



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA  
CURSO DE MESTRADO

MARCELO LINS MUNIZ DE MELO SANTOS

**REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COMO ARTEFATOS PARA A  
APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES:** uma análise da gênese instrumental de  
licenciandos em matemática no ensino remoto

Recife  
2022

MARCELO LINS MUNIZ DE MELO SANTOS

**REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COMO ARTEFATOS PARA A  
APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES:** uma análise da gênese instrumental de  
licenciandos em matemática no ensino remoto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

**Área de concentração:** Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra. Rosilângela Maria de Lucena Scanoni Couto

Recife

2022

Catálogo na fonte  
Bibliotecário Natália Nascimento, CRB-4/1543

- S237r Santos, Marcelo Lins Muniz de Melo.  
Representações semióticas como artefatos para a aprendizagem de funções: uma análise da gênese instrumental de licenciandos em matemática no ensino remoto. / Marcelo Lins Muniz de Melo Santos. – Recife, 2022.  
190 f.: il.
- Orientadora: Verônica Gitirana Gomes Ferreira.  
Coorientadora: Rosilângela Maria de Lucena Scanoni Couto.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.  
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2022.  
Inclui Referências e Apêndices
1. Orquestração Instrumental Online. 2. Semiótica – Registro de Representação. 3. Abordagem Instrumental. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. (Orientadora). II. Couto, Rosilângela Maria de Lucena Scanoni. (Coorientadora) Título.
- 370 (23. ed.) UFPE (CE2022-039)

**MARCELO LINS MUNIZ DE MELO SANTOS**

**REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COMO ARTEFATOS PARA A  
APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES: UMA ANÁLISE DA GÊNESE  
INSTRUMENTAL DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA NO ENSINO  
REMOTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 28/03/2022

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Orientadora e Presidente)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Examinador Interno)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

---

Profa. Dra. Rosilangela Maria de Lucena Scanoni Couto (Examinadora  
Externa) Doutora pela Universidade Federal de Pernambuco)

---

Prof. Dr. Mericles Thadeu Moretti (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico este trabalho às duas mulheres da minha vida: minha mãe, Maria Lúcia (*in memoriam*), meu anjo de luz; minha esposa, Marianne, minha fortaleza.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter proporcionado todos os momentos de ensinamentos, além de ter concedido saúde, a mim, a minha família e aos amigos, ante a esse turbulento momento pandêmico pelo qual passamos atualmente.

Minha eterna gratidão àquelas que partiram desta vida, mas que contribuíram fortemente com meu crescimento: minha mãe Maria Lúcia, minha tia-avó Maria das Dores e a minha querida sogra Terezinha (todas *in memoriam*).

Aos pesquisadores cujas teorias fundamentaram este trabalho, em especial aos que recentemente desencarnaram: Prof. Dr. Gerard Vergnaud e Prof. Dr. Pierre Rabardel (ambos *in memoriam*), minha profunda e eterna gratidão!

Ao amor da minha vida, Marianne, por estar sempre ao meu lado, por ter me aguentado nos momentos de estresse e não ter me deixado cair quando a fraqueza tomou conta de mim.

Às minhas acolhedoras e amadas famílias, Santos e Muniz de Melo, pelo carinho, incentivo, cuidado e apoio, especialmente, ao meu pai, Everaldo e madrasta, Verônica, esta a quem tenho o imenso carinho e respeito, cativando de mim o título de “*mãedrasta*”; aos meus tios Ricardo e Socorro que doaram, cada um de sua maneira, o melhor de si em todos os momentos da minha vida. À minha família Muniz de Melo, especialmente aos meus primos, carinhosamente chamados de tios, Mário e Glória, pela educação, atenção, incentivo e cuidados a mim prestados ao longo da minha vida. Por fim, porém não menos importantes, minha gratidão a meu irmão que, apesar das divergências, foi o autor principal do meu ingresso na pós-graduação, mostrando a importância de se estar na academia; e minha irmã, Heloisa, que dedicou toda a vida para proteger seu irmão caçula, sempre estando ao meu lado, seja com atenção e carinho, seja com os “puxões de orelha”. Abro aqui ainda um parênteses para meu cunhado, Rafael, que junto à sua família Dubeux, estiveram sempre ao meu lado me apoiando e incentivando.

Às minhas queridas orientadoras, Prof<sup>a</sup>. Dra. Verônica Gitirana e Prof<sup>a</sup>. Dra. Rosilângela Lucena, que desde a graduação me lapidaram e cativaram a minha vontade de cursar uma pós-graduação. Minha gratidão por terem aceitado me orientar, o que fizeram com bastante maestria, de forma humana e inteligente. Minha profunda gratidão a vocês, meninas, por todo o apoio que recebi e os momentos de construção de conhecimentos compartilhados.

Ao Prof. Dr. Mérciles Moretti e ao Prof. Dr. Jadilson Almeida por terem me concedido a honra de tê-los na banca de qualificação, fechando com a banca de defesa dessa pesquisa, compartilhando, tão generosamente, suas valiosas contribuições e esclarecimentos prestados a este trabalho.

À coordenação, ao corpo docente e aos funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), que de forma tão acolhedora receberam-me, ensinaram-me e apoiaram-me, durante estes dois anos de formação. Minha gratidão especial a Profa. Ana Beatriz e a Profa. Gilda Lisbôa, respectivamente, coordenadora e vice, com quem muito pude aprender.

No âmbito da UFPE, conheci pessoas maravilhosas. Do Departamento de Matemática, meus agradecimentos ao Prof. Dr. William Roqueta e Ângela Thiers, pelos ensinamentos e amizade construída desde a graduação, continuada ao longo da minha trajetória como tutor no curso de Licenciatura em Matemática EAD. Do Departamento de Fisiologia, minha gratidão ao Prof. Dr. Fabiano Ferreira, que muito contribuiu para a construção de minha identidade docente e que a vida nos proporcionou uma grande amizade.

A todos do Grupo GERE por terem me acolhido e pelas preciosas contribuições dadas a esta pesquisa e durante minha formação como pesquisador.

No Edumatec, tive o prazer de constituir frutíferas relações. Da turma de Doutorado 2020, além de Caio, aos meus BFF (*best friends forever*) - Paula (Paulinha), José Antônio (Zé) e Alba (Albinha), manifesto minha profunda gratidão pelo acolhimento, amizade e apoio. A minha querida amiga da turma de Mestrado, Ana Borges (Aninha), de cuja amizade levarei para sempre em meu coração, que tão de repente e em um momento que ambos precisávamos, nos tornamos grandes amigos, ajudando um ao outro. Conte sempre comigo pra tudo!

Aos professores que tive a oportunidade de conhecer no dia-a-dia das escolas, especialmente as que continuaram ao meu lado: Fernanda (*Queen*), Viviane (Vivi) e Marília (*big big*).

Agradeço, por fim, porém não menos importante, a você, nobre leitor, por seu interesse nesta pesquisa. Espero que este estudo o favoreça de alguma forma.

Não é sobre chegar no topo do mundo e saber que venceu. É sobre escalar e sentir que o caminho te fortaleceu. É sobre ser abrigo e também ter morada em outros corações. E assim ter amigos contigo em todas as situações... (VILELA, 2017)

## RESUMO

Esta pesquisa investiga de que maneira licenciandos em matemática se apropriam de artefatos simbólicos, como sistemas de representação semiótica, para solucionar atividades de funções definidas por partes, por meio de tratamentos e conversões no ensino remoto. Nosso quadro teórico-metodológico é composto pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e pela Abordagem Instrumental (AI). Esta pesquisa tem como aporte metodológico a Orquestração Instrumental On-line (OI On-line), pela qual faremos uso para planejar as sessões do experimento. No contexto atual da pandemia, todas as atividades da pesquisa foram realizadas On-line, por meio de encontros remotos síncronos. A metodologia compôs-se da análise dos registros escritos, dos licenciandos, tanto à punho quanto no quadro compartilhado, além da gravação das sessões. Foram realizados dois experimentos, denominados estudo preliminar e estudo principal, nos quais os dados obtidos foram analisados por meio da técnica da videografia com a análise microgenética. Nessa análise desenvolvemos um índice de eventos que envolveram tratamentos e conversões entre registros de representação semiótica de funções, identificados durante a resolução das situações realizadas pelos licenciandos. Os resultados do estudo preliminar apontam para a necessidade de adaptações, tanto a escrita do enunciado quanto às perguntas propostas nas atividades, de modo que sejam melhor compreendidas pelos sujeitos que irão solucionar a atividade, bem como o tempo de execução seja otimizado. Os resultados do estudo principal apontam que os sujeitos mobilizaram os esquemas de uso, ação instrumental e ação coletiva instrumentada, caracterizando assim, para os participantes, o fenômeno da Gênese Instrumental. Acredita-se que a resolução das atividades e as aprendizagens daí decorrentes foram favorecidas pelo trabalho em grupo, pelo diálogo entre os sujeitos e intervenções da mediadora, pela prática da explicação, pela transformação dos registros de representação, pela resolução colaborativa e pelas discussões realizadas após a atividade.

**PALAVRAS-CHAVE:** Orquestração Instrumental On-line. Registro de representação semiótica. Abordagem instrumental. Função definida por partes.

## **ABSTRACT**

This research investigates how mathematics undergraduates appropriate symbolic artifacts, such as semiotic representation systems, to solve piecewise functions activities through treatments and conversions in remote teaching. Our theoretical framework comprises the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRRS) and the Instrumental Approach (AI). This research has as its methodological contribution the Online instrumental orchestration model (OI Online), used to plan the experiment sessions. In the current context of the pandemic, all research activities were carried out online through synchronous remote meetings. The methodology consisted of analyzing written records of the undergraduates, both by hand and on the shared board, and recording the sessions. We carried out two experiments: a preliminary study and the main one; we used videography with a microgenetic technique to analyze the data for both studies. In this analysis, we developed an index of events that involved treatments and conversions between registers of semiotic representation of functions, identified during the resolution of situations performed by the undergraduates. The results revealed adaptations requirements, both on the situation statement and the questions proposed in it, to be better understood by the participants and optimize the execution time. The results of the main study indicate that the subjects mobilized the schemes of use, instrumental action, and instrumented collective action, thus characterizing, for the participants, the phenomenon of Instrumental Genesis. It is believed that the resolution of activities and the resulting learning were favored by group work, the dialogue between the subjects and the mediator's interventions, the practice of explanation, the transformation of representation records, the collaborative resolution, and the discussions held after the activity.

**Keywords:** Instrumental orchestration. Semiotic register of representation. Instrumental approach. Piecewise function.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Resolução de situação de função	29
Figura 2 -	Conversão entre diferentes registros de representação	31
Figura 3 -	Ilustração do problema do enunciado	33
Figura 4 -	Plano Cartesiano mostrando os eixos x e y	37
Figura 5 -	Divisão do Plano Cartesiano por quadrantes	38
Figura 6 -	Localização dos pontos nos respectivos quadrantes	38
Figura 7 -	Representação através de conjuntos de um ponto A(1,2)	39
Figura 8 -	Relação entre domínio e contradomínio	39
Figura 9 -	Linguagem algébrica da função	41
Figura 10 -	Ilustração da gênese instrumental em uma atividade sobre funções	48
Figura 11 -	Evolução histórica do modelo da OI	62
Figura 12 -	Estrutura da Orquestração Instrumental On-line	68
Figura 13 -	Desenho da OI On-line	69
Figura 14 -	Estrutura de coleta de dados utilizado na pesquisa	73
Figura 15 -	Construção do triângulo ADF	85
Figura 16 -	Utilização de recurso tecnológico para resolução da questão	86
Figura 17 -	Representação figural da função $f_1(x) = 5x$	87
Figura 18 -	Representação figural da função $f_2(x) = 100$	88

Figura 19 -	Representação Figural da função $f_3(x) = 250 - 5x$	88
Figura 20 -	Resolução Gráfica utilizando simulação	89
Figura 21 -	Cenário da configuração didática e modo de execução da OI On-line Preliminar	96
Figura 22 -	Diálogo entre os licenciandos durante a compreensão do enunciado do problema	105
Figura 23 -	Diálogo entre os licenciandos interpretando o enunciado	107
Figura 24 -	Triângulo ADF esboçado pelos licenciandos no quadro compartilhado	110
Figura 25 -	Tratamento numérico para cálculo da área do triângulo ADF realizado no quadro compartilhado	110
Figura 26 -	Apresentação do ponto F quando $x = 22$ cm, realizado no quadro compartilhado	115
Figura 27 -	Início de esboço do novo triângulo ADF, realizado no quadro compartilhado	116
Figura 28 -	Fechamento do esboço do novo triângulo ADF, realizado no quadro compartilhado	117
Figura 29 -	Apresentação da interpretação do problema sobre função definida por partes	119
Figura 30 -	Esboço do triângulo ADF para desenvolvimento da fórmula geral	120
Figura 31 -	Esboço do triângulo ADF com desenvolvimento do tratamento algébrico	121
Figura 32 -	Esboço do gráfico da função área dos diferentes triângulos ADF	123
Figura 33 -	Intervenção da mediadora a fim de que seja localizada a posição da formiga no gráfico	125
Figura 34 -	Correção dos intervalos das funções apresentadas na figura 27	126
Figura 35 -	Cenário da configuração didática e modo de execução da OI On-line Principal	132

Figura 36 -	Desenho da OI On-line Principal	133
Figura 37 -	Esboço do triângulo feito pelo licenciando A3	152
Figura 38 -	Triângulo feito pelo licenciando A3 com cálculo do segmento DF	154
Figura 39 -	Tratamento algébrico para determinação de função de área	155
Figura 40 -	Trapézio representado pela fala do licenciando A3	157
Figura 41 -	Triângulo isósceles definido pelo licenciando A3	158
Figura 42 -	Triângulo desenhado a partir da fala do licenciando A3	159
Figura 43 -	Triângulo desenhado pelos sujeitos com cálculo da área	160
Figura 44 -	Desenho elaborado pelos sujeitos no quadro compartilhado	163
Figura 45 -	Traçado do gráfico realizado pelos sujeitos no quadro compartilhado	164
Figura 46 -	Delimitação do conjunto domínio, realizado no quadro compartilhado	165
Figura 47 -	Descrição da resposta dos sujeitos sobre a relação entre os conjuntos contradomínio e imagem, realizado no quadro compartilhado	168

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 -	Objeto matemático função apresentado em diferentes registros de representação semiótica	31
Quadro 2 -	Configuração Didática da OI <sub>1</sub>	83
Quadro 3 -	Gestão de Artefatos da OI On-line Preliminar	98
Quadro 4 -	Configuração Didática da OI On-line Preliminar	99
Quadro 5 -	Índice dos eventos selecionados da OI On-line Preliminar	103
Quadro 6 -	Detalhamento dos eventos pela classificação das atividades cognitivas fundamentais	103
Quadro 7 -	Configuração Didática da OI <sub>2</sub>	144
Quadro 8 -	Índice dos eventos selecionados da OI On-line Principal	150
Quadro 9 -	Detalhamento dos eventos pela classificação das atividades cognitivas fundamentais	151
Quadro 10 -	Índice dos eventos selecionados da OI On-line Principal	169
Quadro 11 -	Detalhamento dos eventos pela classificação das atividades cognitivas fundamentais	170

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AI	Abordagem Instrumental
A <sub>n</sub>	Aluno n
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EaD	Educação a Distância
ERIC	Education Resources Information Center
GDoc	Google Documentos
GERE	Grupo de Estudos sobre Recursos para a Educação
HAL	L'archive ouverte pluridisciplinaire
IES	Instituições de nível superior
IFES	Instituição Federal de Ensino Superior
IREM	Instituto de Pesquisas sobre o Ensino de Matemática
M	Mediador
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática para Escolas Públicas e Privadas
OI	Orquestração Instrumental
OIO <sub>n</sub>	Orquestração Instrumental On-line n
OMS	Organização Mundial de Saúde
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	QUESTÃO DE PESQUISA	21
1.2	HIPÓTESE	21
1.3	OBJETIVOS	22
<b>1.3.1</b>	<b>Objetivo Geral</b>	<b>22</b>
<b>1.3.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>22</b>
1.4	ESTRUTURA DO TEXTO	22
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E CONCEITOS BÁSICOS</b>	<b>25</b>
2.1	REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS	25
<b>2.1.1</b>	<b>A Teoria dos Registros de Representação Semiótica</b>	<b>27</b>
2.2	FUNÇÕES MATEMÁTICAS	34
<b>2.2.1</b>	<b>Contexto Histórico</b>	<b>34</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Conceitos e Elementos de Função</b>	<b>35</b>
2.3	NOÇÕES DE ESQUEMAS E SITUAÇÕES	42
2.4	ABORDAGEM INSTRUMENTAL	43
<b>2.4.1</b>	<b>Artefato e Instrumento</b>	<b>44</b>
<b>2.4.2</b>	<b>Esquema de ação instrumentada e instrumentação</b>	<b>45</b>
<b>2.4.3</b>	<b>Esquemas de utilização e instrumentalização</b>	<b>46</b>
<b>2.4.4</b>	<b>Gênese Instrumental</b>	<b>47</b>
<b>3</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>49</b>
3.1	REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES COM BASE NA PERSPECTIVA DE RAYMOND DUVAL	52

3.2	ARTICULAÇÃO ENTRE A REVISÃO DE LITERATURA E A PESQUISA	59
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA DA PESQUISA</b>	<b>61</b>
4.1	FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA	61
<b>4.1.1</b>	<b>Orquestração Instrumental</b>	<b>61</b>
4.1.1.1	Etapas da Orquestração Instrumental	64
<b>4.1.2</b>	<b>Orquestração Instrumental On-line e o Ensino Remoto</b>	<b>66</b>
4.2	DESIGN DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE	69
<b>4.2.1</b>	<b>A Orquestração Instrumental On-line 1 (OIO<sub>1</sub>)</b>	<b>70</b>
<b>4.2.2</b>	<b>A Orquestração Instrumental On-line 2 (OIO<sub>2</sub>) e a situação de discussão e reflexão sobre os dados da OIO<sub>1</sub></b>	<b>70</b>
4.3	ESTRUTURA DE COLETA E ANÁLISE DE DADOS DA OI ON-LINE	71
4.4	ANÁLISE MICROGENÉTICA	73
4.5	ASPECTOS ÉTICOS DA PESQUISA	75
<b>5</b>	<b>ESTUDO PRELIMINAR</b>	<b>76</b>
5.1	O CONTEXTO DO ESTUDO PRELIMINAR	76
<b>5.1.1</b>	<b>Objetivo Geral do Estudo Preliminar</b>	<b>76</b>
<b>5.1.2</b>	<b>Objetivos Específicos do Estudo Preliminar</b>	<b>76</b>
5.2	METODOLOGIA DO ESTUDO PRELIMINAR	77
<b>5.2.1</b>	<b>Sujeitos e cenário de pesquisa</b>	<b>77</b>
<b>5.2.2</b>	<b>O design da Orquestração Instrumental On-line Preliminar</b>	<b>78</b>
5.2.2.1	Configuração Didática	81
5.2.2.2	Modo de Execução	84

<b>5.2.3</b>	<b>Coleta de dados do Estudo Preliminar</b>	<b>93</b>
<b>5.2.4</b>	<b>Método de análise de dados do Estudo Preliminar</b>	<b>94</b>
5.3	ANÁLISE DOS RESULTADOS DO ESTUDO PRELIMINAR	95
<b>5.3.1</b>	<b>Orquestração Instrumental On-line Preliminar</b>	<b>95</b>
5.3.1.1	Situação matemática	95
5.3.1.2	Configuração Didática do Estudo Preliminar	97
5.3.1.3	Modo de Execução	100
5.3.1.4	Performance didática	100
5.3.1.5	Análise microgenética da OI On-line Preliminar	102
5.4	CONSIDERAÇÕES ACERCA DA OI ON-LINE PRELIMINAR	127
<b>5.4.1</b>	<b>Reformulação da situação para a Orquestração Instrumental On-line Principal</b>	<b>128</b>
<b>6</b>	<b>METODOLOGIA DO ESTUDO PRINCIPAL</b>	<b>130</b>
6.1	O CONTEXTO DO ESTUDO PRINCIPAL	130
6.2	O MÉTODO DO ESTUDO PRINCIPAL	130
<b>6.2.1</b>	<b>Sujeitos e cenário de pesquisa</b>	<b>130</b>
<b>6.2.2</b>	<b>O design da Orquestração Instrumental On-line Principal</b>	<b>131</b>
6.3	DESENHO DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE DO ESTUDO PRINCIPAL	132
<b>6.3.1</b>	<b>A Orquestração Instrumental On-line Principal 1</b>	<b>133</b>
6.3.1.1	Configuração didática da OI On-line Principal 1	135
6.3.1.2	Modo de Execução da OI On-line Principal 1	135
<b>6.3.2</b>	<b>A Orquestração Instrumental On-line Principal 2</b>	<b>141</b>
6.3.2.1	Configuração Didática	142

6.3.2.2	Modo de Execução	144
6.4	ESTRUTURA DE COLETA E ANÁLISE DE DADOS DA OI ON-LINE PRINCIPAL	145
6.5	ASPECTOS ÉTICOS DA PESQUISA	147
<b>7</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÃO DO ESTUDO PRINCIPAL</b>	<b>148</b>
7.1	PERFORMANCE DIDÁTICA DA OI ONLINE PRINCIPAL 1	148
7.1.1	<b>Análise microgenética da OI On-line Principal 1</b>	<b>149</b>
7.1.2	<b>Análise microgenética da OI On-line Principal 2</b>	<b>168</b>
7.2	CONSIDERAÇÕES ACERCA DA OI ON-LINE PRINCIPAL	174
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>176</b>
8.1	LIMITAÇÕES DA PESQUISA	179
8.2	PERSPECTIVAS FUTURAS DE PESQUISA	179
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>181</b>
	<b>ANEXO A - Roteiro para participação na OI On-line (para os licenciandos)</b>	<b>187</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação é resultado de leituras, reflexões e inquietações iniciadas no Grupo de Estudos em Recursos para a Educação (GERE), do qual faço parte e reverberadas em minha prática docente no Ensino Superior, mais precisamente na disciplina de Cálculo 1. Isto porque foi na sala de aula onde pude testemunhar muitos questionamentos dos estudantes em formação sobre o porquê de se aprofundar no conceito de funções nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

O conceito de função se faz presente na vida do estudante, posto que este objeto matemático pode ser encontrado em várias outras disciplinas como Física, Química e Biologia. O estudo de Souza, Cordeiro e Moretti (2004) destaca que a definição de funções, a partir da relação existente na variação entre dois conjuntos, atende a estes diferentes contextos. Na Matemática, o desenvolvimento desse conceito contribui para a leitura e estabelecimento de relações que permitem ao indivíduo entender e prever vários fenômenos no meio em que vive (SOUZA; CORDEIRO; MORETTI, 2004, p.1).

A definição de função utilizada dentro do contexto da matemática escolar e apresentada em muitos livros didáticos, segundo aponta Gitirana (1999), é carregada de formalismo algébrico. Portanto, é uma definição que remete fortemente ao aluno um contexto algébrico, fazendo com que o discente associe esta definição ao objeto matemático. Assim, uma dada função passa a ser vista como a sua representação algébrica.

Vinner e Dreyfus (1989) mostraram, em uma pesquisa com estudantes de Israel, que as concepções desses discentes, ao estudarem função, também dependem da representação usada. Neste sentido, a reflexão trazida por Souza, Cordeiro e Moretti (2004) indica que a partir da interpretação e manipulação das informações apresentadas em diferentes linguagens, o aluno procura traduzi-las naquelas que lhes são mais familiares, utilizando-as como ferramentas no tratamento da situação, a fim de solucionar um problema proposto. Assim, o domínio do aluno sobre objetos matemáticos parte do entendimento de diferentes linguagens em que este objeto se expressa.

Estas diferentes linguagens, para o teórico francês Raymond Duval (DUVAL, 2009), são as diferentes representações semióticas de um objeto matemático para o qual um indivíduo tem acesso. Mas afinal, qual a importância da Semiótica para o estudante que está estudando funções? As representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, gráficos e tabelas que representam um certo objeto, que em nosso estudo são as funções. É na atividade cognitiva de formação dessas representações que o estudante consegue, como afirma Duval (2009, p.53), “expressar” uma representação mental ou “evocar” um objeto real”.

A Teoria das Representações Semióticas (DUVAL, 2009) põe em pauta o papel primordial do funcionamento e da constituição de um sistema de representação que rege a construção dos saberes sobre o objeto matemático a ser estudado. Isso torna a teoria de Duval um importante instrumento de pesquisa, já que é possível analisar uma estrutura cognitiva complexa do aluno referente ao aprendizado em matemática.

Assim, analisar as ações e as noções de funções matemáticas que licenciandos em matemática mobilizam quando resolvem uma situação-problema é entender os esquemas que estes sujeitos utilizam para manipular uma determinada ferramenta a fim de resolver esta situação (VERGNAUD, 1990). Nesta concepção, a Abordagem Instrumental de Pierre Rabardel (1995) é a teoria que apresenta as relações entre sujeito, esquemas e artefato as quais estamos buscando entender. Estas relações ocorrem em processos e estes dependem tanto do sujeito modificar o artefato por meio de esquemas, quanto ao artefato modificar o sujeito, uma vez que o indivíduo irá incorporar esta ferramenta aos seus hábitos de resolução de uma dada situação.

Para Rabardel (1995), este conjunto de processos recebe o nome de Gênese Instrumental. Logo, em nossa pesquisa, investigaremos como o licenciando cria os seus esquemas para o uso, em nosso caso com os sistemas de representação semióticos, caracterizados por Rabardel (1995) como artefatos simbólicos, e como esses artefatos vão transformar ou compor sua prática pedagógica, de modo a contribuir com a aprendizagem de seus futuros alunos.

Então, para fundamentar nossa pesquisa, organizamos um quadro teórico-metodológico composto pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1995; 2003; 2006; 2009; 2011a; 2011b; 2012), por noções de conceitos

como Situação e Esquema de Vergnaud (1990, 2009, 2013) e pela Abordagem Instrumental de Rabardel (1995). Esta pesquisa tem como aporte metodológico a Orquestração Instrumental On-line (GITIRANA; LUCENA, 2021), pela qual faremos uso para planejar as sessões do experimento, posto que, este aporte teórico busca modelar a ação docente de modo a favorecer a gênese instrumental dos indivíduos, ação esta que vai na linha de nossos objetivos de pesquisa. No contexto atual da pandemia, todas as atividades da pesquisa foram realizadas on-line, por meio de encontros remotos síncronos.

### 1.1 QUESTÃO DE PESQUISA

Leituras, reflexões e inquietações sobre a temática em foco fez emergir uma questão que procuraremos responder nesta pesquisa. De que maneira licenciandos em matemática se apropriam de artefatos simbólicos, como sistemas de representação semiótica, para solucionar atividades de funções definidas por partes, por meio de tratamentos e conversões no ensino remoto?

### 1.2 HIPÓTESE

Pensamos que os problemas relacionados à compreensão, apropriação e mobilização de registros de representação de funções devem-se à dificuldade de reconhecer um mesmo objeto representado em sistemas semióticos diferentes. Isto porque, durante a aprendizagem de funções, os estudantes desenvolvem métodos algébricos mecanicistas para resolver situações-problema, sem, entretanto, articular registros. Para Duval (2009), a transição de um sistema de representação para outro ou até mesmo a mobilização simultânea de vários sistemas de representação não é tão evidente e espontânea para grande parte dos estudantes.

Nossa hipótese, portanto, é que uma abordagem de ensino de funções pautada na mobilização de diferentes registros de representações semióticas e na conversão entre eles, em uma situação orquestrada On-line, poderá favorecer a gênese instrumental dos licenciandos na aprendizagem de funções. Isto porque estas atividades permitem, a partir da evocação de esquemas, a mobilização e a

manipulação de registros de representação, fazendo com que os licenciandos solucionem a situação proposta.

### 1.3 OBJETIVOS

#### 1.3.1 Objetivo Geral

Caracterizar a gênese instrumental de artefatos simbólicos (a saber, os sistemas de representação semiótica) em uma situação-problema que envolve função definida por partes, desenvolvida por licenciandos de Matemática submetidos a uma orquestração instrumental On-line.

#### 1.3.2 Objetivos Específicos

- a) Mapear os eventos que envolvam tratamentos e conversões entre registros de representação semiótica de funções durante a resolução das situações realizadas pelos licenciandos;
- b) Caracterizar os esquemas de utilização das representações semióticas dos licenciandos na resolução da situação, identificados nos eventos mapeados;
- c) Correlacionar os tratamentos e as conversões de representações semióticas realizadas pelos licenciandos com seus esquemas de ação instrumentada no processo de sua gênese instrumental.

### 1.4 ESTRUTURA DO TEXTO

No capítulo 2, apresentamos as teorias que compõem nosso quadro teórico-metodológico e como estas contribuem com nossa pesquisa. Inicialmente, apresentaremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Duval (1995; 2003; 2006; 2009; 2011a; 2011b; 2012). A partir dos pressupostos teóricos da TRRS, discutimos, segundo Brandt e Moretti (2005), a importância deste aporte teórico na aprendizagem de funções, a relevância da mobilização de múltiplos registros de representação e de suas transformações, o tratamento e a conversão, para ascensão de objetos matemáticos. No tópico seguinte, trazemos as noções de Esquema e de Situação segundo Vergnaud (2009) e, consecutivamente,

apresentamos a Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995). Em seguida, um tópico contempla o conceito de Função e, por fim, fechamos com a apresentação da Orquestração Instrumental On-line (GITIRANA; LUCENA, 2021), acompanhada de algumas considerações sobre tecnologia e a sua importância no ano de 2020 em decorrência da pandemia causada pelo surto do vírus SARS-CoV-2..

No capítulo 3, apresentamos uma revisão das pesquisas sobre funções, as quais foram relevantes para levantarmos as principais dificuldades encontradas por estudantes e professores quanto a mobilização de representações semióticas no aprendizado de funções. Os trabalhos pesquisados foram divididos em diferentes teóricos que abordam o conceito de representações, cujos autores deram alicerce para a escolha de fundamentarmos nosso trabalho à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas.

No capítulo 4, descrevemos detalhadamente o método a ser adotado, assim como todo o percurso metodológico, estruturado para que fossem alcançados os objetivos específicos desta pesquisa.

No capítulo 5, organizado em quatro seções, é apresentado um estudo preliminar. O primeiro tópico descreve os objetivos que nos levou a criar esse estudo, enquanto que o segundo, apresentamos os sujeitos e quais os critérios utilizados para escolha deles. No tópico seguinte, transcorremos sobre o método de coleta de dados e os instrumentos de coleta utilizados, além dos sujeitos e da função desenvolvida por cada um durante a coleta. Por fim, na quarta e última seção, trataremos da análise de dados e o método utilizado, apresentando ajustes que a OI On-line precisou sofrer para adequação ao estudo principal.

O estudo principal, por sua vez, foi dividido em dois capítulos, de modo que no capítulo 6 apresentaremos a metodologia do estudo principal e está organizado em quatro seções. Iniciamos retomando o objetivo da pesquisa, para então apresentarmos os participantes e critérios utilizados para escolha deles. Descrevemos a composição de orquestrações instrumentais on-line, com foco nas modificações realizadas do estudo preliminar ao estudo principal. No tópico seguinte, falaremos sobre o método de coleta de dados e os instrumentos de coleta utilizados. Por fim, na seção, trataremos do método e da estrutura da análise de dados.

Já no capítulo 7, discutiremos a performance didática da OI On-line Principal, com a análise microgenética dos sujeitos, de modo que possamos atingir os objetivos da pesquisa. Assim, buscaremos caracterizar os esquemas utilizados pelos licenciandos para resolução da atividade proposta sobre funções definida por partes, de modo a revelar a contribuição destes para a gênese instrumental dos licenciandos.

O último capítulo é destinado às considerações finais, que retomam elementos centrais da pesquisa e resultados mais relevantes. Também se abordam as limitações desta, as quais emergiram durante todo processo de estrutura, desenvolvimento e análise dos dados oriundos dos dois estudos. O capítulo é encerrado com perspectivas futuras de pesquisas a partir do estudo realizado, considerando seus resultados e limitações.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, apresentaremos o quadro teórico sob o qual está fundamentada esta pesquisa. O primeiro tópico é composto pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009), sucedido pelo tópico em que abordamos o conceito de função matemática. Em seguida, descrevemos alguns conceitos básicos, como as noções de Esquema e de Situação, segundo Vergnaud (2009) os quais darão suporte para o entendimento do último tópico, a Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995).

Na primeira seção, trazemos uma contextualização histórica sobre signos e discutimos princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. Este aporte teórico é crucial para pesquisa no que concerne à relevância dada pelo teórico, à mobilização de registros de representação semiótica, às transformações desses registros, por meio das transformações - tratamento e conversão, nos dois sentidos, - para que se aprenda matemática.

Na segunda seção, discutiremos sobre funções, bem como os conceitos que serão abordados nesta pesquisa, relacionados aos seus elementos, características, representações, entre outros aspectos.

Na terceira e última seção deste capítulo, apresentamos uma noção sobre os conceitos de Esquema e de Situação segundo Vergnaud (2009). Conceitos estes necessários para compreender os processos de gênese instrumental, os quais também serão discutidos nesta seção. Tais conceitos serão fundamentais para entendermos de que forma licenciandos em matemática se apropriam de sistemas de representação semiótica na resolução de situações que envolvem tratamentos e conversões de registros de representação para aprendizagem de funções.

### 2.1 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Durante a evolução humana, desde os australopithecus, o ser humano buscou inovações em seus modos de vida. Dentre estas, podemos destacar tanto os avanços filosóficos e tecnológicos, quanto as linguagens e usos de sinais. Estas inovações garantiram à espécie humana a sua sobrevivência com os meios disponíveis (oral,

imagético, escrito ou digital) (BARBOSA; OLEGÁRIO, 2019). Assim, embora tenha sido muito utilizada na Grécia Antiga com os estudos de Platão sobre linguagens, os nossos ancestrais há vários milhões de anos atrás já se preocupavam em fazer o uso de elementos semióticos, seja para se comunicarem, seja para descreverem situações por intermédio de desenhos rupestres.

A palavra sinal vem do grego *Semeion*, que quer dizer signo e, a partir dela, temos o surgimento da Semiótica (a ciência dos signos). Os signos foram incorporados na matemática já no Renascimento Ocidental, pautado em um sistema que, de acordo com Foucault (1992 apud FLORES, 2006, p.5), estava inserido em um sistema de jogos de semelhança. Isto quer dizer que, na concepção deste filósofo, o signo está associado à própria coisa, logo não tem nada oculto. O próprio Foucault (1992, apud FLORES, 2006) irá citar que, mais adiante na história, mais precisamente no final do séc. XVII, o pensamento do jogo da semelhança chegará ao fim. Isto porque, na Idade Clássica, seria instaurado um projeto de ciência geral da ordem, através da qual a teoria dos signos passaria a ser analisada sob o olhar das representações. Esta ciência, conhecida como a *máthêsis*, foi o alicerce a partir da qual os signos passaram a ter um papel diferenciado em relação ao período anterior. Enfim, “A partir da idade clássica, o signo é a *representatividade* da representação enquanto ela é *representável*” (FOUCAULT, 1992, p.80 apud FLORES, 2006, p.7).

O termo *Semiosis*, segundo Presmeg, Radford, Roth e Kadunz (2016), foi utilizado pela primeira vez pelo norte-americano Charles Peirce. Este pesquisador trouxe importantes contribuições em diferentes áreas do conhecimento, tais como na matemática (realizou estudos sobre lógica, atribuindo tais estudos ao conceito de signo em sua concepção), filosofia (foi um dos pais do pragmatismo na epistemologia), dentre outras áreas. De uma forma geral, na concepção de Peirce (1992), um signo é algo que representa alguma coisa para alguém. Pode ser uma letra, uma palavra, um traço qualquer. Na mesma concepção, teremos na Semiótica a ciência que estuda os signos. É, portanto, por meio desta definição que a semiótica articula o passado com o presente (FLORES, 2006).

É a partir da leitura de Duval (2006) que encontramos a relação entre a abstração de conceitos matemáticos com as dificuldades que os alunos apresentam para entendê-la, considerando também a origem dessas dificuldades cognitivas. Isto

faz com que a semiótica seja um assunto relevante a ser estudado nos dias atuais, como apontam Presmeg *et al.* (2016). Duval (2012) destaca que, com as representações semióticas, podemos externar as representações mentais sobre objetos matemáticos de forma que possam ser explorados, comunicados, operados etc.

### **2.1.1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica**

Pesquisador francês, com formação em Psicologia e Filosofia e tendo como a psicologia cognitiva sua principal temática de estudos, Raymond Duval atua na área desde os anos de 1970. Este professor desenvolveu suas pesquisas entre os anos 1970 e 1995 no IREM (Instituto de Pesquisas sobre o Ensino de Matemática) na cidade de Estrasburgo, na França. Nos dias atuais, Duval é professor emérito em Ciências da Educação da Université Du littoral Côte d'Opale, situada na cidade de Boulogne-sur-Mer, na França.

Duval (2003, p. 11-33) destaca que foi influenciado pelo ponto de vista de signo de Vygotsky, cujo autor defende que os signos são ícones externos funcionando como instrumentos elementares que auxiliam os processos psicológicos de forma diferenciada em relação às ações concretas. Complementando a ideia de signo, Duval (2011a, p.83) define registro como sendo um sistema cognitivamente criador. Isto porque um signo precisa estar inserido em um contexto, já que por si só não possui significado relevante.

Já os sistemas semióticos, ainda segundo Duval (2011a), pode ser definido como um conjunto de signos, organizados segundo regras próprias de formação e convenções, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados. Tais sistemas possuem especificidades quanto ao seu significado e ao seu funcionamento que possibilitam uma relação entre um significante (elemento material do signo) com um significado (ente abstrato do signo).

Assim, Duval concebeu a teoria dos registros de Representação Semiótica. Mas afinal, qual a importância da semiótica na educação matemática? As representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, tabelas e gráficos de um certo objeto matemático.

Este autor ainda aponta a necessidade de haver a apropriação de um conceito por meio de diferentes formas de representá-lo, para que não se confunda o objeto com sua representação. A partir disso, Duval (2012) destaca dois conceitos sobre a atividade cognitiva do ser humano na aprendizagem da matemática: a primeira, denominada “noesis”, é a apreensão conceitual de um objeto; já a “semiose”, é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica; já. Segundo Duval, é preciso chamar a atenção que não há noesis sem a semiose, ou seja, a noesis é inseparável da semiose.

Logo, a Teoria das Representações Semióticas nos faz pensar sobre o papel primordial do funcionamento e da constituição de um sistema de representação que rege a aprendizagem do objeto matemático a ser estudado. Isso torna a teoria de Duval um importante instrumento de pesquisa, já que é possível analisar uma estrutura cognitiva complexa do aluno referente ao aprendizado em matemática.

Duval (2012) classifica os registros de representação em: registro natural, caracterizado como o escrito discursivo, cuja intenção é expressar um conceito internalizado; registro gráfico - este registro pode explicar uma situação com grande quantidade de dados escritos ou ainda descrever um percurso durante um dado intervalo de tempo. Além destes, pode-se, ainda, destacar outro registro importante: o registro algébrico. Este não serve apenas para expressar variáveis, como também pode ser mobilizado em situações que envolvem conjuntos; o registro tabular descreve várias informações em tabelas, podendo ou não estar associado a outro registro de representação semiótica.

Para que um sistema semiótico seja considerado uma representação, deve permitir as três transformações cognitivas fundamentais ligadas à semiose (DUVAL, 2012, p. 6): formação de uma representação identificável, tratamento e conversões. É na atividade cognitiva de formação dessas representações que o estudante consegue, como afirma Duval (2009, p.53), “expressar” uma representação mental ou “evocar” um objeto real”. Portanto, para Duval (2012),

Uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. (DUVAL, 2012, p. 3)

Esta transformação cognitiva corresponde a enunciação de uma frase, escrita de um texto, construção de uma figura. Para tanto, há de se respeitar as regras (sejam gramaticais, no caso da escrita do texto, seja para a construção da figura, mantendo-se as propriedades desta). Citamos como exemplo o texto trazido por Brandt e Moretti (2005), quanto à formação de uma representação identificável na utilização da língua materna para a compreensão dos sistemas de numeração:

“[...] Podemos citar como exemplo a numeração de onze a quinze na língua portuguesa, inglesa, francesa e compará-la com a enumeração na língua chinesa na qual ni vale um, ju vale dez, juni vale onze. Pesquisas apontam um progresso maior em crianças japonesas em comparação com as crianças inglesas e francesas na compreensão da estrutura do sistema de numeração. Isso evidencia a importância de uma representação identificável com a utilização da língua materna como atividade cognitiva fundamental” (BRANDT; MORETTI, 2005, p. 20)

Já os tratamentos correspondem a transformações dentro de um mesmo registro de representação, ou seja, não há a modificação do sistema semiótico. Este tipo de transformação é utilizado na resolução de uma situação de função, tal como podemos observar na Figura 1.

Figura 1 - Resolução de situação de função

Seja  $f$  a função definida por  $f(x) = x^2 - 4x + 16$ .  
A imagem desta função quando  $x = 2$  é:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 4 \cdot (2) + 16 \\ f(2) &= 4 - 8 + 16 \\ f(2) &= 12 \end{aligned}$$

Fonte: elaborado pelo autor

Portanto, a expressão algébrica apresentada na Figura 1 pode ser igualada à 12, desde que o tenhamos o  $x = 2$ . Como a notação  $f(x)$  pode ser escrita igualando-a a  $y$ , percebe-se a transformação realizada na equação  $y = x^2 - 4x + 16$  ao termos realizado o valor numérico de um dado  $x$  para encontrar o valor de  $y$  correspondente a fim de tornar verdadeira a expressão.

O registro em língua natural, segundo Moretti e Hillesheim (2018), é imprescindível no âmbito da comunicação e na criação de um espaço de construção didática em sala de aula. Há de se destacar, porém, segundo esses autores, que existem duas utilizações contrárias da língua natural como registro de representação

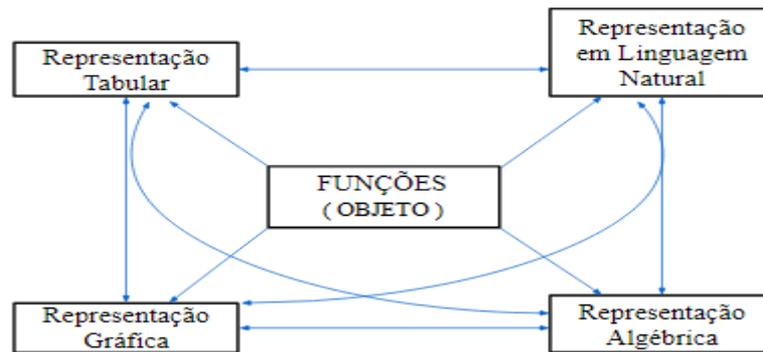
semiótica nas situações de ensino. Uma delas é o do campo da transformação de tratamento, segundo o qual Duval (2004) destaca a importância da comunicação oral, seja entre alunos, seja entre aluno e professor durante a execução de uma atividade. A outra, ainda segundo Duval (2004), é a utilização matemática deste registro para fins de tratamento nas produções escritas, seja para formular definições, seja para deduzir, a partir de propriedades dadas de outras propriedades utilizando teoremas (DUVAL, 2004).

Desta forma, o registro em linguagem natural não desempenha apenas a função de comunicação, como outras funções discursivas também são primordiais. Assim, para Duval (2004), uma língua, para ser considerada um sistema semiótico, deve ser capaz de cumprir todas as funções discursivas as quais, para este autor, são classificadas em: referencial, apofântica, expansão discursiva, e reflexividade discursiva. A função referencial é a que o sujeito utiliza para designar objetos, seguida da função apofântica, em que trata de enunciados completos e suas respectivas operações de proposição; a função de expansão discursiva é possibilitada pela composição de enunciados e suas operações cognitivas de descrição, narração, explicação e raciocínio e, por fim, a função de reflexividade discursiva é evocada por meio de leis ou propriedades válidas do ponto de vista epistêmico.

As funções discursivas são importantes conceitos a serem considerados na educação matemática. Tomando como exemplo a situação “Um dado retângulo é decomposto em três triângulos diferentes. A soma das áreas destas figuras será igual à área da figura inicial”. Como pode-se perceber, essa situação foi escrita em linguagem natural, entretanto, para o procedimento de resolução, são as funções discursivas que precisam ser tratadas.

As conversões, por sua vez, correspondem à mobilização entre diferentes registros de representação semiótica. Portanto, representa a passagem de um tipo de registro para outro, diferente do registro de partida. A Figura 2 apresenta um esquema de conversões entre diferentes registros de representação do objeto matemático função, representadas pelas setas.

Figura 2 - Conversão entre diferentes registros de representação



Fonte: elaborado pelo autor

Do esquema apresentado na Figura 2, é preciso destacar, conforme aponta Duval (2012), que não há regras para conversões entre registros de representação, tal como existe na formação de uma representação identificável ou nos tratamentos.

Para exemplificarmos o esquema apresentado na Figura 2, propomos o Quadro 1 no qual um mesmo objeto foi contemplado em diferentes registros.

Quadro 1 - Objeto matemático função apresentado em diferentes registros de representação semiótica

<u>Registro na Língua Natural</u>	<u>Registro Geométrico</u>	<u>Registro Gráfico</u>												
Dado o retângulo ABCD, de lados AB = 20 cm e BC = 10 cm, calcule a área do triângulo ADF, sabendo-se que o ponto F varia sobre o lado AB.														
	<u>Registro Algébrico</u> $f(x) = \frac{10}{2} \cdot x$	<u>Registro Tabular</u> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>20</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	0	0	1	5	2	10	3	15	4	20
x	f(x)													
0	0													
1	5													
2	10													
3	15													
4	20													

Fonte: elaborado pelo autor

Dentro do panorama da conversão, é de fundamental importância destacar os fenômenos de congruência e não congruência entre registros de representação. Isto porque, segundo Brandt e Moretti (2005), são esses fenômenos que podem explicar os sucessos ou os insucessos dos alunos em situações que envolvem conversões.

Para Duval (2012), a conversão pode ser realizada intuitivamente e quase instantaneamente quando os registros de partida e chegada são congruentes. A congruência semântica surgiu após Duval realizar experiências com seus estudantes em atividades sobre função que requeriam a passagem de um registro de representação para outro (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008).

Um exemplo de congruência na aprendizagem de funções é apresentado por Fonseca e Henriques (2018), em que a congruência ocorreu quando os estudantes representaram a conversão do limite de uma função da linguagem algébrica para a figural (geométrica).

No exemplo anterior, percebemos a ocorrência dos três critérios de ocorrência de congruência definidos por Duval (2012):

- 1) A possibilidade de uma correspondência semântica de elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar;
- 2) A univocidade “semântica” terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada;
- 3) A organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações.

### **Apreensões na aprendizagem de geometria**

Duval (2012a, p. 120-153) também nos conduz para o caminho da aprendizagem que ocorre na geometria. Para este teórico, os problemas geométricos apresentam uma especificidade em relação aos demais problemas matemáticos, pois o ensino da geometria passa pela condução de fazer o outro enxergar aquilo que eu vejo (DUVAL, 2003). Então, os estudos de Duval (2012a) nos mostram que, no campo geométrico, as aprendizagens se dão por meio das apreensões, que podem ser, dentre outras, perceptiva e discursiva.

A apreensão perceptiva, bem como apontam Moretti e Brandt (2015), tem a função de identificação, a qual, segundo Duval (2012a), é aquela solicitada em

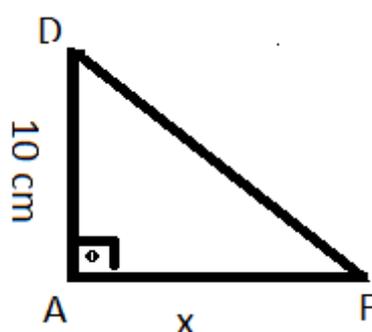
atividades de construção ou descrição, em que deseja-se reproduzir uma figura.

Para a apreensão perceptiva, ainda de acordo com Duval (2012a),

Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se, geralmente, em conflito, porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente (DUVAL, 2012a, p. 120).

Esta reflexão apresentada por Duval (2012a) alerta para o fato de que uma figura não é necessariamente o que está ali apresentado e sim o que ela é levada a mostrar, em geral, o que está descrito no enunciado. Por exemplo, determine o valor de possíveis áreas para o triângulo ADF a seguir.

Figura 3 - Ilustração do problema do enunciado



Fonte: o autor

Neste problema, o tipo do triângulo apresentado acima indica o tipo de tratamento que será empreendido. Os alunos são induzidos, devido à apreensão perceptiva da figura, a recorrerem ao Teorema de Pitágoras na tentativa de encontrar a medida do segmento DF. Isto porque temos a medida de um lado e uma outra medida que está representada por uma variável. Isto faz com que os estudantes descartem o que está escrito na descrição do enunciado da questão. A apreensão perceptiva da figura, que é individual, é a causadora desta impressão inicial quando nos deparamos com uma figura desse tipo.

Neste trabalho, pretendemos propor uma atividade em que licenciandos em matemática tenham acesso a diferentes registros de representação, de modo que possamos propor um aprendizado sobre um dado objeto matemático. Ao contrário do

que já foi apontado por Gitirana (1999), em que, uma vez que um estudante de matemática realiza repetidamente, por meio de métodos mecanicistas, uma situação que contempla estritamente o tratamento de um registro de representação, ao se deparar com uma situação em que necessite a mobilização de diferentes registros de representação, a conversão não estará evidente para esse estudante. Isto porque, como já apontado por Duval (2012b), o sujeito não terá desenvolvido habilidades que o auxiliem na realização da conversão, já que teve acesso a um só tipo de representação semiótica.

## 2.2 FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Este tópico está subdividido em dois subtópicos. No primeiro, apresentaremos uma evolução histórica do conceito de função. No segundo, apresentaremos a definição, características e elementos constituintes deste objeto matemático.

### 2.2.1 Contexto Histórico

Segundo Boyer (1946), já na pré-história o homem buscava entender o processo funcional dos fenômenos da natureza. Há estudos, ainda, que indicam os babilônios como sendo o primeiro povo a utilizar de fato as funções ao fazer a utilização de tabelas. Entretanto, consideram estas tabelas com mais aplicação na área da Física do que na Matemática propriamente dita. Este olhar físico para as funções vai ganhar holofotes nos tempos medievais, porém ainda que desprovidos de abstrações, em que as funções ganharam papel de ciência dos dinâmicos, cujo objetivo era estudar taxas de variação (velocidade e aceleração). É neste sentido que Gitirana (1999) destaca o surgimento do caráter variacional de função já nesta época, uma vez que a variação de uma quantidade afetaria a variação de outra.

Entre o final da Idade Moderna e o início da Idade Contemporânea, o conceito de função adquire uma apresentação geométrica e algébrica posteriormente. Foi com Leibniz e Bernoulli, porém, que o termo função teria sido utilizado pela primeira vez. O segundo, sendo discípulo do primeiro, em 1689, ao escrever uma carta ao seu mentor, utilizava a palavra função com um significado de uma expressão analítica. Em resposta a Bernoulli, um mês após o envio da carta, Leibniz complementou introduzindo os conceitos de variável, parâmetro e constante. Assim, segundo

Oliveira, Rosa e Viana (2009, p.58), “em um artigo publicado na revista *Memoires del’Academie des Sciences de Paris*, Bernoulli, no ano de 1718, definiu a função de uma variável como uma quantidade composta por uma quantidade variável e constante”. Estes cientistas, portanto, segundo Boyer (1946, p.12, apud GITIRANA, 1999, p.15), “adotaram o termo função para designar certa quantidade geométrica variável, como ordenadas, tangentes e raios de curvatura”.

Oliveira, Rosa e Viana (2009) ainda apontam que no manuscrito intitulado “*Methodus tangentium inversa*”, Leibniz demonstrou possuir um determinado conhecimento sobre o conceito inicial de função, utilizando o termo *relatio* para denominar relação.

Segundo a história da matemática citada por Maciel (2011), Galileu também utilizou notações de função para desenvolver uma modelagem matemática a fim de justificar os fenômenos naturais e comportamento dos corpos, mas não avançou nos estudos relacionados ao nosso tema.

Cajori (1993) ainda cita que Euler introduziu a simbologia “ $f$ ” para as funções, assim como a utilização dos parênteses os quais conhecemos hoje em dia ao tratar de funções. Historiadores ainda consideram Lagrange como sendo o introdutor do conceito de função ao citar a nomenclatura  $f'$  e  $f''$  em seus escritos no ano de 1797, designando derivadas sucessivas de funções.

Gitirana (1999) destaca que matemáticos perceberam a forte relação entre o conceito de funções com as propriedades de conjuntos após o advento da Topologia e noções de espaços métricos. Segundo a autora, é dentro deste contexto que surge a definição de Dirichlet - Bourbaki: ‘Uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é definida como um subconjunto do produto Cartesiano de  $A$  e  $B$ , tal que, para todo  $a \in A$  existe exatamente um  $b \in B$  tal que  $(a,b) \in f'$  (GITIRANA, 1999, p.15).

### 2.2.2 Conceitos e Elementos de Função

A definição de função utilizada dentro do contexto da matemática escolar, segundo levanta Gitirana (1999) é a que apontamos anteriormente, apresentada por Dirichlet - Bourbaki. No entanto, é uma definição que remete ao aluno apenas um contexto algébrico e baseado em linguagem matemática, fazendo com que o aluno associe esta definição ao objeto matemático. Partindo da importância do conceito de função na vida do estudante, posto que este objeto se faz presente em várias outras disciplinas como Física, Química e Biologia, Souza, Cordeiro e Moretti (2004), destacam que a definição de função a partir da relação existente na variação entre dois conjuntos atende a estes diferentes contextos. Na Matemática, o desenvolvimento deste conceito contribui para a leitura e estabelecimento de relações que permitem ao indivíduo entender e prever vários fenômenos no meio em que vive (SOUZA; CORDEIRO; MORETTI, 2004, p.1).

Vinner e Dreyfus (1989), ao realizarem um estudo com estudantes de Israel, mostraram que as concepções dos estudantes de função também dependem da representação usada. Neste sentido, a reflexão trazida por Souza, Cordeiro e Moretti (2004) indica que a partir da interpretação e manipulação das informações apresentadas em diferentes linguagens, o aluno procura traduzi-las naquelas que lhe são mais familiares, utilizando-as como ferramentas no tratamento da situação, a fim de solucionar o problema proposto. Assim, o domínio do aluno sobre objetos matemáticos parte do entendimento de diferentes linguagens em que este objeto se expressa.

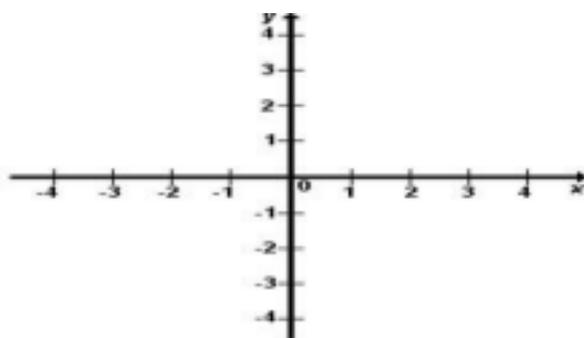
Uma das linguagens que se pode expressar uma função é o registro pictórico, em representações gráficas cartesianas, segundo os quais Gitirana (1999) aponta que uma função é usualmente percebida como uma curva bem comportada. Pesquisas apontam que estudantes usualmente interpretam sub-conceitos de função a partir de gráficos tendo por referência seu formato como uma figura estática (Goldenberg, 1988; Clement, 1985, apud GITIRANA, 1999). No entanto, para entendermos o comportamento de uma função por meio de sua representação gráfica, é necessário localizar pontos em um plano cartesiano.

Um ponto pode ser descrito no espaço a partir de um sistema de eixos, denominado plano cartesiano. Este plano contém duas retas, uma horizontal e outra

vertical, perpendiculares, ou seja, se interceptam em um ponto fazendo um ângulo de  $90^\circ$  graus. Esses eixos normalmente são compostos por números compreendidos no conjunto dos números reais ( $\mathcal{R}$ ). Assim, podemos atribuir qualquer valor seja negativo, positivo, fracionário, irracional.

O eixo horizontal tem o nome de abscissa, ou também é conhecido como eixo  $x$ . O eixo vertical recebe o nome de ordenada, ou eixo  $y$  (Figura 4).

Figura 4 – Plano Cartesiano mostrando os eixos  $x$  e  $y$

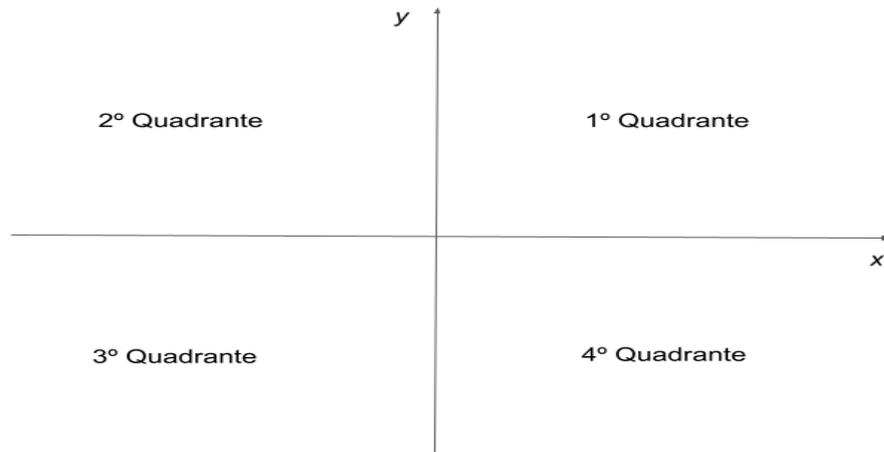


Fonte: internet

Um ponto terá a sua localização no plano cartesiano através de suas coordenadas, que serão respectivamente o valor que ele assume no eixo  $x$  e  $y$ , nesta ordem. Portanto, um ponto  $P$  qualquer terá a seguinte coordenada:  $P(x,y)$ . Ou seja, um ponto  $A(2,1)$  está localizado em  $x = 2$  e  $y = 1$ , um ponto  $B(3,3)$  tem suas coordenadas em  $x = 3$  e  $y = 3$  e um ponto  $C(0,0)$  terá suas coordenadas sobre o que chamamos de origem do plano cartesiano, ou seja,  $x = 0$  e  $y = 0$ . Neste ponto, os dois eixos se interceptam e recebe o nome de origem.

O plano cartesiano pode ainda ser dividido em quatro partes, chamados quadrantes. Seguindo uma ordem no sentido anti-horário, iremos encontrar os primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes como mostra a Figura 5.

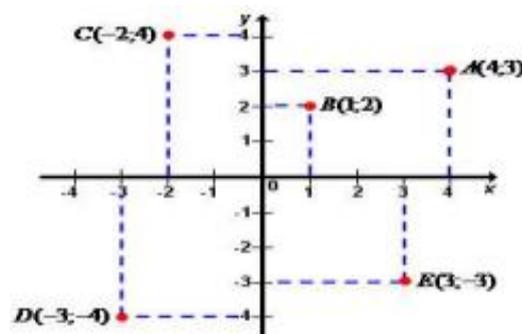
Figura 5 – Divisão do Plano Cartesiano por quadrantes.



Fonte: o autor

Um ponto  $A(4,3)$  está situado no 1º quadrante (também conhecido como quadrante positivo, no qual ambas coordenadas são positivas). Um ponto  $B(1,2)$  também está situado no 1º quadrante pelo mesmo motivo anterior. Já um ponto  $C(-2,4)$ , apesar do  $y$  ser positivo, o  $x$  é negativo. Assim, o ponto  $C$  estará situado no 2º quadrante. O ponto  $D(-3,-4)$  está no 3º quadrante (também conhecido como quadrante negativo). O ponto  $E(3,-3)$  está situado no 4º quadrante, já que o  $x$  é positivo mas o  $y$  não. Portanto, é contrário ao 2º quadrante. Para uma melhor ilustração, veja a Figura 6.

Figura 6 – Localização dos pontos nos respectivos quadrantes.



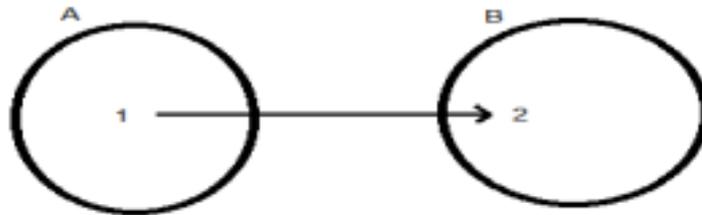
Fonte: internet

Imaginemos o eixo  $x$  como sendo um conjunto  $A$  e o eixo  $y$ , um conjunto  $B$  distintos. Tal como apresentado anteriormente, para um ponto  $A(1,2)$ , vamos ter um

ponto que "saí" de 1 e "vai" para 2 ou vice-versa, formando o ponto conforme mostrado anteriormente através do gráfico da Figura 4.

Passando da representação gráfica para uma representação figural, vamos apresentar o que foi dito anteriormente na Figura 7:

Figura 7 – Representação através de conjuntos de um ponto  $A(1,2)$

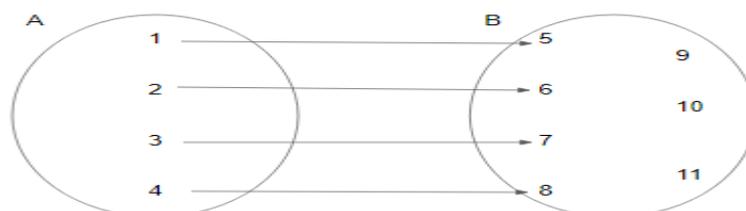


Fonte: elaborado pelo autor

Exemplificamos para um único ponto. Mas imagine que temos vários pontos! Lembre-se que um conjunto possui infinitos elementos. Assim, vamos ter um conjunto A de onde partem as flechas e outro conjunto B que recebe as flechas, ou dizemos ainda que temos um conjunto de partida e um conjunto de chegada. A esse conjunto de partida damos o nome de domínio e, ao conjunto de chegada, chamamos de contradomínio. Em nosso exemplo do ponto  $A(1,2)$ , a flecha partiu de 1 e chegou em 2, portanto 2 é a imagem de 1.

Uma das condições para termos uma função é todo elemento do domínio estar correlacionado com apenas um elemento do contradomínio, ou seja, que apresentará apenas uma imagem e, conseqüentemente, um elemento do domínio não poderá apresentar duas imagens. Outra condição de existência é a necessidade de todos os elementos do domínio estarem relacionados a um elemento do contradomínio, podendo, porém, ficar elementos do contradomínio sem se relacionar com elementos do domínio. Vejamos o exemplo da Figura 8:

Figura 8 – Relação entre domínio e contradomínio



Fonte: elaborado pelo autor

Como dito anteriormente, as funções matemáticas se expressam em diferentes linguagens. Apresentamos a linguagem gráfica e através de conjuntos. Outra representação que as funções podem ter é através da linguagem natural, ou seja, elas se apresentam por um texto. Vejamos o exemplo abaixo:

Numa fábrica de robôs, um expert descobre um meio de produzir um robô que é capaz de produzir dois clones dele mesmo em 5 minutos (terminando simultaneamente). Ele produz este robô que depois de cinco minutos (por não poder se clonar mais) é vendido. O expert sai para comunicar a nova descoberta, e demora-se 30 minutos, ao voltar quantos robôs o expert encontra?

Problema adaptado de Confrey e Smith (1995)

Mas afinal, como descobrir que um texto trata de uma função? Para responder a esta pergunta, o estudante deve recorrer às suas representações mentais, uma vez que, segundo Duval (1993), são esses elementos que mostram a interiorização da percepção externa. Deste modo, a resolução desta atividade requer do estudante o conhecimento de diferentes linguagens que uma função pode expressar. Uma delas é a linguagem tabular, em que as relações entre os valores do domínio e contradomínio se dão através da relação entre uma coluna com a outra, linha por linha. Vejamos como exemplo a Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 - Resolução da função representada em linguagem natural

<u>Resolução por Cálculo de Valores em Tabela</u>	
<u>Tempo (período de 5 minutos)</u>	<u>Número de Robôs na fábrica</u>

1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

Fonte: Gitirana (1999)

Portanto, nota-se uma relação covariacional entre as duas colunas apresentadas, já que ao passo que a coluna da esquerda varia ao descer, a coluna da direita também varia. Para Gitirana (1999), uma situação problema em que uma

função está descrita por linguagem natural é de suma importância, pois permite ao estudante detectar um padrão de comportamento específico. A resolução dessa situação pode, mais uma vez, ser atribuída a outra linguagem da função - a linguagem algébrica, conforme apresentado na Figura 9.

Figura 9 - Linguagem algébrica da função

$$f(t) = 2^{\frac{t}{5}}$$

$$t = 30$$

$$f(t) = 2^{\frac{30}{5}} = 2^6 = 64$$

Fonte: Gitirana (1999)

Uma situação covariacional é também levantada por Lima (IMPA - RJ - RPM 18) em diversas situações de função. Ao definir função afim, por exemplo, em muitos livros escolares, atribui-se os termos coeficiente angular e linear. Então, se uma função afim  $f$  é dada por  $f(x) = ax + b$ , tem-se  $a$  como o coeficiente angular e  $b$ , o linear. No entanto, Lima chama a atenção para o nome mais apropriado para denominar o termo  $a$  é taxa de variação, pois segundo o autor, em muitos casos, como o apresentado por Gitirana (1999) na situação anterior, não há um ângulo associado ao problema. E mesmo que estivéssemos analisando um gráfico de  $f$ , o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas  $x$  e  $f(x)$ .

Por fim, vimos que as funções podem se expressar em diferentes linguagens, chamadas por Duval (2012) de representações semióticas, como vimos anteriormente. Desta forma, para que os estudantes aprendam funções, eles precisam não apenas ter o conhecimento sobre as diferentes linguagens da função, como também precisam saber estabelecer as mais diversas conexões entre diferentes representações. Cada representação por sua vez tem suas regras próprias, e cada conceito é percebido de forma diferente que nas outras representações.

### 2.3 NOÇÕES DE ESQUEMAS E SITUAÇÕES

A relação entre sujeito, artefato e instrumento, apresentada na Abordagem Instrumental (AI) proposta por Rabardel (1995), demanda algumas noções sobre esquemas e situações. Para isto, tomaremos as acepções defendidas por Gerard Vergnaud (2009) que serve como base para a AI.

Um esquema, conforme já definido anteriormente por Vergnaud (2013), é organização invariante da atividade para uma definida classe de situações. Já apresentamos que em Vergnaud (2009) o esquema possui quatro componentes, dentre os quais destacamos os invariantes operatórios e as regras de ação. Isto porque, como esse componente é atrelado aos conhecimentos, muitas vezes implícitos, resultantes de uma atividade, orientarão uma ação. Bellemain e Trouche (2019) nos alertam que o esquema se desenvolve ao passo que uma tarefa ocorre repetidamente.

A noção de esquema, segundo Vergnaud (2009), tem uma abrangência maior do que foi apresentado por Piaget. Vergnaud (2013, p. 284 - 285, tradução nossa) define esquema como “organização invariante da atividade para uma definida classe de situações”. Ele avança os estudos de Piaget ao trazer uma definição analítica no texto citado anteriormente. A noção de esquemas como uma totalidade funcional e dinâmica constituída de quatro componentes: um objetivo, com subobjetivos e antecipações; regras de ação, tomada de informação e de controle; invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação); e as possibilidades de inferência em situação. No entanto, o esquema “não organiza somente a conduta observável, mas também o pensamento subjacente” (VERGNAUD, 2009, p. 21). Sendo assim, há a possibilidade de serem mobilizados por regras de ação. Com esta definição, Vergnaud traz uma ferramenta analítica para o mapeamento de esquemas.

Os conceitos-em-ação, segundo Vergnaud (2009), são categorias pertinentes e os teoremas-em-ação são proposições tomadas como verdade inegável. Os invariantes operatórios, portanto, permitem selecionar informações relevantes e, a partir delas, o sujeito pode inferir as regras de ação mais adequadas para abordar uma situação (VERGNAUD, 1990; 2009; 2013). Desta forma, os invariantes operatórios são constituintes cognitivos dos esquemas, já que com eles há a “identificação de objetos materiais e de suas relações pela percepção e interpretação

das informações em situações que envolvem a incerteza, hipóteses, e raciocínios que repousam sobre os objetos sofisticadamente elaborados pela cultura” (VERGNAUD, 2009, p. 23).

Mas afinal, qual seria a definição de situação? Vergnaud (1990 p. 150 e p. 12), o conceito de situação recorre à definição usualmente utilizada pelo psicólogo: os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais é confrontado. Nas situações, é possível estudar os esquemas que orientam as respostas dos alunos analisando o comportamento deles. E quanto mais complexas são as situações, maior o número de esquemas utilizados (FIGUEROA; OTERO, 2015).

Em uma das situações trazida por estas autoras, foi contemplada a função exponencial em juros compostos. No entanto, analisando os invariantes operatórios dos sujeitos, por meio da identificação dos teoremas-em-ação, as autoras constataram que a maioria dos estudantes utilizaram-se de esquemas como se a função fosse linear. Isto porque, tendo em vista que a taxa de juros da situação correspondia a 1% ao mês, os estudantes classificaram essa informação como linear, sem levar em conta o caráter exponencial no cálculo de juro composto.

## 2.4 ABORDAGEM INSTRUMENTAL

O fundamento teórico que nos permite analisar as ações e as noções de funções matemáticas que os estudantes mobilizam quando resolvem uma situação-problema é a Abordagem Instrumental de Pierre Rabardel (1995). Esta teoria apresenta as relações existentes entre sujeito, ferramenta (denominado artefato) e os esquemas de utilização. Três conceitos extraídos desta Abordagem também ganharão destaque neste trabalho: sujeito, esquemas (de utilização e ação instrumentada) e artefato.

Entende-se como sujeito o indivíduo ou grupo de indivíduos que exercem uma ação e/ou é escolhido para o estudo; já o conceito de esquemas de utilização pode ser explicado no mesmo sentido do termo proposto por Vergnaud (1996), segundo Rabardel (1995). Assim, um esquema de utilização é uma organização invariante de comportamentos para determinadas classes de situações; por fim, podemos resumir

artefato em um dispositivo, que pode ser material – como um objeto eletrônico, um *software* ou até um lápis, dentre outros objetos – ou **simbólico**, como as representações semióticas que serão objeto de estudo neste trabalho as quais são usadas como meio da ação pelo sujeito.

Por fim, a Abordagem Instrumental nos permite entender a diferença existente entre o artefato, o instrumento e os processos que regem a progressiva transformação do artefato em instrumento. Essa transformação, conforme Rabardel (1995), recebe o nome de Gênese Instrumental.

#### **2.4.1 Artefato e Instrumento**

Neste subtópico iremos contemplar a diferença entre artefato e instrumento. Para começarmos, precisamos definir cada um destes conceitos.

Artefato é uma produção humana, material e externa de um ou mais desenvolvedores, concebida a partir de critérios, para exercer determinadas funções, atuar como ferramenta, com as finalidades para as quais fora criado (LUCENA, 2018, p. 40). Segundo Bellemain e Trouche (2019), é um produto da atividade humana, que se caracteriza por suas potencialidades, seus limites e seus *affordance*<sup>1</sup>. Por exemplo, a partir do momento em que o estudante é posto a resolver uma situação-problema envolvendo funções, apesar desse sujeito saber que este objeto existe mas não sabe manipular suas representações, este sistema de representações para ele é apenas um artefato.

Já instrumento é entendido como sendo um artefato que o sujeito aplicou esquemas mentais de uso para que possa fazer uso deste objeto, seja material ou simbólico. Portanto, instrumento é um produto de ação humana, seja cognitiva ou internalizada do usuário, produzida de maneira individual ou coletiva, resultante de um processo denominado gênese instrumental (LUCENA, 2018). Voltando ao exemplo do parágrafo anterior sobre o aluno confrontado a resolver a situação problema sobre funções: a partir do momento em que ele começa a explorar os diferentes registros de representação, entende como realizar as transformações, tanto tratamentos quanto

---

<sup>1</sup> Segundo os autores, entende-se como *affordance* “a qualidade de um objeto que permite ao indivíduo identificar suas funcionalidades sem a necessidade de prévia explicação”.

conversões, observa-se o sujeito agregar esquemas de utilização. Então, podemos dizer que o estudante está transformando o artefato em instrumento e, ao passo que novos esquemas são agregados e desenvolvidos, o aluno vai transformando os instrumentos.

Na concepção de Rabardel (1995), o instrumento pode ser compreendido com base em duas dimensões: a primeira, o autor chama de entidade intermediária; a segunda, meio de ação. Rabardel (1995, p. 72) aponta que, ao descrever entidade intermediária, dentre as abordagens sobre o entendimento de instrumento, há uma unanimidade em defini-lo como uma entidade intermediária entre o sujeito – usuário do instrumento – e o objeto, sobre o qual a ação é dirigida. É olhando por este lado que vemos o instrumento como sendo um mediador das relações sujeito – objeto. O instrumento como uma entidade intermediária é capaz de se adaptar ao sujeito e ao objeto. Essa adaptação, por sua vez, se dá em razão das propriedades, sejam elas materiais, cognitivas ou semióticas e em função do tipo de atividade exercida pelo sujeito.

Por outro lado, segundo o autor, o instrumento pode ser visto como meio de ação. Sob este ponto de vista, o instrumento é analisado de três maneiras, a depender da natureza da ação do sujeito: instrumento material, ou seja, há a manipulação do objeto material; ou instrumento psicológico, em que o instrumento requer uma decisão cognitiva, uma tomada de decisão, gestão da atividade propriamente dita; e, por fim, o instrumento semiótico, em que há a interação semiótica do instrumento com um ou com outros objetos semióticos.

#### **2.4.2 Esquema de ação instrumentada e instrumentação**

Outra diferenciação que Rabardel (1995) propõe na Abordagem Instrumental é quanto aos processos de instrumentação e instrumentalização. Segundo este autor, estes dois processos ocorrem mutuamente e estão ligados à relação de apropriação entre o sujeito e o artefato.

Entende-se como instrumentação o processo de apropriação de um artefato por um sujeito, de modo que este irá desenvolver um esquema de ação instrumentada, incorporando o artefato por meio desta ação para a realização de uma determinada

tarefa. Neste trabalho, por exemplo, pretendemos analisar o processo de instrumentação de estudantes ao resolverem situações envolvendo o conceito de função. Nesses eventos, os estudantes irão se apropriar dos sistemas de representação semióticos para resolverem a situação, processo no qual esquemas de ação instrumentadas serão desenvolvidas.

Assim, para Rabardel (1995), o instrumento está então definido como uma entidade mista, combinando o artefato e o esquema de ação instrumentada. Logo, enquanto o artefato é uma realidade independente do aluno, o instrumento está ligado a um aluno em particular. Os esquemas de ação instrumentada são relativos às atividades diretamente relacionadas ao objeto da ação. Para Artigue (2002), citado em Bittar (2011), os esquemas de ação instrumentada vão progressivamente compondo técnicas que permitem resolver eficientemente certas situações. Assim, o instrumento pode ser concebido como sendo uma entidade que combina o artefato ao esquema de ação instrumentada.

### **2.4.3 Esquemas de utilização e instrumentalização**

A instrumentalização, por sua vez, é entendida como um processo que parte do artefato para o sujeito, no qual o artefato será moldado e incorporado aos hábitos do sujeito. Rabardel (1995, p.11) define esse processo como o “surgimento e evolução da componente artefato do instrumento: selecionando, agrupando, produzindo e definindo funções, transformando o artefato (estrutura, funções etc.) enriquecendo as propriedades deste artefato cujos limites são difíceis de determinar”.

Rabardel (1995, p. 93) ainda complementa que “a instrumentalização ocorre quando o sujeito insere o artefato em sua prática na intenção de conhecer suas propriedades, sua interface e funcionalidades, desenvolvendo assim esquemas de uso”. Pretendemos, assim, analisar em nossa pesquisa a forma como os estudantes se instrumentalizaram com os sistemas de representação semióticos ao exporem suas estratégias de resolução às situações propostas.

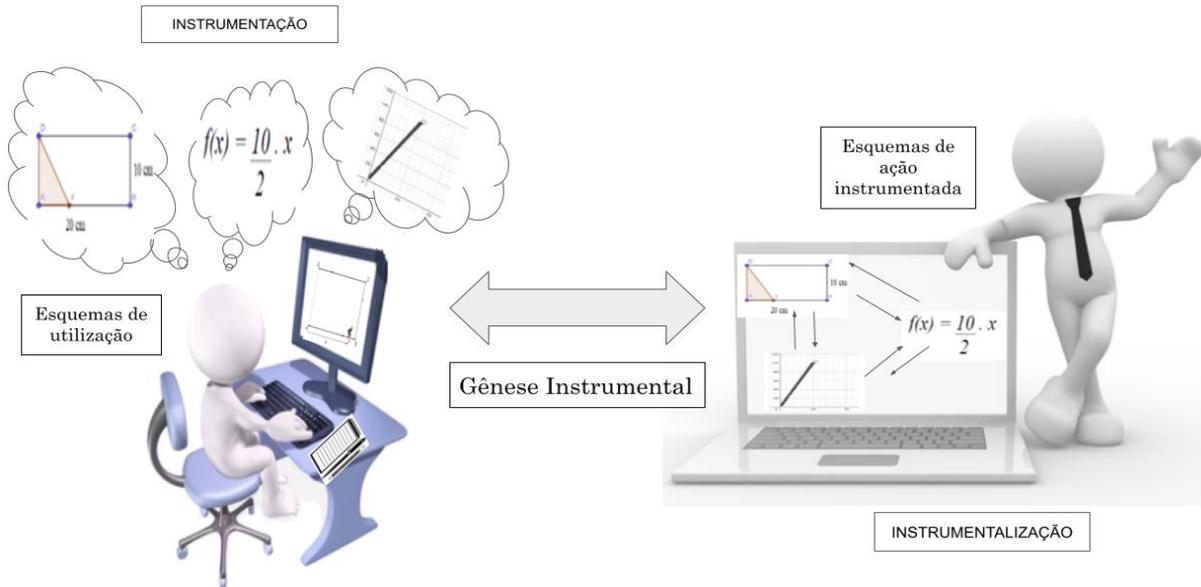
### **2.4.4 Gênese Instrumental**

Como vimos anteriormente, a composição de um instrumento (esquemas e/ou artefatos), bem como a sua origem, dependem dos invariantes. Enquanto que os artefatos são instrumentalizados, ou seja, utilizados pelo sujeito, os esquemas pertencem ao sujeito e sofrem generalização ou acomodação pelo sujeito e, ainda, novos esquemas podem ser construídos. Esses processos, abordados anteriormente, são distinguidos em termos de instrumentação e instrumentalização compondo, para Rabardel (1995), o processo de Gênese Instrumental.

Segundo Lucena (2018), a diferenciação dos processos que resultam na gênese instrumental, instrumentalização e instrumentação, emerge à medida que a inserção e a integração do artefato à prática do aluno ou do professor ocorrem. Portanto, investigar a gênese instrumental em situação de formação de licenciandos é investigar como o estudante cria os seus esquemas para o uso, em nosso caso com os sistemas de representação semióticos e como esses sistemas vão transformar ou compor sua prática pedagógica futura, de modo a contribuir com a aprendizagem de seus alunos.

Assim, as relações entre sujeito, esquemas e artefato, como foi resumidamente apresentado na figura 10, serão exploradas em nosso trabalho a fim de tentarmos entender como os licenciando em matemática mobilizam os esquemas para que esses processos ocorram, nos dois sentidos, entre os estudantes e os sistemas de representação semióticos, atribuídos como artefatos aos estudantes. Então, é observando esta operação mútua de modificações que buscaremos atingir nossos objetivos, já descritos anteriormente.

Figura 10 - Ilustração da gênese instrumental em uma atividade sobre funções



Fonte: o autor

Para uma melhor visualização do processo da gênese instrumental, ilustramos resumidamente na Figura 10, tanto os esquemas utilizados pelo sujeito ao utilizar os registros de representação semiótica em uma atividade sobre funções, quanto o instrumento em modificar o sujeito por meio de esquemas de utilização.

### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, apresentamos algumas pesquisas que contribuem com a discussão em torno da temática proposta em nosso trabalho, sobre as representações no ensino de função. Foi realizada no Grupo de Estudos em Recursos para a Educação (GERE), no ano de 2020, uma revisão sistemática de literatura para levantamento de estudos que tratassem do ensino e aprendizagem de funções matemáticas no âmbito da educação Básica e Superior.

Com a Revisão Sistemática de Literatura, de acordo com Ramos, Faria e Faria (2014, p. 4), devemos definir critérios, métodos precisos e sistemáticos, de modo a identificar e selecionar as fontes bibliográficas com o máximo rigor, grau de eficiência e confiança no trabalho desenvolvido. Com base nisso, houve a decisão do grupo em estabelecer os critérios abaixo:

1. Veículos de publicação: periódicos, banco de teses e dissertações.
2. Tipo de documento: Artigos de pesquisa, relato de pesquisa, teses, dissertações.
3. Bases Bibliográficas:
  - ERIC - Education Resources Information Center
  - Periódico CAPES
  - Banco de Teses da CAPES
  - Research Gate
  - HAL
  - Google Scholar
  - Scielo
4. Operadores de busca:
  - Francês: fonctions AND (*enseignement* OR *apprentissage* OR *Éducation*) AND *mathématique*
  - português: funções AND (ensino OR aprendizagem OR educação) AND *matemática*

- Espanhol: funciones AND (*aprendizaje OR enseñanza OR educación*) AND matemáticas
- Inglês: Functions AND (*learning OR teaching OR education*) AND *mathematics*

5. Período: 2014 a 2019

6. Línguas: português, espanhol, inglês e francês

7. Critérios de inclusão:

- Pesquisas que apresentem resultados para o Ensino e Aprendizagem de funções;
- Metodologia bem definida;
- Resultados respeitam as possibilidades da metodologia adotada;
- Resultados se relacionam com o objetivo ou questões de pesquisa

8. Critérios de exclusão:

- O termo “função” não assume o significado de função matemática;
- Trabalhos sobre funções matemáticas para outros fins não correlato ao ensino e aprendizagem da matemática;
- Revisões bibliográficas.

Realizando as buscas por trabalhos nas bases bibliográficas descritas no item 3, foram encontrados 609 textos, os quais foram listados e catalogados na plataforma Zotero. Aplicando os critérios de exclusão, ficamos com 188 artigos. Ao passo que estes eram selecionados, realizamos uma nova leitura dos resumos e selecionamos novos critérios de inclusão:

- Não ser revisão de literatura.
- Não ser de outro tipo de publicação que não seja artigo de revista ou tese e dissertação.
- Estar acessível.

Os trabalhos cujos critérios não se enquadraram nos citados anteriormente foram eliminados, ficando ao todo 117 artigos. Em seguida, a fim de obter textos cuja

temática contemplasse nosso objeto de estudo, ou seja, representações, utilizamos a tag “*representation*”. Este filtro nos retornou 22 trabalhos, o que representa aproximadamente 18,8% do total de textos sobre função levantados anteriormente. Por fim, estes artigos foram agrupados na Tabela 2, na qual cruzamos o quantitativo de trabalhos por idioma a cada base bibliográfica encontrada. Destes 22 trabalhos, aplicamos mais um critério de exclusão referente aos artigos que não abordam as representações de funções, restando 18.

Tabela 2 - Distribuição dos artigos por idioma e banco bibliográfico

Bancos Bibliográficos	Idiomas				Total por idioma
	Inglês	Português	Francês	Espanhol	
Google Acadêmico	1	2	0	0	3
ERIC	0	0	0	0	0
Research Gate	4	4	0	0	8
HAL	0	0	0	0	0
Scielo	0	2	0	0	2
Periódico CAPES	3	1	0	2	6
<b>Total por banco</b>	8	9	0	2	19 <sup>2</sup>

Fonte: elaborado pelo autor.

Ao passo que a leitura destes artigos era feita, organizamos as informações básicas como título, ano de publicação, autores, objetivos, principais teóricos que fundamentam o texto, principais resultados e o foco da pesquisa (ensino ou aprendizagem). Além disso, buscamos também extrair informações que fossem no sentido da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, como os aspectos teóricos, tipos de registros mobilizados pelos sujeitos, as transformações realizadas (tratamentos e conversões), semiose e noesis e se houve congruência ou não congruência entre os registros.

Como também levantaram Costa e Moretti (2020), a quantidade de estudos ancorados nesta teoria vem aumentando nos últimos anos. A importância de

<sup>2</sup> A partir da análise da tabela, encontramos uma divergência no total em comparação àquele valor apresentado no parágrafo anterior. Isto se deu porque existem alguns artigos com duplicidade de base bibliográfica.

fundamentar os estudos na teoria de Duval, denominada Teoria dos Registros de Representação Semiótica, é trazida por Costa e Moretti (2020), ao destacarem que as representações, além de serem essenciais à comunicação, contribuem para as atividades cognitivas. Assim, a compreensão de um objeto matemático está relacionada à capacidade de mobilizar de forma coordenada mais de um registro de representação semiótica de um mesmo objeto (COSTA; MORETTI, 2020, p. 380).

### 3.1 REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES COM BASE NA PERSPECTIVA DE RAYMOND DUVAL

Neste tópico trazemos os estudos levantados na revisão sistemática de literatura os quais estavam ancorados na concepção de representações de funções a partir do pressuposto teórico de Duval (1995; 2003; 2006; 2009; 2011a; 2011b; 2012).

Núñez, Suárez e Contreras (2017) ancoram a pesquisa em Duval (2006), em que nenhum objeto matemático é diretamente acessível, fazendo-se necessário o uso de diferentes registros de representação, desde que haja a articulação coerente entre tais representações. As coletas de dados ocorreram em dois momentos, pré-teste e pós-teste. Os registros predominantes nas atividades do pré-teste foram o registro algébrico, sendo o registro gráfico abandonado ou com escassa utilização. Já no estudo pós-teste, por sua vez, houve a utilização da linguagem matemática, além dos registros algébrico, gráfico e tabular.

Ao analisar os dados apresentados por aqueles autores, caracterizamos como semiose o conhecimento e uso de diferentes registros de representação (diagrama, tabular, gráficos, linguagem matemática formal). A noesis, por sua vez, foi destacada quando a aprendizagem do conceito de função se tornou mais difícil quando houve conversão, especialmente, no sentido gráfico para o algébrico, mostrando que os sujeitos apresentaram desconhecimento de princípios básicos: descolamento horizontal/vertical, reflexão e simetria. Além disso, revelaram por meio da linguagem materna, conceitos, termos, características matemáticas correlatas ao objeto em estudo (função): domínio, classificação da função. Por fim, percebemos também que argumentos, discussões e raciocínios em torno dos registros de representação e transformações realizadas dão indícios de aprendizagem sobre o conceito de funções e de seus diferentes aspectos.

A partir da análise dos estudos, algumas conclusões puderam ser observadas: os estudantes esboçaram apreensões de conceitos matemáticos, em geral, imprecisos, o que gerou dificuldades em sua aprendizagem. Isso pode se dever ao modelo de aula tradicional de funções de uso excessivo do registro algébrico passando para o gráfico plano cartesiano com suporte da representação tabular. Além disso, houve a necessidade de variedade de registros de representação e de uma articulação coerente entre eles. Os autores também destacam a importância de valorizar atividades que favoreçam a conversão do registro gráfico para o algébrico (maior dificuldade dos estudantes). E, por fim, o uso do registro por parte do estudante está muito condicionado à proposição nos exercícios ou à decisão dele de voltar ao registro algébrico para resolver a situação proposta.

Características parecidas com o estudo apresentado por Prada, Hernández, e Jaimes (2017) foram observadas no trabalho de Pinheiro, Alves e da Silva (2016). Estes autores realizaram o estudo com estudantes residentes em comunidades ribeirinhas no estado do Pará, cujo objetivo foi identificar as dificuldades na aprendizagem de função polinomial do 1º grau. Estes autores se sustentaram na ideia de que a utilização dos registros de representação semiótica se justifica por sua análise para permitir conhecer o modo de pensar matemático do aluno e não apenas o conhecimento dos procedimentos próprios do conteúdo. Além disso, a escolha da modelagem matemática é motivada por proporcionar, para essa análise, um ambiente de discussão, fazendo com que o aluno atue como agente de sua aprendizagem. Para os autores, a noção de representação é essencial para se estudar os fenômenos relativos ao conhecimento, pois a mobilização de um conhecimento depende de uma atividade de representação. Por fim, uma representação semiótica só é interessante à medida que pode se transformar em outra representação, e não em função do objeto que ela representa.

Neste estudo, Pinheiro, Alves e da Silva (2016) utilizam atividades em que os estudantes mobilizam os registros em Linguagem Natural e em Linguagem matemática. Nas atividades que envolvem tratamento, foi constatado que houve a habilidade na execução no tratamento dos cálculos dos exercícios propostos. No entanto, na conversão os alunos não obtiveram o mesmo sucesso, havendo dificuldades por parte dos grupos em interpretar determinados dados do problema e, por isso, a conversão não foi concluída com sucesso, necessitando, intervenção da

professora. Dessa forma, caracterizamos como semiose a utilização e conhecimento de apenas dois registros de representação (linguagem natural e linguagem algébrica), tendo o tratamento sido efetuado de forma correta pelos alunos. Já a noesis foi observada quando a aprendizagem do conceito de função tornou-se mais difícil quando houve conversão, especialmente, no sentido da linguagem natural para o registro em linguagem matemática.

Por fim, a partir da análise dos resultados, os autores concluíram que nenhum dos grupos conseguiu chegar à conversão dos registros e o fato disso é que todos os grupos identificaram parcialmente os dados que seriam necessários para solucionar a questão, deixando de fora informações indispensáveis para a conversão. Além disso, todos os grupos apresentaram representações auxiliares que dizem respeito a alguns valores numéricos referentes à questão.

Com o objetivo de analisar a contribuição de um objeto de aprendizagem, para o ensino e aprendizagem da função exponencial, com alunos de uma turma do Ensino Médio, a pesquisa de Bonotto e Bisognin (2015) considera que as simulações e os gráficos, propiciados pela exploração das atividades nesse Objeto de Aprendizagem, favorecem a utilização de diferentes representações para o estudo da função exponencial. Além disso, o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Neste estudo, as autoras destacam que a articulação entre diferentes registros de representação como sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), figuras geométricas, gráficos, é condição necessária para a compreensão em Matemática. Ainda de acordo com as autoras, é importante o professor, ao planejar sua aula, utilizar mais de um registro de representação e estabelecer uma coordenação entre eles como proposto por Duval (2012, p.292), que se manifesta “pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva da conversão”.

Nas atividades propostas pelas autoras, percebemos a predominância dos registros algébrico e gráfico, além das linguagens natural e matemática. Observou-se ainda, com base nos dados apresentados, a utilização de um software para que os alunos realizassem a conversão do registro algébrico para o registro gráfico (apenas em um sentido). Nessa pesquisa, entretanto, não pudemos analisar os conceitos de semiose e noesis pois a professora utilizou um *software* interativo, no qual os sujeitos

interagiram com a plataforma analisando gráficos e formulando conjecturas para responder determinadas perguntas elaboradas, mas não obtiveram retorno sobre erros e acertos. Portanto, não puderam garantir se houve aprendizado do objeto matemático em estudo, embora as autoras tenham descrito que a atividade despertou a curiosidade e interesse dos participantes.

Já na pesquisa de Rolfes, Roth e Schnotz (2017), o objetivo foi investigar o efeito dos registros de representação tabular e gráfico no raciocínio quantitativo e qualitativo de alunos do 6º e 7º anos, sob o ponto de vista covariacional de funções. Os registros mobilizados foram tabelas e gráficos (barras aumentado e cartesiano) e, analisando o ponto de vista conceitual, os pesquisadores levantaram que, uma vez o sujeito demonstrando habilidade na conversão entre representações, há indícios de uma compreensão elaborada do conceito de função. De acordo com a análise dos dados levantados por esses autores, observou-se que os estudantes não encontraram dificuldades em realizar a conversão do registro tabular para o registro gráfico, o que pode ser entendido como a noesis. A semiose, por sua vez, ocorreu quando houve a demonstração dos alunos pelo conhecimento dos dois registros de representação (tabular e gráfica) utilizados.

Em contrapartida a estes autores e trabalhando o conceito de limites de funções com estudantes do 12º ano em Portugal<sup>3</sup>, Gutierrez-Fallas e Henriques (2016; 2017) perceberam que os sujeitos da atividade apresentaram mais dificuldades com tratamentos que em conversões. Isto se deve ao fato de, segundo os autores, as dificuldades estarem associadas à utilização de procedimentos algébricos no cálculo de limites. Por exemplo, durante a realização do teste de sondagem, os estudantes não conseguiram simplificar expressões algébricas ou, ainda, tiveram dificuldades no levantamento algébrico da indeterminação no cálculo de um limite. Além desses obstáculos, os estudantes ainda apresentaram dificuldades no reconhecimento da unicidade de valor do limite, uma vez que nos casos em que os limites laterais eram diferentes, um dos sujeitos considerou que o limite podia ter os dois valores.

As atividades propostas por Gutierrez-Fallas e Henriques (2016, 2017) permitiam ao sujeito mobilizar os registros de representação gráfica, de representação simbólica e/ou verbal, linguagem formal matemática e de representação algébrica. Os

---

<sup>3</sup> 12º ano do Ensino Secundário português corresponde ao 3º ano do Ensino Médio brasileiro

estudantes, por sua vez, realizaram de forma correta a conversão da representação gráfica para a representação simbólica e/ou verbal, a partir da leitura e interpretação da informação do gráfico. Posteriormente, os sujeitos criaram o desenho do gráfico de uma função satisfazendo as condições estabelecidas relacionadas com o comportamento da função no que diz respeito à noção de limite. Por fim, ainda no que trata do processo de conversão, com a análise da pesquisa, observou-se articulações dos três sistemas de representação (gráfico, simbólico, verbal), o que permitiu aos alunos referirem-se ao conceito de limite de uma função.

Assim, de acordo com os dados apresentados pelos autores, podemos dizer que houve semiose quando os estudantes evidenciaram a capacidade de converter o registro da representação gráfica para simbólica. Além disso, também mostraram ter conhecimento e souberam utilizar diferentes registros de representação (gráfica; simbólica e/ou verbal; linguagem formal matemática; representação algébrica). A noesis foi percebida quando revelou-se por meio da representação verbal os conceitos, termos, características matemáticas correlatas ao objeto em estudo (função), tais como domínio, classificação da função. Além disso, os argumentos, discussões e raciocínios em torno dos registros de representação e transformações realizadas mostraram indícios de aprendizagem sobre o conceito de funções e de seus diferentes aspectos.

Os autores concluem que os alunos estabeleceram essencialmente relações entre diferentes representações, sendo capazes também de visualizar os conceitos de acordo com as convenções matematicamente formais que são solicitadas na sala de aula.

Entender como os alunos compreendem os conceitos de limite foi uma preocupação não só em Portugal, como apresentado anteriormente, mas também é objeto de estudos aqui no Brasil. A pesquisa de Fonseca e Henriques (2018) teve como objetivo analisar que compreensão evidenciam os estudantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática sobre a definição formal de limite de uma função em um ponto.

Para isto, os autores propõem atividades que permitam a mobilização de diferentes registros, tais como: linguagem natural, linguagem algébrica, linguagem simbólica matemática, registro gráfico, registro geométrico. Em atividades que

envolviam tratamentos desses registros, os pesquisadores evidenciaram que os sujeitos apresentaram habilidade no tratamento algébrico para encontrar valores para os limites. Foi observado ainda que os estudantes demonstraram habilidade em desenvolver o tratamento da representação geométrica do limite.

Já no processo de conversão, segundo os autores, percebemos que os estudantes representaram o limite de uma função, algébrica e geometricamente em apenas um sentido. Estes sujeitos, ainda, demonstraram habilidade de traduzir o limite por uma expressão algébrica envolvendo a noção de vizinhanças, representadas por símbolos ou intervalos. Com a análise dos resultados podemos perceber também que os estudantes foram capazes de realizar a conversão da linguagem natural (conceito de limite) em linguagem geométrica.

É a partir deste processo de conversão que observamos o fenômeno de congruência entre os registros, já que este ocorreu quando os estudantes representaram a conversão do limite de uma função da linguagem algébrica para a figural (geométrica), ainda que em apenas um sentido. Para Duval (2012), há o fenômeno de congruência entre registros de representação de partida e a representação de chegada quando a conversão é trivial e poderia quase ser considerada, intuitivamente, como um simples código. Sendo assim, é possível observar em ambos os sentidos da conversão uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes de partida e de chegada.

Com isto, a semiose foi observada na utilização e conhecimento apresentado pelos sujeitos quanto aos registros de representação. Percebemos também, conforme apresentado anteriormente, que o tratamento foi efetuado de forma correta pelos alunos, como também estes demonstraram capacidade de converter a representação algébrica para geométrica. Para a noesis, podemos inferir que os sujeitos atribuíram ao limite diferentes significados. Além disso, os participantes foram capazes de reconhecer e representar o limite algébrica e geometricamente, com registros assentes na simbologia dessa definição. Por fim, houve a aplicação correta na análise de erros e na resolução de problemas de validação de conjecturas. Concordando com os autores, portanto, pode-se concluir que os sujeitos evidenciaram uma aprendizagem com compreensão da definição formal e conceitual de limite.

Assim, um conceito só pode ser desenvolvido em sua plenitude com a mobilização dos sistemas de representação que possibilita uma visão ampla e esclarecida do assunto, viabilizando os processos de demonstração e argumentação. É com esta percepção teórica que Pires e Barbosa (2018) fundamentaram sua pesquisa, cujo objetivo foi analisar a mobilização, manipulação e a coordenação de diferentes representações de função em situações/atividades produzidas e realizadas por três professores de Matemática do Ensino Médio. Nestas atividades, percebemos a predominância dos registros algébrico, numérico e gráfico, mas também contou com as representações em linguagem natural, figural e tabular, ainda que como representação secundária.

Já que os dados apresentados apenas demonstram as situações criadas pelos professores, analisamos as situações dentro da perspectiva do que a questão apresenta para realização de conversões, dentro do que os alunos viriam a responder. Isto porque não houve tratamento em nenhuma das questões, além de não ser objetivo nosso, nem dos autores, realizar uma análise a priori das situações apresentadas na pesquisa. Sendo assim, podemos também acrescentar que não puderam ser observadas nem a semiose e nem a noesis.

Quanto às conversões, a partir dos dados apresentados por Pires e Barbosa (2018), em maior parte das situações apresentadas, o registro de partida é o algébrico, passando pelo numérico como uma representação auxiliar, até chegar no registro gráfico não consideram as implicações das unidades simbólicas significativas da representação algébrica nas variáveis visuais pertinentes da representação gráfica.

Por fim, segundo os autores, foi possível observar a predominância de situações que envolviam a função afim, mais especificamente a função linear e a função quadrática, o que indica que a concepção mais espontânea de função manifestada pelos sujeitos limita-se às relações que podem ser descritas por um modelo de uma função afim ou quadrática. Nas situações em que a conversão era exigida, ela prioritariamente apresentou o fenômeno de congruência, o que pode ser entendido como a preferência dos professores em privilegiar situações em que a conversão é congruente.

### 3.2 ARTICULAÇÃO ENTRE A REVISÃO DE LITERATURA E A PESQUISA

Nesta seção, apresentamos uma concepção resumida do capítulo, em que a partir de uma revisão sistemática de literatura sobre representações de funções, encontramos publicações de textos fundamentados nas teorias de Duval.

Os trabalhos aqui apresentados apontam importantes contribuições acerca da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, o que nos faz pensar sobre o quanto esta base teórica traz em relação ao papel primordial do funcionamento e da constituição de um sistema de representação que rege a construção dos saberes sobre o objeto matemático a ser estudado. Isto faz com que a Teoria das Representações Semióticas seja um importante instrumento de pesquisa em educação matemática, já que é possível analisar uma estrutura cognitiva complexa do aluno referente ao aprendizado em matemática.

No entanto, não percebemos nas literaturas pesquisadas uma relação entre a transformação de registros de representação com as ações do sujeito, o que motivou a ideia para este trabalho. Desta forma, pretendemos analisar as ações e as noções de funções matemáticas que licenciandos em matemática mobilizam quando resolvem uma situação-problema sobre função definida por partes. Com isto, buscaremos entender os esquemas que estes sujeitos utilizam para manipular uma determinada ferramenta a fim de resolver esta situação (VERGNAUD, 1990).

Nesta concepção, a Abordagem Instrumental de Pierre Rabardel (1995) nos auxiliará, posto que esta teoria apresenta as relações entre sujeito, esquemas e artefatos as quais estamos buscando entender. Estas relações ocorrem em processos e estes dependem tanto do sujeito modificar o artefato por meio de esquemas, quanto ao artefato modificar o sujeito, uma vez que o indivíduo irá incorporar esta ferramenta aos seus hábitos de resolução de uma dada situação. Para Rabardel (1995), este conjunto de processos recebe o nome de Gênese Instrumental.

Logo, em nossa pesquisa, investigaremos como o estudante cria os seus esquemas para o uso, em nosso caso com os sistemas de representação semióticos, caracterizados por Rabardel (1995) como artefatos simbólicos, e como esses artefatos vão transformar ou compor sua prática pedagógica, de modo a contribuir com a aprendizagem de seus futuros alunos.



## 4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos da pesquisa. Subdividimos em cinco tópicos, em que começamos definindo os pressupostos teóricos que fundamentam o método em que realizamos a pesquisa. Em seguida, um tópico trata sobre o *design* da orquestração instrumental on-line, método este a ser seguido e detalhado ao longo do trabalho. O tópico seguinte traz a estrutura de coleta de dados da OI On-line, apresentamos como a obtenção dos dados no ato da sua produção será realizada, de modo que possam contribuir para identificar as escolhas, verificar conhecimentos e procedimentos, além de compreender as motivações das ações dos sujeitos e entre outros aspectos relevantes à análise. Em seguida, apresentamos a análise microgenética, a qual nos permite analisar os dados que revelem os aspectos essencialmente cognitivos, através da análise de gestos e ações, de modo que possamos, por meio destes dados, entender a gênese instrumental dos sujeitos; por fim, os aspectos éticos da pesquisa delimitam os percursos morais para avançarmos na análise dos dados, posto que estaremos realizando como técnicas de obtenção desses dados vídeo-gravações e capturas de telas de computador. Essa autorização dos sujeitos é necessária para que possamos analisar e, posteriormente, publicar os resultados obtidos.

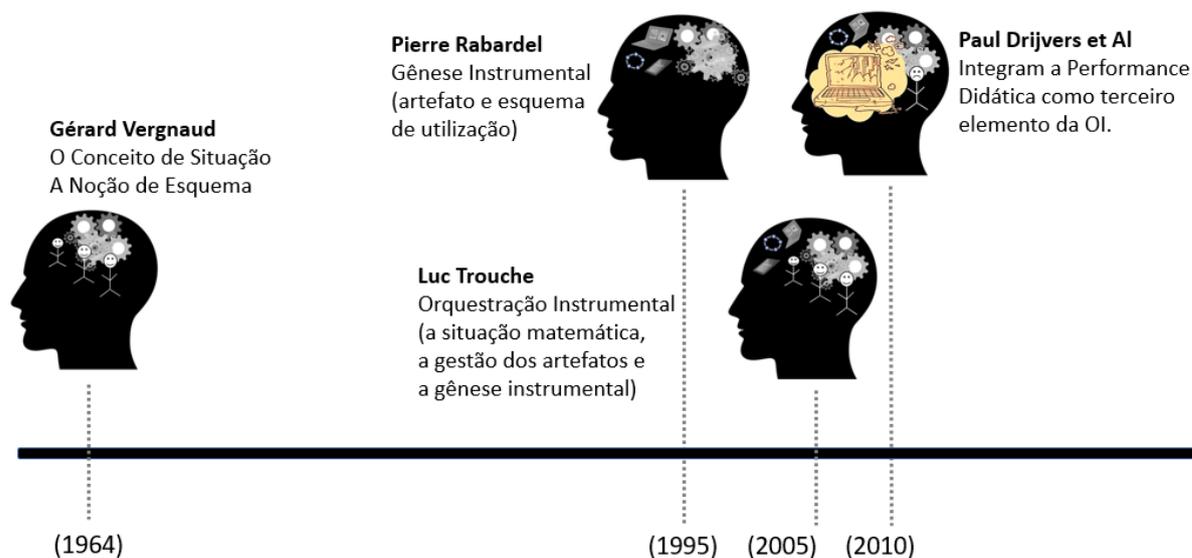
### 4.1 FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA

Este tópico foi dividido em dois subtópicos, nos quais apresentamos os pressupostos teóricos da OI On-line, com base em TROUCHE (2004; 2005) e a OI On-line (GITIRANA; LUCENA, 2021), uma adaptação do modelo teórico para o contexto de ensino remoto.

#### 4.1.1 Orquestração Instrumental

Para pensarmos neste modelo, apresentamos na Figura 11 uma construção histórica com as teorias apresentadas até este tópico, a partir das quais podemos fundamentar a construção do modelo que está guiando nosso método de pesquisa.

Figura 11 - Evolução histórica do modelo da OI



Fonte: adaptado de Lucena (2018)

A Figura 11 destaca, inicialmente, as noções de Situação e de Esquema (Vergnaud, 1964) e o conceito relativos à Gênese Instrumental (Rabardel, 1995), estes já discutidos neste trabalho em nossa fundamentação teórica. Tais noções e conceitos são tomados por Trouche (2005) para fundamentar a construção da Orquestração Instrumental-OI, uma metáfora que visa orientar os estudantes rumo à sua gênese instrumental quando em processo de resolução de situações matemáticas com suporte de tecnologias, em especial, as digitais. Nesta direção, Trouche (2005) define duas etapas essenciais para que o ensino orquestrado seja estruturado, a saber: a configuração didática e o modo de execução. Corroboraram com o desenvolvimento da OI, Drijvers et al (2010) ao enxergarem a sala de aula, considerando imprevistos e decisões necessárias para o bom andamento da orquestração, ao definirem a terceira etapa da OI, a performance didática.

É no contexto de uma sala de aula em que o professor exerce o papel de mediador do processo da gênese instrumental dos estudantes, uma sala de aula rica em tecnologias para dar suporte à resolução de diferentes situações favorecendo o surgimento de instrumentos, é que a metáfora Orquestração Instrumental foi criada. Neste contexto figurado, idealizado por Trouche (2004), o professor passa ao papel de maestro, os estudantes são os instrumentistas e os artefatos didáticos serão os futuros instrumentos musicais a serem transformados. A música, nesse caso, conforme aponta Lucena (2018, p. 47), “é o resultado de todos os procedimentos

executados pelos instrumentistas, guiados pelos maestros, com seus instrumentos, respeitadas as condições impostas pela partitura executada”.

A Orquestração Instrumental, definida por Trouche (2005) e traduzida por Lucena (2018), é:

[...] o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. É sistemático porque, como método, desenvolve-se numa ordem definida e com um foco determinado, podendo ser entendido com um arranjo integrado a um sistema; é intencional porque uma orquestração não descreve um arranjo existente (sempre existe um), mas aponta para a necessidade de um pensamento a priori desse arranjo (TROUCHE, 2005, p.126, tradução de LUCENA, 2018, p. 46).

Para pensar na intencionalidade e na sistematização de arranjo dos elementos, conforme apresentado na definição, Bellemain e Trouche (2019, p. 7) apresentam as tarefas para o professor regente da orquestra:

- analisar o currículo para definir os objetivos didáticos e as situações matemáticas que serão executadas para alcançar tais objetivos;
- analisar o potencial dessas situações matemáticas para tirar melhor proveito dos artefatos;
- reciprocamente, analisar o potencial, as limitações e os *affordances* dos artefatos para tirar melhor proveito das situações matemáticas;
- analisar o nível de desenvolvimento dos instrumentos dos estudantes (como eles poderão mobilizar seus instrumentos para lidar com as tarefas matemáticas que lhes serão propostas? Como o trabalho matemático lhes permitirá enriquecer seus instrumentos?);
- como a combinação dos instrumentos individuais e coletivos dos estudantes dará suporte ao trabalho destes e, de modo geral, irá enriquecer o conjunto de instrumentos da turma?

Propor ao professor a análise de currículo para definir os objetivos didáticos e as situações matemáticas que serão executadas, nos faz compreender que a orquestração instrumental é também um universo da prática docente, constituída de critérios e objetivos. Segundo Lucena (2018), esta organização norteará as decisões do professor rumo à sistematização, à articulação, à assistência e ao controle relativos às ações previstas e passíveis de execução, por parte dele e dos alunos.

Dentro dessa sistematização do modelo da orquestração instrumental, o professor também deve analisar o potencial das situações matemáticas para tirar melhor proveito dos artefatos, ao mesmo tempo em que os artefatos são analisados para melhor proveito das situações matemáticas, requer do professor uma visualização prévia da orquestra a ser gerida. Afinal, o professor deve levar em consideração que uma de suas intencionalidades na orquestração é favorecer a

gênese instrumental dos estudantes e isto requer uma maestria por parte do professor na proposição de situações que levem os estudantes a desenvolver esquemas para resolvê-las, ou mesmo faça uso de esquemas já existentes, à medida em que se apropriam dos artefatos.

A orquestração instrumental permite ainda ao professor analisar o nível de desenvolvimento dos instrumentos dos estudantes. É durante o planejamento da situação que o professor pode se perguntar como os estudantes poderão mobilizar seus instrumentos para lidar com as tarefas matemáticas que lhes serão propostas. Para responder a esse questionamento, uma análise *a priori* pode ser realizada a fim de obter possíveis resultados para a situação matemática, assim como prever possíveis reações dos estudantes, e decisões do professor. Outro questionamento que pode ser levantado é como o trabalho matemático permitirá aos sujeitos enriquecer seus instrumentos. Para isso, novos esquemas deverão ser mobilizados a fim de novos instrumentos serem criados, de acordo com Rabardel (1995), que também pode ser previsto durante a realização da análise *a priori*.

Uma vez que o professor observe os instrumentos de cada sujeito participante da orquestra, como maestro, poderá prever como a combinação dos instrumentos individuais e coletivos dos estudantes dará suporte ao trabalho individualmente. Além disso, de modo geral, é possível prever como este conjunto de instrumentos poderá enriquecer o conjunto de toda a turma. Isto porque a orquestração instrumental se desenvolve em um cenário de execução didática (TROUCHE, 2005, tradução de LUCENA, 2018, p.48), o qual é projetado pelo próprio professor, em que ele poderá organizar e gerir, ao longo do tempo pedagógico, o sistema de artefatos, sujeitos, papéis e funções a exercer nas diferentes etapas do tratamento da situação matemática.

Trouche (2004) aponta as etapas de uma orquestração instrumental: configuração didática e modo de execução, complementado pela performance didática trazida por Drjivers et al. (2010). Estes princípios regem todo o planejamento que compõem o cenário da execução didática de uma orquestração instrumental e serão descritos no tópico seguinte.

#### 4.1.1.1 Etapas da Orquestração Instrumental

Neste subtópico iremos detalhar as etapas de uma orquestração instrumental: configuração didática, modo de execução (TROUCHE, 2004; 2005) e performance didática (DRIJVERS et al., 2010).

- **Configuração Didática:** de acordo com Bellemain e Trouche (2019), é um arranjo particular (podemos dizer: uma arquitetura) dos estudantes e dos artefatos. Ela diz respeito a um conjunto de situações e escolhas didáticas que deverão ser realizadas pelo professor, as quais irão compor tal arquitetura (LUCENA, 2018, p.49).
- **Modo de Execução:** diz respeito à forma como os artefatos são utilizados em uma determinada configuração. Mesmo com papéis e funções bem definidos em uma configuração didática, há diversas formas de exercer uma mesma função (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019), cuja previsão dessas formas, para Drijvers et al. (2010, tradução de LUCENA, 2018),  

é a forma como o professor decide a configuração didática para o benefício das suas intenções didáticas. Isso inclui decisões sobre a forma como uma tarefa é introduzida e trabalhada, seja sobre os papéis dos artefatos para ser jogado, e na técnica e esquemas para ser desenvolvida e estabelecida pelos alunos (DRIJVERS et al., 2010, p. 215).
- **Performance Didática:** esta componente busca descrever “os ajustes que o professor realiza na aula quando ele operacionaliza as configurações didáticas e os modos de execução que ele havia planejado *a priori*” (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019, p.10). É nesta etapa em que o professor pode repensar todo o ciclo da orquestração, modificando a situação matemática proposta ou algum aspecto da configuração didática ou do modo de execução previstos. É com esta ação que torna o modelo flexível, permitindo ao professor refletir sobre suas ações de condução da orquestra. É na performance didática que saltam aos olhos os eventos imprevistos, às quais, em geral, segundo Drijvers et al (2010) carecem de uma decisão *ad hoc* do professor, ao perceber que tal situação poderá comprometer o bom andamento da orquestra. Lucena (2018) percebeu que situações imprevistas também emergem durante a resolução das situações propostas e que, às vezes, colocam em xeque as estratégias ou atuação dos estudantes, fazendo com que reajam à situação. Tal reação foi denominada reação *ad hoc* pela autora.

A orquestração instrumental, portanto, é um modelo que leva em conta que o professor vai gerir as escolhas realizadas por ele para configuração didática e modo de execução ao orquestrar o ensino. A depender dessas escolhas e de seu gerenciamento, o professor poderá favorecer ou não o desenvolvimento de esquemas, o uso de artefatos e o surgimento de instrumentos, ou seja, a gênese instrumental dos estudantes. E é com base neste modelo, também, que o professor pode refletir sobre a experiência por ele adquirida após cada vivência de orquestração, e se esta conseguiu atender aos objetivos pré-estabelecidos. A análise da performance didática da orquestra se faz essencial não apenas para validar a orquestra, mas também para revelar ao professor adaptações necessárias ao seu melhoramento.

#### **4.1.2 Orquestração Instrumental On-line e o Ensino Remoto**

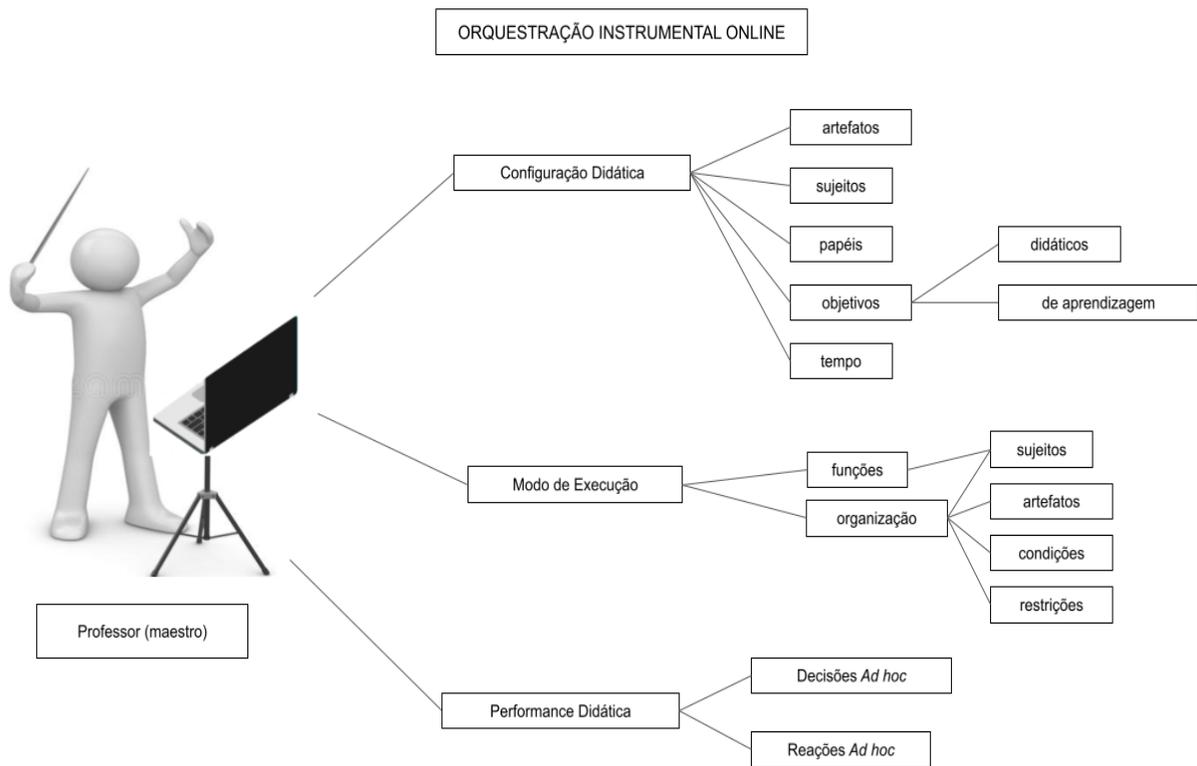
No percurso das salas de aula do Ensino Básico, durante as aulas de História Geral, tivemos a oportunidade de estudar sobre as pandemias históricas tais como a Peste Negra, a Varíola e a Gripe Espanhola (UJVARI, 2003). Entretanto, vivenciar tal situação impõe a nós vários desafios, dentre eles o de tentar contornar o caos da doença a fim de que possamos suprir as demandas diárias que exigem das pessoas. Desde o ano de 2020, vivenciamos a epidemia do SARS-CoV-2, também conhecido como o novo coronavírus. Este vírus causou uma doença, conhecida como Covid-19, que rapidamente se espalhou por todo o mundo, dizimando milhões de pessoas.

Assim, o mundo para cada pessoa mudou com o advento da Covid-19! E agora? (CÉSAR; RIBEIRO; MORAES, 2020). A doença foi declarada como uma pandemia pela Organização Mundial de Saúde (OMS) e, por sua vez, exigiu a implementação de medidas de distanciamento social para controlar a disseminação da doença. Diante dessa situação, muitas estruturas sociais suspenderam o atendimento presencial, sendo o ano de 2020 marcado pela necessidade de reformulação e adaptação de todos os setores da sociedade. No contexto educativo, quando não foi possível realizar encontros presenciais, foi necessário encontrar formas de dar continuidade aos processos de ensino e aprendizagem fora da sala de aula, no isolamento físico (BURCI et al., 2020), em todos os níveis da educação, tanto na Escola Básica, quanto para o Ensino Superior.

Assim, o contexto de pandemia expôs a necessidade das pessoas buscarem alternativas para que a sociedade não parasse. Com isso, as tecnologias ganharam papel principal na educação, viabilizando, assim, o ensino remoto. Convém ressaltar, porém, que ensino remoto e ensino à distância (EaD) são modalidades de ensino distintas. Saraiva, Traversini e Lockmann (2020) destacam que os cursos da segunda modalidade desenvolvem-se praticamente sem interações síncronas entre professores e alunos, restando a um tutor uma parte significativa do trabalho, além de ter avaliações padronizadas a serem aplicadas aos alunos. O primeiro, porém, ganhou mais destaque durante o período de isolamento já citado anteriormente. Tanto as escolas quanto instituições de nível superior (IFES), sejam elas públicas ou privadas, aderiram ao ensino remoto e seus professores passaram a ministrar aulas por meio de plataformas tecnológicas de encontros virtuais, tais como Zoom, Google Meet, Microsoft Teams entre outras. Na modalidade de ensino remoto, diferentemente do EaD, toda a responsabilidade educativa está a cargo do professor, como destacam Saraiva, Traversini e Lockmann (2020), que pode planejar suas avaliações de modo mais personalizado e ajustado ao momento pandêmico.

Este panorama atual de ensino remoto, no qual professores e estudantes de diferentes níveis e modalidades de ensino têm se deparado, tornou-se um verdadeiro desafio que não se pode vencer sem o uso dos dispositivos digitais e da internet. É neste cenário didático de ensino remoto que as pesquisadoras (GITIRANA; LUCENA, 2021) perceberam um campo promissor para o desenvolvimento de orquestrações instrumentais On-line, verdadeiras arquiteturas pensadas para dar suporte ao ensino remoto, de modo que as etapas foram estruturadas na Figura 12.

Figura 12 - Estrutura da Orquestração Instrumental On-line



Fonte: o autor

A Orquestração Instrumental On-line foi concebida sob uma atmosfera tecnológica, para ser executada remotamente, em um ambiente repleto de artefatos tecnológicos. Uma das primeiras pesquisas no Brasil a abordar este tema, Couto (2015) investigou as mediações didáticas do papel de tutores On-line, cuja análise ocorreu em uma disciplina de Geometria Analítica de um curso EaD. Os resultados da análise realizada nesta pesquisa colocam em evidência a necessidade de ensino On-line orquestrado.

Inspiradas na definição de Trouche (2005) de orquestração Instrumental, (GITIRANA; LUCENA, 2021) definem:

Uma Orquestração Instrumental On-line é o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente formado pelo virtual(is) e físico (em diferentes espaços geográficos), realizado por agentes (professor(es) e monitores) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar de forma remota, síncrona e/ou assíncrona, seus aprendizes em suas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. (Gitirana; Lucena, 2021, p. 376)

Dentro do contexto remoto, a pesquisa mais recente encontrada foi descrita por Feitosa e Rodrigues (2021), cujo trabalho teve como foco analisar o processo de concepção e aplicação de uma orquestração instrumental remota. A situação

contemplada foi a de resolução de problemas de otimização em uma disciplina de Cálculo, de modo a evidenciar a habilidade dos estudantes em resolver problemas, de forma cooperativa, envolvendo maximização de áreas, volumes, lucros, minimização de distâncias, tempo e custos.

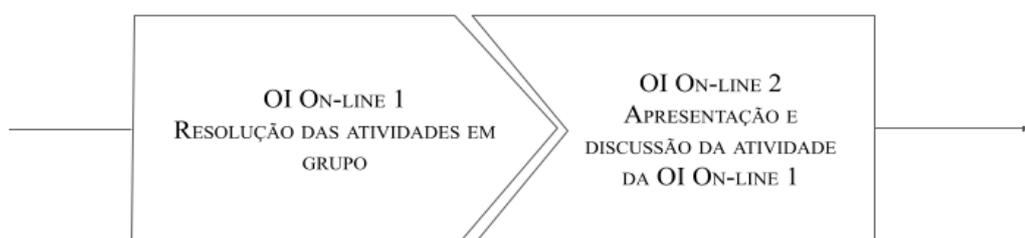
Dessa forma, a orquestração instrumental On-line mostrou ter potencial para ser um aporte teórico-metodológico para a prática docente no contexto de ensino remoto, pois segundo as pesquisas que abordaram este tema, percebeu-se o aumento da satisfação dos estudantes com as situações propostas para atividade de ensino. Assim, houve melhora em termos qualitativos da aprendizagem e do rendimento discente, contribuindo para a diminuição da evasão/desistência, demonstrando, portanto, ser uma metodologia mais vantajosa em comparação com abordagens instrucionais expositivas.

#### 4.2 DESIGN DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE

Nesta seção discutiremos o desenho inicial da OI On-line, além de definir os sujeitos e o campo de pesquisa.

O desenho (Figura 13) da Orquestração Instrumental On-line proposto nesta pesquisa foi concebido com o objetivo de dar suporte a um experimento sobre funções no ensino remoto, na perspectiva de favorecer a gênese instrumental dos sujeitos. Este desenho é uma composição de duas orquestrações instrumentais, denominadas OI Online 1 e OI Online 2, ambas idealizadas para serem realizadas on-line, por meio de encontros remotos síncronos.

Figura 13 - Desenho da OI On-line



Fonte: elaborado pelo autor

As orquestrações que compõem o desenho ocorrem consecutivamente, sem intervalo entre elas e possuem finalidades distintas. Cada uma possui, assim, uma situação proposta para ser resolvida pelos estudantes, de modo que uma orquestração dará suporte a seguinte.

Na Orquestração Instrumental On-line 1, os grupos ingressam em salas distintas a fim de resolverem a situação proposta. Em seguida, será vivenciada a OI On-line 2, em que os grupos fazem uma apresentação das soluções na OI On-line 1, também em reunião síncrona, para então ser criado, por fim, um círculo de discussões entre os participantes.

Consecutivamente, OI On-line 2 consiste em um trabalho de discussões e reflexões sobre os conhecimentos construídos com a vivência da OI On-line 1. Portanto, à medida que os participantes compartilham o que e como fizeram, podem refletir sobre isso e aprender a partir dessa reflexão. Esta atitude também é válida para o formador, uma vez que, utilizando-se das conclusões dos alunos, poderá refletir sobre sua prática e modificá-la.

#### **4.2.1 A Orquestração Instrumental On-line 1 (OIO<sub>1</sub>)**

A orquestração consiste na resolução, em grupos, de uma atividade proposta, a questão 2 da prova da OBMEP 2014 nível 3. Esta questão demanda dos sujeitos conhecimentos sobre funções, sendo aplicada em um contexto geométrico.

A OI On-line 1 possui uma situação matemática que demanda dos sujeitos interessados em resolvê-la, integrando a resolução às tecnologias disponíveis. Esta será uma etapa síncrona, na qual os licenciandos ingressarão em uma sala de aula virtual por videoconferência na plataforma *Google Meet*.

#### **4.2.2 A Orquestração Instrumental On-line 2 (OIO<sub>2</sub>) e a situação de discussão e reflexão sobre os dados da OIO<sub>1</sub>**

Por fim, a OIO<sub>2</sub> consiste em um trabalho de discussões e reflexões sobre os conhecimentos construídos com a vivência da OIO<sub>1</sub>. Portanto, à medida que os participantes compartilham o que e como fizeram, podem refletir sobre isso e aprender

a partir dessa reflexão. Esta atitude também é válida para o formador, uma vez que, utilizando-se das conclusões dos alunos, poderá refletir sobre sua prática e modificá-la.

A duração para as discussões, reflexões e considerações finais na OIO<sub>2</sub> é de 1 hora.

**Situação de formação:** cada grupo deverá apresentar as atividades realizadas na OI<sub>1</sub> de modo que em seguida sejam discutidos os resultados.

**Classe de situação:** cada grupo deverá apresentar as atividades realizadas em uma orquestração de situação matemática, com os dados obtidos na orquestração anterior.

#### 4.3 ESTRUTURA DE COLETA E ANÁLISE DE DADOS DA OI ON-LINE

A coleta de dados é o processo de recolhimento de dados ao passo que são produzidos, sob a estratégia de contribuir para a testagem das hipóteses, como também para realizar a verificação do conhecimento e dos procedimentos a fim de compreender a motivação de ação dos sujeitos. Como técnica, optamos pela observação, a qual, segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 190) consiste em “uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utilizar os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade”. Logo, nossa proposta não é ser espectadores dos participantes solucionando as situações propostas, mas nos interessa analisar os fatos e fenômenos os quais pretendemos estudar.

Segundo estas autoras, a observação ajuda o pesquisador a identificar e a obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos não têm consciência, mas que orientam seu comportamento. Acreditamos ser a técnica de observação que compõe a estrutura de coleta de dados em nossa orquestração instrumental On-line proposta, por possibilitar meios diretos e satisfatórios para estudar uma ampla variedade de fenômenos, além de permitir a coleta de dados sobre um conjunto de atitudes comportamentais típicas.

Dentre as modalidades de observação apresentadas por Marconi e Lakatos (2003), utilizaremos a observação não estruturada e a estruturada.

Na observação classificada como não estruturada, as autoras destacam que é uma técnica em que “consiste em recolher e registrar os fatos da realidade sem que o pesquisador utilize meios técnicos especiais ou precise fazer perguntas diretas” (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 191). Para este método, segundo Lucena (2018), “o observador faz registros cursivos (anotações em papel com lápis/caneta etc.), baseados em suas impressões sobre o que vê e percebe” (p.63). Desta forma, não há a interação do observador com os participantes enquanto analisa o andamento do experimento.

A outra técnica que devemos utilizar é a classificada como observação estruturada, realizada em ambientes sob condições controladas a fim de que os participantes respondam a propósitos pré-estabelecidos. Dentre os instrumentos que esse tipo de observação comporta, optamos pela filmagem, em que serão utilizadas para gravar o momento de interação dos estudantes no momento da resolução de situações problema, desde a fase de planejamento até a execução, como também utilizaremos do recurso de captura de tela e fotografia de cadernos com os tracejados oriundos dos esquemas de utilização para resolução da situação proposta.

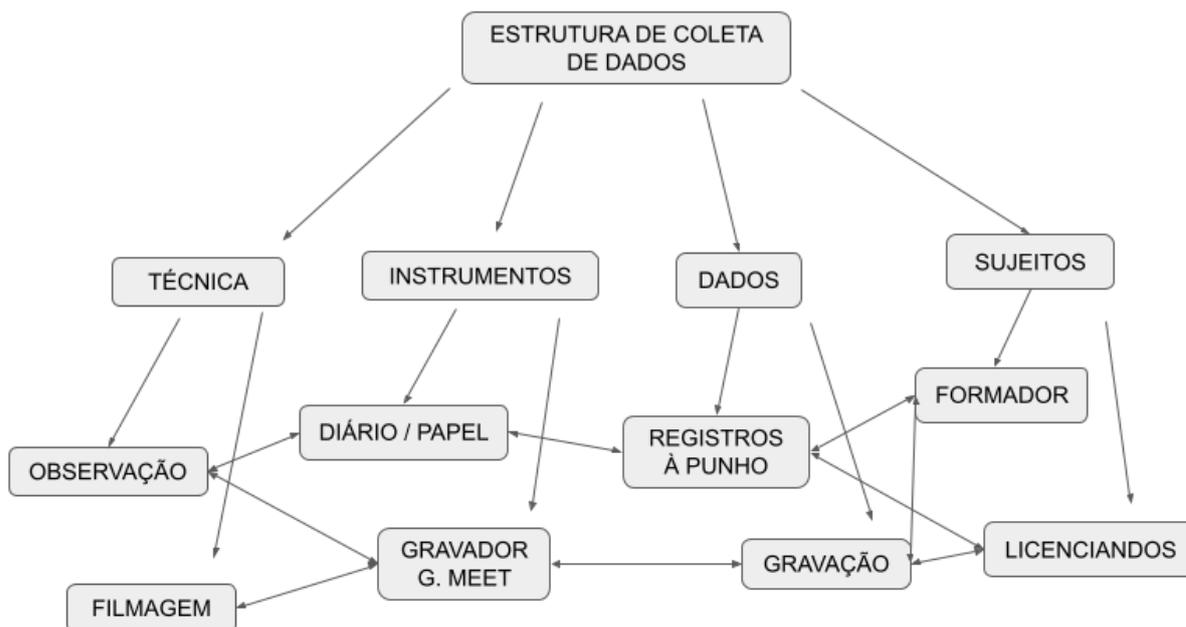
A filmagem, que consiste no ato de filmar, registrar imagens com impressão de movimento, segundo Belei et al (2008),

Com a filmagem pode-se reproduzir a fluência do processo pesquisado, ver aspectos do que foi ensinado e apreendido, observar pontos que muitas vezes não são percebidos. O vídeo também permite a ampliação, a transformação das qualidades, das características e particularidades do objeto observado (p. 193).

Esta técnica será aplicada na plataforma Google Meet, a qual já possui um recurso próprio para gravação de tela, enquanto os encontros síncronos estiverem acontecendo. Já as capturas de tela ocorrerão com o comando "*Print Screen*" da Microsoft, caso o pesquisador esteja usando computador. As fotografias dos cadernos serão retiradas pelos próprios estudantes e enviadas por e-mail ao autor desta pesquisa.

Para uma melhor visualização, organizamos a estrutura de coleta de dados deste trabalho, conforme apresentado na figura 14 a seguir.

Figura 14 - Estrutura de coleta de dados utilizado na pesquisa



Fonte: elaborado pelo autor

A imagem mostra uma síntese da estrutura de coleta de dados da pesquisa, em que estão envolvidos os elementos a serem analisados, bem como as técnicas que serão utilizadas conforme já descrito anteriormente.

#### 4.4 ANÁLISE MICROGENÉTICA

Interessa a esta pesquisa observar o trabalho individual e coletivo dos licenciandos em pleno desenvolvimento das Orquestrações Instrumentais *On-line* criadas. Pretendemos ainda observar e analisar as estratégias dos licenciandos, as discussões sobre a temática em foco, os gestos, as decisões e a resolução de situações matemáticas, a fim de que possamos analisar o processo da gênese instrumental destes. Embora os esquemas sejam, em geral, entidades implícitas, tais observações e análises poderão favorecer inferências sobre os esquemas evocados ou desenvolvidos na manipulação de registros de representação e na conversão destes, na transformação que o artefato e o sujeito sofrem durante a instrumentalização e instrumentação, também. Para analisar esses dados, acreditamos que a combinação entre a análise microgenética e a videografia, segundo Meira (1994), forma um modelo de coleta e análise de dados que permite uma

interpretação robusta e consistente dos mecanismos psicológicos subjacentes à atividade humana.

Buscamos uma técnica de análise de dados que pudesse nos dar suporte para responder à nossa questão de pesquisa e aos objetivos da Orquestração Instrumental proposta. Desta forma, a natureza dos dados a serem levantados foram relevantes para esta escolha, posto que é pela ação dos sujeitos que se revelam aspectos cognitivos, comunicativos e gestuais do sujeito, sendo por intermédio desta ação que os esquemas ou partes deles serão revelados.

Vygotsky argumenta, segundo Meira (1994), que a abordagem microgenética deve associar-se à análise do macro-contexto sociocultural de desenvolvimento, a fim de que possamos identificar o significado das ações e processos mentais humanos. É com base nessa reflexão de Vygotsky que Meira (1994) define microanálise interpretativa, ou seja, é uma técnica que permite analisar condutas. É de acordo com Meira (1994) que:

Ações cognitivas, comunicativas ou gestuais possuem influência em virtude do significado que elas adquirem em contextos sócio-culturais específicos. Como consequência, esta abordagem implica uma descrição densa (Geertz, 1973) dos aspectos interacionais de atividade, tais como diálogos entre seus participantes ou a produção colaborativa de representações durante a resolução de problemas (MEIRA, 1994, p. 60).

Uma outra definição para essa técnica é também observada em Góes (2000), em que a autora complementa:

Essa análise não é micro porque se refere à curta duração dos eventos, mas sim por ser orientada para minúcias indiciais – daí resulta a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos e relacionar condições passadas e presentes, tentando explorar aquilo que, no presente, está impregnado de projeção futura (GÓES, 2000, p.15)

Para Meira (1994), a técnica de videografia é uma importante aliada para a análise microgenética, pois ao estarmos lidando com processos psicológicos complexos, tal como a análise de indícios de esquemas dos estudantes revelados através das ações, este processo pode resgatar a densidade de ações comunicativas e gestuais. Com a videografia, é possível captar as expressões faciais dos sujeitos ao resolverem uma situação matemática, como também gestos que demonstrem indícios de pensamento, além do diálogo entre os membros do grupo. Esta técnica pode

revelar ainda, mais futuramente, um outro olhar que o observador no momento da pesquisa não percebeu.

Por fim, a escolha da técnica de análise microgenética junto à de videografia é justificada devido ao fato de ser nessas minúcias anteriormente citadas, relativas às ações desenvolvidas pelos sujeitos na resolução das situações propostas em cada orquestração que compõe a OI On-line, que conseguiremos analisar a gênese instrumental desses estudantes.

#### 4.5 ASPECTOS ÉTICOS DA PESQUISA

Os experimentos serão realizados em cada estudo no *design* da OI e dependem da autorização dos participantes da pesquisa em fornecer os dados produzidos por eles durante a vivência na OI On-line, através da aplicação das técnicas de coleta dos dados. Estas técnicas consistem em aplicação de questionário de conhecimento de perfil, captura de tela de computador, vídeo-gravação, observação, fotografias de anotações individuais. Os dados a serem analisados passarão pela concordância dos estudantes garantindo-se a preservação do sigilo e a privacidade dos participantes observados e filmados.

## **5 ESTUDO PRELIMINAR**

Neste capítulo apresentaremos um estudo preliminar, organizado em quatro seções. No primeiro tópico, apresentamos os objetivos que nos levou a criar esse estudo. Para o segundo, apresentamos os sujeitos e quais os critérios utilizados para escolha deles. No tópico seguinte, transcorrermos sobre o método de coleta de dados e os instrumentos de coleta utilizados, além dos sujeitos e da função desenvolvida por cada um durante a coleta. Por fim, na quarta e última seção, trataremos da análise de dados e o método utilizado.

### **5.1 O CONTEXTO DO ESTUDO PRELIMINAR**

O estudo preliminar foi desenvolvido para testar a OI On-line proposta anteriormente, no capítulo 4 deste trabalho, com apenas a Orquestração Instrumental On-line 1 (OIO<sub>1</sub>). Pretendemos, ainda, verificar as dificuldades encontradas pelos sujeitos da pesquisa quanto aos enunciados das situações, observar e analisar as reações do mediador, testar os artefatos, para, então, propor as adaptações necessárias para o estudo principal.

#### **5.1.1 Objetivo Geral do Estudo Preliminar**

Testar a OI On-line proposta, na perspectiva de verificar dificuldades com os artefatos ou atividades, propondo as adaptações pertinentes para a pesquisa principal.

#### **5.1.2 Objetivos Específicos do Estudo Preliminar**

- a) Testar a OI On-line na perspectiva de refinar o modelo metodológico em análise;
- b) Mapear os eventos que envolvam tratamentos e conversões entre registros de representação semiótica de funções durante a resolução das situações

realizadas pelos estudantes a fim de observar as dificuldades na atividade proposta;

- c) Caracterizar as contribuições resultantes do estudo preliminar para o refinamento da pesquisa principal.

## 5.2 METODOLOGIA DO ESTUDO PRELIMINAR

Para esse estudo, uma OI On-line foi criada para ser vivenciada com licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Ensino Superior (IFES). A OI On-line surgiu como proposta metodológica para caracterizar a gênese instrumental de licenciandos no ensino de funções. Para tanto, eles resolveram uma situação proposta adaptada da prova da OBMEP, nível 3, 2ª fase de 2014.

### 5.2.1 Sujeitos e cenário de pesquisa

Foi no âmbito da plataforma *Google Meet* que uma situação foi proposta e vivenciada de forma síncrona, com foco na gênese instrumental dos sujeitos participantes. Este momento teve uma atividade proposta que buscava a mobilização, tratamento e conversão de registros de representação semiótica por parte dos sujeitos. Em um grupo do aplicativo de mensagens Whatsapp, foi feito o convite a licenciandos em fase de conclusão do curso de Matemática em uma IFES. Desta forma, uma dupla de licenciandos aceitou fazer parte desta pesquisa, que teve duração de 2 horas. Esta escolha se deu pelo fato deste público já ter familiaridade com o objeto matemático em foco - as funções e por estarmos em busca de compreender os esquemas utilizados por esses sujeitos para realizarem tratamentos e conversões, na resolução de uma atividade sobre funções definida por partes. Para tornar o texto mais fluido quanto à sua leitura, iremos nos referir aos licenciandos como A1 e A2, bem como os pesquisadores serão tratados como mediadores (M), a fim de preservar as identidades.

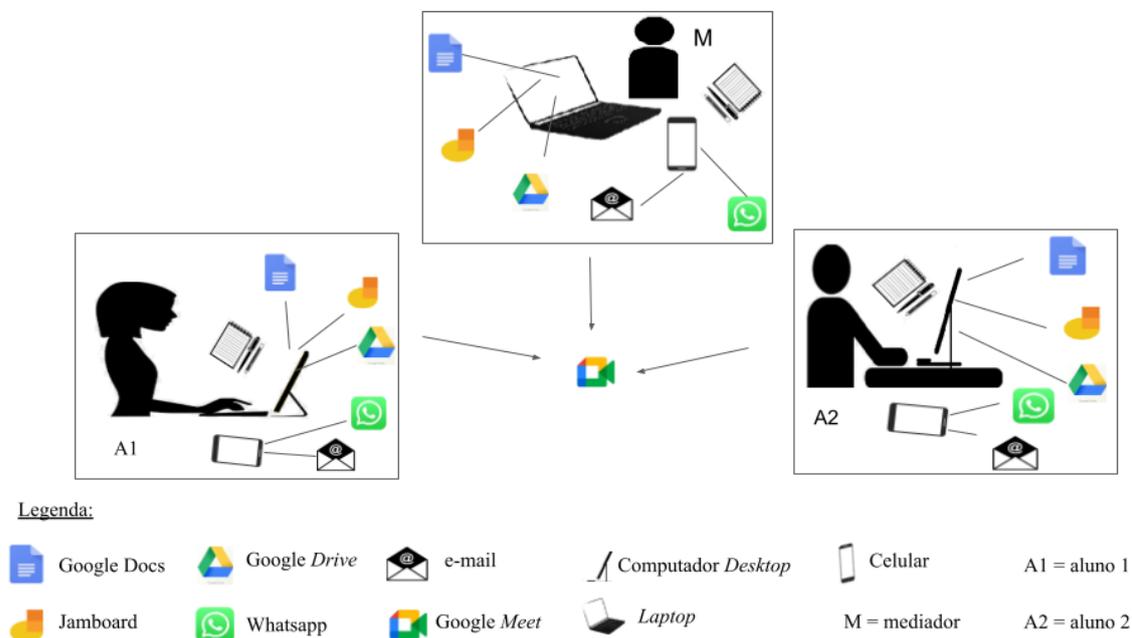
### 5.2.2 O *design* da Orquestração Instrumental On-line Preliminar

A OI On-line preliminar foi planejada para ser desenvolvida nos moldes do estudo principal, com base nos princípios da Orquestração Instrumental já apresentados anteriormente: configuração didática, modo de execução e performance didática. É o planejamento de uma OI compõe-se da escolha da situação, da configuração didática para a situação e das previsões do modo de execução ideal e os não ideais com escolha de variáveis de controle a serem utilizadas em casos de chegadas a resultados não desejados, enquanto que a performance didática, componente só observado com a vivência da orquestra, encontramos o que foi anteriormente planejado e o que foi modificado pelo professor ou pelo aluno. Por ser um estudo piloto, o estudo da performance nos dará elementos necessários a serem modificados ou previstos no modo de execução.

A OI On-line preliminar contou com uma das duas OI On-line planejadas anteriormente para serem a pesquisa principal visto que nosso interesse era testar a execução da situação, funcionamento dos recursos e métodos de coleta de dados.

Na figura 15 é apresentado o cenário da configuração didática e modo de execução da OI On-line Preliminar.

Figura 15 - Cenário da configuração didática e modo de execução da OI On-line Preliminar



Fonte: elaborado pelo autor

A figura anterior mostra os seguintes elementos da configuração didática da OI On-line preliminar: sujeitos, artefatos, ambiente de ensino, elementos de gerenciamento de sala de aula, papéis e funções. Quanto ao modo de execução desta orquestração, espera-se que os alunos tenham um papel ativo; já o formador assume um papel mais passivo, atuando como observador do trabalho dos alunos e prestando apoio apenas quando solicitado.

### Situação Matemática

A situação proposta na OI On-line 1 é uma situação matemática elaborada a partir da composição de atividades extraídas da OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, as quais foram adaptadas para que os estudantes possam mobilizar os conhecimentos de tratamentos e conversões de registros de representação.

Para escolher as atividades, analisamos inicialmente as provas compreendidas entre os anos 2014 e 2019, conforme apresentado na Tabela 3:

Tabela 3 - Mapeamento das questões sobre funções nas provas da OBMEP.

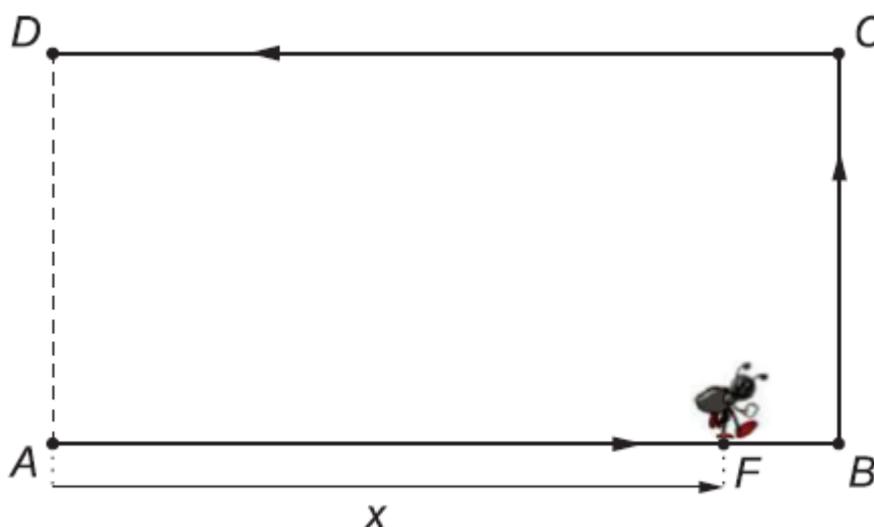
Provas 2ª fase Nível 3	2019	2018	2017	2016	2015	2014
Nº da questão	-	4	3	3	2	2
<b>Total por prova</b>	0	1	1	1	1	1

Fonte: elaborado pelo autor

Do levantamento obtido, separamos as questões 2 da prova de 2014 e a 3, de 2017, já que ambas tratam de funções com uma abordagem geométrica. Decidimos então por trabalhar com o problema da questão 2, conforme apresentado a seguir, sendo retirado o item c da prova e mantendo-se as demais. Outras situações foram acrescentadas, de modo que contemplássemos a construção do conceito de função, a partir do reconhecimento da variável dependente e independente, além de que os conceitos de tratamentos e conversões descritos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica fossem explorados.

A questão 3 da prova de 2017 apresenta um nível mais elevado de resolução para o público alvo que pretendemos atingir nesta pesquisa, ficando como sugestão para trabalhos futuros.

(OBMEP-2014/2ª fase/nível 3 - adap.) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar  $x$  centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.



- a) Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D
- b) Calcule a área do triângulo ADF quando  $x = 22$  cm.
- c) Descreva as diferentes fórmulas gerais das funções que compõem a figura do enunciado.
- d) Esboce o gráfico em um papel ou no quadro compartilhado.
- e) Qual a relação entre os diferentes valores de  $x$ , ou seja, a distância percorrida pela formiga?
- f) O que aconteceria com o domínio quando a formiga estiver nos pontos A e D? Existe alguma função nesses pontos?
- g) O que podemos afirmar sobre os conjuntos Contradomínio e Imagem? Eles coincidem? Podem admitir todo e qualquer valor?

**Classe de situação:** dado um contexto de movimento de um objeto/ser vivo, incluindo descrição em linguagem natural e ilustração geométrica, estudar a função que relaciona a área de uma figura geométrica traçada durante o movimento com a distância percorrida, com essa função sendo definida por partes. O estudo da função inclui o traçado do gráfico, a modelagem algébrica, o estudo do domínio, contradomínio e imagem.

#### 5.2.2.1 Configuração Didática

A OI On-line 1, síncrona, possui uma situação matemática sobre funções a qual cada grupo de estudantes deverá resolvê-la, integrando a solução às tecnologias disponíveis. Esta será uma etapa na qual os grupos ingressarão em uma sala de aula virtual para cada um deles, por videoconferência, na plataforma Google *Meet*.

Entendemos que esta seja uma experiência que levará aos futuros professores vivenciarem as dificuldades que seus alunos encontrarão ao resolver uma situação que necessite a mobilização de diferentes registros de representação semiótica. Observaremos as escolhas feitas pelos sujeitos que trabalham para resolver a OI<sub>1</sub>, assim como as ações, os conhecimentos evocados, utilizados e desenvolvidos. Iremos ainda analisar as dificuldades quanto ao uso dos artefatos, como também as situações inesperadas, decisões *ad hoc* dos formadores etc.

## Gestão de Artefatos

1) Para o aluno:

Se por Computador

- Acesso ao Google Meet com microfone, alto falante e câmera em funcionamento
- Acesso a internet (Banda larga) com navegador
- Acesso ao GDocs
- Acesso ao Jamboard

Se por Celular ou Tablet

- Instalação do app do Google *Meet*, com microfone, alto falante e câmera em funcionamento
- Instalação do app de documento do Google
- Acesso a internet (Banda larga ou 3G/4G) com navegador
- Instalação do app Jamboard

Material físico

- Lápis e papel

2) Para o professor:

Se por Computador

- Acesso ao Google *Meet* com microfone, alto falante, câmera em funcionamento e recurso de gravação da sessão
- Acesso ao Google *Drive*;
- Acesso a internet (Banda larga) com navegador.
- Acesso ao GDoc;
- Acesso ao Jamboard.

Se por celular ou tablet

- Instalação do aplicativo Google *Meet* e recurso de gravação da sessão.
- Instalação do aplicativo de documentos do Google;
- Instalação do aplicativo Google *Drive*;
- Acesso a internet (Banda larga ou 3G/4G) com navegador.

Classificamos no Quadro 2 a seguir as Configurações Didáticas da OI On-line

1:

Quadro 2 - Configuração Didática da OI<sub>1</sub>

Ações	Papel mediador + aluno	Tempo	Artefatos
Licenciandos entram na sala cujo link foi disponibilizado um dia antes e enviado para o email de cada um e no grupo de Whatsapp criado.	Mediador envia os emails para os Licenciandos e mensagens no grupo de Whatsapp, recepcionando-os na sala virtual.	5 min	Videoconferência + compartilhamento da apresentação com a situação + orientações de como proceder.
Licenciandos se organizam para dividir os papéis	Licenciandos organizam a discussão. O Mediador só interfere em caso de dúvidas sobre acesso e compartilhamento.	10 min	Videoconferência + compartilhamento de tela e externo do GDoc
Licenciandos coletivamente discutem e organizam a resolução da atividade.	Licenciandos se organizam colaborativamente, registrando as ideias de resolução da dupla. O Mediador só interfere em caso de dúvidas de comandos do GDoc e em situação que atrapalhe o andamento da atividade	2 horas	videoconferência + compartilhamento da tela + Gdoc + Jamboard (compartilhamento externo)
Finalização do trabalho	Mediador incentiva que o pessoal feche a atividade	15 min	videoconferência + compartilhamento da tela + Gdoc + Jamboard (compartilhamento externo)

Fonte: elaborado pelo autor

O Quadro 2 apresenta resumidamente a configuração didática dos participantes da OI On-line 1, em que são descritas as ações tanto dos licenciandos

quanto do mediador. Assim, os licenciandos entraram na sala, onde ocorreu a divisão dos grupos de modo que os participantes de cada grupo trabalharam em conjunto de modo a concluírem a tarefa proposta em uma sala separada, exclusiva para cada grupo e disponibilizada no roteiro da atividade. Tanto o mediador quanto os licenciandos consideraram o tempo destinado para a conclusão, utilizando os recursos que estão disponíveis. O papel do mediador consiste em dar suporte técnico para solucionar possíveis entraves das ferramentas disponibilizadas que venham surgir durante a execução da OI On-line. O mediador também é responsável em estimular as interações entre os participantes do grupo no qual está inserido, dando também suporte didático e pedagógico apenas se julgar necessário.

#### 5.2.2.2 Modo de Execução

Quanto ao Modo de Execução da OI<sub>1</sub>, será apresentada uma *Análise a priori* da situação matemática a ser resolvida pelos grupos, seguida de possíveis ações dos sujeitos, bem como o papel de cada um deles. O tempo previsto para execução da OI<sub>1</sub> é de 2 horas.

#### **Análise a priori da situação matemática**

Na primeira questão, original da prova, encontramos a seguinte pergunta: “Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?”.

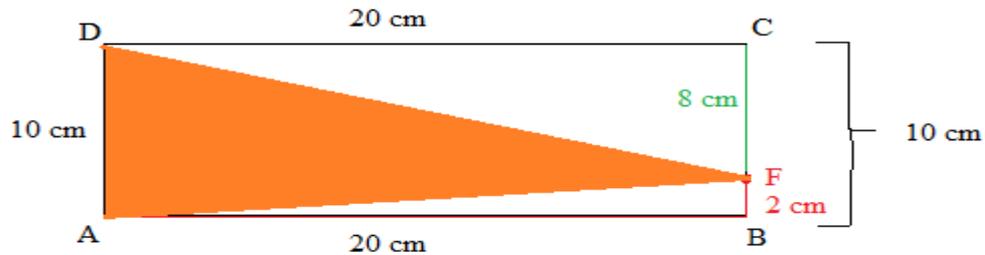
Para responder, o aluno precisa partir da interpretação do enunciado, caracterizada por Duval (2012) como conversão entre o registro de representação em linguagem natural para a linguagem figural, onde há a informação de que o percurso de A para B mede 20 cm, de B para C, 10 cm e, por fim, de C para D terá os mesmos 20 cm do segmento AB, já que se trata de um retângulo. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para determinar a medida do lado AD, o qual mede 10 cm.

Assim, concluímos que a formiga percorrerá  $20\text{ cm} + 10\text{ cm} + 20\text{ cm} = \mathbf{50\text{ cm}}$ , partindo do ponto A até o ponto D.

Na pergunta seguinte, também original da prova, é solicitado aos alunos o cálculo da área do triângulo ADF quando  $x = 22\text{ cm}$ . Como  $x$  é uma medida variável

que descreve a distância percorrida pela formiga sobre a trajetória retangular, o sujeito precisa perceber que o inseto irá caminhar todo o segmento AB, subindo 2 cm de B em direção a C, conforme mostra a Figura 15.

Figura 15 - Construção do triângulo ADF



Fonte: elaborado pelo autor

Duval (1995) traz quatro formas de apreensão (sequencial, perceptiva, discursiva e operatória) das quais para essa situação o sujeito desenvolverá a perceptiva e a discursiva. Na perceptiva, há a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica. Já na discursiva, haverá a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação do enunciado, considerando a rede semântica de propriedades do objeto, sendo, portanto, a reflexão necessária para a construção da Figura 15.

Após os licenciandos perceberem que o ponto F está situado no segmento BC, uma vez esboçando, seja mentalmente, seja fisicamente, a figura tal como a apresentada na Figura 15, fica mais fácil substituir os valores na fórmula para o cálculo da área de triângulos:

$$A = \frac{1}{2} \times b \times h, \text{ em que } b \text{ representa a base e } h, \text{ a altura.}$$

A base está determinada na Figura 15 como sendo o segmento AD, ou seja, 10 cm, cujo valor é fixo independente da medida da altura do triângulo ADF. Por definição, altura é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado. Ela é um segmento de reta perpendicular (que forma um ângulo de 90°) com o segmento AD e que passa pelo ponto F. Como este ponto é variável, implica que a altura assumirá diferentes valores dependendo da posição da formiga. Portanto, quando a formiga andar 22 cm,

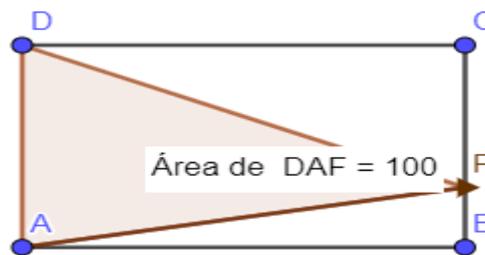
a altura do triângulo ADF será 20 cm.

Logo, teremos que  $\square = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100 \text{ cm}^2$ .

Outra possível solução é a apresentada por Machado (2015), em que a área do triângulo ADF é também obtida pela subtração entre a área do retângulo ABCD pelas áreas dos triângulos retângulos ABF e FCD. Logo, o autor chegou na expressão  $S = AB \cdot AD - 1/2 \cdot AB \cdot BF - 1/2 \cdot FC \cdot CD = 20 \cdot 10 - 1/2 \cdot 20 \cdot 2 - 1/2 \cdot 8 \cdot 20 = 200 - 20 - 80 = 100 \text{ cm}^2$ .

Essa conclusão será apresentada aos alunos durante a discussão das atividades, mostrando-lhes a simulação no GeoGebra por meio do recurso “área”, conforme apresentado na Figura 16:

Figura 16 - Utilização de recurso tecnológico para resolução da questão



Fonte: elaborado pelo autor

No entanto, Denardi e Bisognin (2019), utilizando uma metodologia parecida com a nossa, também com licenciandos em matemática, perceberam que seus estudantes manifestaram dificuldades no cálculo da medida da área do triângulo que haviam desenhado. É possível, portanto, que os alunos aleguem não saber identificar a base e a altura, dificultando assim a determinação da medida da área solicitada.

Para entendermos essas e outras possíveis dificuldades dos alunos durante a resolução desta situação, achamos em Duval (2012) que essa dúvida apresentada pelos alunos pode ser explicada pelo fenômeno da não congruência entre o enunciado e as estratégias de resolução. Isto se deve ao fato de o enunciado fazer menção apenas ao retângulo ABCD e ao triângulo ADF, o que pode conduzir os alunos a não perceberem, no registro geométrico, a presença de outras unidades figurais tais como os outros triângulos e retângulos, pertinentes na resolução da situação. Portanto, a

solução apresentada por Machado (2015) pode não ser desenvolvida pelos estudantes.

Na questão seguinte, também criada pelo autor, é sugerido que os sujeitos descrevam as diferentes fórmulas gerais das funções da área do triângulo em relação à distância percorrida pela formiga. Esta situação tem por objetivo fazer com que o aluno realize a conversão do registro figural para o registro algébrico.

É preciso destacar que nos diferentes segmentos do retângulo haverá diferentes funções, mas que a área é uma variável dependente de  $x$ . Logo, enquanto a formiga estiver percorrendo o trecho AB, ou seja,  $0 \leq x \leq 20$ , teremos uma função a qual chamaremos de  $f_1$ . No segmento BC (quando  $20 \leq x \leq 30$ ), teremos uma outra função chamada de  $f_2$ . Por fim, quando a formiga estiver no trecho CD,  $30 \leq x \leq 50$ , teremos outra função denominada  $f_3$ .

Mantendo-se a base constante e a altura variável (ou vice-versa), quando  $x$  estiver no intervalo  $0 \leq x \leq 20$ ,  $f_1$  será descrita por  $f_1(x) = \frac{10}{2}x$  e uma representação figural está apresentada na Figura 17. Portanto,  $f_1(x) = 5x$ .

Figura 17 - Representação figural da função  $f_1(x) = 5x$

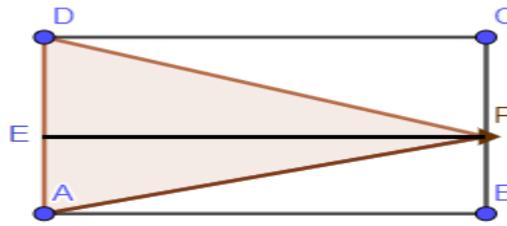


Fonte: elaborado pelo autor

Analogamente, calcularemos  $f_2$ . Esta função será representada por uma função constante, já que para qualquer ponto F sobre CD, ou seja, em qualquer valor de  $x$  no intervalo  $20 \leq x \leq 30$ , teremos a mesma medida da altura (20 cm), por este segmento, representado na Figura 18 por EF, ser paralelo ao segmento AB.

$$\text{Portanto, } f_2(x) = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100 \text{ cm}^2.$$

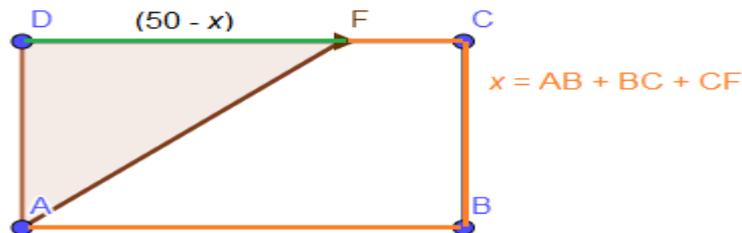
Figura 18 - Representação figural da função  $f_2(x) = 100$



Fonte: elaborado pelo autor

Por fim, quando a formiga estiver no segmento CD, a variação de  $x$  será no intervalo  $30 \leq x \leq 50$ . A altura do triângulo quando o ponto F estiver no segmento CD será o total do percurso menos o quanto a formiga já andou. Então podemos representar esta medida pela expressão  $(50 - x)$ , em que  $x$  indica a soma dos segmentos  $AB + BC + CF$ , como mostrado na Figura 19. Assim, a função  $f_3$  estará representada por  $f_3(x) = \frac{10}{2}(50 - x)$ . Realizando o processo de tratamento a fim de simplificá-la, obteremos a função  $f_3(x) = 250 - 5x$ .

Figura 19 - Representação Figural da função  $f_3(x) = 250 - 5x$



Fonte: elaborado pelo autor

Acreditamos que, nesta situação, os alunos irão dedicar mais tempo para discutir com o grupo ou até mesmo apresentar dificuldades em resolvê-la, necessitando intervenção do mediador. Estas dificuldades foram observadas por Souza, Cordeiro e Moretti (2004) ao realizarem uma atividade com alunos do Ensino Médio. Situações dessa natureza exigem a realização da conversão entre os registros de representação geométrico e algébrico. Para Duval (2009):

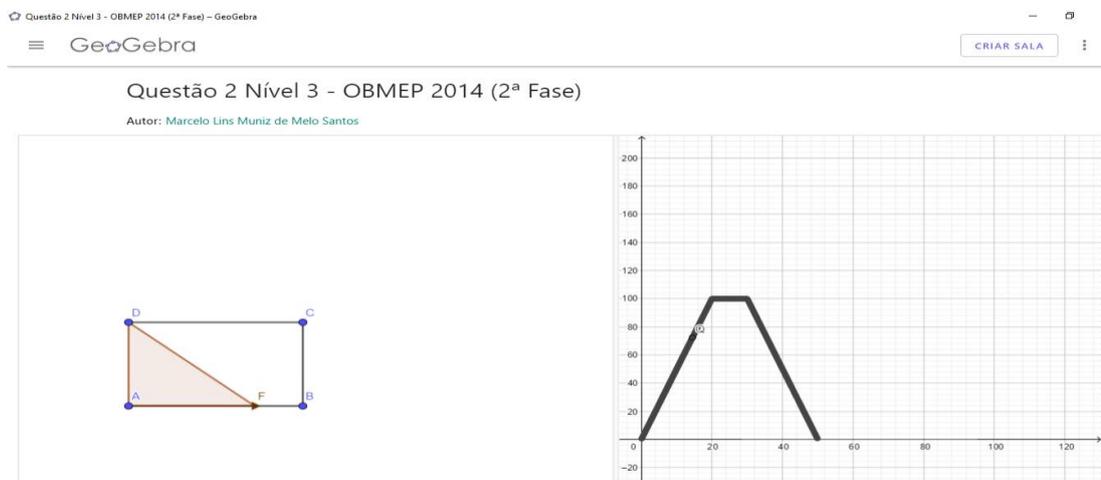
A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e estudantes. Estes, frequentemente não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes [...] (DUVAL, 2009, p. 18).

Na situação seguinte, os estudantes precisam esboçar o gráfico da função que

associa ao comprimento  $x$  o valor da área do triângulo ADF. Esta questão foi reproduzida originalmente da prova.

Pesquisas como a de Souza, Cordeiro e Moretti (2004) e a de Fonseca e Henriques (2018) mostram que estudantes apresentam maior facilidade em realizar a conversão entre as representações algébrica e gráfica, neste sentido. Assim, esperamos que esta seja uma situação fácil de ser resolvida, posto que as representações algébricas já foram construídas anteriormente. Durante a discussão das situações, apresentaremos o modelo desenvolvido no GeoGebra, com duas janelas de visualização sendo à esquerda, a construção geométrica do problema e à direita, o gráfico traçado pelo software com a representação gráfica, ambos sendo desenvolvidos com animação para facilitar a visualização em múltiplas representações. O objetivo é fazer com que os alunos despertem para a importância da mobilização entre registros de representação semiótica propostas com o auxílio do recurso tecnológico. A Figura 20 ilustra esta simulação:

Figura 20 - Resolução Gráfica utilizando simulação



Fonte: elaborado pelo autor

Nesta situação, ainda, os estudantes podem realizar a conversão a partir dos registros de representação algébrica para o registro gráfico utilizando uma representação auxiliar de uma tabela. Pires e Barbosa (2018) apontam que os entrevistados utilizaram este recurso, pontuando no gráfico os valores dispostos na tabela.

A questão seguinte, criada pelo autor, pergunta-se ao aluno qual a relação

entre os diferentes valores de  $x$ , ou seja, a distância percorrida pela formiga, com o gráfico apresentado na situação do enunciado.

O objetivo é o reconhecimento de uma função a partir da apresentação de uma situação. Esse tipo de tarefa, na qual é solicitada a identificação dos objetos por suas múltiplas representações, são tão importantes para a aprendizagem quanto às tarefas de produção, sendo a rapidez na resolução sua principal característica (DUVAL, 2011a). A partir dessa situação, pretendemos chamar a atenção dos estudantes que uma relação funcional não está explicitamente vinculada a uma representação algébrica (lei de formação).

Esperamos dos alunos a observação que tanto a forma como a medida da área do triângulo ADF dependem da posição do ponto F, ou seja, do percurso da formiga e assim, haverá uma relação entre a área da figura (variável dependente) com a medida  $x$  (variável independente). Esse reconhecimento é de fundamental importância para a compreensão do conceito de função.

Em sequência, solicitamos aos licenciandos que a questão anterior fosse analisada e discutida com o grupo ao qual cada um foi distribuído e respondessem o que acontece com o domínio quando a formiga estiver nos pontos A e D? Podemos admitir que existirá função nesses pontos?

Para chegar ao resultado, o licenciando deverá recorrer ao conceito de domínio que é o conjunto de valores possíveis para o eixo das abscissas, ou seja, os argumentos em que uma função pode ser definida. Com isso, a resposta desta questão pode ser obtida a partir da análise do gráfico, através do qual o domínio da função é dado pela relação, representada em linguagem matemática,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 50\}$ . Portanto, a função não existirá nestes pontos, pois teremos apenas o segmento de reta AD. Com isso, deve-se notar que não é possível calcular área por não existir triângulo. Seria possível, ainda, com essa situação, dentro de um contexto da abordagem do Cálculo Diferencial, a introdução e exploração dos conceitos de limite. No entanto, como não é nosso objetivo, deixamos como sugestão para atividades futuras.

Acreditamos que alunos apresentarão dificuldades para expressar o domínio da função, assim como constataram Souza, Cordeiro e Moretti (2004). Esses

obstáculos estão relacionados a problemas conceituais, que Duval (1995) define como sendo de formação de uma representação semiótica.

Duval (1995) chama a atenção para o procedimento realizado pelos entrevistados na pesquisa de Pires e Barbosa (2018), pois a utilização do registro tabular como ferramenta auxiliar para a conversão entre o registro algébrico e gráfico dificultam uma interpretação global do gráfico de uma função, uma vez que o sujeito fica limitado a relacionar um ponto do plano a um par de números. Isto explica, segundo Duval (1988), que a utilização desses procedimentos não permite o estudante compreender que  $f(x) = 0$  não faz parte do domínio da função.

Por fim, na última situação, também criada pelo autor, é levantada a seguinte questão: “O que podemos afirmar sobre os conjuntos Contradomínio e Imagem? Eles coincidem? Podem admitir todo e qualquer valor?”.

Tal como na situação anterior, na qual os sujeitos precisam lembrar da definição de domínio, o mesmo vamos fazer para os conjuntos contradomínio e imagem. Se o domínio correspondeu ao conjunto de valores possíveis para o eixo das abscissas, o contradomínio, por sua vez, será o conjunto de valores possíveis para o eixo das ordenadas, ou seja, o eixo  $y$ . Numa função  $f$ , para um elemento do contradomínio que se relacionar a um outro no eixo  $x$  chamaremos esse valor de imagem. Portanto, ao conjunto imagem definimos como sendo um subconjunto do contradomínio em que se apresentam os valores correspondidos de  $x$ .

Analisando o gráfico, percebemos que o contradomínio da função será todo o conjunto dos números reais positivos. Portanto, escrevemos através da representação em linguagem matemática este conjunto:  $CD(f) = \mathfrak{R}^+$ , onde  $\mathfrak{R}^+ = [0, \infty)$ . Já o conjunto imagem está compreendido no intervalo  $0 < \square(\square) \leq 100$ . Ou seja, utilizando a representação em linguagem matemática também para este conjunto, podemos dizer que  $Im(f) = \{\square \in \square \mid 0 < \square \leq 100\}$ . Mais uma vez salientamos a inexistência de área nula, por isso o zero não faz parte do conjunto imagem. Os estudantes devem concluir, então, ante o raciocínio explicitado anteriormente, que os conjuntos contradomínio e imagem não coincidem.

Esta é também uma situação, como proposta por Duval (1995), de formação de uma representação semiótica. Acreditamos, tal como defendemos quando

propomos a situação para mobilização do conceito de domínio, que alunos possivelmente apresentarão também dificuldades para expressar os conjuntos contradomínio e imagem da função. Estes obstáculos foram observados por Carvalho (2017), que segundo a autora, esses conceitos são muito confusos para a maioria dos estudantes.

Os papéis, tanto dos licenciandos quanto do mediador, serão descritos mais detalhadamente no tópico a seguir, em continuação à descrição do Modo de Execução da OI<sub>1</sub>:

- 1) Estudantes interajam com colegas em termos de discutir as habilidades de cada um e se dividirem entre os papéis ou decidirem uma rotação. Pode acontecer de:
  - a. aparecer um líder que decida o papel de cada um;
  - b. cada um decidir qual papel deseja realizar sem sobreposição;
  - c. haver conflito por ou ninguém querer assumir um dos papéis ou mais de um querer;
  - d. o grupo paralisar com a situação;
  - e. um dos alunos assuma os trabalhos com poucas interações dos outros;
  - f. os estudantes interagirem e até trocar de papéis.

2) O Mediador interferirá nos casos abaixo

- a. interferir se notar insatisfação;
- b. dirimir o conflito no sentido que eles possam compartilhar o papel;
- c. incentivar que um tome a frente na organização.
- d. incentivar que outros assumam o papel de sistematizar no Gdoc e pesquisar.
- e. Mediador toma notas sobre o que está acontecendo em termos da solução da situação.

Espera-se que a realização da situação proposta favoreça:

- o trabalho em conjunto;
- a mobilização de esquemas de utilização diferentes, a fim de favorecer o desenvolvimento de instrumentos coletivos de resolução de uma situação matemática;

- a reflexão sobre conceitos correlatos às funções, tais como domínio, contradomínio, imagem, variação aplicados em uma situação geométrica;
- a exposição de dúvidas sobre diferentes aspectos correlatos à função;

### 5.2.3 Coleta de dados do Estudo Preliminar

Os dados coletados, assim como vídeos das câmeras e as observações feitas pelo formador, são dados da pesquisa que foram analisados.

Para isso, construiu-se uma estrutura de coleta de dados, a qual detalha as técnicas e os instrumentos de coleta de dados utilizados pelo formador da OI On-line Preliminar:

- a) A observação da resolução da atividade e as anotações manuscritas em diário, feitas pelo observador, relativas ao experimento da OI On-line Preliminar;
- b) Os registros salvos no aplicativo de quadro compartilhado (Jamboard) realizados pelos sujeitos A1 e A2 durante a realização da atividade proposta na OI On-line preliminar;
- c) A filmagem, por meio do recurso de gravação de reunião do Google *Meet*, das ações dos alunos 1 e 2 ao resolverem a situação matemática no experimento da OI On-line Preliminar;
- d) A captura de tela (imagem), utilizando o recurso “*Print Screen*” da Microsoft, como importante instrumento para caracterizar esquemas a fim de solucionar a atividade proposta.
- e) As imagens enviadas dos manuscritos realizados pelo sujeito A1 durante a solução da atividade proposta da OI On-line Preliminar

Podemos, portanto, observar, a partir da Figura 19 com a estrutura de coleta apresentada anteriormente, além das técnicas de coletas de dados, quais os respectivos instrumentos de coleta utilizados. Logo, para a observação, foi utilizado, pelo formador, um bloco de notas, o qual serviu de diário (papel e caneta/lápis), para que pudessem ser registradas as interações e ações dos alunos. Já para realização da filmagem, foi utilizado o recurso de gravação de reunião do Google *Meet* (Figura 19). Por parte dos alunos, um quadro compartilhado foi disponibilizado por meio do aplicativo Jamboard, bem como foi sugerido que um papel fosse utilizado a fim de que

pudessem registrar o raciocínio e operações realizadas fora deste quadro compartilhado.

Todos os dados coletados compõem um banco de dados resultantes do planejamento, execução e análise da orquestração instrumental On-line que compõem o estudo preliminar. E estão arquivados no Google Drive, em posse exclusiva do autor deste trabalho e de suas orientadoras. A análise desses dados foi autorizada pelos participantes deste Estudo Preliminar, sendo resguardadas a identidade e imagem desses.

#### **5.2.4 Método de análise de dados do Estudo Preliminar**

Os dados coletados durante a execução da OI On-line Preliminar são resultantes das informações contidas nas anotações do mediador, na gravação realizada pelo dispositivo Google *Meet*, pelas imagens obtidas por captura de tela e ainda, os registros obtidos no quadro compartilhado.

A fim de termos um direcionamento para analisar os dados coletados, escolhemos a análise microgenética associada à videografia. Meira (1994) propõe uma observação detalhada dos eventos identificados e selecionados dos dados videográficos produzidos e assistidos reiteradamente. Desta forma é possível analisar se tais eventos selecionados apresentam relação com a questão de pesquisa que pretendemos responder.

Assim, de acordo com Meira (1994) e sintetizado em Lucena (2018), para estruturar as análises dos dados, buscamos seguir os critérios abaixo:

- a) familiarização com os dados e caracterização da atividade;
- b) criação do índice de eventos relevantes à pesquisa;
- c) análise interpretativa e rigorosa dos eventos correlatos ao problema de pesquisa;
- d) transcrições literais dos áudios e descrições detalhadas das ações, gestos dos sujeitos presentes nos eventos selecionados;
- e) assistir reiteradamente os episódios, apoiado pela análise das transcrições/descrições, e interpretar os eventos correlatos à atividade e à caracterização sólida dessa;

- f) divulgação dos resultados, se possível com ilustrações das interpretações realizadas. As anotações resultantes de observações, feitas em diários de bordo, podem ajudar a complementar as análises.

### 5.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS DO ESTUDO PRELIMINAR

Descreveremos nesta seção, de maneira detalhada, como se deu a OI On-line do Estudo Preliminar, evidenciando a configuração didática, o modo de execução e a performance didática de cada uma delas.

Apresentaremos brevemente o que foi planejado, conforme descrito no capítulo 4 deste trabalho (configuração didática e modo de execução), bem como os resultados alcançados com a vivência da orquestra (performance didática). Assim, para favorecer a leitura e facilitar o entendimento, optamos por fazer a sucinta descrição da orquestração, seguida dos resultados e análise dos resultados alcançados.

#### 5.3.1 Orquestração Instrumental On-line Preliminar

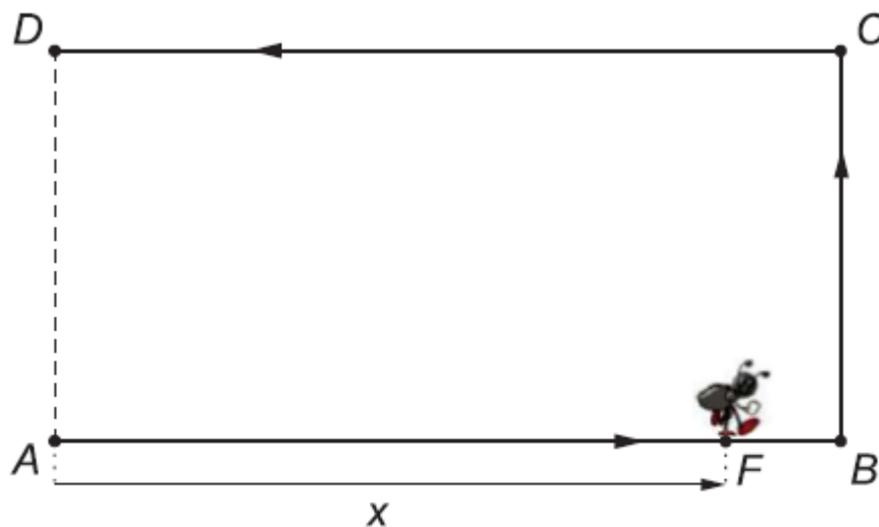
A situação proposta na OI On-line Preliminar é uma situação matemática elaborada a partir da composição de atividades extraídas da OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Esta questão demanda dos sujeitos conhecimentos sobre funções, sendo aplicada em um contexto geométrico. Propusemos uma etapa síncrona, na qual os licenciandos ingressaram em uma sala de aula virtual por videoconferência na plataforma Google *Meet*.

##### 5.3.1.1 Situação matemática

A situação proposta na OI On-line Preliminar foi obtida da prova de 2014. 2ª fase nível 3 (questão 2), conforme apresentado a seguir. Algumas modificações foram realizadas, tais como a retirada do item c original da prova e mantendo-se as demais, além de acrescentar outras perguntas, de modo que fosse contemplada a construção do conceito de função a partir do reconhecimento da variável dependente e independente. Buscamos ainda objetivar na situação proposta a aplicação dos

conceitos de tratamentos e conversões descritos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

(OBMEP-2014/2ª fase/nível 3 - adap.) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar  $x$  centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.



- a) Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D
- 1) Calcule a área do triângulo ADF quando  $x = 22$  cm.
- 2) Descreva as diferentes fórmulas gerais das funções que compõem a figura do enunciado.
- 3) Qual a relação entre os diferentes valores de  $x$ , ou seja, a distância percorrida pela formiga?
- 4) Esboce o gráfico em um papel ou no quadro compartilhado.
- 5) O que aconteceria com o domínio quando a formiga estiver nos pontos A e D? Existe alguma função nesses pontos?
- 6) O que podemos afirmar sobre os conjuntos Contradomínio e Imagem? Eles coincidem? Podem admitir todo e qualquer valor?

**Classe de situação:** dado um contexto de movimento de um objeto/ser vivo, incluindo descrição em linguagem natural e ilustração geométrica, estudar a função que relaciona a área de uma figura geométrica traçada durante o movimento com a

distância percorrida, com essa função sendo definida por partes. O estudo da função inclui o traçado do gráfico, a modelagem algébrica, o estudo do domínio, contradomínio e imagem.

### 5.3.1.2 Configuração Didática do Estudo Preliminar

A OI On-line Preliminar teve uma situação matemática sobre funções a qual a dupla de licenciandos resolveu. Esta orquestração ocorreu em uma sala de aula virtual por videoconferência na plataforma *Google Meet*.

As etapas de planejamento da configuração didática e do modo de execução da orquestração iniciam ao passo que a situação foi definida. Ao planejarmos a OI On-line, buscamos garantir aos licenciandos em Matemática a exploração de registros de representação semiótica por meio de uma situação que envolve o objeto função.

Acreditava-se que esta OI On-line Preliminar seria uma experiência que levaria os futuros professores a vivenciarem as dificuldades que seus alunos encontrarão ao resolver uma situação que necessite a mobilização de diferentes registros de representação semiótica. Observamos as escolhas feitas pelos sujeitos que trabalharam para resolver a OI, assim como as ações, os conhecimentos evocados, utilizados e desenvolvidos. Iremos ainda analisar as dificuldades quanto ao uso dos artefatos, como também as situações inesperadas, decisões *ad hoc* dos formadores etc.

No Quadro 3 a seguir, apresentamos sintetizadamente a gestão dos artefatos utilizados nesta OI On-line Preliminar:

Quadro 3 - Gestão de Artefatos da OI On-line Preliminar

Aluno			Mediador	
Computador	Celular / <i>Tablet</i>	Material Físico	Computador	Celular / <i>Tablet</i>
Acesso ao Google <i>Meet</i> com microfone, alto falante e câmera em funcionamento.	Instalação do app do Google <i>Meet</i>	Lápis e papel (de preferência papel quadriculado)	Acesso ao Google <i>Meet</i> com microfone, alto falante, câmera em funcionamento e recurso de gravação da sessão	Instalação do aplicativo Google <i>Meet</i> e recurso de gravação da sessão
Acesso a internet (Banda larga) com navegador	Acesso a internet (Banda larga ou 3G/4G) com navegador		Acesso ao Google <i>Drive</i>	Instalação do aplicativo de documentos do Google
Acesso ao Jamboard	Instalação do app Jamboard		Acesso a internet (Banda larga) com navegador	Acesso a internet (Banda larga ou 3G/4G) com navegador
Acesso ao Whatsapp Web	Instalação do app Whatsapp		Acesso ao Jamboard	Acesso ao Google <i>Drive</i>
			Acesso ao Whatsapp Web	Instalação do app Whatsapp

Fonte: elaborado pelo autor

Já no quadro 4, apresentamos as configurações didáticas da OI On-line Preliminar:

Quadro 4 - Configuração Didática da OI On-line Preliminar

Ações	Papel prof + aluno	Tempo	Artefatos
Estudantes entraram na sala de seu grupo, cujo link foi disponibilizado um dia antes e enviado para o email de cada um.	Mediador enviou os emails para os estudantes e os recepcionou na sala do grupo.	5 min	Videoconferência + compartilhamento da apresentação com a situação + orientações de como proceder.
Estudantes se organizaram para dividir os papéis	Estudantes organizaram a discussão. O mediador só interferiria em caso de dúvidas sobre acesso e compartilhamento.	10 min	Videoconferência + compartilhamento de tela e externo do GDoc
Estudantes coletivamente discutiram e organizaram a resolução da atividade.	Estudantes se organizaram colaborativamente, registrando as ideias de resolução do grupo. O Mediador só interferiria em caso de dúvidas de comandos do GDoc e em situação que atrapalhe o andamento da atividade	2 horas	videoconferência + compartilhamento da tela + Gdoc (compartilhamento externo)
Finalização do trabalho	Mediador incentivou que o pessoal fechasse a atividade	15 min	videoconferência + compartilhamento da tela + Gdoc (compartilhamento externo)

Fonte: elaborado pelo autor

O quadro 4 apresenta resumidamente a configuração didática dos participantes da OI On-line Preliminar, em que são descritas as ações tanto dos licenciandos quanto do mediador. Assim, os licenciandos entrarão na sala, onde deverão trabalhar em conjunto de modo a concluírem a tarefa proposta. Tanto o mediador quanto os licenciandos devem considerar o tempo destinado para a conclusão, utilizando os recursos que estão disponíveis. O papel do mediador consiste em dar suporte técnico para solucionar possíveis entraves das ferramentas disponibilizadas que venham surgir durante a execução da OI On-line. O mediador também é responsável em estimular as interações entre os participantes do grupo no qual está inserido, dando

também suporte didático e pedagógico apenas se julgar necessário.

#### 5.3.1.3 Modo de Execução

Planejamos, assim, um modo de execução da configuração didática. Iniciaremos a OI<sub>1</sub> pelo mediador, com a apresentação das instruções contidas no roteiro desenvolvido para este fim, projetada por meio de compartilhamento de tela na sala de aula virtual. As orientações e situação contidas no roteiro foram também disponibilizadas por e-mail e no grupo de Whatsapp criado para melhor interação entre participantes, pesquisador e orientadoras.

Os licenciandos se organizarão para solucionar a atividade proposta e o mediador irá dar assistência a eles, devendo já estar com os softwares instalados e em funcionamento, bem como também os dispositivos, tanto microfone quanto câmera. Com todos os equipamentos testados e em bom funcionamento, os licenciandos A1 e A2 podem começar a resolver a situação matemática enquanto que o formador acompanha este desenvolvimento de trabalho. A comunicação entre esses licenciandos é permitida durante o processo de resolução da situação matemática, de modo a trabalhar colaborativamente a fim de resolver a situação.

#### 5.3.1.4 Performance didática

Uma vez manifestado o interesse dos licenciandos em participar da OI On-line Preliminar, um grupo no aplicativo Whatsapp foi criado a fim de agilizar o diálogo entre os participantes. Assim, após um acordo para melhor data e horário, uma sala de aula virtual no Google *Meet* foi criada e, tanto o link de acesso como o protocolo de atividade (*roteiro*) foram disponibilizados nesse grupo e por e-mail. Os licenciandos então foram recepcionados e os dispositivos, como alto-falantes, microfones e câmeras, sendo testados. O sujeito A2 comentou que seu computador não estava com esses recursos em bom funcionamento, gerando uma decisão *ad hoc* do mediador de sugerir o acesso a sala utilizando também o dispositivo celular para utilização desses dispositivos, além do computador que seria utilizado para melhor visualizar a situação.

O mediador compartilhou a tela com o GDoc contendo o *roteiro* a fim de apresentar aos sujeitos as informações para resolução da atividade e então, em seguida, abriu um quadro interativo compartilhado, o Jamboard, disponível no próprio Google Meet. Foi por meio deste recurso que os estudantes solucionaram a atividade proposta. No entanto, no momento de iniciar a gravação, o mediador não compartilhou, nos primeiros 10 minutos iniciais, o quadro compartilhado, para que aparecesse na gravação, corrigindo logo em seguida. Esta falta de compartilhamento ocasionou uma perda de parte da resolução da primeira questão, no que se refere à mobilização de esquemas dos licenciandos.

Ao iniciar a leitura da atividade, os licenciandos apresentaram dificuldades de compreensão do enunciado. Segundo o problema, a formiga segue um trajeto de A a D. Após andar  $x$  centímetros, ela estará em um ponto F do contorno. Os licenciandos interpretaram que, ao chegar ao ponto D, a formiga ainda andava  $x$  centímetros, o que não era o que se pretendia no enunciado. O ponto F representa uma posição qualquer do inseto no percurso de A a D e  $x$  a medida do comprimento do segmento AD.

Após perceber a dificuldade de interpretação do enunciado, a qual não havia sido prevista, o mediador então forneceu ajuda para melhor compreensão da questão e não paralisar a resolução da atividade. Com a má formulação do enunciado, foi feita a anotação para correção deste para o próximo estudo.

Em outro momento que necessitou intervenção, em virtude da má interpretação do enunciado, a situação proposta na letra b da atividade perguntou qual a área do triângulo formado quando  $x = 22$  cm. Como previsto no planejamento do modo de execução, o formador deu indícios que viabilizasse a interpretação da situação como previsto no problema das olimpíadas, permitindo a construção da figura.

A execução da OI On-line Preliminar também nos mostrou outro evento que revelou nova necessidade de reformulação do enunciado. Uma nova mediação do formador devido às dúvidas de interpretação foi necessária. Na letra c da situação, solicitamos que os licenciandos descrevessem as diferentes fórmulas gerais das funções que compõem a figura do enunciado, quando deveria ser “as funções área dos diferentes triângulos ADF formados com relação a  $x$ ”.

De modo geral, em termos de regência da orquestração instrumental, a execução da OI On-line Preliminar evidenciou muitos dos eventos planejados na

configuração didática e modo de execução, incluindo os eventos previstos. Quanto ao descrito anteriormente, a que não havia sido previsto, a decisão *ad hoc* do formador permitiu o bom andamento da orquestra.

#### 5.3.1.5 Análise microgenética da OI On-line Preliminar

A OI On-line Preliminar foi desenvolvida partindo do pressuposto que favoreceria a realização da situação sobre funções, de modo que a gênese instrumental relativa aos artefatos simbólicos dos sistemas de representação semióticos dos licenciandos fossem observados.

Dessa forma, o vídeo produzido decorrente da gravação, com duração de 1h 37 min, foi assistido reiteradas vezes, de modo a contribuir para a criação de um índice de eventos. Este permitiu listar trechos correlatos aos eventos, de modo a facilitar a análise no sentido de verificar não somente as discussões dos licenciandos durante a resolução da situação, mas também as articulações entre diferentes registros de representação semiótica de funções matemáticas.

O índice de eventos criados, descrito no Quadro 5, apresenta na primeira coluna a ordem dos eventos selecionados, enquanto que na segunda, estão especificados os eventos e na terceira, o intervalo de tempo decorrido em cada evento.

Quadro 5 – Índice dos eventos selecionados da OI On-line Preliminar

Evento	Síntese do Evento	Intervalo de tempo
1	Interpretação do enunciado com cálculo do percurso da formiga	6:51 - 10:39
2	Construção do triângulo ADF quando $x = 22$ cm	11:01 - 18:00
3	Intervenção da moderadora na construção do triângulo ADF	18:13 - 19:52
4	Fórmulas gerais das funções de área do triângulo ADF	20:03 - 21:41
5	Intervenção da moderadora na construção das funções área	22:20 - 23:51
6	Intervenção da mediadora para localização do ponto F quando $x = 22$ cm	24:16 - 31:08
7	Reconstrução do triângulo ADF quando $x = 22$ cm	31:12 - 32:48
8	Recalculando a área do triângulo ADF quando $x = 22$ cm	33:40 - 49:07
9	Reformulação das funções de área do triângulo ADF	49:58 - 1:07:37
10	Construção do gráfico	1:10:38 - 1:16:13
11	Leitura do gráfico	1:22:34 - 1:28:22
12	Determinação dos conjuntos domínio e imagem das funções de área	1:29:08 - 1:36:08

Fonte: elaborado pelo autor

Uma vez construído o índice de eventos, damos início a transcrição das falas dos licenciandos fazendo, em seguida, a análise dos eventos com base na teoria dos registros de representação semiótica, descrevendo-os e colocando a transcrição das falas dos licenciandos relacionadas ao evento em discussão.

A fim de nortear as discussões dos eventos à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, trazemos no Quadro 6 a seguir o índice de eventos com um dos aspectos descritos por Duval (2012b). Na TRRS, ele traz a atividade cognitiva, objeto de estudo deste trabalho, classificadas como atividades de reconhecimento, tratamentos e conversões entre registros de representação semiótica.

Quadro 6 – Detalhamento dos eventos pela classificação das atividades cognitivas fundamentais

Evento	Síntese do Evento	Atividade Cognitiva Fundamental
1	Interpretação do enunciado com cálculo do percurso da formiga	Conversão entre registro em linguagem natural para o registro figural
2	Construção do triângulo ADF quando $x = 22$ cm	Identificação e reconhecimento do registro figural
3	Intervenção da mediadora na construção do triângulo ADF	Tratamento do registro figural
4	Fórmulas gerais das funções de área do triângulo ADF	Conversão do registro figural para o registro algébrico
5	Intervenção da mediadora na construção das funções área	Conversão do registro figural para o registro algébrico
6	Intervenção da mediadora para localização do ponto F quando $x = 22$ cm	Tratamento do registro figural
7	Reconstrução do triângulo ADF quando $x = 22$ cm	Identificação e reconhecimento do registro figural
8	Recalculando a área do triângulo ADF quando $x = 22$ cm	Tratamento numérico
9	Reformulação das funções de área do triângulo ADF	Conversão do registro figural para o registro algébrico
10	Construção do gráfico	Conversão do registro algébrico para o registro gráfico
11	Leitura do gráfico	Tratamento gráfico
12	Determinação dos conjuntos domínio e imagem das funções de área	Atividade de reconhecimento do objeto função

Fonte: elaborado pelo autor

O primeiro evento que foi identificado a ser analisado emergiu do início da atividade e diz respeito à leitura do enunciado, de modo que os licenciandos começam a compreender o problema. Os sujeitos iniciaram a interação colaborativa de interpretação do enunciado e, em seguida, começaram a mobilizar esquemas para interpretar a situação, de modo a solucionar o problema, conforme apresentado na tirinha da figura 22.

Figura 22 – Diálogo entre os licenciandos durante a compreensão do enunciado do problema



Fonte: elaborado pelo autor

De acordo com a figura 22 apresentada anteriormente, neste evento, os licenciandos constroem esquemas para a compreensão do enunciado da atividade proposta. Duval (2012a) nos chama a atenção para esse tipo de problema, pois nos remete a apreensões dos tipos perceptiva e discursiva da linguagem natural. Desta forma, teremos que:

Não importa qual a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas e outra controlada que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se geralmente em conflito porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado e porque os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente. O problema das figuras geométricas está inteiramente ligado à diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses. (DUVAL, 2012a, p. 120, 121)

Portanto, o que Duval traz nesse texto é que a figura de um problema não é necessariamente o que ela apresenta ali, e sim a interpretação para a qual ela é levada a mostrar, em geral, o que está escrito no enunciado. A apreensão discursiva do registro em linguagem natural, por sua vez, possui, fundamentalmente, função de identificação.

Assim, podemos perceber na descrição do enunciado, como dito anteriormente, que esta foi uma atividade a qual contou com dois sistemas semióticos diferentes: a linguagem natural e a figural e, para o segundo tipo de representação, há ainda a utilização de léxicos associativos para designar dados do problema. Logo, teremos os pontos A, B, C e D representando os vértices que formam o retângulo, F simboliza o local onde a formiga se encontra no trajeto,  $x$  como sendo a medida do percurso deste inseto e cm para designar a unidade de medida, no caso em centímetros.

É possível evidenciar, a partir da transcrição das falas de A1 e A2, que há a dificuldade de articular as palavras do enunciado com o que está proposto na figura do problema. Isto porque, para os sujeitos da pesquisa, o ponto F citado é um ponto em que a formiga chega e que, na verdade, ela estará neste ponto após andar 20 cm conforme o enunciado. Logo, o ponto F representa a formiga em seu caminhar ao longo do percurso de A a D e a medida de  $x$  indica o quanto ela andou. Ao descrever a função de expansão discursiva da linguagem, Duval (2004) discute a compreensão do discurso em relação ao que ele deixa explícito ou implícito.

No enunciado do problema, por exemplo, temos que “Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D”. Assim, a formiga anda 20 cm de A a B, depois anda mais 10 cm de B para C e finaliza seu trajeto no ponto D, cujo segmento CD mede 20 cm, em que, no total, percorre uma distância de 50 cm.

No entanto, os licenciandos se depararam com a segunda parte do enunciado “Após andar  $x$  centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno”. Para os sujeitos, no entanto, o trajeto não finalizou no ponto D. A formiga desceu de D para A e caminhou  $x$  cm até chegar em F, como apresentado na figura 23. Portanto, essas duas construções sucessivas, na visão dos licenciandos, mesmo sem conexões aparentes, foram relacionadas por eles, sendo atribuída pelos sujeitos uma relação de causa e consequência. Segundo Duval (2004), esta inferência, realizada pelos licenciandos, é o que se chama de expansão discursiva, em que entre duas frases, há um conhecimento que os sujeitos evocam, mas que está implícito no discurso.

Figura 23 – Diálogo entre os licenciandos interpretando o enunciado



Fonte: elaborado pelo autor

Nesse sentido, é possível inferir que a forma como o enunciado está escrito e apresentada ao aluno pode contribuir para diferentes interpretações. E essa significação assumida pelos sujeitos, tal como apresentado anteriormente, induz a uma conversão equivocada do que está apresentado no enunciado na linguagem natural para a forma figural durante a resolução do problema. De acordo com Duval (2009, p. 63), “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a maioria dos alunos”. Por exemplo, na transcrição do vídeo, assim como ilustrado na figura 19, é possível perceber que o licenciando A2, ao passo que realizava a conversão do enunciado,

representação figural, para a figura do problema, representação figural, interpretou que o ponto F era fixo, ao qual a formiga chegava após descer pelo segmento DA e, por fim, percorreria um trajeto de 60 cm (9:44). Em seguida, partindo de A em direção a F, cuja distância estaria representada por  $x$ , a ser calculada posteriormente. Após um período refletindo nesta interpretação (10:27 - 10:37), ambos licenciandos chegaram à conclusão de que a formiga finaliza o seu percurso em D, de modo que o percurso total fosse a soma entre os segmentos AB, BC e CD, conforme apresentado na transcrição a seguir::

*A2 (10:37) Aí no caso o D e o A não conta (se referindo ao segmento DA), ele tá falando...*

*A1 (10:39) é, o DA. Eu acho... então vai ser 50 (cm).*

O início do evento 2 é caracterizado tanto pela releitura do enunciado, a fim de que seja calculada a área do triângulo ADF quando  $x = 22$  cm, quanto pela evocação dos esquemas pelos estudantes no intuito de encontrar um direcionamento para solução do problema. Ao detalharmos a análise microgenética deste evento, percebemos a utilização de teorema em ação, por parte do licenciando A2 (teorema de Pitágoras) e de conceito em ação, por parte da licencianda A1 (área do triângulo é o produto dos catetos dividido por dois), conforme a transcrição das falas a seguir:

*A2 (11:20) Pitágoras?*

*A1 (11:23) Não, a área (do triângulo) é só o produto dos catetos dividido por 2?!*

*A2 (11:31 - 11:36) Sim. No caso vai ser 5 vezes  $x$ , que é 22 (cm)...*

Os invariantes operatórios evocados pelos sujeitos apresentam a tentativa de tratamento do registro figural, informações estas relevantes para calcular a área do triângulo ADF a partir da figura dada. No entanto, acredita-se que, ao encontrar a variável  $x$  na figura da situação, o licenciando A2 deduziu que deveria ser utilizado o Teorema de Pitágoras para que fosse calculada a medida do lado que está faltando, para então ser calculada a área solicitada. O licenciando A1, por sua vez, indicou, por meio de um conceito em ação, que para calcular a área de um triângulo, bastaria o produto entre os catetos e dividir por dois, argumento este que o licenciando A2 concordou. No entanto, esta forma não condiz necessariamente com a fórmula utilizada para calcular a área de um triângulo, tendo em vista que não basta o

semiproduto de dois catetos para encontrar a área pretendida e sim, o semiproduto entre a base e a altura deste polígono.

Há, porém, um novo momento de dúvidas, em relação à localização do ponto F, quando  $x = 22$  cm. Como já descrito anteriormente, os participantes não estavam visualizando a figura com  $x$  sendo uma medida variável, a qual descreve a distância percorrida pela formiga sobre a trajetória retangular e assim, não perceberam que o inseto caminha todo o segmento AB, subindo depois 2 cm do ponto B em direção a C.

*A1 (11:37) no caso  $x$  é 22, que ele fala?*

*A2 (11:38) é...*

*A1 (11:40) e  $x$  é maior do que o lado?*

*A2 (11:44 - 11:49) é o que eu tô achando estranho aí... então (ADF) não é um triângulo retângulo. Eu acho que não.*

*A1 (11:52) o  $x$  é maior que o lado AB?*

*A2 (12:30) não faz sentido AF ser 22 (cm) e AD ser 5 (cm)... ou faz?*

*A1 (12: 34) não faz...*

Pode-se perceber, a partir da transcrição apresentada anteriormente, que a interpretação feita no evento anterior foi retomada neste evento, em que os estudantes assumem que a formiga não finaliza o percurso no ponto D, tal como dito no enunciado da questão. Os sujeitos não levaram em consideração o término do percurso do inseto em D e supuseram que este continuaria o trajeto pelo segmento DA, talvez por conta do triângulo ADF, do qual solicita-se a área. Logo, a formiga desloca-se 10 cm sobre AD, percorre mais 12 cm entre A e B e chega em F já que, como dito na análise do evento anterior e ratificado na transcrição da fala de A1 a seguir, em que os licenciandos consideraram o ponto F fixo.

*A1 (12:37 - 12:43) é porque ele diz que no enunciado, a formiga finaliza seu trajeto em D. Aí após andar  $x$  cm, a formiga tá no ponto F. Então se ela andar  $x$ , estando em D ainda, aí vai por AD e chega em A e aí vai pra F. Então se a soma dos dois for 22, aí faz sentido...*

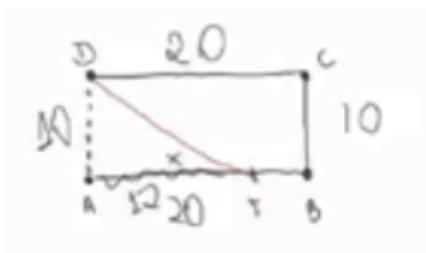
Portanto, esta hipótese justificaria o raciocínio adotado por eles para a conversão do registro em linguagem natural (o enunciado da questão) para o registro figural (figura da situação) e, assim, na concepção dos licenciandos, faria sentido  $x$  assumir o valor de 22 cm na forma como a figura da situação está apresentada, de acordo com a explicação apresentada por A1 na transcrição a seguir.

*A1 (13:11) está dizendo que a formiga sai em D, não é? (Mostrando na figura por meio do quadro compartilhado) E depois de andar  $x$  cm, ela tá em F. Aí se for a*

soma desse com esse (apontando para os catetos AD e AF na figura), aí faz sentido. Porque daqui pra cá a gente tem 10, aí vai ficar de A para F 12 (cm).

Em seguida, foi construído pelos sujeitos, no quadro compartilhado, um triângulo ADF conforme apresentado na figura 24, em que a base AD mede 10 cm e a altura AF mede 12 cm.

Figura 24 – Triângulo ADF esboçado pelos licenciandos no quadro compartilhado



Fonte: dados da pesquisa do autor

Uma vez realizado o tratamento da linguagem figural, em que foram atribuídas as medidas dos catetos do triângulo ADF, 10 cm e 12 cm, descritas anteriormente e apresentadas na figura 24, o tratamento numérico foi efetuado a fim de se calcular a área do referido triângulo, conforme realizado na figura 25 a seguir.

Figura 25 – Tratamento numérico para cálculo da área do triângulo ADF realizado no quadro compartilhado

$$s) \quad A = \frac{12 \cdot 10}{2}$$

$$A = 60 \text{ cm}^2$$

Fonte: dados da pesquisa do autor

O evento 3 foi marcado com a intervenção da mediadora a fim de conduzir os licenciandos a uma outra interpretação da figura a fim de melhorar o tratamento da representação figural, como observado na transcrição a seguir.

*M (18:13) Só uma pergunta pra vocês: esse F é fixo ou depende do x, a posição dele?*

*A2 (18:18) Ele é fixo, não?*

*A1 (18:25) pra outro x, a área ia ser outra..*

*M (18:29) para cada x, a área é uma não é?*

*A1 (18:32) é isso...*

*M (18:39) pronto, então o F é o ponto final para cada x. Para cada x, o F vai estar em um ponto diferente. F é a posição da formiga para cada x*

A partir da transcrição apresentada, percebemos a tentativa da mediadora de apresentar aos licenciandos que o ponto F em função de x, caracterizando a posição onde a formiga está em um dado momento, não como um ponto fixo como foi interpretado até então. Percebe-se neste evento que os licenciandos são levados a fazerem novas interpretações mais alinhadas com o que se quer na questão. Assim, acredita-se que os sujeitos passam a compreender a situação em que está inserido um contexto do objeto matemático proposto inicialmente. Portanto, uma mediação foi efetuada a fim de que o tratamento do registro figural pudesse ser entendido como uma situação dinâmica e não estática, o que vai auxiliar, inclusive, na interpretação do contexto que envolve funções matemáticas.

Para o evento 4, era esperada a conversão do registro figural para o registro algébrico, em que perguntava-se as fórmulas gerais das funções que compõem a situação proposta. Houve inicialmente uma dúvida por parte da licencianda A1, pois na pergunta inicialmente formulada, tinha "... fórmulas gerais das funções que compõem o enunciado" sendo que, segundo Duval (2012), o enunciado de uma questão também corresponde a uma função, mas escrita em linguagem natural.

Na tentativa de elucidar a dúvida de A1, o licenciando A2 explica que há uma função linear no problema, mas que também não saberia dizer qual é a variável da situação, conforme pode ser analisado na transcrição a seguir:

*A2 (20:12) Ela não tá falando que é F? Como M decidiu falar pra gente que (o ponto) F é em função de x. Não é isso?  
(Após A1 concordar, A2 prossegue...)  
Então como F varia, então a gente tem uma função do primeiro grau. Mas o problema está aí: o que varia na função?*

Ao passo que a transcrição é analisada, pode-se perceber que ao mesmo tempo que A2 indica a variável do problema, no caso, o ponto F que depende de x, o mesmo licenciando formula uma pergunta no final para a sua própria resposta. Percebendo a insegurança de sua dupla, a licencianda A1 o auxilia reforçando que a variável da situação é o ponto F:

*A1 (21:04) esse pontinho F, não é?*

Uma vez confiante em sua interpretação, A2 mobiliza os esquemas por meio dos conceitos em ação, ao definir a representação algébrica da função polinomial de 1º grau:

*A2 (21:07) Sim, que nesse caso ai é o  $x$ , não é? Então a gente pode fazer aí um  $f(x) = ax + b$ . Eu sei que essa aí é uma função do 1º grau, só que eu não sei como botar os valores. Tu tens ideia?*

*A1 (21:41) Se for pra descrever a área, a gente pode fazer assim (começa a escrever no Jamboard) que a área ... mas isso só vai funcionar até chegar em B. É  $10x$  dividido por 2.*

Uma vez que a dúvida relacionado ao enunciado da situação persistiu, o mediador, em uma decisão *ad hoc*, entrevistou e reformulou a pergunta de modo a direcionar os licenciandos à interpretação mais alinhada com a planejada. O evento 5, portanto, foi caracterizado por essa mediação na orquestração, conforme observada na transcrição a seguir.

*M (22:20) Só corrigindo aí um pouco ... vocês vão descrever as diferentes fórmulas gerais da área do triângulo ADF em função de  $x$ .*

Mesmo com a intervenção anterior, a licencianda A1 persistiu com a dúvida, o que fez com que o mediador interviesse novamente.

*M (22:40) o problema quer saber as diferentes fórmulas gerais das funções da área (do triângulo ADF). Então ele pede que, para cada ponto que tenha o F, onde está a formiga, vocês descrevam as fórmulas dessa área.*

Após a mediação na orquestra, percebe-se uma mobilização de esquemas por meio de invariante operatório por parte de A2 na tentativa de construção da solução da situação, em que o estudante levanta conceitos em ação com noção de função.

*A2 (23:07) hmm... como se o F fosse variando, né?*

*M (23:08) é, F variando em função de  $x$*

*A2 (23:17) eu entendi a lógica, só que não entendi como a gente vai botar na função, entendeu?*

Destaca-se a importância dessa mediação posto que, a partir dela, os licenciandos começam a compreender a situação proposta como um problema envolvendo função. Isto pode ser inferido conforme o debate adiante exposto em que perguntas foram feitas de modo a solidificar o entendimento da situação.

*A1 (23:35) Mediador, eu não sei se a gente poderia perguntar isso, mas esse x vai ser só essa medida (22 cm) mesmo?*

*M (23:45) a cada posição, o x é diferente, não é?*

*A2 (23:49) e como a gente saberia a próxima posição?*

*M (23:51) ela (a formiga) vai andar esse caminho todinho (de A a D). Então se a formiga anda, o x varia.*

Ao passo que o diálogo prossegue, novos esquemas são mobilizados com o intuito de desconstruir a compreensão feita no evento 2 em relação à interpretação do enunciado e, conseqüentemente, esboçar uma nova ideia para o triângulo ADF. Desta forma, a essa nova intervenção da mediadora para auxiliar a localização do ponto F quando  $x = 22$  cm é o que caracterizou o evento 6.

*A1 (24:16) o problema é que esse 22 (cm) aqui não faz sentido (apontando o cursor do mouse para o esboço feito e apresentado na Figura 24)*

*A2 (24:17) não faz mesmo*

A análise da fala de A1 dá indícios que a dificuldade encontrada se dá ao fato de que os licenciandos estão considerando a representação figural do enunciado como uma figura estática, retomando o que já havia sido levantado nas pesquisas apresentadas por Goldenberg (1988) e Clement (1985), descritos em Gitirana (1999). Essa dificuldade pode também se dar devido ao fenômeno da não congruência entre o enunciado escrito e a figura dada. Isto porque o enunciado só faz menção a uma figura, no caso o retângulo ABCD enquanto que o triângulo ADF só é requisitado entre as situações, podendo não ficar evidente, no registro geométrico, a presença da unidade figural do triângulo, além das outras que também estão subentendidas na figura do problema. Logo, a fim de não paralisar a orquestração, houve uma nova intervenção da mediadora fornecendo elementos que sanassem as dúvidas dos licenciandos, tal como apresentado na transcrição a seguir.

*M (24:39) o que é que é o x nesse problema?*

*A1 (25:00) é um ponto do contorno que a formiga andou*

*M (25:14) no enunciado diz que é algum ponto do contorno?*

*A1 (25:19) o enunciado diz que após a formiga andar x centímetros, a formiga estará num ponto F do contorno.*

*M (25:24) então x é um comprimento, não é?*

*A2 (25:34) eu acho que é isso mesmo. Ele anda 20, depois anda 10 depois anda 20. Aí não faz sentido porque depois ela anda 22 cm.*

Com a transcrição apresentada anteriormente, podemos perceber que A2 ainda continua com a construção elaborada inicialmente, mesmo após as

intervenções realizadas pela mediadora. A partir da última fala transcrita no diálogo, o licenciando interpreta que a formiga anda mais 22 cm além do trajeto ABCD, chegando ao ponto F. A fim de auxiliar a dupla, a mediadora propõe um novo diálogo:

*M (26:08) mas (o ponto) F é a posição para cada x, certo? Para cada x, você tem um (ponto) F.*

*A2 (26:20) então, mediadora. Mas se ele parte de F e chega em D e dá um valor, como ele para em F e dá outro menor? Por que F não vai ser um contorno também? E de A até B também não é um contorno?*

*M (26:44) não, F é o ponto onde a formiga está naquele momento, em cada momento. E esse F depende de x. De quanto ela andou.*

*A2 (26:56) então não necessariamente ele tem que dar um contorno todo pra chegar em F, né? Ela pode ter partido de A e chegado em F, não é?*

*M (27:01) O F é a posição que a formiga tá no momento. Se a formiga anda, o F estará indo junto. O F é a marcação do ponto onde ela tá.*

Um minuto depois do diálogo anterior, percebemos que a dúvida A2 ainda continuava sobre o ponto F quando a formiga anda 22 cm. Para os licenciandos, os 22 cm são complementares ao trajeto ABCD sobre o retângulo e não interpretaram como sendo uma parte desse percurso.

*A2 (28:00) Então ela parte de A e vai até o D. Mas como ela parte de A e anda 22 cm se de A a B é 20 cm?*

Na tentativa de conduzir a uma nova interpretação da situação, o mediador mais uma vez intervém, questionando o trajeto seguido pela formiga no problema.

*M (28:50) qual é o trajeto da formiga?*

*A2 (28:54) então, é isso que eu quero saber. Se ela partiu de A até F (e continuou pensando) O que eu tô confundindo é que ela deu uma volta e parou no ponto F.*

*M (29:00) mas se ela saiu do ponto A e foi até o ponto D, conforme está escrito no enunciado.*

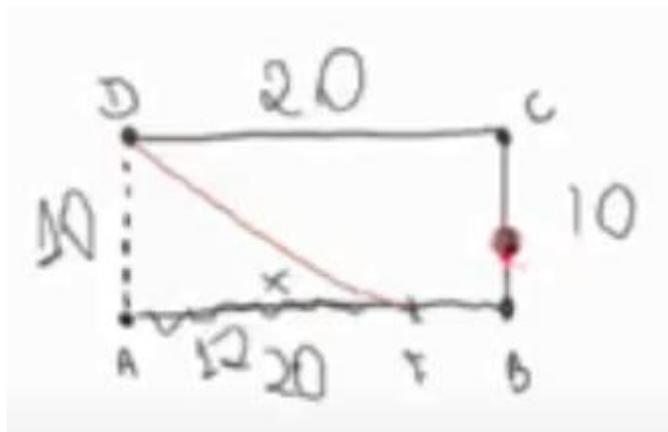
*A2 (29:05) mas pra chegar em F ela anda pelo contorno, que é essa linha pontilhada.*

Quando formulamos esse problema, havíamos imaginado que a situação proposta na letra a já conduziria o licenciando a interpretar que a formiga estaria no segmento BC ao percorrer 22 cm. Desta forma, descartaria essa interpretação apresentada por A1 e A2 em que ao concluir o trajeto no ponto D, o inseto continuaria de D até A pela linha pontilhada até chegar a F. Com isso, a mediadora segue o diálogo com A2 e que A1 posteriormente entra na discussão, conforme observado na transcrição a seguir.

M (29:50) o que você respondeu na letra a?  
 A2 (29:54) que ela partiu do ponto A ao ponto D andando 50 cm. Ah, então ela parou em D.  
 M (30:15) se o x for 22 (cm), onde é que a formiga vai estar?  
 A2 (30:20) em D.  
 M (30:22) 22 (cm) em D?  
 A1 (30:25) não, ela tá aqui entre A e B, né?  
 M (30:29) entre A e B? Mas entre A e B tem 20.  
 A1 (30:31) ela tá em D, desce para A e até aí ela andou 10 cm. Depois anda mais 12 e por isso estará entre A e B.  
 M (30:39) não, ela sai de A e vai até D.

O evento 6 chega ao fim ao passo que A1 apresenta sua interpretação, na tela compartilhada, da localização do ponto onde a formiga estará ao percorrer 22 cm, como apresentado por um balão rosa sob o segmento BC na figura 26 a seguir.

Figura 26 – Apresentação do ponto F quando  $x = 22$  cm, realizado no quadro compartilhado

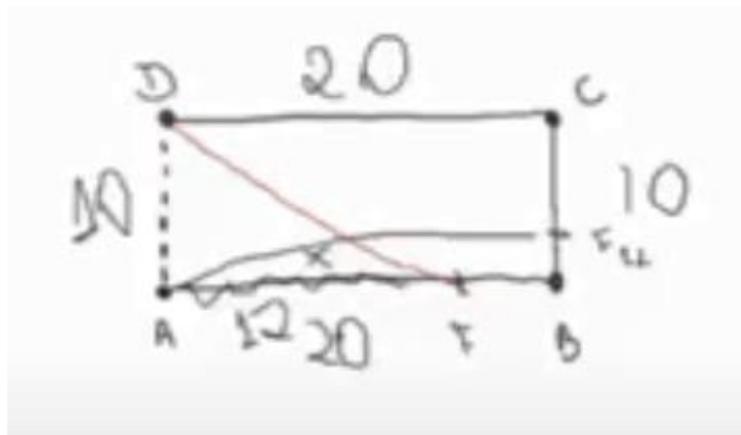


Fonte: dados da pesquisa do autor

O evento 7 inicia com a reconstrução do triângulo ADF, uma vez os licenciandos tendo localizado o ponto F quando a formiga percorre 22 cm no percurso ABCD. A licencianda A1, então, inicia o tratamento figural sob a imagem da situação no quadro compartilhado, ao esboçar o triângulo ADF.

A1 (31:38) então esse será o novo F que partiu de A (mostrando o ponto marcado na figura anterior e começando a esboçar a figura do triângulo ADF no desenho, como mostrado na figura 27 a seguir).

Figura 27 – Início de esboço do novo triângulo ADF, realizado no quadro compartilhado



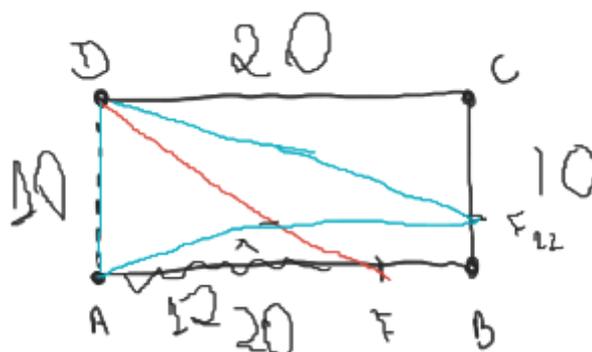
Fonte: dados da pesquisa do autor

Após A1 desenhar no quadro, apresentamos a seguir a transcrição do diálogo com A2 pois marca uma evolução na mobilização de invariantes operatórios nos esquemas de resolução desta licencianda. Isto porque é possível notar a reflexão de A1 sobre a resposta apresentada, evidente também no evento seguinte.

A2 (32:25) *tu estás desenhando aí no quadro?*  
 A1 (32:30) *não, estou escrevendo não. Estou só pensando aqui...*  
 A2 (32:45) *no caso o mediador pediu pra gente refazer a letra b, né?*  
 A1 (32:48) *não, M deu só uma dica. Porque (a formiga) partiu de A e a gente tem esse triângulo aqui, deixa eu ver se consigo desenhar... qual seria a área dele? Acho que é só pra gente pensar pra ver se sai a fórmula da área.*

O evento 8 é caracterizado pelo cálculo da área do novo triângulo ADF formado, cujo esboço, iniciado na fase anterior e apresentado na figura 28, é fechado.

Figura 28 – Fechamento do esboço do novo triângulo ADF, realizado no quadro compartilhado



Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

Logo após concretizar o desenho no quadro compartilhado, os licenciandos discutem, conforme transcrição a seguir, os elementos necessários para calcular a área do triângulo ADF solicitado na situação.

*A1 (39:20) a base é 10 e a altura é 20. (Em seguida, há a realização do tratamento numérico para o cálculo de área, conforme explicado pela licencianda A1 na transcrição).*

*A1 (39:40 - 40:05) a base é esse segmento em azul (mostrando o cursor do mouse por AD) e a altura é esse segmento (desenhando um segmento representativo da altura do triângulo ADF, do ponto F<sub>22</sub> até a base e paralelo a AB) que é 20. Eu não tinha certeza se a altura era 20 ai eu fiz a área do retângulo e diminuí pela área desse triângulo retângulo aqui (apontando para o triângulo DCF) e por essa área aqui (ABF). Aí eu conferi e deu a mesma coisa. É porque às vezes o desenho engana...*

Com essa reformulação da interpretação da situação, notamos que os licenciandos desenvolveram a resolução de acordo com o que havíamos previsto na análise à priori, apresentado no capítulo 4. Portanto, quando a formiga andar 22 cm, a altura do triângulo ADF será 20 cm.

Logo, os sujeitos concluíram que  $S = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100 \text{ cm}^2$ .

A partir da transcrição anterior, há de se destacar ainda que outra possível solução, segundo Machado (2015), foi também utilizada a fim de comprovação da veracidade do cálculo anterior. A1 então obteve a área do triângulo ADF subtraindo a área do retângulo ABCD pelas áreas dos triângulos retângulos ABF e FCD, chegando na expressão:

$$S = AB \cdot AD - \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BF - \frac{1}{2} \cdot FC \cdot CD$$

$$= 20 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20$$

$= 200 - 20 - 80 = 100 \text{ cm}^2$ , também apresentada em Machado (2015).

No entanto, A2 diverge da interpretação anteriormente apresentada ao indagar que a altura do triângulo coincide com o valor de  $x$ . Em seguida, A1 explica novamente seu raciocínio, do qual seu colega vem a concordar depois.

*A2 (46:24) a área não pode ser 10 vezes 22, não?*

*A1 (46:55 - 49:05) a área do triângulo azul aqui é 10 vezes 20, pois a altura é 20, já que o segmento da altura é paralela AB. A gente tem um triângulo aqui quando  $x$  é 22. Depois que a gente tem o ponto F, o problema pede para gente calcular a área desse triângulo. Aí a base é 10 porque é o segmento AD e a altura é 20 porque é o segmento que vai de AD até o outro vértice F. Aí por isso que a área ficou assim, entendeu?*

*A2 (49:07) ah, entendi.*

Finalizado o cálculo da área do triângulo ADF para  $x = 22$  cm, inicia-se o item da situação em que é solicitada aos licenciandos a descrição das fórmulas gerais da função área para os triângulos ADF. Junto a essa pergunta, pontuamos também o início do evento 9, caracterizado por um diálogo em que esquemas são mobilizados. Neste evento, os sujeitos deverão realizar a conversão do registro de representação figural para o registro algébrico.

*A1 (49:58 - 50:31) agora na letra c a gente tem que dar uma fórmula da área da função que relacione essas diferentes medidas de  $x$ . Aí a gente tava sem entender direito e o mediador explicou “se a gente partir de A e andando = 22, onde é que a gente para?”. Aí a gente andou 20 aqui depois sobe mais 2. Então o triângulo que forma é esse aqui que a gente calculou em azul. Ai a área a gente fez, falta achar a fórmula para  $x$  em geral. Acho que é isso.*

*A2 (51:21) agora eu consegui entender.*

Esta é uma situação que trata de funções, em que os licenciandos terão de reconhecer uma função definida por partes, sendo elas duas polinomiais de primeiro grau e uma função constante. Começa-se a perceber, neste evento, a familiaridade dos sujeitos com o problema e os elementos nele envolvidos, em que reconhecem a divisão das funções em partes, conforme apresentado na figura 29 a seguir.

Figura 29 – Apresentação da interpretação do problema sobre função definida por partes

A gente precisa dividir ele (o problema) em casos?

Por que precisaria dividir em casos?

Acho que o primeiro caso, eu pensei, foi ela partindo de A e ainda estando em AB. Ela ainda não dobrou (mostrando a passagem do segmento AB para BC)...

Aí a gente vai ter esse triângulo aqui e pra calcular a área dele, aqui é 10. E como ele partiu de A, aqui vai ser o nosso  $x$  (representado pelo segmento AF). Então a área vai ser 10 vezes  $x$  dividido por 2.

Aí calculando o outro, sem ele estar em AB... ele parte de A, mas já passou de AB, então tem isso aqui. Então vai tá por aqui (mostrando um ponto sobre o segmento BC). Então o  $x$  vai ser tudo isso aqui e o triângulo...

Não tem retinha aqui não, né? Eu sou muito visual... quando (o desenho) fica tronxo, eu não consigo pensar.

I)  $A = \frac{10 \cdot x}{2}$

II)  $A = \frac{10 \cdot 20}{2}$

Fonte: o autor

Por fim, a última função foi desenvolvida pelos licenciandos também da maneira que havíamos previsto, em que a formiga estando no segmento CD, a medida  $x$  irá variar no intervalo  $30 \leq x \leq 50$ . Logo, a altura do triângulo quando o ponto F estiver no segmento CD terá como medida o total percorrido pela formiga menos o quanto ela já andou. Portanto, o valor desta medida será representado pela expressão  $(50 - x)$ , em que  $x$  indica a soma dos segmentos  $AB + BC + CF$ , como será mostrado pelos licenciandos na Figura 30 a seguir. A resolução desta etapa foi construída a partir do diálogo descrito a seguir.

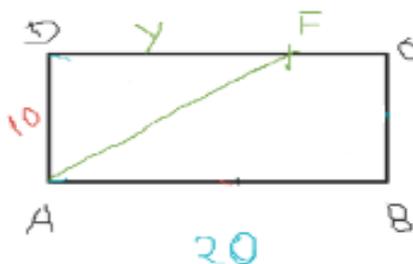
A1 (1:01:20) *Aí o outro momento será..*  
 A2 (1:01:41) *depois do C um pouquinho*

A1 (1:01:43) *é, entre C e D.*

A2 (1:01:49) *aí pegaria a mesma ideia do primeiro caso, né?*

A1 (1:01:55) *é um pouco parecido. O nosso F tá aqui (marcando um ponto sobre o segmento CD) e esse vai ser o triângulo ADF (fazendo o desenho no quadro compartilhado apresentado na figura 29). Aí o nosso x agora, ele é tudo isso (passando o cursor do mouse sobre os segmentos AB, BC e CF). Então a gente vai chamar isso aqui (se referindo ao segmento DF) de outra letra (e desenha y em cima do segmento).*

Figura 30 – Esboço do triângulo ADF para desenvolvimento da fórmula geral



Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

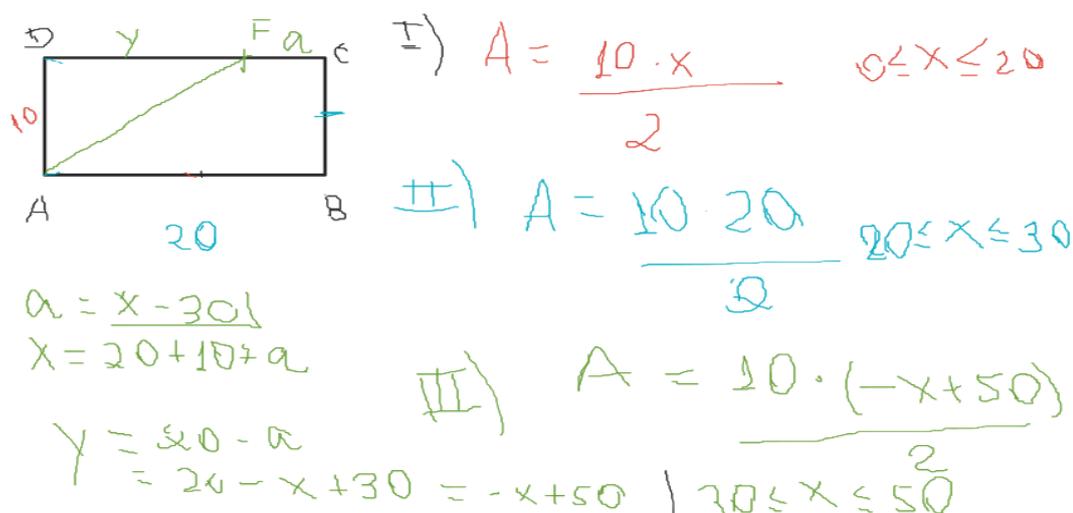
A conversão do registro figural para o registro algébrico é realizada pelos licenciandos, ao passo que o tratamento algébrico é desenvolvido em seguida para determinação da fórmula geral da função de área do triângulo ADF quando a formiga está sob o segmento CD. Uma vez que o desenho é feito no quadro compartilhado e apresentado na figura 31, a licencianda A1 explica seu desenvolvimento sob a concordância de A2, como podemos ver na transcrição adiante.

A1 (1:03:28) *O x vai ser então 20 do lado AB mais 10 do lado BC mais uma outra medidazinha que eu vou chamar de a. Para achar y, vamos fazer y igual a 20 menos a para deixar y em função de x. Então a vai ser x menos 30.*

A2 (1:03:50) *porque aí o x é que vai estar variando, né?*

A1 (1:03:51) *é, também. (continuando a conta) Ai pra gente ter uma medida y em função de x vamos ter que y vai ser 20 menos x mais 30. Então isso vai ser menos x mais 50. Ai a área desse triângulo verde vai ser 10 vezes o valor de y que é menos x mais 50 dividido por 2.*

Figura 31 – Esboço do triângulo ADF com desenvolvimento do tratamento algébrico



Fonte: dados da pesquisa do autor

Um dado que chama a atenção para a figura 31 é em relação aos intervalos das funções I e III, pois os licenciandos não levaram em consideração os valores do domínio, como será discutido no evento 12. Há de se ressaltar, portanto, que no ponto A, em que  $x$  vale 0 e em D, cujo valor de  $x$  é 50, as respectivas imagens são nulas. Logo, não haverá triângulo e a área não pode ser calculada em segmentos de reta. Assim, nesses pontos, não há função.

O evento 9 é finalizado ao passo que os licenciandos realizam a conversão do registro figural para o algébrico e então um novo evento é observado com o início da próxima situação. Nesta, os sujeitos devem esboçar o gráfico da função área definida por partes, em que eles realizaram um tratamento gráfico.

Conforme havíamos escrito na análise *a priori* no capítulo 4 e indo de acordo com os resultados de pesquisas como a de Souza, Cordeiro e Moretti (2004) e a de Fonseca e Henriques (2018), os licenciandos que participaram desta atividade apresentaram facilidade em realizar a conversão da representação algébrica para a gráfica. Havíamos previsto que apresentaríamos um modelo desenvolvido no GeoGebra, com duas janelas de visualização: à esquerda, a construção geométrica do problema e à direita, o gráfico traçado pelo software com a representação gráfica, desenvolvidos com animação a fim de facilitar a visualização em múltiplas representações. Não houve, entretanto, tempo hábil para tal realização.

Os licenciandos realizaram a atividade separadamente, em que A1 enviou o gráfico desenvolvido no papel enquanto que A2 ficou de enviar o esboço, porém não

o fez no fim da orquestração. No evento anterior, sugerimos que os licenciandos estipulassem os intervalos para os quais as funções estavam definidas, com o intuito de facilitar a construção do gráfico. O licenciando A2, porém, sugeriu a construção por meio de localização de pontos, como apresentado a seguir na transcrição do vídeo, o que pode induzir a erro de tratamento gráfico caso os intervalos não estejam bem definidos e sejam respeitados.

*A1 (1:10:38) nessa questão a gente tem que fazer o gráfico. Vou fazer no papel primeiro.*

*A1 (1:12:00) o gráfico será a relação entre  $x$  e área, não é?*

*A2 (1:12:08) No caso a gente precisa atribuir valores não, não é?*

*A1 (1:12:15 - 1:12:50) pode ser também, pra ficar mais fácil. Eu marquei os valores dos intervalos no gráfico.*

É possível que A2 tenha construído os gráficos com a utilização de marcação de pontos, como ele comentou durante a orquestração e apresentado na transcrição a seguir, além de ter construído gráficos separados para depois juntar. No entanto, como o sujeito não enviou sua atividade, não há a possibilidade de afirmação.

*A2 (1:13:26) a gente vai fazer um gráfico para cada caso, né?*

*A1 (1:13:28) acho que é um só, que são intervalos*

*A2 (1:15:00) tu estás fazendo como o gráfico?*

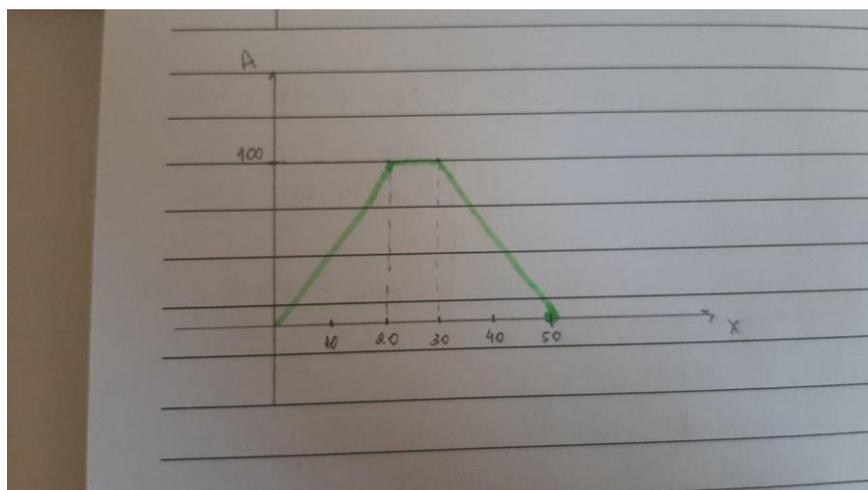
*A1 (1:15:04) eu coloquei os intervalos no eixo  $x$  e a área no eixo  $y$ . Ai eu fiz de 0 a 20 que é um gráfico crescente que a área vai dar 100. E eu já errei aqui, acabei de perceber.*

Tal erro, referido por A1, é relativo ao gráfico cuja área vale 100, mas imediatamente consertada por ela. Após a explicação, A2 comentou não ter entendido a ascendência desta função, quando a formiga estará no segmento CD. A1, então, explica a A2 seu raciocínio, conforme apresentado a seguir na transcrição do vídeo, em que percebe-se também a licencianda mobilizando esquemas de ação instrumentada. Para Rabardel (1995), o sujeito passa a incorporar o artefato por meio dessa ação para a realização de uma determinada tarefa. Assim, A1 apresenta sinais de que os artefatos simbólicos (os registros de representação semiótica) foram incorporados para resolução da situação.

*A2 (1:15:35) eu não entendi o finalzinho*

*A1 (1:15:36) eu tô dividindo (o gráfico, apresentado na figura 32) por intervalos, esses intervalinhos que a gente fez na página 2 (do Jamboard) e para cada intervalo eu tô fazendo um gráfico. Aí esse primeiro é crescente e o primeiro valor que pode dar é 100. Aqui entre 20 e 30 o gráfico é constante...*

Figura 32 – Esboço do gráfico da função área dos diferentes triângulos ADF



Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

O evento 10 se encerra quando os licenciandos finalizam a discussão sobre a construção do gráfico da situação, passando para a pergunta seguinte, em que procuramos saber qual a relação entre os diferentes valores de  $x$  com o gráfico. Com esta situação, pretendemos que os licenciandos reconheçam uma função a partir do que é perguntado. Esse tipo de tarefa, na qual é solicitada a identificação dos objetos por suas múltiplas representações, são tão importantes para a aprendizagem quanto às tarefas de produção, sendo a rapidez na resolução sua principal característica (DUVAL, 2011a). No entanto, a pergunta não estava muito bem clara para os sujeitos, com a mediadora intercedendo o diálogo a fim de continuar com a execução da orquestração.

*A1 (1:22:34) estás entendendo essa pergunta, A2?*

*A2 (1:24:23) não, fiquei confuso*

*M (1:24:50) o que a questão quer saber é a relação entre o trajeto da formiga e o gráfico que vocês esboçaram. Se a gente olhar para o gráfico, em um dado ponto, tem como a gente saber onde a formiga vai estar?*

*M (1:25:55) tem como a gente prever, por exemplo, se a formiga andar 32 cm, em que parte ela vai estar do gráfico?*

É com essa situação que pretendemos chamar a atenção dos licenciandos que uma relação funcional não está explicitamente vinculada a uma representação algébrica (lei de formação). Esperávamos dos alunos a observação que tanto a forma como a medida da área do triângulo ADF dependem da posição do ponto F, que de início, não ficou tão evidente, como mostra a transcrição a seguir. Seria necessário aos estudantes analisarem o percurso da formiga (variável independente -  $x$ ) e relacionar com a área da do triângulo ADF (variável dependente -  $y$ ).

*M (1:26:45) mas o gráfico traça o que pelo que?*

*A1 (1:26:49) a área pela quantidade que anda...*

*M (1:26:54) pelo x.. então tem como descobrir a área do triângulo pelo gráfico?*

*A1 (1:27:05) tem... o 32 como você falou, por exemplo, vai ser menor do que 100 então a formiga vai estar próxima de 100, mas é menor ainda.. mas saber onde ela tá naquele quadrado não tem como nesse gráfico não.*

Percebendo a dificuldade de compreensão da licencianda A1, a mediadora intervém mais uma vez na discussão para que a incompreensão não parasse a orquestra, como apresentado na figura 33.

Figura 33 – Intervenção da mediadora a fim de que seja localizada a posição da formiga no gráfico



Fonte: o autor

Com o final da antepenúltima atividade encerra-se também o evento 11, dando assim espaço para o evento 12, caracterizado pela atividade de reconhecimento do objeto função em duas situações nas quais perguntamos sobre os conjuntos domínio, contradomínio e imagem. Assim, perguntamos aos licenciandos o que acontece com o domínio quando a formiga estiver nos pontos A e D, seguida da que indaga os sujeitos se haverá função nesses pontos. Para chegar ao resultado, o licenciando deve recorrer ao conceito em ação de domínio, definido como o conjunto de valores possíveis para o eixo das abscissas, ou seja, os argumentos em que uma função pode ser definida. Portanto, assim como havíamos previsto, a licencianda A1 concluiu,

conforme o diálogo com a mediadora apresentado na transcrição a seguir, que a função não existirá nestes pontos, uma vez que teremos apenas o segmento de reta AD e, portanto, não haverá triângulo, inviabilizando o cálculo de área.

A1 (1:29:51) No ponto D não tem área, né?

M (1:30:00) eu vou fazer a mesma pergunta que eu usei na sua afirmação. Tem triângulo?

A1 (1:30:09) não

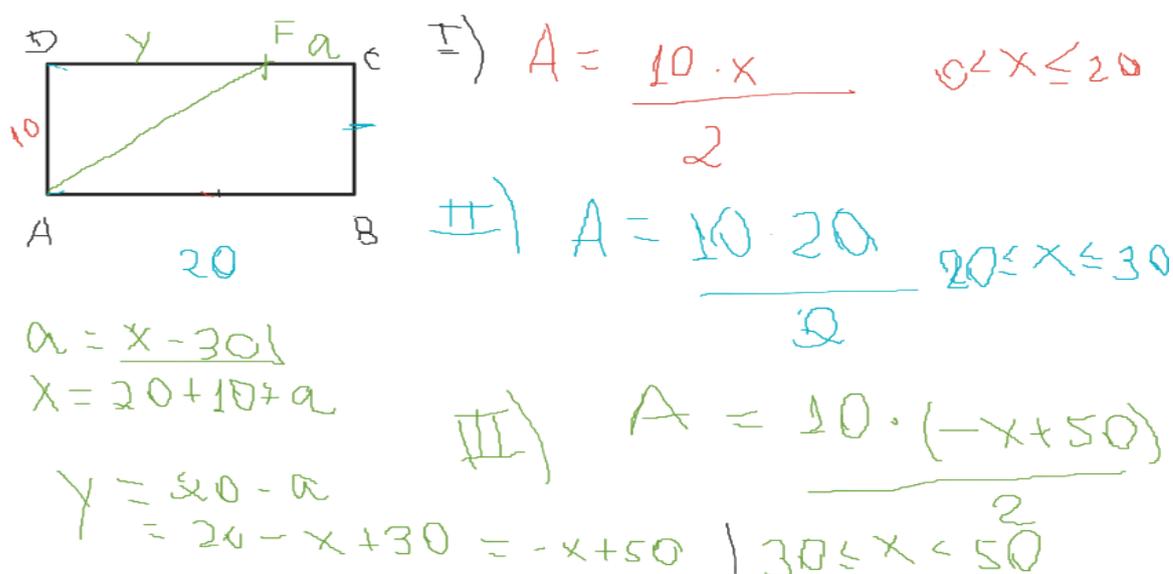
M (1:30:11) tem área?

A1 (1:30:19) não

A1 (1:31:16) tá no ponto A e no ponto D está contemplado, né? Porque aí no caso em I e III (funções de área), seria exatamente o 50 que iria zerar a função. Então, quando a formiga está exatamente no ponto A, ela não andou nada. Então a distância é zero. E quando tá no D, ele andou tudo isso (mostrando o trajeto da formiga) e tá exatamente no 50, que é quando zera a função III.

A licencianda A1, portanto, apresenta que no ponto A, em que  $x$  vale 0 e em D, cujo valor de  $x$  é 50, as respectivas imagens são nulas e assim não haverá triângulo, implicando na inviabilização do cálculo da área em segmentos de reta concluindo que nesses pontos não há função. Logo, lembra da necessidade de modificar os dados apresentados na figura 31, apresentada anteriormente, em que a correção pode ser visualizada na figura 34.

Figura 34 – Correção dos intervalos das funções apresentadas na figura 27



Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

Diante do exposto a respeito do reconhecimento do domínio das funções, diferentemente do que havíamos planejado inicialmente, os licenciandos não apresentaram dificuldades para expressar o domínio da função. A mesma constatação

pode ser observada quando perguntamos aos licenciandos “O que podemos afirmar sobre os conjuntos Contradomínio e Imagem? Eles coincidem? Podem admitir todo e qualquer valor?”.

Tal como na situação anterior, a licencianda A1 definiu o contradomínio da função como o conjunto dos números reais positivos, representado em linguagem matemática por  $CD(f) = \mathfrak{R}^+$ , onde  $\mathfrak{R}^+ = [0, \infty)$ . Já o conjunto imagem, compreendido no intervalo  $0 < \square(\square) \leq 100$ , ressalta a inexistência de área nula e por esse motivo o zero não faz parte do conjunto imagem. Conseqüentemente, A1 concluiu que os conjuntos contradomínio e imagem não coincidem.

#### 5.4 CONSIDERAÇÕES ACERCA DA OI ON-LINE PRELIMINAR

O presente estudo teve como objetivo testar a OI On-line proposta, na perspectiva de verificar dificuldades com os artefatos ou atividades, propondo as adaptações pertinentes para a pesquisa principal. Para tanto, foi elaborada uma atividade que exploram representações semióticas de uma função, além de conceitos de função, tais como as noções de variação, domínio e imagem,. Participaram da atividade uma dupla de licenciandos de uma instituição federal de ensino superior (IFES).

A fim de verificar as contribuições das produções dos participantes, os dados obtidos foram analisadas com base na análise microgenética sugerida por Meira (1994).

Diante dessas análises, o estudo revelou que diversas dificuldades foram superadas, mediante intervenção da mediadora, ao longo da implementação e discussão das atividades. De um modo geral, a OI On-line preliminar possibilitou:

- Realização de tratamentos e conversões de diferentes registros de representação, tais como linguagem natural, registro figural e registro algébrico;
- Melhor compreensão dos conceitos de domínio e imagem e das implicações desses, no gráfico da função definida por partes no contexto geométrico;
- Reconhecimento da correspondência covariacional existente em uma função definida por partes;

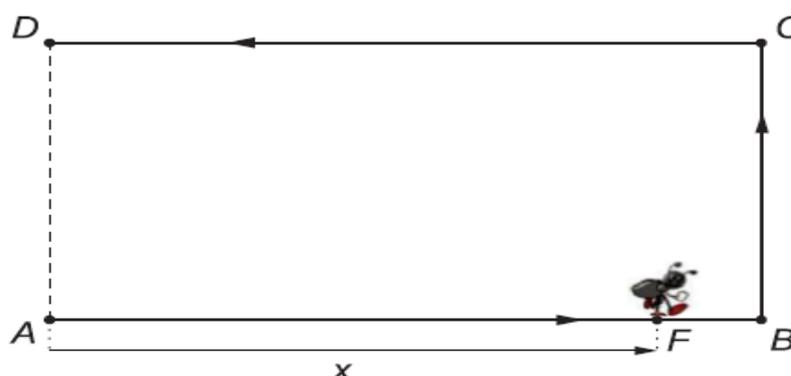
Acredita-se que a resolução das atividades e as aprendizagens daí decorrentes foram favorecidas pelo trabalho em grupo, pelo diálogo entre a dupla e mediadora, pelas transformações de registros de representação semiótica e pela resolução colaborativa da atividade.

Assim, entende-se que mesmo com a superação das dificuldades encontradas durante a resolução da atividade, podemos concluir a Orquestração Instrumental Online criada e aplicada aponta necessidade de adaptações, a começar pela escrita do enunciado, de modo que seja melhor compreendida pelos sujeitos que irão solucionar a atividade no estudo principal. Acreditamos que esta mudança deve melhorar a interpretação do que estará escrito, de modo a otimizar o tempo inicial.

Por fim, as perguntas propostas nas atividades também precisam de ajustes, para que as dificuldades específicas sobre funções que os estudantes apresentaram ao resolver a atividade sejam minimizadas ao passo que agreguem o software GeoGebra como suporte.

#### 5.4.1 Reformulação da situação para a Orquestração Instrumental *On-line* Principal

(OBMEP-2014/2ª fase/nível 3 - adap.) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Durante esse percurso, considere  $F_x$  o ponto em que a formiga se encontra ao percorrer  $x$  centímetros.



- a) Esboce o gráfico da relação entre a área do triângulo ADF e  $x$  (caminho percorrido pela formiga) no quadro compartilhado.
- b) Descreva algebricamente a(s) função(ões) da área do triângulo ADF em relação a  $x$  - comprimento do caminho percorrido pela formiga. Delimite os conjuntos domínio e contradomínio.
- c) O que acontece com o domínio quando a formiga estiver nos pontos A e D? Existe alguma função nesses pontos?
- d) O que podemos afirmar sobre os conjuntos Contradomínio e Imagem? Eles coincidem?

## 6 METODOLOGIA DO ESTUDO PRINCIPAL

Neste capítulo apresentaremos a metodologia do estudo principal e está organizado em quatro seções. Iniciamos retomando o objetivo da pesquisa, para então apresentarmos os participantes e critérios utilizados para escolha deles. Descrevemos a composição de orquestrações instrumentais on-line, com foco nas modificações realizadas do estudo preliminar ao estudo principal. No tópico seguinte, transcorreremos sobre o método de coleta de dados e os instrumentos de coleta utilizados. Por fim, na última seção, trataremos do método e da estrutura da análise de dados.

### 6.1 O CONTEXTO DO ESTUDO PRINCIPAL

O estudo principal foi desenvolvido para caracterizar a gênese instrumental de artefatos simbólicos (a saber, os sistemas de representação semiótica) em uma situação-problema que envolve função definida por partes, desenvolvida por licenciandos de Matemática submetidos a uma orquestração instrumental On-line.

### 6.2 O MÉTODO DO ESTUDO PRINCIPAL

Para esse estudo, uma OI On-line foi criada para ser vivenciada com licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Ensino Superior (IFES). A OI On-line surgiu como proposta metodológica para caracterizar a gênese instrumental de licenciandos no ensino de funções. Para tanto, eles resolveram uma situação proposta adaptada da prova da OBMEP, nível 3, 2ª fase, de 2014.

#### 6.2.1 Sujeitos e cenário de pesquisa

Foi no âmbito da plataforma *Google Meet* que uma situação foi proposta e vivenciada de forma síncrona, com foco na gênese instrumental dos sujeitos participantes. Este momento cuja atividade proposta buscava a mobilização,

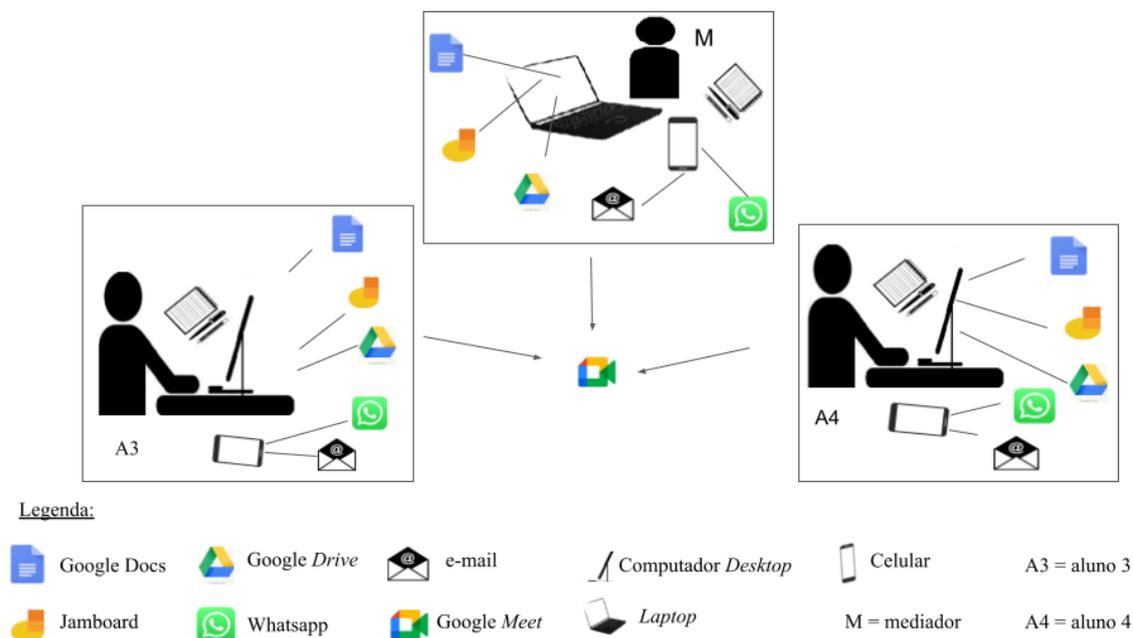
tratamento e conversão de registros de representação semiótica por parte dos sujeitos. Convites foram enviados a grupos de estudos no aplicativo de mensagens Whatsapp a fim de que fossem recrutados licenciandos em fase de conclusão do curso de Matemática. Desta forma, seis pessoas se disponibilizaram para participar desta pesquisa, sendo que quatro delas efetivamente compareceram à sala de aula remota. Assim, separamos os sujeitos em duas duplas, das quais analisaremos neste capítulo a atuação da primeira dupla, cujos participantes chamaremos de A3 e A4. A segunda dupla não terá os dados analisados posto que, no início da orquestração, observou-se que um deles já havia concluído o curso de licenciatura e o outro participante estava com problemas no funcionamento de dispositivos de áudio e vídeo, se restringindo a participar das discussões apenas pelo chat.

### **6.2.2 O *design* da Orquestração Instrumental On-line Principal**

O design da OI On-line principal foi planejado com base nos princípios da Orquestração Instrumental já apresentados anteriormente: configuração didática, modo de execução e performance didática. É na fase de planejamento da OI que ocorrem os componentes como a configuração didática e o modo de execução, enquanto que a performance didática, na qual encontramos o que foi anteriormente planejado e o que deverá ser modificado, ocorre no final do processo.

Na figura 35 é apresentado o cenário da configuração didática e modo de execução da OI On-line Principal.

Figura 35 - Cenário da configuração didática e modo de execução da OI On-line Principal



Fonte: elaborado pelo autor

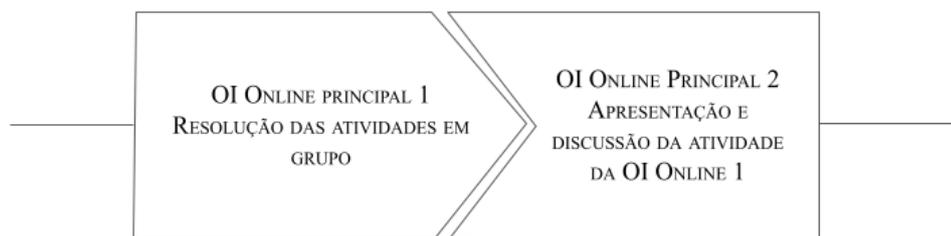
A figura 35 mostra os seguintes elementos da configuração didática da OI On-line principal: sujeitos, artefatos, ambiente de ensino, elementos de gerenciamento de sala de aula, papéis e funções. Quanto ao modo de execução desta orquestração, espera-se que os alunos tenham um papel ativo; já o formador assume um papel mais passivo, atuando como observador do trabalho dos alunos e prestando apoio apenas quando solicitado.

### 6.3 DESENHO DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE DO ESTUDO PRINCIPAL

Nesta seção discutiremos o desenho inicial da OI On-line, além de definir os sujeitos e o campo de pesquisa.

O desenho (Figura 36) da Orquestração Instrumental On-line proposto nesta pesquisa foi concebido com o objetivo de dar suporte a um experimento sobre funções no ensino remoto, na perspectiva de favorecer a gênese instrumental dos sujeitos. Este desenho é uma composição de duas orquestrações instrumentais, denominadas OI Online Principal 1 e OI Online Principal 2 ambas idealizadas para serem realizadas on-line, por meio de encontros remotos síncronos.

Figura 36 - Desenho da OI On-line Principal



Fonte: elaborado pelo autor

As orquestrações que compõem o desenho ocorreram consecutivamente, sem intervalo entre elas e possuem finalidades distintas. Cada uma possui, assim, uma situação proposta para ser resolvida pelos estudantes, de modo que uma orquestração dá suporte a seguinte.

Os estudantes serão divididos em grupos de modo que cada grupo acesse a sua sala do Google *Meet*, já criada e disponibilizada no dia da OIO<sub>1</sub>, cujo link foi enviado por e-mail juntamente ao *roteiro* da atividade.

Na orquestração OIO<sub>1</sub>, os grupos ingressam em salas distintas a fim de resolverem a situação proposta. Em seguida, será vivenciada a OIO<sub>2</sub>, em que os grupos fazem uma apresentação das soluções na OIO<sub>1</sub>, também em reunião síncrona, sendo criado, por fim, um círculo de discussões entre os participantes.

Por fim, a OIO<sub>2</sub> consiste em um trabalho de discussões e reflexões sobre os conhecimentos construídos com a vivência da OIO<sub>1</sub>. Portanto, à medida que os participantes compartilham o que e como fizeram, podem refletir sobre isso e aprender a partir dessa reflexão. Esta atitude também é válida para o formador, uma vez que, utilizando-se das conclusões dos alunos, poderá refletir sobre sua prática e modificá-la.

### 6.3.1 A Orquestração Instrumental On-line Principal 1

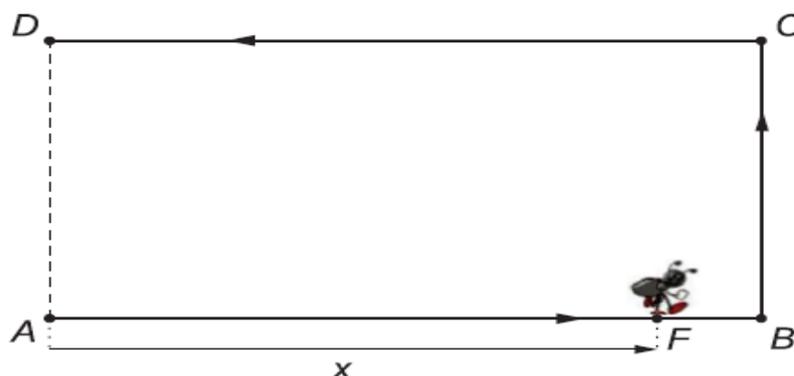
A OI On-line principal 1 consiste na resolução, em grupos, de uma atividade proposta, a questão 2 da prova da OBMEP 2014 nível 3, com as modificações constatadas mediante análise do estudo preliminar. Assim, esta é uma questão que foi ajustada para que pudesse ser demandada dos sujeitos conhecimentos sobre funções, sendo aplicada em um contexto geométrico.

Esta será uma etapa síncrona, na qual os licenciandos ingressarão em uma sala de aula virtual por videoconferência na plataforma Google Meet.

### Situação Matemática

A situação proposta na  $Ol_1$  foi elaborada a partir da composição de atividades extraídas da OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, e adaptadas para que os estudantes possam mobilizar os conhecimentos de tratamentos e conversões de registros de representação.

(OBMEP-2014/2ª fase/nível 3 - adap.) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Durante esse percurso, considere  $F_x$  o ponto em que a formiga se encontra ao percorrer  $x$  centímetros.



- Esboce o gráfico da relação entre a área do triângulo ADF e  $x$  (caminho percorrido pela formiga) no quadro compartilhado.
- Descreva algebricamente a(s) função(ões) da área do triângulo ADF em relação a  $x$  - comprimento do caminho percorrido pela formiga. Delimite os conjuntos domínio e contradomínio.
- O que acontece com o domínio quando a formiga estiver nos pontos A e D? Existe alguma função nesses pontos?
- O que podemos afirmar sobre os conjuntos Contradomínio e Imagem? Eles coincidem?

**Classe de situação:** dado um contexto de movimento de um objeto/ser vivo, incluindo descrição em linguagem natural e ilustração geométrica, estudar a função que

relaciona a área de uma figura geométrica traçada durante o movimento com a distância percorrida, com essa função sendo definida por partes. O estudo da função inclui o traçado do gráfico, a modelagem algébrica, o estudo do domínio, contradomínio e imagem.

#### 6.3.1.1 Configuração didática da OI On-line Principal 1

Esta orquestração instrumental deve ocorrer em uma sala de aula virtual por videoconferência na plataforma *Google Meet*. As etapas de planejamento da configuração didática e do modo de execução da orquestração seguem o modelo já planejado na etapa de metodologia no capítulo 4. Desse modo, ao planejarmos a OI On-line, buscamos garantir aos licenciandos em Matemática a exploração de registros de representação semiótica por meio de uma situação que envolve o objeto função.

#### 6.3.1.2 Modo de Execução da OI On-line Principal 1

Planejamos, assim, um modo de execução da configuração didática. Iniciaremos a OI<sub>1</sub> pelo mediador, com a apresentação das instruções contidas no roteiro para participação da atividade desenvolvido para este fim (ANEXO A), projetada por meio de compartilhamento de tela na sala de aula virtual. As orientações e situação contidas no protocolo de atividade foram também disponibilizadas por e-mail e no grupo de Whatsapp criado para melhor interação entre participantes, pesquisador e orientadoras.

Os licenciandos se organizarão para solucionar a atividade proposta e o mediador irá dar assistência a eles, devendo já estar com os softwares instalados e em funcionamento, bem como também os dispositivos, tanto microfone quanto câmera. Com todos os equipamentos testados e em bom funcionamento, os licenciandos A3 e A4 podem começar a resolver a situação matemática enquanto que o formador acompanha este desenvolvimento de trabalho. A comunicação entre esses licenciandos é permitida durante o processo de resolução da situação matemática, de modo a trabalhar colaborativamente a fim de resolver a situação.

A  $OI_1$ , síncrona, possui uma situação matemática sobre funções a qual cada grupo de estudantes deverá resolvê-la, integrando a solução às tecnologias disponíveis. Esta será uma etapa na qual os grupos ingressarão em uma sala de aula virtual para cada um deles, por videoconferência, na plataforma Google *Meet*.

Entendemos que esta seja uma experiência que levará aos futuros professores vivenciarem as dificuldades que seus alunos encontrarão ao resolver uma situação que necessite a mobilização de diferentes registros de representação semiótica. Observaremos as escolhas feitas pelos sujeitos que trabalham para resolver a  $OI_1$ , assim como as ações, os conhecimentos evocados, utilizados e desenvolvidos. Iremos ainda analisar as dificuldades quanto ao uso dos artefatos, como também as situações inesperadas, decisões *ad hoc* dos formadores etc.

### **Análise a *priori* da situação matemática**

Para resolver a atividade, o licenciando precisa partir da interpretação do que está escrito no enunciado. É na leitura do problema que o aluno começa a ter contato com os primeiros registros de representação semiótica - registro em linguagem natural e quando o licenciando esboça as primeiras transformações deste registro, que Duval (2012b) chama de tratamento. No tratamento do registro em linguagem natural, está envolvida a apreensão do tipo perceptiva da linguagem natural (DUVAL, 2012a).

Duval (1995) traz quatro formas de apreensão (sequencial, perceptiva, discursiva e operatória) das quais para essa situação o sujeito desenvolverá a perceptiva e a discursiva. Na perceptiva, há a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica. Já na discursiva, haverá a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação do enunciado, considerando a rede semântica de propriedades do objeto, sendo, portanto, a reflexão necessária para a interpretação da figura dada no problema.

Em seguida, outra transformação é realizada: a transformação do que está exposto no texto do enunciado para o apresentado na figura do problema. Este processo é caracterizado por Duval (2012b) como conversão, em que o registro de representação em linguagem natural é o registro de partida e vai para a linguagem figural, registro de chegada.

Esta transformação de conversão pode ser dificultada em virtude da apreensão do tipo discursiva da figura do enunciado, em que são mostrados objetos que se destacam independentemente do enunciado e porque os objetos nomeados no enunciado das hipóteses, levantadas pelos licenciandos, não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente. O problema das figuras geométricas está inteiramente ligado à diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses (DUVAL, 2012a, p. 120, 121).

Na primeira pergunta da atividade, na qual é solicitado o esboço do gráfico da relação entre a área do triângulo ADF e  $x$ , caracterizado como o caminho percorrido pela formiga, os licenciandos devem construir o gráfico não mais a partir da representação algébrica das funções e sim, com base na figura. Pesquisas como a de Souza, Cordeiro e Moretti (2004) e a de Fonseca e Henriques (2018) mostram que estudantes apresentam maior facilidade em realizar a conversão entre as representações algébrica e gráfica, neste sentido. No entanto, a conversão do registro figural para o registro gráfico mostrou-se mais difícil por parte dos licenciandos. Por isso, acreditamos que este problema será desafiador para os sujeitos, tendo em vista que esta transformação é considerada não congruente, posto que não há relações entre as unidades significativas entre os registros.

Por exemplo, o participante precisará perceber que enquanto a formiga estiver entre os pontos A e B, teremos uma função afim crescente visto que a área aumenta com o avanço da formiga. Entretanto, é necessário observar que entre B e C o gráfico será constante pois as áreas terão a mesma medida, já que a base dos triângulos é a mesma e as alturas, semelhantes. Esta informação, por sua vez, não é evidente e espontânea na conversão da figura para o gráfico. Menos evidente ainda será a declividade da reta na função de área quando a formiga estiver entre C e D.

A questão seguinte requer que os sujeitos descrevam algebricamente as funções da área do triângulo ADF em relação ao comprimento ( $x$ ) do caminho percorrido pela formiga, além de delimitar os conjuntos domínio e contradomínio. Esta situação tem por objetivo fazer com que o aluno realize a conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

É preciso destacar que nos diferentes segmentos do percurso da formiga haverá diferentes funções, mas que a área é uma variável dependente de  $x$ . Logo,

enquanto a formiga estiver percorrendo o trecho AB, ou seja,  $0 \leq x \leq 20$ , teremos uma função a qual chamaremos de  $f_1$ . No segmento BC (quando  $20 \leq x \leq 30$ ), teremos uma outra função chamada de  $f_2$ . Por fim, quando a formiga estiver no trecho CD,  $30 \leq x \leq 50$ , teremos outra função denominada  $f_3$ .

Se mantivermos a base do triângulo constante e, conseqüentemente, a altura variável (ou vice-versa), quando  $x$  estiver no intervalo  $0 \leq x \leq 20$ ,  $f_1$  será descrita por  $f_1(x) = \frac{10}{2}x$ . Portanto, ao realizarmos o tratamento algébrico da função, teremos que  $f_1(x) = 5x$ .

Analogamente, calcularemos  $f_2$ . Esta função será representada por uma função constante, já que para qualquer ponto F sobre CD, ou seja, em qualquer valor de  $x$  no intervalo  $20 \leq x \leq 30$ , teremos a mesma medida da altura (20 cm), por este segmento, representado na Figura 16 por EF, ser paralelo ao segmento AB.

Portanto,

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \times 10 \times 20 = 100 \text{ cm}^2.$$

Por fim, quando a formiga estiver no segmento CD, a variação de  $x$  será no intervalo  $30 \leq x \leq 50$ . A altura do triângulo quando o ponto F estiver no segmento CD será o total do percurso menos o quanto a formiga já andou. Então podemos representar esta medida pela expressão  $(50 - x)$ , em que  $x$  indica a soma dos segmentos AB + BC + CF. Assim, a função  $f_3$  estará representada por  $f_3(x) = \frac{10}{2}(50 - x)$ . Realizando o processo de tratamento a fim de simplificá-la, obteremos a função  $f_3(x) = 250 - 5x$ .

Acreditamos que nesta situação, os licenciandos irão resolver com dificuldades, de acordo com o estudo feito por Prada, Hernández e Jaimes (2017) com estudantes de engenharia. É possível que, a princípio, os sujeitos apresentem desconhecimento de princípios básicos de função nessa atividade, tais como domínio e contradomínio e que, por isso, tenham dificuldades na conversão entre os registros de representação gráfica para a algébrica.

Ao solicitarmos aos licenciandos a delimitação dos conjuntos domínio e contradomínio, objetivamos nessa questão o reconhecimento de uma função. Esperamos dos alunos a observação que tanto a forma como a medida da área do triângulo ADF dependem da posição do ponto F, ou seja, do percurso da formiga e

assim, haverá uma relação entre a área da figura (variável dependente) com a medida  $x$  (variável independente). Esse reconhecimento é de fundamental importância para a compreensão do conceito de função. Com isso, a resposta desta questão pode ser obtida a partir da análise do gráfico, através do qual o domínio da função é dada pela relação, representada em linguagem matemática:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 50\}.$$

Em sequência, perguntamos aos licenciandos o que acontece com o domínio quando a formiga estiver nos pontos A e D. Podemos admitir que existirá função nesses pontos?

Para chegar ao resultado, o licenciando deverá recorrer ao conceito de domínio, já discutido entre os grupos no problema anterior, que é o conjunto de valores possíveis para o eixo das abscissas, ou seja, os argumentos em que uma função pode ser definida. Portanto, a função não existirá nestes pontos, pois teremos apenas o segmento de reta AD ao passo que a formiga ainda está no ponto A ou em D. Com isso, deve-se notar que não é possível calcular área por não existir triângulo. Seria possível, ainda, com essa situação, dentro de um contexto da abordagem do Cálculo Diferencial, a introdução e exploração dos conceitos de limite. Portanto, essa é uma resposta admissível, desde que justificada a construção do valor da função no ponto pelo limite.

Acreditamos que alunos apresentarão dificuldades para expressar o domínio da função, assim como constataram Souza, Cordeiro e Moretti (2004). Esses obstáculos estão relacionados a problemas conceituais, que Duval (1995) define como sendo de formação de uma representação semiótica.

Por fim, na última situação, é levantada a seguinte questão: “O que podemos afirmar sobre os conjuntos Contradomínio e Imagem? Eles coincidem? Podem admitir todo e qualquer valor?”

Tal como na situação anterior, na qual os sujeitos precisam lembrar da definição de domínio, o mesmo vamos fazer para os conjuntos contradomínio e imagem. Se o domínio correspondeu ao conjunto de valores possíveis para o eixo das abscissas, o contradomínio, por sua vez, será o conjunto de valores possíveis para o eixo das ordenadas, ou seja, o eixo  $y$ . Numa função  $f$ , para um elemento do contradomínio que se relacionar a um outro no eixo  $x$  chamaremos esse valor de

imagem. Portanto, ao conjunto imagem definimos como sendo um subconjunto do contradomínio em que se apresentam os valores correspondidos de  $x$ .

Analisando o gráfico, percebemos que o contradomínio da função será todo o conjunto dos números reais positivos. Portanto, escrevemos através da representação em linguagem matemática este conjunto:  $CD(f) = \mathbb{R}^+$ , onde  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ . Já o conjunto imagem está compreendido no intervalo  $0 < \square(\square) < 100$ . Ou seja, utilizando a representação em linguagem de conjuntos para responder podemos dizer que  $Im(f) = \{\square \in \square \mid 0 < \square < 100\}$ . Mais uma vez salientamos a inexistência de área nula, por isso nem o zero e nem o 100 não fazem parte do conjunto imagem. Os estudantes devem concluir, então, ante o raciocínio explicitado anteriormente, que os conjuntos contradomínio e imagem não coincidem.

Esta é também uma situação, como proposta por Duval (1995), de formação de uma representação semiótica. Acreditamos, tal como defendemos quando propomos a situação para mobilização do conceito de domínio, que alunos possivelmente apresentarão também dificuldades para expressar os conjuntos contradomínio e imagem da função. Estas dificuldades foram observadas por Carvalho (2017), os quais segundo a autora, esses conceitos são muito confusos para a maioria dos estudantes.

Quanto ao Modo de Execução da  $Ol_1$ , espera-se ainda que:

- 1) Estudantes interajam com colegas para discutir as habilidades de cada um e se dividirem entre os papéis ou decidirem uma rotação. Pode acontecer de:
  - a. aparecer um líder que decida o papel de cada um;
  - b. cada um decidir qual papel deseja realizar sem sobreposição;
  - c. haver conflito por ou ninguém querer assumir um dos papéis ou mais de um querer;
  - d. o grupo paralisar com a situação;
  - e. um dos alunos assuma os trabalhos com poucas interações dos outros;
  - f. os estudantes interagirem e até trocar de papéis.
  
- 2) O Mediador interferirá nos casos abaixo
  - a. interferir se notar insatisfação;

- b. dirimir o conflito no sentido que eles possam compartilhar o papel;
- c. incentivar que um tome a frente na organização.
- d. incentivar que outros assumam o papel de sistematizar no Gdoc e pesquisar.
- e. Mediador toma notas sobre o que está acontecendo em termos da solução da situação.
- f. interferir com o intuito de não permitir com que o andamento da orquestração instrumental cesse.

Espera-se que a realização da situação proposta favoreça:

- o trabalho em conjunto;
- a mobilização de esquemas de utilização a fim de favorecer o desenvolvimento de instrumentos coletivos de resolução de uma situação matemática;
- a reflexão sobre conceitos correlatos às funções, tais como domínio, contradomínio, imagem, variação aplicados em uma situação geométrica;
- a exposição de dúvidas sobre diferentes aspectos correlatos à função;

### 6.3.2 A Orquestração Instrumental On-line Principal 2

Por fim, a  $Ol_2$  consiste em um trabalho de discussões e reflexões sobre os conhecimentos construídos com a vivência da  $Ol_1$ . Portanto, à medida que os participantes compartilham o que e como fizeram, podem refletir sobre isso e aprender a partir dessa reflexão. Esta atitude também é válida para o formador, uma vez que, utilizando-se das conclusões dos alunos, poderá refletir sobre sua prática e modificá-la.

A duração para as discussões, reflexões e considerações finais na  $Ol_2$  é de 1 hora.

**Situação de formação:** cada grupo deverá apresentar as atividades realizadas na  $Ol_1$  de modo que em seguida sejam discutidos os resultados.

**Classe de situação:** Apresentar em grupo, atividades realizadas em uma orquestração de situação matemática, com os dados obtidos na orquestração anterior.

### 6.3.2.1 Configuração Didática

Na OI<sub>2</sub>, síncrona, os grupos ingressarão em uma sala de aula virtual por videoconferência na plataforma Google *Meet* em que estarão os mediadores, cujo link será disponibilizado na sala de aula do Google Classroom. Neste momento, deverão apresentar oralmente as atividades realizadas na OI<sub>1</sub>, com discussão do grupo, compartilhando o arquivo utilizado para responder à atividade proposta. Ao final das apresentações, será aberta uma roda de debates entre as atividades apresentadas.

#### **Gestão de artefatos:**

1) Para o aluno:

Se por Computador

- Acesso ao Google Meet com microfone, alto falante e câmera em funcionamento.
- Acesso a internet (Banda larga) com navegador.
- Acesso às ferramentas do GSuite.

Se por Celular ou Tablet

- Instalação do app do Google Meet.
- Instalação do app de documento do Google.
- Acesso a internet (Banda larga ou 3G/4G) com navegador.

2) Para o professor:

Se por Computador

- Acesso ao Google Meet com microfone, alto falante, câmera em funcionamento e recurso de gravação da sessão.
- Acesso ao Google Drive com os documentos compartilhados pelos estudantes.
- Acesso a internet (Banda larga) com navegador.

Se por celular ou tablet

- Instalação do aplicativo Google Meet e recurso de gravação da sessão.

- Instalação do aplicativo de documentos do Google.
- Acesso ao Google Drive.
- Acesso a internet (Banda larga ou 3G/4G) com navegador.

A Configuração Didática da OI<sub>2</sub> foi classificada no Quadro 8 abaixo ilustrado:

Quadro 8 - Configuração Didática da OI<sub>2</sub>

Ações	Papel prof + aluno	Tempo	Artefatos
Estudantes entram na sala Geral	Mediadores recepcionam-os na sala do grupo.	5 min	Videoconferência
Cada grupo apresenta sua solução	Estudantes compartilham a tela e apresentam	2 x 10 min	Videoconferência + compartilhamento de tela de um estudante com gdoc
Estudantes e mediadores debatem sobre as soluções, sobre o diferencial promovido pelas soluções para o caso.	Cada mediador faz uma consideração de até 5 minutos	15 min	videoconferência
Finalização da atividade	O pesquisador agradece a todos pela participação, disponibilizando contatos para os estudantes posteriormente terem acesso aos dados da pesquisa posterior à publicação.	5 min	Videoconferência

Fonte: elaborado pelo autor

O quadro 8 apresenta resumidamente a configuração didática dos participantes da OI On-line 2, em que são descritas as ações tanto dos licenciandos quanto do mediador nessa nova etapa da pesquisa. Assim, os grupos retornarão para a primeira sala, onde cada grupo deverá apresentar a resolução da atividade e, em seguida, haver a discussão dos resultados apresentados. O papel do mediador consiste em incentivar a apresentação das soluções, bem como apresentar as dúvidas dos participantes e qual decisão *ad hoc*, se houver, ele tomou para não fazer com que o andamento da atividade fosse interrompido. Tais papéis, tanto dos licenciandos quanto do mediador, serão descritos mais detalhadamente no tópico a seguir.

### 6.3.2.2 Modo de Execução

Por fim, descreveremos o Modo de Execução desta OI:

- 1) Estudantes interajam com colegas em termos de discutir as habilidades de cada um e se dividirem entre os papéis ou decidirem uma rotação. Pode acontecer de:
  - a. aparecer um líder que decida o papel de cada um;
  - b. cada um decidir qual papel deseja realizar sem sobreposição;
  - c. haver conflito por ou ninguém querer assumir um dos papéis ou mais de um querer;
  - d. o grupo paralisar com a situação;
  - e. um dos alunos assuma os trabalhos com poucas interações dos outros;
  - f. os estudantes interagirem e até trocar de papéis.

2) O Mediador interferirá nos casos abaixo

- a. interferir se notar insatisfação;
- b. dirimir o conflito no sentido que eles possam compartilhar o papel;
- c. incentivar que um tome a frente na organização.
- d. incentivar que outros assumam o papel de sistematizar no Gdoc e pesquisar.
- e. Mediador toma notas sobre o que está acontecendo em termos da solução da situação

#### 6.4 ESTRUTURA DE COLETA E ANÁLISE DE DADOS DA OI ON-LINE PRINCIPAL

A coleta de dados é o processo de recolhimento de dados ao passo que são produzidos, sob a estratégia de contribuir para a testagem das hipóteses, como também para realizar a verificação do conhecimento e dos procedimentos a fim de compreender a motivação de ação dos sujeitos. Como técnica, optamos pela observação, a qual, segundo Marconi e Lakatos (2003, p. 190) consiste em “uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utilizar os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade”. Logo, nossa proposta não é ser espectadores dos participantes solucionando as situações propostas, mas nos interessa analisar os fatos e fenômenos os quais pretendemos estudar.

Segundo estas autoras, a observação ajuda o pesquisador a identificar e a obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos não têm consciência, mas que orientam seu comportamento. Acreditamos ser a técnica de observação que compõe a estrutura de coleta de dados em nossa orquestração instrumental On-line proposta, por possibilitar meios diretos e satisfatórios para estudar uma ampla variedade de fenômenos, além de permitir a coleta de dados sobre um conjunto de atitudes comportamentais típicas.

Dentre as modalidades de observação apresentadas por Marconi e Lakatos (2003), utilizaremos a observação não estruturada e a estruturada.

Na observação classificada como não estruturada, as autoras destacam que é uma técnica em que “consiste em recolher e registrar os fatos da realidade sem que o pesquisador utilize meios técnicos especiais ou precise fazer perguntas diretas” (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 191). Para este método, segundo Lucena (2018), “o observador faz registros cursivos (anotações em papel com lápis/caneta etc.), baseados em suas impressões sobre o que vê e percebe” (p.63). Desta forma, não há a interação do observador com os participantes enquanto analisa o andamento do experimento.

A outra técnica que devemos utilizar é a classificada como observação estruturada, realizada em ambientes sob condições controladas a fim de que os participantes respondam a propósitos pré-estabelecidos. Dentre os instrumentos que esse tipo de observação comporta, optamos pela filmagem, em que serão utilizadas para gravar o momento de interação dos estudantes no momento da resolução de situações problema, desde a fase de planejamento até a execução, como também utilizaremos do recurso de captura de tela e fotografia de cadernos com os tracejados oriundos dos esquemas de utilização para resolução da situação proposta.

A filmagem, que consiste no ato de filmar, registrar imagens com impressão de movimento, segundo Belei et al (2008),

Com a filmagem pode-se reproduzir a fluência do processo pesquisado, ver aspectos do que foi ensinado e apreendido, observar pontos que muitas vezes não são percebidos. O vídeo também permite a ampliação, a transformação das qualidades, das características e particularidades do objeto observado (p. 193).

Esta técnica será aplicada na plataforma Google Meet, a qual já possui um recurso próprio para gravação de tela, enquanto os encontros síncronos estiverem acontecendo. Já as capturas de tela ocorrerão com o comando "*Print Screen*" da Microsoft, caso o pesquisador esteja usando computador. As fotografias dos cadernos serão retiradas pelos próprios estudantes e enviadas por e-mail ao autor desta pesquisa.

## 6.5 ASPECTOS ÉTICOS DA PESQUISA

Os experimentos serão realizados em cada estudo no *design* da OI e dependem da autorização dos participantes da pesquisa em fornecer os dados produzidos por eles durante a vivência na OI-On-line, através da aplicação das técnicas de coleta dos dados. Estas técnicas consistem em aplicação de questionário de conhecimento de perfil, captura de tela de computador, vídeo-gravação, observação, fotografias de anotações individuais. Os dados a serem analisados passarão pela concordância dos estudantes garantindo-se a preservação do sigilo e a privacidade dos participantes observados e filmados.

## 7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO ESTUDO PRINCIPAL

Neste capítulo, discutiremos a performance didática da OI On-line Principal, com a análise microgenética dos sujeitos, de modo que possamos atingir os objetivos da pesquisa. Assim, buscaremos caracterizar os esquemas utilizados pelos licenciandos para resolução da atividade proposta sobre funções definida por partes, de modo a revelar a contribuição destes para a gênese instrumental dos licenciandos.

### 7.1 PERFORMANCE DIDÁTICA DA OI ONLINE PRINCIPAL 1

Uma vez manifestado o interesse dos licenciandos em participar da OI On-line Principal, um grupo no aplicativo Whatsapp foi criado a fim de agilizar o diálogo entre os participantes. Assim, após um acordo para melhor data e horário, uma sala de aula virtual no Google Meet foi criada e, tanto o link de acesso quanto o roteiro para participação da atividade, foram disponibilizados nesse grupo e por e-mail. Os licenciandos então foram recepcionados e os dispositivos, como alto-falantes, microfones e câmeras, sendo testados. O sujeito A4 comentou que sua conexão com a internet não estava estável, ausentando-se durante boa parte da execução da orquestra. A decisão *ad hoc* do mediador foi esperar o licenciando retornar, aguardando um período de tempo de 5 minutos para cada queda de conexão. Enquanto isso, nas gravações, pode-se perceber que o licenciando A3 continuou mobilizando os esquemas a fim de desenvolver mecanismos de resolução da atividade proposta.

O mediador compartilhou a tela com o arquivo do GDoc contendo o *roteiro*, de modo a apresentar aos sujeitos as informações para resolução da atividade. Em seguida, abre um quadro interativo compartilhado, o Jamboard, disponível no próprio *Google Meet*, por meio do qual os estudantes solucionaram a atividade proposta.

Antes de iniciar a resolução da atividade, os licenciandos fizeram a divisão dos papéis, em que A4 decide ser o executor e, conseqüentemente, A3 passa a ser o redator.

Ao iniciar a leitura do enunciado, o licenciando A4 apresentou dificuldades técnicas de conexão com a internet. Assim, A3 deu continuidade com a leitura do enunciado, evocando esquemas para construir a interpretação da situação. Quase 30

minutos depois de iniciada a OI On-line Principal, a conexão de internet do licenciando A4 se estabilizou e, então, a resolução da atividade ocorreu sem mais interrupções.

No início do estudo, observou-se que os licenciandos não perceberam que tanto a forma como a medida da área do triângulo ADF dependiam da posição do ponto F e, conseqüentemente, da medida x. Por isso, eles não identificaram a existência de três funções de área diferentes para o triângulo ADF, o que acarretou na mediadora uma decisão *ad hoc* de intervenção a fim de não atrapalhar o andamento da orquestração. Em seguida, não manifestaram dificuldades no esboço das leis de formação das funções da área do triângulo que haviam desenhado.

A execução da OI On-line Principal nos mostrou que as alterações realizadas a partir das análises da OI On-line Preliminar tornaram o enunciado mais compreensível, fazendo com que o mediador não interviesse com decisões *ad hoc* por falta de compreensão das perguntas.

### **7.1.1 Análise microgenética da OI On-line Principal 1**

A OI On-line Principal foi desenvolvida partindo do pressuposto que favoreceria a realização da situação sobre funções, de modo que a gênese instrumental relativa aos artefatos simbólicos dos sistemas de representação semióticos dos licenciandos fosse observada.

Dessa forma, o vídeo produzido decorrente da gravação, com duração de 1h 10min, foi assistido reiteradas vezes, para a criação de um índice de eventos. Este permitiu listar trechos correlatos aos eventos, de modo a facilitar a análise no sentido de verificar não somente as discussões dos licenciandos durante a resolução da situação, como também as articulações entre diferentes registros de representação semiótica de funções matemáticas.

O índice de eventos criados, conforme descrito anteriormente pode ser verificado no Quadro 8. Em sua primeira coluna está apresentado o quantitativo de eventos selecionados, enquanto que, na segunda, estão especificados os eventos e na terceira, o intervalo de tempo decorrido em cada evento.

Evento	Síntese do Evento	Intervalo de tempo
1	Interpretação do enunciado	7:10 - 8:57
2	Esboço do triângulo ADF	9:10 - 9:56
3	Traçado de elementos algébricos da figura	10:10 - 10:19
4	Construção da fórmula da função de área do triângulo ADF, com F entre A e B	10:37 - 11:24
5	Intervenção da mediadora na construção do triângulo ADF	11:49 - 17:48
6	Construção da fórmula da função da área do triângulo ADF, com F entre B e C	18:00 - 35:48
7	Construção da fórmula função da área do triângulo ADF, com F entre C e D	36:48 - 46:12
8	Construção do gráfico	49:03 - 55:32
9	Distinção dos conjuntos domínio, contradomínio e imagem	55:49 - 1:06:17

Fonte: elaborado pelo autor

Uma vez construído o índice de eventos, damos início a transcrição das falas dos licenciandos. A análise dos eventos foi feita em seguida, com base na teoria dos registros de representação semiótica, descrevendo-os e colocando a transcrição das falas dos licenciandos relacionadas ao evento em discussão.

A fim de nortear as discussões dos eventos à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, trazemos no quadro 9 o índice de eventos com um dos aspectos descritos por Duval (2012). Na TRRS, este autor traz a atividade cognitiva, objeto de estudo deste trabalho, classificadas por ele como atividades de reconhecimento, tratamentos e conversões entre registros de representação semiótica.

Quadro 9 – Detalhamento dos eventos pela classificação das atividades cognitivas fundamentais

<b>Evento</b>	<b>Síntese do Evento</b>	<b>Atividade Cognitiva Fundamental</b>
1	Interpretação do enunciado	Conversão entre registro em linguagem natural para o registro figural
2	Esboço do triângulo ADF	Tratamento figural
3	Traçando elementos algébricos da figura	Conversão do registro figural para o registro algébrico
4	Função de área do triângulo ADF, com F entre A e B	Tratamento algébrico
5	Intervenção da moderadora na construção do triângulo ADF	Tratamento do registro figural
6	Função de área do triângulo ADF, com F entre B e C	Conversão do registro figural para o registro algébrico
7	Função de área do triângulo ADF, com F entre C e D	Conversão do registro figural para o registro algébrico
8	Construção do gráfico	Tratamento do registro gráfico
9	Distinguindo os conjuntos domínio, contradomínio e imagem	Identificação e reconhecimento do conceito de função

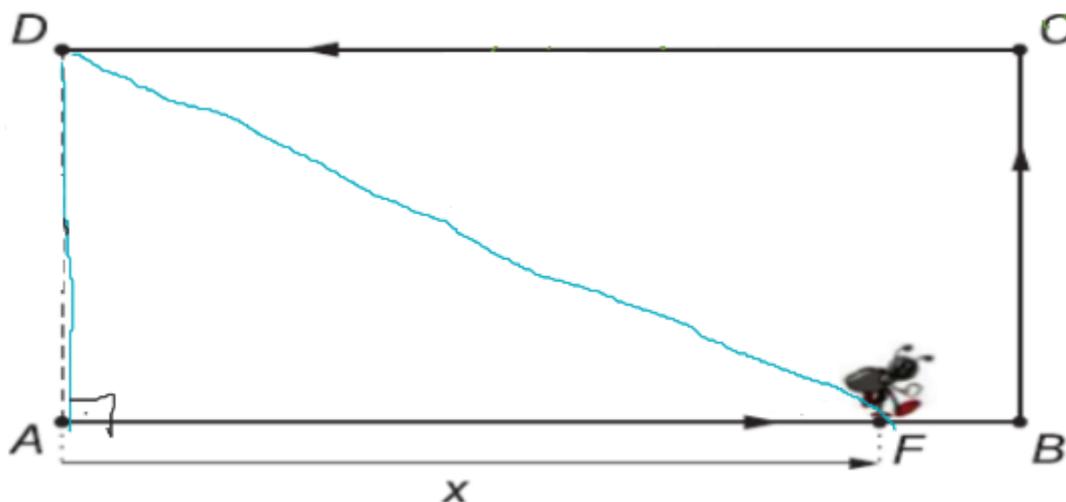
Fonte: elaborado pelo autor

O primeiro evento identificado a ser analisado emergiu do início da atividade e diz respeito à conversão do registro em linguagem natural, advindo do enunciado para o registro figural, proposto na figura do problema. No início da atividade, ao passo que a conexão com a internet do licenciando A4 não permitia uma efetiva interação entre os licenciandos, o estudante A3 começou a mobilizar seus esquemas na tentativa de compreender o problema.

*A3 (7:37) Certo, então pelo que eu entendi, a gente vai relacionar essa distância daqui (indicando AF) com a área desse triângulo aqui...*

Assim, A3 esboçou um desenho de um triângulo ADF, conforme apresentado na figura 37.

Figura 37 - Esboço do triângulo feito pelo licenciando A3



Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

Observou-se neste primeiro evento que a conversão a partir do registro em linguagem natural (enunciado), para o registro figural transcorreu sem dificuldades, após a modificação realizada no enunciado a partir dos resultados do estudo preliminar. No entanto, a leitura e interpretação do enunciado, caracterizados nos dois primeiros eventos deste estudo, mostraram que para os licenciandos, só há um triângulo ADF na situação, quando a formiga encontra-se no segmento AB do trajeto. Esta constatação fez com que houvesse intervenção da mediadora na situação, como mostraremos mais à frente, a fim de que a orquestração não fosse prejudicada.

Ao continuarmos a análise microgenética da transcrição da fala do licenciando A3, encontramos um segundo evento, em que percebemos a mesma utilização do teorema em ação evocado no estudo preliminar, por parte do licenciando A2. Logo, ambos os sujeitos levantaram a necessidade de aplicação do teorema de Pitágoras para determinação do lado DF, conforme a transcrição da fala a seguir.

*A3 (8:57) Aí ele quer que a gente faça o gráfico de quanto a formiga andou em relação à área desse triângulo azul que eu fiz*

*A3 (9:10 - 9:30) O que eu tava pensando é: a gente conhece esse lado daqui (movendo o cursor do mouse em AD), esse daqui (DF) a gente consegue determinar por Pitágoras... então a gente vê em que expressão isso leva e baseado nisso a gente faz o gráfico...*

Os invariantes operatórios ora evocados pelo licenciando A3 apresentam a conversão do registro em linguagem figural para o registro algébrico, de modo a

apresentar a função de área do triângulo ADF a partir da figura dada. No entanto, acredita-se que, ao se deparar com a variável  $x$  na figura da situação, o licenciando A3 deduziu que deveria ser utilizado o Teorema de Pitágoras para que fosse calculada a medida do lado que está faltando, para então ser calculada a área solicitada.

O que podemos destacar do que fora exposto anteriormente é o fato dos licenciandos, tanto A2 no estudo preliminar, quanto o A3 neste presente estudo, terem sido influenciados ao se depararem com um triângulo retângulo e uma letra indicativa de variável, o que os remete à apreensão perceptiva da figura. Destacamos como fatores que exercem esta influência: o tipo do triângulo, retângulo, por ter visivelmente um ângulo reto, dada a figura ABCD ser um retângulo e a presença da variável  $x$ . Estes elementos fazem com que venham à tona espontaneamente os invariantes operatórios, como o teorema em ação, para a aplicação do Teorema de Pitágoras. Isto porque, a impressão inicial descrita anteriormente, quando nos deparamos com uma figura, é a apreensão perceptiva desta representação que precisa ser levada em conta quando pretendemos resolver um problema que envolve geometria. Por isso, é preciso perceber que figura geométrica é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir do que é dito e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes (MORETTI; BRANDT, 2005).

Uma vez realizado o tratamento da figura no evento anterior, o licenciando A3 inicia então um novo evento, de modo a levantar elementos para descrever as funções de área que representam o problema. Portanto, o evento 3 é caracterizado pela conversão do registro figural para o registro algébrico.

A caracterização do registro algébrico é marcada pela transcrição descrita a seguir:

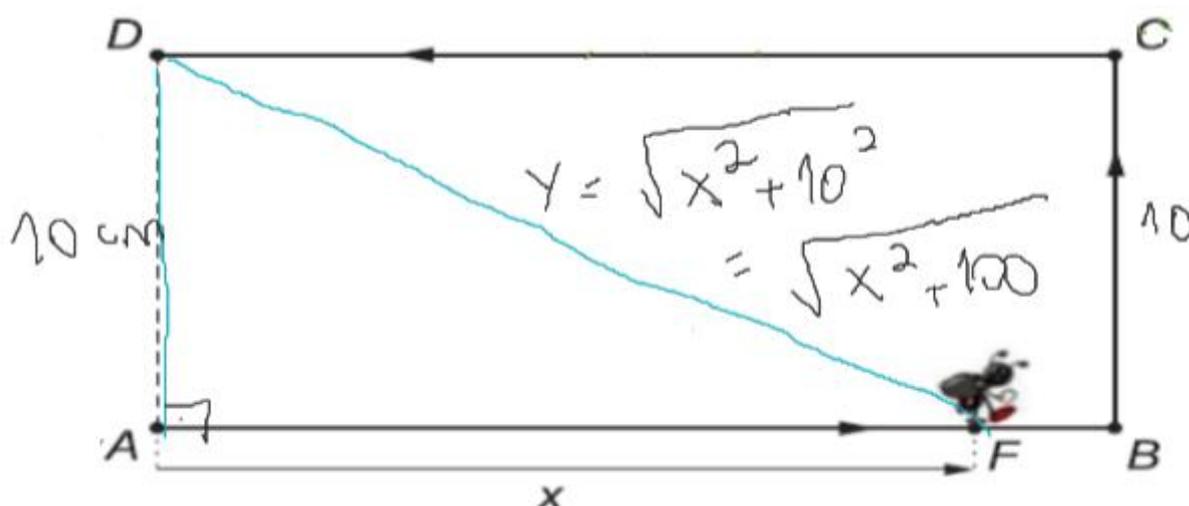
*A3 (10:10 - 10:13) Então, basicamente, a gente tem que ver é que expressão a gente vai ter pra ver como a gente vai expressar o gráfico.*

Duval (2011, p. 127) afirma que: “A existência de muitos registros permite a mudança de um deles e a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada”. Dessa forma, apesar do licenciando A3 ainda estar levantando subsídios para resolução da questão,

a partir da fala anteriormente apresentada, ressalta-se que a conversão do registro figural para o registro algébrico ocorreu quase espontaneamente. Assim, como veremos no próximo evento, a existência de muitos registros auxiliou o participante da pesquisa a organizar sua interpretação e selecionar os esquemas que ele irá utilizar para resolver a atividade.

O evento 4 é marcado pelo tratamento algébrico dos elementos apontados anteriormente. Desta forma, o licenciando A3 realiza o cálculo do segmento DF, caracterizado pela hipotenusa do triângulo ADF (figura 38).

Figura 38 - Triângulo feito pelo licenciando A3 com cálculo do segmento DF



Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

Porém, ao passo que o licenciando realizava o tratamento algébrico para o cálculo da hipotenusa, a qual chamou de  $y$  na figura 36, como apresentaremos na transcrição a seguir, o participante conclui que esta informação não seria útil para a resolução do problema.

*A3 (10:37) Então  $y$  (DF) vai ser a raiz de  $x$  ao quadrado mais 10 ao quadrado  
A3 (10:55) Se bem que não vai ser nem necessário porque a área vai ser só a base vezes altura... mas a gente deixa isso daí (indicando para o cálculo do segmento DF representado, pelo licenciando, por  $y$ ).*

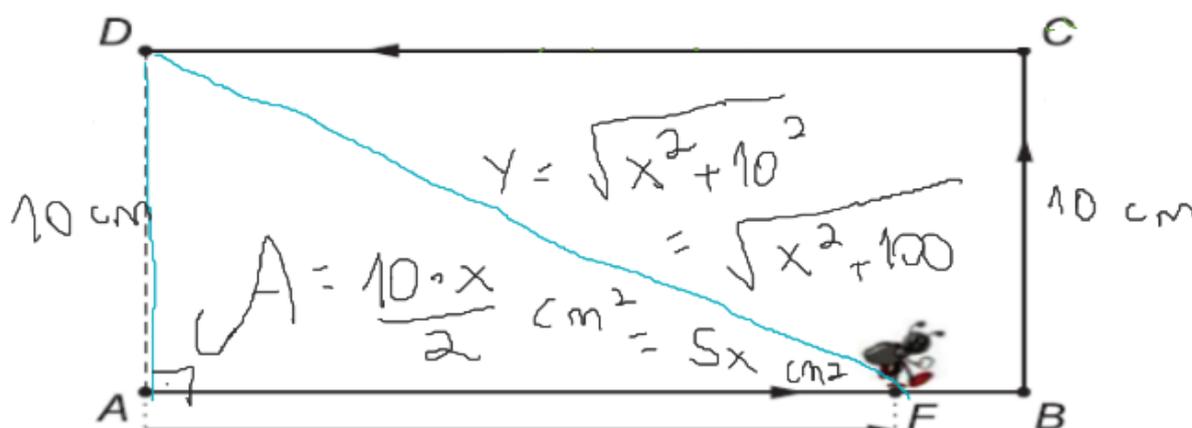
A3 utilizou o teorema de Pitágoras para uma situação específica, como já descrito anteriormente, ante ao objetivo de encontrar uma medida que o ajudasse na determinação da função que rege a área da figura. Em seguida, houve a regra de ação que suportou a tomada de decisão de arquivar o esquema que o levou ao uso do referido teorema, baseado na inferência do teorema em ação: “a área vai ser só a

base vezes altura”, o que nos faz observar o surgimento do esquema de utilização, o que dá os primeiros indícios do processo de instrumentalização, que segundo Rabardel (1995, p. 93), “... ocorre quando o sujeito insere o artefato em sua prática na intenção de conhecer suas propriedades, sua interface e funcionalidades, desenvolvendo assim esquemas de uso”.

Em seguida, o licenciando desenvolve no quadro compartilhado o tratamento da função de área, em que chega à lei de formação da função que a rege quando o ponto F estiver sob o segmento AB, conforme ilustra a figura 39. Ao passo que o participante desenvolve o desenho, o pensamento é também oralizado.

*A3 (11:05) Então a área vai ser igual a 10 (cm, vezes) x (cm), dividido por 2 e isso é a mesma coisa que  $5x \text{ cm}^2$ .*

Figura 39 - Tratamento algébrico para determinação de função de área



Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

O evento 4 é finalizado ao passo que o licenciando A3 reconhece o tipo de função da qual está lidando, como pode ser observado na transcrição de sua fala do vídeo:

*A3 (11:24) Então a área é uma função linear e ele quer a relação agora, não é?!*

Inicialmente, um esquema de ação instrumentada a respeito da noção de função foi mobilizado pelo licenciando. O reconhecimento da função apresentado na fala anterior nos dá indícios para inferir que A3 pode estar instrumentalizado em relação ao artefato representação algébrica. Isto porque o licenciando não demonstrou dificuldades em identificar a lei da função, apesar de o enunciado ter contribuído nesse sentido.

No entanto, o sujeito percebeu a área sendo formada apenas enquanto a formiga estava sob o segmento AB, não levando em consideração o triângulo ADF formado nos outros dois segmentos. Isto fez com que a mediadora tomasse uma decisão *ad hoc* de indagar o participante sobre as outras áreas formadas no segmento BC e CD, caracterizando o evento 5. Essa decisão *ad hoc* surgiu de modo a não atrapalhar o andamento da orquestração instrumental, podendo até paralisar a situação em algum momento.

*M (11:49) Eu queria fazer uma pergunta... do A até o D vai ser essa área?*

*A3 (11:57) Como assim?*

*M (12:01) Quando a formiga estiver aqui no x, quando a formiga tiver no trajeto de B a C e quando a formiga tiver no trajeto de C a D...*

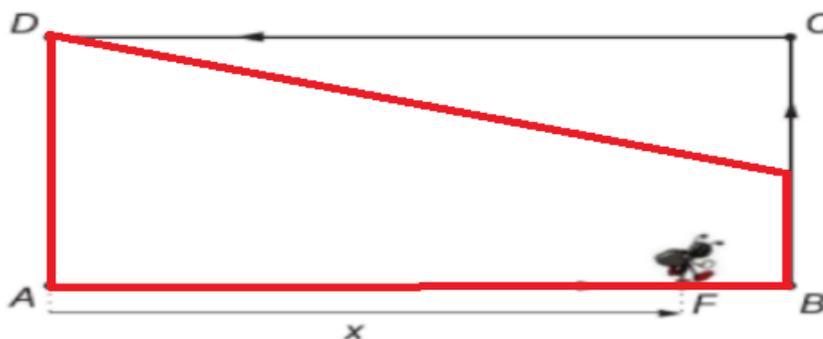
*A3 (12: 12) é... eu não tinha considerado isso, deixa eu dar uma olhada...*

A partir do momento que surge a pergunta da mediadora, o sujeito inicia uma transformação do tipo tratamento da representação figural. Esta transformação pode ser explicitada em sua fala, transcrita a seguir.

*A3 (12:17 - 12:44) quando chegar aqui (apontando para um ponto no segmento BC), aqui não vai ser mais um triângulo... vai ser um trapézio.. então isso tá com a cara de ser uma função... esqueci o nome... que tem mais de uma parte... definida por partes.*

O trapézio, descrito na fala do sujeito, foi uma interpretação baseada no ponto de vista em que considerou-se o vértice B do percurso, como apresentado na figura 40, ao invés de ter apenas limitado o triângulo ADF do qual o problema requisita as funções de área. Ainda na fala do licenciando, destaca-se também mais um invariante operatório do tipo teorema em ação, o qual faz parte de um esquema de uso do sujeito, por meio do qual o licenciando evoca o conceito de função definida por partes.

Figura 40 - Trapézio representado pela fala do licenciando A3



Fonte: o autor

Uma vez que A3 levanta a hipótese de que a figura representada quando a formiga estiver no segmento BC é um trapézio, uma sequência de tratamentos algébricos são realizados verbalmente pelo participante. Estas transformações ocorrem no sentido de encontrar a fórmula geral da função de área quando F está no segmento BC. Essa situação mostrou-se importante pois percebe-se, a partir de sua análise, que estes esquemas utilizados pelo sujeito derrubaram sua hipótese levantada anteriormente, como apresentado na transcrição da fala de A3:

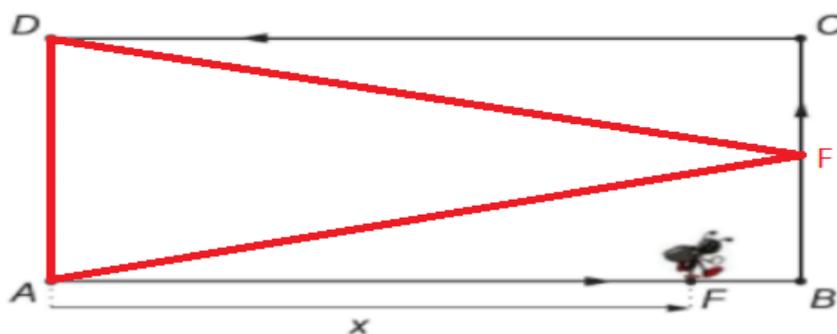
*A3 (17:28 - 17:46) Não, não seria um trapézio não.. porque ele tá considerando apenas um triângulo. Então não seria um trapézio não.. seria um triângulo (desenhando no quadro compartilhado o triângulo ADF no ponto marcado entre B e C)*

*A3 (17:48) Só que aí não vai ser um triângulo retângulo... parece um triângulo isósceles, dependendo do ponto...*

A fala do participante nos remete claramente ao que Duval (2012a) descreve como apreensão do tipo discursiva. Quando A3 remete ao fato da figura a ser projetada no desenho seria um trapézio, observou-se um imediatismo em sua expressão, levando à sua hipótese já descrita anteriormente, vindo a ser refutada por ele próprio. Esta análise nos leva mais uma vez a concordar com Moretti e Brandt (2015), quando alertam ao fato de que uma figura não é o que ela mostra, mas o que é levada a mostrar, em geral, o que está no enunciado.

A reflexão levantada anteriormente nos faz analisar a última fala de A3, em que o licenciando menciona o fato da figura parecer “um triângulo isósceles, dependendo do ponto”. De fato, quando o ponto F estiver no ponto médio do segmento BC, teremos um triângulo desta natureza, como mostra a figura 41.

Figura 41 - Triângulo isósceles definido pelo licenciando A3



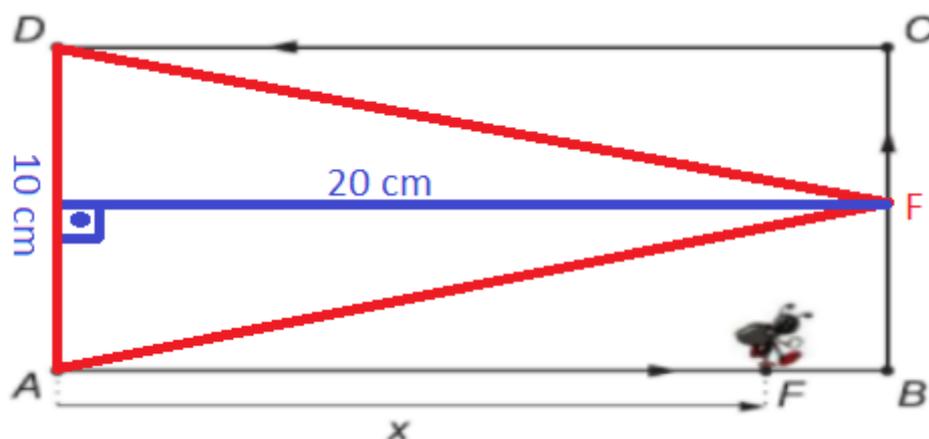
Fonte: o autor

O evento seguinte é caracterizado pela conversão do registro figural para o algébrico, tendo em vista que os licenciandos agora irão apresentar a função de área do triângulo ADF, quando a formiga estiver no segmento BC. O licenciando A3 inicia o evento se perguntando como fazer para calcular a área do triângulo ADF, quando o ponto F está sob o segmento BC, ao mesmo tempo que responde a pergunta feita para si em que a altura mede 20 cm, enquanto que a base mede 10 cm, como pode-se observar na transcrição de sua fala a seguir.

*A3 (18:00) Como vou achar a área? Tenho que baixar uma altura aqui (do ponto entre B e C, traça um segmento perpendicular com AD) e essa altura teria a medida 20 (cm).*

Ilustramos na figura 42 o que o licenciando esboçou em sua fala, como apresentada anteriormente, mostrando o invariante operatório - teorema em ação - em que o sujeito utiliza a área do triângulo de modo a chegar na função de área pretendida pelo problema. Este invariante operatório, mais uma vez, pode ser caracterizado como um esquema de utilização, já que o participante demonstrou a realização da conversão do registro figural para o algébrico, como será apresentado adiante.

Figura 42 - Triângulo desenhado a partir da fala do licenciando A3



Fonte: o autor

Ao contrário do que apresentaram Denardi e Bisognin (2019), em que licenciandos em matemática manifestaram dificuldades no cálculo da medida da área do triângulo que haviam desenhado, o licenciando A3 conseguiu identificar a base e a altura, chegando ao cálculo da área da figura 40 esboçada anteriormente. Além disso, o participante ainda inferiu que independentemente da posição em que o ponto F esteja no segmento BC, os diferentes triângulos ADF formados, terão a mesma área:

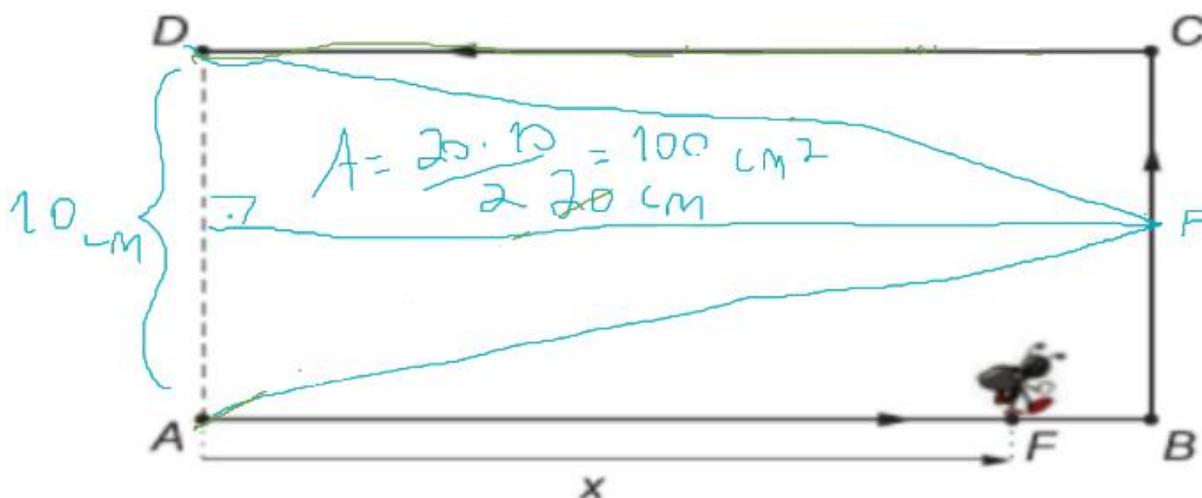
*A3 (18:12) Então aqui (entre B e C) é um triângulo de mesma área independente de onde o x esteja.*

*A3 (18:40) então nesse segmento aqui (BC), não importa onde o x está... os triângulos vão ter sempre a mesma área.*

Assim sendo, o evento é encerrado com os licenciandos realizando o cálculo desta área, ou seja, o tratamento algébrico da função de área e apresentando os cálculos o quadro compartilhado conforme ilustrado na figura 43.

*A3 (35:48) é... aí nesse caso, como a base (AD) mede 10 cm e altura mede 20 cm, a área vai ser 10 cm vezes 20 cm dividido por 2 que seria 100cm<sup>2</sup>, né?*

Figura 43 - Triângulo desenhado pelos sujeitos com cálculo da área



Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

Com a finalização do evento 6, ao passo que os licenciandos encontram a função que descreve a área do triângulo ADF quando a formiga estiver no segmento BC, dá-se início ao evento seguinte, em que os participantes irão descrever a lei de formação da função quando o ponto F estiver entre os pontos C e D. Há, portanto, também, uma caracterização do evento quanto à transformação do tipo conversão do registro figural para o registro algébrico.

O licenciando A3 inicia o evento mobilizando esquemas, conforme observado na transcrição de sua fala, de modo a achar alguma solução para a função de área do triângulo ADF, quando F estiver no segmento CD.

*A3 (36:48 - 38:00) agora quando x está em CD, ele vai estar entre 30 e 50 cm. Nesse caso, deixa eu ver como ficaria o triângulo. Então nesse caso a área seria 5x também, exceto no ponto D. Então a área seria 10 vezes x dividido por 2, que é 5x. Agora tem um detalhe porque nesse caso daqui o x está crescendo e a área do meu triângulo tá diminuindo... então a gente tem que considerar isso de alguma maneira.*

Com base na transcrição apresentada, pode-se observar um esquema de utilização quando o licenciando diz "... nesse caso daqui o x tá crescendo e a área do meu triângulo tá diminuindo...". O referido esquema diz respeito ao conceito de função, do qual o sujeito ainda não apresentou uma apropriação e por isso irá discutir com o licenciando A4 como chegar na função pretendida.

Na pesquisa de Prada, Hernández, e Jaimes (2017), os resultados também apontam que os sujeitos apresentaram dificuldades em realizar esse tipo de

conversão. Os autores alertam para o fato de que muitos estudantes que ingressam no ensino superior, chegam com uma série de conceitos matemáticos que, na maioria dos casos, são imprecisos e levam a dificuldades conceituais em seu aprendizado. Isso pode ser devido, em muitas circunstâncias, à aplicação em sala de aula de um metodologia tradicional que privilegia o uso excessivo do registro de um tipo de representação. As dificuldades conceituais das quais citam Prada, Hernández, e Jaimes (2017) e observadas neste evento entre os participantes é o de função decrescente, sendo aquela cujo valor da variável  $y$  diminui sempre que a variável  $x$  aumenta.

Para solucionar esta pergunta, os participantes deveriam visualizar que a variação de  $x$ , quando o ponto  $F$  estiver no segmento  $CD$ , será o intervalo  $30 \leq x \leq 50$ . Logo, a altura do triângulo será o total do percurso menos o quanto a formiga já andou, podendo esta medida ser representada pela expressão  $(50 - x)$ , em que  $x$  indica a soma dos segmentos  $AB + BC + CF$ . Assim, a função a ser descrita estará representada por  $f(x) = \frac{10}{2}(50 - x)$ . Uma vez que o processo de tratamento seja utilizado a fim de simplificar a expressão, obteremos a função:

$$f(x) = 250 - 5x.$$

Já havíamos previsto que, nesta situação, os participantes iriam dedicar mais tempo para discutir entre eles a solução, como também observado em Souza, Cordeiro e Moretti (2004), por apresentarem dificuldades em resolvê-la. Esta dificuldade se dá ao fato da situação necessitar a mobilização simultânea de invariantes operatórios do tipo teorema em ação, relacionado ao cálculo de área, associado ao esquema de utilização, em que o conceito de função decrescente é requisitado.

Na tentativa de encontrar uma solução, o licenciando A3 demonstra que sua interpretação esbarra em dificuldades no campo da operação discursiva de designação de objetos, de acordo com Duval (2011b), como pode ser observado na transcrição da fala do sujeito a seguir:

*A3 (38:08) (...) aqui ele já andou 30 cm (mostrando o ponto C com o cursor do mouse)... se a gente colocasse aqui 30 menos  $x$ ... não, daria área zero...*

Em Duval (2011b), conhecemos as maneiras de realizar as operações de

designação. Segundo o autor, as designações podem ser diretas, com palavras de uma língua para nomes próprios, substantivos, tempo, entre outros, ou com letras ou símbolos para variáveis, valores desconhecidos, parâmetros, incógnitas, como é o caso da atividade aqui apresentada.

Portanto, elas podem ser compostas a partir da combinação de vários termos, como “o total percorrido menos o que já percorreu”, ou ainda por meio de expressões, tais como “ $50 - x$ ”, para designarmos o percurso da formiga dentro da atividade.

Com o prosseguimento das discussões, os participantes chegaram ao entendimento de que a expressão algébrica que representa o percurso da formiga é o que explicamos anteriormente, conforme pode-se observar no diálogo entre os sujeitos:

*A3 (44:10) Será que é assim, A4? E se ao invés da gente considerar o  $x$ , considerar a parte que falta? Aí, por exemplo, aqui (AB) é 20 mais 10 (BC) mais 10 (CF) dá 40.. ai seria os 40 menos  $x$  que tu disse antes... mas porque não deu certo da outra vez? Por causa do ponto C, né?*

*A4 (45:30) não é 40 não.. é 50*

*A3 (45:35) 50?*

*A4 (45:39) sim... por que não é 20, 10 e 20 (AB, BC, CD respectivamente)? Então vai ser 50 menos  $x$ .*

Ao passo que discutiam sobre a resolução do problema proposto, um desenho era esboçado no quadro compartilhado, como apresentado na figura 44.



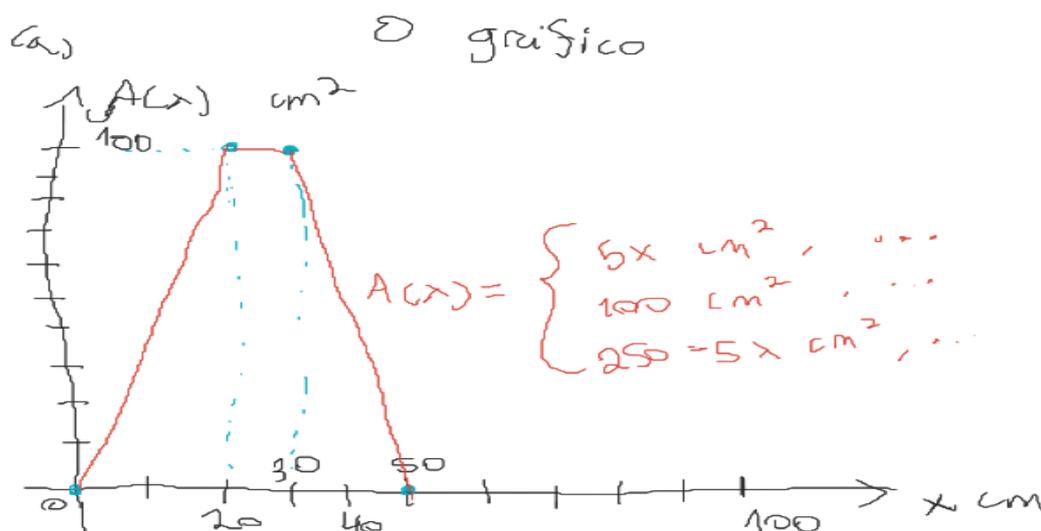
Eles deixam de traçar o gráfico, para construir o gráfico a partir de sua descrição algébrica.

O evento começa com os estudantes mobilizando esquemas de utilização do tipo gráfico, em que discutem sobre a escala que será utilizada para a sua construção.

*A3 (49:03) a gente já tem as expressões para fazer o gráfico. Vamos precisar de 50 "negocinhos", mas aí podemos fazer de 10 em 10 (unidades). A área máxima será quando tiver nesse segmento aqui, que vai ser 100.*

O "negocinho" do qual o sujeito se refere, está relacionado às unidades das quais os eixos serão compostos. Assim, consoante diálogo com o licenciando A4, A3 esboçou o gráfico no quadro compartilhado, conforme apresentado na figura 45.

Figura 45 - Traçado do gráfico realizado pelos sujeitos no quadro compartilhado



Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

Por fim, a última pergunta do problema apresentado na letra b requer que os licenciandos apresentem a delimitação dos conjuntos domínio e contradomínio. Então, os sujeitos dialogaram afirmando que, para traçar o gráfico, era necessário a delimitação desses conjuntos. Assim, escrevem o quadro compartilhado aquilo que já outrora, informalmente, fizeram, como apresentado na figura 46.

Figura 46 - Delimitação do conjunto domínio, realizado no quadro compartilhado

$$A(x) = \begin{cases} 5x \text{ cm}^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 20 \text{ cm} & f_1 \\ 100 \text{ cm}^2, & \text{se } 20 < x \leq 30 \text{ cm} & f_2 \\ 250 - 5x, & \text{se } 30 < x \leq 50 \text{ cm} & f_3 \end{cases}$$

Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

O nono e último evento é marcado pela atividade de reconhecimento do domínio da função. Na concepção da teoria dos registros de representação semiótica, este problema trata de uma atividade de reconhecimento, de modo que, para chegar ao resultado, o licenciando deverá recorrer ao conceito de domínio. Assim, entende-se como domínio o conjunto de valores possíveis para o eixo das abscissas, ou seja, os argumentos em que uma função pode ser definida. No entanto, nos pontos A e D a função ganha uma particularidade, posto que o triângulo deixa de existir, já que teremos apenas um segmento de reta e, portanto, não haverá área, conclusão esta que os estudantes estão de acordo, conforme pode-se visualizar na transcrição do diálogo.

*A3 (1:01:00) Quando a formiga está nos pontos A e D, a área de x é igual a zero. Existe alguma função? No caso, existe... mas como eu escreveria isso aqui?*

*A4 (1:01:30) Qual seria a função?*

*A3 (1:01:35) É a função que a gente já achou... mas o que está me confundindo é só a parte da escrita.*

Logo, os licenciandos se deparam com uma situação em que existe uma indefinição do conceito de área, pois quando a formiga estiver nos pontos A e D, o ponto F coincidirá com um desses dois pontos. Conseqüentemente, teremos um segmento de reta AD, inexistindo, por sua vez, o triângulo ADF e, com isso, não haverá área. Tal observação foi apresentada pelo licenciando A4 e transcrito a seguir.

*A4 (1:01:45) eu fiquei pensando que, quando (a formiga) estivesse nos pontos A e D, não faria nem sentido falar em área porque não seria definido um triângulo.*

Assim, esperávamos dos licenciandos que o domínio da função fosse dado pela relação, representada em linguagem matemática  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 50\}$ , em que nem o 0 e nem o 50 participam do domínio justamente por representar os pontos A e D. Logo, a função não existiria nestes pontos pela razão dada anteriormente.

Entretanto, um dado nos chamou a atenção, pois o licenciando A3 levantou um invariante operatório do tipo conceito em ação, por meio do qual o sujeito defende que pode sim haver função nestes pontos, tendo em vista a existência de um triângulo degenerado na situação.

*A3 (1:02:04) (...) você poderia também argumentar que seria meio que um triângulo degenerado, sabe? Quando eu vou descendo, descendo a altura dele até ele virar só a base, um segmento. Aí, nesse caso, acho que faz mais sentido essa segunda interpretação.*

Havíamos previsto a solução sob o ponto de vista do cálculo diferencial, em que os licenciandos recorreriam ao conceito de limites e, com isso, a degeneração do triângulo é considerado como resultado desta operação. Isto porque, segundo a definição trazida pelo Wikipedia<sup>4</sup>, um caso degenerado é um caso limite no qual uma classe de objeto altera sua natureza para aproximar-se muito a um objeto de outra classe, normalmente, mais simples. Assim, um triângulo será degenerado, partindo do ponto de vista apresentado anteriormente pelos sujeitos, quando os três vértices forem colineares. Há, entretanto, que se destacar, que neste caso, dois dos três vértices são coincidentes, fazendo com que tenhamos um segmento de reta com os pontos A e D.

A essa degeneração, Duval e Moretti (2018) dão o nome de desconstrução dimensional e, de acordo com os autores, pode ser entendida como visualizar uma figura 2D e vê-las como configurações de unidades figurais 1D ou 0D. Duval (2011) destaca que esta mudança de olhar é um salto cognitivo considerável, pois é contrária ao reconhecimento automático das formas, em que a unidade figural da dimensão superior se impõe de modo imediato à percepção. Brandt, Moretti e Novak (2018) complementam ainda que a desconstrução dimensional refere-se ao reconhecimento das unidades figurativas de menor dimensão. Neste raciocínio,

---

<sup>4</sup> Disponível em [https://pt.wikipedia.org/wiki/Degenera%C3%A7%C3%A3o\\_\(matem%C3%A1tica\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Degenera%C3%A7%C3%A3o_(matem%C3%A1tica))

destacamos que um triângulo, sendo uma unidade 2D decompõe-se em unidades menores de 1D, os segmentos de reta.

Por fim, pergunta-se aos licenciandos sobre a relação entre os conjuntos contradomínio e imagem. Esta atividade requeria dos sujeitos a definição desses conjuntos. Logo, o contradomínio será o conjunto de valores possíveis para o eixo das ordenadas, enquanto que o conjunto imagem definimos como sendo um subconjunto do contradomínio em que se apresentam os valores correspondidos de  $x$ .

Uma vez analisado o gráfico da função, percebemos que o contradomínio da função deste problema será todo o conjunto dos números reais, afirmação a qual os licenciandos também concordam, de acordo com a transcrição de suas falas:

A3 (1:04:05) é porque no caso do contradomínio, a gente é quem escolhe... a gente poderia escolher a reta real toda se fosse o caso.

Quando realizamos a análise *a priori*, interpretamos que pelo fato da área ser nula nos pontos A e D, o zero não faria parte do conjunto imagem e, conseqüentemente, os conjuntos contradomínio e imagem não coincidiam.

Entretanto, os licenciandos divergiram desta interpretação, chegando à conclusão de que os conjuntos contradomínio e imagem coincidem, conforme podemos observar a seguir.

A4 (1:06:23) *Contradomínio e imagem coincidem?! Bem, da maneira que a gente construiu aí, sim.. né?! (após A3 concordar, ele prossegue) Se for levar isso em consideração...*

A3 (1:06:37) *Então eu acho que a gente poderia colocar isso daí, que, da maneira como foi construído, coincidiu.. mas dependendo da escolha do contradomínio, isso nem sempre será verdade.*

Após a interação entre os sujeitos, A3 volta para o quadro compartilhado a fim de escrever o posicionamento deles em relação à situação proposta sobre os conjuntos contradomínio e imagem, cuja imagem foi apresentada na figura 47.

Figura 47 - Descrição da resposta dos sujeitos sobre a relação entre os conjuntos contradomínio e imagem, realizado no quadro compartilhado

d) O que podemos afirmar sobre os conjuntos Contradomínio e Imagem? Eles coincidem?

Da maneira que foi escolhido o(s) contradomínio(s), coincide. Mas dependendo da escolha de contradomínio, isso se torna falso.

$$\text{Ex: } \text{CD} = \mathbb{R}$$

Fonte: dados da pesquisa do autor (2021)

Esta é também uma situação, como proposta por Duval (1995), de formação de uma representação semiótica. Acreditamos, tal como defendemos quando propomos a situação para mobilização do conceito de domínio, que alunos possivelmente apresentariam dificuldades para expressar os conjuntos contradomínio e imagem da função, o que não veio ao caso.

### 7.1.2 Análise microgenética da OI On-line Principal 2

A OI On-line Principal 2 foi desenvolvida com o intuito de observar a influência do artefato sistema de registros de representação semiótica na realização da situação sobre funções. Isto nos permitiu analisar o processo de instrumentalização, ao passo que a gênese instrumental relativa aos artefatos simbólicos é evidenciada.

Dessa forma, a segunda parte do vídeo produzido decorrente da gravação, com duração de 1h 15 min, foi assistida reiteradas vezes, de modo a contribuir para a criação de um índice de eventos. Com isso, listamos trechos correlatos aos eventos de modo a facilitar a análise no sentido de verificar não somente as apresentações e discussões dos licenciandos durante a explicação da resolução da situação, mas também de como articularam os diferentes registros de representação semiótica.

O índice de eventos criados pode ser verificado no Quadro 10, em que na primeira coluna está apresentado o quantitativo de eventos selecionados, cuja numeração se dá em continuação aos eventos criados na OI On-line Principal 1, enquanto que, na segunda, estão especificados os eventos e na terceira, o intervalo de tempo decorrido em cada evento.

Quadro 10 – Índice dos eventos selecionados da OI On-line Principal

<b>Evento</b>	<b>Síntese do Evento</b>	<b>Intervalo de tempo</b>
10	Interpretação do enunciado	2:10:18 - 2:11:00
11	Influência da intervenção da mediadora	2:11:00 - 2:11:54
12	Retomada da interpretação do enunciado	2:11:54 - 2:14:09
13	Dificuldade na interpretação do enunciado (A4)	2:25:06 - 2:31:40
14	Resumindo a atividade	2:31:40 - 2:34:49
15	Questionamento sobre dúvida referente à fixação do ponto F	2:34:49 - 2:37:34

Fonte: elaborado pelo autor

Uma vez construído o índice de eventos, damos início a transcrição das falas dos licenciandos. A análise dos eventos foi feita em seguida, com base na teoria dos registros de representação semiótica, descrevendo-os e colocando a transcrição das falas dos licenciandos relacionadas ao evento em discussão.

A fim de nortear as discussões dos eventos à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, trazemos no Quadro 11 a seguir o índice de eventos com um dos aspectos descritos por Duval (2012). Na TRRS, este autor traz a atividade cognitiva, objeto de estudo deste trabalho, classificadas por ele como atividades de reconhecimento, tratamentos e conversões entre registros de representação semiótica.

Quadro 11 – Detalhamento dos eventos pela classificação das atividades cognitivas fundamentais

<b>Evento</b>	<b>Síntese do Evento</b>	<b>Atividade Cognitiva Fundamental</b>
10	Interpretação do enunciado	Conversão do registro figural para o algébrico
11	Influência da intervenção da mediadora	Tratamento figural
12	Retomada da interpretação do enunciado	Conversão do registro figural para o registro algébrico
13	Dificuldade na interpretação do enunciado (A4)	Conversão do registro figural para o algébrico
14	Resumindo a atividade	Reconhecimento de função
15	Questionamento sobre dúvida referente à fixação do ponto F	Reconhecimento de função

Fonte: elaborado pelo autor

Após os licenciandos retornarem das salas virtuais com suas duplas, se reencontraram no grande grupo. Analisaremos as apresentações realizadas pela dupla 1 composta pelos licenciandos A3 e A4. Desta forma, o décimo evento identificado na OI On-line Principal e o primeiro desta OI On-line 2 emergiu do início das apresentações. Diante da sub-situação de “Modelar a lei de formação da área em função do deslocamento de  $x$ , tendo por base o enunciado e a representação figural”, o licenciando A3 no evento 10 utiliza a conversão do registro figural para o algébrico, para apresentar a resolução da situação. Com tal objetivo ele analisa a figura (triângulo ADF) formado quando F está entre A e B e constrói a fórmula de sua área, utilizando a fórmula da área do triângulo retângulo como o produto dos catetos dividido por dois, um invariante operatório do tipo teorema em ação, conforme pode-se analisar na transcrição de sua fala a seguir.

*A3 (2:10:18) (...) a gente tinha visto que quando a formiga está nesse segmento AB, eu consigo fechar um triângulo retângulo daqui. E aí eu consigo calcular a área aqui, que foi  $5x$ .*

Observa-se, a partir da análise da fala anterior, que o sujeito evocou um esquema de ação instrumentada já existente que utiliza a conversão do registro figural para o registro algébrico como sua regra de ação. Tal esquema o ajudou a encontrar

a solução para a atividade proposta na OI On-line Principal 1, quando precisou descrever as representações algébricas da função definida por partes que compõem o problema.

Dando continuidade à sua explicação, o participante explica que foi questionado sobre a existência de apenas uma função para o todo segmento por onde a formiga esteja ao longo de seu trajeto. A esta parte de sua explicação, daremos início ao evento 11, em que percebemos na fala do sujeito uma outra transformação em seu discurso - o tratamento da figura.

*A3 (2:11:00) Aí nessa hora a gente tava assumindo que isso permaneceria assim, para toda posição da formiga nesse retângulo aqui. Sendo que com a intervenção da mediadora, a gente percebeu que quando a formiga estiver no segmento BC, já não vamos ter mais um triângulo retângulo. (...)*

Mais uma vez é possível perceber que o sujeito evoca esquemas de uso já utilizados em seu discurso. No entanto, tendo em vista o reconhecimento do equívoco durante a resolução do problema, percebe-se que este reconhecimento funciona como um esquema de ação instrumentada, como pode ser observado na transcrição de sua fala:

*(...) Aí, inicialmente, eu estava achando, de maneira incorreta, que era um trapézio. Só que isso tava errado, depois tanto A4 quanto eu, conseguimos visualizar que aqui formaria novamente um triângulo e, no caso desse triângulo aqui (desenhando no quadro compartilhado um esboço de triângulo ABF quando F está em BC), a área dele seria sempre constante porque todas as alturas do triângulo formado nesse segmento seriam sempre paralelas ao segmento AB e, por isso, teriam a mesma medida que ele (AB). Então, para todo ponto F nesse segmento BC, a área do triângulo vai ser sempre a mesma.*

O reconhecimento desse equívoco foi importante pois alteraria a característica do gráfico, tendo em vista que a área do trapézio é dada pela semi-soma das bases multiplicado pela altura. Logo, é possível inferir que o estudante A3 está instrumentalizado com o sistema de registros de representação semiótica, já que a noção de propriedades matemáticas no objeto em estudo.

Em seguida dá-se início ao evento 12, em que A3 retoma a explicação da interpretação do enunciado, falando que na última parte do percurso da formiga, o triângulo ADF voltaria a ser retângulo, tal como quando o ponto F estava no segmento AB inicial. Segundo o participante, depois dessas informações, era só encontrar as

representações algébricas das funções para, em seguida, plotar o gráfico. Nota-se, assim, com a análise de sua fala, que os licenciandos não conseguiram construir esquemas de imediato que dessem suporte para a conversão da representação figural para a representação gráfica, por meio de esboço gráfico.

Os licenciandos também evidenciaram a tomada de decisão por mobilizar o invariante operatório - teorema em ação, para efetuar o teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa do triângulo ADF, apesar de depois indicarem a desnecessidade da operação. Essa escolha se deu ao fato de, quando acabaram de ler o enunciado, já terem reparado que o triângulo ADF, quando o ponto F estivesse sob o segmento AB, seria retângulo. Então, dado que eles tinham conhecimento dos lados, é possível conhecer também a hipotenusa? Logo, percebe-se uma motivação algébrica evidente na tomada de decisão dos licenciandos, possivelmente devido ao fato de terem efetuado muitas atividades do tipo tratamento algébrico para calcular um lado oculto em um triângulo retângulo. Há, entretanto, de se destacar que na fala dos autores percebe-se a influência do sistema de registros de representação no ato de decidir sobre o uso ou não do cálculo. Logo, mais uma vez, percebemos um esquema de ação instrumentada, importante no processo de gênese instrumental do sujeito.

O evento 13 é caracterizado por uma constatação que não havíamos percebido durante a resolução da atividade por parte dos licenciandos, em que descrevem terem tido dificuldades durante a leitura e interpretação do enunciado, como pode-se observar na transcrição da fala de A4:

*A4 (2:25:06) Eu, particularmente, tive um pouco de dificuldade no início, na leitura do enunciado para fazer a associação com o retângulo aí, dizendo que era pra considerar F o ponto onde a formiga estava. Mas, olhando para a figura, F estava sobre AB. Então eu não conseguia conceber que F estaria em outro lugar ali do retângulo... Aí eu fiquei um pouco confuso achando que o ponto F estava ali preso em AB, mas depois que eu entendi que F é a formiguinha que ia seguir todo o contorno até chegar em D.*

Essa dificuldade apresentada por A4 ficou mais uma vez evidente, uma vez que já foi constatado no estudo preliminar, devido ao fato de que na descrição do enunciado, há a utilização de dois sistemas semióticos diferentes: a linguagem natural e a figural. No segundo tipo de representação mencionado, há ainda a utilização de léxicos associativos para designar os dados do problema, tais como os pontos A, B,

C e D representando os vértices que formam o retângulo, F simbolizando o local onde a formiga se encontra no trajeto,  $x$  como sendo a medida do percurso deste inseto e cm para designar a unidade de medida, no caso em centímetros.

Tal dificuldade foi sanada com a interação entre os participantes, porém não foi percebida de imediato devido às constantes quedas de conexão que afetaram o licenciando A4. Vale ressaltar, porém, a importância da interação entre os participantes, tendo em vista a observação da mobilização de esquemas individuais, os quais contribuem para os esquemas coletivos. O evento 14 marcou o resumo da atividade realizado pelo participante A4, em que pode-se perceber a importância da interação entre os sujeitos.

*A4 (2:31:40) Eu acho que tem uma coisa muito importante aí e que essa questão atinge esse objetivo, que é de confrontar a ideia que a gente tem em relação a variação da variável. Por exemplo, a gente tem uma resistência a pensar que  $x$  é uma medida fixa, tal como eu inicialmente tinha pensado... quando na verdade esse ponto F varia com a formiga e então essa medida  $x$  tem essa variação, que é justamente o aspecto principal da função. A gente quando lê o enunciado, temos claramente que a formiga anda do ponto A até o ponto D, mas o que dificulta no final da leitura é que a gente tende a fixar o ponto F onde ele está mostrado na figura.*

Após a leitura da transcrição da fala do estudante, percebe-se mais fortemente a evidência da apreensão perceptiva da figura, o que remete ao tratamento da representação figural realizado pelo sujeito, considerando o  $x$  como uma medida fixa. Esta observação pode ser também levada em consideração ao fato de que o licenciando A3, uma vez realizando o tratamento figural, concluiu que deveria ser aplicado o Teorema de Pitágoras, uma vez que a apreensão perceptiva da figura sugeria isso, já que existia um triângulo retângulo e uma medida  $x$ .

Esta observação fica mais evidente a partir da resposta do participante A3 à uma pergunta realizada pela mediadora, cujo diálogo caracterizou o 15º e último evento da OI On-line Principal 2:

*M (2:34:49) uma pergunta que eu queria fazer... vocês argumentaram que com a leitura do enunciado, existe uma tendência para olhar o ponto F fixo. Mas a partir do momento que vocês descrevem a expressão das funções ou fazem o gráfico, o F já deixaria de ser fixo. Vocês fizeram o F variável no segmento AB, mas o que levou vocês a não fazerem nos outros segmentos?*  
*A3 (2:36:35) pelo que entendi da pergunta, é como se a gente tirasse uma foto instantânea do momento e estudasse o que está acontecendo. E depois,*

assumindo que as propriedades se mantêm, a gente meio que modela o comportamento da área. Então eu considero a imagem fixa, para depois considerar a variação.

A conclusão apontada por A3 retoma o que já havia sido levantado nas pesquisas apresentadas por Goldenberg (1988) e Clement (1985), descritos em Gitirana (1999). O licenciando considera que, para análise da representação figural, pode-se considerar a imagem fixa, indo na direção dos resultados levantados pelos autores descritos anteriormente, já que estudantes tendem a interpretar sub-conceitos de função a partir de gráficos, tendo por referência seu formato como uma figura estática.

## 7.2 CONSIDERAÇÕES ACERCA DA OI ON-LINE PRINCIPAL

O presente estudo teve como objetivo caracterizar a gênese instrumental de artefatos simbólicos (a saber, os sistemas de representação semiótica) em uma situação-problema que envolve função definida por partes, desenvolvida por licenciandos de Matemática submetidos a uma Orquestração Instrumental On-line. Para este estudo, participaram quatro pessoas, dos quais três eram licenciandos em Matemática de uma instituição federal e um já era professor. Duas duplas então foram formadas, de modo que analisamos os dados apenas da primeira dupla, cujos participantes foram denominados A3 e A4. A segunda dupla não teve os dados analisados devido ao fato de que um não correspondia ao perfil do público da pesquisa e o outro, licenciando em matemática, estava sem os recursos mínimos para participação na atividade (câmera e microfones em funcionamento).

A fim de dar suporte a este objetivo, uma composição de duas Orquestrações Instrumentais On-line foram planejadas, denominadas OI On-line Principal 1 e OI On-line Principal 2, ambas idealizadas para serem realizadas por meio de encontros remotos síncronos. Na Orquestração Instrumental On-line 1, os grupos ingressaram em salas distintas a fim de resolverem a situação proposta. Em seguida, foi vivenciada a Orquestração Instrumental On-line 2, em que os grupos se reuniram em uma sala única e fizeram a apresentação das soluções da atividade realizada na OI On-line Principal 1, também em reunião síncrona. No fim, foi criado um círculo de discussões entre os participantes.

No estudo principal realizado com os sujeitos pesquisados, constatou-se que A3 estava instrumentalizado em relação à representação algébrica nas primeiras partes da atividade. Isto ficou evidente porque o participante não demonstrou dificuldades em expressar as representações algébricas da função definida por partes, apresentando facilidade também nas atividades de identificação, tratamentos e conversões de registros. Na OI On-line Principal 2, foi possível caracterizar o processo de instrumentalização, quando foi observado o participante construindo esquemas de uso e de ação instrumentada que evidenciaram a transformação do artefato (registros de representação em linguagem gráfica e algébrica) em instrumento por meio do discurso sobre como a atividade foi solucionada. Já o licenciando A4, ele construiu seu processo instrumentalizando-se durante os debates, por meio dos esquemas de atividade coletiva que foram produzidos, sobretudo quando sua conexão com a internet estabilizou.

Esse estudo constatou, portanto, a mobilização dos esquemas de uso, ação instrumental e ação coletiva instrumentada, caracterizando assim o fenômeno da Gênese Instrumental para esses sujeitos. Acredita-se que a resolução das atividades e as aprendizagens daí decorrentes foram favorecidas pelo trabalho em grupo, pelo diálogo com colegas e intervenções da mediadora, pela prática da explicação, pela transformação dos registros de representação, pela resolução colaborativa e pelas discussões realizadas após a atividade.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Teoria das Representações Semióticas (DUVAL, 2009) põe em pauta o papel primordial do funcionamento e da constituição de um sistema de representação que rege a aprendizagem do objeto matemático a ser estudado. Isso torna a teoria de Duval um importante instrumento de pesquisa, já que é possível analisar uma estrutura cognitiva complexa do aluno referente ao aprendizado em matemática.

Porém, analisar as ações e as noções de funções matemáticas que licenciandos em matemática mobilizam quando resolvem uma situação-problema é entender os esquemas que estes sujeitos utilizam para manipular uma determinada ferramenta a fim de resolver esta situação (VERGNAUD, 1990). Nesta concepção, a Abordagem Instrumental de Pierre Rabardel (1995) é a teoria que apresenta as relações entre sujeito, esquemas e artefatos as quais buscamos entender.

Estas relações, por sua vez, ocorrem em processos e estes dependem tanto do sujeito modificar o artefato por meio de esquemas, quanto ao artefato modificar o sujeito, uma vez que o indivíduo irá incorporar esta ferramenta aos seus hábitos de resolução de uma dada situação. Buscamos, em nossa pesquisa, investigar como o estudante cria os seus esquemas para o uso, em nosso caso com os sistemas de representação semióticos, caracterizados por Rabardel (1995) como artefatos simbólicos, para solucionarem uma atividade de funções definidas por partes, em uma Orquestração Instrumental On-line, utilizando tratamentos e conversões.

A metodologia deste estudo compôs-se do desenvolvimento de uma OI On-line, de modo que os dados obtidos por meio dos registros escritos dos licenciandos, tanto à punho quanto no quadro digital compartilhado, pudessem ser analisados juntamente com a gravação das sessões. Foram realizados dois experimentos, denominados estudo preliminar e estudo principal, nos quais os dados obtidos foram analisados por meio da técnica da videografia com a análise microgenética. Nessa análise desenvolvemos um índice de eventos que envolveram tratamentos e conversões entre registros de representação semiótica de função definida por partes, identificados durante a resolução das situações realizadas pelos licenciandos.

O presente estudo teve como objetivo testar a OI On-line proposta, na perspectiva de verificar dificuldades com os artefatos ou atividades, propondo as adaptações pertinentes para a pesquisa principal. Para tanto, foi elaborada uma

atividade que explora representações semióticas de uma função, além de conceitos de função, tais como as noções de variação, domínio e imagem. Participaram da atividade uma dupla de licenciandos de uma instituição federal de ensino superior (IFES).

Diante dessas análises, o estudo revelou que diversas dificuldades foram superadas, mediante intervenção da mediadora, ao longo da implementação e discussão das atividades. De um modo geral, a OI On-line Preliminar possibilitou:

- realização de tratamentos e conversões de diferentes registros de representação, tais como linguagem natural, registro figural e registro algébrico;
- melhor compreensão dos conceitos de domínio e imagem e das implicações desses, no gráfico da função definida por partes no contexto geométrico;
- reconhecimento da correspondência covariacional existente em uma função definida por partes;

Os resultados obtidos no estudo preliminar apontam que tanto a descrição do enunciado quanto às perguntas propostas nas atividades também precisaram de ajustes, para que as dificuldades específicas sobre funções que os estudantes apresentaram ao resolver a atividade fossem minimizadas.

A Orquestração Instrumental On-line proposta no estudo principal foi concebida com o objetivo de dar suporte a um experimento sobre funções no ensino remoto, na perspectiva de favorecer a gênese instrumental dos sujeitos. Assim, planejamos uma composição de duas Orquestrações Instrumentais On-line, denominadas OI On-line Principal 1 e OI On-line Principal 2, ambas idealizadas para serem realizadas por meio de encontros remotos síncronos. Estas orquestrações instrumentais que compõem o estudo principal ocorreram consecutivamente, sem intervalo entre ambas e possuíram finalidades distintas. Cada uma tinha uma situação proposta que deveria ser resolvida pelos estudantes, de modo que uma orquestração daria suporte a seguinte.

Na Orquestração Instrumental On-line Principal 1, os grupos ingressaram em salas distintas a fim de resolverem a situação proposta. Em seguida, foi vivenciada a Orquestração Instrumental On-line Principal 2, em que os grupos se reuniram em uma sala única e fizeram uma apresentação das soluções na OI On-line 1, também em reunião síncrona. No fim, foi criado um círculo de discussões entre os participantes.

O presente estudo teve como objetivo caracterizar a gênese instrumental de artefatos simbólicos (a saber, os sistemas de representação semiótica) em uma situação-problema que envolve função definida por partes, desenvolvida por licenciandos de Matemática submetidos a uma Orquestração Instrumental On-line.

No estudo principal realizado com os sujeitos pesquisados, que são licenciandos em Matemática de uma instituição federal, constatou-se que A3 estava instrumentalizado em relação à representação algébrica nas primeiras partes da atividade. Isto ficou evidente porque o participante não demonstrou dificuldades em expressar as representações algébricas da função definida por partes, apresentando facilidade também nas atividades de identificação, tratamentos e conversões de registros. Na OI On-line Principal 2, foi possível caracterizar o processo de instrumentalização, quando foi observado o participante construindo esquemas de uso e de ação instrumentada que evidenciaram a transformação do artefato (registros de representação em linguagem gráfica e algébrica) em instrumento por meio do discurso sobre como a atividade foi solucionada. Já o licenciando A4, construiu seu processo instrumentalizando-se durante os debates, por meio dos esquemas de atividade coletiva que foram produzidos, sobretudo quando sua conexão com a internet estabilizou.

Esse estudo constatou, portanto, a mobilização dos esquemas de uso, ação instrumental e ação coletiva instrumentada, caracterizando assim o fenômeno da Gênese Instrumental para esses sujeitos. Acredita-se que a resolução das atividades e as aprendizagens daí decorrentes foram favorecidas pelo trabalho em grupo, pelo diálogo com colegas e intervenções da mediadora, pela prática da explicação, pela transformação dos registros de representação, pela resolução colaborativa e pelas discussões realizadas após a atividade.

## 8.1 LIMITAÇÕES DA PESQUISA

Um aspecto a ser considerado como limitação em relação ao estudo aqui proposto, tanto em relação à concepção, desenvolvimento, testes, análises e validação consiste no volume de dados gerados. No Estudo Preliminar, por exemplo, apenas um grupo foi formado, enquanto que, no Estudo Principal, dois grupos foram

formados, mas apenas um grupo foi analisado. A análise de outros grupos seria fundamental de modo a aumentar a precisão das inferências realizadas.

Outro aspecto a ser levado em consideração é o fato dos sujeitos não terem habilidades com recursos tecnológicos de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Durante as discussões na OI On-line Principal 2, foi apresentada uma simulação em que os participantes relataram que o auxílio de *softwares* ajudaria a visualização da situação em múltiplas representações.

Também houve limitações com recursos em relação à conexão com internet e bom funcionamento de microfones e câmeras, por exemplo. O mau funcionamento desses aparatos impediu que mais dados pudessem ser coletados, mais gestos que representassem esquemas durante a realização de operações, por exemplo.

## 8.2 PERSPECTIVAS FUTURAS DE PESQUISA

A utilização da Abordagem Instrumental de Rabardel (1995) permitiu que analisássemos a utilização de artefatos simbólicos nesta pesquisa, como o sistema de registros de representação semióticas em uma atividade sobre função definida por partes em uma Orquestração Instrumental On-line. Há de se destacar, porém, que esquemas são a todo momento utilizados e adaptados, evoluindo, a depender da situação a qual o indivíduo se depara. Durante a análise *a priori*, por exemplo, julgamos que seria mínima a possibilidade de um sujeito em nossa pesquisa utilizar o conceito de limites para resolução da atividade em que perguntávamos o que acontecia com o triângulo ADF nos pontos A e D. Um licenciando, por sua vez, utilizou tal conceito ao interpretar que haveria sim triângulo nestes pontos, sendo que estes seriam do tipo degenerado, podendo, assim, ser objeto de estudos futuros.

Destaca-se, ainda, as outras questões da OBMEP cujo nível julgamos ser mais elevadas para o público com o qual iríamos lidar.

Por fim, uma vez que lidamos com licenciandos nesta pesquisa, é possível que esta seja alicerce para caracterização de gênese instrumental de professores para o ensino de função, uma vez que poderiam ser analisados os esquemas de uso e de ação instrumentada que o professor evoca ao lecionar uma aula sobre funções, vindo

a ser analisados os registros de representação que ele utiliza em sala, bem como as transformações desses registros que foram realizadas para a aprendizagem dos alunos.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, A. A.; OLEGÁRIO, M. L. A utilização da escrita no whatsapp e sua influência na produção de textos escolares do ensino fundamental. **Diálogos Pertinentes** - Revista Científica de Letras, Franca, v. 15, n.1, p. 179 - 200. 2019.
- BELEI, R. A.; GIMENIZ-PASCHOAL, S. R.; NASCIMENTO, E. N.; MATSUMOTO, P. H.V. R. O uso de entrevista, observação e videogravação em pesquisa qualitativa. **Cadernos de Educação**, Pelotas, FaE/PPGE/UFPeI, v. 30, p. 187-199, jan./jun. 2008.
- BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/On-line**, Aracajú, v. 9, n. 1, p. 105-144, 2019.
- BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, Editora UFPR, n. especial, pp. 157-171, 2011.
- BONOTTO, A. K.; BISOGNIN, E. Contribuições de um Objeto de Aprendizagem e dos Registros de Representações Semióticas no Estudo da Função Exponencial. **Renote**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, 2015.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2017. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC\\_19mar2018\\_versao-nal.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versao-nal.pdf). Acesso em: 24 abr. 2021.
- BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na compreensão do sistema de numeração decimal. **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 2, p. 201–227, 2005. ISSN: 1983-3156.
- BURCI, T. V. L.; SANTOS, A. P. de S.; MERTZIG, P. L. L.; MENDONÇA, C. T. M. Ambientes Virtuais de Aprendizagem: a contribuição da Educação a Distância para o ensino remoto de emergência em tempos de pandemia. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 11, n. 2, p. 1–16, 2020
- CAJORI, . **A History of Mathematical Notations**. New York: Dover Publications, Inc, 1993.
- CARVALHO, L. P. de. **Um estudo das concepções de estudantes do ensino médio sobre o conceito de função com base na teoria dos registros de representações semióticas**. 2017. 152 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.

CÉSAR, P. de A. B.; RIBEIRO, A. de F.; MORAES, M. P. Relações Emocionais e seus impactos no ambiente construído pelo confronto entre viajante e morador. **Rosa dos Ventos - Turismo e Hospitalidade**, Caxias do Sul, v. 12, n. 3, p. 1–7, 2020.

COLOMBO, J. A. A; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. In.: **Zetetiké**, Cempem/FE/UNICAMP, v. 16, nº 29, jan./jun. 2008.

Disponível em:

<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8647035>.

Acesso em: 5 fev. 2022.

CONFREY, J.; Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. **Journal of Research in Mathematics Education**, NCTM/EUA, v. 26, p. 66-86. doi:[10.2307/749228](https://doi.org/10.2307/749228)

COSTA, C.; MORETTI, M. T.. A contribuição da teoria dos registros de representação semiótica nas pesquisas científicas brasileiras: tendências e reflexões. In: MORETTI, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck. Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. **REVEMAT**, Florianópolis, 2020. 485 p.

COUTO, E. S.; COUTO, E. S.; CRUZ, I. de M. P.. #Fiqueemcasa: Educação na pandemia da Covid-19. **Interfaces Científicas**, Tiradentes/MG, v. 8, n. 3, p. 200–216, 2020

DENARDI, V. B.; BISOGNIN, E.. Representações Semióticas: Contribuições para o estudo do conceito de função. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Cruzeiro do Sul, v. 10, n. 2, p. 142–159, 2019. ISSN: 2179-426X.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVEMEIJER, K. The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 75, n. 2, p. 213–234, 2010.

DUVAL, R. **Sémiósis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Suisse: Peter Lang, 1995

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática**: Registros de representação semiótica. São Paulo, Papirus Editora, pp.11-33, 2003.

DUVAL, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 61, p.103–131, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1. ed. São Paulo: PROEM Editora, 2011a.

DUVAL, R. Deux regards opposés sur les points critiques sur l'enseignement de l'algèbre au collège (11-15 ans). Palestra proferida no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso em 2011b.

DUVAL, R. ABORDAGEM COGNITIVA DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA EM TERMOS DE CONGRUÊNCIA. TRADUÇÃO: MÉRICLES THADEU MORETTI. **REVEMAT - REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, FLORIANÓPOLIS, V. 7, N. 1, P. 118-138, JAN./JUN. 2012A. DISPONÍVEL EM: <HTTPS://PERIODICOS.UFSC.BR/INDEX.PHP/REVEMAT/ARTICLE/VIEW/1981-1322.2012V7N1P118>. ACESSO EM: 28 JAN. 2021.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012b. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>.

DUVAL, R.; MORETTI, M. T. Temas do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica: significado do que é “fazer”. In: CUSTÓDIO, J. F. ; COSTA, D. A.; FLORES, C. R.; GRANDO, R. C. (Org.) **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica**: contribuições para a pesquisa e ensino.. São Paulo: Ed. LF, 2018

FEITOSA, F. E. da S.; RODRIGUES, R. dos S. Aprendizagem cooperativa baseada em problemas e orquestração instrumental no ensino de cálculo. **REAMEC - Revista da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, v. 9, n. 1, e21030, janeiro-abril, 2021. DOI: <https://doi.org/10.26571/reamec.v9i1.11798>.

FIGUEROA, D. P. S.; OTERO, M. R. Solving Exponential Situations and Conceptualization. **Educação Matemática Pesquisa** : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 17, n. 2, p. 166–189, 2015. ISSN: 1983-3156.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 19, n. 26, p. 1–22, 2006.

FONSECA, V.; HENRIQUES, A. Compreensão da Definição Formal de Limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. **Bolema: Boletim de**

**Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1030–1049, 2018. ISSN: 0103-636X. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a14>.

GITIRANA, V. Funções : aprendizagem e representações. **Mestrado em Educação - UFPE**, Recife, 1999. Disponível em:

[https://www.academia.edu/39796433/Fun%C3%A7%C3%B5es\\_aprendizagem\\_e\\_representa%C3%A7%C3%B5es](https://www.academia.edu/39796433/Fun%C3%A7%C3%B5es_aprendizagem_e_representa%C3%A7%C3%B5es). Acesso em: 10 fev. 2021.

GITIRANA, V.; LUCENA, R. Orquestrações Instrumental On-line: um modelo para o ensino remoto. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597-616, nov. 2021.

GÓES, M. C. R. De. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Cadernos CEDES**, v. 20, n. 50, p. 9–25, 2000. DOI: [10.1590/s0101-32622000000100002](https://doi.org/10.1590/s0101-32622000000100002).

GUTIÉRREZ-FALLAS, L. F.. **A compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função: um estudo com alunos do 12º ano**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação). 156 p. Instituto de Educação - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2016.

GUTIÉRREZ-FALLAS, L. F.; HENRIQUES, A.. A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função.pdf. **Quadrante**, Lisboa, v. 26, n. 1, p. 25–49, 2017.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM,, 2013. 289p.

LUCENA, R. M. S. C. **Mediações Didáticas da Tutoria On-line da Geometria Analítica**: uma análise à luz da orquestração instrumental e das representações semióticas. 2015. 172 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

LUCENA, R.. **Metaorquestração Instrumental**: um modelo para repensar a formação de professores de matemática. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica). 383p. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MACIEL, P. R. C. **A construção do conceito de função através da história da matemática**. Dissertação de Mestrado. 167 p. Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2011.

MACHADO, S. **Uma análise crítica das provas da segunda fase da OBMEP 2014**. 2015. Dissertação. 111 p. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Instituto de Matemática Pura e Aplicada; Rio de Janeiro, 2015.

MARCONI, M.; LAKATOS, E.. **Fundamentos de metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas 2003.

MEIRA, L.. Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. **Temas em Psicologia**, Ribeirão Preto, v. 3, n. 1, p. 59–72, 1994.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597-616, nov. 2015.

MORETTI, M. T.; HILLESHEIM, S. F.. Linguagem natural e formal na semioesfera da aprendizagem matemática: o caso da geometria para a formação do pedagogo. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (em teia)*, Recife-PE, v. 9, n.1, p.1-19, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/viewFile/235848/pdf> Acesso em: 17 fev. 2022

NÚÑEZ, R.; SUÁREZ, C. A.; CONTRERAS, L. Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. **Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias**, Bogotá, Colômbia, v. 12, n. 2, p. 14–31, 2017. ISSN: 2346-4712. DOI: [10.14483/23464712.10491](https://doi.org/10.14483/23464712.10491).

PINHEIRO, T. C. da S.; ALVES, F. J. da C.; SILVA, M. do P. S. C. Da. Aprendizagem matemática no contexto educacional ribeirinho : a análise de registros de representação semiótica em atividade de modelagem matemática. **RBEP - Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 97, n. 246, p. 339–355, 2016.

PIRES, R. F.; BARBOSA, G. dos S. Representações de Função : Uma Análise das Produções de Professores do Ensino Médio. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 13, n. 1, p. 288–306, 2018.

OLIVEIRA, D. P. A.; ROSA, M.; VIANA, M. C. V. De Oresme a Dirichlet: um breve histórico do desenvolvimento das funções. **Revista Brasileira de História da Matemática**, SBHMAT, v. 14, n. 28, p. 47-61, 2014.

PRADA, R.; HERNÁNDEZ, C.A.; JAIMES, L. A. (2017). Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Góndola, Enseñ Aprend Cienc*, 12(2), 14-31. DOI: [10.14483/23464712.10491](https://doi.org/10.14483/23464712.10491).

PRESMEG, N.; RADFORD, L.; ROTH, W.; KADUNZ, G. **Semiotics in Mathematics Education**. [s.l.] : ICME - 13 Topical Surveys, 2016. ISSN: 1368-4973. ISBN: 9783319313696. Disponível em: <http://www.springer.com/series/14352>. Acesso em 10 fev. 2021.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies** ; approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995. 195 p.

RAMOS, A.; FARIA, M. P.; FARIA, A. Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 14, n. 41, p. 17–36, 2014. ISSN: 1518-3483. DOI: [10.7213/dialogo.educ.14.041.ds01](https://doi.org/10.7213/dialogo.educ.14.041.ds01).

ROLFES, T.; ROTH, J.; SCHNOTZ, W. Improving the Covariational Thinking Ability of Secondary School Students. In: UBUZ, B.; HASER, Ç.; MARIOTTI, M. A. (Eds.): Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Ankara, Turkey: Middle East Technical University, 2013, pp. 572–573.

SARAIVA, K.; TRAVERSINI, C.; LOCKMANN, K.. A educação em tempos de COVID-19: ensino remoto e exaustão docente. **Praxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 15, p. 1–24, 2020. ISSN: 18094031. ISBN: 0000000219938. DOI: [10.5212/praxeduc.v.15.16289.094](https://doi.org/10.5212/praxeduc.v.15.16289.094).

SOUZA, R. N. S.; CORDEIRO, M. H. B. V.; MORETTI, M. T. Desenvolvendo o conceito de função linear: análise de uma experiência didática utilizando diferentes registros de representações semióticas. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, p. 19, 2004. ISSN: 1098-6596. ISBN: 9788578110796. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/03/CC84642289968.pdf>. Acesso em 10 jan. 2021.

TROUCHE, L. Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 55, p. 181-197, 2004

TROUCHE, L. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 25, p. 91-138, 2005

UJVARI, S. C.. A história e suas epidemias: a convivência do homem com os microrganismos. **Revista do Instituto de Medicina Tropical de São Paulo**, São Paulo, v. 45, n. 4, p. 212-212, 2003.

VERGNAUD, G. **La Theorie des champs conceptuales**. In Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble: La Pensée Sauvage, v.10, n.23. pp.133-170.1990.

VERGNAUD, G. The theory of conceptual fields. **Human Development**, Jean Piaget Society, v. 52, n. 2, p. 83–94, 2009. ISSN: 0018716X. DOI: [10.1159/000202727](https://doi.org/10.1159/000202727).

VERGNAUD, G. Conceptual development and learning. **Revista Qurriculum**, v. 26, p. 39–59, 2013.

VILELA, A. **Ana Vilela**. 2017. São Paulo: Som Livre, 2017, CD. Faixa 13

VINNER, S.; DREYFUS, T.. Images and definitions for the concept of function. **Journal for Research in Mathematics Education**, cidade, v. 20, n. 4, p. 356-366, 1989.

## ANEXO A - Roteiro para participação na OI On-line (para os licenciandos)



### Roteiro para a participação na Oficina “Conceito de função em uma Orquestração Instrumental On-line”

Este roteiro tem como objetivo fornecer informações aos participantes da Oficina “Conceito de função em uma Orquestração Instrumental On-line (OI On-line)”, além de sugerir quanto ao uso de ferramentas do Google *Workspace*.

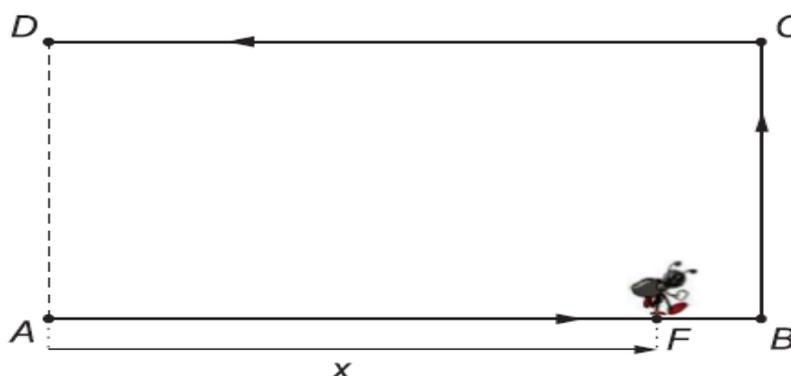
- Google *Meet*:
  - a) Os participantes terão acesso ao Google *Meet* a partir do *link*: [meet.google.com/vve-njep-hbh](https://meet.google.com/vve-njep-hbh);
  - b) O mediador irá compartilhar a tela para apresentar aos participantes as instruções para resolução da atividade proposta neste evento;
  - c) O grupo será dividido em duplas, cada qual entrando em salas virtuais do Google *Meet* exclusivas para cada uma, com os *links* abaixo:
    - Dupla 1: <https://meet.google.com/gvi-cynd-dsp>
    - Dupla 2: <https://meet.google.com/cdc-mnes-sig>
    - Dupla 3: <https://meet.google.com/ehp-mfhm-aa1>
  - d) Os participantes deverão manter microfones e câmeras ligadas em todo o evento;
  - e) É permitido aos participantes interagirem entre si, a fim de construir ideias e propor procedimentos de resolução do problema.
  - f) O mediador ficará disponível para dúvidas relacionadas à atividade e acesso aos documentos.
- Documento compartilhado:

Os participantes terão acesso a um documento compartilhado, no aplicativo Jamboard, quando acessarem a sala de aula virtual. Este documento servirá para anotar as ideias e possíveis procedimentos da atividade que irão resolver na oficina.

- Os participantes devem estabelecer no início os papéis de cada um: Redator e Executores;
- O redator será o participante responsável por sistematizar e descrever a solução das perguntas no Jamboard, cuja tela estará compartilhada pelo mediador no Google Meet;
- Os demais (executores) deverão auxiliar (áudio, chat) o redator na construção da atividade (tela compartilhada).
- O mediador dará suporte técnico, didático e pedagógico quando julgar necessário e buscará favorecer as interações entre os componentes do grupo de forma que todos participem.
- A atividade finaliza quando os participantes decidem que terminaram a discussão e solução das perguntas presentes na atividade, comunicando, portanto, a decisão ao mediador.

#### Orquestração Instrumental On-line

Situação: (OBMEP-2014/2ª fase/nível 3 - adap.) Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Durante esse percurso, considere  $F_x$  o ponto em que a formiga se encontra ao percorrer  $x$  centímetros.



- Esboce o gráfico da relação entre  $x$  (distância percorrida pela formiga) e a área do triângulo ADF, no quadro compartilhado.
- Descreva algebricamente a(s) função(ões) da área do triângulo ADF em relação a  $x$  - comprimento do caminho percorrido pela formiga. Delimite os conjuntos domínio e contradomínio.
- O que acontece com o domínio quando a formiga estiver nos pontos A e D? Existe alguma função nesses pontos?

d) O que podemos afirmar sobre os conjuntos Contradomínio e Imagem? Eles coincidem?

Condições/restrições:

- As discussões e construções devem ser realizadas exclusivamente no ambiente compartilhado;
- Uma vez que o participante utilize o papel para rascunhar alguma solução, solicitamos que, ao final, seja tirado uma foto e enviado pelo aplicativo Whatsapp do aparelho celular;

Tempo: 01h 30

Configuração Didática

- Material (aluno)
  - Acesso à internet
  - Acesso ao Google *Meet* com microfone, câmera e alto falante
  - Acesso ao Jamboard - para edição;
  - Acesso ao grupo a ser criado no aplicativo Whatsapp no celular;
  - Papel e lápis/caneta.