



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Pedro Oscar Souza Livera

**INSTABILIDADES DE INTERFACE MAGNETICAMENTE INDUZIDAS EM UM
ANEL DE FERROFLUIDO**

Recife

2022

Pedro Oscar Souza Livera

INSTABILIDADES DE INTERFACE MAGNETICAMENTE INDUZIDAS EM UM ANEL DE FERROFLUIDO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica e Computacional

Orientador: Prof. Dr. José Américo de Miranda Neto

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária: Mônica Uchôa, CRB4-1010

L784i Livera, Pedro Oscar Souza.
 Instabilidades de interface magneticamente induzidas em um anel de
ferrofluido / Pedro Oscar Souza Livera. – 2022.
 92 f.: il., fig.

 Orientador: José Américo de Miranda Neto.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Programa de Pós-graduação em Física. Recife, 2022.
 Inclui referências, apêndices e anexos.

 1. Instabilidade hidrodinâmica. 2. Formação de padrão. 3. Célula de Hele-
Shaw. 4. Instabilidade de interface. 5. Fluidos magnéticos. I. Miranda Neto,
José Américo de (Orientador). II. Título.

530.1

CDD (23. ed.)

UFPE- CCEN 2022 - 19

PEDRO OSCAR SOUZA LIVERA

**INSTABILIDADES DE INTERFACE MAGNETICAMENTE INDUZIDAS EM UM
ANEL DE FERROFLUIDO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 28/01/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. José Américo de Miranda Neto
Orientador
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Luiz Felipe Cavalcanti Pereira
Examinador Interno
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Rafael Menezes de Oliveira
Examinador Externo
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, especialmente pai, mãe e Juba. Além de vovó que verá o neto como mestre.

Agradeço aos amigos, aqueles que vêm da época de ralar o joelho na quadra da escola e também os que pude fazer nos últimos anos. Salve para os colegas de curso, com os quais as conversas e brincadeiras sempre foram muito proveitosas.

Agradeço aos professores e demais funcionários do Departamento de Física, sempre dedicados e dispostos a ajudar. A qualidade do ensino e detalhes paralelos sempre foram do mais alto nível.

Agradeço aos membros da banca pela leitura da dissertação, comentários e sugestões.

Finalmente, agradeço ao meu orientador José Américo, grande guia nessa trajetória acadêmica que me permitiu fazer ciência de forma competente, e também a Pedro Anjos, que foi um grande parceiro nas pesquisas que geraram os resultados aqui apresentados.

Pro homem pra quem o trabalho é festa

Todo dia é de festa é mais mió

Porque a sua festa é a sua vida

E o fruto do trabalho é mais maior

É toda recompensa de esforço

É a alegria no derrame do suor

-Gonzaguinha (1981)

RESUMO

Investigamos o comportamento de um anel de ferrofluido circundado por dois fluidos não magnéticos e confinado numa célula de Hele-Shaw. Neste contexto, analisamos a aplicação de duas configurações de campo magnético externo: (i) primeiramente a ação de um campo magnético radial e em seguida (ii) a aplicação combinada de um campo radial e outro azimutal. A dinâmica da formação de padrões no anel de ferrofluido é determinada pela interação de forças magnéticas e de tensão superficial nas suas interfaces interna e externa, gerando um acoplamento não trivial entre elas. Utilizamos uma teoria perturbativa de modos acoplados para investigar os estágios linear e fracamente não linear da evolução dinâmica do anel. Nossos resultados indicam que as interfaces são acopladas já a âmbito linear, onde o crescimento de perturbações em uma interface do anel, pode induzir deformações na outra interface. Além disso, nossa análise fracamente não linear de segunda ordem permite extrair importantes aspectos morfológicos do sistema anular, revelando, para as duas configurações de campo estudadas, a formação de padrões estacionários apresentando dedos pontiagudos em suas extremidades. A atuação simultânea dos dois campos (radial e azimutal) faz com que o anel de ferrofluido gire, com uma velocidade angular controlada por estes campos. Esta rotação induzida magneticamente faz com que os dedos pontiagudos sejam “entortados”, desviando-se lateralmente. Para as duas configurações de campo, exploramos também a resposta do sistema anular à variações na espessura do anel, intensidade relativa das forças magnéticas e de tensão superficial e na suscetibilidade magnética do ferrofluido.

Palavras-chaves: instabilidade hidrodinâmica, formação de padrão, célula de Hele-Shaw, instabilidade de interface, fluidos magnéticos.

ABSTRACT

We investigate the behavior of a ferrofluid annulus surrounded by two nonmagnetic fluids in a Hele-Shaw cell. In this context, we look upon the application of two different external magnetic fields: (i) first considering the application of a magnetic radial field, and then (ii) the application of a combined radial and azimuthal field. The pattern forming dynamics of the ferrofluid annulus is determined by the interplay of magnetic and surface tension forces acting on the inner and outer boundaries, leading to a nontrivial coupling of the disjoint interfaces. A perturbative, mode-coupling analysis is employed to investigate the dynamics of linear and weakly nonlinear stages. Our findings show that the interfaces are already coupled at the linear level, in which the growth of instabilities in one of the interfaces may induce perturbations on the other. Furthermore, our weakly non linear analysis allows us to extract major morphological features of the annular system, revealing, for both field configurations, the development of stationary n -fold patterns presenting sharp edged fingers. The simultaneous application of the fields induces the ferrofluid annulus rotation, in such manner that the angular velocity is set by their magnitudes. This magnetically induced rotation makes the pointy fingers skewed, deviating them sideways. In both configurations, we explore the response of the system to variations on the annulus thickness, relative intensities of the magnetics and surface tension forces, and also the ferrofluid magnetic susceptibility.

Keywords: hydrodynamic instabilities, pattern formation, hele-Shaw cell, interfacial instability, magnetic fluids.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Figuras esquemáticas para a célula de Hele-Shaw retangular (a) e radial (b). O fluido deslocado possui viscosidade η, enquanto a viscosidade do outro fluido é muito menor. O espaçamento entre as placas é denotado por b (da ordem de 1 mm). Para o caso retangular (a), \mathbf{v}_∞ é a velocidade do fluxo injetado numa extremidade da célula e retirado na outra. Já ζ corresponde à perturbação da interface em relação ao avanço homogêneo. Para a figura radial (b), Q representa a taxa de injeção do fluido interno, R o raio caso a interface fosse circular e ζ a perturbação da interface.</p>	15
<p>Figura 2 – Esquema de filtro para fonte pública feito por Darcy.</p>	15
<p>Figura 3 – Competição entre dedos viscosos para a célula de Hele-Shaw retangular disposta verticalmente.</p>	16
<p>Figura 4 – Representação esquemática de um anel de fluido numa célula de Hele-Shaw. Na figura, r_i e r_o são, respectivamente, os raios interno e externo do anel. R_A indica o raio do orifício central usado para injeção dos fluidos.</p>	17
<p>Figura 5 – Efeito estabilizante do afinamento do anel.</p>	17
<p>Figura 6 – Rompimento do anel e formação de bolhas.</p>	18
<p>Figura 7 – Evolução computacional para injeção em um anel.</p>	19
<p>Figura 8 – Resultado experimental para injeção, apresentando o momento de rompimento do anel. Os autores utilizam um sistema com gás-líquido-gás.</p>	19
<p>Figura 9 – Perturbações para um anel girante, L_0 está associado a uma maior espessura do anel.</p>	20
<p>Figura 10 – Formação de gotas num anel girante bastante fino</p>	21
<p>Figura 11 – Evolução temporal (a) experimental e (b) computacional para a injeção de fluidos miscíveis</p>	21
<p>Figura 12 – Padrão labiríntico para campo magnético normal à célula de Hele-Shaw</p>	23

Figura 13 – Representação esquemática para aplicação de campos magnéticos numa célula de Hele-Shaw. A passagem de corrente num fio central, perpendicular às placas, gera um campo magnético azimutal. O campo radial é fruto das bobinas de Helmholtz com correntes em sentidos opostos, a uma mesma distância da célula. O campo magnético \mathbf{H} ilustrado corresponde à soma das componentes radial e azimutal.	24
Figura 14 – Solução exata de padrões estacionários para campo magnético radial aplicado no ferrofluido.	25
Figura 15 – Representação esquemática do fluxo induzido magneticamente, com três fluidos, numa célula de Hele-Shaw. A célula contém um anel de ferrofluido com raios inicialmente circulares R_1 e R_2 (círculos tracejados), viscosidade η_2 e é vizinho a fluidos não magnéticos de viscosidade η_1 (interno) e η_3 (externo). Quando submetido ao campo magnético \mathbf{H} , direcionado radialmente para fora no plano da célula, vemos a deformação das interfaces do anel de ferrofluido (curvas sólidas). As perturbações na estrutura deformada são denominadas por $\zeta(\theta, t)$ e $\varepsilon(\theta, t)$	34
Figura 16 – Taxas de crescimento linear $\lambda_i(n, t)$, $i = 1, 2$, como função do número de onda azimutal n para $R = 0.3$ (painéis superiores) e $R = 0.9$ (painéis inferiores), com três valores de tempo: $t = 0$ [(a) e (d)], $t = 10^{-3}$ [(b) e (e)], e $t = 2.2 \times 10^{-3}$ [(c) e (f)]. Os outros parâmetros são $N_B = 136$, $\chi = 0.8$, $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $\sigma = 1$ e $R_2 = 1$	38
Figura 17 – Evolução temporal puramente linear do anel de ferrofluido para $R = 0.75$ (painéis superiores), $R = 0.92$ (painéis intermediários), e $R = 0.95$ (painéis inferiores). Cada linha corresponde a uma evolução temporal diferente, onde usamos os valores de tempo: (a) $t = 7.0 \times 10^{-3}$, (b) $t = 8.0 \times 10^{-3}$, (c) $t = 8.6 \times 10^{-3}$, (d) $t = 9.5 \times 10^{-3}$, (e) $t = 1.1 \times 10^{-2}$, (f) $t = 1.15 \times 10^{-2}$, (g) $t = 1.2 \times 10^{-2}$, (h) $t = 1.4 \times 10^{-2}$, e (i) $t = 1.52 \times 10^{-2}$. São utilizados 80 modos cosseno harmônicos ($n, 2n, 3n, \dots, 80n$) com o fundamental $n = 8$. Os outros parâmetros físicos são os mesmos da Fig. 16.	40

- Figura 18 – Recorte da evolução fracamente não linear típica para os padrões do anel de ferrofluido com $R = 0.75$ (painéis superiores), $R = 0.92$ (painéis intermediários), e $R = 0.95$ (painéis inferiores). Cada linha corresponde a uma evolução temporal separada, com figuras para os tempos (a) $t = 7.0 \times 10^{-3}$, (b) $t = 8.0 \times 10^{-3}$, (c) $t = 1.7 \times 10^{-2}$, (d) $t = 9.5 \times 10^{-3}$, (e) $t = 1.1 \times 10^{-2}$, (f) $t = 3.4 \times 10^{-2}$, (g) $t = 1.2 \times 10^{-2}$, (h) $t = 1.4 \times 10^{-2}$, e (i) $t = 3.4 \times 10^{-2}$. Os padrões não lineares foram gerados por nossa abordagem de acoplamento de modos em segunda ordem e devem ser comparados com os equivalentes lineares na Fig. 17, onde usamos os mesmos parâmetros físicos e condições iniciais. 43
- Figura 19 – Evolução das amplitudes cosseno das interfaces externa ($\bar{a}_n(t)$) e interna [$a_n(t)$] como funções do tempo t , cada uma corresponde à evolução temporal apresentada na Fig. 18. São mostradas as amplitudes $n, 2n, 3n, \dots, 10n$. A coluna (a) está relacionada com a linha superior da Fig. 18. Da mesma forma, as colunas (b) e (c) correspondem às linhas intermediária e inferior da Fig. 18, respectivamente. 45
- Figura 20 – Representação de estruturas fracamente não lineares para (a) $N_B = 62$ e $\chi = 1.3$, (b) $N_B = 78$ e $\chi = 1.3$, (c) $N_B = 62$ e $\chi = 1.7$, e (d) $N_B = 78$ e $\chi = 1.7$. Os demais parâmetros são $R = 0.96$, $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $R_2 = 1$, $R_1 = R$, $\sigma = 1$, e $t = 0.1$. O número de dedos pontiagudos de cada figura é: (a) 7, (b) 8, (c) 9, e (d) 10. 46
- Figura 21 – Representação fracamente não linear do anel de ferrofluido considerando o acoplamento de todos os modos de Fourier seno e cosseno no intervalo $2 \leq n \leq 80$, para dois conjuntos de fases iniciais aleatórias. Cada linha corresponde a um conjunto de fases, com os padrões exibidos para $R = 0.75$ e $t = 7.75 \times 10^{-3}$ [(a) e (c)], e $R = 0.92$ e $t = 9.1 \times 10^{-3}$ [(b) e (d)]. 48
- Figura 22 – Representação esquemática do fluxo induzido magneticamente, com três fluidos, numa célula de Hele-Shaw. A célula contém um anel de ferrofluido com raios inicialmente circulares R_1 e R_2 (círculos tracejados), viscosidade η_2 e é vizinho a fluidos não magnéticos de viscosidade η_1 (interno) e η_3 (externo). Quando submetido ao campo magnético \mathbf{H} , vemos a deformação das interfaces do anel de ferrofluido (curvas sólidas). As perturbações na estrutura deformada são denominadas por $\zeta(\theta, t)$ e $\epsilon(\theta, t)$ 50

Figura 23 – Padrões fracamente não lineares típicos para o anel de ferrofluido, com Bond number magnético radial constante $N_{Br} = 56$, e três valores incrementais do Bond number magnético azimutal: $N_{Ba} = 0$ [(a) e (d)], $N_{Ba} = 4$ [(b) e (e)], e $N_{Ba} = 20$ [(c) e (f)]. No painel superior (inferior) tomamos $R = 0.70$ ($R = 0.94$). Também escolhemos $\chi = 1.5$, $R_2 = 1$, e tempo final $t_f = 0.03$. Como os outros padrões desse capítulo, as figuras consideram a participação de $N = 40$ ($n, 2n, 3n, \dots, 40n$) modos seno e cosseno. O modo fundamental n é calculado em $t = t_f$. Encontramos $n = n_{\max} = 8$ [(a)-(d)], $n = n_{\max} = 7$ [(e)], e $n = n_{\max} = 6$ [(f)]. Os demais parâmetros são $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $\sigma = 1$, repetindo-se para o restante do capítulo. 55

Figura 24 – Evolução temporal das amplitudes de perturbação para as interfaces interna ($|\zeta_n(t)| = \sqrt{a_n^2(t) + b_n^2(t)}/2$) (curvas tracejadas), e externas [$|\varepsilon_n(t)| = \sqrt{\bar{a}_n^2(t) + \bar{b}_n^2(t)}/2$] (curvas sólidas) interfaces, correspondentes à formação de estruturas não lineares do anel de ferrofluido da Fig. 23. Apenas os modos $n, 2n, 3n$, e $4n$ são apresentados 57

Figura 25 – Padrões fracamente não lineares representativos para o anel de ferrofluido formado com Bond number magnético azimutal constante $N_{Ba} = 100$, e três valores do Bond number magnético radial: $N_{Br} = 0$ [(a) e (d)], $N_{Br} = 14$ [(b) e (e)], and $N_{Br} = 50$ [(c) e (f)]. Nos painéis superiores (inferiores) tomamos $R = 0.70$ ($R = 0.86$). Escolhemos $\chi = 0.9$, $R_1 = 0.7$, e tempo final $t_f = 0.02$. Verificamos para o modo fundamental $n = n_{\max} = 6$ [(a)-(d)], $n = n_{\max} = 5$ [(e)], e $n = n_{\max} = 4$ [(f)]. Os demais parâmetros físicos, número de modos e condições iniciais são os mesmos da Fig. 23. . . 59

Figura 26 – Evolução temporal das amplitudes de perturbação das interfaces interna [$|\zeta_n(t)| = \sqrt{a_n^2(t) + b_n^2(t)}/2$] (curvas tracejada), e externa [$|\varepsilon_n(t)| = \sqrt{\bar{a}_n^2(t) + \bar{b}_n^2(t)}/2$] (curvas sólidas) do anel de ferrofluido correspondente aos padrões não lineares da Fig. 25. São exibidas apenas as amplitudes dos modos $n, 2n, 3n$, e $4n$ 60

Figura 27 – (a) Figuras sobrepostas do padrão investigado na Fig. 23(f), correspondente aos tempos $t = 3.24 \times 10^{-2}$, $t = 3.26 \times 10^{-2}$, e $t = 3.29 \times 10^{-2}$, ilustrando o giro do anel de ferrofluido na direção anti-horária. Da mesma forma, (b) ilustra o padrão da Fig. 25(c), para tempos $t = 2.29 \times 10^{-2}$, $t = 2.31 \times 10^{-2}$, e $t = 2.33 \times 10^{-2}$, exibindo uma rotação no sentido horário. As setas indicam o sentido de rotação. 61

Figura 28 – Velocidades de fase lineares (tracejadas) e fracamente não lineares (sólidas) $v_i(n, t)$ com $i = 1, 2$ para a interface interna e externa, respectivamente. As curvas estão relacionadas à evolução temporal dos padrões da Fig. 27, (a) com a Fig. 27(a) e (b) com a Fig. 27(b). 62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	A CÉLULA DE HELE-SHAW E A INSTABILIDADE ENTRE INTERFACES	14
1.2	FERROFLUIDOS	22
1.3	EQUAÇÕES BÁSICAS	26
1.4	ROTEIRO DA DISSERTAÇÃO	31
2	ANEL DE FERROFLUIDO EM CAMPO RADIAL	33
2.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	33
2.2	ANÁLISE LINEAR	36
2.3	ANÁLISE FRACAMENTE NÃO LINEAR	42
3	ANEL DE FERROFLUIDO EM CAMPO RADIAL E AZIMUTAL . .	49
3.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA FÍSICO	49
3.2	ANÁLISE FRACAMENTE NÃO LINEAR	53
3.3	MOVIMENTO ROTACIONAL DO ANEL DE FERROFLUIDO	60
4	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	64
	REFERÊNCIAS	66
	APÊNDICE A – FUNÇÕES DE ACOPLAMENTO DE SEGUNDA ORDEM PARA CAMPO RADIAL	69
	APÊNDICE B – FUNÇÕES DE ACOPLAMENTO DE SEGUNDA ORDEM PARA CAMPO RADIAL E AZIMUTAL .	71
	ANEXO A – MAGNETOELASTIC PATTERN FORMATION IN FIELD- RESPONSIVE FLUIDS	73

1 INTRODUÇÃO

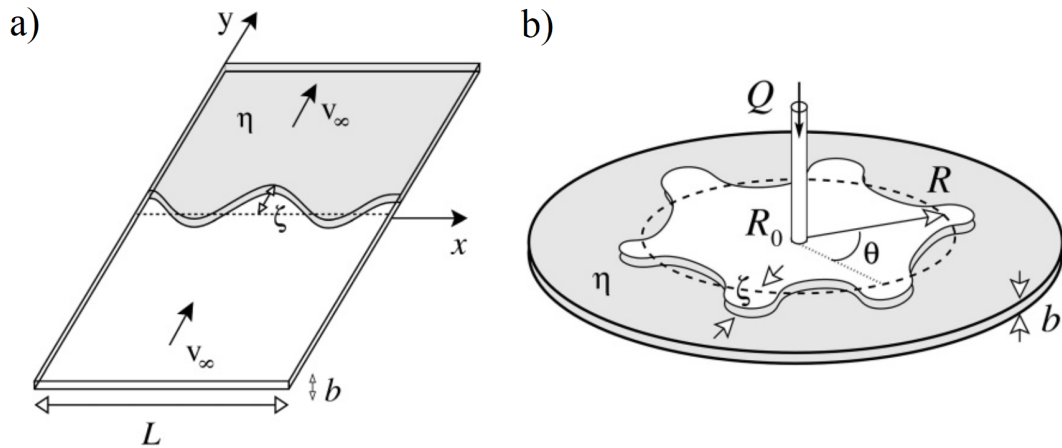
1.1 A CÉLULA DE HELE-SHAW E A INSTABILIDADE ENTRE INTERFACES

A área de formação de padrões é bastante extensa e impressionante, envolvendo o estudo de vários sistemas, que vão desde cristais de gelo a conchas de animais marinhos (THOMPSON, 1992; STEVENS, 1974). Nas seções seguintes exploramos a formação de padrões em um sistema específico da mecânica de fluidos, o deslocamento numa célula de Hele-Shaw. Desenvolvida pelo engenheiro inglês Henry Selby Hele-Shaw no final do século XIX, tinha como objetivo o estudo de linhas de corrente de fluxos ao redor de objetos. O aparato é composto por duas placas paralelas, separadas por uma distância bastante pequena. A Fig. 1 ilustra as configurações mais usuais da célula de Hele-Shaw.

Um grande interesse no estudo da célula de Hele-Shaw vem do fluxo satisfazer as mesmas leis de um fluxo em meios porosos, a equação de Darcy. Henry Philibert Gaspard Darcy foi um engenheiro francês do século XIX, com relevantes trabalhos em hidrodinâmica e meios porosos. Mais especificamente, estudou filtros para a água de fontes públicas (Fig. 2). Com um filtro formado por uma coluna vertical de areia, encontrou empiricamente que a velocidade do fluxo depende do gradiente de pressão ao qual o fluido está submetido. Essa relação entre a célula de Hele-Shaw e meios porosos torna-a relevante para outras aplicações, como a extração de petróleo. Neste caso, o petróleo alojado em pedras porosas é expelido pelo bombeamento de um fluido menos viscoso (água).

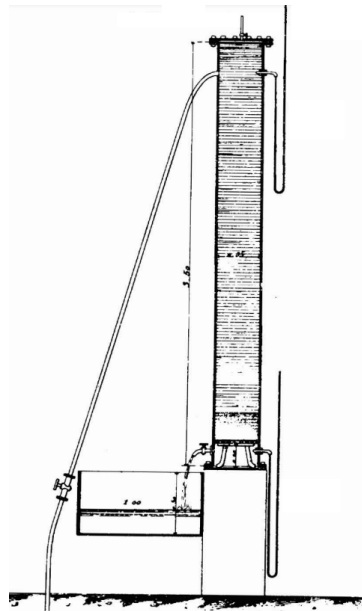
O deslocamento de um fluido menos viscoso por um fluido mais viscoso resulta numa interface estável, mas o caso contrário, como na exploração de petróleo, favorece a formação de perturbações na interface que separa os fluidos. Estas deformações podem crescer bastante, formando os chamados dedos viscosos e prejudicando a eficiência do método de extração. A formação e dinâmica dos dedos viscosos é conhecido como instabilidade de Saffman-Taylor. A deformação da interface no avanço do fluido menos viscoso causa um aumento do gradiente de pressão, reforçando o crescimento do dedo viscoso. Por outro lado, a deformação da interface aumenta a força de estabilização decorrente da tensão superficial entre os fluidos, essa instabilidade é fundamental para problemas com injeção de um fluido. A Fig. 3 apresenta a formação de dedos viscosos obtidas por Saffman e Taylor em seu trabalho histórico (SAFFMAN; TAYLOR, 1958), mas ocasionadas pela diferença de densidade entre os fluidos superior e inferior, conhecida como instabilidade de Rayleigh-Taylor, usando como fluido mais denso glicerina e ar

Figura 1 – Figuras esquemáticas para a célula de Hele-Shaw retangular (a) e radial (b). O fluido deslocado possui viscosidade η , enquanto a viscosidade do outro fluido é muito menor. O espaçamento entre as placas é denotado por b (da ordem de 1 mm). Para o caso retangular (a), v_∞ é a velocidade do fluxo injetado numa extremidade da célula e retirado na outra. Já ζ corresponde à perturbação da interface em relação ao avanço homogêneo. Para a figura radial (b), Q representa a taxa de injeção do fluido interno, R o raio caso a interface fosse circular e ζ a perturbação da interface.



Fonte: (DIAS; MIRANDA, 2011)

Figura 2 – Esquema de filtro para fonte pública feito por Darcy.



Fonte: (DARCY, 1856)

como menos denso. A célula retangular da Fig. 3 é disposta verticalmente e a glicerina cai pela ação da força gravitacional. Também podemos observar a característica de competição, onde dedos maiores inibem o crescimento de outros dedos. No que segue consideramos células horizontais, onde podemos desprezar efeitos gravitacionais.

A maior parte dos estudos de instabilidades em células de Hele-Shaw usa uma geometria

Figura 3 – Competição entre dedos viscosos para a célula de Hele-Shaw retangular disposta verticalmente.

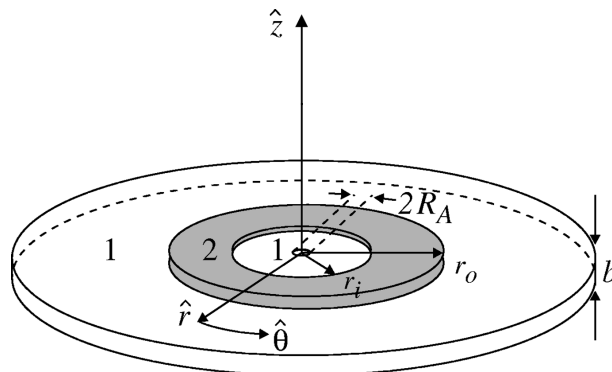


Fonte: (SAFFMAN; TAYLOR, 1958)

retangular (Fig. 1(a)) ou radial (Fig. 1(b)), a última a ser explorada nos capítulos seguintes. É comum o avanço de um fluido menos viscoso por sua injeção, mas também são bastante exploradas as instabilidades devidas à rotação em células radiais, com atuação de forças centrífugas e, nos casos onde há presença de fluidos magnéticos (ferrofluidos), a aplicação de campos magnéticos, com atuação de forças magnéticas (ROSENSWEIG, 1985).

Uma variação do problema envolve a utilização de três fluidos. Na geometria radial, isso significa um fluido externo, um anel intermediário e outro fluido interno, formando duas interfaces. A visão esquemática dessa configuração é apresentada na Fig. 4, onde r_i e r_o são, respectivamente, os raios interno e externo do anel. Dependendo da situação, podemos ter nenhuma, uma, ou ambas as interfaces instáveis. O anel pode ser obtido pela injeção cuidadosa do fluido intermediário num meio que já contém o fluido externo, para depois injetar-se o fluido interno. É visto que, como o anel possui volume constante, a injeção do fluido interno reduz sua espessura, e esse afinamento possui efeito estabilizante sobre as perturbações internas (CARDOSO; WOODS, 1995). A Fig. 5 mostra esse fenômeno para um anel de glicerina e ar como fluido interno e externo, um caso onde a interface interna é naturalmente instável. Os mesmos autores mostram, na Fig. 6, a ruptura do anel e formação de pequenas bolhas para o uso de três fluidos diferentes, natrosol (interno e de maior viscosidade), ar (anel e de menor

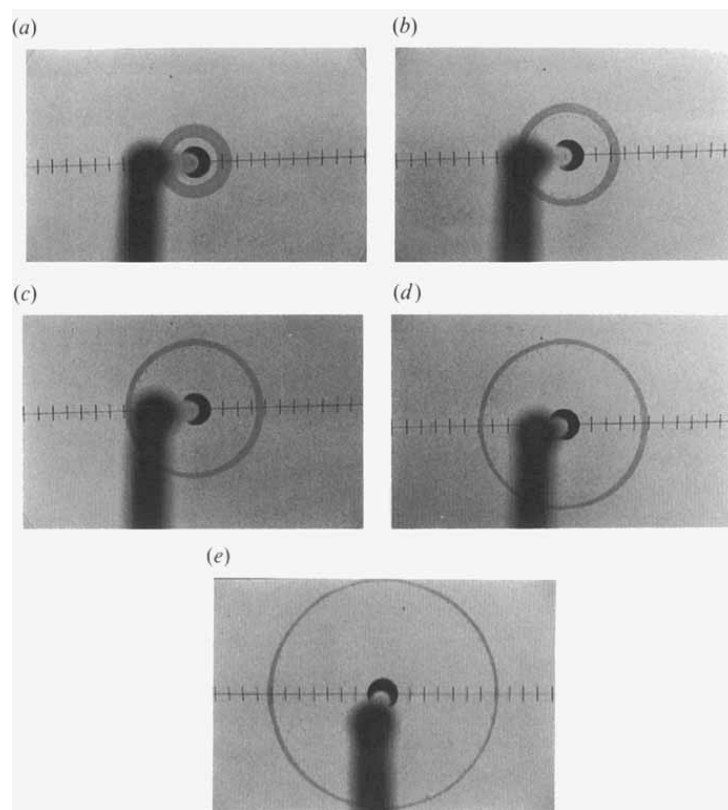
Figura 4 – Representação esquemática de um anel de fluido numa célula de Hele-Shaw. Na figura, r_i e r_o são, respectivamente, os raios interno e externo do anel. R_A indica o raio do orifício central usado para injeção dos fluidos.



Fonte: (CARRILLO; SORIANO; ORTÍN, 1999)

viscosidade) e glicerina (externo e viscosidade intermediária). Nesse caso a interface externa é naturalmente instável e o rompimento do anel acontece quando as perturbações crescem a ponto dos fluidos interno e externo encontrarem-se.

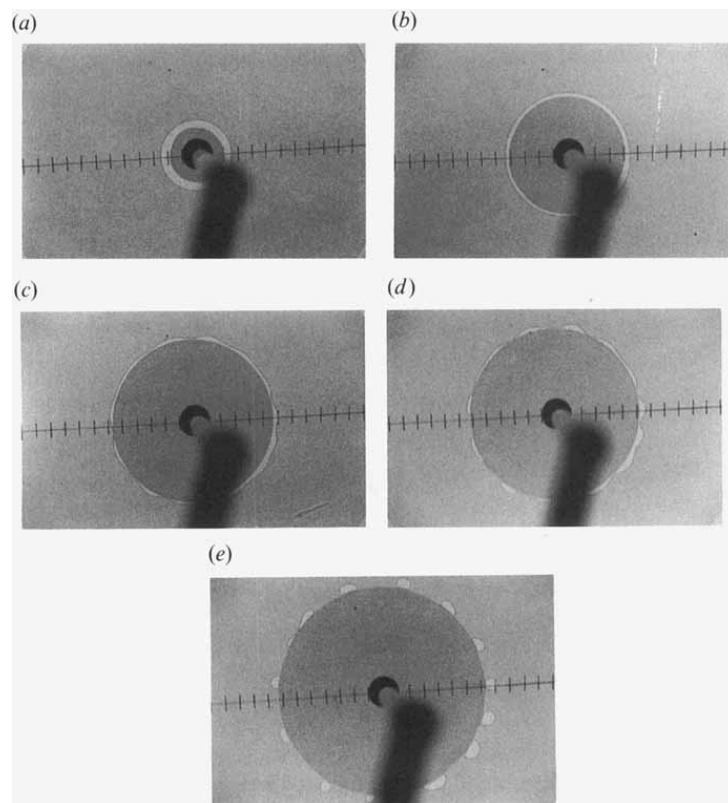
Figura 5 – Efeito estabilizante do afinamento do anel.



Fonte: (CARDOSO; WOODS, 1995)

A injeção para um anel bastante largo também foi explorada tanto numericamente (ZHAO et al., 2020) quanto experimentalmente (WARD; WHITE, 2011), resultando numa formação

Figura 6 – Rompimento do anel e formação de bolhas.

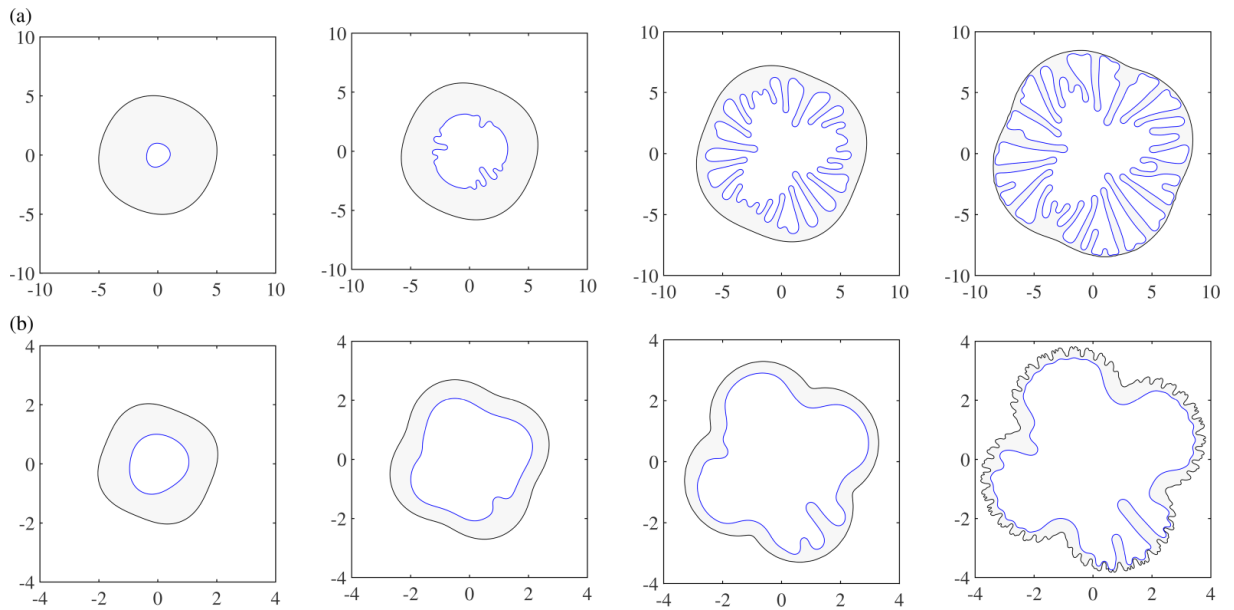


Fonte: (CARDOSO; WOODS, 1995)

muito mais dramática de dedos na interface interna. A Fig. 7 mostra a evolução numérica para um anel de viscosidade muito maior que os fluidos interno e externo (o mesmo). Com maior distância entre as interfaces, vemos a formação de grandes perturbações, sem o efeito estabilizante do afinamento do anel da Fig. 5. A Fig. 8 exibe os resultados experimentais para o sistema equivalente, com um anel de líquido viscoso e injeção de ar (também o fluido externo). Há grande crescimento das instabilidades da interface interna até o rompimento do anel.

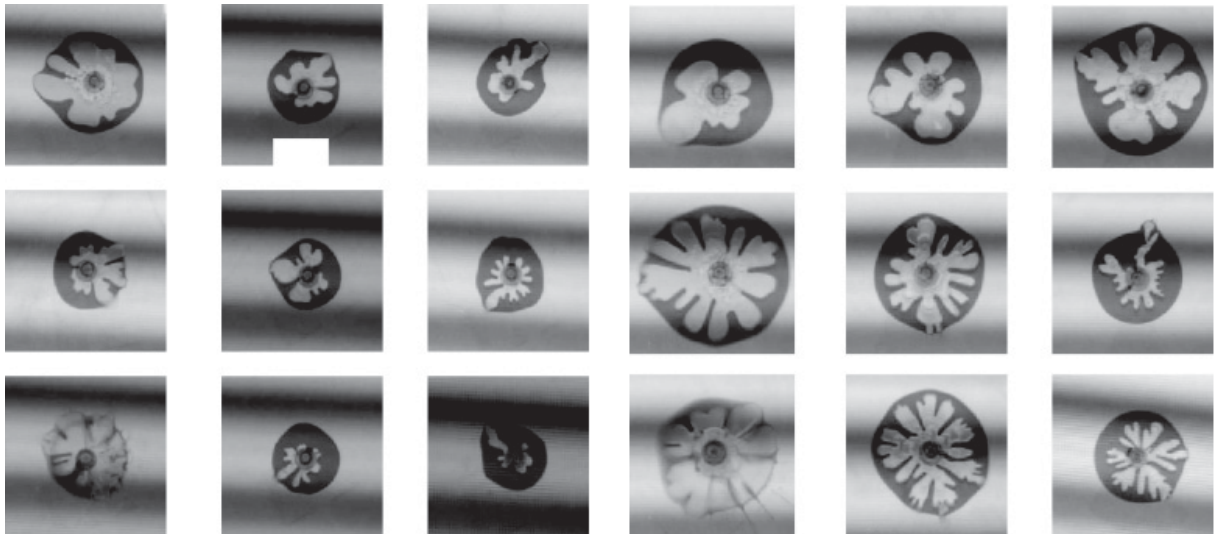
O problema da célula de Hele-Shaw girante também foi estendido para o caso de um anel (CARRILLO; SORIANO; ORTÍN, 2000). Na Fig. 9, os autores exibem alguns resultados experimentais para quando o centro da célula é aberto à entrada de ar. Inicialmente injeta-se uma gota de óleo de raio L_0 . Em seguida o sistema é posto em rotação, onde as forças centrífugas empurram o fluido para fora radialmente. Foi permitida a entrada de ar no centro da célula, formando assim um anel do fluido anterior. Maiores valores de L_0 estão associados a anéis mais largos. As perturbações crescem primeiro simultaneamente ou na interface externa, exceto quando o anel é bastante largo. Nesse caso formam-se dedos viscosos com bifurcações na

Figura 7 – Evolução computacional para injeção em um anel.



Fonte: (ZHAO et al., 2020)

Figura 8 – Resultado experimental para injeção, apresentando o momento de rompimento do anel. Os autores utilizam um sistema com gás-líquido-gás.

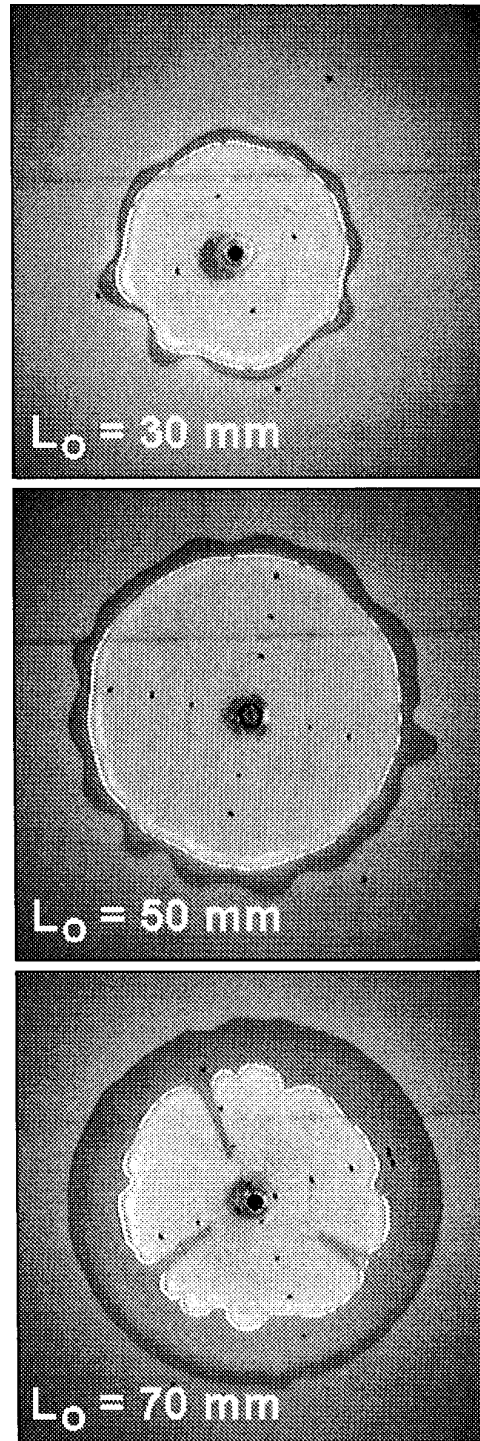


Fonte: (WARD; WHITE, 2011)

interface interna. Para o caso do anel muito delgado, para tempos avançados aparecem gotas nas pontas dos dedos viscosos (Fig. 10).

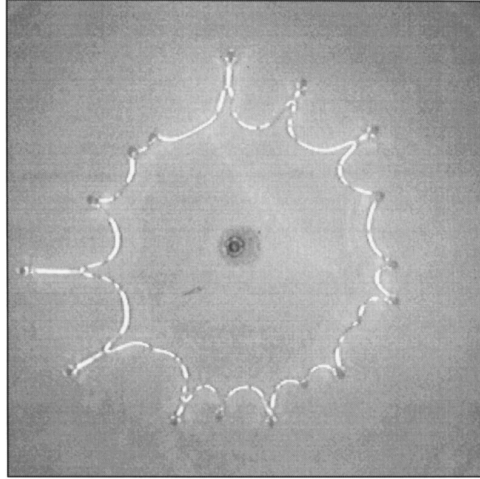
Também é bastante conhecida a dinâmica de fluidos miscíveis. Nela são explorados os gradientes de concentração e viscosidade dos fluidos. A Fig. 11 mostra a evolução experimental e computacional para a injeção de fluidos miscíveis, com o fluido intermediário muito mais viscoso. Quando as perturbações aproximam-se da interface externa, essa age inicialmente como uma barreira, até que a difusão sobrepõe-se (SHARMA et al., 2021).

Figura 9 – Perturbações para um anel girante, L_0 está associado a uma maior espessura do anel.



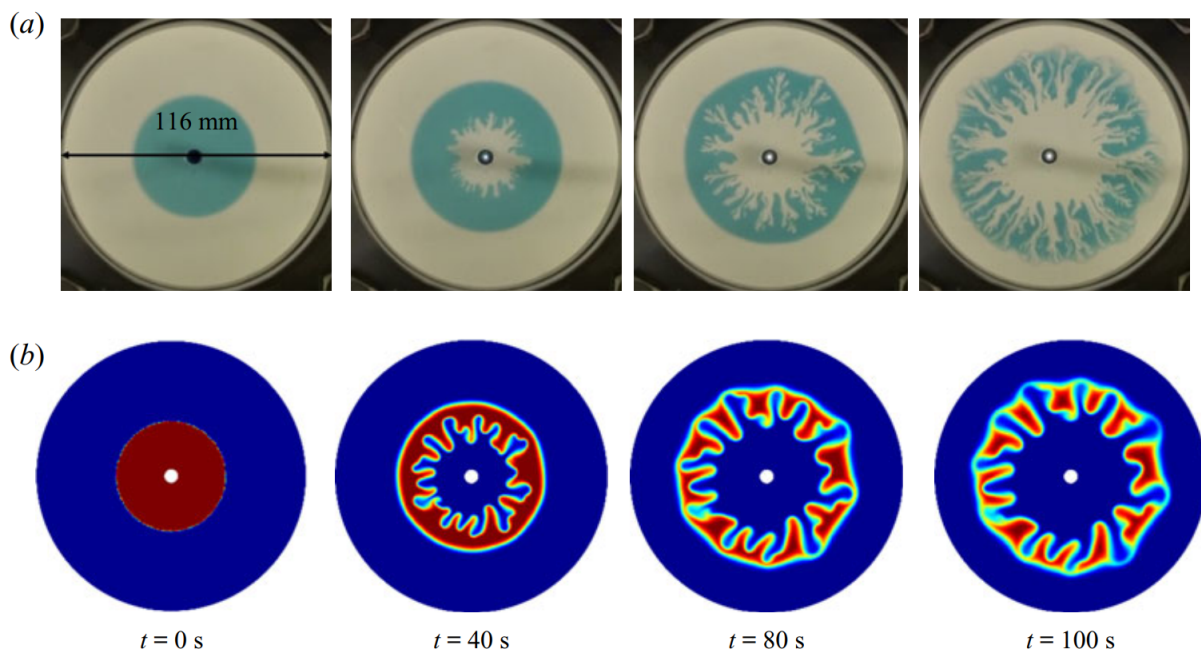
Fonte: (CARRILLO; SORIANO; ORTÍN, 2000)

Figura 10 – Formação de gotas num anel girante bastante fino



Fonte: (CARRILLO; SORIANO; ORTÍN, 2000)

Figura 11 – Evolução temporal (a) experimental e (b) computacional para a injeção de fluidos miscíveis



Fonte: (SHARMA et al., 2021)

1.2 FERROFLUIDOS

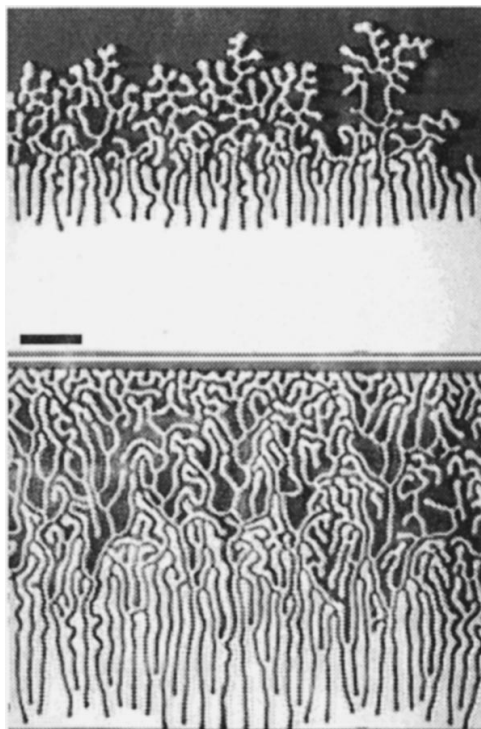
Os problemas investigados nos capítulos 2 e 3 envolvem a aplicação de campos magnéticos em ferrofluidos confinados numa célula de Hele-Shaw. Um ferrofluido é uma solução coloidal, composta por pequenas (3-15 nm) partículas sólidas magnéticas, suspensas num solvente líquido (ROSENSWEIG, 1985).

As partículas magnéticas são de domínio único, sendo revestidas por uma camada molecular de um dispersante, evitando o agrupamento das mesmas. A agitação térmica também contribui para que não acumulem, e também evita que o sistema decante. O ferrofluido é paramagnético, pois, sem campo, as várias partículas individuais apresentam orientações aleatórias. Quando aplicamos um campo magnético, as partículas suspensas alinham-se. Para campos moderados, a resposta do ferrofluido é muito maior que para a maioria dos sólidos paramagnéticos, então o comportamento do ferrofluido é descrito como superparamagnético.

Os ferrofluidos possuem diversas aplicações, que vão do uso como contraste em exames de ressonância magnética, a selos de eixos rotativos. Estamos interessados em seu comportamento quando confinado a uma camada fina, mais especificamente numa célula de Hele-Shaw. A aplicação de um campo magnético normal ao plano da célula produz as conhecidas instabilidades labirínticas (PACITTO et al., 2000; LANGER; GOLDSTEIN; JACKSON, 1992), onde o balanço das forças magnéticas e de tensão superficial (também forças gravitacionais para a célula inclinada ou vertical) formam padrões bastante intrincados (Fig. 12).

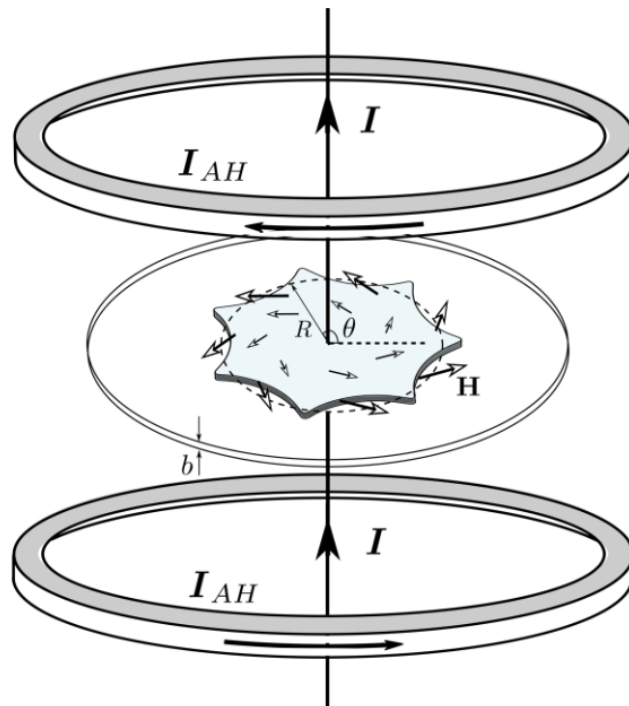
Exploramos a ação no ferrofluido de campos magnéticos radiais e azimutais em relação ao plano da célula de Hele-Shaw, com o aparato necessário para sua aplicação ilustrado na Fig. 13. O campo radial pode ser obtido com o uso de duas bobinas de Helmholtz com correntes iguais e sentidos contrários, à mesma distância da placa, enquanto o campo azimutal é resultado da corrente de um fio perpendicular à célula. A Fig. 14 mostra a solução exata para padrões estacionários do ferrofluido sob campo externo radial. Como veremos, essas configurações permitem a exploração de uma dinâmica bastante rica para um anel de ferrofluido.

Figura 12 – Padrão labiríntico para campo magnético normal à célula de Hele-Shaw



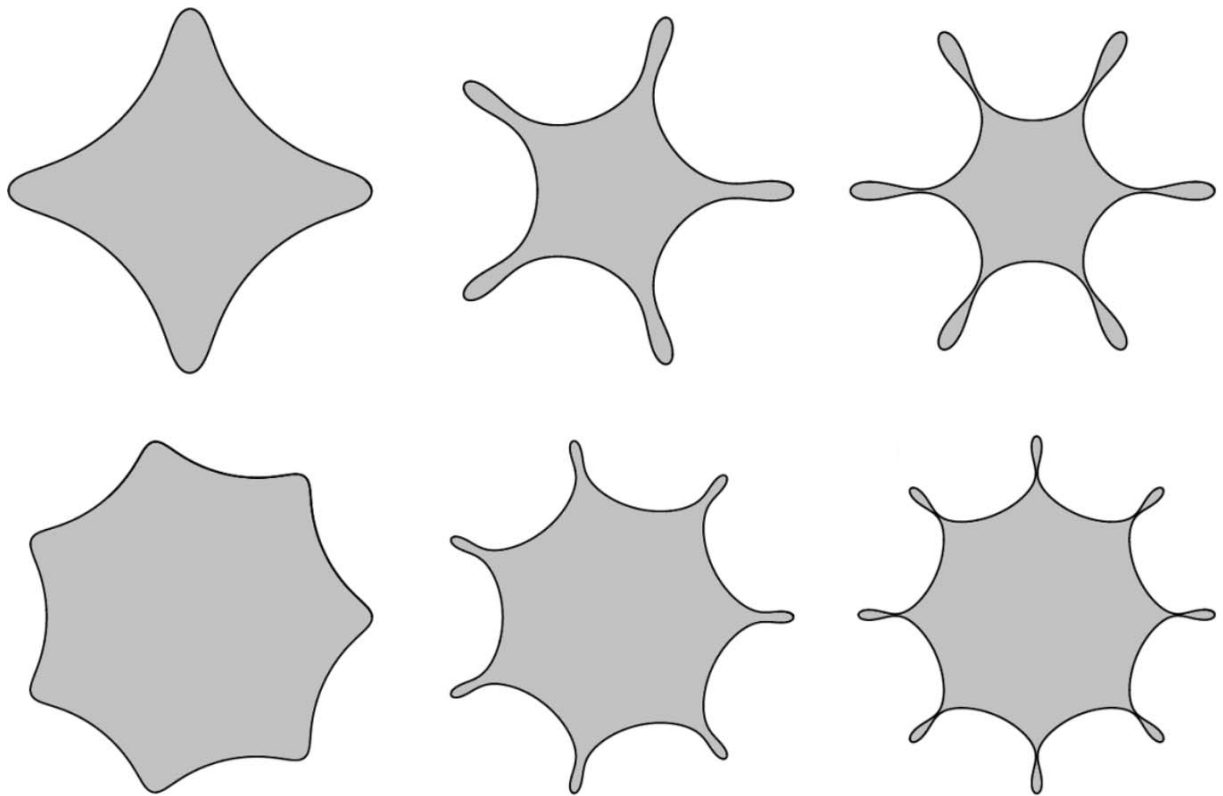
Fonte: (PACITTO et al., 2000)

Figura 13 – Representação esquemática para aplicação de campos magnéticos numa célula de Hele-Shaw. A passagem de corrente num fio central, perpendicular às placas, gera um campo magnético azimutal. O campo radial é fruto das bobinas de Helmholtz com correntes em sentidos opostos, a uma mesma distância da célula. O campo magnético \mathbf{H} ilustrado corresponde à soma das componentes radial e azimutal.



Fonte: (YU; CHRISTOV, 2021b)

Figura 14 – Solução exata de padrões estacionários para campo magnético radial aplicado no ferrofluido.



Fonte: (OLIVEIRA; MIRANDA; LEANDRO, 2008)

1.3 EQUAÇÕES BÁSICAS

Nos capítulos seguintes, consideramos o sistema composto por um anel de ferrofluido, de viscosidade η_2 , circundado por dois fluidos não magnéticos de viscosidades η_1 (interno) e η_3 (externo), todos newtonianos e confinados numa célula de Hele-Shaw de espaçamento b . Os fluidos formam uma interface interna (externa) com tensão superficial σ_{12} (σ_{23}) e raio não perturbado R_1 (R_2). Aplicamos um campo magnético externo \mathbf{H} coplanar à célula e analisamos as deformações que ocorrem no sistema.

Considerando a contribuição de forças magnéticas, o movimento dos fluidos numa célula de Hele-Shaw satisfaz a equação de Darcy (JACKSON; GOLDSTEIN; CEBERS, 1994)

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla(p_j - \Psi_j), \quad (1.1)$$

reduzindo o sistema a um problema bidimensional. A Eq. (1.1) é obtida ao calcularmos a velocidade média do campo de velocidades tridimensional dos fluidos regido pela lei de Stokes, assumindo que possuem um perfil de velocidades parabólico no vão da célula, sendo nulas no contato com as placas da célula (condição de não deslizamento). Os fluidos são incompressíveis e desprezamos termos inerciais. Na Eq. (1.1), $p_j = p_j(r, \theta)$ é a pressão termodinâmica e Ψ_j o potencial escalar responsável pela força magnética. Como fizemos para as viscosidades, os subscritos 1, 2 e 3 referem-se aos fluidos interno, intermediário (anel), e externo. Definimos a pressão no fluido magnético como $p^* = p - \Psi$. O potencial escalar é dado por

$$\Psi_j = \frac{\mu_0 \chi H^2}{2}, \quad (1.2)$$

μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo e χ a suscetibilidade magnética do ferrofluido. De acordo com estudos anteriores (JACKSON; GOLDSTEIN; CEBERS, 1994; BLUMS; CEBERS; MAIOROV, 2010; ROSENSWEIG, 1985), assumimos o ferrofluido uniformemente magnetizado, com magnetização colinear ao campo magnético externo $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$. Para os fluidos não magnéticos, $\chi = 0$, logo $\Psi_1 = \Psi_3 = 0$. Usaremos, nos capítulos 2 e 3, campos magnéticos com gradiente diferente de zero, assim a maior contribuição para a força magnética local é devida ao campo externo e podemos desconsiderar efeitos de demagnetização (JACKSON; GOLDSTEIN; CEBERS, 1994; BLUMS; CEBERS; MAIOROV, 2010; ROSENSWEIG, 1985).

O sistema possui, inicialmente, interfaces circulares, com perturbações que crescem no tempo. Assim, expressamos o raio interno como $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1(\theta, t) = R_1 + \zeta(\theta, t)$, onde θ é o ângulo azimutal no plano $r - \theta$ e R_1 o raio inicial da interface. Representamos a perturbação

da interface pela série de Fourier

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) e^{in\theta}, \quad (1.3)$$

onde $\zeta_n(t)$ é a amplitude complexa do modo de número de onda n . Da mesma forma, para a interface externa temos $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2(\theta, t) = R_2 + \varepsilon(\theta, t)$, onde

$$\varepsilon(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_n(t) e^{in\theta}. \quad (1.4)$$

Nossa abordagem perturbativa considera termos até segunda ordem em ζ e ε . Também incluímos os modos $n = 0$ de forma a conservar a área da camada intermediária do fluido, independentemente das perturbações. A conservação de massa impõe que os modos $n = 0$ estão relacionados com os demais por $\zeta_0 = -(1/2R_1) \sum_{n=1}^{\infty} [|\zeta_n(t)|^2 + |\zeta_{-n}(t)|^2]$ e $\varepsilon_0 = -(1/2R_2) \sum_{n=1}^{\infty} [|\varepsilon_n(t)|^2 + |\varepsilon_{-n}(t)|^2]$ (MIRANDA; WIDOM, 1998).

É aparente pela Eq. (1.1) que o campo de velocidades é irrotacional ($\nabla \times \mathbf{v}_j = 0$), então podemos representar o problema das interfaces em função de potenciais de velocidade $\phi_j(r, \theta)$, onde $\mathbf{v}_j = -\nabla\phi_j$. Pela condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$, os potenciais de velocidade devem satisfazer a equação de Laplace $\nabla^2\phi_j = 0$. A solução geral, considerando velocidades nulas no centro do sistema (fluido 1) e para raios muito maiores que o anel (fluido 3), pode ser escrita como

$$\phi_1(r, \theta) = \sum_{n \neq 0} \alpha(t) \left(\frac{r}{R_1}\right)^{|n|} e^{in\theta}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(r, \theta) &= \sum_{n \neq 0} \beta(t) \left(\frac{r}{R_1}\right)^{-|n|} e^{in\theta} \\ &+ \sum_{n \neq 0} \gamma(t) \left(\frac{r}{R_2}\right)^{|n|} e^{in\theta}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\phi_3(r, \theta) = \sum_{n \neq 0} \omega(t) \left(\frac{r}{R_2}\right)^{-|n|} e^{in\theta}. \quad (1.7)$$

Em termos do potencial, a equação de Darcy (1.1) é dada por

$$\phi_j = \frac{b^2}{12\eta_j} (p_j - \Psi_j). \quad (1.8)$$

A relação entre os coeficientes $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, e $\omega(t)$ que aparecem nas Eqs. (1.5)-(1.7), com as amplitudes de perturbação $\zeta_n(t)$ e $\varepsilon_n(t)$ das Eqs. (1.3) e (1.4) (também com suas derivadas no tempo $\dot{\zeta}_n(t) = \frac{d\zeta}{dt}$ e $\dot{\varepsilon}_n(t) = \frac{d\varepsilon}{dt}$) é encontrada por meio da condição de contorno

cinemática (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; BATCHELOR, 2000; ROSENSWEIG, 1985). Essa expressa a continuidade da componente da velocidade normal à interface, na fronteira entre os fluidos. Para facilitar a demonstração, consideramos um deslocamento apenas na direção y da interface entre dois fluidos. Essa interface pode ser definida, no plano $x - y$, pela equação

$$I(x, y, t) \equiv y - \zeta(x, t) = 0, \quad (1.9)$$

com $\zeta(x, t)$ a perturbação da interface em relação ao eixo x , tomado como a interface não perturbada. $I(x, y, t)$ é inalterado para um observador que se move com a interface, assim

$$\frac{dI(x, y, t)}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla)I, \quad (1.10)$$

o subscrito i indicando o fluido de qual lado da interface. Substituindo I pela Eq.(1.9), temos

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_{iy} - v_{ix} \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Agora, retomamos o uso do potencial de velocidade, encontrando

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)_{y=\zeta} - \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right)_{y=\zeta}. \quad (1.12)$$

Estamos interessados no deslocamento de uma interface inicialmente quase circular, então, empregando coordenadas polares, temos, para a interface interna,

$$\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}_1} - \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}_1}, \quad (1.13)$$

com $j = 1, 2$, e para a interface externa,

$$\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}_2} - \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) \Big|_{r=\mathcal{R}_2}, \quad (1.14)$$

com $j = 2, 3$.

Outra condição de contorno fundamental para a solução do problema é a descontinuidade de pressão na interface entre dois fluidos, devida à tensão superficial e a diferença de estresses normais magnéticos em qualquer lado do anel de ferrofluido. Tal condição é a equação generalizada de Young-Laplace (ROSENSWEIG, 1985; BLUMS; CEBERS; MAIOROV, 2010), calculada em cada interface,

$$(p_1 - p_2^*)|_{r=\mathcal{R}_1} = \left[\sigma_{12} \kappa_{12} + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \right] \Big|_{r=\mathcal{R}_1}, \quad (1.15)$$

$$(p_2^* - p_3)|_{r=\mathcal{R}_2} = \left[\sigma_{23} \kappa_{23} - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \right] \Big|_{r=\mathcal{R}_2}, \quad (1.16)$$

onde

$$\kappa_{12} = \frac{\mathcal{R}_1^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial \theta} \right)^2 - \mathcal{R}_1 \frac{\partial^2 \mathcal{R}_1}{\partial \theta^2}}{\left[\mathcal{R}_1^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

e

$$\kappa_{23} = \frac{\mathcal{R}_2^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial \theta} \right)^2 - \mathcal{R}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{R}_2}{\partial \theta^2}}{\left[\mathcal{R}_2^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{R}_2}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

denotam as curvaturas (κ_{12} e κ_{23}) da interface interna e externa, respectivamente, no plano da célula de Hele-Shaw, enquanto σ_{12} e σ_{23} são as tensões superficiais das interfaces. O vetor unitário normal à interface também é dado em termos dos raios perturbados, com $\hat{\mathbf{n}}_{r=\mathcal{R}_1} = [\nabla(r - \mathcal{R}_1)/|\nabla(r - \mathcal{R}_1)|]_{r=\mathcal{R}_1}$ e $\hat{\mathbf{n}}_{r=\mathcal{R}_2} = [\nabla(r - \mathcal{R}_2)/|\nabla(r - \mathcal{R}_2)|]_{r=\mathcal{R}_2}$. Para obter as Eqs. (1.15) e (1.16), consideramos um fluxo constante, algo bastante válido quando não temos grandes mudanças nas velocidades dos fluidos, de modo que devemos ter um equilíbrio das forças normais agindo no elemento de interface. O primeiro termo no lado direito de ambas as equações é devido à tensão superficial da interface, mas consideramos apenas a curvatura no plano da célula. A curvatura perpendicular à célula é basicamente constante, de forma que não afeta significativamente a evolução da interface e podemos desconsiderá-la. O termo proporcional a $(\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2$ nas Eqs. (1.15) e (1.16) é conhecido como o termo de tração magnética normal (BLUMS; CEBERS; MAIOROV, 2010; ROSENSWEIG, 1985), incorporando a descontinuidade da magnetização entre as interfaces, o sinal positivo está relacionado ao ferrofluido ser o fluido externo para a interface interna e o contrário para a outra interface. Para obtê-lo devemos considerar a continuidade da componente normal do campo magnético \mathbf{B} e da componente tangente do campo magnético auxiliar \mathbf{H} nas interfaces. O asterisco é usado para a pressão do fluido 2 por possuir contribuição magnética (ver a Eq. (1.1)).

Possuímos, agora, as condições necessárias para encontrar as equações que determinam o crescimento fracamente não linear das perturbações ζ e ε . Primeiramente usamos as condições de contorno cinemáticas (Eqs. (1.13) e (1.14)) com a expansão dos potenciais dados pelas Eqs.(1.5-1.7) até segunda ordem em ζ_n e ε_n . Após algum esforço matemático calculando as transformadas de Fourier e descartando termos de terceira ordem ou superiores, encontramos os coeficientes α , β , γ e ω , para cada modo de Fourier dos potenciais de velocidade em função das perturbações das amplitudes, sendo

$$\alpha = -\frac{R_1}{|n|} \dot{\zeta}_n + \sum_{n \neq 0} \left(\text{sgn}(nn') - \frac{1}{|n|} \right) \dot{\zeta}_{n'} \dot{\zeta}_{n-n'}, \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{f_n^{-1}}{|n|} \left(R_1 \dot{\zeta}_n - R^{|n|} R_2 \dot{\varepsilon}_n \right. \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \left[(nn' + |n'|) \frac{f_n^{-1}}{|n|} (R_1 \dot{\zeta}_{n'} - R^{|n|} R_2 \dot{\varepsilon}_{n'}) \left(\frac{\zeta_{n-n'}}{R_1} - R^{|n|+|n'|} \frac{\varepsilon_{n-n'}}{R_2} \right) \right. \\
&+ \left. \left. (nn' - |n'|) \frac{f_n^{-1}}{|n|} (R^{|n|} R_1 \dot{\zeta}_{n'} - R_2 \dot{\varepsilon}_{n'}) \left(R^{|n'|} \frac{\zeta_{n-n'}}{R_1} - R^{|n|} \frac{\varepsilon_{n-n'}}{R_2} \right) \right] \right), \tag{1.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{f_n^{-1}}{|n|} \left(R^{|n|} R_1 \dot{\zeta}_n - R_2 \dot{\varepsilon}_n \right. \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \left[(nn' + |n'|) \frac{f_n^{-1}}{|n|} (R_1 \dot{\zeta}_{n'} - R^{|n|} R_2 \dot{\varepsilon}_{n'}) \left(R^{|n|} \frac{\zeta_{n-n'}}{R_1} - R^{|n'|} \frac{\varepsilon_{n-n'}}{R_2} \right) \right. \\
&+ \left. \left. (nn' - |n'|) \frac{f_n^{-1}}{|n|} (R^{|n|} R_1 \dot{\zeta}_{n'} - R_2 \dot{\varepsilon}_{n'}) \left(R^{|n|+|n'|} \frac{\zeta_{n-n'}}{R_1} - \frac{\varepsilon_{n-n'}}{R_2} \right) \right] \right) \tag{1.19}
\end{aligned}$$

e

$$\omega = \frac{R_2}{|n|} \dot{\varepsilon}_n + \sum_{n' \neq 0} \left(\operatorname{sgn}(nn') + \frac{1}{|n|} \right) \dot{\varepsilon}_{n'} \dot{\varepsilon}_{n-n'}, \tag{1.20}$$

onde $f_n = 1 - R^{2|n|}$ e $R = R_1/R_2$. Em seguida, usamos a equação de Darcy para o potencial (Eq. (1.8)) para substituir as pressões nas Eqs. (1.15) e (1.16). Expandindo todos os termos até segunda ordem em ζ_n e ε_n , encontramos as equações diferenciais que determinam $\dot{\zeta}_n$ e $\dot{\varepsilon}_n$. De forma geral teremos as expressões

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_n &= C_1(n) \zeta_n + C_2(n) \varepsilon_n \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \left[C_3(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + C_4(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \left[C_5(n, n') \varepsilon_{n'} \varepsilon_{n-n'} + C_6(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \varepsilon_{n-n'} \right] \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \left[C_7(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \varepsilon_{n-n'} + C_8(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \tag{1.21}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_n &= \mathcal{C}_1(n)\zeta_n + \mathcal{C}_2(n)\varepsilon_n \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{C}_3(n, n') \varepsilon_{n'} \varepsilon_{n-n'} + \mathcal{C}_4(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \varepsilon_{n-n'} \right] \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{C}_5(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{C}_6(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \\
&+ \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{C}_7(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{C}_8(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \varepsilon_{n-n'} \right],
\end{aligned} \tag{1.22}$$

onde as funções $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_8, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_8$ dependem dos parâmetros físicos e do campo magnético em questão. O caso de um campo magnético externo radial é apresentado no capítulo 2, enquanto o capítulo 3 traz a combinação de campos radial e azimutal, com as funções de segunda ordem dadas, respectivamente, nos apêndices A e B.

1.4 ROTEIRO DA DISSERTAÇÃO

Realizamos, nas seções anteriores, uma discussão qualitativa a respeito da célula de Hele-Shaw e a formação de dedos viscosos para diversas configurações. Também foram apresentadas, na seção 1.3, as equações fundamentais para a descrição de perturbações nas interfaces de um anel de ferrofluido.

No capítulo 2 faremos uma análise linear e fracamente não linear do sistema de um anel de ferrofluido viscoso e fluidos interior e exterior iguais e de viscosidade desprezível, quando aplicado um campo magnético radial. Vemos como o acoplamento entre as interfaces interfere nas perturbações, que para anéis muito largos resultam na interface externa perturbada e interface interna circular. Concentramos nossa atenção nos efeitos causados pela variação da espessura do anel, suscetibilidade magnética do ferrofluido e da razão entre as forças magnéticas e de tensão superficial, observando seus efeitos na instabilidade do sistema, número de dedos formado e seu aspecto morfológico.

Em seguida, expandimos no capítulo 3 o estudo anterior para a composição de um campo magnético radial e um campo magnético azimutal. Consideramos o caso do campo radial maior que o azimutal, onde o aumento progressivo do campo azimutal modifica os padrões encontrados no capítulo 2, entortando os dedos viscosos e apresentando padrões girantes. Também analisamos um campo magnético maior azimutal com incremento de campo radial. Esse aumento também resulta na quebra de simetria dos dedos viscosos, que agora são naturais

da interface interna e pertencentes a um padrão em rotação. Em ambos os casos observamos o efeito do acoplamento entre as interfaces. Por fim, avaliamos a magnitude e direção da velocidade de rotação dos padrões.

O resultado apresentado no capítulo 2 é fruto de nossa pesquisa durante o mestrado, estando publicado (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021). Já a pesquisa realizada no capítulo 3 encontra-se submetida para publicação (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2022). No anexo A encontra-se um artigo desenvolvido durante minha iniciação científica, com tema relacionado ao explorado nessa dissertação (LIVERA; MIRANDA, 2020).

2 ANEL DE FERROFLUIDO EM CAMPO RADIAL

2.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Nosso problema físico consiste de um anel de ferrofluido que separa dois fluidos não magnéticos confinados numa célula de Hele-Shaw com espaçamento b (Fig. 15). Os fluidos são newtonianos e imiscíveis, de viscosidades η_1 , η_2 e η_3 , e formam uma interface interna(externa) com tensão superficial $\sigma_{12}(\sigma_{23})$ e raio não perturbado $R_1(R_2)$. Por meio de um sistema de duas bobinas de Helmholtz com correntes iguais em sentidos contrários, posicionamos a célula equidistante a ambas as bobinas e impomos nela um campo magnético coplanar

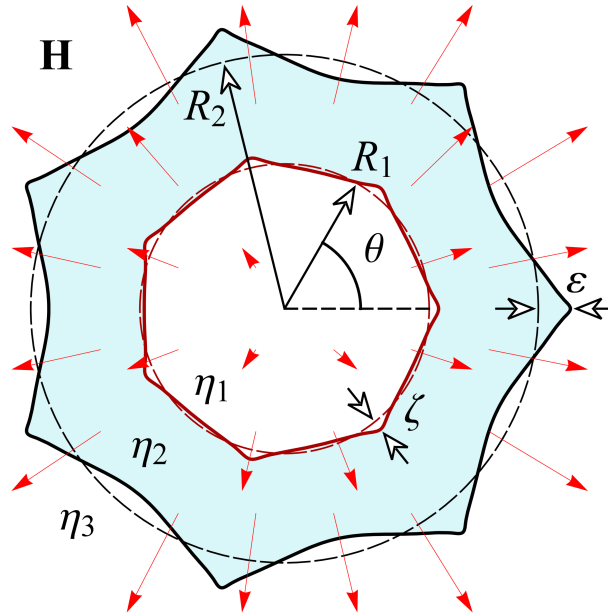
$$\mathbf{H} = H_0 r \hat{\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

que induz a desestabilização das interfaces. H_0 é uma constante, r a distância radial para a origem do sistema de coordenadas que tomamos como o centro da célula e $\hat{\mathbf{r}}$ o vetor unitário na direção radial.

Como visto na seção 1.3, a presença do campo magnético induz uma força sobre o anel de ferrofluido, apontando radialmente para fora, que tende a deformar suas interfaces interna e externa. Entretanto, as forças de tensão superficial tendem a manter o formato circular das interfaces. Por possuir gradiente não nulo, o campo aplicado será a principal contribuição para a força magnética local, assim podemos ignorar os efeitos do campo de demagnetização. Por não serem magnéticos, para o fluido interior e exterior temos $\chi_1 = 0$ e $\chi_3 = 0$. Repetindo raios perturbados interno $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1(\theta, t) = R_1 + \zeta(\theta, t)$ e externo $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2(\theta, t) = R_2 + \varepsilon(\theta, t)$, usamos as condições de contorno cinemática e de Young-Laplace (Eqs. (1.13)-(1.16)) para obter o conjunto de equações diferenciais adimensionais relacionando as funções de acoplamento para ζ_n e ε_n até segunda ordem

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_n &= f_1 \Lambda(n)\zeta_n + f_2 \Gamma(n)\varepsilon_n \\ &+ f_1 \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \\ &+ f_2 \sum_{n' \neq 0} \left[H(n, n') \varepsilon_{n'} \varepsilon_{n-n'} + I(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \varepsilon_{n-n'} \right] \\ &+ f_2 \sum_{n' \neq 0} \left[J(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \varepsilon_{n-n'} + K(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \zeta_{n-n'} \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

Figura 15 – Representação esquemática do fluxo induzido magneticamente, com três fluidos, numa célula de Hele-Shaw. A célula contém um anel de ferrofluido com raios inicialmente circulares R_1 e R_2 (círculos tracejados), viscosidade η_2 e é vizinho a fluidos não magnéticos de viscosidade η_1 (interno) e η_3 (externo). Quando submetido ao campo magnético \mathbf{H} , direcionado radialmente para fora no plano da célula, vemos a deformação das interfaces do anel de ferrofluido (curvas sólidas). As perturbações na estrutura deformada são denominadas por $\zeta(\theta, t)$ e $\varepsilon(\theta, t)$.



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021)

e

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_n &= f_3 \Lambda(n) \zeta_n + f_4 \Gamma(n) \varepsilon_n \\
 &+ f_4 \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{F}(n, n') \varepsilon_{n'} \varepsilon_{n-n'} + \mathcal{G}(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \varepsilon_{n-n'} \right] \\
 &+ f_3 \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{H}(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{I}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \\
 &+ f_3 \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{J}(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{K}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \varepsilon_{n-n'} \right],
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

com derivadas totais no tempo $\frac{d}{dt}$ denotadas pelo ponto sobrescrito.

Nas Eqs. (2.2) e (2.3), reescalamos o comprimento e o tempo por $L = r_0$ e $T = 12(\eta_3 + \eta_2)r_0^3/\sigma_{23}b^2$, respectivamente, onde r_0 é um comprimento característico da ordem dos raios não perturbados. As funções lineares são

$$\Lambda(n) = \left[-\mathcal{A}|n|N_B\chi(1+\chi) - \frac{\sigma}{R_1^3}\mathcal{A}|n|(n^2-1) \right], \tag{2.4}$$

$$\Gamma(n) = \left[|n|N_B\chi(1+\chi) - \frac{1}{R_2^3}|n|(n^2-1) \right] \tag{2.5}$$

enquanto as funções de segunda ordem $F, G, H, I, J, K, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{J}$, e \mathcal{K} encontram-se no apêndice A. Nas equações (2.2) e (2.3) temos os termos

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1 - A_{23}R^{2|n|}}{1 + A_{12}A_{23}R^{2|n|}}, & f_2 &= \frac{1 + A_{12}}{1 + A_{12}A_{23}R^{2|n|}}R^{|n|-1}, \\ f_3 &= \frac{1 - A_{23}}{1 + A_{12}A_{23}R^{2|n|}}R^{|n|+1}, & f_4 &= \frac{1 + A_{12}R^{2|n|}}{1 + A_{12}A_{23}R^{2|n|}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $A_{12} = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ ($A_{23} = (\eta_3 - \eta_2)/(\eta_3 + \eta_2)$) correspondem aos contrastes de viscosidades entre os fluidos 1 e 2 (2 e 3) e $\mathcal{A} = (\eta_3 + \eta_2)/(\eta_2 + \eta_1)$. São importantes para a descrição dinâmica do problema a razão entre os raios não perturbados

$$R = \frac{R_1}{R_2}, \quad (2.7)$$

relacionada com o acoplamento entre as interfaces, e o número de ligação magnética ("Bond number")

$$N_B = \frac{\mu_0 H_0^2 r_0^3}{\sigma_{23}}, \quad (2.8)$$

representando a razão entre as forças magnéticas e de capilaridade. Por fim $\sigma = \sigma_{12}/\sigma_{23}$ é a razão entre as tensões superficiais.

Na análise do sistema, as equações (2.2) e (2.3) mostram que já existe um acoplamento na ordem linear em ζ_n e ε_n , assim pequenas perturbações em uma interface podem impactar a dinâmica da outra. Nosso método de acoplamento de modos permite extrair, como é feito nas seções seguintes, resultados relevantes com respeito a aspectos morfológicos do sistema e sua dependência com os principais parâmetros adimensionais do problema R, N_B , e χ .

Intuitivamente, esperamos que no caso de um anel bastante largo a interferência de uma interface na outra deve ser consideravelmente reduzida, até o limite em que são desacopladas. Esta situação física corresponde a tomarmos a situação limite $R \rightarrow 0$, ou seja, $(f_1, f_4) \rightarrow 1$ e $(f_2, f_3) \rightarrow 0$ nas equações (2.2) e (2.3), obtendo

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_n &= \Lambda(n) \zeta_n \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_n &= \Gamma(n) \varepsilon_n \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{F}(n, n') \varepsilon_{n'} \varepsilon_{n-n'} + \mathcal{G}(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \varepsilon_{n-n'} \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Estes são os resultados correspondentes ao caso de uma única interface que separa dois fluidos. Reintroduzindo as dimensões do sistema, podemos mostrar que a Eq. (2.9) trata de uma gota de fluido não magnético de viscosidade η_1 rodeado por um ferrofluido de viscosidade η_2 , onde a taxa de crescimento linear $\Lambda(n)$ é independente do tempo e $\Lambda(n) < 0$ para qualquer n . Temos então uma situação estável que mantém seu formato circular para quaisquer parâmetros. Por outro lado, a Eq. (2.10) ilustra a situação de um ferrofluido de viscosidade η_2 circundado por um fluido não magnético de viscosidade η_3 , com a taxa de crescimento linear independente do tempo $\Gamma(n)$. Dependendo dos valores de χ e N_B teremos modos de Fourier com $\Gamma(n) > 0$, permitindo o crescimento de instabilidades. Estes resultados estão de acordo com trabalhos anteriores no campo de fluxos induzidos por forças magnéticas, para uma interface, em células de Hele-Shaw (JACKSON; GOLDSTEIN; CEBERS, 1994; ELBORAI et al., 2005; DICKSTEIN et al., 1993; FLAMENT et al., 1996; FLAMENT et al., 1998; PACITTO et al., 2000).

2.2 ANÁLISE LINEAR

Em tempos bastante iniciais na dinâmica do nosso sistema as interfaces são muito pouco deformadas pelo efeito das forças magnéticas, assim podemos considerar o regime linear da dinâmica. Nesse estágio inicial, as perturbações ζ e ε são tão pequenas que podemos desprezar os termos de segunda ordem nas Eqs. (2.2) e (2.3), mas vemos que o acoplamento entre as interfaces já existe nesse estágio. Buscamos então avaliar o efeito neste acoplamento causado pela variação do parâmetro R a partir das equações lineares

$$\dot{\zeta}_n = f_1 \Lambda(n) \zeta_n + f_2 \Gamma(n) \varepsilon_n, \quad (2.11)$$

e

$$\dot{\varepsilon}_n = f_3 \Lambda(n) \zeta_n + f_4 \Gamma(n) \varepsilon_n. \quad (2.12)$$

Temos um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) dado pelas Eqs. (2.11) e (2.12). Para resolvê-lo reescrevemos a Eq. (2.11) como

$$\varepsilon_n = \frac{\dot{\zeta}_n - f_1 \Lambda(n) \zeta_n}{f_2 \Gamma(n)} \quad (2.13)$$

e a substituímos na Eq. (2.12) para obter

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_n - [f_1 \Lambda(n) + f_4 \Gamma(n)] \dot{\zeta}_n \\ + [(f_1 f_4 - f_2 f_3) \Lambda(n) \Gamma(n)] \zeta_n = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tomamos as condições iniciais $\zeta_n(0) = \varepsilon_n(0)$ e $\dot{\zeta}_n(0) = [f_1 \Lambda(n) + f_2 \Gamma(n)]\zeta_n(0)$, assim encontramos as soluções

$$\zeta_n(t) = \frac{\zeta_n(0)}{2\delta(n)} \left\{ [f_1 \Lambda(n) + (2f_2 - f_4) \Gamma(n)] f_-(n, t) + \delta(n) f_+(n, t) \right\} \quad (2.15)$$

e, substituindo esse resultado na Eq. (2.12), temos que

$$\varepsilon_n(t) = \frac{\varepsilon_n(0)}{2\delta(n)} \left\{ [(2f_3 - f_1) \Lambda(n) + f_4 \Gamma(n)] f_-(n, t) + \delta(n) f_+(n, t) \right\}, \quad (2.16)$$

onde

$$\delta(n) = \sqrt{[f_1 \Lambda(n) - f_4 \Gamma(n)]^2 + 4f_2 f_3 \Lambda(n) \Gamma(n)}, \quad (2.17)$$

e

$$f_{\pm}(n, t) = \exp \left\{ \frac{t}{2} [f_1 \Lambda(n) + f_4 \Gamma(n) + \delta(n)] \right\} \pm \exp \left\{ \frac{t}{2} [f_1 \Lambda(n) + f_4 \Gamma(n) - \delta(n)] \right\}. \quad (2.18)$$

As equações (2.15) e (2.16) descrevem a evolução temporal linear das perturbações nas interfaces interna e externa, respectivamente. Podemos então obter a taxa de crescimento linear para cada modo n do sistema anular

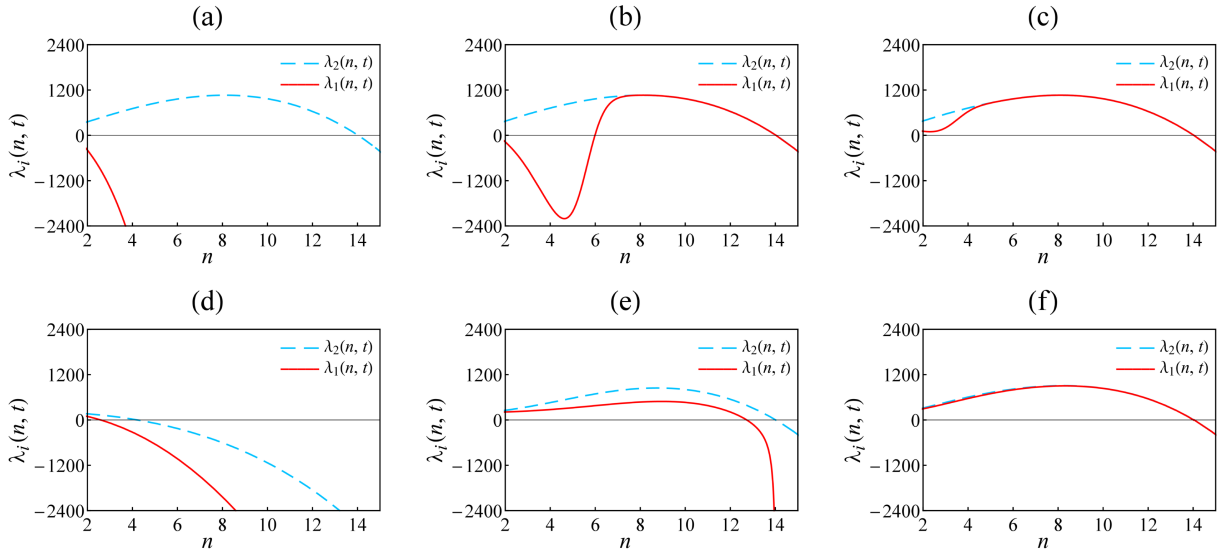
$$\lambda_1(n, t) \equiv \frac{\dot{\zeta}_n}{\zeta_n} = f_1 \Lambda(n) + f_2 \Gamma(n) \frac{\varepsilon_n(t)}{\zeta_n(t)}, \quad (2.19)$$

e

$$\lambda_2(n, t) \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n} = f_3 \Lambda(n) \frac{\zeta_n(t)}{\varepsilon_n(t)} + f_4 \Gamma(n), \quad (2.20)$$

para as interfaces interna e externa, respectivamente. Diferentemente do sistema mais simples de apenas dois fluidos e uma única interface (Eqs. (2.9) e (2.10)), vemos que a inclusão da segunda interface implica em taxas de crescimento linear dependentes do tempo. Dessa forma, uma interface inicialmente (em $t = 0$) estável, $\lambda_1(n, t = 0) < 0$ ou $\lambda_2(n, t = 0) < 0$, pode tornar-se instável com o passar do tempo, o que não ocorre no sistema simples (interface única), sendo um efeito do acoplamento entre interfaces.

Figura 16 – Taxas de crescimento linear $\lambda_i(n, t)$, $i = 1, 2$, como função do número de onda azimutal n para $R = 0.3$ (painéis superiores) e $R = 0.9$ (painéis inferiores), com três valores de tempo: $t = 0$ [(a) e (d)], $t = 10^{-3}$ [(b) e (e)], e $t = 2.2 \times 10^{-3}$ [(c) e (f)]. Os outros parâmetros são $N_B = 136$, $\chi = 0.8$, $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $\sigma = 1$ e $R_2 = 1$.



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021)

Para investigar os efeitos do parâmetro de acoplamento R na dinâmica linear do sistema, mostramos na Fig.16 as taxas de crescimento linear $\lambda_1(n, t)$ (Eq. (2.19)) e $\lambda_2(n, t)$ (Eq. (2.20)) do sistema como funções do modo n nos tempos $t = 0$ [(a) e (d)], $t = 10^{-3}$ [(b) e (e)], e $t = 2.2 \times 10^{-3}$ [(c) e (f)]. Usamos $R = 0.3$ para os painéis superiores e $R = 0.9$ nos inferiores, enquanto os outros parâmetros físicos são, em todos os casos analisados nesta seção, $N_B = 136$, $\chi = 0.8$, $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $R_2 = 1$, $R_1 = R$, e $\sigma = 1$. Como R é a razão entre os raios não perturbados (Eq. (2.7)), ele está relacionado com a espessura do anel de ferrofluido pela relação $1 - R$. Quanto maior o parâmetro adimensional R , menor a espessura do anel.

Inicialmente, analisamos o caso $R = 0.3$, correspondente ao acoplamento fraco entre as interfaces. Observando a Fig.16(a) vemos que a taxa de crescimento linear $\lambda_2(n, t)$ da interface externa é positiva no intervalo $2 \leq n \leq 14$ com valor máximo próximo a $n = 8$. Encontramos assim a banda de modos instáveis e o número de onda de maior crescimento (modo dominante). Com o avanço do tempo, vemos pelas figuras 16[(b) e (c)] que $\lambda_2(n, t)$ permanece quase inalterado. Mas temos uma história diferente quando analisamos $\lambda_1(n, t)$. Em $t = 0$ observamos que $\lambda_1(n, t)$ é negativo para qualquer valor de n (Fig.16(a)), implicando numa interface interna inicialmente estável, mas para momentos posteriores a curva começa a ficar positiva, inicialmente para modos maiores (Fig.16(b)) e depois para todos os modos

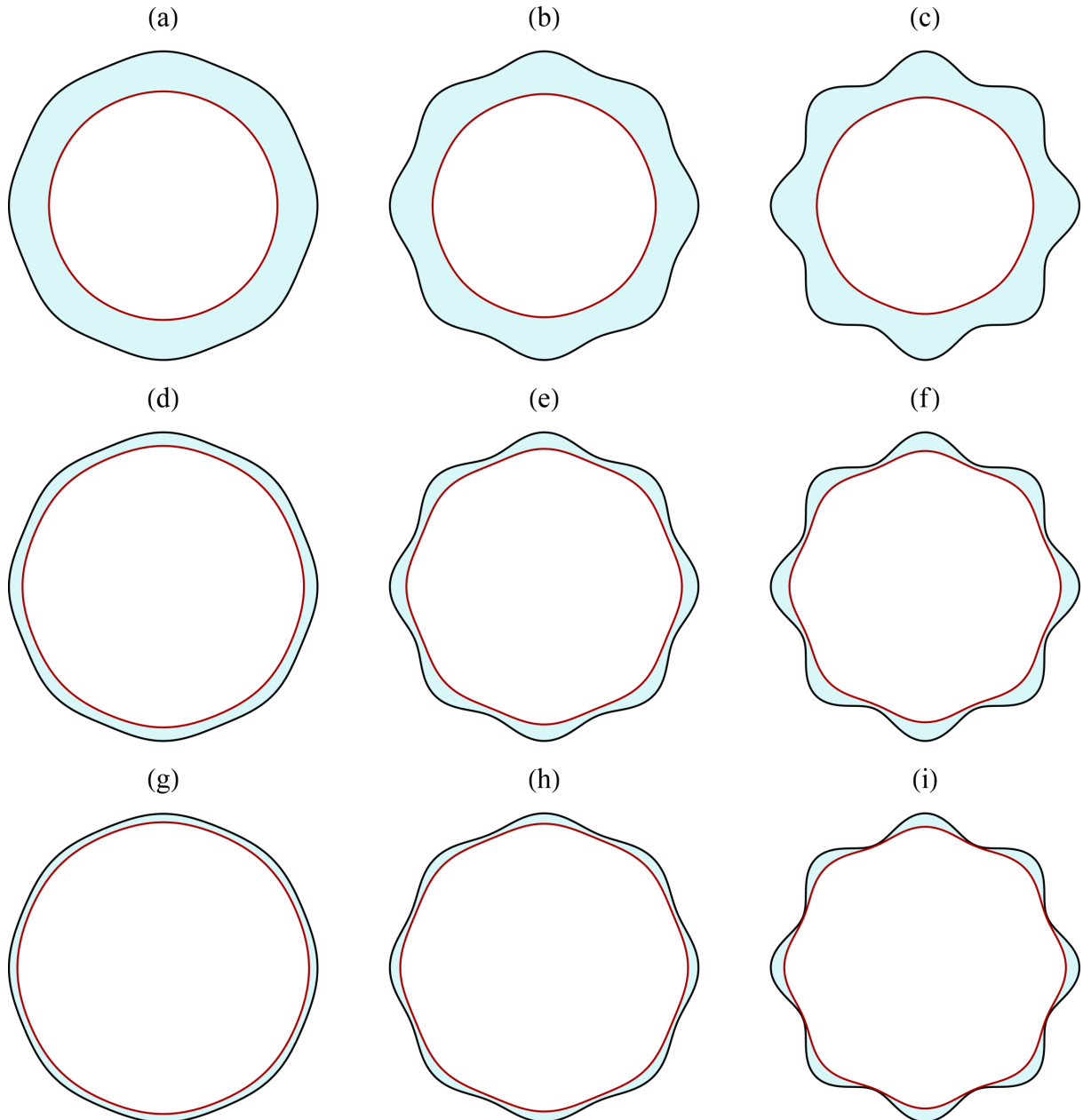
da banda instável de $\lambda_2(n, t)$ (Fig.16(c)). Vemos ainda que em $t = 2.2 \times 10^{-3}$ as curvas são bastante similares, e para tempos ainda maiores (não apresentados aqui) elas passam a sobrepor-se e param de variar no tempo. Isso não significa que o sistema encontra um estado estacionário, mas que a partir desse ponto as perturbações de ambas as interfaces crescem com a mesma taxa de crescimento linear constante no tempo.

Consideramos agora a linha inferior da Fig.16, para qual o acoplamento entre interfaces é bem mais forte, pois agora $R = 0.9$. A mudança na dinâmica do sistema já é vista em $t = 0$ (Fig.16(d)), onde notamos que a taxa de crescimento linear tem um pequeno valor positivo para alguns modos, mas a banda de modos instáveis de $\lambda_2(n, t)$ e também sua magnitude é bastante reduzida quando comparada com a Fig.16(a) de $R = 0.3$. Com o acoplamento mais intenso, as taxas de crescimento linear evoluem no tempo de forma similar Fig.16(e) até que são quase indistinguíveis Fig.16(f). Esperamos então que para R grande as interfaces evoluam com formato parecido e com pouca diferença na amplitude das perturbações. Já para R pequeno a interface externa já estará bastante deformada, enquanto a interface interna ainda permanece bastante circular pelo fato da taxa de crescimento linear $\lambda_2(n, t)$ já ter, em $t = 0$, seu formato quase final (Fig.16[(a) e (c)]).

Complementando a análise das taxas de crescimento linear feita na Fig.16, examinamos as estruturas que surgem no sistema de ferrofluido anular Fig.17 usando as equações (2.15) e (2.16). Ao produzir os padrões, consideramos a influência de um número finito de modos de Fourier e reescrevemos as equações (1.3) e (1.4) em termos das amplitudes cosseno de valores reais $a_n(t) = \zeta_n(t) + \zeta_{-n}(t)$ ($\bar{a}_n(t) = \varepsilon_n(t) + \varepsilon_{-n}(t)$). Usamos 80 modos de Fourier, o fundamental $n = 8$ e seus harmônicos $2n, 3n, \dots, e 80n$. O modo fundamental corresponde ao inteiro mais próximo do máximo da taxa de crescimento linear no tempo final t_f das evoluções (n_{\max}), que obtemos calculando ou $(d\lambda_1(n, t = t_f)/dn)|_{n=n_{\max}} = 0$ ou $(d\lambda_2(n, t = t_f)/dn)|_{n=n_{\max}} = 0$, já que as taxas de crescimento sobrepõem-se em tempos muito menores que os t_f considerados. O alto número de modos é importante para obtermos pontas suaves nos dedos viscosos quando analisarmos a dinâmica fracamente não linear mais adiante. Escolhemos, sem perda de generalidade, as fases tal que $a_n > 0$ e $\bar{a}_n > 0$. Também tomamos a condição inicial $a_n(0) = \bar{a}_n(0) = a_{2n}(0) = \bar{a}_{2n}(0) = \dots = a_{80n}(0) = \bar{a}_{80n}(0) = 10^{-5}$. Ressaltamos que todos os cálculos numéricos e simulações apresentadas nesse projeto foram feitos usando o software Mathematica.

Na Fig.17 cada linha corresponde a uma evolução temporal diferente, onde os padrões são apresentados nos tempos (a) $t = 7.0 \times 10^{-3}$, (b) $t = 8.0 \times 10^{-3}$, (c) $t = 8.6 \times 10^{-3}$,

Figura 17 – Evolução temporal puramente linear do anel de ferrofluido para $R = 0.75$ (painéis superiores), $R = 0.92$ (painéis intermediários), e $R = 0.95$ (painéis inferiores). Cada linha corresponde a uma evolução temporal diferente, onde usamos os valores de tempo: (a) $t = 7.0 \times 10^{-3}$, (b) $t = 8.0 \times 10^{-3}$, (c) $t = 8.6 \times 10^{-3}$, (d) $t = 9.5 \times 10^{-3}$, (e) $t = 1.1 \times 10^{-2}$, (f) $t = 1.15 \times 10^{-2}$, (g) $t = 1.2 \times 10^{-2}$, (h) $t = 1.4 \times 10^{-2}$, e (i) $t = 1.52 \times 10^{-2}$. São utilizados 80 modos cosseno harmônicos ($n, 2n, 3n, \dots, 80n$) com o fundamental $n = 8$. Os outros parâmetros físicos são os mesmos da Fig. 16.



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021)

(d) $t = 9.5 \times 10^{-3}$, (e) $t = 1.1 \times 10^{-2}$, (f) $t = 1.15 \times 10^{-2}$, (g) $t = 1.2 \times 10^{-2}$, (h) $t = 1.4 \times 10^{-2}$ e (i) $t = 1.52 \times 10^{-2}$, com valores crescentes do acoplamento $R = 0.75$ nos painéis superiores (Fig.17[(a)-(c)]), $R = 0.92$ nos painéis intermediários (Fig.17[(d)-(f)]) e $R = 0.95$ nos painéis inferiores (Fig.17[(g)-(i)]), enquanto os demais parâmetros são os

mesmos da Fig. 16 (reforçamos a diferença de R e t entre as figuras 16 e 17). Os valores de t_f não são arbitrários e correspondem ao momento em que o modo fundamental da interface externa atinge a mesma magnitude ($\bar{a}_n(t = t_f) \approx 7.7 \times 10^{-2}$) para todos os valores de R . Manter essa amplitude $\bar{a}_n(t = t_f)$ fixa garante que qualquer diferença na interface interna é fruto do balanço entre forças magnéticas e de tensão superficial com a interação pelo acoplamento medido através de R .

Examinando a primeira linha da Fig.17 para $R = 0.75$, começamos com um anel de ferro-fluido largo delimitado por um interface externa pouco deformada e uma interna basicamente circular (Fig.17(a)). Posteriormente, a interface interna mantém seu formato circular, mas há na externa a formação de oito pequenos dedos viscosos (Fig.17(b)). Esse formato é determinado pelo modo fundamental $n = 8$, que alcança amplitudes muito maiores que seus harmônicos. No último tempo considerado (Fig.17(c)), as amplitude do modo fundamental \bar{a}_n continua a crescer, causando o alongamento dos dedos viscosos. A interface interna, por outro lado, apresenta apenas pequenas deformações, evidenciando o fraco acoplamento entre as interfaces para $R = 0.75$. Apresentamos nos painéis intermediários da Fig.17 a evolução temporal para $R = 0.92$, onde o acoplamento entre as interfaces é mais forte que no caso anterior. Comparando as figuras 17(a) e 17(d), vemos um anel bem mais fino, mas as interfaces são bastante similares. A diferença na dinâmica entre as linhas [(a)-(c)] e [(d)-(f)] torna-se mais evidente com o passar do tempo, pois diferentemente da Fig.17(b), observamos na Fig.17(e) que a interface interna também apresenta pequenos dedos viscosos, sendo maiores no tempo final Fig.17(f). Ressaltamos que, apesar dos tempos finais diferentes, considerando a mesma amplitude final externa, os efeitos vistos são frutos do aumento da influência da interface de fora sobre a interior. O efeito é ainda mais claro quando usamos valores maiores de R , como $R = 0.95$ na linha inferior (Fig.17[(g)-(i)]). Em particular, a interface interna vista na Fig.17(i) não é só mais instável que nas figuras 17(c) e 17(f) mas adquire um formato similar à externa. Os tempos finais usados não significam que as Figs. 17[(c), (f), (i)] são estados estacionários, mas, por termos amplitudes que crescem exponencialmente a âmbito linear, representam tempos limites já que posteriormente a eles a validade da teoria perturbativa é perdida, pois as interfaces acabam por se cruzar.

Após análise da Fig.17 a origem física para a dependência temporal das taxas de crescimento linear fica mais evidente. A intensidade da interação magnética e fluidodinâmica entre as interfaces do anel depende da sua espessura, mas essa espessura não é o bastante para definir a dependência temporal das taxas de crescimento. No regime linear, vemos que o que causa

o crescimento de instabilidades na interface interna são as perturbações na interface externa (Eq. (2.11)). Assim perturbações dependentes do tempo ($\varepsilon_n(t)$) surgem na interface de fora e são transferidas para a interface de dentro por efeitos de tamanho finito da espessura do anel, tornando sua taxa de crescimento linear dependente de $\varepsilon_n(t)$, ou seja, do tempo. Caso não houvessem perturbações externas ($\varepsilon_n(t) = 0$), a interface interna seria completamente estável para qualquer espessura do anel, e nesse caso sua taxa de crescimento linear é independente do tempo. Esta interpretação decorre das equações (2.4), (2.5), (2.19) e (2.20).

Os resultados anteriores são bastante complementares e ilustram a dinâmica linear do comportamento de fluidos não magnéticos separados por um anel de ferrofluido, sob influência de um campo magnético radial. Mas, embora a teoria linear forneça respostas quanto à estabilidade do sistema, ela falha em capturar aspectos morfológicos além do número de dedos. Estudos teóricos anteriores mostram que, para a situação similar mas com apenas uma interface (2 fluidos), o aspecto típico é de padrões em forma de estrela com dedos viscosos pontiagudos, o que não vemos na Fig. 17. Dessa forma, devemos incluir os termos da segunda ordem de perturbação Eqs. (2.2) e (2.3) para obter uma descrição mais detalhada do acoplamento entre as interfaces e da morfologia do sistema quando do começo das não linearidades.

2.3 ANÁLISE FRACAMENTE NÃO LINEAR

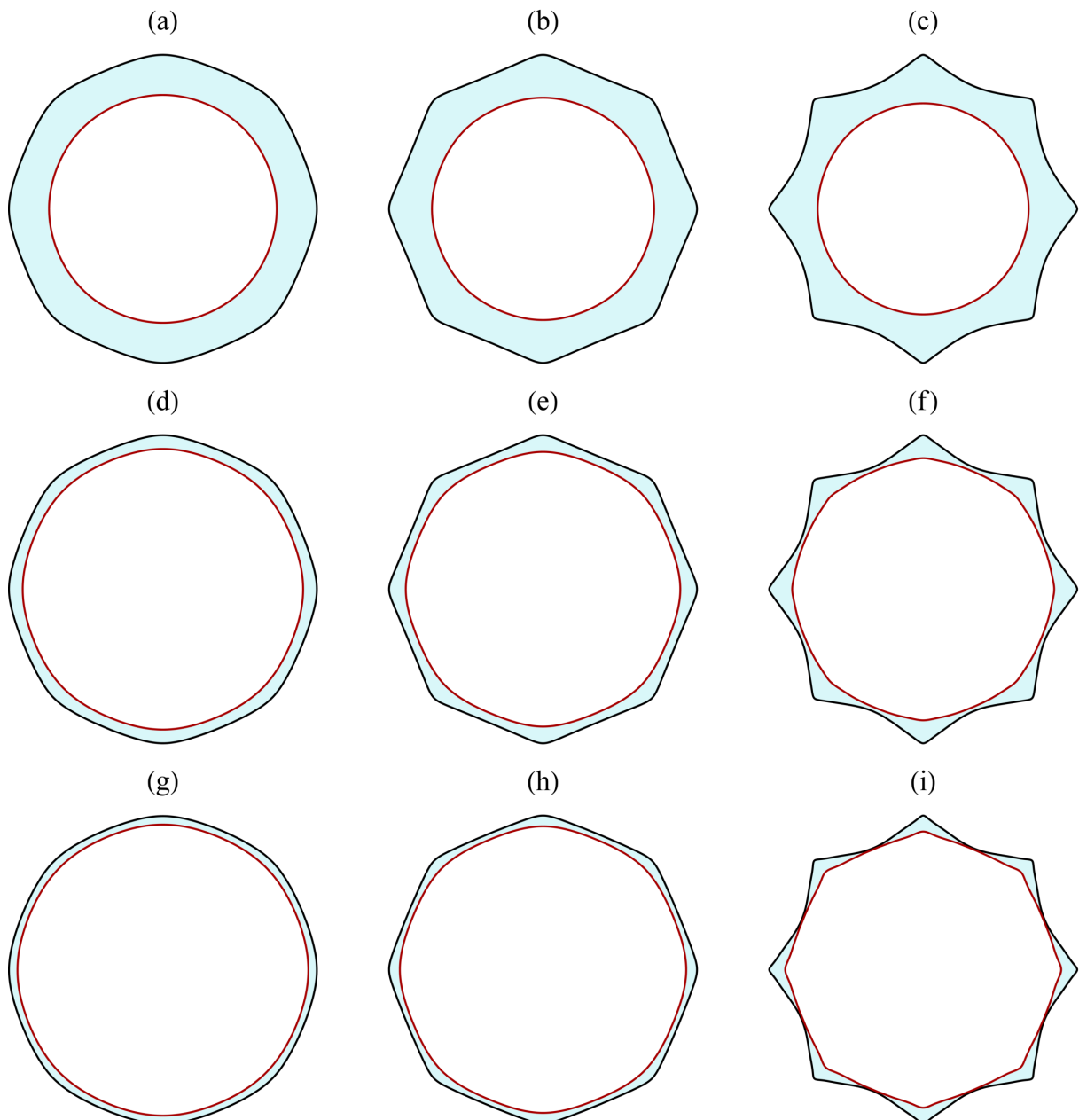
Nessa seção, voltamos nossa atenção para as equações de acoplamento entre modos (Eqs. (2.2) e (2.3)), incluindo a contribuição de todos os termos de segunda ordem (apêndice A). Focamos na investigação morfológica das estruturas do anel de ferrofluido magneticamente induzido e como são impactadas pela combinação de forças magnéticas e efeitos de tensão superficial. Assim, examinamos como os principais parâmetros R , N_B e χ influenciam a dinâmica não linear das interfaces e os padrões anulares finais.

Mostramos na Fig. 18 as evoluções temporais para um conjunto típico de padrões do sistema de ferrofluido anular. Os padrões são obtidos resolvendo numericamente as Eqs. (2.2) e (2.3). Assim como na Fig. 17, consideramos a influência de $N = 80$ modos cosseno de Fourier, um fundamental $n = 8$ e harmônicos $2n, 3n, \dots, Nn$, cada linha corresponde a uma evolução para $R = 0.75$ [(a)-(c)], $R = 0.92$ [(d)-(f)], e $R = 0.95$ [(g)-(i)]. Para permitir uma comparação mais direta entre os padrões lineares (Fig. 17) e não lineares (Fig. 18), todos os parâmetros físicos e condições iniciais são iguais. A diferença fica por conta dos

tempos utilizados, o que será explicado adiante, (a) $t = 7.0 \times 10^{-3}$, (b) $t = 8.0 \times 10^{-3}$, (c) $t = 1.7 \times 10^{-2}$, (d) $t = 9.5 \times 10^{-3}$, (e) $t = 1.1 \times 10^{-2}$, (f) $t = 3.4 \times 10^{-2}$, (g) $t = 1.2 \times 10^{-2}$, (h) $t = 1.4 \times 10^{-2}$, e (i) $t = 3.4 \times 10^{-2}$.

A Fig. 18 é bastante esclarecedora e permite que identifiquemos os principais impactos dos

Figura 18 – Recorte da evolução fracamente não linear típica para os padrões do anel de ferrofluido com $R = 0.75$ (painéis superiores), $R = 0.92$ (painéis intermediários), e $R = 0.95$ (painéis inferiores). Cada linha corresponde a uma evolução temporal separada, com figuras para os tempos (a) $t = 7.0 \times 10^{-3}$, (b) $t = 8.0 \times 10^{-3}$, (c) $t = 1.7 \times 10^{-2}$, (d) $t = 9.5 \times 10^{-3}$, (e) $t = 1.1 \times 10^{-2}$, (f) $t = 3.4 \times 10^{-2}$, (g) $t = 1.2 \times 10^{-2}$, (h) $t = 1.4 \times 10^{-2}$, e (i) $t = 3.4 \times 10^{-2}$. Os padrões não lineares foram gerados por nossa abordagem de acoplamento de modos em segunda ordem e devem ser comparados com os equivalentes lineares na Fig. 17, onde usamos os mesmos parâmetros físicos e condições iniciais.



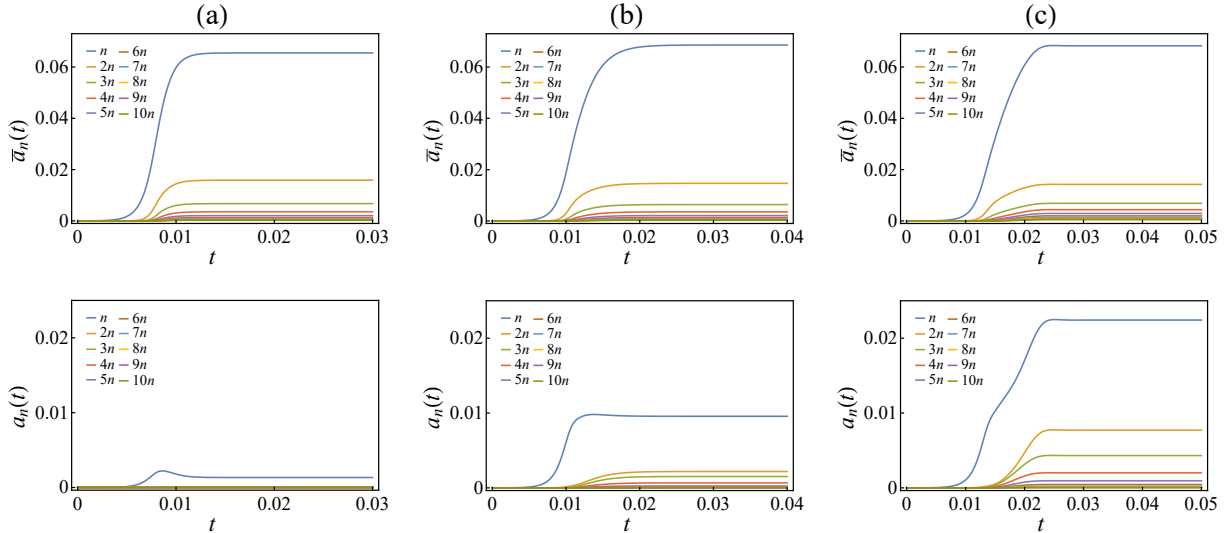
Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021)

efeitos não lineares nos padrões evolutivos, já no menor nível não linear (ou seja, na segunda ordem). Para tempos iniciais, comparamos a primeira coluna da Fig. 17[(a), (d), (g)] com a primeira coluna da Fig. 18[(a), (d), (g)]. É difícil notar uma diferença entre as perturbações. Isso é esperado pois os termos de ordem superior são desprezíveis no início da dinâmica, mas geram grandes diferenças depois. Vemos a diferença entre a segunda coluna da Fig. 17[(b), (e), (h)] com a segunda coluna da Fig. 18[(b), (e), (h)], onde as pontas arredondadas da interface exterior dão lugar a pontas finas e bordas retas. Algo ainda mais contrastante é observado ao compararmos as terceiras colunas (Figs. 17[(c), (f), (i)] e 18[(c), (f), (i)]). O padrão não linear apresenta interfaces externas com extremidades quase triangulares e, dependendo do valor de R , possui pontas similares formadas na interface interna. Esse aspecto pontiagudo, um tanto poligonal, está de acordo com os formatos típicos obtidos para o problema de apenas uma interface para o ferrofluido confinado por um fluido não magnético sobre a influência de um campo magnético radial (OLIVEIRA; MIRANDA; LEANDRO, 2008; ANJOS; LIRA; MIRANDA, 2018; OLIVEIRA; MIRANDA, 2020), reforçando a necessidade de irmos além da análise linear para capturarmos aspectos importantes da morfologia do sistema.

O mecanismo físico para a origem das extremidades pontudas vistas nos padrões Fig. 18[(c), (f), (i)] pode ser descrito da seguinte forma: as forças de tensão superficial promovem a formação de extremidades alongadas, mas, com o campo magnético radial Eq. (2.1), o termo de tração magnética é proporcional a $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2$ nas Eqs. (1.15) e (1.16), atingindo maiores valores quando $\hat{\mathbf{n}}$ é colinear a $\hat{\mathbf{r}}$. Dessa forma, após a formação de uma saliência nas interfaces, os dedos viscosos tendem a uma estrutura pontiaguda. Como o campo magnético aplicado também é proporcional à distância radial r , isto reforça os picos nas interfaces mais afastadas do centro do padrão. Também é importante notar que o aumento do parâmetro de acoplamento R torna a formação dos picos mais efetiva em ambas as interfaces Fig. 18[(c), (f), (i)].

Complementamos os resultados fracamente não lineares com a evolução temporal das amplitudes (Fig. 19) dos modos cosseno para as interfaces externa $\bar{a}_n(t)$ e interna $a_n(t)$ associadas às situações da Fig. 18. Para maior clareza e simplicidade apresentamos apenas o modo fundamental e harmônicos até $n, 2n, 3n, \dots, 10n$. Os 80 modos de Fourier anteriores são importantes para uma maior definição das extremidades com picos e contornos suaves na figura dos padrões, mas quando exibimos as amplitudes, os demais modos sobrepõem-se próximos ao eixo horizontal sendo indistinguíveis entre si. Como mencionado, a Fig. 19(a) mostra a evolução temporal as amplitudes $\bar{a}_n(t)$ da interface interna e $a_n(t)$ da interface externa da Fig. 18[(a)-(c)]. Igualmente a Fig. 19(b) [Fig. 19(c)] representa a evolução da

Figura 19 – Evolução das amplitudes cosseno das interfaces externa ($\bar{a}_n(t)$) e interna [$a_n(t)$] como funções do tempo t , cada uma corresponde à evolução temporal apresentada na Fig. 18. São mostradas as amplitudes $n, 2n, 3n, \dots, 10n$. A coluna (a) está relacionada com a linha superior da Fig. 18. Da mesma forma, as colunas (b) e (c) correspondem às linhas intermediária e inferior da Fig. 18, respectivamente.



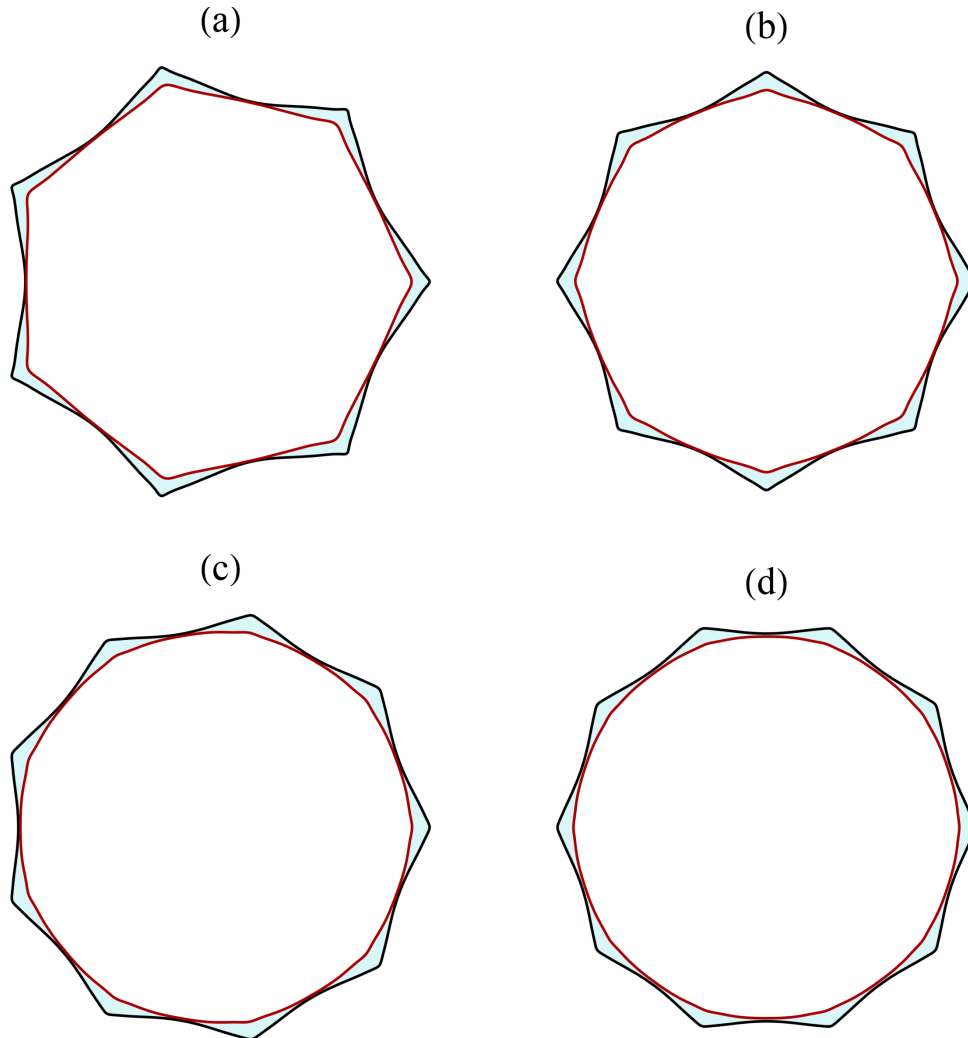
Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021)

Fig. 18[(d)-(f)][Fig. 18[(g)-(i)]]. Verificamos que, após um período inicial de crescimento, todas as perturbações saturam e mantêm-se constantes posteriormente. O sistema tende, na segunda ordem de expansão, a um estado estacionário, num comportamento completamente diferente do crescimento exponencial observado no caso linear (Eqs. (2.15) e (2.16)).

Podemos, então, justificar porque os tempos usados na Fig. 18, são diferentes dos tempos usados na Fig. 17. No âmbito linear, em que as amplitudes de perturbação crescem rapidamente de forma exponencial, consideramos o momento em que ocorre o cruzamento das interfaces como o limite superior do tempo para validade da solução perturbativa. Por outro lado, os padrões fracamente não lineares saturam, então escolhemos os tempos em que os padrões tenham atingido o estágio estacionário.

Até agora ilustramos nossos principais resultados do comportamento do anel de ferrofluido para o conjunto representativo de parâmetros $N_B = 136$, $\chi = 0.8$, $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $R_2 = 1$, $R_1 = R$, e $\sigma = 1$. Como tínhamos o principal interesse de entender o acoplamento entre as interfaces, mantivemos o número de ligação magnética N_B e a suscetibilidade do ferrofluido χ constantes, analisando o que acontecia com o acoplamento entre interfaces variando-se o parâmetro R . Complementando esses achados, agora fixamos R num valor alto (favorecendo um acoplamento mais intenso entre as interfaces), e verificamos como a evolução do anel de ferrofluido responde a variações de N_B e χ . Isso é feito na Fig. 20, que mostra

Figura 20 – Representação de estruturas fracamente não lineares para (a) $N_B = 62$ e $\chi = 1.3$, (b) $N_B = 78$ e $\chi = 1.3$, (c) $N_B = 62$ e $\chi = 1.7$, e (d) $N_B = 78$ e $\chi = 1.7$. Os demais parâmetros são $R = 0.96$, $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $R_2 = 1$, $R_1 = R$, $\sigma = 1$, e $t = 0.1$. O número de dedos pontiagudos de cada figura é: (a) 7, (b) 8, (c) 9, e (d) 10.



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021)

características não lineares do anel de ferrofluido, considerando $R = 0.96$, $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $R_2 = 1$, $R_1 = R$, $\sigma = 1$, e $t = 0.1$. Na exploração dos parâmetros, usamos $N_B = 62$ e $N_B = 78$, e $\chi = 1.3$ e $\chi = 1.7$, de forma que o modo fundamental obtido na Fig. 20 é (a) $n = 7$, (b) $n = 8$, (c) $n = 9$, e (d) $n = 10$.

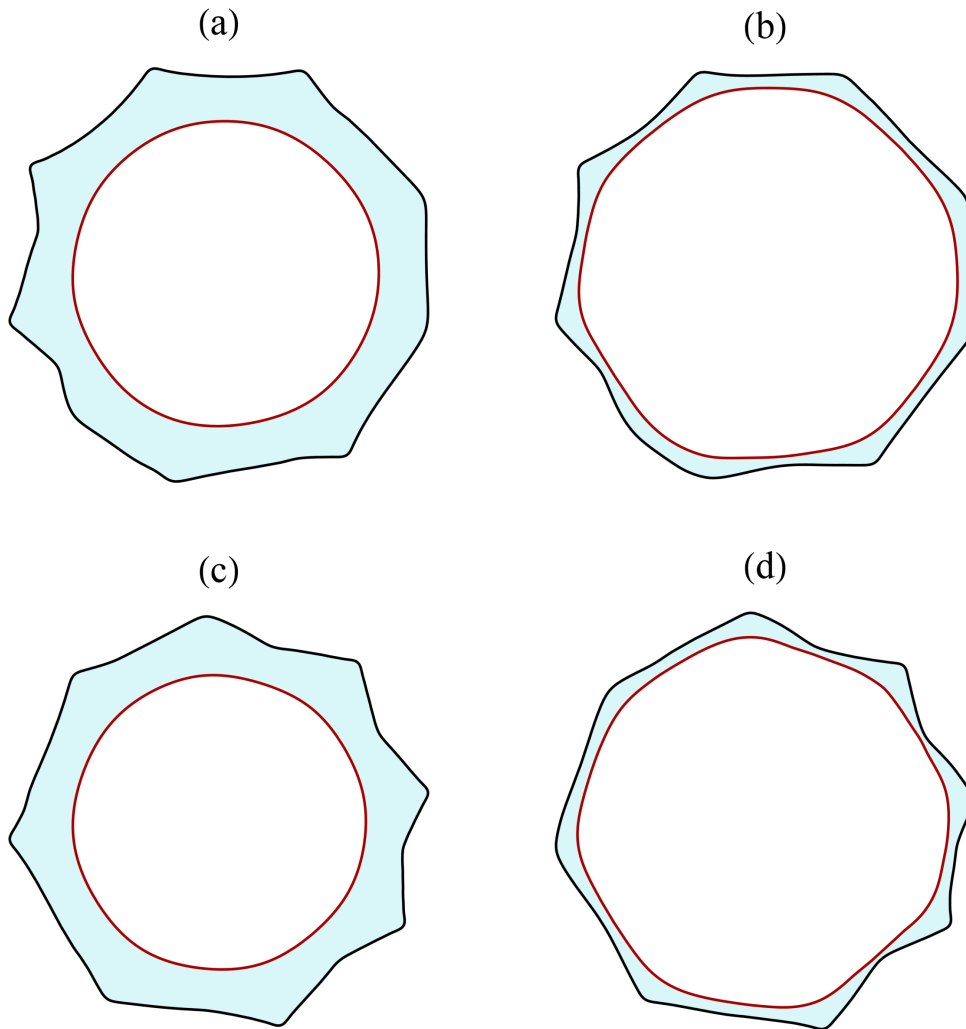
Na linha superior da Fig. 20 temos suscetibilidade magnética $\chi = 1.3$, e o Bond number magnético com valores $N_B = 62$ [Fig. 20(a)], e $N_B = 78$ [Fig. 20(b)]. Já a linha inferior possui $\chi = 1.7$, tendo $N_B = 62$ [Fig. 20(c)], e $N_B = 78$ [Fig. 20(d)]. Analisando as Figs. 20(a) e 20(b) vemos o formato estrelado típico para o ferrofluido, com estrutura anular tal que ambas as interfaces, interna e externa, são bastante deformadas. É notável que, fixando χ , o aumento dos valores de N_B não causa grandes mudanças morfológicas além do aumento do número de

dedos pontiagudos. Tal efeito também é observado ao compararmos as Figs. 20(c) e 20(d) para um valor maior de χ . Comparando agora uma mesma coluna, Figs. 20(a) e 20(c) ou Figs. 20(b) e 20(d), vemos um maior número de dedos com o aumento de χ , mas também que os dedos tornam-se menos pontiagudos. Concluindo, podemos gerar padrões com diferentes números de dedos viscosos manipulando os valores de N_B e χ . A forma geral dos padrões não varia muito, além da agudeza dos dedos, influenciada principalmente por χ . Esses achados reforçam a validade geral dos resultados apresentados nas Figs. 18 e 19.

É importante notar que todas as conclusões apresentadas sobre o comportamento dinâmico do sistema anular e sua morfologia foram obtidas pela análise de padrões simétricos Figs. 17 e 18. A natureza simétrica das figuras vem do modo como geramos os padrões, apenas com modos cosseno e um modo fundamental n e seus harmônicos $2n, 3n, 4n, \dots, Nn$, onde $N = 80$. Apesar de aparentar uma circunstância bastante arbitrária, a abordagem utilizada produz resultados bastante abrangentes. Para exemplificar e reforçar a robustez de nossos resultados, apresentamos a morfologia do anel de ferrofluido gerado por condições bem mais gerais. A Fig. 21 corresponde ao padrão gerado ao considerarmos todos os modos de Fourier $2 \leq n \leq 80$ (toda a faixa de modos e não apenas o fundamental com harmônicos), amplitudes iniciais iguais a 10^{-5} e consideramos agora os modos seno e cosseno, com um conjunto aleatório de fases iniciais. Para possibilitar a conexão entre os novos padrões não lineares (Fig. 21) e os já apresentados na Fig. 18, usamos os mesmos parâmetros físicos adimensionais $N_B = 136$, $\chi = 0.8$, $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $R_2 = 1$, $R_1 = R$, e $\sigma = 1$. Na Fig. 21 cada linha apresenta uma fase aleatória inicial (uma para (a)-(b) e uma outra para (c)-(d)), também usamos $R = 0.75$ e $t = 7.75 \times 10^{-3}$ [(a) e (c)] e $R = 0.92$ e $t = 9.1 \times 10^{-3}$ [(b) e (d)].

Comparando os padrões assimétricos Figs. 21(a) e 21(c) com seu equivalente simétrico Fig. 18(c) vemos que, apesar de gerados de formas diferentes, as figuras assimétricas preservam os aspectos fundamentais da morfologia identificados na Fig. 18(c). Temos um anel mais largo com a interface interna quase circular e a formação dos dedos pontiagudos típicos na interface externa. Da mesma forma, vemos nas estruturas assimétricas Figs. 21[(b) e (d)] a similaridade com a Fig. 18(f). O anel de ferrofluido delgado com uma interface interna perturbada, mas muito menos deformada que a interface externa, que apresenta dedos bastante pontiagudos. A sintonia entre os resultados reforça a robustez de nossa análise teórica, reforçando a validade de nossas previsões para os principais aspectos morfológicos do ferrofluido anular confinado na célula de Hele-Shaw sob um campo magnético radial externo. De toda forma, devemos apontar que, diferentemente do padrões simétricos saturados Fig. 18, os padrões assimétricos

Figura 21 – Representação fracamente não linear do anel de ferrofluido considerando o acoplamento de todos os modos de Fourier seno e cosseno no intervalo $2 \leq n \leq 80$, para dois conjuntos de fases iniciais aleatórias. Cada linha corresponde a um conjunto de fases, com os padrões exibidos para $R = 0.75$ e $t = 7.75 \times 10^{-3}$ [(a) e (c)], e $R = 0.92$ e $t = 9.1 \times 10^{-3}$ [(b) e (d)].



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021)

mostrados na Fig. 21 não atingem um estado estacionário, mas apresentam posteriormente crescimento das perturbações com cruzamento das interfaces.

3 ANEL DE FERROFLUIDO EM CAMPO RADIAL E AZIMUTAL

3.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA FÍSICO

De forma similar ao estudo realizado no capítulo 2, o sistema físico consiste de um anel de ferrofluido que separa dois fluidos não magnéticos confinados numa célula de Hele-Shaw com espaçamento b (Fig. 22). Os fluidos são newtonianos e imiscíveis, de viscosidades η_1 , η_2 e η_3 , e formam uma interface interna(externa) com tensão superficial $\sigma_{12}(\sigma_{23})$ e raio não perturbado $R_1(R_2)$. Além das duas bobinas de Helmholtz com correntes iguais em sentidos contrários, adicionamos agora um fio perpendicular à célula, atravessando seu centro e pela qual passa uma corrente I . Por meio desta configuração, obtemos um campo magnético coplanar

$$\mathbf{H} = H_0 r \hat{\mathbf{r}} + \frac{I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.1)$$

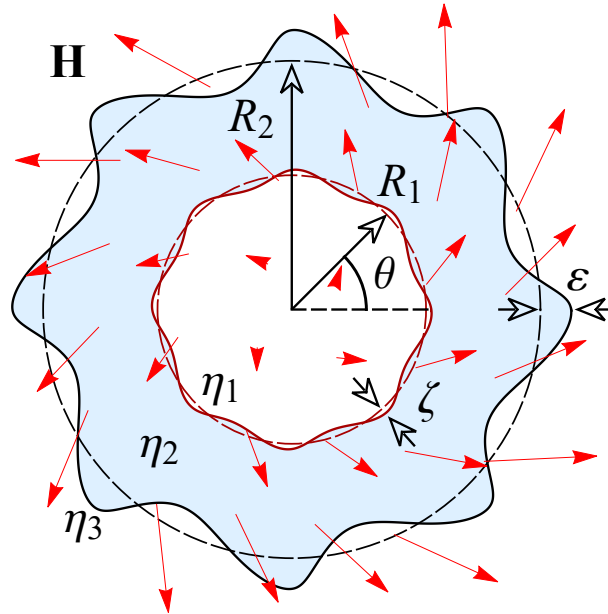
que induz a desestabilização das interfaces. H_0 é uma constante, r a distância radial para a origem do sistema de coordenadas que tomamos como o centro da célula, $\hat{\mathbf{r}}$ o vetor unitário na direção radial e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ o vetor unitário na direção azimutal.

O estudo das perturbações segue o caminho apresentado na seção 1.3. Os raios das interfaces são dados por $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1(\theta, t) = R_1 + \zeta(\theta, t)$ (interno) e $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2(\theta, t) = R_2 + \varepsilon(\theta, t)$ (externo). R_1 e R_2 correspondem aos raios das interfaces não deformadas, isto é, sem aplicação de campos magnéticos.

Nossa abordagem estuda a evolução das perturbações por meio do acoplamento entre modos de Fourier, cuja expansão está nas Eqs. (1.3) e (1.4). Utilizando a equação de Darcy (1.8) e as condições de contorno para as interfaces (Eqs. (1.13)-(1.16)), expandimos as equações até a segunda ordem em ζ_n e ε_n . O resultado é um conjunto de equações diferenciais relacionando os vários modos ζ_n e ε_n , que, adimensionalizadas, são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_n &= f_1 \Lambda(n)\zeta_n + f_2 \Gamma(n)\varepsilon_n \\ &+ f_1 \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \\ &+ f_2 \sum_{n' \neq 0} \left[H(n, n') \varepsilon_{n'} \varepsilon_{n-n'} + I(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \varepsilon_{n-n'} \right] \\ &+ f_2 \sum_{n' \neq 0} \left[J(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \varepsilon_{n-n'} + K(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \zeta_{n-n'} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

Figura 22 – Representação esquemática do fluxo induzido magneticamente, com três fluidos, numa célula de Hele-Shaw. A célula contém um anel de ferrofluido com raios inicialmente circulares R_1 e R_2 (círculos tracejados), viscosidade η_2 e é vizinho a fluidos não magnéticos de viscosidade η_1 (interno) e η_3 (externo). Quando submetido ao campo magnético \mathbf{H} , vemos a deformação das interfaces do anel de ferrofluido (curvas sólidas). As perturbações na estrutura deformada são denominadas por $\zeta(\theta, t)$ e $\epsilon(\theta, t)$.



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2022)

e

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_n &= f_3 \Lambda(n) \zeta_n + f_4 \Gamma(n) \epsilon_n \\
 &+ f_4 \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{F}(n, n') \epsilon_{n'} \epsilon_{n-n'} + \mathcal{G}(n, n') \dot{\epsilon}_{n'} \epsilon_{n-n'} \right] \\
 &+ f_3 \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{H}(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{I}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \\
 &+ f_3 \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{J}(n, n') \dot{\epsilon}_{n'} \zeta_{n-n'} + \mathcal{K}(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \epsilon_{n-n'} \right].
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nas Eqs. (3.2) e (3.3), as derivadas totais no tempo $\frac{d}{dt}$ são denotadas pelo ponto sobrescrito. A adimensionalização é feita ao reescalarmos o comprimento e o tempo por $L = r_0$ e $T = 12(\eta_3 + \eta_2)r_0^3/\sigma_{23}b^2$, respectivamente, onde r_0 é um comprimento característico da ordem dos raios não perturbados.

As funções de acoplamento são independentes do tempo. No âmbito linear, estas são

complexas e dadas por

$$\begin{aligned} \Lambda(n) = & \mathcal{A}|n| \left[-\frac{\sigma}{R_1^3} (n^2 - 1) - \chi(1 + \chi) N_{Br} \right. \\ & \left. + \chi \frac{N_{Ba}}{R_1^4} + in\chi^2 \text{sgn}(I) \frac{\sqrt{N_{Br} N_{Ba}}}{R_1^2} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma(n) = & |n| \left[-\frac{1}{R_2^3} (n^2 - 1) + \chi(1 + \chi) N_{Br} \right. \\ & \left. - \chi \frac{N_{Ba}}{R_2^4} - in\chi^2 \text{sgn}(I) \frac{\sqrt{N_{Br} N_{Ba}}}{R_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A razão entre as forças magnéticas e forças de capilaridade está contida nos Bond numbers magnéticos

$$N_{Br} = \frac{\mu_0 H_0^2 r_0^3}{\sigma_{23}} \quad \text{e} \quad N_{Ba} = \frac{\mu_0}{\sigma_{23} r_0} \left(\frac{I}{2\pi} \right)^2$$

para a componente radial e azimutal, respectivamente. A presença de termos imaginários é determinante para o giro das interfaces. As funções de segunda ordem $G, H, I, J, K, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{J}$, e \mathcal{K} encontram-se no apêndice B. Já os termos f_i são os mesmos das Eqs. (2.6),

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1 - A_{23} R^{2|n|}}{1 + A_{12} A_{23} R^{2|n|}}, & f_2 &= \frac{1 + A_{12}}{1 + A_{12} A_{23} R^{2|n|}} R^{|n|-1}, \\ f_3 &= \frac{1 - A_{23}}{1 + A_{12} A_{23} R^{2|n|}} R^{|n|+1}, & f_4 &= \frac{1 + A_{12} R^{2|n|}}{1 + A_{12} A_{23} R^{2|n|}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

com $A_{12} = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ ($A_{23} = (\eta_3 - \eta_2)/(\eta_3 + \eta_2)$) correspondendo ao contraste de viscosidades entre os fluidos 1 e 2 (2 e 3), $\mathcal{A} = (\eta_3 + \eta_2)/(\eta_2 + \eta_1)$, $\sigma = \sigma_{12}/\sigma_{23}$ a razão entre as tensões superficiais e

$$R = \frac{R_1}{R_2} \quad (3.7)$$

a razão entre os raios não perturbados.

Com o acoplamento entre interfaces ocorrendo já a nível linear nas Eqs. (3.4) e (3.5), qualquer perturbação numa interface pode afetar a dinâmica da outra. Esse efeito é reduzido quando o anel de ferrofluido é suficientemente largo. Assim consideramos o caso limite de interfaces desacopladas, correspondente a $R \rightarrow 0$, de forma que $(f_1, f_4) \rightarrow 1$ e $(f_2, f_3) \rightarrow 0$, dado pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_n &= \Lambda(n) \zeta_n \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_n &= \Gamma(n) \varepsilon_n \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left[\mathcal{F}(n, n') \varepsilon_{n'} \varepsilon_{n-n'} + \mathcal{G}(n, n') \dot{\varepsilon}_{n'} \varepsilon_{n-n'} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Neste caso, os impactos dos parâmetros (principalmente N_{Br} e N_{Ba}) são bastante simplificados, permitindo-nos obter informações relevantes para quando considerarmos novamente o comportamento do sistema acoplado.

A Eq. (3.8) descreve o comportamento da interface entre uma gota de fluido não magnético com viscosidade η_1 circundado por um ferrofluido de viscosidade η_2 . Analisando o termo linear $\Lambda(n)$ Eq. (3.4), vemos que a tensão superficial e o componente radial do campo magnético agem de forma a estabilizar a interface, enquanto o componente azimutal do campo magnético estimula o crescimento de perturbações. A parte imaginária da Eq. (3.4) é responsável pela propagação das instabilidades na interface, com velocidade de fase $V_1(n) = -\text{Im}[\Lambda(n)]/n = -\chi^2 \text{sgn}(I) \mathcal{A} |n| \sqrt{N_{Br} N_{Ba}} / R_1^2$. Fisicamente, obtemos um giro em sentido horário (caso I seja positivo) da interface entre os fluidos, e esta ocorre apenas na presença de um campo magnético cruzado, isto é, tanto $N_{Br} \neq 0$ quanto $N_{Ba} \neq 0$.

A interface entre uma gota de ferrofluido de viscosidade η_2 circundada por um fluido não magnético de viscosidade η_3 é descrita pela Eq. (3.5). Pelo termo linear $\Gamma(n)$, a tensão superficial continua com um papel estabilizante, mas ocorre uma inversão dos papéis dos componentes do campo magnético. A parte radial estimula o crescimento de perturbações na interface, enquanto a parte azimutal procura manter o formato circular. O termo imaginário da Eq. (3.5) promove uma rotação em sentido anti-horário da interface, com velocidade de fase $V_2(n) = -\text{Im}[\Gamma(n)]/n = \chi^2 \text{sgn}(I) |n| \sqrt{N_{Br} N_{Ba}} / R_2^2$. Esse comportamento da interface, em conjunto com o impacto dos parâmetros adimensionais e mesmo a Eq. (3.5), está de acordo com resultados já presentes na literatura para o problema de dois fluidos, uma interface, na célula de Hele-Shaw sob ação de um campo magnético cruzado (YU; CHRISTOV, 2021b; OLIVEIRA et al., 2021).

Retomando a situação de acoplamento, calculamos agora a taxa de crescimento linear de cada uma das interface, algo determinante para análise de estabilidade e determinante no início da dinâmica, quando as perturbações são muito pequenas. O procedimento é o mesmo

realizado no início da seção 2.2, onde, descartando os termos de segunda ordem, encontramos

$$\dot{\zeta}_n = f_1 \Lambda(n)\zeta_n + f_2 \Gamma(n)\varepsilon_n, \quad (3.10)$$

e

$$\dot{\varepsilon}_n = f_3 \Lambda(n)\zeta_n + f_4 \Gamma(n)\varepsilon_n. \quad (3.11)$$

A resolução desse sistema é feita pelo mesmo procedimento do caso de campo apenas radial, nas equações (2.13) a (2.16). Obtemos a taxa de crescimento linear para cada modo n do sistema anular substituindo ζ_n e ε_n por suas soluções Eqs. (2.15) e (2.16) nas equações

$$\lambda_1(n, t) \equiv \frac{\dot{\zeta}_n}{\zeta_n} = f_1 \Lambda(n) + f_2 \Gamma(n) \frac{\varepsilon_n(t)}{\zeta_n(t)}, \quad (3.12)$$

e

$$\lambda_2(n, t) \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n} = f_3 \Lambda(n) \frac{\zeta_n(t)}{\varepsilon_n(t)} + f_4 \Gamma(n). \quad (3.13)$$

O resultado em âmbito linear é determinante para encontrarmos o modo de maior crescimento n_{\max} , enquanto as expressões (3.12) e (3.13) também servem para determinarmos, com exatidão, a velocidade de fase a ser explorada na análise fracamente não linear do sistema. Essa análise é realizada na próxima seção, onde apresentamos resultados morfológicos e atentamos para a consistência dos parâmetros adimensionais com quantidades físicas presentes em experimentos já realizados em ferrofluidos confinados numa célula de Hele-Shaw (JACKSON; GOLDSTEIN; CEBERS, 1994; JOHN; MAY; STANNARIUS, 2011; PACITTO et al., 2000; FLAMENT et al., 1996; FLAMENT et al., 1998; CHEN; WU; MIRANDA, 2010).

3.2 ANÁLISE FRACAMENTE NÃO LINEAR

No restante do capítulo, apresentamos os aspectos morfológicos apresentados pelo sistema do anel de ferrofluido numa célula de Hele-Shaw, sob ação de um campo magnético externo com componentes radial e azimutal. Apesar da grande gama de parâmetros, focamos no impacto da razão entre as forças magnéticas e de tensão superficial (N_{Br} e N_{Ba}), e da espessura do anel (relacionada ao parâmetro R) na evolução e resultado dos padrões.

Nesse capítulo, a simulação da dinâmica e as imagens dos padrões são feitas considerando o acoplamento de 40 modos de Fourier ($N = 40$), o fundamental n e seus harmônicos $2n$, $3n$, ..., e $40n$. O modo fundamental corresponde ao inteiro mais próximo do máximo da

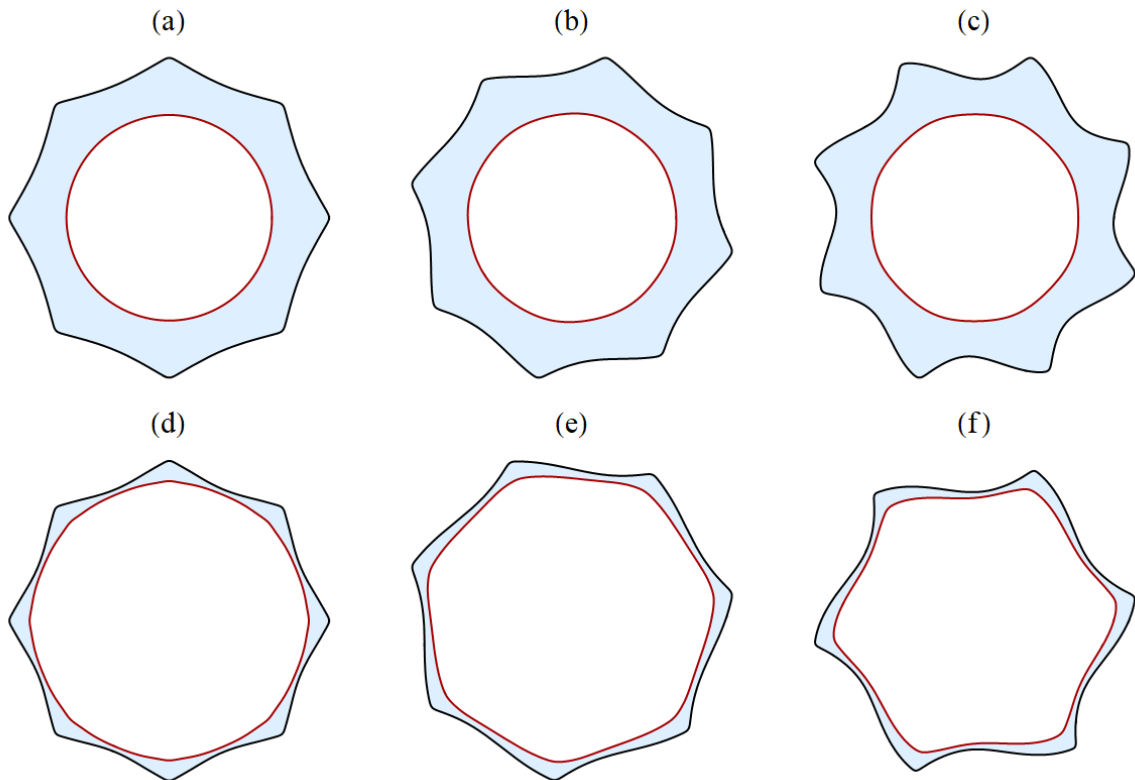
parte real da taxa de crescimento linear no tempo final t_f das evoluções (n_{\max}), que obtemos calculando $\{d [\operatorname{Re}\lambda_1(n, t = t_f)]/dn\}|_{n=n_{\max}} = 0$ ou $\{d [\operatorname{Re}\lambda_2(n, t = t_f)]/dn\}|_{n=n_{\max}} = 0$, das Eqs. (3.12) e (3.13), pois as taxas de crescimento $\lambda_1(n, t)$ e $\lambda_2(n, t)$ passam a coincidir num mesmo valor para tempos muito menores que os tempos finais t_f considerados (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021). O alto número de modos é usado para garantir que os dedos viscosos possuam pontas suaves, mais próximas do esperado para um experimento no sistema equivalente. Nesse contexto, reescrevemos todos os modos complexos $\zeta(\theta, t)$ $[\varepsilon(\theta, t)]$ em termos das amplitudes reais cosseno $a_n(t) = \zeta_n(t) + \zeta_{-n}(t)$ $[\bar{a}_n(t) = \varepsilon_n(t) + \varepsilon_{-n}(t)]$, e seno $b_n(t) = i(\zeta_n(t) - \zeta_{-n}(t))$ $[\bar{b}_n(t) = i(\varepsilon_n(t) - \varepsilon_{-n}(t))]$. Sem perda de generalidade, escolhemos a fase inicial tal que $a_n(0) > 0$, $\bar{a}_n(0) > 0$, com valores $a_n(0) = \bar{a}_n(0) = a_{2n}(0) = \bar{a}_{2n}(0) = \dots = a_{40n}(0) = \bar{a}_{40n}(0) = 10^{-5}$ e $b_n(0) = \bar{b}_n(0) = b_{2n}(0) = \bar{b}_{2n}(0) = \dots = b_{40n}(0) = \bar{b}_{40n}(0) = 0$. A evolução temporal de todos os modos é obtida pela solução numérica do sistema correspondente de equações diferenciais acopladas.

Começamos a análise examinando a Fig. 23, apresentando uma série de padrões fracamente não lineares representativos de tomarmos o Bond number magnético radial fixo $N_{Br} = 56$, enquanto aumentamos gradativamente o número de ligação magnética azimutal, $N_{Ba} = 0$ [Figs. 23(a) e 23(d)], $N_{Ba} = 4$ [Figs. 23(b) e 23(e)], e $N_{Ba} = 20$ [Figs. 23(c) e 23(f)]. Temos dois valores para o parâmetro da força de acoplamento: $R = 0.70$ [Figs. 23(a)-23(c)], e $R = 0.94$ [Figs. 23(d)-23(f)]. Para os demais parâmetros físicos, durante todo esse capítulo, consideramos $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, e $\sigma = 1$. Para a Fig. 23 escolhemos $\chi = 1.5$, $R_2 = 1$, e tempo final $t_f = 0.03$.

As figuras 23[(a)-(c)] mostram o impacto do aumento de N_{Ba} (para N_{Br} fixo) na forma e dinâmica do ferrofluido anular para o caso de um anel largo. Quando $N_{Ba} = 0$ [Fig. 23(a)], vemos a formação de um padrão estrelado, bastante poligonal, com oito dedos pontudos na interface externa, enquanto a interface interna permanece circular. Essa é a estrutura esperada para o anel de ferrofluido numa célula de Hele-Shaw, inicialmente muito pouco perturbado, exposto a um campo magnético radial (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2021).

A adição do campo azimutal é apresentada na Fig. 23(b), com $N_{Br} = 56$, e $N_{Ba} = 4$. Embora ainda apresente uma interface interna estável e oito dedos viscosos na interface externa, a ação combinada dos campos magnéticos radial e azimutal resulta na quebra de simetria, com o entortamento das pontas. Também notamos que os dedos viscosos estão em posições diferentes da Fig. 23(a). Isso ocorre pela presença de um campo magnético cruzado, que leva ao giro do padrão. Esse resultado está de acordo com o que foi observado

Figura 23 – Padrões fracamente não lineares típicos para o anel de ferrofluido, com Bond number magnético radial constante $N_{Br} = 56$, e três valores incrementais do Bond number magnético azimuthal: $N_{Ba} = 0$ [(a) e (d)], $N_{Ba} = 4$ [(b) e (e)], e $N_{Ba} = 20$ [(c) e (f)]. No painel superior (inferior) tomamos $R = 0.70$ ($R = 0.94$). Também escolhemos $\chi = 1.5$, $R_2 = 1$, e tempo final $t_f = 0.03$. Como os outros padrões desse capítulo, as figuras consideram a participação de $N = 40$ ($n, 2n, 3n, \dots, 40n$) modos seno e cosseno. O modo fundamental n é calculado em $t = t_f$. Encontramos $n = n_{\max} = 8$ [(a)-(d)], $n = n_{\max} = 7$ [(e)], e $n = n_{\max} = 6$ [(f)]. Os demais parâmetros são $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, $\sigma = 1$, repetindo-se para o restante do capítulo.



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2022)

nas referências (YU; CHRISTOV, 2021b; OLIVEIRA et al., 2021) para a situação de apenas uma interface, com o ferrofluido circundado por um fluido não magnético e sob ação de um campo magnético de componentes radial e azimuthal. Como discutido por Yu e Christov (2021b), o termo de tração magnética na condição de contorno para diferença de pressões (Eqs. (1.15) e (1.16)) induz estresses normais diferentes em cada lado do dedo viscoso, quebrando sua simetria e levando a seu entortamento.

Examinando agora a Fig. 23(c), onde novamente incrementamos o Bond number magnético azimuthal ($N_{Ba} = 20$), vemos uma estrutura anular ainda mais deformada. Ainda que com a mesma quantidade de dedos viscosos (oito), esses são ainda maiores, mais afiados e entortados do que na Fig. 23(b). Também podemos ver leves deformações na interface interna, mas com formato bastante circular. Concluímos que, para um anel largo (baixos valores de R), os efeitos do campo magnético cruzado para $N_{Br} \gg N_{Ba}$ afetam quase que exclusivamente a interface

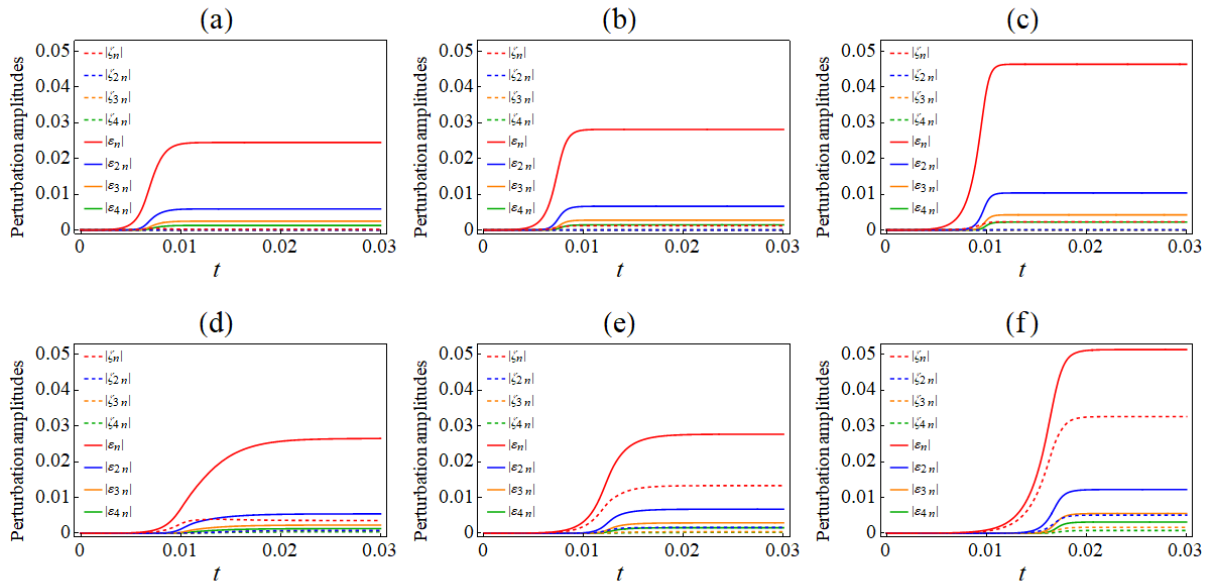
externa.

Para avaliar o papel da força de acoplamento entre as interfaces, dada pelo parâmetro R , observamos as Figs. 23[(d)-(f)], com $R = 0.94$, resultando na formação de estruturas com o anel de ferrofluido mais fino do que nas Figs. 23[(a)-(c)], com $R = 0.7$. Como esperado, o maior valor de R aumenta o acoplamento entre interfaces, tendo como principal mudança a maior desestabilização da interface interna, que agora também apresenta o efeito de distorção dos dedos com o aumento do campo azimutal. Para $N_{Ba} = 0$ (Fig. 23(d)) a interface interna é muito pouco deformada, mas vemos que, com o aumento de N_{Ba} (Figs. 23(e) e 23(f)), as perturbações no anel interno crescem e perdem sua simetria, acompanhando cada vez mais o que ocorre na interface externa no afinamento das pontas e rotação das perturbações. Também podemos notar que com um acoplamento maior, os dedos viscosos possuem uma maior inclinação nas pontas da interface externa.

Além das diferenças na morfologia dos dedos, outra diferença entre os padrões das Figs. 23[(a)-(c)], para $R = 0.70$, e Figs. 23[(d)-(f)], para $R = 0.94$, está no número de dedos formados. Com R menor, podemos aumentar o valor de N_{Ba} mantendo o número de dedos constantes (os padrões nas Figs. 23[(a)-(c)] possuem oito dedos). Por outro lado, considerando R grande aumentando o valor de N_{Ba} , o número de dedos presentes cai gradativamente (nas Figs. 23[(d)-(f)] os padrões possuem oito, sete, e seis dedos, respectivamente). Essa redução é esperada pelo papel do número de ligação magnética azimutal nas equações lineares para a taxa de crescimento das interfaces, onde possui efeito estabilizante na interface externa. O maior acoplamento, ao induzir perturbações na interface interna, também reduz a taxa de crescimento linear da interface externa, de modo que obtemos menos dedos viscosos. Essa interpretação decorre da análise das equações (3.12) e (3.13).

Dados os efeitos de estabilização com o aumento de N_{Ba} , parece contraditório que na Fig. 23 os padrões sejam mais deformados e possuam dedos maiores. Os efeitos estabilizantes discutidos anteriormente ocorrem no âmbito linear, sendo fundamentais para determinar se haverá crescimento de instabilidades e também o número de dedos pelo modo fundamental. Por outro lado, a morfologia dos padrões da Fig. 23 envolve a saturação das amplitudes de perturbação (os modos continuam a variar sua fase, ocasionando o giro), de forma que estamos no domínio de complicados efeitos de acoplamento não lineares decorrentes do campo cruzado. Um dos principais fatores é o termo de tração magnética presente nas condições de contorno de diferença de pressão (Eqs. (1.15) e (1.16)), envolvendo tanto N_{Br} quanto N_{Ba} . Esse termo é estritamente não linear (YU; CHRISTOV, 2021b; OLIVEIRA; MIRANDA, 2006), assim não possui

Figura 24 – Evolução temporal das amplitudes de perturbação para as interfaces interna ($|\zeta_n(t)| = \sqrt{a_n^2(t) + b_n^2(t)}/2$) (curvas tracejadas), e externas ($|\varepsilon_n(t)| = \sqrt{\bar{a}_n^2(t) + \bar{b}_n^2(t)}/2$) (curvas sólidas) interfaces, correspondentes à formação de estruturas não lineares do anel de ferrofluido da Fig. 23. Apenas os modos n , $2n$, $3n$, e $4n$ são apresentados



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2022)

efeito no início da dinâmica, mas, como comentando anteriormente, induz o entortamento dos dedos.

Pela análise da Fig. 23, concluímos que os efeitos não lineares possuem papel determinante na formação das estruturas do anel de ferrofluido, onde tanto o campo magnético aplicado quanto o acoplamento são fundamentais. Podemos então, para um N_{Br} fixo, manipular N_{Ba} e R para obtermos padrões com diversos números de dedos, além de vários graus de deformações em ambas as interfaces do anel.

Adicionamos à análise morfológica anterior com a evolução temporal das amplitudes de perturbação (Fig. 24) para as interfaces interna $|\zeta_n(t)| = \sqrt{a_n^2(t) + b_n^2(t)}/2$ (curva tracejada) e externa $|\varepsilon_n(t)| = \sqrt{\bar{a}_n^2(t) + \bar{b}_n^2(t)}/2$ (curva sólida) associadas às situações apresentadas no tempo final na Fig. 23. Para facilitar a visualização, apresentamos na Fig. 24 apenas o crescimento do modo fundamental e os primeiros três harmônicos, ou seja, curvas para os modos n , $2n$, $3n$, e $4n$. As curvas para os demais modos seguem o mesmo padrão, mas, por terem amplitudes muito pequenas, acabam por se sobrepor próximas ao eixo horizontal de forma praticamente indistinguível, motivo pelo qual não são exibidas aqui. Observando as curvas da Fig. 24, todas apresentam o mesmo tipo de evolução temporal. Inicialmente há um

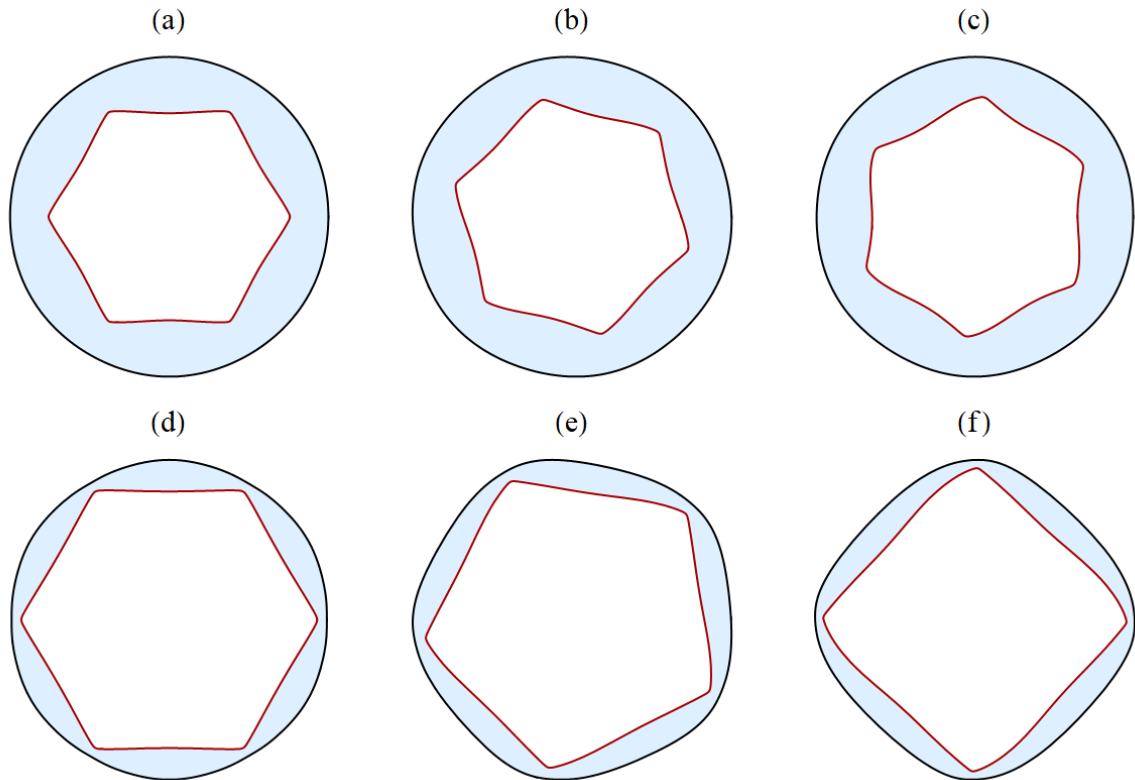
crescimento exponencial, demorando a ser visível pois as amplitudes iniciais são muito pequenas (da ordem de 10^{-5}). Quando as curvas atingem um tamanho considerável, os efeitos não lineares tornam-se preponderantes, primeiro invertendo a curvatura da curva de crescimento, até que as amplitudes de perturbação atingem seu maior valor e saturam, permanecendo constantes com o passar do tempo. Isso significa que os padrões não lineares para o anel de ferrofluido, apresentados na Fig. 23, atingem um perfil permanente para as interfaces, apesar do giro do padrão.

É natural complementarmos o estudo anterior da Fig. 23, onde o Bond number magnético N_{Br} foi fixado e variamos N_{Ba} , com a análise da situação onde o Bond number magnético azimutal é constante e incrementamos o valor de N_{Br} . Assim, a Fig. 25 apresenta as estruturas morfológicas para $N_{Ba} = 100$ e três valores do número de ligação magnética radial: $N_{Br} = 0$ (Figs. 25(a) e (d)), $N_{Br} = 14$ (Figs. 25(b) e (e)), e $N_{Br} = 50$ (Figs. 25(c) e (f)). São considerados dois valores da constante de acoplamento: $R = 0.70$ (Figs. 25(a)-(c)), e $R = 0.86$ (Figs. 25[(d)-(f)]). Como na Fig. 23, consideramos os demais parâmetros como $A_{12} = \mathcal{A} = 1$, $A_{23} = -1$, e $\sigma = 1$, tomamos valores diferentes para $\chi = 0.9$, $R_1 = 0.7$, e tempo final $t_f = 0.02$.

Avaliamos primeiro as Figs. 25[(a)-(c)], para o caso de um anel de ferrofluido largo ($R = 0.70$). Com N_{Ba} fixo e incremento de N_{Br} , ao contrário da Fig. 23, a interface interna é a mais deformada, enquanto a interface externa mantém o formato circular. Quando $N_{Br} = 0$ (Fig. 25(a)), observamos a formação de uma interface interna bastante poligonal, com pontas laterais quase retas. Incrementando o valor de N_{Br} (Figs. 25(b) e (c)), observamos que os vértices da interface interna hexagonal perdem sua simetria, tornando-se progressivamente mais curvos e distorcidos. A posição dos vértices também é modificada, indicando o giro da interface, mas agora no sentido horário, em contraste com a Fig. 23 na qual o giro é no sentido anti-horário.

O caso de um anel de ferrofluido mais fino ($R = 0.86$) é apresentado nas Figs. 25[(d)-(f)]. Um maior valor de R está associado a um maior acoplamento entre as interfaces, assim conseguimos padrões onde ambas as interfaces são visivelmente deformadas. Quando $N_{Br} = 0$ (Fig. 25(d)), obtemos quase que um hexágono regular na interface interna, mas, diferentemente da Fig. 25(a), a interface externa já aparece levemente deformada. Aumentando o nBond number magnético radial para $N_{Br} = 14$, a estrutura é bastante modificada (Fig. 25(e)). Temos uma interface interna pentagonal com vértices levemente deformados e curvos, envolta por uma interface externa que também tem uma estrutura de cinco pontas, mas simétrica e

Figura 25 – Padrões fracamente não lineares representativos para o anel de ferrofluido formado com Bond number magnético azimutal constante $N_{Ba} = 100$, e três valores do Bond number magnético radial: $N_{Br} = 0$ [(a) e (d)], $N_{Br} = 14$ [(b) e (e)], and $N_{Br} = 50$ [(c) e (f)]. Nos painéis superiores (inferiores) tomamos $R = 0.70$ ($R = 0.86$). Escolhemos $\chi = 0.9$, $R_1 = 0.7$, e tempo final $t_f = 0.02$. Verificamos para o modo fundamental $n = n_{\max} = 6$ [(a)-(d)], $n = n_{\max} = 5$ [(e)], e $n = n_{\max} = 4$ [(f)]. Os demais parâmetros físicos, número de modos e condições iniciais são os mesmos da Fig. 23.



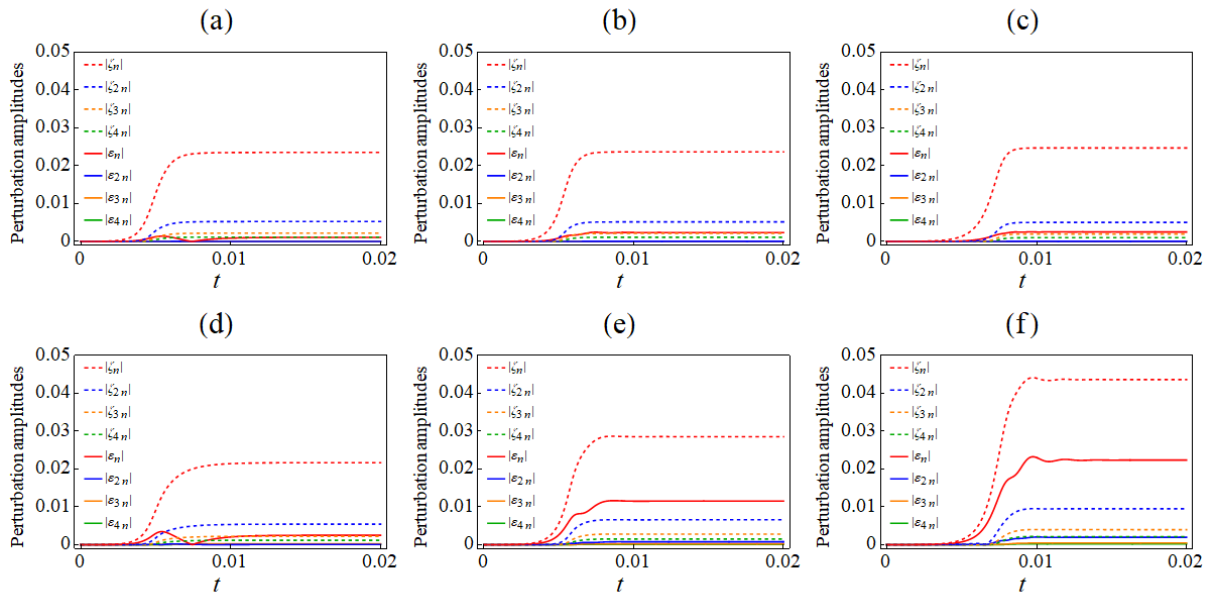
Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2022)

bastante arredondada. Com um Bond number magnético radial ainda maior ($N_{Br} = 50$), temos nova redução no número de dedos, agora quatro. Vemos os dedos viscosos ainda maiores, mais entortados e assimétricos. Pelo forte acoplamento, a interface externa segue o formato da interface interior, sendo quase um quadrado de bordas arredondadas.

A redução no número de dedos nas Figs. 25[(d)-(f)] é decorrente do maior acoplamento e crescimento das perturbações na interface externa, assim como para as Figs. 23[(d)-(f)] a redução era devida ao crescimento da instabilidade na interface interna. Os padrões da Fig. 25 também são estados estacionários em rotação. A evolução temporal das amplitudes de cada estrutura é exibida na Fig. 26, onde podemos ver sua saturação. As amplitudes da interface interna são representadas por linhas tracejadas, enquanto as linhas sólidas representam as amplitudes da interface externa.

Após análise das figuras 23 e 25, podemos concluir que a manipulação dos Bond numbers

Figura 26 – Evolução temporal das amplitudes de perturbação das interfaces interna $[\zeta_n(t)] = \sqrt{a_n^2(t) + b_n^2(t)}/2$ (curvas tracejada), e externa $[\varepsilon_n(t)] = \sqrt{\bar{a}_n^2(t) + \bar{b}_n^2(t)}/2$ (curvas sólidas) do anel de ferrofluido correspondente aos padrões não lineares da Fig. 25. São exibidas apenas as amplitudes dos modos n , $2n$, $3n$, e $4n$.



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2022)

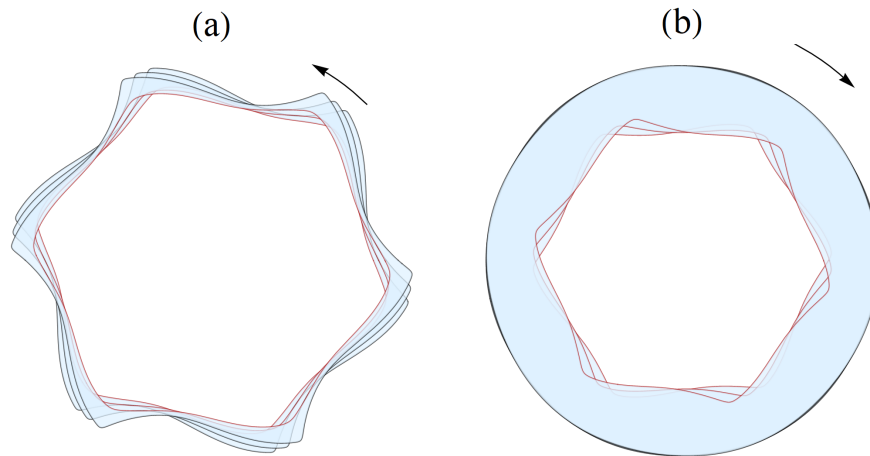
magnéticos N_{Ba} e N_{Br} , e da constante de acoplamento R , permite a criação e controle de variadas estruturas para o anel de ferrofluido, rotacionando com um perfil estável das interfaces. Podemos obter variações da espessura do anel, com diferentes quantidades de dedos viscosos, seu tamanho e assimetria, além de possuir deformações em apenas uma interface ou ambas. A velocidade angular de giro do anel também pode ser controlada, tanto pelo sinal da corrente que passa pelo fio central, quanto pela manipulação da intensidade dos campos magnéticos, num comportamento detalhado na próxima seção.

3.3 MOVIMENTO ROTACIONAL DO ANEL DE FERROFLUIDO

A rotação do anel de ferrofluido quando ambos os números de ligação magnética são diferentes de zero foi mencionada anteriormente. Esta pode ser identificada pela formação das estruturas anulares nas Figs. 23[(b), (c), (e), (f)], onde a posição dos dedos é diferente das Figs. 23(a) e (d). A mudança de posição mostra a variação de fase dos modos de Fourier, pois as condições iniciais implicam na formação de um dedo viscoso no ângulo 0, visto apenas quando $N_{Ba} \neq 0$. O formato ondulado das pontas é outro indicativo da rotação. Notamos

que esse comportamento independe da constante de acoplamento R , portanto que $N_{Br} \neq 0$ e $N_{Ba} \neq 0$. O mesmo fenômeno acontece na Fig. 25

Figura 27 – (a) Figuras sobrepostas do padrão investigado na Fig. 23(f), correspondente aos tempos $t = 3.24 \times 10^{-2}$, $t = 3.26 \times 10^{-2}$, e $t = 3.29 \times 10^{-2}$, ilustrando o giro do anel de ferrofluido na direção anti-horária. Da mesma forma, (b) ilustra o padrão da Fig. 25(c), para tempos $t = 2.29 \times 10^{-2}$, $t = 2.31 \times 10^{-2}$, e $t = 2.33 \times 10^{-2}$, exibindo uma rotação no sentido horário. As setas indicam o sentido de rotação.



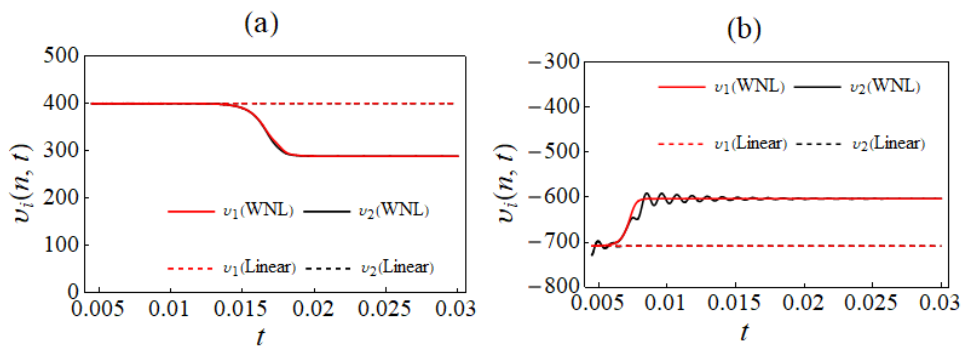
Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2022)

Para investigar o movimento rotacional dos anéis de ferrofluido sob campo magnético cruzado, na Fig. 27(a) mostramos a superposição do padrão originalmente na Fig. 23(f) em diversos tempos, $t = 3.24 \times 10^{-2}$, $t = 3.26 \times 10^{-2}$, e $t = 3.29 \times 10^{-2}$. Já a Fig. 27(b) mostra a superposição do padrão originalmente na Fig. 25(c), nos tempos, $t = 2.29 \times 10^{-2}$, $t = 2.31 \times 10^{-2}$, e $t = 2.33 \times 10^{-2}$. Fica evidente que, com o passar do tempo, o padrão da Fig. 27(a) gira no sentido anti-horário, como indicado pela seta, enquanto o anel de ferrofluido na Fig. 27(b) rotaciona no sentido horário. Os padrões também preservam seu formato, de acordo com a saturação das amplitudes de perturbação observadas nas Figs. Fig. 24(f) e 26(c).

O comportamento de rotação induzida magneticamente já foi observado anteriormente em trabalhos sobre gotas de ferrofluidos confinadas sob campos magnéticos cruzados (YU; CHRISTOV, 2021b; OLIVEIRA et al., 2021). Como proposto por Yu e Christov (2021b), o movimento é causado por um desbalanço de forças nas laterais dos dedos proveniente do termo de tração magnética, quebrando a simetria da gota de ferrofluido. É importante ressaltar que, para o sistema de dois fluidos, apenas uma interface com a gota de ferrofluido interna, os estudos anteriores mostram que pode ocorrer apenas rotação no sentido anti-horário, a não ser que o sentido da corrente elétrica no fio que gera o campo azimutal seja invertida. Poderíamos trocar a posição dos fluidos, isto é, uma gota de fluido não magnético circundado pelo fer-

rofluído, mas teríamos apenas rotação no sentido horário. O sistema aqui estudado, com três fluidos, duas interfaces e um anel de ferrofluído, permite que manipulemos o sentido da rotação apenas pela variação da intensidade relativa entre os campos magnéticos radial (N_{Br}) e azimutal (N_{Ba}), mantendo a direção da corrente fixa. Também verificamos que o sentido de rotação do padrão anular segue o sentido original do giro da interface mais perturbada. Isto é, se no conjunto de parâmetros N_{Br} , N_{Ba} , e $R \neq 0$ a interface externa é a mais perturbada, a interface rotaciona no sentido anti-horário, à exemplo dos padrões da Fig. 23 com $N_{Br} \neq 0$ e $N_{Ba} \neq 0$. Já se a interface interna for a mais perturbada, a rotação será no sentido horário, como na Fig. 25 com $N_{Br} \neq 0$ e $N_{Ba} \neq 0$.

Figura 28 – Velocidades de fase lineares (tracejadas) e fracamente não lineares (sólidas) $v_i(n, t)$ com $i = 1, 2$ para a interface interna e externa, respectivamente. As curvas estão relacionadas à evolução temporal dos padrões da Fig. 27, (a) com a Fig. 27(a) e (b) com a Fig. 27(b).



Fonte: (LIVERA; ANJOS; MIRANDA, 2022)

As conclusões visuais obtidas da Fig. 27 são suportadas pelos resultados complementares apresentados na Fig. 28, onde as curvas tracejadas (sólidas) representam o resultado linear (fracamente não linear) das velocidades de fase $v_i(n, t)$, com $i = 1$ ($i = 2$) para a interface interna (externa), como função do tempo t . A Fig. 28(a) representa as velocidades de fase para a estrutura girante na Fig. 27(a), assim como a Fig. 28(b) corresponde à Fig. 27(b). Ambas possuem o modo fundamental $n = n_{\max} = 6$. As curvas lineares de $v_i(n, t)$, v_i (Linear), são obtidas pela equação $-\text{Im}[\lambda_i(n, t)]/n$, com ajuda das Eqs. (3.12) e (3.13). As previsões fracamente não lineares, v_i (WNL), são obtidas numericamente, calculando $-\text{Im}[\dot{\zeta}_n(t)/\zeta_n(t)]/n$ (para $i = 1$) e $-\text{Im}[\dot{\varepsilon}_n(t)/\varepsilon_n(t)]/n$ (para $i = 2$), com as soluções das Eqs. (3.2) e (3.3). Ressaltamos a diferença da velocidade de fase dos modos acoplados $v_i(n, t)$, vista agora e dependente do tempo, para a velocidade de fase desacoplada $V_i(n)$, obtida no limite de uma interface na seção 3.1.

Iniciamos a discussão da Fig. 28 com as previsões lineares para $v_i(n, t)$ na Fig. 28(a). Ambas

as curvas tracejadas sobrepõem-se, além de serem positivas e constantes no tempo. Assim a teoria linear capta corretamente o sentido do giro das interfaces, mas não a magnitude da velocidade angular e a dinâmica do movimento rotacional, que é melhor descrita pelas curvas fracamente não lineares (WNL). Observando as curvas v_i (WNL), vemos que em tempos iniciais, quando as amplitudes de perturbação são muito pequenas, os efeitos não lineares são desprezíveis, e as previsões lineares e fracamente não lineares são praticamente as mesmas. Posteriormente, o crescimento das amplitudes faz com que os efeitos não lineares entrem em ação, reduzindo consideravelmente a magnitude das velocidades de fase $v_i(n, t)$, até que saturam num valor aproximadamente 25% menor do que o previsto pela teoria linear. Essa correção não linear é similar à correção encontrada por Lira e Miranda (2012), Yu e Christov (2021a), onde os pesquisadores observaram ondas formadas num ferrofluido confinado numa célula de Hele-Shaw retangular, com aplicação de campos magnéticos externos.

Concluimos a análise da rotação inspecionando a Fig. 28(b). Todas as conclusões da Fig. 28(a), relativas às previsões linear e fracamente não linear, continuam válidas, mas agora as curvas estão associadas a valores negativos da velocidade de fase. Isso implica numa rotação em sentido horário, de acordo com a Fig. 27(b). Também podemos observar que a velocidade fracamente não linear associada à interface mais perturbada, v_1 (WNL), rapidamente satura e atinge um valor próximo a -600 , enquanto v_2 (WNL), associado à interface muito pouco perturbada, oscila em torno desse valor, até saturar num momento posterior. Uma oscilação análoga foi encontrada em estudos anteriores (YU; CHRISTOV, 2021a; YU; CHRISTOV, 2021b), estas estão associadas a períodos transientes antes do estabelecimento do perfil final das interfaces anulares ou à interface não perturbada com acoplamento muito fraco, de forma que também é desprezível.

Também examinamos a dinâmica rotacional para outros parâmetros além daqueles na Fig. 27, sem grandes mudanças no perfil de evolução temporal das curvas de velocidade de fase. Os resultados a serem notados são, utilizando maiores valores de N_{Br} ou N_{Ba} , temos uma magnitude maior das velocidades de fase fracamente não linear, e o parâmetro R influencia o tempo que v_1 (WNL) e v_2 (WNL) levam para sobrepor-se na magnitude saturada final, levando mais tempo para menores valores de R .

4 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Apesar da quantidade de estudos abordando fluidos magnéticos e outros sobre a instabilidade de um anel para diversas configurações, até agora os temas eram desconexos. Por meio dos trabalhos aqui desenvolvidos, buscamos abrir as portas para a exploração de um sistema com grande maleabilidade, em função da independência das componentes do campo magnético e sua resposta a estes.

No capítulo 2 abordamos a dinâmica e formação de padrão de um anel de ferrofluido, circundado por dois fluidos não magnéticos, confinados numa célula de Hele-Shaw. Aplicando um campo magnético radial, vemos que a estrutura anular pode apresentar instabilidades tanto na interface interna quanto na interface externa. Com o objetivo de entender os cenários com ambas as interfaces instáveis, abordamos o problema de forma teórica. Primeiro com uma abordagem linear e depois fracamente não linear de acoplamento de modos de Fourier.

No âmbito linear, focamos na influência do parâmetro adimensional R , caracterizando a razão entre os raios inicialmente não perturbados das interfaces interna e externa. Um pequeno valor de R , ou um anel de ferrofluido largo, resulta num baixo acoplamento entre as interfaces, de modo que apenas a interface externa é muito mais desestabilizada. Já para valores de grandes de R , aproximando-se de 1, o acoplamento entre as interfaces faz com que ambas apresentem perturbações de amplitudes razoáveis.

As amplitudes do resultado linear possuem um crescimento exponencial, e também não apresentam a formação de padrões estrelados, comuns ao problema equivalente de uma interface (OLIVEIRA; MIRANDA; LEANDRO, 2008; ANJOS; LIRA; MIRANDA, 2018; OLIVEIRA; MIRANDA, 2020). A morfologia dos dedos também só é bem captada quando implementamos uma análise fracamente não linear. Conseguimos obter os padrões quase poligonais com estruturas bastante retas, cujas amplitudes dos modos de perturbação saturam no tempo, também repetindo o efeito de acoplamento já visto para R . Temos então a formação de estados estacionários no âmbito da teoria de segunda ordem.

O papel do Bond number magnético N_B (razão entre forças magnéticas e de tensão superficial) e da suscetibilidade magnética do ferrofluido χ também foi analisado, evidenciando um maior impacto no número de dedos, maiores valores de N_B e χ formam mais dedos. Os resultados anteriores são provenientes do estudo de padrões simétricos, mas também mostramos que as características morfológicas, como o número de dedos e a forma das perturbações,

são bastante robustas quanto às condições iniciais.

O capítulo 3 amplia a investigação para a aplicação de um campo magnético cruzado, isto é, com componentes radial e azimutal. Nele empregamos uma análise fracamente não linear em busca de aspectos morfológicos e do impacto da razão entre as componentes magnéticas, que podem ser manipuladas de forma independente. Verificamos a formação de padrões bastante poligonais, mas com pontas curvas que ficam maiores e mais entortadas com o aumento do campo magnético secundário. A largura do anel é muito relevante, permitindo a deformação de ambas as interfaces quando o acoplamento é elevado (anéis finos), nos casos em que uma das interfaces seria estável se separada.

Também verificamos a saturação das amplitudes de perturbação, de forma que o perfil do anel de ferrofluido passa a ser constante no tempo. Por outro lado, a contribuição do campo magnético cruzado faz com que a estrutura gire, também atingindo uma velocidade final constante. A análise fracamente não linear traz correções à predição linear para a velocidade de fase do sistema, reduzindo sua magnitude. Vemos que a intensidade e o sentido da rotação podem ser controlados por meio dos valores e da razão entre as componentes do campo magnético.

Uma extensão natural do trabalho apresentado nessa dissertação é o emprego de simulações numéricas completamente não lineares para diversas configurações de campo magnético, de forma a acessar os padrões formados em tempos avançados, no domínio completamente não linear. Também é possível a substituição do ferrofluido por um fluido magneto-reológico (MR) (GINDER, 1998; BOSSIS et al., 2002), onde poder-se-ia verificar como a indução de estresses viscosos num fluido MR impacta o sistema.

REFERÊNCIAS

- ANJOS, P. H. A.; LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Fingering patterns in magnetic fluids: Perturbative solutions and the stability of exact stationary shapes. *Phys. Rev. Fluids*, American Physical Society, v. 3, p. 044002, Apr 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.3.044002>>.
- BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge Mathematical Library).
- BLUMS, E.; CEBERS, A.; MAIOROV, M. M. *Magnetic Fluids*. De Gruyter, 2010. ISBN 9783110807356. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/9783110807356>>.
- BOSSIS, G.; LACIS, S.; MEUNIER, A.; VOLKOVA, O. Magnetorheological fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 252, p. 224–228, 2002. ISSN 0304-8853. Proceedings of the 9th International Conference on Magnetic Fluids. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885302006807>>.
- CARDOSO, S. S. S.; WOODS, A. W. The formation of drops through viscous instability. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 289, p. 351–378, 1995.
- CARRILLO, L.; SORIANO, J.; ORTÍN, J. Radial displacement of a fluid annulus in a rotating hele–shaw cell. *Physics of Fluids*, v. 11, n. 4, p. 778–785, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.869950>>.
- CARRILLO, L.; SORIANO, J.; ORTÍN, J. Interfacial instabilities of a fluid annulus in a rotating hele–shaw cell. *Physics of Fluids*, v. 12, n. 7, p. 1685–1698, 2000.
- CHEN, C.-Y.; WU, W.-L.; MIRANDA, J. A. Magnetically induced spreading and pattern selection in thin ferrofluid drops. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 82, p. 056321, Nov 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.056321>>.
- DARCY, H. *Les Fontaine Publiques de la Ville de Dijon*. [S.l.]: Dalmont, 1856.
- DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A. Influence of inertia on viscous fingering patterns: Rectangular and radial flows. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 83, p. 066312, Jun 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.066312>>.
- DICKSTEIN, A. J.; ERRAMILLI, S.; GOLDSTEIN, R. E.; JACKSON, D. P.; LANGER, S. A. Labyrinthine pattern formation in magnetic fluids. *Science*, v. 261, n. 5124, p. 1012–1015, 1993.
- ELBORAI, S.; KIM, D.-K.; HE, X.; LEE, S.-H.; RHODES, S.; ZAHN, M. Self-forming, quasi-two-dimensional, magnetic-fluid patterns with applied in-plane-rotating and dc-axial magnetic fields. *Journal of Applied Physics*, v. 97, n. 10, p. 10Q303, 2005.
- FLAMENT, C.; LACIS, S.; BACRI, J. C.; CEBERS, A.; NEVEU, S.; PERZYNSKI, R. Measurements of ferrofluid surface tension in confined geometry. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 53, p. 4801–4806, May 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.53.4801>>.
- FLAMENT, C.; PACITTO, G.; BACRI, J.-C.; DRİKIS, I.; CEBERS, A. Viscous fingering in a magnetic fluid. i. radial hele–shaw flow. *Physics of Fluids*, v. 10, n. 10, p. 2464–2472, 1998.

- GINDER, J. M. Behavior of magnetorheological fluids. *MRS Bulletin*, Cambridge University Press, v. 23, n. 8, p. 26–29, 1998.
- GONZAGUINHA. Trabalho e festa. *Coisa Mais Maior De Grande Pessoa*, 1981.
- JACKSON, D. P.; GOLDSTEIN, R. E.; CEBERS, A. O. Hydrodynamics of fingering instabilities in dipolar fluids. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 50, p. 298–307, Jul 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.50.298>>.
- JOHN, T.; MAY, K.; STANNARIUS, R. Meniscus of a ferrofluid around a vertical cylindrical wire carrying electric current. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 83, p. 056308, May 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.056308>>.
- LANGER, S.; GOLDSTEIN, R.; JACKSON, D. Dynamics of labyrinthine pattern formation in magnetic fluids. *Physical review. A*, v. 46, p. 4894–4904, 11 1992.
- LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. Nonlinear traveling waves in confined ferrofluids. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 86, p. 056301, Nov 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.86.056301>>.
- LIVERA, P. O. S.; ANJOS, P. H. A.; MIRANDA, J. A. Magnetically induced interfacial instabilities in a ferrofluid annulus. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 104, p. 065103, Dec 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.104.065103>>.
- LIVERA, P. O. S.; ANJOS, P. H. A.; MIRANDA, J. A. Ferrofluid annulus in crossed magnetic fields. *Submetido para publicação*, 2022.
- LIVERA, P. O. S.; MIRANDA, J. A. Magnetoelastic pattern formation in field-responsive fluids. *Phys. Rev. Fluids*, American Physical Society, v. 5, p. 014006, Jan 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.5.014006>>.
- MIRANDA, J.; WIDOM, M. Radial fingering in a hele-shaw cell: a weakly nonlinear analysis. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 120, n. 3, p. 315–328, 1998. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278998000979>>.
- OLIVEIRA, R. M.; COUTINHO, I. M.; ANJOS, P. H. A.; MIRANDA, J. A. Shape instabilities in confined ferrofluids under crossed magnetic fields. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 104, p. 065113, Dec 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.104.065113>>.
- OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A. Stretching of a confined ferrofluid: Influence of viscous stresses and magnetic field. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 73, p. 036309, Mar 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.73.036309>>.
- OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A. Fully nonlinear simulations of ferrofluid patterns in a radial magnetic field. *Phys. Rev. Fluids*, American Physical Society, v. 5, p. 124003, Dec 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.5.124003>>.
- OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A.; LEANDRO, E. S. G. Ferrofluid patterns in a radial magnetic field: Linear stability, nonlinear dynamics, and exact solutions. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 77, p. 016304, Jan 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.77.016304>>.

- PACITTO, G.; FLAMENT, C.; BACRI, J.-C.; WIDOM, M. Rayleigh-taylor instability with magnetic fluids: Experiment and theory. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 62, p. 7941–7948, Dec 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.62.7941>>.
- ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985. ISBN 0521256240 9780521256247.
- SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. I. The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 245, n. 1242, p. 312–329, 1958.
- SHARMA, V.; OTHMAN, H. B.; NAGATSU, Y.; MISHRA, M. Viscous fingering of miscible annular ring. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 916, p. A14, 2021.
- STEVENS, P. S. *Patterns in Nature*. [S.l.]: Little Brown and Company, 1974.
- THOMPSON, D. W. *On Growth and Form*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. (Canto).
- WARD, T.; WHITE, A. R. Gas-driven displacement of a liquid in a partially filled radial hele-shaw cell. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 83, p. 046316, Apr 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.046316>>.
- YU, Z.; CHRISTOV, I. C. Long-wave equation for a confined ferrofluid interface: periodic interfacial waves as dissipative solitons. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 477, n. 2256, p. 20210550, 2021. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.2021.0550>>.
- YU, Z.; CHRISTOV, I. C. Tuning a magnetic field to generate spinning ferrofluid droplets with controllable speed via nonlinear periodic interfacial waves. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 103, p. 013103, Jan 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.103.013103>>.
- ZHAO, M.; ANJOS, P. H. A.; LOWENGRUB, J.; LI, S. Pattern formation of the three-layer saffman-taylor problem in a radial hele-shaw cell. *Phys. Rev. Fluids*, American Physical Society, v. 5, p. 124005, Dec 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.5.124005>>.

APÊNDICE A – FUNÇÕES DE ACOPLAMENTO DE SEGUNDA ORDEM PARA CAMPO RADIAL

Neste apêndice apresentamos as expressões para as funções de acoplamento em segunda ordem do capítulo 2.

Na Eq. (2.2), os termos de segunda ordem são

$$F(n, n') = - \frac{\mathcal{A}|n|}{R_1} \left\{ \frac{N_B}{2} \chi \{1 + \chi [1 + n'(n - n')]\} + \frac{\sigma}{R_1^3} \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right\}, \quad (\text{A.1})$$

$$G(n, n') = \frac{1}{R_1} \{ A_{12}|n|[1 - g_1(n, n') \operatorname{sgn}(nn')] - f_1^{-1} \}, \quad (\text{A.2})$$

$$H(n, n') = \frac{|n|}{R_2} \left\{ \frac{N_B}{2} \chi \{1 + \chi [1 + n'(n - n')]\} - \frac{1}{R_2^3} \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right\}, \quad (\text{A.3})$$

$$I(n, n') = \frac{1}{R_2} \{ A_{23}|n|[1 - g_2(n') \operatorname{sgn}(nn')]\}, \quad (\text{A.4})$$

$$J(n, n') = \frac{|n|}{R_1} \left\{ \frac{(A_{23} + 1) R^{|n'+2|}}{1 - R^{2|n'|}} \operatorname{sgn}(nn') \right\}, \quad (\text{A.5})$$

$$K(n, n') = \frac{|n|}{R_1} \left\{ \frac{(A_{23} R^{2|n|} + 1) R^{|n'|-|n|}}{1 - R^{2|n'|}} \times \operatorname{sgn}(nn') \right\}, \quad (\text{A.6})$$

com

$$g_1(n, n') = \left(\frac{A_{12} + 1}{2A_{12}} \right) \frac{(1 + A_{23} R^{2|n|})(1 + R^{2|n'|})}{(1 - A_{23} R^{2|n|})(1 - R^{2|n'|})} + \left(\frac{A_{12} - 1}{2A_{12}} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$g_2(n') = \frac{A_{23} + 1}{A_{23}(1 - R^{2|n'|})}, \quad (\text{A.8})$$

e a função sgn é igual a ± 1 de acordo com o sinal do argumento.

Os termos de segunda ordem na Eq. (2.3) são

$$\mathcal{F}(n, n') = H(n, n'), \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(n, n') &= \frac{1}{R_2} \{ A_{23}|n|[1 - g_3(n, n') \text{sgn}(nn')] \\ &\quad - f_4^{-1} \}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{H}(n, n') = F(n, n'), \quad (\text{A.11})$$

$$\mathcal{I}(n, n') = \frac{1}{R_1} \{ A_{12}|n|[1 - g_4(n') \text{sgn}(nn')] \}, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{J}(n, n') = \frac{|n|}{R_2} \left\{ \frac{(A_{12} - 1) R^{|n'|-2}}{1 - R^{2|n'|}} \text{sgn}(nn') \right\}, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(n, n') &= \frac{|n|}{R_2} \left\{ \frac{(A_{12} R^{2|n|} - 1) R^{|n'|-|n|}}{1 - R^{2|n'|}} \right. \\ &\quad \left. \times \text{sgn}(nn') \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

com

$$\begin{aligned} g_3(n') &= \left(\frac{A_{23} - 1}{2A_{23}} \right) \frac{(1 - A_{12} R^{2|n|})(1 + R^{2|n'|})}{(1 + A_{12} R^{2|n|})(1 - R^{2|n'|})} \\ &\quad + \left(\frac{A_{23} + 1}{2A_{23}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

e

$$g_4(n') = \frac{A_{12} - 1}{A_{12}(1 - R^{2|n'|})}. \quad (\text{A.16})$$

APÊNDICE B – FUNÇÕES DE ACOPLAMENTO DE SEGUNDA ORDEM PARA CAMPO RADIAL E AZIMUTAL

Neste apêndice apresentamos as expressões para as funções de acoplamento em segunda ordem do capítulo 3.

Na Eq. (3.2), os termos de segunda ordem são

$$\begin{aligned}
 F(n, n') &= -\frac{\mathcal{A}|n|}{R_1} \left\{ \frac{\sigma}{R_1^3} \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right. \\
 &\quad + \frac{\chi}{2} \left[(1 + \chi)N_{Br} + 3\frac{N_{Ba}}{R_1^4} \right. \\
 &\quad + \left. \left. \chi \left(N_{Br} - \frac{N_{Ba}}{R_1^4} \right) n' (n - n') \right] \right. \\
 &\quad \left. + in'\chi^2 \operatorname{sgn}(I) \frac{\sqrt{N_{Ba}N_{Br}}}{R_1^2} \right\}, \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(n, n') &= \frac{1}{R_1} \{ A_{12}|n|[1 - g_1(n, n') \operatorname{sgn}(nn')] \\
 &\quad - f_1^{-1} \}, \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(n, n') &= -\frac{|n|}{R_2} \left\{ \frac{1}{R_2^3} \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right. \\
 &\quad - \frac{\chi}{2} \left[(1 + \chi)N_{Br} + 3\frac{N_{Ba}}{R_2^4} \right. \\
 &\quad + \left. \left. \chi \left(N_{Br} - \frac{N_{Ba}}{R_2^4} \right) n' (n - n') \right] \right. \\
 &\quad \left. - in'\chi^2 \operatorname{sgn}(I) \frac{\sqrt{N_{Ba}N_{Br}}}{R_2^2} \right\}, \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

$$I(n, n') = \frac{1}{R_2} \{ A_{23}|n|[1 - g_2(n') \operatorname{sgn}(nn')]\}, \tag{B.4}$$

$$J(n, n') = \frac{|n|}{R_1} \left\{ \frac{(A_{23} + 1) R^{|n'|+2}}{1 - R^{2|n'|}} \operatorname{sgn}(nn') \right\}, \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 K(n, n') &= \frac{|n|}{R_1} \left\{ \frac{(A_{23}R^{2|n|} + 1) R^{|n'|-|n|}}{1 - R^{2|n'|}} \right. \\
 &\quad \left. \times \operatorname{sgn}(nn') \right\}, \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

com

$$g_1(n, n') = \left(\frac{A_{12} + 1}{2A_{12}} \right) \frac{(1 + A_{23}R^{2|n|})(1 + R^{2|n'|})}{(1 - A_{23}R^{2|n|})(1 - R^{2|n'|})} + \left(\frac{A_{12} - 1}{2A_{12}} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$g_2(n') = \frac{A_{23} + 1}{A_{23}(1 - R^{2|n'|})}, \quad (\text{B.8})$$

e a função sgn é igual a ± 1 de acordo com o sinal do argumento.

Os termos de segunda ordem na Eq. (3.3) são

$$\mathcal{F}(n, n') = H(n, n'), \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{G}(n, n') = \frac{1}{R_2} \{ A_{23}|n|[1 - g_3(n, n') \text{sgn}(nn')] - f_4^{-1} \}, \quad (\text{B.10})$$

$$\mathcal{H}(n, n') = F(n, n'), \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{I}(n, n') = \frac{1}{R_1} \{ A_{12}|n|[1 - g_4(n') \text{sgn}(nn')] \}, \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{J}(n, n') = \frac{|n|}{R_2} \left\{ \frac{(A_{12} - 1) R^{|n'|-2}}{1 - R^{2|n'|}} \text{sgn}(nn') \right\}, \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{K}(n, n') = \frac{|n|}{R_2} \left\{ \frac{(A_{12}R^{2|n|} - 1) R^{|n'|-|n|}}{1 - R^{2|n'|}} \times \text{sgn}(nn') \right\}, \quad (\text{B.14})$$

com

$$g_3(n') = \left(\frac{A_{23} - 1}{2A_{23}} \right) \frac{(1 - A_{12}R^{2|n'|})(1 + R^{2|n'|})}{(1 + A_{12}R^{2|n'|})(1 - R^{2|n'|})} + \left(\frac{A_{23} + 1}{2A_{23}} \right), \quad (\text{B.15})$$

e

$$g_4(n') = \frac{A_{12} - 1}{A_{12}(1 - R^{2|n'|})}. \quad (\text{B.16})$$

**ANEXO A – MAGNETOELASTIC PATTERN FORMATION IN
FIELD-RESPONSIVE FLUIDS**
PHYSICAL REVIEW FLUIDS 5, 014006 (2020)

Magnetoelastic pattern formation in field-responsive fluids

Pedro O. S. Livera^{*} and José A. Miranda[†]

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil



(Received 24 October 2019; published 31 January 2020)

We study the development of interfacial magnetoelastic patterns when an initially circular droplet of a field-activated fluid (ferrofluid, or a magnetorheological fluid), surrounded by a nonmagnetic fluid, is subjected to a radial magnetic field in a Hele-Shaw cell. Elasticity takes effect when the fluids are brought into contact and, due to a chemical reaction, the interface separating them becomes a gel-like elastic layer. By modeling the interface as an elastic membrane having a curvature-dependent bending rigidity, a perturbative mode-coupling theory is employed to investigate the weakly nonlinear dynamics of the system. In this context, we examine how the interface responds to the influence of magnetic, elastic, and yield stress forces. Our findings support the relevance of a curvature weakening effect, in the sense that magnetoelastic fingering structures tend to arise and protrude in regions of lower bending rigidity. We contrast the magnetoelastic patterns with the corresponding usual shapes of magnetic fluid interfaces without bending rigidity, but with surface tension.

DOI: [10.1103/PhysRevFluids.5.014006](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.014006)

I. INTRODUCTION

Magnetic-field-responsive fluids, such as ferrofluids, and magnetorheological (MR) fluids are soft matter materials that conveniently combine fluidity attributes of liquids and magnetic properties of solids. Ferrofluids are colloidal suspensions of monodomain nanometer-size magnetic particles suspended in a nonmagnetic solvent [1,2]. Most ferrofluids are Newtonian fluids and do not tend to form particle chains when subjected to an applied magnetic field. On the other hand, MR fluids are suspensions of much bigger (micrometer-size) magnetic particles in a nonmagnetic carrier fluid [3–5]. In contrast to ferrofluids, MR fluids particles are multidomain and have the tendency to produce long chains under the presence of an external magnetic field. This responsive behavior leads to a rheological change of MR fluids from a liquid to a solidlike state. Consequently, and differently from ferrofluids, MR fluids are notably non-Newtonian, presenting a distinguishing magnetic-field-dependent yield stress [6–8].

The peculiar hydrodynamic and magnetic properties of ferrofluids and MR fluids make them remarkable materials to study a variety of interfacial instabilities and pattern formation processes [9,10]. This is particularly true for the case of spatially confined systems, where a magnetic fluid droplet is surrounded by a nonmagnetic fluid and placed in the narrow, effectively two-dimensional space between two parallel glass plates of a Hele-Shaw cell [11,12]. Depending on the nature of the magnetic fluid and on the symmetry properties of the applied magnetic field, various pattern morphologies can be produced. While multiply branched, labyrinth-type structures arise under the action of a perpendicularly applied magnetic field [13–16], polygon-shaped and starfishlike patterns emerge if a radial field is applied in the plane of the Hele-Shaw cell [17–19]. Moreover, if the

^{*}pedro.oslivera@outlook.com

[†]jme@df.ufpe.br

applied field is an in-plane AC rotating magnetic field, unique spiral shapes are formed [20]. On the other hand, if the positions of the fluids are swapped and an in-plane azimuthal magnetic field produced by a current-carrying wire is applied, one observes yet another family of shapes ranging from regular n -fold patterns having bulbous fingers to considerably intricate, ramified fingering arrangements [21–23]. In all these systems [13–23] the shape of the resulting patterns is determined by the interplay of magnetic, surface tension, and yield stress forces.

Interesting possibilities for these magnetic-field-activated fluid systems confined in Hele-Shaw cells are offered if one considers the inclusion of an extra physical ingredient: the action of elastic forces at the interface. Recent experiments using two nonmagnetic reacting fluids in a Hele-Shaw cell show that when the fluids are put in contact, a chemical reaction occurs and the fluid-fluid interface becomes a gel-like elastic layer [24]. In fact, there are several other experimental Hele-Shaw systems involving nonmagnetic fluids which exhibit different phenomena and unusual fingering patterns caused by chemical reactions [25–28], precipitation reactions and chemical gardens [29–32], and gel-producing reactions [33,34].

The appealing experimental results reported in Ref. [24] inspired some theoretical studies about the detected elastic fingering phenomena. Linear stability analysis [35], weakly nonlinear theory [36], and sophisticated boundary integral numerical simulations [37] have examined the problem theoretically. These theoretical investigations have demonstrated that the basic physics of the reactive flow system experimentally examined in Ref. [24] can be properly described by a model considering the interface as a thin elastic membrane. Consistency between theory and experiments is obtained when the elastic membrane is modeled as having a curvature-dependent bending rigidity whose value decreases as the local interfacial curvature increases [35–37].

Motivated by the experimental and theoretical findings reported in Refs. [24–37] regarding pattern formation in reactive fluids and the presence of an elastic membrane separating fluids in Hele-Shaw flows, in this work we investigate a magnetoelastic version of such a problem. We consider that a magnetic fluid (a ferrofluid, or a MR fluid) droplet is surrounded by a nonmagnetic fluid and subjected to an applied in-plane radial magnetic field. The elastic gel-like magnetic fluid interface we model is originated by a chemical reaction as in the case already studied experimentally [24] and theoretically [35–37] for nonmagnetic fluid flows in Hele-Shaw cells. Additionally, as in Refs. [35–37], we assume that the fluid-fluid boundary is a thin elastic layer presenting a curvature-dependent bending rigidity. This opens up the possibility of studying still unexplored pattern-forming phenomena in such confined magnetoelastic fluid system, by taking into account the influence of magnetic, elastic, and yield stress effects at the interface.

It should be stressed that the impact of elastic interface effects on the dynamics and pattern formation of magnetic fluids in Hele-Shaw geometry is a considerably unexploited research area. One exception is a recent work [38] which examined the formation of wrinkling and folding patterns in a confined ferrofluid droplet having an elastic boundary subjected to a radial magnetic field. However, the work carried out in Ref. [38] utilized a simplified theoretical description of the problem; in particular, the elastic interface was assumed to have a constant bending rigidity. In addition, the perturbative study performed in Ref. [38] was restricted to a simple linear stability analysis. More complicated fully nonlinear aspects of the patterns have been obtained in a nonperturbative manner through the evaluation of stationary exact solutions for the interface shape by utilizing a vortex sheet approach.

This paper expands the work carried out in Ref. [38] in several directions. First, as in Refs. [35–37], we now use a more realistic and better established theoretical modeling for the elastic interface and consider that it has a curvature-dependent bending rigidity. Moreover, in contrast to what was done in Ref. [38], we go beyond the linear regime and perform a second-order weakly nonlinear analysis of the system. This is a very important point since the inclusion of nonlinear effects is simply essential to allow one to extract important information about the morphology of the patterns [39]. It should also be mentioned that, contrary to what has been executed in Ref. [38], which tried to assess nonlinear morphological information from stationary exact solutions of the problem, here we get useful insight into the shape of the patterns via the establishment of

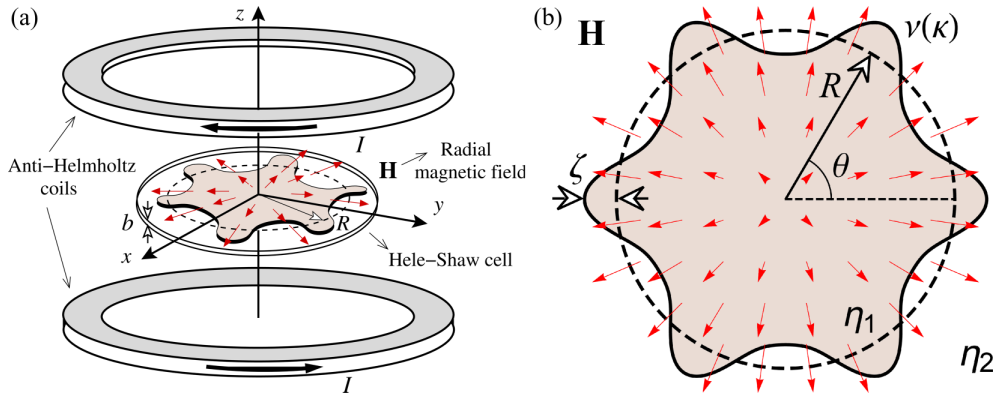


FIG. 1. (a) Schematic illustrating the perspective view of the anti-Helmholtz magnetic-field arrangement in a Hele-Shaw cell of gap thickness b . The electric currents I in the coils are equal and flow in opposite directions, producing a magnetic field \mathbf{H} [Eq. (1)] pointing radially outward in the plane of the cell ($z = 0$ plane). The inner fluid (fluid 1) is a magnetic fluid and the outer fluid (fluid 2) is nonmagnetic. Initially, the magnetic fluid droplet has a circular shape of radius R (dashed curve), but may deform (solid curve) due to the action of \mathbf{H} . (b) Schematic depicting the top view of the system. The interface perturbation amplitude is denoted by $\zeta = \zeta(\theta, t)$ [Eq. (4)], where θ is the azimuthal angle. The interface is elastic and has a curvature-dependent bending rigidity $\nu(\kappa)$ [Eq. (2)]. The viscosity of the inner (outer) fluid is η_1 (η_2).

time-evolving nonlinear solutions. This is also a significant distinction, since, while the stability of the stationary vortex sheet solutions obtained in Ref. [38] is still an open question [38,40], the stability of the time-evolving weakly solutions we get in this work can be directly verified by the saturation of the Fourier mode amplitudes. Furthermore, as opposed to Ref. [38], which is limited to the study of ferrofluids, in this work we also consider the case in which the magnetic liquid is a MR fluid.

II. PHYSICAL PROBLEM AND GOVERNING EQUATIONS

The geometry of the problem is schematically illustrated in Fig. 1: A magnetic fluid (ferrofluid, or MR fluid) droplet of radius R and viscosity η_1 is surrounded by a nonmagnetic fluid of viscosity η_2 . Both fluids are incompressible and are confined in a Hele-Shaw cell of thickness b . We consider the action of a radial magnetic field given by [17,41]

$$\mathbf{H} = H_0 r \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (1)$$

where r is the radial distance from the origin of the coordinate system (located at the center of the droplet), H_0 is a constant, and $\hat{\mathbf{e}}_r$ is a unit vector in the radial direction. The radial magnetic field is produced by a pair of identical Helmholtz coils whose electric currents are equal and flow in opposite directions [Fig. 1(a)]. This is commonly known as the anti-Helmholtz configuration. For experimental realizations of such a radial magnetic-field arrangement see, for instance, Refs. [42–46]. The Hele-Shaw cell is located at the mid-distance between the coils, in such a way that the radial magnetic field is coplanar to it. A magnetic body force $\sim \nabla H$, where $H = |\mathbf{H}|$ is the local magnetic-field intensity, acts on the magnetic fluid pointing in the outward radial direction. As the applied radial magnetic field given by Eq. (1) has a natural nonzero gradient, we take it as the main local field contribution to the magnetic body force. Therefore, in this paper we do not consider the influence of the demagnetizing field [1,2]. As already discussed in Ref. [38], within the scope of our radial magnetic-field problem, demagnetizing effects can be safely neglected.

We follow Refs. [35–37] and consider that the interface separating the fluids is a thin elastic membrane presenting a curvature-dependent bending rigidity given by

$$\nu = \nu(\kappa) = \nu_0 [C e^{-\lambda^2 \kappa^2} + 1 - C], \quad (2)$$

where

$$\kappa = \frac{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 - r\frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (3)$$

denotes the interface curvature in the plane of the Hele-Shaw cell, with θ representing the azimuthal angle [Fig. 1(b)]. This model for $\nu(\kappa)$ is based on the fact that as the interface curves, it is expected that intermolecular bonds are broken, thus reducing the rigidity of the gel-like elastic layer. Thus, $\nu(\kappa)$ should decrease as κ is increased. In Eq. (2) ν_0 is the maximum rigidity that expresses the largest resistance to disturbances and $0 \leq C < 1$ is the bending rigidity fraction, which measures the fraction of intramolecular bonds broken through surface deformation. Moreover, $\lambda > 0$ represents a characteristic radius beyond which $\nu(\kappa)$ decreases substantially. Note that by setting $C = 0$ one reaches the simpler constant bending rigidity limit used in Ref. [38] for which $\nu = \nu_0$.

The interplay of magnetic, elastic, and yield stress forces may deform the interface separating the fluids. The perturbed interface shape is described as $\mathcal{R}(\theta, t) = R + \zeta(\theta, t)$, where R is the radius of the initially circular interface at $t = 0$. Here

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta) \quad (4)$$

is the net interface perturbation with Fourier amplitudes $\zeta_n(t)$ and integer wave numbers n . Our perturbative weakly nonlinear approach keeps terms up to the second order in ζ . Mass conservation imposes that the zeroth mode is written in terms of the other modes as $\zeta_0 = -(1/2R) \sum_{n \neq 0} |\zeta_n(t)|^2$ [39]. Our main goal in this section is to derive a mode-coupling differential equation that describes the time evolution of the interfacial amplitudes $\zeta_n(t)$ at the onset of nonlinear effects.

Under the spatially confined Hele-Shaw flow conditions of our problem, the effectively two-dimensional dynamics of the magnetic fluid droplet can be described by a modified Darcy law for the gap-averaged velocity [6–8, 13, 14, 47]

$$\mathbf{v}_j = -\frac{b^2}{12\eta_j} \left[\nabla \Pi_j + \frac{3\sigma_y(H)}{b} \hat{\mathbf{e}}_r \right], \quad (5)$$

where $j = 1$ ($j = 2$) labels the inner (outer) fluid. In Eq. (5) the gap-averaged generalized pressure is defined as [15]

$$\Pi_j = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} [P_j - \Psi] dz, \quad (6)$$

where P_j is the three-dimensional pressure,

$$\Psi = \frac{\mu_0 \chi H^2}{2} \quad (7)$$

represents a magnetic pressure [1], and μ_0 denotes the magnetic permeability of free space. In Eq. (7) we used the linear relationship $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, with $M = |\mathbf{M}|$ the magnetization of the magnetic fluid and χ its magnetic susceptibility. Note that for the nonmagnetic outer fluid $\chi = 0$ and $\Psi = 0$.

The second term in square brackets on the right-hand side of Eq. (5) expresses the contribution of a magnetic-field-dependent yield stress which is given by [3–5, 7, 8]

$$\sigma_y(H) = \sigma_{y0} + \alpha H^2, \quad (8)$$

where σ_{y0} stands for the yield stress in the absence of the magnetic field and α is a constant that depends on the material properties of the magnetic fluid, being proportional to the particle volume fraction [5]. Based on the symmetry of the applied magnetic field, we consider the prevalent yielding occurring along the radial direction. Note that, by setting $\sigma_y(H) = 0$ in Eq. (5), the yield stress term vanishes and one recovers the usual Darcy law for Newtonian ferrofluids [13–17].

It should be noted that the derivation of the generalized Darcy law given by Eq. (5) (see Refs. [7,18,47] and references therein) uses the Bingham model that presents a yield stress limit which must be exceeded before significant deformation can occur. Since we are interested in examining the interface destabilization process and the flow provoked by the applied magnetic field, we consider the regime where magnetic and viscous forces prevail over the stabilizing role of the yield stress. In this framing, flow is facilitated and nontrivial, i.e., noncircular, magnetoelastic patterns arise. This is the reason why Eq. (5) does not seem to work in the limit of $\mathbf{H} = 0$ with a finite yield stress for which the interface is perfectly stable and circular. However, note that this does not lead to any inconsistencies regarding the stability analysis of the problem: As expected, in the limit $N_B \rightarrow 0$ in Eq. (13) the yield stress effect is clearly stabilizing.

Since the field-dependent yield stress term [second term in square brackets of Eq. (5)] can be expressed as a gradient of some scalar function, the velocity field is irrotational in the bulk and we can state our problem in terms of velocity potentials ϕ_j , where $\mathbf{v}_j = -\nabla\phi_j$. Thus, from Eq. (5) and the incompressibility condition $\nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0$ it can be verified that the potentials ϕ_j obey Laplace's equation. These velocity potentials can be written as

$$\phi_j(r, \theta) = \sum_{n \neq 0} \phi_{jn}(t) \left(\frac{r}{R}\right)^{(-1)^{j+1}|n|} \exp(in\theta). \quad (9)$$

Nonetheless, we still need to include the contributions coming from the elastic nature of the interface. In order to do that, as in Refs. [35–37] we consider a generalized Young-Laplace pressure boundary condition, which expresses the pressure jump across the perturbed interface as

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)|_{r=R} = & \frac{1}{2}v'''\kappa^2\kappa_s^2 + v''(3\kappa\kappa_s^2 + \frac{1}{2}\kappa^2\kappa_{ss}) + v'(\frac{1}{2}\kappa^4 + 3\kappa_s^2 + 2\kappa\kappa_{ss}) \\ & + v(\frac{1}{2}\kappa^3 + \kappa_{ss}) - \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2. \end{aligned} \quad (10)$$

As far as the mathematical origin of Eq. (10) is concerned, it can be obtained by minimizing a Helfrich-like energy functional (a measure of the energy of the elastic interface separating the two fluids) with a curvature-dependent bending rigidity. For a more detailed account of the derivation of Eq. (10) the interested reader is referred to Refs. [35,36].

In Eq. (10) the primes indicate derivatives with respect to the curvature κ , while the subscripts of κ indicate derivatives with respect to the arc length s . Note that Eq. (10) differs significantly from the traditional Young-Laplace condition applied to immiscible nonreactive fluids in Hele-Shaw cells [11,12] that is much simpler and involves only the product of κ by the surface tension σ . Similar to what is done in Refs. [35–37], we consider that elastic effects dominate the condition at the interface in such a way that surface tension effects are not considered in Eq. (10). It is also worthwhile to note that Eq. (10) is much more complex than its constant bending rigidity counterpart studied in Ref. [38], where all derivative terms with respect κ simply drop out [see Eq. (5) in Ref. [38]].

Observe that in the pressure boundary condition [Eq. (10)] there is still a term that is connected to the magnetic nature of the deforming droplet. It is precisely the last term on the right-hand side of Eq. (10), which is commonly known as the magnetic normal traction [1,2], where \mathbf{n} represents the unit normal vector at the interface. This term incorporates the influence of the discontinuous normal component of the magnetization at the interface.

The problem is then fully specified with the consideration of another relevant boundary condition, known as the kinematic boundary condition. Fundamentally, it states that the normal components

of each fluid's velocity are continuous at the interface [1,11,12,48]

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right] \Big|_{r=\mathcal{R}}. \quad (11)$$

This condition holds for either fluid-fluid, fluid-elastic, or fluid-solid interfaces and implies that the fluid cannot penetrate the other medium. Equation (11) is also widely utilized in problems involving the interaction between fluids and deformable bodies [49]. In our case, the problem effectively involves three immiscible phases (the two liquids and the elastic interface). Nevertheless, since the elastic phase has negligible thickness (and thus cannot be compressed in the normal direction), the normal component of the fluid velocity must be continuous across the interface.

Finally, we have all necessary elements to derive the mode-coupling differential equation that describes the time evolution of the interfacial amplitudes $\zeta_n(t)$. We do that by following usual steps of previous weakly nonlinear studies in Hele-Shaw flows [39,50]. First, boundary conditions (10) and (11) are used to express ϕ_j [Eq. (9)] in terms of ζ_k [Eq. (4)] consistently up to second order. Then, by substituting these relations and the pressure condition (10) into the modified Darcy law (5), always keeping terms up to second order in ζ , and Fourier transforming, after some algebra, we find the *dimensionless* equation of motion for the perturbation amplitudes

$$\dot{\zeta}_n = \Lambda(n)\zeta_n + \sum_{m \neq 0} [F(n, m)\zeta_m\zeta_{n-m} + G(n, m)\dot{\zeta}_m\zeta_{n-m}], \quad (12)$$

where the overdot represents a total time derivative and

$$\Lambda(n) = |n| \left\{ 2N_B\chi(1 + \chi) - S_0 - 3S + \frac{1}{2}(n^2 - 1)[A_1(C, \lambda)(n^2 + 1) + A_2(C, \lambda)] \right\} \quad (13)$$

denotes the linear growth rate. The parameter

$$N_B = \frac{\mu_0 H_0^2 R^5}{2\nu_0} \quad (14)$$

is a magnetoelastic number and measures the ratio of magnetic to elastic forces. On the other hand,

$$S_0 = \frac{3\sigma_{y0}R^4}{\nu_0 b} \quad (15)$$

and

$$S = \frac{\alpha H_0^2 R^6}{\nu_0 b} \quad (16)$$

are the parameters related to the yield stress contributions at zero and nonzero radial magnetic field, respectively. We still have that

$$A_1(C, \lambda) = Ce^{-\lambda^2}(-4\lambda^4 + 10\lambda^2 - 2) - 2(1 - C) \quad (17)$$

and

$$A_2(C, \lambda) = Ce^{-\lambda^2}(8\lambda^4 - 22\lambda^2 + 5) + 5(1 - C), \quad (18)$$

which are linear terms connected to the elastic nature of the interface.

The second-order mode-coupling terms are given by

$$F(n, m) = |n|[N_B\chi[1 + \chi(1 + m(n - m))] - 3S - \{Ce^{-\lambda^2}[B_1(n, m) + \lambda^2 B_2(n, m) + \lambda^4 B_3(n, m) + 2\lambda^6 B_4(n, m)] + (1 - C)B_1(n, m)\}] \quad (19)$$

and

$$G(n, m) = A|n|[sgn(nm) - 1] - 1. \quad (20)$$

In the expression for the coupling function $F(n, m)$ in Eq. (19) the terms are originated from the applied radial magnetic field, field-dependent yield stress, and curvature-dependent bending rigidity contributions, respectively. The term proportional to χ^2 comes from the magnetic normal traction in the pressure jump condition [Eq. (10)]. The expressions for the functions $B_1(n, m)$, $B_2(n, m)$, $B_3(n, m)$, and $B_4(n, m)$ appearing in Eq. (19) are given in the Appendix, being related to the second-order contributions from the elastic interface.

On the other hand, the nonlinear coupling function $G(n, m)$ in Eq. (20) arises from the coupling of the perturbed flow ζ with the interface shape perturbation ζ . It has a purely kinetic origin, having no dependence on magnetic, yield stress, or elastic effects. However, it does depend on the viscosity contrast (a dimensionless viscosity difference parameter) $A = (\eta_1 - \eta_2)/(\eta_1 + \eta_2)$, and the sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument. Notice that in Eqs. (12)–(20) lengths and velocities are rescaled by R and $v_0 b^2/12(\eta_1 + \eta_2)R^4$, respectively. From this point onward we use the dimensionless version of all the equations. We note that the theoretical results presented in this work utilize dimensionless quantities which are consistent with physical parameters used in Refs. [1, 8, 24, 28, 35–38, 44, 45].

Equation (12) is the second-order mode-coupling equation for our magnetoelastic instability problem in a Hele-Shaw cell under the presence of a radial magnetic field. This result contrasts with most findings obtained by previous theoretical studies of elastic fingering formation which focused on Hele-Shaw flows involving only nonmagnetic fluids [35–37].

Since the linear growth rate [Eq. (13)] is time independent, one can readily see from Eq. (12) that at the linear level the perturbation amplitudes $\zeta_n(t)$ grow or decay exponentially with time, i.e., $\zeta_n(t) = \zeta_n(0) \exp[\Lambda(n)t]$. The linear growth rate $\Lambda(n)$ informs about the linear stability of the system: The interface is linearly unstable (stable) to the n th mode perturbation if $\Lambda(n) > 0$ [$\Lambda(n) < 0$]. By inspecting Eq. (13) it is clear that the radial magnetic-field term proportional to N_B is destabilizing, while both yield stress terms tend to stabilize the interface in the linear regime. However, as already extensively discussed in Refs. [35–37], for a given shape-deforming mode $n \geq 2$ (note that for modes $n = 0$ and $n = 1$ the magnetic liquid droplet remains circular), the behavior of the curvature-dependent bending rigidity term in $\Lambda(n)$ is a bit more subtle. In the limit of constant rigidity ($C = 0$) the quantity $[A_1(C, \lambda)(n^2 + 1) + A_2(C, \lambda)]$ is negative and the bending rigidity forces tend to stabilize the interface. Roughly speaking, one can say that in this case the parameter v_0 acts like an effective surface tension, similarly to what one has in the usual radial magnetic-field Hele-Shaw problem in the absence of elastic effects [17–19]. Nevertheless, if $0 < C < 1$, the quantity $[A_1(C, \lambda)(n^2 + 1) + A_2(C, \lambda)]$ can be positive and the effect of the curvature-dependent bending rigidity may lead to interface destabilization. However, as these elastic linear stability aspects of the problem have already been thoroughly scrutinized [35–37], in this work we concentrate our attention on nonlinear pattern-forming phenomena. More precisely, we investigate how the consideration of the second-order nonlinear terms given by Eqs. (19) and (20) might provide access to important morphological aspects of the magnetoelastic patterns during the weakly nonlinear regime.

III. WEAKLY NONLINEAR MAGNETOELASTIC PATTERNS

In this section we use Eqs. (12)–(20) to obtain perturbative solutions for the shape of confined, elastic interface magnetic fluid droplets subjected to a radial magnetic field. As in the case of Ref. [19], in this work we have that the most important morphological features of the magnetoelastic patterns can be captured by considering the coupling of a small number of participating Fourier modes. In this framework, we analyze the shapes of the resulting patterns and examine how the amplitudes of the participating modes evolve with time. Time evolution of the Fourier mode amplitudes offers a useful way to verify whether such mode amplitudes continue to grow unrestrained (as predicted by the linear theory) or tend to saturate as time progresses. Eventual saturation of the mode amplitudes would suggest that the weakly nonlinear patterns converge to a stationary configuration. The establishment of static profiles for the elastic interface certainly reinforces

the physical relevance of the perturbative weakly nonlinear solutions, indicating their dynamic stability.

The main purpose of our weakly nonlinear study is to investigate the influence of the curvature-dependent bending rigidity [Eq. (2)] on the shape of the emerging magnetoelastic fingering structures. Another important aspect to be examined is to check how the magnetoelastic patterns differ from their nonelastic counterparts [17–19]. In Refs. [17–19] elastic effects were not present and the fluid-fluid interface was regulated by surface tension forces. The comparison of the shapes assumed by elastic interface magnetic fluid patterns with the usual shapes of conventional magnetic fluid patterned structures, i.e., with no bending rigidity, but with surface tension, would highlight the effect of replacing surface tension by bending rigidity in the interfacial instabilities. All these important aspects will be investigated in Sec. III A for ferrofluids and in Sec. III B for MR fluids.

To generate the shapes of the elastic interface magnetic fluid fingering structures, we consider the nonlinear coupling of a finite number N of Fourier modes and rewrite Eq. (12) in terms of the real-valued cosine amplitudes $a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$. The magnetoelastic patterns and the time evolution of the cosine mode amplitudes are obtained by numerically solving the corresponding coupled nonlinear differential equations. Once this is done, the shape of the elastic interface is found by utilizing Eq. (4). Most of the magnetoelastic patterns presented in Secs. III A and III B are obtained by considering the interplay of only four ($N = 4$) participating Fourier modes: the fundamental mode n and its harmonics $2n$, $3n$, and $4n$. Amazingly enough, the inclusion of just these modes is sufficient to reproduce accurately the shape of the resulting magnetoelastic structure. Thus, including more modes will not change the ultimate shape of the elastic interface magnetic fluid patterns (this point will be discussed further in Secs. III A and III B).

Throughout this work, we assume that the fundamental mode n is given by the closest integer to the fastest growing mode n_{\max} , i.e., the mode of maximum linear growth rate $\Lambda(n)$, obtained by the condition $[d\Lambda(n)/dn]_{n=n_{\max}} = 0$. We point out that although $\Lambda(n_{\max}) > 0$ drives a positive linear growth of the fundamental mode n , the other participating harmonic modes ($2n$, $3n$, and $4n$) present a negative growth rate and therefore are linearly stable. Consequently, any growth of such modes is genuinely caused by the weakly nonlinear coupling. Additionally, to ensure that the interfacial behaviors we detect in this work are spontaneously induced by the weakly nonlinear dynamics and not by artificially imposing large initial amplitudes for the harmonic modes, we always set the initial ($t = 0$) harmonic mode amplitudes to zero. This is done to avoid artificial growth of modes $2n$, $3n$, and $4n$ imposed solely by the initial conditions.

As mentioned above, in this work we consider situations dominated by a single linearly unstable mode (the fundamental mode n). However, it should be stressed that our truncated weakly nonlinear expansion works equally well in cases where more than one linearly unstable mode competes at the early nonlinear level. Actually, this issue has been analyzed some time ago in Ref. [39], where it was shown that in both scenarios the qualitative results regarding the main morphological features of the produced patterns, e.g., fingertip broadening and fingertip sharpening features, are the same. As shown in Ref. [39], while the consideration of a single linearly unstable mode leads to patterns that are quite symmetric in shape, the inclusion of sophistication involving more than one linearly unstable mode, random phases, etc., results in patterns that are not as symmetric with some fingers competing and advancing over others. Nevertheless, in both cases, i.e., by using one or more linearly unstable modes, the most relevant morphological aspects of the resulting patterns are equally revealed by the second-order mode-coupling approach.

Including the general behavior of both ferrofluids and MR fluids, our magnetoelastic problem is governed by a considerably large number of dimensionless parameters: A , χ , N_B , S_0 , S , C , and λ . For the sake of clarity and understanding the most important physical effects in our problem, and without affecting the validity and relevance of our theoretical analysis, we tried to reduce a bit the number of parameters that describe the situations we investigate in this work. First, to allow some connection with the most common circumstances of existing experiments with confined magnetic fluids (see, for instance, Refs. [1, 2, 13–15, 20]), we focus on the situation in which the inner magnetic fluid is much more viscous than the outer nonmagnetic fluid. Therefore, we assume that $\eta_1 \gg \eta_2$

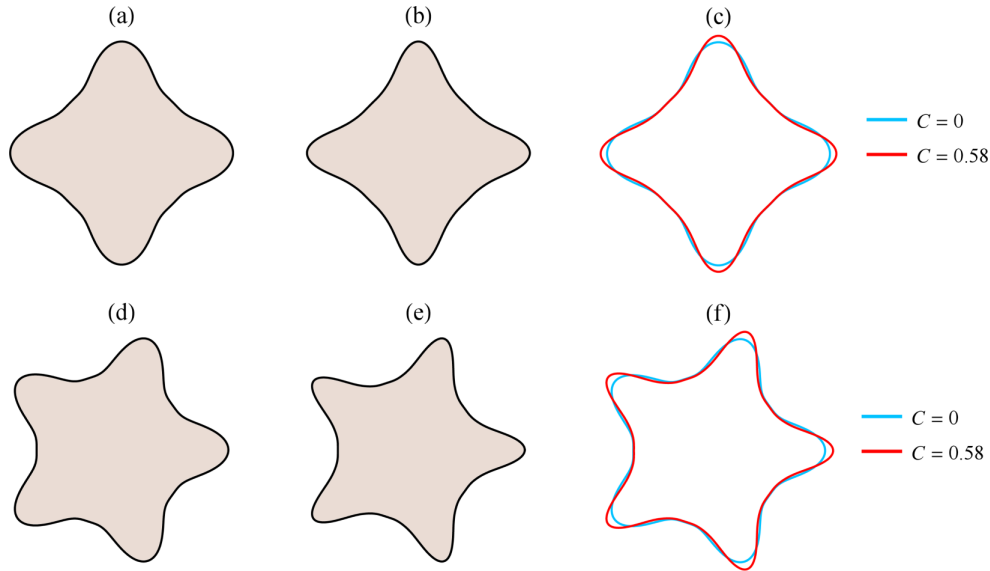


FIG. 2. Representative weakly nonlinear, elastic interface ferrofluid patterns considering the coupling of four Fourier modes n , $2n$, $3n$, and $4n$ for (a)–(c) $n = 4$, $N_B = 30$, and $\chi = 4$ and (d)–(f) $n = 5$, $N_B = 740$, and $\chi = 1$. In addition, (a) and (d) $C = 0$, (b) and (e) $C = 0.58$, and (c) and (f) for each n , the patterns for $C = 0$ and $C = 0.58$ are overlaid. The patterns are plotted for time $t = 0.005$.

so that the viscosity contrast A can be kept fixed and equal to one ($A = 1$). However, it should be stressed that the experiments performed in Refs. [1,2,13–15,20] do not consider the presence of an elastic interface. In any case, we checked that the results presented in the rest of this article remain qualitatively unchanged if other values of A are used. In addition, as long as elastic effects are concerned, we consider a small and fixed value of the characteristic radius λ ($\lambda = 0.01$) and tune elastic effects by varying the bending rigidity fraction parameter C , where $0 \leq C < 1$. This is done in order to keep the linear growth rate $\Lambda(n)$ bound and the fastest growing mode n_{\max} unchanged while we change C .

Therefore, keeping in mind the observations given in the previous two paragraphs, in terms of relevant dimensionless parameters, we have the following scenario: If the magnetic fluid is a ferrofluid (Sec. III A), we have that $S_0 = S = 0$, and in this case we deal with only three dimensionless controlling parameters, namely χ , N_B , and C . Conversely, if the magnetic fluid is a MR fluid (Sec. III B), we do have to work with five parameters (χ , N_B , S_0 , S , and C).

A. Elastic interface ferrofluid

We begin our investigation by examining Fig. 2, which depicts a typical set of weakly nonlinear, elastic interface ferrofluid patterns. Figure 2 is plotted for time $t = 0.005$, considering the coupling of four Fourier modes n , $2n$, $3n$, and $4n$. The reason for considering this specific time will be given later in this section. Since the main goal of our theory is to study the effect of the bending rigidity fraction C on the morphology of the magnetoelastic fingering patterns, the results presented in Fig. 2 focus on illustrating the most characteristic aspects of the ferrofluid droplet shapes when $C = 0$ and $C \neq 0$. Therefore, in Figs. 2(a) and 2(d) we set $C = 0$ and in Figs. 2(b) and 2(e) we take $C = 0.58$. In addition, in Figs. 2(c) and 2(f), for each of the fundamental modes n considered, the patterns for $C = 0$ and $C = 0.58$ are overlaid. This is done to facilitate comparison of the emerging shapes for these two values of C . It should be noted that, even though $0 \leq C < 1$, in the realm of our

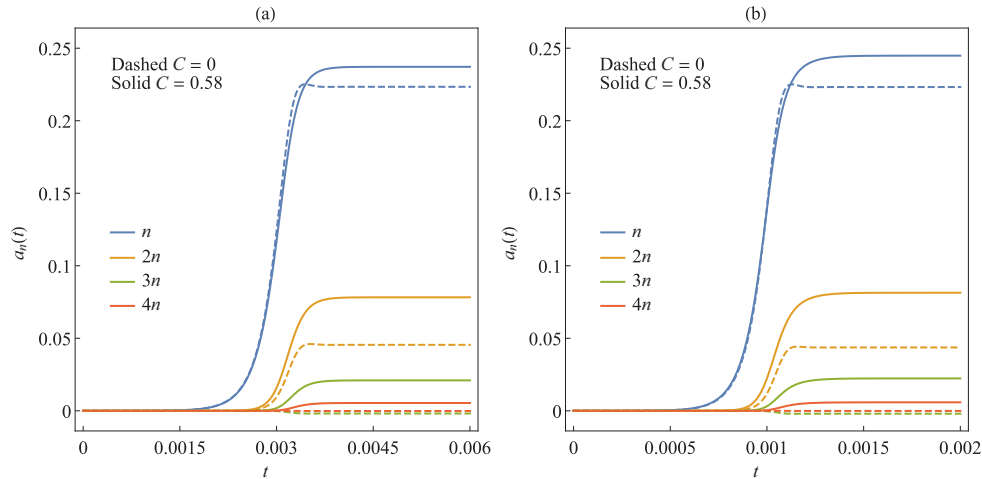


FIG. 3. Time evolution of the perturbation amplitudes $a_n(t)$, $a_{2n}(t)$, $a_{3n}(t)$, and $a_{4n}(t)$ for the patterns depicted in (a) Figs. 2(a)–2(c) for $n = 4$ and (b) Figs. 2(d)–2(f) for $n = 5$. The dashed (solid) curves take the value $C = 0$ ($C = 0.58$). It is clear that for both values of C the mode amplitudes tend to stationary values.

second-order perturbative approach, we have found that $C = 0.58$ is the maximum allowed value for the bending rigidity fraction which results in dynamically stable elastic interface ferrofluid patterns. In Figs. 2(a)–2(c) we have $n = 4$, $N_B = 30$, and $\chi = 4$. On the other hand, in Figs. 2(d)–2(f) we have that $n = 5$, $N_B = 740$, and $\chi = 1$. In Fig. 2 and in all remaining figures of this work, the initial amplitude for the fundamental mode n is taken as $a_n(t = 0) = 10^{-6}$, while the initial amplitudes for all the other (harmonic) modes are set to zero.

By inspecting the patterns in Figs. 2(a)–2(c) we observe the formation of fourfold fingered, magnetoelastic structures. It is quite evident that the pattern produced in Fig. 2(a) for $C = 0$ is distinct from the one depicted in Fig. 2(b) for $C = 0.58$. While the fingers are rounded at their tips for $C = 0$, they are sharper when $C = 0.58$. This difference in the shape of the fingers for different values of C is even more apparent when the patterns' interfaces are superimposed, as illustrated in Fig. 2(c). It is clear that the fingers generated for $C = 0.58$ not only are sharper, but also a bit longer than the ones produced when $C = 0$. The same type of behavior is observed in the fivefold structures depicted in Figs. 2(d)–2(f). In fact, we have verified the very same trend for other cases we have analyzed, using different sets of parameters (N_B , χ , and C) and other values of the fundamental mode n . Thus, the morphological features revealed in Fig. 2 are fairly representative of the general behavior presented by elastic interface ferrofluid patterns in the weakly nonlinear regime.

The interfacial shape changes induced by C for our magnetoelastic problem as portrayed in Fig. 2 are consistent with the curvature weakening effect detected in the development of elastic fingering in confined nonmagnetic fluids [35,37]. A possible physical explanation for such a behavior is given as follows. The shape dependence of the bending rigidity $\nu(\kappa)$ involves dynamical changes given by Eq. (2), which expresses the reduction of the elastic bending resistance for increasingly larger values of the local interface curvature κ . Therefore, the emergence of magnetic-field-activated interfacial elastic protuberances should be facilitated in regions of lower rigidity, i.e., regions of larger local curvature. This justifies the fact that the elastic ferrofluid fingers shown in Fig. 2 should be sharper at their tips for larger values of C .

We proceed by analyzing Fig. 3, which illustrates the time evolution of the second-order cosine amplitudes $a_n(t)$ for each of the participating Fourier modes n , $2n$, $3n$, and $4n$ used to generate the magnetoelastic patterns displayed in Fig. 2. The solid curves represent the time evolution of the amplitudes for $C = 0.58$ and the dashed curves represent the case in which $C = 0$. Figure 3(a)

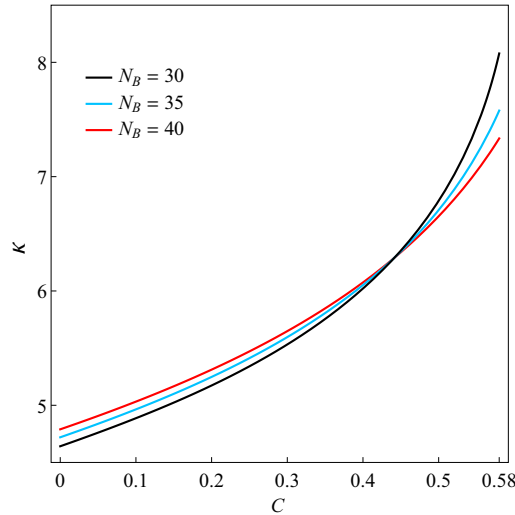


FIG. 4. Variation of the fingertip curvature κ in terms of C , for three values of the magnetoelastic number N_B : 30, 35, and 40. The remaining physical parameters are identical to the ones utilized in the fourfold patterns shown in Figs. 2(a)–2(c).

plots $a_n(t)$ versus time t for the fourfold patterns exhibited in Figs. 2(a)–2(c); Fig. 3(b) represents the equivalent behavior for the amplitudes associated with the fivefold patterns shown in Figs. 2(d)–2(f). A conspicuous feature of most of the curves depicted in Figs. 3(a) and 3(b) is the fact that, regardless of the value of C , after a sharp initial increase in intensity, the mode amplitudes eventually saturate their growth, ultimately assuming stationary values. This mode saturation behavior controls the exponential growth predicted by the purely linear theory, indicating that our second-order weakly nonlinear solutions are dynamically stable. At this point, we can justify why we have chosen the time $t = 0.005$ to plot the patterns in Fig. 2: It is simply because at this time, all the patterns shown have already reached a stationary configuration. This remark is equally valid for the MR fluid cases depicted in Fig. 6.

It is known [39] that the fundamental mode n is responsible for setting the overall shape of the patterns, i.e., the number of fingers, whose sizes are affected by the magnitude of the fundamental mode amplitude. Moreover, it is also well established [39] that the harmonic modes influence the shape of the fingers produced (for instance, determine whether the fingers are sharp or wide at their tips). In particular, the fact that the amplitude of the first harmonic mode $2n$ for $C = 0.58$ is greater than the corresponding amplitude for $C = 0$ indicates a tendency toward fingertip sharpening for larger C . These weakly nonlinear findings extracted from Fig. 3 support what is visually observed in Fig. 2: Higher values of C are associated with the formation of pattern-forming structures presenting longer and sharper fingers.

In Figs. 2 and 3 we have analyzed the behavior of the elastic interface ferrofluid patterns only for two representative values of the bending rigidity fraction C , namely, for $C = 0$ and $C = 0.58$. In Fig. 4 we extract complementary information about the system, by examining how the curvature of a fingertip κ varies for a range of values of C ($0 \leq C \leq 0.58$). In addition, in order to investigate how the magnetoelastic number N_B influences the fingertip curvature, the plot of κ in terms of C is performed for three increasingly larger values of N_B : 30, 35, and 40. The data presented in Fig. 4 use the physical parameters utilized to obtain the fourfold structures depicted in Figs. 2(a)–2(c). The most noticeable aspect of Fig. 4 is the fact that, for a given N_B , the curvature κ increases with C . However, also interesting is the combined role of C and N_B to determine the sharpness of the

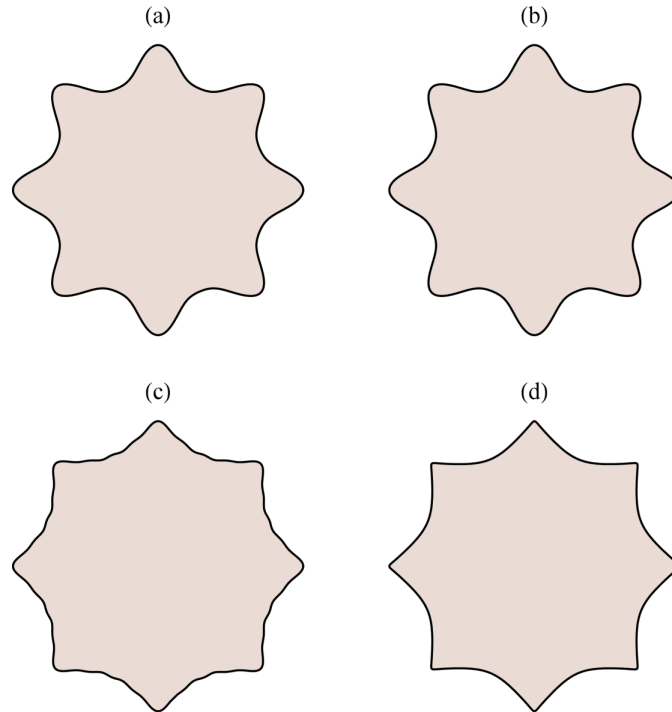


FIG. 5. Comparison of the typical ferrofluid, stationary patterned shapes when at the boundary separating the fluids there is (a) and (b) an elastic bending rigidity or (c) and (d) an interfacial surface tension. These patterns are generated by using (a) and (c) four ($N = 4$) and (b) and (d) 40 ($N = 40$) participating modes.

fingertip: Initially, for smaller values of C , one can see that sharper fingers are obtained for larger values of N_B . However, this behavior is modified as the value of C is augmented: After C reaches a certain magnitude (in Fig. 4, for $C \geq 0.44$) the situation rendering more acute fingers is precisely the one for smaller N_B . This means that, even though both C and N_B contribute to favor the formation of sharper fingers, if the magnitude of C is high enough, the role of the bending rigidity fraction takes over and determines the behavior of the fingertip. Analogous results are obtained for the fivefold patterns shown in Figs. 2(d)–2(f).

We close this section by addressing two important issues. First, we investigate the influence of the number of participating Fourier modes N in determining the shape of the interface at the onset of nonlinear effects. In addition, we examine how the shapes of the characteristic elastic interface ferrofluid patterns investigated in this work compare with the typical shapes obtained when a nonelastic interface ferrofluid droplet, i.e., with no bending rigidity but with surface tension, is subjected to an applied radial magnetic field, as studied in Refs. [17,19]. This is done in Fig. 5, which illustrates typical eightfold ($n = 8$) elastic interface ferrofluid, stationary patterns for $C = 0$, $\chi = 0.45$, and $N_B = 15400$ [Figs. 5(a) and 5(b)]. This specific value of C has been used since when $C = 0$ one gets an elastic interface with constant bending rigidity v_0 [Eq. (2)], which is the closest analog of the usual surface tension situation.

The only difference between the way the patterns in Fig. 5 have been produced is that four participating Fourier modes ($N = 4$) are used in Fig. 5(a) ($n, 2n, 3n$, and $4n$), while 40 participating modes ($N = 40$) are utilized in Fig. 5(b) ($n, 2n, 3n, \dots, 40n$). In contrast, Figs. 5(c) and 5(d) depict characteristic eightfold patterns generated when elastic effects are absent, i.e., there is no bending rigidity at the interface, but there exists a surface tension σ at the fluid-fluid interface [17,19]. These

surface-tension-regulated patterns have been obtained by using $\chi = 0.45$ and $N_B^\sigma = 150$, where N_B^σ represents a magnetic Bond number that measures the ratio of magnetic to capillary forces [17,19]. Once again, the single difference in the way these patterns are generated is that $N = 4$ in Fig. 5(c) and $N = 40$ in Fig. 5(d). It should be noted that the appreciably different numerical values used for N_B and N_B^σ result from the fact that in the surface tension case, although lengths are rescaled by R as in our current magnetoelastic problem, velocities are instead rescaled by $\sigma b^2[12(\eta_1 + \eta_2)R^2]$.

First, let us discuss the role played by the number of participating modes N used to produce the patterns in Fig. 5. By contrasting the elastic interface ferrofluid patterns [Figs. 5(a) and 5(b)] we can immediately see that they are simply indistinguishable, despite the fact that just four participating modes are present in Fig. 5(a), while 40 modes are used to get Fig. 5(b). This indicates that, in the elastic case, the four-mode scheme already captures all the essential morphological features of the stationary patterns. We have verified that this happens because in the case of an elastic interface ferrofluid the magnitude of the perturbation amplitudes drops very quickly as the number of participating modes is increased. As a consequence, adding more participating modes does not make much difference.

Nevertheless, the scenario is a bit different in the cases shown [Figs. 5(c) and 5(d)] in which bending rigidity is not present and surface tension takes over. It is evident that the interface pattern shown in Fig. 5(c) is different from the one displayed in Fig. 5(d). Although both structures have eight protrusions, in Fig. 5(c) the fingertips (vertices) are rounded and separated by undulating edges, while in Fig. 5(d) one observes the formation of cusped tips connected by smooth concave-shaped edges. Therefore, even though Fig. 5(c) correctly captures the overall shape of the surface tension pattern, a more accurate description of the interface can only be obtained as a greater number of participating Fourier modes are included. Consequently, as opposed to what happens in the elastic interface ferrofluid case [Figs. 5(a) and 5(b)], in the surface tension situation [Figs. 5(c) and 5(d)] the proper stationary pattern morphology is captured if 40 modes are used.

We go on by commenting on the effect of replacing surface tension by bending rigidity in the ferrofluid instabilities. It turns out that the shapes of the elastic interface ferrofluid patterns are significantly different from the ones obtained when elastic effects are not present, but interfacial surface tension forces act. A comparison can be performed most efficiently by contrasting Figs. 5(b) and 5(d): The very sharp cusped finger ends emerging in the surface tension starfishlike pattern [Fig. 5(d)] are replaced by considerably smoother and more rounded fingertips in the elastic interface ferrofluid structure [Fig. 5(b)].

A physical justification for the origin of the very pointy tips presented on the surface tension pattern depicted in Fig. 5(d) can be given as follows. Despite the action of the interfacial surface tension at the fluid-fluid interface (which favors the formation of rounded tips), as the applied magnetic field [Eq. (1)] increases with radial distance and because the magnetic traction term proportional to $(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{n})^2$ in Eq. (10) is maximized as \mathbf{n} is collinear to $\hat{\mathbf{e}}_r$, once a finger protuberance is formed, the growing starfishlike structures tend to become shaper and sharper at their corners. Such cusped patterns do not appear in the elastic interface case [Fig. 5(b)] due to the greater rigidity of the elastic layer separating the fluids.

B. Elastic interface MR fluid

In this section we turn our attention to the study of the elastic interface MR fluid patterns. We initiate our discussion by examining Fig. 6, which presents illustrative examples of such confined magnetic-field-induced elastic interface structures. As in the case of Sec. III A, these weakly nonlinear patterns are produced by considering the interplay of four modes n , $2n$, $3n$, and $4n$. In Figs. 6(a) and 6(d) $C = 0$ and in Figs. 6(b) and 6(e) $C = 0.99$. Finally, in Figs. 6(c) and 6(f), for each n , the patterns for $C = 0$ and $C = 0.99$ are superimposed. Notice that since yield stress effects present in the MR fluid are rather stabilizing, we managed to assess and explore high values of the bending rigidity fraction parameter C , i.e., $C = 0.99$. In Figs. 2(a)–2(c) we have that $n = 4$, $N_B = 58$, $\chi = 4$, $S_0 = 0$, and $S = 350$. Moreover, in Figs. 2(d)–2(f) we

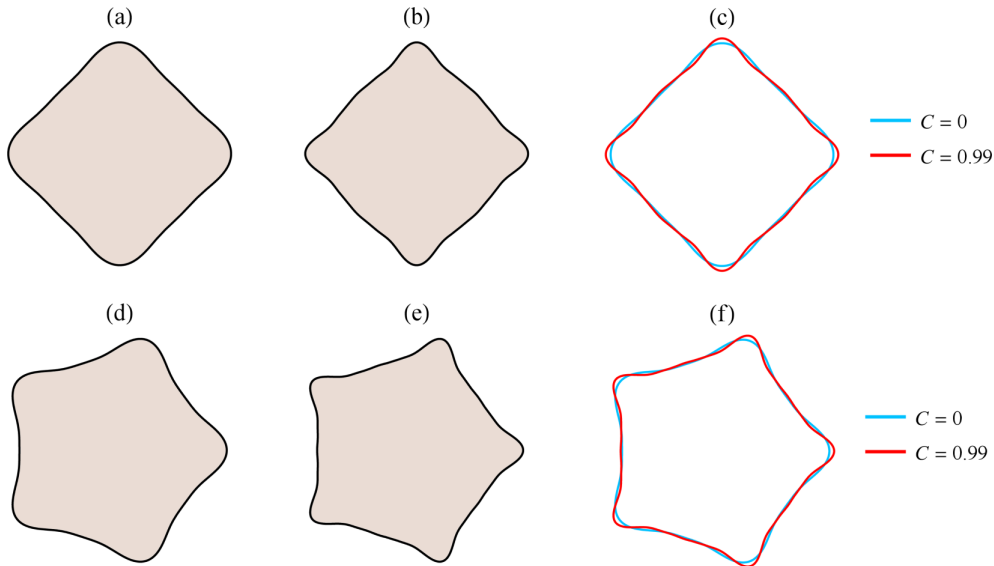


FIG. 6. Representative weakly nonlinear, elastic interface MR fluid patterns considering the coupling of four Fourier modes n , $2n$, $3n$, and $4n$ for (a)–(c) $n = 4$, $N_B = 58$, $\chi = 4$, $S_0 = 0$, and $S = 350$ and (d)–(f) $n = 5$, $N_B = 1500$, $\chi = 1$, $S_0 = 0$, and $S = 1000$. In addition, (a) and (d) $C = 0$, (b) and (e) $C = 0.99$, and (c) and (f) for each n , the patterns for $C = 0$ and $C = 0.99$ are overlaid. As in the case of Fig. 2, here the patterns are plotted for time $t = 0.005$.

have that $n = 5$, $N_B = 1500$, $\chi = 1$, $S_0 = 0$, and $S = 1000$. All the shapes are displayed for time $t = 0.005$.

By checking Fig. 6 one readily observes that the elastic interface MR patterns are dissimilar from their ferrofluid counterparts illustrated in Fig. 2. While the elastic interface ferrofluid patterns of Fig. 2 present starlike shapes and have prominent fingers, the MR fluid structures are more polygonal-like, revealing the formation of relatively small stubby fingers. The stubby nature of the elastic interface MR fluid patterns can be attributed to the stabilizing effects introduced by the magnetic-field-dependent yield stress parameter S which tends to hold most of the MR fluid material close to the center of the droplet. This field-regulated yield stress effect makes the elastic interface MR fluid patterns look more “swollen” than the corresponding elastic ferrofluid shapes.

Further examination of Fig. 6 give us information about the changes occurring in the morphology of the fingering structures when C is modified. One can quickly verify that when $C = 0$ [Figs. 6(a) and 6(d)] polygonal-like shapes containing rounded fingers located at the vertices are obtained. However, it is clear that another class of patterns arises when $C = 0.99$ [Figs. 6(b) and 6(e)]: Even though the patterns are still polygonal in shape, their fingertips are notably sharper than the ones generated when $C = 0$. Furthermore, by scrutinizing Figs. 6(c) and 6(f) one can see that the lengths of the fingers for $C = 0.99$ are a bit longer than the fingers produced when $C = 0$. These observations regarding the influence of C on the finger shapes and lengths of elastic interface MR fluid patterns are similar to those found in the case of elastic interface ferrofluids (Fig. 2). Therefore, we can say that the curvature weakening effect that took place in the elastic ferrofluid situation still persists in the case of elastic MR fluids. Then, in Fig. 6, longer fingers having sharper tips are supposed to emerge for larger values of the bending rigidity fraction parameter C . As in the case of elastic ferrofluids, we have verified the very same tendency for other elastic interface MR fluid cases we have analyzed, using different sets of parameters (N_B , χ , C , S_0 , and S) and other values of the fundamental mode n . If values of $S_0 \neq 0$ are used, the overall shape of the patterns is not changed,

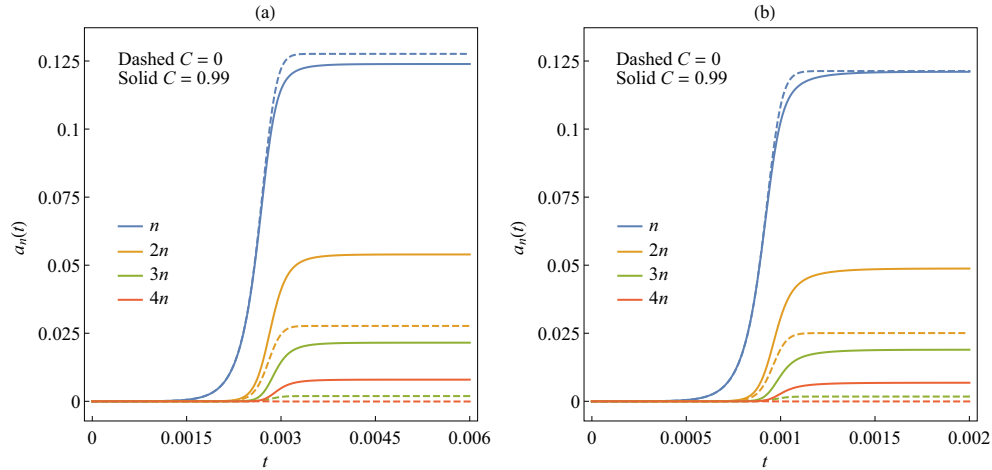


FIG. 7. Time evolution of the perturbation amplitudes $a_n(t)$, $a_{2n}(t)$, $a_{3n}(t)$, and $a_{4n}(t)$ for the patterns depicted in (a) Figs. 6(a)–6(c) for $n = 4$ and (b) Figs. 6(d)–6(f) for $n = 5$. The dashed (solid) curves take the value $C = 0$ ($C = 0.99$). As in the case of elastic interface ferrofluids, here it is also evident that for both values of C the mode amplitudes tend to stationary values.

and due to the stabilizing role of S_0 , the resulting fingers will just be a little shorter than the ones obtained when $S_0 = 0$. Therefore, the morphologies revealed in Fig. 6 are quite representative of the general behavior presented by elastic interface MR fluid patterns in the weakly nonlinear stage.

For the sake of completeness and clearness in Fig. 7 we present the time evolution of the cosine perturbation amplitudes $a_n(t)$ for modes n , $2n$, $3n$, and $4n$ for the MR fluid patterns shown in Fig. 6. Figure 7(a) depicts the situations shown in Figs. 6(a) and 6(b), while Fig. 7(b) presents data related to Figs. 6(d) and 6(e). It is reassuring to verify that all mode amplitudes eventually reach stationary values also in the situations involving elastic interface MR fluids. This substantiates the practical relevance of our second-order solutions for the elastic interface MR pattern-forming process, in the sense that the behaviors observed in Fig. 6 are not related to spurious transient effects.

Figure 8 explores some additional information about the elastic interface MR fluid finger shape behavior by analyzing the variation of the curvature of a fingertip κ for a large range of values of the bending rigidity fraction C ($0 \leq C \leq 0.99$). Similar to what we have done in Fig. 4, here we also examine how the magnetoelastic number N_B impacts the fingertip curvature, and Fig. 8 is plotted for three values of N_B : 58, 64, and 70. The data illustrated in Fig. 8 utilize the physical parameters associated with the fourfold MR fluid structures portrayed in Figs. 6(a)–6(c). As in the case of Fig. 4, one promptly notices that although large values of C and N_B favor the rising of sharper fingers, if the magnitude of C is high enough, the role of the bending rigidity fraction is prevalent and determines the behavior of the fingertip. Many of the same conclusions are reached if Fig. 8 is plotted for the fivefold patterns illustrated in Figs. 6(d)–6(f).

As we did in Sec. III A, now we study the morphological differences between a typical elastic interface MR fluid pattern and the corresponding and more commonly examined situation in which the MR fluid fingering structures are formed under the absence of elastic effects so that at the interface there is a surface tension [18, 19]. We do this with the help of Fig. 9, where we also examine the impact of the number of participating Fourier modes N on the shape of second-order stationary state patterns.

Figures 9(a) and 9(b) reproduce typical fivefold elastic interface MR fluid, stationary patterns for $C = 0$, $\chi = 0.45$, $N_B = 15000$, $S_0 = 0$, and $S = 5500$. Additionally, Figs. 9(c) and 9(d) illustrate the characteristic fivefold stationary patterns for the situation with no bending rigidity but with

 PEDRO O. S. LIVERA AND JOSÉ A. MIRANDA

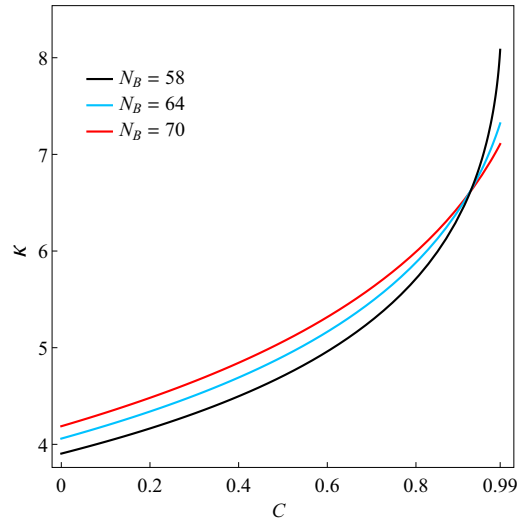


FIG. 8. Variation of the fingertip curvature κ in terms of C , for three values of the magnetoelastic number N_B : 58, 64, and 70. The remaining physical parameters are identical to the ones used in the fourfold MR fluid patterns shown in Figs. 6(a)–6(c).

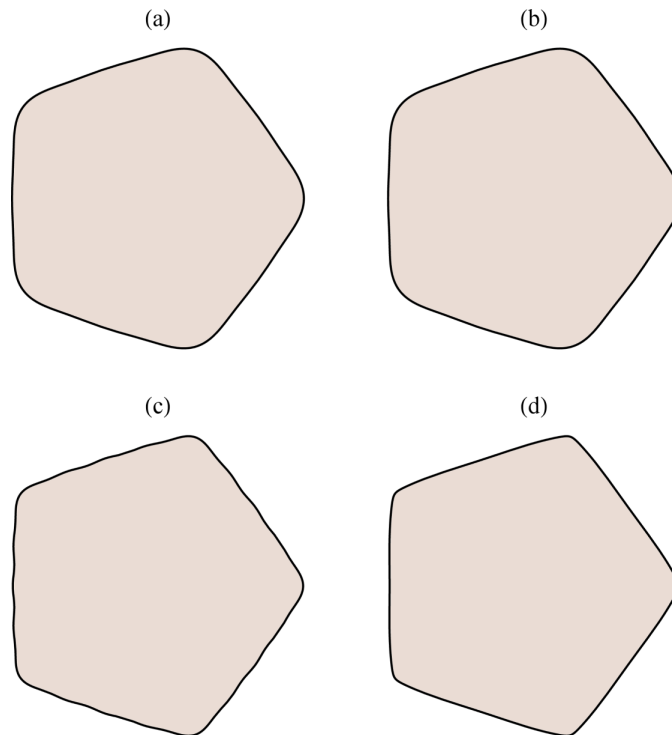


FIG. 9. Comparison of the typical MR fluid, stationary patterned shapes when at the boundary separating the fluids there is (a) and (b) an elastic bending rigidity or (c) and (d) an interfacial surface tension. These patterns are produced by using (a) and (c) four ($N = 4$) and (b) and (d) 40 ($N = 40$) participating modes.

surface tension, for which $\chi = 0.45$, $N_B^c = 195$, $S_0 = 0$, and $S = 60$. The shapes reproduced in Figs. 9(a) and 9(c) are obtained by considering the coupling of four participating Fourier modes (n , $2n$, $3n$, and $4n$), while for the interfaces shown in Figs. 9(b) and 9(d) 40 participating modes are utilized (n , $2n$, $3n$, \dots , $40n$). First, one rapidly realizes that the elastic interface MR fluid patterns represented in Figs. 9(a) and 9(b) are virtually identical, irrespective of the fact that the number of participating modes N is very different. Similar to the case of elastic interface ferrofluids discussed in Figs. 5(a) and 5(b), this indicates that the use of only four modes is already sufficient to accurately reproduce the shape of such an elastic interface MR fluid pattern. Nevertheless, the surface tension patterns appearing in Figs. 9(c) and 9(d) are not exactly the same. On one hand, the surface tension pattern generated for $N = 4$ [Fig. 9(c)] presents rounded fingertips at the vertices and small undulations along the edges of the polygonal structure. On the other hand, the surface tension pattern obtained when $N = 40$ [Fig. 9(d)] has more pointy fingertips and fairly straight edges. Thus, despite the general similarity in the shape of the surface tension patterns for $N = 4$ and $N = 40$, it is clear that the morphologies of the patterns are modified if more participating modes are considered. Finally, by comparing the elastic interface MR fluid pattern [Fig. 5(b)] with its related surface tension pattern [Fig. 5(d)], both considering the interplay of 40 participating Fourier modes, the morphological distinction between them is apparent: The elastic interface MR fluid pattern [Fig. 5(b)] has a more inflated body containing rounded fingers and the surface tension MR fluid pattern [Fig. 5(d)] presents an even more characteristic polygonal shape having straighter edges and acute fingers at their vertices. The results discussed in Fig. 9 as well as in Fig. 5 highlight the effects of substituting surface by bending rigidity, reinforcing the significance of studying the confined magnetoelastic structures presented in this work.

IV. CONCLUSION

This work has presented a theoretical study of instabilities of an elastic interface separating a magnetic-field-responsive fluid (ferrofluid, or MR fluid) and a nonmagnetic fluid. These fluids are confined in an effectively two-dimensional Hele-Shaw cell and subjected to an applied radial magnetic field. As it occurs in the case of nonmagnetic reactive fluids [24,35,37], our magnetoelastic setup considers that the elastic interface is the result of a chemical reaction that takes place when magnetic and nonmagnetic fluids are put into contact. Additionally, the elastic interface is modeled as having a curvature-dependent bending rigidity.

By employing a second-order mode-coupling approach, we derived a nonlinear differential equation that describes the time evolution of the interfacial perturbation amplitudes. A key feature of our second-order perturbative scheme is the fact that through the coupling of the appropriate Fourier modes, one is able to extract relevant information about the morphology of the interface. In this framework, and by using just a few participating Fourier modes (the fundamental n and its harmonics $2n$, $3n$, and $4n$), we have been able to study how the interplay of magnetic, elastic, and yield stress effects impacts the shape of the emerging elastic interface magnetic fluid patterns at the early nonlinear regime.

We have found that starlike patterns are produced in the elastic interface ferrofluid case, while polygonal-like structures are generated in the elastic MR fluid situation. We have shown that the shapes and lengths of the fingering structures are determined by the combined action of the bending rigidity fraction parameter C and the magnetoelastic number N_B . However, the longest and sharpest fingers tend to arise for larger values of C . Moreover, we have checked that the resulting weakly nonlinear magnetoelastic patterns assume stationary configurations already at the lowest nonlinear (second-order) level. Finally, we also have verified that the magnetoelastic pattern-forming structures obtained in this work are indeed different from their usual nonelastic counterparts in which elastic effects are not present, but are replaced by interfacial surface tension.

We hope that our current weakly nonlinear, theoretical investigation will stimulate interest in the further study of this class of still poorly exploited magnetoelastic problems in Hele-Shaw cells. A possible extension of this work could try to tackle the fully nonlinear aspects of the problem through

numerical simulations in the same spirit of Ref. [37]. In addition to possibly checking our weakly nonlinear predictions, such advanced time stage simulations could reveal even more interesting and complex pattern-forming phenomena. Of course, the development of laboratory experiments involving reactive magnetic and nonmagnetic confined fluids subjected to a radial magnetic field could also explore more thoroughly how the resulting elastic magnetic fluid patterns behave in linear, weakly nonlinear, and fully nonlinear time regimes.

ACKNOWLEDGMENTS

J.A.M. thanks CNPq (Brazilian Research Council) for financial support under Grant No. 304821/2015-2. Useful discussions with Sérgio Lira and Roberto Dias are gratefully acknowledged.

APPENDIX: FUNCTIONS APPEARING IN THE MODE-COUPLING TERM $F(n, m)$

This Appendix presents the expressions for the functions $B_1(n, m)$, $B_2(n, m)$, $B_3(n, m)$, and $B_4(n, m)$ which appear in Eq. (19),

$$B_1(n, m) = -3 + \frac{15}{4}m(n-m) + 10(n-m)^2 - \frac{9}{2}m^2(n-m)^2 - 6m(n-m)^3 - 4(n-m)^4, \quad (\text{A1})$$

$$B_2(n, m) = \frac{39}{2} - 30m(n-m) - 71(n-m)^2 + \frac{81}{2}m^2(n-m)^2 + 54m(n-m)^3 + 32(n-m)^4 - 12m^2(n-m)^4 - 12m^3(n-m)^3, \quad (\text{A2})$$

$$B_3(n, m) = -14 + 25m(n-m) + 54(n-m)^2 - 36m^2(n-m)^2 - 48m(n-m)^3 - 26(n-m)^4 + 18m^2(n-m)^4 + 18m^3(n-m)^3, \quad (\text{A3})$$

and

$$B_4(n, m) = 1 - 2m(n-m) - 4(n-m)^2 + 3m^2(n-m)^2 + 4m(n-m)^3 + 2(n-m)^4 - 2m^2(n-m)^4 - 2m^3(n-m)^3. \quad (\text{A4})$$

-
- [1] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
 - [2] E. Blums, A. Cebers, and M. M. Maiorov, *Magnetic Fluids* (de Gruyter, New York, 1997).
 - [3] J. M. Ginder, Behavior of magnetorheological fluids, *MRS Bull.* **23**, 26 (1998).
 - [4] G. Bossis, S. Lacis, A. Meunier, and O. Volkova, Magnetorheological fluids, *J. Magn. Magn. Mater.* **252**, 224 (2002).
 - [5] S. Genç and P. P. Phulé, Rheological properties of magnetorheological fluids, *Smart Mater. Struct.* **11**, 140 (2002).
 - [6] P. Coussot, Yield stress fluid flows: A review of experimental data, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **211**, 31 (2014).
 - [7] S. A. Lira and J. A. Miranda, Field-controlled adhesion in confined magnetorheological fluids, *Phys. Rev. E* **80**, 046313 (2009).
 - [8] R. H. Ewoldt, P. Tourkine, G. H. McKinley, and A. E. Hosoi, Controllable adhesion using field-activated fluids, *Phys. Fluids* **23**, 073104 (2011).
 - [9] See, for instance, D. Andelman and R. E. Rosensweig, Modulated phases: Review and recent results, *J. Phys. Chem. B* **113**, 3785 (2009); J.-C. Bacri and F. Elias, in *Morphogenesis-Origins of Patterns and Shapes*, edited by P. Bourguin and A. Lesne (Springer, New York, 2011); I. Torres-Díaz and C. Rinaldi, Recent progress in ferrofluids research: Novel applications of magnetically controllable and tunable fluids, *Soft Matter* **10**, 8584 (2014).
 - [10] J. White, J. Oakley, M. Anderson, and R. Bonazza, Experimental measurements of the nonlinear Rayleigh-Taylor instability using a magnetorheological fluid, *Phys. Rev. E* **81**, 026303 (2010).

- [11] P. G. Saffman and G. I. Taylor, The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **245**, 312 (1958).
- [12] For review articles on Hele-Shaw flows see D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. Liang, B. I. Shraiman, and C. Tang, Viscous flows in two dimensions, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 977 (1986); G. M. Homsy, Viscous fingering in porous media, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19**, 271 (1987); K. V. McCloud and J. V. Maher, Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow, *Phys. Rep.* **260**, 139 (1995); J. Casademunt, Viscous fingering as a paradigm of interfacial pattern formation: Recent results and new challenges, *Chaos* **14**, 809 (2004).
- [13] A. O. Tsebers and M. M. Maiorov, Magnetostatic instabilities in plane layers of magnetizable liquids, *Magneto hydrodynamics* **16**, 21 (1980).
- [14] A. O. Tsebers, Dynamics of magnetostatic instabilities, *Magneto hydrodynamics* **17**, 113 (1981).
- [15] D. P. Jackson, R. E. Goldstein, and A. O. Cebers, Hydrodynamics of fingering instabilities in dipolar fluids, *Phys. Rev. E* **50**, 298 (1994).
- [16] J. Kent-Dobias and A. J. Bernoff, Energy-driven pattern formation in planar dipole-dipole systems in the presence of weak noise, *Phys. Rev. E* **91**, 032919 (2015).
- [17] R. M. Oliveira, J. A. Miranda, and E. S. G. Leandro, Ferrofluid patterns in a radial magnetic field: Linear stability, nonlinear dynamics, and exact solutions, *Phys. Rev. E* **77**, 016304 (2008).
- [18] S. A. Lira, J. A. Miranda, and R. M. Oliveira, Field-induced patterns in confined magnetorheological fluids, *Phys. Rev. E* **81**, 046303 (2010).
- [19] P. H. A. Anjos, S. A. Lira, and J. A. Miranda, Fingering patterns in magnetic fluids: Perturbative solutions and the stability of exact stationary shapes, *Phys. Rev. Fluids* **3**, 044002 (2018).
- [20] S. Elborai, D.-K. Kim, X. He, S.-H. Lee, S. Rhodes, and M. Zahn, Self-forming, quasi-two-dimensional, magnetic-fluid patterns with applied in-plane-rotating and dc-axial magnetic fields, *J. Appl. Phys.* **97**, 10Q303 (2005).
- [21] E. O. Dias and J. A. Miranda, Azimuthal field instability in a confined ferrofluid, *Phys. Rev. E* **91**, 023020 (2015).
- [22] E. O. Dias, S. A. Lira, and J. A. Miranda, Interfacial patterns in magnetorheological fluids: Azimuthal field-induced structures, *Phys. Rev. E* **92**, 023003 (2015).
- [23] C.-Y. Chen and T.-S. Lin, in *Advances in Computational Fluid-Structure Interaction and Flow Simulation*, edited by Y. Bazilevs and K. Takizawa (Springer Nature, Basel, 2016).
- [24] T. Podgorski, M. C. Sostarecz, S. Zorman, and A. Belmonte, Fingering instabilities of a reactive micellar interface, *Phys. Rev. E* **76**, 016202 (2007).
- [25] J. Fernandez and G. M. Homsy, Viscous fingering with chemical reaction: Effect of *in-situ* production of surfactants, *J. Fluid Mech.* **480**, 267 (2003).
- [26] Y. Nagatsu, K. Matsuda, Y. Kato, and Y. Tada, Experimental study on miscible viscous fingering involving viscosity changes induced by variations in chemical species concentrations due to chemical reactions, *J. Fluid Mech.* **571**, 475 (2007).
- [27] Y. Nagatsu, C. Iguchi, K. Matsuda, Y. Kato, and Y. Tada, Miscible viscous fingering involving viscosity changes of the displacing fluid by chemical reactions, *Phys. Fluids* **22**, 024101 (2010).
- [28] Z. Niroobakhsh, M. Litman, and A. Belmonte, Flow instabilities due to the interfacial formation of surfactant-fatty acid material in a Hele-Shaw cell, *Phys. Rev. E* **96**, 053102 (2017).
- [29] F. Haudin, J. H. E. Cartwright, F. Brau, and A. De Wit, Spiral precipitation patterns in confined chemical gardens, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **111**, 17363 (2014).
- [30] Y. Nagatsu, Y. Ishii, Y. Tada, and A. De Wit, Hydrodynamic Fingering Instability Induced by a Precipitation Reaction, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 024502 (2014).
- [31] F. Haudin and A. De Wit, Patterns due to an interplay between viscous and precipitation-driven fingering, *Phys. Fluids* **27**, 113101 (2015).
- [32] F. Haudin, V. Brasiliense, J. H. Cartwright, F. Brau, and A. De Wit, Genericity of confined chemical garden patterns with regard to changes in the reactants, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **17**, 12804 (2015).
- [33] Y. Nagatsu, A. Hayashi, M. Ban, Y. Kato, and Y. Tada, Spiral pattern in a radial displacement involving a reaction-producing gel, *Phys. Rev. E* **78**, 026307 (2008).
- [34] Y. Sumino, H. Kitahata, Y. Shinohara, N. L. Yamada, and H. Seto, Formation of a multiscale aggregate structure through spontaneous blebbing of an interface, *Langmuir* **28**, 3378 (2012).

-
- [35] A. He, J. S. Lowengrub, and A. Belmonte, Modeling an elastic fingering instability in a reactive Hele-Shaw flow, *SIAM J. Appl. Math.* **72**, 842 (2012).
- [36] G. D. Carvalho, J. A. Miranda, and H. Gadêlha, Interfacial elastic fingering in Hele-Shaw cells: A weakly nonlinear study, *Phys. Rev. E* **88**, 053006 (2013).
- [37] M. Zhao, A. Belmonte, S. Li, X. Li, and J. S. Lowengrub, Nonlinear simulations of elastic fingering in a Hele-Shaw cell, *J. Comput. Appl. Math.* **307**, 394 (2016).
- [38] P. H. A. Anjos, G. D. Carvalho, S. A. Lira, and J. A. Miranda, Wrinkling and folding patterns in a confined ferrofluid droplet with an elastic interface, *Phys. Rev. E* **99**, 022608 (2019).
- [39] J. A. Miranda and M. Widom, Radial fingering in a Hele-Shaw cell: A weakly nonlinear analysis, *Physica D* **120**, 315 (1998).
- [40] L. Gordillo and E. Knobloch, Fluid-supported elastic sheet under compression: Multifold solutions, *Phys. Rev. E* **99**, 043001 (2019).
- [41] T. P. Meyrath, Experiments with Bose-Einstein condensation in an optical box, Ph.D. thesis, The University of Texas at Austin, 2005.
- [42] T. H. Bergeman, G. Erez, and H. J. Metcalf, Magnetostatic trapping field for neutral atoms, *Phys. Rev. A* **35**, 1535 (1987).
- [43] J. G. E. Harris, R. A. Michniak, S. V. Nguyen, W. C. Campbell, D. Egorov, S. E. Maxwell, L. D. van Buuren, and J. M. Doyle, Deep superconducting magnetic traps for neutral atoms and molecules, *Rev. Sci. Instrum.* **75**, 17 (2004).
- [44] C.-Y. Chen, Y.-S. Yang, and J. A. Miranda, Miscible ferrofluid patterns in a radial magnetic field, *Phys. Rev. E* **80**, 016314 (2009).
- [45] C.-Y. Chen, W.-L. Wu, and J. A. Miranda, Magnetically induced spreading and pattern selection in thin ferrofluid drops, *Phys. Rev. E* **82**, 056321 (2010).
- [46] R. Aslam and W. González-Viñas, Pattern formation in spin-coating of hybrid colloids in different magnetic field configurations, *J. Phys. D* **52**, 344001 (2019).
- [47] G. H. Covey and B. R. Stanmore, Use of the parallel-plate plastometer for the characterisation of viscous fluids with a yield stress, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **8**, 249 (1981).
- [48] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [49] *Fluid-Structure Interactions in Low-Reynolds-Number Flows*, edited by C. Duprat and H. Stone (RSC, Cambridge, 2016).
- [50] E. Alvarez-Lacalle, E. Pauné, J. Casademunt, and J. Ortín, Systematic weakly nonlinear analysis of radial viscous fingering, *Phys. Rev. E* **68**, 026308 (2003).