



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Luciana Vale Silva Rabelo

Análise Paramétrica da Estabilidade Assintótica de Sistemas Não Lineares

Recife

2021

Luciana Vale Silva Rabelo

Análise Paramétrica da Estabilidade Assintótica de Sistemas Não Lineares

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano.

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

R114a Rabelo, Luciana Vale Silva
Análise paramétrica da estabilidade assintótica de sistemas não lineares /
Luciana Vale Silva Rabelo. – 2021.
162 f.: il., fig., tab.

Orientador: Miguel Fidencio Loayza Lozano.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2021.
Inclui referências e apêndice.

1. Estabilidade assintótica. 2. Análise paramétrica. 3. Não linearidades. I.
Lozano, Miguel Fidencio Loayza (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2021 - 185

LUCIANA VALE SILVA RABELO

ANÁLISE PARAMÉTRICA DA ESTABILIDADE ASSINTÓTICA DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovada em: 30/04/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano(Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Marcos Luiz Henrique (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Goiás

Dedico esta tese à minha amada família, Marcos, Luiz Henrique, Maria de Fátima e Francisco.

AGRADECIMENTOS

Meus primeiros agradecimentos são dedicados ao **Prof. Dr. Miguel F. L. Lozano**, pela paciência, atenção e disposição em ajudar, como professor e como orientador.

Merece agradecimento especial o **Prof. Dr. Airton T. G. de Castro**, pelo incentivo, auxílio nos estudos, caronas e apoio.

Sou grata também aos funcionários da secretaria e aos coordenadores do Programa de Pós-graduação em Matemática da UFPE desde o meu ingresso no curso de doutorado, por atenderem minhas diversas solicitações sempre com paciência.

Não poderia deixar de agradecer aos colegas e amigos da UFG/RC que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento desta tese. Em particular, agradeço

- ao **Prof. Dr. André Luiz Galdino**, por sempre atender meus pedidos enquanto vice-chefe da IMTec, possibilitando assim que eu pudesse cursar o doutorado antes de obter afastamento;
- ao **Prof. Dr. Celso Vieira Abud**, pela atenção e solicitude no desempenho da função de chefe da IMTec;
- aos professores doutores **Thiago Porto de Almeida Freitas** e **Élida Alves da Silva**, pelo empenho essencial na superação de questões relacionadas ao meu afastamento, compreensão, disposição em ajudar e consideração;
- aos professores doutores **Grenissa Bonvino Stafuzza**, **Maria Helena de Paula** e **Anderson Luiz Ferreira**, pela gentileza, compreensão e presteza no desempenho de suas funções;
- ao Reitor da UFG, **Prof. Dr. Edward Madureira Brasil**, e à Reitora Pro Tempore da UFCAT, **Profa. Dra. Roselma Lucchese**, pelo deferimento das minhas solicitações.

Agradeço em especial ao meu irmão, **Luiz Henrique**, por me incentivar e apoiar sempre, aos meus pais, **Maria de Fátima** e **Francisco**, por acreditarem em mim, e ao meu esposo **Marcos Napoleão Rabelo**, por me auxiliar diversas vezes com a teoria, por me apoiar em momentos difíceis, pela paciência e consideração.

RESUMO

Movimentos oscilatórios ocorrem em um grande número de estruturas na natureza e engenharia. Em muitos casos, esses movimentos comprometem o funcionamento e a integridade de sistemas, provocando danos de diversas ordens. Dessa forma, embora complexa em geral, a tarefa de prever o comportamento de um sistema é essencial. Nesta tese, uma análise dinâmica paramétrica de dois sistemas não lineares é efetuada. O primeiro é composto por um sistema principal e um absorvedor de vibração. São consideradas constantes de rigidez lineares e não lineares e um atraso no tempo relacionado ao elemento dissipativo do absorvedor. O sistema principal está sujeito a uma excitação externa harmônica. Os dois casos de ressonância primária são estudados. O segundo consiste de um sistema contínuo posicionado sobre uma fundação viscoelástica com equação constitutiva contendo derivadas fracionárias. Um método perturbativo e o método de Galerkin são aplicados para obter soluções aproximadas. A análise de estabilidade de cada sistema é realizada considerando uma versão linearizada das equações de movimento em torno de uma solução estacionária, obtendo a função característica correspondente e alcançando conclusões a partir de propriedades dessa função. É mostrado que nos casos específicos considerados, o primeiro sistema não é assintoticamente estável. Por sua vez, o segundo sistema é estável se o parâmetro de força é menor ou igual a um certo valor, independente dos valores dos demais parâmetros do sistema.

Palavras-chave: estabilidade assintótica; função característica; análise paramétrica; atraso no tempo; não linearidades; derivadas fracionárias; método de múltiplas escalas; método de Galerkin.

ABSTRACT

Oscillatory motions occur in a large number of structures in nature and engineering. In many cases, these motions compromise the functioning and integrity of systems, causing damage of various types. Thus, although complex in general, the task of predicting a system behavior is essential. In this thesis, a parametric dynamic analysis of two nonlinear systems is performed. The first one consists of a main system and a vibration absorber. Linear and nonlinear stiffness constants and a time delay related to the absorber's dissipative element are considered. The main system is subject to external harmonic excitation. The two cases of primary resonance are studied. The second one consists of a continuous system positioned on a viscoelastic foundation with a constitutive equation containing fractional derivatives. A perturbative method and the Galerkin method are applied to obtain approximate solutions. The stability analysis of each system is performed by considering a linearized version of the equations of motion about a steady-state solution, obtaining the corresponding characteristic function and reaching conclusions from the properties of this function. It is shown that in the specific cases considered, the first system is not asymptotically stable. On the other hand, the second system is stable if the force parameter is less than or equal to a certain value, regardless of the values of the other system parameters.

Keywords: asymptotic stability; characteristic function; parametric analysis; time delay; nonlinearities; fractional derivatives; multiple scale method; Galerkin method.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	17
2.1	ESPAÇOS DE FUNÇÕES	17
2.2	TRANSFORMADA DE LAPLACE E CONVOLUÇÃO	20
2.3	ESPAÇOS DE DISTRIBUIÇÕES	27
2.4	OPERADORES LINEARES	32
2.5	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM ATRASO NO TEMPO E LINEARIZAÇÃO	34
2.6	ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO	38
2.7	MÉTODO DE MÚLTIPLAS ESCALAS	40
2.8	FUNÇÕES ESPECIAIS	48
2.9	CÁLCULO FRACIONÁRIO	50
3	ESTABILIDADE ASSINTÓTICA DE UM SISTEMA NÃO LINEAR COM ATRASO	56
3.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	57
3.2	SOLUÇÃO PERTURBATIVA	58
3.3	ANÁLISE DE ESTABILIDADE NO CASO DE RESSONÂNCIA PRIMÁRIA $\Omega \approx \omega_1$	62
3.3.1	Soluções Estacionárias	64
3.3.2	Linearização do Sistema	66
3.3.3	Quasi-polinômio Característico	71
3.3.4	Resultados Numéricos e Discussão	72
3.3.4.1	<i>Respostas no tempo do sistema principal e do absorvedor</i>	73
3.3.4.2	<i>Soluções estacionárias</i>	76
3.3.4.3	<i>Estabilidade assintótica</i>	82
3.4	ANÁLISE DE ESTABILIDADE NO CASO DE RESSONÂNCIA PRIMÁRIA $\Omega \approx \omega_2$	88
3.4.1	Soluções Estacionárias	90
3.4.2	Linearização do Sistema	92
3.4.3	Quasi-polinômio Característico	95
3.4.4	Resultados Numéricos e Discussão	97

3.4.4.1	<i>Respostas do sistema principal e do absorvedor para valores distintos do atraso no tempo</i>	97
3.4.4.2	<i>Soluções estacionárias</i>	101
3.4.4.3	<i>Estabilidade assintótica</i>	103
3.5	CONCLUSÕES	108
4	COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE UM SISTEMA COM AMORTECIMENTO FRACIONÁRIO	110
4.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	111
4.2	AUTOVALORES DO OPERADOR A	114
4.3	SOLUÇÃO APROXIMADA DE GALERKIN	122
4.4	SOLUÇÃO DO PROBLEMA (4.45)-(4.47)	123
4.5	EXPRESSÃO ANALÍTICA PARA T_k	126
4.6	REGULARIDADE DA SOLUÇÃO	133
4.7	COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE T_k	137
4.8	RESULTADOS DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO	144
4.9	CONCLUSÕES	151
	REFERÊNCIAS	154
	APÊNDICE A – COEFICIENTES DO QUASI-POLINÔMIO CARACTERÍSTICO NO CASO $\Omega \approx \omega_1$	159
	APÊNDICE B – COEFICIENTES DO QUASI-POLINÔMIO CARACTERÍSTICO NO CASO $\Omega \approx \omega_2$	161

1 INTRODUÇÃO

Os mais diversos sistemas na natureza e engenharia estão sujeitos a vibrações. Por esse motivo, o tema é objeto de estudo de uma grande quantidade de pesquisas em diferentes áreas do conhecimento. Foi a partir do século XVI, após o estudo de Galileo sobre o movimento de um pêndulo, que processos oscilatórios atraíram a atenção da comunidade científica, em particular, de cientistas de renome como Leonhard Euler e Daniel Bernoulli, que estudaram no século XVIII vibrações em vigas, Gustav Kirchhoff e Simeon Poisson, que analisaram no século XIX oscilações em placas, entre outros (MAGRAB, 2012).

Nas últimas décadas, a diversidade e a complexidade de dispositivos projetados levando em consideração vibrações têm aumentado de forma significativa. É o caso por exemplo de dispositivos mecânicos, eletromecânicos, biomecânicos, biomédicos, aviões, navios, submarinos e estruturas da engenharia civil (MAGRAB, 2012). Acompanhando esse crescimento, surgiram grandes avanços na análise de vibração do ponto de vista computacional e analítico (MAGRAB, 2012).

Movimentos oscilatórios podem ser convenientes em alguns sistemas mecânicos e estruturais. É o caso, por exemplo, de sensores micro-eletromecânicos (MEMS) e microscópios nano-eletromecânicos (NEMS), que dependem de vibrações para funcionarem (KELLY, 2012). Em muitos casos, no entanto, vibrações provocam efeitos negativos, como o comprometimento do funcionamento ou da integridade de sistemas, gerando prejuízos de diversos tipos. Por esse motivo, a análise de vibrações de um sistema é de grande relevância em ciências aplicadas.

Existem diversos métodos para controlar a vibração de um sistema. Uma das estratégias mais comuns é o uso de absorvedores de vibração (controle passivo). Um absorvedor de vibração consiste de um sistema auxiliar que é acoplado ao sistema principal com o objetivo de reduzir ou eliminar a amplitude de oscilação, especialmente quando o sistema está em ressonância¹. Há vários estudos sobre absorvedores de vibração. Por exemplo, em Ji e Zhang (2010), um absorvedor linear composto por uma massa, uma mola e um amortecedor é usado para atenuar a amplitude de vibração de um oscilador não linear sujeito a uma excitação externa da forma $f \cos(\Omega t)$. É considerado que o sistema está em ressonância primária². Uma versão linearizada

¹ Segundo Braun, Ewins e Rao (2002), ressonância está relacionada à condição em que um movimento máximo é produzido por uma força de magnitude constante ou uma força mínima é necessária para manter um determinado movimento.

² A ressonância primária se refere ao caso em que uma frequência de excitação de uma estrutura está próxima a uma de suas frequências naturais (YOUNIS, 2011).

do sistema para as amplitudes e fases de uma solução perturbativa é obtida. A análise de estabilidade é realizada por meio do estudo das raízes do polinômio característico, que são obtidas em função dos parâmetros do sistema. É mostrado que o absorvedor pode efetivamente reduzir as vibrações do oscilador não linear sob ressonância primária. O mesmo sistema é estudado em Ji e Zhang (2011). No entanto, nesse artigo é considerado o caso de ressonância super-harmônica³. A mesma metodologia é adotada e é obtido que o absorvedor também é efetivo em suprimir a resposta em ressonância super-harmônica. Um sistema semelhante é considerado em Saberi e Nahvi (2014). A diferença é que nesse artigo a mola do absorvedor é não linear. O comportamento do sistema é estudado considerando condições de ressonância primária e super-harmônica. Comparando com o caso sem o absorvedor, é obtida a redução da amplitude de vibração. Para os parâmetros adotados, o sistema com o absorvedor é estável, enquanto o sistema sem o absorvedor é instável. Um sistema de dois graus liberdade formado por um sistema não linear e um absorvedor é também considerado em EL-Sayed (2014). Nesse caso, as não linearidades do sistema são de tipo diferente e o absorvedor é linear. O estudo é efetuado considerando que o sistema está ressonância simultânea (primária e interna⁴). O critério de Routh-Hurwitz é usado para estudar a estabilidade. É mostrado que o absorvedor é eficiente no controle de vibração e na diminuição da amplitude das soluções estacionárias.

No Capítulo 2, um sistema modelado como uma massa m_1 suportada por uma mola e um amortecedor é considerado. Um absorvedor de vibração consistindo de uma massa m_2 , uma mola e um amortecedor está acoplado a esse sistema. O sistema principal está sujeito a uma excitação externa da forma $f \cos(\Omega t)$, onde f é constante. Um atraso no tempo relacionado ao elemento dissipativo do absorvedor é considerado. Além disso, é assumido que ambas as molas do sistema têm constantes de rigidez lineares e não lineares cúbicas. Dessa forma, a dinâmica do sistema é governada por um sistema de equações diferenciais não lineares com atraso no tempo. O objetivo é realizar uma análise paramétrica do comportamento do sistema sob ressonância primária, especialmente da estabilidade assintótica. O parâmetro de interesse principal é o atraso no tempo. O sistema considerado é semelhante aos sistemas estudados nos artigos Ji e Zhang (2010), Ji e Zhang (2011), Saberi e Nahvi (2014). A diferença é que consideramos um atraso no tempo τ relacionado ao elemento dissipativo do absorvedor, o

³ Ressonância super-harmônica se refere ao caso de ressonância em que uma frequência de excitação está próxima de $\frac{1}{n}$ de uma frequência natural do sistema, onde n é um número inteiro positivo pequeno (BRAUN; EWINS; RAO, 2002).

⁴ Ressonância interna se refere ao caso de ressonância em que as frequências naturais do sistema satisfazem uma certa relação (BRAUN; EWINS; RAO, 2002).

que dificulta o estudo do sistema. A análise é efetuada considerando determinados parâmetros, tanto do sistema principal quanto do absorvedor, comparativamente menores do que os demais parâmetros. Como resultado, é obtido que as equações de movimento assumem a forma

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \epsilon H_1(x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t - \tau), \dot{x}_2(t - \tau)), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 (x_2 - x_1) &= \epsilon H_2(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t - \tau), \dot{x}_2(t - \tau)),\end{aligned}$$

onde x_1 e x_2 são os deslocamentos das massas m_1 e m_2 , ω_1 e ω_2 são as frequências naturais do sistema principal e do absorvedor, $\epsilon > 0$ é um parâmetro pequeno e H_1 e H_2 são dadas por

$$\begin{aligned}H_1(x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t - \tau), \dot{x}_2(t - \tau)) &= -\hat{\alpha}_{13}x_1^3 - \hat{\zeta}_1\dot{x}_1 + \hat{\alpha}_{21}x_2 - \hat{\alpha}_{23}(x_1 - x_2)^3 \\ &\quad - \hat{\zeta}_2(\dot{x}_1(t - \tau) - \dot{x}_2(t - \tau)) + \hat{F}\cos(\Omega t), \\ H_2(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t - \tau), \dot{x}_2(t - \tau)) &= -\hat{\beta}_{23}(x_2 - x_1)^3 - \hat{\zeta}_3(\dot{x}_2(t - \tau) - \dot{x}_1(t - \tau)).\end{aligned}$$

O fato de que o sistema é não linear provoca dificuldades na obtenção de soluções. Se o interesse está apenas em características de estabilidade qualitativa, em vez da resposta do sistema, então tal informação pode ser obtida linearizando as equações de movimento em torno de um dado ponto de equilíbrio, resolvendo o problema de autovalor correspondente e alcançando conclusões de estabilidade a partir da natureza dos autovalores (MEIROVITCH, 2010). Para sistemas com pequenas não linearidades, resultados qualitativos e quantitativos podem ser obtidos por meio de técnicas perturbativas, que permitem soluções usando mais uma vez métodos da análise linear (MEIROVITCH, 2010). Dessa forma, para realizar o estudo proposto, o método de múltiplas escalas é aplicado, o que permite obter os casos de ressonância, bem como as equações para as amplitudes e as fases das soluções aproximadas nos casos de ressonância primária, que são considerados separadamente. As soluções estacionárias do sistema de equações diferenciais não lineares com atraso para as amplitudes e fases são então estudadas. Para aplicar o método da função característica para a análise de estabilidade, uma versão linearizada do sistema é obtida. Para isso, são calculadas as derivadas de Gâteaux dos funcionais que determinam o sistema. Esses funcionais estão definidos no espaço C^4 com a norma do máximo, onde $C = C([- \epsilon\tau, 0], \mathbb{R})$ com sua norma usual. Então, é mostrado que essas derivadas coincidem com as derivadas de Fréchet. Como resultado, obtemos um sistema de equações diferenciais funcionais. O quasi-polinômio característico correspondente ao sistema obtido é determinado. Finalmente, os efeitos de diferentes parâmetros sobre as respostas no

tempo, soluções estacionárias e estabilidade assintótica são estudados numericamente. Para analisar a estabilidade, usamos o Teorema de Pontryakin. É importante mencionar que os resultados obtidos no Capítulo 2 foram parcialmente publicados em Rabelo et al. (2019).

Sistemas com controle de vibração envolvendo atrasos no tempo são também considerados nos artigos Valášek, Olgac e Neusser (2019), Mohanty e Dwivedy (2019), Sun e Xu (2016). Em Valášek, Olgac e Neusser (2019), um esquema de controle usando um absorvedor com uma única massa para controlar a vibração de um sistema sujeito a uma excitação externa com múltiplas frequências é investigado. É considerado um feedback local em relação ao deslocamento do absorvedor com múltiplos atrasos no tempo. O quasi-polinômio do sistema é apresentado e um método numérico é aplicado para encontrar as raízes dominantes dessa função em casos específicos. Em Mohanty e Dwivedy (2019), um absorvedor de vibração não linear com feedback de aceleração com atraso no tempo é considerado. O sistema principal é modelado como uma massa conectada a uma base com excitação harmônica por meio de uma mola não linear e um amortecedor. O método do balanço harmônico é usado para obter uma solução aproximada do sistema de equações diferenciais não lineares que descreve o movimento da estrutura. É efetuada uma análise dinâmica do sistema em ressonância primária. Em Sun e Xu (2016), uma estrutura que usa um absorvedor para melhorar o efeito de supressão de vibração de um isolador com controle de acoplamento com atraso no tempo é estudada. Essa estrutura é acoplada a um sistema de um grau de liberdade. Uma análise de estabilidade em regimes de ressonância interna é efetuada. Assim como no estudo do problema considerado no Capítulo 2, uma versão linearizada do sistema de equações de movimento é determinada. No entanto, a metodologia adotada no Capítulo 2 difere da usada em Sun e Xu (2016), bem das metodologias empregadas em Saeed, El-Ganini e Eissa (2013), Zhao e Xu (2007), Amer, El-Sayed e Kotb (2016). Nos artigos mencionados, os termos com atraso são substituídos por termos sem atraso usando, por exemplo, a fórmula de Taylor para obter uma aproximação desses termos. Consequentemente, o atraso aparece apenas nos coeficientes da versão linearizada do sistema, o que facilita a análise de estabilidade, pois é suficiente aplicar o clássico critério de Routh-Hurwitz. Embora simplifique o estudo do problema, essa metodologia pode introduzir erros adicionais nas aproximações, o que pode comprometer os resultados. Esse processo de substituição não é feito na abordagem adotada no Capítulo 2. Por esse motivo, no lugar do polinômio característico, temos o quasi-polinômio característico. Como consequência, é preciso usar ferramentas mais complexas do método da função característica, pois o critério

de Routh-Hurwitz não é suficiente para analisar a estabilidade do sistema.

Geralmente, atrasos no tempo e não linearidades dificultam o estudo do comportamento de um sistema. Um outro elemento que pode tornar esse estudo mais complexo é a presença de componentes de material viscoelástico com equação constitutiva envolvendo derivadas fracionárias. Classicamente, os modelos usados para descrever o comportamento de materiais viscoelásticos incluem derivadas de ordens naturais apenas. Contudo, mais recentemente, modelos envolvendo derivadas de ordens reais ou mesmo complexas, não naturais, têm sido considerados. Essas derivadas são conhecidas como derivadas fracionárias e podem ser definidas de formas diferentes (para mais detalhes, veja Kilbas, Srivastava e Trujillo (2006), Samko, Kilbas e Marichev (1993), Kochubei e Luchko (2019), Miller e Ross (1993)). Modelos que incluem essas derivadas descrevem com bons resultados características de alguns materiais viscoelásticos usando relativamente poucos parâmetros (BAGLEY; TORVIK, 1983a; BAGLEY; TORVIK, 1983b; BAGLEY; TORVIK, 1986; KOELLER, 1984; JIA; SHEN; HUA, 2007). Esse fato tem motivado o uso crescente desses modelos em problemas de diversas áreas da engenharia e ciências. Por exemplo, em Lewandowski e Pawlak (2011), um estudo sobre propriedades dinâmicas de estruturas de múltiplos graus de liberdade com amortecedores viscoelásticos descritos pelos modelos de Kelvin-Voigt fracionário e de Maxwell fracionário, ambos com três parâmetros, é efetuado. Nesse artigo, uma nova abordagem para a formulação da equação de movimento usando variável de estado é proposta e sua principal vantagem é fazer com que matrizes de dimensões enormes não sejam requeridas. Em Sun e Chen (2015), os autores estudam vibração livre de um cabo esticado com um amortecedor modelado usando derivadas fracionárias de duas ordens distintas. Em Freundlich (2019), o comportamento dinâmico de uma viga cantiléver com uma massa na extremidade livre e excitada por movimento vertical da base é analisado. As propriedades viscoelásticas da viga são descritas pelo modelo de Kelvin-Voigt fracionário.

A teoria de elasticidade não local e não linearidades geométricas podem também ser consideradas em modelos fracionários de materiais viscoelásticos. Em Cajjić, Karličić e Lazarević (2017), é realizado um estudo sobre a vibração livre amortecida de uma nano viga simplesmente suportada em ambas as suas extremidades sobre uma fundação viscoelástica fracionária. É assumido que a equação tensão-deformação da nano viga é do tipo Kelvin-Voigt fracionário não local. Essa estrutura modela, por exemplo, um nano tubo de carbono que é conectado com a base fixa através de uma matriz de polímero e com uma camada fixa de átomos de carbono em ambos os extremos. Os autores determinam uma solução para o problema considerado

e, para fins de validação, é feita uma comparação de resultados obtidos pela metodologia usada no artigo e resultados encontrados na literatura provenientes de simulações dinâmicas moleculares e é obtida excelente concordância. Um sistema contínuo que pode ser discretizado como um sistema de um grau de liberdade com amortecimento modelado através de uma equação envolvendo derivadas fracionárias e não linearidades geométricas é considerado em Amabili (2018). Segundo o autor, pela primeira vez, é derivada de forma precisa e geral o amortecimento não linear para vibração de um sistema geometricamente não linear.

No Capítulo 3, estudamos o comportamento dinâmico de uma haste elástica posicionada sobre uma fundação viscoelástica com equação tensão-deformação do tipo Zener com derivadas fracionárias. A haste é submetida a uma força axial de intensidade constante F . Forças desse tipo são consideradas em muitos problemas práticos onde o objetivo é determinar o carregamento crítico F_{cr} , que é o maior valor de F que garante estabilidade do sistema. A extremidade esquerda da haste está presa a uma mola linear e sofre deslocamento apenas na direção transversal. Por sua vez, a extremidade direita é simplesmente suportada. Sistemas semelhantes são estudados em Atanackovic e Stankovic (2004), Atanackovic et al. (2015). No entanto, consideramos condições de fronteira e modelo fracionário para a fundação diferentes. A dinâmica da estrutura é governada por um sistema de equações diferenciais parciais acopladas com derivadas fracionárias que pode ser formulado como o seguinte problema de evolução abstrato

$$\begin{cases} \ddot{u}(\tau) + \beta q(\tau) = -Au(\tau), & \tau \geq 0, \\ (1 + \tau_q D_\tau^\alpha)q(\tau) = (1 + \tau_u D_\tau^\alpha)u(\tau), & \tau \geq 0, \end{cases}$$

onde τ é a variável temporal, u representa o deslocamento na direção transversal, q representa a tensão na fundação e A é um operador com domínio formado por funções satisfazendo restrições relacionadas às condições sobre as extremidades da haste. O fato do sistema ser contínuo adiciona dificuldade ao estudo do sistema considerado. Em Atanackovic e Stankovic (2004), Atanackovic et al. (2015), esse problema é contornado usando o método da separação de variáveis. No nosso caso, optamos por aplicar o método de Galerkin para obter uma solução mais geral e assim ter uma noção mais completa sobre o comportamento do sistema. Para tanto, um estudo sobre propriedades dos autovalores de A , considerado como um operador no espaço $L^2(0, 1)$ é efetuado. Esses autovalores têm um papel importante na análise do comportamento assintótico do sistema. É obtido que esses autovalores são soluções da equação

característica

$$\begin{aligned} & \delta_\lambda(\chi)\varepsilon_\lambda(\chi) [\delta_\lambda(\chi)^2 + \varepsilon_\lambda(\chi)^2] \cosh(\delta_\lambda(\chi)) \cos(\varepsilon_\lambda(\chi)) \\ & - \varepsilon_\lambda(\chi)K_L \sinh(\delta_\lambda(\chi)) \cos(\varepsilon_\lambda(\chi)) + \delta_\lambda(\chi)K_L \cosh(\delta_\lambda(\chi)) \sin(\varepsilon_\lambda(\chi)) = 0, \end{aligned}$$

onde

$$\delta_\lambda(\chi) = \sqrt{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \chi}}, \quad \varepsilon_\lambda(\chi) = \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \chi}}$$

e λ é o parâmetro de força. Então, a solução aproximada de Galerkin de ordem $m \in \mathbb{N}$ do problema é definida como um par de funções u_m, q_m dadas por uma soma de m termos satisfazendo determinadas condições. Os termos de u_m e q_m são funções da forma $T_k(\tau)\phi_k$ e $V_k(\tau)\phi_k$, respectivamente, onde $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma base de Hilbert de $L^2(0, 1)$ formada por autofunções de A . É mostrado que cada par T_k, V_k é solução do seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \ddot{T}_k(\tau) + \beta V_k(\tau) + \chi_k T_k(\tau) = 0, & \tau \geq 0, \\ (1 + \tau_q D_\tau^\alpha) V_k(\tau) = (1 + \tau_u D_\tau^\alpha) T_k(\tau), & \tau \geq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde χ_k é o autovalor de A associado a ϕ_k . O método da transformada de Laplace é aplicado e fornece que o problema fracionário possui solução T_k, V_k no espaço de distribuições \mathcal{K}'_+ . A regularidade de T_k é então estudada por meio de uma expressão analítica determinada previamente. O mesmo é feito para V_k . Em consequência, é obtida a existência da solução aproximada de Galerkin de ordem m , para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Como no caso do sistema do Capítulo 2, os zeros da função característica do problema (1.1) são estudados para obter informações sobre o comportamento assintótico do sistema. Entretanto, no lugar do quasi-polinômio característico, temos para cada autovalor χ_k , uma função da forma $a_{2+\alpha}s^{2+\alpha} + s^2 + a_\alpha(\chi_k)s^\alpha + a_0(\chi_k)$. É mostrado que se o parâmetro de força satisfaz certas condições, então a solução aproximada de Galerkin de ordem m tende a zero quando $\tau \rightarrow \infty$, para todo $m \in \mathbb{N}$. O mesmo não ocorre se a fundação viscoelástica fracionária é substituída por uma fundação elástica. O capítulo é finalizado estudando a questão de existência de solução do problema mais geral

$$\begin{cases} \ddot{u}(\tau) + \beta q(\tau) = -Au(\tau) + f(\tau, u(\tau)), & \tau \geq 0, \\ (1 + \tau_q D_\tau^\alpha) q(\tau) = (1 + \tau_u D_\tau^\alpha) u(\tau), & \tau \geq 0, \end{cases}$$

onde $f : [0, \infty) \times L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ é uma função contínua satisfazendo certas propriedades. Esse tipo de termo forçante é considerado no contexto de controle ativo de vibração.

2 PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo, apresentamos notações, definições e resultados que serão usados no decorrer desta tese. Os conteúdos abordados nesta parte são discutidos com brevidade e mais informações podem ser encontradas nas referências indicadas no texto. O objetivo é servir como material de consulta para a leitura dos demais capítulos. De forma resumida, discutimos os espaços de funções e distribuições que serão considerados posteriormente, bem como apresentamos alguns pontos da teoria de operadores lineares e estudamos a transformada de Laplace e a convolução. Além disso, discutimos as funções especiais gama de Euler e de Mittag-Leffler e apresentamos uma breve introdução às equações diferenciais com atraso, à teoria de estabilidade, ao método de múltiplas escalas e ao cálculo fracionário. A maioria das demonstrações dos resultados enunciados neste capítulo é omitida. No entanto, essas demonstrações podem ser encontradas na literatura sugerida.

Ao longo desta tese, vamos considerar que \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} e \mathbb{C} denotam os conjuntos dos números naturais, inteiros, reais e complexos, respectivamente.

2.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES

Começamos fixando notação e apresentando definições e resultados básicos sobre os espaços de funções que serão considerados nas seções posteriores. Mais informações podem ser encontradas em Folland (1999), Adams e Fournier (2003), Brezis (2010).

No decorrer desta seção, Ω denota um subconjunto arbitrário de \mathbb{R}^n e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ denota um espaço de Banach complexo, isto é, um espaço vetorial sobre \mathbb{C} normado completo.

Denotamos por $C(\Omega, Y)$ o espaço das funções $f : \Omega \rightarrow Y$ contínuas. Quando Ω é compacto, $C(\Omega, Y)$ é um espaço de Banach com sua norma usual, isto é, com a norma

$$\|f\|_{C(\Omega, Y)} = \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_Y.$$

Se $Y = \mathbb{C}$, então denotamos $C(\Omega, \mathbb{C})$ simplesmente por $C(\Omega)$.

No caso em que Ω é aberto, $C^k(\Omega)$ denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis, onde k é um inteiro não negativo. Além disso, $C^\infty(\Omega)$ é usado para denotar $\bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$. Por sua vez, $C^k(\bar{\Omega})$ denota o espaço das funções $f \in C^k(\Omega)$ tais que $D^\alpha f$ admite extensão contínua para $\bar{\Omega}$, para toda n -upla de números inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, com $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$.

Seja $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis tais que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, onde

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.1)$$

Nesse espaço, identificamos funções que são iguais a menos de um conjunto de medida nula. É bem conhecido que $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma (2.1). Além disso, se $p = 2$, então $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tais que a restrição de f a ω pertence a $L^p(\omega)$, para todo $\omega \subset\subset \Omega$ (compactamente contido).

Na sequência, são apresentados dois resultados importantes da teoria de integração, a Desigualdade de Hölder e o Teorema da Convergência Dominada.

Teorema 2.1.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Folland (1999, p. 182). □

Teorema 2.1.2 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que*

(a) $f_n \rightarrow f$ quase sempre;

(b) existe uma função não negativa $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ quase sempre, para todo n .

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Folland (1999, p. 54-55). □

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é dita *absolutamente contínua* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que

$$\sum_{j=1}^N |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon,$$

para qualquer coleção finita de intervalos disjuntos $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)$ contidos em $[a, b]$ tal que

$$\sum_{j=1}^N |b_j - a_j| < \delta.$$

Claramente, se f é absolutamente contínua, então f é contínua. Por outro lado, se f é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e f' é limitada, então pelo teorema do valor médio, $|f(b_j) - f(a_j)| \leq c |b_j - a_j|$, onde $c = \max_{t \in (a, b)} |f'(t)|$, o que fornece que f é absolutamente contínua. O espaço das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ absolutamente contínuas é denotado por $AC([a, b])$ ou $AC^1([a, b])$. Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, denotamos por $AC^n([a, b])$ o espaço das funções $f \in C^{n-1}([a, b])$ tais que $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$. Por sua vez, $AC_{loc}^n([0, \infty))$, $n \in \mathbb{N}$, denota o espaço das funções $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tais que a restrição de f a $[a, b]$ pertence a $AC^n([a, b])$, para quaisquer $0 \leq a < b$.

O próximo resultado fornece condições necessárias e suficientes para que uma função seja absolutamente contínua.

Teorema 2.1.3. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. As seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) f é absolutamente contínua em $[a, b]$;
- (b) $f(x) - f(a) = \int_a^x g(\xi) d\xi$ para alguma função $g \in L^1(a, b)$;
- (c) f é diferenciável quase sempre em $[a, b]$, $f' \in L^1(a, b)$ e $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(\xi) d\xi$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Folland (1999, p. 106). □

Sejam $1 \leq p < \infty$ e k um número inteiro não negativo. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido como o espaço das funções $f \in L^p(\Omega)$ que possuem derivadas fracas até a ordem k , todas pertencentes a $L^p(\Omega)$. $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a seguinte norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, se $p = 2$, então $W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f, g)_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^{\alpha} f, D^{\alpha} g)_{L^2(\Omega)}.$$

Esse espaço é denotado por $H^k(\Omega)$. A seguir, apresentamos alguns resultados sobre os espaços de Sobolev.

Teorema 2.1.4. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $1 \leq p < \infty$. Dado $u \in W^{1,p}(I)$, existe uma função $\tilde{u} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{C}$ contínua tal que $u = \tilde{u}$ quase sempre em I e*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_x^y u'(x) dx,$$

para quaisquer $x, y \in \bar{I}$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Brezis (2010, p. 206). \square

Teorema 2.1.5 (Desigualdade de Poincaré-Wirtinger). *Sejam $I = (0, 1)$ e $1 \leq p, q \leq \infty$. Então, existe uma constante $C > 0$ de modo que*

$$\|u - \bar{u}\|_{L^q(I)} \leq C \|u'\|_{L^q(I)}, \quad (2.2)$$

para todo $u \in W^{1,p}(I)$, onde $\bar{u} = \int_0^1 u(x) dx$.

No caso em que $p = q = 2$, a melhor constante C na desigualdade (2.2) é $\frac{1}{\pi}$. A demonstração desse fato pode ser encontrada em Brezis (2010, p. 577-578).

Para finalizar esta seção, apresentamos um conceito que tem um papel importante em resultados de existência e unicidade de solução de problemas envolvendo equações diferenciais. Sejam $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ e $(X_2, \|\cdot\|_{X_2})$ espaços de Banach. Dizemos que uma função $f : U \subset X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ é *Lipschitziana em relação à segunda variável* se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|f(x, y) - f(x, z)\|_Y \leq C \|y - z\|_{X_2},$$

para quaisquer $(x, y), (x, z) \in U$. A constante C é chamada *constante de Lipschitz*. Dizemos que f é *localmente Lipschitziana em relação à segunda variável* se cada ponto $(x, y) \in X_1 \times X_2$ possui uma vizinhança de modo que f restrita a essa vizinhança é Lipschitziana em relação à segunda variável. Nesse caso, a constante de Lipschitz pode depender do ponto $(x, y) \in X_1 \times X_2$.

2.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE E CONVOLUÇÃO

Nesta seção, estudamos duas ferramentas matemáticas importantes, especialmente em equações diferenciais, a transformada de Laplace e a convolução. Para mais informações, veja Zayed (1996), Smith (1966), Doetsch (1974), Doetsch (1972).

Definição 2.2.1. Definimos a *transformada de Laplace* de uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

para $s \in \mathbb{C}$ tal que essa integral converge.

Para simplificar a notação, algumas vezes vamos usar $\hat{f}(s)$ para denotar $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. A integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.3)$$

é chamada de *integral de Laplace* de f e sua convergência claramente depende do crescimento da função f quando $t \rightarrow \infty$. Uma condição de crescimento conveniente é apresentada na definição abaixo.

Definição 2.2.2. Dizemos que uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ é de *tipo exponencial* se existem constantes $M > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ e $t_0 \geq 0$ de modo que $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, para quase todo $t \geq t_0$.

Teorema 2.2.1. Se $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função localmente integrável de tipo exponencial γ , então a integral (2.3) converge absolutamente para $\Re(s) > \gamma$ e uniformemente para $\Re(s) \geq \gamma + \varepsilon > \gamma$.

Sejam $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ funções tais que $\hat{f}(s) = \hat{g}(s)$ em um semiplano $\Re(s) > x_0$. Então, $f = g$ a menos de um conjunto de medida nula (veja Zayed (1996), Doetsch (1974)). Dessa forma, estabelecendo que duas funções que são iguais quase sempre são equivalentes, o que é usual na teoria de integração, podemos considerar a inversa da transformada de Laplace. Para determinar essa inversa, é em geral necessário usar técnicas da análise complexa. Uma fórmula bem conhecida e válida, por exemplo, para funções f contínuas em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial (veja Doetsch (1974, p. 157-158)) é a *fórmula de inversão de Fourier-Mellin* ou *fórmula de inversão de Bromwich*. Essa fórmula é usada na definição abaixo.

Definição 2.2.3. Definimos a *transformada inversa de Laplace* de uma função integrável $\hat{f} : D(\hat{f}) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds,$$

onde $c > c_0$ e c_0 é tal que $\hat{f}(s)$ converge absolutamente para $\Re(s) \geq c_0$.

Na sequência, são apresentados alguns teoremas úteis em aplicações da transformada de Laplace.

Teorema 2.2.2. Se $f(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-s_0 t} f'(t) dt$$

converge para algum número real $s_0 > 0$, então

$$\int_0^{\infty} e^{-s_0 t} f(t) dt$$

também converge e

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0),$$

para $s = s_0$ e $\Re(s) > s_0$. Mais ainda,

$$f(t) = o(e^{s_0 t})$$

quando $t \rightarrow \infty$, logo $\mathcal{L}\{f\}(s)$ converge absolutamente para $\Re(s) > s_0$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Doetsch (1974). □

Observação 2.2.1. Ainda de acordo com Doetsch (1974), o teorema acima permanece válido se f é localmente absolutamente contínua em $[0, \infty)$ em vez de diferenciável em $(0, \infty)$.

Teorema 2.2.3. Seja $F(s)$ uma função analítica no semiplano $\Re(s) > x_0$ tal que $F(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$ em todo semiplano $\Re(s) \geq x_0 + \varepsilon > x_0$ e suponha que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)| dy < \infty,$$

para todo $x > x_0$. Então, $F(s)$ pode ser representada como a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds,$$

onde a integral acima independe da escolha de $c > x_0$. A função $f(t)$ é contínua em \mathbb{R} e $f(t) = 0$, para todo $t \in (-\infty, 0)$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Doetsch (1974). □

Teorema 2.2.4. Seja $F : D(F) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s),$$

onde $F_n(s)$ é a transformada de Laplace de uma função $f_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$. Além disso, suponha que

(a) todas as integrais

$$\mathcal{L}\{f_n(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_n(t) dt = F_n(s), \quad n = 0, 1, \dots,$$

convergem em um mesmo semiplano $\Re(s) \geq x_0$;

(b) as integrais

$$\mathcal{L}\{|f_n(t)|\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} |f_n(t)| dt = G_n(s), \quad n = 0, 1, \dots,$$

convergem nesse semiplano ou, equivalentemente, as integrais $G_n(x_0)$, $n = 0, 1, \dots$, existem;

(c) a série $\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x_0)$ converge (o que fornece que $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(s)$ converge absolutamente e uniformemente no semiplano $\Re(s) \geq x_0$).

Então $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ converge para uma função $f(t)$ quase sempre em $[0, \infty)$, $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ converge absolutamente no semiplano $\Re(s) \geq x_0$ e

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s).$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Doetsch (1974, p. 194-195). \square

Teorema 2.2.5. *Seja*

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{\lambda_n}}$$

uma série absolutamente convergente para $|s| > \rho \geq 0$, onde $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ e $\lambda_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, a série

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\lambda_n-1}}{\Gamma(\lambda_n)}$$

converge absolutamente para todo $t \neq 0$ e $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, onde Γ é a função gama de Euler (veja a Seção 2.8).

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Doetsch (1974, p. 195-196). \square

Sejam $s_0 \in \mathbb{C}$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e $\varepsilon > 0$. Seguindo Doetsch (1972), denotamos por \mathfrak{W} o caminho $C_1 + C_2 - C_3$, onde

$$\begin{aligned} C_1 &= \{s_0 + xe^{i\theta}; x \in [\varepsilon, \infty)\}, \\ C_2 &= \{s_0 + \varepsilon e^{ix}; x \in [-\theta, \theta]\}, \\ C_3 &= \{s_0 + xe^{-i\theta}; x \in [\varepsilon, \infty)\}. \end{aligned}$$

Dada $F : D(F) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, considere a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{W}} e^{st} F(s) ds = f(t), \quad (2.4)$$

para $t \geq 0$ tal que essa integral existe. A expressão (2.4) define uma correspondência entre F e f chamada de \mathfrak{W} -transformada.

Antes de enunciar o próximo resultado, é conveniente introduzir a seguinte notação: sejam ϕ e ψ funções definidas em um subconjunto U de \mathbb{C} , $s_0 \in U$ e $M \in \mathbb{C}$. Então, escrevemos

$$\phi(s) \sim M\psi(s) \text{ quando } s \rightarrow s_0 \text{ em } U$$

para significar que

$$\lim_{s \rightarrow s_0, s \in U} \frac{\phi(s)}{\psi(s)} = M.$$

Teorema 2.2.6. *Sejam $s_0 \in \mathbb{C}$, U_{s_0} uma vizinhança arbitrariamente pequena de s_0 , $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $S = \{s \in \mathbb{C}; |\arg(s - s_0)| \leq \theta\}$. Seja $F(s)$ uma função analítica em $U_{s_0} \cap S$, com exceção de s_0 , e localmente integrável nos raios $\arg(s - s_0) = \pm\theta$. Suponha que $\mathfrak{W}\{F(s)\}(t) = f(t)$ existe para $t \geq T$ e que*

$$F(s) \sim M(s - s_0)^\lambda,$$

quando $s \rightarrow s_0$ em S , onde $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $\lambda \neq 0, 1, \dots$, então

$$f(t) \sim M e^{s_0 t} \frac{t^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)},$$

quando $t \rightarrow \infty$, onde Γ é a função gama de Euler (veja Seção 2.8). Por sua vez, se $\lambda = 0, 1, \dots$, então

$$f(t) = o(e^{s_0 t} t^{-\lambda-1}).$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Doetsch (1972, p. 157-159). □

No Capítulo 3, mostraremos que a transformada inversa de Laplace de uma determinada função coincide com a \mathfrak{W} -transformada dessa função. Então, usaremos o Teorema 2.2.6 para estudar o comportamento assintótico da transformada inversa.

A seguir, apresentamos e discutimos o conceito de convolução.

Definição 2.2.4. Sejam f e g funções localmente integráveis em $[0, \infty)$. Definimos a *convolução* de f e g por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau,$$

para todo $t \geq 0$ tal que essa integral existe.

Observação 2.2.2. Sejam f, g e h funções localmente integráveis em $[0, \infty)$. A operação de convolução satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $(f * g)(t)$ existe para quase todo $t \geq 0$;
- (b) $f * g$ é localmente integrável em $[0, \infty)$;
- (c) se pelo menos uma das funções f e g é contínua, então $f * g$ é uma função contínua em $[0, \infty)$;
- (d) $f * g = g * f$;
- (e) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Proposição 2.2.1. Sejam f e g funções localmente integráveis em $[0, \infty)$. Se f é de tipo exponencial γ_1 e g é de tipo exponencial γ_2 , com $\gamma_1 \neq \gamma_2$, então $f * g$ é uma função de tipo exponencial $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Demonstração. Sejam $M_1, M_2 > 0$ e $t_1, t_2 \geq 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\gamma_1 t}, \text{ para quase todo } t \geq t_1, \quad \text{e} \quad |g(t)| \leq M_2 e^{\gamma_2 t}, \text{ para quase todo } t \geq t_2.$$

Para $t \geq t_0 = 2 \max\{t_1, t_2\}$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} |f(t - \tau)g(\tau)| d\tau &\leq M_1 e^{\gamma_1 t} \int_0^{t_0} e^{-\gamma_1 \tau} |g(\tau)| d\tau \\ &\leq M_1 c_1 \|g\|_{L^1(0, t_0)} e^{\gamma_1 t} \\ &\leq M_1 c_1 \|g\|_{L^1(0, t_0)} e^{\gamma_2 t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t-t_0} |f(t - \tau)g(\tau)| d\tau &\leq M_1 M_2 e^{\gamma_2 t} \int_{t_0}^{t-t_0} e^{(\gamma_1 - \gamma_2)(t - \tau)} d\tau \\ &= M_1 M_2 e^{\gamma_2 t} \int_{t_0}^{t-t_0} e^{(\gamma_1 - \gamma_2)s} ds \\ &\leq M_1 M_2 \frac{e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t_0}}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\gamma_2 t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t-t_0}^t |f(t - \tau)g(\tau)| d\tau &\leq M_2 e^{\gamma_2 t} \int_{t-t_0}^t e^{-\gamma_2(t - \tau)} |f(t - \tau)| d\tau \\ &= M_2 e^{\gamma_2 t} \int_0^{t_0} e^{-\gamma_2 s} |f(s)| ds \\ &\leq M_2 c_2 \|f\|_{L^1(0, t_0)} e^{\gamma_2 t}, \end{aligned}$$

onde $c_1 = \max\{1, e^{-\gamma_1 t_0}\}$, $c_2 = \max\{1, e^{-\gamma_2 t_0}\}$ e assumimos que $\gamma_1 < \gamma_2$.

A demonstração é concluída observando que

$$|(f * g)(t)| \leq \int_0^{t_0} |f(t - \tau)g(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^{t-t_0} |f(t - \tau)g(\tau)| d\tau + \int_{t-t_0}^t |f(t - \tau)g(\tau)| d\tau,$$

para $t \geq t_0$, e usando as estimativas obtidas. \square

Sejam f uma função localmente integrável em $[0, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, podemos considerar a função f^{*n} obtida efetuando a convolução de f n vezes. Mais precisamente, f^{*n} é definida por $f^{*1} = f$ e $f^{*n} = f * f^{*(n-1)}$ quando $n \geq 2$. Por indução, f^{*n} está definida quase sempre em $[0, \infty)$ e é localmente integrável nesse intervalo. Além disso, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.2.2. *Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável tal que existem $M > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, para $t \geq 0$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{*n}(t)$ existe para todo $t \geq 0$ e*

$$|f^{*n}(t)| \leq M^n e^{\gamma t} \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. É suficiente proceder por indução. \square

Teorema 2.2.7 (Teorema da Convolução). *Sejam f e g funções localmente integráveis em $[0, \infty)$. Se f é de tipo exponencial γ_1 e g é de tipo exponencial γ_2 , então*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)\mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad \Re(s) > s_0,$$

onde $s_0 = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Demonstração. A prova é obtida procedendo como em Zayed (1996, p. 130). \square

Corolário 2.2.1. *Se f é localmente integrável em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial γ , então f^{*n} é localmente integrável em $[0, \infty)$, de tipo exponencial $\gamma + \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é arbitrário, e*

$$\mathcal{L}\{f^{*n}(t)\}(s) = (\mathcal{L}\{f(t)\}(s))^n, \quad \Re(s) > \gamma,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.2.3. *Sejam f uma função diferenciável para $t \geq 0$ e tal que f' é limitada em intervalos da forma $[0, T]$, $T > 0$, e g uma função localmente integrável em $[0, \infty)$. Então, $(f * g)'$ existe quase sempre em $[0, \infty)$ e*

$$(f * g)'(t) = (f' * g)(t) + f(0)g(t),$$

para quase todo $t \geq 0$.

Demonstração. As hipóteses sobre f fornecem que

$$f(\tau) = \int_0^\tau f'(s)ds + f(0), \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Segue que

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t \int_0^\tau f'(s)g(t-\tau)dsd\tau + f(0) \int_0^t g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^\tau f'(s)g(t-\tau)dsd\tau + f(0) \int_0^t g(x)dx, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Usando a transformação $\tau = -y + t$ e $s = x - y$, obtemos

$$\int_0^t \int_0^\tau f'(s)g(t-\tau)dsd\tau = \int_0^t \int_y^t f'(x-y)g(y)dxdy.$$

Agora, alterando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\tau f'(s)g(t-\tau)dsd\tau &= \int_0^t \int_0^x f'(x-y)g(y)dydx \\ &= \int_0^t (f' * g)(x)dx. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.6), obtemos

$$(f * g)(t) = \int_0^t (f' * g)(x)dx + f(0) \int_0^t g(x)dx.$$

O resultado segue do teorema fundamental do cálculo para integrais de Lebesgue. \square

Proposição 2.2.4. *Sejam $f \in C^1([0, \infty))$ e $g \in C([0, \infty))$. Então, $f * g \in C^1([0, \infty))$ e*

$$(f * g)'(t) = (f' * g)(t) + f(0)g(t),$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. A prova é obtida por meio de Zorich (2004, p. 412). \square

2.3 ESPAÇOS DE DISTRIBUIÇÕES

Para tornar esta tese o mais auto contida possível, discutimos brevemente as distribuições, também conhecidas como funções generalizadas. Existem diferentes formas de introduzir esses elementos. A abordagem que vamos considerar é a desenvolvida por Laurent Schwartz na metade do último século. Considerações mais detalhadas e demonstrações podem ser encontradas em Barros-Neto (1973), Al-Gwaiz (1992), Grubb (2009).

Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Para cada $K \subset \Omega$ compacto, seja $C_K^\infty(\Omega)$ o espaço das funções $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tais que $\text{supp } \phi \subset K$, onde supp denota o suporte de ϕ , isto é, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}$. Nesse espaço, consideramos a topologia localmente convexa definida pela seguinte família de normas

$$p_{K,m}(\phi) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |D^\alpha \phi(x)|, \quad m \in \mathbb{Z}, m \geq 0.$$

Agora, seja (K_j) uma sequência de conjuntos compactos tal que $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$. Então, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ das funções de classe C^∞ em Ω com suporte compacto e contido em Ω é tal que

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{K_j}^\infty(\Omega).$$

Em $C_0^\infty(\Omega)$, consideramos a topologia limite indutivo dos espaços $C_{K_j}^\infty(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, ou seja, a topologia localmente convexa mais fina tal que a inclusão $C_{K_j}^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$ é contínua para cada $j \in \mathbb{N}$. Essa topologia não depende da escolha da sequência (K_j) , isto é, se substituirmos essa sequência por outra com as mesmas propriedades, então a topologia limite indutivo é a mesma. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com essa topologia é usualmente denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e seus elementos são chamados de *funções testes*. A seguir, apresentamos um resultado sobre a convergência de sequências em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Teorema 2.3.1. *Uma sequência (ϕ_k) converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$ se, e somente se, existe $K \subset \Omega$ compacto tal que*

- (a) *para todo k , o suporte de ϕ_k está contido em K ;*
- (b) *$D^\alpha \phi_k \rightarrow 0$ uniformemente em K , para toda n -upla α de números inteiros não negativos.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Barros-Neto (1973, p. 42). □

Uma *distribuição sobre Ω* é definida como sendo um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O espaço vetorial das distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Em outras palavras, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$. Nesse espaço, as topologias compatíveis com a estrutura de espaço vetorial mais importantes são as topologias fraca e forte (veja Barros-Neto (1973) para detalhes sobre essas topologias).

Teorema 2.3.2. *Um funcional linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ é contínuo se, e somente se, $\langle T, \phi_k \rangle \rightarrow 0$, para toda sequência (ϕ_k) que converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Barros-Neto (1973, p. 48-49). \square

Exemplo 2.3.1. Seja u uma função localmente integrável em Ω e considere o funcional linear T_u definido por

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observe que se (ϕ_k) é uma sequência que converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$|\langle T_u, \phi_k \rangle| \leq \sup_{x \in K} |\phi_k(x)| \int_K |u(x)|dx = p_{K,0}(\phi_k) \int_K |u(x)|dx \rightarrow 0,$$

onde $K \subset \Omega$ é um compacto como no Teorema 2.3.1. Segue do Teorema 2.3.2 que $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Distribuições definidas dessa forma são chamadas de *distribuições regulares*. Em alguns casos, a distribuição T_u é também denotada por u_{reg} ou simplesmente por u , quando não houver risco de confusão.

Exemplo 2.3.2. Seja $x_0 \in \Omega$. O funcional linear δ_{x_0} definido por

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição sobre Ω denominada *distribuição de Dirac* ou *medida de Dirac*. Se $x_0 = 0$, então δ_0 é denotada simplesmente por δ .

Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α uma n -upla de números inteiros não negativos. A *derivada de ordem α de T* é a distribuição sobre Ω definida por

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemplo 2.3.3. Considere a *função de Heaviside*

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Como H é localmente integrável em \mathbb{R} , essa função define uma distribuição regular que também denotaremos por H . A derivada de H é a distribuição de Dirac. De fato,

$$\left\langle \frac{d}{dt} H, \phi \right\rangle = - \left\langle H, \frac{d}{dt} \phi \right\rangle = - \int_0^\infty \frac{d}{dt} \phi(t) dt = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Seja ω um subconjunto aberto de Ω . Dizemos que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é *zero em ω* se

$$\langle T, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\omega).$$

Além disso, definimos o *suporte de* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como o complementar em Ω do maior subconjunto aberto de Ω onde T é zero.

Nosso objetivo agora é definir a transformada de Laplace de uma distribuição. Para tanto, definimos na sequência o conceito de distribuição temperada. Dizemos que uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é *rapidamente decrescente no infinito* se

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| = 0,$$

para quaisquer n -uplas de números inteiros não negativos α e β . O espaço vetorial das funções $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ rapidamente decrescentes no infinito é denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nesse espaço, consideramos a topologia localmente convexa definida pela família de seminormas

$$p_{\alpha,\beta}(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)|,$$

onde α e β são n -uplas de números inteiros não negativos. Claramente, as funções em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ são elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Outro exemplo, é a função $\phi(x) = e^{-|x|}$.

Teorema 2.3.3. *Os espaços $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, satisfazem a relação $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, com inclusões contínuas. Mais ainda, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Al-Gwaiz (1992, p. 120). □

O Teorema 2.3.3 fornece a seguinte relação entre os espaços duais topológicos

$$L^q(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

onde $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. As distribuições em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ são denominadas *distribuições temperadas*.

Agora, seja \mathcal{S}'_+ o subespaço de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ formado pelas distribuições com suporte em $[0, \infty)$. Dada uma distribuição $T \in \mathcal{S}'_+$, definimos a *transformada de Laplace* de T por

$$\mathcal{L}\{T\}(s) = \langle T, \theta(t)e^{-st} \rangle, \quad \Re(s) > 0,$$

onde θ é uma função em $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\theta(t) = 1$ para $t \in (-t_0, \infty)$ e $\theta(t) = 0$ para $t \in (-\infty, -2t_0)$, para algum $t_0 > 0$. Essa definição não depende da escolha de θ . Além disso, $\mathcal{L}\{T\}$ é uma função analítica no semiplano $\Re(s) > 0$. Mais detalhes sobre a transformada de Laplace de uma distribuição podem ser encontrados em Zemanian (1965), Atanackovic, Pilipovic e Zorica (2009), Dijk (2013).

Sejam $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tais que pelo menos uma dessas distribuições tem suporte compacto. Definimos a *convolução de S e T* como a distribuição $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S_\xi, \langle T_\eta, \phi(\xi + \eta) \rangle \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Em alguns casos, a convolução de duas distribuições S e T está bem definida mesmo quando ambas não têm suporte compacto. Isso ocorre, por exemplo, se $T = f$ e $S = g$, onde f e g são funções localmente integráveis em \mathbb{R} com suporte em $[0, \infty)$. Nesse caso, a distribuição $S * T$ coincide com a convolução das funções f e g , conforme definido na seção anterior.

Exemplo 2.3.4. Dado $\alpha > 0$, considere a função f_α definida por

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Essa função define uma distribuição que também denotaremos por f_α . Por sua vez, dado $\alpha \leq 0$, seja f_α a distribuição $\frac{d^m}{dt^m} f_{\alpha+m}$, onde m é o menor número natural tal que $\alpha + m > 0$. Nessas condições, $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ é uma família de distribuições temperadas com suporte em $[0, \infty)$ tal que $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (veja Atanackovic, Oparnica e Pilipović (2009)). O operador $f_\alpha * : \mathcal{S}'_+ \rightarrow \mathcal{S}'_+$, $T \mapsto f_\alpha * T$, é denominado *operador de diferenciação fracionária* quando $\alpha > 0$, e *operador de integração fracionária* quando $\alpha < 0$. O motivo dessa denominação é esclarecido na Seção 2.9.

Seja $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ o espaço das funções $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tais que $e^{m|x|} D^k \phi(x)$ é uma função limitada em \mathbb{R} , para quaisquer números inteiros não negativos m e k . Nesse espaço, consideramos a seguinte família de seminormas

$$p_m(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq m} e^{m|x|} |D^k \phi(x)|, \quad m \in \mathbb{Z}, m \geq 0.$$

Com essa família, $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ é um espaço topológico localmente convexo Hausdorff e metrizável. Além disso, $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R})$, com inclusão contínua. Os elementos de $\mathcal{K}'(\mathbb{R})$, o espaço dual topológico de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, são denominados *distribuições de crescimento exponencial*. O subespaço de $\mathcal{K}'(\mathbb{R})$ formado pelas distribuições com suporte em $[0, \infty)$ é denotado por \mathcal{K}'_+ .

Exemplo 2.3.5. Seja f uma função contínua em \mathbb{R} , de tipo exponencial e tal que $f(t) = 0$, para $t \in (-\infty, 0)$. Então, a distribuição regular definida por f é um elemento de \mathcal{K}'_+ . Além disso, a transformada de Laplace dessa distribuição coincide com a transformada de Laplace da função f .

Mais informações sobre os espaços $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{K}'(\mathbb{R})$ podem ser encontradas em Hasumi (1961).

2.4 OPERADORES LINEARES

Nesta seção, estudamos alguns conceitos e resultados sobre operadores lineares. Para mais detalhes sobre o conteúdo apresentado, veja Brezis (2010), Henry (1981), Curtain e Pritchard (1977), Siddiqi (2018).

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach complexos. Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

Se $Y = X$, então $\mathcal{L}(X, X)$ é denotado simplesmente por $\mathcal{L}(X)$.

Agora, sejam D um subespaço vetorial de X e $T : D \subset X \rightarrow Y$ um operador linear. Como usual, usamos $D(T)$ para denotar o domínio de T ($= D$) e $R(T)$ para denotar sua imagem.

A seguir, apresentamos algumas definições importantes.

Definição 2.4.1. Seja $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O *conjunto resolvente* de T é definido por

$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - T)^{-1} : R(\lambda I - T) \subset X \rightarrow X \text{ existe, é limitado e } \overline{R(\lambda I - T)} = X \right\},$$

onde $I : D(T) \subset X \rightarrow X$ denota o operador inclusão. O complementar do conjunto resolvente, isto é, o conjunto $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$ é chamado de *espectro* de T e denotado por $\sigma(T)$.

Para simplificar a notação, vamos escrever $(\lambda - T)$ em vez de $(\lambda I - T)$.

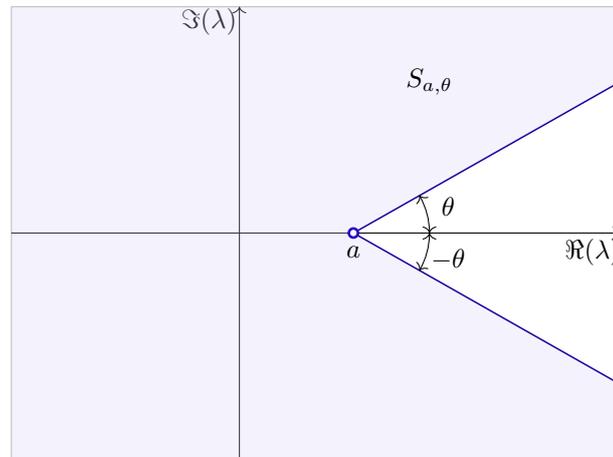
Definição 2.4.2. Seja $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido. Dizemos que T é um *operador setorial* se existem constantes $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que o setor

$$S_{a, \theta} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \theta \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi\} \tag{2.7}$$

está contido no conjunto resolvente de T e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in S_{a, \theta}$.

Figura 1 – Setor $S_{a,\theta}$.

Fonte: Autor

A Figura (1) ilustra o setor $S_{a,\theta}$ dado por (2.7).

O próximo resultado fornece condições suficientes para que um operador linear em um espaço de Hilbert seja setorial.

Teorema 2.4.1. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ um operador linear. Suponha que T (ou $T + aI$, para algum escalar a) satisfaz as seguintes condições*

- (a) o conjunto $\{(Tu, u); u \in D(T)\}$ está contido em um setor $|\arg(\lambda)| \leq \phi$, para algum $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$;
- (b) $0 \in \rho(T)$.

Então T é um operador setorial.

Um operador T em um espaço de Hilbert tal que T (ou $T + aI$, para algum escalar a) satisfaz a condição (a) do Teorema 2.4.1 é um operador *setorial no sentido de T. Kato* (veja Kato (1995) para mais detalhes).

Na sequência, discutimos as derivadas de Fréchet e de Gâteaux. A derivada de Fréchet estende o conceito de derivada de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ em um ponto interior do seu domínio para funções definidas em um subconjunto de um espaço de Banach X com valores em um espaço de Banach Y . Por sua vez, a derivada de Gâteaux é uma extensão da derivada direcional.

Definição 2.4.3. Seja $f : U \rightarrow Y$, onde U é um subconjunto aberto de X . Dado $x \in U$, dizemos que um operador linear limitado $T : X \rightarrow Y$ é a *derivada de Fréchet* de f em x se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \quad (2.8)$$

Por sua vez, a *derivada de Gâteaux* de f em x na direção de $h \in X$ é definida por

$$Df(x, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

quando esse limite existe.

A derivada de Fréchet de f em x é usualmente denotada por $Df(x)$. Se $Df(x, h)$ existe para todo $h \in X$, então a derivada de Gâteaux $Df(x, \cdot)$ é um operador de X em Y .

Observação 2.4.1. (a) As derivadas de Fréchet e de Gâteaux, quando existem, são únicas.

(b) Se $Y = \mathbb{R}$, então

$$Df(x, h) = \left[\frac{d}{dt} f(x+th) \right]_{t=0}, \quad (2.9)$$

quando essa derivada existe.

(c) Se f possui derivada de Fréchet $Df(x)$ em um ponto x , então a derivada de Gâteaux $Df(x, h)$ existe para todo $h \in X$. Além disso, os operadores $Df(x)$ e $Df(x, \cdot)$ coincidem.

As demonstrações das afirmações acima podem ser encontradas em Siddiqi (2018). A recíproca de (c) não é verdadeira em geral. Entretanto, no Capítulo 2, calculamos as derivadas de Gâteaux de determinadas funções usando (2.9) e mostramos que essas derivadas coincidem com as derivadas de Fréchet dessas funções por meio de (2.8).

2.5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM ATRASO NO TEMPO E LINEARIZAÇÃO

O objetivo desta seção é introduzir notação básica e definições a respeito das equações diferenciais com atraso. Além disso, a linearização e a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy para uma classe de tais equações também são discutidas. Mais detalhes podem ser encontrados em Hale e Lunel (1993), Driver (1977), Smith (2011), Kolmanovskii e Myshkis (1992).

Desde o final do último século, um tipo mais geral de equação diferencial, consistindo de equações nas quais a função a ser determinada aparece com argumentos diferentes, foi objeto

de estudo em um grande número de artigos e livros. As equações desse tipo são frequentemente chamadas de equações diferenciais funcionais. Alguns exemplos de tais equações são

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t+1) - x(t-1), \\ \ddot{x}(t) &= \dot{x}(2t) + \sin t, \\ \dot{x}(t) &= 2x(t-5) + \cos x(t),\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\ddot{x}(t) = t^2 \dot{x}(t) + x(t-1) + \cos t,\tag{2.11}$$

onde x é uma função definida em um intervalo apropriado de \mathbb{R} com valores em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n e o ponto representa a derivada em relação a t .

Entre as equações diferenciais funcionais, as mais simples e talvez as mais naturais são as equações diferenciais com atraso (DRIVER, 1977). Nessas equações, alguma derivada da função a ser determinada $x^{(n)}(t)$ é expressa em termos de $x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}$ avaliadas em t e em instantes anteriores.

Alguns problemas, como de crescimento populacional (veja Driver (1977, p. 229-232)), são modelados por equações diferenciais com atraso da forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_l)),\tag{2.12}$$

onde τ_1, \dots, τ_l são constantes não negativas e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(l+1)n}$. Denotando $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, equações da forma (2.12) são casos particulares de equações do tipo

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t).\tag{2.13}$$

Muitas outras equações diferenciais têm a forma (2.13), como por exemplo, equações diferenciais ordinárias na forma normal e equações do tipo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_l(t))),$$

onde os atrasos são funções que dependem de t . Na literatura sobre equações diferenciais funcionais, é usual considerar F como uma função com domínio contido em $\mathbb{R} \times C$, onde C denota o espaço de Banach $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ com a norma usual e r é um número real maior ou igual ao supremo dos valores assumidos pelos atrasos. No caso em que os atrasos τ_1, \dots, τ_l são constantes, $r = \max \{\tau_j; j = 1, \dots, l\}$. Na sequência, são apresentadas algumas definições relacionadas à equação diferencial (2.13).

Definição 2.5.1. A equação (2.13) é dita *linear* se a função $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser escrita como $F(t, \psi) = L(t, \psi) + g(t)$, $(t, \psi) \in D$, onde $L(t, \cdot)$ é uma função linear para cada t . Se, além disso, $g \equiv 0$, então a equação (2.13) é dita *linear homogênea*.

Definição 2.5.2. A equação (2.13) é dita *autônoma* se $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ não depende de t , isto é, se $F(t, \psi) = h(\psi)$, $(t, \psi) \in D$, para alguma função h .

Para a próxima definição, considere a equação diferencial autônoma

$$\dot{x}(t) = F(x_t), \quad (2.14)$$

onde $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição 2.5.3. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função constante $x(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$, é *solução estacionária* de (2.14), se $F(x_t) = 0$.

Para simplificar a notação, vamos denotar a função constante $x(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$, por x_0 apenas. Claramente, podem existir mais de uma solução estacionária de uma equação da forma (2.14). Além disso, soluções estacionárias distintas podem ter propriedades de estabilidade diferentes (BREDA; MASET; VERMIGLIO, 2015). Na sequência, é assumido que x_0 é uma solução estacionária de (2.14).

Note que $x = x_0 + y$ é uma solução da equação (2.14) se, e somente se, y satisfaz

$$\dot{y}(t) = F(x_0 + y_t). \quad (2.15)$$

Assim, para estudar o comportamento das soluções de (2.14) que começam próximas de x_0 , é suficiente estudar o comportamento das soluções de (2.15) que começam próximas de zero.

Suponha que F pode ser escrita como

$$F(x_0 + z) = L(z) + g(z), \quad z \in C,$$

onde $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador linear limitado e $g : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função tal que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|g(z)|}{\|z\|_C} = 0.$$

Em outras palavras, suponha que existe a derivada de Fréchet de F em x_0 e que L denota essa derivada. Nessas condições, a equação diferencial linear

$$\dot{x}(t) = L(x_t)$$

é chamada de *linearização* de (2.14) em torno da solução estacionária x_0 .

Dados $I = [t_0, \infty)$, $\phi \in C$ e $F : I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$, considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_t), & t \geq t_0, \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (2.16)$$

A seguir, definimos o conceito de solução desse problema. Antes, é conveniente definir solução da equação (2.13).

Definição 2.5.4. Dizemos que x é uma solução de (2.13) em $[t_0 - r, T) \subseteq I$, se $x : [t_0 - r, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua que satisfaz (2.13), para todo $t \in [t_0, T)$.

Definição 2.5.5. Dizemos que x é uma solução do problema (2.16) em $[t_0 - r, T) \subseteq I$, se x é uma solução de (2.13) em $[t_0 - r, T)$ tal que $x_{t_0} = \phi$. Dizemos que x é uma solução global do problema (2.16), se x é uma solução desse problema em $[t_0 - r, \infty)$.

Algumas vezes, para enfatizar que x é uma solução do problema de Cauchy (2.16), que é determinado por t_0, ϕ e F , escrevemos $x(t, t_0, \phi, F)$ ou alguma variante em vez de $x(t)$.

Teorema 2.5.1. *Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ e suponha que $F : [t_0, \infty) \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua localmente Lipschitziana em relação à segunda variável. Então, existe $T = T(t_0, \phi, F) > t_0$ tal que*

- (a) *existe uma solução x do problema (2.16) em $[t_0 - r, T)$;*
- (b) *a solução é única em cada subintervalo $[t_0 - r, t_1] \subset [t_0 - r, T)$;*
- (c) *se $T < \infty$, então $[t_0 - r, T)$ é o intervalo máximo de existência da solução;*
- (d) *a solução x depende continuamente de F e de ϕ .*

Observação 2.5.1. A afirmação (d) do Teorema 2.5.1 significa que dados $t_1 \in (t_0, T)$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que se F e ϕ são substituídas por \bar{F} e $\bar{\phi}$ satisfazendo as mesmas condições que F e ϕ e tais que $\|\bar{\phi} - \phi\|_C < \delta$ e $|\bar{F}(t, \psi) - F(t, \psi)| < \delta$, sempre que $t \in [t_0, t_1]$ e $\|\phi - x_t\|_C < \varepsilon$, e se \bar{x} é a solução do problema transformado com intervalo máximo de existência $[t_0 - r, \bar{T})$, então $|\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$, para $t_0 \leq t \leq \min\{T, \bar{T}\}$.

Teorema 2.5.2. *Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$ e suponha que $F : [t_0, \infty) \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz em relação à segunda variável, então existe uma única solução global de (2.16).*

Note que se $F(t, \psi) = L\psi$, $\psi \in C$, onde $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador linear limitado, então F satisfaz as condições do Teorema 2.5.2 e, conseqüentemente, a solução trivial é a única solução do problema de Cauchy (2.16) quando $\phi \equiv 0$.

2.6 ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO

Nesta seção, apresentamos definições e resultados sobre a estabilidade de sistemas com atraso no tempo. Consideramos a bem conhecida estabilidade no sentido de Lyapunov, conceito que pode ser aplicado a sistemas com ou sem atraso. No caso de sistemas com atraso, a análise de estabilidade é muito mais complicada de modo geral e feita através de basicamente dois tipos de métodos, o método de Lyapunov e o método da função característica (HU; WANG, 2002). Os resultados apresentados nesta seção estão relacionados ao segundo tipo de método. Para mais informações sobre a teoria de estabilidade de sistemas com atraso, veja Hu e Wang (2002), Smith (2011), Breda, Maset e Vermiglio (2015).

Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, $\phi \in C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, para algum $r > 0$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^{(l+1)n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_l)), & t \geq t_0, \\ x(t + t_0) = \phi(t), & t \in [-r, 0], \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_l \leq r$. Suponha que são satisfeitas condições tais que existe uma única solução global de (2.17) (como por exemplo, as hipóteses do Teorema 2.5.2).

Tendo em vista que o problema de estabilidade de uma solução não trivial pode ser transformado no problema de estabilidade da solução trivial, consideramos apenas este caso nas definições e resultados desta seção. Contudo, é preciso assumir que $f(0) = 0$, onde 0 denota o vetor nulo tanto de $\mathbb{R}^{(l+1)n}$ quanto de \mathbb{R}^n .

Definição 2.6.1. Dizemos que a solução trivial de (2.17) é *estável* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que toda solução x satisfaz $|x(t)| < \varepsilon$, para $t \geq t_0$, sempre que $\|\phi\|_C < \delta$.

Definição 2.6.2. Dizemos que a solução trivial de (2.17) é *assintoticamente estável* se é estável e existe $\mu > 0$ suficientemente pequeno de modo que se $\|\phi\|_C < \mu$ e x é solução de (2.17), então $|x(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Na equação diferencial do sistema (2.17), considere o caso particular em que $f(y_0, y_1, \dots, y_l) = Ay_0 + \sum_{j=1}^l B_j y_j$, onde $y_0, \dots, y_l \in \mathbb{R}^n$ e A, B_1, \dots, B_l são matrizes $n \times n$, isto é, considere

a equação diferencial linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^l B_j x(t - \tau_j). \quad (2.18)$$

Escrevendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados das equações do sistema (2.18), obtemos

$$\left(sI - A - \sum_{j=1}^l B_j e^{-s\tau_j} \right) \tilde{x}(s) = x(0), \quad (2.19)$$

onde I é a matriz identidade de ordem n e $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, com $\tilde{x}_i = \mathcal{L}\{x_i(t)\}$, $i = 1, \dots, n$. Igualando o determinante da matriz dos coeficientes de (2.19) a zero obtemos a chamada *equação característica* de (2.18). Em símbolos, a equação característica de (2.18) é dada por

$$\det \left(sI - A - \sum_{j=1}^l B_j e^{-s\tau_j} \right) = 0.$$

Por sua vez, a função

$$p(s) = \det \left(sI - A - \sum_{j=1}^l B_j e^{-s\tau_j} \right) \quad (2.20)$$

é denominada *quasi-polinômio característico* de (2.18). Observe que $p(s)$ tem a forma

$$p(s) = s^n + d_1(s)s^{n-1} + \dots + d_{n-1}(s)s + d_n(s),$$

onde d_1, \dots, d_n são polinômios com respeito às funções $e^{-s\tau_1}, \dots, e^{-s\tau_l}$.

Na sequência, são apresentados dois teoremas sobre estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (2.18). O segundo desses resultados é conhecido como Teorema de Pontryakin.

Teorema 2.6.1. *A solução trivial de (2.18) é assintoticamente estável se, e somente se, toda raiz do quasi-polinômio característico $p(s)$, dado por (2.20), tem parte real negativa.*

Definição 2.6.3. Sejam $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e suponha que f e g possuem apenas raízes reais. Dizemos que as raízes de f e g são entrelaçadas se as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) para quaisquer duas raízes consecutivas $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ de f , existe uma única raiz β_j de g tal que $\alpha_i < \beta_j < \alpha_{i+1}$;
- (b) para quaisquer duas raízes consecutivas $\beta_j < \beta_{j+1}$ de g , existe uma única raiz α_i de f tal que $\beta_j < \alpha_i < \beta_{j+1}$.

Teorema 2.6.2. *Sejam $R(\omega) = \Re(p(i\omega))$ e $S(\omega) = \Im(p(i\omega))$, $\omega \in \mathbb{R}$. A solução trivial de (2.18) é assintoticamente estável se, e somente se, $R(\omega)$ e $S(\omega)$ têm raízes reais, simples e entrelaçadas e, além disso,*

$$R(\omega)S'(\omega) - S(\omega)R'(\omega) > 0.$$

O último resultado desta seção é uma ferramenta bastante útil conhecida como Princípio da Estabilidade Linearizada. Segundo esse princípio, o estudo da estabilidade assintótica de uma solução de um sistema de equações diferenciais não lineares pode ser reduzido ao estudo da estabilidade assintótica da solução trivial da linearização desse sistema.

Teorema 2.6.3. *Seja $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ e suponha que a equação $\dot{x}(t) = F(x_t)$ admite linearização $\dot{x}(t) = L(x_t)$ em torno de uma solução estacionária x_0 . Seja p o quasi-polinômio característico da equação linearizada e suponha que*

$$\max \{ \Re(s); s \text{ é raiz de } p(s) \} < 0.$$

Então x_0 é uma solução assintoticamente estável de $\dot{x}(t) = F(x_t)$.

2.7 MÉTODO DE MÚLTIPLAS ESCALAS

O objetivo desta seção é introduzir o método perturbativo que será usado para estudar o sistema de dois graus de liberdade considerado no próximo capítulo. Para mais detalhes a respeito do conteúdo apresentado, veja Nayfeh (1973), Kevorkian e Cole (1996), Holmes (2013), Bellman (1964).

Grande parte dos problemas da matemática aplicada, física e engenharia é modelada através de equações diferenciais não lineares. De modo geral, a obtenção de soluções exatas para essas equações é uma questão bastante complicada. Por esse motivo, muitas vezes é necessário recorrer a soluções aproximadas para estudar esses problemas. Os métodos perturbativos (assintóticos) consistem de técnicas que permitem obter aproximações de soluções. Nesses métodos, são obtidas expansões em termos de uma coordenada ou de um parâmetro ϵ , que pode aparecer de forma natural ou ser introduzido de modo artificial nas equações. Os coeficientes de uma tal expansão são soluções de uma sequência de problemas lineares. O primeiro coeficiente é tipicamente solução da equação obtida através da linearização da equação original. Por sua vez, os coeficientes de ordem maior são soluções de equações não homogêneas, em que as

partes não homogêneas envolvem apenas os coeficientes anteriores previamente determinados. Mesmo quando essas expansões são divergentes, elas podem fornecer informações úteis sobre a solução (NAYFEH, 1973).

Para introduzir as ideias básicas sobre os métodos em questão, considere a seguinte equação diferencial não homogênea

$$F(u) = v, \quad (2.21)$$

onde $u = u(t)$ é a função a ser determinada, F é um operador diferencial e $v = v(t)$ representa a parte não homogênea da equação. Seja L um operador diferencial linear e suponha que a equação auxiliar

$$L(u) = v \quad (2.22)$$

possui solução conhecida. Somando e subtraindo $L(u)$ na equação (2.21), obtemos

$$L(u) + (F(u) - L(u)) = v,$$

que pode ser reescrita como

$$L(u) = v + N(u), \quad (2.23)$$

onde $N(u) = F(u) - L(u)$. Assim, a equação original expressa na forma (2.23) pode ser vista como uma perturbação da equação diferencial linear não homogênea (2.22). Um parâmetro ϵ é então introduzido da seguinte forma

$$L(u) = v + \epsilon N(u). \quad (2.24)$$

Esse parâmetro pode aparecer naturalmente na equação, representando quantidades físicas diversas, ou pode ser inserido artificialmente por motivos práticos, permitindo por exemplo agrupar termos de graus comparáveis de aproximação de forma metódica e conveniente (BELL-MAN, 1964). Observe que se $\epsilon = 0$, então a equação (2.24) é reduzida à equação linear (2.22) e se $\epsilon = 1$, (2.24) é a equação original a ser resolvida. Dessa forma, ϵ pode ser visto como um parâmetro que demarca dois regimes bem diferentes. Durante o processo de transição entre o regime linear e o regime inicial, não linear, os efeitos das não linearidades em $N(u)$ são aos poucos introduzidos. Para efeitos práticos e nas aplicações, o parâmetro ϵ é considerado pequeno o suficiente para que o termo $\epsilon N(u)$ em (2.24) seja pequeno em relação aos demais, ou seja, aos termos lineares. Então, assumimos uma solução de (2.24) na forma

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots, \quad (2.25)$$

onde u_i , $i = 0, 1, \dots$, são funções que não dependem de ϵ . O termo u_0 , denominado *aproximação de ordem zero*, é solução de (2.24) para $\epsilon = 0$, isto é, u_0 é solução do problema (2.22). Substituindo (2.25) em (2.24) e usando a linearidade de L , obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k L(u_k) = v + \epsilon N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u_k \right).$$

Assumindo que $N(u)$ é "analítica" em u de modo que podemos expandir $N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u_k \right)$ como uma série de potência em ϵ , temos

$$N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k N_k(u_0, \dots, u_k), \quad (2.26)$$

substituindo (2.26) em (2.25) e igualando os coeficientes de mesma potência de ϵ , obtemos a seguinte sequência de equações diferenciais lineares

$$\begin{aligned} L(u_0) &= v, \\ L(u_1) &= N_0(u_0), \\ L(u_2) &= N_1(u_0, u_1), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.27)$$

que podem ser resolvidas recursivamente observando que no passo k , u_k depende dos termos anteriores u_0, \dots, u_{k-1} , para todo $k \in \mathbb{N}$, o que fornece que cada u_k depende apenas de v . Assim, (2.25) fornece uma solução (formal) de (2.24) como uma série cujos termos são calculados de forma recursiva através das equações (2.27). Em relação a essa série, surgem as seguintes importantes questões

- Quais as condições para que a série (2.25) seja convergente e de fato represente uma solução de (2.24)?
- Se a série não converge, os termos u_k podem ser usados para obter estimativas analíticas e numéricas para as soluções de (2.24)?

De modo geral, as questões acima são muito difíceis de responder. Conforme Bellman (1964), existe um grande esforço na direção de estabelecer resultados rigorosos envolvendo métodos perturbativos e, apesar disso, os resultados de qualquer refinamento e rigor que existem dependem fortemente da natureza dos operadores diferenciais envolvidos. Levando esse fato em consideração e ressaltando que as contribuições da presente tese na análise de estabilidade do próximo capítulo ocorre no campo das aplicações práticas, restringiremos nossa atenção ao

uso de métodos que têm se mostrado ao longo do tempo ferramentas poderosas no estudo do comportamento dinâmico de sistemas.

Antes de introduzir o conceito de expansão assintótica, é conveniente relembrar os símbolos de ordem o e O . Sejam $f(\epsilon)$ e $g(\epsilon)$ funções definidas em uma vizinhança U de ϵ_0 . Escrevemos

$$f(\epsilon) = o(g(\epsilon)) \text{ quando } \epsilon \rightarrow \epsilon_0$$

se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \left| \frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)} \right| = 0.$$

Por sua vez, escrevemos

$$f(\epsilon) = O(g(\epsilon)) \text{ quando } \epsilon \rightarrow \epsilon_0$$

se existem uma constante positiva M , independente de ϵ , e uma vizinhança V de ϵ_0 tais que

$$|f(\epsilon)| \leq M |g(\epsilon)|,$$

para todo $\epsilon \in V$. Suponha agora que f e g são funções que dependem não apenas do parâmetro ϵ mas também de x , onde x é uma variável escalar ou vetorial independente de ϵ . Então, escrevemos

$$f(x; \epsilon) = o(g(x; \epsilon)) \text{ quando } \epsilon \rightarrow \epsilon_0 \text{ uniformemente em } D$$

se para todo $\delta > 0$, existe uma vizinhança V de ϵ_0 , independente de $x \in D$, tal que

$$|f(x; \epsilon)| \leq \delta |g(x; \epsilon)|,$$

para todo $\epsilon \in V$ e todo $x \in D$. Escrevemos também

$$f(x; \epsilon) = O(g(x; \epsilon)) \text{ quando } \epsilon \rightarrow \epsilon_0 \text{ uniformemente em } D$$

se existem uma constante positiva M e uma vizinhança V de ϵ_0 , independentes de $x \in D$, de modo que

$$|f(x; \epsilon)| \leq M |g(x; \epsilon)|,$$

para todo $\epsilon \in V$ e todo $x \in D$.

Em vez de usar potências de ϵ na representação de uma solução por meio de uma expansão, podemos usar funções de ϵ mais gerais. Mais precisamente, podemos usar uma sequência de funções $(\delta_k(\epsilon))$ satisfazendo $\delta_k(\epsilon) = o(\delta_{k-1}(\epsilon))$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, para todo k . Uma sequência

com essa propriedade é denominada *sequência assintótica*. Se $(\delta_k(\epsilon))$ é uma tal sequência, dizemos que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta_k(\epsilon)$ é uma *expansão assintótica* e escrevemos

$$y \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta_k(\epsilon) \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0$$

se

$$y = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta_k(\epsilon) + O(\delta_N(\epsilon)) \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

para cada $N \in \mathbb{N}$. Agora, estamos em condições de apresentar a seguinte importante definição.

Definição 2.7.1. Uma expansão assintótica

$$f(x; \epsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \delta_k(\epsilon) \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0$$

é *uniformemente válida* se, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$f(x; \epsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k(x) \delta_k(\epsilon) + R_N(x; \epsilon),$$

onde $R_N(x; \epsilon) = O(\delta_N(\epsilon))$ uniformemente para todo x de interesse.

Uma propriedade importante é que dada uma sequência assintótica $(\delta_k(\epsilon))$, a expansão assintótica em termos de $\delta_k(\epsilon)$, quando existe, é única (veja Kevorkian e Cole (1996, p. 5)).

Na sequência, apresentamos o método perturbativo denominado método de múltiplas escalas em sua versão de várias variáveis, também conhecido como procedimento de expansão da derivada. Nesse método, são consideradas diferentes escalas no tempo T_0, \dots, T_N , onde $T_k = \epsilon^k t$, $k = 0, \dots, N$, e a solução é assumida da forma

$$\begin{aligned} x(t; \epsilon) &= \tilde{x}(T_0, T_1, \dots, T_N; \epsilon) \\ &= \sum_{k=0}^N \epsilon^k x_k(T_0, T_1, \dots, T_N) + O(\epsilon^{N+1}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Além disso, é imposto que

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} \text{ é uma função limitada,} \quad (2.29)$$

para todo k . É interessante observar que a condição acima é equivalente à eliminação dos termos seculares (veja Nayfeh (1973, p. 231)). As derivadas no tempo são transformadas por meio da seguinte fórmula obtida usando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots + \epsilon^N \frac{\partial}{\partial T_N}. \quad (2.30)$$

De acordo com Nayfeh (1973), uma expansão uniformemente válida é obtida através desse método para tempos até $O(\epsilon^{-N})$. Para tempos posteriores, é preciso usar outras escalas para manter a expansão uniformemente válida.

A seguir, apresentamos um exemplo bastante simples para ilustrar a aplicação da versão de várias variáveis do método de múltiplas escalas.

Considere a equação diferencial

$$\ddot{x} + x = -\epsilon \dot{x}, \quad (2.31)$$

onde $x = x(t)$. É bem conhecido que (2.31) é a equação de movimento de um oscilador amortecido linear. Suponha que a solução de (2.31) tem a forma

$$x(t; \epsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2) + \epsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^3 x_3(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.31), usando a fórmula (2.30) e igualando os coeficientes de mesma potência de ϵ , obtemos a seguinte sequência de equações diferenciais

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1 \partial T_0}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1 \partial T_0} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_2 \partial T_0}, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial T_0^2} + x_3 = -\frac{\partial x_2}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_1 \partial T_0} - \frac{\partial x_1}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_2 \partial T_0} - \frac{\partial x_0}{\partial T_2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_2 \partial T_1} \quad (2.36)$$

⋮

A solução geral de (2.33) é dada por

$$x_0(T_0, T_1, T_2) = f_0(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{f}_0(T_1, T_2)e^{-iT_0}, \quad (2.37)$$

onde \bar{f}_0 é a conjugada complexa de f_0 . Usando (2.37) em (2.34), obtemos

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = g_1(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{g}_1(T_1, T_2)e^{-iT_0}, \quad (2.38)$$

onde

$$g_1 = -i \left(f_0 + 2\frac{\partial f_0}{\partial T_1} \right).$$

A equação (2.38) tem solução geral da forma

$$x_1(T_0, T_1, T_2) = f_1(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{f}_1(T_1, T_2)e^{-iT_0} - \frac{i}{2}g_1(T_1, T_2)T_0e^{iT_0} + \frac{i}{2}\bar{g}_1(T_1, T_2)T_0e^{-iT_0}. \quad (2.39)$$

Observe, no entanto, que se os coeficientes dos termos $T_0 e^{iT_0}$ e $T_0 e^{-iT_0}$ em (2.39) não são identicamente nulos, então a condição (2.29) não é satisfeita para $k = 1$. Dessa forma, é necessário que $g_1 = 0$, de onde

$$f_0 + 2 \frac{\partial f_0}{\partial T_1} = 0,$$

cuja solução geral é

$$f_0(T_1, T_2) = a_0(T_2) e^{-\frac{1}{2}T_1}.$$

Nesse caso, (2.37) e (2.39) se tornam

$$x_0(T_0, T_1, T_2) = a_0(T_2) e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{iT_0} + \bar{a}_0(T_2) e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{-iT_0} \quad (2.40)$$

e

$$x_1(T_0, T_1, T_2) = f_1(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{f}_1(T_1, T_2) e^{-iT_0}. \quad (2.41)$$

Usando (2.40) e (2.41) em (2.35), obtemos

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = g_2(T_1, T_2) e^{iT_0} + \bar{g}_2(T_1, T_2) e^{-iT_0},$$

onde

$$g_2 = -i f_1 - 2i \frac{\partial f_1}{\partial T_1} + \frac{1}{4} a_0 e^{-\frac{1}{2}T_1} - 2i \frac{da_0}{dT_2} e^{-\frac{1}{2}T_1}.$$

Como anteriormente, para que a condição (2.29) seja satisfeita para $k = 2$, é necessário que $g_2 = 0$, o que fornece

$$f_1 + 2 \frac{\partial f_1}{\partial T_1} = h_1(T_2) e^{-\frac{1}{2}T_1}, \quad (2.42)$$

onde

$$h_1 = -\frac{i}{4} a_0 - 2 \frac{da_0}{dT_2}.$$

A solução geral de (2.42) é

$$f_1(T_1, T_2) = a_1(T_2) e^{-\frac{1}{2}T_1} + \frac{1}{2} h_1(T_2) T_1 e^{-\frac{1}{2}T_1}. \quad (2.43)$$

Usando (2.43) em (2.41), obtemos

$$x_1(T_0, T_1, T_2) = \left(a_1(T_2) e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{iT_0} + \frac{1}{2} h_1(T_2) T_1 e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{iT_0} \right) + cc, \quad (2.44)$$

onde cc denota o conjugado complexo da expressão anterior (entre parênteses). Agora, note que se os coeficientes dos termos $T_1 e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{iT_0}$ e $T_1 e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{-iT_0}$ em (2.44) não são identicamente nulos, então novamente a condição (2.29) não é satisfeita para $k = 1$. Assim, é necessário impor $h_1 = 0$, o que equivale a

$$-a_0 + 8i \frac{da_0}{dT_2} = 0,$$

que tem como solução geral

$$a_0(T_2) = c_0 e^{-\frac{i}{8}T_2},$$

onde c_0 é uma constante. Dessa forma,

$$x_0(T_0, T_1, T_2) = c_0 e^{-\frac{i}{8}T_2} e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{iT_0} + \bar{c}_0 e^{\frac{i}{8}T_2} e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{-iT_0}.$$

Além disso, fazendo $h_1 = 0$ em (2.44), obtemos

$$x_1(T_0, T_1, T_2) = a_1(T_2) e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{iT_0} + \bar{a}_1(T_2) e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{-iT_0}.$$

Procedendo de modo similar com a equação (2.36), obtemos

$$a_1(T_2) = c_1 e^{-\frac{i}{8}T_2},$$

onde c_1 é uma constante, o que fornece que

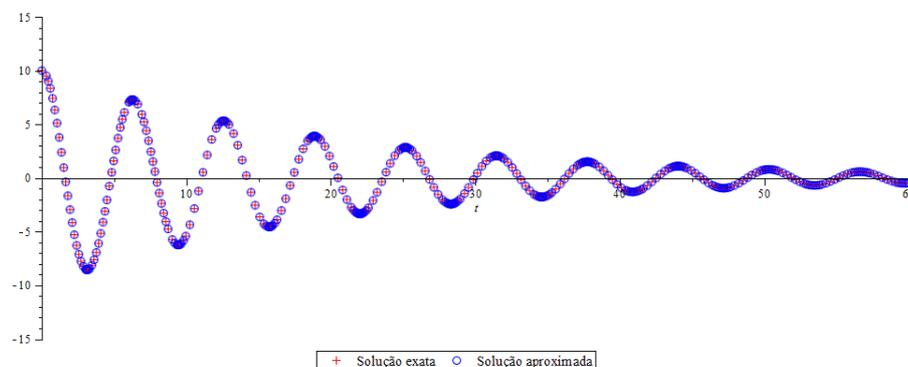
$$x_1(T_0, T_1, T_2) = c_1 e^{-\frac{i}{8}T_2} e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{iT_0} + \bar{c}_1 e^{\frac{i}{8}T_2} e^{-\frac{1}{2}T_1} e^{-iT_0}.$$

Dessa forma, obtemos

$$x = e^{-\frac{1}{2}T_1} \left(c_0 e^{i(T_0 - \frac{1}{8}T_2)} + \bar{c}_0 e^{-i(T_0 - \frac{1}{8}T_2)} \right) + \epsilon e^{-\frac{1}{2}T_1} \left(c_1 e^{i(T_0 - \frac{1}{8}T_2)} + \bar{c}_1 e^{-i(T_0 - \frac{1}{8}T_2)} \right) + O(\epsilon^2). \quad (2.45)$$

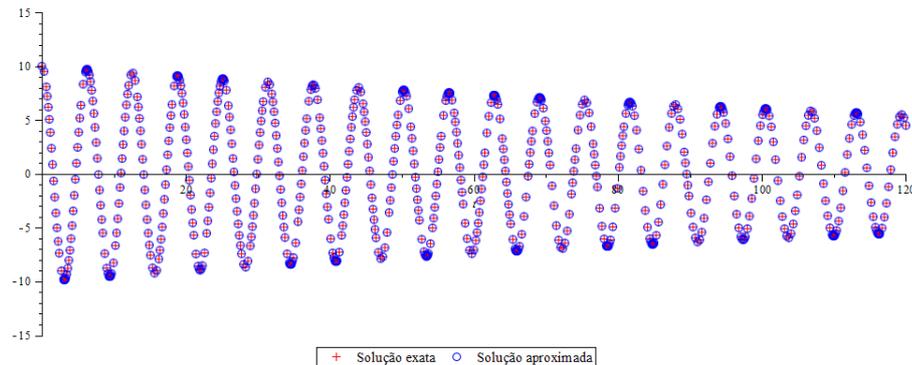
Nas Figuras 2 e 3 são apresentados os gráficos da solução exata e da solução aproximada (2.45) da equação (2.31) com condições iniciais $x(0) = 10$, $\dot{x}(0) = 0$. O parâmetro ϵ foi tomado igual a 10^{-1} na Figura 2 e a 10^{-2} na Figura 3.

Figura 2 – Solução exata e solução aproximada de (2.31), onde $\epsilon = 10^{-1}$, com condições iniciais $x(0) = 10$, $\dot{x}(0) = 0$.



Fonte: Autor

Figura 3 – Solução exata e solução aproximada de (2.31), onde $\epsilon = 10^{-2}$, com condições iniciais $x(0) = 10$, $\dot{x}(0) = 0$.



Fonte: Autor

2.8 FUNÇÕES ESPECIAIS

Nesta seção, apresentamos as definições e algumas propriedades das funções gama de Euler e de Mittag-Leffler. Essas funções especiais têm um papel importante no cálculo fracionário. Mais informações sobre o conteúdo discutido podem ser encontradas em Kilbas, Srivastava e Trujillo (2006), Gorenflo et al. (2014), Podlubny (1999), Das (2011).

Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) > 0$, a *função gama de Euler* $\Gamma(z)$ é definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Pela fórmula de integração por partes, obtemos que a seguinte relação é satisfeita

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (2.46)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, com $\Re(z) > 0$. Usando (2.46) e levando em consideração que $\Gamma(1) = 1$, obtemos

$$\Gamma(n + 1) = n!,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $\Gamma(z)$ generaliza o fatorial de um número natural. A fórmula (2.46) é usada para estender a função Γ para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$. Precisamente, definimos

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n)}{(z)_n},$$

para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) \in (-\infty, 0]$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$, onde $n \in \mathbb{N}$ é tomado de modo que $\Re(z + n) > 0$ e $(z)_n$ denota o *símbolo de Pochhammer* dado por

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z + 1) \dots (z + n - 1).$$

A função Γ assim definida é analítica em $D_\Gamma = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Além disso, valem as seguintes fórmulas

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad |\arg(z+a)| < \pi, |z| \rightarrow \infty, \quad (2.47)$$

e $\frac{1}{\Gamma(x)} \approx x$, para $x > 0$ suficientemente pequeno.

A seguir, apresentamos a definição da função de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros. Antes, introduzimos os seguintes conceitos.

Definição 2.8.1. Dizemos que uma função inteira $f(z)$ é de ordem $\rho \in [0, \infty]$ se

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\log M(r))}{\log r} = \rho,$$

onde $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $r \in [0, \infty)$.

Definição 2.8.2. Seja $f(z)$ uma função inteira de ordem $\rho > 0$. Dizemos que f é de tipo $\tau \in [0, \infty]$ se

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log M(r) = \tau,$$

onde $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $r \in [0, \infty)$.

Observação 2.8.1. Seja $f(z)$ uma função inteira de ordem $\rho > 0$ e tipo $\tau \in (0, \infty)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, temos que

$$M(r) = O\left(e^{(\tau+\varepsilon)r^\rho}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Mais detalhes sobre os conceitos de ordem e tipo de uma função inteira podem ser encontrados em Boas (2011).

Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\Re(\alpha) > 0$, definimos a *função de Mittag-Leffler de um parâmetro* $E_\alpha(z)$ pela série

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Essa função é uma função inteira de ordem $\frac{1}{\Re(\alpha)}$ e tipo 1. Note que se $\alpha = 1$, então

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z.$$

Dessa forma, $E_\alpha(z)$ fornece uma generalização simples da função exponencial. Outros casos especiais são

$$E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cosh z \quad \text{e} \quad E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(k+1)} = \cos z.$$

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{\alpha,\beta}(z)$ é uma generalização de $E_\alpha(z)$ definida por

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

para $z \in \mathbb{C}$. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ é uma função inteira de ordem $\frac{1}{\Re(\alpha)}$ e tipo 1, o que fornece que fixado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $M > 0$ de modo que

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq M \exp\left((1 + \varepsilon)|z|^{\frac{1}{\Re(\alpha)}}\right), \quad (2.48)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Claramente, quando $\beta = 1$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ coincide com $E_\alpha(z)$. Outros casos particulares da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros são

$$E_{1,3}(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh z}{z} \quad \text{e} \quad E_{2,2}(-z^2) = \frac{\sin z}{z}.$$

2.9 CÁLCULO FRACIONÁRIO

O objetivo desta seção é estudar uma generalização dos operadores de integração e derivação para o caso em que são permitidas ordens reais ou complexas não necessariamente naturais. A primeira menção à ideia de generalizar o conceito de derivada de ordem natural p para valores mais gerais é atribuída a L'Hospital que por meio de uma carta enviada a Leibniz questionou o significado da notação $\frac{d^p y}{d^p x}$ quando $p = \frac{1}{2}$. Em carta datada de 30 de setembro de 1695, Leibniz respondeu que a questão era um aparente paradoxo do qual seriam extraídas consequências úteis um dia. Desde então, derivadas de ordens não naturais, conhecidas como derivadas fracionárias, e suas aplicações foram consideradas de alguma forma por vários matemáticos de renome, como Euler em 1730, Lagrange em 1772, Laplace em 1812, Fourier em 1822, Liouville em 1832, Riemann em 1847, Laurent em 1884, Weyl em 1917, entre outros (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993; KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006). Existem várias definições de integral e derivada fracionárias. Nesta tese, vamos considerar as de Riemann-Liouville. Mais informações sobre o conteúdo apresentado podem ser encontradas em Samko, Kilbas e Marichev (1993), Kilbas, Srivastava e Trujillo (2006), Diethelm (2010), Das (2011).

No decorrer desta seção, a e b denotam números reais tais que $a < b$.

Seja $\alpha \in (0, \infty)$ e considere a função

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > a, \\ 0, & t < a, \end{cases}$$

onde Γ é a função gama de Euler. Se $a = 0$, então g_α coincide com f_α definida no Exemplo 2.3.4 e é denominada *função Gelfand-Shilov* (veja Mainardi (2010)).

Definição 2.9.1. Dado $\alpha \in (0, \infty)$, a *integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem α* da função $f \in L^1(a, b)$ é definida por

$${}_a I_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t), \quad (2.49)$$

para quase todo $t \in [a, b]$.

Para $\alpha = 0$, definimos ${}_a I_t^0 f = f$. A definição de integral fracionária dada é justificada na sequência.

Teorema 2.9.1. *Sejam $\alpha \in (0, \infty)$ e $f \in L^1(a, b)$. Então, a integral ${}_a I_t^\alpha f(t)$ existe para quase todo $t \in [a, b]$.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Diethelm (2010, p. 14). □

Observação 2.9.1. Expandindo a expressão (2.49), obtemos que a integral ${}_a I_t^\alpha f(t)$ é dada por

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Em particular, para $\alpha = n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} {}_a I_t^n f(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_2 d\tau_1, \end{aligned}$$

isto é, ${}_a I_t^n f$ é obtida integrando a função f n vezes.

Exemplo 2.9.1. Seja $\alpha > 0$. Então, a integral fracionária de ordem α da função $f(t) = t - a$ é dada por

$${}_a I_t^\alpha (t - a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} (t - a)^{\alpha+1}.$$

De fato, calculando pela definição, temos

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha (t - a) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[-\frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha} (\tau - a) \right]_a^t + \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^\alpha d\tau \\ &= \frac{1}{(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^{\alpha+1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} (t - a)^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

onde para obter a segunda igualdade usamos a fórmula de integração por partes e nas duas últimas aplicamos (2.46). De modo geral, se $\alpha > 0$ e $\beta > -1$, então

$${}_a I_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha}.$$

Em particular, para $\beta = 0$, temos

$${}_a I_t^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha.$$

Teorema 2.9.2. *Sejam $\alpha > 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então, o operador integral de Riemann-Liouville $f \mapsto {}_a I_t^\alpha f$ é um operador limitado em $L^p(a, b)$. Além disso, vale a estimativa*

$$\|{}_a I_t^\alpha f\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha |\Gamma(\alpha)|} \|f\|_{L^p(a,b)}.$$

Demonstração. Uma versão mais geral desse teorema foi demonstrada em Samko, Kilbas e Marichev (1993, p. 48-49). \square

Definição 2.9.2. *Sejam $\alpha \geq 0$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. A derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem α de f é definida por*

$${}_a D_t^\alpha f(t) = D_t^n {}_a I_t^{n-\alpha} f(t), \quad (2.50)$$

para todo $t \in [a, b]$ tal que a expressão do lado direito de (2.50) existe, onde $D_t = \frac{d}{dt}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n-1 \leq \alpha < n$.

Observação 2.9.2. Explicitamente, a derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda é dada por

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

O próximo resultado assegura a existência (pelo menos quase sempre) da derivada fracionária de Riemann-Liouville se $f \in AC^n([a, b])$, onde $AC^n([a, b])$ é definido na Seção 2.1.

Teorema 2.9.3. *Sejam $\alpha \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n-1 \leq \alpha < n$. Se $f \in AC^n([a, b])$, então a derivada fracionária ${}_a D_t^\alpha f(t)$ existe para quase todo $t \in [a, b]$ e*

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (2.51)$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Samko, Kilbas e Marichev (1993, p. 40). \square

O último termo do lado direito de (2.51) é a *derivada fracionária de Caputo à esquerda de ordem α de f* .

Observação 2.9.3. Levando em consideração a Observação 2.9.1, temos

$${}_aD_t^0 f = f$$

e, se n é um número natural, então

$${}_aD_t^n f = f^{(n)},$$

onde $f^{(n)}$ denota a derivada de ordem n usual de f , para f satisfazendo condições apropriadas.

Exemplo 2.9.2. Sejam $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$ e considere novamente a função $f(t) = (t - a)^\beta$. Em vista do Exemplo 2.9.1, temos

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{d^n}{dt^n} {}_aI_t^{n-\alpha} (t - a)^\beta \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t - a)^{\beta + n - \alpha}, \end{aligned}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 \leq \alpha < n$. Assim, se $\alpha - \beta \in \{1, \dots, n\}$, então ${}_aD_t^\alpha (t - a)^\beta = 0$. Caso contrário,

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + n - \alpha)} (\beta + n - \alpha)(\beta + n - \alpha - 1) \dots [\beta + n - \alpha - (n - 1)] (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida usando (2.46). Em particular, se $\beta = 0$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$, então

$${}_aD_t^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}.$$

Neste tese, estamos interessados apenas em derivadas fracionárias de ordem $\alpha \in (0, 1)$.

Para essas derivadas, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.9.4. Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $f \in AC([a, b])$. Então, ${}_aD_t^\alpha f \in L^p(a, b)$, para $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Diethelm (2010, p. 27-28). \square

A integral e a derivada fracionárias de Riemann-Liouville definidas acima no intervalo finito $[a, b]$ podem ser estendidas de modo natural para $[0, \infty)$ da seguinte forma

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0,$$

para $\alpha > 0$, e

$$\begin{aligned} D_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} I_t^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \end{aligned}$$

para $\alpha \geq 0$, onde $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 \leq \alpha < n$.

Proposição 2.9.1. *Sejam $a \neq 0$, $c, L > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $h : [0, L] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ e considere a função*

$$H(\xi, \tau) = \frac{1}{a} h(L\xi, c\tau), \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \infty).$$

Se $D_t^\alpha h(S, t)$ existe para $t > 0$, então $D_\tau^\alpha H(\xi, \tau)$ existe para $\tau > 0$ e

$$D_\tau^\alpha H(\xi, \tau) = \frac{c^\alpha}{a} D_t^\alpha h(S, t) \Big|_{S=L\xi, t=c\tau}.$$

Demonstração. Pela definição de derivada fracionária, temos

$$\begin{aligned} D_\tau^\alpha H(\xi, \tau) &= \frac{1}{a} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau-s)^{-\alpha} h(L\xi, cs) ds \\ &= \frac{1}{ac^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{c\tau} (c\tau-\eta)^{-\alpha} h(L\xi, \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{ac^{1-\alpha}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[I_t^{1-\alpha} h(S, t) \right]_{S=L\xi, t=c\tau} \\ &= \frac{1}{ac^{1-\alpha}} c \left[\frac{\partial}{\partial t} I_t^{1-\alpha} h(S, t) \right]_{S=L\xi, t=c\tau} \\ &= \frac{c^\alpha}{a} D_t^\alpha h(S, t) \Big|_{S=L\xi, t=c\tau}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.9.2. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $f \in AC([0, b])$, para todo $b > 0$. Suponha ainda que f é uma função de tipo exponencial. Então,*

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f\}(s) = s^\alpha \mathcal{L}\{f\}(s),$$

em algum semiplano $\Re(s) > s_0$.

Demonstração. O resultado segue dos Teoremas 2.2.2 (considerando a Observação 2.2.1) e 2.2.7. □

A seguir, apresentamos a definição de derivada fracionária de uma distribuição temperada com suporte em $[0, \infty)$. Mais detalhes sobre essas derivadas podem ser encontradas em Atanackovic, Pilipovic e Zorica (2009), Atanackovic, Oparnica e Pilipović (2009)

Definição 2.9.3. *Sejam $\alpha \in (0, \infty)$ e $T \in \mathcal{S}'_+$. Definimos a derivada fracionária de ordem α de T por*

$$D^\alpha T = f_{-\alpha} * T,$$

ou, equivalentemente, por

$$D^\alpha T = \frac{d^n}{dt^n} (f_{n-\alpha} * T),$$

onde $n \in \mathbb{N}$, com $n-1 \leq \alpha < n$, e f_α é a distribuição definida no Exemplo 2.3.4.

Observação 2.9.4. De acordo com Atanackovic, Pilipovic e Zorica (2009), para quaisquer $\alpha > 0$ e $T \in \mathcal{S}'_+$, $D^\alpha T$ é uma distribuição em \mathcal{S}'_+ . Além disso, vale a seguinte identidade

$$\mathcal{L}\{D^\alpha T\}(s) = s^\alpha \mathcal{L}\{T\}(s), \quad \Re(s) > 0.$$

3 ESTABILIDADE ASSINTÓTICA DE UM SISTEMA NÃO LINEAR COM ATRASO

Neste capítulo, estudamos o comportamento dinâmico de um sistema de dois graus de liberdade sob ressonância primária. O sistema é composto por um sistema principal e um absorvedor de vibração. Para realizar a análise, o método de múltiplas escalas é aplicado com o objetivo de obter uma solução aproximada do sistema de equações diferenciais não lineares com atraso que descreve o movimento do sistema considerado. É importante ressaltar que a metodologia usada permite capturar a influência dos parâmetros do sistema sobre a estabilidade da estrutura. Além disso, o absorvedor considerado no presente capítulo é não conservativo, pois contém elemento dissipativo. A escolha de sistemas não conservativos tem sua justificativa no fato de que tais sistemas apresentam bons resultados quando usados como controladores passivos em sistemas distribuídos ou contínuos (veja Mead (1998)). Projetos de controladores eficientes devem levar em consideração que a resposta do sistema depende da frequência, bem como da amplitude e da fase de cada componente da excitação externa (veja Nayfeh (1973), Nayfeh, Mook e Holmes (1980)). Para valores da frequência de excitação próximos da frequência natural do sistema, a amplitude da resposta cresce rapidamente e pode tender ao infinito, o que não é conveniente. Usando a abordagem *detuning parameter* é possível analisar a dinâmica do sistema para valores da frequência de excitação externa próximos da frequência natural e inclusive controlar a amplitude com uma escolha apropriada dos parâmetros de controle, que consiste, no modelo considerado, do sistema secundário. Para finalizar esta introdução, apresentamos uma breve descrição do capítulo. Na Seção 3.1, introduzimos o sistema com controle passivo considerado nesta parte da tese e apresentamos as equações de movimento para esse sistema. Na Seção 3.2, aplicamos o método de múltiplas escalas para obter uma solução aproximada do sistema formado por essas equações. Nas Seções 3.3 e 3.4, consideramos cada um dos casos de ressonância primária. Nessas seções, determinamos um sistema de equações diferenciais não lineares com atraso para as amplitudes e fases das aproximações dos deslocamentos do sistema principal e do absorvedor, bem como estudamos as soluções estacionárias e analisamos a influência de parâmetros, especialmente do atraso no tempo, sobre o comportamento dinâmico do sistema. A análise de estabilidade é feita linearizando o sistema para as amplitudes e fases em torno de uma solução estacionária e determinando o quasi-polinômio característico associado ao sistema linear funcional obtido. As funções R e S introduzidas no Teorema 2.6.2 (Teorema de Pontryakin) também são

calculadas. Tendo em vista a grande dificuldade de estudar analiticamente as raízes dessas funções, efetuamos um estudo numérico para obter informações a respeito da estabilidade do sistema.

3.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

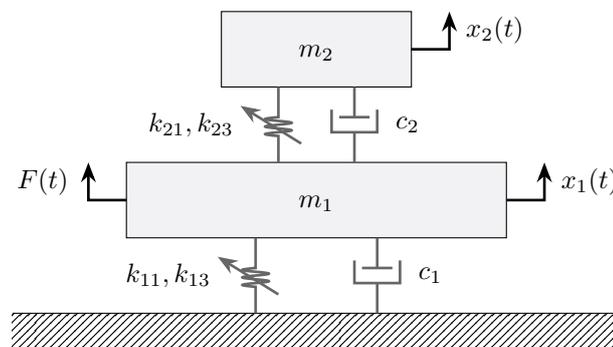
Nesta seção, consideramos um sistema de dois graus de liberdade composto por um sistema principal e um absorvedor. O sistema principal é modelado como uma massa m_1 conectada a uma base por uma mola e um amortecedor. Por sua vez, o absorvedor é modelado como uma massa m_2 acoplada ao sistema principal por meio de uma mola e um amortecedor. Ambas as molas do sistema têm constantes de rigidez lineares e não lineares cúbicas. Essas constantes são denotadas respectivamente por k_{11} e k_{13} no caso da mola do sistema principal e k_{21} e k_{23} no caso da mola do absorvedor. O coeficiente de amortecimento do sistema principal é denotado por c_1 e do absorvedor por c_2 . Um atraso no tempo medindo a defasagem do efeito de amortecimento entre o sistema principal e o absorvedor é considerado. Além disso, é assumido que o sistema principal está sujeito a uma excitação externa da forma $F(t) = f \cos(\Omega t)$, onde f e Ω são constantes positivas. O modelo descrito é representado na Figura 4.

As equações de movimento para o sistema considerado são

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{13}x_1^3 + c_1 \dot{x}_1 + k_{21}(x_1 - x_2) + k_{23}(x_1 - x_2)^3 + c_2(\dot{x}_1(t - \tau) - \dot{x}_2(t - \tau)) = f \cos(\Omega t), \quad (3.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_{21}(x_2 - x_1) + k_{23}(x_2 - x_1)^3 + c_2(\dot{x}_2(t - \tau) - \dot{x}_1(t - \tau)) = 0, \quad (3.2)$$

Figura 4 – Sistema principal com absorvedor



Fonte: Autor

onde x_1 e x_2 denotam os deslocamentos das massas m_1 e m_2 , respectivamente. Denotando

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k_{11} + k_{21}}{m_1}, & \omega_2^2 &= \frac{k_{21}}{m_2}, & \alpha_{13} &= \frac{k_{13}}{m_1}, & \alpha_{21} &= \frac{k_{21}}{m_1}, & \alpha_{23} &= \frac{k_{23}}{m_1}, \\ \beta_{23} &= \frac{k_{23}}{m_2}, & \zeta_1 &= \frac{c_1}{m_1}, & \zeta_2 &= \frac{c_2}{m_1}, & \zeta_3 &= \frac{c_2}{m_2}, & F &= \frac{f}{m_1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

o sistema (3.1)-(3.2) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_{13} x_1^3 + \zeta_1 \dot{x}_1 - \alpha_{21} x_2 + \alpha_{23} (x_1 - x_2)^3 \\ + \zeta_2 (\dot{x}_1(t - \tau) - \dot{x}_2(t - \tau)) = F \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 (x_2 - x_1) + \beta_{23} (x_2 - x_1)^3 + \zeta_3 (\dot{x}_2(t - \tau) - \dot{x}_1(t - \tau)) = 0, \quad (3.5)$$

onde ω_1 e ω_2 representam as frequências naturais do sistema.

A análise de estabilidade do sistema em estudo é efetuada considerando os coeficientes de amortecimento, a constante não linear da mola do sistema primário, as constantes linear e não linear da mola do sistema secundário e a amplitude da excitação externa comparativamente pequenos em relação aos demais parâmetros do sistema.

3.2 SOLUÇÃO PERTURBATIVA

Nesta seção, a versão do método de múltiplas escalas denominada procedimento de expansão da derivada, cujas linhas gerais podem ser encontradas na Seção 2.7, é usada para obter solução aproximada do sistema (3.4)-(3.5). Para tanto, escrevemos

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= \epsilon \hat{\alpha}_{13}, & \alpha_{21} &= \epsilon \hat{\alpha}_{21}, & \alpha_{23} &= \epsilon \hat{\alpha}_{23}, \\ \beta_{23} &= \epsilon \hat{\beta}_{23}, & \zeta_i &= \epsilon \hat{\zeta}_i, \quad i = 1, 2, 3, & F &= \epsilon \hat{F}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

de modo que o sistema (3.4)-(3.5) assume a forma

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \epsilon H_1(x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t - \tau), \dot{x}_2(t - \tau)) \quad (3.7)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 (x_2 - x_1) = \epsilon H_2(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t - \tau), \dot{x}_2(t - \tau)), \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned} H_1(x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t - \tau), \dot{x}_2(t - \tau)) &= -\hat{\alpha}_{13} x_1^3 - \hat{\zeta}_1 \dot{x}_1 + \hat{\alpha}_{21} x_2 - \hat{\alpha}_{23} (x_1 - x_2)^3 \\ &\quad - \hat{\zeta}_2 (\dot{x}_1(t - \tau) - \dot{x}_2(t - \tau)) + \hat{F} \cos(\Omega t), \\ H_2(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t - \tau), \dot{x}_2(t - \tau)) &= -\hat{\beta}_{23} (x_2 - x_1)^3 - \hat{\zeta}_3 (\dot{x}_2(t - \tau) - \dot{x}_1(t - \tau)). \end{aligned}$$

Para aplicar o procedimento de expansão da derivada, vamos escrever

$$x_1(t; \epsilon) = x_{10}(T_0, T_1) + \epsilon x_{11}(T_0, T_1) + O(\epsilon^2), \quad (3.9)$$

$$x_2(t; \epsilon) = x_{20}(T_0, T_1) + \epsilon x_{21}(T_0, T_1) + O(\epsilon^2), \quad (3.10)$$

onde $T_0 = t$ e $T_1 = \epsilon t$. Substituindo (3.9) e (3.10) em (3.7), usando as fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}, \end{aligned}$$

e agrupando os termos que multiplicam a mesma potência de ϵ , obtemos

$$\begin{aligned} &\left(D_0^2 x_{10} + \omega_1^2 x_{10} \right) + \epsilon \left[2D_0 D_1 x_{10} + D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} + \hat{\alpha}_{13} x_{10}^3 + \hat{\zeta}_1 D_0 x_{10} - \hat{\alpha}_{21} x_{20} \right. \\ &+ \hat{\alpha}_{23} (x_{10} - x_{20})^3 + \hat{\zeta}_2 \left(D_0 x_{10}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) - D_0 x_{20}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right) - \hat{F} \cos(\Omega T_0) \left. \right] \\ &+ \epsilon^2 f_{12} + \epsilon^3 f_{13} + \epsilon^4 f_{14} = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde D_i denota $\frac{\partial}{\partial T_i}$, $i = 0, 1$, e f_{12} , f_{13} e f_{14} são funções dadas por

$$\begin{aligned} f_{12} &= 2D_0 D_1 x_{11} + D_1^2 x_{10} + 3\hat{\alpha}_{13} x_{10}^2 x_{11} + \hat{\zeta}_1 (D_1 x_{10} + D_0 x_{11}) - \hat{\alpha}_{21} x_{21} \\ &+ \hat{\alpha}_{23} (x_{10} - x_{20})^2 (x_{11} - x_{21}) + \hat{\zeta}_2 \left(D_1 x_{10}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) + D_0 x_{11}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right. \\ &\left. - D_1 x_{20}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) - D_0 x_{21}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right) \\ f_{13} &= D_1^2 x_{11} + 3\hat{\alpha}_{13} x_{10} x_{11}^2 + \hat{\zeta}_1 D_1 x_{11} + \hat{\alpha}_{23} (x_{10} - x_{20}) (x_{11} - x_{21})^2 \\ &+ \hat{\zeta}_2 \left(D_1 x_{11}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) - D_1 x_{21}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right) \\ f_{14} &= \hat{\alpha}_{13} x_{11}^3 + \hat{\alpha}_{23} (x_{11} - x_{21})^3. \end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo com (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} &\left(D_0^2 x_{20} + \omega_2^2 (x_{20} - x_{10}) \right) + \epsilon \left[2D_0 D_1 x_{20} + D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 (x_{21} - x_{11}) \right. \\ &+ \hat{\beta}_{23} (x_{20} - x_{10})^3 + \hat{\zeta}_3 \left(D_0 x_{20}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) - D_0 x_{10}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right) \left. \right] \\ &+ \epsilon^2 f_{22} + \epsilon^3 f_{23} + \epsilon^4 f_{24} = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde f_{22} , f_{23} e f_{24} são dadas por

$$\begin{aligned}
f_{22} &= 2D_0D_1x_{21} + D_1^2x_{20} + 3\widehat{\beta}_{23}(x_{20} - x_{10})^2(x_{21} - x_{11}) + \widehat{\zeta}_3 \left(D_1x_{20}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right. \\
&\quad \left. + D_0x_{21}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) - D_1x_{10}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) - D_0x_{11}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right) \\
f_{23} &= D_1^2x_{21} + 3\widehat{\beta}_{23}(x_{20} - x_{10})(x_{21} - x_{11})^2 + \widehat{\zeta}_3 \left(D_1x_{21}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right. \\
&\quad \left. - D_1x_{11}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right) \\
f_{24} &= \widehat{\beta}_{23}(x_{21} - x_{11})^3.
\end{aligned}$$

Como estamos interessados em aproximações de x_1 e x_2 com até dois termos, apenas os coeficientes das potências ϵ^0 e ϵ^1 em (3.11) e (3.12) são considerados na análise que segue.

Igualando esses coeficientes a zero, obtemos

$$D_0^2x_{10} + \omega_1^2x_{10} = 0, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
D_0^2x_{11} + \omega_1^2x_{11} &= \widehat{F} \cos(\Omega T_0) - 2D_0D_1x_{10} - \widehat{\zeta}_1D_0x_{10} - \widehat{\alpha}_{13}x_{10}^3 + \widehat{\alpha}_{21}x_{20} - \widehat{\alpha}_{23}(x_{10} - x_{20})^3 \\
&\quad - \widehat{\zeta}_2 \left(D_0x_{10}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) - D_0x_{20}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right), \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$D_0^2x_{20} + \omega_2^2x_{20} = \omega_2^2x_{10}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
D_0^2x_{21} + \omega_2^2x_{21} &= \omega_2^2x_{11} - 2D_0D_1x_{20} - \widehat{\beta}_{23}(x_{20} - x_{10})^3 - \widehat{\zeta}_3 \left(D_0x_{20}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right. \\
&\quad \left. - D_0x_{10}(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) \right). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

A solução geral de (3.13) é dada por

$$x_{10}(T_0, T_1) = A_1(T_1)e^{i\omega_1T_0} + \overline{A}_1(T_1)e^{-i\omega_1T_0}, \quad (3.17)$$

onde A_1 é uma função que depende de T_1 e \overline{A}_1 é sua conjugada complexa. Dessa forma, (3.15) pode ser reescrita como

$$D_0^2x_{20} + \omega_2^2x_{20} = \omega_2^2A_1(T_1)e^{i\omega_1T_0} + \omega_2^2\overline{A}_1(T_1)e^{-i\omega_1T_0},$$

que tem como solução geral (assumindo $\omega_2 \neq \omega_1$)

$$\begin{aligned}
x_{20}(T_0, T_1) &= A_2(T_1)e^{i\omega_2T_0} + \overline{A}_2(T_1)e^{-i\omega_2T_0} \\
&\quad + \Delta_2A_1(T_1)e^{i\omega_1T_0} + \Delta_2\overline{A}_1(T_1)e^{-i\omega_1T_0}, \quad (3.18)
\end{aligned}$$

onde $\Delta_2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$, A_2 é uma função que depende de T_1 e \bar{A}_2 é sua conjugada complexa. Usando (3.17) e (3.18) em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}
D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} &= \frac{\hat{F}}{2} e^{i\Omega T_0} - (\hat{\alpha}_{23} \Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13}) A_1^3 e^{i3\omega_1 T_0} + \left[-3(\hat{\alpha}_{23} \Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13}) A_1^2 \bar{A}_1 \right. \\
&\quad - 6\hat{\alpha}_{23} \Delta_1 A_1 A_2 \bar{A}_2 - (i\hat{\zeta}_1 \omega_1 - \hat{\alpha}_{21} \Delta_2) A_1 - 2i\omega_1 \frac{dA_1}{dT_1} \\
&\quad \left. - i\hat{\zeta}_2 \omega_1 \Delta_1 A_1 (T_1 - \epsilon\tau) e^{-i\omega_1 \tau} \right] e^{i\omega_1 T_0} + \hat{\alpha}_{23} A_2^3 e^{i3\omega_2 T_0} \\
&\quad + \left(6\hat{\alpha}_{23} \Delta_1^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 + 3\hat{\alpha}_{23} A_2^2 \bar{A}_2 + \hat{\alpha}_{21} A_2 + i\hat{\zeta}_2 \omega_2 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{-i\omega_2 \tau} \right) e^{i\omega_2 T_0} \\
&\quad - 3\hat{\alpha}_{23} \Delta_1 \bar{A}_1 A_2^2 e^{i(2\omega_2 - \omega_1) T_0} - 3\hat{\alpha}_{23} \Delta_1 A_1 A_2^2 e^{i(\omega_1 + 2\omega_2) T_0} \\
&\quad + 3\hat{\alpha}_{23} \Delta_1^2 A_1^2 \bar{A}_2 e^{i(2\omega_1 - \omega_2) T_0} + 3\hat{\alpha}_{23} \Delta_1^2 A_1^2 A_2 e^{i(2\omega_1 + \omega_2) T_0} + cc, \tag{3.19}
\end{aligned}$$

onde $\Delta_1 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$ e cc denota o conjugado complexo da expressão anterior. De modo análogo, (3.16) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 x_{21} &= \omega_2^2 x_{11} + \hat{\beta}_{23} \Delta_1^3 A_1^3 e^{i3\omega_1 T_0} + \left(-2i\Delta_2 \omega_1 \frac{dA_1}{dT_1} + 3\hat{\beta}_{23} \Delta_1^3 A_1^2 \bar{A}_1 \right. \\
&\quad \left. + 6\hat{\beta}_{23} \Delta_1 A_1 A_2 \bar{A}_2 + i\hat{\zeta}_3 \omega_1 \Delta_1 A_1 (T_1 - \epsilon\tau) e^{-i\omega_1 \tau} \right) e^{i\omega_1 T_0} \\
&\quad - \hat{\beta}_{23} A_2^3 e^{i3\omega_2 T_0} + \left(-2i\omega_2 \frac{dA_2}{dT_1} - 3\hat{\beta}_{23} A_2^2 \bar{A}_2 - 6\hat{\beta}_{23} \Delta_1^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 \right. \\
&\quad \left. - i\hat{\zeta}_3 \omega_2 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{-i\omega_2 \tau} \right) e^{i\omega_2 T_0} + 3\hat{\beta}_{23} \Delta_1 \bar{A}_1 A_2^2 e^{i(2\omega_2 - \omega_1) T_0} \\
&\quad + 3\hat{\beta}_{23} \Delta_1 A_1 A_2^2 e^{i(\omega_1 + 2\omega_2) T_0} - 3\hat{\beta}_{23} \Delta_1^2 A_1^2 \bar{A}_2 e^{i(2\omega_1 - \omega_2) T_0} \\
&\quad - 3\hat{\beta}_{23} \Delta_1^2 A_1^2 A_2 e^{i(2\omega_1 + \omega_2) T_0} + cc. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Observando as frequências dos termos à direita de (3.19) e (3.20), obtemos que os possíveis casos de ressonância são:

Ressonância Primária: $\Omega \approx \omega_1$ ou $\Omega \approx \omega_2$;

Ressonância Interna: $\omega_1 \approx \omega_2$ ou $\omega_1 \approx 3\omega_2$ ou $\omega_2 \approx 3\omega_1$;

Ressonância Simultânea: qualquer combinação dos casos acima.

Na seqüência, vamos escrever as funções A_1 e A_2 como

$$A_1(T_1) = \frac{1}{2} a_1(T_1) \exp(i\mu_1(T_1)) \quad \text{e} \quad A_2(T_1) = \frac{1}{2} a_2(T_1) \exp(i\mu_2(T_1)), \tag{3.21}$$

onde a_1, a_2, μ_1 e μ_2 são funções reais de T_1 , com a_1 e a_2 assumindo apenas valores não negativos.

3.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE NO CASO DE RESSONÂNCIA PRIMÁRIA $\Omega \approx \omega_1$

Nesta seção, analisamos a estabilidade do sistema no caso de ressonância primária $\Omega \approx \omega_1$. Para tanto, escrevemos

$$\Omega = \omega_1 + \sigma = \omega_1 + \epsilon \hat{\sigma}, \quad (3.22)$$

onde $\hat{\sigma}$ é um parâmetro de ajuste. Considerando (3.22), obtemos um sistema de equações diferenciais para as funções a_1 , a_2 , $\gamma_1 = \hat{\sigma}T_1 - \mu_1$ e μ_2 . A estabilidade desse sistema em torno de uma solução estacionária é então estudada.

Substituindo (3.22) na equação (3.19), obtemos

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} = & \left[\frac{\hat{F}}{2} e^{i\hat{\sigma}T_1} - 3(\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13})A_1^2\bar{A}_1 - 6\hat{\alpha}_{23}\Delta_1 A_1 A_2 \bar{A}_2 - (i\hat{\zeta}_1\omega_1 - \hat{\alpha}_{21}\Delta_2)A_1 \right. \\ & \left. - 2i\omega_1 \frac{dA_1}{dT_1} - i\hat{\zeta}_2\omega_1\Delta_1 A_1(T_1 - \epsilon\tau)e^{-i\omega_1\tau} \right] e^{i\omega_1 T_0} + f_1 e^{i\omega_2 T_0} \\ & + f_2 e^{i3\omega_1 T_0} + f_3 e^{i3\omega_2 T_0} + f_4 e^{i(2\omega_2 - \omega_1)T_0} + f_5 e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)T_0} \\ & + f_6 e^{i(2\omega_1 - \omega_2)T_0} + f_7 e^{i(2\omega_1 + \omega_2)T_0} + cc, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde f_1, \dots, f_7 são funções de T_1 dadas por

$$\begin{aligned} f_1 &= 6\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 + 3\hat{\alpha}_{23}A_2^2 \bar{A}_2 + \hat{\alpha}_{21}A_2 + i\hat{\zeta}_2\omega_2 A_2(T_1 - \epsilon\tau)e^{-i\omega_2\tau} \\ f_2 &= -(\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13})A_1^3, \\ f_3 &= \hat{\alpha}_{23}A_2^3, \\ f_4 &= -3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1 \bar{A}_1 A_2^2, \\ f_5 &= -3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1 A_1 A_2^2, \\ f_6 &= 3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^2 A_1^2 \bar{A}_2, \\ f_7 &= 3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^2 A_1^2 A_2. \end{aligned}$$

Para que a condição (2.29) seja satisfeita, é necessário que o coeficiente de $e^{i\omega_1 T_0}$ em (3.23) seja identicamente nulo, o que é equivalente a

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 \frac{dA_1}{dT_1} = & \frac{\hat{F}}{2} e^{i\hat{\sigma}T_1} - 3(\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13})A_1^2\bar{A}_1 - 6\hat{\alpha}_{23}\Delta_1 A_1 A_2 \bar{A}_2 \\ & - (i\hat{\zeta}_1\omega_1 - \hat{\alpha}_{21}\Delta_2)A_1 - i\hat{\zeta}_2\omega_1\Delta_1 A_1(T_1 - \epsilon\tau)e^{-i\omega_1\tau}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substituindo (3.21) em (3.24) e multiplicando ambos os lados da equação resultante por $e^{-i\mu_1}$,

obtemos

$$\begin{aligned} -a_1\dot{\mu}_1 + i\dot{a}_1 &= e \exp\left(i(\hat{\sigma}T_1 - \mu_1)\right) + ig_1a_1 + ig_2a_{1\tau} \exp\left(i(\mu_{1\tau} - \omega_1\tau - \mu_1)\right) \\ &+ g_3a_1 + g_4a_1a_2^2 + g_5a_1^3, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde o ponto representa a derivada em relação a T_1 , $a_{1\tau} = a_1(T_1 - \epsilon\tau)$, $\mu_{1\tau} = \mu_1(T_1 - \epsilon\tau)$ e

$$\begin{aligned} e &= \frac{\hat{F}}{2\omega_1}, & g_1 &= -\frac{\hat{\zeta}_1}{2}, & g_2 &= -\frac{\hat{\zeta}_2\Delta_1}{2}, & g_3 &= \frac{\hat{\alpha}_{21}\Delta_2}{2\omega_1}, \\ g_4 &= -\frac{3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1}{4\omega_1}, & g_5 &= -\frac{3(\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13})}{8\omega_1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Escrevendo $\gamma_1 = \hat{\sigma}T_1 - \mu_1$ e $\gamma_{1\tau} = \gamma_1(T_1 - \epsilon\tau)$ e separando as partes real e imaginária em (3.25), obtemos

$$\dot{a}_1 = e \sin \gamma_1 + g_1a_1 + g_2a_{1\tau} \cos(\gamma_{1\tau} - \gamma_1 + (\omega_1 + \epsilon\hat{\sigma})\tau), \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} a_1\dot{\gamma}_1 &= e \cos \gamma_1 + g_2a_{1\tau} \sin(\gamma_{1\tau} - \gamma_1 + (\omega_1 + \epsilon\hat{\sigma})\tau) + (g_3 + \hat{\sigma})a_1 \\ &+ g_4a_1a_2^2 + g_5a_1^3. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Agora, anulando o coeficiente de $e^{i\omega_1T_0}$ em (3.23), essa equação se torna

$$\begin{aligned} D_0^2x_{11} + \omega_1^2x_{11} &= f_1e^{i\omega_2T_0} + f_2e^{i3\omega_1T_0} + f_3e^{i3\omega_2T_0} + f_4e^{i(2\omega_2-\omega_1)T_0} \\ &+ f_5e^{i(\omega_1+2\omega_2)T_0} + f_6e^{i(2\omega_1-\omega_2)T_0} + f_7e^{i(2\omega_1+\omega_2)T_0} + cc, \end{aligned}$$

cuja solução geral é

$$x_{11} = B_1(T_1)e^{i\omega_1T_0} + \bar{B}_1(T_1)e^{-i\omega_1T_0} + x_{11p}, \quad (3.29)$$

onde

$$\begin{aligned} x_{11p} &= \lambda_1f_1e^{i\omega_2T_0} + \lambda_2f_2e^{i3\omega_1T_0} + \lambda_3f_3e^{i3\omega_2T_0} + \lambda_4f_4e^{i(2\omega_2-\omega_1)T_0} \\ &+ \lambda_5f_5e^{i(\omega_1+2\omega_2)T_0} + \lambda_6f_6e^{i(2\omega_1-\omega_2)T_0} + \lambda_7f_7e^{i(2\omega_1+\omega_2)T_0} + cc, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, & \lambda_2 &= -\frac{1}{8\omega_1^2}, & \lambda_3 &= \frac{1}{\omega_1^2 - 9\omega_2^2}, & \lambda_4 &= \frac{1}{\omega_1^2 - (2\omega_2 - \omega_1)^2}, \\ \lambda_5 &= \frac{1}{\omega_1^2 - (\omega_1 + 2\omega_2)^2}, & \lambda_6 &= \frac{1}{\omega_1^2 - (2\omega_1 - \omega_2)^2}, & \lambda_7 &= \frac{1}{\omega_1^2 - (2\omega_1 + \omega_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Substituindo (3.29) em (3.20), obtemos que o coeficiente de $e^{i\omega_2T_0}$ nessa equação é

$$-\Delta_2f_1 - 2i\omega_2\frac{dA_2}{dT_1} - 3\hat{\beta}_{23}A_2^2\bar{A}_2 - 6\hat{\beta}_{23}\Delta_1^2A_1\bar{A}_1A_2 - i\hat{\zeta}_3\omega_2A_2(T_1 - \epsilon\tau)e^{-i\omega_2\tau}.$$

Levando em consideração novamente a condição (2.29), é necessário que esse coeficiente seja identicamente nulo. Dessa forma, obtemos

$$2i\omega_2 \frac{dA_2}{dT_1} = -\Delta_2 f_1 - 3\widehat{\beta}_{23} A_2^2 \overline{A_2} - 6\widehat{\beta}_{23} \Delta_1^2 A_1 \overline{A_1} A_2 - i\widehat{\zeta}_3 \omega_2 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{-i\omega_2 \tau}. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.21) em (3.31) e multiplicando ambos os lados da equação resultante por $e^{-i\mu_2}$, obtemos

$$\dot{a}_2 + ia_2 \dot{\mu}_2 = h_1 a_{2\tau} \exp(\mu_{2\tau} - \mu_2 - \omega_2 \tau) + ih_2 a_2 + ih_3 a_2^3 + ih_4 a_1^2 a_2, \quad (3.32)$$

onde $a_{2\tau} = a_2(T_1 - \epsilon\tau)$, $\mu_{2\tau} = \mu_2(T_1 - \epsilon\tau)$ e

$$h_1 = -\frac{\Delta_2 \widehat{\zeta}_2 + \widehat{\zeta}_3}{2}, \quad h_2 = \frac{\Delta_2 \widehat{\alpha}_{21}}{2\omega_2},$$

$$h_3 = \frac{3(\Delta_2 \widehat{\alpha}_{23} + \widehat{\beta}_{23})}{8\omega_2}, \quad h_4 = \frac{3\Delta_1^2 (\Delta_2 \widehat{\alpha}_{23} + \widehat{\beta}_{23})}{4\omega_2}.$$

Finalmente, separando as partes real e imaginária em (3.32), obtemos

$$\dot{a}_2 = h_1 a_{2\tau} \cos(\mu_{2\tau} - \mu_2 - \omega_2 \tau), \quad (3.33)$$

$$a_2 \dot{\mu}_2 = h_1 a_{2\tau} \sin(\mu_{2\tau} - \mu_2 - \omega_2 \tau) + h_2 a_2 + h_3 a_2^3 + h_4 a_1^2 a_2. \quad (3.34)$$

3.3.1 Soluções Estacionárias

Nesta seção, estudamos as soluções estacionárias do sistema formado pelas equações (3.27), (3.28), (3.33) e (3.34).

Sejam então a_1 , γ_1 , a_2 , μ_2 funções constantes satisfazendo

$$e \sin \gamma_1 + g_1 a_1 + g_2 a_{1\tau} \cos(\gamma_{1\tau} - \gamma_1 + (\omega_1 + \epsilon\widehat{\sigma})\tau) = 0, \quad (3.35)$$

$$e \cos \gamma_1 + g_2 a_{1\tau} \sin(\gamma_{1\tau} - \gamma_1 + (\omega_1 + \epsilon\widehat{\sigma})\tau) + (g_3 + \widehat{\sigma}) a_1 + g_4 a_1 a_2^2 + g_5 a_1^3 = 0, \quad (3.36)$$

$$h_1 a_{2\tau} \cos(\mu_{2\tau} - \mu_2 - \omega_2 \tau) = 0, \quad (3.37)$$

$$h_1 a_{2\tau} \sin(\mu_{2\tau} - \mu_2 - \omega_2 \tau) + h_2 a_2 + h_3 a_2^3 + h_4 a_1^2 a_2 = 0. \quad (3.38)$$

Na sequência, consideramos separadamente os casos $a_2 = 0$ e $a_2 \neq 0$.

Caso 1: Se $a_2 = 0$, então as equações (3.35) e (3.36) assumem a forma

$$e \sin \gamma_1 + g_1 a_1 + g_2 a_1 \cos((\omega_1 + \epsilon\widehat{\sigma})\tau) = 0, \quad (3.39)$$

$$e \cos \gamma_1 + g_2 a_1 \sin((\omega_1 + \epsilon\widehat{\sigma})\tau) + (g_3 + \widehat{\sigma}) a_1 + g_5 a_1^3 = 0, \quad (3.40)$$

onde usamos que $a_{1\tau} = a_1$ e $\gamma_{1\tau} = \gamma_1$. Claramente, as equações (3.39) e (3.40) fornecem

$$\left[\left(g_1 + g_2 \cos \delta_1 \right)^2 + \left(g_3 + \hat{\sigma} + g_2 \sin \delta_1 + g_5 a_1^2 \right)^2 \right] a_1^2 = e^2, \quad (3.41)$$

$$\tan(\gamma_1) = \frac{g_1 + g_2 \cos \delta_1}{g_2 \sin \delta_1 + g_3 + \hat{\sigma} + g_5 a_1^2}, \quad (3.42)$$

onde $\delta_1 = (\omega_1 + \epsilon \hat{\sigma})\tau$.

Caso 2: Se $a_2 \neq 0$, então para que a equação (3.37) seja satisfeita é necessário que

$$\cos(\omega_2 \tau) = 0,$$

onde usamos que $a_{2\tau} = a_2$ e $\mu_{2\tau} = \mu_2$. Logo, concluímos que $\omega_2 \tau = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para algum número inteiro não negativo k . Para $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, as equações (3.35) e (3.36) fornecem

$$\left[\left(g_1 + g_2 \cos \left(\frac{(\omega_1 + \epsilon \hat{\sigma})(1 + 4n)\pi}{2\omega_2} \right) \right)^2 + \left(g_3 + \hat{\sigma} + g_2 \sin \left(\frac{(\omega_1 + \epsilon \hat{\sigma})(1 + 4n)\pi}{2\omega_2} \right) + g_4 a_2^2 + g_5 a_1^2 \right)^2 \right] a_1^2 = e^2. \quad (3.43)$$

Por sua vez, a equação (3.38) é equivalente a

$$-h_1 + h_2 + h_3 a_2^2 + h_4 a_1^2 = 0. \quad (3.44)$$

Analogamente, para $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, obtemos

$$\left[\left(g_1 + g_2 \cos \left(\frac{(\omega_1 + \epsilon \hat{\sigma})(3 + 4n)\pi}{2\omega_2} \right) \right)^2 + \left(g_3 + \hat{\sigma} + g_2 \sin \left(\frac{(\omega_1 + \epsilon \hat{\sigma})(3 + 4n)\pi}{2\omega_2} \right) + g_4 a_2^2 + g_5 a_1^2 \right)^2 \right] a_1^2 = e^2, \quad (3.45)$$

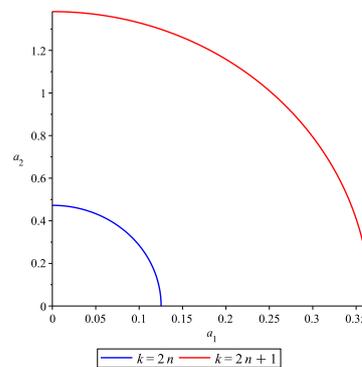
$$h_1 + h_2 + h_3 a_2^2 + h_4 a_1^2 = 0. \quad (3.46)$$

Conhecidos os valores dos parâmetros do sistema, as equações (3.44) e (3.46) fornecem limitantes superiores para a_1 e a_2 . Por exemplo, considerando os valores apresentados na Tabela 1, obtemos que $0 < a_1 < 0.12533$ e $0 < a_2 < 0.47264$ quando $\omega_2 \tau = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, e $0 < a_1 < 0.36646$ e $0 < a_2 < 1.382$ quando $\omega_2 \tau = \frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi$. A relação entre a_1 e a_2 em cada um dos casos é apresentada na Figura 5. Por outro lado, os sistemas (3.43)-(3.44) e (3.45)-(3.46) fornecem equações relacionando a_1 , f e σ para cada $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$.

Tabela 1 – Valores para os parâmetros do sistema.

Notação	Significado	Valor	Unidade
m_1	Massa do sistema principal	10	kg
m_2	Massa do absorvedor	1	kg
k_{11}	Constante linear da mola do sistema principal	6	N/m
k_{13}	Constante não linear cúbica do sistema principal	0.8	N/m
k_{21}	Constante linear da mola do absorvedor	0.4	N/m
k_{23}	Constante não linear cúbica da mola do absorvedor	0.1	N/m
c_1	Constante de amortecimento linear do sistema principal	0.8	Ns/m
c_2	Constante de amortecimento linear do absorvedor	0.1	Ns/m

Fonte: Autor

Figura 5 – Relação entre a_1 e a_2 para $k = 2n$ e $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

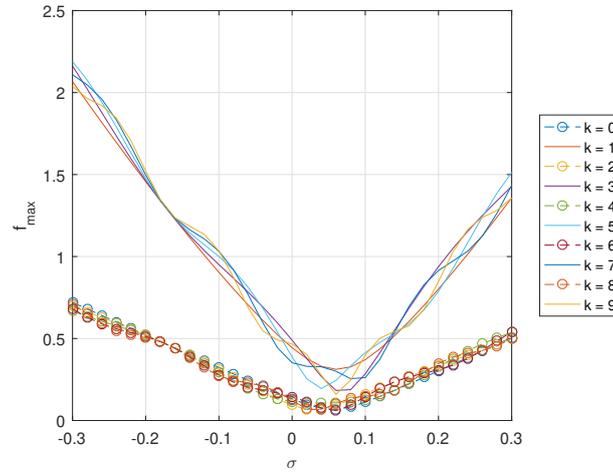
Fonte: Autor

Essas equações e os limitantes superiores para a_1 permitem obter o valor máximo de f para a existência de solução estacionária, para quaisquer σ e k . A relação entre esse valor máximo de f e σ , para $k = 0, \dots, 9$, é apresentada na Figura 6.

Por sua vez, considerando os valores apresentados na Tabela 2, temos que não existe solução estacionária quando $\omega_2\tau = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, e $0 < a_1 < 0.54272$ e $0 < a_2 < 0.92499$ quando $\omega_2\tau = \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$. Nesse caso, a relação entre a_1 e a_2 é apresentada na Figura 7. A relação entre o valor máximo de f para a existência de solução estacionária e σ , para $k = 2n + 1$, $n = 0, \dots, 9$, é apresentada na Figura 8.

3.3.2 Linearização do Sistema

Nesta seção, determinamos a linearização do sistema formado pelas equações (3.27), (3.28), (3.33) e (3.34) em torno de uma solução estacionária. Para tanto, seja $C = C([-\epsilon\tau, 0], \mathbb{R})$

Figura 6 – Valor máximo de f para a existência de solução estacionária.

Fonte: Autor

Tabela 2 – Valores para os parâmetros do sistema.

Notação	Significado	Valor	Unidade
m_1	Massa do sistema principal	10	kg
m_2	Massa do absorvedor	1.6	kg
k_{11}	Constante linear da mola do sistema principal	10	N/m
k_{13}	Constante não linear cúbica do sistema principal	0.4	N/m
k_{21}	Constante linear da mola do absorvedor	0.28	N/m
k_{23}	Constante não linear cúbica da mola do absorvedor	0.08	N/m
c_1	Constante de amortecimento linear do sistema principal	0.1	Ns/m
c_2	Constante de amortecimento linear do absorvedor	0.1	Ns/m

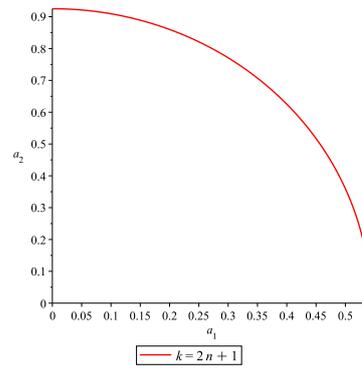
Fonte: Autor

com sua norma usual e considere as funções

$$\begin{aligned}
 f_1(\phi) &= g_1\phi_1(0) + g_2\phi_1(-\epsilon\tau) \cos(\phi_3(-\epsilon\tau) - \phi_3(0) + \delta_1) + e \sin(\phi_3(0)), \\
 f_2(\phi) &= h_1\phi_2(-\epsilon\tau) \cos(\phi_4(-\epsilon\tau) - \phi_4(0) - \omega_2\tau), \\
 f_3(\phi) &= g_2 \frac{\phi_1(-\epsilon\tau)}{\phi_1(0)} \sin(\phi_3(-\epsilon\tau) - \phi_3(0) + \delta_1) + g_3 + \hat{\sigma} + g_4[\phi_2(0)]^2 + g_5[\phi_1(0)]^2 \\
 &\quad + \frac{e}{\phi_1(0)} \cos(\phi_3(0)), \\
 f_4(\phi) &= h_1 \frac{\phi_2(-\epsilon\tau)}{\phi_2(0)} \sin(\phi_4(-\epsilon\tau) - \phi_4(0) - \omega_2\tau) + h_2 + h_3[\phi_2(0)]^2 + h_4[\phi_1(0)]^2,
 \end{aligned}$$

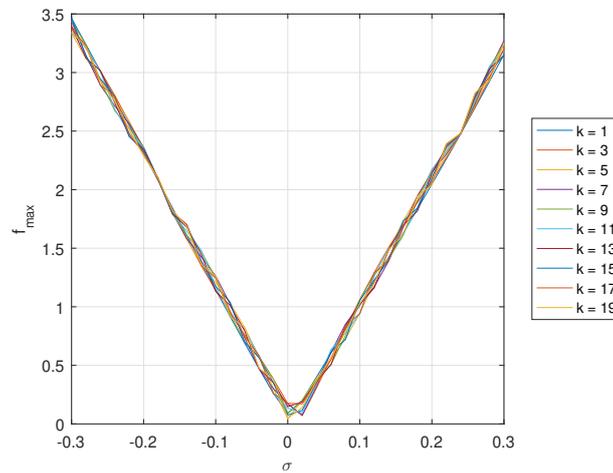
para $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$, $\phi_i \in C$, $i = 1, \dots, 4$, com $\phi_1(0) \neq 0$ e $\phi_2(0) \neq 0$, onde $\delta_1 = (\omega_1 + \epsilon\hat{\sigma})\tau$.

Figura 7 – Relação entre a_1 e a_2 para $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.



Fonte: Autor

Figura 8 – Valor máximo de f para a existência de solução estacionária.



Fonte: Autor

Observe que escrevendo $x = (a_1, a_2, \gamma_1, \mu_2)$ e $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, o sistema formado pelas equações (3.27), (3.28), (3.33) e (3.34) corresponde a

$$\dot{x}(T_1) = f(x_{T_1}). \quad (3.47)$$

onde $x_{T_1}(\theta) = x(T_1 + \theta)$, $\theta \in [-\epsilon\tau, 0]$.

Proposição 3.3.1. *Seja $x_0 = (a_{10}, a_{20}, \gamma_{10}, \mu_{20})$ uma solução estacionária de (3.47) e considere em C^4 a norma $\|\phi\| = \max_{i=1, \dots, 4} \|\phi_i\|_C$. Então, o sistema*

$$\dot{\eta}_1 = g_1 \eta_1 + [g_2 a_{10} \sin(\delta_1) + e \cos(\gamma_{10})] \eta_3 + g_2 \cos(\delta_1) \eta_{1\tau} - g_2 a_{10} \sin(\delta_1) \eta_{3\tau}, \quad (3.48)$$

$$\dot{\eta}_2 = -h_1 a_{20} \sin(\omega_2 \tau) \eta_4 + h_1 \cos(\omega_2 \tau) \eta_{2\tau} + h_1 a_{20} \sin(\omega_2 \tau) \eta_{4\tau}, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_3 &= \left[-g_2 a_{10}^{-1} \sin(\delta_1) + 2g_5 a_{10} - e a_{10}^{-2} \cos(\gamma_{10}) \right] \eta_1 + 2g_4 a_{20} \eta_2 \\ &\quad - \left[g_2 \cos(\delta_1) + e a_{10}^{-1} \sin(\gamma_{10}) \right] \eta_3 + g_2 a_{10}^{-1} \sin(\delta_1) \eta_{1\tau} + g_2 \cos(\delta_1) \eta_{3\tau},\end{aligned}\quad (3.50)$$

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_4 &= 2h_4 a_{10} \eta_1 + \left[2h_3 a_{20} + h_1 a_{20}^{-1} \sin(\omega_2 \tau) \right] \eta_2 - h_1 \cos(\omega_2 \tau) \eta_4 \\ &\quad - h_1 a_{20}^{-1} \sin(\omega_2 \tau) \eta_{2\tau} + h_1 \cos(\omega_2 \tau) \eta_{4\tau}.\end{aligned}\quad (3.51)$$

é uma linearização do sistema (3.47) em torno de x_0 , onde $\eta_{i\tau}(T_1) = \eta_i(T_1 - \epsilon\tau)$, $i = 1, \dots, 4$.

Demonstração. Usando a fórmula (2.9), obtemos que as derivadas de Gâteaux de f_1, \dots, f_4 em $\phi_0 = x_{0T_1}$ são

$$\begin{aligned}df_1(\phi_0, \eta) &= g_1 \eta_1(0) + \left[g_2 a_{10} \sin(\delta_1) + e \cos(\gamma_{10}) \right] \eta_3(0) + g_2 \cos(\delta_1) \eta_1(-\epsilon\tau) \\ &\quad - g_2 a_{10} \sin(\delta_1) \eta_3(-\epsilon\tau),\end{aligned}$$

$$df_2(\phi_0, \eta) = -h_1 a_{20} \sin(\omega_2 \tau) \eta_4(0) + h_1 \cos(\omega_2 \tau) \eta_2(-\epsilon\tau) + h_1 a_{20} \sin(\omega_2 \tau) \eta_4(-\epsilon\tau),$$

$$\begin{aligned}df_3(\phi_0, \eta) &= \left[-g_2 a_{10}^{-1} \sin(\delta_1) + 2g_5 a_{10} - e a_{10}^{-2} \cos(\gamma_{10}) \right] \eta_1(0) + 2g_4 a_{20} \eta_2(0) - \left[g_2 \cos(\delta_1) \right. \\ &\quad \left. + e a_{10}^{-1} \sin(\gamma_{10}) \right] \eta_3(0) + g_2 a_{10}^{-1} \sin(\delta_1) \eta_1(-\epsilon\tau) + g_2 \cos(\delta_1) \eta_3(-\epsilon\tau),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}df_4(\phi_0, \eta) &= 2h_4 a_{10} \eta_1(0) + \left[2h_3 a_{20} + h_1 a_{20}^{-1} \sin(\omega_2 \tau) \right] \eta_2(0) - h_1 \cos(\omega_2 \tau) \eta_4(0) \\ &\quad - h_1 a_{20}^{-1} \sin(\omega_2 \tau) \eta_2(-\epsilon\tau) + h_1 \cos(\omega_2 \tau) \eta_4(-\epsilon\tau),\end{aligned}$$

para todo $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \in C^4$.

Claramente, $\eta \mapsto df_i(\phi_0, \eta)$, $i = 1, \dots, 4$, são operadores lineares limitados. Além disso, usando que x_0 é solução estacionária, obtemos

$$(1) \quad \frac{|f_1(\phi_0 + \eta) - f_1(\phi_0) - df_1(\phi_0, \eta)|}{\|\eta\|} \leq \sum_{i=1}^5 T_{1i}(\eta), \text{ onde}$$

$$T_{11}(\eta) = |g_2 (a_{10} + \eta_1(-\epsilon\tau)) \cos(\delta_1)| \frac{|\cos(\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{12}(\eta) = |g_2 a_{10} \sin(\delta_1)| \frac{|\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0) - \sin(\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0))|}{\|\eta\|},$$

$$T_{13}(\eta) = |g_2 \sin(\delta_1)| \frac{|\eta_1(-\epsilon\tau)|}{\|\eta\|} |\sin(\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0))|,$$

$$T_{14}(\eta) = |e \sin(\gamma_{10})| \frac{|\cos(\eta_3(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{15}(\eta) = |e \cos(\gamma_{10})| \frac{|\sin(\eta_3(0)) - \eta_3(0)|}{\|\eta\|}.$$

$$(2) \quad \frac{|f_2(\phi_0 + \eta) - f_2(\phi_0) - df_2(\phi_0, \eta)|}{\|\eta\|} \leq \sum_{i=1}^3 T_{2i}(\eta), \text{ onde}$$

$$T_{21}(\eta) = |h_1 \cos(\omega_2 \tau)| \frac{|\eta_2(-\epsilon \tau)|}{\|\eta\|} |\cos(\eta_4(-\epsilon \tau) - \eta_4(0)) - 1|,$$

$$T_{22}(\eta) = |h_1 a_{20} \sin(\omega_2 \tau)| \frac{|\sin(\eta_4(-\epsilon \tau) - \eta_4(0)) - (\eta_4(-\epsilon \tau) - \eta_4(0))|}{\|\eta\|},$$

$$T_{23}(\eta) = |h_1 \sin(\omega_2 \tau)| \frac{|\eta_2(-\epsilon \tau)|}{\|\eta\|} |\sin(\eta_4(-\epsilon \tau) - \eta_4(0))|.$$

$$(3) \quad \frac{|f_3(\phi_0 + \eta) - f_3(\phi_0) - df_3(\phi_0, \eta)|}{\|\eta\|} \leq \sum_{i=1}^{10} T_{3i}(\eta), \text{ onde}$$

$$T_{31}(\eta) = |g_4| \frac{[\eta_2(0)]^2}{\|\eta\|},$$

$$T_{32}(\eta) = |g_5| \frac{[\eta_1(0)]^2}{\|\eta\|},$$

$$T_{33}(\eta) = \left| g_2 \frac{a_{10} + \eta_1(-\epsilon \tau)}{a_{10} + \eta_1(0)} \sin(\delta_1) \right| \frac{|\cos(\eta_3(-\epsilon \tau) - \eta_3(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{34}(\eta) = \left| g_2 \frac{\sin(\delta_1)}{a_{10} (a_{10} + \eta_1(0))} \right| \frac{|\eta_1(0)|}{\|\eta\|} |\eta_1(0) - \eta_1(-\epsilon \tau)|,$$

$$T_{35}(\eta) = \left| g_2 \frac{a_{10} + \eta_1(-\epsilon \tau)}{a_{10} + \eta_1(0)} \cos(\delta_1) \right| \frac{|\eta_3(-\epsilon \tau) - \eta_3(0) - \sin(\eta_3(-\epsilon \tau) - \eta_3(0))|}{\|\eta\|},$$

$$T_{36}(\eta) = \left| g_2 \frac{\cos(\delta_1)}{a_{10} (a_{10} + \eta_1(0))} \right| \frac{|\eta_1(-\epsilon \tau) - \eta_1(0)|}{\|\eta\|} |\eta_3(-\epsilon \tau) - \eta_3(0)|,$$

$$T_{37}(\eta) = \left| \frac{e \cos(\gamma_{10})}{a_{10}^2 (a_{10} + \eta_1(0))} \right| \frac{[\eta_1(0)]^2}{\|\eta\|},$$

$$T_{38}(\eta) = \left| \frac{e \cos(\gamma_{10})}{a_{10} + \eta_1(0)} \right| \frac{|\cos(\eta_3(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{39}(\eta) = \left| \frac{e \sin(\gamma_{10})}{a_{10} (a_{10} + \eta_1(0))} \right| \frac{|\eta_1(0)|}{\|\eta\|} |\eta_3(0)|,$$

$$T_{310}(\eta) = \left| \frac{e \sin(\gamma_{10})}{a_{10} + \eta_1(0)} \right| \frac{|\eta_3(0) - \sin(\eta_3(0))|}{\|\eta\|}.$$

$$(4) \quad \frac{|f_4(\phi_0 + \eta) - f_4(\phi_0) - df_4(\phi_0, \eta)|}{\|\eta\|} \leq \sum_{i=1}^6 T_{4i}(\eta), \text{ onde}$$

$$\begin{aligned}
T_{41}(\eta) &= |h_3| \frac{[\eta_2(0)]^2}{\|\eta\|}, \\
T_{42}(\eta) &= |h_4| \frac{[\eta_1(0)]^2}{\|\eta\|}, \\
T_{43}(\eta) &= \left| h_1 \frac{a_{20} + \eta_2(-\epsilon\tau)}{a_{20} + \eta_2(0)} \sin(\omega_2\tau) \right| \frac{|1 - \cos(\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0))|}{\|\eta\|}, \\
T_{44}(\eta) &= \left| h_1 \frac{\sin(\omega_2\tau)}{a_{20} + \eta_2(0)} \right| \frac{|\eta_2(0)|}{\|\eta\|} |\eta_2(-\epsilon\tau) - \eta_2(0)|, \\
T_{45}(\eta) &= \left| h_1 \frac{a_{20} + \eta_2(-\epsilon\tau)}{a_{20} + \eta_2(0)} \cos(\omega_2\tau) \right| \frac{|\sin(\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)) - (\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0))|}{\|\eta\|}, \\
T_{46}(\eta) &= \left| h_1 \frac{\cos(\omega_2\tau)}{a_{20} + \eta_2(0)} \right| \frac{|\eta_2(-\epsilon\tau) - \eta_2(0)|}{\|\eta\|} |\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)|.
\end{aligned}$$

Como todo $T_{ij}(\eta)$ tende a zero quando $\eta \rightarrow 0$, temos que $\eta \mapsto df_i(\phi_0, \eta)$ é a derivada de Fréchet de f_i em ϕ_0 , para cada $i = 1, \dots, 4$. Segue que

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= df_1(\phi_0, \eta_{T_1}), \\
\dot{\eta}_2 &= df_2(\phi_0, \eta_{T_1}), \\
\dot{\eta}_3 &= df_3(\phi_0, \eta_{T_1}), \\
\dot{\eta}_4 &= df_4(\phi_0, \eta_{T_1})
\end{aligned}$$

é a linearização do sistema do sistema (3.47) em torno de ϕ_0 . □

3.3.3 Quasi-polinômio Característico

Nesta seção, determinamos o quasi-polinômio característico do sistema (3.48)-(3.51), bem como as funções R e S definidas no Teorema 2.6.2.

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados das equações (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51), obtemos

$$(s + b_{11} + b_{12}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_1 + (b_{13} + b_{14}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_3 = \eta_1(0), \quad (3.52)$$

$$(s + b_{21}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_2 + (b_{22} + b_{23}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_4 = \eta_2(0), \quad (3.53)$$

$$(b_{31} + b_{32}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_1 + b_{33}\hat{\eta}_2 + (s + b_{34} + b_{35}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_3 = \eta_3(0), \quad (3.54)$$

$$b_{41}\hat{\eta}_1 + (b_{42} + b_{43}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_2 + (s + b_{44} + b_{45}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_4 = \eta_4(0), \quad (3.55)$$

onde $\hat{\eta}_i = \mathcal{L}\{\eta_i\}$, $i = 1, \dots, 4$, e

$$\begin{aligned}
b_{11} &= -g_1, & b_{12} &= -g_2 \cos(\delta_1), & b_{13} &= -g_2 a_{10} \sin(\delta_1) - e \cos(\gamma_{10}), \\
b_{14} &= g_2 a_{10} \sin(\delta_1), & b_{21} &= -h_1 \cos(\omega_2 \tau), & b_{22} &= h_1 a_{20} \sin(\omega_2 \tau), \\
b_{23} &= -b_{22}, & b_{31} &= g_2 a_{10}^{-1} \sin(\delta_1) - 2g_5 a_{10} + e a_{10}^{-2} \cos(\gamma_{10}), \\
b_{32} &= -g_2 a_{10}^{-1} \sin(\delta_1), & b_{33} &= -2g_4 a_{20}, & b_{34} &= g_2 \cos(\delta_1) + e a_{10}^{-1} \sin(\gamma_{10}), \\
b_{35} &= -g_2 \cos(\delta_1), & b_{41} &= -2h_4 a_{10}, & b_{42} &= -2h_3 a_{20} - h_1 a_{20}^{-1} \sin(\omega_2 \tau), \\
b_{43} &= h_1 a_{20}^{-1} \sin(\omega_2 \tau), & b_{44} &= h_1 \cos(\omega_2 \tau), & b_{45} &= -b_{44}.
\end{aligned}$$

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (3.52)-(3.55), concluímos que o quasi-polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned}
p(s) &= s^4 + (c_{31} + c_{32} e^{-\epsilon \tau s}) s^3 + (c_{21} + c_{22} e^{-\epsilon \tau s} + c_{23} e^{-2\epsilon \tau s}) s^2 \\
&+ (c_{11} + c_{12} e^{-\epsilon \tau s} + c_{13} e^{-2\epsilon \tau s} + c_{14} e^{-3\epsilon \tau s}) s \\
&+ (c_{01} + c_{02} e^{-\epsilon \tau s} + c_{03} e^{-2\epsilon \tau s} + c_{04} e^{-3\epsilon \tau s} + c_{05} e^{-4\epsilon \tau s}), \tag{3.56}
\end{aligned}$$

onde os coeficientes c_{ij} são dados no Apêndice A. É interessante observar que esses coeficientes dependem dos parâmetros do sistema, inclusive do atraso no tempo. Por sua vez, as funções $R(\omega) = \Re(p(i\omega))$ e $S(\omega) = \Im(p(i\omega))$ são dadas por

$$\begin{aligned}
R(\omega) &= \omega^4 - c_{32} \sin(\epsilon \tau \omega) \omega^3 - (c_{21} + c_{22} \cos(\epsilon \tau \omega) + c_{23} \cos(2\epsilon \tau \omega)) \omega^2 \\
&+ (c_{12} \sin(\epsilon \tau \omega) + c_{13} \sin(2\epsilon \tau \omega) + c_{14} \sin(3\epsilon \tau \omega)) \omega + c_{01} \\
&+ c_{02} \cos(\epsilon \tau \omega) + c_{03} \cos(2\epsilon \tau \omega) + c_{04} \cos(3\epsilon \tau \omega) + c_{05} \cos(4\epsilon \tau \omega), \tag{3.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= -(c_{31} + c_{32} \cos(\epsilon \tau \omega)) \omega^3 + (c_{22} \sin(\epsilon \tau \omega) + c_{23} \sin(2\epsilon \tau \omega)) \omega^2 \\
&+ (c_{11} + c_{12} \cos(\epsilon \tau \omega) + c_{13} \cos(2\epsilon \tau \omega) + c_{14} \cos(3\epsilon \tau \omega)) \omega \\
&- c_{02} \sin(\epsilon \tau \omega) - c_{03} \sin(2\epsilon \tau \omega) - c_{04} \sin(3\epsilon \tau \omega) - c_{05} \sin(4\epsilon \tau \omega). \tag{3.58}
\end{aligned}$$

3.3.4 Resultados Numéricos e Discussão

Nesta seção, analisamos a influência de parâmetros, especialmente do atraso no tempo, sobre o comportamento dinâmico do sistema no caso de ressonância primária $\Omega \approx \omega_1$. Para realizar essa análise, usamos os resultados obtidos nas seções anteriores.

3.3.4.1 Respostas no tempo do sistema principal e do absorvedor

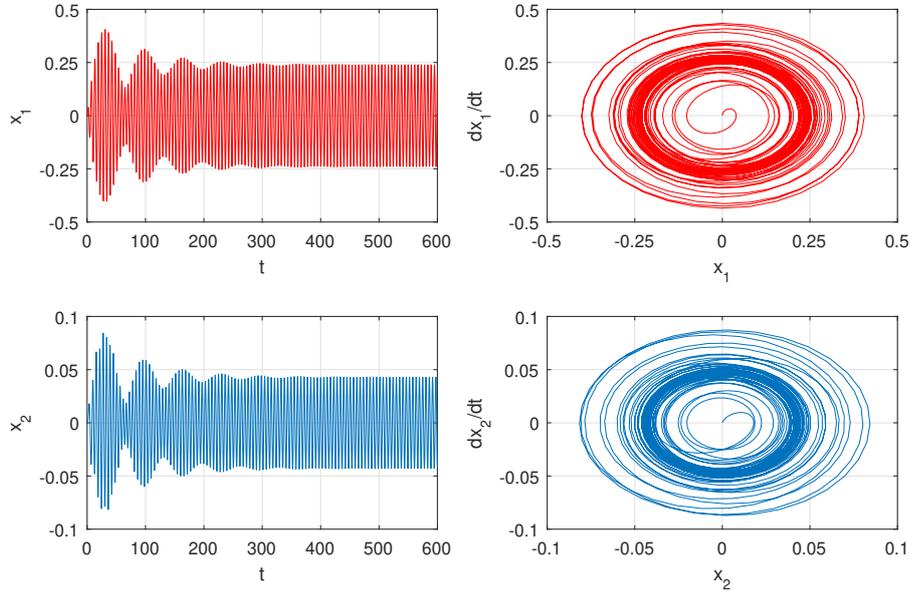
Começamos analisando gráficos dos deslocamentos de ambos o sistema principal e o absorvedor e planos de fase desses sistemas, obtidos através das funções `ode45` e `dde23` do MATLAB. Essas funções foram usadas considerando as equações de movimento (3.4) e (3.5). Para os parâmetros m_i , k_{ij} e c_i , $i = 1, 2$, $j = 1, 3$, foram adotados os valores apresentados na Tabela 2. Além disso, foram tomados $f = 0.5$ e $\Omega = \omega_1 + \sigma$. Para o atraso no tempo, foram considerados diferentes valores, os quais são especificados no decorrer do texto.

Nas Figuras 9 e 10, são apresentadas as respostas no tempo do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 0$. Na primeira figura, foi tomado $\sigma = 0.1$ e na segunda, $\sigma = 0.01$. É possível observar um aumento significativo da amplitude de oscilação tanto do sistema primário quanto do secundário no caso $\sigma = 0.01$ em relação ao caso $\sigma = 0.1$. Esse aumento é esperado, uma vez que quanto mais próximo de zero está o parâmetro σ , mais próximo da frequência natural ω_1 está a frequência Ω da excitação externa. Além disso, tanto para $\sigma = 0.1$ quanto para $\sigma = 0.01$, cada sistema alcança o equilíbrio após certo tempo e quando isso ocorre a amplitude é aproximadamente a amplitude da solução perturbativa correspondente à solução estacionária dada por $a_1 = 0.25553$, $a_2 = 0$, $\gamma_1 = -0.11451$, μ_2 arbitrário, quando $\sigma = 0.1$, e por $a_1 = 1.1373$, $a_2 = 0$, $\gamma_1 = 0.53351$, μ_2 arbitrário, quando $\sigma = 0.01$.

As Figuras 11, 12 e 13 mostram a evolução no tempo de ambos os sistemas primário e secundário quando $\tau = 0.5, 1$ e 2 , respectivamente. Foi tomado $\sigma = 0.1$. Essas figuras indicam que as respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 0.5$ e $\tau = 1$ são semelhantes às respostas desses sistemas quando $\tau = 0$, com pequeno aumento da amplitude de oscilação de cada sistema conforme τ cresce entre os valores considerados. Esse aumento é consistente com o aumento da amplitude da aproximação perturbativa correspondente à solução estacionária dada por $a_1 = 0.26475$, $\gamma_1 = -0.10882$, $a_2 = 0$, μ_2 arbitrário, quando $\tau = 0.5$, e $a_1 = 0.27214$, $\gamma_1 = -0.084626$, $a_2 = 0$, μ_2 arbitrário, quando $\tau = 1$. Para $\tau = 2$, a amplitude de oscilação de cada sistema também se aproxima após certo tempo da amplitude da solução perturbativa que corresponde ao equilíbrio. No entanto, esse processo ocorre de forma significativamente mais lenta para esse valor de τ .

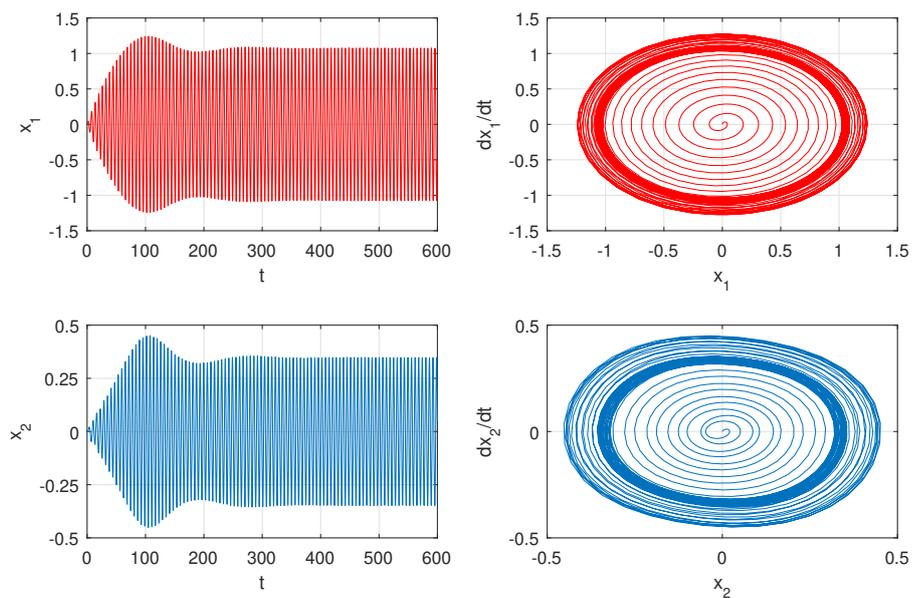
Nas Figuras 14 e 15, são apresentadas as respostas no tempo do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$. Nessas figuras, foram consideradas condições iniciais próximas das soluções perturbativas correspondentes às soluções estacionárias quando $a_2 = 0$ e $a_2 \neq 0$.

Figura 9 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 0$, $\sigma = 0.1$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.



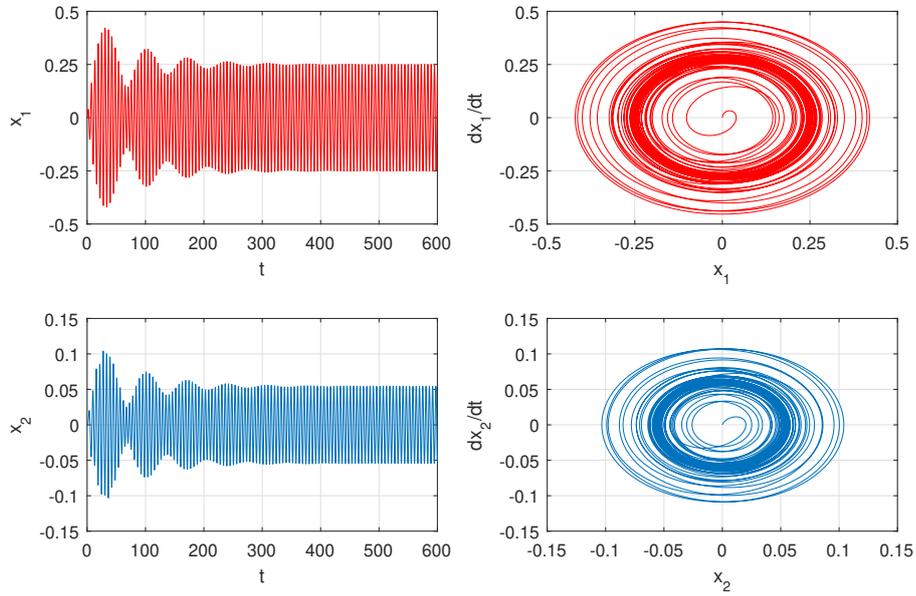
Fonte: Autor

Figura 10 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 0$, $\sigma = 0.01$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.



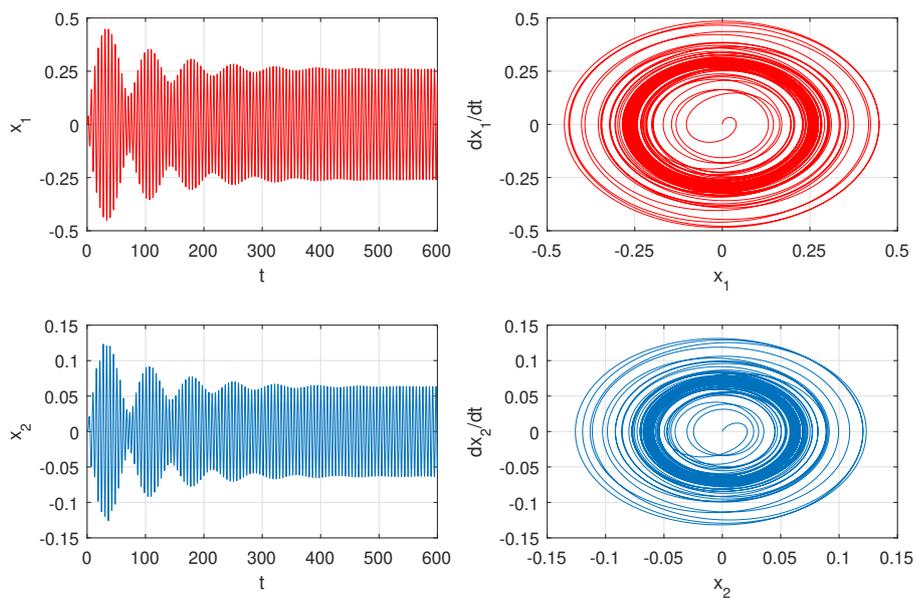
Fonte: Autor

Figura 11 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 0.5$, $\sigma = 0.1$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.



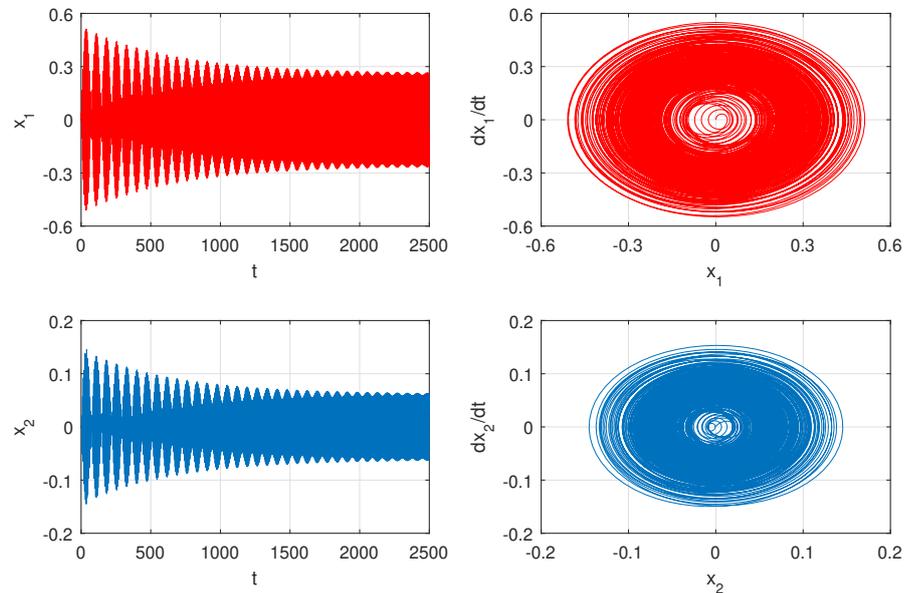
Fonte: Autor

Figura 12 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 1$, $\sigma = 0.1$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.



Fonte: Autor

Figura 13 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 2$, $\sigma = 0.1$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.



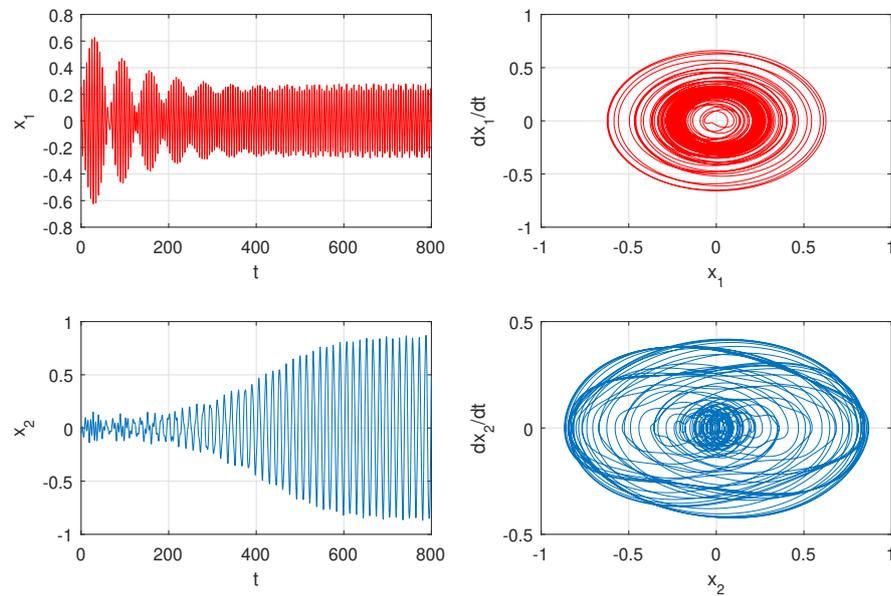
Fonte: Autor

A primeira figura corresponde ao caso em que $a_2 = 0$. Para obter essa figura, consideramos $x_1(t) = \phi_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \phi_2(t)$, $x_2(t) = \phi_3(t)$, $\dot{x}_2(t) = \phi_4(t)$, $t \in \left[-\frac{3\pi}{2\omega_2}, 0\right]$, onde $\phi_1(t) = a_1 \cos((\sigma + \omega_1)t - \gamma_1)$, $\phi_2(t) = -a_1(\sigma + \omega_1) \sin((\sigma + \omega_1)t - \gamma_1)$, $\phi_3(t) = \Delta_2 a_1 \cos((\sigma + \omega_1)t - \gamma_1)$ e $\phi_4(t) = -\Delta_2 a_1(\sigma + \omega_1) \sin((\sigma + \omega_1)t - \gamma_1)$, com $a_1 = 0.26$ e $\gamma_1 = -0.11$. Por sua vez, a segunda figura corresponde ao caso em que $a_2 \neq 0$. Nessa figura, consideramos $x_1(t) = \psi_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \psi_2(t)$, $x_2(t) = \psi_3(t)$, $\dot{x}_2(t) = \psi_4(t)$, $t \in \left[-\frac{3\pi}{2\omega_2}, 0\right]$, onde $\psi_1(t) = a_1 \cos((\sigma + \omega_1)t - \gamma_1)$, $\psi_2(t) = -a_1(\sigma + \omega_1) \sin((\sigma + \omega_1)t - \gamma_1)$, $\psi_3(t) = a_2 \cos(\mu_2 + \omega_2 t) + \Delta_2 a_1 \cos((\sigma + \omega_1)t - \gamma_1)$ e $\psi_4(t) = -a_2 \omega_2 \sin(\mu_2 + \omega_2 t) - \Delta_2 a_1(\sigma + \omega_1) \sin((\sigma + \omega_1)t - \gamma_1)$, com $a_1 = 0.27$ e $\gamma_1 = -0.12$, $a_2 = 0.8$, $\mu_2 = 0$. Em ambas as figuras, foi tomado $\sigma = 0.1$. O sistema principal se comporta de forma semelhante nos dois casos. O mesmo não ocorre com o absorvedor. Embora em ambos os casos, o equilíbrio seja alcançado, no primeiro caso isso ocorre de forma mais lenta.

3.3.4.2 Soluções estacionárias

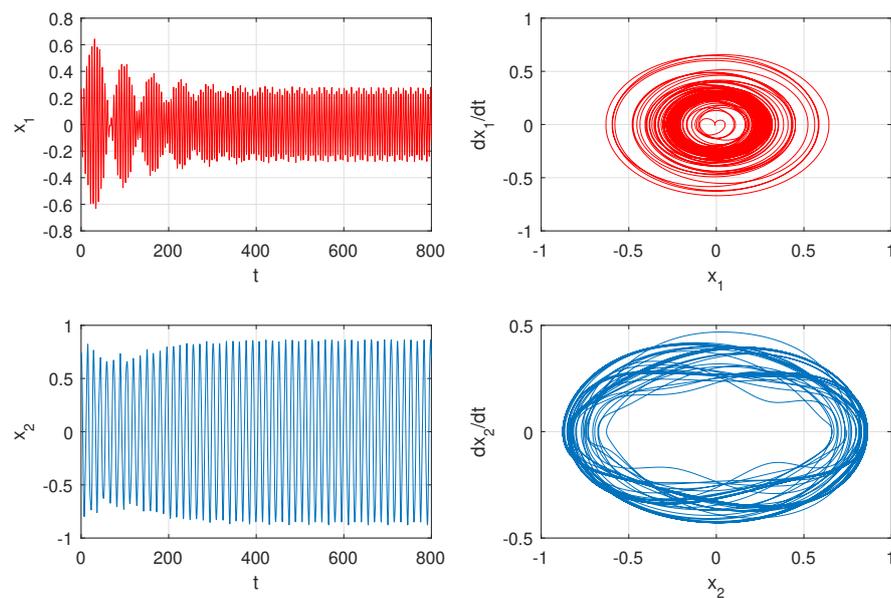
Nesta seção, uma análise paramétrica das soluções estacionárias é efetuada. Para tanto, são apresentados gráficos com respostas de frequência e de amplitude da excitação externa. Esses gráficos foram obtidos através dos sistemas apresentados na Seção 3.3.1. A menos que

Figura 14 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$, $\sigma = 0.1$, $x_1(t) = \phi_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \phi_2(t)$, $x_2(t) = \phi_3(t)$, $\dot{x}_2(t) = \phi_4(t)$, $t \in \left[-\frac{3\pi}{2\omega_2}, 0\right]$.



Fonte: Autor

Figura 15 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$, $\sigma = 0.1$, $x_1(t) = \psi_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \psi_2(t)$, $x_2(t) = \psi_3(t)$, $\dot{x}_2(t) = \psi_4(t)$, $t \in \left[-\frac{3\pi}{2\omega_2}, 0\right]$.

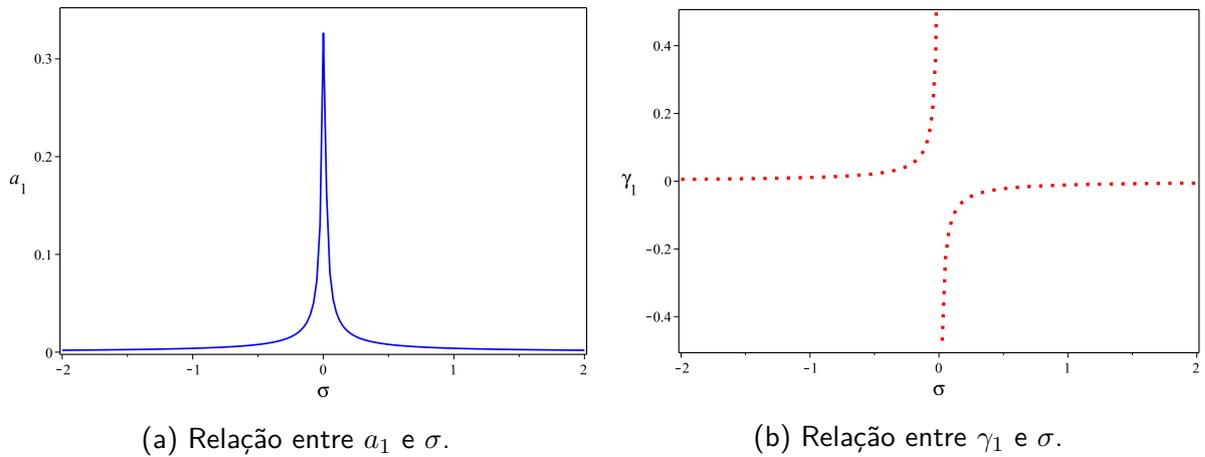


Fonte: Autor

mencionado o contrário, consideramos $f = 0.08$ e adotamos os valores apresentados na Tabela 2 para os parâmetros m_i , k_{ij} e c_i , $i = 1, 2$, $j = 1, 3$.

As Figuras 16, 17, 18, 19 e 20 correspondem ao caso em que $a_2 = 0$. Na Figura 16, são apresentadas curvas de resposta de frequência do sistema principal quando $\tau = 0$. É possível observar que a amplitude de oscilação é maior para valores de σ em uma vizinhança de zero, o que é esperado, uma vez que a frequência da excitação externa está próxima da frequência natural ω_1 quando σ está próximo de zero. Por sua vez, a relação entre γ_1 e σ apresenta uma descontinuidade quando $\sigma \approx 0$. Essa descontinuidade é consequência da equação (3.42). Para analisar a influência dos parâmetros m_2 , k_{21} , k_{23} e c_2 sobre a resposta do sistema principal, consideramos valores distintos para esses parâmetros nos gráficos apresentados na Figura 17. Como pode ser observado, a amplitude sofre variação moderada conforme a massa m_2 e a constante de rigidez linear k_{21} variam, a variação é pequena à medida que a constante de rigidez não linear k_{23} percorre os valores considerados e é significativa conforme o coeficiente de amortecimento c_2 varia. Essa variação é explicada pelo fato de que os coeficientes da equação (3.41) dependem desses parâmetros, conforme (3.26), (3.6) e (3.3). Levando em consideração essa dependência, a equação (3.41) permite obter a relação entre a amplitude a_1 e cada parâmetro do absorvedor para quaisquer σ e τ fixos. Por exemplo, para $\sigma = 0$ e $\tau = 1$, a relação entre a_1 e m_2 é apresentada na Figura 18. Para os parâmetros considerados, é obtido que o valor mínimo da amplitude de oscilação do sistema principal é aproximadamente 0.002 e esse valor é atingido quando $m_2 = 0.275$. Os efeitos da variação do atraso no tempo sobre a resposta do sistema principal podem ser examinados por meio da Figura 19. Nessa figura, foram considerados os seguintes valores para τ : 0, 0.5, 1, 2 e 4. Os demais parâmetros, com exceção de σ , foram mantidos fixos. É obtido que conforme σ varia, $\min_{\sigma, \tau=0,0.5,1,2,4} a_1$ é atingido para valores distintos de τ . Por exemplo, para $\sigma = 0.05$, a amplitude mínima é atingida quando $\tau = 4$. Por sua vez, para $\sigma = -0.05$, isso ocorre quando $\tau = 2$. Essa observação é confirmada pela Tabela 3, que apresenta os valores da amplitude a_1 para diferentes valores de σ e τ . Assim, o atraso no tempo é um parâmetro útil a ser considerado em projetos. A relação entre a_1 e τ para valores distintos de σ é apresentada na Figura 20a. Essa figura indica que a variação da amplitude conforme τ varia é maior quando parâmetro σ está próximo de zero, o que pode ser confirmado observando a Figura 19a. Por sua vez, a relação entre a amplitude de oscilação do sistema principal e a amplitude da excitação externa é apresentada na Figura 20b. Nessa figura, foi tomado $\sigma = 0.1$. Além disso, foram adotados valores distintos para o

Figura 16 – Curvas de resposta de frequência do sistema principal quando $\tau = 0$.



Fonte: Autor

Tabela 3 – Valor da amplitude de oscilação do sistema principal para diferentes valores de σ e τ .

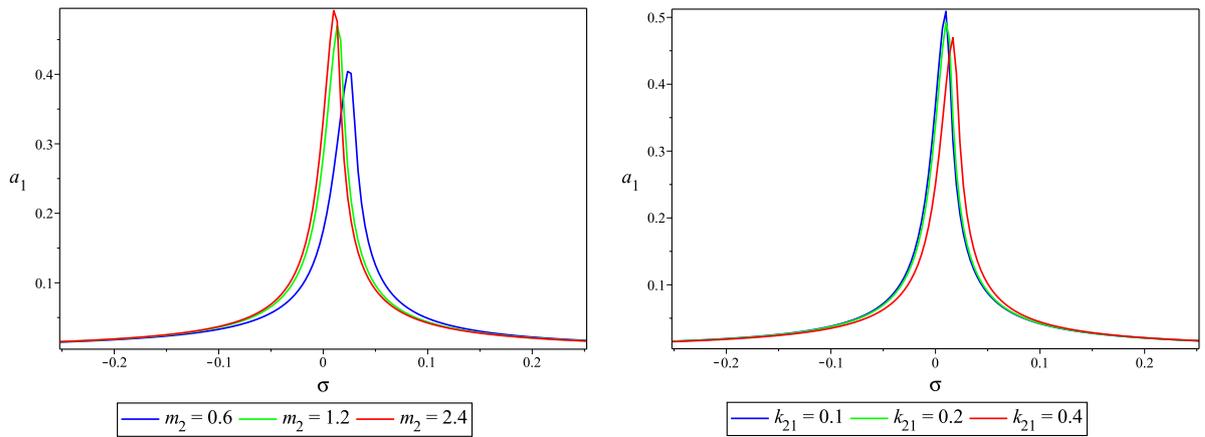
τ	Valor de a_1				
	$\sigma = -0.05$	$\sigma = -0.025$	$\sigma = 0$	$\sigma = 0.025$	$\sigma = 0.05$
0	0.072957	0.1304	0.32632	0.16244	0.081665
0.5	0.069612	0.12082	0.30805	0.18678	0.087428
1	0.067456	0.11549	0.30815	0.22017	0.092887
2	0.067277	0.11692	0.35731	0.24986	0.094124
4	0.080484	0.16434	0.63377	0.14658	0.075125

Fonte: Autor

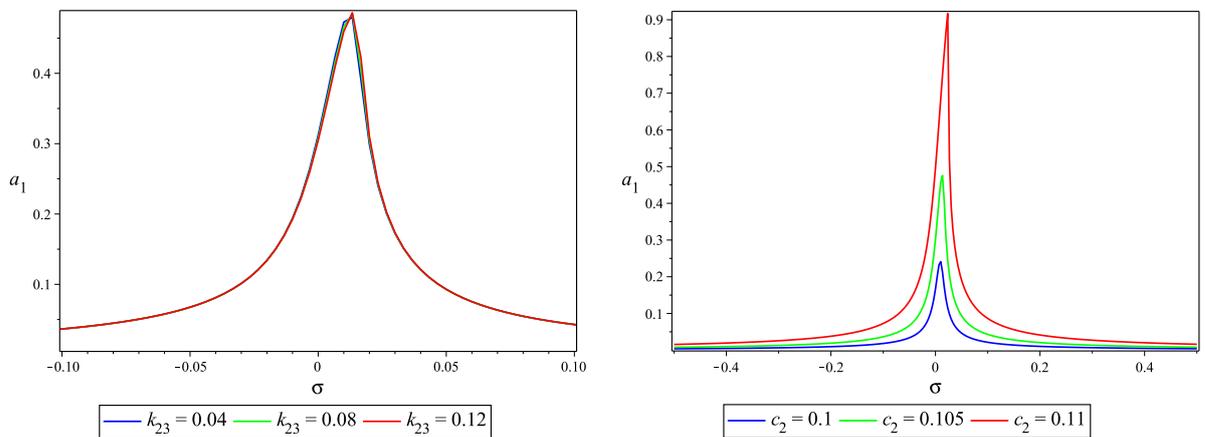
atraso no tempo. Como pode ser observado, a relação é aproximadamente linear pelo menos para os parâmetros considerados.

As Figuras 21, 22, 23, 24 e 25 correspondem ao caso em que $a_2 \neq 0$. A Figura 21 apresenta as respostas de frequência do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$. Como no caso em que $a_2 = 0$, a amplitude de oscilação do sistema principal é maior para valores de σ próximos de zero. Essa relação é invertida para o absorvedor, isto é, a amplitude de oscilação do absorvedor é menor para valores de σ próximos de zero. Essa inversão segue da equação (3.46). A Figura 22 mostra curvas de resposta de frequência do sistema principal para valores distintos dos parâmetros m_2, k_{21}, k_{23} e c_2 . É possível observar que a amplitude de oscilação do sistema principal varia de forma significativa com a variação dos parâmetros do absorvedor, exceto de k_{23} . Como no caso anterior, isso ocorre em virtude da dependência dos coeficientes das equações (3.45) e (3.46) em relação a esses parâmetros. A relação entre a amplitude a_1

Figura 17 – Curvas de resposta de frequência do sistema principal para $\tau = 1$.



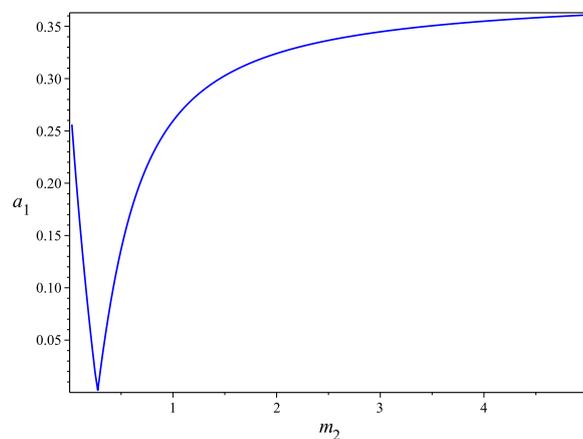
(a) Resposta de frequência para valores distintos de m_2 . (b) Resposta de frequência para valores distintos de k_{21} .



(c) Resposta de frequência para valores distintos de k_{23} . (d) Resposta de frequência para valores distintos de c_2 .

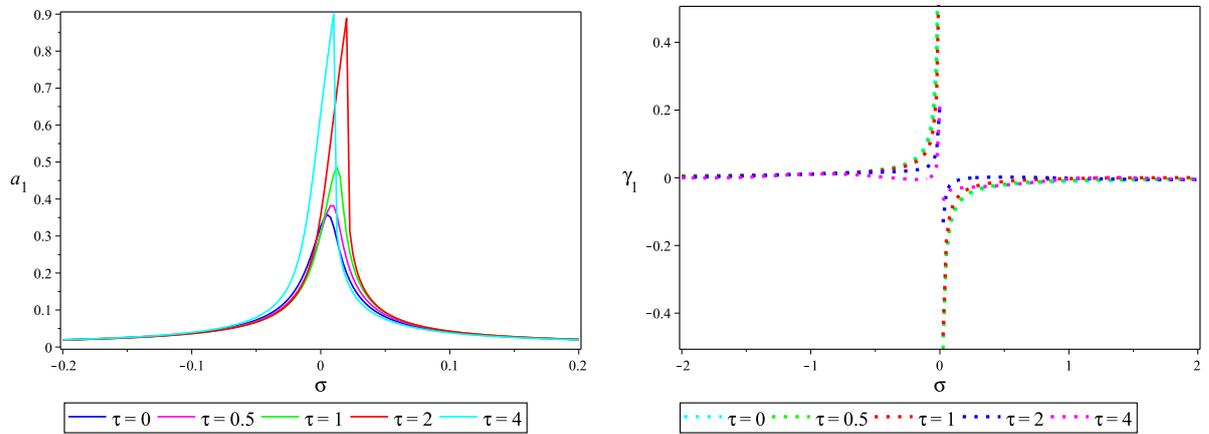
Fonte: Autor

Figura 18 – Relação entre a amplitude de oscilação do sistema principal e a massa do absorvedor para $\sigma = 0$ e $\tau = 1$.



Fonte: Autor

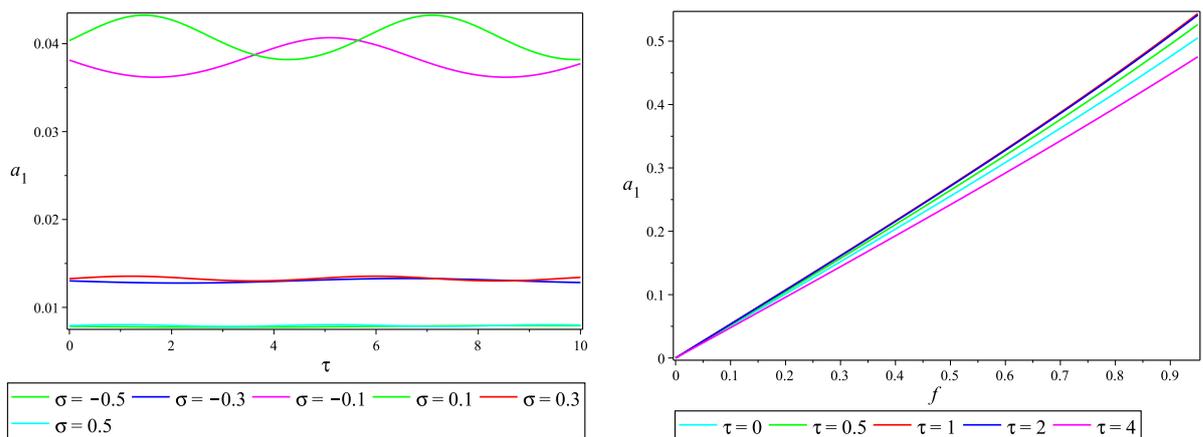
Figura 19 – Curvas de resposta de frequência para valores distintos do atraso no tempo τ .



(a) Relação entre a_1 e σ para valores distintos do atraso no tempo. (b) Relação entre γ_1 e σ para valores distintos do atraso no tempo.

Fonte: Autor

Figura 20 – Curvas de resposta de frequência e de amplitude da excitação externa do sistema principal.

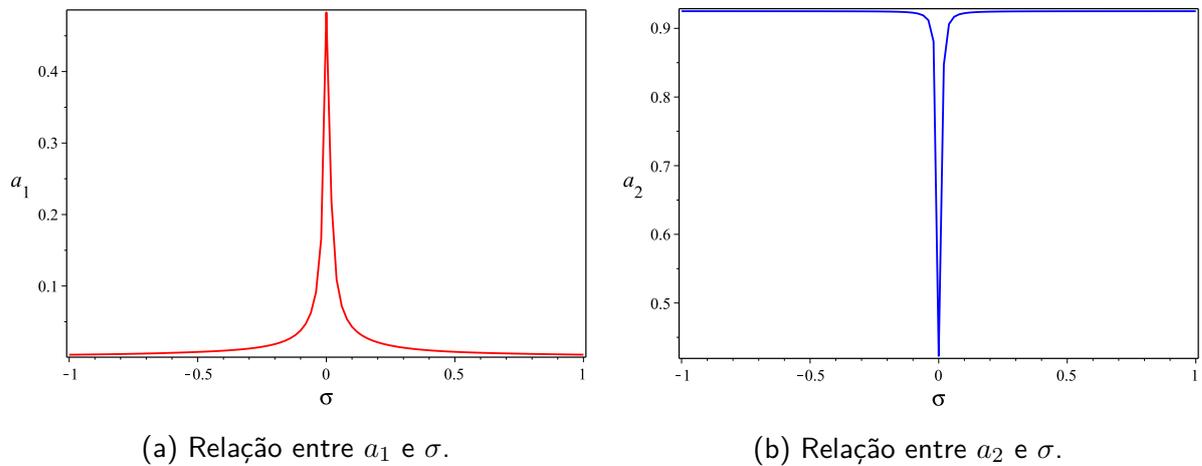


(a) Relação entre a_1 e τ .

(b) Relação entre a_1 e f .

Fonte: Autor

Figura 21 – Curvas de resposta de frequência do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$.



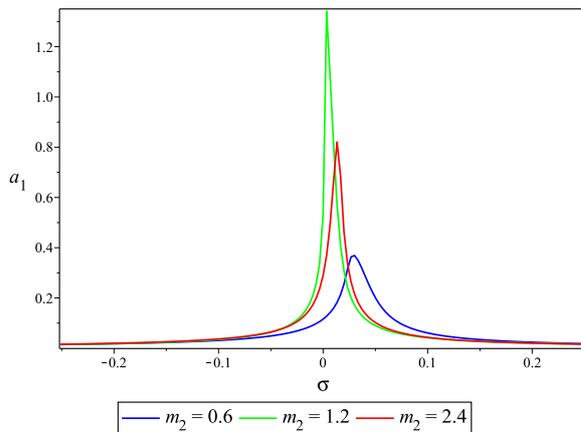
Fonte: Autor

e a massa m_2 para $\sigma = 0$ e $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$, obtida através dessas equações, é apresentada na Figura 23. O valor mínimo da amplitude de oscilação do sistema principal é aproximadamente 0.012 e esse valor é alcançado quando $m_2 = 0.3$. Na Figura 24, foram adotados diferentes valores para o atraso no tempo. Precisamente, consideramos $\tau = \frac{(3+4n)\pi}{2\omega_2}$, $n = 0, \dots, 5$. Essa figura mostra que, fixado σ próximo de zero, a variação da amplitude de oscilação é grande. Além disso, é possível observar que a amplitude mínima é atingida para valores distintos de n conforme σ percorre o intervalo considerado. Isso reforça que o atraso no tempo é um parâmetro a ser levado em consideração em projetos. A Figura 25a apresenta a relação entre a amplitude a_1 e o atraso no tempo τ para diferentes valores de σ . Apenas pontos da forma $\tau = \frac{(3+4n)\pi}{2\omega_2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, foram considerados. Essa figura confirma que a variação da amplitude é maior para valores de σ próximos de zero. Na Figura 25b, são apresentadas curvas de resposta da amplitude da excitação externa para $n = 0, \dots, 4$. Foi tomado $\sigma = 0.1$. Como no caso anterior, essa figura mostra que a relação entre a_1 e f é aproximadamente linear (crescente).

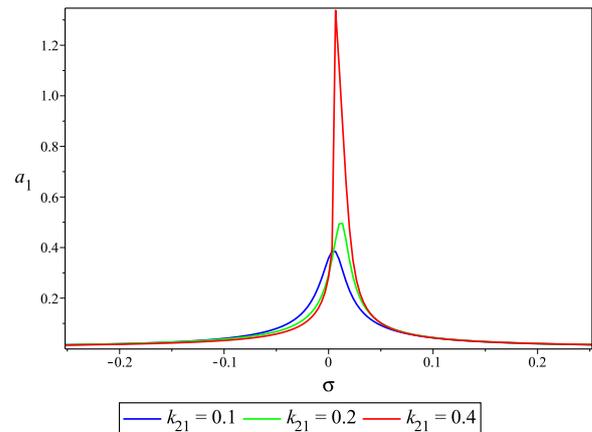
3.3.4.3 Estabilidade assintótica

Nesta seção, analisamos a estabilidade assintótica do sistema no caso de ressonância primária $\Omega \approx \omega_1$ para diferentes valores do atraso no tempo. Para realizar essa análise, usamos o método da função característica para sistemas com atraso no tempo. Mais precisamente, aplicamos o Teorema 2.6.2 (Teorema de Pontryakin), que fornece condições para a estabilidade

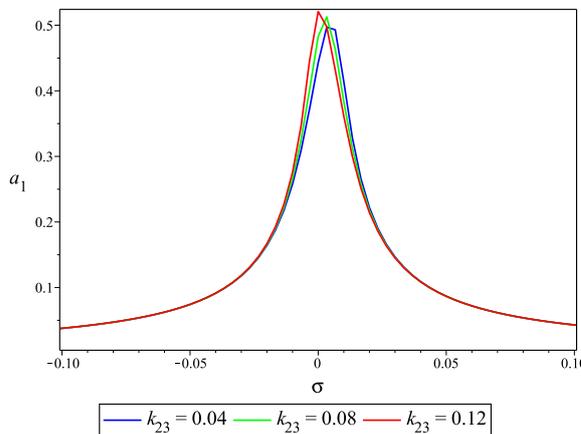
Figura 22 – Curvas de resposta de frequência do sistema principal para $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$.



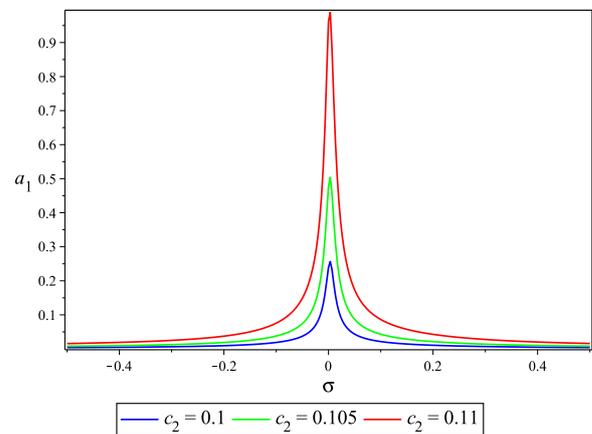
(a) Resposta de frequência para valores distintos de m_2 .



(b) Resposta de frequência para valores distintos de k_{21} .



(c) Resposta de frequência para valores distintos de k_{23} .



(d) Resposta de frequência para valores distintos de c_2 .

Fonte: Autor

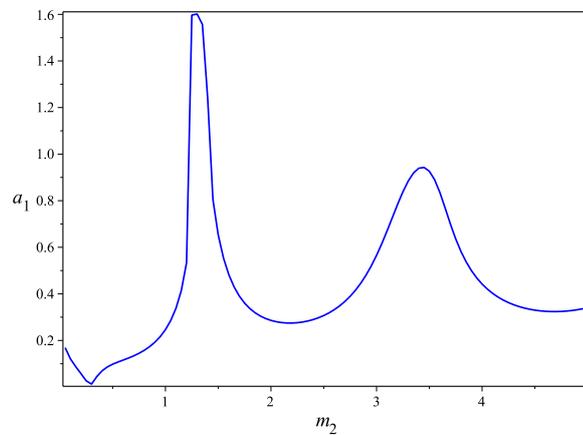
assintótica envolvendo as funções $R(\omega) = \Re(p(i\omega))$, $S(\omega) = \Im(p(i\omega))$ e

$$P(\omega) = R(\omega)S'(\omega) - S(\omega)R'(\omega),$$

$\omega \in \mathbb{R}$, onde p é o quasi-polinômio característico.

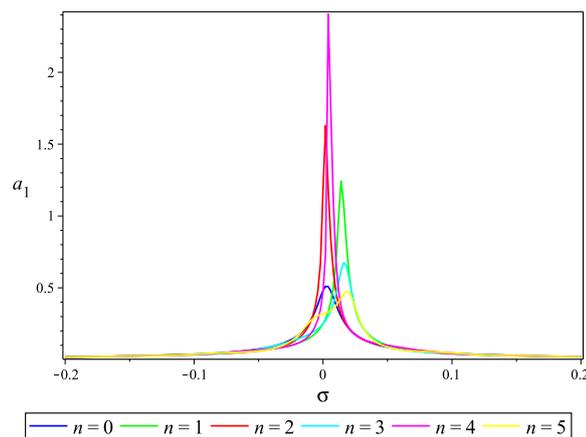
As Figuras 26, 27, 28 e 29 apresentam gráficos de P quando $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}, \frac{7\pi}{2\omega_2}, \frac{11\pi}{2\omega_2}, \frac{15\pi}{2\omega_2}$, respectivamente. Esses gráficos foram obtidos considerando que para o sistema em estudo, as funções R e S são dadas por (3.57) e (3.58), respectivamente. Para os parâmetros iniciais, com exceção de k_{11} e c_1 , foram adotados os valores apresentados na Tabela 2. Além disso, foram tomados $\sigma = 0.1$ e $f = 0.08$. Nas Figuras 26a, 27a, 28a e 29a, foram considerados diferentes valores para a constante linear da mola do sistema principal k_{11} . Por sua vez, nas Figuras 26b, 27b, 28b e 29b, foram adotados valores distintos para o coeficiente de amortecimento c_1 .

Figura 23 – Relação entre a amplitude de oscilação do sistema principal e a massa do absorvedor para $\sigma = 0$ e $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$.



Fonte: Autor

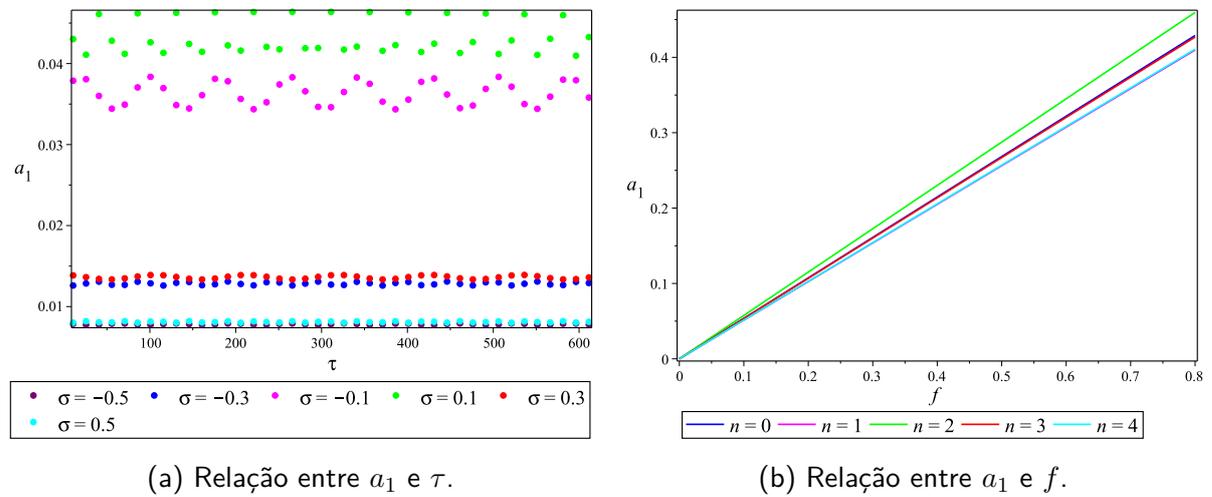
Figura 24 – Curvas de resposta de frequência para valores distintos do atraso no tempo τ .



Fonte: Autor

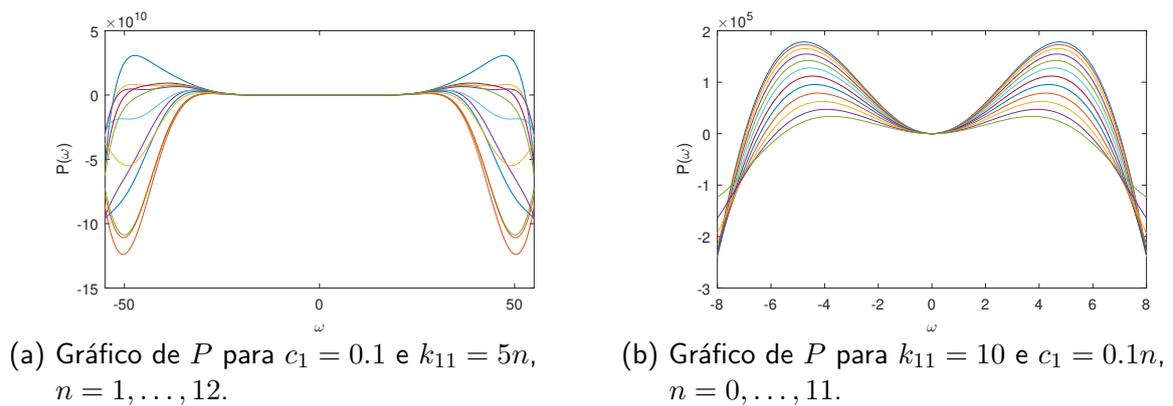
Como pode ser observado, em cada um dos casos considerados, existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $P(\omega)$ é negativo. Essa observação é confirmada pelas Tabelas 4 e 5, que apresentam o valor mínimo de $P(\omega)$ no intervalo $[-35, 35]$. Tendo em vista que pelo Teorema de Pontryakin, $P(\omega) > 0$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$, é uma condição necessária para que a solução trivial de (3.48)-(3.51), correspondente a uma solução estacionária $(a_{10}, a_{20}, \gamma_{10}, \mu_{20})$, seja assintoticamente estável, podemos concluir que o sistema não é estável nos casos considerados.

Figura 25 – Curvas de resposta de frequência e de amplitude da excitação externa do sistema principal.



Fonte: Autor

Figura 26 – Gráficos de P quando $\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$.



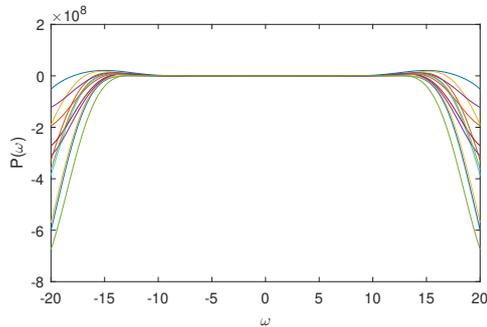
Fonte: Autor

Tabela 5 – Valor mínimo de P .

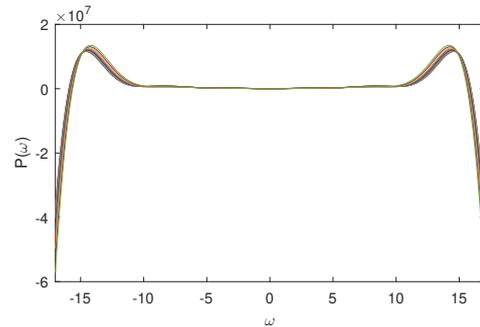
c_1	$\min P(\omega)$ no intervalo $[-35, 35]$			
	$\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$	$\tau = \frac{7\pi}{2\omega_2}$	$\tau = \frac{11\pi}{2\omega_2}$	$\tau = \frac{15\pi}{2\omega_2}$
0	-8.3719×10^9	-4.4324×10^9	-2.0857×10^{10}	-3.5054×10^{10}
0.1	-8.3718×10^9	-4.4316×10^9	-2.0856×10^{10}	-3.5100×10^{10}
0.2	-8.3716×10^9	-4.4360×10^9	-2.0871×10^{10}	-3.5173×10^{10}
0.3	-8.3714×10^9	-4.4453×10^9	-2.0900×10^{10}	-3.5273×10^{10}
0.4	-8.3712×10^9	-4.4598×10^9	-2.0944×10^{10}	-3.5400×10^{10}
0.5	-8.3709×10^9	-4.4794×10^9	-2.1004×10^{10}	-3.5554×10^{10}
0.6	-8.3706×10^9	-4.5040×10^9	-2.1078×10^{10}	-3.5736×10^{10}
0.7	-8.3702×10^9	-4.5338×10^9	-2.1168×10^{10}	-3.5945×10^{10}
0.8	-8.3698×10^9	-4.5688×10^9	-2.1273×10^{10}	-3.6182×10^{10}
0.9	-8.3693×10^9	-4.6092×10^9	-2.1394×10^{10}	-3.6446×10^{10}
1	-8.3688×10^9	-4.6548×10^9	-2.1531×10^{10}	-3.6739×10^{10}
1.1	-8.3682×10^9	-4.7058×10^9	-2.1683×10^{10}	-3.7061×10^{10}

Fonte: Autor

Figura 27 – Gráficos de P quando $\tau = \frac{7\pi}{2\omega_2}$.



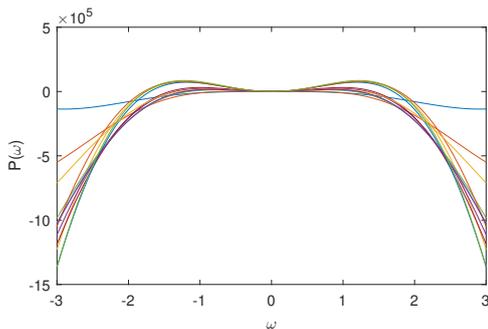
(a) Gráfico de P para $c_1 = 0.1$ e $k_{11} = 5n$, $n = 1, \dots, 12$.



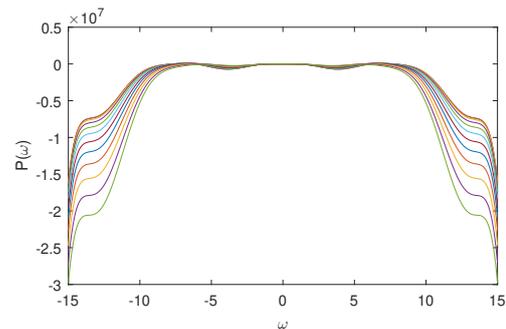
(b) Gráfico de P para $k_{11} = 10$ e $c_1 = 0.1n$, $n = 0, \dots, 11$.

Fonte: Autor

Figura 28 – Gráficos de P quando $\tau = \frac{11\pi}{2\omega_2}$.



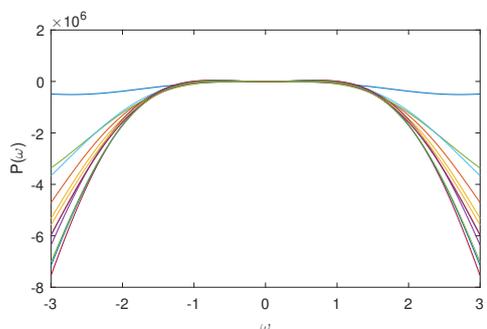
(a) Gráfico de P para $c_1 = 0.1$ e $k_{11} = 5n$, $n = 1, \dots, 12$.



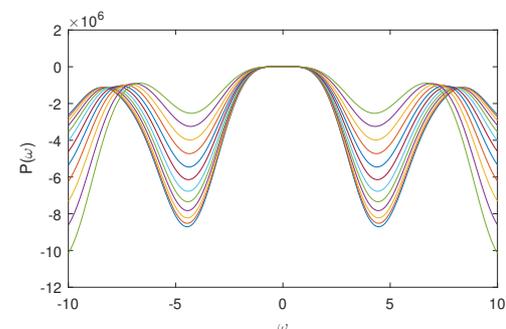
(b) Gráfico de P para $k_{11} = 10$ e $c_1 = 0.1n$, $n = 0, \dots, 11$.

Fonte: Autor

Figura 29 – Gráficos de P quando $\tau = \frac{15\pi}{2\omega_2}$.



(a) Gráfico de P para $c_1 = 0.1$ e $k_{11} = 5n$, $n = 1, \dots, 12$.



(b) Gráfico de P para $k_{11} = 10$ e $c_1 = 0.1n$, $n = 0, \dots, 11$.

Fonte: Autor

Tabela 4 – Valor mínimo de P .

k_{11}	$\min P(\omega)$ no intervalo $[-35, 35]$			
	$\tau = \frac{3\pi}{2\omega_2}$	$\tau = \frac{7\pi}{2\omega_2}$	$\tau = \frac{11\pi}{2\omega_2}$	$\tau = \frac{15\pi}{2\omega_2}$
5	-4.2211×10^{-28}	-8.1663×10^9	-3.6927×10^{10}	-5.8212×10^{10}
10	-8.3718×10^9	-4.4316×10^9	-2.0856×10^{10}	-3.5100×10^{10}
15	-2.1309×10^5	-5.6587×10^9	-1.0527×10^{10}	-3.3510×10^{10}
20	-8.1214×10^{-28}	-5.4539×10^9	-1.0565×10^{10}	-4.3537×10^{10}
25	-7.3675×10^9	-7.7172×10^8	-8.7451×10^9	-2.3349×10^{10}
30	-1.6619×10^6	-3.3852×10^9	-8.9869×10^9	-5.1617×10^{10}
35	-8.8639×10^{-28}	-3.1200×10^9	-1.0389×10^{10}	-3.1823×10^{10}
40	-2.2419×10^7	-1.4474×10^9	-9.4827×10^9	-2.9509×10^{10}
45	-7.1650×10^9	-4.1622×10^9	-2.2584×10^{10}	-3.1629×10^{10}
50	-2.0376×10^9	-1.6431×10^9	-2.6352×10^{10}	-3.1399×10^{10}
55	-2.3577×10^5	-2.5901×10^9	-8.4111×10^9	-3.1472×10^{10}
60	-6.8821×10^{-28}	-3.5122×10^9	-9.3282×10^9	-3.0000×10^{10}

Fonte: Autor

3.4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE NO CASO DE RESSONÂNCIA PRIMÁRIA $\Omega \approx \omega_2$

Nesta seção, estudamos a estabilidade do sistema no caso de ressonância primária $\Omega \approx \omega_2$.

Seja então

$$\Omega = \omega_2 + \epsilon \hat{\sigma} \quad (3.59)$$

e considere novamente as funções a_1 , a_2 , μ_1 e μ_2 introduzidas em (3.21). Na sequência, procedemos de forma análoga ao caso $\Omega \approx \omega_1$.

Substituindo (3.59) em (3.19), obtemos

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} &= \left[-3(\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13})A_1^2\bar{A}_1 - 6\hat{\alpha}_{23}\Delta_1 A_1 A_2 \bar{A}_2 - (i\hat{\zeta}_1\omega_1 - \hat{\alpha}_{21}\Delta_2)A_1 \right. \\ &\quad \left. - 2i\omega_1 \frac{dA_1}{dT_1} - i\hat{\zeta}_2\omega_1\Delta_1 A_1 (T_1 - \epsilon\tau)e^{-i\omega_1\tau} \right] e^{i\omega_1 T_0} + F_1 e^{i\omega_2 T_0} \\ &\quad + F_2 e^{i3\omega_1 T_0} + F_3 e^{i3\omega_2 T_0} + F_4 e^{i(2\omega_2 - \omega_1)T_0} + F_5 e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)T_0} \\ &\quad + F_6 e^{i(2\omega_1 - \omega_2)T_0} + F_7 e^{i(2\omega_1 + \omega_2)T_0} + cc, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde F_1, \dots, F_7 são funções de T_1 dadas por

$$F_1 = \frac{\hat{F}}{2} e^{i\hat{\sigma}T_1} + 6\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 + 3\hat{\alpha}_{23}A_2^2 \bar{A}_2 + \hat{\alpha}_{21}A_2 + i\hat{\zeta}_2\omega_2 A_2 (T_1 - \epsilon\tau)e^{-i\omega_2\tau}$$

$$F_2 = -(\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13})A_1^3,$$

$$F_3 = \hat{\alpha}_{23}A_2^3,$$

$$F_4 = -3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1 \bar{A}_1 A_2^2,$$

$$F_5 = -3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1 A_1 A_2^2,$$

$$F_6 = 3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^2 A_1^2 \bar{A}_2,$$

$$F_7 = 3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^2 A_1^2 A_2.$$

Para que a condição (2.29) do método de múltiplas escalas seja satisfeita é necessário que o coeficiente de $e^{i\omega_1 T_0}$ em (3.60) seja identicamente nulo, de onde

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 \frac{dA_1}{dT_1} &= -3(\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13})A_1^2\bar{A}_1 - 6\hat{\alpha}_{23}\Delta_1 A_1 A_2 \bar{A}_2 - (i\hat{\zeta}_1\omega_1 - \hat{\alpha}_{21}\Delta_2)A_1 \\ &\quad - i\hat{\zeta}_2\omega_1\Delta_1 A_1 (T_1 - \epsilon\tau)e^{-i\omega_1\tau}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Substituindo (3.21) em (3.61) e multiplicando ambos os lados da equação resultante por $e^{-i\mu_1}$, obtemos

$$-a_1 \dot{\mu}_1 + i\dot{a}_1 = iG_1 a_1 + iG_2 a_{1\tau} e^{i(\mu_{1\tau} - \mu_1 - \omega_1\tau)} - G_3 a_1 - G_4 a_1 a_2^2 - G_5 a_1^3 \quad (3.62)$$

onde $a_{1\tau} = a_1(T_1 - \epsilon\tau)$, $\mu_{1\tau} = \mu_1(T_1 - \epsilon\tau)$ e

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{\hat{\zeta}_1}{2}, & G_2 &= -\frac{\hat{\zeta}_2\Delta_1}{2}, & G_3 &= -\frac{\hat{\alpha}_{21}\Delta_2}{2\omega_1}, \\ G_4 &= \frac{3\hat{\alpha}_{23}\Delta_1}{4\omega_1}, & G_5 &= \frac{3(\hat{\alpha}_{23}\Delta_1^3 + \hat{\alpha}_{13})}{8\omega_1}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Separando as partes real e imaginária em (3.62), obtemos

$$\dot{a}_1 = G_1 a_1 + G_2 a_{1\tau} \cos(\mu_{1\tau} - \mu_1 - \omega_1\tau), \quad (3.64)$$

$$a_1 \dot{\mu}_1 = G_2 a_{1\tau} \sin(\mu_{1\tau} - \mu_1 - \omega_1\tau) + G_3 a_1 + G_4 a_1 a_2^2 + G_5 a_1^3. \quad (3.65)$$

Por outro lado, considerando o coeficiente de $e^{i\omega_1 T_0}$ identicamente nulo em (3.60), essa equação assume a forma

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} &= F_1 e^{i\omega_2 T_0} + F_2 e^{i3\omega_1 T_0} + F_3 e^{i3\omega_2 T_0} + F_4 e^{i(2\omega_2 - \omega_1) T_0} \\ &+ F_5 e^{i(\omega_1 + 2\omega_2) T_0} + F_6 e^{i(2\omega_1 - \omega_2) T_0} + F_7 e^{i(2\omega_1 + \omega_2) T_0} + cc. \end{aligned}$$

que tem como solução geral

$$x_{11} = B_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \bar{B}_1(T_1) e^{-i\omega_1 T_0} + x_{11p}, \quad (3.66)$$

com

$$\begin{aligned} x_{11p} &= \lambda_1 F_1 e^{i\omega_2 T_0} + \lambda_2 F_2 e^{i3\omega_1 T_0} + \lambda_3 F_3 e^{i3\omega_2 T_0} + \lambda_4 F_4 e^{i(2\omega_2 - \omega_1) T_0} \\ &+ \lambda_5 F_5 e^{i(\omega_1 + 2\omega_2) T_0} + \lambda_6 F_6 e^{i(2\omega_1 - \omega_2) T_0} + \lambda_7 F_7 e^{i(2\omega_1 + \omega_2) T_0} + cc, \end{aligned}$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_7$ são as constantes dadas em (3.30). Substituindo (3.66) em (3.20), obtemos que o coeficiente de $e^{i\omega_2 T_0}$ é

$$-\Delta_2 F_1 - 2i\omega_2 \frac{dA_2}{dT_1} - 3\hat{\beta}_{23} A_2^2 \bar{A}_2 - 6\hat{\beta}_{23} \Delta_1^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 - i\hat{\zeta}_3 \omega_2 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{-i\omega_2 \tau}.$$

Novamente, para que a condição (2.29) seja satisfeita é necessário que esse coeficiente seja identicamente nulo, o que equivale a

$$2i\omega_2 \frac{dA_2}{dT_1} = -\Delta_2 F_1 - 3\hat{\beta}_{23} A_2^2 \bar{A}_2 - 6\hat{\beta}_{23} \Delta_1^2 A_1 \bar{A}_1 A_2 - i\hat{\zeta}_3 \omega_2 A_2 (T_1 - \epsilon\tau) e^{-i\omega_2 \tau}. \quad (3.67)$$

Substituindo (3.21) em (3.67) e escrevendo $\gamma_2 = \hat{\sigma} T_1 - \mu_2$, obtemos

$$\begin{aligned} a_2 \dot{\gamma}_2 + i\dot{a}_2 &= E \cos \gamma_2 + iE \sin \gamma_2 + iH_1 a_{2\tau} \exp(\gamma_{2\tau} - \gamma_2 + (\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau) \\ &+ (\hat{\sigma} + H_2) a_2 + H_3 a_2^3 + H_4 a_1^2 a_2, \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde $a_{2\tau} = a_2(T_1 - \epsilon\tau)$, $\gamma_{2\tau} = \gamma_2(T_1 - \epsilon\tau)$ e

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\Delta_2 \hat{F}}{2\omega_2}, & H_1 &= -\frac{\Delta_2 \hat{\zeta}_2 + \hat{\zeta}_3}{2}, & H_2 &= -\frac{\Delta_2 \hat{\alpha}_{21}}{2\omega_2}, \\ H_3 &= -\frac{3(\Delta_2 \hat{\alpha}_{23} + \hat{\beta}_{23})}{8\omega_2}, & H_4 &= -\frac{3\Delta_1^2 (\Delta_2 \hat{\alpha}_{23} + \hat{\beta}_{23})}{4\omega_2}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Finalmente, separando as partes real e imaginária em (3.68), obtemos

$$\dot{a}_2 = E \sin \gamma_2 + H_1 a_{2\tau} \cos(\gamma_{2\tau} - \gamma_2 + (\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau), \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} a_2 \dot{\gamma}_2 &= E \cos \gamma_2 + H_1 a_{2\tau} \sin(\gamma_{2\tau} - \gamma_2 + (\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau) \\ &+ (\hat{\sigma} + H_2) a_2 + H_3 a_2^3 + H_4 a_1^2 a_2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.4.1 Soluções Estacionárias

Nesta seção, discutimos as soluções estacionárias do sistema formado pelas equações (3.64), (3.65), (3.70) e (3.71). Estamos interessados, portanto, nas funções constantes a_1 , a_2 , μ_1 e γ_2 que satisfazem

$$[G_1 + G_2 \cos(\omega_1\tau)] a_1 = 0, \quad (3.72)$$

$$[-G_2 \sin(\omega_1\tau) + G_3 + G_4 a_2^2 + G_5 a_1^2] a_1 = 0, \quad (3.73)$$

$$E \sin \gamma_2 + H_1 a_2 \cos((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau) = 0, \quad (3.74)$$

$$E \cos \gamma_2 + H_1 a_2 \sin((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau) + (\hat{\sigma} + H_2) a_2 + H_3 a_2^3 + H_4 a_1^2 a_2 = 0. \quad (3.75)$$

Para analisar o sistema (3.72)-(3.75), consideramos separadamente os casos $a_1 = 0$ e $a_1 \neq 0$. O primeiro caso corresponde ao caso em que o absorvedor é completamente eficiente na redução da amplitude de vibração do sistema principal, enquanto o segundo está relacionado ao caso em que a redução da amplitude não é completa.

Caso 1: Considerando $a_1 = 0$, a equação (3.75) se torna

$$E \cos \gamma_2 + H_1 a_2 \sin((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau) + (\hat{\sigma} + H_2) a_2 + H_3 a_2^3 = 0. \quad (3.76)$$

Segue de (3.74) e (3.76) que

$$\begin{aligned} &\left[\left(H_1 \cos((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau) \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left(H_1 \sin((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau) + \hat{\sigma} + H_2 + H_3 a_2^2 \right)^2 \right] a_2^2 = E^2, \\ \tan(\gamma_2) &= \frac{H_1 \cos((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau)}{H_1 \sin((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau) + \hat{\sigma} + H_2 + H_3 a_2^2}. \end{aligned}$$

Caso 2: Se $a_1 \neq 0$, então (3.72) é satisfeita apenas quando

$$G_1 + G_2 \cos(\omega_1 \tau) = 0. \quad (3.77)$$

Claramente, para que exista $\tau \geq 0$ verificando (3.77) é necessário que

$$\left| \frac{G_1}{G_2} \right| = \left| \frac{1}{\Delta_1} \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right| = \left| \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2} \frac{c_1}{c_2} \right| \leq 1.$$

Nesse caso, obtemos

$$\omega_1 \tau = \pm \arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) + 2k\pi, \quad (3.78)$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$ de modo que o lado direito de (3.78) seja não negativo ($\omega_1 \tau \geq 0$, pois $\tau \geq 0$ e $\omega_1 > 0$). Para $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[\arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) + 2k\pi \right]$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, a equação (3.73) é equivalente a

$$-G_2 \sin \left(\arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) \right) + G_3 + G_4 a_2^2 + G_5 a_1^2 = 0. \quad (3.79)$$

Além disso, as equações (3.74) e (3.75) fornecem

$$\left[\left(H_1 \cos \theta_1 \right)^2 + \left(H_1 \sin \theta_1 + \hat{\sigma} + H_2 + H_3 a_2^2 + H_4 a_1^2 \right)^2 \right] a_2^2 = E^2,$$

$$\tan(\gamma_2) = \frac{H_1 \cos \theta_1}{H_1 \sin \theta_1 + \hat{\sigma} + H_2 + H_3 a_2^2 + H_4 a_1^2},$$

onde

$$\theta_1 = \frac{1}{\omega_1} (\omega_2 + \epsilon \hat{\sigma}) \left[\arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) + 2k\pi \right].$$

Procedendo de modo análogo para $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) + 2k\pi \right]$, $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$G_2 \sin \left(\arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) \right) + G_3 + G_4 a_2^2 + G_5 a_1^2 = 0. \quad (3.80)$$

$$\left[\left(H_1 \cos \theta_2 \right)^2 + \left(H_1 \sin \theta_2 + \hat{\sigma} + H_2 + H_3 a_2^2 + H_4 a_1^2 \right)^2 \right] a_2^2 = E^2, \quad (3.81)$$

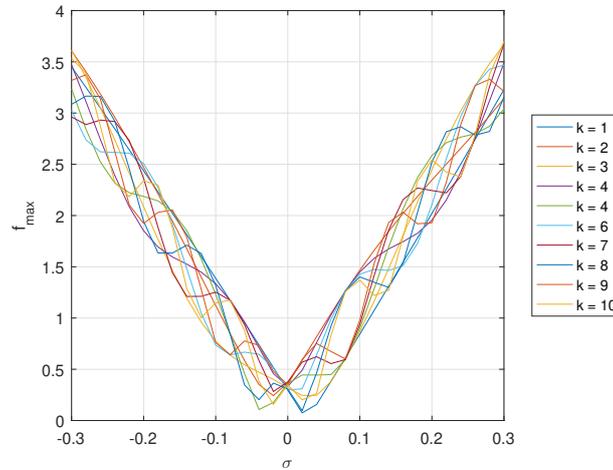
$$\tan(\gamma_2) = \frac{H_1 \cos \theta_2}{H_1 \sin \theta_2 + \hat{\sigma} + H_2 + H_3 a_2^2 + H_4 a_1^2},$$

onde

$$\theta_2 = \frac{1}{\omega_1} (\omega_2 + \epsilon \hat{\sigma}) \left[-\arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) + 2k\pi \right].$$

No caso em que o absorvedor não é completamente eficiente, as equações (3.79) e (3.80) fornecem informações a respeito de a_1 e a_2 . Como exemplo, adotando os valores apresentados na Tabela 2 para os parâmetros do sistema, obtemos que não existe solução estacionária

Figura 30 – Valor máximo de f para a existência de solução estacionária.



Fonte: Autor

quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[\arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) + 2k\pi \right]$ e que $0 < a_1 < 0.16293$ e $0 < a_2 < 0.27267$ quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) + 2k\pi \right]$, $k \in \mathbb{N}$. O valor máximo de f para a existência de solução estacionária quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos \left(-\frac{G_1}{G_2} \right) + 2k\pi \right]$, para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e σ , pode ser determinado através da estimativa a respeito de a_1 e das equações (3.80) e (3.81). A Figura 30 mostra a relação entre esse valor máximo e σ , para $k = 1, \dots, 10$. Para os valores apresentados na Tabela 1, não existe solução estacionária com $a_1 \neq 0$, pois $\frac{G_1}{G_2} = 3$.

3.4.2 Linearização do Sistema

Nesta seção, o sistema formado pelas equações (3.64), (3.65), (3.70) e (3.71) é linearizado em torno de uma solução estacionária $x_0 = (a_{10}, a_{20}, \mu_{10}, \gamma_{20})$.

Sejam então f_1, \dots, f_4 , as funções

$$\begin{aligned} f_1(\phi) &= G_1 \phi_1(0) + G_2 \phi_1(-\epsilon\tau) \cos(\phi_3(-\epsilon\tau) - \phi_3(0) - \omega_1\tau), \\ f_2(\phi) &= E \sin(\phi_4(0)) + H_1 \phi_2(-\epsilon\tau) \cos(\phi_4(-\epsilon\tau) - \phi_4(0) + \delta_2), \\ f_3(\phi) &= G_2 \frac{\phi_1(-\epsilon\tau)}{\phi_1(0)} \sin(\phi_3(-\epsilon\tau) - \phi_3(0) - \omega_1\tau) + G_3 + G_4 [\phi_2(0)]^2 + G_5 [\phi_1(0)]^2, \\ f_4(\phi) &= E \frac{1}{\phi_2(0)} \cos(\phi_4(0)) + H_1 \frac{\phi_2(-\epsilon\tau)}{\phi_2(0)} \sin(\phi_4(-\epsilon\tau) - \phi_4(0) + \delta_2) + \hat{\sigma} + H_2 \\ &\quad + H_3 [\phi_2(0)]^2 + H_4 [\phi_1(0)]^2, \end{aligned}$$

para $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$, $\phi_i \in C = C([-\epsilon\tau, 0], \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, 4$, com $\phi_1(0) \neq 0$ na definição de f_3 e $\phi_2(0) \neq 0$ na definição de f_4 , onde $\delta_2 = (\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau$.

Escrevendo $x = (a_1, a_2, \mu_1, \gamma_2)$ e $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, obtemos que o sistema (3.64), (3.65), (3.70) e (3.71) corresponde a

$$\dot{x}(T_1) = f(x_{T_1}), \quad (3.82)$$

onde $x_{T_1}(\theta) = x(T_1 + \theta)$, $\theta \in [-\epsilon\tau, 0]$.

Proposição 3.4.1. *Seja $x_0 = (a_{10}, a_{20}, \mu_{10}, \gamma_{20})$ uma solução estacionária de (3.82) e considere em C^4 a norma $\|\phi\| = \max_{i=1, \dots, 4} \|\phi_i\|_C$, onde $\|\cdot\|_C$ denota a norma usual em C . Então,*

$$\dot{\eta}_1 = G_1\eta_1 + G_2 \cos(\omega_1\tau)\eta_{1\tau} - G_2a_{10} \sin(\omega_1\tau)\eta_3 + G_2a_{10} \sin(\omega_1\tau)\eta_{3\tau} \quad (3.83)$$

$$\dot{\eta}_2 = H_1 \cos(\delta_2)\eta_{2\tau} + [E \cos(\gamma_{20}) + H_1a_{20} \sin(\delta_2)]\eta_4 - H_1a_{20} \sin(\delta_2)\eta_{4\tau} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_3 &= [G_2a_{10}^{-1} \sin(\omega_1\tau) + 2G_5a_{10}] \eta_1 - G_2a_{10}^{-1} \sin(\omega_1\tau)\eta_{1\tau} + 2G_4a_{20}\eta_2 \\ &\quad - G_2 \cos(\omega_1\tau)\eta_3 + G_2 \cos(\omega_1\tau)\eta_{3\tau} \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_4 &= 2H_4a_{10}\eta_1 + [2H_3a_{20} - Ea_{20}^{-2} \cos(\gamma_{20}) - H_1a_{20}^{-1} \sin(\delta_2)] \eta_2 + H_1a_{20}^{-1} \sin(\delta_2)\eta_{2\tau} \\ &\quad - [Ea_{20}^{-1} \sin(\gamma_2) + H_1 \cos(\delta_2)] \eta_4 + H_1 \cos(\delta_2)\eta_{4\tau} \end{aligned} \quad (3.86)$$

é uma linearização de (3.82) em torno de x_0 .

Demonstração. Calculando pela definição, as derivadas de Gâteaux das funções f_1, \dots, f_4 em $\phi_0 = x_{0T_1}$ são dadas por

$$df_1(\phi_0, \eta) = G_1\eta_1(0) + G_2 \cos(\omega_1\tau)\eta_1(-\epsilon\tau) + G_2a_{10} \sin(\omega_1\tau) [\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0)],$$

$$df_2(\phi_0, \eta) = E \cos(\gamma_{20}) \eta_4(0) + H_1 \cos(\delta_2) \eta_2(-\epsilon\tau) - H_1a_{20} \sin(\delta_2) [\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)],$$

$$\begin{aligned} df_3(\phi_0, \eta) &= -G_2a_{10}^{-1} \sin(\omega_1\tau) [\eta_1(-\epsilon\tau) - \eta_1(0)] + G_3 \cos(\omega_1\tau) [\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0)] \\ &\quad + 2G_4a_{20}\eta_2(0) + 2G_5a_{10}\eta_1(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df_4(\phi_0, \eta) &= -Ea_{20}^{-2} \cos(\gamma_{20}) \eta_2(0) - Ea_{20}^{-1} \sin(\gamma_{20}) \eta_4(0) + H_1a_{20}^{-1} \sin(\delta_2) [\eta_2(-\epsilon\tau) - \eta_2(0)] \\ &\quad + H_1 \cos(\delta_2) [\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)] + 2H_3a_{20}\eta_2(0) + 2H_4a_{10}\eta_1(0), \end{aligned}$$

para qualquer $\eta \in C^4$.

É fácil ver que $\eta \mapsto df_i(\phi_0, \eta)$, $i = 1, \dots, 4$, são operadores lineares limitados. Por outro lado, esse operadores satisfazem

$$(1) \frac{|f_1(\phi_0 + \eta) - f_1(\phi_0) - df_1(\phi_0, \eta)|}{\|\eta\|} \leq \sum_{i=1}^4 T_{1i}(\eta), \text{ onde}$$

$$T_{11}(\eta) = |G_2 a_{10} \cos(\omega_1 \tau)| \frac{|\cos(\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{12}(\eta) = |G_2 \cos(\omega_1 \tau)| \frac{|\eta_1(-\epsilon\tau)|}{\|\eta\|} |\cos(\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0)) - 1|,$$

$$T_{13}(\eta) = |G_2 a_{10} \sin(\omega_1 \tau)| \frac{|\sin(\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0)) - (\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0))|}{\|\eta\|},$$

$$T_{14}(\eta) = |G_2 \sin(\omega_1 \tau)| \frac{|\eta_1(-\epsilon\tau)|}{\|\eta\|} |\sin(\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0))|.$$

$$(2) \frac{|f_2(\phi_0 + \eta) - f_2(\phi_0) - df_2(\phi_0, \eta)|}{\|\eta\|} \leq \sum_{i=1}^6 T_{2i}(\eta), \text{ onde}$$

$$T_{21}(\eta) = |H_1 a_{20} \cos(\delta_2)| \frac{|\cos(\eta_4(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{22}(\eta) = |E \cos(\gamma_{20})| \frac{|\sin(\eta_4(0)) - \eta_4(0)|}{\|\eta\|},$$

$$T_{23}(\eta) = |H_1 a_{20} \cos(\delta_2)| \frac{|\cos(\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{24}(\eta) = |H_1 \cos(\delta_2)| \frac{|\eta_2(-\epsilon\tau)|}{\|\eta\|} |\cos(\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)) - 1|,$$

$$T_{25}(\eta) = |H_1 a_{20} \sin(\delta_2)| \frac{|\sin(\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)) - (\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0))|}{\|\eta\|},$$

$$T_{26}(\eta) = |H_1 \sin(\delta_2)| \frac{|\eta_2(-\epsilon\tau)|}{\|\eta\|} |\sin(\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0))|.$$

$$(3) \frac{|f_3(\phi_0 + \eta) - f_3(\phi_0) - df_3(\phi_0, \eta)|}{\|\eta\|} \leq \sum_{i=1}^6 T_{3i}(\eta), \text{ onde}$$

$$T_{31}(\eta) = |G_2 \cos(\omega_1 \tau)| \frac{|a_{10} + \eta_1(-\epsilon\tau)|}{|a_{10} + \eta_1(0)|} \frac{|\sin(\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0)) - (\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0))|}{\|\eta\|},$$

$$T_{32}(\eta) = |G_2 \cos(\omega_1 \tau)| \frac{1}{|a_{10} + \eta_1(0)|} \frac{|\eta_1(-\epsilon\tau) - \eta_1(0)|}{\|\eta\|} |\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0)|,$$

$$T_{33}(\eta) = |G_2 \sin(\omega_1 \tau)| \frac{1}{|a_{10} [a_{10} + \eta_1(0)]|} \frac{|\eta_1(0)|}{\|\eta\|} |\eta_1(-\epsilon\tau) - \eta_1(0)|$$

$$T_{34}(\eta) = |G_2 \sin(\omega_1 \tau)| \frac{|a_{10} + \eta_1(-\epsilon\tau)|}{|a_{10} + \eta_1(0)|} \frac{|\cos(\eta_3(-\epsilon\tau) - \eta_3(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{35}(\eta) = |G_4| \frac{|\eta_2(0)|}{\|\eta\|} |\eta_2(0)|,$$

$$T_{36}(\eta) = |G_5| \frac{|\eta_1(0)|}{\|\eta\|} |\eta_1(0)|.$$

$$(4) \quad \frac{|f_4(\phi_0 + \eta) - f_4(\phi_0) - df_4(\phi_0, \eta)|}{\|\eta\|} \leq \sum_{i=1}^{10} T_{4i}(\eta), \text{ onde}$$

$$T_{41}(\eta) = |E \cos(\gamma_{20})| \frac{1}{|a_{20} + \eta_2(0)|} \frac{|\cos(\eta_4(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{42}(\eta) = |E \sin(\gamma_{20})| \frac{1}{|a_{20} + \eta_2(0)|} \frac{|\sin(\eta_4(0)) - \eta_4(0)|}{\|\eta\|},$$

$$T_{43}(\eta) = |E \cos(\gamma_{20})| \frac{1}{|a_{20}^2 [a_{20} + \eta_2(0)]|} \frac{|\eta_2(0)|}{\|\eta\|} |\eta_2(0)|,$$

$$T_{44}(\eta) = |E \sin(\gamma_{20})| \frac{1}{|a_{20} [a_{20} + \eta_2(0)]|} \frac{|\eta_4(0)|}{\|\eta\|} |\eta_4(0)|,$$

$$T_{45}(\eta) = |H_1 \cos(\delta_2)| \frac{|a_{20} + \eta_2(-\epsilon\tau)|}{|a_{20} + \eta_2(0)|} \frac{|\sin(\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)) - (\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0))|}{\|\eta\|},$$

$$T_{46}(\eta) = |H_1 \sin(\delta_2)| \frac{|a_{20} + \eta_2(-\epsilon\tau)|}{|a_{20} + \eta_2(0)|} \frac{|\cos(\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)) - 1|}{\|\eta\|},$$

$$T_{47}(\eta) = |H_1 \cos(\delta_2)| \frac{1}{|a_{20} + \eta_2(0)|} \frac{|\eta_4(-\epsilon\tau) - \eta_4(0)|}{\|\eta\|} |\eta_2(-\epsilon\tau) - \eta_2(0)|,$$

$$T_{48}(\eta) = |H_1 \sin(\delta_2)| \frac{1}{|a_{20} [a_{20} + \eta_2(0)]|} \frac{|\eta_2(0)|}{\|\eta\|} |\eta_2(-\epsilon\tau) - \eta_2(0)|,$$

$$T_{49}(\eta) = |H_3| \frac{|\eta_2(0)|}{\|\eta\|} |\eta_2(0)|,$$

$$T_{410}(\eta) = |H_4| \frac{|\eta_1(0)|}{\|\eta\|} |\eta_1(0)|.$$

Como todo T_{ij} tende a zero quando $\eta \rightarrow 0$, temos que $df_i(\phi_0, \cdot)$ é a derivada de Fréchet de f_i em ϕ_0 , para cada $i = 1, \dots, 4$. Assim, a linearização de (3.82) em torno de x_0 é dada por

$$\dot{\eta}_1 = df_1(\phi_0, \eta_{T_1}),$$

$$\dot{\eta}_2 = df_2(\phi_0, \eta_{T_1}),$$

$$\dot{\eta}_3 = df_3(\phi_0, \eta_{T_1}),$$

$$\dot{\eta}_4 = df_4(\phi_0, \eta_{T_1}),$$

que consiste do sistema (3.83)-(3.86). □

3.4.3 Quasi-polinômio Característico

Nesta seção, calculamos o quasi-polinômio característico p do sistema de equações diferenciais lineares com atraso (3.83)-(3.86). As funções R e S introduzidas no Teorema 2.6.2 também são determinadas. Conforme visto na Seção 2.6, a análise das raízes de p , R e S permite obter informações sobre a estabilidade do sistema.

Após aplicar a transformada de Laplace em ambos os lados das equações do sistema (3.83)-(3.86), obtemos

$$(s + B_{11} + B_{12}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_1 + (B_{13} + B_{14}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_3 = \eta_1(0), \quad (3.87)$$

$$(s + B_{21}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_2 + (B_{22} + B_{23}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_4 = \eta_2(0), \quad (3.88)$$

$$(B_{31} + B_{32}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_1 + B_{33}\hat{\eta}_2 + (s + B_{34} + B_{35}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_3 = \eta_3(0), \quad (3.89)$$

$$B_{41}\hat{\eta}_1 + (B_{42} + B_{43}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_2 + (s + B_{44} + B_{45}e^{-\epsilon\tau s})\hat{\eta}_4 = \eta_4(0), \quad (3.90)$$

onde $\hat{\eta}_i = \mathcal{L}\{\eta_i\}$, $i = 1, \dots, 4$, e

$$B_{11} = -G_1, \quad B_{12} = -G_2 \cos(\omega_1\tau), \quad B_{13} = G_2 a_{10} \sin(\omega_1\tau),$$

$$B_{14} = -B_{13}, \quad B_{21} = -H_1 \cos((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau),$$

$$B_{22} = -E \cos(\gamma_{20}) - H_1 a_{20} \sin((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau), \quad B_{23} = -H_1 a_{20} \sin((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau),$$

$$B_{31} = -G_2 a_{10}^{-1} \sin(\omega_1\tau) - 2G_5 a_{10}, \quad B_{32} = G_2 a_{10}^{-1} \sin(\omega_1\tau),$$

$$B_{33} = -2G_4 a_{20}, \quad B_{34} = G_2 \cos(\omega_1\tau), \quad B_{35} = -B_{34},$$

$$B_{41} = -2H_4 a_{10}, \quad B_{42} = -2H_3 a_{20} + E a_{20}^{-2} \cos(\gamma_{20}) + H_1 a_{20}^{-1} \sin((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau),$$

$$B_{43} = -H_1 a_{20}^{-1} \sin((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau), \quad B_{44} = E a_{20}^{-1} \sin(\gamma_{20}) + H_1 \cos((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau),$$

$$B_{45} = -H_1 \cos((\omega_2 + \epsilon\hat{\sigma})\tau).$$

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (3.87)-(3.90), obtemos que o quasi-polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p(s) &= s^4 + (C_{31} + C_{32}e^{-\epsilon\tau s})s^3 + (C_{21} + C_{22}e^{-\epsilon\tau s} + C_{23}e^{-2\epsilon\tau s})s^2 \\ &+ (C_{11} + C_{12}e^{-\epsilon\tau s} + C_{13}e^{-2\epsilon\tau s} + C_{14}e^{-3\epsilon\tau s})s \\ &+ (C_{01} + C_{02}e^{-\epsilon\tau s} + C_{03}e^{-2\epsilon\tau s} + C_{04}e^{-3\epsilon\tau s} + C_{05}e^{-4\epsilon\tau s}), \end{aligned} \quad (3.91)$$

onde os coeficientes C_{ij} são dados no Apêndice B. Esses coeficientes dependem dos parâmetros do sistema, inclusive do atraso no tempo. Segue de (3.91) que as funções $R(\omega) = \Re(p(i\omega))$ e $S(\omega) = \Im(p(i\omega))$ são dadas por

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \omega^4 - C_{32} \sin(\epsilon\tau\omega)\omega^3 - (C_{21} + C_{22} \cos(\epsilon\tau\omega) + C_{23} \cos(2\epsilon\tau\omega))\omega^2 \\ &+ (C_{12} \sin(\epsilon\tau\omega) + C_{13} \sin(2\epsilon\tau\omega) + C_{14} \sin(3\epsilon\tau\omega))\omega + C_{01} \\ &+ C_{02} \cos(\epsilon\tau\omega) + C_{03} \cos(2\epsilon\tau\omega) + C_{04} \cos(3\epsilon\tau\omega) + C_{05} \cos(4\epsilon\tau\omega), \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
S(\omega) = & -\left(C_{31} + C_{32} \cos(\epsilon\tau\omega)\right)\omega^3 + \left(C_{22} \sin(\epsilon\tau\omega) + C_{23} \sin(2\epsilon\tau\omega)\right)\omega^2 \\
& + \left(C_{11} + C_{12} \cos(\epsilon\tau\omega) + C_{13} \cos(2\epsilon\tau\omega) + C_{14} \cos(3\epsilon\tau\omega)\right)\omega \\
& - C_{02} \sin(\epsilon\tau\omega) - C_{03} \sin(2\epsilon\tau\omega) - C_{04} \sin(3\epsilon\tau\omega) - C_{05} \sin(4\epsilon\tau\omega). \quad (3.93)
\end{aligned}$$

3.4.4 Resultados Numéricos e Discussão

Nesta seção, uma análise paramétrica do comportamento dinâmico do sistema no caso de ressonância primária $\Omega \approx \omega_2$ é efetuada. O parâmetro de interesse principal é o atraso no tempo.

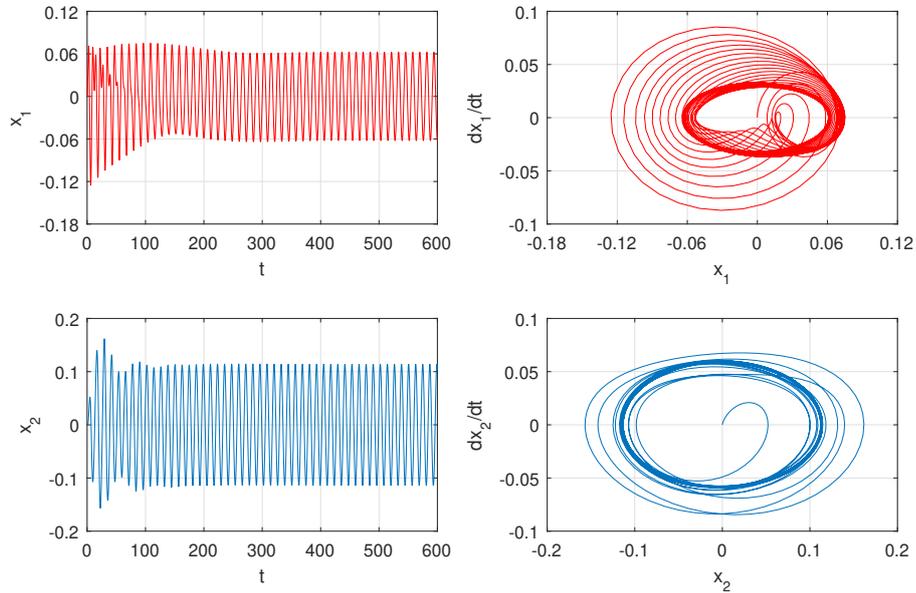
3.4.4.1 Respostas do sistema principal e do absorvedor para valores distintos do atraso no tempo

O objetivo nesta seção é estudar a evolução no tempo dos sistemas primário e secundário. Para os parâmetros m_i , k_{ij} e c_i , $i = 1, 2$, $j = 1, 3$, foram adotados os valores apresentados na Tabela 2. Por sua vez, para a amplitude da excitação externa, foi tomado $f = 0.08$. Os gráficos apresentados nesta seção foram obtidos aplicando funções do MATLAB ao sistema (3.4)-(3.5), que governa a dinâmica da estrutura em estudo.

As Figuras 31 e 32 apresentam os gráficos dos deslocamentos e os planos de fase do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 0$. Na Figura 31, foi tomado $\sigma = 0.1$. Nesse caso, a solução estacionária é dada por $a_1 = 0$, $a_2 = 0.110910321321913$, μ_1 arbitrário, $\gamma_2 = -0.276937970548553$. Por sua vez, na Figura 32, $\sigma = 0.01$. A solução estacionária correspondente é $a_1 = 0$, $a_2 = 0.383185284574425$, μ_1 arbitrário, $\gamma_2 = -1.236412336777425$. Essas figuras mostram que apenas a amplitude de oscilação do absorvedor tem aumento significativo no caso $\sigma = 0.01$ em relação ao caso $\sigma = 0.1$. Além disso, em cada sistema, a amplitude de oscilação se aproxima ao longo do tempo de valor consistente com a amplitude da aproximação perturbativa correspondente à solução estacionária, considerando o erro da aproximação.

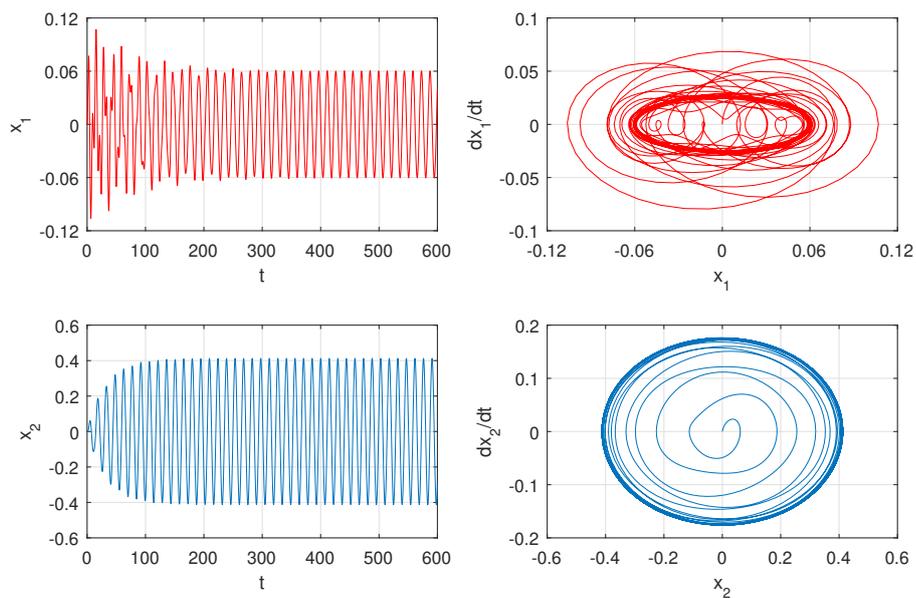
As Figuras 33, 34 e 35 correspondem aos casos em que $\tau = 0.5, 1$ e 2 , respectivamente. Foi tomado $\sigma = 0.1$. Essas figuras mostram que, como para $\tau = 0$, o sistema principal alcança o equilíbrio após certo tempo e, quando isso ocorre, a amplitude é aproximadamente igual em todos os casos. No entanto, de modo semelhante ao que ocorre no primeiro caso

Figura 31 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 0$, $\sigma = 0.1$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.



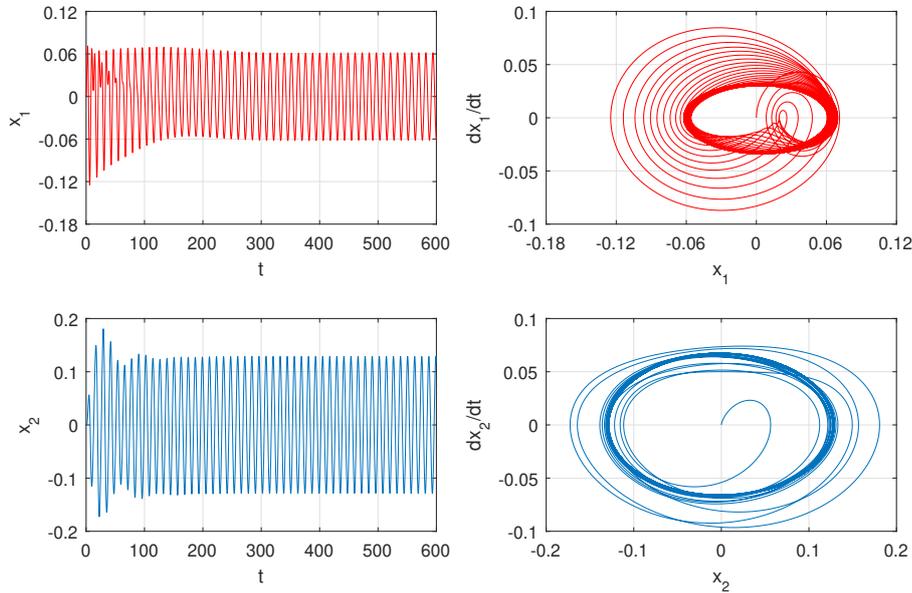
Fonte: Autor

Figura 32 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 0$, $\sigma = 0.01$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.



Fonte: Autor

Figura 33 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 0.5$, $\sigma = 0.1$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.

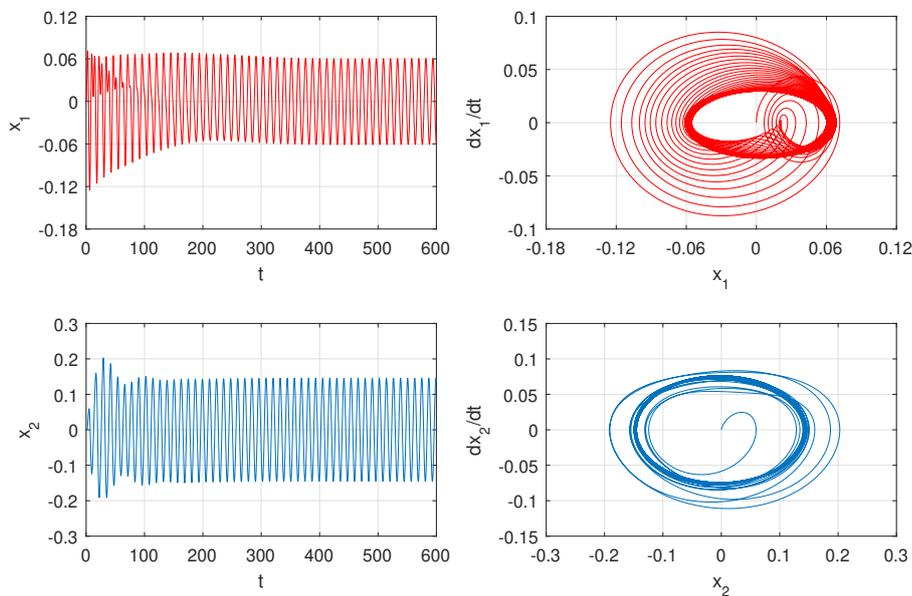


Fonte: Autor

de ressonância primária, o equilíbrio é alcançado após tempo muito maior quando $\tau = 2$. Por sua vez, o absorvedor também alcança o equilíbrio em todos os casos. No entanto, sua amplitude de oscilação sofre pequeno aumento conforme τ cresce entre os valores considerados. Esse aumento é consistente com o aumento da amplitude da aproximação perturbativa correspondente à solução estacionária, dada por $a_1 = 0$, $a_2 = 0.119331020777165$, μ_1 arbitrário, $\gamma_2 = -0.288324127861688$ quando $\tau = 0.5$, por $a_1 = 0$, $a_2 = 0.129231258016655$, μ_1 arbitrário, $\gamma_2 = -0.280389520739781$ quando $\tau = 1$, e por $a_1 = 0$, μ_1 arbitrário, $a_2 = 0.150740703514022$, $\gamma_2 = -0.190327667168355$ quando $\tau = 2$.

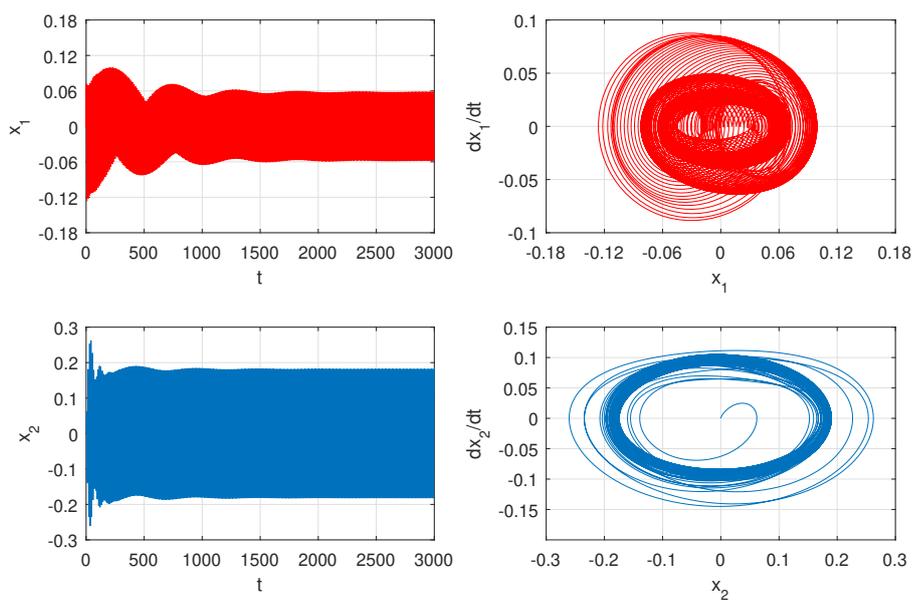
As Figuras 36 e 37 apresentam a evolução no tempo de ambos os sistemas primário e secundário quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right]$. Nessas figuras, foram consideradas condições iniciais próximas das soluções perturbativas correspondentes às soluções estacionárias $a_1 = 0$, $a_2 = 0.157337352820870$, μ_1 arbitrário, $\gamma_2 = 0.128955646156196$ (caso em que o absorvedor é completamente eficiente) e $a_1 = 0.131089325623447$, $a_2 = 0.161926318112239$, μ_1 arbitrário, $\gamma_2 = 0.132738744508185$. Mais precisamente, na Figura 36, consideramos $x_1(t) = \phi_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \phi_2(t)$, $x_2(t) = \phi_3(t)$, $\dot{x}_2(t) = \phi_4(t)$, $t \in [-\tau, 0]$, onde $\phi_1(t) = 0$, $\phi_2(t) = 0$, $\phi_3 = a_2 \cos((\sigma + \omega_2)t - \gamma_2)$, $\phi_4 = -a_2(\sigma + \omega_2) \sin((\sigma + \omega_2)t - \gamma_2)$, com $a_2 = 0.16$, $\gamma_2 = 0.13$, e na Figura 37, consideramos $x_1(t) = \psi_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \psi_2(t)$, $x_2(t) = \psi_3(t)$, $\dot{x}_2(t) = \psi_4(t)$,

Figura 34 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 1$, $\sigma = 0.1$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.



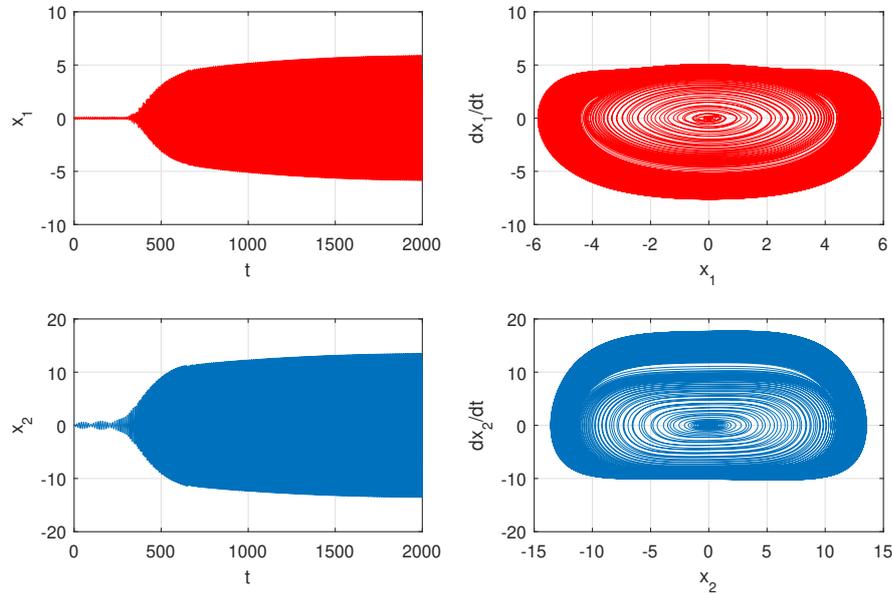
Fonte: Autor

Figura 35 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = 2$, $\sigma = 0.1$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.



Fonte: Autor

Figura 36 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right] \approx 3.68$, $\sigma = 0.1$, $x_1(t) = \phi_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \phi_2(t)$, $x_2(t) = \phi_3(t)$, $\dot{x}_2(t) = \phi_4(t)$, $t \in [-\tau, 0]$.



Fonte: Autor

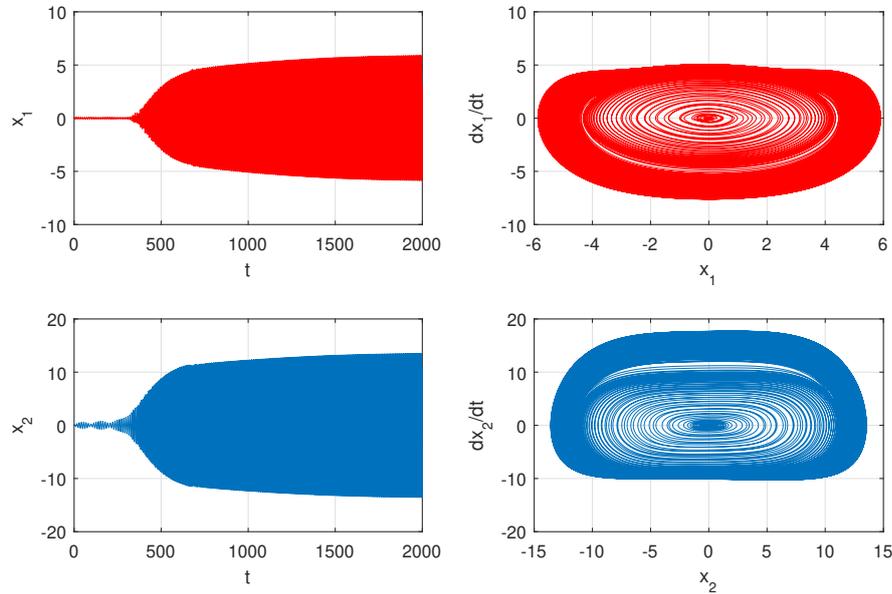
$t \in [-\tau, 0]$, onde $\psi_1(t) = a_1 \cos(\mu_1 + \omega_1 t)$, $\psi_2(t) = -a_1 \omega_1 \sin(\mu_1 + \omega_1 t)$, $\psi_3(t) = a_2 \cos((\sigma + \omega_2)t - \gamma_2) + \Delta_2 a_1 \cos(\mu_1 + \omega_1 t)$, $\psi_4(t) = -a_2(\sigma + \omega_2) \sin((\sigma + \omega_2)t - \gamma_2) - \Delta_2 a_1 \omega_1 \sin(\mu_1 + \omega_1 t)$, com $a_1 = 0.13$, $a_2 = 0.16$, $\mu_1 = 0$, $\gamma_2 = 0.13$. Essas figuras mostram que a amplitude de oscilação tanto do sistema principal quanto do absorvedor é inicialmente pequena e cresce ao longo do tempo. O comportamento da solução é semelhante nos dois casos.

3.4.4.2 Soluções estacionárias

Nesta seção, analisamos as soluções estacionárias para diferentes valores dos parâmetros do sistema. Essa análise é realizada por meio de gráficos com as respostas de frequência do sistema principal e do absorvedor. Para obter esses gráficos, consideramos os resultados apresentados na Seção 3.4.1. Apenas o caso em que o absorvedor não é completamente eficiente é considerado, pois o objetivo principal é analisar a amplitude de oscilação do sistema primário. A menos que mencionado o contrário, $f = 0.08$ e os parâmetros m_i , k_{ij} e c_i , $i = 1, 2$, $j = 1, 3$, assumem os valores apresentados na Tabela 2.

A Figura 38 apresenta curvas de resposta de frequência do sistema principal e do absorvedor

Figura 37 – Respostas do sistema principal e do absorvedor quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right] \approx 3.68$, $\sigma = 0.1$, $x_1(t) = \psi_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \psi_2(t)$, $x_2(t) = \psi_3(t)$, $\dot{x}_2(t) = \psi_4(t)$, $t \in [-\tau, 0]$.

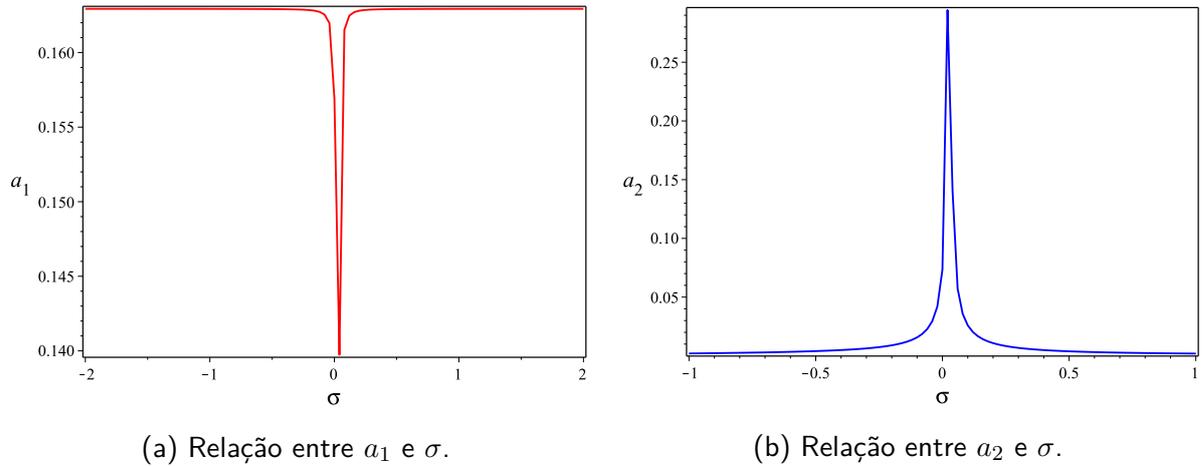


Fonte: Autor

quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right]$. Ao contrário do primeiro caso de ressonância primária, a amplitude de oscilação do sistema principal é menor para valores de σ próximos de zero. Essa relação é invertida para o absorvedor, isto é, a amplitude de oscilação é maior para valores de σ próximos de zero. Essa inversão é resultado da equação (3.80). O caso em que $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right]$ também é considerado na Figura 39. Nessa figura, foram adotados diferentes valores para os parâmetros do absorvedor. Como pode ser observado, a amplitude de oscilação do sistema principal depende de forma significativa de m_2 , k_{21} , k_{23} e c_2 . Essa dependência é justificada pela relação entre os coeficientes das equações (3.80) e (3.81) e esses parâmetros, conforme (3.63), (3.69), (3.6) e (3.3). Por exemplo, a relação entre a amplitude a_1 e a massa m_2 , obtida através das equações (3.80) e (3.81), é apresentada na Figura 40. O valor mínimo de a_1 é aproximadamente 0.016 e é alcançado quando $m_2 = 1.2$.

A Figura 41 apresenta as respostas de frequência do sistema principal e do absorvedor para $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right]$, com $k = 1, \dots, 6$. Essa figura mostra que variando σ , o mínimo da amplitude de oscilação do sistema principal é atingido para valores distintos do atraso no tempo. A variação é maior para valores de σ próximos de zero. Essa observação é confirmada pela Figura 42, que mostra a relação entre a amplitude a_1 e o atraso no tempo

Figura 38 – Curvas de resposta de frequência do sistema principal e do absorvedor.



Fonte: Autor

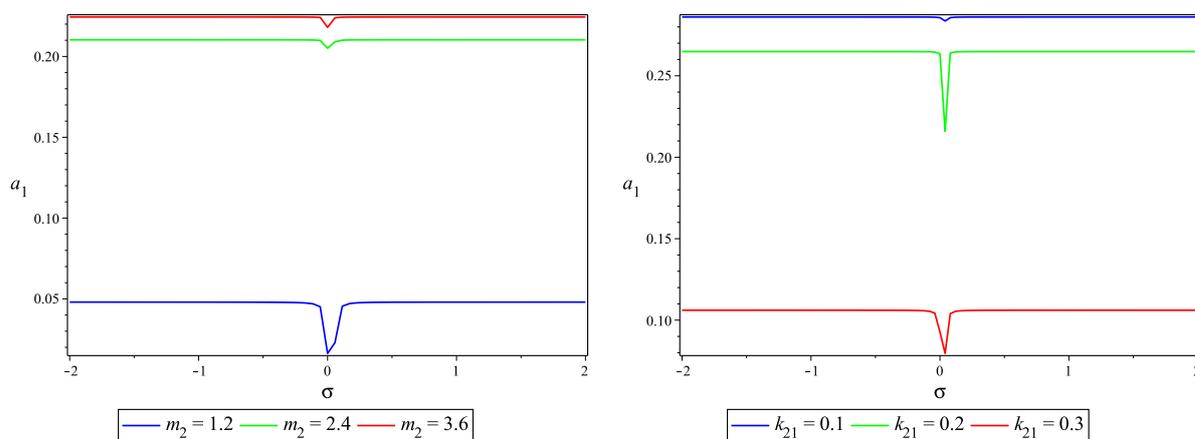
τ para valores distintos de σ . Nessa figura, foram considerados apenas pontos da forma $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right]$, com $k \in \mathbb{N}$.

3.4.4.3 Estabilidade assintótica

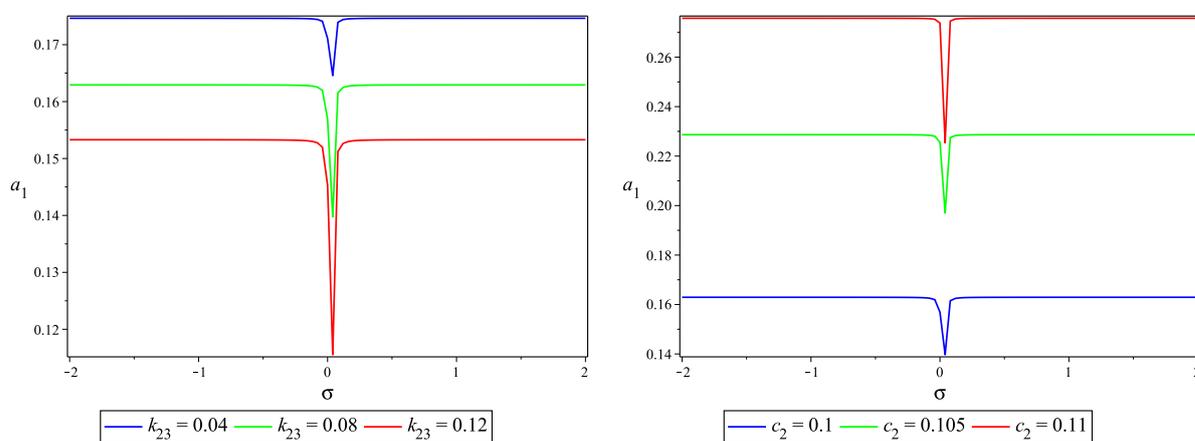
O objetivo nesta seção é analisar a estabilidade assintótica do sistema para diferentes valores do atraso no tempo. A análise é efetuada considerando o caso de ressonância primária $\Omega \approx \omega_2$. Também nesta seção, aplicamos o Teorema de Prontryakin para obter os resultados de estabilidade. Dessa forma, consideramos novamente as funções $R(\omega) = \Re(p(i\omega))$, $S(\omega) = \Im(p(i\omega))$ e $P(\omega) = R(\omega)S'(\omega) - S(\omega)R'(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, onde p é o quasi-polinômio característico. Para o sistema em estudo, R e S são dadas por (3.92) e (3.93), respectivamente.

As Figuras 43, 44, 45 e 46 apresentam gráficos de P para $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2k\pi \right]$, com $k = 1, \dots, 4$. Nas Figuras 43a, 44a, 45a e 46a, foram adotados valores distintos para k_{11} e nas Figuras 43b, 44b, 45b e 46b, foram considerados diferentes valores para c_1 . Para os demais parâmetros iniciais do sistema, foram adotados os valores apresentados na Tabela 2. Por sua vez, para os parâmetros relacionados à excitação externa, consideramos $f = 0.08$ e $\sigma = 0.1$. Em cada um dos casos considerados, é possível perceber que P assume valores negativos, o que é confirmado pelo valor mínimo de P apresentado nas Tabelas 6 e 7. Portanto, também no caso $\Omega \approx \omega_2$, não temos estabilidade assintótica do sistema para os parâmetros considerados.

Figura 39 – Curvas de resposta de frequência do sistema principal.



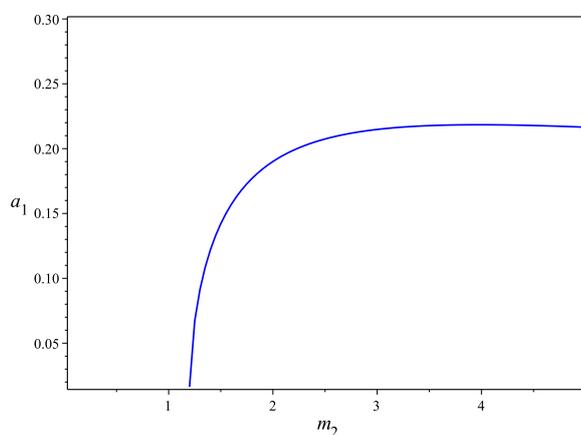
(a) Relação entre a_1 e σ para valores distintos de m_2 . (b) Relação entre a_1 e σ para valores distintos de k_{21} .



(c) Relação entre a_1 e σ para valores distintos de k_{23} . (d) Relação entre a_1 e σ para valores distintos de c_2 .

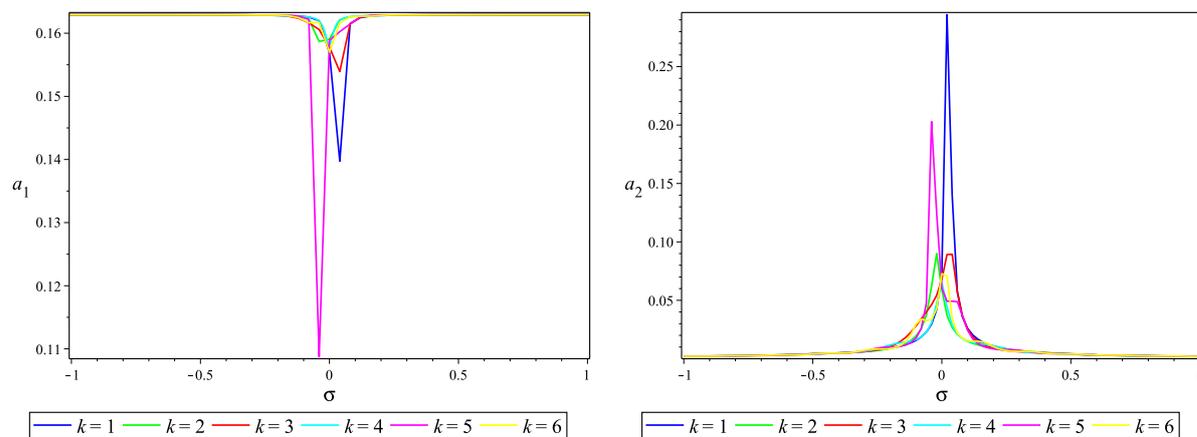
Fonte: Autor

Figura 40 – Relação entre a amplitude de oscilação do sistema principal e a massa do absorvedor para $\sigma = 0$ e $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right]$.



Fonte: Autor

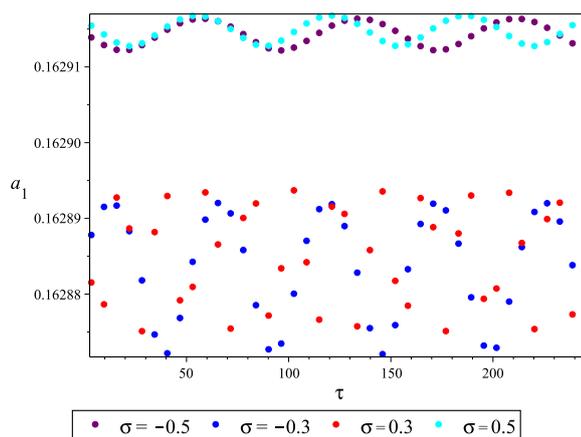
Figura 41 – Curvas de resposta de frequência para valores distintos do atraso no tempo τ .



(a) Relação entre a_1 e σ para valores distintos do atraso no tempo. (b) Relação entre a_2 e σ para valores distintos do atraso no tempo.

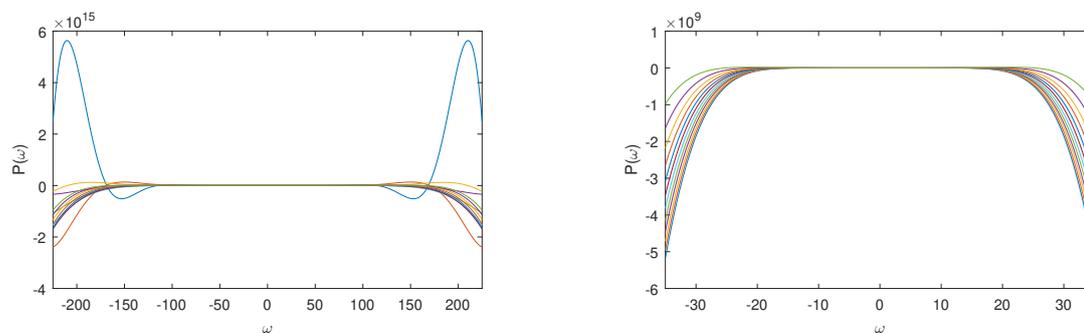
Fonte: Autor

Figura 42 – Curvas de resposta de frequência para valores distintos de σ .



Fonte: Autor

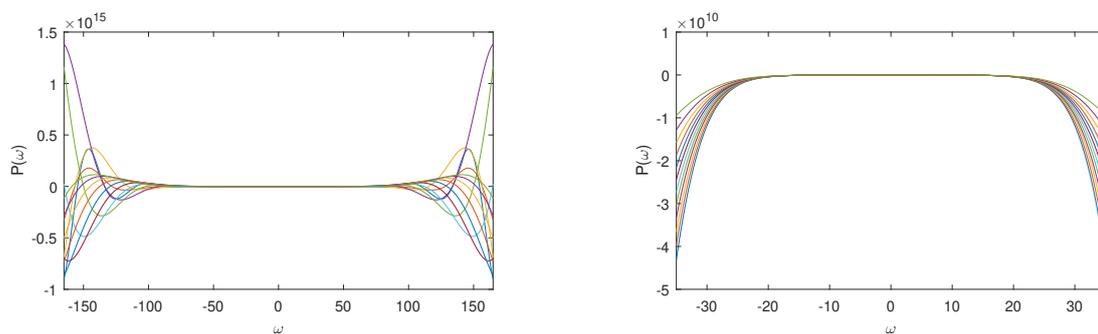
Figura 43 – Gráficos de P quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right]$.



(a) Gráfico de P para $c_1 = 0.1$ e $k_{11} = 5n$, $n = 1, \dots, 12$. (b) Gráfico de P para $k_{11} = 10$ e $c_1 = 0.01n$, $n = 0, \dots, 11$.

Fonte: Autor

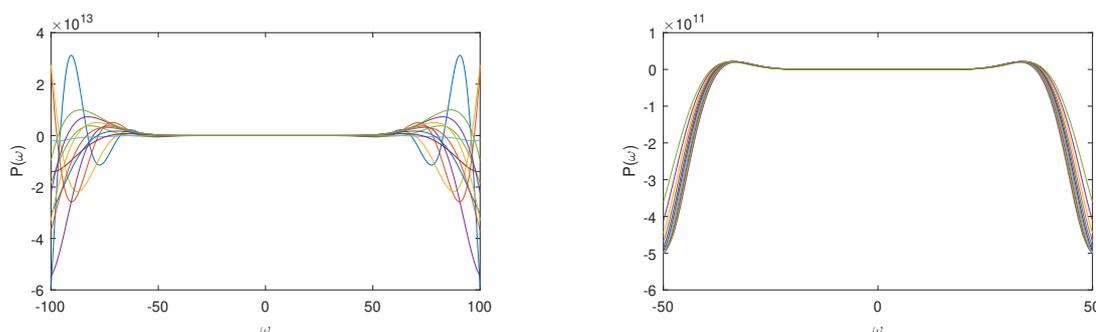
Figura 44 – Gráficos de P quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 4\pi \right]$.



- (a) Gráfico de P para $c_1 = 0.1$ e $k_{11} = 5n$, $n = 1, \dots, 12$. (b) Gráfico de P para $k_{11} = 10$ e $c_1 = 0.01n$, $n = 0, \dots, 11$.

Fonte: Autor

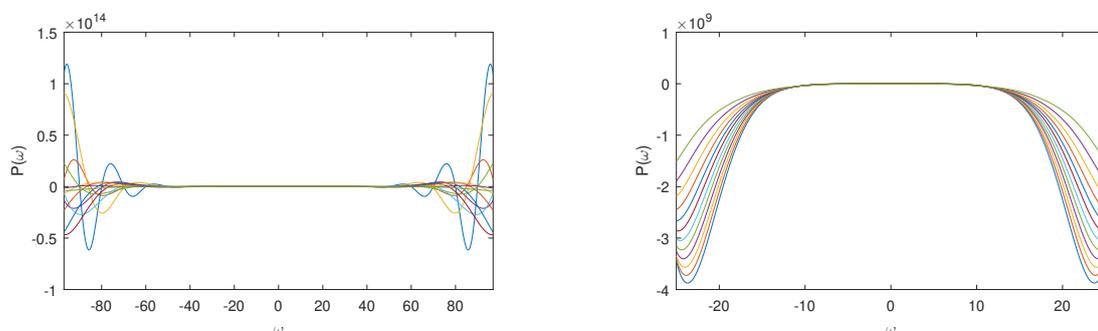
Figura 45 – Gráficos de P quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 6\pi \right]$.



- (a) Gráfico de P para $c_1 = 0.1$ e $k_{11} = 5n$, $n = 1, \dots, 12$. (b) Gráfico de P para $k_{11} = 10$ e $c_1 = 0.01n$, $n = 0, \dots, 11$.

Fonte: Autor

Figura 46 – Gráficos de P quando $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 8\pi \right]$.



- (a) Gráfico de P para $c_1 = 0.1$ e $k_{11} = 5n$, $n = 1, \dots, 12$. (b) Gráfico de P para $k_{11} = 10$ e $c_1 = 0.01n$, $n = 0, \dots, 11$.

Fonte: Autor

Tabela 7 – Valor mínimo de P .

c_1	$\min P(\omega)$ no intervalo $[-200, 200]$ para $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2k\pi \right]$			
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
0	-9.2404×10^{14}	-1.5563×10^{15}	-8.8852×10^{15}	-8.7836×10^{15}
0.01	-1.0084×10^{15}	-1.5329×10^{15}	-9.0504×10^{15}	-8.5441×10^{15}
0.02	-1.1007×10^{15}	-1.5020×10^{15}	-9.2011×10^{15}	-8.2754×10^{15}
0.03	-1.2024×10^{15}	-1.4627×10^{15}	-9.3352×10^{15}	-7.9754×10^{15}
0.04	-1.3150×10^{15}	-1.4140×10^{15}	-9.4502×10^{15}	-7.6407×10^{15}
0.05	-1.4410×10^{15}	-1.3542×10^{15}	-9.5424×10^{15}	-7.2666×10^{15}
0.06	-1.5613×10^{15}	-1.2810×10^{15}	-9.5412×10^{15}	-6.8468×10^{15}
0.07	-1.6036×10^{15}	-1.1910×10^{15}	-9.1711×10^{15}	-6.3714×10^{15}
0.08	-1.5547×10^{15}	-1.0788×10^{15}	-8.3701×10^{15}	-5.8251×10^{15}
0.09	-1.4062×10^{15}	-9.3547×10^{14}	-7.0954×10^{15}	-5.1824×10^{15}
0.1	-1.1469×10^{15}	-7.4319×10^{14}	-5.2858×10^{15}	-4.3931×10^{15}
0.11	-7.5536×10^{14}	-4.5751×10^{14}	-2.8138×10^{15}	-3.3301×10^{15}

Fonte: Autor

Tabela 6 – Valor mínimo de P .

k_{11}	$\min P(\omega)$ no intervalo $[-200, 200]$ para $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2k\pi \right]$			
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
5	-5.1348×10^{14}	-1.0240×10^{15}	-5.7734×10^{15}	-1.3931×10^{16}
10	-1.1469×10^{15}	-7.4319×10^{14}	-5.2858×10^{15}	-4.3931×10^{15}
15	-7.1675×10^{10}	-1.8452×10^{15}	-3.8146×10^{15}	-8.7916×10^{15}
20	-2.1417×10^{14}	-5.4610×10^{15}	-4.8808×10^{15}	-1.7710×10^{15}
25	-5.2659×10^{14}	-2.8579×10^{14}	-9.9910×10^{14}	-1.2588×10^{15}
30	-6.4603×10^{14}	-4.8688×10^{14}	-9.3187×10^{13}	-4.7486×10^{15}
35	-6.3839×10^{14}	-7.2300×10^{14}	-8.0497×10^{14}	-8.1651×10^{15}
40	-5.7119×10^{14}	-9.8406×10^{14}	-1.9795×10^{15}	-2.1382×10^{15}
45	-4.8332×10^{14}	-1.2604×10^{15}	-3.6232×10^{15}	-1.1958×10^{15}
50	-3.9380×10^{14}	-1.5422×10^{15}	-5.4997×10^{15}	-8.3072×10^{14}
55	-3.1087×10^{14}	-1.7799×10^{15}	-4.9744×10^{15}	-1.4427×10^{14}
60	-2.3744×10^{14}	-1.6900×10^{15}	-2.4334×10^{15}	-2.1020×10^{14}

Fonte: Autor

3.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo, analisamos a influência de parâmetros sobre o comportamento dinâmico de um sistema de dois graus de liberdade sob ressonância primária. O sistema é composto por um sistema principal, modelado como uma massa conectada a uma base por uma mola e um amortecedor, e um absorvedor consistindo de uma massa acoplada ao sistema principal através de uma mola e um amortecedor. O sistema principal está sujeito a uma excitação externa da forma $f \cos(\Omega t)$, onde f é constante. Ambas as molas do sistema têm coeficientes de rigidez lineares e não lineares cúbicos. Além disso, um atraso no tempo medindo a defasagem do efeito de amortecimento entre o sistema principal e o absorvedor é considerado. Como resultado, as equações de movimento para o sistema são equações diferenciais não lineares com atraso. Apenas uma direção de movimento foi considerada. O método de múltiplas escalas foi aplicado e forneceu, em cada caso de ressonância primária, um sistema de equações diferenciais para as amplitudes e fases dos sistemas primário e secundário. Em cada caso, as soluções estacionárias foram estudadas e a linearização do sistema em torno de uma solução desse tipo foi determinada. Nessa parte, destacamos o primeiro ponto relevante do capítulo: nos sistemas lineares obtidos, os termos com atraso não foram substituídos por termos sem atraso (através, por exemplo, da fórmula de Taylor), ou seja, as equações desses sistemas são equações funcionais. Essa substituição é comum em artigos da área, como em Sun e Xu (2016), Saeed, El-Ganini e Eissa (2013), Zhao e Xu (2007), Amer, El-Sayed e Kotb (2016). No entanto, tem como ponto negativo um maior erro de aproximação, o que pode comprometer os resultados de estabilidade. Dessa forma, no lugar do polinômio característico, foi necessário lidar com o quasi-polinômio característico e, portanto, o critério de Routh-Hurwitz não foi suficiente para analisar a estabilidade do sistema. Para contornar esse problema, foi necessário usar uma ferramenta mais complexa do método da função característica, a saber, o teorema de Pontryakin. Outro ponto importante é a relação obtida entre o atraso no tempo e a frequência natural do absorvedor no primeiro regime de ressonância primária no caso $a_2 \neq 0$, e entre o atraso no tempo e as frequências naturais e constantes de amortecimento de ambos os sistemas no segundo regime de ressonância primária no caso $a_1 \neq 0$. Após essa etapa, a influência dos parâmetros sobre as respostas no tempo de ambos os sistemas e as soluções estacionárias foi investigada. Para finalizar, uma análise paramétrica da estabilidade assintótica do sistema em torno de uma solução estacionária foi realizada. Como resultado, foi obtido que o sistema

principal e o absorvedor alcançam o equilíbrio em todos os casos considerados nas Seções 3.3.4.1 e 3.4.4.1, com exceção dos casos em que $\tau = \frac{1}{\omega_1} \left[-\arccos\left(-\frac{G_1}{G_2}\right) + 2\pi \right]$ no segundo regime de ressonância primária. Também com exceção desses casos, a amplitude de oscilação de cada sistema se aproxima ao longo do tempo da amplitude da aproximação perturbativa correspondente à solução estacionária, considerando o erro da aproximação. Além disso, no primeiro caso de ressonância primária, foi observado um pequeno aumento da amplitude de oscilação do sistema principal quando τ cresce entre os valores $\tau = 0, 0.5, 1$ e 2 . O mesmo ocorre com o absorvedor. Esse aumento da amplitude é consistente com o aumento da amplitude da aproximação perturbativa correspondente à solução estacionária. Apesar disso, a relação entre o amortecimento e o atraso no tempo não é monótona, o que pode ser confirmado por meio das Figuras 20a e 25a, bem como da Tabela 3. No segundo caso de ressonância primária, apenas o absorvedor tem aumento significativo da amplitude de oscilação quando τ cresce entre os valores $\tau = 0, 0.5, 1$ e 2 , o que também é consistente com o comportamento da aproximação perturbativa correspondente à solução estacionária. Em relação às soluções estacionárias, foi obtido que no caso $\Omega \approx \omega_1$, a amplitude do sistema principal é maior para valores de σ próximos de zero. No caso $\Omega \approx \omega_2$, essa relação é invertida, ou seja, a amplitude é menor para valores de σ próximos de zero. Nos dois casos, para σ variando, a amplitude mínima de oscilação do sistema principal é atingida para valores distintos de τ , o que mostra que o atraso no tempo é um parâmetro a ser considerado em projetos. Por fim, a análise de estabilidade realizada nas Seções 3.3.4.3 e 3.3.4.3 por meio do teorema de Pontryakin forneceu que o sistema não é assintoticamente estável nos casos considerados nesta tese.

4 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE UM SISTEMA COM AMORTECIMENTO FRACIONÁRIO

Neste capítulo, estudamos o comportamento assintótico de um sistema composto por uma haste elástica sobre uma fundação viscoelástica do tipo Zener fracionário. Modelos envolvendo derivadas fracionárias para descrever o comportamento de materiais viscoelásticos têm sido considerados em um grande número de trabalhos nas últimas décadas, como por exemplo em Paunović et al. (2019), Cajić, Karličić e Lazarević (2017), Lewandowski e Wielentejczyk (2017), Atanackovic e Stankovic (2004), Sun e Chen (2015), Lewandowski e Pawlak (2011), Rossikhin, Shitikova e Shcheglova (2010), Freundlich (2019), Permoon, Haddadpour e Javadi (2018). O movimento da estrutura é descrito por um sistema de equações diferenciais parciais com derivadas fracionárias que pode ser formulado como o seguinte problema de evolução

$$\begin{cases} \ddot{u}(\tau) + \beta q(\tau) = -Au(\tau), & \tau \geq 0, \\ (1 + \tau_q D_\tau^\alpha)q(\tau) = (1 + \tau_u D_\tau^\alpha)u(\tau), & \tau \geq 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde u representa o deslocamento na direção y , q representa a tensão na fundação e A é um operador com domínio formado por funções satisfazendo condições relacionadas a restrições sobre as extremidades da haste. Para obter uma solução do problema (4.1), o método de Galerkin e a técnica da transformada de Laplace são aplicados. Por sua vez, o comportamento assintótico da solução obtida é analisado através da \mathfrak{M} -transformada. Este capítulo está organizado da seguinte forma: na primeira seção, apresentamos o sistema considerado nesta parte da tese, bem como as equações de movimento para esse sistema. Na Seção 4.2, estudamos os autovalores do operador A . Esses autovalores dependem das condições de fronteira e estão diretamente relacionados ao comportamento assintótico do sistema. Na Seção 4.3, definimos a solução aproximada de Galerkin do problema (4.1). Essa aproximação consiste de uma soma finita em que cada termo é o produto de uma função da variável espacial (autofunção de A) e uma função da variável temporal. Se as condições iniciais satisfazem certas propriedades, então a aproximação de Galerkin é na verdade uma solução do problema. Um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável temporal envolvendo derivadas fracionárias é então obtido. Na Seção 4.4, o método da transformada de Laplace é aplicado para obter uma solução desse sistema no espaço de distribuições \mathcal{K}'_+ . Na seção seguinte, uma expressão analítica para essa solução é construída. Por sua vez, na Seção 4.6, a regularidade dessa solução é estudada. Na Seção 4.7, o comportamento assintótico do sistema é investigado por meio

da \mathcal{W} -transformada. A questão da existência de solução local para um problema mais geral é então considerada na Seção 4.8. Finalmente, na Seção 4.9, apresentamos as conclusões e observações finais referentes a este capítulo.

4.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

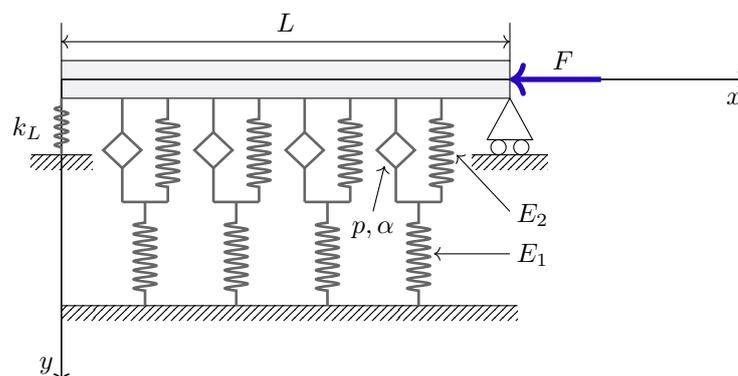
Neste capítulo, consideramos uma haste elástica posicionada sobre uma fundação viscoelástica fracionária. Assumimos que a extremidade esquerda da haste está presa a uma mola de constante k_L e que essa extremidade não sofre deslocamento horizontal. Por sua vez, consideramos que a extremidade direita da haste é simplesmente suportada. Além disso, a haste é axialmente comprimida por uma força de intensidade constante. Assumimos ainda que a fundação é do tipo Zener fracionário, isto é, que a relação entre tensão (Q) e deformação (Δ) na fundação tem a forma

$$Q + \tau_Q D_t^\alpha Q = E_p(\Delta + \tau_\Delta D_t^\alpha \Delta), \quad (4.2)$$

onde $E_p = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$, $\tau_Q = \frac{p}{E_1 + E_2}$, $\tau_\Delta = \frac{p}{E_2}$, E_1 e E_2 são as constantes de elasticidade das molas que compõem a fundação e $\alpha \in (0, 1)$ e p são constantes que caracterizam os elementos de amortecimento *springpots* presentes na fundação. Admitimos que os coeficientes E_p , τ_Q e τ_Δ são tais que $E_p > 0$ e $0 < \tau_Q \leq \tau_\Delta$. Essas condições garantem que o modelo (4.2) satisfaz os requisitos da termodinâmica (para mais detalhes, veja Bagley e Torvik (1986)). O sistema em consideração é ilustrado na Figura 47.

De acordo com Atanackovic (1997), as equações de movimento para uma haste elástica

Figura 47 – Sistema formado por uma haste elástica axialmente comprimida sobre uma fundação viscoelástica do tipo Zener fracionário.



Fonte: Autor

são

$$\frac{\partial H}{\partial S} = \rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + bQ, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial S} = -V(1 + \varepsilon) \cos \theta + H(1 + \varepsilon) \sin \theta, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial x}{\partial S} = (1 + \varepsilon) \cos \theta, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial y}{\partial S} = (1 + \varepsilon) \sin \theta, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon = \frac{H \cos \theta + V \sin \theta}{EA}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial S} = \frac{M}{EI}, \quad (4.9)$$

onde $x = x(S, t)$ e $y = y(S, t)$ são as coordenadas de um ponto arbitrário do eixo da haste, $S \in [0, L]$ é o comprimento de arco do eixo da haste no estado não deformado, t é o tempo, $H = H(S, t)$ e $V = V(S, t)$ são as componentes da força em uma seção transversal da haste ao longo dos eixos x e y , respectivamente, $\varepsilon = \varepsilon(S, t)$ é a deformação axial da haste, $\theta = \theta(S, t)$ é o ângulo entre a tangente ao eixo da haste e o eixo x , $M = M(S, t)$ é o momento fletor, $q_x = q_x(S, t)$ e $q_y = q_y(S, t)$ são as intensidades das forças distribuídas ao longo dos eixos x e y , respectivamente, ρ_0 é a densidade de massa da haste, EI é a rigidez fletora da haste e EA é a rigidez extensional da haste.

Para a extremidade esquerda da haste, as condições são (veja Magrab (2012))

$$\left[k_L y + EI \frac{\partial^3 y}{\partial S^3} \right]_{S=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial S}(0, t) = 0, \quad x(0, t) = 0. \quad (4.10)$$

Por sua vez, as condições referentes à extremidade direita são

$$y(L, t) = 0, \quad M(L, t) = 0, \quad H(L, t) = -F. \quad (4.11)$$

Observando que a deformação Δ da fundação coincide com o deslocamento vertical y da haste, a equação (4.2) pode ser reescrita como

$$Q + \tau_Q D_t^\alpha Q = E_p(y + \tau_y D_t^\alpha y), \quad (4.12)$$

onde $\tau_y = \tau_\Delta$. Além disso, tendo em vista que $\tau_Q = \tau_y$ corresponde ao caso em que a fundação é elástica e que nosso objetivo é estudar o caso em que a fundação é viscoelástica fracionária, assumimos que $\tau_Q \neq \tau_y$.

A solução trivial do sistema (4.3)-(4.12), que corresponde ao caso em que o eixo da haste permanece reto ao longo do tempo, é dada por

$$\begin{aligned}
 H^0(S, t) &= -F, \\
 V^0(S, t) &= 0, \\
 M^0(S, t) &= 0, \\
 x^0(S, t) &= \left(1 - \frac{F}{EA}\right) S, \\
 y^0(S, t) &= 0, \\
 \varepsilon^0(S, t) &= -\frac{F}{EA}, \\
 \theta^0(S, t) &= 0, \\
 Q^0(S, t) &= 0.
 \end{aligned}$$

Escrevendo a solução do sistema na forma $H = H^0 + \Delta H, \dots, Q = Q^0 + \Delta Q$, onde $\Delta H, \dots, \Delta Q$ são perturbações, assumidas pequenas, usando essas expressões nas equações (4.3)-(4.9), (4.12) e negligenciando os termos de ordem maior do que 1 nas perturbações, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta H}{\partial S} &= \rho_0 \frac{\partial^2 \Delta x}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial \Delta V}{\partial S} &= \rho_0 \frac{\partial^2 \Delta y}{\partial t^2} + b \Delta Q, \\
 \frac{\partial \Delta M}{\partial S} &= -\Delta V \left(1 - \frac{F}{EA}\right) - F \left(1 - \frac{F}{EA}\right) \Delta \theta, \\
 \frac{\partial \Delta x}{\partial S} &= \Delta \varepsilon, \\
 \frac{\partial \Delta y}{\partial S} &= \left(1 - \frac{F}{EA}\right) \Delta \theta,
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \varepsilon &= \frac{\Delta H}{EA}, \\
 \frac{\partial \Delta \theta}{\partial S} &= \frac{\Delta M}{EI},
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\Delta Q + \tau_Q D_t^\alpha \Delta Q = E_p (\Delta y + \tau_y D_t^\alpha \Delta y).$$

Por sua vez, as condições de fronteira assumem a forma

$$\begin{aligned}
 k_L \Delta y(0, t) + EI \frac{\partial^3 \Delta y}{\partial S^3}(0, t) &= 0, & \frac{\partial \Delta y}{\partial S}(0, t) &= 0, & \Delta x(0, t) &= 0, \\
 \Delta y(L, t) &= 0, & \Delta M(L, t) &= 0, & \Delta H(L, t) &= 0.
 \end{aligned}$$

Além disso, as equações (4.13) e (4.14) fornecem

$$\frac{\partial^2 \Delta y}{\partial S^2}(L, t) = 0.$$

Agora, considerando as quantidades adimensionais

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{FL^2}{EI}, & \tau &= \frac{t}{c}, & \mu &= \sqrt{\frac{EAL^2}{EI}}, & u &= \frac{\Delta y}{L}, & \xi &= \frac{S}{L}, \\ \beta &= b \frac{E_p L^4}{EI}, & q &= \frac{\Delta Q}{LE_p}, & \tau_q &= \frac{\tau_Q}{c^\alpha}, & \tau_u &= \frac{\tau_y}{c^\alpha}, & K_L &= \frac{k_L L^3}{EI}, \end{aligned}$$

onde $c = \sqrt{\frac{\rho_0 L^4}{EI}}$, o sistema nas perturbações fornece

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\mu^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu^2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \beta \left(1 - \frac{\lambda}{\mu^2}\right)^2 q = 0, \quad (4.15)$$

$$q + \tau_q D_\tau^\alpha q = u + \tau_u D_\tau^\alpha u, \quad (4.16)$$

$$K_L u(0, \tau) + \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \tau) = 0, \quad (4.17)$$

$$u(1, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1, \tau) = 0. \quad (4.18)$$

Seja A o operador diferencial dado por

$$A = D_\xi^4 + \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\mu^2}\right) D_\xi^2, \quad (4.19)$$

onde D_ξ denota a derivada em relação a ξ , com domínio $D(A)$ formado por funções apropriadas definidas no intervalo $[0, 1]$ satisfazendo as condições

$$K_L v(0) + D_\xi^3 v(0) = 0, \quad D_\xi v(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad D_\xi^2 v(1) = 0. \quad (4.20)$$

Então, o problema (4.15)-(4.18) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu^2}\right)^2 \ddot{u}(\tau) + \beta \left(1 - \frac{\lambda}{\mu^2}\right)^2 q(\tau) = -Au(\tau), & \tau \geq 0, \\ (I + \tau_q D_\tau^\alpha)q(\tau) = (I + \tau_u D_\tau^\alpha)u(\tau), & \tau \geq 0, \end{cases} \quad (4.21)$$

onde o ponto representa a derivada em relação a τ e I denota o operador identidade.

Neste capítulo, apenas o caso em que a haste é não extensível é considerado, o que corresponde a $EA \rightarrow \infty$, de onde $\frac{\lambda}{\mu^2} \rightarrow 0$.

4.2 AUTOVALORES DO OPERADOR A

Nesta seção, o objetivo é estudar propriedades dos autovalores do operador A , dado por (4.19). Essas propriedades têm um papel importante na análise do comportamento assintótico do sistema. O estudo é realizado considerando A como um operador em $L^2(0, 1)$. Dessa forma, $D(A)$ pode ser considerado como o subespaço de $L^2(0, 1)$ formado pelas funções $v \in H^4(0, 1)$ tais que as condições (4.20) são satisfeitas.

Antes de prosseguirmos, note que como estamos considerando o caso em que a haste é não extensível, o operador A assume a forma

$$A = D^4 + \lambda D^2.$$

É importante observar que λ é um parâmetro relacionado à força externa.

Proposição 4.2.1. *O operador $A : D(A) \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ é autoadjunto.*

Demonstração. Sejam $u, v \in D(A)$. Usando integração por partes para funções em espaços de Sobolev (veja Brezis (2010), por exemplo), obtemos

$$(Au, v) = \sum_{i=0}^3 (-1)^i D^{3-i}u(\xi) D^i \bar{v}(\xi) \Big|_0^1 + \lambda \sum_{i=0}^1 (-1)^i D^{1-i}u(\xi) D^i \bar{v}(\xi) \Big|_0^1 + (u, Av), \quad (4.22)$$

onde (\cdot, \cdot) denota o produto interno de $L^2(0, 1)$. A demonstração é concluída observando que como u e v satisfazem as condições (4.20), os termos do lado direito de (4.22), com exceção de (u, Av) , são iguais a zero ou se cancelam. \square

Proposição 4.2.2. *Existe $\lambda_0 > 0$ tal que se $\lambda \leq \lambda_0$, então A é positivo definido.*

Demonstração. Seja $u \in D(A)$. Então, usando novamente a fórmula de integração por partes para funções em espaços de Sobolev, obtemos

$$(Au, u) = K_L |u(0)|^2 + \|D^2u\|_{L^2(0,1)}^2 - \lambda \|Du\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (4.23)$$

Pelo Teorema 2.1.5, temos

$$\|Du - \overline{Du}\|_{L^2(0,1)} \leq C \|D^2u\|_{L^2(0,1)},$$

onde

$$\overline{Du} = \int_0^1 Du(\xi) d\xi = -u(0)$$

(pelo Teorema 2.1.4) e $C = \frac{1}{\pi}$. Por outro lado, um cálculo direto fornece

$$\|Du + u(0)\|_{L^2(0,1)}^2 = \|Du\|_{L^2(0,1)}^2 - |u(0)|^2.$$

Segue que

$$\|Du\|_{L^2(0,1)}^2 \leq |u(0)|^2 + C^2 \|D^2u\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (4.24)$$

Usando (4.23) e (4.24), obtemos

$$(Au, u) \geq (K_L - \lambda) |u(0)|^2 + \left(1 - \lambda C^2\right) \|D^2u\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (4.25)$$

Essa desigualdade fornece que o operador A é positivo definido quando $\lambda < K_L$ e $\lambda \leq \pi^2$ ou quando $\lambda = K_L$ e $\lambda < \pi^2$.

Observe ainda que se $u \in D(A)$, então

$$u(0) = \int_0^1 (\xi - 1) D^2 u(\xi) d\xi,$$

de onde,

$$\begin{aligned} |u(0)| &\leq \int_0^1 |(\xi - 1) D^2 u(\xi)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|D^2 u\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

pelo Teorema de Hölder.

Segue de (4.25) e (4.26) que se $\lambda > K_L$, então

$$(Au, u) \geq \left[\frac{1}{3}(K_L - \lambda) + (1 - \lambda C^2) \right] \|D^2 u\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Nesse caso, A é positivo definido quando $\lambda < \frac{\frac{1}{3}K_L + 1}{\frac{1}{3} + C^2}$.

Note que em qualquer um dos casos, o operador A é positivo definido quando $\lambda \leq \lambda_0$, onde $\lambda_0 = \frac{1}{\frac{1}{3} + C^2} \approx 2.3$. \square

Observação 4.2.1. A demonstração acima fornece não apenas que A é positivo definido quando o parâmetro λ é menor ou igual a λ_0 , para qualquer valor de $K_L > 0$, mas que isso ocorre em qualquer um dos seguintes casos

- (a) $\lambda < K_L$ e $\lambda \leq \pi^2$,
- (b) $\lambda = K_L < \pi^2$,
- (c) $K_L < \lambda < \frac{\frac{1}{3}K_L + 1}{\frac{1}{3} + C^2}$, onde $C = \frac{1}{\pi}$.

Dessa forma, dependendo do valor de K_L , o operador A pode ser positivo definido para valores de λ maiores do que λ_0 . Essa propriedade é importante pois, como será mostrado posteriormente, autovalores não negativos de A estão associados a soluções que se aproximam de zero quando $t \rightarrow \infty$, enquanto o mesmo pode não ocorrer com autovalores negativos.

Observação 4.2.2. Como pode ser verificado sem dificuldades, a única solução clássica do problema formado pela equação diferencial $Av = -\frac{\lambda^2}{4}v$ e pelas condições (4.20) é a solução nula. Segue da teoria de operadores diferenciais lineares que o operador A tem no máximo uma quantidade enumerável de autovalores, esses autovalores não têm ponto limite e têm

multiplicidade finita. Além disso, como A é autoadjunto, existe uma base ortonormal $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(0, 1)$ formada por autofunções de A (de classe C^∞) (para mais detalhes sobre a teoria de operadores diferenciais lineares, veja Naimark (1967), por exemplo). Para finalizar a observação, note que se χ_n é o autovalor de A associado a ϕ_n , $n \in \mathbb{N}$, então

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} (Au, \phi_n) \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u, A\phi_n) \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n (u, \phi_n) \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n (u, \phi_n) \phi_n,$$

para todo $u \in D(A)$.

Os próximos resultados fornecem mais informações sobre o conjunto $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposição 4.2.3. $0 \in \{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se, e somente se, o parâmetro λ é um número real positivo satisfazendo

$$\tan \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda} - \frac{\lambda \sqrt{\lambda}}{K_L}. \quad (4.27)$$

Demonstração. Se $\lambda > 0$, a solução geral da equação diferencial $Av = 0$ é

$$v(\xi) = a_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi) + a_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + a_3 + a_4 \xi. \quad (4.28)$$

Substituindo (4.28) nas condições (4.20), obtemos um sistema linear homogêneo em a_i , $i = 1, \dots, 4$, que possui solução não nula se, e somente se,

$$\lambda \sqrt{\lambda} (K_L - \lambda) \cos \sqrt{\lambda} - K_L \lambda \sin \sqrt{\lambda} = 0. \quad (4.29)$$

Assim, quando $\lambda > 0$, o problema formado pela equação diferencial $Av = 0$ e as condições (4.20) possui solução clássica não nula se, e somente se, λ satisfaz (4.29) ou, equivalentemente, (4.27).

Se $\lambda = 0$, a solução geral de $Av = 0$ é

$$v(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3. \quad (4.30)$$

Substituindo (4.30) nas condições (4.20), obtemos um sistema linear homogêneo em a_i , $i = 1, \dots, 4$, cuja matriz dos coeficientes tem determinante igual a $4K_L + 12$. Como $K_L > 0$, a única solução desse sistema é $a_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$, o que mostra que a única solução clássica é a solução nula. \square

Proposição 4.2.4. Seja $\chi \neq 0, -\frac{\lambda^2}{4}$. Então, $\chi \in \{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se, e somente se, χ é zero da função

$$\begin{aligned} f_{\lambda, K_L}(\chi) &= \delta_\lambda(\chi) \varepsilon_\lambda(\chi) \left[\delta_\lambda(\chi)^2 + \varepsilon_\lambda(\chi)^2 \right] \cosh(\delta_\lambda(\chi)) \cos(\varepsilon_\lambda(\chi)) \\ &\quad - \varepsilon_\lambda(\chi) K_L \sinh(\delta_\lambda(\chi)) \cos(\varepsilon_\lambda(\chi)) \\ &\quad + \delta_\lambda(\chi) K_L \cosh(\delta_\lambda(\chi)) \sin(\varepsilon_\lambda(\chi)), \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde

$$\delta_\lambda(\chi) = \sqrt{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \chi}} \quad e \quad \varepsilon_\lambda(\chi) = \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \chi}}. \quad (4.32)$$

Demonstração. Seja χ um número real não nulo tal que $\chi \neq -\frac{\lambda^2}{4}$ e considere o problema de valor de contorno formado pela equação

$$Av = \chi v \quad (4.33)$$

e pelas condições (4.20).

Levando em consideração as hipóteses sobre χ , a solução geral de (4.33) tem a forma

$$u(\xi) = a_1 \sinh(\delta\xi) + a_2 \cosh(\delta\xi) + a_3 \sin(\varepsilon\xi) + a_4 \cos(\varepsilon\xi), \quad (4.34)$$

onde δ e ε são usados para denotar $\delta_\lambda(\chi)$ e $\varepsilon_\lambda(\chi)$, respectivamente, e a_i , $i = 1, \dots, 4$, são constantes. Substituindo (4.34) nas condições (4.20), obtemos a equação matricial

$$\begin{bmatrix} \delta^3 & K_L & -\varepsilon^3 & K_L \\ \delta & 0 & \varepsilon & 0 \\ \sinh \delta & \cosh \delta & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \\ \delta^2 \sinh \delta & \delta^2 \cosh \delta & -\varepsilon^2 \sin \varepsilon & -\varepsilon^2 \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Dessa forma, o problema formado por (4.33) e (4.20) tem solução clássica não nula se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (4.35) é nulo, o que equivale a

$$\delta\varepsilon (\delta^2 + \varepsilon^2) \cosh \delta \cos \varepsilon - \varepsilon K_L \sinh \delta \cos \varepsilon + \delta K_L \cosh \delta \sin \varepsilon = 0.$$

□

Observação 4.2.3. Os elementos da base ortonormal $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ têm uma das seguintes formas

(a) $\phi_n(\xi) = a_{1n} \sin(\sqrt{\lambda}\xi) + a_{2n} \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + a_{3n} + a_{4n}\xi$ (apenas quando λ é um número real positivo tal que (4.27) é satisfeita),

(b) $\phi_n(\xi) = a_{1n} \sinh(\delta_n \xi) + a_{2n} \cosh(\delta_n \xi) + a_{3n} \sin(\varepsilon_n \xi) + a_{4n} \cos(\varepsilon_n \xi)$,

onde

$$\delta_n = \sqrt{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \chi_n}}, \quad \varepsilon_n = \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \chi_n}}$$

e a_{1n}, \dots, a_{4n} são constantes tais que ϕ_n satisfaz as condições (4.20).

Na sequência, estudamos os autovalores $\chi \in \{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\chi \neq 0$, através da análise dos zeros da equação característica $f_{\lambda, K_L}(\chi) = 0$, onde $f_{\lambda, K_L}(\chi)$ é dada por (4.31). Para simplificar essa análise, usaremos a notação $\delta = \delta_\lambda(\chi)$ e $\varepsilon = \varepsilon_\lambda(\chi)$, onde $\delta_\lambda(\chi)$ e $\varepsilon_\lambda(\chi)$ são dados em (4.32). Nesse caso, a equação característica assume a forma

$$\delta \varepsilon (\delta^2 + \varepsilon^2) \cosh \delta \cos \varepsilon - \varepsilon K_L \sinh \delta \cos \varepsilon + \delta K_L \cosh \delta \sin \varepsilon = 0. \quad (4.36)$$

É importante ressaltar, no entanto, que estamos considerando (4.36) como uma equação em χ , apesar dessa variável ter sido omitida.

Proposição 4.2.5. *Para quaisquer $\lambda \geq 0$ e $K_L > 0$, a equação (4.36) não possui raízes no intervalo $(-\infty, -(\frac{\lambda}{2})^2)$.*

Demonstração. Sejam $\lambda \geq 0$ e $K_L > 0$ fixos, mas arbitrários.

Dado $\chi < -(\frac{\lambda}{2})^2$, seja $\omega_\chi = \sqrt{-(\frac{\lambda}{2})^2 - \chi}$ e considere o número complexo $z_\chi = \frac{\lambda}{2} + i\omega_\chi$. É fácil ver que z_χ pode ser escrito na forma polar como $\rho_\chi e^{i\theta_\chi}$, com $\rho_\chi = \sqrt{-\chi}$ e $0 < \theta_\chi \leq \frac{\pi}{2}$, e que $\delta^2 = -\bar{z}_\chi$ e $\varepsilon^2 = z_\chi$. Logo, podemos escrever $\delta = b_\chi + ia_\chi$ e $\varepsilon = a_\chi + ib_\chi$, onde $a_\chi = \sqrt{\rho_\chi} \cos(\frac{\theta_\chi}{2})$ e $b_\chi = \sqrt{\rho_\chi} \sin(\frac{\theta_\chi}{2})$. Usando essas igualdades, obtemos que (4.36) é satisfeita se, e somente se,

$$-2a_\chi b_\chi (a_\chi^2 + b_\chi^2) [\cos(2a_\chi) + \cosh(2b_\chi)] - K_L [a_\chi \sinh(2b_\chi) - b_\chi \sin(2a_\chi)] = 0. \quad (4.37)$$

Agora, se $\chi < -(\frac{\lambda}{2})^2$, então a_χ e b_χ são positivos, de onde $\cos(2a_\chi) + \cosh(2b_\chi) > 0$ e $a_\chi \sinh(2b_\chi) - b_\chi \sin(2a_\chi) > a_\chi \sinh(2b_\chi) - 2a_\chi b_\chi = a_\chi [\sinh(2b_\chi) - 2b_\chi] > 0$, o que fornece que o lado esquerdo de (4.37) é negativo e, portanto, essa equação não é satisfeita, o que conclui a demonstração. \square

Proposição 4.2.6. *Para quaisquer $\lambda > 0$ e $K_L > 0$, existem infinitas raízes positivas da equação (4.36).*

Demonstração. Usando $\delta = \sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}$ em (4.36), obtemos

$$(2\varepsilon^2 - \lambda) \cosh(\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}) \cos \varepsilon - \frac{K_L}{\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}} \sinh(\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}) \cos \varepsilon + \frac{K_L}{\varepsilon} \cosh(\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}) \sin \varepsilon = 0. \quad (4.38)$$

Na sequência, estudamos as raízes de (4.38) como uma equação na variável ε . Contudo, estamos interessados apenas em raízes no intervalo $(\sqrt{\lambda}, \infty)$.

Observe que (4.38) não possui raízes em $(\sqrt{\lambda}, \infty)$ da forma $\varepsilon = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, uma vez que nesses pontos, os dois primeiros termos do lado esquerdo dessa equação se anulam, enquanto que o terceiro termo é diferente de zero. Dessa forma, (4.38) equivale a

$$\tan \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}} \tanh(\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}) + \frac{1}{K_L} \varepsilon (2\varepsilon^2 - \lambda) = 0.$$

Considere a função

$$h_{\lambda, K_L}(\varepsilon) = \tan \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}} \tanh(\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}) + \frac{1}{K_L} \varepsilon (2\varepsilon^2 - \lambda),$$

$\varepsilon > \sqrt{\lambda}$, $\varepsilon \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Em cada intervalo $((2k + 1)\frac{\pi}{2}, (2k + 3)\frac{\pi}{2}) \subset (\sqrt{\lambda}, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, h_{λ, K_L} é uma função contínua tal que $h_{\lambda, K_L}(\varepsilon) \rightarrow -\infty$ quando $\varepsilon \rightarrow (2k + 1)\frac{\pi}{2}^+$, e $h_{\lambda, K_L}(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ quando $\varepsilon \rightarrow (2k + 3)\frac{\pi}{2}^-$. Assim, em cada um desses intervalos existe pelo menos um zero de h_{λ, K_L} . Desse modo, o conjunto das raízes de (4.38) no intervalo $(\sqrt{\lambda}, \infty)$ é infinito. As raízes positivas de (4.36) são dadas por $\chi = \varepsilon^2 (\varepsilon^2 - \lambda)$, onde ε é uma raiz de (4.38) no intervalo $(\sqrt{\lambda}, \infty)$, logo formam um conjunto infinito. \square

Observação 4.2.4. Considere a função

$$F_{\lambda, K_L}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}} \tanh(\sqrt{\varepsilon^2 - \lambda}) - \frac{1}{K_L} \varepsilon (2\varepsilon^2 - \lambda), \quad \varepsilon > \lambda,$$

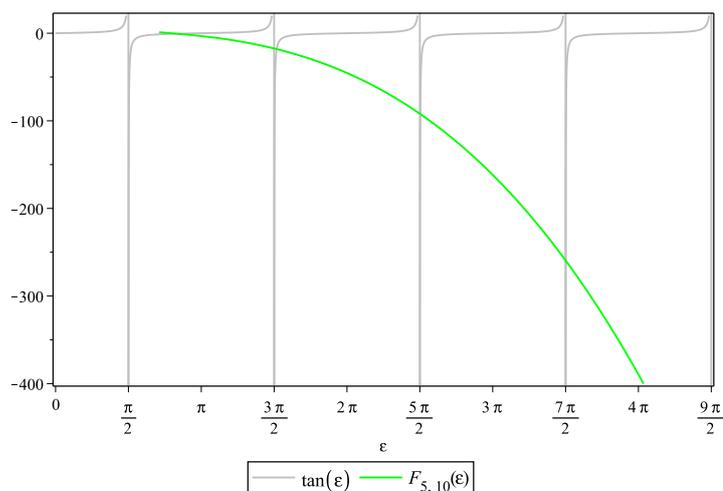
e observe que as raízes de (4.38), como equação na variável ε , no intervalo $(\sqrt{\lambda}, \infty)$ são as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos dessa função e de $\tan \varepsilon$. Tendo em vista que $F_{\lambda, K_L}(\varepsilon) \rightarrow -\infty$ quando $\varepsilon \rightarrow \infty$, concluímos que as raízes de (4.38) se aproximam de pontos da forma $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ à medida que crescem. Consequentemente, os autovalores positivos se aproximam de pontos da forma $(2n + 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \left((2n + 1)^2 \frac{\pi^2}{4} - \lambda \right)$ conforme crescem.

Na Figura 48, são apresentados os gráficos da função tangente e da função F_{λ, K_L} , para $\lambda = 5$ e $K_L = 10$.

Por sua vez, a Figura 49 apresenta a relação entre os autovalores positivos e valores de λ , para $K_L = 1$.

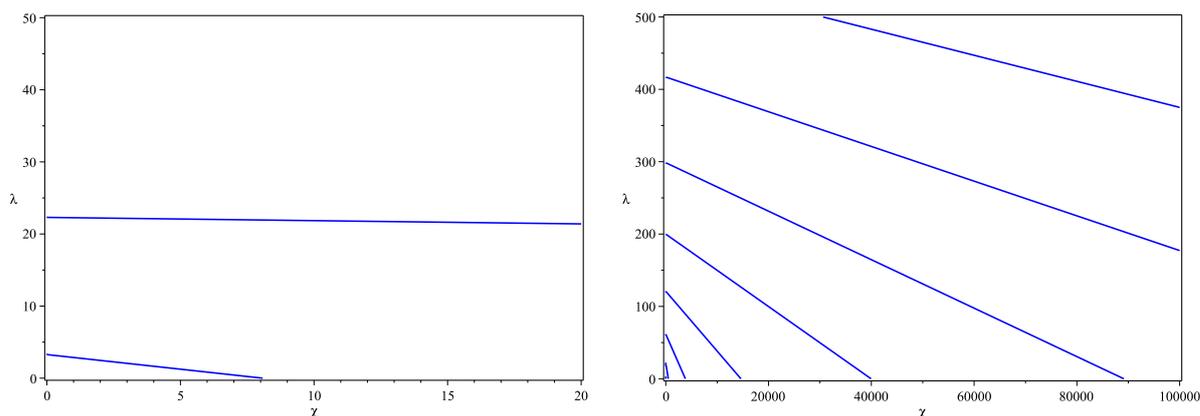
Observação 4.2.5. Os resultados acima fornecem que, alterando os índices se necessário, os autovalores de A são tais que $-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 < \chi_1 \leq \chi_2 \leq \dots$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = \infty$. É importante pontuar ainda que como o conjunto $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não tem ponto limite, existe no máximo uma quantidade finita de autovalores negativos.

Figura 48 – Interseção dos gráficos de $\tan(\varepsilon)$ e de $F_{\lambda, K_L}(\varepsilon)$, para $\lambda = 5$ e $K_L = 10$.



Fonte: Autor

Figura 49 – Relação entre os autovalores positivos e λ , para $K_L = 1$.



Fonte: Autor

Observação 4.2.6. Seja $s \in \mathbb{C}$ tal que s não é autovalor de A . Usando a Observação 4.2.2, obtemos que $(s - A)^{-1} : R(s - A) \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ é um operador linear limitado densamente definido satisfazendo

$$(s - A)^{-1}v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - \chi_n} (v, \phi_n) \phi_n. \quad (4.39)$$

Observação 4.2.7. Suponha que $\lambda \leq \lambda_0$, onde $\lambda_0 = \frac{3\pi^2}{\pi^2+3} \approx 2.3$, ou que uma das condições apresentadas na Observação 4.2.1 é satisfeita. Então, pela Proposição 4.2.2 e pelas Observações 4.2.1 e 4.2.6, A satisfaz todas as hipóteses de Henry (1981, Exercício 6, Seção 1.3) e portanto é um operador setorial. Mais ainda, se a, θ e M são conforme a Definição 2.4.2, então $a = 0$, θ pode ser tomado arbitrariamente no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e M é uma constante

positiva que depende de θ . Mais precisamente, M pode ser tomado como $\frac{m}{\sin(\frac{\theta}{2})}$, onde m é uma constante positiva que não depende de θ .

4.3 SOLUÇÃO APROXIMADA DE GALERKIN

Para obter uma aproximação da solução de um sistema de equações diferenciais que descreve o movimento de uma estrutura, o método de Galerkin é frequentemente aplicado (veja, por exemplo, Paunović et al. (2019), He et al. (2015), Permoon, Haddadpour e Javadi (2018), Oskouie e Ansari (2017)). Nesta seção, inspirados por Chueshov (2002), definimos a solução aproximada de Galerkin do sistema (4.21), que no caso em que a haste é não extensível assume a forma

$$\begin{cases} \ddot{u}(\tau) + \beta q(\tau) = -Au(\tau), & \tau \geq 0, \\ (1 + \tau_q D_\tau^\alpha)q(\tau) = (1 + \tau_u D_\tau^\alpha)u(\tau), & \tau \geq 0, \end{cases} \quad (4.40)$$

com as condições iniciais

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \quad (4.41)$$

onde $u_0, u_1 \in L^2(0, 1)$. Para tanto, seja P_m a projeção de $L^2(0, 1)$ sobre o subespaço gerado por $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$, onde $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $L^2(0, 1)$ formada por autofunções de A , conforme a Observação 4.2.2.

Definição 4.3.1. A solução aproximada de Galerkin de ordem $m \in \mathbb{N}$ do problema (4.40) com as condições iniciais (4.41) com respeito à base $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ consiste de um par de funções u_m, q_m tal que

(a) u_m é duas vezes continuamente diferenciável em $[0, \infty)$;

(b) q_m é localmente absolutamente contínua em $[0, \infty)$;

(c) u_m e q_m têm a forma

$$u_m(\tau) = \sum_{k=1}^m T_k(\tau)\phi_k, \quad (4.42)$$

$$q_m(\tau) = \sum_{k=1}^m V_k(\tau)\phi_k. \quad (4.43)$$

(d) o par u_m, q_m satisfaz

$$\begin{cases} \ddot{u}_m(\tau) + \beta q_m(\tau) = -Au_m(\tau), & \tau \geq 0, \\ (1 + \tau_q D_\tau^\alpha) q_m(\tau) = (1 + \tau_u D_\tau^\alpha) u_m(\tau), & \tau \geq 0, \\ u_m(0) = P_m u_0, \\ \dot{u}_m(0) = P_m u_1. \end{cases} \quad (4.44)$$

Claramente, se o par u_m, q_m é uma solução aproximada de Galerkin de ordem m , então esse par é solução do sistema (4.40). Além disso, se u_0, u_1 pertencem ao subespaço de $L^2(0, 1)$ gerado por $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$, então u_m, q_m formam na verdade solução para o problema (4.40)-(4.41).

Observe ainda que substituindo (4.42) e (4.43) nas duas primeiras equações de (4.44) e levando em consideração que

$$\begin{aligned} Au_m(\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n (u_m(\tau), \phi_n) \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \chi_n T_k(\tau) (\phi_k, \phi_n) \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^m \chi_n T_n(\tau) \phi_n, \end{aligned}$$

para $\tau \geq 0$, obtemos o seguinte sistema para as funções T_k e V_k

$$\ddot{T}_k(\tau) + \beta V_k(\tau) + \chi_k T_k(\tau) = 0, \quad (4.45)$$

$$(1 + \tau_q D_\tau^\alpha) V_k(\tau) = (1 + \tau_u D_\tau^\alpha) T_k(\tau). \quad (4.46)$$

Além disso, a expressão (4.42) e as condições iniciais em (4.44) fornecem

$$T_k(0) = T_{k0}, \quad \dot{T}_k(0) = T_{k1}, \quad (4.47)$$

onde $T_{k0} = (u_0, \phi_k)$ e $T_{k1} = (u_1, \phi_k)$, $k = 1, \dots, m$.

4.4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA (4.45)-(4.47)

Nesta seção, aplicamos o método da transformada de Laplace para obter uma solução do problema fracionário formado pelas equações diferenciais (4.45) e (4.46), e pelas condições iniciais (4.47).

Seja $k \in \mathbb{N}$ e suponha que T_k e V_k são funções tais que

$$\mathcal{L}\{D_\tau^\alpha T_k(\tau)\}(s) = s^\alpha \widehat{T}_k(s) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{D_\tau^\alpha V_k(\tau)\}(s) = s^\alpha \widehat{V}_k(s),$$

onde $\widehat{T}_k(s) = \mathcal{L}\{T_k(\tau)\}(s)$, $\widehat{V}_k(s) = \mathcal{L}\{V_k(\tau)\}(s)$ e estamos considerando o ramo principal de s^α . Por exemplo, pela Proposição 2.9.2, isso ocorre se T_k e V_k são funções localmente absolutamente contínuas em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial. Então, aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados das equações (4.45) e (4.46), obtemos

$$(s^2 + \chi_k) \widehat{T}_k(s) + \beta \widehat{V}_k(s) = T_{k0}s + T_{k1}, \quad (4.48)$$

$$(1 + \tau_u s^\alpha) \widehat{T}_k(s) = (1 + \tau_q s^\alpha) \widehat{V}_k(s). \quad (4.49)$$

Resolvendo o sistema (4.48)-(4.49), concluímos que

$$\widehat{T}_k(s) = (T_{k1} + T_{k0}s) \frac{1 + \tau_q s^\alpha}{D_k(s)}, \quad (4.50)$$

$$\widehat{V}_k(s) = (T_{k1} + T_{k0}s) \frac{1 + \tau_u s^\alpha}{D_k(s)}, \quad (4.51)$$

onde

$$\begin{aligned} D_k(s) &= (1 + \tau_q s^\alpha) (s^2 + \chi_k) + \beta (1 + \tau_u s^\alpha) \\ &= (s^2 + A_k) (1 + \tau_q s^\alpha) - B, \end{aligned} \quad (4.52)$$

com

$$A_k = \chi_k + \beta \frac{\tau_u}{\tau_q} \quad \text{e} \quad B = \beta \left(\frac{\tau_u}{\tau_q} - 1 \right). \quad (4.53)$$

Observe que como $\beta > 0$, $0 < \tau_q < \tau_u$ e $\chi_k \in \mathbb{R}$, $B > 0$ e A_k é um número real que depende de χ_k .

Na sequência, mostramos que as funções dadas em (4.50) e (4.51) são transformadas de Laplace de funções contínuas em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial. Para tanto, os seguintes resultados são usados.

Proposição 4.4.1. *O conjunto formado pelos zeros da função D_k é limitado.*

Demonstração. Sejam $s_0 \in \mathbb{C}$ um zero de D_k e $r_0 = |s_0|$. Então,

$$(s_0^2 + A_k) (\tau_q s_0^\alpha + 1) = B,$$

de onde,

$$\left(|s_0|^2 - |A_k| \right) |\tau_q s_0^\alpha + 1| \leq B.$$

Agora, considere a função

$$f_k(r) = \tau_q r^{2+\alpha} - r^2 - |A_k| \tau_q r^\alpha + |A_k|, \quad r \geq 0.$$

Como $f_k(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$, existe $K_B > 0$ tal que $f_k(r) > B$, sempre que $r > K_B$.

Seja $R_k = \max \{ \sqrt{|A_k|}, K_B \}$ e observe que se $|s_0| > \sqrt{|A_k|}$, então

$$f_k(r_0) = (|s_0|^2 - |A_k|) (\tau_q |s_0|^\alpha - 1) \leq (|s_0|^2 - |A_k|) |\tau_q s_0^\alpha - 1| \leq B,$$

de onde, $r_0 \leq K_B$, o que fornece que $s_0 \in B_{R_k}$, onde B_{R_k} denota a bola fechada centrada na origem de raio R_k . Segue que todos os zeros de D_k pertencem B_{R_k} . \square

Lema 4.4.1. *Seja $G_{\rho,k}(s) = \frac{s^\rho}{s D_k(s)}$, $\rho \geq 0$. Então, para cada $\rho \in [0, 2]$, existe uma função $g_{\rho,k}$ contínua em \mathbb{R} e de tipo exponencial satisfazendo $g_{\rho,k}(\tau) = 0$, para todo $\tau \in (-\infty, 0)$, tal que $\mathcal{L}\{g_{\rho,k}(\tau)\} = G_{\rho,k}$.*

Demonstração. Seja $\rho \in [0, 2]$. Pela Proposição 4.4.1, existe $R_k > 0$ tal que se s é zero de D_k , então $|s| \leq R_k$. Segue que $G_{\rho,k}(s) = \frac{s^\rho}{s D_k(s)}$ é uma função analítica no semiplano $\Re(s) > R_k$. Além disso,

$$\begin{aligned} |G_{\rho,k}(s)| &= \frac{|s|^\rho}{|\tau_q s^{3+\alpha} + s^3 + A_k \tau_q s^{1+\alpha} + (A_k - B)s|} \\ &= \frac{1}{|s|^{3+\alpha-\rho} \left| \tau_q + \frac{1}{s^\alpha} + \frac{A_k \tau_q}{s^2} + \frac{A_k - B}{s^{2+\alpha}} \right|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $|s| \rightarrow \infty$ nesse semiplano.

Agora, considere a função

$$h(s) = \frac{s^{2+\alpha}}{D_k(s)} = \frac{s^{2+\alpha}}{\tau_q s^{2+\alpha} + s^2 + A_k \tau_q s^\alpha + (A_k - B)}, \quad \Re(s) > R_k,$$

e observe que para cada $x > R_k$, $|h(x + iy)|$ é uma função de y contínua em \mathbb{R} com limites finitos quando $y \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow -\infty$, de onde existe $C_x > 0$ tal que $|h(x + iy)| < C_x$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Dessa forma, para $x > R_k$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{\rho,k}(x + iy)| dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x + iy|^{3+\alpha-\rho}} |h(x + iy)| dy \\ &\leq C_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x + iy|^{3+\alpha-\rho}} dy. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar $R_k \geq 1$, o que fornece que $|x + iy| > 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{\rho,k}(x + iy)| dy &\leq C_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x + iy|^{1+\alpha}} dy \\ &\leq C_x \frac{\pi}{\alpha x^\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

O resultado segue então do Teorema 2.2.3. \square

No decorrer deste capítulo, denotamos por R_k um número real maior ou igual a 1 tal que todos os zeros de D_k pertencem a B_{R_k} , onde B_{R_k} denota a bola fechada centrada na origem de raio R_k .

Teorema 4.4.1. *Existem funções T_k e V_k contínuas em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial tais que suas transformadas de Laplace satisfazem (4.50) e (4.51).*

Demonstração. É suficiente observar que

$$\begin{aligned}\widehat{T}_k(s) &= T_{k1} \frac{1 + \tau_q s^\alpha}{D_k(s)} + \frac{T_{k0} s^2 (1 + \tau_q s^\alpha)}{s D_k(s)} \\ &= T_{k1} \frac{1}{D_k(s)} + T_{k1} \tau_q \frac{s^\alpha}{D_k(s)} + \frac{T_{k0}}{s} \left(1 - \frac{A_k(1 + \tau_q s^\alpha) - B}{D_k(s)} \right) \\ &= T_{k1} G_{1,k}(s) + T_{k1} \tau_q G_{\alpha+1,k}(s) + T_{k0} \frac{1}{s} - T_{k0} (A_k - B) G_{0,k}(s) - T_{k0} A_k \tau_q G_{\alpha,k}(s)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\widehat{V}_k(s) &= (T_{k1} + T_{k0}s) \frac{\frac{\tau_u}{\tau_q} (1 + \tau_q s^\alpha) + 1 - \frac{\tau_u}{\tau_q}}{D_k(s)} \\ &= \frac{\tau_u}{\tau_q} (T_{k1} + T_{k0}s) \frac{1 + \tau_q s^\alpha}{D_k(s)} + \left(1 - \frac{\tau_u}{\tau_q} \right) (T_{k1} + T_{k0}s) \frac{1}{D_k(s)} \\ &= \frac{\tau_u}{\tau_q} \widehat{T}_k(s) + \frac{\tau_q - \tau_u}{\tau_q} T_{k1} G_{1,k}(s) + \frac{\tau_q - \tau_u}{\tau_q} T_{k0} G_{2,k}(s),\end{aligned}$$

para $\Re(s) > R_k$, e aplicar o Lema 4.4.1. \square

O Teorema 4.4.1 fornece que o problema fracionário (4.45)-(4.47) possui solução no espaço de distribuições \mathcal{K}'_+ , conforme definido na Seção 2.3.

4.5 EXPRESSÃO ANALÍTICA PARA T_k

Na sequência, determinamos uma expressão analítica para a função T_k como no Teorema 4.4.1. Para tanto, seja F_k a função definida por

$$\begin{aligned}F_k(s) &= \frac{\tau_q s^\alpha + 1}{D_k(s)} \\ &= \frac{\tau_q s^\alpha + 1}{(s^2 + A_k)(\tau_q s^\alpha + 1) - B}, \quad \Re(s) > R_k.\end{aligned}\tag{4.54}$$

Para $s \in \mathbb{C}$, com $\Re(s) > R_k$ suficientemente grande, $F_k(s)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F_k(s) &= \frac{1}{s^2 + A_k} \frac{1}{1 - \frac{B}{(s^2 + A_k)(\tau_q s^\alpha + 1)}} \\ &= \frac{1}{s^2 + A_k} (1 + \Psi_k(s)), \end{aligned}$$

onde

$$\Psi_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B}{\tau_q} \right)^n \frac{1}{(s^2 + A_k)^n} \frac{1}{\left(s^\alpha + \frac{1}{\tau_q} \right)^n}. \quad (4.55)$$

A seguir, mostramos que existe uma função localmente integrável em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial de modo que

$$\mathcal{L} \{f_k(\tau)\} (s) = F_k(s).$$

Proposição 4.5.1. *Seja*

$$g_k(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-A_k)^n \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (4.56)$$

Então,

(a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + A_k} \right\} (\tau) = g_k(\tau);$

(b) g_k^{*n} é uma função localmente integrável em $[0, \infty)$, de tipo exponencial e

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{s^2 + A_k} \right)^n \right\} (\tau) = g_k^{*n}(\tau),$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (a) Para $|s| > \sqrt{|A_k|}$, temos

$$\frac{1}{s^2 + A_k} = \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + \frac{A_k}{s^2}} = \frac{1}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{A_k}{s^2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-A_k)^n \frac{1}{s^{2n+2}}.$$

Segue do Teorema 2.2.5 que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + A_k} \right\} (\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-A_k)^n \frac{\tau^{2(n+1)-1}}{\Gamma(2(n+1))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-A_k)^n \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-A_k)^n \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!}$ é uma série de potências com raio de convergência igual a ∞ . Logo, g_k é uma função suave em \mathbb{R} . Além disso, existem constantes $\gamma_k, M_k > 0$ de modo que $|g_k(\tau)| \leq M_k e^{\gamma_k \tau}$, $\tau \geq 0$. Com efeito, sejam

$$\gamma_k = \begin{cases} \sqrt{|A_k|}, & \text{se } A_k \neq 0, \\ 1, & \text{se } A_k = 0, \end{cases} \quad (4.57)$$

e $M_k = \frac{1}{\gamma_k}$. Então,

$$|g_k(\tau)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_k^{2n} \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!} = M_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma_k \tau)^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq M_k e^{\gamma_k \tau},$$

para todo $\tau \geq 0$. O resultado segue então do Corolário 2.2.1. \square

Proposição 4.5.2. *Seja*

$$h(\tau) = \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{1}{\tau_q} \tau^\alpha \right), \quad \tau > 0, \quad (4.58)$$

onde $E_{\alpha,\alpha}(s)$ é a função de Mittag-Leffler. Então,

(a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + \frac{1}{\tau_q}} \right\} (\tau) = h(\tau);$

(b) h^{*n} é uma função localmente integrável em $[0, \infty)$, de tipo exponencial e

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{s^\alpha + \frac{1}{\tau_q}} \right)^n \right\} (\tau) = h^{*n}(\tau),$$

para todo número natural n .

Demonstração. (a) Para $|s| > \frac{1}{\tau_q^{1/\alpha}}$, temos

$$\frac{1}{s^\alpha + \frac{1}{\tau_q}} = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau_q s^\alpha}} = \frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tau_q s^\alpha} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tau_q} \right)^k \frac{1}{s^{\alpha(k+1)}}.$$

Aplicando o Teorema 2.2.5, obtemos então que $\frac{1}{s^\alpha + \frac{1}{\tau_q}}$ é a transformada de Laplace de

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tau_q} \right)^k \frac{\tau^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1))} \\ &= \tau^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(k+1))} \left(-\frac{\tau^\alpha}{\tau_q} \right)^k \\ &= \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{1}{\tau_q} \tau^\alpha \right), \end{aligned}$$

que converge absolutamente para todo $\tau \neq 0$.

(b) h é o produto de uma função localmente integrável em $[0, \infty)$ e uma função contínua em \mathbb{R} , logo é localmente integrável em $[0, \infty)$.

Conforme visto na Seção 2.8, $E_{\alpha,\alpha}(s)$ é uma função inteira de ordem $\rho = \frac{1}{\alpha}$ e tipo 1, logo existem constantes positivas γ_0 e M_0 de modo que

$$\left| E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{1}{\tau_q} \tau^\alpha \right) \right| \leq M_0 e^{\gamma_0 \tau}, \quad \tau \geq 0.$$

Segue que

$$|h(\tau)| = \tau^{\alpha-1} \left| E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{1}{\tau_q} \tau^\alpha \right) \right| \leq \tau^{\alpha-1} M_0 e^{\gamma_0 \tau},$$

para $\tau > 0$, o que fornece que $|h(\tau)| \leq M_0 e^{\gamma_0 \tau}$, para $\tau \geq 1$. Assim, h é uma função de tipo exponencial. A demonstração é concluída aplicando o Corolário 2.2.1. \square

Proposição 4.5.3. *Sejam g_k e h as funções dadas em 4.56 e 4.58, respectivamente. Então,*

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B}{\tau_q} \right)^n \left(\frac{1}{s^2 + A_k} \right)^n \left(\frac{1}{s^\alpha + \frac{1}{\tau_q}} \right)^n \right\} (\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B}{\tau_q} \right)^n (g_k^{*n} * h^{*n})(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (4.59)$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$f_{k,n}(\tau) = \left(\frac{B}{\tau_q} \right)^n (g_k^{*n} * h^{*n})(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (4.60)$$

Usando o Teorema da Convolução e as Proposições 4.5.1 e 4.5.2, obtemos

$$\mathcal{L} \{f_{k,n}(\tau)\} (s) = \left(\frac{B}{\tau_q} \right)^n \left(\frac{1}{s^2 + A_k} \right)^n \left(\frac{1}{s^\alpha + \frac{1}{\tau_q}} \right)^n := F_{k,n}(s), \quad (4.61)$$

para $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > s_0 := \max \{\gamma_k, \gamma_0\}$, onde γ_k e γ_0 são constantes como nas demonstrações das Proposições 4.5.1 e 4.5.2, respectivamente.

Seja $x_0 > s_0$ fixo, mas arbitrário. Então, (4.61) converge no semiplano $\Re(s) \geq x_0$, assim como a integral

$$G_{k,n}(s) := \mathcal{L} \{|f_{k,n}(\tau)|\} (s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} |f_{k,n}(\tau)| d\tau,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Temos ainda que

$$\begin{aligned} G_{k,n}(x_0) &\leq \left(\frac{B}{\tau_q} \right)^n \int_0^\infty e^{-x_0 \tau} (|g_k|^{*n} * |h|^{*n})(\tau) d\tau \\ &= \left(\frac{B}{\tau_q} \right)^n \mathcal{L} \{|g_k|^{*n} * |h|^{*n}\} (x_0) \\ &= \left(\frac{B}{\tau_q} \right)^n \left(\mathcal{L} \{|g_k(\tau)|\} (x_0) \right)^n \left(\mathcal{L} \{|h(\tau)|\} (x_0) \right)^n. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{|g_k(\tau)|\} (x_0) &= \int_0^\infty e^{-x_0 t} |g_k(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{|A_k|}} \int_0^\infty e^{-x_0 \tau} \sinh \left(\sqrt{|A_k|} \tau \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{|A_k|}} \mathcal{L} \left\{ \sinh \left(\sqrt{|A_k|} \tau \right) \right\} (x_0) \\ &= \frac{1}{x_0^2 - |A_k|} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{|h(\tau)|\}(x_0) &= \int_0^\infty e^{-x_0\tau} |h(\tau)| d\tau \\
&\leq \int_0^\infty e^{-x_0\tau} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{\tau_q}\right)^k \frac{\tau^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} d\tau \\
&= \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{\tau_q}\right)^k \frac{\tau^{\alpha k + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)}\right\}(x_0) \\
&= \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{\tau_q}\right)^k \frac{1}{x_0^{\alpha k + \alpha}} \\
&= \frac{1}{x_0^\alpha - \frac{1}{\tau_q}}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$G_{k,n}(x_0) \leq \left(\frac{B}{\tau_q}\right)^n \left(\frac{1}{x_0^2 - |A_k|}\right)^n \left(\frac{1}{x_0^\alpha - \frac{1}{\tau_q}}\right)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que x_0 é grande o suficiente de modo que

$$\left| \frac{B}{\tau_q (x_0^2 - |A_k|) \left(x_0^\alpha - \frac{1}{\tau_q}\right)} \right| < 1,$$

o que fornece que a série

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{B}{\tau_q}\right)^n \left(\frac{1}{x_0^2 - |A_k|}\right)^n \left(\frac{1}{x_0^\alpha - \frac{1}{\tau_q}}\right)^n$$

é convergente, implicando na convergência de $\sum_{n=1}^\infty G_{k,n}(x_0)$.

Dessa forma, todas as hipóteses do Teorema 2.2.4 são satisfeitas. Logo,

$$\sum_{n=1}^\infty f_{k,n}(\tau) = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{B}{\tau_q}\right)^n (g_k^{*n} * h^{*k})(\tau)$$

converge (absolutamente) para uma função $\psi_k(\tau)$ para quase todo $\tau \geq 0$ e

$$\mathcal{L}\{\psi_k(\tau)\}(s) = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{B}{\tau_q}\right)^n \left(\frac{1}{s^2 + A_k}\right)^n \left(\frac{1}{s^\alpha + \frac{1}{\tau_q}}\right)^n, \quad \Re(s) \geq x_0.$$

□

Proposição 4.5.4. *Seja*

$$\psi_k(\tau) = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{B}{\tau_q}\right)^n (g_k^{*n} * h^{*k})(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (4.62)$$

Então, ψ_k é uma função localmente integrável em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial.

Demonstração. Conforme a demonstração da Proposição 4.5.1, a função g_k satisfaz

$$|g_k(\tau)| \leq M_k e^{\gamma_k \tau}, \quad \tau \geq 0,$$

onde γ_k é dada por (4.57) e $M_k = \frac{1}{\gamma_k}$. Segue da Proposição 2.2.2 que

$$|g_k^{*n}(\tau)| \leq M_k^n e^{\gamma_k \tau} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \tau \geq 0,$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Por sua vez, conforme a demonstração da Proposição 4.5.2, existem constantes $\gamma_0, M_0 > 0$ tais que

$$|h(\tau)| \leq M_0 e^{\gamma_0 \tau} \tau^{\alpha-1}, \quad \tau > 0.$$

Então, procedendo por indução, obtemos

$$|h^{*n}(\tau)| \leq M_0^n \frac{(\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} e^{\gamma_0 \tau} \tau^{n\alpha-1}, \quad \tau > 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, seja $\mu_k = \max\{\gamma_k, \gamma_0\}$. Então, temos

$$\begin{aligned} |(g_k^{*n} * h^{*n})(\tau)| &\leq (|g_k^{*n}| * |h^{*n}|)(\tau) \\ &\leq \left(M_k^n e^{\mu_k \tau} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \right) * \left(M_0^n \frac{(\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} e^{\mu_k \tau} \tau^{n\alpha-1} \right) \\ &= M_k^n M_0^n \frac{(\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} e^{\mu_k \tau} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} * \tau^{n\alpha-1} \\ &= M_k^n M_0^n \frac{(\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} e^{\mu_k \tau} {}_0I_\tau^n \tau^{n\alpha-1} \\ &= M_k^n M_0^n \frac{(\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} e^{\mu_k \tau} \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n\alpha+n)} \tau^{n\alpha+n-1} \\ &= M_k^n M_0^n (\Gamma(\alpha))^n e^{\mu_k \tau} \frac{\tau^{n(\alpha+1)-1}}{\Gamma(n(\alpha+1))}, \quad \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} |\psi_k(\tau)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B}{\tau_q} \right)^n |(g_k^{*n} * h^{*k})(\tau)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} c_k^n e^{\mu_k \tau} \frac{\tau^{n(\alpha+1)-1}}{\Gamma(n(\alpha+1))} \\ &= c_k \tau^\alpha e^{\mu_k \tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c_k \tau^{\alpha+1})^n}{\Gamma(n(\alpha+1) + \alpha + 1)} \\ &= c_k \tau^\alpha e^{\mu_k \tau} E_{\alpha+1, \alpha+1}(c_k t^{\alpha+1}), \quad \tau \geq 0. \end{aligned}$$

onde $c_k = \frac{B}{\tau_q} M_k M_0 \Gamma(\alpha)$, o que fornece que ψ_k é localmente integrável e de tipo exponencial. \square

Proposição 4.5.5. *Sejam F_k e ψ_k as funções dadas por (4.54) e (4.62), respectivamente. Então,*

$$\mathcal{L}^{-1} \{F_k(s)\}(\tau) = g_k(\tau) + (g_k * \psi_k)(\tau), \quad \tau \geq 0.$$

Demonstração. Segue do Teorema da Convolução e das Proposições 4.5.1, 4.5.3 e 4.5.4 que

$$\mathcal{L} \{(g_k * \psi_k)(\tau)\}(s) = \frac{1}{s^2 + A_k} \Psi_k(s),$$

onde Ψ_k é dada em (4.55). Logo,

$$\mathcal{L} \{g_k(\tau) + (g_k * \psi_k)(\tau)\}(s) = \frac{1}{s^2 + A_k} + \frac{1}{s^2 + A_k} \Psi_k(s) \quad (4.63)$$

$$= \frac{1}{s^2 + A_k} (1 + \Psi_k(s)) \quad (4.64)$$

$$= F_k(s), \quad (4.65)$$

o que conclui a demonstração. \square

Para finalizar esta seção, observe que como g_k é uma função suave em \mathbb{R} e ψ_k é uma função localmente integrável em $[0, \infty)$ e de tipo exponencial, temos pelos Teoremas 2.2.2 e 2.2.7 que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{g'_k(\tau) + (g'_k * \psi_k)(\tau)\}(s) &= s \mathcal{L} \{g_k(\tau) + (g_k * \psi_k)(\tau)\}(s) \\ &= s F_k(s), \end{aligned}$$

onde também usamos que $g_k(0) = 0$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{T_{k1} [g_k(\tau) + (g_k * \psi_k)(\tau)] + T_{k0} [g'_k(\tau) + (g'_k * \psi_k)(\tau)]\}(s) &= T_1 F_k(s) + T_0 s F_k(s) \\ &= (T_{k1} + T_{k0} s) F_k(s) \\ &= (T_{k1} + T_{k0} s) \frac{\tau_q s^\alpha + 1}{D_k(s)} \\ &= \hat{T}_k(s), \end{aligned}$$

de onde,

$$\begin{aligned} T_k(\tau) &= T_{k1} [g_k(\tau) + (g_k * \psi_k)(\tau)] + T_{k0} [g'_k(\tau) + (g'_k * \psi_k)(\tau)] \\ &= T_{k1} f_k(\tau) + T_{k0} f'_k(\tau), \quad \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde $f_k = g_k + g_k * \psi_k$.

4.6 REGULARIDADE DA SOLUÇÃO

Nesta seção, o objetivo é estudar a regularidade das funções T_k e V_k como no Teorema 4.4.1. Para tanto, usamos a expressão analítica de T_k dada por (4.66).

Proposição 4.6.1. *Sejam g_k e h as funções dadas por (4.56) e (4.58), respectivamente. Então, $g_k * h$ é uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$ e*

$$(g_k * h)'(\tau) = (g_k' * h)(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (4.67)$$

Demonstração. Primeiro, note que

$$\begin{aligned} (g_k * h)(\tau) &= g_k(\tau) * \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \dots + g_k(\tau) * \left(-\frac{1}{\tau_q}\right)^{n_0-1} \frac{\tau^{\alpha n_0-1}}{\Gamma(\alpha n_0)} \\ &+ g_k(\tau) * \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tau_q}\right)^n \frac{\tau^{\alpha(n+1)-1}}{\Gamma(\alpha(n+1))}, \end{aligned}$$

onde $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $\alpha n_0 < 1 < \alpha(n_0 + 1)$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} g_k(\tau) * \frac{\tau^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)} &= \int_0^\tau g_k(t) \frac{(\tau-t)^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^\tau (\tau-t)^{\alpha n-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-A_k)^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) dt \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-A_k)^j \frac{1}{(2j+1)!} \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^\tau (\tau-t)^{\alpha n-1} t^{2j+1} dt \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-A_k)^j \frac{1}{(2j+1)!} I_\tau^{\alpha n} \tau^{2j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-A_k)^j \frac{1}{(2j+1)!} \frac{\Gamma(2j+2)}{\Gamma(\alpha n + 2j + 2)} \tau^{\alpha n + 2j + 1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-A_k)^j}{\Gamma(\alpha n + 2j + 2)} \tau^{\alpha n + 2j + 1} \\ &= \tau^{\alpha n + 1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-A_k)^j}{\Gamma(2j + \alpha n + 2)} \tau^{2j} \\ &= \tau^{\alpha n + 1} E_{2, \alpha n + 2}(-A_k \tau^2), \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} (g_k * h)(\tau) &= \tau^{\alpha+1} E_{2, \alpha+2}(-A_k \tau^2) + \dots + \left(-\frac{1}{\tau_q}\right)^{n_0-1} \tau^{\alpha n_0+1} E_{2, \alpha n_0+2}(-A_k \tau^2) \\ &+ g_k(\tau) * \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tau_q}\right)^n \frac{\tau^{\alpha(n+1)-1}}{\Gamma(\alpha(n+1))}, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Claramente, os n_0 primeiros termos do lado direito de (4.68) são funções de classe C^1 em $[0, \infty)$. Dessa forma, resta mostrar que

$$g_k(\tau) * \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tau_q}\right)^n \frac{\tau^{\alpha(n+1)-1}}{\Gamma(\alpha(n+1))}$$

também é uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$. Para tanto, seja

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tau_q}\right)^n \frac{\tau^{\alpha(n+1)-1}}{\Gamma(\alpha(n+1))}, \quad \tau \geq 0,$$

e observe que

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \left(-\frac{1}{\tau_q}\right)^{n_0} \tau^{\alpha(n_0+1)-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\tau_q}\right)^j \frac{\tau^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + \alpha(n_0+1))} \\ &= \left(-\frac{1}{\tau_q}\right)^{n_0} \tau^{\alpha(n_0+1)-1} E_{\alpha, \alpha(n_0+1)} \left(-\frac{1}{\tau_q} \tau^{\alpha}\right), \end{aligned}$$

que é contínua em $[0, \infty)$. Segue da Proposição 2.2.4 que $g_k * \varphi$ (e portanto $g_k * h$) é uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$. Para mostrar que (4.67) é satisfeita, é suficiente usar a Proposição 2.2.3 e observar que ambas as funções $(g_k * h)'$ e $g'_k * h$ são contínuas em $[0, \infty)$. \square

Proposição 4.6.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$f_{k,n}(\tau) = \left(\frac{B}{\tau_q}\right)^n (g_k * h)^{*n}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (4.69)$$

é de classe C^1 em $[0, \infty)$. Além disso,

$$f'_{k,1}(\tau) = \frac{B}{\tau_q} (g'_k * h)(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (4.70)$$

e

$$f'_{k,n}(\tau) = \left(\frac{B}{\tau_q}\right)^n (g'_k * g_k^{*(n-1)} * h^{*n})(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Demonstração. Segue da Proposição 4.6.1 que $f_{k,1} = \frac{B}{\tau_q} g_k * h$ é uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$ e que (4.70) é satisfeita. Para completar a demonstração, é suficiente observar que $f_{k,n} = f_{k,1} * f_{k,n-1}$, para $n \geq 2$, e proceder por indução sobre n . \square

Proposição 4.6.3. A função ψ_k , dada por (4.62), é de classe C^1 no intervalo $[0, \infty)$.

Demonstração. Sejam novamente $\gamma_0, \gamma_k, M_0, M_k$ constantes como nas demonstrações das Proposições 4.5.1 e 4.5.2 e considere $N_k = \max\{1, M_k\}$. Como pode ser verificado sem

dificuldades, $|g'_k(\tau)| \leq N_k \exp(\gamma_k \tau)$, para todo $\tau \geq 0$. Claramente, essa propriedade também é satisfeita para g_k . Então, procedendo como na demonstração da Proposição 4.5.4, obtemos

$$|(g'_k * h)(\tau)| \leq \frac{c_k}{\Gamma(\alpha + 1)} e^{\mu_k \tau} \tau^\alpha, \quad \tau \geq 0,$$

$$|(g'_k * g_k^{*(n-1)} * h^{*n})(\tau)| \leq \frac{c_k^n}{\Gamma(n(\alpha + 1))} e^{\mu_k \tau} \tau^{n(\alpha+1)-1}, \quad \tau \geq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, onde $\mu_k = \max\{\gamma_0, \gamma_k\}$ e $c_k = N_k M_0 \Gamma(\alpha)$.

Seja $T > 0$ e considere a função $f_{k,n}$ dada por (4.69). Então, pelas desigualdades acima e pela Proposição 4.6.2, obtemos

$$|f'_{k,n}(\tau)| \leq \left(\frac{B}{\tau_q}\right)^n \frac{c_k^n}{\Gamma(n(\alpha + 1))} e^{\mu_k \tau} T^{n(\alpha+1)-1} =: b_n, \quad \tau \in [0, T], \quad (4.71)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, pela fórmula (2.47), temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \frac{B}{\tau_q} c_k T^{\alpha+1} \frac{\Gamma(n(\alpha + 1))}{\Gamma(n(\alpha + 1) + \alpha + 1)} \\ &= \frac{B}{\tau_q} c_k T^{\alpha+1} \left[\frac{1}{n(\alpha + 1)}\right]^{\alpha+1} \left[1 + O\left(\frac{1}{n(\alpha + 1)}\right)\right] \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, o que fornece que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f'_{k,n}$ é uniformemente convergente em $[0, T]$.

Dessa forma, $\sum_{n=1}^{\infty} f_{k,n}$ é uma série de funções diferenciáveis em $[0, T]$ que converge em todo ponto desse intervalo (pois também temos que $|f_{k,n}(\tau)| \leq b_n$, $\tau \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$) e tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f'_{k,n}$ converge uniformemente em $[0, T]$. Segue que $\psi_k = \sum_{n=1}^{\infty} f_{k,n}$ converge uniformemente em $[0, T]$, é diferenciável nesse intervalo e $\psi'_k = \sum_{n=1}^{\infty} f'_{k,n}$. Como, além disso, $f'_{k,n}$ é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que ψ'_k é contínua em $[0, T]$. Assim, ψ_k é uma função de classe C^1 em $[0, T]$. A demonstração é concluída observando que $T > 0$ foi tomado arbitrariamente. \square

Teorema 4.6.1. *A função T_k , dada por (4.66), é uma função de classe C^2 em $[0, \infty)$.*

Demonstração. Seja $\varphi_k = g_k * \psi_k$. Como g_k é uma função suave em \mathbb{R} e ψ_k é uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$, obtemos pela Proposição 2.2.4 que φ_k é uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$ e

$$\begin{aligned} \varphi'_k(\tau) &= (g'_k * \psi_k)(\tau) + g_k(0)\psi_k(\tau) \\ &= (g'_k * \psi_k)(\tau), \quad \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Novamente pela Proposição 2.2.4, $\varphi'_k = g'_k * \psi_k$ é uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$ e

$$\begin{aligned}\varphi''_k(\tau) &= (g''_k * \psi_k)(\tau) + g'_k(0)\psi_k(\tau) \\ &= (g''_k * \psi_k)(\tau) + \psi_k(\tau), \quad \tau \geq 0,\end{aligned}$$

que também é uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$. Segue que φ_k é uma função em $C^3([0, \infty))$. Para finalizar a demonstração, note que $T_k = T_{k1}(g_k + \varphi_k) + T_{k0}(g'_k + \varphi'_k)$ e, portanto, é uma função de classe C^2 em $[0, \infty)$. \square

Para finalizar esta seção, mostramos que V_k é uma função localmente absolutamente contínua em $[0, \infty)$. Antes, precisamos do seguinte resultado.

Proposição 4.6.4. *Seja ψ_k a função dada por (4.62). Então, ψ'_k é localmente absolutamente contínua em $[0, \infty)$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_{n,k}$ a função dada por (4.69). Procedendo como na demonstração da Proposição 4.6.1, obtemos que $f'_{k,1} = \frac{B}{\tau_q} g'_k * h$ é uma função de classe C^1 em $(0, \infty)$ e

$$f''_{k,1}(\tau) = \frac{B}{\tau_q} (g''_k * h)(\tau) + h(\tau), \quad \tau > 0,$$

que é uma função localmente integrável em $[0, \infty)$. Por sua vez, procedendo como na demonstração da Proposição 4.6.3, obtemos que a função $\eta_k = \sum_{n=2}^{\infty} f'_{k,n}$ é uma função de classe C^1 em $[0, \infty)$.

Agora, pela demonstração da Proposição 4.6.3, temos que $\psi'_k = f'_{k,1} + \eta_k$. Logo, ψ'_k é uma função de classe C^1 em $(0, \infty)$ com derivada $\psi''_k = f''_{k,1} + \eta'_k$, que é uma função localmente integrável em $[0, \infty)$. Aplicando o Teorema 2.1.3, temos então que ψ'_k é absolutamente contínua em qualquer intervalo da forma $[0, b]$, $b > 0$. \square

Teorema 4.6.2. *Seja V_k como no Teorema 4.4.1. Então, $V_k \in AC([0, b])$, para todo $b > 0$.*

Demonstração. Considere novamente as funções ψ_k e $f_{k,n}$ dadas por (4.62) e (4.69), respectivamente. Procedendo como na demonstração da Proposição 4.5.4, obtemos que $\psi'_k = \sum_{n=1}^{\infty} f'_{k,n}$ é uma função de tipo exponencial. Segue do Teorema 2.2.2 e da Proposição 4.5.3 que

$$\mathcal{L}\{\psi'_k(\tau)\}(s) = s\mathcal{L}\{\psi_k(\tau)\}(s) - \psi_k(0) = s\Psi_k(s),$$

onde Ψ_k é a função dada por (4.5.3). Observando ainda que

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_k(s)} &= \frac{1}{(s^2 + A_k)(\tau_q s^\alpha + 1) - B} \\ &= \frac{1}{(s^2 + A_k)(\tau_q s^\alpha + 1)} \frac{1}{1 - \frac{B}{(s^2 + A_k)(\tau_q s^\alpha + 1)}} \\ &= \frac{1}{B} \sum_{n=1}^{\infty} B^n \frac{1}{(s^2 + A_k)^n} \frac{1}{(\tau_q s^\alpha + 1)^n} \\ &= \frac{1}{B} \Psi(s), \end{aligned}$$

para $s \in \mathbb{C}$, com $\Re(s)$ suficientemente grande, e que a função \widehat{V}_k pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \widehat{V}_k(s) &= a_1 \widehat{T}_k(s) + a_2 \frac{1}{D_k(s)} + a_3 s \frac{1}{D_k(s)} \\ &= a_1 \widehat{T}_k(s) + a_2 \Psi_k(s) + a_3 s \Psi_k(s), \end{aligned}$$

onde $a_1 = \frac{\tau_u}{\tau_q}$, $a_2 = \frac{\tau_q - \tau_u}{\tau_q} T_{k1}$ e $a_3 = \frac{\tau_q - \tau_u}{\tau_q} T_{k0}$, obtemos

$$V_k(\tau) = a_1 T_k(\tau) + \frac{a_2}{B} \psi_k(\tau) + \frac{a_3}{B} \psi'_k(\tau), \quad \tau \geq 0.$$

Assim, pelo Teorema 4.6.1 e pelas Proposições 4.6.3 e 4.6.4, temos que V_k é absolutamente contínua em todo intervalo $[0, b]$, com $b > 0$. \square

Segue dos resultados acima que existe solução aproximada de Galerkin de ordem m , para todo $m \in \mathbb{N}$, e que essa solução é dada pelo par

$$\begin{aligned} u_m(\tau) &= \sum_{k=1}^m T_k(\tau) \phi_k, \\ q_m(\tau) &= \sum_{k=1}^m V_k(\tau) \phi_k, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} T_k &= T_{k1}(g_k + g_k * \psi_k) + T_{k0}(g'_k + g'_k * \psi_k), \\ V_k &= \frac{\tau_u}{\tau_q} T_k + \frac{\tau_q - \tau_u}{B\tau_q} T_{k1} \psi_k + \frac{\tau_q - \tau_u}{B\tau_q} T_{k0} \psi'_k, \end{aligned}$$

com g_k e ψ_k dadas por (4.56) e (4.62), respectivamente.

4.7 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE T_k

Nesta seção, estudamos o comportamento assintótico da função T_k . Para tanto, mostramos que T_k é a \mathfrak{W} -transformada de \widehat{T}_k , conforme definição apresentada na Seção 2.2, e usamos o Teorema 2.2.6 para obter informações sobre T_k . Antes, precisamos de alguns resultados.

Proposição 4.7.1. *Seja $s_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$, com $r_0 > 0$, $\gamma_0 \in (-\pi, \pi]$, $\gamma_0 \neq 0$, um zero de D_k . Então $|\gamma_0| > \frac{\pi}{2}$.*

Demonstração. Como s_0 é um zero de D_k , temos

$$(s_0^2 + A_k)(\tau_q s_0^\alpha + 1) = B. \quad (4.72)$$

Sejam $\rho_0 \geq 0$ e $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$ tais que $s_0^2 + A_k = \rho_0 e^{i\theta_0}$ e observe que na verdade $\rho_0 \neq 0$, uma vez que $B > 0$ e (4.72) é satisfeita. Segue que

$$\begin{aligned} \tau_q r_0^\alpha \sin(\alpha\gamma_0) &= \Im(\tau_q s_0^\alpha + 1) \\ &= \Im\left(\frac{B}{\rho_0} e^{-i\theta_0}\right) \\ &= -\frac{B}{\rho_0} \sin \theta_0. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$r_0^2 \sin(2\gamma_0) = \Im(s_0^2 + A_k) \quad (4.73)$$

$$= \rho_0 \sin \theta_0. \quad (4.74)$$

Observando ainda que $\sin(\alpha\gamma_0) \neq 0$, pois $-\pi < \alpha\gamma_0 < \pi$ e $\alpha\gamma_0 \neq 0$, obtemos

$$\frac{r_0^{2-\alpha} \sin(2\gamma_0)}{\tau_q \sin(\alpha\gamma_0)} = \frac{r_0^2 \sin(2\gamma_0)}{\tau_q r_0^\alpha \sin(\alpha\gamma_0)} = \frac{\rho_0 \sin \theta_0}{-\frac{B}{\rho_0} \sin \theta_0} = -\frac{\rho_0^2}{B}.$$

Logo,

$$\frac{\sin(2\gamma_0)}{\sin(\alpha\gamma_0)} < 0.$$

Dessa forma, temos as seguintes possibilidades:

(a) $\sin(2\gamma_0) > 0$ e $\sin(\alpha\gamma_0) < 0$.

Como $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma_0 \in (-\pi, \pi]$ e $\sin(\alpha\gamma_0) < 0$, concluímos que $-\pi < \gamma_0 < 0$, o que fornece $-2\pi < 2\gamma_0 < 0$. Como além disso, $\sin(2\gamma_0) > 0$, obtemos $-2\pi < 2\gamma_0 < -\pi$.

Segue que

$$-\pi < \gamma_0 < -\frac{\pi}{2}.$$

(b) $\sin(2\gamma_0) < 0$ e $\sin(\alpha\gamma_0) > 0$.

As condições $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma_0 \in (-\pi, \pi]$ e $\sin(\alpha\gamma_0) > 0$ implicam que $0 < \gamma_0 \leq \pi$. Logo, $0 < 2\gamma_0 \leq 2\pi$. Levando em conta ainda que $\sin(2\gamma_0) < 0$, obtemos $\pi < 2\gamma_0 < 2\pi$.

Assim,

$$\frac{\pi}{2} < \gamma_0 < \pi.$$

Em qualquer um dos casos, temos que $|\gamma_0| > \frac{\pi}{2}$. \square

Seja s_0 um zero de D_k . Então, a Proposição 4.7.1 fornece que ou s_0 tem parte real negativa ou $s_0 = r_0 \in [0, \infty)$.

Proposição 4.7.2. *As seguintes afirmações são válidas:*

- (a) se $\chi_k + \beta > 0$, então $D_k(r)$ não possui zeros em $[0, \infty)$;
- (b) se $\chi_k + \beta = 0$, então o único zero de $D_k(r)$ em $[0, \infty)$ é $r_0 = 0$;
- (c) se $\chi_k + \beta < 0$, então existe $r_0 > 0$ tal que $D_k(r_0) = 0$.

Demonstração. (a) Como pode ser verificado sem dificuldades, $D_k(r) = 0$ se, e somente se,

$$r^2(\tau_q r^\alpha + 1) = -(\chi_k + \beta) - A_k \tau_q r^\alpha. \quad (4.75)$$

Como $\tau_q > 0$ e $A_k = \chi_k + \beta \frac{\tau_u}{\tau_q} > \chi_k + \beta > 0$, temos que $r^2(\tau_q r^\alpha + 1) \geq 0$ e $-(\chi_k + \beta) - A_k \tau_q r^\alpha < 0$, para todo $r \geq 0$. Logo, não existe $r \geq 0$ satisfazendo (4.75) e, portanto, $D_k(r)$ não possui zeros em $[0, \infty)$.

(b) Se $\chi_k + \beta = 0$, então $D_k(r)$ assume a forma

$$D_k(r) = \tau_q r^{2+\alpha} + r^2 + A_k \tau_q r^\alpha.$$

Como além disso, $A_k = \chi_k + \beta \frac{\tau_u}{\tau_q} > \chi_k + \beta = 0$, temos que $D_k(r) > 0$ sempre que $r > 0$. Observando ainda que $D_k(0) = 0$, temos que o único zero de $D_k(r)$ em $[0, \infty)$ é $r_0 = 0$. (c) Como $D_k(r)$ é uma função contínua em $[0, \infty)$ tal que $D_k(0) = \chi_k + \beta < 0$ e $D_k(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$, temos que existe $r_0 > 0$ de modo que $D_k(r_0) = 0$. \square

Proposição 4.7.3. *Se $\chi_k + \beta \geq 0$, então existe uma constante $a < 0$, de modo que se $s_0 \neq 0$ é um zero de D_k , então $\Re(s_0) \leq a$.*

Demonstração. Suponha primeiro que $\chi_k + \beta > 0$.

Seja $X = \{\Re(s); s \in \mathbb{C}, D_k(s) = 0\}$ e observe que, pelas Proposições 4.7.1 e 4.7.2, $X \subset (-\infty, 0)$.

Defina $a = \sup X$ e suponha que $a = 0$. Então, existe uma sequência (a_n) em X de modo que $a_n \rightarrow 0$. Para cada n , seja $s_n \in \mathbb{C}$ tal que $D_k(s_n) = 0$ e $\Re(s_n) = a_n$. Pela Proposição 4.4.1, existe $R_k > 0$ de modo que $s_n \in B_{R_k}$, para todo n , onde B_{R_k} denota a bola fechada

centrada na origem de raio R_k . Segue que existe uma subsequência (s_{n_j}) que converge para algum $s^* \in B_{R_k}$. Então, por continuidade, temos

$$\Re(s^*) = \lim \Re(s_{n_j}) = \lim a_{n_j} = 0$$

e

$$D_k(s^*) = \lim D_k(s_{n_j}) = 0.$$

Logo, s^* é um zero de D_k sobre o eixo imaginário, o que é contradiz as Proposições 4.7.1 e 4.7.2. Assim, $a < 0$.

Por sua vez, se $\chi_k + \beta = 0$, então $D_k(s) = s^\alpha \varphi_k(s)$, onde $\varphi_k(s) = \tau_q s^2 + s^{2-\alpha} + A_k \tau_q$. É então suficiente proceder como acima com φ_k no lugar de D_k para completar a demonstração. \square

Agora, seja

$$s_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } \chi_k + \beta \geq 0, \\ r_0, & \text{se } \chi_k + \beta < 0, \end{cases} \quad (4.76)$$

onde $r_0 = \max\{r > 0; D_k(r) = 0\}$. Então, pelos resultados anteriores, existe $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\widehat{T}_k(s) = (T_{k1} + T_{k0}s) \frac{1+\tau_q s^\alpha}{D_k(s)}$ é analítica em um domínio contendo o caminho \mathfrak{W} dado por $C_1 + C_2 - C_3$, onde

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ s_0 + x e^{i(\frac{\pi}{2}+\delta)}; x \in [\varepsilon, \infty) \right\}, \\ C_2 &= \left\{ s_0 + \varepsilon e^{ix}; x \in \left[-\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right), \frac{\pi}{2} + \delta \right] \right\}, \\ C_3 &= \left\{ s_0 + x e^{-i(\frac{\pi}{2}+\delta)}; x \in [\varepsilon, \infty) \right\}, \end{aligned}$$

com $\varepsilon > 0$ pequeno, e a região à direita de \mathfrak{W} .

Teorema 4.7.1. *Seja \mathfrak{W} o caminho definido acima. Então,*

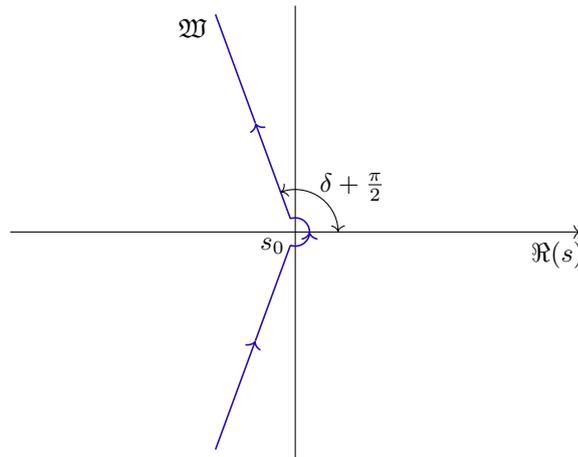
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \widehat{T}_k(s) \right\} (\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{W}} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds.$$

Demonstração. Como visto nas seções anteriores, existe uma função T_k de classe C^2 em $[0, \infty)$ tal que

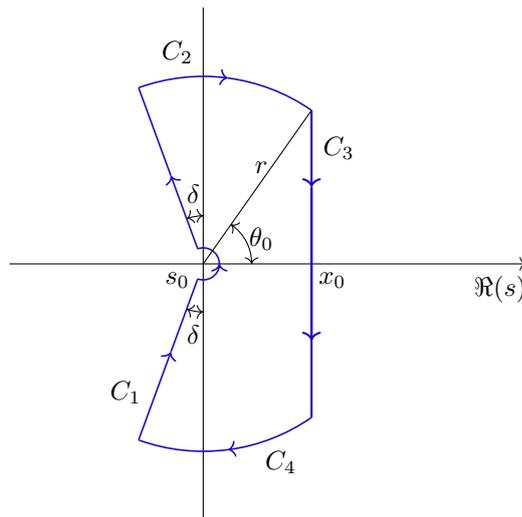
$$T_k(\tau) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \widehat{T}_k(s) \right\} (\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds, \quad (4.77)$$

para algum $x_0 > s_0$.

Seja $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, onde C_1, \dots, C_4 são os caminhos representados na Figura 51.

Figura 50 – Caminho \mathfrak{W} .

Fonte: Autor

Figura 51 – Caminhos C_1 , C_2 , C_3 e C_4 .

Fonte: Autor

Aplicando o Teorema de Cauchy (veja Conway (1978)), obtemos

$$\int_{\mathfrak{W}} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{x_0 - i\omega}^{x_0 + i\omega} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_2} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_4} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds. \quad (4.78)$$

Na sequência, mostramos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_2} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_4} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds = 0.$$

Para tanto, primeiro note que

$$s \widehat{T}_k(s + s_0) = (s + s_0) \widehat{T}_k(s + s_0) - s_0 \widehat{T}_k(s + s_0) \rightarrow T_{k0},$$

quando $s \rightarrow \infty$, $s + s_0 \in D = \{s = \rho e^{i\theta}; \rho > 0, -\pi < \theta < \pi, D_k(s) \neq 0\}$. Então, fixado $\varepsilon_0 > 0$ pequeno, existe $K_0 > 0$ de modo que $r |\widehat{T}_k(s_0 + r e^{i\theta})| < |T_{k0}| + \varepsilon_0$, sempre que

$r > K_0$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Assim, considerando $r > K_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds \right| &\leq e^{s_0\tau} \int_{\arccos \frac{x_0}{r}}^{\frac{\pi}{2}+\delta} |e^{\tau r e^{i\theta}}| r |\widehat{T}_k(s_0 + r e^{i\theta})| d\theta \\ &< e^{s_0\tau} (|T_{k0}| + \varepsilon_0) \int_{\arccos \frac{x_0}{r}}^{\frac{\pi}{2}+\delta} e^{\tau r \cos \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo, concluímos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_4} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds \right| &< e^{s_0\tau} (|T_{k0}| + \varepsilon_0) \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta}^{-\arccos \frac{x_0}{r}} e^{\tau r \cos \theta} d\theta \\ &= e^{s_0\tau} (|T_{k0}| + \varepsilon_0) \int_{\arccos \frac{x_0}{r}}^{\frac{\pi}{2}+\delta} e^{\tau r \cos \eta} d\eta. \end{aligned}$$

Agora, seja $\theta_0 = \arccos \frac{x_0}{r}$. Fazendo a mudança de variável $\gamma = \theta - \frac{\pi}{2}$ e usando a desigualdade de Jordan, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\arccos \frac{x_0}{r}}^{\frac{\pi}{2}+\delta} e^{\tau r \cos \theta} d\theta &= \int_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}^{\delta} e^{-\tau r \sin \gamma} d\gamma \\ &= \int_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}^0 e^{-\tau r \sin \gamma} d\gamma + \int_0^{\delta} e^{-\tau r \sin \gamma} d\gamma \\ &\leq \int_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}^0 e^{-\tau r \gamma} d\gamma + \int_0^{\delta} e^{-\frac{2}{\pi} \tau r \gamma} d\gamma \\ &= -\frac{1}{\tau r} + \frac{e^{\tau r (\frac{\pi}{2} - \theta_0)}}{\tau r} - \frac{e^{-\frac{2}{\pi} \tau r \delta}}{\frac{2}{\pi} \tau r} + \frac{1}{\frac{2}{\pi} \tau r}. \end{aligned}$$

Usando ainda que $x \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}x$, para todo $x \in [0, 1]$, obtemos

$$\frac{x_0}{r} \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} \frac{x_0}{r},$$

o que fornece

$$\frac{e^{x_0\tau}}{\tau r} \leq \frac{e^{\tau r (\frac{\pi}{2} - \theta_0)}}{\tau r} \leq \frac{e^{\frac{\tau \pi x_0}{2}}}{\tau r},$$

de onde

$$\frac{e^{\tau r (\frac{\pi}{2} - \theta_0)}}{\tau r} \rightarrow 0, \text{ quando } r \rightarrow \infty.$$

Segue que

$$\int_{\arccos \frac{x_0}{r}}^{\frac{\pi}{2}+\delta} e^{\tau r \cos \theta} d\theta \rightarrow 0, \text{ quando } r \rightarrow \infty$$

e, portanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_2} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_4} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds = 0. \quad (4.79)$$

Dessa forma, por (4.77), (4.78) e (4.79), obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{M}} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} e^{s\tau} \widehat{T}_k(s) ds = T_k(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (4.80)$$

o que completa a demonstração. \square

O resultado acima fornece que se T_k é como no Teorema (4.4.1), então T_k é a \mathfrak{W} -transformada de $\hat{T}_k(s) = (T_{k1} + T_{k0}s) \frac{1+\tau_q s^\alpha}{D_k(s)}$. Agora, estamos em condições de provar o resultado principal desta seção.

Teorema 4.7.2. *As seguintes afirmações são válidas:*

- (a) se $\chi_n + \beta > 0$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T_k(\tau) = o(\tau^{-m})$ quando $\tau \rightarrow \infty$;
- (b) se $\chi_n + \beta = 0$, então existem constantes $M \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $T_k(\tau) \sim M \frac{\tau^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)}$ quando $\tau \rightarrow \infty$;
- (c) se $\chi_n + \beta < 0$, então existem constantes $M \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $T_k(\tau) \sim M e^{s_0 \tau} \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!}$ quando $\tau \rightarrow \infty$, onde s_0 é dado por (4.76).

Demonstração. (a) Como pode ser verificado sem dificuldades, se $\chi_k + \beta > 0$, então

$$\hat{T}_k(s) \sim \frac{T_{k1}}{\chi_k + \beta} \text{ quando } s \rightarrow 0 \text{ em } S,$$

no caso em que $T_{k1} \neq 0$, e

$$\hat{T}_k(s) \sim \frac{T_{k0}}{\chi_k + \beta} s \text{ quando } s \rightarrow 0 \text{ em } S,$$

no caso em que $T_{k1} = 0$, onde $S = \{s \in \mathbb{C}; |\arg(s - s_0)| \leq \frac{\pi}{2} + \delta\}$.

Assim, todas as hipóteses do Teorema 2.2.6 são satisfeitas, com $M = \frac{T_{k1}}{\chi_k + \beta}$ e $\lambda = 0$ se $T_{k1} \neq 0$, e $M = \frac{T_{k0}}{\chi_k + \beta}$ e $\lambda = 1$ se $T_{k1} = 0$. Em ambos os casos, $s_0 = 0$. Segue que

$$T_k(\tau) = o(\tau^{-m}) \text{ quando } \tau \rightarrow \infty,$$

onde $m = 1$ se $T_{k1} \neq 0$, e $m = 2$ se $T_{k1} = 0$.

(b) É suficiente observar que se $\chi_k + \beta = 0$, então

$$\hat{T}_k(s) \sim \frac{T_{k1}}{A_k \tau_q} s^{-\alpha} \text{ quando } s \rightarrow 0 \text{ em } S,$$

no caso em que $T_{k1} \neq 0$, e

$$\hat{T}_k(s) \sim \frac{T_{k0}}{A_k \tau_q} s^{1-\alpha} \text{ quando } s \rightarrow 0 \text{ em } S,$$

no caso em que $T_{k1} = 0$, e aplicar o Teorema 2.2.6 para obter

$$T_k(\tau) \sim M \frac{\tau^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} \text{ quando } \tau \rightarrow \infty,$$

onde $M = \frac{T_{k1}}{A_k \tau_q}$ e $m = 1$ se $T_{k1} \neq 0$, e $M = \frac{T_{k0}}{A_k \tau_q}$ e $m = 2$ se $T_{k1} = 0$.

(c) Se $\chi_k + \beta < 0$, então conforme definido acima, $s_0 = r_0 = \max\{r > 0; D_k(r) = 0\}$. Assim, s_0 é um número real positivo tal que $D_k(s_0) = 0$. Além disso, D_k é uma função analítica no domínio $D = \{s = r e^{i\Theta}; r > 0, -\pi < \Theta < \pi\}$, logo é analítica em s_0 . Observando ainda que

$$D'_k(s_0) = \tau_q(2 + \alpha)r_0^{1+\alpha} + 2r_0 + A_k \tau_q \alpha r_0^{\alpha-1} > 0,$$

se $A_k \geq 0$, e

$$D''_k(s_0) = \tau_q(2 + \alpha)(1 + \alpha)r_0^\alpha + 2 + A_k \tau_q \alpha(\alpha - 1)r_0^{\alpha-2} > 0,$$

se $A_k < 0$ (pois $\alpha \in (0, 1)$), concluímos que s_0 é um zero de ordem m de D_k , onde $m = 1$ ou

2. Segue que $\hat{T}_k(s) = (T_{k1} + T_{k0}s) \frac{1 + \tau_q s^\alpha}{D_k(s)}$ tem um polo de ordem m em s_0 , o que fornece que

$$\hat{T}_k(s) \sim M(s - s_0)^{-m} \text{ quando } s \rightarrow s_0 \text{ em } S,$$

para algum $M \neq 0$. Novamente pelo Teorema 2.2.6, obtemos

$$T_k(\tau) \sim M e^{s_0 \tau} \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \text{ quando } \tau \rightarrow \infty.$$

□

4.8 RESULTADOS DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Inspirados por Andrade, Cuevas e Soto (2016), estudamos nesta seção a existência de solução de um problema mais geral do que (4.40), no qual um termo forçante que depende não apenas do tempo, mas também do deslocamento da estrutura é admitido.

Consideremos então o problema

$$\begin{cases} \ddot{u}(\tau) + \beta q(\tau) = -Au(\tau) + f(\tau, u(\tau)), & \tau \geq 0, \\ (1 + \tau_q D_\tau^\alpha)q(\tau) = (1 + \tau_u D_\tau^\alpha)u(\tau), & \tau \geq 0, \\ u(0) = u_0, \\ \dot{u}(0) = u_1, \end{cases} \quad (4.81)$$

onde $u_0, u_1 \in X = L^2(0, 1)$ e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua tal que existem constantes $c > 0$ e $\rho \geq 1$ de modo que

$$\|f(\tau, x) - f(\tau, y)\|_X \leq c \left(1 + \|x\|_X^{\rho-1} + \|y\|_X^{\rho-1}\right) \|x - y\|_X \quad (4.82)$$

e

$$\|f(\tau, x)\|_X \leq c(1 + \|x\|_X^\rho), \quad (4.83)$$

para quaisquer $\tau \in [0, \infty)$ e $x, y \in X$. É assumido que uma das condições sobre os parâmetros λ e K_L apresentadas na Observação 4.2.1 é satisfeita. Dessa forma, apenas o caso em que o operador A é positivo definido é considerado. Na sequência, procedemos como em Andrade, Cuevas e Soto (2016), Neto (2013), para estabelecer um conceito apropriado de solução do problema (4.81).

Suponha que o par $u, q : [0, \infty) \rightarrow X$ de funções contínuas satisfaz (4.81). Aplicando, pelo menos formalmente, a transformada de Laplace em ambos os lados das equações de (4.81), obtemos

$$\begin{aligned} (s^2 + A)\hat{u}(s) + \beta\hat{q}(s) &= su_0 + u_1 + F(s), \\ (1 + \tau_q s^\alpha)\hat{q}(s) &= (1 + \tau_u s^\alpha)\hat{u}(s), \end{aligned}$$

onde $F(s)$ denota a transformada de Laplace de $f(\tau, u(\tau))$. Resolvendo o sistema acima, obtemos

$$\left(s^2 + \beta\frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha} + A\right)\hat{u}(s) = su_0 + u_1 + F(s) \quad (4.84)$$

e

$$\hat{q}(s) = \frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha}\hat{u}(s). \quad (4.85)$$

Supondo então que $s^2 + \beta\frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha} \in \rho(-A)$, a equação (4.84) implica

$$\begin{aligned} \hat{u}(s) &= s \left(s^2 + \beta\frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha} + A\right)^{-1} u_0 + \left(s^2 + \beta\frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha} + A\right)^{-1} u_1 \\ &+ \left(s^2 + \beta\frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha} + A\right)^{-1} F(s). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace (pelo menos formalmente) em ambos os lados de (4.86), concluímos que

$$u(\tau) = C_{\alpha,A}(\tau)u_0 + S_{\alpha,A}(\tau)u_1 + \int_0^\tau S_{\alpha,A}(\tau - s)f(s, u(s))ds, \quad \tau \geq 0, \quad (4.87)$$

onde

$$C_{\alpha,A}(\tau)x = \mathcal{L}^{-1} \left\{ s \left(s^2 + \beta\frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha} + A\right)^{-1} x \right\}(\tau) \quad (4.88)$$

e

$$S_{\alpha,A}(\tau)x = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(s^2 + \beta\frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha} + A\right)^{-1} x \right\}(\tau), \quad (4.89)$$

para $\tau \geq 0$, $x \in X$. Por sua vez, aplicando a transformada inversa de Laplace em ambos os lados de (4.85), obtemos

$$q(\tau) = \frac{\tau_u}{\tau_q} u(\tau) + \frac{\tau_u - \tau_q}{\tau_q^2} (h * u)(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (4.90)$$

onde h é a função dada por (4.58).

A seguir, mostramos que $C_{\alpha,A}(\tau)$ e $S_{\alpha,A}(\tau)$ são operadores em X bem definidos. Para tanto, precisamos do seguinte resultado.

Lema 4.8.1. *Seja*

$$\varphi(s) = s^2 + \beta \frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha},$$

para $s \in \mathbb{C}$ tal que $|s| > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$. Então, $\varphi(s) \in \mathbb{C} \setminus \{r \exp(i\pi); r \geq 0\}$, para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(s) = x_0$, qualquer que seja $x_0 > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Demonstração. Primeiro, observe que $\varphi(s)$ pode ser reescrita como

$$\varphi(s) = s^2 + (B + \beta) - B \frac{1}{1 + \tau_q s^\alpha},$$

para todo $|s| > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$, onde B é dado em (4.53). Então, para $s = r \exp(i\theta)$, com $r > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, temos

$$\begin{aligned} \Im(\varphi(s)) &= \Im(s^2) - \Im\left(B \frac{1}{1 + \tau_q s^\alpha}\right) \\ &= r^2 \sin(2\theta) + B \frac{\tau_q r^\alpha \sin(\alpha\theta)}{[1 + \tau_q r^\alpha \cos(\alpha\theta)]^2 + [\tau_q r^\alpha \sin(\alpha\theta)]^2}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Seja $x_0 > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$ e considere $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(s) = x_0$. Se $\Im(s) > 0$, então s pode ser escrito na forma exponencial como $s = r \exp(i\theta)$, com $r > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Para um tal s , ambos os termos do lado direito de (4.91) são positivos, o que implica que $\Im(\varphi(s)) > 0$. Por sua vez, se $\Im(s) < 0$, então podemos escrever $s = r \exp(i\theta)$, com $r > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. Nesse caso, ambos os termos do lado direito de (4.91) são negativos, de onde $\Im(\varphi(s)) < 0$. Observando ainda que $\varphi(x_0) > 0$, temos que $\varphi(s) \in S$ em qualquer um dos casos. \square

Seja $x_0 > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$ arbitrário. Então, o resultado acima fornece que $\varphi(s) \in \rho(-A)$, para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(s) = x_0$. Conforme a Observação 4.2.7, dado $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, existe $M = M(\theta) > 0$ tal que $S = \{s \in \mathbb{C}; |\arg(s)| \leq \pi - \theta\} \subset \rho(-A)$ e

$$\|(s + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|s|}, \quad s \in S.$$

Apesar disso, não temos que $\varphi(s)$ pertence a um setor S para todo $s \in \mathbb{C}$, com $\Re(s) = x_0$, uma vez que $\frac{\Im(\varphi(s))}{\Re(\varphi(s))} \rightarrow 0$ e $\Re(\varphi(s)) \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow \infty$, $\Re(s) = x_0$, como pode ser verificado sem dificuldades. Logo, não podemos garantir que a desigualdade

$$\|(\varphi(s) + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\varphi(s)|}$$

é satisfeita para todo $s \in \mathbb{C}$ em uma reta $\Re(s) = x_0 > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$, uma propriedade que permitiria obter resultados mais gerais e simplificaria as demonstrações. A seguir, $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ denota uma base de X formada por autofunções de A , conforme considerado na Seção 4.2.

Teorema 4.8.1. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e $x_0 > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$. Então,*

$$S_{\alpha,A}(\tau)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{s\tau} \left(s^2 + \beta \frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha} + A \right)^{-1} x ds, \quad \tau \geq 0,$$

e

$$C_{\alpha,A}(\tau)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{s\tau} s \left(s^2 + \beta \frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha} + A \right)^{-1} x ds, \quad \tau \geq 0,$$

são operadores em X bem definidos com domínio D dado por qualquer subespaço de X gerado por um conjunto da forma $\{\phi_1, \dots, \phi_{k_0}\}$, $k_0 \in \mathbb{N}$. Além disso, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|S_{\alpha,A}(\tau)x\|_X \leq M\|x\|_X \quad \text{e} \quad \|C_{\alpha,A}(\tau)x\|_X \leq M\|x\|_X,$$

para quaisquer $\tau \geq 0$ e $x \in D$.

Demonstração. Seja $s \in \mathbb{C}$, com $\Re(s) = x_0$. Então, pelo Lema 4.8.1 e pela Observação 4.2.6, $(\varphi(s) + A)^{-1} = -(-\varphi(s) - A)^{-1}$ é um operador linear limitado em X tal que

$$(\varphi(s) + A)^{-1} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(s) + \chi_k} (x, \phi_k) \phi_k,$$

para todo $x \in X$. Assim, se $x \in D$, temos

$$\begin{aligned} S_{\alpha,A}(\tau)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{s\tau} (\varphi(s) + A)^{-1} x ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{s\tau} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{\varphi(s) + \chi_k} (x, \phi_k) \phi_k ds \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\varphi(s) + \chi_k} \right\} (\tau) (x, \phi_k) \phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} \mathcal{L}^{-1} \{F_k(s)\} (\tau) (x, \phi_k) \phi_k, \end{aligned}$$

onde F_k é dada por (4.54). Como visto na Seção 4.6, a função $f_k = g_k + g_k * \phi_k$ é uma função de classe C^3 em $[0, \infty)$ tal que $\mathcal{L}\{f_k(\tau)\} = F_k$. Assim,

$$S_{\alpha,A}(\tau)x = \sum_{k=1}^{k_0} f_k(\tau)(x, \phi_k)\phi_k, \quad x \in D, \tau \in [0, \infty).$$

Logo, $S_{\alpha,A}(\tau)x \in X$, para quaisquer $x \in D$ e $\tau \geq 0$.

Procedendo de modo análogo, obtemos

$$\begin{aligned} C_{\alpha,A}(\tau)x &= \sum_{k=1}^{k_0} \mathcal{L}^{-1}\{sF_k(s)\}(\tau)(x, \phi_k)\phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} f'_k(\tau)(x, \phi_k)\phi_k, \end{aligned}$$

para quaisquer $x \in D, \tau \in [0, \infty)$, o que mostra que $C_{\alpha,A}(\tau)$ é também um operador bem definido em X , para todo $\tau \geq 0$.

Para demonstrar a segunda parte do teorema, note que como f_k é contínua em $[0, \infty)$ e, para algum $m \in \mathbb{N}$, $f_k(\tau) = o(\tau^{-m})$ quando $\tau \rightarrow \infty$ (pelo Teorema 4.7.2), existe $M_k > 0$ tal que $|f_k(\tau)| \leq M_k$, para todo $\tau \geq 0$. O mesmo vale para f'_k . Segue que

$$\begin{aligned} \|S_{\alpha,A}(\tau)x\|_X &\leq \sum_{k=1}^{k_0} |f_k(\tau)(x, \phi_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} |f_k(\tau)| \|x\|_X \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} M_k \|x\|_X \\ &= M \|x\|_X, \end{aligned}$$

para quaisquer $x \in D, \tau \in [0, \infty)$, onde $M = \sum_{k=1}^{k_0} M_k$. Procedendo de modo similar, obtemos o mesmo para $C_{\alpha,A}$. \square

Motivados pela discussão acima, adotamos a seguinte definição de solução do problema (4.81).

Definição 4.8.1. Seja $T > 0$. Dizemos que um par $u, q : [0, T] \rightarrow X$ é uma solução do problema (4.81) se $u, q \in C([0, T], X)$ e

$$\begin{aligned} u(\tau) &= C_{\alpha,A}(\tau)u_0 + S_{\alpha,A}(\tau)u_1 + \int_0^\tau S_{\alpha,A}(\tau-s)f(s, u(s))ds, \\ q(\tau) &= \frac{\tau_u}{\tau_q}u(\tau) + \frac{\tau_u - \tau_q}{\tau_q^2}(h * u)(\tau), \end{aligned}$$

para todo $\tau \geq 0$.

Teorema 4.8.2. *Seja $\alpha \in (0, 1)$ e considere u_0, u_1 no subespaço D de X gerado por $\{\phi_1, \dots, \phi_{k_0}\}$. Suponha que $f(\tau, x) \in D$, para quaisquer $\tau \in [0, \infty)$, $x \in X$. Se $c > 0$ é suficientemente pequeno, onde c é dado em (4.82) e (4.83), então (4.81) tem pelo menos uma solução.*

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que

$$\|u_0\|_X, \|u_1\|_X < \frac{r}{4M}$$

e considere no espaço $C([0, T], X)$, com sua norma usual, o conjunto

$$B_r = \left\{ v \in C([0, T], X); \sup_{0 \leq \tau \leq T} \|v(\tau)\|_X \leq r \right\}.$$

Em B_r , defina o operador

$$Tu(\tau) = C_{\alpha, A}(\tau)u_0 + S_{\alpha, A}(\tau)u_1 + \int_0^\tau S_{\alpha, A}(\tau - s)f(s, u(s))ds, \quad \tau \in [0, T].$$

Na sequência, mostraremos que $Tu \in C([0, T], X)$, para todo $u \in B_r$. Para tanto, fixe $\tau_2 \in [0, T)$ e seja $\tau_2 < \tau_1 \leq T$. Então,

$$\begin{aligned} \|Tu(\tau_1) - Tu(\tau_2)\|_X &\leq \| [C_{\alpha, A}(\tau_1) - C_{\alpha, A}(\tau_2)] u_0 \|_X + \| [S_{\alpha, A}(\tau_1) - S_{\alpha, A}(\tau_2)] u_1 \|_X \\ &\quad + \left\| \int_0^{\tau_2} [S_{\alpha, A}(\tau_1 - s) - S_{\alpha, A}(\tau_2 - s)] f(s, u(s)) ds \right\|_X \\ &\quad + \left\| \int_{\tau_2}^{\tau_1} S_{\alpha, A}(\tau_1 - s) f(s, u(s)) ds \right\|_X. \end{aligned}$$

Para o primeiro termo, temos

$$\begin{aligned} \| [C_{\alpha, A}(\tau_1) - C_{\alpha, A}(\tau_2)] u_0 \|_X &\leq \sum_{k=1}^{k_0} |f'_k(\tau_1) - f'_k(\tau_2)| \times |(u_0, \phi_k)| \\ &\leq \|u_0\|_X \sum_{k=1}^{k_0} |f'_k(\tau_1) - f'_k(\tau_2)| \end{aligned}$$

que tende a zero quando $\tau_1 \rightarrow \tau_2^+$, pois $f_k = \mathcal{L}^{-1}\{F_k(s)\}$ é uma função de classe C^3 em $[0, \infty)$. Procedendo de modo similar, obtemos que o segundo termo também tende a zero quando $\tau_1 \rightarrow \tau_2^+$. Para o terceiro termo, que denotaremos por T_3 , temos

$$\begin{aligned} T_3 &= \left\| \sum_{k=1}^{k_0} \int_0^{\tau_2} [f_k(\tau_1 - s) - f_k(\tau_2 - s)] (f(s, u(s)), \phi_k) \phi_k ds \right\|_X \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \left| \int_0^{\tau_2} [f_k(\tau_1 - s) - f_k(\tau_2 - s)] (f(s, u(s)), \phi_k) ds \right|. \end{aligned}$$

Agora, observe que como f_k é uma função contínua em $[0, \infty)$ e

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_2} |(f(s, u(s)), \phi_k)| ds &\leq \int_0^{\tau_2} \|f(s, u(s))\|_X ds \\ &\leq c \int_0^{\tau_2} (1 + \|u(s)\|_X^\rho) ds \\ &\leq c(1 + r^\rho) \tau_2, \end{aligned}$$

a função $\psi(s, \tau_1) = [f_k(\tau_1 - s) - f_k(\tau_2 - s)](f(s, u(s)), \phi_k)$ é integrável em $[0, \tau_2]$, para cada $\tau_1 \in [0, T]$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} |\psi(s, \tau_1)| &\leq |f_k(\tau_1 - s) - f_k(\tau_2 - s)| \times \|f(s, u(s))\|_X \\ &\leq 2Mc(1 + r^\rho), \quad s \in [0, \tau_2], \tau_1 \in [0, T], \end{aligned}$$

e $\lim_{\tau_1 \rightarrow \tau_2} \psi(s, \tau_1) = \psi(s, \tau_2) = 0$, para todo $s \in [0, \tau_2]$. Segue do teorema da convergência dominada que

$$\int_0^{\tau_2} [f_k(\tau_1 - s) - f_k(\tau_2 - s)](f(s, u(s)), \phi_k) ds \rightarrow 0$$

quando $\tau_1 \rightarrow \tau_2$. Assim, o terceiro termo também tende a zero quando $\tau_1 \rightarrow \tau_2^+$. Para o quarto termo, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\tau_2}^{\tau_1} S_{\alpha, A}(\tau_1 - s) f(s, u(s)) ds \right\|_X &\leq M \int_{\tau_2}^{\tau_1} \|f(s, u(s))\|_X ds \\ &\leq Mc(1 + r^\rho)(\tau_2 - \tau_1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $\tau_1 \rightarrow \tau_2^+$. O caso $\tau_1 < \tau_2$ é similar. Segue que de fato $Tu \in C([0, T], X)$, para todo $u \in B_r$. Observe ainda que

$$\begin{aligned} \|Tu(\tau)\|_X &\leq \|C_{\alpha, A}(\tau)u_0\|_X + \|S_{\alpha, A}(\tau)u_1\|_X + \left\| \int_0^\tau S_{\alpha, A}(\tau - s) f(s, u(s)) ds \right\|_X \\ &\leq M\|u_0\|_X + M\|u_1\|_X + Mc(1 + r^\rho)\tau \\ &\leq \frac{r}{2} + Mc(1 + r^\rho)T, \end{aligned}$$

para $\tau \in [0, T]$. Considerando

$$0 < c < \frac{r}{2MT(1 + r^\rho)},$$

obtemos

$$\|Tu(\tau)\|_X \leq r, \quad \tau \in [0, T].$$

Logo, $T(B_r) \subset B_r$.

Mostramos agora que se $c > 0$ é suficientemente pequeno, então T é uma contração em B_r . Com efeito, sejam $u, v \in B_r$. Então,

$$\begin{aligned} \|Tu(\tau) - Tv(\tau)\|_X &= \left\| \int_0^\tau S_{\alpha,A}(\tau-s) [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds \right\|_X \\ &\leq M \int_0^\tau \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_X ds \\ &\leq Mc \int_0^\tau \left(1 + \|u(s)\|_X^{\rho-1} + \|v(s)\|_X^{\rho-1}\right) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq Mc \left(1 + 2r^{\rho-1}\right) \sup_{0 \leq s \leq \tau} \|u(s) - v(s)\|_X \tau \\ &\leq Mc \left(1 + 2r^{\rho-1}\right) T \|u - v\|_{B_r}, \end{aligned}$$

para todo $\tau \in [0, T]$. Dessa forma, considerando ainda

$$0 < c < \frac{1}{2MT(1 + 2r^{\rho-1})},$$

obtemos que T é uma contração em B_r . Segue o teorema do ponto fixo de Banach que T tem um ponto fixo $u \in B_r$, o que conclui a demonstração. \square

4.9 CONCLUSÕES

Neste capítulo, um sistema contínuo consistindo de uma haste elástica posicionada sobre uma fundação viscoelástica foi considerado. Foi assumido que a extremidade esquerda da haste está presa a uma mola e que a extremidade direita é simplesmente suportada. A fundação viscoelástica foi modelada usando a equação constitutiva de Zener contendo derivadas fracionárias. O objetivo principal deste capítulo foi estudar o comportamento assintótico desse sistema. Para tanto, mostramos que a dinâmica da estrutura é governada pelo sistema de equações diferenciais parciais acopladas com derivadas fracionárias (4.21), onde a função u representa o deslocamento na direção y e q representa a tensão na fundação. Para estudar esse sistema, primeiro analisamos os autovalores do operador A . Esses autovalores dependem das condições de fronteira e têm um papel importante no estudo efetuado. Foi mostrado que A , como um operador no espaço L^2 , é autoadjunto, o que garante a existência de uma base ortonormal $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de L^2 formada por autofunções de A . Além disso, foi obtido que A é positivo definido se o parâmetro de força λ é menor ou igual a $\lambda_0 = \frac{3\pi^2}{\pi^2+3}$, ou se satisfaz uma das seguintes condições

- (a)** $\lambda < K_L$ e $\lambda \leq \pi^2$;

(b) $\lambda = K_L < \pi^2$;

(c) $K_L < \lambda < \lambda_0 \left(\frac{K_L}{3} + 1 \right)$.

Por outro lado, denotando por χ_k o autovalor associado a ϕ_k , $k \in \mathbb{N}$, foi mostrado que:

(i) alterando os índices, se necessário, $-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 < \chi_1 \leq \chi_2 \leq \dots$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_k = \infty$;

(ii) χ_k é solução da equação

$$\begin{aligned} & \delta_\lambda(\chi) \varepsilon_\lambda(\chi) [\delta_\lambda(\chi)^2 + \varepsilon_\lambda(\chi)^2] \cosh(\delta_\lambda(\chi)) \cos(\varepsilon_\lambda(\chi)) \\ & - \varepsilon_\lambda(\chi) K_L \sinh(\delta_\lambda(\chi)) \cos(\varepsilon_\lambda(\chi)) + \delta_\lambda(\chi) K_L \cosh(\delta_\lambda(\chi)) \sin(\varepsilon_\lambda(\chi)) = 0, \end{aligned}$$

onde

$$\delta_\lambda(\chi) = \sqrt{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \chi}} \quad \text{e} \quad \varepsilon_\lambda(\chi) = \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \chi}};$$

(iii) existe no máximo uma quantidade finita de autovalores negativos.

O método de Galerkin foi então aplicado para obter uma aproximação da solução. Essa aproximação foi definida como um par de funções u_m, q_m , onde cada função é uma soma de m termos em que cada um desses termos é o produto de uma autofunção ϕ_k (que depende apenas da variável espacial) e uma função da variável temporal (denotada por T_k no caso da função u_m e V_k no caso da função q_m). Para o problema considerado, se as condições iniciais pertencem ao subespaço de L^2 gerado por $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$, então a aproximação de Galerkin de ordem m é na verdade uma solução do problema. Para determinar as funções T_k e V_k , foi obtido um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas com derivadas fracionárias, que foi estudado na sequência. Para tanto, primeiro aplicamos o método da transformada de Laplace, que permitiu assegurar a existência de uma solução no espaço de distribuições \mathcal{K}'_+ . Foi então obtido que essa solução tem a forma

$$\begin{aligned} T_k(\tau) &= T_{k1} [g_k(\tau) + (g_k * \psi_k)(\tau)] + T_{k0} [g'_k(\tau) + (g'_k * \psi_k)(\tau)], \quad \tau \geq 0, \\ V_k(\tau) &= \frac{\tau_u}{\tau_q} T_k + \frac{\tau_q - \tau_u}{B\tau_q} T_{k1} \psi_k + \frac{\tau_q - \tau_u}{B\tau_q} T_{k0} \psi'_k, \quad \tau \geq 0, \end{aligned}$$

onde g_k e ψ_k são dadas por (4.56) e (4.62), respectivamente. Usando essas expressões, foi mostrado que T_k é de classe C^2 em $[0, \infty)$ e V_k é localmente absolutamente contínua em $[0, \infty)$, o que garante a existência de uma aproximação de Galerkin de ordem m , para todo $m \in \mathbb{N}$. Para determinar o comportamento assintótico de T_k , os zeros da função característica D_k

foram analisados. É interessante observar que se os termos com derivadas fracionárias fossem eliminados, então D_k seria o polinômio característico do problema. Foi obtido que se $\chi_k + \beta \geq 0$, então D_k não possui zeros com parte real positiva, e se $\chi_k + \beta < 0$, então existe $r_0 > 0$ de modo que $D_k(r_0) = 0$. Mostramos então que no primeiro caso $T_k(\tau) \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$ e, no segundo, $T_k(\tau) \rightarrow \infty$ quando $\tau \rightarrow \infty$. Como pode ser verificado sem dificuldades, se a fundação viscoelástica do tipo Zener fracionário é substituída por uma fundação elástica, isto é, se a equação (4.2) é substituída por $Q = E_p \Delta$, então $T_k(\tau) = T_{k0} \cos(\sqrt{\chi_k + \beta} \tau) + \frac{T_{k1}}{\sqrt{\chi_k + \beta}} \sin(\sqrt{\chi_k + \beta} \tau)$ quando $\chi_k + \beta > 0$, que de forma geral não tende a zero quando $\tau \rightarrow \infty$, embora seja limitada. Dessa forma, a fundação viscoelástica fracionária desempenha papel importante no amortecimento da vibração. É importante observar também que se λ satisfaz uma das condições (a), (b) e (c), então toda solução aproximada de Galerkin tende a zero quando $\tau \rightarrow \infty$, pois todos os seus termos têm essa propriedade. É interessante que se o parâmetro de força é pequeno o suficiente ($\lambda \leq \lambda_0$), então a aproximação tende a zero ao longo do tempo independentemente do valor da constante da mola à qual a extremidade esquerda da haste está presa. Por sua vez, se A não é positivo definido, então pode existir um termo da aproximação de Galerkin que tende a ∞ quando $\tau \rightarrow \infty$. Para finalizar o capítulo, inspirados por Andrade, Cuevas e Soto (2016), estudamos a questão da existência de solução local de um problema mais geral do que (4.21), onde um termo forçante f , que pode depender não apenas de τ , mas também do deslocamento $u(\tau)$, foi admitido. Apenas o caso em que A é positivo definido foi considerado. Para realizar o estudo, primeiro definimos um conceito apropriado de solução. Nessa etapa, foi preciso mostrar que para todo $s \in \mathbb{C}$ em uma reta $\Re(s) = x_0 > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$, $\varphi(s) = s^2 + \beta \frac{1 + \tau_u s^\alpha}{1 + \tau_q s^\alpha}$ pertence ao resolvente de $-A$. No caso do problema considerado em Andrade, Cuevas e Soto (2016), no lugar de $\varphi(s)$ foi obtida a função s^α , que para todo s em qualquer reta $\Re(s) = x_0 > 0$ ou mesmo em algum caminho de Hankel, assume valores em um setor associado ao operador correspondente a $-A$. A função $\varphi(s)$ não tem essa propriedade. Logo, não podemos garantir que a desigualdade $\|(\varphi(s) + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\varphi(s)|}$ é satisfeita para todo $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) = x_0$, para algum $x_0 > \tau_q^{-\frac{1}{\alpha}}$. Essa propriedade permitiria obter que os operadores $C_{\alpha,A}(\tau)$ e $S_{\alpha,A}(\tau)$ estão definidos em todo o espaço L^2 , simplificaria as demonstrações dos resultados e tornaria dispensável as restrições impostas sobre as condições iniciais e sobre a função f no Teorema 4.8.2, que assegura a existência de solução local.

REFERÊNCIAS

- ADAMS, R.; FOURNIER, J. *Sobolev Spaces*. [S.l.]: Elsevier Science, 2003. (ISSN).
- AL-GWAIZ, M. A. *Theory of Distributions*. [S.l.]: CRC Press, 1992. (Pure and Applied Mathematics).
- AMABILI, M. Nonlinear damping in large-amplitude vibrations: modelling and experiments. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 93, n. 1, p. 5–18, 2018.
- AMER, Y.; EL-SAYED, A.; KOTB, A. Nonlinear vibration and of the duffing oscillator to parametric excitation with time delay feedback. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 85, n. 4, p. 2497–2505, 2016.
- ANDRADE, B. de; CUEVAS, C.; SOTO, H. On fractional heat equations with non-local initial conditions. *Edinburgh Mathematical Society. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 59, n. 1, p. 65 – 76, 2016.
- ATANACKOVIC, T. *Stability theory of elastic rods*. [S.l.]: World Scientific, 1997. v. 1.
- ATANACKOVIC, T.; STANKOVIC, B. Stability of an elastic rod on a fractional derivative type of foundation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 277, n. 1, p. 149 – 161, 2004.
- ATANACKOVIC, T. M.; JANEV, M.; KONJIK, S.; PILIPOVIC, S.; ZORICA, D. Vibrations of an elastic rod on a viscoelastic foundation of complex fractional kelvin–voigt type. *Meccanica*, Springer, v. 50, n. 7, p. 1679–1692, 2015.
- ATANACKOVIC, T. M.; OPARNICA, L.; PILIPOVIĆ, S. Distributional framework for solving fractional differential equations. *Integral Transforms and Special Functions*, Taylor & Francis, v. 20, n. 3-4, p. 215–222, 2009.
- ATANACKOVIC, T. M.; PILIPOVIC, S.; ZORICA, D. Time distributed-order diffusion-wave equation. ii. applications of laplace and fourier transformations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society London, v. 465, n. 2106, p. 1893–1917, 2009.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, The Society of Rheology, v. 27, n. 3, p. 201–210, 1983.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. Fractional calculus—a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA journal*, v. 21, n. 5, p. 741–748, 1983.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, The Society of Rheology, v. 30, n. 1, p. 133–155, 1986.
- BARROS-NETO, J. *An Introduction to the Theory of Distributions*. [S.l.]: Marcel Dekker New York, 1973. (Pure and Applied Mathematics).
- BELLMAN, R. *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering*. [S.l.]: Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- BOAS, R. *Entire functions*. [S.l.]: Elsevier Science, 2011. (ISSN).

- BRAUN, S.; EWINS, D.; RAO, S. *Encyclopedia of Vibration*. [S.I.]: Academic Press, 2002.
- BREDA, D.; MASET, S.; VERMIGLIO, R. *Stability of Linear Delay Differential Equations*. [S.I.]: Springer, 2015.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.I.]: Springer New York, 2010. (Universitext).
- CAJIĆ, M.; KARLIČIĆ, D.; LAZAREVIĆ, M. Damped vibration of a nonlocal nanobeam resting on viscoelastic foundation: fractional derivative model with two retardation times and fractional parameters. *Meccanica*, Springer, v. 52, n. 1-2, p. 363–382, 2017.
- CHUESHOV, I. *Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems*. [S.I.]: "Acta"publishers, 2002.
- CONWAY, J. *Functions of One Complex Variable*. [S.I.]: Springer-Verlag New York, 1978. (Graduate Texts in Mathematics).
- CURTAIN, R.; PRITCHARD, A. *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*. [S.I.]: Elsevier Science, 1977.
- DAS, S. *Functional Fractional Calculus*. [S.I.]: Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. [S.I.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010. (Lecture Notes in Mathematics).
- DIJK, G. van. *Distribution Theory*. [S.I.]: De Gruyter, 2013.
- DOETSCH, G. *Handbuch der laplace-transformation band ii anwendungen der laplace-transformation*. Springer, 1972.
- DOETSCH, G. *Introduction to the theory and application of the laplace transformation*. Springer, 1974.
- DRIVER, R. D. *Ordinary and Delay Differential Equations*. [S.I.]: Springer-Verlag New York, 1977. v. 20. (Applied Mathematical Sciences, v. 20).
- EL-SAYED, A. Suppression of nonlinear vibration system described by nonlinear differential equations using passive controller. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 78, n. 3, p. 1683–1694, 2014.
- FOLLAND, G. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. [S.I.]: Wiley, 1999. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts).
- FREUNDLICH, J. Transient vibrations of a fractional kelvin-voigt viscoelastic cantilever beam with a tip mass and subjected to a base excitation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 438, p. 99 – 115, 2019.
- GORENFLO, R.; KILBAS, A.; MAINARDI, F.; ROGOSIN, S. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. [S.I.]: Springer Berlin Heidelberg, 2014. (Springer Monographs in Mathematics).
- GRUBB, G. *Distributions and Operators*. [S.I.]: Springer, 2009. v. 252. (Graduate Text in Mathematics, v. 252).

- HALE, J.; LUNEL, S. *Introduction to Functional Differential Equations*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1993. v. 99. (Applied Mathematical Sciences, v. 99).
- HASUMI, M. Note on the n -dimensional tempered ultra-distributions. *Tohoku Mathematical Journal*, Mathematical Institute of Tohoku University, v. 13, 1961.
- HE, X.; RAFIEE, M.; MAREISHI, S.; LIEW, K. Large amplitude vibration of fractionally damped viscoelastic cnts/fiber/polymer multiscale composite beams. *Composite Structures*, v. 131, p. 1111 – 1123, 2015.
- HENRY, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1981. v. 840. (Lecture Notes in Mathematics, v. 840).
- HOLMES, M. H. *Introduction to perturbation methods*. [S.l.]: Springer, 2013.
- HU, H.; WANG, Z. *Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2002. (Engineering online library).
- JI, J.; ZHANG, N. Suppression of the primary resonance vibrations of a forced nonlinear system using a dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, v. 329, n. 11, p. 2044–2056, 2010.
- JI, J.; ZHANG, N. Suppression of super-harmonic resonance response using a linear vibration absorber. *Mechanics Research Communications*, v. 38, n. 6, p. 411–416, 2011.
- JIA, J.-H.; SHEN, X.-Y.; HUA, H.-X. Viscoelastic behavior analysis and application of the fractional derivative maxwell model. *Journal of Vibration and Control*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 13, n. 4, p. 385–401, 2007.
- KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1995. v. 132. (Classics in Mathematics, v. 132).
- KELLY, S. G. *Mechanical Vibrations*. [S.l.]: Cengage Learning, 2012.
- KEVORKIAN, J.; COLE, J. *Multiple scale and singular perturbation methods*. [S.l.]: Springer, 1996.
- KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*. [S.l.]: Elsevier, 2006. v. 204.
- KOCHUBEI, A. N.; LUCHKO, Y. F. *Handbook of Fractional Calculus with Applications*. [S.l.]: De Gruyter, 2019. v. 1.
- KOELLER, R. C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 51, p. 299—307, 1984.
- KOLMANOVSKII, V.; MYSHKIS, A. *Applied Theory of Functional Differential Equations*. [S.l.]: Springer Netherlands, 1992. v. 85. (Mathematics and its Applications, v. 85).
- LEWANDOWSKI, R.; PAWLAK, Z. Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers modelled by rheological models with fractional derivatives. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, n. 5, p. 923 – 936, 2011.

LEWANDOWSKI, R.; WIELENTEJCZYK, P. Nonlinear vibration of viscoelastic beams described using fractional order derivatives. *Journal of Sound and Vibration*, v. 399, p. 228 – 243, 2017.

MAGRAB, E. B. *Vibrations of elastic systems: With applications to MEMS and NEMS*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 184.

MAINARDI, F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. [S.l.]: Imperial College Press, 2010.

MEAD, D. J. *Passive vibration control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998.

MEIROVITCH, L. *Fundamentals of Vibrations*. [S.l.]: Waveland Press, 2010.

MILLER, K. S.; ROSS, B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. [S.l.]: Wiley, 1993.

MOHANTY, S.; DWIVEDY, S. Nonlinear dynamics of piezoelectric-based active nonlinear vibration absorber using time delay acceleration feedback. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 98, n. 2, p. 1465–1490, 2019.

NAIMARK, M. *Linear Differential Operators*. [S.l.]: George G. Harrap & Company Limited, 1967. v. 1.

NAYFEH, A. H. *Perturbation methods*. [S.l.]: Wiley, 1973.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations*. [S.l.: s.n.], 1980.

NETO, P. M. d. C. *Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.

OSKOUIE, M. F.; ANSARI, R. Linear and nonlinear vibrations of fractional viscoelastic timoshenko nanobeams considering surface energy effects. *Applied Mathematical Modelling*, v. 43, p. 337 – 350, 2017.

PAUNOVIĆ, S.; CAJIĆ, M.; KARLIČIĆ, D.; MIJALKOVIĆ, M. A novel approach for vibration analysis of fractional viscoelastic beams with attached masses and base excitation. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 463, p. 114955, 2019.

PERMOON, M.; HADDADPOUR, H.; JAVADI, M. Nonlinear vibration of fractional viscoelastic plate: Primary, subharmonic, and superharmonic response. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 99, p. 154–164, 2018.

PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*. [S.l.]: Academic Press, 1999.

RABELO, M.; dos Anjos, P.; HENRIQUE, M. L.; LOAYZA, M.; SILVA, L. Numerical analysis of vibration of a nonlinear system with bounded delay under the primary resonances. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 112, p. 92 – 105, 2019.

ROSSIKHIN, Y.; SHITIKOVA, M.; SHCHEGLOVA, T. Analysis of free vibrations of a viscoelastic oscillator via the models involving several fractional parameters and relaxation/retardation times. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 59, n. 5, p. 1727 – 1744, 2010. *Fractional Differentiation and Its Applications*.

- SABERI, L.; NAHVI, H. Vibration analysis of a nonlinear system with a nonlinear absorber under the primary and super-harmonic resonances. *International Journal of Engineering, Materials and Energy Research Center*, v. 27, n. 3, p. 499–508, 2014.
- SAEED, N.; EL-GANINI, W.; EISSA, M. Nonlinear time delay saturation-based controller for suppression of nonlinear beam vibrations. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, n. 20, p. 8846–8864, 2013.
- SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. *Fractional integrals and derivatives*. [S.I.]: Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993. v. 1.
- SIDDIQI, A. *Functional Analysis and Applications*. [S.I.]: Springer Singapore, 2018. (Industrial and Applied Mathematics).
- SMITH, H. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. [S.I.]: Springer-Verlag New York, 2011. v. 57. (Texts in Applied Mathematics, v. 57).
- SMITH, M. G. *Laplace Transform Theory*. [S.I.]: D. Van Nostrand London, 1966. (New university mathematics series).
- SUN, L.; CHEN, L. Free vibrations of a taut cable with a general viscoelastic damper modeled by fractional derivatives. *Journal of Sound and Vibration*, v. 335, p. 19 – 33, 2015.
- SUN, X.; XU, J. Vibration control of nonlinear absorber–isolator-combined structure with time-delayed coupling. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 83, p. 48–58, 2016.
- VALÁŠEK, M.; OLGAC, N.; NEUSSER, Z. Real-time tunable single-degree of freedom, multiple-frequency vibration absorber. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 133, p. 106244, 2019.
- YOUNIS, M. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. [S.I.]: Springer US, 2011. (Microsystems). ISBN 9781441960207.
- ZAYED, A. *Handbook of Function and Generalized Function Transformations*. [S.I.]: CRC Press, 1996.
- ZEMANIAN, A. H. *Distribution Theory and Transform Analysis*. [S.I.]: Dover Publications, 1965.
- ZHAO, Y.-Y.; XU, J. Effects of delayed feedback control on nonlinear vibration absorber system. *Journal of Sound and Vibration*, v. 308, n. 1, p. 212–230, 2007.
- ZORICH, V. A. *Mathematical Analysis II*. [S.I.]: Springer Berlin Heidelberg, 2004.

**APÊNDICE A – COEFICIENTES DO QUASI-POLINÔMIO CARACTERÍSTICO
NO CASO $\Omega \approx \omega_1$**

Os coeficientes do quasi-polinômio característico (3.56) são dados por

$$c_{31} = b_{11} + b_{34} + b_{44},$$

$$c_{32} = b_{12} + b_{21} + b_{35} + b_{45},$$

$$c_{21} = b_{11}b_{34} + b_{11}b_{44} - b_{13}b_{31} - b_{22}b_{42} + b_{34}b_{44},$$

$$c_{22} = b_{11}b_{21} + b_{11}b_{35} + b_{11}b_{45} + b_{12}b_{34} + b_{12}b_{44} - b_{13}b_{32} - b_{14}b_{31} + b_{21}b_{34} + b_{21}b_{44} \\ - b_{22}b_{43} - b_{23}b_{42} + b_{34}b_{45} + b_{35}b_{44},$$

$$c_{23} = b_{12}b_{21} + b_{12}b_{35} + b_{12}b_{45} - b_{14}b_{32} + b_{21}b_{35} + b_{21}b_{45} - b_{23}b_{43} + b_{35}b_{45},$$

$$c_{11} = -b_{11}b_{22}b_{42} + b_{11}b_{34}b_{44} - b_{13}b_{31}b_{44} - b_{22}b_{34}b_{42},$$

$$c_{12} = b_{11}b_{21}b_{34} + b_{11}b_{21}b_{44} - b_{11}b_{22}b_{43} - b_{11}b_{23}b_{42} + b_{11}b_{34}b_{45} + b_{11}b_{35}b_{44} - b_{12}b_{22}b_{43} \\ + b_{12}b_{34}b_{44} - b_{13}b_{21}b_{31} - b_{13}b_{31}b_{45} - b_{13}b_{32}b_{44} - b_{14}b_{31}b_{44} + b_{21}b_{34}b_{44} - b_{22}b_{34}b_{43} \\ - b_{22}b_{35}b_{42} - b_{23}b_{34}b_{42},$$

$$c_{13} = b_{11}b_{21}b_{35} + b_{11}b_{21}b_{45} - b_{11}b_{23}b_{43} + b_{11}b_{35}b_{45} + b_{12}b_{21}b_{34} + b_{12}b_{21}b_{44} - b_{12}b_{22}b_{43} \\ - b_{12}b_{23}b_{42} + b_{12}b_{34}b_{45} + b_{12}b_{35}b_{44} - b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{32}b_{45} - b_{14}b_{21}b_{31} - b_{14}b_{31}b_{45} \\ - b_{14}b_{32}b_{44} + b_{21}b_{34}b_{45} + b_{21}b_{35}b_{44} - b_{22}b_{35}b_{43} - b_{23}b_{34}b_{43} - b_{23}b_{35}b_{42},$$

$$c_{14} = b_{12}b_{21}b_{35} + b_{12}b_{21}b_{45} - b_{12}b_{23}b_{43} + b_{12}b_{35}b_{45} - b_{14}b_{21}b_{32} - b_{14}b_{32}b_{45} + b_{21}b_{35}b_{45} \\ - b_{23}b_{35}b_{43},$$

$$c_{01} = -b_{11}b_{22}b_{34}b_{42} + b_{13}b_{22}b_{31}b_{42} - b_{13}b_{22}b_{33}b_{41},$$

$$c_{02} = -b_{13}b_{21}b_{31}b_{44} - b_{14}b_{22}b_{33}b_{41} - b_{11}b_{22}b_{34}b_{43} - b_{11}b_{22}b_{35}b_{42} - b_{12}b_{22}b_{34}b_{42} \\ + b_{13}b_{22}b_{32}b_{42} - b_{13}b_{23}b_{33}b_{41} - b_{11}b_{23}b_{34}b_{42} + b_{13}b_{22}b_{31}b_{43} + b_{14}b_{22}b_{31}b_{42} \\ + b_{11}b_{21}b_{34}b_{44} + b_{13}b_{23}b_{31}b_{42},$$

$$c_{03} = -b_{12}b_{23}b_{34}b_{42} - b_{11}b_{22}b_{35}b_{43} - b_{12}b_{22}b_{34}b_{43} - b_{12}b_{22}b_{35}b_{42} - b_{13}b_{21}b_{31}b_{45} \\ - b_{14}b_{23}b_{33}b_{41} - b_{14}b_{21}b_{31}b_{44} - b_{11}b_{23}b_{34}b_{43} - b_{11}b_{23}b_{35}b_{42} + b_{13}b_{22}b_{32}b_{43} \\ + b_{14}b_{22}b_{31}b_{43} + b_{14}b_{22}b_{32}b_{42} + b_{11}b_{21}b_{35}b_{44} + b_{12}b_{21}b_{34}b_{44} + b_{13}b_{23}b_{31}b_{43} \\ + b_{14}b_{23}b_{31}b_{42} + b_{13}b_{23}b_{32}b_{42} + b_{11}b_{21}b_{34}b_{45} - b_{13}b_{21}b_{32}b_{44},$$

$$\begin{aligned}c_{04} &= b_{14}b_{22}b_{32}b_{43} + b_{12}b_{21}b_{35}b_{44} - b_{11}b_{23}b_{35}b_{43} + b_{13}b_{23}b_{32}b_{43} - b_{12}b_{23}b_{35}b_{42} \\ &\quad - b_{12}b_{22}b_{35}b_{43} - b_{12}b_{23}b_{34}b_{43} - b_{14}b_{21}b_{31}b_{45} + b_{11}b_{21}b_{35}b_{45} + b_{14}b_{23}b_{32}b_{42} \\ &\quad + b_{14}b_{23}b_{31}b_{43} - b_{14}b_{21}b_{32}b_{44} - b_{13}b_{21}b_{32}b_{45} + b_{12}b_{21}b_{34}b_{45}, \\ c_{05} &= b_{12}b_{21}b_{35}b_{45} - b_{12}b_{23}b_{35}b_{43} - b_{14}b_{21}b_{32}b_{45} + b_{14}b_{23}b_{32}b_{43}.\end{aligned}$$

**APÊNDICE B – COEFICIENTES DO QUASI-POLINÔMIO CARACTERÍSTICO
NO CASO $\Omega \approx \omega_2$**

Os coeficientes do quasi-polinômio característico (3.91) são dados por

$$C_{31} = B_{11} + B_{34} + B_{44},$$

$$C_{32} = B_{12} + B_{21} + B_{35} + B_{45},$$

$$C_{21} = B_{11}B_{34} + B_{11}B_{44} - B_{13}B_{31} - B_{22}B_{42} + B_{34}B_{44},$$

$$C_{22} = B_{11}B_{21} + B_{11}B_{35} + B_{11}B_{45} + B_{12}B_{34} + B_{12}B_{44} - B_{13}B_{32} - B_{14}B_{31} + B_{21}B_{34} \\ + B_{21}B_{44} - B_{22}B_{43} - B_{23}B_{42} + B_{34}B_{45} + B_{35}B_{44},$$

$$C_{23} = B_{12}B_{21} + B_{12}B_{35} + B_{12}B_{45} - B_{14}B_{32} + B_{21}B_{35} + B_{21}B_{45} - B_{23}B_{43} + B_{35}B_{45},$$

$$C_{11} = -B_{11}B_{22}B_{42} + B_{11}B_{34}B_{44} - B_{13}B_{31}B_{44} - B_{22}B_{34}B_{42},$$

$$C_{12} = B_{11}B_{21}B_{34} + B_{11}B_{21}B_{44} - B_{11}B_{22}B_{43} - B_{11}B_{23}B_{42} + B_{11}B_{34}B_{45} + B_{11}B_{35}B_{44} \\ - B_{12}B_{22}B_{42} + B_{12}B_{34}B_{44} - B_{13}B_{21}B_{31} - B_{13}B_{31}B_{45} - B_{13}B_{32}B_{44} - B_{14}B_{31}B_{44} \\ + B_{21}B_{34}B_{44} - B_{22}B_{34}B_{43} - B_{22}B_{35}B_{42} - B_{23}B_{34}B_{42},$$

$$C_{13} = B_{11}B_{21}B_{35} + B_{11}B_{21}B_{45} - B_{11}B_{23}B_{43} + B_{11}B_{35}B_{45} + B_{12}B_{21}B_{34} + B_{12}B_{21}B_{44} \\ - B_{12}B_{22}B_{43} - B_{12}B_{23}B_{42} + B_{12}B_{34}B_{45} + B_{12}B_{35}B_{44} - B_{13}B_{21}B_{32} - B_{13}B_{32}B_{45} \\ - B_{14}B_{21}B_{31} - B_{14}B_{31}B_{45} - B_{14}B_{32}B_{44} + B_{21}B_{34}B_{45} + B_{21}B_{35}B_{44} - B_{22}B_{35}B_{43} \\ - B_{23}B_{34}B_{43} - B_{23}B_{35}B_{42},$$

$$C_{14} = B_{12}B_{21}B_{35} + B_{12}B_{21}B_{45} - B_{12}B_{23}B_{43} + B_{12}B_{35}B_{45} - B_{14}B_{21}B_{32} - B_{14}B_{32}B_{45} \\ + B_{21}B_{35}B_{45} - B_{23}B_{35}B_{43},$$

$$C_{01} = -B_{11}B_{22}B_{34}B_{42} + B_{13}B_{22}B_{31}B_{42} - B_{13}B_{22}B_{33}B_{41},$$

$$C_{02} = -B_{13}B_{21}B_{31}B_{44} - B_{14}B_{22}B_{33}B_{41} - B_{11}B_{22}B_{34}B_{43} - B_{11}B_{22}B_{35}B_{42} \\ - B_{12}B_{22}B_{34}B_{42} + B_{13}B_{22}B_{32}B_{42} - B_{13}B_{23}B_{33}B_{41} - B_{11}B_{23}B_{34}B_{42} \\ + B_{13}B_{22}B_{31}B_{43} + B_{14}B_{22}B_{31}B_{42} + B_{11}B_{21}B_{34}B_{44} + B_{13}B_{23}B_{31}B_{42},$$

$$C_{03} = -B_{12}B_{23}B_{34}B_{42} - B_{11}B_{22}B_{35}B_{43} - B_{12}B_{22}B_{34}B_{43} - B_{12}B_{22}B_{35}B_{42} \\ - B_{13}B_{21}B_{31}B_{45} - B_{14}B_{23}B_{33}B_{41} - B_{14}B_{21}B_{31}B_{44} - B_{11}B_{23}B_{34}B_{43} \\ - B_{11}B_{23}B_{35}B_{42} + B_{13}B_{22}B_{32}B_{43} + B_{14}B_{22}B_{31}B_{43} + B_{14}B_{22}B_{32}B_{42}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{11}B_{21}B_{35}B_{44} + B_{12}B_{21}B_{34}B_{44} + B_{13}B_{23}B_{31}B_{43} + B_{14}B_{23}B_{31}B_{42} \\
& + B_{13}B_{23}B_{32}B_{42} + B_{11}B_{21}B_{34}B_{45} - B_{13}B_{21}B_{32}B_{44}, \\
C_{04} & = B_{14}B_{22}B_{32}B_{43} + B_{12}B_{21}B_{35}B_{44} - B_{11}B_{23}B_{35}B_{43} + B_{13}B_{23}B_{32}B_{43} \\
& - B_{12}B_{23}B_{35}B_{42} - B_{12}B_{22}B_{35}B_{43} - B_{12}B_{23}B_{34}B_{43} - B_{14}B_{21}B_{31}B_{45} \\
& + B_{11}B_{21}B_{35}B_{45} + B_{14}B_{23}B_{32}B_{42} + B_{14}B_{23}B_{31}B_{43} - B_{14}B_{21}B_{32}B_{44} \\
& - B_{13}B_{21}B_{32}B_{45} + B_{12}B_{21}B_{34}B_{45}, \\
C_{05} & = B_{12}B_{21}B_{35}B_{45} - B_{12}B_{23}B_{35}B_{43} - B_{14}B_{21}B_{32}B_{45} + B_{14}B_{23}B_{32}B_{43}.
\end{aligned}$$