UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

MODELO DE CONTROLE ÓTIMO APLICADO
A ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado
por

Thiago Henrique Marques de Albuquerque
Orientador: Luciano Nadler Lins

Recife, novembro de 2008.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

MODELO DE CONTROLE ÓTIMO APLICADO

A ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

Thiago Henrique Marques de Albuquerque
Orientador: Luciano Nadler Lins

Monografia apresentada à graduação
de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco
como requisito para a conclusão do curso de graduação

Recife, novembro de 2008.

“A pior forma de desigualdade é tentar fazer duas coisas diferentes iguais”.

Aristóteles

A345m **Albuquerque, Thiago Henrique Marques de.**
Modelo de controle ótimo aplicado a análise de investimento / Thiago Henrique Marques de Albuquerque. - Recife: O Autor, 2008.
iv, 38 folhas, il : figs., tabs.

TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Departamento de Engenharia de Produção, 2008.

Inclui Bibliografia.

1. Engenharia de Produção. 2.Análise de Investimento. 3. Controle Ótimo. I. Título.

UFPE

658.5 **CDD (22. ed.)** **BCTG/2008-242**

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho tem um significado muito importante para mim por tudo que ele representa e eu não teria conseguido realizá-lo se não fosse a ajuda de várias pessoas que conviveram comigo ao longo dos meus anos de curso. Seria difícil nomear aqui todas as pessoas que contribuíram que eu pudesse não só realizar esse trabalho, mas também em todo o tempo que passei na universidade. Espero aqui sintetizar o grupo ao qual me refiro.

- Toda a minha família pelo que apoio que me proporcionaram;
- Ao professor Luciano Nadler Lins pela disponibilidade em me ajudar nessa empreitada;
- A AREVAKOBLITZ pela oportunidade de desenvolvimento profissional que me deu;
- A minha turma com a qual batalhei durante esses anos de faculdade.

A primeira versão desse trabalho surgiu em 2006 em uma outra disciplina do curso e foi realizado em grupo que além de mim contava ainda com Petra e Eugênia, infelizmente naquela ocasião não conseguimos juntos completar o trabalho. Essa não finalização do trabalho nos deixou incomodados tanto que partiu delas a sugestão para que eu retornasse ao tema e agora finalmente apresento uma versão completa do tema de começamos a desenvolver há dois atrás e agradeço a confiança delas em mim para fazê-lo.

RESUMO

Trabalhos relacionados à análise de investimentos até poucas décadas atrás não primavam por um formalismo matemático tão rígido quanto se passou a ver na segunda metade do século passado para cá. Além disso, técnicas matemáticas desenvolvidas ao longo do século XX trouxeram a oportunidade de se modelar as possíveis situações dos mercados de forma cada vez mais verossímil, apesar de serem mantidas as restrições impostas à modelagem como uma representação bastante simplificada da realidade. Nesse trabalho, há a aplicação de técnicas matemáticas desenvolvidas em sua maioria depois da segunda guerra mundial a um problema de análise de investimentos com a peculiaridade de que o investimento tratado ter um tempo limitado para ocorrer, ou seja, é um investimento com começo e fim determinados e que precisamos avaliar se haverá retorno para aquelas pessoas que optarem por participar desse investimento. Aqui o problema de se montar um investimento desse tipo é interpretado, um modelo matemático para sua avaliação é proposto e resolvido, seus resultados são discutidos e tenta-se responder as perguntas clássicas sobre investimentos: retornará lucro para seus participantes ao final do tempo de investimento? Em quanto tempo os acionistas conseguem recuperar seus investimentos?

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

É possível verificar a grande quantidade de trabalhos que tratam de assuntos como análise de investimento ou administração financeira. O tema é tratado por acadêmicos de várias nacionalidades e sob diversas variações de contexto. E a aplicação de técnicas matemáticas na solução desses problemas é cada vez mais disseminada. O tema desse trabalho é a aplicação de técnicas matemáticas desenvolvidas durante o século vinte para resolver um problema um tanto diferente do que é tratado hoje em trabalhos desse tipo.

Um dos trabalhos clássicos dessa área de estudo é *Portfolio Selection* de Harry Markowitz. Em seu trabalho, Markowitz faz a primeira tentativa de quantificação dos riscos decorrentes de aplicações financeiras, mais precisamente no investimento em ações. E mostra as vantagens de se montar uma boa carteira de investimento que contenha tanto ações que não irão trazer grande rendimento para seus detentores, mas que possuem pouca variabilidade nos seus valores e ações que possuem grande possibilidade de rendimento, mas também grande variabilidade associada ao seu valor. O trabalho de Markowitz não é pioneiro só por ter tentado uma quantificação dos riscos de aplicações financeiras, outra conseqüência de seu trabalho é que mais e mais pesquisadores passaram a aplicar técnicas matemáticas para a solução de problemas relacionados com investimentos. O trabalho de Markowitz é mais bem discutido na seção 2.2.

Trabalhos relacionados à área de investimentos, geralmente, têm traços semelhantes como responder a questões do tipo: será que determinado investimento terá um retorno satisfatório para os investidores ou quanto tempo os investidores precisariam esperar para reaver o investimento feito e ter algum lucro?

O presente trabalho trata da solução de um problema um pouco diferente: o que se tem é que a um gestor foi pedido que montasse uma conta de investimento na qual seus acionistas fariam aplicações mensais durante um período de tempo, mas, que a partir de um determinado momento o gestor passasse a fazer retiradas dessa conta de investimento e que distribuísse entre seus acionistas os dividendos advindos da conta. E mais, a conta teria um tempo de existência determinado, ou seja, os acionistas queriam um investimento no qual pudessem usufruir seus resultados por período de tempo finito ao contrário do que normalmente se supõe de um investimento que gere rendimentos aos seus investidores.

Para a solução desse problema foi adotada uma técnica desenvolvida durante o século vinte por um matemático russo chamado L. S. Pontryagin. O seu princípio do Máximo é, segundo Torres (2005) uma condição necessária de otimalidade de primeira ordem para problemas de controle ótimo e possibilitou a solução de muitos problemas de pesquisa operacional que estava sendo desenvolvida na mesma época (depois da segunda guerra mundial).

Essa poderosa ferramenta foi aplicada em associação com o formalismo dos sistemas dinâmicos criando-se, assim um problema de controle ótimo dinâmico. Essas técnicas permitem a solução do problema do controle resultante da aplicação do Principio do Máximo de Pontryagin através da solução de equações diferenciais ordinárias que têm como solução as funções que irão reger o comportamento do sistema como um todo.

1.1. Justificativa

A grande quantidade de trabalhos publicados que fazem referência ao tema de análise de investimentos mostra que há uma demanda cada vez maior por produção de conhecimento nessa área. Isso é interpretado como um interesse cada vez maior que as pessoas têm de obter informações sobre investimentos.

Há, nesse momento no mundo, mais e mais pessoas em nossa sociedade em condições e querendo investir e essas pessoas buscam informações sobre como fazer isso. E há também cada vez mais pesquisadores aplicando conhecimentos matemáticos recentes para a solução de problemas relacionados a esse campo (análise de investimentos). Por isso, o que justifica esse trabalho é a oportunidade de resolver um problema sobre um tema que é de interesse de uma quantidade de pessoas que aumenta mais e mais, aplicando uma técnica matemática relativamente nova se comparada a outras usadas até hoje e resolver um problema com algumas diferenças em relação ao que é tratado geralmente por pesquisadores da área.

1.2. Objetivo Geral

Esse trabalho tem por objetivo resolver um problema de análise de investimentos por meio de um modelo matemático aplicando o Principio do Máximo de Pontryagin e o formalismo do controle ótimo aliado à teoria dos sistemas dinâmicos e a partir daí desenvolver uma política de controle ótimo que maximize os ganhos gerados por uma conta de investimento criada.

1.3. Objetivos Específicos

Alguns dos objetivos específicos desse trabalho são:

- Entender conceitos relacionados a sistemas dinâmicos e suas aplicações;
- Investigar as relações entre os diversos parâmetros que compõem o modelo;

- Encontrar uma solução para o problema descrito no item 1;
- Encontrar a função que mostrará qual a política de retiradas adequada ao modelo;
- Apresentar a ferramenta do Principio do Máximo de Pontryagin;

1.4. Organização do Trabalho

Daqui por diante o trabalho foi dividido da seguinte forma: no capítulo 2 foram reunidos os conhecimentos teóricos utilizados para compor o modelo e para solucioná-lo. Nesse capítulo estão presentes apresentações sobre investimento e seus conceitos; uma breve discussão sobre o trabalho de Harry Markowitz; a seguir é feito um resumo sobre regimes de capitalização e as formas que podem assumir; logo após, são apresentadas as definições referentes ao problema do controle; também é feita uma discussão rápida sobre programação dinâmica; então é feita a apresentação do Principio do Máximo de Pontryagin e seus conceitos; e a teoria sobre sistemas dinâmicos é apresentada para finalizar o capítulo.

O capítulo 3 mostra a formulação do modelo e as justificativas para a sua montagem da forma que ocorreu. Esse capítulo também apresenta a solução do modelo e ainda outros resultados importantes para a sua solução como o ponto de equilíbrio do sistema e a análise de estabilidade do ponto de equilíbrio. O capítulo ainda trata das relações entre os parâmetros que surgem da solução do modelo.

O capítulo 4 é dedicado a uma simulação dos resultados que foram expostos no capítulo 3 apenas em função dos parâmetros do problema. São atribuídos valores a esses parâmetros e é mostrado qual o resultado que o modelo geraria com esses parâmetros caso fossem adotados.

Por fim, o capítulo 5 trata da conclusão do trabalho elencando os resultados encontrados, as limitações do presente trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2. BASE TEÓRICA

2.1. Investimento

Segundo Souza e Clemente (1999), a decisão de investir é de natureza complexa, porque muitos fatores, inclusive de ordem pessoal, entram em cena. Entretanto, ainda para esses autores, é necessário que se desenvolva um modelo teórico mínimo para explicar e prever essas decisões. Assim, a primeira idéia que surge é a de que a decisão de investir depende do retorno esperado: quanto maiores forem os ganhos futuros que podem ser obtidos de certo investimento, tanto mais atraente esse investimento parecerá para qualquer investidor. Além disso, Lemes Júnior, Rigo e Cherobim (2005) argumentam que decisões de investimento de capital envolvem a avaliação e seleção de propostas de investimento de recursos financeiros por um prazo superior a um ano, com o objetivo de propiciar o retorno aos proprietários desse capital. Outro argumento desses autores é que investimentos de capital são estratégicos e que possíveis falhas causam grandes prejuízos e são de difícil reversibilidade.

Entende-se como investimento toda a aplicação de capital em algum ativo, tangível ou não, para obter determinado retorno no futuro (Lemes Júnior, Rigo e Cherobim, 2005). Um investimento pode ser a criação de uma nova empresa ou pode ser um projeto em uma empresa já existente. Abaixo são elencados alguns exemplos de projetos de investimentos em diferentes setores:

No setor industrial, o projeto de investimento mais clássico é a aquisição de novas linhas de produção. Mas também são importantes os projetos de reposição de equipamentos, reforma de linhas de produção antigas, automação industrial, substituição de mão-de-obra, adoção de novas tecnologias e projetos de linha verde, objetivando reduzir os impactos ambientais nocivos dos processos produtivos.

No setor agroindustrial, os projetos envolvem aplicações de recursos na aquisição de maquinário agrícola, na construção de silos e armazéns, no melhoramento genético e do solo, no aumento da produtividade, formação de cooperativas, no processamento de produtos *in natura* agregando valor, na informatização do controle da produção e nos canais de comercialização.

No setor de serviços, os projetos de investimento referem-se desde a reforma das instalações até campanhas publicitárias. Os gastos com automação comercial e sistemas de informações gerenciais também são projetos de investimento, na medida em que podem aumentar ou diminuir o valor da empresa, no longo prazo.

Para Lemes Júnior, Rigo e Cherobim (2005) investimento é: *"o montante a ser aplicado no projeto, já descontados os diversos ajustes necessários para contemplar os financiamentos gerados por recursos não onerosos, tais como: fornecedores, salários a pagar ou tributos a pagar, ativos que serão utilizados mediante operações de leasing e recursos obtidos com a possível venda de equipamentos a serem substituídos"*(LEMES JÚNIOR, RIGO e CHEROBIM, p.: 153, 2005). Esses autores citam ainda uma série de atividades que são consideradas atividades de investimento, alguns exemplos são: aplicações financeiras de prazo médio e longo, participações em outras empresas, empréstimos concedidos e etc. Os projetos tratados aqui não se restringem a uma área específica, ao contrário podem fazer referência a qualquer área de investimento.

2.1.1. Tipos de Projetos

Souza e Clemente (1999) classificam os projetos que podemos encontrar em um determinado elenco como: projetos mutuamente exclusivos, projetos independentes, ou projetos dependentes. Esta classificação é feita, segundo esses autores, de acordo com a contribuição para a geração de fluxos de caixa livres para a empresa e será apresentada a seguir:

Projetos Mutuamente Exclusivos: dois ou mais projetos são ditos mutuamente exclusivos quando a seleção de um deles, necessariamente, elimina os demais. Isso pode acontecer quando os projetos têm a mesma função e, portanto, competem entre si e a empresa é obrigada a escolher uma entre as propostas apresentadas. Assim, num elenco de *n* projetos mutuamente exclusivos, apenas um deles deve ser selecionado. Para realizar esta seleção pode ser usado algum dos métodos clássicos para avaliação de investimento (Taxa interna de Retorno ou Valor presente Líquido).

Projetos Independentes: dois ou mais projetos são ditos independentes se a escolha de um deles não excluir, necessariamente, a escolha dos demais, ou seja, seus fluxos de caixa não estão relacionados ou são independentes um do outro. Assim, num elenco de *n* projetos, deve-se selecionar um conjunto de '$k \leq n$' que maximizem o valor da empresa.

Projetos Dependentes: dois ou mais projetos são ditos dependentes quando a seleção de um deles alterar a decisão com respeito aos demais projetos da carteira. Assim, a simples presença de uma restrição orçamentária (orçamento de capital limitado) torna os projetos dependentes do ponto de vista financeiro e, então, há uma influência positiva ou negativa sobre entradas de caixa de outros projetos. Nesse caso é preciso selecionar àqueles projetos que maximizem o valor da empresa e cujas demandas por investimento não ultrapassem o orçamento de capital. Essa dependência também pode ser especificada por fatores técnicos, como a compra de uma nova máquina que deve ser acompanhada da compra dos utensílios necessários para o seu uso.

2.1.2. Valor do Dinheiro no Tempo

Para Lemes, Rigo e Cherobim (2005) a circulação de recursos é importante para as atividades das pessoas, das empresas e de todas as formas de organização. E, ainda, que os agentes superavitários têm recursos sobrando e podem emprestá-los para os agentes deficitários.

Conhecer técnicas que avaliem as condições em que são realizados os investimentos e quais as possibilidades de retornos existentes é de extrema importância devido a diversidade de possibilidades de investimentos a disposição dos agentes superavitários.

A primeira noção importante para esse estudo, segundo Lemes, Rigo e Cherobim (2005), é o valor do dinheiro no tempo: o dinheiro recebido hoje tem mais valor que a mesma quantia de dinheiro recebida amanhã. Mesmo que não exista inflação, que os preços permaneçam constantes, que as necessidades das pessoas não mudem, a possibilidade de comprar um produto hoje, fazer um investimento hoje, desfrutar um serviço hoje vale mais do que a mesma possibilidade amanhã.

Assim, como o dinheiro vale mais hoje do amanhã, quem tem o recurso, o agente superavitário, só abre mão do consumo hoje se for receber um valor maior no futuro.

2.1.3. Retorno Financeiro

Na moderna teoria financeira, pesquisa-se muito os modelos para otimização dos retornos dos investimentos em títulos e operações do mercado financeiro. Lemes, Rigo e Cherobim (2005) definem retorno financeiro da seguinte forma:

É o total de ganhos ou de perdas de um proprietário ou aplicador sobre investimentos realizados.

O retorno se refere a variações no valor dos ativos e das distribuições de lucros envolvidos nas atividades financeiras.

2.2. Modelo de Harry Markowitz

Em junho de 1952, o *Journal of Finance*, uma importante revista acadêmica de finanças, publicou um artigo intitulado "*Portfolio Selection*" de autoria de um desconhecido estudante de pós-graduação da universidade de Chicago, chamado Harry Markowitz. Posteriormente, o artigo se mostrou tão inovador e influente, tanto no meio acadêmico quanto na prática, que valeu a seu autor um prêmio Nobel de ciência econômica em 1990. Markowitz não conhecia nada do mercado de ações quando começou a trabalhar em seu artigo, ele, na verdade, trabalhava no ramo então relativamente novo da programação linear quando, em uma conversa com um corretor de ações na ante sala de seu orientador, recebeu um pedido para aplicar a programação linear aos problemas com que os investidores se defrontam no mercado de ações. A iniciativa foi apoiada por seu orientador, que também não conhecia nada sobre mercado de ações, mas que encaminhou Markowitz para conversar com o reitor da escola de administração esperando que este pudesse ajudá-lo. A partir daí Markowitz começou os estudos que o levariam a escrever *Portfolio Selection*.

O tema do trabalho de Markowitz foi o investimento em ações, até então um tema pouco explorado pelas revistas conceituadas da época que o consideravam um tema "arriscado e especulativo demais para uma análise acadêmica sóbria" (Bernstein, 2002). E o que tornou ainda mais ousado o trabalho de Markowitz foi que esse se dispôs a tratar da gestão da riqueza total do investidor, ou seja, da chamada carteira de investimento. A principal tese é que uma carteira de valores mobiliários é totalmente diferente das propriedades consideradas individualmente.

O trabalho ia de encontro à corrente que dominava a maior parte da literatura sobre o mercado de ações, que contava com títulos como: lições de um bailarino de como se tornar um milionário sem fazer força, ou como ser reconhecido como um guru entre os analistas de mercado. Tampouco se esforçou em apresentar suas idéias na linguagem típica da maioria dos artigos sobre o mercado de ações. Markowitz também insistiu num tratamento matemático que era raro na literatura voltada para o tema economia e finanças em sua época, dez das quatorze páginas do artigo de Markowitz continham equações ou gráficos complicados.

Por indicação do reitor da escola de administração, Markowitz leu um livro chamado *A teoria do valor dos investimentos* de John Burr Williams, um livro influente sobre finanças e administração de empresas. Já a primeira frase do livro que leu o impressionou: "Nenhum comprador considera todos os papéis igualmente atraentes por seus preços de mercado atuais... Pelo contrário, ele procura 'o melhor por aquele preço'" (Bernstein, p.:250, 2002). A interpretação que Markowitz deu a essa frase é que além do retorno o investidor deveria se interessar pelo risco associado aos seus movimentos. Um pensamento que revolucionou sua época na qual os julgamentos sobre o desempenho dos papéis eram expressos em termos de quanto dinheiro o investidor ganhava ou perdia. Por isso, não surpreende que os gerentes agressivos e orientados para o desempenho das carteiras dos fundos mútuos passaram a ser encarados como heróis populares.

Mas foi necessária a grande baixa de 1973-1974 para convencer os investidores de que aqueles gestores cultuados não passavam de apostadores perdulários em mercados em alta e que não se interessavam pelo risco, apenas pelo retorno. As lições aprendidas com esse colapso persuadiram os investidores de que o "desempenho" é uma quimera. Os mercados de capitais não são máquinas amoldáveis das quais se pode tirar riqueza para todo mundo a pedido. O retorno de cada investidor depende do que os outros investidores pagarão por ativos em certo ponto do futuro incerto, e o comportamento de um sem-número de outros investidores é algo que ninguém consegue controlar ou mesmo prever confiavelmente. E, por outro lado, os investidores podem administrar os riscos que correm e os riscos maiores deveriam produzir mais riqueza no devido tempo para o investidor que souber bem utilizá-lo.

O objetivo de Markowitz com seu trabalho foi usar a noção de risco para formar carteiras para investidores que "consideram o retorno esperado uma coisa desejável e a variância do retorno uma coisa indesejável" (Bernstein, p.: 252, 2002). Não há no trabalho de Markowitz nenhuma menção a risco de forma explícita, mas a variância é identificada como uma coisa tão indesejável que risco e variância se tornam sinônimos. E, assim, pode-se interpretar que Markowitz quantificou o risco dos investimentos em seu trabalho.

Markowitz rejeita a idéia vigente então de que investir é um processo com um só objetivo em que o investidor aposta tudo no que parece ser "o melhor por aquele preço". Os investidores diversificam seus investimentos porque isso constitui sua melhor estratégia contra a variância do retorno. Segundo Markowitz, "a diversificação é observada e sensata; uma regra de comportamento que não implique a superioridade da diversificação deve ser rejeitada tanto como hipótese quanto como máxima" (Markowitz apud Bernstein, 2002). O que ele quer dizer aqui é claro: em uma carteira diversificada, alguns ativos aumentarão de preço mesmo quando outros ativos se desvalorizarem; no mínimo, as taxas de retorno entre os ativos diferirão. Essa diferença é que faz com que o investidor sobreviva no mercado, ganhando em algumas situações e perdendo em outras, mas se mantendo no mercado.

Segundo Bernstein (2002), ao substituir a pura intuição por um cálculo estatístico da incerteza, Markowitz transformou a escolha tradicional de ações em um procedimento de seleção do que ele denominou carteiras "eficientes". Eficiência, um termo adotado da engenharia pelos economistas e estatísticos, significa maximizar a saída em relação à entrada ou minimizar a entrada em relação à saída. A carteira eficiente minimiza aquela "coisa indesejável" chamada variância ao mesmo tempo em que maximiza aquela "coisa desejável" chamada enriquecer.

Markowitz reservou o termo eficiente para carteiras que combinam as melhores ações por aquele preço com o mínimo de variância. É importante aqui reconhecer que não existe uma carteira individual, segundo Bernstein (2002), que seja mais eficiente que todas as outras e que graças à programação linear, o método de Markowitz produz um menu de carteiras eficientes. Como qualquer menu, esse possui dois lados: aquilo que você deseja está de um lado e o custo daquilo que você deseja está do outro. Quanto maior o retorno esperado, maiores os riscos envolvidos. Mas cada carteira eficiente no menu terá maior retorno esperado para qualquer dado nível de risco ou o menor nível de risco para qualquer retorno esperado.

O artigo, junto com o livro de mesmo nome que Markowitz escreveu em 1959, revolucionaram a atividade de gerência de investimentos, ao elevar o risco à mesma importância do retorno esperado e se tornaram a base de quase todos os trabalhos teóricos de finanças que se seguiram. Além disso, ele apoiou uma variedade de aplicações no decorrer do tempo: de técnicas de seleção de ações e alocação de carteiras entre ações e títulos à avaliação e gerência de opções e de papéis derivativos mais complexos.

Mas apesar de sua importância, o artigo de Markowitz não ficou livre de críticas e essas críticas estavam concentradas no conjunto de pressupostos que apóiam a sua idéia. Segundo Bernstein (2002), são basicamente três as críticas feitas ao trabalho: primeira: será que os investidores são racionais o bastante para seguir as prescrições que Markowitz formulou para eles. Se a intuição triunfar sobre a medição nos investimentos, todo o exercício poderá se revelar uma perda de tempo e uma explicação falha do comportamento dos mercados.

Outro ponto que provoca controvérsias é se a variância representa apropriadamente o risco. Se os investidores perceberem o risco como algo diferente da variância, alguma outra medida poderá ser igualmente válida e preservar a abordagem otimizadora de Markowitz em relação ao risco e retorno. Ou poderá revelar novos detalhes do problema.

E, por fim, o que aconteceria se o pressuposto de Markowitz da existência de uma relação positiva entre risco e retorno não for observado em testes empíricos? Se altos retornos forem sistematicamente obtidos com papéis de baixo risco ou o investidor não conseguir bons resultados com papéis considerados de baixo risco, uma reavaliação da teoria seria necessária.

Apesar das críticas à teoria da seleção de carteiras de Markowitz, sua contribuição foi imensa. Ela forneceu a base para os principais trabalhos teóricos realizados desde 1952 e deu origem a aplicações práticas que dominam o campo dos investimentos. A diversificação tornou-se, de fato, uma verdadeira religião entre os investidores. E mesmo os ataques às idéias de Markowitz desencadearam novos conceitos e novas aplicações que talvez não tivessem surgido sem suas contribuições inovadoras.

2.3. Regimes de Capitalização

Segundo Ferreira (2000), o processo de geração e agregação de rendimentos (juros) em aplicações financeiras das mais diferentes formas é denominado de regimes de capitalização. Conforme esta geração ocorra sobre os próprios rendimentos ou não, temos os regimes de capitalização composta e de capitalização simples, respectivamente.

Em função da magnitude do tempo de geração de rendimentos, ainda é possível ter cada uma das capitalizações acima ocorrendo em processo contínuo ou em processo descontínuo.

Ferreira (2000) argumenta que na prática financeira os processos de capitalização contínuo e descontínuo têm muito a ver com as condições jurídico-legais como são realizados os contratos de aplicação-captação de recursos e, também, em alguns casos, as oportunidades apresentadas pelo mercado financeiro para determinadas faixas monetárias de agentes "superavitários", implicando mudanças substanciais dentro de um mesmo processo e/ou deu mesmo regime.

Dessa forma, podemos afirmar:

a) o processo contínuo de capitalização caracteriza-se por uma agregação dos juros ao capital aplicado de uma forma instantânea ou sem interrupção. Ou seja, as funções que regem seu comportamento são contínuas no tempo. Graficamente, podemos representar esta agregação mediante as figuras abaixo:

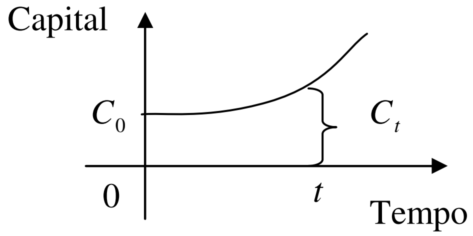

Figura 2.1: Capitalização Contínua Composta

Fonte: Ferreira (2000; p.28)

Na figura 2.1 pode-se observar uma agregação de rendimento ao capital inicial "C_0", que expressa uma função contínua com crescimento exponencial, o que fornece em qualquer instante "t", o capital acumulado (capital + rendimentos) "C_t" a juros compostos:

$$C_t = C_0 e^{\mu t} \qquad (2.1)$$

onde:

C_t = montante ou capital acumulado na data "t";

C_0 = capital inicial aplicado;

μ = taxa instantânea de rendimento;

t = período ou prazo de rendimento;

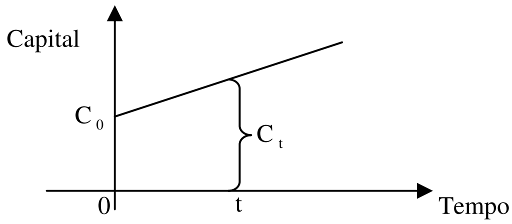

Figura 2.2: Capitalização Contínua Simples

Fonte: Ferreira (2000; p.29)

Na figura 2.2 temos a capitalização contínua com uma agregação de rendimentos ao capital inicial "C_0", sua expressão é uma função com crescimento linear, resultando, em qualquer instante "t", o capital acumulado ou montante (capital inicial + rendimentos) "C_t" a juros simples:

$$C_t = C_0(1 + i.t) \tag{2.2}$$

onde:

C_t = montante ou capital acumulado na data "t";

C_0 = capital inicial aplicado;

i = taxa unitária de juros simples;

t = período ou prazo de rendimento.

b) segundo Ferreira (2000) o processo de capitalização descontínuo, origina-se mais das condições jurídico-legais dos contratos de aplicação-captação de recursos financeiros realizados na prática financeira.

Portanto, nesse tipo de processo, foi convencionado que o rendimento ou juro só será formado ao fim de cada período de tempo a que se refere à taxa de rendimento contratada.

Deste modo, o capital inicial aplicado apenas receberá rendimentos ao fim de cada período de tempo indicado pela taxa de juros contratada. Caso o aplicador procure receber antes do período de capitalização, encontrará o mesmo valor que havia no início de cada um desses períodos.

Uma melhor visualização desse fenômeno é mostrada na figura abaixo:

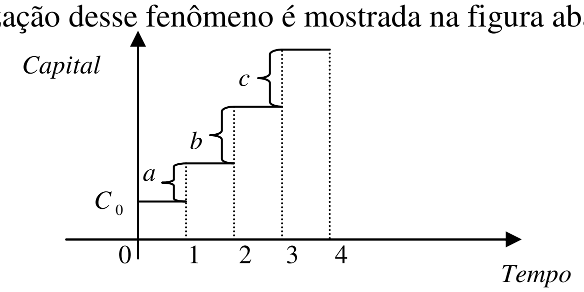

Figura 2.3: Capitalização Descontínua

Fonte: Ferreira (2000; p.30)

Observando o gráfico C_0 é o capital inicial do investimento e percebe-se que cada rendimento periódico – na figura representado por (a), (b) e (c) – apenas é acrescido ao capital ao fim de cada período de capitalização, exprimindo o que se chama em álgebra linear de função "menor inteiro contido na variável *t*". Os "degraus" da função, representando os juros, fornecem, nesse processo de capitalização, os dois tipos de regimes:

(b.1) Descontínua composta: a < b < c

(b.2) Descontínua simples: a = b = c

2.3.1. Taxas de Juros

Diferentes operações financeiras usam diferentes tipos de taxas. Tendo em vista que toda matemática financeira tem como insumo básico à taxa de juros, sua especificação rigorosa é fundamental para que se obtenham os resultados desejados. Contudo, qualquer que seja o tipo de operação financeira de interesse, a taxa de juros envolvida poderá ser especificada, conforme Souza e Clemente (1999), em uma das seguintes taxas:

Taxa proporcional: quando se é indiferente quanto a efetuar os cálculos financeiros num período qualquer, usando-se uma determinada taxa *r*, ou num outro período *k* vezes menor que o anterior, usando-se uma taxa *r/k*, e repetindo-se a operação por *k* períodos;

Taxa nominal: uma taxa é dita nominal quando o período em que a taxa está sendo referenciada não coincide com o período em que sua capitalização está sendo capitalizada;

Taxa efetiva: uma taxa de juros é dita efetiva se o período em que ela estiver referenciada for coincidente com o período de sua capitalização.

2.4. Problema do Controle

Segundo Lins (2001) o problema do controle aplicado à alocação de recursos é estudado em programação matemática para um determinado instante de tempo e, assim, é classificado como um problema estático. Trata-se de escolher valores para certas variáveis, dentro de determinado conjunto, chamado de conjunto de oportunidades, tal que uma dada função objetivo possa ser otimizada.

Quando se considera um intervalo de tempo em um problema de controle aplicado à alocação de recursos, em um intervalo fechado de tempo, esse problema passa a ser dito dinâmico. Agora a escolha passa a ser o desenvolvimento no tempo de certas variáveis, chamadas de variáveis de controle, dentro de um determinado comportamento no tempo, o conjunto de controle. As equações que regem tal variação são chamadas equações de movimento e as variáveis ali presentes que descrevem o sistema são denominadas variáveis de estado. O problema do controle passa a ser a escolha das variáveis de controle, no tempo, que venham a otimizar o funcional objetivo. Assim o problema do controle formal é compreendido pelos seguintes elementos:

***Tempo*: t**

Medido em unidades contínuas e definido para um intervalo que vai de um tempo inicial (t_0) dado, até ao tempo final (t_1), tal que $t_0 \leq t \leq t_1$.

Variáveis de estado: [x(t)]

Essas variáveis são caracterizadas por funções contínuas no tempo, com valores reais e que são representadas por um vetor de estado e as respectivas trajetórias de estado que as descrevem no tempo. Sendo $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ um vetor de dimensão n, cuja interpretação geométrica é um ponto no espaço euclidiano E_n , as variáveis de estado podem ser descritas como $x(t) = \{x(t) \in E_n \,/\, t_0 \leq t \leq t_1\}$. Para t_0 e t_1 têm-se os estados inicial e final, respectivamente, dados por $x(t_0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$.

Variáveis de controle: [h(t)]

Também são caracterizadas por funções contínuas no tempo, com valores reais e que são representadas por um vetor de controle e as respectivas trajetórias de controle que as descrevem no tempo. Sendo $h(t) = (h_1(t), h_2(t), ..., h_r(t))$ um vetor de dimensão r, as variáveis de controle podem ser descritas como $h(t) = \{h(t) \in E_r \,/\, t_0 \leq t \leq t_1\}$. Como o vetor de controle pertence a um subconjunto não vazio do espaço euclidiano as variáveis de controle sofrem restrições sobre os possíveis valores, tal que h(t) é usualmente assumido como compacto, ou seja, fechado e limitado, convexo e não variável no tempo. O conjunto admissível das trajetórias de controle compõe o conjunto de controle U, o que significa que $\{h(t)\} \in U$.

Equações de movimento: $\dot{x} = f(x(t), h(t), t)$ (2.3)

São as equações que fornecem a taxa de variação no tempo de cada variável de estado como sendo uma função de variáveis de estado, das variáveis de controle e, conseqüentemente, do próprio tempo. Quando as equações diferenciais não dependem explicitamente do tempo, as equações de movimento são ditas autônomas. As condições limites das equações de movimento são os valores iniciais dados das variáveis de estado.

Tempo inicial: (t_0)

Definido por $T = (x(t), t)$, para $t = t_0$.

Tempo final: (t_1)

Definido por $T = (x(t), t)$, para $t = t_1$.

Funcional objetivo: J

Compreende o mapeamento das trajetórias de controle para pontos da reta real, com a finalidade de obter o seu valor máximo. Geralmente toma a forma:

$$J = J\{h(t)\} = \int_{t_0}^{t_1} I(x(t), h(t), t)dt + F(x_1, t_1), \text{ para } t_0 \le t \le t_1 \tag{2.4}$$

O termo integral é chamado de Função Intermediária e mostra a dependência do funcional objetivo em relação as variáveis de estado, de controle e tempo. O segundo termo é denominado de Função Final e determina a dependência do funcional objetivo com relação à variável de estado final e o tempo final.

Esse problema gerou historicamente muito interesse entre pesquisadores e foi caracterizado por alguns gerando casos especiais, além do problema geral. Assim, quando as duas condições estão presentes no funcional, fica caracterizado o Problema de Bolza. Se a função final é identicamente zero, fica caracterizado o Problema de Lagrange. Se a função intermediária é identicamente zero, fica caracterizado o Problema de Mayer.

Resumindo, o problema geral de controle pode ser escrito da seguinte forma:

$$\underset{\{h(t)\}}{Max}\ J = \int_{t_0}^{t_1} I(x(t), h(t), t)dt + F(x_1, t_1) \tag{2.5}$$

s.a. $\dot{x} = f(x, h, t)$

$x(t_0) = x_0$ $x(t_1) = x_1$

$\{h(t)\} \in U$

2.5. Programação Dinâmica

A programação dinâmica tem por principal objetivo descrever as propriedades gerais nas alterações de sistemas, especificadas por variáveis que interagem conforme princípios ou regras. Em geral, tais alterações têm o tempo como variável independente, e assim estados de determinado sistema podem ser conhecidos através dos valores que as variáveis tomam em determinado instante. As alterações de valor obtidas para determinado intervalo de tempo traduzem o comportamento do sistema, enquanto conseqüência de interações entre as variáveis.

Modelos dinâmicos podem ser basicamente lineares e não-lineares. Nos primeiros a proporcionalidade, direta ou inversa, entre conseqüências e suas causa, está presente, o que não acontece em modelos dinâmicos não-lineares. Essa simplicidade de estrutura reflete na facilidade analítica em decompor sistemas complexos em partes menores, analisar cada parte separadamente e então recombiná-la novamente para obter informações pertinentes.

Em modelos dinâmicos não-lineares, ao contrário, alterações bruscas na trajetória dinâmica podem ocorrer antes mesmo que o processo promova uma transição completa durante a convergência para um novo estado. O processo se desenvolve direcionado a pontos para onde o seu estado futuro literalmente desvia-se, sendo este estado futuro uma propriedade intrínseca do processo por si mesmo e não o efeito de causas externas.

Segundo Lins, a visualização desses conceitos é realizada através de um campo vetorial, onde para cada ponto x no espaço de estados, é anexado um vetor f(x). O sistema deve ser verificado quanto:

- Existência de solução: assegurada pela característica da diferenciabilidade da função em todo o domínio. A condição de *f* se contínua é suficiente; sua unicidade é desejável, visto que implica na restrição topológica de que curvas de solução não podem se cruzar.
- Existência de equilíbrio: pontos de equilíbrio ocorrem na situação em que nenhuma das variáveis de estado apresenta movimento ao longo do tempo.
- Número e tipo de estabilidade dos pontos de equilíbrio: após a verificação de quantos pontos de equilíbrio existem, a analise quanto à estabilidade ou instabilidade verifica o comportamento do sistema em relação a um dos pontos de equilíbrio. O sistema será dito estável quando, a partir de um ponto de equilíbrio x_E , quando retorna para x_E quando perturbações muito próximas de x_E ocorrem (localmente estável), ou quando, a partir de um ponto x_0 qualquer do espaço de estados , x(t) converge para x_E a medida em que o tempo passa (globalmente estável). Caso contrário, o ponto de equilíbrio é dito instável.
- Existência de ciclos: situação particular, distinta da estabilidade em um ponto em que o sistema segue uma trajetória definida por órbitas fechadas, chamadas de ciclo-limite. Nessa situação, não se configura a ausência e movimento.

2.6. Princípio do Máximo de Pontryagin

O formalismo do controle ótimo, especialmente a distinção entre funções de estado e de controle, foi introduzido no período a seguir à II guerra mundial, em resposta a inúmeros problemas de otimização em engenharia que eram naturalmente expressos nessa forma. Torres (2005) argumenta que a teoria matemática do controle ótimo avançou sob várias formas, uma das quais baseia-se no célebre Princípio do Máximo de Pontryagin – uma condição necessária de otimalidade de primeira ordem para problemas de controle ótimo. A primeira etapa da teoria é resumida no livro *The mathematical theory of optimal processes* de L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mishchenko.

Segundo Torres (2005), o princípio do máximo de Pontryagin veio dar respostas a longas décadas de busca de condições necessárias satisfatórias para problemas de otimização com equações diferenciais como restrições e pode ser interpretado como uma extensão a este tipo de problemas das condições necessárias clássicas de Erdmann, Euler-Lagrange e Weierstrass do cálculo das variações, onde as hipóteses são grandemente relaxadas. Os desenvolvimentos associados ao trabalho da escola de L. S. Pontryagin dos anos 50 e 60 foram uma das grandes proezas da matemática nas últimas décadas, tendo tido um impacto crucial em vários campos de aplicação que vão desde a Investigação Operacional, Teoria dos Sistemas, Economia, Ciências da Gestão, Engenharia, Astronáutica, Biologia, Física e Matemática.

O problema do máximo consiste no problema de controle geral (Intriligator apud Lins, 2001):

$$\underset{\{h(t)\}}{Max}\ J = \int_{t_0}^{t_1} I\big(x(t), h(t), t\big)dt + F\left(x_1, t_1\right) \tag{2.6}$$

s.a. $\dot{x} = f(x, h, t)$

$x(t_0) = x_0 \qquad\qquad x(t_1) = x_1$

$\{h(t)\} \in U$

no qual *I(...), F(...) e f(...)* são funções dadas continuamente diferenciáveis; t_0, x_0, t_1, x_1 são parâmetros dados; e *h(t)* é o vetor da trajetória de controle, que deve pertencer ao conjunto de controle U dado, sendo h(t) uma função contínua do tempo com valores que pertençam ao conjunto Ω, que representa um subconjunto não vazio de E_r.

É muito comum considerar o princípio do máximo como a extensão do método dos multiplicadores de Lagrange aos problemas de otimização dinâmica. Para o caso em que o tempo final é dado e as variáveis de controle não sofrem restrição, as restrições do problema são equações diferenciais que podem ser escritas da forma:

$$f(x,h,t) - \dot{x}(t) = 0, \qquad t_0 \le t \le t_1 \tag{2.7}$$

Para cada uma das *n* restrições é associada uma nova variável, chamada de variável de co-estado. Essas novas variáveis são representadas pelo vetor **y**(t) e são equivalentes dinâmicos dos multiplicadores de Lagrange para problemas estáticos de maximização sujeitos a restrições. Como cada uma das variáveis de co-estado corresponde a uma das equações diferenciais de movimento, definidas ao longo do intervalo de tempo de t_0 a t_1, as variáveis de co-estado em geral variam também com o tempo, e são assumidas como funções contínuas no tempo e diferentes de zero.

Segundo Lins (2001) as variáveis de co-estado do Princípio do Máximo de Pontryagin guardam informação sobre a sensibilidade da solução para variações nos parâmetros do problema. Portanto, traduz a sensibilidade para variações das condições iniciais $x(t_0)$ do funcional objetivo, representado pela função:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ H(x,h,y,t) + y.\dot{x} \right\} dt + F(x_1,t_1) - \left[y(t_1)x(t_1) - y(t_0)x(t_0) \right] \tag{2.8}$$

é dada por: $$\frac{\partial J^*}{\partial x(t_0)} = y^*(t_0) \tag{2.9}$$

ou seja, pelo valor inicial ótimo da variável de co-estado. Assim, o valor inicial ótimo da variável de co-estado é a variação do valor ótimo do funcional objetivo devido a variações no valor inicial da variável de estado correspondente.

Segundo o Princípio do Máximo de Pontryagin, para se atingir o máximo, é necessário que, para qualquer $\{h(t)\} \in U$, as seguintes condições sejam atendidas:

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 0, \; t_0 \le t \le t_1 \tag{2.10}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \; t_0 \le t \le t_1 \tag{2.11}$$

$$y(t_1) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \tag{2.12}$$

onde H é a função hamiltoniana, definida como a soma da função intermediária do funcional objetivo com o produto interno do vetor das variáveis de co-estado com o vetor das taxas de variação das variáveis de estado:

$$H(x,h,y,t) \equiv I(x,h,t) + \mathbf{y} \cdot \mathbf{f}(x,h,t) \tag{2.13}$$

A condição (2.10) indica que a função hamiltoniana é maximizada pela escolha de variáveis de controle em cada ponto ao longo da trajetória ótima. As equações de movimento das variáveis de estado podem ser expressas em termos da função hamiltoniana, como:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \tag{2.14}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.15}$$

O conjunto das equações diferenciais para as variáveis de estado (equações de movimento) e as equações diferenciais para as variáveis de co-estado dentro das condições limites são denominadas equações canônicas, e formam um conjunto de *2n* equações diferenciais no qual *n* equações têm condições limite no tempo inicial e *n* equações apresentam condições limite no tempo final.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}\ ,\ x(t_0) = x_0 \tag{2.16}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}\ ,\ y(t_1) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \tag{2.17}$$

Em resumo, a técnica do Princípio do Máximo de Pontryagin consiste em adicionar *n* variáveis de co-estado y(t) ao problema do controle, definir a função hamiltoniana como:

$$H(x,h,y,t) \equiv I(x,h,t) + \mathbf{y} \cdot \mathbf{f}(x,h,t) \tag{2.18}$$

e encontrar as trajetórias {h(t)}, {y(t)} e {x(t)} que satisfazem à:

$$\underset{\{h \in \Omega\}}{Max}\, H(x,h,y,t)\ \ \forall t,\ \ t_0 \le t \le t_1 \tag{2.19}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}\ ,\ x(t_0) = x_0$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}\ ,\ y(t_1) = \frac{\partial F}{\partial x_1}$$

Essas condições asseguram um máximo local. A solução para o controle ótimo segue a maximização do hamiltoniano, o qual usualmente fornece as variáveis de controle ótimas, não como uma função do tempo, mas como funções de variáveis de co-estado. Obter as variáveis de controle como função do tempo se requer a determinação da trajetória das variáveis de co-estado, significando resolver um problema de condição de contorno de dois pontos.

2.7. Sistemas Dinâmicos

Essa técnica que será descrita a partir daqui foi escolhida por proporcionar um caminho para a solução do sistema de equações diferenciais resultante da aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin ao problema do controle. E, ainda, por ser uma ferramenta matemática que pode ser utilizada em vários campos de estudo como a física e a engenharia.

2.7.1. Conceitos

Sistemas de equações diferenciais ordinárias simultâneas aparecem em problemas de diversas áreas do conhecimento humano envolvendo variáveis dependentes, cada uma das quais sendo uma função de uma única variável independente.

O estado de um sistema consiste em uma descrição de como o sistema se comportará (Arrow & Intriligator apud Lins, 2001). Em várias situações, o estado de um sistema pode ser descrito por uma quantidade *n* de números reais. O espaço de estados consiste em todos os estados relevantes ou admissíveis. Na maioria das aplicações, o espaço de estados pode ser referido como um subconjunto de R^n, e que pode, em muitas situações, ser referido como sendo topologicamente equivalente ao disco unitário, definido por:

$$D^n = \{x \in R^n\text{: } |x| \leq 1\} \tag{2.20}$$

Seja X o espaço de estados de algum sistema em consideração. A função de transição de estados T será uma função de $X \times R$ para X (T: $X \times R \rightarrow X$). O eixo real é interpretado como tempo e $T(x, t)$ fornece o estado do sistema no tempo t se o sistema estava em x no tempo 0. Na maioria das vezes, a função de transição de estados não é dada explicitamente, mas é fornecida implicitamente por um sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Seja x: $R \rightarrow X$ uma solução para esse sistema de equações diferenciais e condições iniciais apresentadas, então x(t) define a função de transição de estados:

$$T(x_0, t) \equiv x(t)$$

A partir do momento que se deseja enfatizar a dependência da posição do estado no tempo t com a posição inicial x deve-se utilizar a função fluxo da equação diferencial $\phi_t(x)$, definida como:

$$\phi_t(x) \equiv T(x, t)$$

$$\phi_t\text{: } X \rightarrow X$$

Um sistema dinâmico é apenas um espaço de estados com uma função de transição de estados (Lins, 2001). É possível visualizar esses conceitos é através do uso de um campo vetorial, no qual para cada ponto x no espaço de estados é anexado um vetor $\mathbf{f}$(x). As curvas de solução (trajetórias) para o sistema de equações diferenciais $\dot{x} = f(x(t))$ serão as imagens da função $\phi_t(x)$ ao passo que o tempo percorre o eixo R e x percorre o eixo S. É fácil de ver que se x é um ponto em alguma curva de solução, então $\mathbf{f}$(x) é um vetor tangente à curva em x.

2.7.2. Ferramentas

Considerando um sistema de equações diferenciais e um espaço de estados X, existem ainda algumas questões que surgem naturalmente, como as relacionadas abaixo:

- Existência de solução
- Existência de equilíbrio
- Número de pontos de equilíbrio
- Tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio

A condição de que f seja contínua é suficiente para garantir a existência de uma solução (Lins, 2001). Porém a unicidade do resultado é desejável, pois implica na restrição topológica de que curvas de solução não podem se cruzar. Esse tipo de regularidade é mais valiosa do que a restrição adicional da diferenciabilidade contínua.

Outro ponto de interesse é o de como as curvas de solução se comportarão para diferentes condições iniciais. É certo que, para sistemas não caóticos, o fluxo das equações diferenciais ϕ_t: X $\rightarrow$ X é contínuo como uma função de x, o que leva a conclusão de que se duas condições iniciais forem próximas, os respectivos fluxos das equações diferenciais serão também próximos.

O equilíbrio de um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$ é um ponto x^e em X tal que $f(x^e) = 0$. Se um sistema dinâmico alcança o estado de equilíbrio, ele permanecerá lá para sempre, ou seja, não há movimento no equilíbrio. A questão da existência de um ponto de equilíbrio para esse sistema dinâmico é garantida pelo teorema que será enunciado a seguir:

"Seja f: $D^n \rightarrow R^n$ um campo vetorial contínuo em um disco unitário que aponta na fronteira de D^n; isto é, $x \cdot f(x) < 0$ para todo x tal que $|x| = 1$. Então existe um x^e em D^n tal que $f(x^e) = 0$."

Considere-se agora um sistema dinâmico no disco que aponta para na fronteira do disco, o que garante a existência de pelo menos um ponto de equilíbrio x^e. Não obstante, a condição para a unicidade do equilíbrio provém da topologia diferencial de Poincaré, conhecida por índice de campo vetorial. Para o caso unidimensional, onde $\dot{x} = f(x)$ define um campo vetorial no intervalo unitário que aponta internamente na fronteira, se $\dot{f}(x^e)$ possui apenas um sinal em todos os pontos de equilíbrio, então só poderá existir um ponto de equilíbrio.

2.7.3. Análise de estabilidade de pontos de equilíbrio

Seja então x^e um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico f: $X \rightarrow R^n$. Esse equilíbrio pode ser classificado em dois tipos: estável ou instável. A classificação é feita conforme o comportamento do sistema em torno de x^e. Existem ainda duas outras classificações para pontos de equilíbrio estáveis, que são os de localmente estável ou globalmente (ou assintoticamente) estável (Arrow & Intriligator apud Lins, 2001).

O equilíbrio para ser dito localmente estável é preciso que o sistema retorne para x^e quando perturbado para estados próximos. Se um equilíbrio é relevante de modo que o sistema permanece equilibrado para qualquer duração de tempo, então ele será considerado localmente estável. Para que o ponto x^e seja considerado globalmente estável x(t) se aproxima de x^e à medida que o tempo segue para o infinito, tendo o sistema partido de uma condição inicial x_0. A representação para esse tipo de estabilidade é: $\lim_{t \to \infty} \phi(x_0) = x^e$. Caso nenhuma das condições anteriores seja satisfeita, o ponto de equilíbrio é considerado instável.

Há ainda uma situação particular distinta de estabilidade com a qual pode-se deparar que é quando para um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$, um ponto x não está em equilíbrio, mas $\phi_t(x) = x$ para algum $t \neq 0$. Essa situação configura o que se chama de órbitas fechada, também referida por ciclos. Um importante critério para a existência de ciclos é o teorema de Poincaré – Bendixton:

Um conjunto limite compacto não vazio de um sistema continuamente diferenciável em R^2, que não contém pontos de equilíbrio, é uma órbita fechada.

Pode-se determinar o tipo de estabilidade local das soluções do sistema de equações diferenciais lineares com base nos autovalores da matriz **C** dos coeficientes de uma expansão linear no ponto de equilíbrio em questão.

Os autovalores são as raízes da equação característica de **C**, representada por:

$$|\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \tag{2.22}$$

onde:

C - é a matriz dos coeficientes da expansão linear do sistema no ponto de equilíbrio;

λ - é a variável da equação característica;

I - é a matriz identidade de mesma ordem da matriz **C**.

Para o caso no qual o sistema dinâmico seja constituído de duas equações diferenciais lineares de primeira ordem, a matriz **C** será quadrada. Se os autovalores dessa matriz **C** são reais e ambos negativos, então o ponto de equilíbrio é chamado um nó estável e qualquer que seja a direção da perturbação local do sistema em equilíbrio, esse seguirá uma trajetória que o levará de volta ao ponto de equilíbrio. Se os autovalores são reais e ambos positivos, o ponto de equilíbrio é será um nó instável e as trajetórias irão conduzir o sistema para longe do ponto de equilíbrio, se perturbado localmente.

Quando os autovalores são reais e de sinais opostos existirá um lugar de pontos, chamado de separatriz, que divide o plano formado pelas variáveis do sistema em duas regiões distintas. Somente partindo de um ponto inicial ao longo da separatriz é que o sistema acaba por percorrer uma trajetória que o leva ao equilíbrio. Nessa situação, o ponto de equilíbrio é o que se chama de ponto de sela.

Se os autovalores são complexos conjugados podem-se distinguir três situações: quando a parte real é negativa, o ponto de equilíbrio é chamado de foco estável, no qual o sistema em equilíbrio, quando sofre uma perturbação local, percorre uma trajetória espiral de volta ao ponto de equilíbrio; quando a parte real é nula, configuram-se as órbitas elípticas fechadas (ciclos) em torno do ponto de equilíbrio, nesse caso chamado de centro, pois o sistema seguirá uma trajetória que o levará de volta ao ponto inicial sem passar pelo equilíbrio; e quando a parte real é positiva, o ponto de equilíbrio é um foco instável, onde a trajetória do sistema também tem forma espiral, de modo a afastá-lo do equilíbrio. As possíveis trajetórias que o sistema pode assumir conforme os seus autovalores são mostrados na figura a seguir:

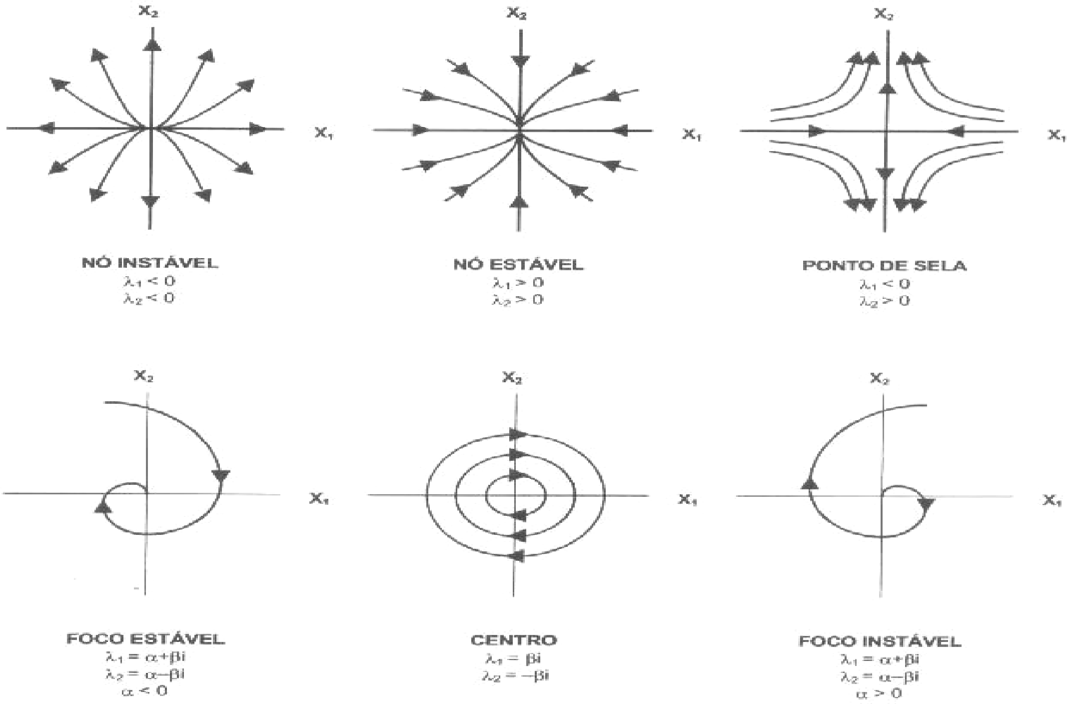

Figura 2.4: Trajetórias possíveis

Fonte: Lins (2001; p. 18)

3. MODELO PROPOSTO COMO SOLUÇÃO

Nesse capítulo será feita uma apresentação do problema que se deseja resolver; a seguir será feita uma interpretação do problema na qual serão apresentadas as condições sob as quais o problema foi resolvido e algumas características do contexto no qual o problema está inserido. A seguir será apresentado o modelo que foi elaborado para resolver o problema e todas as suas características serão esmiuçadas para que possamos responder as perguntas clássicas sobre investimento.

3.1. Definição do problema

Uma certa empresa possui uma carteira com uma única opção de investimento em uma aplicação financeira. O montante investido rende continuamente juros compostos a uma taxa específica. O gestor pretende montar uma conta de investimento na qual sejam feitos aplicações ao longo de um período de tempo e a partir de dado momento (revelado pelo modelo) possa efetuar resgates dessa reserva acumulada de forma a repassar os dividendos das aplicações aos acionistas da empresa em um período de tempo finito. O modelo será o responsável por mostrar quais os momentos em que o gestor deve realizar os depósitos ou retiradas e quanto deverá ser depositado ou retirado a cada período. Espera-se que ao final do período, a aplicação tenha se esgotado. Deseja-se maximizar o lucro líquido total pelos acionistas pelas aplicações da carteira de investimentos, considerando a taxa de interesse em se usufruir o capital a ser investido em um momento anterior ao necessário pela aplicação.

3.2. Interpretação

Ao gestor de uma carteira de investimento, no caso presente com uma única opção de investimento, é pedido que monte uma aplicação que possa render o máximo de dividendos possível a seus acionistas. O tempo de vigência da aplicação é determinado e o gestor deve montar essa conta de investimento de modo que seja mais interessante para os acionistas manter o dinheiro nessa conta e a partir de determinado momento ao longo do tempo de aplicação começar a resgatar aquilo que foi investido e os acionistas possam usufruir desse investimento o máximo que puderem. Como cabe ao gestor a decisão entre manter o dinheiro na conta ou repassar seus dividendos para os investidores para maximizar os seus ganhos, esse se caracteriza por um problema de controle. E como esse se configura em um problema de alocação de recursos considerado dentro de um intervalo de tempo, o problema pode ser dito dinâmico.

É necessário que o gestor monte tal aplicação de uma forma que convença seus acionistas a deixar seus recursos aplicados nela pelo tempo devido para que os maiores rendimentos possíveis possam ser adquiridos dessa aplicação. Então é preciso um bom poder de convencimento por parte do gestor para que as pessoas envolvidas com o investimento façam uma aplicação de tão longo prazo como o considerado aqui.

Para a solução foi considerado que o gestor mantém o dinheiro na conta até que o modelo mostre qual o melhor momento para que sejam iniciadas as retiradas, portanto não há um conjunto de decisões tomadas a cada mês. Não só isso, mas todas as informações sobre o investimento são retiradas das respostas que o modelo dá a essas perguntas como: quanto deve ser aplicado a cada mês na conta, quanto deve ser retirado para distribuição entre os acionistas, em que momento o gestor deixa de fazer depósitos e passa a fazer as retiradas.

No modelo não foram feitas considerações sobre o risco no sentido probabilístico do termo envolvido em aplicações financeiras. Todas os parâmetros que aparecem na formulação do modelo são constantes no tempo enquanto as variáveis de estado e co-estado são funções unicamente do tempo.

Todas as funções que compõem a formação desse modelo são consideradas contínuas no tempo. Isso pode ser considerado para um período de existência da conta que seja bem superior ao período de capitalização considerado. No modelo foi considerada uma capitalização mensal e o tempo de existência da conta foi estipulado em vinte anos ou duzentos e quarenta meses, o que torna essa aproximação aceitável.

Embora com sua limitação de não considerar os riscos envolvidos na atividade financeira, foi se montado um modelo inspirado em aplicações do tipo poupança ou previdência privada ou alguma outra forma de investimento, os quais se caracterizam por longo tempo de aplicação aliado a rendimentos que não são tão expressivos em cada período de capitalização. Esses tipos de investimento também se caracterizam por baixos níveis de riscos o que os torna bons candidatos a investimentos de longo prazo como é considerado no modelo.

3.3. Modelo proposto

As variáveis presentes nesse modelo são: variável de estado $x(t)$ que representa a acumulação de capital ocorrida ao longo do tempo de vigência do investimento; variável de controle $h(t)$ que representa a movimentação financeira da conta durante seu tempo de existência.

A idéia é que se consiga maximizar os retornos proporcionados por essa aplicação àqueles que optarem por realizá-la e a partir daí averiguar sob quais condições se consegue obter os maiores dividendos dessa carteira. Por isso, o funcional objetivo foi montado de uma forma que seja a diferença entre a movimentação ($h(t)$) realizada na conta de investimento – que se espera inicialmente é uma movimentação composta apenas de depósitos e após um certo período passa a ser de retiradas – e as taxas de administração da conta e de custos operacionais da movimentação decorrentes da própria aplicação. A parcela "$[\beta h(t)]^2$" aparece na forma quadrática para significar que sempre que há uma movimentação na conta um percentual sobre essa movimentação é cobrado ao investidor, independente de ser um depósito ou uma retirada a guisa de taxa de movimentação cobrada pela instituição por supostos custo operacionais. A parcela "$\gamma x(t)$" representa a taxação que incide sobre a conta cobrada como uma taxa de administração ao investidor pela instituição na qual a conta existe. A parcela exponencial ("$exp\ (-\rho t)$") do integrando faz referência ao interesse do investidor em obter ganhos imediatos e decai à medida que passa o tempo e a conta acumula cada vez mais rendimentos.

Ao contrário do senso comum de que se deve cada vez mais acumular rendimentos, esse modelo prega que existirá um momento no qual se deverá passar a usufruir dessa reserva que foi efetuada durante certo tempo e se tirar o maior proveito possível da carteira de investimento enquanto estiver em vigor.

As condições iniciais representam que o total acumulado ($x(t)$) no início do tempo de aplicação a conta começa sem nenhum investimento e que a medida que o tempo passa depósitos são realizados para que haja a acumulação de capital e que ao final do tempo determinado para a existência da conta esse acumulado se esgota.

A equação de movimento (equação diferencial) representa a dinâmica da variável $x(t)$ ao longo do tempo. Foi considerado que só o próprio valor de $x(t)$ e o valor da movimentação da conta é que influenciam na sua dinâmica. O sinal negativo que acompanha a variável $h(t)$ na equação significa que valores positivos dessa variável contribuem para a diminuição do valor da variável $x(t)$ (e podem ser interpretados como retiradas) enquanto que valores negativos de $h(t)$ significa que esse valor contribui para a dinâmica da variável $x(t)$ de forma positiva (depósito).

Maximizar $\int_0^{\tau} e^{-\rho t}\left(h(t) - [\beta h(t)]^2 - \gamma x(t)\right)dx$ (3.1)

sujeito a: $\dot{x} = \mu x - h$ (3.2)

$x(0) = 0 \qquad x(\tau) = 0$

onde:

$x(t) =$ Montante acumulado na conta de investimento ao longo do tempo

$h(t) =$ Função de movimentação da conta de investimento ao longo do tempo

$\rho =$ Taxa de interesse em se obter lucros a curto prazo

$\mu =$ Taxa de rendimento da conta de investimento

$\beta =$ Percentual de imposto sobre a movimentação da conta de investimento

$\gamma =$ Taxa de administração da conta de investimento

$\tau =$ Prazo final para fim do investimento

Para a solução do modelo apresentado acima, optou-se por utilizar o Princípio do Máximo de Pontryagin, para isso deve ser calculado o Hamiltoniano, conforme abaixo:

$$H(x, y, h, t) = e^{-\rho t}\left(h - [\beta h]^2 - \gamma x\right) + y\left(\mu x - h\right) \tag{3.3}$$

Por esse princípio, são condições necessárias para um máximo local:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{y} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \tag{3.6}$$

Dessa forma, podemos fazer:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\gamma e^{-\rho t} + \mu y = -\dot{y} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial h} = e^{-\rho t}\left(1 - 2\beta^2 h\right) - y = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \mu x - h = \dot{x} \tag{3.9}$$

Isolando *y* na equação (3.8) e em seguida derivando em relação a *t*, temos:

$$y = e^{-\rho t}\left(1 - 2\beta^2 h\right)$$

$$\dot{y} = -\rho e^{-\rho t}\left(1 - 2\beta^2 h\right) - 2\beta^2 e^{-\rho t}\dot{h}$$

Substituindo os resultados encontrados acima na equação (3.7), obtemos a seguinte expressão para a derivada da função *h(t)* em relação ao tempo:

$$\dot{h} = -(\mu - \rho)h + \frac{(\mu - \rho - \gamma)}{2\beta^2}$$

Essa é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem para a função *h(t)* cuja solução é:

$$h(t) = \frac{(\mu - \rho - \gamma)e^{(\mu - \rho)t}}{2\beta^2(\mu - \rho)} + Ae^{-(\mu - \rho)t} \tag{3.10}$$

onde A é uma constante de integração.

Utilizando o resultado acima, podemos encontrar a função *x(t)*, substituindo a função *h(t)* na equação (3.9) temos a seguinte relação:

$$\dot{x} = \mu x - \frac{(\mu - \rho - \gamma)e^{(\mu - \rho)t}}{2\beta^2(\mu - \rho)} - Ae^{-(\mu - \rho)t}$$

Essa também é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem só que para a função *x(t)* e sua solução é:

$$x(t) = \frac{(\mu - \rho - \gamma)e^{(\mu - \rho)t}}{2\beta^2\rho(\mu - \rho)} + \frac{Ae^{-(\mu - \rho)t}}{(2\mu - \rho)} + Be^{\mu t} \tag{3.11}$$

Nesta equação B também é uma constante de integração.

Aplicando as condições iniciais do problema a função *x(t)* encontrada acima podemos montar um sistema linear cuja solução nos dará os valores das constantes A e B.

$$x(0) = \frac{(\mu - \rho - \gamma)}{2\rho\beta^2(\mu - \rho)} + \frac{A}{(2\mu - \rho)} + B = 0$$

$$x(\tau) = \frac{(\mu - \rho - \gamma)e^{(\mu - \rho)\tau}}{2\rho\beta^2(\mu - \rho)} + \frac{Ae^{-(\mu - \rho)\tau}}{(2\mu - \rho)} + Be^{\mu\tau} = 0$$

Resolvendo o sistema de equações acima para A e B, encontramos expressões para essas duas constantes a partir dos parâmetros do problema:

$$A = \frac{(\mu - \rho - \gamma)}{2\beta^2\rho(\mu - \rho)} \frac{\left[e^{\mu\tau} - e^{(\mu - \rho)\tau}\right]}{\left[e^{-(\mu - \rho)\tau} - e^{\mu\tau}\right]}(2\mu - \rho) \tag{3.12}$$

$$B = -\frac{(\mu - \rho - \gamma)}{2\beta^2\rho(\mu - \rho)} \left\{ \frac{\left[e^{\mu\tau} - e^{(\mu - \rho)\tau}\right]}{\left[e^{-(\mu - \rho)\tau} - e^{\mu\tau}\right]} + 1 \right\} \tag{3.13}$$

3.4. Pontos de Equilíbrio

Para se encontrar os pontos de equilíbrio é necessário resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{h} = (\rho - \mu)h + \dfrac{(\mu - \rho - \gamma)}{2\beta^2} = 0 \\ \dot{x} = \mu x - h = 0 \end{cases}$$

Os pontos equilíbrio consistirão nos pontos x^e e h^e que sejam solução do sistema linear apresentado acima. A solução encontrada para o sistema acima foi a seguinte:

$$x^e = \frac{1}{2\beta^2\mu}\left[1 - \frac{\gamma}{(\mu - \rho)}\right] \tag{3.14}$$

$$h^e = \frac{1}{2\beta^2}\left[1 - \frac{\gamma}{(\mu - \rho)}\right] \tag{3.15}$$

O valor de x^e nos traz uma informação importante já que é uma necessidade do problema que $x(t) > 0$ e não seria diferente para o valor de x^e. E, como todos os parâmetros envolvidos no problema são números positivos, basta que tenhamos o valor entre parênteses positivo e essa condição estará satisfeita. É aqui que encontramos uma importante relação entre alguns dos parâmetros do problema resolvendo a seguinte inequação:

$$1 - \frac{\gamma}{(\mu - \rho)} > 0$$

e encontramos a relação a seguir: $\gamma < \mu - \rho$.

Nesse caso, existem duas possibilidades, que são:

1) **$\mu > \rho$**: para essa possibilidade temos um limitante superior para a taxa γ, já que esse parâmetro possui um valor positivo e a diferença entre μ e ρ também é um valor positivo: **$0 < \gamma < \mu - \rho$**.

2) **$\mu < \rho$**: essa possibilidade é a menos interessante, pois a diferença entre μ e ρ é um número negativo e como γ é um valor positivo será sempre superior a essa diferença o que torna impossível encontrar uma relação entre os parâmetros e essa suposição é menos interessante para o modelo, pois não nos permite investigar uma possível relação entre os parâmetros do modelo.

3.5. Ponto de Retirada

Outro ponto de especial interesse que podemos calcular nesse modelo é aquele em que os valores de $h(t)$ deixam de ser negativos e passam a ser positivos, ou seja, o momento em que o gestor pára de fazer depósitos e passa a realizar as retiradas para distribuição dos dividendos da aplicação entre os acionistas.

Esse ponto é encontrado resolvendo a seguinte equação: $h(t_R) = 0$. Temos:

$$h(t) = \frac{(\mu - \rho - \gamma)e^{(\mu-\rho)t}}{2\beta^2(\mu - \rho)} + Ae^{-(\mu-\rho)t}$$

onde $A = \dfrac{(\mu-\rho-\gamma)}{2\beta^2\rho(\mu-\rho)} \dfrac{\left[e^{\mu\tau} - e^{(\mu-\rho)\tau}\right]}{\left[e^{-(\mu-\rho)\tau} - e^{\mu\tau}\right]}(2\mu-\rho)$

Fazendo $h(t_R) = 0$ temos:

$$t_R = \frac{1}{2(\mu-\rho)} \ln\left[-\rho(2\mu-\rho)\frac{[e^{\mu\tau} - e^{(\mu-\rho)\tau}]}{[e^{-(\mu-\rho)\tau} - e^{\mu\tau}]}\right] \tag{3.16}$$

Basta substituir os valores para os parâmetros assinalados e encontra-se o momento no qual o gestor pode deixar de fazer depósitos e passar a fazer as retiradas para os acionistas. É interessante notar que o tempo determinado pelo modelo para que sejam iniciadas as retiradas da conta de investimento não depende do valor do parâmetro β, ou seja, não há relação entre o momento em se iniciam as retiradas da conta e a taxa cobrada pela instituição responsável pela conta todas as vezes que ocorre uma movimentação na conta por parte do gestor. Também é possível verificar pela expressão que o momento para início das retiradas não depende do valor de γ, a taxa de administração da conta paga à instituição.

3.6. Total Acumulado

Esse resultado provém da resolução da integral que forma o funcional objetivo utilizando-se as funções que foram encontradas no decorrer da modelagem. Para diminuir o tamanho das expressões encontradas fez-se o seguinte agrupamento de termos que aparecem em vários termos da expressão 3.17:

$$k = \frac{(\mu-\rho-\gamma)}{2\beta^2(\mu-\rho)}$$

Lembrando ainda que a expressão para o funcional objetivo é a seguinte:

$$J = \int_0^\tau e^{-\rho t}\left\{h(t) - [\beta h(t)]^2 - \gamma x(t)\right\}dt$$

Substituindo as expressões das funções $h(t)$ e $x(t)$ encontradas no modelo e procedendo a solução da integral encontramos a seguinte expressão para o funcional J em relação aos parâmetros do problema:

$$J = \frac{k}{(\mu-2\rho)}\left[1-\frac{\gamma}{\rho}\right]\left[e^{(\mu-\rho)\tau}-1\right] + \frac{A}{\mu}\left[1+\frac{\gamma}{(2\mu-\rho)}\right]\left[e^{-\mu\tau}-1\right] - \frac{\beta^2k^2}{(2\mu-3\rho)}\left[e^{(2\mu-3\rho)\tau}-1\right] - \frac{2kA\beta^2}{\rho}\left[e^{-\rho\tau}-1\right]$$
$$+\frac{\beta^2A^2}{(2\mu-\rho)}\left[e^{-(2\mu-\rho)\tau}-1\right] - \frac{B\gamma}{(\mu-\rho)}\left[e^{(\mu-\rho)\tau}-1\right] \tag{3.17}$$

As constantes *A* e *B* que aparecem são as mesmas da resolução das funções que formam a solução do modelo e suas expressões estão na seção 3.3.

O resultado que advirá dessa integral é o que no modelo se considera como aquilo que os acionistas terão como lucro ao final do tempo de vigência da conta de investimento nos moldes como apresentado no modelo.

Além do total acumulado, outro dado importante que se pode extrair das funções encontradas como solução para o presente modelo é em quanto tempo os acionistas teriam recuperado os investimentos que foram feitos durante os primeiros sessenta meses de vigência do mesmo. Esse resultado pode ser extraído resolvendo-se a seguinte integral:

$$\int_0^{\varphi} h(t)dt = 0 \tag{3.18}$$

na qual *h(t)* é a função 3.10. Resolvendo-se a equação integral 3.18 encontramos que o valor de φ a partir do qual tudo que for distribuído entre os acionistas representará lucro do investimento. E os acionistas terão conseguido reaver o que investiram.

3.7. Estabilidade do ponto de equilíbrio

Antes de realizar o estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio é preciso montar a matriz dos coeficientes do sistema no ponto de equilíbrio, ou seja, a matriz **C** da seção 2.7.3. Mas, primeiro, relembrando o sistema dinâmico em questão:

$$\dot{x} = \mu x - h$$

$$\dot{h} = 0x + (\rho - \mu)h + \frac{(\mu - \rho - \gamma)}{2\beta^2}$$

A partir desse sistema montamos a matriz **C**:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 0 & \rho - \mu \end{pmatrix}$$

A matriz identidade para esse sistema é a seguinte:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para efetuar o cálculo dos autovalores desse sistema, deve-se calcular a seguinte equação: det $|\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ no qual λ assume os autovalores do sistema. Resolvendo-se essa equação os autovalores do sistema são: $\lambda_1 = \mu$ e $\lambda_2 = \rho - \mu$. Como já mencionado, todos os valores dos parâmetros do problema são positivos, assim a raiz $\lambda_1 = \mu$ é um autovalor positivo. E, como é uma das hipóteses do modelo e foi discutido na seção 3.4, é mais interessante para o modelo que μ > ρ, temos que o autovalor $\lambda_2 = \rho - \mu$ é um autovalor negativo. Nesse caso temos um **ponto de sela** como ponto de equilíbrio.

De posse desses dois autovalores pode-se, também, encontrar os autovetores para o sistema que está sendo estudado. Encontramos os autovetores resolvendo a seguinte equação vetorial:

$$(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I})\xi = \mathbf{0} \tag{3.19}$$

na qual λ são os autovalores já encontrados e ξ são os autovetores que podemos encontrar substituindo os valores para λ_1 e λ_2 na equação matricial acima e tomando **C** como a matriz dos coeficientes já encontrada e **I** como a matriz identidade de ordem dois.

Quando substituímos $\lambda_1 = \mu$ na equação matricial 3.19 temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \rho - 2\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para está equação têm-se duas possibilidades de solução: ou h = 0 e x = const., o que implica em um autovetor paralelo ao eixo x do plano de fase; ou, se $\rho - 2\mu = 0$, quando temos que h = const 1. x = const 2 o que implica em qualquer vetor do plano de fase e não interessante para a presente discussão. Assim, o autovetor associado a $\lambda_1 = \mu$ é (x, h) = (c, 0) com c igual a uma constante qualquer.

A equação matricial para $\lambda_2 = \rho - \mu$ tem a forma abaixo:

$$\begin{pmatrix} 2\mu - \rho & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nessa equação temos que o vetor solução é paralelo à reta $h = -(2\mu - \rho)x$.

De posse desses dados podemos montar o plano de fase para o sistema estudado. Esse plano relaciona as várias *x(t)* e *h(t)* e mostra as possíveis trajetórias que o sistema pode tomar. A figura 3.1 mostra um esboço do plano de fase para esse sistema.

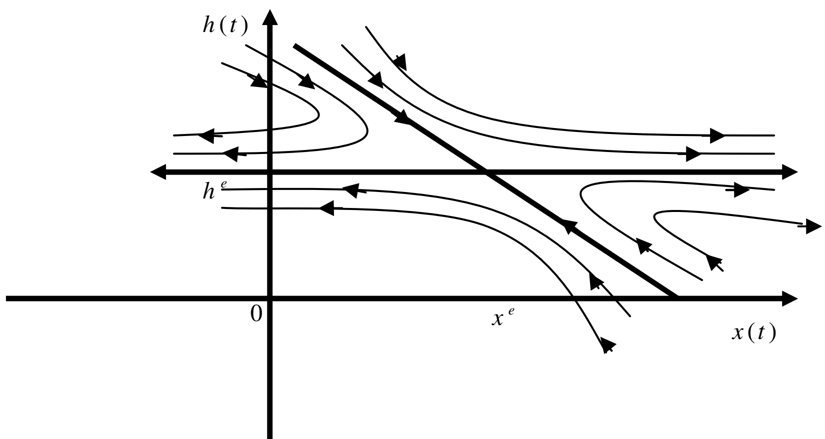

Figura 3.1: plano de fase.

Na figura 3.1 é representado o plano de fase de forma exemplificada. As linhas mais finas representam algumas das possíveis trajetórias que podem ser assumidas pelo sistema. Dentre essas está àquela que terá como resultado o maior retorno possível aos acionistas da conta de investimento representada pelo modelo. As duas retas que se cruzam no primeiro quadrante são as trajetórias determinadas pelos autovetores do sistema. É possível notar que as únicas trajetórias que passam pelo ponto de equilíbrio do sistema (ponto de cruzamento das retas) são aquelas que seguem em cima dessas retas, ou seja, o único modo de o sistema convergir para o equilíbrio é se iniciar por uma dessas trajetórias. Qualquer outro início leva a uma trajetória que a princípio pode se aproximar do ponto de equilíbrio, mas com o tempo tenderá a se afastar desse ponto.

4. SIMULAÇÃO

Com o objetivo de complementar os estudos realizados nesse trabalho foi procedida uma simulação dos resultados a partir das respostas trazidas pelo modelo e de modo que se possa observar o comportamento das funções que foram encontradas como solução para o problema proposto. Assim, a seguir serão apresentados os resultados para essa simulação.

Para procedermos à simulação é preciso que sejam atribuídos valores aos diversos parâmetros que fazem parte do modelo. Esses valores foram assumidos aleatoriamente, respeitando apenas as relações que foram encontradas a partir das análises do problema. A seguir relacionam-se os valores dos parâmetros:

$\beta = 0{,}003$

$\gamma = 0{,}001$

$\mu = 0{,}015$

$\rho = 0{,}012$

$\tau = 240$

Para esses valores dos parâmetros encontramos os seguintes valores para as constantes do modelo:

A = -53143,76 B = -133988,45

E assim, a função de controle $h(t)$ que rege a política de retiradas ao longo do tempo tem a seguinte forma:

$$h(t) = 37.037{,}04\, e^{0{,}003\, t} - 53.143{,}76\, e^{-0{,}003\, t}$$

E o seu gráfico tem a seguinte forma:

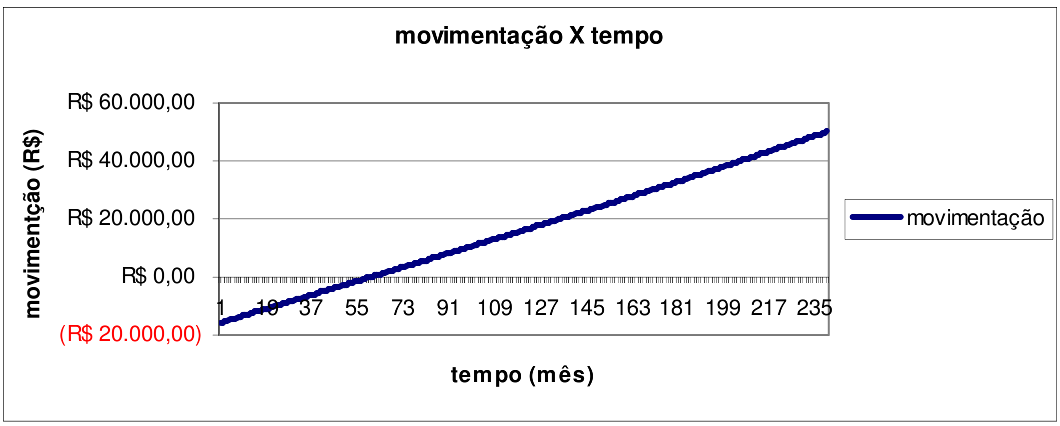

Figura 4.1: gráfico de evolução da movimentação financeira ao longo do tempo

É possível ver que o gráfico da função tem as características que eram discutidas para a função $h(t)$, que são: começa com valores negativos que correspondem ao período de depósitos efetuados na conta de investimento. E depois de um certo tempo a função passa a ter valores positivos correspondentes ao período de retiradas feitas pelo gestor da conta para distribuir seus dividendos entre os acionistas.

Os valores atribuídos aos parâmetros também nos permitem calcular o valor de t_R, ou seja, aquele momento no qual o modelo mostra ao gestor que se pode passar a fazer retiradas da conta de investimento. A partir desses dados, o valor de t_R encontrado foi:

$\boxed{t_R = 60,18}$

Isso quer dizer que a partir desse momento de aplicação o gestor pode dar início à distribuição de dividendos aos acionistas. O que configura um período de investimento de cinco anos. Não obstante, como a aplicação foi tomada com duração de vinte anos obtém-se um período de retiradas de quinze anos nos quais os dividendos do investimento serão distribuídos aos acionistas.

Podemos proceder a uma análise semelhante para *x(t)*, função que representa o total acumulado na conta de investimento durante o período de vigência do modelo. Seu gráfico é o seguinte:

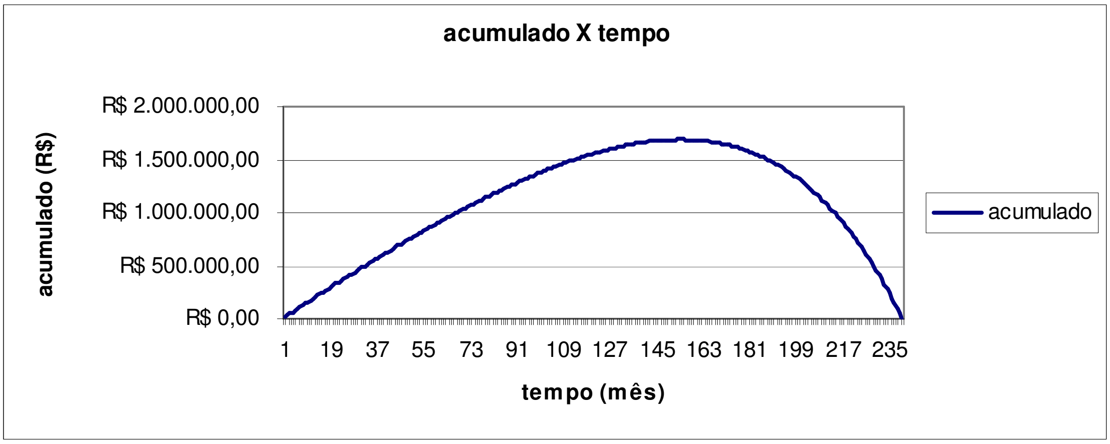

Figura 4.2: gráfico de acumulação de capital

A equação encontrada para x(t) foi a seguinte:

$$x(t) = 3.086.419,75e^{0,003t} - 2.952.431,30e^{-0,003t} - 133.988,45e^{0,015t}$$

O gráfico tem o comportamento que era esperado para a função *x(t)*, já que exibe um período de crescimento até um ponto máximo que reflete o aumento do total acumulado mesmo depois do início das retiradas que é mostrado no gráfico 4.1.

Além disso, pelo gráfico é possível ver algumas características interessantes da função *x(t)*: apesar de *h(t)* passar a ser positiva a partir de t = 60,18, a função *x(t)* continua crescente até aproximadamente t = 154 o que significa que até esse ponto os depósitos feitos somados aos rendimentos do investimento são suficientes para garantir o crescimento do total acumulado e só a partir de t = 155 aproximadamente as retiradas começam a ser maiores que os rendimentos proporcionados pelo total acumulado até então.

Outro resultado interessante que podemos nomear aqui é o valor da integral do funcional objetivo que é obtido quando se substituem os valores dos parâmetros que utilizamos nesse capítulo. Para esses valores encontramos o seguinte resultado:

$$\boxed{\boldsymbol{J = R\$\ 1.271.754,00}}$$

Esse resultado mostra que a diferença entre aquilo que é aplicado pelos acionistas e o que o gestor distribui aos mesmos tem um resultado positivo, ou seja, o modelo aponta que a operação é lucrativa ao final do seu período de vigência. Esse valor é expresso em valores atuais, ou seja, podemos identificá-lo como o Valor Presente Líquido do nosso investimento, visto que é calculado levando-se em conta a operação de desconto decorrente da exponencial.

O outro resultado importante decorrente dessa formulação do problema é o momento no qual os acionistas conseguem reaver o que foi investido em um primeiro momento. Esse momento é o valor de φ que exprimimos como encontrar na seção 3.6. O valor de φ encontrado quando substituímos os valores para os parâmetros usados na simulação é: φ = 120,36. Isso quer dizer que a partir de **t = 121** meses tudo o que for distribuído entre os acionistas representará lucro para os mesmos. Porém, não podemos fazer uma associação entre os valores encontrados para *h(t)* e o Valor Presente Líquido, pois esse resultado não encontrado fazendo uso do desconto exponencial.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1. Conclusões

A elaboração desse trabalho possibilitou um conhecimento mais aprofundado dos temas abordados: regimes de capitalização, análise de investimentos, programação dinâmica, sistemas dinâmicos, métodos de otimização além do contato com alguns trabalhos que foram marcantes para a ciência do século XX como o Princípio do Máximo de Pontryagin (aplicado ao modelo proposto) e o modelo de Harry Markowitz que apesar de bastante criticado por alguns estudiosos teve como uma de suas principais implicações a de suscitar discussões que contribuíram para o desenvolvimento das ciências do século passado até os dias de hoje.

O que se buscou nesse trabalho foi uma abordagem um pouco diferente da que normalmente é feita para a avaliação de investimentos através de métodos quantitativos para essa avaliação e utilizando um conjunto de ferramentas matemáticas desenvolvidas em sua maioria após a segunda guerra mundial. Para isso foi desenvolvido um modelo matemático que possibilitasse a aplicação dessas ferramentas e com o qual se pudesse extrair uma solução prática que relacionasse os diversos parâmetros necessários para a elaboração do modelo e que permitisse investigar as suas possíveis inter-relações.

Foi também realizada uma simulação na para que se pudessem exemplificar os resultados obtidos de forma literal através de números e gráficos que possibilitassem uma boa visualização dos resultados. Os valores que foram atribuídos aos parâmetros do problema o foram de forma aleatória, respeitando apenas as relações entre os parâmetros que foram encontrados ao longo do desenvolvimento do modelo. Ao final foi possível verificar que o modelo apresentou um lucro para os acionistas com a combinação de parâmetros utilizada na simulação.

5.2. Limitações

A extensa bibliografia existente sobre avaliação de investimentos é, por vezes repetitiva, o que faz com a discussão acabe se limitando a alguns poucos pontos de questão (o projeto de investimento é lucrativo? Quanto tempo leva até que os acionistas recuperem a quantia que investiram no projeto?). Isso faz com que, mesmo quando o tema sofre alguma variação por menor que seja em sua abordagem, não se consiga aprofundar a discussão sobre os possíveis resultados de um modelo. E isso acontece aqui nesse trabalho, a discussão final acabou relacionando apenas resultados como o lucro obtido pelos acionistas que estão envolvidos com o projeto de investimento e quanto tempo eles precisariam esperar para reaver o investimento feito.

Também se deve levar em consideração que a abordagem de sistemas dinâmicos utilizada aqui é baseada em equações diferenciais e essas equações muitas vezes não possuem solução, ou seja, quando se começou a trabalhar o modelo não se tinha idéia de esse resultaria em algo que fosse passível de se extrair conclusões sobre o problema estudado.

Além disso, as aplicações financeiras sempre estão passíveis de alguma forma de risco associada ao seu desenvolvimento e essa noção de risco não foi levada em consideração no presente trabalho.

5.3. Sugestões para trabalhos futuros

Apesar de se fazer referência nesse trabalho a um conhecido artigo sobre riscos relacionados a aplicações financeiras o modelo que foi desenvolvido não contempla a questão do risco envolvido na aplicação que foi tratada. Por isso, a sugestão mais óbvia a se fazer é montar um modelo que seja limitado no tempo e que contemple a questão do risco financeiro inerente à aplicação a ser criada.

Outra sugestão seria o estudo de uma carteira composta por mais de uma aplicação para que se pudessem comparar quais as que trariam maior lucro aos acionistas ou quais das aplicações deveriam ser mantidas na carteira e quais poderiam ser eliminadas a partir dos resultados apresentados por cada uma.

A criação de um modelo que fizesse uso de técnicas estatísticas para explicar o comportamento dos parâmetros que nesse trabalho foram tomados por constantes no tempo seria uma forma de incorporar a noção de risco ao modelo.

Comparar os resultados obtidos com esse modelo apresentado aqui com o de outros que também tratem da avaliação de investimentos através de métodos de otimização.

BIBLIOGRAFIA

ARROW, K. J. & INTRILIGATOR, M. D., *Hand book of Mathematical Economics*, volume I, II. Elsevier Science Publishing Company Inc., Amsterdam, the Nethelands, 1981.

BERNSTEIN, P. L., *Desafio aos deuses: a fascinante história do risco*. Editora Campus; Rio de Janeiro – RJ; 11ª edição; 1997.

BOYCE, W. E. & DIPRIMA, R. C., *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Editora LTC; Rio de Janeiro – RJ; 7ª edição; 2002.

FERREIRA, R. G., *Matemática financeira aplicada*. Editora UFPE; Recife – PE; 5ª edição; 2000.

INTRILIGATOR, M. D., *Mathematical optimization and economic theory*. SIAM; Philadelphia – EUA; 2002.

LEMES JÚNIOR, A. B., RIGO, C. M. & CHEROBIM, A. P. M. S., *Administração financeira: princípios, fundamentos e práticas brasileiras*. Editora Campus; Rio de Janeiro – RJ; 2ª edição; 2005.

LINS, L. N., *Dissertação de Mestrado: "Gestão de tecnologia em sistemas produtivos: uma abordagem por controle ótimo"*. Recife – PE; 2001.

SOUZA, A. & CLEMENTE, A., *Decisões financeiras e análise de investimentos*. Editora Atlas; São Paulo – SP; 3ª edição; 1999.

TORRES, D. F. M., *Regularidade dos Minimizantes no Cálculo das Variações e ControloOptimo*.Portugal;2002.Disponívelem:www.paginas.fé.up.pt/~flp/flp_mebpage_ficheiros/cv_flp_julho_2005.pdf. Acessado em: 03/10/2008.