UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CAMPUS AGRESTE

NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE

CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

GILDEIR AVELINO DA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ELEMENTARES DE FUNÇÃO POR DISCENTES DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

Caruaru

2022

GILDEIR AVELINO DA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ELEMENTARES DE FUNÇÃO POR DISCENTES DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientador: Profº. Dr. Marcílio Ferreira dos Santos

Caruaru

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Avelino da Silva, Gildeir.

ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ELEMENTARES DE FUNÇÃO POR DISCENTES DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE / Gildeir Avelino da Silva. - Caruaru, 2022.

45 p. : il., tab.

Orientador(a): Marcílio Ferreira dos Santos

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2022.

Inclui referências, apêndices.

1. ENSINO SUPERIOR. 2. FUNÇÃO INJETORA. 3. FUNÇÃO SOBREJETORA. 4. FUNÇÃO BIJETORA. 5. CONCEITOS ELEMENTARES. I. Ferreira dos Santos , Marcílio. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

GILDEIR AVELINO DA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO POR DISCENTES DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 05/05/2022

BANCA EXAMINADORA

____

Profº. Dr. Marcílio Ferreira dos Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº Me. Lidiane Pereira de Carvalho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº. Me. Danilo Monteiro de Vasconcelos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, em especial à minha mãe que sempre me deu apoio para seguir adiante no curso apesar de todas dificuldades. Dedico este trabalho especialmente a ela.

Também como forma de gratidão à minha esposa que esteve sempre do meu lado, me incentivou e me ajudou, além da minha irmã, meu pai e todos que me deram condições para que esta etapa da minha vida fosse concluída.

RESUMO

Este trabalho surgiu a partir da curiosidade do autor em descobrir as dificuldades dos alunos do curso de licenciatura em matemática em assuntos elementares na disciplina de matemática. Após a leitura de diversos textos, revistas e artigos sobre tais assuntos, é possível notar que há uma intensa defasagem no ensino-aprendizagem nesta área de conhecimento que não deveria existir, visto que os mesmos já deveriam estar bem fixados na mente dos alunos nos anos anteriores, caso contrário, a não aprendizagem do conteúdo pode acarretar em dificuldades do discente ao entrar no ensino superior. Desta forma, esta pesquisa se dispõe a investigar e entender os obstáculos epistemológicos dos futuros docentes de matemática, para que se possa compreender os fatores que fazem com que o aluno do curso de licenciatura em matemática não tenha o devido aprendizado nos assuntos de matemática, com maior ênfase nas dificuldades de aprendizagem em conceitos básicos de função, como propriedades de funções injetivas, sobrejetivas e funções bijetoras. Na pesquisa, foi elaborado um formulário buscando encontrar algumas dessas respostas e a partir dos resultados foi feita uma análise minuciosa e discutida ao decorrer do trabalho. Trata-se de um estudo de campo descritivo com abordagem quanti-qualitativa na UFPE Campus Agreste na cidade de Caruaru-PE, entre fevereiro e maio de 2022, com participação de alunos licenciandos no curso de matemática.

Palavras-chave: Conceitos elementares; Ensino superior; Função injetora; Função sobrejetora; Função bijetora.

ABSTRACT

This work arose from the author's curiosity to discover the difficulties of students of the degree in mathematics in elementary subjects in the discipline of mathematics. After reading several texts, magazines and articles on such subjects, it is possible to notice that there is an intense lag in teaching and learning in this area of knowledge that should not exist, since they should already be well fixed in the minds of students in the years previous years, otherwise, not learning the content can lead to difficulties for the student to enter higher education. In this way, this research aims to investigate and understand the epistemological obstacles of future mathematics teachers, in order to understand the factors that make the student of the degree in mathematics not have the proper learning in mathematics subjects, with greater emphasis on learning difficulties in basic function concepts, such as properties of injective, surjective and bijection functions. In the research, a form was elaborated in order to find some of these answers and from the results a thorough analysis was made and discussed during the work. This is a descriptive field study with a quantitative-qualitative approach at UFPE Campus Agreste in the city of Caruaru-PE, between February and May 2022, with the participation of undergraduate students in the mathematics course.

Keywords: Elementary concepts; University education; Injector function; Overjecting function; Bijector function.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O processo de ensino-aprendizagem envolve toda a complexidade do ensinar e aprender, encarando as especificidades dos contextos em que se constroem as experiências das ações pedagógicas (SANTOS; SANTANA; PEREIRA, 2020). As relações interpessoais que acontecem no processo de ensino-aprendizagem vão além do desenvolvimento de conteúdos específicos, mas caracterizam-se pela troca de experiências, dúvidas, ansiedades e saberes construídos de forma coletiva e conjunta, na intenção de atravessar a teoria e a prática (SILVA; MARTINEZ, 2017).

Através do convívio diário com os discentes do curso de Licenciatura em Matemática, é possível notar que os mesmos apresentam dificuldades recorrentes no ensino-aprendizagem do conceito de funções que, muitas vezes, não estão relacionadas ao conteúdo desenvolvido pelo professor na universidade, mas aos conceitos fundamentais já trabalhados no ensino médio que não foram assimilados pelo estudante.

Assim, o trabalho busca entender os obstáculos epistemológicos, no sentido de Bachelard dos futuros docentes de matemática, para que se possa compreender a raiz dos problemas que os alunos de matemática básica podem ter. Acreditando que o aprendiz é um espelho, embora com nível de reflexão ou opacidade, da visão que seu mestre expõe em sala de aula sobre determinados conteúdos.

Embora haja o esforço das instituições de ensino em ofertar uma educação de qualidade para todos, existem muitas dificuldades e obstáculos em torno do processo ensino-aprendizagem, principalmente quando o discente possui dificuldades mais acentuadas e pregressas (PEREIRA et al., 2021; SILVA; MARTINEZ, 2017).

Na identificação das variáveis relacionadas ao desempenho educacional, compreende-se que as estruturas pedagógicas vão muito além do ambiente universitário, pois envolve os indivíduos, suas famílias, escolas, bairros ou grupos de amigos (LAROS; MARCIANO; ANDRADE, 2010), que atravessam todo o processo educacional.

O aluno proveniente do ensino público, por exemplo, chega à faculdade após passar, na maioria das vezes, por uma escolarização precária devido a má formação e remuneração de professores, superlotação de salas de aula, greves, dificuldades estruturais, dentre outros fatores que o impede de acompanhar o aprendizado universitário com domínio de conceitos e conteúdos básicos (SARAVALI, 2005). Deste modo, é preciso consciência de como os docentes encaram os conceitos mais elementares da matemática.

Como as funções são relações entre conjuntos, sendo que as mais populares associam grandezas e são extremamente relevantes em campos diversos das ciências exatas, seu estudo é destacado como habilidade elementar em muitos campos de trabalho. A saber, funções importam para calcular volumes, quantidades, juros, custos, lucros e muito mais, demandas e tem muitas mais aplicações. Posto isto, nossa percepção da importância de aprender bem o conceito em nível elementar é bem clara.

2 OBJETIVOS

2.1 GERAL

Analisar as compreensões e dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática a respeito do aprendizado dos conceitos elementares de funções e as perspectivas quanto à docência deste conteúdo para alunos na educação básica.

2.2 ESPECÍFICOS

- Investigar as elaborações dos discentes da graduação acerca de fundamentos de funções;
- Compreender quais foram as dificuldades encontradas pelos graduandos nos conceitos elementares de função, enquanto os mesmos eram alunos do ensino médio sob a perspectiva dos obstáculos epistemológicos;
- Avaliar as impressões dos discentes sobre o ensino do conceito na educação básica.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

De acordo com dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) de 2018, o Brasil é o país da América do Sul com pior resultado em matemática, tendo 68,1% de estudantes no pior nível de proficiência, e apenas 0,1% com nível máximo de proficiência (BRASIL, 2019). Muitos discentes não conseguem aprender matemática por fatores psicológicos, sociais e familiares onde estão inseridos, e principalmente por não conseguirem se adaptar às metodologias usadas pelos professores (KREMER, 2007).

Segundo Santos e Lima (2010), o ensino da matemática se deve partir das experiências cotidianas do aprendiz para desmontar conceitos, visando uma aprendizagem significativa. Se o docente desprezar essas evidências estará neutralizando os reais sentidos da aprendizagem, mas isso não quer dizer que o professor deve limitar-se somente aos conhecimentos prévios do aluno, será apenas um pontapé para novas possibilidades de aprendizagens.

Na universidade, a diversidade de discentes com diferentes habilidades, interesses e níveis formativos, muitos apresentando deficiências formativas e no domínio de conteúdos, traz aos docentes e aos alunos uma série de dificuldades na sala de aula. Tais dificuldades no ensino-aprendizagem dificultam a assimilação de conteúdos matemáticos no ensino superior (MASOLA; ALLEVATO, 2016).

Segundo Nasser (2009), os estudantes de matemática podem ser classificados de acordo com determinadas características: os que conseguem ter maior focalização em fatos, dados e algoritmos; os que se sentem mais confiantes com teorias e modelos matemáticos; alguns que respondem de forma mais positiva a informações visuais como figuras, diagramas e esquemas; enquanto que outros preferem informações verbais faladas e escritas; alguns alunos ainda respondem de forma ativa e interativa, enquanto outros são mais introspectivos e individuais.

3.2 CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTO DOS ALUNOS EM SUA VIDA ACADÊMICA

Apreender conteúdos básicos no ensino fundamental e médio é de extrema importância para que o aluno possa compreender o que é ensinado no ensino superior, visto que todo conhecimento é construído passo a passo no decorrer de sua trajetória acadêmica até esse momento. Torna-se primordial que o discente de licenciatura consiga ter a compreensão de tais conceitos matemáticos para que possa ter uma segurança maior no momento de compartilhar o conhecimento com seus alunos futuramente.

A construção do conhecimento está sujeita à forma de como cada pessoa aprende. O indivíduo não constrói o saber, ele acolhe a informação por meio do ensino e cada pessoa aprende de forma semelhante, mas nunca igual (MARTINS; MOURA; BERNARDO, 2018). Segundo Freire, o educador e o educando são sujeitos de um processo onde crescem de forma conjunta, porque "[...] ninguém educa ninguém, ninguém se educa. Os homens se educam entre si mediatizados pelo o mundo" (FREIRE, 1974).

O ser humano vive distintos momentos que caracterizam diversas formas de compreender as informações com as quais enfrenta. Essas formas se integralizam umas nas outras, alterando-se mutuamente e diversificando a capacidade de adaptação, tornando o processo dinâmico (SARAVALI, 2005). No sentido deste processo dinâmico, a matemática pode ser considerada uma construção humana. Assim como toda capacidade de cognição, o ser humano constrói a matemática a partir do mais simples até o mais complexo, desde suas ações sensório motoras até às estruturas formais (BECKER, 2019).

Segundo Martins e colaboradores (2018), no passado o papel do professor era visto como um repassador de informações, num processo de "domesticação" de indivíduos sem o desenvolvimento da consciência crítica. A atual forma de ensinar no Brasil sofre influência das escolas jesuítas da época de colonização, com aulas expositivas, memorização de conteúdos, e resolução de exercícios, sendo um sistema rígido baseado no método escolástico (ANASTASIOU, 2001). Em contrapartida, o uso de metodologias ativas de aprendizagem, por exemplo, pode conduzir à formação crítica dos educandos. Nesse modelo, os discentes são protagonistas das ações educativas e o conhecimento é construído de forma conjunta (DIESEL; BALDEZ; MARTINS, 2017; BORGES; ALENCAR, 2014).

3.3 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM NO CONTEÚDO DE FUNÇÃO

Segundo Pires (2016), os obstáculos que as pessoas demonstram na compreensão dos conceitos matemáticos, em especial, os alunos desde a Educação Básica ao Ensino Superior é um tema que vem sendo abordado entre os debates entre professores de Matemática e pesquisadores interessados no ensino e na aprendizagem dessa ciência. Quando a pauta do assunto é função, por exemplo, as dificuldades apresentadas pelos alunos demonstram que geralmente os mesmos não conseguem usar ou imaginar o assunto em um contexto mais prático, como seu próprio cotidiano, não conseguindo identificar a aplicabilidade do conteúdo da sala de aula com sua experiência de vida.

Os docentes podem utilizar várias teorias e caminhos no seu planejamento, sendo um imenso desafio, nos vários níveis de ensino, o uso de elementos que possibilitam viabilizar a aprendizagem e a evolução dos envolvidos no processo de aprendizagem (BRANDT; MORETTI, 2016). É muito comum o desinteresse pela matemática por parte dos discentes. A maneira como ela é usada em sala de aula é um dos principais fatores. Os docentes encontram obstáculos em propagar seus conhecimentos, talvez devido a empecilhos que se estabelecem no ambiente de ensino ou até mesmo que se formaram durante sua trajetória profissional (WARMBIER et al., 2017).

É consensual a ideia de que não haja um caminho que possa ser identificado como único e mais eficaz para o ensino de qualquer disciplina, em particular da matemática. Entretanto, conhecer várias formas de trabalho em sala de aula é essencial para que o professor construa a sua prática. Dentre elas, destaca-se a história da matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como ferramentas que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para construção das estratégias de resolução (BRASIL, 1998).

3.4 O QUE É ELEMENTAR EM FUNÇÕES

Para estudar o conceito de funções de forma elementar, é necessário que se saiba o que há de elementar nesta estrutura matemática abstrata, pois, embora seja um termo tipicamente definido na disciplina de matemática, ela surge baseada em uma intuição elementar.

A princípio, as primeiras funções que se aprendem são as relativas a crescimento proporcional, como as funções afins. Por exemplo, considere uma receita de bolo de 1 quilograma que seja feito com 1 copo de trigo, 1 copo de açúcar, 2 ovos, 200 gramas de manteiga e 6 colheres de chocolate, podemos dizer assim que o bolo é uma função dos ingredientes, assim muitos dos conceitos de funções podem ser explorados mesmo neste exemplo elementar.

Os conceitos de funções compostas, ou função inversa podem ser explorados com exemplos, que como este, sejam significativos mesmo numa atividade corriqueira como a culinária. Caso a proposta seja determinar a quantidade de ovos necessários para fazer o mesmo bolo de 2,5 quilogramas, a "função inversa" associa este peso de bolo a 5 ovos.

Do mesmo modo que exemplificamos com a receita, poderíamos relacionar números de caixas de azulejos para revestir um piso, o número de horas extras necessárias para conseguir 100 reais a mais no salário, o peso que um indivíduo de 1,72 m de altura precisa ter para que seu IMC seja 25. Deste modo, funções estão presentes em muitos contextos e o primeiro passo para aproximar o aluno do conteúdo é a apresentação destas diversidades.

Por outro lado, a composição também pode ser aproximada do dia a dia, e o limite para o docente é apenas sua criatividade e o quanto que ele compreende o conceito matemático de composições. Se ele não faz o papel de facilitador conceitual, ele pode incorrer em criar obstáculos epistêmicos que afastará o seu aprendiz do mais importante que é compreender de forma elementar a proposta da composição de funções.

Para exemplificar, vamos usar a função f dos ovos e quilo do bolo, acrescentaremos a função g do quilo do bolo e do número de fatias e, porque não, a função h do número de fatias associada a receita gerada por elas. Assim podemos calcular a receita a partir da quantidade de trigo e aplicando as funções como etapas de cálculo. Certamente aproximamos muito mais a função do dia a dia com este exemplo e, mesmo que o discente afirme não saber cozinhar, poderemos adaptar esta conceituação elementar a diversos contextos.

Mesmo assim, ainda é evidente que existe uma grande dificuldade de aprender as propriedades de funções, em muito porque os alunos não passam tempo suficiente amadurecendo os conceitos de funções no ensino médio e isto torna praticamente impossível generalizar o elementar até alcançar o avançado.

Ao cursar a Licenciatura em Matemática, o discente passa por experiências em cálculo, estruturas algébricas, análise etc. Ele passa bastante tempo sendo cobrado em matemática avançada, mas o quanto o licenciado poderá compreender esta matemática superior, caso não estabeleça bem as bases conceituais? Afinal é possível entender cálculo sem saber funções? Ou o estudo de cálculo ensina funções aos licenciados? Isto reflete no nível de segurança que os futuros professores terão em sala de aula, afinal ensinar é também compreender os obstáculos epistêmicos (LOPES, 1996) e trabalhar pedagogicamente para superá-los.

Caso os docentes não possuam o nível de abstração conceitual bem estabelecido, não estamos aqui propondo um jeito certo de abstrair, pois concordamos com a visão de Bachelard que a abstração é subjetiva, embora assuma caráter gerais objetivos, a tarefa de ensinar o discente a abstrair será um desafio proeminente da docência. Afinal, pouca reflexão leva a pouca capacidade de antecipação das dificuldades dos discentes, o que pode levar o docente a forçar uma concepção pessoal, ao invés de permitir que o aluno construa seu pensamento científico, mesmo que de forma ingênua. A construção de uma interpretação pessoal, gradual e investigativa deve ser mais importante do que apenas acertos dos cálculos.

> (...) nos propomos a mostrar este destino grandioso do pensamento científico abstrato. Para isso devemos provar que pensamento abstrato não é sinônimo de má consciência científica, como a acusação trivial parece dizer. Deveremos provar que a abstração desembaraça o espírito, que ela o alivia e que ela o dinamiza. Proporcionaremos essas provas estudando mais particularmente as dificuldades das abstrações corretas, assinalando as insuficiências dos primeiros intentos, o peso dos primeiros esquemas, ao mesmo

> tempo que destacamos o caráter discursivo da coerência abstrata e essencial que nunca logra seu objetivo da primeira vez. E para mostrar melhor que o processo de abstração não é uniforme, não titubearemos em empregar às vezes um tom polêmico, insistindo sobre o caráter de obstáculo que apresenta a experiência, estimada concreta e real, estimada natural e imediata (BACHELARD, 1947: 8- 9).

A seguir enumeramos alguns dos obstáculos epistêmicos, segundo Bachelard, que obstaculiza a aprendizagem matemática (TRINDADE; NAGASHIMA; ANDRADE, 2019):

1. A experiência primeiro: quando o conhecimento busca encantar pela experiência, mas não aprofunda a abstração, o aprendiz se torna raso em seu conhecimento científico;
2. O conhecimento geral: quando o conhecimento se torna “cristalizado”, o aprendiz pode mecanizar sua aprendizagem, se tornando generalista. Assim o aprofundamento do conhecimento passa a ser esquecido, pois as respostas repetidas e vagas são aceitas como suficientes;
3. O obstáculo verbal: quando são construídas alegorias verbais com o interesse de simplificar, mas acaba ocupando o espaço da teoria científica, atrapalhando a aprendizagem;
4. O conhecimento unitário e pragmático: quando o conhecimento se torna pragmático, a reflexão se torna supérflua, assim o aprendiz pode a tentar explicar todo o fenômeno por uma hipótese única.
5. Substancialismo: quando se tenta substancializar o conceito e a abstração do objeto, pois nem sempre a ideia usada para compreender representa o objeto em si. Em alguns momentos, ela é apenas uma ferramenta de aprendizagem.
6. Realismo: quando a comparação da apresentação do conceito com a realidade dele torna-se uma dificuldade para o aprendiz. Se houver discrepâncias não contornadas, o aprendiz terá sua aprendizagem obstaculizada.
7. Animismo: quando se associa características humanas ao conhecimento, muitas vezes atribuindo conceitos que podem ser mais sociológicos que científicos e atrapalhando a sua associação com conceitos naturais intrínsecos do objeto estudado.

Assim, Bachelard baliza algumas das dificuldades que o professor poderá encontrar em sua experiência docente, fornecendo uma frutífera ferramenta de análise para a pesquisa sobre o ensino de funções e seus elementos básicos.

3.5 ELEMENTOS DAS FUNÇÕES

Funções em matemática, ao contrário do que o senso comum possa supor, não surgiu como um conceito pronto e acabado, a construção foi gradual e diversos matemáticos contribuíram para a sua conceituação. Mas, nesta seção, o objetivo é conceituá-la e não descrever sua criação.

Segundo as definições obtidas no livro Naive Set Theory (HALMOS, 2017), começamos conceituando funções a partir da conceituação de pares ordenados. Diferente dos conjuntos onde a ordem não faz diferença, o par ordenado fixa uma ordem para os termos, para diferenciar a ordem, usando apenas a linguagem de conjuntos, definimos

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

pois havia um interesse dos matemáticos ligados aos fundamentos de evitar a criação de muitos objetos matemáticos, mostrando que toda a matemática existente poderia ser fundamentada com um esquema axiomático básico. O sistema axiomático mais popular é o esquema axiomático de Zermelo-Fraenkel. O leitor pode ler sobre o sistema no livro do Paul Halmos (2017, p.30) ou em livros mais específicos. Contudo a definição ingênua mais adequada pode ser lida a seguir:

> Sejam A e B conjuntos, define-se o par ordenado ou o produto cartesiano $A \times B$ por
>
> $$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$$
>
> onde temos que $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

A **relação R entre A e B** em matemática é definida como um subconjunto qualquer do produto cartesiano, ou seja, os elementos z está em R onde $(a, b) \in A \times B$, neste caso é comum escrever aRb para dizer que $z = (a, b) \in R^2$. Isto pode confundir o discente, pois a palavra ‘relação’ tem um significado específico na teoria dos conjuntos, então é sempre válido explicar este ponto.

A função F é, na realidade, um tipo específico de relação onde se exige que o conjunto de partida A esteja integralmente relacionado a um subconjunto de B. O conjunto A chamamos de domínio e o conjunto B de contra-domínio. Como dissemos antes, todos elementos de A, para que possamos chamar o objeto de função, deve estar incluído no domínio, mas nem todo mundo em B precisa estar em algum par de F.

Em resumo, como conceitua Paul Halmos (2017, p.30):

> If X and Y are sets, a function from (or on) X to (or into) Y is a relation F such that dom f = X and such that for each x in X there is a unique element y in Y with (x, y) ∈ F. The uniqueness condition can be formulated explicitly as follows: if (x, y) ∈ f and (x, z) ∈ f, then y = z. For each x in X, the unique y in Y such that (x, y) ∈ f is denoted by f(x).

Na nossa tradução e adaptação livre, F é uma relação entre X e Y tal que, obrigatoriamente, todos os elementos de X estão relacionados com um único elemento em Y. Não pode haver um elemento de x sem que exista um par (x,y) em F. Bem como não podem existir (x,y) e (x,y') ao mesmo tempo em F. Opta-se tradicionalmente por chamar F de $f\colon X \to Y$ para simbolizar especificamente funções de X para Y e X= Dom(f) e Im(f)= F(A).

Esta é a apresentação em teoria dos conjuntos do conceito de funções, contudo reforçamos que somos muito ligados a uma apresentação de função muito mais por uma expressão $y = f(x)$ com polinômios, potências, raízes e relações trigonométricas, que com sua apresentação por conjuntos. Mas consideramos importante que o professor de matemática saiba que a função não é a expressão em si, mas a associação entre conjuntos que ela representa.

Além disso, vale a pena ressaltar que as funções possuem diversas especificidades, sendo as mais básicas as relativas a como se comportam no domínio e no contra domínio. Segundo o Paul Halmos (2017):

- Funções Injetivas: seja $f\colon X \to Y$ uma função. Diz-se que esta é injetiva se, dados dois elementos a, b em X, a suposição que $f(a) = f(a)$ implica em $a = b$.

- Funções Sobrejetiva: seja $f: X \to Y$ uma função. Diz-se que esta é sobrejetiva se $f(X) = \{b \in Y: \exists a \in X, f(a) = b\} = Y$.
- Funções bijetivas: seja $f: X \to Y$ uma função. Diz-se que esta é bijetiva se f é sobrejetiva e injetiva ao mesmo tempo.

A condição necessária e suficiente para que uma função $f: A \to B$ esteja associada a uma outra função $f^{-1}: B \to A$ inversa é que esta seja bijetiva. Basicamente esta função faz o 'caminho inverso' da original e é importante pois a inversão é um processo que encontramos naturalmente.

A composição é uma das operações mais genéricas que podem ser feitas entre funções, esta operação é denotada por $(f \circ g)(x)$ que nada mais é que calcular $f(g(x))$. Na notação de conjuntos, se $(x, y) \in f$ e $(y, z) \in g$, então o elemento (x, z) está em $f \circ g$. É necessário, contudo, que $Im(g) \subset Dom(f)$.

Para terminar a seção, citamos que as funções estão associadas a outras terminologias como operadores, mapas, correspondência, transformações, aplicações. E, dependendo da área, um termo é mais popular. Por exemplo, as funções entre espaços vetoriais que são lineares são chamadas de transformações. Já aplicações são populares nas disciplinas de análise e geometria.

Consideramos que uma boa compreensão conceitual, com uma semiótica adequada para facilitar a memorização, com a associação do conceito de cada elemento do domínio estar relacionado a apenas um elemento no contradomínio, facilita a compreensão, mas poderiam incorrer em algum obstáculo epistemológico e o professor precisa estar atento. Mesmo em exemplo muito mais simples, é interessante a resolução de problemas que estimulem a decomposição de funções compostas, o uso de funções inversas mais populares como logaritmos e as inversas trigonométricas para que o aluno desenvolva habilidades conceituais e práticas importantes para vários temas das exatas.

Segundo conceitos e definições apresentadas no livro de Iezzy e Murakami (1977), temos:

Dados dois conjuntos A e B*, não vazios, uma relação **f** de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo x ∈ A existe só y ∈ B tal que (x, y) ∈ **f**.

Fica mais fácil visualizar com o auxílio do esquema das flechas, como as condições devem satisfazer uma relação de **f** de A em B para ser aplicação (ou função).

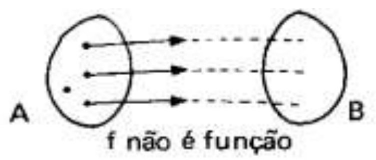
1º) é necessário que todo elemento x ∈ A participe de pelo menos um par de (x, y) ∈ **f**, *isto é cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha.*

2º) é necessário que cada elemento de x ∈ A participe apenas de um único par (x, y) ∈ **f**, isto é, *cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha.*

Uma relação **f** não é aplicação (ou função) se não satisfizer uma das condições acima, isto é:

1º) Se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma ou

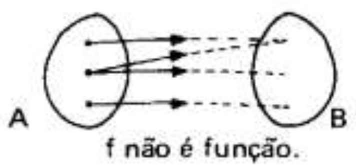
Figura 1 - Esquema das flechas.



Fonte: IEZZY; MURAKAMI (1977, p. 75A).

2º) Se existir um elemento de A do qual partem duas ou mais flechas

Figura 2: Esquema das flechas.



Fonte: IEZZY; MURAKAMI (1977, p. 75A).

3.6 DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM COM A PANDEMIA

A pandemia de COVID-19 mudou bruscamente o nosso estilo de vida, visto que se dissemina de forma rápida e fácil entre as pessoas. O isolamento social tem sido uma das principais formas para conter a expansão do vírus do COVID-19 (SILVA; ALVES; SANTOS, 2021). Tendo isso em vista, as aulas presenciais precisaram ser suspensas. Segundo a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), a crise da Covid-19 resultou na paralisação das aulas, afetando mais de 90% dos estudantes do mundo inteiro (UNESCO, 2020).

Os órgãos responsáveis pela organização do sistema educacional, como o Conselho Nacional de Educação (CNE), trouxeram orientações para a retomada das aulas na modalidade remota. Nessa perspectiva, o educador diante de um momento na quebra de paradigmas precisa buscar variados caminhos. As possibilidades de construir conhecimento adaptando-se a uma forma diferente de ensinar podem indicar várias maneiras de aplicar e compartilhar este conhecimento de forma prática (SILVA; SANTOS; PAULA, 2020).

Nesse sentido, educadores tiveram a necessidade de se ajustar e refletir sobre formas de ensino, sistemas adequados de avaliação e interação entre professor e aluno. Assim como na formação continuada que irá garantir a aprendizagem de seus estudantes, se tornando um desafio cotidiano, pois a interação em sala de aula – que é o espaço onde os estudantes tiram dúvidas a respeito do conteúdo – é de extrema importância (ANJOS, 2020).

O desenvolvimento de projetos educativos com metodologias inovadoras, impõe a busca por conhecimentos tecnológicos e permite uma maneira diferente de ensinar. Conceder aos estudantes a alegria em aprender, falar em descobrir e a necessidade de produzir e pesquisar (OLIVEIRA, 2006).

4 JUSTIFICATIVA

Levando em consideração que ao chegar no ensino superior muitos alunos possuem dificuldades na aprendizagem de diversos assuntos na disciplina de matemática, em muito por não terem adquirido conhecimento suficiente ao decorrer dos anos estudados no ensino fundamental e médio, encontrar os possíveis fatores que acarretam nestas dificuldades se torna importante para o avanço do ensino-aprendizagem de matemática.

Esta pesquisa tem como foco realizar uma avaliação diagnóstica sobre o ensino-aprendizagem dos conceitos elementares de funções em turmas do ensino superior na área de Licenciatura em Matemática, tendo em vista que, no decorrer da história de vida escolar, o aluno foi buscando e adquirindo conhecimento a cada ano letivo cursado e trazendo consigo na bagagem, conhecimentos necessários para que chegasse até aquele momento. Dessa forma, todas as experiências adquiridas ao longo do tempo são extremamente cruciais para a compreensão do assunto de funções, tendo em vista que o público alvo desta avaliação em sua grande parte serão, em um futuro próximo, os mentores responsáveis por trocar conhecimento para uma nova geração de alunos que irão ingressar em outras instituições de ensino.

Este autor optou por este tema por perceber que mesmo sendo uma parte elementar do conteúdo, o mesmo ainda gera muitas dúvidas nos discentes. A partir deste questionário, o autor deseja encontrar algumas variantes que podem ou não, influenciar na aprendizagem ou nas dificuldades que possam existir neste determinado conteúdo.

5 METODOLOGIA

O presente trabalho caracteriza-se como uma pesquisa descritiva de natureza básica com abordagem quanti-qualitativa, desenvolvida no Campus Acadêmico do Agreste (CAA) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), localizado no município de Caruaru, Pernambuco. Segundo Gil (2008),

> As pesquisas deste tipo têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados (...). As pesquisas descritivas são, juntamente com as exploratórias, as que habitualmente realizam os pesquisadores sociais preocupados com a atuação prática (GIL, 2008: 28).

O estudo teve duração de três meses, com início em fevereiro e término em maio de 2022, e teve como público-alvo os discentes de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - Campus do Agreste.

O tipo de amostra caracteriza-se como do tipo voluntária, sendo incluídos todos os alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Campus Agreste da UFPE que aceitaram participar da pesquisa, e excluídos os que não se enquadraram nos critérios de inclusão. Para a coleta de dados, foi utilizado um questionário estruturado (Apêndice A) que contemplou dados sociodemográficos, além de questões abertas e fechadas sobre o ensino-aprendizagem de conteúdos elementares de função injetora, sobrejetora e bijetora.

O questionário foi disponibilizado de forma online pela plataforma Formulários Google e enviado em todos os grupos de Whatsapp das turmas de Licenciatura em Matemática do CAA. Os dados quantitativos e qualitativos gerados pelas respostas ao formulário foram tabulados, e a frequência absoluta e relativa foram realizados nos programas Microsoft Word 2013 e Microsoft Excel 2013.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A maioria dos estudantes que participaram da pesquisa são do sexo masculino, sendo 85,7% e 14,3% do gênero feminino (Tabela 1). Na pesquisa também foi questionado em qual rede de ensino eles cursaram o ensino médio, sendo a maioria de escola pública com 85,7% e de rede privada 14,3% (Tabela 1).

Tabela 1 - Perfil dos estudantes participantes. Centro Acadêmico do Agreste - UFPE. Caruaru/PE, 2022.

Variáveis	Total (N)	%
Sexo		
Masculino	12	85,7
Feminino	2	14,3
Rede de Ensino Médio		
Pública	12	85,7
Privada	2	14,3

Fonte: O autor (2022).

Apesar das mulheres brasileiras (29,7%) estarem em maioria no Ensino Superior em relação aos homens (21,5%), as mesmas ainda são minoria nas áreas ligadas às ciências exatas, e maioria nos cursos ligados às áreas sociais e de cuidado (IBGE, 2021). Durante a evolução da humanidade, as mulheres sempre foram vistas como seres frágeis e submissos, como pessoas que não tinham capacidade de exercer funções consideradas exclusivas dos homens (SANTOS; MADRUGA, 2022).

Por muito tempo as mulheres foram caladas e impedidas de fazer suas próprias escolhas, como trabalhar, estudar e fazer o que gostavam, por não ser condizente com as práticas que, segundo a sociedade, uma mulher deveria ter, como cuidar da casa e dos filhos. Impossibilitando-as de aprimorar seus conhecimentos e assim desempenhar os mesmos papéis dos homens

(CARVALHO; CASAGRANDE, 2011). Historicamente, não era habitual nas ciências exatas as mulheres serem reconhecidas, afinal era concedido apenas aos homens a oportunidade de produzir conhecimento científico, pois segundo as ideias machistas que foram impostas na sociedade, as mulheres não estavam preparadas para este tipo de trabalho (SANTOS; MADRUGA, 2022). Apesar disto, o curso de Matemática Licenciatura do CAA possui cerca de 40% dos discentes do sexo feminino.

A Lei nº 12.711, de 29 de agosto de 2012 prevê que prioritariamente 50% das vagas da universidade pública por instituição, curso e turno devem se destinar aos discentes que estudaram na rede pública durante todo o ensino médio (BRASIL, 2012). Recentemente, alunos de diversas classes sociais, têm tido mais oportunidades de ingressar na universidade. É possível visualizar uma abertura maior aos estudantes de classes sociais mais populares, devido aos programas governamentais ou institucionais que objetivam facilitar o acesso ao Ensino Superior (SCHWARZ; DIAS; CAMARGO, 2021).

Segundo Senkevics e Mello (2019), em 2016, 63,6% dos ingressantes das Instituições Federais de Ensino Superior cursaram o ensino médio na rede pública. No entanto, dados indicam a alta desistência dos alunos nas Universidades: 59% em 2020, e mais especificamente 70% no curso de Licenciatura em Matemática em 2020 (BRASIL, 2020).

O estudo de Dias e Colaboradores (2019) traz que ao ingressar na Universidade, o estudante enfrenta estressores que desafiam sua permanência, como dificuldades interpessoais; diferenças entre o Ensino Médio e o Ensino Superior; dificuldades econômicas; dificuldades de gestão do tempo para as tarefas acadêmicas; dificuldades cognitivas; dificuldades pessoais; dificuldades estruturais da universidade ou curso; dificuldades em relação a professores desinteressados ou sem habilidades didáticas; e dificuldades de deslocamento e transporte.

Quanto ao nível de aprendizado em funções antes de entrar na Universidade (Gráfico 1), a maioria (71,4%) classificou-se no nível 3, ou acima deste nível, que é referente a um nível bom ou ótimo de aprendizado. Dentre os alunos participantes, 57,1% alegaram que sentiram-se seguros para responder às questões sobre funções no ensino médio após as disciplinas. O aluno 11 afirmou que conseguia assimilar melhor sua compreensão do assunto na prática dos exercícios, no entanto, 28,6% dos estudantes relataram sentir-se parcialmente seguros, visto que apresentavam dificuldades de aprendizagem e compreensão do conteúdo (Gráfico 2).

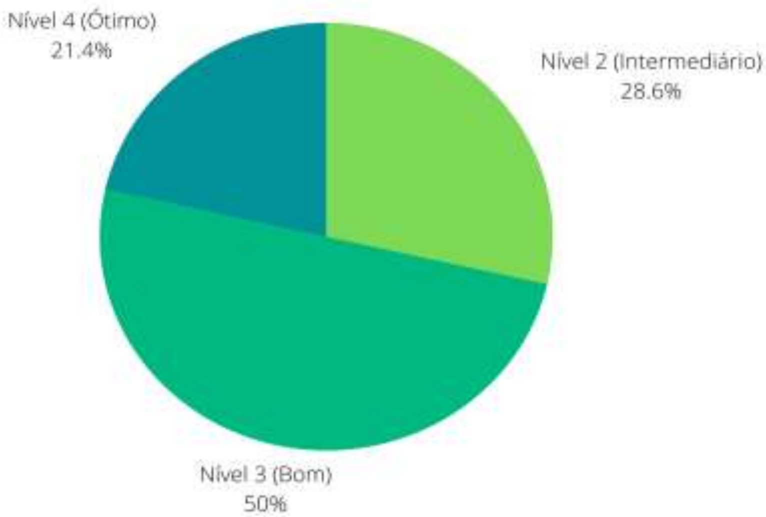
Conseguia sim, embora em algumas (questões) apresentasse um pouco de dificuldade (Aluno 1).

Sim (sentia-se seguro), mas a prática parecia mais fácil que a teoria (Aluno 11).

Observa-se que o primeiro aluno considera que conhece bem o conceito, mas acredita que algumas questões podem trazer dificuldade, o que é verdade para qualquer conhecimento, sinalizando apenas que o mesmo assume que, apesar de sua compreensão abstrata, cada caso precisa de aprofundamento necessário.

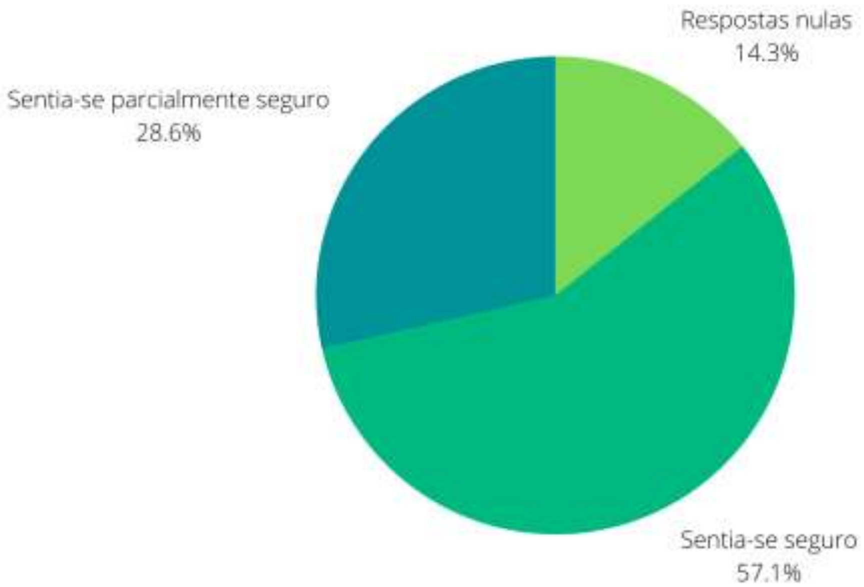
A fala do segundo aluno pode indicar dificuldade com as definições do conceito, que evidencia um obstáculo epistemológico na abstração, apelando assim para os casos particulares e práticos. Poderíamos dizer que trata-se de um aluno que tem uma vivência com o obstáculo da experiência primeira, talvez por ter sido mais cobrado a exibir exemplos do que em enunciar conceitos.

Gráfico 1 - Nível auto classificado do aprendizado de funções dos estudantes antes da universidade. Centro Acadêmico do Agreste - UFPE. Caruaru/PE, 2022.



Fonte: O autor (2022).

Gráfico 2 - Segurança dos alunos para responder questões com o conteúdo de funções no ensino médio. Centro Acadêmico do Agreste - UFPE. Caruaru/PE, 2022.



Fonte: O autor (2022).

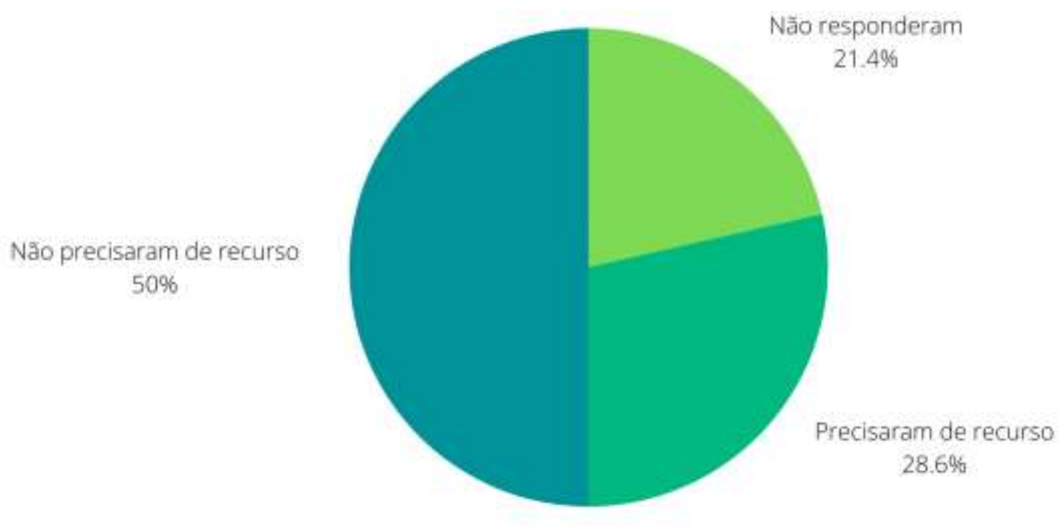
Dentre os participantes da pesquisa, metade (50%) afirmaram que não precisaram de recurso ou auxílio didático para responder às questões de definição de função e tipos de função (Gráfico 3). No entanto, 28,6% dos alunos necessitaram de recursos como acesso à definição em sites de pesquisa e vídeos didáticos disponíveis na internet.

Precisei sim (de recurso didático)*, tive que assistir um vídeo e ainda ler uma página na Internet que mostrava as diferenças entre os tipos de função* (Aluno 13).

Internet (recurso didático utilizado)*, pois não lembrava de definição formal, apenas dos bizus* (Aluno 12).

Apesar de ser natural a revisão, as respostas dos discentes vão além de uma revisão para recapitular os pontos importantes de funções e organização da aula. Elas exibem que alguns obstáculos epistemológicos ainda não foram superados pelos discentes. Dentre eles, destaco os Obstáculos Verbal, Conhecimento Geral e Conhecimento Unitário, pois o segundo aluno expõe que lembrava “apenas dos bizus” de modo que a abstração do conceito não parece ter ficado fixado em sua memória. Assim a compreensão parece mais rasa do que deveria e pode levar a posições pragmáticas nas resoluções de problemas de funções.

Gráfico 3 - Alunos que precisaram ou não de recursos didáticos para responder às questões. Centro Acadêmico do Agreste - UFPE. Caruaru/PE, 2022.



Fonte: O autor (2022).

Segundo Ribeiro e Mendes (2016), um dos motivos das dificuldades na resolução de questões matemáticas é a falta de prática após as aulas e após o término do período escolar. A matemática é uma das disciplinas que mais precisa de prática para aprendê-la. Os discentes que não praticam podem até conseguir se sair bem nas resoluções das questões, mas somente por ter decorado fórmulas, conteúdos e conceitos, e depois de um tempo não se lembrarão do que memorizaram para responder exclusivamente às provas.

A pesquisa de Santos e colaboradores (2007) traz que os discentes afirmam que os professores da disciplina de matemática não explicam a matéria o suficientemente bem, não corrigem todos os exercícios que são passados, e não respeitam as dificuldades dos alunos. Os autores relatam que estes fatores fazem com que a Matemática passe a se configurar para os alunos como algo que foge da realidade, e não tem valor, fazendo com que haja dificuldade na compreensão e aprendizagem. Acredita-se que os docentes, por desconhecerem as dificuldades que os alunos apresentam ao traduzir o conceito, acabam por transmitir o conteúdo sem evitar os obstáculos epistemológicos.

A resolução de problemas se torna uma alternativa para superar os obstáculos acima citados, tendo em vista que a mesma é fundamental para o ensino de matemática, visto que o pensar e o fazer desenvolvem-se quando o discente tem papel ativo no enfrentamento de desafios, esta deve ser trabalhada de forma desafiadora e como um incentivo ao estudante para exercitar-se e não como apenas uma maneira de aplicação dos conteúdos passados na sala de aula. É imprescindível aguçar as competências e as habilidades primordiais para determinar as estratégias que serão utilizadas nos exercícios de resolução (ALVARENGA; ANDRADE; SANTOS, 2016).

Na questão 3 do formulário (Apêndice A) foi feita a pergunta: ‘’*O que você entende por função?’’.* A questão visou entender qual o conhecimento dos graduandos sobre uma definição geral do assunto de funções que se aplicaria em todos os tipos. Todos os alunos responderam corretamente fazendo uma associação ao assunto de conjuntos.

Função seria uma expressão que relaciona dois conjuntos onde cada elemento do primeiro conjunto só pode se relacionar com apenas um elemento do segundo conjunto (Aluno 6).

É uma relação matemática onde existem dois conjuntos. No qual já uma correspondência do conjunto A no conjunto B (Aluno 7).

Uma regra, onde um elemento de um conjunto se relaciona a um único elemento de outro (Aluno 10).

Como o próprio nome define, algo que está em função de outro algo, onde é necessária uma relação. Nesse caso, há a relação entre conjuntos (Aluno 11).

Função é uma relação entre dois conjuntos, A e B, que associa cada elemento do conjunto A (domínio) a um elemento de B (imagem) (Aluno 14).

Podemos ver que o conceito principal de função está estabelecido como uma relação entre conjuntos e isto mostra um nível de abstração mais maduro, pois poderiam dizer relações entre número ou conjuntos numéricos, limitando assim um pouco o conceito. Os alunos 6, 10 e 14 reforçaram o fato dos elementos do domínio estarem relacionados apenas a um elemento da imagem, embora 7 e 10 não tenham citado diretamente o domínio e a imagem.

O aluno 7 deixou o conceito muito vago, isto pode ser sintoma de dois obstáculos epistemológicos: o verbal e o pragmático. O verbal pode ser mascarado pelo uso de termos como “relação” e “correspondência”, pois são termos usuais que usados genericamente podem ocultar que o aluno não sabe exatamente quais as regras que devem ser obedecidas por esta relação.

Analisando as respostas dos graduandos, pode-se notar que as respostas têm algo em comum. Eles responderam a questão se baseando no conhecimento sobre conteúdo de conjuntos que já tinham, além de ser uma boa estratégia, esse conhecimento foi usado como ferramenta para formalizar suas respostas. Assim podemos inferir que uma boa linguagem de teoria dos conjuntos é fundamento para uma boa compreensão e interpretação do conceito de funções.

Ainda 50% dos participantes afirmaram não ter conseguido aprender sobre função inversa e composta no ensino médio, pela falta de tempo dentro da disciplina, pelas dificuldades dos docentes em encontrar recursos didáticos e dos discentes em conseguir entender e aprender estes assuntos.

> *Não, creio que não estudei esse conceito no EM (ensino médio). Vejo dificuldades dos professores em encontrar recursos para ensinar tal recurso* (Aluno 2).

> *Não consegui aprender, e por isso não consegui ver se os professores tinham dificuldade nesse assunto* (Aluno 13).

O ensino superior em Licenciatura em Matemática, bem como em diversas ciências exatas puras e aplicadas, depende já nos primeiros períodos do uso de funções inversas e compostas. Em cálculo 1, o aluno precisará compreender a composição de funções para calcular, por exemplo, a regra da cadeia. Caso não se supra essa demanda, é muito provável que o aluno não possa interpretar com facilidade que $f(x) = sin\,(x^2 - 1)$ é igual a $g(h(x))$ onde $g(x) = sin\,(x)$ e $h(x) = x^2 - 1$. Isto demanda uma série de obstáculos epistemológicos em aprender a regra da cadeia, podemos esperar bastante retenção e evasão nestas primeiras disciplinas.

Mesmo em área técnica, um aluno que não conheça funções inversas básicas como as logarítmicas e inversas trigonométricas teriam dificuldade de resolver problemas de funções exponenciais ou associar o ângulo a um seno ou cosseno, caso este ângulo não seja um dos tradicionais 30º, 45º e 60º. Não é que os alunos não saibam profundamente as propriedades destas funções inversas, mas talvez eles não as conhecem e não conseguem utilizá-las em suas atividades técnicas. Chega-se a um ponto que podemos questionar como um aluno pode saber literalmente decorado que $arcsin\,'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sem, contudo, mesmo fazendo uso de calculadora, alguns podem ter dificuldade de determinar o ângulo θ tal que $sin\,(\theta) = 0{,}15$, pois não compreenderam a função inversa.

A álgebra linear, talvez seja a disciplina onde o aluno mais lidará com conceitos funcionais do tipo injetividade, sobrejetividade, bijetividade, composição e inversão. Não por acaso, divide com o cálculo 1 o estigma de disciplina com altos níveis de reprovação em todo curso de exatas.

Ainda nos questionamos o dano intuitivo que a pouca compreensão conceitual pode dificultar na compreensão de álgebra linear. Existem duas abordagens possíveis para estudar a injetividade de uma transformação linear (nome das funções com propriedades específicas da área de Álgebra Linear): a abordagem enumerativa que conta o tamanho da imagem calculando determinantes e resolvendo sistemas e a compreensão conceitual como conjuntos. Poderia a primeira mascarar, mais uma vez, por ser um processo mecanizado, a real compreensão do conceito de injetividade? Esta pergunta deve ser feita por nós e talvez justifique os números ruins ligados a tal disciplina.

Analisando as respostas da questão 9, percebe-se que apesar da maioria não ter aprendido funções inversas e compostas no ensino médio, boa parte dos alunos sentem-se seguros em abordar estes conteúdos. Isto significa que no curso da licenciatura no CAA houve oportunidade, mesmo que não sistemática, para que os alunos trabalhassem o conceito. Os que demonstram insegurança, afirmaram precisar de reforço e aprofundamento na temática.

> *Sinto* (seguro)*, porém preciso continuar a estudar sobre pra que não cometa equívocos* (Aluno 1)*.*

> *Não é minha área de ensino e os conceitos que possuo são bem básicos, então precisaria de um aprofundamento no assunto* (Aluno 7)*.*

> *Não* (não se sente seguro)*. Sem dúvidas necessito de um reforço na universidade* (Aluno 11)*.*

> *Como professor entendo que sempre temos que estar estudando e aperfeiçoando nossa metodologia, logo devo estudar mais* (Aluno 12).

Observa-se um olhar bastante autônomo no aluno 1, já os outros demonstraram, se não a necessidade, o interesse por aprofundar o conhecimento. É necessário instituir uma forma sistêmica de capacitar os alunos para que eles tenham ainda mais segurança e não perpetuem o problema de novos discentes da educação básica, chegando ao curso superior sem fundamentação para terem uma boa aprendizagem de funções. Lembrando que todos os problemas que citamos são comuns a qualquer profissional das ciências exatas, sejam de nível superior ou técnico.

O estudo de Silva (2016) demonstra que as dificuldades de aprendizagem dos estudantes no ensino superior podem ser motivadas por desafios enfrentados no ensino fundamental e médio, como práticas pedagógicas tradicionais, metodologias de ensino inadequadas, ausência de formação adequada dos docentes, e infraestrutura deficiente. De acordo com Pacheco e Andreis (2018), as dificuldades de aprendizagem em Matemática também podem estar relacionadas com impressões negativas devido às experiências iniciais do discente com a disciplina, assim como com a ausência de incentivo familiar, as metodologias utilizadas pelo docente, dentre outros fatores.

O professor tem um papel indiscutivelmente importante frente às dificuldades encontradas pelos alunos, sendo o principal ator no estímulo dos discentes para a aprendizagem em Matemática. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 3),

> O educador matemático, em contrapartida, tende a conceber a matemática como um meio ou instrumento importante à formação intelectual e social de crianças, jovens e adultos e também do professor de matemática do ensino fundamental e médio e, por isso, tenta promover uma educação pela matemática. Ou seja, o educador matemático, na relação entre educação e matemática, tende a colocar a matemática a serviço da educação, priorizando, portanto, esta última, mas sem estabelecer uma dicotomia entre elas.

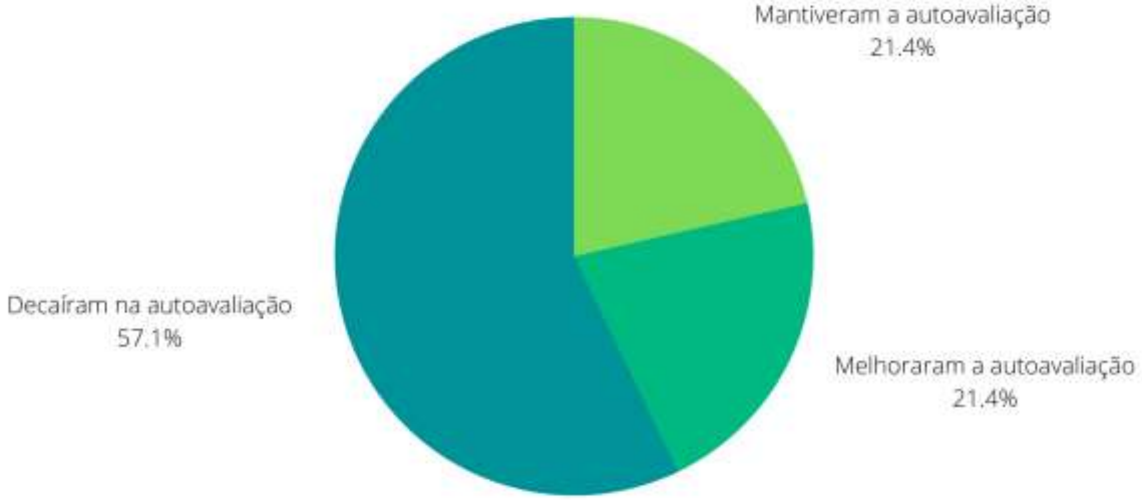
No momento em que o docente acredita nas potencialidades de seu aluno e se preocupa com sua aprendizagem, este desenvolve boas práticas de ensino. Os alunos reconhecem que seus melhores professores são os que têm aulas atrativas, que estimulam a participação, que se expressam de maneira que os estudantes compreendem o conteúdo e que buscam diversas formas para desenvolver sua aula, inspirando a crítica e a curiosidade (CUNHA, 2009).

Segundo Carneiro (2018), cabe ao docente o desenvolvimento de estratégias e metodologias que facilitem e transformem o ensino de Matemática em algo menos complexo, mais acessível e prazeroso. Enquanto que cabe ao discente buscar a compreensão da importância do conhecimento matemático, além de tentar materializar a teoria em situações do dia a dia fazendo com que a aprendizagem em matemática se torne significativa.

No início do formulário (Apêndice A), foi solicitado aos graduandos que fizessem uma autoavaliação de acordo com o que eles suponham ter de aprendizado em função, classificando o aprendizado em uma escala de 1 a 4 (ruim, intermediário, bom, e ótimo). Após responder as perguntas ao longo do questionário sobre conhecimentos elementares do assunto, foi refeita a mesma pergunta a respeito do seu conhecimento com o intuito de saber se os alunos ainda se consideravam no mesmo nível de aprendizado de acordo com sua auto avaliação.

Neste sentido, 57,2% dos alunos tiveram uma decaída na autoavaliação em comparação com a primeira resposta, enquanto que 21,4% dos alunos melhoraram sua avaliação em relação à primeira resposta, e 21,4% dos alunos mantiveram sua avaliação (Gráfico 4). Demonstrando que à medida que apresentaram dificuldades em responder às questões e refletiram a sua aprendizagem sobre o assunto, a maioria dos alunos passaram a avaliar que seu nível de aprendizado era menor do que esperava (Quadro 1).

Gráfico 4 - Autoavaliação dos estudantes. Centro Acadêmico do Agreste - UFPE. Caruaru/PE, 2022.



Fonte: O autor (2022).

Quadro 1 - Respostas dos alunos à autoavaliação. Centro Acadêmico do Agreste - UFPE. Caruaru/PE, 2022.

Alunos	Auto avaliação inicial	Auto avaliação Final
Aluno 1	Nível 3	Nível 2
Aluno 2	Nível 3	Nível 4
Aluno 3	Nível 2	Nível 3
Aluno 4	Nível 3	Nível 2
Aluno 5	Nível 2	Nível 2
Aluno 6	Nível 3	Nível 2
Aluno 7	Nível 4	Nível 2
Aluno 8	Nível 4	Nível 4

Aluno 9	Nível 2	Nível 3
Aluno 10	Nível 3	Nível 2
Aluno 11	Nível 3	Nível 2
Aluno 12	Nível 3	Nível 2
Aluno 13	Nível 2	Nível 1
Aluno 14	Nível 4	Nível 4

Fonte: O autor (2022).

Achamos relevante a autoavaliação no início de no fim do questionário, pois permite que o discente, ao refletir sobre suas respostas, perceba alguns pontos que precisam ser reforçados. O conceito de função é muito elementar e isto pode tornar a postura dos docentes pragmática, rasa e gerar um obstáculo epistemológico. Mas, ser elementar não diminui em nada sua importância. Em geral, os conceitos elementares são os mais cruciais de serem bem entendidos, pois estão espalhados por várias áreas da ciência matemática.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos dados coletados e da análise, é possível inferir que há uma lacuna a ser preenchida em relação aos conteúdos considerados elementares de função conforme foi relatado, há uma grande dificuldade dos alunos em ter vivência com esse assunto enquanto cursa o ensino médio. Seja por falta de tempo dos professores em realizar aplicações por motivos de escassez de horários para aplicar todos os conteúdos que se exigem no ensino médio. Consequentemente dessa forma o docente teria poucos encontros em sala de aula.

É preciso analisar o currículo da educação básica, pois se, em detrimento de uma melhor aprendizagem de funções, estão lotando os horários com outros conhecimentos que são mais específicos e eles mesmo poderiam ter ganho caso o conceito de função fosse mais compreendido, por que manter um currículo excessivamente longo que justifique aprender mais superficialmente temas centrais.

Outra variante que pode ser considerada é a dificuldade dos professores abordarem este tema, gerando um receio de não ser compreendido com clareza pelos discentes, ou ainda ter dificuldades de não dominar o assunto suficientemente a ponto de não sentir-se seguro para aplicá-lo.

Do ponto de vista didático-pedagógico, temos um claro sinal de que é importante estudar abordagens de ensino conceituais de funções para que o conhecimento abstrato acerca do tema não seja obstáculo de aprendizagem. Como dissemos anteriormente e exemplificamos, funções são relevantes no ensino superior, técnico e profissionalizante, e não devem ficar em segundo plano, pelo contrário, devem ocupar lugar de destaque na educação básica.

Para futuras pesquisas, podemos sugerir análises acerca da evasão e retenção por causa da falta de compreensão do conceito de funções, tanto em cálculo como em álgebra linear. Poderíamos também analisar a semiótica usada para apresentar o conceito, bem como discutir temas específicos acerca dos tipos de funções. Bem como é possível estudar o currículo e as abordagens dos livros didáticos no que diz respeito ao ensino conceitual de funções.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, K. B.; ANDRADE, I. D.; SANTOS, R. J. Dificuldades na resolução de problemas básicos de matemática: um estudo de caso do agreste sergipano. **Revista Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemática,** Belém, v. 12, n. 24, p. 39-52, 2016.

ANASTASIOU, L. G. C. **Metodologia de Ensino na Universidade Brasileira: elementos de uma trajetória.** Campinas: Papirus, 2001.

ANJOS, A. C. P. Dificuldades no ensino-aprendizagem e comunicação entre professores e alunos durante a pandemia do COVID-19. **Rev. Franc. Edu.**, Santa Maria, v. 4, n. 4, p. 38-45, 2020.

BACHELARD, G. **La philosophie dialoguée.** Dialectica, p. 11-20, 1947.

BECKER, F. Construção do Conhecimento Matemático: natureza, transmissão e gênese. **Bolema**, Rio Claro, v. 33, n. 65, p. 963-987, 2019.

BORGES, T. S.; ALENCAR, G. Metodologias ativas na promoção da formação crítica do estudante: o uso das metodologias ativas como recurso didático. Cairu em Revista. **Cairu**, v. 3, n. 4, p. 119-143, 2014.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. **Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016.

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei nº 12.711, de 29 de agosto de 2012. Dispõe sobre o ingresso nas universidades federais e nas instituições federais de ensino técnico de nível médio e dá outras providências.** Brasília: Congresso Nacional, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Censo da Educação Superior 2020.** Brasília: Ministério da Educação, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Relatório Brasil no PISA 2018.** Brasília: Ministério da Educação, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília: Ministério da Educação, 1998.

CARVALHO, M. G; CASAGRANDE, L. S. Mulheres e Ciência: desafios e conquistas. **R. Inter. Interdisc. INTERthesis**, Florianópolis, v. 8, n. 2, p. 20-35, 2011.

CARNEIRO, L. N. S. **Aprendizagem da matemática: Dificuldades para aprender conteúdos matemáticos por estudantes do Ensino Médio.** 2018. 42f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2018.

CUNHA, M. I. **A relação professor-aluno.** In: VEIGA, I. P. A. (Org.). Repensando a didática. 27. ed. Campinas: Papirus, 2009.

DIAS, A. C. G et al. Dificuldades percebidas na transição para a universidade. **Revista Brasileira de Orientação Profissional**, Campinas, v. 20, n. 1, p. 19-30, 2019.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. **Rev. Thema**, Pelotas, v. 14, n. 1, p. 268-288, 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1974.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6ª edição. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

HALMOS, P. R. **Naive set theory.** Courier Dover Publications, 2017.

IBGE. **Estatísticas de Gênero. Indicadores sociais das mulheres no Brasil.** 2ª edição. Rio de Janeiro, 2021.

IEZZY, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar. Conjuntos e funções.** 3ª edição. São Paulo: Editora Atual, 1977.

KREMER, K. A. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática.** 2007. 43 f. Monografia (Pós Graduação em Psicopedagogia) - Instituto A Vez do Mestre, Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro, 2007.

LAROS, J. A.; MARCIANO, J. L. P.; ANDRADE, J. M. Fatores que afetam o desempenho na prova de matemática do SAEB: um estudo multinível. **Avaliação Psicológica**, Campinas, v. 9, n. 2, p. 173-186, 2010.

LOPES, A. C. Bachelard: o filósofo da desilusão. **Caderno brasileiro de ensino de Física**, Florianópolis, v. 13, n. 3, p. 248-273, 1996.

MASOLA, W. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior. **Rev. Brasileira de Ensino Superior**, Passo Fundo, v. 2, n. 1, p. 64-74, 2016.

MARTINS, E. D.; MOURA, A. A.; BERNARDO, A. A. O processo de construção do conhecimento e os desafios do ensino-aprendizagem. **Revista online de Política e Gestão Educacional**, Araraquara, v. 22, n. 1, p. 410-423, 2018.

NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos.** In: FROTA, M. C. R., NASSER, L. (Org.). Educação matemática no ensino superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM. 2009. 265p.

OLIVEIRA, C. L. **Significado e contribuições da afetividade no contexto da Metodologia de Projetos na Educação Básica.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Tecnológica) - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. **Revista Principia**, João Pessoa, n. 38, p. 105-119, 2018.

PEREIRA, V. A et al. Dificuldades de aprendizagem no contexto escolar: possibilidades e desafios. **Rev. Cient. Novas Configur. Dialog. Plur.**, Luziânia, v. 2, n.2, p. 27 - 36, 2021.

PIRES, R. F. O conceito de função: uma análise histórico epistemológica. In: **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2016, São Paulo. Anais [...] São Paulo: XII ENEM, 2016. p. 1-12.

RIBEIRO, A. G.; MENDES, A. A. A dificuldade de resolução das questões de matemática do exame nacional do ensino médio: ineficiência matemática ou interpretativa? **II Seminário Científico da FACIG**, Igarassu, p. 1-11, 2016.

SANTOS, J. A; FRANÇA, K. V; SANTOS, L. S. B. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática.** 2007. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) - Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007.

SANTOS, J. S.; MADRUGA, Z. E. F. Mulheres nas ciências exatas: um olhar para pesquisas científicas. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 9, n. 25, p. 20 - 34, 2022.

SANTOS, M. W. S.; SANTANA, J. M. O.; PEREIRA, M. E. S. O processo de ensino-aprendizagem da matemática: um olhar sobre a metodologia de avaliação. In: **Anais do VII CONEDU**, 2020, Maceió. Anais [...] Maceió: CONEDU, 2020. p. 1-12.

SANTOS, O. O.; LIMA, M. G. S. O processo de ensino-aprendizagem da disciplina matemática: possibilidades e limitações no contexto escolar. In: **Anais do X Simpósio de Produção Científica da UESPI,** 2010, Teresina. Anais [...] Teresina: X Simpósio de Produção Científica da UESPI, 2010, p. 1-20.

SARAVALI, E. G. Dificuldades de aprendizagem no ensino superior: reflexões a partir da perspectiva piagetiana. **Educação Temática Digital**, Campinas, v. 6, n. 2, p. 99-127, 2005.

SCHWARZ, J. C.; DIAS, M. S. L.; CAMARGO, D. Dificuldades encontradas por estudantes no ensino superior e práticas institucionais adotadas para superá-las: uma revisão de literatura. **Quaestio**, Sorocaba, v. 23, n. 3, p. 741-761, 2021.

SENKEVICS, A. S.; MELLO, U. M. O perfil discente das universidades federais mudou pós-lei de cotas?. **Cad. Pesqui.**, São Paulo, v. 49 n. 172 p. 184-208, 2019.

SILVA, A. V. V.; SANTOS, H. R.; PAULA, L. H. Os desafios enfrentados no processo de ensino e aprendizagem em tempos de pandemia nos cursos de graduação. In: **Anais do VII CONEDU**, 2020, Maceió. Anais [...] Maceió: CONEDU, 2020. p. 1-12.

SILVA, J. L. **Sentidos e significados da reprovação para estudantes universitários do Amazonas.** 2016. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Psicologia) - Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016.

SILVA, J. R. P.; ALVES, L. B. N.; SANTOS, M. F. A obesidade e a pandemia de COVID-19: uma revisão de literatura. **Even3**, 2021.

SILVA, R. S.; MARTINEZ, M. L. S. Dificuldades na matemática básica: o processo de ensino-aprendizagem para a vida. In: **Anais do IV Seminário Internacional de Representações Sociais. Subjetividade e Educação – SIRSSE**, 2017, Curitiba. Anais [...] Curitiba: IV SIRSSE, 2017. p. 11839-11849.

TRINDADE, D. J; NAGASHIMA, L. A; ANDRADE, C. C. Obstáculos epistemológicos sob a perspectiva de Bachelard. **Brazilian Journal of Development**, São José dos Pinhais, v. 5, n. 10, p. 17829-17843, 2019.

UNESCO. **A Comissão Futuros da Educação da Unesco apela ao planejamento antecipado contra o aumento das desigualdades após a COVID-19.** Paris: Unesco, 16 abr. 2020. Disponível em: https://pt.unesco.org/news/comissao–futuros–da–educacao–da–unesco–apela–ao–planejamento–antecipado–o–aumento–das Acesso em: 13 dez. 2021.

WARMBIER, E et al. Dificuldades na aprendizagem da matemática com vista à função de primeiro grau. In: **Anais do IV Congresso Internacional de Educação Científica e Tecnológica - IV CIECITEC,** 2017, Santo Ângelo. Anais [...] Santo Ângelo: IV CIECITEC, 2017. p. 1-10.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

1- Nome completo:

2- E-mail:

3- Você estudou o ensino médio em:

( ) Escola Pública ( ) Escola Particular

4- Você considera que seu aprendizado em funções estava em qual nível antes da universidade?

( ) Nível 1 (Ruim)

( ) Nível 2 (Intermediário)

( ) Nível 3 (Bom)

( ) Nível 4 (Ótimo)

5- Após cursar a disciplina de matemática no ensino médio, você sentia segurança para responder questões com o conteúdo de funções?

6- O que você entende por função?

7- Defina formalmente ou descreva as características de uma função bijetora, uma função injetora, e uma função sobrejetora, respectivamente:

8- Você precisou de algum auxílio ou recurso didático para responder à questão anterior?

9- Você conseguiu aprender sobre função inversa e composta no ensino médio? Você notou dificuldade dos professores para abordar estes assuntos?

10- Nesse momento você se sente seguro para abordar conteúdos que trabalhem com funções inversas?

11- Após responder o questionário, você avalia que seu conhecimento no ensino médio sobre conceitos elementares de função continua sendo o mesmo nível de conhecimento da pergunta que foi feita na questão 1? Se não, qual nível você acha que é o correto?

( ) Nível 1 (Ruim)

( ) Nível 2 (Intermediário)

( ) Nível 3 (Bom)

( ) Nível 4 (Ótimo)