponto A com $\frac{c}{w} = 0.25$.



Fonte: O autor (2019).

Figura 32- FITs normalizados para o ponto B com $\frac{c}{w} = 0.25$.



Fonte: O autor (2019).

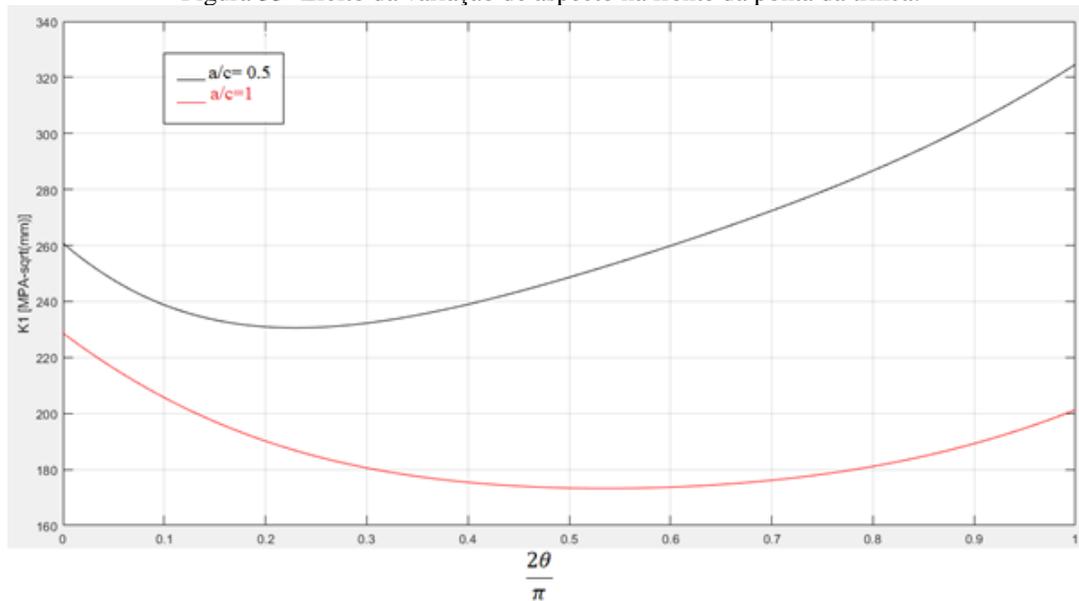
A semelhança entre as curvas obtidas, com as do trabalho de Zheng *et al.*, (1996) é notável, ocorrendo diferenças pontuais devido ao fato de que as equações paramétricas da norma BS (2013) incluem a razão $\frac{c}{w}$ para obtenção dos FITs, o que não acontece com as equações de Zheng. O efeito de transição mostra uma maior influência nos FITs, visto que o comprimento da placa cobra relevância para que os FITs obtidos tenham importância de análise. É importante destacar que cada Y_A ou Y_B representa uma trinca com diferentes $\frac{a}{c}$ e $\frac{a}{t}$.

As curvas das figuras 31 e 32 são validadas com as equações da norma BS 7910 (2013), a qual estabelece intervalos para as razões de profundidade, aspecto e comprimento limitados, que foram bem definidas na seção 2.4.2.3.

4.1.3 Efeito da variação de aspecto na frente da ponta da trinca

Um fenômeno importante que acontece com a variação das razões de aspecto e profundidade é a influência direta desta para a transição do ponto da frente da trinca. A figura 33 é resultado das variações na razão de aspecto deixando constante a razão de profundidade. Para $\frac{a}{c} = 0.5$, o ponto crítico da trinca se encontra em $\frac{2\theta}{\pi} = 1$, porém para $\frac{a}{c} = 1$ o ponto crítico da trinca se encontra em $\frac{2\theta}{\pi} = 0$. Esses valores nos mostram que os FITs ao longo da frente da trinca podem ter seus valores máximos tanto no ponto superficial B ($\theta = 0$) como no ponto mais profundo A ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Figura 33- Efeito da variação de aspecto na frente da ponta da trinca.



Fonte: O autor (2019).

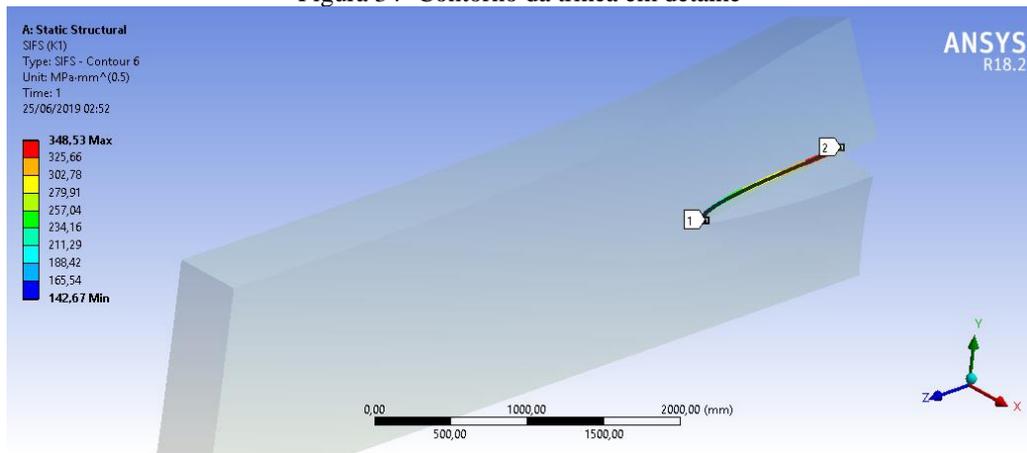
Vale notar que as curvas acima estão em função da coordenada angular $\frac{2\theta}{\pi}$, de modo que diferente das curvas Y_A e Y_B das figuras 28 e 30, as quais representam inúmeras trincas, cada curva acima representa apenas uma trinca com uma razão de aspecto e uma razão de profundidade.

4.2 Resultados específicos

As simulações realizadas no ANSYS foram obtidas seguindo a metodologia adotada. A placa com a trinca de quina foi modelada utilizando elementos tetraédricos de 943.785 nós e 684.376 elementos para uma malha de elementos finitos bem refinada. Na região à frente da ponta da trinca foram criados seis contornos circunferenciais com razão de contorno variando de 50 mm a 150 mm, com o primeiro contorno composto por 627 elementos *quarter-point*. As condições de contorno foram bem descritas na metodologia na seção 3.2.

A partir da ferramenta *fracture tool*, a figura 34 a seguir mostra em detalhes todo o contorno da trinca 3.

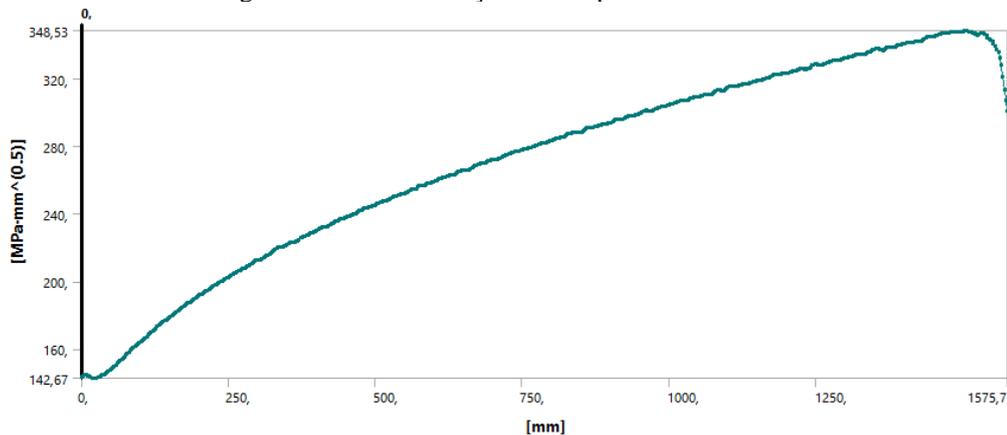
Figura 34- Contorno da trinca em detalhe



Fonte: O autor (2019).

Os pontos 1 e 2 da figura 34 representam, respectivamente, o ponto inicial e final de abertura da trinca, sendo $\theta = 0$ no ponto 1 com comprimento zero da trinca, e $\theta = \frac{\pi}{2}$ no ponto 2, com comprimento final da trinca. Para esse caso particular, os valores máximos de K_I se encontram no ponto 2, porém dependendo da posição da trinca na placa, orientações diferentes podem inverter a trajetória de abertura da trinca. Os FITs da trinca 3 são mostrados na figura 35 em detalhe.

Figura 35- FITs em função do comprimento da trinca.



Fonte: O autor (2019).

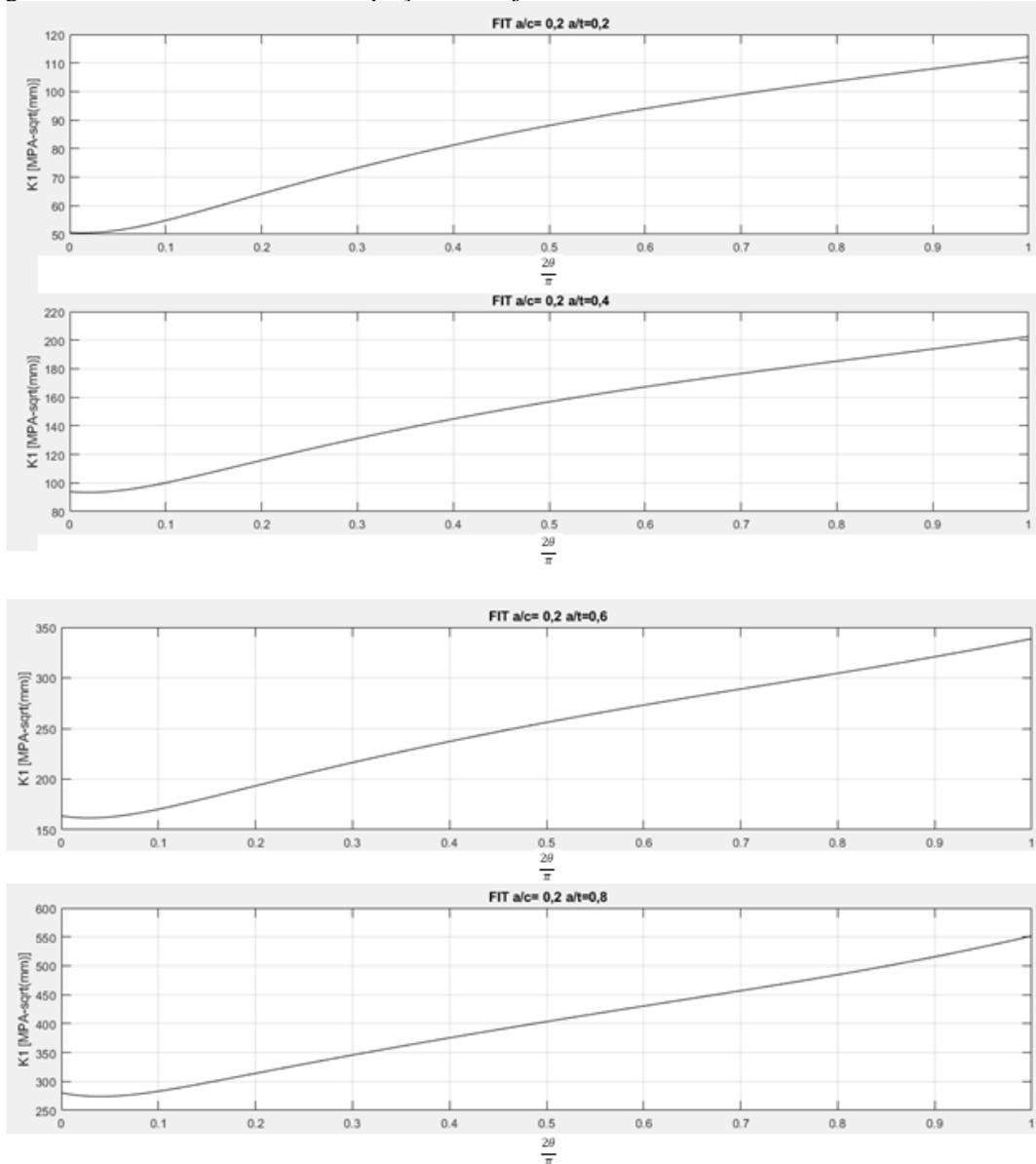
Conforme pode ser visto, diferentemente do método analítico implementado no MATLAB em que os FITs são descritos em função da coordenada angular, o método numérico por elementos finitos do ANSYS calcula os FITs em função do comprimento da trinca.

A seguir, será mostrado os resultados específicos encontrados para as trincas 1-16 pelos métodos analíticos e computacionais.

4.2.1 Equações de Raju e Newman e da norma BS 7910

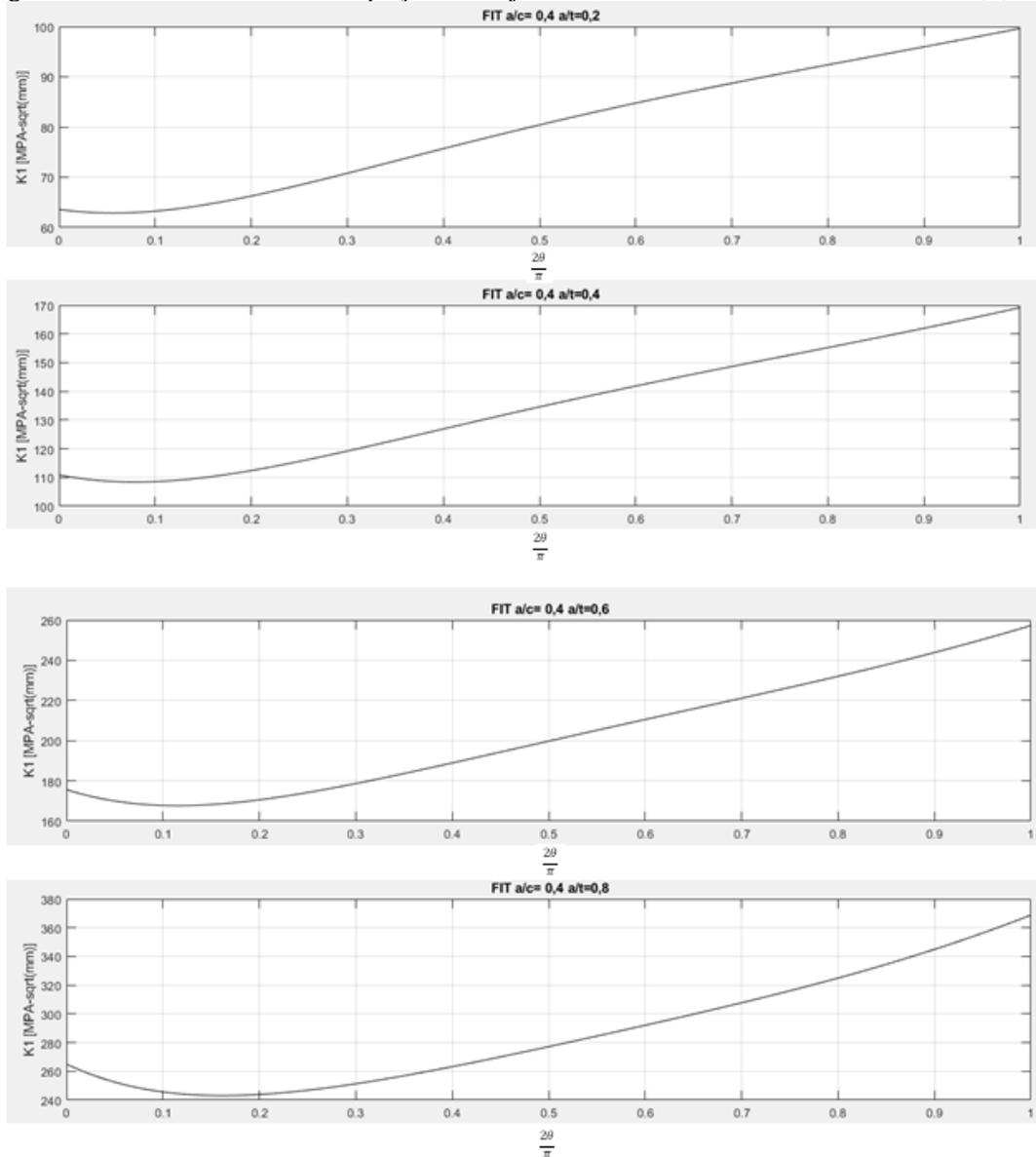
As figuras 36 a 39 foram obtidas utilizando as equações da norma BS 7910 (2013), com os limites de razões de aspecto e profundidade definidos pela mesma e considerando $\frac{c}{W} = 0.25$. As curvas foram plotadas em função da coordenada angular $\frac{2\theta}{\pi}$ utilizando o MATLAB.

Figura 36- FITs calculados com as equações de Raju e Newman e da norma BS 7910. Trincas 1,2,3 e 4.



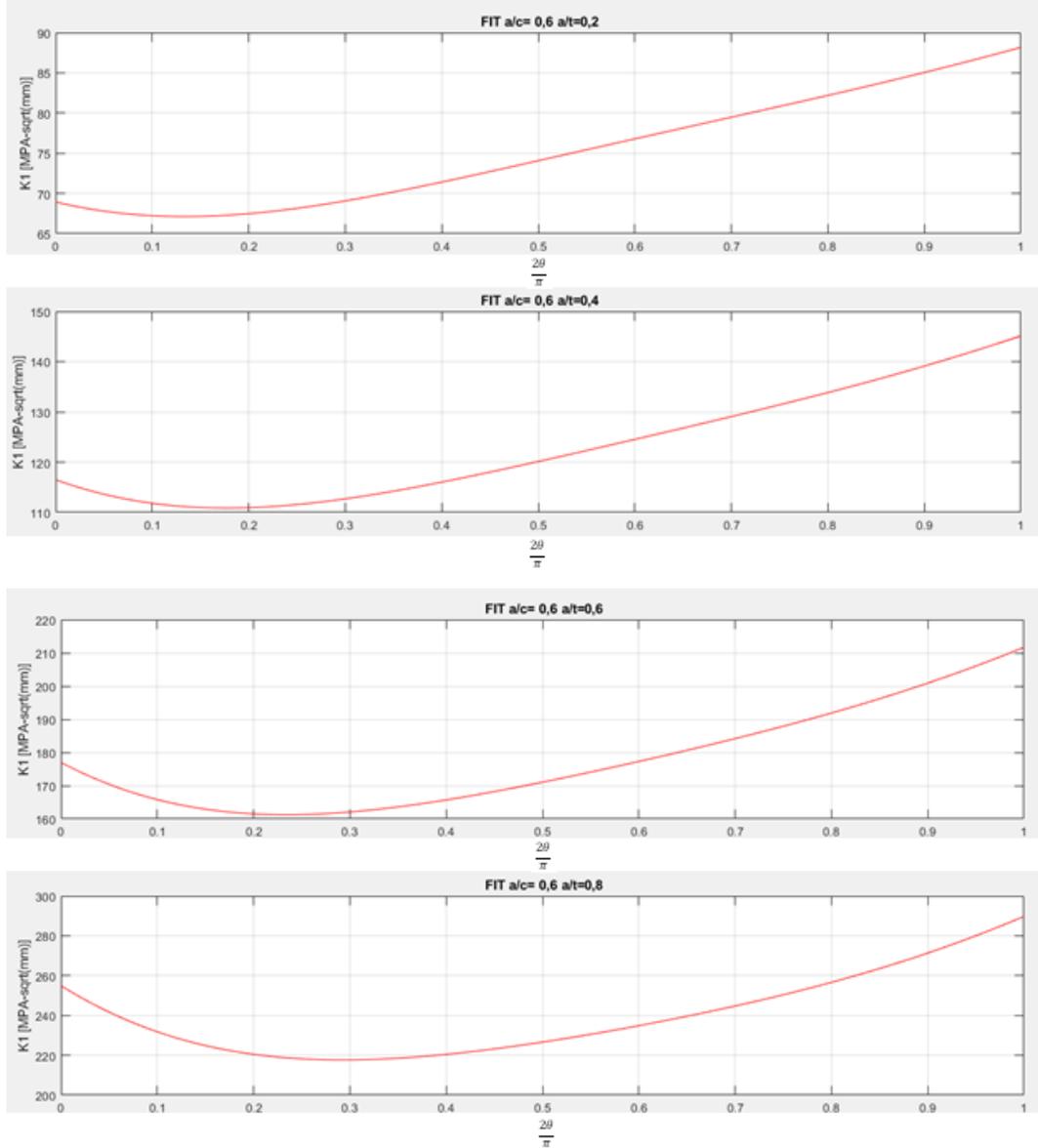
Fonte: O autor (2019).

Figura 37-FITs calculados com as equações de Raju e Newman e da norma BS 7910. Trincas 5,6,7 e 8.



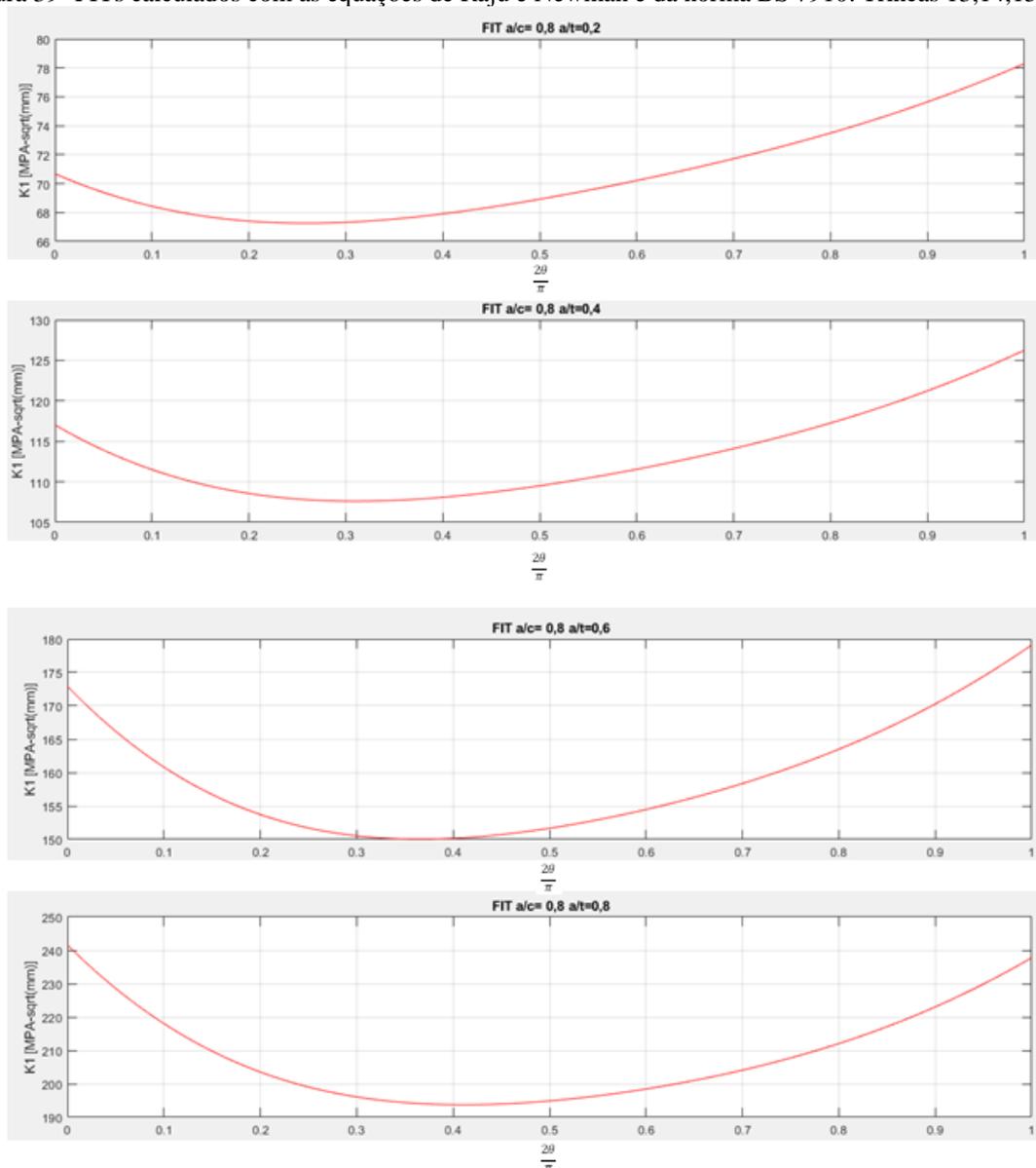
Fonte: O autor (2019).

Figura 38- FITs calculados com as equações de Raju e Newman e da norma BS 7910. Trincas 9,10,11 e 12.



Fonte: O autor (2019).

Figura 39- FITs calculados com as equações de Raju e Newman e da norma BS 7910. Trincas 13,14,15 e 16.



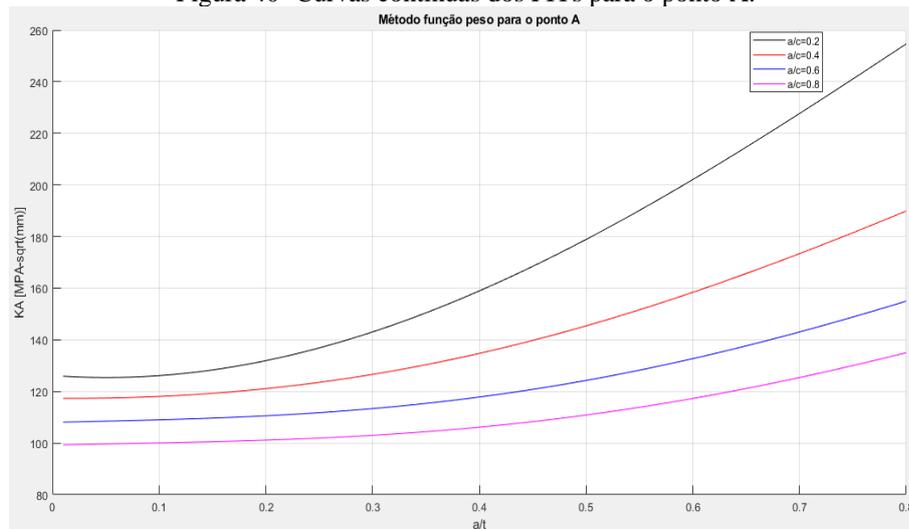
Fonte: O autor (2019).

As curvas encontradas mostram os FITs variando com a coordenada angular. As equações contidas na norma BS (2013) não levam em consideração a orientação da frente da trinca de modo que para efeito de cálculo, com exceção da trinca 16, a qual possui ponto máximo em $\theta = 0$, todas as outras trincas encontradas possuem K_I máximo em $\theta = \frac{\pi}{2}$, o que não é verdade, visto que a orientação da trinca muda conforme muito bem descrito na seção 4.1.3. Não foram encontrados na literatura estudada dados que corroborem para o entendimento o motivo pelo qual a trinca 16 apresentou inversão em sua orientação, mas pode-se afirmar que as razões $\frac{a}{c}$ e $\frac{a}{t}$ possuem influência direta para este fenômeno.

4.2.2 Equações de Zheng

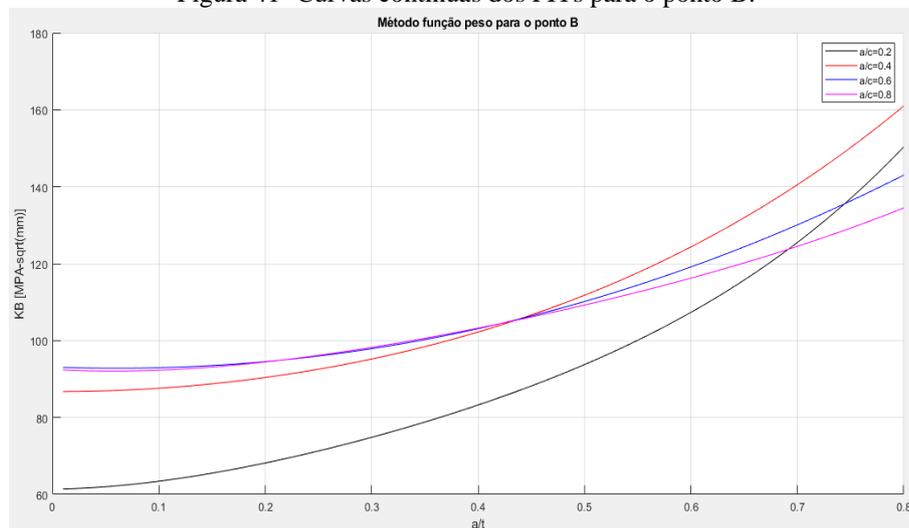
Continuando a análise, as figuras 40 e 41 foram calculadas utilizando as equações de Zheng *et al.* (1996) para os pontos A e B da trinca. Os FITs encontrados foram plotados em função da razão $\frac{a}{t}$ a partir da implementação do código no MATLAB.

Figura 40- Curvas contínuas dos FITs para o ponto A.



Fonte: O autor (2019).

Figura 41- Curvas contínuas dos FITs para o ponto B.



Fonte: O autor (2019).

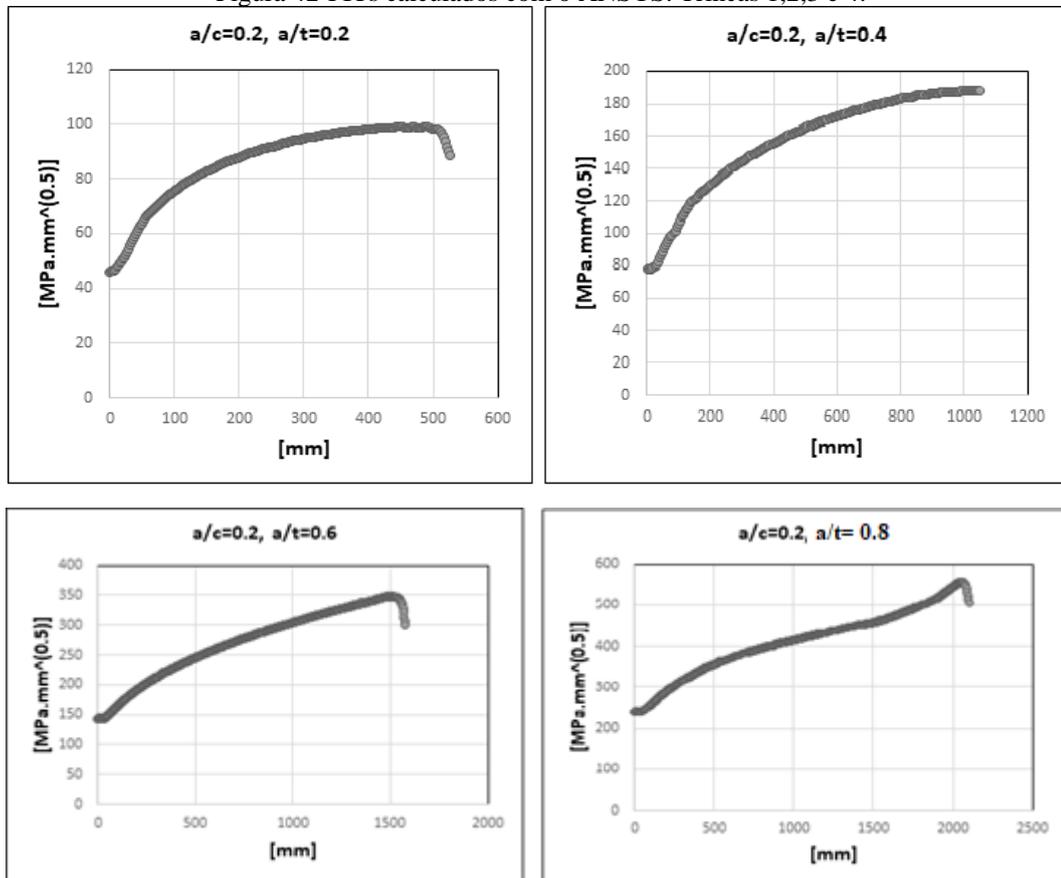
Para efeito de análise, o ponto A da trinca, teve como orientação definida por $\theta = \frac{\pi}{2}$ e o ponto B por $\theta = 0$. Na prática, o ponto de início de propagação das trincas sempre irá variar. É notável a semelhança com as curvas obtidas usando as equações da norma BS 7910 (2013),

porém, é importante salientar que cada FIT variando com $\frac{a}{c}$ e $\frac{a}{t}$ representa uma trinca. Os pontos A e B descrevem, conforme já explicado, as extremidades da trinca de quina um quarto-elíptica, de modo que os FITs em cada figura estão localizados nesses pontos.

4.2.3 Simulações numéricas no ANSYS

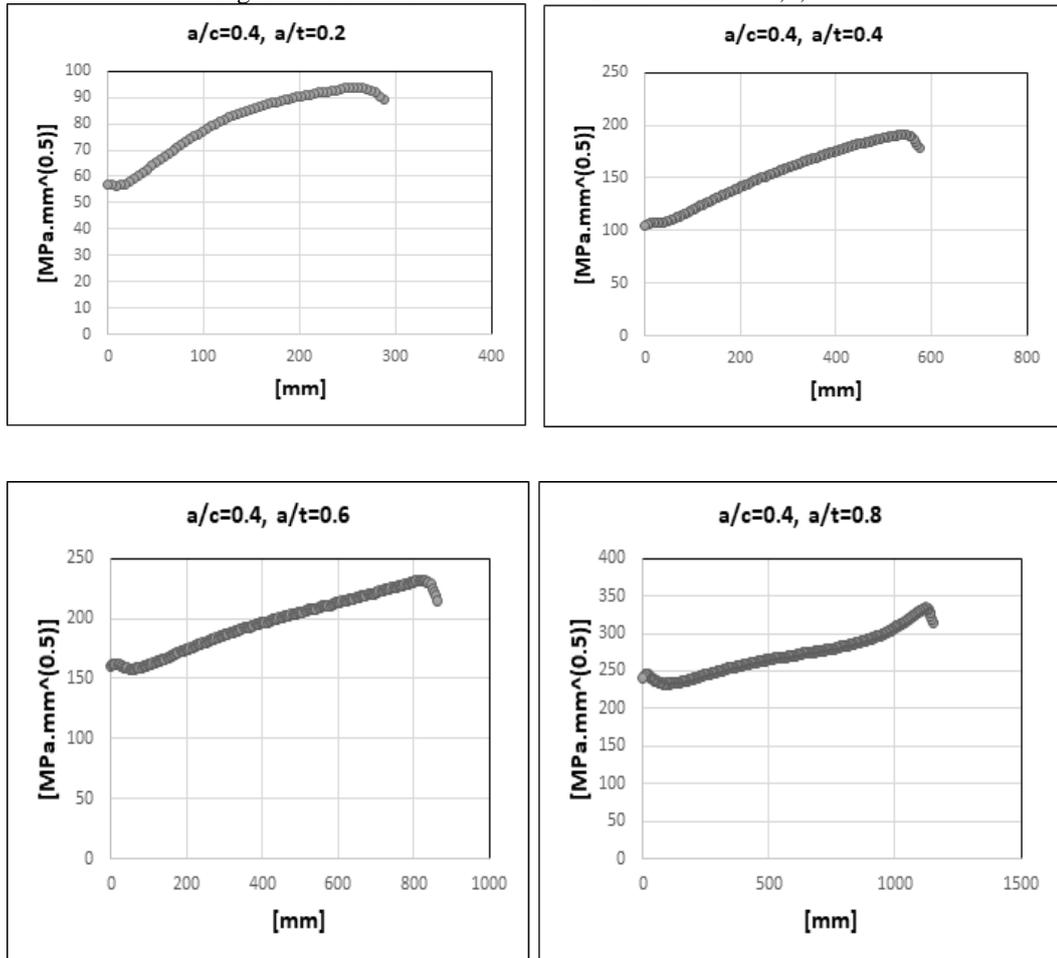
As figuras 42 a 45 mostram os resultados das simulações obtidas no ANSYS, onde os valores numéricos foram plotados por meio de planilha eletrônica para melhor visualização.

Figura 42-FITs calculados com o ANSYS. Trincas 1,2,3 e 4.



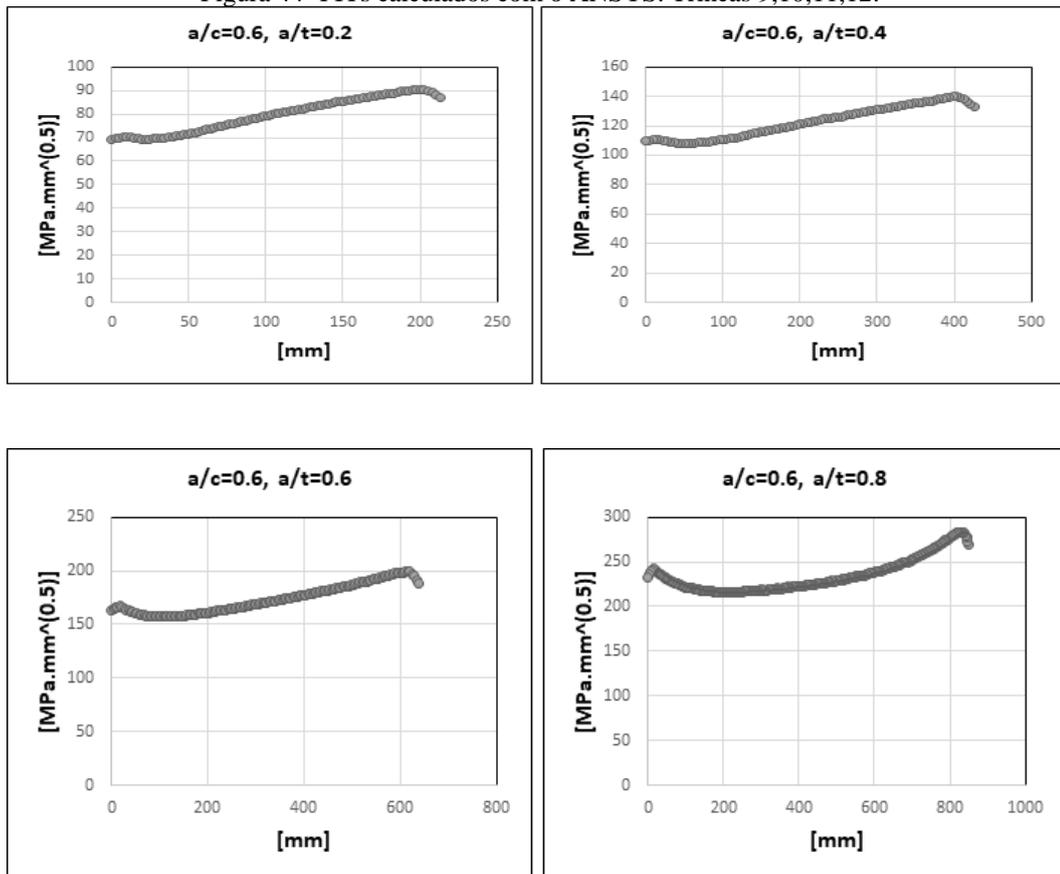
Fonte: O autor (2019).

Figura 43-FITs calculados com o ANSYS. Trincas 5,6,7 e 8.



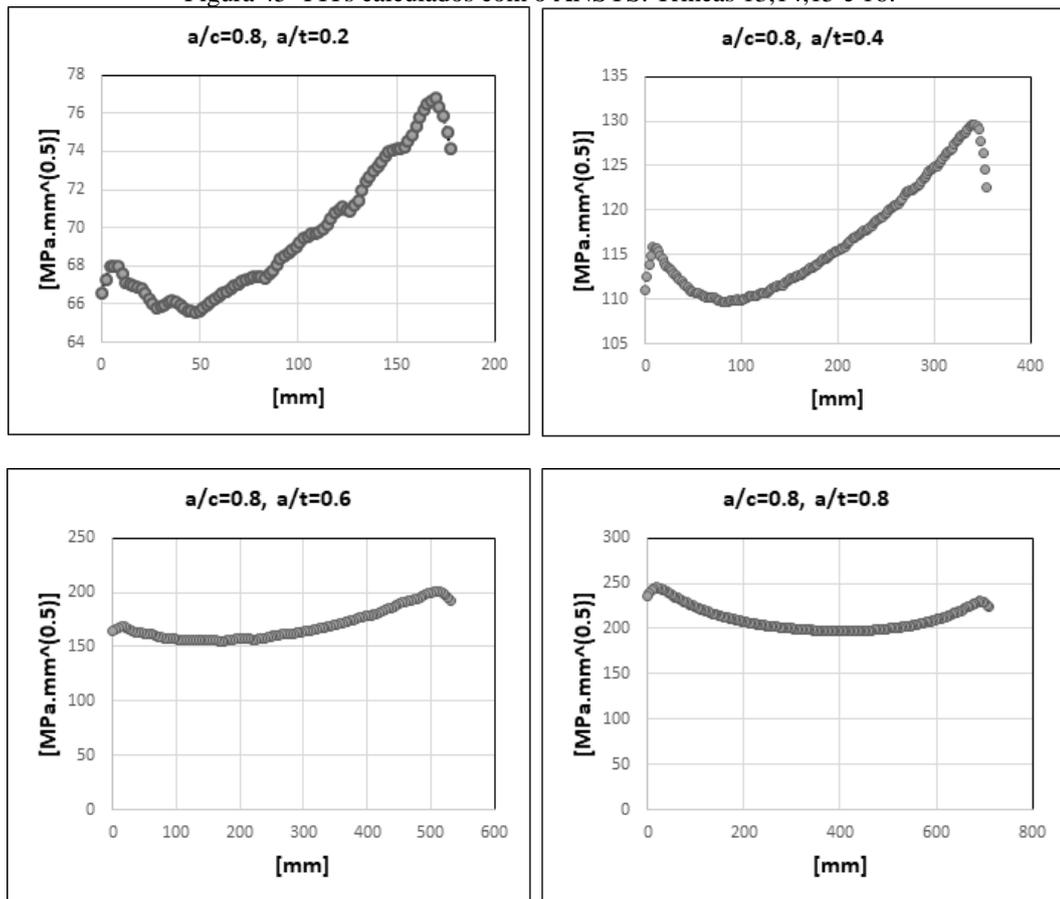
Fonte: O autor (2019).

Figura 44- FITs calculados com o ANSYS. Trincas 9,10,11,12.



Fonte: O autor (2019).

Figura 45- FITs calculados com o ANSYS. Trincas 13,14,15 e 16.



Fonte: O autor (2019).

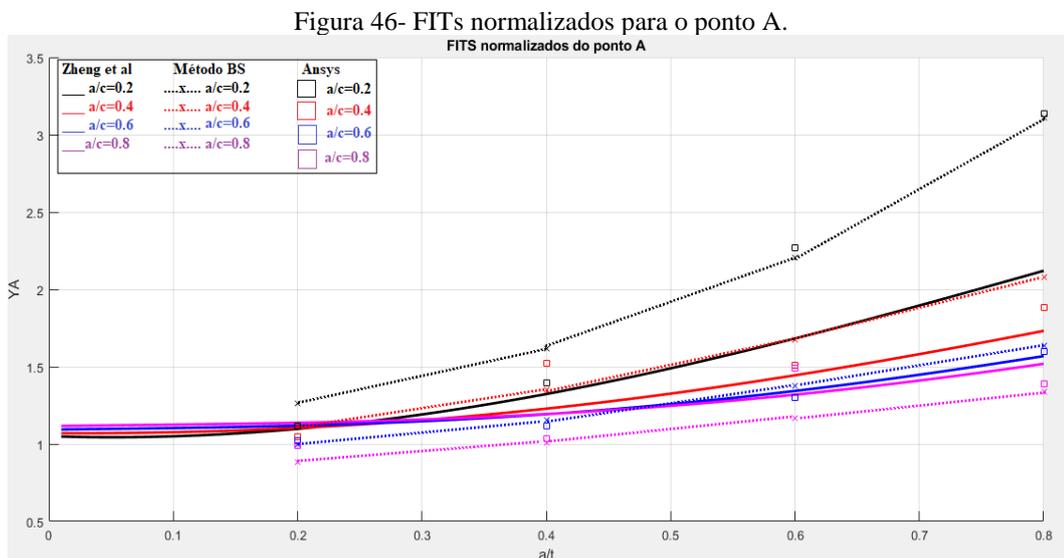
As curvas apresentadas nas figuras 42 a 45 possuem uma simetria característica e são muito semelhantes as já obtidas anteriormente pelos cálculos analíticos. Algumas irregularidades estão presentes devido as variações das razões de aspecto e profundidade. Isso fica visível nas trincas 13, 14 e 16 com seus pontos de máximo e mínimo variando muito. Outro fenômeno importante observado foi que, alterando apenas a dimensão h e diminuindo ainda mais a razão $\frac{h}{W} < 0.5$ da mesma trinca (por exemplo, a trinca 3), a orientação da ponta da trinca muda, ou seja, os pontos de máximo e mínimo se invertem. O mesmo fenômeno foi observado alterando a posição da trinca ao longo do plano médio da placa, comprovando que a trinca um quarto de elipse é simétrica em seus eixos coordenados. Apesar de serem mostradas com as orientações das curvas em concordância com as obtidas através das equações da norma BS 7910 (2013) e de Zheng, as curvas obtidas via simulação numérica possuem orientações diversas devido a variação de $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{t}$ e $\frac{h}{W}$.

4.2.4 Comparação dos resultados obtidos

Para uma melhor clareza dos resultados, os FITs adimensionais para os 3 métodos foram calculados e plotados nas figuras 46 e 47 para os pontos A e B.

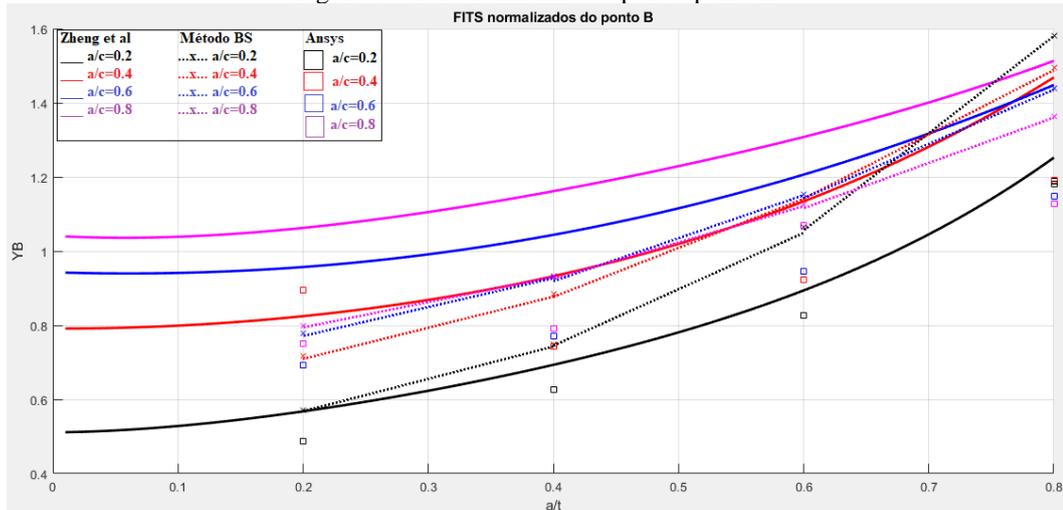
Os FITs adimensionais do ANSYS foram calculados coletando os FITs nos pontos de $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ das figuras 42 a 45 e calculados através da equação $Y_i = \frac{K_i}{\sigma\sqrt{\pi a}}$. Para a obtenção dos FITs adimensionais dos cálculos analíticos, o mesmo procedimento é feito com $Y_i = \frac{K}{\sigma\sqrt{\pi a}}$ para os FITs encontrados com a norma BS (2013) das figuras 35 a 38 e $Y_i = \frac{K_i}{\sigma\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}}$ para os FITs encontrados com Zheng *et al* (1996) das figuras 39 e 40, sendo $i=A$ e B.

Os FITs adimensionais do ANSYS são descritos por quadrados nas figuras. Existem alguns que estão exatamente em cima das curvas dos cálculos analíticos, e por isso podem não estar totalmente visíveis. Os FITs encontrados com a norma BS são descritos por curvas pontilhadas e os FITs das equações de Zheng são descritos por curvas contínuas, cada cor descreve uma razão de aspecto.



Fonte: O autor (2019).

Figura 47- FITs normalizados para o ponto B.



Fonte: O autor (2019).

Nota-se que os FITs obtidos através dos métodos analíticos possuem um comportamento semelhante, claro que as curvas encontradas através das equações da norma BS (2013) possuem a particularidade da razão de comprimento $\frac{c}{W} = 0.25$ nas suas equações paramétricas, o que pode ser explicado pelas diferenças com as curvas obtidas utilizando as equações de Zheng.

As curvas encontradas com o software ANSYS relacionadas aos pontos A e B, do ponto de vista qualitativo, estão em excelente concordância com as curvas dos dois métodos analíticos.

As curvas do ponto A para cada trinca calculada apresentaram pequenos desvios os quais podem ser erros de simulação ou refinamento de malha; a razão $\frac{h}{W}$ altura da placa e comprimento também pode ter influenciado nestes desvios.

Com relação as curvas obtidas para o ponto B, o software ANSYS mostrou curvas em sua maioria, abaixo dos valores encontrados para os dois métodos analíticos, os erros encontrados foram grandes, apesar do intervalo de Y_B plotado variar muito pouco.

Devido a credibilidade da norma BS 7910 (2013), pode-se afirmar com toda razão que é ela quem trabalha com os FITs mais próximos dos reais. Então, foi investigado se os resultados obtidos via simulação numérica no ANSYS e cálculo das expressões analíticas via método da função peso são compatíveis com os resultados obtidos através da BS, portanto, próximos dos reais.

As tabelas 4 e 5 mostram os erros relativos percentuais entre os resultados obtidos via simulação numérica com o ANSYS e método da função peso em relação a norma BS 7910. Os resultados de K_A e K_B foram obtidos das figuras 42 a 45 e normalizados nas figuras 46 e 47. A equação (69) mostra como foi feito o cálculo, com as seguintes considerações a respeito:

$$Erro\ Rel = \left[\frac{|\text{valor aproximado} - \text{valor exato}|}{\text{valor exato}} \right] \times 100 \quad (69)$$

onde:

Erro Rel: Erro relativo percentual;

Valor aproximado: Resultados do ANSYS ou resultados do método da função peso;

Valor exato: Resultados da norma BS 7910 (2013).

Tabela 4- Erros relativos percentuais do ponto A

Erros relativos ao ponto A					
Trinca	Zheng <i>et al</i>	ANSYS	Trinca	Zheng <i>et al</i>	ANSYS
1	10,00%	6,750%	9	24,44%	2,040%
2	16,13%	12,83%	10	2,610%	3,050%
3	19,00%	3,200%	11	2,890%	5,250%
4	33,00%	1,160%	12	3,680%	2,510%
5	2,170%	4,550%	13	17,52%	11,12%
6	7,400%	8,780%	14	12,38%	2,450%
7	12,12%	11,24%	15	14,65%	19,04%
8	16,27%	10,38%	16	11,76%	3,540%

Fonte: O autor (2019).

Tabela 5- Erros relativos percentuais do ponto B

Erros relativos ao ponto B					
Trinca	Zheng <i>et al</i>	ANSYS	Trinca	Zheng <i>et al</i>	ANSYS
1	1,750%	14,3%	9	23,37%	10,13%
2	8,330%	17,6%	10	22,28%	16,22%
3	19,26%	21,19%	11	4,780%	14,38%
4	21,65%	24,2%	12	1,390%	19,72%
5	13,88%	24,31%	13	31,25%	6,07%
6	8,040%	15,68%	14	25,00%	14,13%
7	2,580%	19,65%	15	16,96%	4,46%
8	1,350%	20,03%	16	11,03%	16,51%

Fonte: O autor (2019).

Conforme pode ser visto ao se analisar os erros relativos para os pontos A e B em relação ao cálculos dos FITs com a ferramenta *arbitrary crack* do ANSYS, o software se mostrou eficiente e os resultados são satisfatórios, pois a maioria dos resultados, principalmente para o ponto A, mostraram-se dentro do erro gerado via simulação numérica na faixa de 5% a 10%.

Existem trincas como a trinca 15, onde o erro relativo percentual no ponto A é maior do que o esperado, assim como os FITs do ponto B. Uma justificativa seria o refinamento da malha, o tamanho do elemento o qual foi feito a discretização, assim como não se sabe a fundo como o ANSYS limita as razões de aspecto e profundidade para o cálculo de fratura. É preciso investigar o método numérico adotado, porém, do ponto de vista qualitativo, o software atendeu aos comportamentos típicos dos FITs que se esperava obter.

Com relação aos erros percentuais do método da função peso em relação a norma BS 7910, os resultados também foram satisfatórios, os pontos A e B apresentaram em torno de 50% das trincas erro relativo percentual $\leq 12\%$. É preciso frisar que os dois métodos possuem suas particularidades e métodos de cálculo com considerações diferentes, assim como limitações, fazendo com que as soluções para os FITs sejam válidas, porém, também diferentes. Portanto, diferenças entre os erros relativos maiores do que 12% podem ser justificadas pelas limitações e simplicidade do método da função peso em relação a norma BS 7910, a qual possui uma maior rigorosidade em seus procedimentos.

5 CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos sobre o efeito da variação dos parâmetros geométricos das trincas de quina um quarto-elípticas inseridas em placas retangulares de espessura finita, conclui-se:

- À medida que $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{t}$ são variados, o ângulo de ponta da trinca sofre alteração, onde os valores máximos para os FITs tanto podem se encontrar em $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$. Para a geometria em análise foi constatado que a orientação da trinca muda apenas alterando a trinca ao longo do plano médio da placa retangular, tendo em conta a simetria da mesma;
- Para uma razão entre a altura da placa e comprimento da placa $\frac{h}{W} < 5$, os FITs possuem influência significativa para propagação de trincas, e, portanto, quanto menor esta razão, mais fácil será a abertura no modo I;
- Entre os três métodos adotados, o método de Zheng *et al* (1996) é o mais simples, visto que leva em consideração apenas os parâmetros geométricos da quina e a espessura da placa, logo, os FITs encontrados por esse método são idealizados, sem sofrer grandes desvios;
- Devido a simplicidade das expressões analíticas do método de Zheng *et al*, os erros relativos percentuais foram grandes em torno de 50% das trincas tanto para os pontos A e B. Portanto, as trincas obtidas pelo método da função peso não se aproximam de trincas reais;
- A ferramenta *fracture tool* \rightarrow *Arbitrary crack* mostrou ser satisfatória para obtenção dos FITs para as 16 configurações geométricas de trincas inseridas em 16 modelos geométricos construídos, visto que o comportamento qualitativo das curvas obtidas foi muito semelhante quando comparado com as curvas obtidas pelas expressões da norma BS 7910, assim como os erros relativos percentuais foi observado em muitas trincas o erro esperado de 5% a 10% gerado via simulação numérica;
- Os erros dos pontos A e B que ultrapassaram a faixa do erro gerado via simulação numérica podem ser justificados pelo menor refinamento de malha e tamanho dos elementos utilizados. Por outro lado, não se sabe como o ANSYS limita as razões de aspecto e profundidade, o que é determinante para estabelecer os limites nos que o software realiza os cálculos de maneira satisfatória. É preciso investigar como o cálculo dos parâmetros de fratura é limitado na análise numérica realizada por softwares comerciais de elementos finitos.

6 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Investigar como o software ANSYS determina os intervalos de validade das razões de aspecto e profundidade na trinca;
- Analisar como a razão $\frac{h}{w}$ influencia diretamente nos valores dos FITS encontrados e na orientação da ponta da trinca;
- Estudar trincas de quina em posições e orientações diversas, como por exemplo: trincas transversais e oblíquas;
- Considerar os Fatores de Intensidade de Tensões associados as irregularidades geométricas encontradas em paredes retangulares reais.

REFERÊNCIAS

- ANJOS, G. **Método do elemento finito, uma introdução**. [S.I.]: Docplayer, 2015. Disponível em: <<http://docplayer.com.br/49291140-Metodo-de-elementos-finitos-mef-uma-introducao.html>>. Acesso em: 16 abr. 2019
- ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: fundamentals and applications**. Taylor and Francis Group. Third Edition, New York, 2005.
- ANSYS Inc., **Theory Reference**, Release 5.6. Eleventh Edition, 1999.
- BRANCO, R. ANTUNES, F, V. MARTINS, J, A. F. SILVA, J, M. **Effect of residual stresses on crack shape of corner cracks at holes in nickel base superalloys**, Portugal, Nova Science Publishers, chapter 1, 2011.
- BS 7910:2013. **Guide to methods for assessing the acceptability of flaws in metallic structures**, BSI Standard, Third (present) edition, December 2013.
- DIETER, G, E. **Mechanical Metallurgy**. London: SI Metric 2. ed. P. 751, 1988.
- FILHO, A, A. **Elementos finitos: A base da tecnologia CAE**. 1ª. São Paulo: Érica. 2005.
- FISH, J. BELYTSCHKO, T. **Um primeiro curso em elementos finitos**, LTC, 2007.
- HECK, N, C. **Introdução à engenharia metalúrgica**. [S.I.]. Físic.org, 2012. Disponível em: <<http://www.fisic.org/eng06638-introduco--engenharia-metalrgica-nestor-cezar-heck--u-v2.html>>.
- HEO, S.P. YANG, W.H. Stress intensity factor analysis of elliptical corner cracks in mechanical joints by weight function method, **International Journal of Fracture**, v. 115, p. 377–399, 2002.
- HERTZBERG. R. W. **Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials**, 4. ed. John Wiley & Sons. New York, 1996.
- HELMAN, H. **Fundamentos da conformação plástica dos metais**. 2. ed. São Paulo: Artliber, 2010.
- LIEBOWITZ, H. **Fracture, An Advanced Treatise**, Academic Press, Inc., New York, 1969.
- LIN, X, B. SMITH, R, A. **Stress intensity factors for corner cracks emanating from fastener holes under tension**. Engineering Fracture Mechanics. v. 62, p. 535-553, 1999.
- KICIAK, A. GLINKA, G. EMAN, M. **Weight functions and stress intensity factors for corner quarter-elliptical crack in finite thickness plate subjected to in-plane loading**, v.60, p. 221-238, 1998.
- MA, F, J. WEN, G, H. TANG, P. YU, X. LI, J, Y. XU, G, D. MEI, F. Causes of transverse corner cracks in microalloyed steel in vertical bending continuous slab casters, China, **Institute of Materials, Minerals and Mining**, v.37, 2010.

MURTI, V. VALLIPAPPAN, S. ASCE, F. LEE, I. K. ASCE, M. Stress intensity factor using quarter point element, New York, **Journal of Engineering Mechanics**, v.11, p. 203-207, 1985.

PAVANELO, R. **Introdução aos Elementos Finitos**, Fem.unicamp, 2004. Disponível em: < <http://www.fem.unicamp.br/~pava/Lectures/EF1/MefNotas.pdf>>.

PEREZ, N. **Fracture Mechanics**. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.

RAJU, I. S. NEWMAN, J. C, Jr. An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack, **Engineering fracture mechanics**, Vol.15, p.185-192, 1981.

RAJU, I. S. NEWMAN, J. C, Jr. **Finite-element analysis of corner cracks in rectangular bars**, NASA Technical Memorandum, 1987.

SAKAKIBARA, N. **Finite element method in fracture mechanics**, Texas, 2008.

SANTOS, C., METZ, M., AZEVEDO, J. A., ROCHA, A. **Influência dos Parâmetros do Processo de Trefilação no Empenamento de Barras do Aço SAE 9254**. 8º Congresso Iberoamericanode ingenieria mecanica, Cusco, 2007.

SHIRATORI, M. MIYOSHI, T., **Weighting function for a quarter-elliptical crack in a plate under basic mode of stress distribution**. In Stress Intensity Factors Handbook. Pergamon Press, Vol. 3, p. 591-597, 1992.

STAMENKOVIC, D. **Determination of Fracture Mechanics Parameters using FEM and J Integral Approach**. Proceedings of the 2nd WSEAS Int. Conference on Applied and Theoretical Mechanics. Veneza, Itália, 2006.

STROHAECKER, T, R. **Apostila de mecânica de fratura**, Lamef, Porto Alegre, 2007.

TORIBIO, J. MATOS, J, C. GONZÁLEZ, B. Aspect ratio Evolution in embedded, surface, and corner cracks in finite-thickness plates under tensile fatigue loading, **Fracture & Structural Integrity Research Group**, Vol.7, 2017.

WILLIAMS, M, L. PASADENA. CALIF. On the stress distribution at the base of a stationary crack, **Journal of Applied Mechanics**, p. 526-528, 1957.

WESTERGAARD, H, M. MASS, C. Bearing pressures and cracks, **Journal of Applied Mechanics**, p. A49-A53, 1939.

ZHAO, W. NEWMAN, J, C, Jr. SUTTON, M, A. WU, X, R. SHIVAKUMAR, K, N. **Analysis of corner cracks at hole by a 3-D weight function method with stresses from finite element method**, NASA Technical Memorandum, 1995.

ZHENG, X, J. GLINKA, G. DUBEY, R, N. Stress intensity factors and weight functions for a corner crack in a finite thickness plate, **Engineering fracture mechanics**, vol.54, p. 49-61, 1996.