UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

CURSO DE DOUTORADO

MARIA DAS DORES DE MORAIS

ABORDAGEM SOBRE FRAÇÕES: Uma análise do Contrato Didático e das Concepções de Ensino da Matemática como fatores de influência na aprendizagem de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental

RECIFE

2021

MARIA DAS DORES DE MORAIS

ABORDAGEM SOBRE FRAÇÕES: Uma análise do Contrato Didático e das Concepções de Ensino da Matemática como fatores de influência na aprendizagem de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Professor Dr. Marcelo Câmara dos Santos.

RECIFE

2021

Catalogação na fonte
Bibliotecária Natalia Nascimento, CRB-4/1743

M827a Morais, Maria das Dores de.
Abordagem sobre frações: uma análise entre os construtos teóricos Contrato didático e concepções de ensino de matemática como fatores de influências no desempenho dos estudantes do 5º ano do ensino fundamental. / Maria das Dores de Morais. – Recife, 2021.
288 f.: il.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2021.
Inclui Referências.

1. Ensino – Aprendizagem – Matemática. 2. Matemática - Frações. 3. Dificuldade de Aprendizagem – Matemática - Frações. 4. Ensino Fundamental - Escolas públicas. 5. UFPE - Pós-graduação. I. Santos, Marcelo Câmara dos. (Orientador). II. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2021-072)

MARIA DAS DORES DE MORAIS

ABORDAGEM SOBRE FRAÇÕES: Uma análise do Contrato Didático e das Concepções de Ensino da Matemática como fatores de influência na aprendizagem de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 14/05/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª. Paula Moreira Baltar Bellemain (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. José Dilson Bezerra Cavalcanti (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª. Anna Paula Brito (Examinadora Externa)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Nos quatro anos em que me dediquei a escrever a esta tese, percorri uma árdua caminhada de desafios, dificuldades, construções e muito amadurecimento. Diante disso, comungo com Daisaku Ikeda ao dizer que “ser herói não significa acertar constantemente. É muito mais que isso. O verdadeiro espírito de um herói encontra-se na intensa convicção de enfrentar e vencer as dificuldades em vez de desistir de tudo. Na vida de todos nós poderão surgir situações inesperadas. Poderão manifestar-se obstáculos ou problemas que jamais havíamos imaginado. É justamente nesses momentos que revelamos o que verdadeiramente “carregamos no coração”.

E nesse momento, finalizada uma etapa particularmente importante da minha vida, um sonho na verdade realizado, não poderia deixar de expressar o mais profundo agradecimento a todos aqueles que me apoiaram nesta longa caminhada e contribuíram para a realização deste trabalho. Algumas pessoas deixaram marcas registradas na minha vida. Umas porque sempre estiveram do meu lado, outras porque, mesmo longe, se fazem tão perto (quantas saudades, D. Zeza). Sem elas, esse meu sonho teria sido difícil de alcançar. Compactuo com a linda ideia de uma das minhas escritoras favoritas, Clarice Lispector, ao enfatizar que “nenhum dever é mais importante que a gratidão”.

Sendo assim, início a Deus meu maior agradecimento, pelo dom da vida, fé e a força necessária para lutar e enfrentar todos os obstáculos, sem nunca desistir.

À minha família, em especial à minha amada mãe (estrela guia, D. Zeza), que sempre me encorajou em todos os aspectos de minha vida e foi uma grande incentivadora dos meus sonhos. Ela foi meu maior presente neste plano encarnatório. Gratidão a Deus por ter tido o privilégio de conviver com esse ser extremamente evoluído espiritualmente à sua época e que me ensinou, com seus exemplos diários, que a vida requer que tenhamos sempre amor, coragem, força, empatia, resiliência, dentre tantos outros sentimentos importantes que com ela aprendi... Foi nos braços dela que descansei todas as vezes que a carga se tornava pesada demais.

Àquele que dá luz a minha vida, Felipe Eduardo, amado filho, minha gratidão pela paciência, compreensão de ausências, carinho e apoio externados diariamente. És o grande amor de minha vida.

Meus respeitosos agradecimentos ao meu orientador, professor Dr Marcelo Câmara, pelas contribuições e parceria no trabalho realizado.

Manifesto minha gratidão a cada um dos meus queridos professores do Programa de Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, que compartilharam seus saberes, em particular a professora Paula Baltar, minha grande referência de profissionalismo e ser humano e aos demais funcionários, na pessoa de Clara, que gentilmente me ajudou em situações adversas.

A todos os colegas da minha turma (doutorandos-2017) e grupos de estudos Programdezas e Fenômenos Didáticos pelas contribuições nas discussões e por compartilharem comigo tantos momentos de descobertas e aprendizado, por todo o companheirismo ao longo deste percurso, pelo ambiente amistoso no qual convivemos e solidificamos os nossos conhecimentos.

À banca examinadora de qualificação e defesa, os professores: Ana Paula Brito, Jadilson, Dilson Cavalcanti e Paula Baltar, pelos pertinentes apontamentos que sempre engrandeceram e engradecem este estudo.

Por fim, tenho gratidão inestimável a alguns amigos extremamente especiais, considerados verdadeiros anjos que Deus colocou no meu caminho e que, incansavelmente, me ajudaram nas horas difíceis. A eles agradeço, de forma muito carinhosa:

Thayrine Farias, meu anjo iluminador. Sua sempre inteira disponibilidade em ajudar me faz acreditar que nunca terei como agradecer o apoio incondicional que me ofereceste em todos os momentos dessa difícil jornada.

Nielso Jr, pelo permanente incentivo a minha trajetória acadêmica e ajuda com que sempre acompanhou este meu trabalho com muitos questionamentos, leituras e sugestões aos meus escritos.

Noberto Júnior, por sempre lutar e nunca medir esforços para que meus direitos de funcionária pública fossem respeitados e eu pudesse ter meu afastamento profissional concedido.

Edite Marques, pela forma amiga e generosa que sempre me escutou, o estímulo sentido após cada conversa, sem falar nas maravilhosas contribuições dadas ao texto, fruto de suas leituras cautelosas.

Leonardo Morais e Lúcia Durão, nossas maravilhosas discussões teóricas entrelaçadas de conversas adversas, me davam a certeza de que, no final, tudo sairia bem.

Júlia Clariane, gratidão pelas cuidadosas leituras e contribuições dadas ao texto.

Às Escolas pesquisadas e toda sua comunidade, por terem aberto suas portas para desenvolvermos nossa pesquisa; direção, professoras (Joana e Maria) e estudantes, por dispenderem horas do seu tempo a atender nossas necessidades.

Kátia Matilde e Patrícia Vasconcelos que ao meu lado sempre demonstraram apoio incondicional, incentivo ao longo de todo este percurso.

Enfim, a todos os que, em matéria ou em espírito, acreditaram, incentivaram, apoiaram, inspiraram este trabalho, meu muito obrigada! Dessa forma, finalizo reiterando o que diz Saint Exupery: “aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós”.

É preciso ter esperança, mas ter esperança do verbo esperançar; porque tem gente que tem esperança do verbo esperar. E esperança do verbo esperar não é esperança, é espera. Esperançar é se levantar, esperançar é ir atrás, esperançar é construir, esperançar é não desistir! Esperançar é levar adiante, esperançar é juntar-se com outros para fazer de outro modo…

Paulo Freire

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo analisar o contrato didático e as concepções de ensino e aprendizagem da Matemática como fatores de influência no desempenho de frações dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em duas escolas municipais em Jaboatão dos Guararapes – PE. Utilizamos como fundamentos a Teoria das Situações Didáticas, em especial o contrato didático, já que esse fenômeno se circunscreve na relação didática em função dos componentes do triângulo didático (professor, estudantes e saber). A partir desse contexto, nos apoiamos também nos estudos sobre Concepções De Ensino E Aprendizagem De Matemática de Câmara dos Santos, dentre outros que consideramos pertinentes. Em geral, nossa pesquisa envolveu uma parte teórica propositiva e uma empírica. Dessa forma, organizamos nossa investigação em três momentos correlacionados. No primeiro, construímos as bases teóricas para o esboço da atribuição de tipos de contrato didático inspirados nos modelos de aprendizagem propostos por Charnay, fundamentados a partir do conceito do referido fenômeno. No segundo, uma entrevista semiestruturada com três professoras dos referidos anos e, no terceiro, o acompanhamento das aulas reservadas para o ensino de fração. Cada professora explicitou, na entrevista, trabalhar dentro de diferentes concepções de ensino e aprendizagem. A primeira se associou à socioconstrutivista, a segunda tanto à socioconstrutivista quanto à baldista e à terceira, escadinha e baldista. No decorrer das etapas dois e três, puderam-se observar, como resultados, discrepâncias nas concepções de ensino e aprendizagem entre a prática de ensino das professoras e suas respostas à entrevista semiestruturada. Partindo da hipótese do contrato didático e das concepções de ensino e aprendizagem enquanto construtos teóricos complementares que nos permitiram ver coisas diferentes, foi possível compreender melhor a origem das dificuldades encontradas pelos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental para lidar adequadamente com frações. As análises dos dados de estudo nos deram indícios dos elementos constitutivos desse fenômeno, dentre eles: as expectativas das professoras no conhecimento prévio dos estudantes sobre frações e no seu aprofundamento; a ocorrência dos efeitos Topaze e Pigmaleão; e o estabelecimento de regras como a de que o numerador de uma fração deve ser menor que o denominador, da ideia de fração enquanto divisão e dois números independentes, que denotaram o contrato didático e as concepções de ensino como fatores de influência no desempenho de frações. Encontramos também algumas fragilidades conceituais das docentes.

Palavras-chave: contrato didático; Concepções de Ensino e aprendizagem; Educação Matemática; Frações; Dificuldades.

ABSTRACT

This research aimed to analyze the Didactic Contract and the teaching and learning concepts of Mathematics as influencing factors in the performance of fractions of students from the 5th year of Elementary School in two municipal schools in Jaboatão dos Guararapes - PE. We use as foundations the Theory of Didactic Situations, especially the Didactic Contract, since this phenomenon is circumscribed in the didactic relationship in terms of the components of the didactic triangle (teacher, students and knowledge). From this context, we also support studies on teaching and learning concepts of Mathematics in Câmara dos Santos, among others that we consider pertinent. In general, our research involved a theoretical propositional and an empirical part. Thus, we organized our investigation into three correlated moments. In the first, we build the theoretical bases for the sketch of the assignment of types of Didactic Contract inspired by the learning models proposed by Charnay, based on the concept of the aforementioned phenomenon. In the second, a semi-structured interview with three teachers of those years and, in the third, the monitoring of classes reserved for teaching fractions. Each teacher explained, in the interview, that they work within different conceptions of teaching and learning. The first was associated with the socio-constructivist, the second with both the socio-constructivist and the baldista, and the third, the ladder and the baldista. During stages two and three, it was possible to observe, as results, discrepancies in the conceptions of teaching and learning between the teaching practice of the teachers and their answers to the semi-structured interview. Starting from the hypothesis of the Didactic Contract and the conceptions of teaching and learning as complementary theoretical constructs that allowed us to see different things, it was possible to better understand the origin of the difficulties encountered by students in the early years of elementary school to deal adequately with fractions. The analysis of the study data gave us indications of the constitutive elements of this phenomenon, among them: the teachers' expectations in the students' prior knowledge about fractions and in their deepening; the occurrence of the Topaze and Pigmaleão effects; and the establishment of rules such as that the numerator of a fraction must be smaller than the denominator, of the idea of fraction as division and two independent numbers, which denoted the Didactic Contract and teaching conceptions as influencing factors in the performance of fractions . We also found some conceptual weaknesses of the teachers.

Keywoords: Didactic Contract; Conceptions of Teaching and Learning; Theory of Didactic Situations; Fractions; Difficulties.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CD	CONTRATO DIDÁTICO
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
EFBr	Escolas Federais do Brasil
EMBr	Escolas Municipais do Brasil
EEBr	Escolas Estaduais do Brasil
EEPe	Escolas Estaduais de Pernambuco
EMPe	Escolas Municipais de Pernambuco
EA e EB	Escolas campo de pesquisas
IDEB	Índice De Desenvolvimento Da Educação Básica
IREM	Instituto de Pesquisa em Educação Matemática
PCN	Parâmetros Nacionais Curriculares
PCPE	Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco – Matemática
SAEB	Sistema De Avaliação Da Educação Básica
SAEPE	Sistema da Avaliação do Estado de Pernambuco
TSD	Teoria Das Situações Didáticas
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO: A PROBLEMÁTICA INICIAL

A sociedade há tempos busca uma educação de qualidade que garanta a aprendizagem necessária à formação do cidadão autônomo, consciente, crítico e participativo, com condições de atuar com responsabilidade na coletividade. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC – (BRASIL, 2017), espera-se que os estudantes inseridos no sistema educacional desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da Matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo o contexto das situações.

Para tanto, as orientações dadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (BRASIL, 1997), Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco – PCPE – (PERNAMBUCO, 2012), BNCC (BRASIL, 2017) e o Currículo de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2019) já chamam a atenção ao fato de que, para atingir esse objetivo, é necessário que se trabalhe em uma abordagem da aprendizagem baseada em uma perspectiva de investigação, de modo que seja criado um ambiente que estimule o estudante a propor soluções com base nas relações existentes entre o conhecimento matemático, o conteúdo que está sendo trabalhado e as situações concretas do dia a dia.

Nesse contexto, os professores devem desempenhar papéis fundamentais para que os processos de ensino possam efetivamente desencadear a aprendizagem de conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais (ZABALA, 1998) que favoreçam o desenvolvimento dos estudantes. Corroborando essa ideia, os PCN (1997) e a BNCC (2017) destacam que a seleção do conteúdo a ser trabalhado deve acontecer em uma perspectiva mais ampla, em função de se identificarem não só os objetos de conhecimento, mas também os procedimentos e atitudes, o que trará um enriquecimento ao processo de ensino e de aprendizagem.

A Matemática, assim sendo, apresenta-se como um importante recurso pelo qual as pessoas podem interagir com diversos aspectos do meio em que vivem. De um modo particular, próprio de seu ser, os conteúdos matemáticos se apresentam como uma ferramenta cultural que pode ampliar a capacidade humana de sistematização de informações e estabelecimento de relações entre elas.

No caso específico do nosso objeto matemático – o saber escolar[1] fração, sabemos que ele é parte das atividades humanas desde muito tempo. De outro modo, surgiu a partir das

[1] Iremos utilizar termo saber escolar fração ao longo do texto, por entendermos que "saber" é algo institucionalizado pela ciência. Dessa forma, podemos nos questionar se fração é um saber, visto que não existe

necessidades dos indivíduos, quando se depararam com medições de comprimento em que a unidade escolhida não cabia um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida.

No mundo contemporâneo, fração permeia as práticas sociais, inclusive, desde muito cedo. Dessa forma, sabe-se que as crianças já possuem um conhecimento intuitivo sobre ele, mesmo antes de chegarem à escola, baseando-se, essencialmente, em experiências vivenciadas no seu dia a dia (CRUZ E SPINILLO; 2014). Por exemplo, aspectos que envolvem a ideia de divisão pela metade, bem como a noção de meia volta mostram situações que fazem uso da ideia de fração.

Em sentido mais amplo, as pessoas lidam cotidianamente com fração em situações diversas, tais como na leitura de uma receita culinária, no indicador de combustível de um veículo e na compra de produtos vendidos por quilograma. Além dos usos sociais, fração possibilita estabelecer articulações com outros campos da Matemática, em especial com Grandezas e Medidas e Geometria.

Apesar dos usos sociais, das articulações com outros campos e com outros conteúdos matemáticos, não é possível afirmar que eles são suficientes para a construção do conhecimento formal de fração. Segundo Powell (2019), a dificuldade no entendimento do número fracionário pode comprometer o progresso dos estudantes com outros conteúdos da área.

Ademais, instrumentos avaliativos do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB (2017) e Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco – SAEPE (2015-2019), aplicados aos estudantes brasileiros do Ensino Fundamental – EF, têm mostrado que eles apresentam um fraco desempenho no tocante à Matemática. Os indicadores de aprendizagem de desempenho têm evidenciado a problemática do fracasso escolar, na qual esse componente curricular tem se destacado pelos altos índices de reprovação e baixo rendimento escolar a ele associados. Diante desse contexto, percebemos a dificuldade relativa à aprendizagem desse saber escolar. Para Silva (2005), Lopes et al (2012), Santana (2012) e Oliveira e Araman (2017), essa dificuldade pode ser observada tanto no processo de ensino quanto no de aprendizagem.

A observação da dificuldade na aprendizagem de fração decorre também das reflexões resultantes da minha experiência pessoal enquanto professora da educação básica, por me deparar com entraves que os estudantes apresentam em resolver problemas de Matemática relacionados ao conteúdo investigado. É interessante salientar que ao desempenhar minha função de professora formadora, seja ministrando disciplinas em cursos de Pedagogia, seja em

na matemática, o que existe são os números racionais. Nesse sentido podemos considerar fração como um saber escolar. Além disso, consideramos como sinônimos os termos “fração” e “números fracionários”.

programas de formação continuada, os professores apresentam questionamentos e dificuldades sobre frações, por vezes, muito semelhantes aos dos estudantes da educação básica.

Todas essas situações nos levaram a perceber que existem entraves/limitações no processo de ensino e de aprendizagem que aumentam as dificuldades com que se deparam estudantes e professores. Pesquisas realizadas por Behr; Lesh; Post; Silver, (1983); Onuchic (2008) e Ponte e Quaresma (2012) mostram que o ensino das frações constitui um dos temas matemáticos mais complexos com que os estudantes se deparam ao longo do ensino básico, por conta das suas diversas concepções, representações e também pela própria natureza do número.

Em relação a esse último ponto, é preciso ter cuidado, pois a natureza do próprio saber escolar traz em seu cerne obstáculos epistemológicos[2]. Os PCN (BRASIL,1997) mostram alguns desses empecilhos apresentados pelos estudantes, e que são inerentes ao próprio conteúdo. Melo et al (2013) ressaltam o quanto a aprendizagem das frações exige uma reflexão cuidadosa por parte dos professores sobre o papel e o funcionamento dessas representações, com o objetivo de ajudar na aprendizagem dos estudantes.

Nesse sentido, as diversas representações desse objeto matemático assumem um papel importante no campo da Matemática, já que os objetos de estudo dessa ciência nem sempre são acessíveis ou perceptíveis e só podem sê-lo a partir de suas distintas representações. Diante desse contexto, análises de resultados de pesquisas têm mostrado que os professores brasileiros que atuam no nível de escolarização do 2º ao 5º ano do EF, normalmente usam situações de parte e todo como o principal contexto para o ensino de fração (SILVA, 1997; BEZERRA, 2001; CAMPOS E MAGINA 2005; SANTOS 2005; CAMPOS, MAGINA E NUNES 2006; BERTONI, 2009). Nessa mesma linha de ideias, os livros didáticos também apresentam de forma majoritária essa concepção, muitas vezes sem sentido para os estudantes, levando-os ao desinteresse desse conteúdo.

Diante desse cenário, na busca de entender melhor as raízes da problemática em levar os estudantes dos anos iniciais a lidar adequadamente com frações, estamos a questionar se o CONTRATO DIDÁTICO, definido como sendo os comportamentos esperados tanto do professor quanto dos estudantes, pode nos ajudar a entender a relação existente entre esse fenômeno com a investigação de questões associadas ao fracasso escolar. Para Brousseau (2008):

[2] É interessante destacarmos que um obstáculo na perspectiva da TSD não é um entrave. É um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou falta de conhecimento" (BROUSSEAU, 1996, p. 260). Entretanto o *saber escolar fração*, pela sua própria natureza, traz em seu bojo elementos que podem ocasionar obstáculos epistemológicos, como os mostrados no texto.

> A noção de contrato didático, além de ser um dos principais elementos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), desempenha papel central na análise e na construção de situações para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Numa situação de ensino preparada pelo professor e realizada pelo professor, o estudante em geral tem a tarefa de resolver o problema que lhe é apresentado, por meio da interpretação das questões colocadas, das informações fornecidas, das exigências impostas, que são a maneira de ensinar do professor. Esses hábitos específicos do professor, esperados pelo estudante, e os comportamentos deste, esperados pelo professor, constituem o CONTRATO DIDÁTICO. (BROUSSEAU, 2008, p. 9).

Em geral, podemos dizer que o CONTRATO DIDÁTICO no processo de ensino e aprendizagem é o conjunto de regras, em sua grande maioria, implícitas que, apesar de não serem ditas, se manifestam regularmente na prática docente. De acordo com Brousseau (1999), elas determinam, explícita e implicitamente, o que cada parceiro da relação didática (professor, estudante e saber) vai ter de administrar e sobre o que cada um será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro. Ademais, o autor destaca que essas regras, quando rompidas, podem, em consequência, gerar conflitos na relação didática e que a aprendizagem repousa não sobre o bom funcionamento do contrato, mas sobre essas rupturas.

Outrossim, acreditamos que é de extrema importância investigarmos, em nosso trabalho, a existência de regras de Contratos Didáticos estabelecidas em sala de aula que podem levar à elaboração de situações que tendem a dificultar o processo de ensino e de aprendizagem. Estudiosos da Educação Matemática (BROUSSEAU, 1991; CHEVALLARD, 2001, dentre outros) têm questionado se a dificuldade na construção de conceitos matemáticos está associada, dentre outras causas, às relações estabelecidas entre o professor, estudante e o saber ou ainda, mais especificamente, às regras que estabelecem comportamentos esperados tanto por parte do professor, quanto do estudante.

De acordo com Brousseau (1991), dentre as tantas causas que interferem na construção do conhecimento matemático, o estabelecimento de regras de CONTRATO DIDÁTICO seria uma delas, levando os estudantes a possíveis fracassos nessa disciplina. Além disso, o autor chama atenção para o fato de que esse fenômeno pode impedir ou favorecer o acesso dos estudantes ao conhecimento.

Nesse cenário, Morais (2010) realizou uma investigação acerca da relação entre competência leitora e resolução de problemas matemáticos em uma turma de 5º ano do EF de uma escola municipal de Jaboatão dos Guararapes (PE). A partir da análise das habilidades desenvolvidas pelos estudantes, foi possível observar que o baixo desempenho apresentado na resolução dos problemas não estava ligado apenas a limitações de cunho eminentemente matemático, mas havia também ali uma forte relação com a baixa competência, em leitura e interpretação, apresentada pelos estudantes.

Outra questão percebida pela autora, mas que não foi possível analisar, pois fugia ao propósito da pesquisa, refere-se à dificuldade apresentada pelos estudantes, que parecia também residir em algumas regras estabelecidas pelo professor e que eles utilizavam na resolução de problemas de Matemática como, por exemplo, a de identificação de palavras-chave (mais, ganhou, perdeu, dentre outras) no enunciado.

Por vezes, essas regras eram empregadas adequadamente, entretanto, fora do seu campo de validade. À época, não se compreendia bem por que o professor a estabelecia, já que não eram válidas para quaisquer situações em Matemática. Elas poderiam levar os estudantes ao erro, pois nem sempre a palavra-chave os direcionaram à operação correta.

Essa situação pode ser ilustrada com o seguinte problema (sua estrutura é comumente encontrada nos livros didáticos em tarefas trabalhadas pelos docentes em suas salas de aula): "Maria tem 12 Kg e Lúcia 09 Kg. Quantos quilos Maria tem a mais que Lúcia?" Considerando a palavra-chave a mais, muitos dos estudantes resolveriam adicionando os números, sem considerar estranha a resposta alcançada, isto é, não era comum uma reflexão sobre o que era requisitado no enunciado do problema. Nessa condição, obedecendo à generalização implicitamente estabelecida pela professora, os estudantes errariam a questão.

Diferentemente do que fez a professora, Chevallard (1988), em seus estudos, mostra que a maioria das regras de CD acontecem implicitamente, mas normalmente são estabelecidas entre professor e estudantes de Matemática do Ensino Fundamental. Para Brito Menezes (2006), algumas dessas regras foram descritas considerando o sistema francês de ensino, mas, segundo a autora, percebe-se que elas se encaixam também no modelo brasileiro de ensino. De forma mais específica, algumas delas serão apresentadas ao longo do trabalho a partir das ideias de Almouloud (2007).

Nessa mesma linha de ideias, outros estudiosos (CÂMARA DOS SANTOS, 2002; BRITO MENEZES E CÂMARA DOS SANTOS, 2017) têm demonstrado, ao longo das últimas décadas, preocupação com o CONTRATO DIDÁTICO, procurando compreendê-lo no processo educativo, bem como conhecer as causas das dificuldades apresentadas pelos estudantes no domínio de conteúdos matemáticos específicos.

Para entendermos o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido em sala de aula, achamos pertinente analisar alguns elementos que têm a tendência em revelar a ideia que os professores e os estudantes têm da Matemática, ou do saber escolar que está em jogo, de seu funcionamento, das condições de sua criação e, portanto, de seu interesse. No nosso trabalho, definimos esses elementos como essenciais: divisão de responsabilidade, tomada de consciência do implícito e relação ao saber Jonnaert e Borgt (2002) e constitutivosdo CONTRATO DIDÁTICO: regra, negociação, expectativa, ruptura e renegociação, Almeida (2016) pois surgem entre professor, estudantes na mediação de um determinado saber.

Em vista disso, quando refletimos sobre as relações contratuais envolvidas no ensino e na aprendizagem de determinado conteúdo, Chevallard, Bosch e Gascón (2001) mostraram que o ambiente escolar é por natureza contratual. Os autores destacam que há um contrato escolar, estabelecido pela escola e pela sociedade, responsável por sua organização de maneira geral (horários, programas, infraestrutura, dentre outros).

Contudo, quando nos referimos à sala de aula, há uma mudança dessa organização contratual. Segundo Pais (2008), a noção usual de contrato não mais traduz, em sua totalidade, a relação que se estabelece entre professor e estudantes com objetivo à apropriação do saber escolar. Na sala de aula, essa organização vai se tornando mais implícita e constituindo o que se pode chamar de CONTRATO DIDÁTICO.

De acordo com Brousseau (1988), independentemente de o professor saber ou não o que é um CONTRATO DIDÁTICO, suas regras e convenções estão presentes no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, consciente ou inconscientemente, professor e estudantes interagem com o saber. De modo geral, tais regras são absorvidas pelos estudantes ou até mesmo criadas por eles próprios e aparecem claramente representadas no desenvolvimento de suas atividades.

Diante desse contexto, é importante salientar que a dificuldade de estabelecer um alinhamento entre o que se espera que os estudantes aprendam e o que efetivamente eles compreendem pode também ser justificada a partir dos estudos que se apoiam nas ideias propostas pelo conceito de CONTRATO DIDÁTICO. O regime do nosso interesse, enquanto professores, diz respeito ao de sistematizar o saber científico, tornando-o “ensinável”, possibilitando a sua aprendizagem pelo(s) estudante(s).

Assim, o saber científico vai sofrer várias transformações, passando por um nível intermediário – saber a ensinar – até que se configure como um saber ensinado. Transformações essas que implicam em deformações, supressões, acréscimos, criações didáticas que vão sofrer esse saber (*savoir savant*, em Chevallard, 1991) até chegar à sala de aula. Entendemos que são nesses elementos citados que os fenômenos didáticos podem se manifestar. Esta pesquisa parte da ideia de que é nessa fase que o CONTRATO DIDÁTICO vai ser negociado e colocado na relação didática.

As ideias anteriormente mencionadas corroboram as destacadas por Brousseau (2008), pois mostram que tanto ele quanto outros pesquisadores estavam interessados em outras causas que levavam o estudante ao fracasso da Matemática, em especial nas que residiam na relação com o saber e com as situações didáticas, e não apenas aquelas que estavam relacionadas às aptidões ou a outras características dos estudantes.

Em geral, acreditamos que parte das regras que regem o CONTRATO DIDÁTICO são justificáveis por meio de uma forma mais global de estruturar os processos de ensino, que por sua vez dependem, dentre outros elementos, das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, que emergem em sala de aula, frente ao ensino de um determinado saber.

Ratificando essa ideia, Thompson (1997) investigou as concepções de ensino de Matemática de três professoras do 5º ano do EF com o objetivo de analisar a relação dessas concepções e suas práticas docentes. Os resultados demonstraram existir padrões de comportamentos que as caracterizam. Entendemos que esses padrões de comportamento se relacionam às concepções de ensino construídas pelos professores ao longo do tempo, em suas trajetórias pessoais e profissionais, e vão estabelecer um contrato específico, em sala de aula.

Ao tomarmos como objeto de estudo o CONTRATO DIDÁTICO e as concepções de ensino e aprendizagem que emergem na prática docente, situaremos nossa pesquisa em relação ao segundo elemento teórico como “conjunto de conhecimentos e de saberes frequentemente solicitados juntos para resolver situações empiricamente como modelos de respostas coerentes, dada por uma parte importante dos sujeitos sobre uma classe de situação” (BROUSSEAU, 1997, p, 18), assim como o “olhar trazido por Martins (2016, p.54), ao destacar que “as concepções de ensino são fundadas a partir das várias experiências vivenciadas ao longo da história de vida de cada professor de Matemática. Elas relacionam-se também à profissionalização do professor, marcando sua identidade e são relevantes no desenvolvimento da sua prática. Diante disso, percebemos como a profissão docente é imbuída de sentimentos, relações, saberes de diferentes ordens, nem sempre no campo do consciente, dentre outros elementos que podem direcionar seu fazer pedagógico.

Uma dimensão importante que gostaríamos de destacar é que, após a realização de leituras e estudos sobre as concepções de ensino e de aprendizagem, o que temos observado na literatura é que existem pesquisas que as investigam relacionadas aos estudantes, aos professores e algumas ao CONTRATO DIDÁTICO, separadamente. Entretanto, há muito que se investigar sobre esses dois construtos teóricos complementares como fatores de influências no desempenho dos estudantes, tendo em vista um determinado conteúdo (no nosso caso, o saber escolar frações), que já traz, em sua natureza, dificuldades inerentes ao próprio número.

Rocha e Barros (2016), por exemplo, investigaram o estado da arte das pesquisas acadêmicas brasileiras sobre concepções de ensino de professores de Matemática no período de

2001 a 2012[3]. As análises dos resultados destacaram a necessidade de se conhecer e discutir sobre as concepções[4] destes professores, já que os sujeitos vivenciaram/vivenciam suas práticas em contextos complexos que precisam ser compreendidos, buscando a melhoria do ensino e a aprendizagem da Matemática.

Dentre os diversos temas abordados pela pesquisa citada, temos: (re)constituição do ideário e da prática de futuros professores; concepções e crenças de licenciandos sobre o ensino de Matemática; concepções e práticas pedagógicas de licenciandos em Matemática; concepção de prática na visão de licenciandos de Matemática; e concepções de Matemática de professores em formação. Todavia, nenhum desses trabalhos mapeados pelos pesquisadores abordou as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA[5], a partir da análise de uma prática docente, com o intuito de identificar Contratos Didáticos estabelecidos em sala de aula e observar se são fatores de influências no desempenho de frações.

Além de ter o CONTRATO DIDÁTICO e as concepções de ensino como objeto central de estudo, consideramos importante trabalhar com frações pois, além dos motivos anteriormente explicitados, é no 5º Ano do EF que os documentos curriculares norteadores do ensino, em especial os PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2017), sinalizam para realização de seu estudo de forma mais efetiva e aprofundada.

Ademais, achamos pertinente realizar nossa pesquisa no município de Jaboatão dos Guararapes - PE, pois análises de resultados anteriormente citados mostraram desafios com os quais se defrontam professores e estudantes da referida rede quando esse é o conteúdo proposto. Diante desse fato, os estudos desenvolvidos por Souza e Silva (2016) mostram que os docentes, ao exporem suas opiniões sobre suas práticas, destacam as limitações conceituais, metodológicas e/ou didáticas em relação ao ensino de Matemática. Para as autoras, esses relatos demonstram entraves, sensação de desconforto dos docentes quando tratam dos conceitos dessa disciplina. Além do mais, reforçam estigmas que estiveram presentes no decorrer de suas trajetórias escolares (da educação básica ao ensino superior) ou de vida.

Para Gimeno (1991), o apoio do conhecimento à prática é precário, convertendo-se numa das causas que levam muitos professores a agir de acordo com as suas convicções e com mecanismos adquiridos culturalmente através da socialização, mais do que com o suporte do saber especializado, de tipo pedagógico.

---

[3]No desenvolvimento do texto, serão apresentados resultados de pesquisas mais recentes.
[4] Na fundamentação teórica, haverá uma seção específica para discussão desse termo e posicionamento dos autores sobre qual definição se apoiarão.
[5] Embora no texto algumas vezes esteja escrito apenas ‘concepções de ensino’, estaremos nos referindo às CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA .

Nesse contexto, Brousseau (1991) tem destacado que fenômenos didáticos, como por exemplo o CONTRATO DIDÁTICO, têm estado presentes na prática docente. Essa constatação nos motivou a desenvolver um trabalho que teve como objetivo analisar os construtos teóricosCONTRATO DIDÁTICO e as concepções de ensino de matemática como fatores que influenciam no desempenho de frações no 5º ano do EF. Para tanto, partimos dos seguintes questionamentos: as concepções de ensino explicitadas pelos professores (em seus discursos) se materializam na prática docente ou ficam apenas no campo de suas expectativas? Como se caracterizam os elementos essenciais e constitutivos do CONTRATO DIDÁTICO negociados em sala de aula quando os professores trabalham frações? As concepções de ensino e o CONTRATO DIDÁTICO negociado em sala de aula são fatores que influenciam no desempenho de frações com estudantes do 5º ano do EF?

Diante da necessidade de elucidar esses questionamentos apontando para respostas, buscamos sempre desenvolver este trabalho na linha de pesquisa da Didática da Matemática tendo como tema: a análise do CONTRATO DIDÁTICO e CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA como fatores de influências no desempenho de frações.

Para isso, foi elaborada a seguinte hipótese: o estudo do CONTRATO DIDÁTICO, como elemento teórico, pode nos ajudar a entender melhor as dificuldades dos estudantes dos anos iniciais do EF para lidar adequadamente com frações. Acreditamos que o CONTRATO DIDÁTICO está relacionado às características predominantes das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA subjacentes às práticas docentes, que podem estar influenciando o desempenho desse conteúdo.

Diante disso, procuramos caracterizar as concepções de ensino de professores do 5º Ano do EF; verificar se as concepções de ensino identificadas no discurso dos professores se materializam em suas práticas docentes sob o olhar da TSD; identificar o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido a partir de seus elementos essenciais/constitutivos e sua relação com as características predominantes das concepções de ensino que subjazem às práticas docentes quando é ensinado o conteúdo frações no 5º Ano do EF; reconhecer, além do CONTRATO DIDÁTICO e das oncepções de Ensino e de Aprendizagem de Matemática, outros possíveis fatores que podem estar dificultando a aprendizagem de frações no 5º ano do EF.

De modo geral, este trabalho está organizado da seguinte forma: preliminarmente, trazemos os aspectos estruturantes (problemática inicial, temática, hipótese, questões de pesquisa, objetivos e tese). No primeiro capítulo, temos uma discussão sobre questões que nos aprofundem aos estudos do CONTRATO DIDÁTICO. Para o seu desenvolvimento, temos cinco seções: na primeira, temos os elementos da TSD, situando o CONTRATO DIDÁTICO como um dos principais pilares dessa teoria, assim como os elementos a eles associados; na segunda, apresentamos os elementos da relaçao didática; na terceira, uma retomada desde a ideia de contrato, no sentido *stricto sensu* do termo, para entendermos as origens do CD; na quarta, os elementos desse fenômeno; e, na quinta, seus efeitos.

No segundo capítulo, temos o estudo das concepções de ensino e de aprendizagem da Matemática, dividido em três seções: na primeira, apresentamos uma visão geral sobre esse conceito e termos a ele relacionados; na segunda, o contextualizamos em função de estudos desenvolvidos na perspectiva da Educação da Matemática e, na terceira, procuramos fazer uma aproximação teórica entre as concepções de ensino e de aprendizagem da matemática e o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido em sala de aula, para atribuirmos a tipos de Contratos Didáticos específicos, em função das ideias de Charnay (2001).

No terceiro capítulo, foram abordados aspectos sobre os números racionais, especificamente as frações, divididos em cinco seções: na primeira, temos uma discussão da conceitualização levando em consideração elementos históricos, epistemológicos e matemáticos. Na segunda, as diferentes concepções relacionadas a este saber escolar em função de elementos didáticos, na terceira, as possíveis causas para as dificuldades de aprendizagem apresentadas pela literatura de referência e, na quarta, um olhar sobre as orientações curriculares a partir dos PCN (BRASIL, 1997) e BNCC (BRASIL, 2017).

O quarto capítulo traz uma abordagem metodológica, dividida em três seções. Na primeira, temos o percurso metodológico, explicitando o método de investigação e a temática desenvolvida; na segunda, a descrição dos instrumentos que foram utilizados para a construção dos dados e caracterização dos sujeitos da pesquisa. E, por fim, na terceira subseção, elencamos as categorias analíticas de estudo.

No quinto capítulo, apresentamos as análises dos dados obtidos, dividido em seis seções:na primeira, a caracterização das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA construída em função da entrevista semiestruturada; na segunda, os elementos desse construto teórico, observados nos acompanhamentos das aulas sob o olhar da TSD; na terceira, a comparação entre as concepções identificadas no discurso e nas práticas docentes; na quarta, os elementos do CONTRATO DIDÁTICO; na quinta, a análise entre o CONTRATO DIDÁTICO e as Concepções de Ensino e de Aprendizagem como fatores de influências no desempenho de fração e, na sexta, a identificação de outros possíveis fatores identificados para além dos explicitados anteriormente, que podem estar influenciando no desempenho desse saber escolar; e, no sexto e último, tecemos algumas considerações finais, seguidas de sugestões de novos trabalhos a serem desenvolvidos em função da temática e das limitações encontradas pelo estudo.

2. CONTRATO DIDÁTICO

Este capítulo aborda, na primeira seção, uma dimensão importante trazida pelo CONTRATO DIDÁTICO, que é o fato de ser considerado um dos pilares de sustentação da Teoria das Situações Didáticas, a TSD (BROUSSEAU, 2008), o que o faz estabelecer relações estreitas com os conceitos que a constituem.

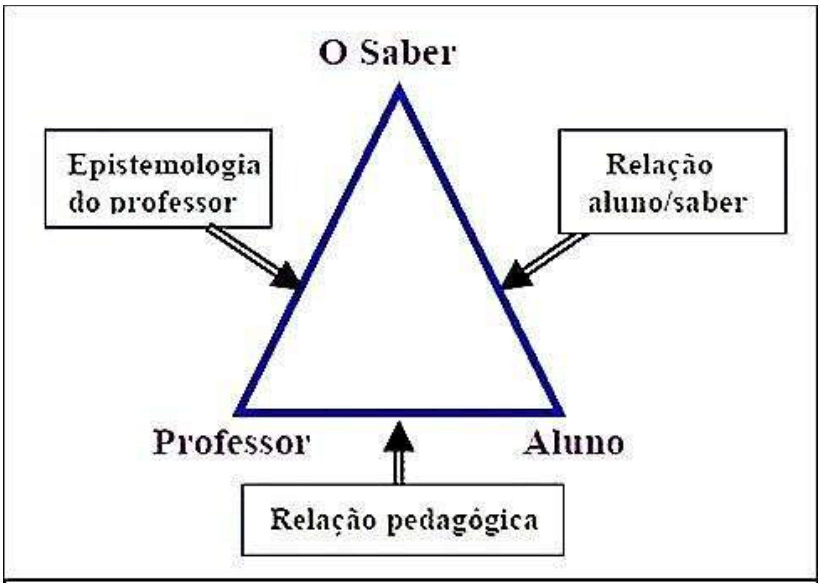
Na segunda, elementos que constituem o triângulo das relações didáticas. Essa seção, foi separada em três subseções. Na primeira, tratamos das questões relativas ao estudante; na segunda, o saber e, na terceira, o professor. Na Terceira, definimos o conceito de contrato no sentido estrito do termo, trazendo as distintas definições de outros tipos de contratos para fornecer ao leitor uma compreensão do caminho percorrido e das diferenças que separam, nitidamente, o CONTRATO DIDÁTICO dos demais, ressaltando as contribuições teóricas desse fenômeno, idealizadas por Brousseau (1986, 1996, 1997) e retomada por seus colaboradores, que perceberam a importância desse conceito no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem. Achamos pertinente também, nessa seção, situar o caso Gael, visto que representa um importante elemento para a compreensão das origens do CONTRATO DIDÁTICO.

Após termos situado o quadro teórico que permitiu definir o conceito de CONTRATO DIDÁTICO, na quarta seção, propomos uma discussão sobre os elementos que compõe esse fenômeno, dividida em duas subseções. Na primeira, tratamos os essenciais e, na segunda, os constitutivos. Na quinta e última, discutimo os efeitos do CD.

2.1 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E UM DOS SEUS PRINCIPAIS PILARES: O CONTRATO DIDÁTICO

A Teoria das Situações Didáticas é utilizada por muitos professores para orientar a organização do trabalho pedagógico. Segundo Brousseau (1996), o seu foco é modelar situações de ensino e de aprendizagem de matemática adequadas para que a ação do estudante viabilize a construção do conhecimento. Diante disso, o autor propõe o triângulo das situações didáticas. Dele fazem parte: o professor, o estudante e o saber, caracterizados pelo dinamismo e pela complexidade que permeiam essa relação. Elas são realizadas entre os elementos humanos (professor e estudante), mediadas por um elemento não humano (saber), determinando de tal forma como essas relações vão se desenvolver, como mostra a Figura 1.

Figura 1 - Triângulo Didático.



Fonte: Brousseau, 1996, p.12.

Ao analisar essa figura, podemos perceber que seus elementos estabelecem uma relação entre seus vértices ou por meio dos seus lados. Cada um dos vértices representa polos, os quais estabelecem três relações representadas pelos lados do triângulo: relação professor-estudante, estudante-saber e professor-saber. Gontijo *at al* (2012) destaca que essa interação se dá de forma contínua.

Além disso, é interessante observarmos que, apesar de aparentemente esse triângulo se apresentar como equilátero, Câmara dos Santos (1997) destaca que, malgrado a importância do esquema triangular como modelo representativo da situação didática, é necessário ressaltar que ele não se apresenta, necessariamente, como um triângulo equilátero, pois as relações estabelecidas pelos elementos dos seus vértices são conflituosas, assimétricas e sofrem regulações externas, da noosfera[6]; por exemplo, pela sociedade que o legitima e rege o sistema de ensino, e internas, relacionadas às concepções dos sujeitos envolvidos.

Diante desse fato, o autor mostra que cada um de seus lados representa uma relação, consideradas conflitantes em equilíbrio estável e ressalta que a natureza de cada triângulo didático está intrinsecamente dependente das características próprias de cada elemento dessas relações. Nesse âmbito, os PCPE de Matemática (PERNAMBUCO, 2012) salientam que refletir o ensino e a aprendizagem de Matemática implica estabelecer relações entre alguém que ensina (o professor), alguém que aprende (os estudantes) e o objeto do conhecimento (o saber).

[6] Noosfera é um termo designado por Chevallard (1991) para indicar a instância, no processo de transposição didática, que vai influenciar/decidir os saberes a serem ensinados.

É importante salientar que dois desses elementos, apesar de serem objetos de estudo, são humanos, estão sujeitos assim às manifestações da sua própria subjetividade. Dessa forma, percebemos que a sala de aula deve ser vista como um espaço de negociações, deestabelecimentos de Contratos Didáticos, de ações transformadoras que vão modificar os elementos dessa tríade que discutiremos agora separadamente.

2.2 O TRIÂNGULO DA RELAÇÃO DIDÁTICA

2.2.1 O estudante

De acordo com os pressupostos da TSD, o verdadeiro papel do ensino na atualidade é fazer com que o estudante tenha condições de construir e dar sentido ao conhecimento de forma autônoma. Para tanto, deve ser capaz de não só repetir ou refazer, mas também de ressignificar o saber em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver problemas (CHARNAY, 2001).

Nesse sentido, Brousseau (1996) e Onuchic (2014) mostram a necessidade de ser desenvolvida nos estudantes, principalmente, uma autonomia no tocante às suas aprendizagens. E para que ela seja alcançada, as orientações curriculares PCN (BRASIL, 1997) e BNCC (BRASIL 2017) sinalizam para sua exposição a metodologias de investigação, a fim de que participem, de forma efetiva, da construção do conhecimento. Além disso, as situações de aprendizagens deverão ser oferecidas de forma a lhes causar conflito sociocognitivo, elemento necessário e inerente à construção do conhecimento.

Nesse cenário, é preciso estarmos atentos para que os estudantes não devam se prender a definições, memorizar regras e algoritmos para utilizá-las posteriormente. Deverão, sim, defrontar-se com situações que os levem a questionar, levantar hipóteses, testá-las, discuti-las com seus pares, encontrar modelos, teorias e assim por diante. É dessa forma que eles deverão ter acesso aos novos saberes. Diante disso, Chevallard (1991) mostra que no funcionamento didático eles irão progredir por meio de uma contradição novo-antigo.

Inicialmente, o saber é considerado novo e deve ser ensinado. A partir de um dado momento, os estudantes saem dessa situação com sua relação modificada, passando agora a ser considerado antigo – ou seja, o que era novo passa a ser antigo. Uma dimensão importante, que deve ser considerada nessa relação professor estudante e saber, é a não existência de uma simetria entre esses três elementos, como aparentemente percebemos no triângulo didático. Nessa perspectiva, pesquisadores concluem que:

> Não existe uma simetria no que diz respeito à relação estudante-saber e professor-saber. Mas essa situação já é de se esperar, já que sabemos e discutimos que é o professor quem vai iniciar o estudante, irá introduzi-lo no novo saber, quem vai em última instância, tirá-lo da ignorância (BRITO MENEZES E CÂMARA DOS SANTOS, 2006, p. 42).

Com isso, não estamos afirmando que os estudantes não mantêm nenhuma relação com o saber antes do ensino, mas sim que, no estado inicial, essa relação é pouco ou nada adequada. Sem a hipótese da assimetria, o sistema didático não tem razão de existir (MARGOLINAS, 1989). Para a autora, tal assimetria é fundamental para explicar a tensão que existe na relação didática, ao refletirmos sobre forma equilátera do triângulo das situações didáticas.

2.2.2 O saber

De acordo com a TSD, o saber deve ser construído por meio de situações. É interessante destacar que a relação que o professor tem com ele não é igual à que o estudante estabelece. Ela não é estável, ou seja, está sempre em movimento, assim como a do estudante. Ademais, podemos considerá-lo de grande complexidade, pois quando chega em sala de aula, não é ensinado da mesma forma como foi produzido, sofre transformações necessárias, definidas como transposições didáticas.

Para Brousseau (1996), esse conceito tem sua utilidade, os seus inconvenientes e o seu papel, inclusivamente para a construção da ciência. É simultaneamente necessário e, em um certo sentido, lamentável, além de ter de ser posto sob vigilância. Nessa mesma linha de ideias, Chevallard (1996) chama a atenção para a necessidade de uma vigilância epistemológica em relação à transposição didática realizada.

Diante desse contexto, é preciso ficarmos atentos pois, na medida em que o saber ensinado passa por adequações, transposições, até chegar à sala de aula, acaba sofrendo uma série de transformações que podem estar desconexas com o saber sábio[7]. Assim sendo, é preciso termos cuidados para não perdermos essa conexão. Acreditamos que essas adequações vão dar origem a alguns elementos constitutivos do CONTRATO DIDÁTICO, dentre eles, os efeitos.

Brito Menezes (2006) categoriza as transposições em dois momentos: a transposição didática externa e a interna. A primeira acontece na noosfera, por meio dos programas curriculares e livros didáticos, sendo selecionados assim os saberes que entrarão no jogo didático, ganhando roupagem didática. A segunda consiste na relação em que se institui como

[7] É um saber reconhecido como tal por uma instituição.

elemento primordial dessa transformação o próprio professor e sua relação com o saber e o estudante.

Por conseguinte, a autora mostra que essa relação estabelecida é, por um lado, reveladora e, por outro, definidora dos elementos ligados ao aprender e não um determinado conteúdo do saber. Nessa mesma linha de ideias, Gontijo *at al* (2012, p. 39) chamam atenção ao fato que:

> os conhecimentos que constituem o domínio da matemática se tornam acessíveis aos estudantes. Entretanto, este processo de transposição muitas vezes não é concretizado pelos professores em suas práticas pedagógicas, pois estas estão marcadas por representações sociais acerca do que vem a ser o conhecimento matemático e de como se ensina e se aprende matemática. Essas representações foram construídas em um longo período de tempo a partir das concepções, crenças, valores e atitudes que regem a produção de saberes científicos.

Ainda sobre o saber, Schubauer-Leoni (1988b) destaca que ele deve ser analisado a partir de três aspectos:

- A epistemologia, que se relaciona à sua natureza, de que forma se constitui e como se organiza;
- Seus conteúdos têm uma estreita relação com a transposição didática, ou seja, com a forma como eles passam ao longo do processo de didatização, a entrada no universo escolar;
- Sua relação com o professor na sua função de ensinante; e do estudante, de aprendente de um saber que, de início, se espera seja novo para ele, e que se torne velho ao longo do processo.

Observamos aqui que o saber é visto como elemento essencial da relação didática. Assim, as relações e rupturas que são estabelecidas tanto pelo professor quanto pelo estudante é que vão dinamizar o funcionamento do triângulo didático. Para alguns autores, como, por exemplo, Jonnaert (1994; 2002), sem o saber não há relação didática.

2.2.3 O professor

Quando tomamos como referência os fenômenos didáticos, Brousseau (1998) chama atenção para o fato de que o professor deve ser considerado um ator, já que utiliza um texto escrito para ter liberdade de exercitar sua criatividade. Entretanto, se ele apenas recita esse texto, nunca terá condições de comunicar o que é primordial no que diz respeito ao saber que está sendo trabalhado. Diante disso, percebe-se a importância do seu papel enquanto elemento norteador do processo de ensino, como preconizam os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, dentro de uma perspectiva sociointeracionista da aprendizagem.

Daí destacamos a sua relevância para a seleção de situações, de modo a atuar como motivador ao desenvolvimento da Matemática em uma perspectiva de investigação. O professor, nessa visão, seria um dos atores fundamentais que atua nesse palco, pois caberia a ele organizar a cena, propondo situações em que os significados fossem instituídos e negociados (BRITO MENEZES, 2006). Diante desse contexto, a autora, ao estabelecer um alinhamento entre a visão sociointeracionista e as ideias de Brousseau (1996), destaca a necessidade de se pensar na inserção desse professor no triângulo das situações didáticas e da forma como ele vai se relacionar com os outros dois elementos.

Além disso, chama atenção o fato de que essa inserção dar-se-á a partir do momento em que o professor levar em consideração sua relação com o saber e com o tempo didático. O primeiro conceito definirá: as situações de ensino, a postura do professor diante dos estudantes, seu papel, de que forma negociará o CONTRATO DIDÁTICO e até mesmo como se dará o processo de transposição didática. O segundo, apesar de estar muito relacionado com o primeiro, tem como objetivo gerir o tempo necessário de sala de aula para a execução da atividade docente.

Em se tratando do tempo, Chevallard (1985; 1986; 1987), em seus estudos sobre a teoria da transposição didática, identifica duas dimensões temporais transpassando o sistema didático: a do ensino e a da aprendizagem. Cada um com suas características diferentes, porém que agem de forma concomitante no sistema didático.

O tempo de ensino é previamente estabelecido em função dos programas e unidades curriculares. Enquanto o de aprendizagem, por seu turno, não pode ser previamente estabelecido e controlado, já que está associado aos estudantes e, por essa razão, está relacionado às questões específicas e particularidades de cada um.

Porém, na perspectiva definida por Chevallard, apesar de considerar o estudante, não leva em conta o professor e a sua relação com o tempo. Câmara dos Santos (2005) amplia a ideia desse conceito trazida pelo autor, ao analisar o discurso do professor de Matemática em sua estreita relação com o saber, observando existir outra dimensão temporal: o tempo do professor. É considerado como um elemento fundamental do processo didático, pois a partir do momento em que ele se sujeita não apenas às condições propostas pelas instituições, mas à sua própria subjetividade, aparece então o seu tempo, considerado individual e toma como princípio o professor enquanto sujeito didático. Sua gestão está ancorada na relação que tem com o conhecimento.

Tal ideia remete ao gerenciamento do tempo dele como “sujeito didático”, que está intrinsecamente vinculado, em um primeiro momento, à sua relação ao saber e, de forma interdependente, ao seu relacionamento com os estudantes. Uma dimensão importante destacada pelo autor é que o professor tende a dilatar ou a restringir o tempo em que um determinado saber permanece em cena no jogo didático, em função da sua relação com este, e ainda destaca que o professor não trabalha o texto escolar (sugerido por programas, livros didáticos) em seu estado puro, vai deixá-lo temporalizado em concordância com o tipo de relação que ele tem com o saber matemático.

Diante do exposto, podemos inferir que o professor pode dedicar mais ou menos tempo na abordagem de um saber, a partir de sua relação com ele. No caso específico de frações, o que a literatura vem destacando é a ênfase no ensino do significado ‘parte’ e ‘todo’ em detrimento dos demais. A partir dessa ideia, destacamos que os professores passam muito tempo desenhando figuras geométricas, dividindo-as em partes de mesmo tamanho, pintando algumas delas e depois escrevendo a relação entre o número de partes pintadas e a quantidade total de partes (LANDIM E MORAIS, 2019). Esse fato nos leva a entender que eles o fazem quase exclusivamente dessa forma porque assim aprenderam e têm uma melhor relação com esse significado específico do conteúdo sob avaliação.

Além dos elementos que formam o triângulo didático, apresentaremos outros que podem nos ajudar a entender a relação que estamos investigando, sejam eles: as situações, a interação e o meio. No decorrer desse texto, temos chamado atenção que um dos objetivos da educação matemática, assim como da TSD, é colaborar para que os estudantes tenham certa autonomia intelectual e que os saberes por eles construídos lhes deem condições para compreender o mundo e ajudá-los na resolução de problemas relativos em seu cotidiano.

Para tanto, precisamos considerar a existência de diversas situações. Baseadas e fundamentadas nos pressupostos do CONTRATO DIDÁTICO, elas são definidas em função das interações entre os professores e os estudantes em torno do ambiente de trabalho, com o objetivo de praticar e construir o conhecimento matemático. No tocante à aprendizagem, ela acontecerá:

> [...] a partir das interações das crianças com situações fundamentais; os tipos de contextos que podem fomentar a construção de sentido e a promoção de um processo de construção do conhecimento, organizado em torno de um tipo de jogo, que o desenvolvimento de uma situação didática. De uma forma tal, esse é o tipo de atividade matemática que é liberada da intervenção direta e instrução do professor. (BROUSSEAU, 1997, p. 30).

Nessa circunstância, Brousseau (1986) traz à tona a ideia de situação fundamental, definida como aquela que é próxima do problema que deu origem a determinado saber e que exige um importante estudo epistemológico do saber que o professor quer que seu estudante construa. Ela deve ser vista como um modelo de conhecimento a ser ensinado. Em geral, a situação fundamental constitui-se uma condição para o estabelecimento de uma relação didática específica com o conhecimento (relação triangular: professor – estudante – saber) e pode ser considerada também uma ferramenta privilegiada no processo de ensino e aprendizagem.

Com o intuito de analisar as relações entre as atividades de ensino e as diversas possibilidades de uso do saber matemático, Brousseau (1986) sistematiza uma tipologia de situações, sejam elas: a ação a formulação, a validação e a institucionalização, nas quais o saber adquire diferentes funções. É interessante destacar que, em cada uma dessas fases o estudante não tem a mesma relação com o saber (BROUSSEAU, 2008).

Na primeira situação, a ação, predomina o aspecto experimental, sem se levar muito em consideração o aspecto teórico dos conceitos relacionados. Para tanto, os estudantes vão realizar procedimentos mais imediatos para resolução de um problema, que terá como resultado a produção de um conhecimento de natureza mais experimental, intuitivo do que propriamente dito teórico. Segundo Pais (2008), o essencial desse tipo de situação não é que os estudantes venham explicitar seus argumentos, teorias ou proposições.

Em relação à prática pedagógica, o desafio é escolher estratégias para que os estudantes possam agir diretamente sobre o problema sem que haja a necessidade da explicitação de argumentos. Em geral, os estudantes vão executá-lo, julgar seu resultado, ajustando-o, se necessário, sem a intervenção do professor, de acordo com a retroação do meio em que ele deve tomar iniciativas para que sua atividade fique organizada. Uma dimensão importante dessa situação são as interações que acontecem entre os estudantes e o meio, este não necessariamente precisa ser físico, nem uma manipulação real, pode ser meramente mental.

Na segunda, a formulação, há uma troca de informações entre o estudante com uma ou mais pessoas que serão as emissoras e receptoras, trocando mensagens escritas ou orais. Diferentemente da ação, nela já se faz necessária a utilização na resolução do problema de algum esquema de natureza teórica, em função de um raciocínio mais elaborado em detrimento do experimental. Um aspecto importante a ser destacado é que nesse tipo de situação, é necessário "formular", criar uma hipótese de resolução do problema, e não apenas trocar informações. Para tanto, é preciso utilizar informações anteriormente construídas. Segundo Pais (2008, p. 72), esse saber:

> Ainda não tem uma função de justificação e de controle das ações. O aluno pode tentar explicar suas justificativas, mas isso não seria essencial para caracterizar esse tipo de situação didática. Trata-se do caso em que o aluno faz afirmações sem ter a intenção de julgar a validade do conhecimento, embora contenham implicitamente intenções de validação.

Na terceira situação, a validação, já são utilizados mecanismos de provas e o saber, pelos estudantes elaborado, já tem natureza teórica, relaciona-se à argumentação racional voltada para a veracidade do Conhecimento (PAIS, 2008). Isto quer dizer que, nessa situação, eles o procuram "convencer" os demais sobre a validade do que foi feito, elaboram provas que devem ser demonstradas, pois sabem que a comunicação empírica não é suficiente para os outros aceitarem que tudo o que foi realizado está correto, sendo necessário explicar o porquê de sê-lo assim, mostrando até que ponto o modelo criado é válido ou não.

Na quarta, a institucionalização, diferentemente das outras, é de responsabilidade do professor. Ela consiste em fixar de forma convencional e explícita o estatuto cognitivo do saber, ou seja, o conhecimento construído e validado, passa a fazer parte integrante do patrimônio do indivíduo ou da sala. Nessa situação:

> O professor tenta proceder a passagem do conhecimento do plano individual, e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico. Por meio dessa situação o saber passa a ter um estatuto de referência para o aluno, extrapolando o limite subjetivo. (PAIS, 2008, p. 74).

Uma dimensão importante que merece ser destacada em relação à institucionalização, como esclarece Almouloud (2007), é o tempo adequado para ser implementada, pois se acontecer cedo ou tarde demais poderá provocar dificuldades. Assim:

> Se a institucionalização for realizada muito cedo, ela interromperá a construção do significado, não oportunizando ao estudante uma aprendizagem adequada, o que poderá ocasionar dificuldades tanto para quem ensina, quanto para quem aprende. Da mesma forma, se é realizada após o momento adequado, ela reforçará compreensões inexatas, e por consequência, haverá um atraso na aprendizagem, gerando dificuldades nas aplicações dos conhecimentos construídos. (ALMOULOUD, 2007, p. 40).

Diante desse aspecto, é preciso que o professor tenha muito cuidado em relação ao tempo necessário para finalizar o processo de construção dos conhecimentos matemáticos, em especial, deve levar em consideração que os estudantes têm tempos diferentes de aprendizagens. Para além disso, se faz necessária a elaboração e o planejamento com questões (desafiadoras, contextualizadas etc.), com o objetivo de alcançar níveis de sucesso na aprendizagem de seus estudantes. Diante disso, cabe ao professor conduzir seus estudantes em sucessivas situações, pois:

> Cada uma das categorias acima relacionadas, articula regras de contrato específicas, visto que, as tarefas do professor e dos alunos em relação ao saber são distintas em cada uma delas. Nesta perspectiva, o estudo das relações estabelecidas entre professor, aluno e saber, fazem parte de um tipo de investigação particular, isto é, fazem parte das pesquisas que tratam dos contratos didáticos, conceito base da teoria proposta por Brousseau e recentemente retomadas por vários outros pesquisadores de diferentes contextos." (BELTRÃO, SOUZA E SILVA, 2010, p. 339).

Além das situações, o meio é um elemento essencial nas relações pedagógicas em que se envolvem professor, estudante e saber em situação de aprendizagem. Para Brousseau (1998), ele pode ser compreendido como todo e qualquer elemento capaz de interagir com o estudante de forma antagônica, isto é, algo que vá de alguma maneira desafiá-lo na procura de respostas para as situações.

Ademais, o autor destaca que: “à semelhança do que acontece na sociedade humana, o estudante aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, dificuldades e desequilíbrio”. Dessa forma, é preciso entender que o saber do estudante será resultado dessa adaptação, que será manifestada por meio de novas respostas, como resultado de sua aprendizagem.

Por conseguinte, Almeida (2016) chama atenção às interações sociocognitivas como elementos que vão acrescentar esse novo componente, o meio, na relação triangular (o professor, o aluno e o saber). Ele deve possibilitar a criação de um subsistema antagônico com o intuito de fazer com que os estudantes se tornem sujeitos ativos e autônomos no processo de construção do saber matemático (BROUSSEAU, 1986; 2008).

Ainda em relação ao meio, Perrin-Glorian (1998) destaca a existência de três componentes importantes a ele relacionados: o primeiro, de natureza material, constituído por objetivos e instrumentos; o segundo, de natureza cognitiva, relacionado aos conhecimentos necessários, quando é proposta a resolução de problemas; e o terceiro, de natureza social, formado pelos atores (estudantes e professores), cuja interação interfere na resolução dos problemas em análise. Ademais, dentre outras considerações em relação ao meio, existem alguns aspectos que são destacados por sua importância para o processo de aprendizagem:

> O aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de dificuldades, de contradições; II. Um meio em que não há intenções didáticas é insuficiente para permitir a construção de um conhecimento matemático pelo estudante; III. Esse meio e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem; IV. No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização. (ALMOULOUD, 2007, p. 32).

Ao refletir sobre os estudos do autor, concordamos com as ideias explicitadas, em especial com a explicação de que os comportamentos dos estudantes estão intrinsecamente relacionados ao funcionamento do meio (levando-os a conflitos cognitivos), que deve ser pensado e organizado pelo professor (situação didática) com o intuito de promover a aprendizagem. Esta, por conseguinte, deve acontecer em função do processo de interação, tendo como base desequilíbrios, assimilações e acomodações, conforme preconiza Piaget (1997).

Além disso, a aprendizagem deve ser construída em função de conhecimentos pré-adquiridos pelos estudantes. Entretanto, o que temos observado no ambiente escolar e encontramos reforço na literatura é a presença de um meio aliado ao estudante, ou seja, aquele que não os impulsiona ao desenvolvimento de uma aprendizagem em uma perspectiva de investigação, já que professor, muitas vezes, apresenta o conhecimento pronto e acabado.

Além disso, insiste na realização de atividades de um mesmo raciocínio, mesmo modelo, em forma de treinos consecutivos, como esclarece Oliveira e Mastroianni (2016, p. 460):

> Um meio aliado não seria adequado para efetivar o processo de construção do conhecimento nos termos supramencionados, uma vez que é constituído por elementos facilitadores e por uma preparação que exime os sujeitos do processo investigativo e do esforço para a superação de eventuais dificuldades e restrições.Nesse caso, os componentes cognitivos já se encontram explicitados na forma de exemplos ou modelos e, frequentemente, o componente social é substituído por exposições/instruções do professor.

Ao analisarmos as ideias expostas, percebemos a importância de o professor organizar um meio com condições suscetíveis de provocar aprendizagens. Para tanto, é necessário que ele seja munido de intenções didáticas suficientes para haver a construção de conhecimentos matemáticos pelos estudantes.

Para além de discutir os elementos da relação didática, assim como outros a ela associados, na próxima subseção objetivamos esclarecer o conceito de CONTRATO DIDÁTICO, diferenciando-o de outros muito próximos, como o pedagógico, por exemplo. A partir dessa explicitação, permitimos ao leitor conhecer um pouco mais o percurso trilhado por esse fenômeno, considerando-o o principal motor da relação didática.

2.3 DO CONTRATO *STRICTO SENSU* AO DIDÁTICO

Antes de aprofundarmos a discussão sobre o CONTRATO DIDÁTICO, achamos importante vermos o significado do termo contrato em seu *stricto sensu* e algumas ideias relacionadas a outros tipos, pois consideramos pertinentes para nosso trabalho, por estarem a ele associados, mas possuem especificidades que os distinguem e nos ajudarão a entender a origem e o caminho percorrido até chegar a esse conceito.

De acordo com Jonnaert e Borght (2002), o termo contrato é considerado polissêmico. Em função da etimologia, foi tomado do baixo latim jurídico *contractus,* que significa convenção, pacto, acordo. Derivou-se de *contrahere*, ou seja, assumir compromisso. Sua forma erudita extinguiu a mais popular *contraut* (1254) registrada ainda no século XV. Para os autores, à luz das ideias de Denver (1992. P. 61), o contrato em seu *stricto sensu* é:

> Uma convenção estabelecida entre duas ou mais pessoas após negociações. O contrato implica uma adesão de diferentes parceiros do projeto. Supõe uma obrigação de

> respeito a suas regras durante o desenrolar deste e, consequentemente, o estabelecimento de procedimentos de controle do seu seguimento.

Diante disso, percebemos que em um contrato há uma negociação, um compromisso em que as partes se obrigam mutuamente a cumprir as cláusulas nele explicitadas. Sua negociação prévia, que lhe dá a constituição, converge para que haja um acordo entre os parceiros envolvidos. Sem ele, não há contrato possível e sua qualidade se relaciona à sua explicitude excessiva.

De modo geral, o contrato é visto como um sistema fechado e imutável em que suas regras não podem ser modificadas no período de execução e pode também ser considerado como um documento, texto escrito, que reproduz de maneira explícita suas cláusulas, ou seja, compromissos mútuos entre as partes envolvidas (JONNAERT E BORGHT, 2002).

Para entendermos o CONTRATO DIDÁTICO, discutiremos sobre outros que foram importantes para sua teorização. Inicialmente trataremos do contrato Social, pois surge de forma a romper com a rigidez apresentada pelo conceito inicial do termo contrato. Ele é definido por Rousseau (1972), concebido como primeira fonte de inspiração do CONTRATO DIDÁTICO. Nele, a vida social é vista em função de um contrato, no qual cada contratante associa sua liberdade ao bem da comunidade, com o objetivo de proceder tendo em vista as aspirações da maioria.

Uma questão primordial em relação a esse tipo de contrato é a definição da igualdade entre seus membros, do comprometimento entre todos. Para tanto, é preciso que a vontade individual leve em consideração a do cidadão, o que vive na sociedade. Esta última deveria ser coletiva, que deve levar em conta um interesse no bem comum.

Segundo Jonnaert e Borght (2002), o contrato social se fundamenta na visão de uma associação, de um pacto estabelecido de comum acordo, de tal modo que nenhuma das partes possa se submeter à outra. Vislumbra-se nele a noção de igualdade, partindo do pressuposto de não haver submissão de uma parte em relação à outra, mas sim a existência de um acordo para que a harmonia entre as partes seja garantida.

Além disso, outra questão que merece destaque em relação a esse tipo de contrato é que, ao ser associado à relação didática, antecipa a ideia de um contrato não convencional entre professor e estudantes, pressuposto principal do CONTRATO DIDÁTICO. Dessa forma, surge o primeiro indício desse fenômeno.

O segundo tipo é o Contrato Diferencial, que, segundo Schubauer- Leoni (1988b), não deve ser visto como um tipo de contrato, e sim uma deformação(perversa) do CONTRATO

DIDÁTICO, pois carrega consigo as mesmas características dele no sentido estrito: diz respeito às expectativas, negociações, divisão de responsabilidade, etc.

Porém, a autora chama atenção ao fato de que o Contrato Diferencial se distingue do Didático à medida em que o professor estabelece expectativas diferentes para os estudantes, em função da relação que eles têm com o saber em jogo. Em geral, há aqueles estudantes para os quais o professor tem uma expectativa positiva, em detrimento dos demais, como mostra a citação:

> O professor, de certa forma, "elege" determinados alunos que ele supõe que terão sucesso, e em detrimento disso, aqueles que ele supõe que são fadados ao fracasso. O professor, em geral, está mais disponível para aquele aluno eleito, com o qual ele estabelece um contrato permeado por expectativas positivas. (BRITO MENEZES E CÂMARA DOS SANTOS, 2017, p. 22).

Nessa mesma linha de ideias, Schubauer-Leoni (1987,1988) destaca que o professor não tem um mesmo contrato com cada grupo de estudantes ou até mesmo, com cada um deles. Portanto, a autora discute o surgimento de um Contrato Diferencial. O delineamento dele estará relacionado às representações que o professor tem, que constrói com cada estudante diferentemente.

Em geral, o professor terá uma disponibilidade maior para osalunos com os quais estabeleceu expectativas positivas, aqueles que considera serem bons, estudiosos, dedicados, inteligentes, ou seja, que acompanham as aulas e conseguem responder de forma correta as atividades propostas. Nesse caso, a relação professor-estudantes apresenta-se como uma parceria, fazendo com que eles desenvolvam uma relação positiva tanto com o professor, quanto com a aprendizagem.

Entretanto, existem também aqueles estudantes com os quais o contrato estabelecido revela expectativas negativas, os considerados intelectualmente fracos, não tão estudiosos e, consequentemente, não capazes de acompanhar o desenvolvimento das aulas e responder corretamente as atividades. Não há, nesse caso, parceria e cumplicidade, diferentemente do anterior, a relação estabelecida entre eles não é boa e o fracasso na aprendizagem será consequência desse processo. Uma dimensão importante do Contrato Diferencial é a questão da subjetividade.

Para Brito Menezes (2006, p. 58):

> Não há como discutir a questão do contrato diferencial sem refletir acerca dos aspectos da subjetividade de ambos os parceiros da relação. Algumas pesquisas (muitas na área de psicologia da educação matemática) têm sido conduzidas, no sentido de analisar a subjetividade do professor (ver Araújo, 2005), e de que forma ela se circunscreve no processo de ensino-aprendizagem. Outras abordam a relação entre a auto-estima e o autoconceito do aluno e o seu desempenho escolar (Hazin e Da Rocha Falcão, 2001), inferindo que a aprendizagem de determinado saber está relacionada, em parte, à construção de um autoconceito positivo pelo próprio aluno. E, por outro lado, o

> professor assume um papel essencial nessa construção. Enfim, a psicologia e psicanálise podem trazer subsídios relevantes para tal análise.

O terceiro tipo é o Contrato Experimental, discutido por Schubauer-Leoni e Grossen, (1993). Segundo os autores, é aquele que não tem como objetivo algo que seja ensinado nem aprendido, mas sim a investigação científica, em que há um estabelecimento de relação/interação entre um pesquisador e um sujeito da investigação, na realização de uma tarefa experimental.

Um elemento importante que Brito Menezes (2006), baseada nos estudos dos pesquisadores anteriormente citados, levanta é que existem lugares distintos para o conhecimento no que se refere aos Contratos Didático e Experimental. No primeiro, seu lugar é o do ensino (e da aprendizagem), enquanto no segundo é o da investigação científica. Dessa forma, a partir do momento que se muda o lugar do conhecimento, para os contratos citados, mudam também o lugar do professor/experimentador e do estudante/sujeito.

O quarto é o Contrato Pedagógico e temos em Filoux (1974) a instauração de seu conceito. Ele traz referências às representações que professores e estudantes fazem da relação pedagógica e do que eles experimentam nela. Em geral, podemos dizer que esse tipo de contrato estabelece relações entre professor e estudantes, sem levar em consideração o polo do saber.

Essa é uma dimensão considerável que o distingue do Didático. Henry (1991), por exemplo, considera importante fazer algumas distinções entre o Contrato Pedagógico e o Didático Dentre elas, podemos destacar: o primeiro tem suas regras explicitadas; no segundo, elas aparecem, em sua maioria, de forma implícita. O Pedagógico não mantém relação com o saber, enquanto o didático surge a partir da inclusão desse elemento na relação didática. Sendo assim, se não houver saber, não existe CONTRATO DIDÁTICO (BROUSSEAU, 1996).

Nessa mesma linha de ideias, estudiosa defensora de que o conceito de CONTRATO DIDÁTICO se distingue do Contrato Pedagógico à medida que este último, apesar de tratar das obrigações recíprocas na relação entre estudantes e professores, não faz referência estrita ao saber em jogo nessa relação, afirma que:

> Quando se fala na relação que se estabelece em sala de aula entre professor e aluno entende-se que essa relação não acontece, exclusivamente, em função de um saber que esteja em jogo. Isto posto, é possível se falar na existência de um nível de relação entre professor e aluno, que não envolve, necessariamente, o saber. A este tipo de relação, os estudiosos da Didática da Matemática chamaram de contrato pedagógico. (BRITO MENEZES, 2006, p. 53).

Outrossim, é interessante destacarmos outra característica do Contrato pedagógico que é a explicitação de suas regras, diferente do Didático, visto que a maioria delas é implícita. Para a autora, o primeiro está intrinsecamente RELACIONADO a uma disciplina e suas regras podem ser descritas mais por parte de quem ensina do que de quem aprende. Os estudantes, por sua vez, devem se adaptar ao funcionamento delas.

Para Jonnaert e Borght (2002), o Contrato Pedagógico:

> É considerado então como uma "técnica de ensino/aprendizagem" que permite que um professor negocie com um aprendiz um trabalho pessoal que corresponda a um objetivo determinado. Em relação a esse objetivo, o próprio aluno escolhe a natureza e a dificuldade da tarefa que deseja cumprir. Depois disso, compromete-se, mediante contrato com o professor, a realizar a tarefa escolhida e a desenvolver as competências úteis ao tratamento dessa tarefa. (p. 159).

De modo geral, podemos dizer que o Contrato Pedagógico vai definir as expectativas entre os interlocutores da relação, que são o professor e os estudantes. Para os autores, esse tipo de contrato regula as trocas entre eles, definindo deveres e direitos de cada sujeito. É baseado em um consentimento mútuo sobre regras às quais cada um deve se submeter deliberadamente, fundamentando-se em enunciados e regras para que aconteça o bom andamento nas relações entre professor e estudantes.

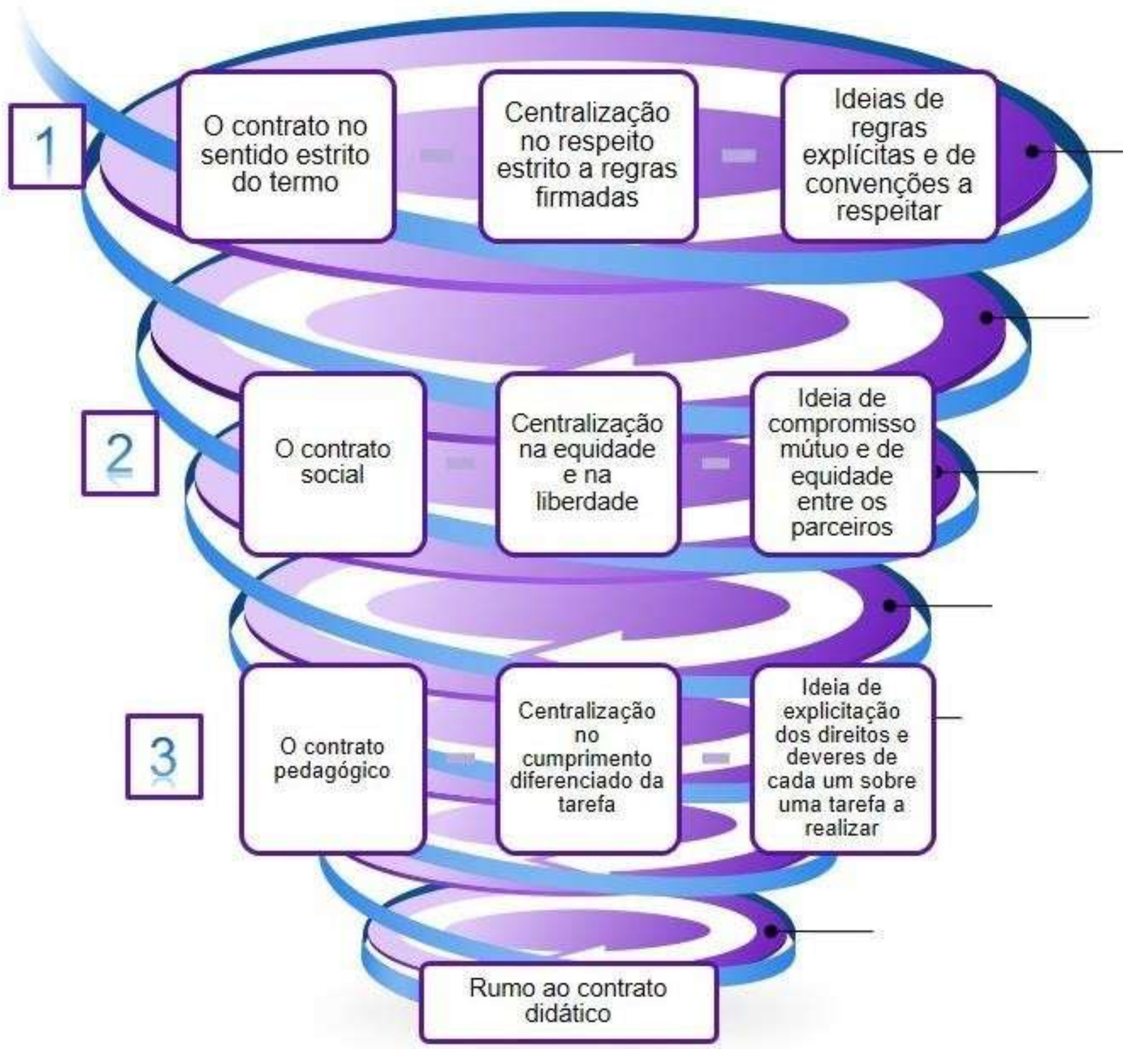
A partir das ideias apresentadas dos diferentes tipos de contrato, é interessante destacarmos que, nos diferentes ambientes (profissional, familiar, etc.), o homem, por ser social, necessita estabelecer relações com os seus pares. Tais relações são repletas de um conjunto de regras em que cada um necessita saber o que o outro espera de si e qual sua função diante daquele ambiente social.

Na escola, essa necessidade não é muito diferente, ou seja, é regida por diferentes contratos, tidos como convencionais (aqueles que nos remetem imediatamente a algumas situações, a um acordo em que partes estão envolvidas, ou algo do tipo documento escrito). Diante disso, Jonnaert e Borght (2002) destacam que esse contexto não é propício à implantação de contratos não convencionais, logo percebemos que o ambiente escolar não é adequado a contratos não usuais. Dessa forma,

> O ambiente escolar, sua mesoestrutura, em geral é refratário a um tipo de contrato que, assim como o contrato social de Rousseau, busca o desenvolvimento de relações imparciais entre diferentes parceiros (alunos, professor e um saber), sobretudo se os componentes desse contrato não são necessariamente explícitos. Essa mesoestrutura, com seus regulamentos, sua legislação, seus programas, seus horários, seus compromissos sociais, é, certamente, um contrato rígido, com forte incidência sobre o CONTRATO DIDÁTICO, que é, por definição, não convencional. (JONNAERT E BORGHT, 2002, p. 158).

A partir desse fato, as ideias relacionadas ao CONTRATO DIDÁTICO (tido como não convencional) se distinguem das dos outros, em especial pela ampliação dos elementos da relação didática, que antes era de professor e estudantes, passando a ser professor, estudantes e saber (elemento primordial desse tipo de Contrato). Para um melhor entendimento, sintetizamos algumas ideias sobre o caminho percorrido até se chegar ao CONTRATO DIDÁTICO em função de outros que lhes deram origem, conforme ilustramos na Figura 2.

Figura 2 - Percurso percorrido pelo contrato didático.



Fonte: Adaptado pelos autores em função de Jonnaert e Borght (2002).

Ao analisarmos a figura, percebemos que o CONTRATO DIDÁTICO traz em seu bojo elementos dos demais, algumas distinções e até ampliações. Em relação ao Pedagógico, por exemplo, ele integra uma parte dos componentes pedagógicos, mas os organiza de uma forma não convencional e diferente, adicionando-lhe um novo elemento, o saber. Uma dimensão importante que queremos destacar é que o “CONTRATO DIDÁTICO se originou da mesclagem dessas diferentes abordagens, de seu questionamento e de sua articulação com a relação didática” (JONNAERT E BORGHT, 2002, p. 162).

Além de percebermos esse caminho percorrido para definição da ideia de CONTRATO DIDÁTICO, é interessante destacarmos que algumas das situações que permitiram Brousseau (2013) refletir sobre esse fenômeno, fazendo-o vislumbrar algumas das causas de seu estabelecimento em sala de aula, foram as divergências e desentendimentos comuns entre as expectativas e as possibilidades recíprocas entre professor e estudantes.

Para ilustrar a ocorrência desse fenômeno, temos o exemplo do estudo de Baruk (1975), que procurou investigar se as crianças dos primeiros ciclos, a partir de um enunciado de um problema, iriam levar em conta a adequação dos dados propostos. Porém, o que se observou foi o surgimento de regras e situações não previsíveis pelo sistema didático, solicitando um novo debate em torno do CONTRATO DIDÁTICO estabelecido.

Uma questão interessante em relação a esse fenômeno é que nesse estudo, em meio aos problemas propostos para os estudantes, eram colocados pelos professores pseudoproblemas (incompletos, sem solução) como, por exemplo, a idade do capitão[8], um exemplo bem comum encontrado na literatura e citado por Henry (1991). O problema foi proposto a 97 estudantes de uma escola francesa, correspondentes aos nossos anos iniciais. Desse quantitativo, foi constatado que 76 deles utilizaram os números do enunciado para descobrir a idade do capitão.

Em geral, Baruk (1975) procurou discutir em seu livro, a partir da pesquisa realizada, que o ensino da Matemática faz com que os estudantes se transformem em "autômatos", tendo em vista que eles podem responder de maneira absurda a perguntas absurdas. A partir da análise desse problema, é possível refletirmos que eles podem estar sendo formados para responder às perguntas propostas pelo professor, mesmo que as respostas não tenham sentido algum, distantes de uma compreensão, por isso grande parte das dificuldades na aprendizagem deles pode estar sendo influenciada por regras de CONTRATO DIDÁTICO geradas, em sua maioria, de forma implícita, mas que são absorvidas pelos estudantes.

Essa pesquisa nos mostra que a maneira de o professor ensinar pode transformar os estudantes em verdadeiros seres de reprodução e não de reflexão, pois conseguem encontrar respostas absurdas a perguntas que não têm nenhuma relação com o enunciado (BARUK, 1975). Apesar de não ter como foco de estudo esse fenômeno, a autora salienta em sua pesquisa a quantidade absurda de erros cometidos pelos estudantes e o tratamento dado a eles pelos próprios professores.

---

[8] Em um barco existem 26 carneiros e 10 cabras. Qual é a idade do capitão? Esse problema faz parte de uma experiência de pesquisa que aconteceu em Grenoble, na França, por Baruk (1975), pesquisadora do IREM, que resultou em um livro com título "A idade do capitão".

Além das observações realizadas nessas análises, temos como marco inicial de estudos do conceito de CONTRATO DIDÁTICO (CD), o caso de fracasso na Matemática vivenciado pelo estudante Gael8. Nele, foi constatada a falta de capacidade de o estudante envolver-se no processo de aprendizagem, em que o conhecimento matemático era resultado de uma construção vinda da interação com o meio didático. Em atividades propostas, como simplesmente encontrar o valor de um termo desconhecido de uma sentença, Gael respondia errado como se tivesse quatro anos e sorria despretensiosamente. Essa situação permitiu explorar e entender as restrições de uma situação didática. Assim, concluíram que é necessário permitir que os dois protagonistas (professor e estudantes) se envolvam para completar a dialética didática.

Esse caso foi resolvido a partir de uma mudança, em que foram trabalhadas tanto situações atrativas, quanto mudanças na postura do professor. Tudo isso fez com que o estudante aceitasse entrar no jogo didático e se interessasse pelo que estava fazendo. A partir do momento em que Gael concordou em se envolver com o problema que lhe foi devolvido, ele provocou uma mudança e sua relação com o saber foi modificada ao se comparar com a inicial.

Em outro estudo, realizado em Lyon, com a utilização de professores como fonte de análises, o fenômeno se reproduziu da mesma forma e chama atenção para o seguinte fato: eles também extrapolaram e interpretaram os enunciados para respondê-los. Para o autor, as regras de CONTRATO DIDÁTICO existem efetivamente, e esse conceito apareceu como uma necessidade teórica imposta pelo esforço de compreender os descompassos profundos que ocorrem no processo de ensino e de aprendizagem.

Em geral, podemos considerar essas análises como estudos importantes que fizeram surgir as primeiras ideias sobre o CONTRATO DIDÁTICO, que se distingue de outros tipos por ter em jogo um saber. O que aconteceu está relacionado a um dos objetivos de uma relação didática: a intenção de que o estudante modifique sua relação inicial com o saber.

Diante desse contexto, surgem as observações feitas por Brousseau e Perez (1981) decorrentes desse estudo em que foi constatada a falta de capacidade de o estudante envolver-se no processo de aprendizagem, em que o conhecimento matemático era resultado de uma construção vinda da interação com o meio didático. As análises dos resultados relacionados às primeiras questões desta investigação indicam a existência de uma relação triangular: o professor, o estudante e o saber, que é fruto das situações didáticas e fizeram surgir os elementos iniciais do conceito de CONTRATO DIDÁTICO.

Diante desse contexto, na década de 70, Brousseau inicia uma grande contribuição no desenvolvimento da Educação Matemática como ciência e disciplina, em função de seus estudos com foco na produção, comunicação e apropriação do conhecimento entre os homens e as instituições humanas e os difunde com sua tese de doutoramento, aparecendo os primeiros conceitos da TSD e elementos iniciais do CONTRATO DIDÁTICO (BROUSSEAU, 1986).

De acordo com Nóbrega e Falcão (2019), não há na literatura uma definição única e tacitamente aceita de CONTRATO DIDÁTICO. No entanto, as reformulações feitas pelo próprio Brousseau (2001; 2008) na sua teoria e as diversas contribuições dadas cronologicamente por pesquisadores da área (CHEVALLARD 1986; SCHUBAUER-LEONI, 1988b; BOSCH; GÁSCON, 2001; JONNAERT; BORGHT, 2002; BRITO MENEZES, 2006; D'AMORE, 2007; BRITO MENEZES E CÂMARA DOS SANTOS, 2008; PAIS, 2008, dentre outros), nos fazem compreendê-lo da seguinte forma:

> [...] como um conjunto dinâmico de negociações explícitas e implícitas que acontecem a partir dos pólos subjetivos do triângulo das situações didáticas, que estão inseridos em um sistema de expectativas específicas e recíprocas mediado por um determinado conceito específico a ser desenvolvido em sala de aula. (NÓBREGA E FALCÃO, 2019, p. 1159).

Com apoio nessa definição e em especial nas de Brousseau (2008), entendemos o CONTRATO DIDÁTICO como um conjunto de comportamentos recíprocos esperados entre estudantes e professor, mediados por um saber específico. As práticas e atitudes de professores e estudantes também estão imbuídas de um conjunto de regras, expectativas e normas, dentre outros elementos, a eles condicionantes diante do processo de ensino e aprendizagem.

Isto quer dizer que é indiscutível o reconhecimento de elementos estabelecidos em relação aos sujeitos envolvidos e suas responsabilidades, que se parecem como cláusulas de um contrato pré-estabelecido e aceito por ambas as partes, quando se tem como objetivo construir conhecimentos.

Em geral, o CONTRATO DIDÁTICO é visto como um fenômeno, pois emerge naturalmente no interior da sala de aula, quando um dado saber entra em cena e deve ser ensinado pelo professor. Podemos dizer que ele está intimamente relacionado à tríade estudante-professor- saber em uma relação didática (BROUSSEAU, 1986). O autor o define como os comportamentos do professor que são esperados pelos estudantes, e o conjunto dos comportamentos dos estudantes esperados pelo professor e ainda acrescenta:

> É uma relação que determina – explicitamente por uma pequena parte, mas, sobretudo, implicitamente – aquilo que cada parceiro, o professor e o estudante, tem a responsabilidade de gerir, e então ele se tornará responsável, de uma maneira ou de

> outra, diante do outro. Esse sistema de obrigações recíprocas assemelha- se a um contrato. (BROUSSEAU, 1986, p. 51, tradução *nossa*)[9].

O CONTRATO DIDÁTICO no processo de ensino e aprendizagem é formado por certas regras, em sua maioria implícitas, que apesar de não serem ditas se manifestam regularmente. Quando rompidas, essas regras geram conflitos na relação didática, que nem sempre são necessariamente prejudiciais. Sendo assim, o fato de sua existência em sala de aula tem inspirado muitas investigações, especialmente as que têm por objetivo compreender o processo de ensino e aprendizagem.

Uma dimensão importante do conceito de CONTRATO DIDÁTICO é que ele pode ser compreendido como um instrumento que pode auxiliar a análise das relações entre os elementos da relação didática: professor, estudante e saber. Por isso, consideramos importante estudá-lo como elemento teórico que está relacionado às CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA que subjazem às práticas docentes como fatores de influências na aprendizagem de frações. Em vista disso, Gontijo *at al* (2012, p. 37) destaca:

> No meio escolar, professores e estudantes estão em permanente interação, cuja intencionalidade é, em princípio, a aprendizagem. Essa interação é mediada por um contrato didático (Brosseau, 2008), no qual ficam explícitas ou implícitas as representações sociais dos sujeitos sobre a matemática e o seu processo de ensino e aprendizagem. Essas representações vão determinar as ações dos sujeitos e vão orientar o engajamento destes no trabalho desenvolvido.

As ideias mencionadas nos dão indícios da relação estabelecida entre concepções de ensino, CONTRATO DIDÁTICO e aprendizagem. Além disso, ressaltamos que, independentemente de o professor saber ou não do que se trata um CONTRATO DIDÁTICO, suas regras e convenções estão presentes consciente ou inconscientemente e são absorvidas pelos estudantes, ou até mesmo criadas por eles próprios, e aparecem claramente representadas no desenvolvimento de suas atividades.

Para Henry (1991) existem algumas considerações que podem esclarecer tal fenômeno: em primeiro lugar, a relação professor e estudantes depende de muitas regras e de convenções. Entretanto essas regras nem sempre se relacionam, sistematicamente, com o saber, terceiro elemento da relação didática, como por exemplo, as regras do Contrato Pedagógico.

Em segundo lugar, o CONTRATO DIDÁTICO depende, primeiramente, da estratégia de ensino adotada. As escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho que é solicitado aos estudantes,

---

[9] Une relation qui détermine, explicitement pour une petite partie, mais surtout implicitementce que chaque partenaire, l' enseignant et l' enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera responsable d' une manière ou d'une autre devant l' autre. Ce système d'obligation reciproque ressemble à uncontrat.

os objetivos do ensino, a epistemologia do professor, as condições da avaliação fazem parte dos determinantes essenciais desse fenômeno, que deverá ser adaptado a esses contextos.

Em terceiro lugar, a aquisição do conhecimento por parte dos estudantes é a motivação fundamental do CONTRATO DIDÁTICO e em quarto lugar, o autor destaca que ele se manifesta, sobretudo, quando ele é transgredido por um dos elementos da relação didática. Dessa forma, uma dimensão que merece destaque é que parte das dificuldades dos estudantes pode ser explicada por efeitos de um contrato mal colocado ou incompreendido.

Os estudos desenvolvidos por Almouloud (2007) mostram que a ideia de CONTRATO DIDÁTICO faz com que possamos analisar e interpretar alguns fenômenos. Na maioria das vezes eles não são evidentes, mas mantêm uma estreita relação e podem interferir no processo de ensino e de aprendizagem. Acreditamos que ele possa nos ajudar a entender o fracasso da aprendizagem das frações.

Diante de tudo que foi exposto, sabemos que o maior objetivo do professor é que seus estudantes aprendam. Para tanto, muitas vezes ele procura ajudá-los e termina, por diversas maneiras, dando-lhes explicações de forma excessiva, ensinando algoritmos, utilizando-se de analogias em excesso para explicação de um conceito, às vezes dando ou induzindo até as respostas que tanto querem ouvir. Acreditamos que essa não é uma escolha sua, ele o faz inconscientemente. Nesse contexto, Brousseau (1986) salienta que à medida que o estudante não faz escolhas, não tenta métodos, nem faz modificações de seus próprios conhecimentos ou convicções, não aprende, tem apenas uma ilusão que aprendeu. De acordo com os pressupostos da TSD, é preciso que o estudante se esforce, crie suas próprias estratégias para compreender o que lhe é ensinado.

Na nossa visão, ensinar pressupõe garantir as condições didáticas necessárias para que os estudantes aprendam e o acompanhamento diário e sistemático desse aprendizado torna-se essencial, mas não apenas dos saberes de forma isolada. Concordamos com Margolinas (2009), ao ressaltar que a aprendizagem está intrinsecamente associada à capacidade do estudante de utilizar seus conhecimentos em situações não didáticas, ou seja, elas não foram construídas especialmente para lhe fazer adquirir ou para evoluir um conhecimento. Sendo assim,

> Entre o momento onde o estudante aceita o problema como seu e o momento em que ele produz sua resposta, o professor se recusa a intervir como proponente dos conhecimentos que ele deseja ver aparecer. O estudante sabe bem que o problema foi escolhido para o fazer adquirir um conhecimento novo, mas ele deveria saber também que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que ele pode construir sem fazer apelo às razões didáticas. Não somente ele pode, mas porque deve ter adquirido esse conhecimento verdadeiramente quando for capaz de implementá-lo por si só em situações que encontrará fora de qualquer contexto de

> ensino e na ausência de qualquer indicação intencional. (BROUSSEAU, 1999, p. 59, tradução nossa)[10].

Diante disso, é interessante destacarmos a necessidade de reflexão e mudança de postura do professor em relação ao encaminhamento do processo de ensino, não consistindo mais na transmissão do conhecimento, definição de regras/responsabilidades e comportamentos que cada sujeito deve ter perante o outro nas práticas que possibilitam a apropriação do saber.

Essas responsabilidades/comportamentos, por sua vez, legitimadas por meio de regras quase totalmente implícitas (construídas historicamente e interpretadas no contexto de sala de aula) instituídas no âmbito da relação didática, podem, de certa forma, estar gerando dificuldades aos estudantes na apropriação do saber e vão de encontro a direcionamentos dados ao ensino da Matemática e acreditamos influenciar no CONTRATO DIDÁTICO estabelecido.

De acordo com Brousseau (2000), esse fenômeno pode ser visto como um construto teórico utilizado como referência analítica para abordagem do processo de ensino e de aprendizagem. De maneira geral, em função do CONTRATO DIDÁTICO, é possível entender elementos importantes que estruturam a dinâmica da sala de aula que pode ou facilitar, ou também dificultar a aprendizagem (BROUSSEAU, 2000).

O CONTRATO DIDÁTICO é visto como um dos pilares da TSD à medida que unifica e integra contribuições de outros campos do conhecimento, possibilitando, assim, uma melhor compreensão das possibilidades e aperfeiçoamento do ensino da Matemática. Essa teoria surge no momento em que a visão cognitiva fortemente influenciada pela epistemologia piagetiana dominava o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Um dos seus fundamentos é que cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação. Em relação aos dois primeiros conceitos, no que se refere a psicologia cognitiva, D'Amore (2007) faz distinção entre eles e afirma que:

> Os saberes são dados, conceitos, procedimentos ou métodos que existem no exterior de cada sujeito que conhece e que são geralmente codificados em obras de referência, manuais, enciclopédia, dicionários; os conhecimentos são indissociáveis de um sujeito que conhece; isto é, não existe um conhecimento a-pessoal; uma pessoa que interioriza um saber, tomando consciência, transforma-se esse saber em conhecimento. (D'AMORE, 2007, p. 03).

---

[10] Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en oeuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle.

Diante da distinção, podemos compreender os saberes enquanto uma construção social, produzidos para atender às necessidades de uma determinada sociedade, inter-relacionando valores e cultura dos grupos aos quais estão submetidos. Enquanto o conhecimento está relacionado à transformação do saber em função das experiências individuais construídas pelos sujeitos.

Após compreendermos os diferentes tipos de contratos que influenciaram na definição do Didático, na próxima subseção trataremos de discutir alguns aspectos e características relacionadas a esse fenômeno.

2.4 ELEMENTOS DO CONTRATO DIDÁTICO

2.4.1 Os Essenciais

O conceito de CONTRATO DIDÁTICO surgiu inicialmente em função dos didatas da Matemática. É visto como uma relação que determina de forma explícita para uma pequena parte, porém implicitamente, o que cada parceiro da relação (professor e estudantes) tem a responsabilidade de gerir e pelo que será responsável, seja como for, diante do outro. De acordo com Brousseau (1986), esse sistema se assemelha a um contrato e a parte que nos interessa se relaciona às questões pertinentes ao saber.

De acordo com Jonnaert e Borght (2002), existem nessa definição de CONTRATO DIDÁTICO vários elementos essenciais, entretanto analisaremos três que se relacionam diretamente ao fenômeno estudado, sejam eles: a ideia de compartilhar responsabilidades; levar em conta o implícito; e a relação com o saber.

- Levar em conta o implícito: a manutenção das regras implícitas é fundamental para o processo de ensino e de aprendizagem. Tomar consciência dessas regras propicia conflitos e espaços para trocas entre os parceiros e não é conveniente transformar tudo o que está implícito em explícito;
- A relação com o saber: a característica fundamental de uma relação didática reside na existência de assimetria entre as relações que professor e os estudantes mantêm com os saberes;
- A divisão de responsabilidades: em uma relação didática, se faz necessário o professor ter a disposição de ensinar e o estudante se comprometer em cumprir seu papel no desenvolvimento dessa aprendizagem, manifestando o desejo também de aprender.

Ao analisarmos as ideias explicitadas nessas abordagens (divisão de responsabilidades, consideração do implícito, relações assimétricas com o saber), percebemos o quanto o

CONTRATO DIDÁTICO é paradoxal. Nesse âmbito, Jonnaert e Borght (2002) destacam que nesse elemento reside o interesse desse fenômeno: jogar com os paradoxos da relação didática. Eles vão permitir, tanto ao professor quanto aos estudantes, jogar com as oposições (implícito-explícito; unilateral-negociado; interno-externo; espontâneo-preexistente na aula) com o intuito de deixar, de forma sempre otimizada a relação com o saber de cada um dos parceiros da relação. Diferentemente de um contrato no stricto sensu do termo, o didático tem seu dinamismo atrelado a esses funcionamentos contraditórios da relação didática, justificado pela mudança progressiva da relação que os estudantes estabelecem com o saber.

Diante das ideias expostas, percebemos que esse último conceito é visto como essencial da relação didática e os demais elementos da tríade a ele associados estão ligados por regras e convenções. Para alguns autores, como por exemplo Jonnaert (1994; 2002), sem o saber não há relação didática e nem, como vimos anteriormente, CONTRATO DIDÁTICO. Dessa forma, as relações e rupturas que são estabelecidas tanto pelo professor quanto pelo estudante é que vão dinamizar o funcionamento desse triângulo didático.

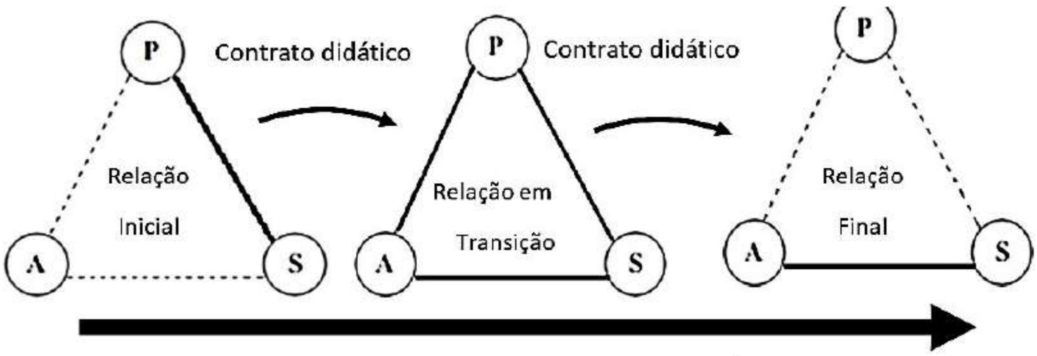
Para além desses aspectos anteriormente discutidos, estudos dos escritos clássicos dos didatas Balacheff (1988); Brousseau (1986, 1988), Chevallard (1983); Margolinas (1993); Schubauer-Leoni (1986, 1988, 1992) que propuseram a base e a problemática do CONTRATO DIDÁTICO, Jonnaert e Borght (2002) fizeram uma reflexão e apontaram algumas características do referido fenômeno. Sejam elas: sua localização na relação didática; ação sobre as mudanças das relações com os saberes; inserção no tempo; influência na zona de desenvolvimento proximal e influência na dinâmica das relações didáticas.

Em se tratando da localização do CONTRATO DIDÁTICO na relação didática, podemos dizer que ele só existe em função do seu contexto. De modo geral, a relação didática é formada por uma série de relações sociais, organizadas pelo referido fenômeno em um quadro socioespacial específico entre os três elementos: professor, estudantes e um determinado objeto de ensino e aprendizagem, ou seja, entendemos que a relação didática vai estar associada às trocas que podem acontecer entre eles.

Diante desse contexto, podemos concluir que nenhum desses três elementos pode ser isolado dos demais, quando analisamos de forma pertinente o funcionamento da relação didática. Uma dimensão importante a ser destacada é que o CONTRATO DIDÁTICO tem a função de gerir essas relações particulares, que deve acontecer de forma a não as cristalizar em regras definitivas, e sim colocá-las em tensão para que sejam realizadas uma série de rupturas, consideradas necessárias, para permitir a cada um dos parceiros, professor e estudantes, modificar permanentemente as suas relações com o saber. "A aprendizagem escolar é sempre tributária dessas rupturas!" (JONNAERT E BORGHT, 2002, p. 166).

Em se tratando da segunda característica, temos a ação do CONTRATO DIDÁTICO sobre as mudanças na relação ao saber. Nela é destacado o episódio de não haver, na relação didática, posições simétricas entre professor e estudantes quando se trata desse último conceito, fato esse que reside em todo seu interesse. A Figura 3 ilustra bem essa ideia de assimetria existente entre os parceiros da relação.

Figura 3 - Assimetria na relação ao saber, negociação e rupturas.



Fonte: Adaptado de Jonnaert e Borght (2002).

Ao analisarmos a Figura 3, percebemos que a relação didática vai se caracterizar justamente em função dessas relações assimétricas no que diz respeito ao saber. Sendo assim, sua função é fazer com que os estudantes modifiquem essa relação. Nessa dimensão complexa e dinâmica que envolve essa modificação, os autores chamam atenção ao fato de que:

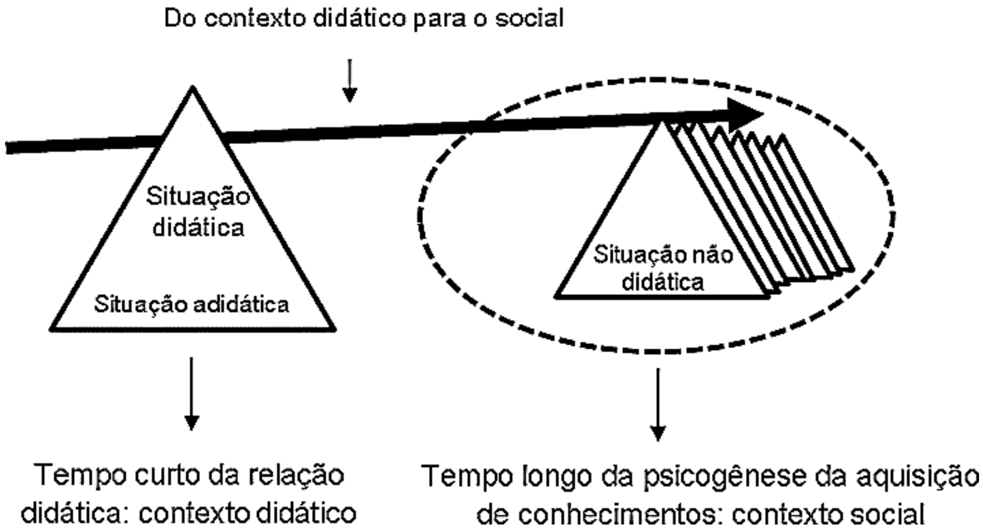
> Se no início da atividade o professor detém as chaves do saber, o aluno, por sua vez, fórmula muitas questões a propósito desse saber. Contudo, ao final da aprendizagem, o aluno deve ter modificado essa relação como saber, sem o que não terá aprendido. o contrato didático tem, como principal função, otimizar essas mudanças de relações com o saber. Mais do que isso, são essas relações com o saber que permitem diferenciar o contrato didático de qualquer outro envolvimento no qual a relação com o saber não é um objetivo. O jogo de relações estabelecidas entre professor e o aluno em torno de um saber determina as rupturas e as sucessivas mudanças de papéis na relação didática (JONNAERT E BORGHT, 2002, p. 167).

Diante das ideias expostas, percebemos que existe uma assimetria, já que o professor possui um saber que os estudantes ainda não se apropriaram. É na relação didática que vai haver essa modificação, uma vez que, numa situação de ensino e aprendizagem na sala de aula, quando um novo objeto de ensino é introduzido, a relação deles com o saber é ainda inadequada. Para tanto, é preciso que o professor organize situações e as negocie com seus estudantes, com o objetivo de fazer essa aproximação.

Em se tratando da terceira característica, temos a inserção do CONTRATO DIDÁTICO no tempo. Nela destacamos que a relação didática vive uma dupla dimensão temporal: uma escala temporal curta e outra longa. A primeira surge quando os estudantes têm apenas uma relação fraca com o saber. Ela diz respeito à evolução das práticas e concepções dos estudantes em função da confrontação com uma nova situação. Em geral ela corresponde ao tempo da relação didática e é gerada pelo CONTRATO DIDÁTICO (JONNAERT E BORGHT, 2002).

A segunda dimensão temporal, a longa, está relacionada à psicogênese do conhecimento. Estende-se por anos e vai além da relação didática, é o tempo do desenvolvimento dos conhecimentos no indivíduo. A Figura 4 nos ajuda a compreender melhor a escala temporal discutida por essa característica do CONTRATO DIDÁTICO.

Figura 4 - Escala da dimensão temporal da relação didática.



Fonte: Jonnaert e Borght (2002, p.168).

As escalas temporais não podem ser vistas no sentido de oposição e sim de continuidade. Por ter esse intuito de complementaridade, constatamos a necessidade de haver um equilíbrio na gestão por parte do professor desses tempos para não haver prejuízos à aprendizagem dos estudantes.

Em se tratando da quarta característica, temos a influência do CONTRATO DIDÁTICO na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Antes de discutirmos essa característica, consideramos importante entendermos esse último conceito. Ele é definido pela distância entre o nível de desenvolvimento real, que se tem por meio da solução independente de problemas e o de desenvolvimento potencial, determinado pela solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VYGOTSKY, 2007).

Podemos dizer que a ZDP é a distância do que os estudantes podem realizar sozinhos e o que eles só conseguem com ajuda do outro. Essa definição é muito importante, pois faz com que o professor tenha condições de conhecer o que os estudantes já sabem, assim como aquilo o que eles precisam aprender, e de que forma podem se organizar para conseguir ampliar os conhecimentos por eles já adquiridos.

A partir desse conceito, segundo Jonnaert e Borght (2002), a relação didática encontra sua verdadeira dimensão e função, não tendo condições de se justificar por si e para si mesma, apenas pelo fato de haver "matérias escolares" a ensinar e professores que as ensinam. De modo geral, a ZDP pode ser entendida, essencialmente, a partir das relações que os indivíduos têm com um determinado saber em vias de construção. Cabe ao professor ajudá-los nessa trajetória, que deverá ser dinâmica de construção de conhecimentos. Nesse processo dialético, em função da tríade professor-estudantes-saber e da ZDP, o CONTRATO DIDÁTICO é estabelecido:

> Por uma série de regras do jogo estabelecidas pelo CONTRATO DIDÁTICO que o aluno faz a trajetória da dependência em face do professor até sua autonomia em relação ao saber. É o contrato didático que gera essa trajetória jogando com base em regras estabelecidas entre professores e alunos. O aluno concretiza essa passagem da dependência à autonomia por meio de situações que ele encontra na relação didática (JONNAERT E BORGHT, 2002, p. 171).

Essa citação nos faz refletir que as regras estabelecidas pelo CONTRATO DIDÁTICO têm uma função primordial no processo de ensino e de aprendizagem, já que elas são responsáveis pela trajetória construída pelos estudantes, pois podem levá-los a uma autonomia ou não, em relação a um determinado saber. Em se tratando da influência desse fenômeno sobre a dinâmica das situações didáticas, evidencia-se a necessidade de que ela não pode ficar restrita a situação didática *stricto sensu*[11].

Para Jonnaert e Borght (2002) essa evolução temporal da relação didática (passando da curta para a longa), pode ser encontrada nos três níveis de situações conceitualizados em função da TSD. Sendo assim, inicialmente parte-se da situação didática, o estudante, o professor e o saber, evolui para situação adidática, até chegar finalmente nas não didáticas. Para entendermos melhor essa evolução, discutiremos esses três tipos de situações:

A primeira, didática, se define a partir do momento em que um dos sujeitos demonstra a intenção de modificar o sistema de conhecimento do outro, ou seja, há uma intencionalidade didática. Brousseau (2008) destaca que ela tem como objetivo fazer a descrição dos modelos que delineiam as atividades do professor e do estudante. Além disso, Pais (2008) destaca ser preciso escolher um problema que deve estar compatível com o nível intelectual dos estudantes. Com o objetivo de se ampliar as possibilidades de sucesso dessa escolha, se faz necessário que o professor tenha clareza em relação aos procedimentos esperados pelos estudantes, já que cada tipo tem a intenção de explorar aspectos específicos do saber matemático.

---

[11] Essa relação que ocorre entre um professor, alunos e saber, em um momento dado e em um espaço dado (JONNAERT E BORGH, 2002).

Outrossim, Silva (2008), ao tomar como base os estudos de Brousseau, chama atenção ao fato de que, ao se planejarem as situações didáticas é preciso ter momentos em que os estudantes se encontrem sozinhos diante do problema a resolver, sem a intervenção do professor.

Esse momento é considerado como adidático, ou seja, os estudantes devem se relacionar com um problema utilizando apenas seus próprios conhecimentos, sentindo-se desafiados por ele e não com algum algoritmo pronto e fornecido pelo professor. Este, por sua vez, não deve intervir diretamente nas opções de solução. De modo geral, as situações a-didáticas constituem o momento de grande potencialidade, justamente por possibilitar o rompimento das condenáveis práticas da repetição e do modelo.

Na segunda situação, adidática, há uma intencionalidade pedagógica e, de acordo com Brousseau (1986), é definida a partir do momento em que o professor elabora uma situação e, em função dela, o estudante se torna capaz de colocar em funcionamento e utilizar, por ele mesmo, o conhecimento que está construindo na ausência de qualquer professor, ou seja, ele não apresenta diretamente o saber, dá condições para que seja construído pelo estudante.

Nesse tipo de situação, tem-se a busca por soluções de forma autônoma pelos estudantes. Cabe ao professor (na maioria das vezes), criar a situação que permita a eles estarem em contato direto com o saber e ter o controle sobre o que estão fazendo, para saber o momento certo da institucionalização. De maneira geral, ele elabora a situação (análoga a uma situação fundamental), faz a devolução da responsabilidade pela aprendizagem para o estudante e este entra em contato direto com o saber em questão e o professor só retorna no momento de fazer a institucionalização.

Segundo Pais (2008), considerar as situações adidáticas é ultrapassar a velha ideia de professor como transmissor do conhecimento. Além disso, sua verdadeira potencialidade consiste na tentativa de romper com as velhas práticas de repetição e modelo, que tanto são utilizadas pelas abordagens das pedagogias tradicionais.

As situações não didáticas têm como pressuposto a existência de determinados aspectos do fenômeno da aprendizagem, nos quais não há uma intencionalidade pedagógica direta ou um controle didático por parte do professor. Para Jonnaert e Borght (2002), ela acontece quando os estudantes são capazes de utilizar o que adquiriram para tratar à parte qualquer intenção de ensino por parte do professor.

Contudo, há uma consciência, por parte deles, de que os conhecimentos que usa para tratar a situação são pertinentes e, acima de tudo, os esperados pelo professor. Em geral, há o reconhecimento de uma situação na qual podem usar suas aprendizagens não obstante a falta de indicações do professor, mas vale salientar que essas aprendizagens utilizadas são resultado das disciplinas ensinadas.

Jonnaert e Borght (2002) mostram que o esquema linear (partindo das situações didáticas em direção às não didáticas) é simplista: com certeza não é suficiente para explicar ou compreender a construção de um conhecimento. Entretanto, pode mostrar um possível caminho para isso.

Em geral, as discussões trazidas em relação à caracterização do CONTRATO DIDÁTICO nos mostraram o processo dinâmico de uma relação didática, que precisa extrapolar o tempo curto da construção do conhecimento em busca de uma perspectiva longa, ou seja, da situação não didática. Para os autores, trabalhar nessa perspectiva de escala temporal curta para a longa, de situações didáticas a não didáticas é possível em função da intermediação do CONTRATO DIDÁTICO.

Além de discutirmos os elementos essenciais do CD e as situações da relação didática, consideramos importante entender de forma mais aprofundada os elementos constitutivos desse fenômeno. Acreditamos que alguns deles, como por exemplo, as regras e efeitos estabelecidos, podem estar interferindo na aprendizagem do saber fração. Por isso, na próxima subseção, iremos discuti-los.

2.4.2 Os Constitutivos

Na relação didática, alguns comportamentos, tanto do professor quanto dos estudantes, surgem na mediação de um determinado saber. Eles estão repletos de normas e procedimentos, na maioria, não explicitados, que acreditamos interferir nos Contratos Didáticos estabelecidos pelo professor e, consequentemente, na aprendizagem de um determinado saber. Nós os definimos como elementos constitutivos do CONTRATO DIDÁTICO e os utilizamos a partir das definições de Almeida (2016), apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 - Elementos constitutivos do contrato didático.

ELEMENTOS	DESCRIÇÃO
Expectativa	O que o professor espera do aluno e o aluno espera do professor, em relação ao trabalho na sala de aula (relativo ao saber específico que está em cena).
Negociação	É a convenção de uma ou mais pessoas, que implica na aceitação de certos papéis e obrigações a cumprir por cada uma das partes envolvidas, acordo entre parceiros. Diz respeito, também, a como o professor negocia o saber com os alunos em uma situação didática. Particularmente, em nosso estudo, como ele negocia o conteúdo frações.
Ruptura	A ruptura do CONTRATO DIDÁTICO pode ser percebida, por exemplo, quando os alunos não atuam da forma esperada pelo professor – frente ao saber – ou quando o professor não atua da forma esperada pelos alunos. De forma que pode existir uma reclamação por algumas das partes.
Renegociação	Quando há alguma ruptura no CONTRATO DIDÁTICO e, em seguida, uma nova regra (explícita ou implícita) é negociada. Quando, embora não havendo claramente uma ruptura, é estabelecido um redirecionamento do jogo didático.
Regras Explícitas e Implícitas	As regras explícitas são claras, expressas em ambiguidade pelas partes em questão; encontramos no momento em que o saber encontra-se em jogo pelo professor ou o aluno. As regras implícitas são aquelas que não são explicitamente formuladas por um dos parceiros (quase sempre, o professor), mas que são construídas de forma mais subliminar e, embora implícitas, são fundamentais para a condução da relação didática e para fazer valer o CONTRATO DIDÁTICO negociado.

Fonte: Adaptado pelos autores em função de Almeida (2016).

Em relação aos elementos constitutivos, é interessante acrescentarmos algumas considerações. Sobre a negociação, podemos dizer que, na maior parte das vezes, ela passa despercebida. Para Brousseau (1986, 1996), ela se relaciona também à forma como o professor gerencia o saber com os estudantes em uma determinada situação didática, e a sala de aula é o lugar onde deve ocorrer. Ainda destaca que pode ser vista como um "palco de negociações de significados" e o professor, nesse palco, tem o papel de organizar a cena em função das situações didáticas.

Sobre as rupturas, destacamos que a aprendizagem não repousa sobre o bom funcionamento do CONTRATO DIDÁTICO, mas sobre suas rupturas. Elas têm lugar quando uma das partes a viola, isto é, quando a regra do jogo não é mais respeitada. (BROUSSEAU, 1998). A partir dessas rupturas, há uma renegociação da regra quebrada.

Dessa forma, a ruptura e a renegociação do contrato são fundamentais e podem provocar um avanço no processo de aprendizagem. Em se tratando do nosso objeto matemático de estudo, por exemplo, a cláusula estabelecida por muitos professores de que fração é menor que o todo deverá levar a uma quebra de contrato, a ser renegociada para o caso das frações maiores que a unidade. Se não houver essa ruptura, a aprendizagem não avança, chegando-se ao fracasso na aprendizagem.

Sobre as regras, o autor destaca que o essencial não é tentar explicitar a totalidade que constituem o CONTRATO DIDÁTICO, mas sim delinear alguns de seus pontos de ruptura ou de transgressão. Reverberando essa ideia, Silva (2008) afirma que é justamente quando um dos parceiros da relação didática quebra o contrato que as regras se manifestam. Elas delineiam as relações entre o corpo discente e docente, mediante o saber proposto em sala.

Ainda em relação às regras de CONTRATO DIDÁTICO, é preciso estar atento para dois critérios: as explícitas e as implícitas. Especificamente no ensino de Matemática, Henry (1991) enuncia algumas do segundo tipo, presentes no ensino elementar:

Em matemática, um problema se resolve fazendo operações. A tarefa consiste em encontrar a "boa" operação e realizá-la sem erro. Pelo uso de algumas palavras, o enunciado permite adivinhar a operação a ser feita;

> As questões colocadas não têm, em geral, nada a ver com a realidade quotidiana, mesmo se elas dão essa impressão, por meio de arrumação astuciosa. De fato, elas servem somente para verificar se os alunos compreenderam o assunto; para resolver um problema, é necessário encontrar os dados no enunciado. Todos os dados necessários devem estar no enunciado, que não deve conter dados supérfluos; os números são simples e as soluções também devem ser, senão é bem provável que se esteja enganado. De qualquer forma, existe sempre uma resposta a uma questão de matemática, e o professor a conhece. Deve-se então, sempre dar uma resposta, que será eventualmente corrigida. (HENRY, 1991, p. 4).

Mesmo após alguns anos de estudos sobre o CONTRATO DIDÁTICO, Almouloud (2007) destaca algumas das regras mostradas anteriormente que ainda estão em vigor no EF.

> É normal o professor oferecer sempre problemas em que os números necessários para a solução se encontram no enunciado. Ao ter contato com problemas que não têm solução, os números não estão todos presentes no enunciado para solução, têm mais de uma, têm excesso de dados para resolução ou não são resolvidas com operações numéricas, os estudantes resolvem-nas a partir de regras de contrato didático internalizadas, do tipo "Para resolver um problema em matemática, basta pegar os números do enunciado e descobrir a boa operação a ser feita. (ALMOULOUD, 2007, p. 91).

Uma dimensão importante em relação às regras ressaltadas por Henry (1991) é que sua aplicação, perfeitamente integradas pelos estudantes, os levará a comportamentos do tipo a idade do capitão, em salas de todos os níveis de ensino. Ainda destaca que, muitos mal-entendidos, sentimentos de serem ridicularizados, têm por origem o CD mal adaptado ou incompreendido. Tais situações podem desencadear em dificuldades escolares e, em casos extremos, fracasso escolar.

Essa afirmação do autor corrobora com nossa hipótese de que o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido pode nos ajudar a entender melhor as dificuldades dos estudantes dos anos iniciais do EF para lidar adequadamente com frações, uma vez que estão relacionados às características predominantes das concepções de ensino subjacentes às práticas docentes, que podem estar influenciando a aprendizagem desse saber escolar.

Para Jonnaert (1994), o CONTRATO DIDÁTICO estabelece diferentes tipos de regras, inclusive as anteriormente apresentadas. Cada um dos participantes, em especial o professor, as utiliza em diferentes momentos da relação didática para fazer progredir o estudante na sua relação com o saber. Nesse contexto, diante de algumas situações, quando os estudantes têm um problema a resolver, procuram lembrar de regras comumente trabalhadas pelo professor ou, muitas vezes, por procedimentos automatizados.

O fenômeno aqui estudado está associado intrinsecamente às dificuldades apresentadas, tanto pelo professor quanto pelo estudante diante do processo de ensino e aprendizagem. Os estudos de CONTRATO DIDÁTICO, por exemplo, tiveram sua origem com a análise do fracasso eletivo em Matemática do estudante Gael (BROUSSEAU, 2008). Para o autor, existe um interesse em pesquisar dentre outras causas, elementos responsáveis em levar os estudantes a esse fracasso, não apenas aquelas associadas às suas aptidões ou demais características, mas também a relação deles com o saber e com as situações didáticas.

Assim sendo, é interessante ressaltar que, diante de dificuldades apresentadas pelos estudantes na construção de um determinado conhecimento, muitas vezes o professor, com a intenção de querer ajudá-lo nesse processo, pode ser levado a cometer os efeitos do

CONTRATO DIDÁTICO. Por isso, achamos pertinente trazê-los para nossa discussão a seguir, visto que já temos um amplo estudo na literatura e um dos nossos objetivos é identificá-los na prática docente quando ensinado o conteúdo frações.

2.5 EFEITOS DO CONTRATO DIDÁTICO

Em uma relação didática em que estão envolvidos elementos humanos (professor e estudante) e não humanos (saber), a subjetividade é um aspecto que permeia essa relação, em que efeitos de CONTRATO DIDÁTICO podem surgir. Eles são vistos como práticas correntes realizadas, quase que inevitáveis ao funcionamento da classe, mas que podem também, de alguma forma, interferir, prejudicar, confundir o estudante no processo de aprendizagem. Sendo assim,

> Uma vez que o CONTRATO DIDÁTICO envolve elementos humanos (professor e aluno) e que esses elementos trazem consigo toda sua subjetividade, bem como envolve também experiências vividas em outros contratos, entendemos que há certos efeitos que podem ser produzidos a partir do estabelecimento do contrato didático. Esses efeitos culminam por criar situações que podem dificultar o processo de ensino-aprendizagem, e são aspectos de extrema relevância a serem observados, quando do estudo desse fenômeno didático (BRITO MENEZES, 2006, p. 60).

Os estudos de Brousseau (1996, 1998, 2008); Henry (1995) e Pais (2008) abordam aspectos da Didática da Matemática e trazem à tona o debate sobre efeitos do CONTRATO DIDÁTICO. Os principais são: Topaze, Jourdain, Uso Abusivo de Analogia, Deslize Metacognitivo e Expectativa mal compreendida.

No primeiro, Brousseau (1998), faz uma relação dele com o romance Topázio, de Marcel Pagnol. O professor, ao fazer um ditado com um estudante com dificuldades, tenta ajudá-lo para que ele não cometa erros grosseiros e possa acertar a escrita das palavras. De forma gentil, sugere respostas. O estudante compreende as dicas dadas pelo professor e acerta a grafia das palavras, sem ter, entretanto, a devida compreensão do que está fazendo, pois só acerta por causa da ajuda recebida.

Na aula de Matemática, esse efeito se dá a partir de uma situação em que o problema é proposto e, no momento em que o professor percebe a dificuldade do estudante, tenta acelerar a aprendizagem, dando-lhe dicas e, muitas vezes, antecipando o resultado esperado. Todavia, ao tentar facilitar, dando pistas, sinais, para que a turma chegue à resposta certa, muitas vezes até selecionando problemas os quais sabe que eles terão a capacidade de responder, justamente da forma que o professor imaginou, esse professor está atrapalhando a aprendizagem desses estudantes.

O segundo efeito pode ser entendido como uma variação do Topázio. Brousseau (1998) o compara com uma cena do romance (*Burgeois Gentilhomme*) em que há um envolvimento do estudante com seu professor de filosofia. Ele, ao imaginar um possível fracasso do ensino e do insucesso na aprendizagem de seus estudantes, começa a dar a conhecimentos do dia a dia por eles trazidos, o status de científico.

São dadas atribuições de um valor científico a situações cotidianas em relação a uma determinada atividade ou um dado científico usual. Esse efeito está associado a uma valorização indevida por parte do professor do conhecimento prévio, explicitado pelo estudante. A situação faz com que ele reconheça uma resposta ingênua como a expressão de um conhecimento científico, ou seja, comportamentos banais são interpretados como grandes conhecimentos, por parte do professor.

Em geral, são utilizadas, de forma exagerada, analogias e metáforas, para ajudar a compreensão do conteúdo proposto. Brito Menezes (2006) o exemplifica dizendo que seria, de forma "grosseira", equivalente ao professor de Matemática dizer ao estudante que se ele faz as combinações das peças de roupa para produzir diferentes formas de vestir, consequentemente saberá o que é análise combinatória.

O terceiro efeito, uso abusivo de analogia, é considerado uma prática natural, pois quando os estudantes têm dificuldade na aprendizagem de um determinado conceito, há uma tendência do professor em fazer comparações e analogias com algum conhecimento prévio que eles têm. Embora a analogia se configure como uma boa estratégia de ensino, quando utilizada de forma inadequada, ou sua utilização seja feita de forma excessiva, seu uso pode levar o estudante a uma visão limitada ou errônea do conteúdo estudado.

Em relação a esse efeito, Brousseau (2008) destaca que, diante do fracasso de alguns estudantes no processo de aprendizagem, se faz necessário que eles recebam uma nova chance no mesmo assunto. Mesmo que o professor dissimule que a nova atividade tenha alguma semelhança com as outras anteriormente trabalhadas, será normal que os estudantes as resolvam de acordo com a solução que já lhes foi dada, sem se preocuparem com a adequação da pergunta com a resposta.

A tendência será simplesmente procurar indícios, talvez exógenos e não controlados, de que o professor queria que eles a produzissem. Essas atitudes vão de encontro com os novos direcionamentos em relação à importância de o estudante ser protagonista, autônomo de sua aprendizagem e o autor mostra que:

> A obtenção da solução acontece por leituras das orientações didáticas e não devido ao compromisso dos estudantes com o problema. Tem interesse em fazer essa leitura porque depois de vários fracassos em problemas semelhantes - porém, não justificados, não reconhecidos -, o professor se apoiará nessas analogias, renovadas regularmente, para expor o aluno ao ridículo por sua cansável resistência. (BROUSSEAU, 2008, p. 86).

No quarto, deslize metacognitivo, o professor, diante das dificuldades dos estudantes ou até mesmo de ordem didática, substitui o discurso científico pelo fundamentado no senso comum. Há por vezes a utilização de uma técnica inútil para resolver um problema como objeto de estudo, perdendo-se de vista o verdadeiro conhecimento que precisa ser desenvolvido. Para Brousseau (2008), esse efeito é explicado quando o professor, em uma situação de ensino, não obtém resultado satisfatório e o estudante apresenta dificuldades em resolvê-la. Com a intenção de dar continuidade a seu trabalho e percebendo um certo esgotamento de seus argumentos didáticos, recorre a explicações baseadas em suas próprias concepções.

Dessa forma, ele faz com que o objeto de estudo deixe de ter um cunho científico para ter base originada no saber cotidiano do professor. Como o estudante não tem a percepção para distinguir essa mudança do que é científico e o que pertence ao senso comum pedagógico, pode confundir-se entre o saber escolar e o seu mundo imediato. Alguns autores ilustram esse efeito da seguinte forma:

> Quando os alunos já resolveram um problema similar, eles devem utilizar-se do repertório de heurísticas e estratégias adquirido anteriormente para esse fim. Neste caso podemos identificar a resolução de problemas como independente dos conceitos matemáticos ensinados e não como uma via para trazer novos conhecimentos. Ainda de acordo com Brousseau (2008), essa prática pode incidir em um dos efeitos do contrato didático, denominado "deslize metacognitivo". (OLIVEIRA E MASTROIANNI, 2015, p. 16).

Somando-se a esses efeitos, Henry (1995) apresenta um outro tipo, denominado efeito de expectativa mal compreendida. É entendido como aquele em que o professor acredita que a resposta do estudante será a que ele deseja. Para melhor entendê-lo, traremos um exemplo, com uma pequena nota de humor do passado escolar de Gilbert Arsac (IREM de Lyon) apresentado pelo autor: "na idade média, as pessoas das cidades grandes criavam...?" Resposta dos estudantes: porcos, vacas, crianças... Resposta esperada: "Catedrais". Ademais, em relação aos efeitos de CD é interessante destacarmos o pigmaleão. Embora apareça na literatura clássica, não o consideramos como tal e sim o analisamos como próprio fenômeno de expectativa, subjacente à natureza do contrato diferencial, ou seja, é inerente à relação contratual. Brousseau (2008) ainda destaca que ele não deve ser visto como um efeito perverso do CONTRATO DIDÁTICO.

Apesar de parecer engraçado, é preciso refletirmos sobre até que ponto esses efeitos de CONTRATO DIDÁTICO podem ser considerados empecilhos no processo de aprendizagem, especialmente quando não se oportuniza ao estudante alguns elementos importantes para esse processo, tais como: desenvolvimento de um raciocínio lógico, a construção de ideias, a metacognição, a análise crítica de fatos, entre outros.

Esses elementos atualmente estão sendo trocados por dicas que são dadas para que os estudantes cheguem à resposta desejada. Muitas vezes são realizadas pelos professores comparações com os conceitos ensinados, sem muita justificativa científica para ajudar na compreensão deles. De modo geral, estão sendo aceitas respostas banais vinda dos estudantes em detrimento das que tenham argumentos lógicos e coerentes. Diante desse fato, o que se tem observado há algum tempo e que as análises dos resultados de pesquisas atuais vêm corroborando é:

> Que medidas as proezas pedagógicas solicitadas quotidianamente aos professores não os conduzem a cometer, de quando em quando, esse tipo de questões, que somente eles são capazes de dar a resposta, que em suas cabeças, se sobrepõe sobre todas as outras respostas possíveis? Em casos extremos, verdadeiras muralhas são levantadas contra toda iniciativa ou questão dos estudantes. (HENRY,1995, p. 10).

É possível perceber como os efeitos de CONTRATO DIDÁTICO podem ser considerados maléficos e precisam ser observados. Na tentativa de facilitar as coisas para que os estudantes aprendam, o professor começa a dar dicas ou até mesmo mudar o status do conhecimento científico. Outrossim, acreditamos que o estudo articulado do CONTRATO DIDÁTICO com as concepções de ensino que permeiam as práticas docentes pode contribuir para o entendimento de aspectos do fracasso escolar em relação ao ensino de frações. Para tanto, na próxima subseção, faremos uma discussão sobre uma modelização de CONTRATO DIDÁTICO, para ser possível analisarmos o estabelecimento de relação entre esses elementos, objetivo principal do nosso estudo.

Por considerarmos que o estudo aprofundado do CD pode nos ajudar a entendê-lo, juntamente com as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, como fatores de influência no desempenho dos estudantes dos anos iniciais do EF para lidar adequadamente com frações, no próximo capítulo discutiremos sobre esse segundo elemento teórico.

3. AS CONCEPÇÕES DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

Como parte da fundamentação teórica do trabalho, serão explicitadas, nesse capítulo, algumas considerações sobre as concepções, divididas em ...subseções. Na primeira, temos a discussão desse conceito e outros, a ele associados, estabelecendo, previamente, um significado para o termo, que se compatibilize ao estudo proposto. Na segunda, abordaremos seu uso a partir de uma contextualização em Educação Matemática em função de estudos desenvolvidos. E, na terceira, uma discussão sobre algumas teorias encontradas na literatura de referência com foco nas CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA e modelos de aprendizagens, para ser possível atribuirmos tipos de Contratos Didáticos específicos, em função da aproximação de ideias explicitadas entre esses dois construtos teóricos.

3.1 AS CONCEPÇÕES, CRENÇAS E CONHECIMENTOS: SIMILARIDADES, DIFERENÇAS E IMPLICAÇÕES PARA A PESQUISA

Nos dias de hoje, é indiscutível o quão é importante o debate sobre “concepções”, visto que nas análises de resultados de pesquisas realizadas, seu conceito tem sido usado em função de diversos termos com o mesmo significado, tais como, crenças, raciocínios espontâneos, conhecimentos. Além disso, ao procurarmos o termo concepção no dicionário, percebemos que existem distintas definições relacionadas a diferentes áreas, dentre as quais podemos citar: Psicologia, Ciências Políticas, Antropologia, Educação, Matemática e, ainda, senso comum. Esse fato nos leva a pensar sobre a complexidade e importância desse conceito.

Diante do exposto, Andrews e Hatch (2000) destacam[12]que a literatura sobre concepções não é clara porque muitos pesquisadores oferecem diferentes perspectivas sobre elas, em função de ter aspectos cognitivos e/ou dimensões afetivas, o que dificulta a identificação do sentido em que o termo é empregado. Dessa forma, consideramos a necessidade de uma constante vigilância epistemológica sobre o significado desse termo, assim como a de outros a ele relacionados, por exemplo, crenças e conhecimento, uma vez que suas ideias se aproximam.

Diante desse contexto, consideramos a importância de não deixarmos de discutir as questões que envolvem definições de crenças e também de conhecimentos, pois

[12] Andrews e Hatch (2000) suggest that the literature on conceptions is not clear because different researchers offer different perspectives on conceptions in terms of having cognitive and/or affective dimensions.

compreendemos que esses conceitos têm uma relação de proximidade com concepções. Ponte (1992) relembra que não é possível falar sobre o termo "concepções" sem analisar o que são crenças e conhecimento, e ressalta que, em todo conhecimento, intervêm necessariamente as crenças.

O referido autor chama a atenção para o fato de que, em relação ao conhecimento, o que se sobressai é a argumentação racional e a busca pela verdade. As crenças podem ser vistas como parte do conhecimento relativamente pouco elaborado, em que se sobressai a falta de confrontação com a realidade empírica. Em geral, elas são indispensáveis, pois o ser humano ficaria paralisado, sem ser capaz de determinar cursos de ação. Nessa perspectiva, as crenças são frequentemente mantidas e justificadas sem critérios que requerem provas e constituem apenas uma forma primitiva de saber. Já no que diz respeito às concepções, segundo Ponte (1992), elas são definidas como o pano de fundo organizador dos conceitos e inclui as crenças, opiniões, conceitos, significados, regras, imagens mentais e as preferências dos professores.

Ao procurar estabelecer uma relação entre os conceitos abordados, o autor ressalta que o sujeito, na elaboração de forma concisa do conhecimento, parte das suas crenças (suas verdades pessoais provenientes da experiência) para, em seguida, formar sua concepção (em que são consideradas crenças mais conscientes e elaboradas) até, finalmente, chegar à elaboração do conhecimento, que deve estar intrinsecamente respaldado em fatos objetivos, ser julgado e validado por meio de provas e teorias.

Por considerarmos a relevância do termo concepções na pesquisa desenvolvida, destacamos outras definições para que possamos melhor compreendê-lo e tomarmos uma posição de qual iremos adotar. Sejam elas: "conjuntos de conhecimentos e de saberes frequentemente solicitados juntos para resolver situações empiricamente como modelos de respostas coerentes, dada por uma parte importante dos sujeitos sobre uma classe de situação" (BROUSSEAU, 1997, p, 18) ou, como "[...] rede complexa de ideias, conceitos, representações e, inclusive, preconceitos – em seu sentido valorativo" (PERDIGÃO, 2002). Para Lima e Seabra (2016, p. 83), as concepções podem ser concebidas como a forma em que o sujeito percebe, avalia e age em função de um determinado fenômeno. Em um sentido mais específico, dentro do que buscamos aqui evidenciar, as concepções envolveriam um processo de formação de conceitos.

Em nosso trabalho, consideramos igualmente importante não perder de vista as relações mencionadas entre os diferentes construtos analisados. Por isso, os definimos/distinguimos conceitualmente e trouxemos outras definições associadas ao termo "concepções". Acreditamos que as ideias de Ponte (1992) são das mais complexas, porque incluem um quadro das outras já explicitadas e que constituem uma rede de representações dos docentes. Para além disso, o autor parte da hipótese que tanto os professores, quanto outros profissionais, têm uma base conceitual que vai determinar o curso de suas ações.

Concordamos com Ponte (1992) ao destacar a importância de levarmos em conta alguns elementos acerca das concepções: são de natureza essencialmente cognitiva; funcionam como um filtro, indispensáveis para estruturar o sentido que damos às coisas e, sendo assim, podem ser bloqueadoras de novas realidades ou de certos problemas, limitando. Dessa forma, as possibilidades de atuação e compreensão; sua formação está atrelada a elementos individuais e sociais; ao serem mobilizadas pelos professores, relacionam-se às condições concretas de seu exercício profissional.

Como explicitado inicialmente, o termo concepção é utilizado em função de diversas áreas. Conforme observam Cavalcanti e Câmara dos Santos (2010), as pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática, ao contrário do que se espera, usam o vocábulo "concepções" de maneira muito diversa. Com efeito, o termo é polissêmico (FERREIRA 1988, NACARATO, ANDREWS &HATCH 2000, MENGALI E PASSOS, 2009, CAVALCANTI, 2010, MATOS E JARDILINO 2016, dentre outros), implicando em um amplo leque de significados. Sem a indicação clara de um sentido possível a ser utilizado no texto, no entanto, não há como manter a coesão e o rigor de um trabalho científico.

Desse modo, temos o estudo de Barros e Rocha (2016). A partir de suas análises, puderam verificar que poucos autores definem o termo "concepções" ou assumem um conceito para elas. Assim como observaram também que o termo "concepções" é empregado por muitos como sinônimo de crenças, não existindo um consenso sobre a diferenciação entre os termos. Diante disso, consideramos a necessidade de uma constante vigilância epistemológica sobre o significado desses conceitos quando o objetivo é a construção de uma pesquisa sóbria e o mais precisa possível no campo da Educação Matemática.

Sendo assim, essa falta de rigor técnico no uso do termo 'concepções', bem como a falta de indicação explícita do sentido e da definição com que está sendo usado na pesquisa, são quase uma constante nas pesquisas em Educação Matemática. Dessa maneira, Batanero, Godino e Font (2008, p.8) explicam que:

> Um dos principais problemas "meta-didáticos" que devemos abordar relaciona-se à precisão das noções teóricas que vêm sendo utilizadas nesta área de conhecimento, em particular as noções usadas para analisar os fenômenos cognitivos. Não existe um consenso sobre esse tema. Basta observar a variedade de noções que se utilizam sem prévia comparação, precisão e depuração: conhecimentos, saberes, competências, concepções, conceitos, representações internas, conceito-imagem, esquemas, invariantes operatórios, significados, praxeologias, etc.

As ideias explicitadas pelos autores enfatizam a forma como o termo 'concepções' vem sendo utilizado sem muita definição, associado a outros que estabelecem uma certa proximidade. Como consequência, não é raro que o mesmo venha sendo tomado a partir de uma noção do senso comum, conforme destaca Cavalcanti:

> Em alguns casos, é acompanhado de uma definição teórica que esclarece seu significado na pesquisa em que está inserido. Por outro lado, também é possível encontrar várias pesquisas nas quais esse termo é utilizado como uma noção do senso comum, isto é, sem necessariamente ser definido (2010, p.2).

Por considerarmos que a ausência de uma definição pode comprometer toda a construção teórica de um texto e, apesar de perceber aspectos importantes trazidos por Ponte (1992) e concordar com eles, como nossa pesquisa se fundamenta nos pressupostos da TSD, consideramos a utilização desse termo do ponto de vista teórico, como "conjunto de conhecimentos e de saberes frequentemente solicitados juntos para resolver situações empiricamente como modelos de respostas coerentes, dada por uma parte importante dos sujeitos sobre uma classe de situação" (BROUSSEAU, 1997, p, 18).

Além de termos apresentado algumas definições sobre o termo "concepções" e outras, a elas relacionadas (e nos posicionando em qual nos apoiamos), consideramos importante, na próxima subseção, discutir sobre as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA em função de estudos desenvolvidos na Educação Matemática.

3.2 CONTEXTUALIZAÇÃO DAS CONCEPÇÕES DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM EM FUNÇÃO DE PESQUISAS DESENVOLVIDAS NO CAMPO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para além de situarmos nossa pesquisa sobre o termo 'concepções' à luz da Didática da Matemática, é interessante destacarmos que estamos interessados, mais especificamente, nas CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, já que nosso foco é o professor. Um aspecto importante destacado por Martins (2016, p.54) é que elas:

> são fundadas a partir das várias experiências vivenciadas ao longo da história de vida de cada professor de matemática. As concepções de ensino relacionam-se também a profissionalização do professor, marcando sua identidade e são relevantes no desenvolvimento da sua prática docente (MARTINS, 2016, p. 54).

É importante considerarmos que as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA são de grande relevância, tanto quando se tem o foco nos estudantes quanto nos professores, pois nos ajudam a compreender alguns fenômenos relacionados à sala de aula (MENEZES, 1995; ROSEIRA, 2004; 2010). De acordo com Cury,

> o interesse pelo estudo das concepções e crenças dos professores de Matemática sobre a disciplina e a influência que ela exerce na prática teve sua origem no início do século XX, a partir das preocupações dos psicólogos sociais que procuravam entender a influência das crenças sobre o comportamento das pessoas" (1994, p. 25).

As pesquisas relativas à Educação Matemática têm considerado, dentre outros aspectos, aos que se referem ao processo de ensino de seus conceitos. Diante disso, há um grande interesse no estudo das concepções de ensino de Matemática, por parte de estudiosos matemáticos, não apenas no Brasil, mas em outros países, dos quais podemos citar Portugal e Estados Unidos (LOVIS, 2013).

Para melhor fundamentar essa discussão, ilustraremos a utilização das concepções de ensino da Matemática na Didática da Matemática a partir de algumas pesquisas. Thompson (1992) destaca que as relações entre as concepções, as decisões e as ações do professor não são simples, mas complexas. Segundo ela, o estudo das concepções (conscientes ou inconscientes) sobre a Matemática e seu ensino desempenham um papel significativo na determinação da forma de ensinar de cada professor.

Silva (1993), ao analisar seis professores de diferentes cidades do estado de São Paulo com o objetivo de identificar as concepções didático-pedagógicas mobilizadas na sala de aula de Matemática e sua relação com as oriundas de sua prática na pesquisa científica de Matemática, evidenciou que eles adotavam uma prática docente relacionada aos modelos de ensino mais tradicionais, que se refletiam nas suas concepções de ensino. Concluiu, também, que a pesquisa brasileira sobre concepções de Matemática relacionada ao ensino ainda era muito incipiente.

Zimer (2008) investigou sobre parte da trajetória da formação para o ensino da Matemática nas séries iniciais do EF com alunas de um curso de Pedagogia, com o objetivo de conhecer de que maneira o futuro professor estabelece conexões entre suas concepções e a prática pedagógica pré-profissional, de modo a permitir a compreensão sobre o modo como ele aprende a ensinar Matemática. Nas análises dos resultados, foi constatado que o futuro professor vincula as próprias experiências com a escolarização como meio de estabelecer conexões entre suas concepções e a prática pedagógica.

Yamamoto (2012) investigou as concepções e crenças de 27 licenciandos sobre o ensino de Matemática. As análises de seus resultados mostraram algumas delas. A primeira é que, para realizar um bom ensino de matemática, o professor necessita não apenas dominar bem o conteúdo matemático, como também saber ensinar de modo que seus alunos aprendam. A segunda é que o professor saiba relacionar a sua disciplina com as outras. A terceira é que esperam encontrar vários desafios como, por exemplo, o mito de que a matemática é difícil e causa medo às crianças, o que prejudica a aprendizagem dessa disciplina, mas que apesar disso, têm muita esperança de conseguir fazer com que seus alunos aprendam matemática, pois acreditam que empenho, dedicação e paciência não lhes faltarão. Percebemos que nesse estudo o autor utiliza o conceito de crenças e concepções como sinônimos, algo comum em estudos desenvolvidos na área.

Lima (2012), por exemplo, investigou os conhecimentos e concepções que influenciam as escolhas e decisões didáticas tomadas pelo professor. Para tanto, utilizou a análise de duas sequências didáticas elaboradas por dois professores para um aluno que resolveu problemas de simetria de reflexão. As análises dos resultados mostraram, dentre outros elementos, que a diversidade de sequências didáticas utilizada permitiu identificar diferentes conhecimentos que influenciam as decisões dos professores e que os elementos da concepção de ensino identificados dão indícios da relevância desse conceito em suas práticas docentes.

Martins (2016) teve como objetivo identificar as concepções sobre a natureza da matemática e sobre o ensino, mobilizadas por 35 professores que ensinam conteúdos específicos de matemática em cursos de licenciaturas no Estado de Alagoas. As análises das respostas dos professores indicam uma tendência à superação de concepções ligadas aos modelos estáticos da Matemática, muito embora suas concepções sejam fortemente caracterizadas por elementos ligados a uma Matemática instrumental. O autor concluiu que, ao mesmo tempo em que um professor considera pertinente a adoção de um modelo de ensino mais inovador, não concebe o erro do estudante como um elemento que pode ser utilizado no ensino para potencializar a aprendizagem. As análises desses resultados indicam a coabitação de concepções contraditórias sobre a Matemática e seu ensino, em um mesmo professor.

Em relação à questão do erro, Henry (1991) chama a atenção para o fato de que há um excessivo fracionamento da aprendizagem e o comportamento dos estudantes em face de instruções incompreendidas. Em relação ao erro, Brousseau (1986) destaca que ele é um elemento que merece destaque, pois tem um novo enfoque trazido pelos pressupostos da TSD. Deixa de ser considerado como um desvio imprevisível e passa a ser visto como uma dificuldade valiosa e parte da aquisição do saber.

Rocha e Barros (2016) investigaram o estado da arte das pesquisas acadêmicas brasileiras sobre concepções de professores que ensinam Matemática no período de 2001 a 2012, permitindo observar as bases teóricas que sustentam as pesquisas nessa área. O primeiro aspecto percebido no estudo é que, apesar de haver uma expressiva literatura dedicada ao tema, no âmbito da formação inicial de professores de Matemática, poucos autores definem o termo "concepções" ou assumem um conceito em sua pesquisa, corroborando as ideias inicialmente discutidas por Batanero, Godino e Font (2008) e Cavalcanti (2010), dentre outros.

O segundo é que o termo 'concepções' é empregado por muitos autores como sinônimo de crenças, não existindo um consenso, entre eles, sobre a diferenciação entre os termos e, o terceiro é que todas as pesquisas analisadas assumem uma definição de concepção, mas abordam temas diferentes.

Diante disso, esta é uma lacuna que a presente investigação objetiva suprir, pois além de situar teoricamente o termo 'concepção' a ser utilizado na pesquisa, procurou analisar a relação entre as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA e o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido em sala de aula como fatores de influências na aprendizagem de frações.

Em vista disso, Brum e Schuhmacher (2013, p. 115) destacam que: "as características de um CONTRATO DIDÁTICO não são definidas não apenas a partir da natureza da área ou especificamente pelo tema objeto de estudo, mas também em função da concepção de mundo, concepção de Matemática e ensino de Matemática das quais o professor é portador. Tais concepções se materializam no contexto da sala de aula, influenciando os objetivos do curso e as decisões didáticas tomadas pelo professor".

Além de situar o termo concepção no contexto da Didática da Matemática e ilustrá-lo em função das pesquisas realizadas no referido campo, na próxima subseção discutiremos algumas categorizações trazidas pela literatura de referência sobre concepções de ensino, a fim de estabelecermos uma relação com tipos de contratos didáticos em função das ideias que aproximam os dois construtos teóricos, para ser possível atribuir uma tipologia para tal fenômeno em função das ideias de Charnay (2001).

3.3 AS CONCEPÇÕES DE ENSINO E O CONTRATO DIDÁTICO: APROXIMANDO IDEIAS PARA SE ATRIBUIR UMA TIPOLOGIA A ESSE FENÔMENO

Para ser possível analisar o Contratro didático e as Concepções de Ensino como fatores de influências no desempenho de estudantes do 5 ano do EF em relação ao saber escolar fração, necessitamos destrinchar os modelos teóricos tradicionais relacionados a esses dois construtos teóricos. Esse resgate do clássico, do mais conhecido, se faz necessário na medida em que sua caracterização e partes constituintes tornar-se-ão de relevância para a investigação, assim como para as conclusões que se seguem neste trabalho. No que diz respeito às concepções de ensino e de aprendizagem da Matemática, dentre algumas categorizações, utilizaremos as referidas como: transmissiva (LOCKE, 2001), a behaviorista (SKINNER, 1938) e a construtivista (PIAGET, 1979); assim como categorizadas por Câmara dos Santos (2005), quais sejam: baldista, escadinha e socioconstrutivista. E os modelos pedagógicos de Becker (2012): a pedagogia Diretiva; Não Diretiva e Relacional[13].

Em relação às concepções de ensino, temos a primeira, a transmissiva, baseada no modelo empirista da aprendizagem (LOCKE, 2001). Ela é fundamentada na ideia de que todo conhecimento vem da experiência do indivíduo e que ensinar pressupõe transmitir conhecimento. Nessa concepção, o professor é visto como aquele ser que detém o conhecimento. Sua aquisição pelo sujeito acontece como resultado de uma transmissão, de uma comunicação, ou seja, se aprende na medida em que se acumula as informações dadas comunicativamente pelo professor. De acordo com Lima (2012), o conhecimento do aluno é descrito por uma lógica binária: ele sabe ou ele não sabe. Em caso de fracasso, o professor deve recomeçar tudo, repetir e propor muitos exercícios para garantir a aprendizagem do aluno.

A segunda, a behaviorista, também denominada de comportamentalista, é baseada no modelo behaviorista (SKINNER, 1938). Ela opera em função de um sistema de estímulo e resposta (PAVLOV, 1927). Isto é, se o estudante apresenta respostas certas ele é considerado bem-sucedido e será recompensado. Entretanto, se errar, deverá ser punido pois se encontra em situação de fracasso. O papel do professor não é mais o de transmitir o conhecimento, mas construir exercícios progressivos, com o objetivo de apresentar o saber em unidades discretas, ficando a cargo do aluno estabelecer relações entre elas (LIMA, 2012).

A terceira concepção, a construtivista, foi elaborada a partir de Piaget (1979). Ela se fundamenta na ideia de que o estudante possui, em suas estruturas cognitivas, os esquemas necessários à construção dos conhecimentos. Sendo assim, ele terá condições de atuar ativamente nesse processo e será o responsável por sua aprendizagem. Diferentemente das concepções anteriores, há aqui uma análise do erro como algo que precisa ser superado pelo estudante e pode ser útil, servindo como instrumento para o professor (re)planejar e (re)conduzir o processo de ensino, adequando-se à nova demanda. Nessa perspectiva, o estudante aprende em função de uma interação que deve ter com a situação (o problema).

Somando-se a essas, temos as concepções de ensino e de aprendizagem da Matemática definidas por (CÂMARA DOS SANTOS, 2005). A primeira, denominada de baldista, faz uma referência à cabeça vazia, comparada a um balde em que serão depositados os conhecimentos.

---

[13] Apesar de as categorias analisadas não serem todas tratadas como concepções, utilizaremos com tal denominação, pois identificamos similaridades nas ideias apresentadas. Segundo Artigue (1990), em Didática da Matemática são utilizados termos diferentes com sentidos próximos ao que pode ser atribuído.

Os estudantes são vistos como uma tábula rasa, que chegam à escola sem nenhum conhecimento prévio que possa ser aproveitado.

Nessa concepção, o papel do professor é apenas o de transmitir o conhecimento e o dos estudantes é escutar, prestar atenção no que está sendo transmitido e fazer suas anotações. As aulas normalmente obedecem a uma sequência em que, primeiro, o professor apresenta o novo conhecimento por meio de definições. Em seguida, são mostradas aplicabilidades desse novo conhecimento e, para finalizar, são propostas longas listas de exercícios que utilizam o mesmo tipo de raciocínio mostrado nas questões por ele resolvidas. Em síntese, podemos dizer que, na concepção baldista, o professor assume a responsabilidade de "explicar bem todo o assunto", o estudante de prestar atenção, copiar e depois resolver vários exercícios propostos pelo professor, utilizando o modelo apresentado na aula.

A segunda concepção, denominada escadinha, se fundamenta na linha behaviorista de estudos de psicologia, e se apoia na possibilidade de modificar o comportamento de um indivíduo por meio de situações de estímulo e reforço a respostas positivas. A ação educativa, nessa concepção, acontece em três momentos: no primeiro, o professor define de forma precisa os objetivos de aprendizagens e, dependendo da complexidade do conteúdo, são definidos subobjetivos; no segundo, são elaboradas situações em que os estudantes sejam levados a apresentar o novo comportamento, onde, caso aconteça, o estudante recebe uma recompensa, exibida pela aprovação do professor; e, no terceiro momento, são oferecidas situações sistemáticas de treinamento para consolidação do novo comportamento, oportunizando a entrada de um novo objeto de aprendizagem. De modo geral, nessa concepção, o professor coloca o estudante frente a uma dificuldade capaz de causar nele um desequilíbrio. A partir daí, há uma relação/associação entre a antiga ideia e a nova, ali colocada, o impulsionando (por si só) a transpor a dificuldade proposta.

A terceira concepção, a socioconstrutivista, se apoia no processo histórico de construção do conhecimento científico, no qual seu objeto de estudo surge como solução a problemas específicos. Em se tratando da sala de aula, esse modelo pensa nos estudantes enquanto sujeitos ativos no processo de construção do conhecimento. Eles se defrontam com problemas, mas não terão ferramentas necessárias para resolvê-los. Dessa forma, procurarão construir sua própria ferramenta, permitindo-lhes solucionar os problemas propostos.

No que diz respeito às concepções discutidas, é interessante destacarmos que, apesar de não fazer referência às denominações "baldista", "escadinha" e "socioconstrutivista", os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) fazem uma discussão de questões relativas às concepções de ensino e de aprendizagem, que podem ser consideradas complementares às ideias de Câmara dos Santos (2005).

Em relação à baldista, o referido documento destaca que ela é a mais encontrada nas salas de aula; caracteriza o ensino como transmissão de conhecimento e verbalização; vê a aprendizagem como recepção e acúmulo de conteúdo; caracteriza o professor como transmissor, o estudante receptor e define o objeto de conhecimento como acúmulo de informações transmitidas.

Ademais, chama atenção para o fato de que essa concepção tem, por um lado, a vantagem de possibilitar aos estudantes a aprendizagem de um grande número de mensagens emitidas pelo professor e, por outro lado, a desvantagem de fazer deles sujeitos passivos do ato de aprender, obedientes, e considerarem a palavra do professor como única verdade.

Sob a ótica do ensino e da aprendizagem, uma dimensão que merece destaque e contraria os pressupostos teóricos da TSD é que, ao iniciar o novo conceito já o definindo, a aprendizagem não faz mais sentido, pois o professor já fez o que deveria ser de responsabilidade dos estudantes, já que é necessário desenvolver um processo autônomo em busca da construção do conhecimento de um novo conceito matemático. Desse modo, Câmara dos Santos (2007, p.12), destaca que:

> Essa busca constante do "pronto" no ensino da Matemática está fortemente arraigada no CONTRATO DIDÁTICO habitual de grande parte de nossas salas de aulas: qual professor de Matemática não escutou após uma "demonstração" exaustiva da construção de um novo conceito, a célebre frase: "mas professor, por que você não colocou logo a fórmula"?

Nesse contexto, é importante considerarmos a existência de Contratos Didáticos pré-estabelecidos, nos quais regras, em sua maioria implícitas (decorrentes de repetições que acontecem em sala de aula), são elaboradas pelos professores e internalizadas pelos estudantes, e quase sempre não têm validade para quaisquer situações.

Em relação à concepção escadinha, os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) destacam que ela se fundamenta nos princípios behavioristas, em que a aprendizagem é vista como fragmentação do conhecimento. A identificação de objetivos de aprendizagem cada vez mais específicos é um dos principais pressupostos dessa concepção. Nela, acredita-se que ao atingir cada um dos objetivos, o estudante caminhará na construção de seu próprio conhecimento.

Segundo o documento, diferentemente da concepção baldista, a escadinha tem a vantagem de atribuir ao estudante um papel ativo no processo de aprendizagem. Entretanto, tem a desvantagem de centrar a atenção dele em fragmentos do conhecimento, levando-o, muitas vezes, a uma não aprendizagem do conceito em sua totalidade, em sua inteireza, alienando o aluno do holístico.

Para finalizar, os PCPE (PERNAMBUCO,2012) chamam atenção para o fato de que, ao se trabalhar em função da concepção socioconstrutivista, o professor dá aos estudantes a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, a partir do momento em que os coloca como ator principal desse processo. Ela é baseada nos pressupostos sociointeracionistas em função dos estudos realizados por Vygotsky (2007), já que ele parte da ideia de que a construção dos novos conceitos acontece quando os estudantes são desafiados e colocam em confronto suas antigas concepções. Nessa perspectiva, o professor tem a função de mediar o processo de ensino e aprendizagem, isto é, ele será o elemento gerador de situações que vão oportunizar esse confronto (conceitos novos/antigos). Aos estudantes, cabe a função de construção de seu próprio conhecimento. O referido documento ainda destaca que essa concepção é pouco explorada em nossos sistemas de ensino.

É interessante ressaltar a circunstância de, no dinamismo da sala de aula de Matemática, outros modelos poderem vir à tona. Além disso, Câmara dos Santos (2005) ainda esclarece que não há superioridade de uma concepção em relação a outra, assim como elas não são mutuamente excludentes. Para a construção dessas concepções, o autor chama atenção para o fato de que, na observação feita, foram levados em consideração alguns condicionantes como: conceito trabalhado, tipo de estudantes, tempo disponível e o CONTRATO DIDÁTICO predominante da escola.

Para além de complementar as ideias dessas três concepções, os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) ainda fazem uma comparação entre a baldista e a socioconstrutivista e apresentam modelos para ambas. Na primeira, tem-se: definição – exemplos – exercícios, isto é, para se ensinar um novo conceito o professor faz uma apresentação direta, para depois dar exemplos que serão utilizados como modelos, nos quais poderão seguir de forma acrítica, posteriormente. O processo se completa com a proposição de exercícios de fixação.

Na segunda, tem-se uma lógica inversa, isto é, a aprendizagem de um novo conceito acontece com a apresentação, aos estudantes, de um problema. A análise da situação o levará à definição, generalização e sistematização do conceito, que será construído ao longo do processo de aprendizagem. Às vezes, esse novo conceito construído pode ser retomado com uma complexidade maior, fazendo com que o estudante estabeleça relações com o que já sabia e com o que virá a aprender.

Analisando a discussão trazida pelos PCPE (PERNAMBUCO,2012), ganha destaque a atualidade das ideias mostradas por Câmara dos Santos (1997; 2005), quando categorizou as

CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, um dos elementos teóricos que dão suporte ao nosso texto. Além disso, outro aspecto que merece destaque no referido documento e que fundamenta nossa investigação é que as concepções de ensino e de aprendizagem estão, de certa forma, na base de diferentes fenômenos (dentre eles, o CONTRATO DIDÁTICO) que perpassam a sala de aula e influem nas relações entre professores e estudantes. Acrescentamos também o saber nessa relação, pois não é possível falarmos de CONTRATO DIDÁTICO sem levar em consideração esse elemento.

Em relação aos modelos pedagógicos, Becker (2012) os define em função de pressupostos com um olhar da sala de aula, sejam eles: a Pedagogia Diretiva, a Não Diretiva e a Relacional. A partir deles, procuramos alinhar suas ideias em função das concepções de ensino de uma forma geral e as de ensino e aprendizagem propostas por Câmara dos Santos (2005), observando as similaridades das ideias nelas apresentadas.

O primeiro, a pedagogia Diretiva, tem a imagem do professor como central, elemento principal do processo, sua figura monopolizadora na sala de aula. Normalmente fala, dita, decide o que fazer. Para o autor, o professor age assim porque acredita que o conhecimento pode ser transmitido para os estudantes, isto é, ele crê no mito da transmissão do conhecimento. Por conseguinte:

> O professor acredita no mito da transferência. O que ele sabe, não importa o nível de abstração ou formalização, pode ser transferido ou transmitido diretamente para o aluno por via verbal ou linguística. Tudo que o aluno tem a fazer é submeter-se à fala do professor: parar, ficar em silêncio, prestar atenção e repetir o que foi transmitido tantas vezes forem necessárias, copiando, lendo o que copiou, etc até o conteúdo aderir a sua mente, isto é, até a memorização, não importando se compreendeu ou não. (BECKER, 2012. P. 16).

De acordo com a citação, percebemos que os estudantes são vistos como tábulas rasas, que chegam à escola sem conhecimento algum, apenas prestam atenção ao que é transmitido, ou seja, copiam e repetem o que foi repassado pelo professor, cuja função é “ensinar” e a dos estudantes, “aprender”. Esse seria um exemplo típico de uma aula tradicional, na qual se declara a morte, principalmente, da curiosidade do estudante. Uma dimensão importante destacada pelo autor em relação ao ensino e aprendizagem é que são vistos como dois polos dicotômicos e não complementares. Observamos um alinhamento deste com a transmissiva Piaget (1997) e baldista Câmara dos Santos (2005).

O segundo modelo, a Pedagogia Não Diretiva, busca o extremo, em que o professor é apenas auxiliador ou facilitador para o estudante nas atividades. Nessa forma, tem-se a concepção de que o estudante traz consigo uma bagagem hereditária de conhecimento que necessita apenas de auxílio, no caso o professor, para despertar. O próprio estudante é o indivíduo capaz de interferir no meio físico e social. Nele, a função do professor simplesmente muda e a forma anterior nesse modelo não funciona. Para Becker, "o professor não-diretivo acredita que o estudante aprende por si mesmo. Ele pode, no máximo, auxiliar sua aprendizagem, despertando o conhecimento que nele já existe. - Ensinar? – Nem pensar! Ensinar prejudica o aluno". Observamos um alinhamento deste modelo com a behaviorista Skiner (1938) e a escadinha Câmara dos Santos (2005).

O terceiro, a Pedagogia Relacional, tem por objetivo a realização de um trabalho conjunto, no qual a construção do conhecimento se dá por meio da reflexão. Em geral, o professor propõe algum material, algo que compreende ser significativo para os estudantes e propor que eles o explorem. Segundo Becker, "o professor acredita, ou melhor, compreende que o aluno só aprenderá alguma coisa, isto é, construirá algum conhecimento novo, se ele agir e problematizar a própria ação. Que tenha algo de cognitivamente interessante, ou melhor, significativo, desafiador" (2012, p 21).

Nesse último modelo, tem-se a superação dos dogmas impostos pelos anteriormente citados, pois estudantes e o professor desenvolvem o trabalho juntos, numa contínua troca de experiências e saberes, ou seja, um aprende com o outro. Esse é, para o autor, o modelo pedagógico mais indicado para se trabalhar em sala de aula, pois tem por objetivo a relação, a interatividade, a participação, o trabalho em conjunto e por isso, deve surtir melhores resultados. Destaca-se, ainda, o ganho pela reciprocidade entre estudantes e professor, por privilegiar ambas as partes e não um ou o outro. Concordamos com o autor, pois essa forma se relaciona com a que defendemos no processo de ensino e de aprendizagem. Observamos um alinhamento deste com a construtivista Piaget (1997) e socioconstrutivista Câmara dos Santos (2005).

As concepções de ensino e de aprendizagem apresentadas assumem um papel importante na nossa discussão teórica e servirão de base para analisar as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA que emergem nas práticas docentes dos professores que lecionam a disciplina. O interesse por elas vem tendo destaque entre pesquisadores e educadores matemáticos (THOMPSON, 1982; GUIMARÃES, 1988; PONTE, 1992; CÂMARA DOS SANTOS 1997; BATANERO E FONT, 2006; BARROS E ROCHA, 2016).

Logo, Charnay (2001) chama atenção ao fato que o professor, apesar de utilizar elementos das diferentes concepções, se apóia, na maioria das vezes, em um tipo delas para o desenvolvimento de suas atividades. Outrossim, "há uma natureza interativa (teórico-prática) do conhecimento profissional que pode levar o professor a expressar ideias que considere desejáveis e que ainda não caracterizam sua prática" (CARRILLO E CONTRERAS, 1995, p. 80)[14].

Para atingir nosso objetivo de analisar o CONTRATO DIDÁTICO e as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA como fatores de influências na aprendizagem de frações, necessitaríamos de uma categorização para esse fenômeno. Como já afirmado anteriormente, apenas encontramos na literatura de referência o estudo de Borba (2018), que teve por objetivo propor uma tipologia de CONTRATO DIDÁTICO, considerando elementos da Didática, da Psicanálise e da Relação ao Saber do Professor de Matemática, no contexto da sala de aula de Matemática do Ensino Superior. Dentre as suas conclusões, o ensaio realizado apontou na direção de que existem, sim, diferentes tipos de contrato em sala de aula, subordinados à relação ao saber (matemático) do professor, às representações acerca dos alunos, e questões inerentes à (inter)subjetividade que se configura no cenário didático, tornando a sala de aula um espaço psíquico, em que projeções, desejos, sofrimento definem, em larga medida, os caminhos do ensino e da aprendizagem de um dado saber.

É interessante destacarmos que consideramos uma possibilidade de encontro entre a nossa pesquisa e a de Borba (2018). Assim como a autora, considerarmos que diferentes contratos didáticos são estabelecidos, entretanto, em função das concepções de ensino e de aprendizagem que subjazem as práticas docentes. Ao atribuirmos tipos específicos a esse fenômeno em função de concepções de ensino e de aprendizagem, tratamos de lidar com todo aspecto subjetivo, inconsciente que envolve o sujeito.

Assim, é interessante destacarmos que nosso foco está mais voltado a uma perspectiva didática, muito menos que acerca do saber, mas sim do que é ensinar. Para tanto, nos apoiamos também nos estudos de Charnay (2001), pois os modelos de aprendizagens categorizados pelo autor tiveram como fonte a relação triangular (professor-estudante e saber), olhando o sistema didático. Além disso, foram definidos em função do conceito de CONTRATO DIDÁTICO à luz de Brousseau.

Acreditamos que, à época, o interesse do autor nos modelos propostos tinha outra perspectiva, mas o nosso é de atribuir tipos específicos em função de seus estudos, por um viés do CONTRATO DIDÁTICO. A partir dessa necessidade, procuramos encontrar ideias comuns entre concepções de ensino e de aprendizagem e os modelos de aprendizagens de Charnay (2001), para ser possível em função da associação desses elementos teóricos atribuirmos uma

---

[14] Además, el carácter interactivo (teórico-práctico) del conocimiento profesional puede conducir al profesor a expresar ideas que considere deseables y que aún no caracterizan su práctica.

tipologia para esse fenômeno a partir da aproximação de suas ideias. No quadro 2 mostramos essa associação.

Quadro 2 - Relação entre Concepções de ensino e Modelos de aprendizagem.

MODELOS PEDAGÓGICOS EM RELAÇÃO A ENSINO E APRENDIZAGEM	CONCEPÇÕES DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	MODELOS DE APRENDIZAGEM EM RELAÇÃO AO TRIÂNGULO DIDÁTICO
Diretiva O professor monopoliza o conhecimento, acredita que ele pode ser transmitido. Ele fala, dita, decide o que fazer. Os estudantes prestam atenção, executam e copiam.	**Transmissiva** O professor detém o conhecimento, o comunica, o transmite. Os estudantes aprendem pelo acúmulo de informações dadas pelo professor.	**Baldista** O professor transmite o conhecimento, apresenta-o por definições, aplicabilidades e faz longas listas de exercícios. Os estudantes escutam, prestam atenção na transmissão, fazem suas anotações e aplicam o conhecimento aprendido.	**Normativo** O professor é o detentor do conhecimento, escolhe o importante a ser ensinado, mostra vários exemplos; utiliza métodos dogmáticos que vão das regras às perguntas e respostas.

MODELOS PEDAGÓGICOS EM RELAÇÃO A ENSINO E APRENDIZAGEM	CONCEPÇÕES DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	MODELOS DE APRENDIZAGEM EM RELAÇÃO AO TRIÂNGULO DIDÁTICO
Não-Diretiva O professor auxilia ou facilita a aprendizagem. Os estudantes aprendem por si mesmos e trazem uma bagagem hereditária de conhecimento que necessita apenas de auxílio do professor, para despertar.	**Behaviorista** O professor constrói exercícios progressivos, para apresentar o conhecimento. O ensino é baseado em estímulo e resposta.	**Escadinha** O professor tenta modificar o comportamento do aluno a partir de estímulos e reforços às respostas positivas. A ação educativa acontece em três momentos: definição de objetivos de aprendizagem; elaboração de situações e situações sistemáticas de treinamento.	**Incitativo** O professor interage com os estudantes, escutando-os, procurando saber o que lhes interessa, procura ajudá-los com fontes de informações, dentre elas, fichas de exercícios. Os estudantes pesquisam, organizam a informação para aprender.
Relacional O professor e estudantes desenvolvem juntos um trabalho em uma contínua troca de experiências e saberes.	**Construtivista** O professor concebe, escolhe e organiza as situações didáticas, em um meio antagonista que propicie a construção do conhecimento pelos estudantes de forma ativa., em função de	**Socioconstrutivista** O professor coloca um obstáculo diante dos estudantes para que se possa causar um desequilíbrio entre suas antigas concepções e a nova. Eles são vistos como sujeitos ativos no processo de	**Aproximativo** A resolução de problemas escolhidos pelo professor é critério para elaboração do saber. Essa resolução acontece em função das fases da situação didática em

MODELOS PEDAGÓGICOS EM RELAÇÃO A ENSINO E APRENDIZAGEM	CONCEPÇÕES DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	MODELOS DE APRENDIZAGEM EM RELAÇÃO AO TRIÂNGULO DIDÁTICO
	uma interação com a situação.	construção do conhecimento.	interação com seus pares e com o objeto do conhecimento.

Fonte: Os autores.

Apesar de o Quadro 2 mostrar uma ideia condensada das abordagens, elas têm uma série de nuances[15] e outros elementos que não foram explicitados nessa sistematização, que teve como finalidade didática organizar conceitos e orientar a análise. Uma questão a ser destacada é que observarmos uma convergência nas ideias apresentadas pelas concepções em função de seus diferentes focos (Psicologia, Filosofia, Pedagogia). Concluímos que, atreladas a elas, existe um modelo de aprendizagem e também se coaduna com a linha de pensamento ora apresentada[16].

Consideramos um alinhamento da concepção transmissiva (LOCK,2001) com a baldista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005) e a diretiva (BECKER, 2012), relacionadas ao tipo de CONTRATO DIDÁTICO Normativo. Em segundo lugar, da behaviorista (SKINER, 2001) com a escadinha (CÂMARA DOS SANTOS, 2005) e a não diretiva (BECKER, 2012), relacionadas ao tipo de CONTRATO DIDÁTICO Incitativo e, em terceiro lugar, da construtivista (PIAGET, 1997) com a socioconstrutivista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005) e a relacional (BECKER, 2012), ligadas ao tipo de CONTRATO DIDÁTICO Aproximativo.

Diante desse contexto, o que podemos perceber é que as concepções e modelos de aprendizagem apresentados no Quadro 2 foram construídos epistemologicamente e influenciados por outras disciplinas científicas (CAVALCANTI; BRITO MENEZES, 2013). A concepção de ensino e aprendizagem de matemática de Câmara dos Santos (2005), por exemplo, é epistemologicamente relacionada em função da Psicologia, utilizando suas categorias e pressupostos científicos. O modelo de Becker (2001), por sua vez, segue modelos

[15] Discutidas ao longo do capítulo.

[16] Para não se tornar cansativo para o leitor, evitaremos no momento das classificações das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA repetir as categorizações aqui discutidas. Como elas apresentam ideias comuns, utilizaremos a baldista, escadinha e socioconstrutivista Câmara dos Santos (2005) para representá-las e o tipo de CD: normativo, incitativo e aproximativo a elas alinhado.

epistemológicos da Filosofia e da Pedagogia; os modelos de Charnay (2001) seguem o da Pedagogia, pois se associam às relações didáticas. Consideramos que todos eles vão enaltecendo naturezas não de todo estranhas à Educação Matemática, embora bastante diversas. Assim sendo:

> Os trabalhos de Becker (1999) e Câmara dos Santos (2005) apresentam uma descrição caricatural de modelos/concepções de ensino e aprendizagem. Becker (1999) reconhece a existência de modelos epistemológicos como fundamento dos modelos pedagógicos. Contudo, esse autor fala de epistemologia como algo externo (empirista, apriorista, construtivista) aos modelos pedagógicos (CAVALCANTI; BRITO MENEZES, 2013, p. 231).

Face a essa problemática, os autores Cavalcanti e Brito Menezes (2013) avançam para além das colocações de Câmara dos Santos e Becker, e propõem nova configuração, baseada na possibilidade de existência de uma estrutura epistemológica interna à Educação Matemática. Em substituição à ideia do uso de Teorias da Aprendizagem para descrever os Modelos Pedagógicos ou Concepções sobre o ensino e aprendizagem, sugerem a criação de uma epistemologia intrínseca, essencial e indissociável ao próprio campo estudado. Pressupõem os autores que ela está associada a fenômenos didáticos que surgem da própria sala de aula, devido à natureza e à dinâmica estabelecida no processo de ensino e aprendizagem. Senão vejamos:

> Por exemplo, numa aula de matemática arbitrária, há uma manifestação de aspectos que envolvem a epistemologia dos saberes matemáticos e sua transposição (CHEVALLARD, 1985) no lócus da sala de aula; as relações que os sujeitos (professor e estudantes) estabelecem com esses saberes (CÂMARA DOS SANTOS, 1995) e a negociação de significados desses saberes incluindo os processos de validação, bem como os papéis assumidos por esses sujeitos numa relação didática (BROUSSEAU, 1996) (CAVALCANTI; BRITO MENEZES, 2013, p. 232).

Ainda segundo os avanços nas reflexões dos autores, temos que existiria aí uma organização estrutural (nem simples, nem rígida) formando um sistema complexo de transformações do saber, relacionando-se ao CONTRATO DIDÁTICO e às diferentes relações com o saber. Fatores sociológicos, cognitivos, didáticos e epistemológicos somam-se no cenário, de forma que teríamos aí uma Epistemologia da Educação Matemática, de partida interna e não levantada sobre influências de ciências e saberes externas ao campo da própria Educação Matemática.

Apesar de ser sinalizada por Brito Menezes e Cavalcanti (2013), mas ainda não encontrada à época dos escritos do referido estudo na literatura de referência uma tipologia a partir de uma Epistemologia da Educação matemática de partida interna, tomamos, para o desenvolvimento do nosso estudo, a categorização de Câmara dos Santos (2005), já que as ideias apresentadas pelo autor, podem ser vistas como atuais, mesmo sendo escritas, originalmente, há mais de duas décadas.

Segundo o autor, elas são mais facilmente reconhecidas pela maioria dos professores de Matemática, assim como foram contempladas em uma discussão no documento curricular orientador do ensino do nosso estado - PCPE (PERNAMBUCO, 2012), além de, atualmente, serem utilizadas como referência teórica de pesquisadores da temática, sejam eles: Brito Menezes e Cavalcanti (2013), assim como em pesquisa recente de nosso programa- Concepções sobre a Matemática e seu ensino na perspectiva de professores que ensinam matemática em licenciaturas de Alagoas (MARTINS, 2016).

Considerando que nosso objeto de estudo das concepções de ensino e de aprendizagem e o CONTRATO DIDÁTICO, esse levantamento de concepções e modelos (trazidos também no Quadro Comparativo, debatidos nesse subtópico) é importante na medida em que esclarece não existir uma tipologia definida em aspectos didáticos para o segundo elemento teórico. Foi essa falta que nos induziu à inquietação original de toda essa pesquisa, pois a abertura com que essas questões podem ser interpretadas resulta em parte da problemática da pesquisa. Diante desse contexto, a partir dos elementos teóricos discutidos anteriormente, nosso estudo fez a atribuição a tipos de CONTRATO DIDÁTICO em função dos modelos de aprendizagem categorizados por Charnay (2001), sejam eles: o normativo, o incitativo e o aproximativo.

O CONTRATO DIDÁTICO Normativo tem como elemento central o conteúdo. O professor é considerado como detentor do conhecimento, escolhe o que é importante a ser ensinado aos estudantes, introduz as noções relativas aos objetos do conhecimento, mostra vários exemplos do que está sendo explicado.

Para repassar o conhecimento, o professor utiliza métodos por vezes denominados dogmáticos, isto é, aqueles que vão das regras às aplicações ou maiêuticos, baseados em perguntas e respostas, a partir da sequência linear: explanação e realização de atividades, que são utilizadas para aplicação do conteúdo que foi transmitido e que deverá ser aprendido pelos estudantes.

Acredita-se que, nesse tipo de contrato, os estudantes chegam à escola sem conhecimento, são sujeitos passivos no processo de aprendizagem, apenas prestam atenção, escutam atentamente tudo que está sendo ensinado para aplicar, repetidamente, da mesma forma que aprenderam, ou seja, eles imitam, treinam, se exercitam e, ao final, aplicam. O saber é tido como finalizado, ou seja, pronto e acabado. A pedagogia desse modelo é vista como a arte de comunicar, de “fazer passar” um saber. (CHARNAY, 2001). De forma resumida, temos no Quadro 3 a definição do CONTRATO DIDÁTICO normativo em função dos elementos do triângulo didático.

Quadro 3 - Características do CONTRATO DIDÁTICO Normativo.

Elementos do CD	**Características**
Expectativas	Em relação ao professor: • Ser o detentor do saber; • Selecionar o que é essencial, o que considera importante o estudante aprender; impor métodos, modelos para apresentar os conteúdos; • Seguir sequência linear, axiomas, modelos, definições e fazer exercícios repetitivos; • Apresentar problemas com baixo nível de complexidade, ou seja, de compreensão fácil; acredita que aprender matemática/frações está relacionado a fazer contas; • Deter os turnos da fala; • Responder aos próprios questionamentos para que sejam utilizados como modelos para o estudante seguir; • Compreender que a aprendizagem acontece em função da repetição; • Organizar um meio aliado ao estudante.
Expectativas	Em em relação ao estudante: • É uma tábula rasa; • Ter a cabeça preenchida com conhecimentos depositados pelo professor; • Prestar atenção ao que o professor diz e apenas copia; • Não é oportunizado a interagir com o professor e colegas; • Não pode cometer erros; • Ser sujeito passivo na construção do conhecimento; • Ter relação distante com o saber.

Elementos do CD	Características
Expectativas	Em relação ao saber escolar: • Deve ser transmitido pelo professor; • Visto como pronto e acabado; • É aprendido quando o professor dá boas explicações.
Divisão de responsabilidades	O professor ensina e o estudante aprende.
Negociação	O CONTRATO DIDÁTICO é visto por baixo, o estudante não consegue avançar sem a ajuda do professor.

Fonte: Os autores.

O CONTRATO DIDÁTICO Incitativo tem como elemento central o estudante. O professor interage com ele, escutando-o, procurando saber o que lhe interessa e o ajuda. Para começar, pergunta a respeito de seus interesses, suas motivações, suas próprias necessidades, o meio que lhe rodeia (CHARNAY, 2001). Existe um interesse, por parte do professor, em suscitar a curiosidade de seus estudantes. Ele procura ajudá-los com fontes de informações, respondendo suas demandas, encaminhando-os com diferentes ferramentas de aprendizagem, dentre elas, fichas de exercícios. Ao estudante, cabe a função de pesquisar, organizar a informação e estudá-la, para aprender. No que concerne ao saber, está intrinsecamente relacionado às necessidades do estudante, assim como aos aspectos relativos à sua vida cotidiana e aos elementos que despertam e respondem aos seus interesses. De forma resumida, temos no Quadro 4 a definição do CONTRATO DIDÁTICO Incitativo, em função dos elementos do triângulo didático.

Quadro 4 - Características do CONTRATO DIDÁTICO Incitativo.

CONTRATO DIDÁTICO Iniciativo	**Características**
Expectativas	Em relação ao professor: • Organizar informações a partir de professor estudos e pesquisas; • Interagir com o estudante para saber o que lhe interessa; • Ter relação mais distante com o conhecimento; • Organizar um meio antagônico.
Expectativas	Em relação ao estudante: • Ter relação mais próxima com o conhecimento; • Interagir com o professor e colegas; • Ser sujeito ativo na construção do conhecimento.
Expectativas	Em relação ao saber escolar: • Trabalhar em etapas; • Ser fragmentado; • Construir a partir de interesses e experiências prévias do estudante.
Divisão de responsabilidades	Professor proporciona situações que conduzirão a construção do conhecimento pelos estudantes. Estudantes são agentes ativos no processo.
Negociação	O CONTRATO DIDÁTICO deve estar sujeito a rupturas, possibilitando reflexões, reorganização sociocognitiva, levando o estudante à aprendizagem.

Fonte: Os autores.

O CONTRATO DIDÁTICO Aproximativo tem como elemento central a construção do saber, agora, pelo estudante. Ao professor cabe a tarefa de organizar materiais, sequências de situações com diferentes dificuldades[17] e fases (investigação, formulação, validação e

[17] Na ideia original do autor a palavra é 'obstáculo', por nós substituída por acreditarmos que esse termo carrega em si significado às vezes diferente do proposto.

institucionalização) e a comunicação da aula. Assim como a proposição, no momento adequado, dos elementos convencionais do saber (notações, terminologia).

Nele, o estudante tem a função de ensaiar, ir em busca de soluções, discuti-las, confrontá-las com o grupo e defendê-las. Deverá manter uma interação com o objeto do conhecimento de formas diferentes, para que sejam requeridos esquemas de conhecimentos que devem ser ajustados cada vez mais à natureza desse conteúdo. O saber é construído de forma dialógica e considerado dentro de sua lógica própria. As ideias desse tipo de contrato dialogam com as defendidas por Freire (1997, p. 86) ao destacar que: "o fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, é dialógica, aberta curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que professor e alunos se assumam epistemologicamente curiosos". De forma resumida, temos no Quadro 5 a definição do CONTRATO DIDÁTICO aproximativo em função dos elementos do triângulo didático.

Quadro 5 - Características do CONTRATO DIDÁTICO Aproximativo.

CONTRATO DIDÁTICO Aproximativo	**Características**
Expectativas	Em relação ao professor: • Organizar as situações e intermediar interação do estudante e esse objeto, em um meio antagônico; • Acompanhar todo o processo de construção do conhecimento pelo estudante; • Planejar as situações didáticas, a partir de uma constante vigilância entre ação e reflexão; • Interagir com os estudantes; • Valorizar o turno de fala do estudante.
Expectativas	Em relação ao estudante: • Ser ativo no processo de construção do conhecimento; • Ter relação próxima com o saber; • Interagir com o professor e colegas.
Expectativas	Em relação ao saber:

	• Ser construído de forma dialógica entre o professor e estudante;
Divisão de responsabilidades	Professor proporciona situações problemas que conduzirão a construção do conhecimento pelos estudantes. Ambos são agentes ativos no processo.
Negociação	O CONTRATO DIDÁTICO deve estar sujeito a rupturas, possibilitando reflexões, reorganização sociocognitiva, levando o estudante à aprendizagem.

Fonte: Os autores.

Uma questão importante destacada por Charnay (2001) em relação aos três modelos discutidos é que nenhum professor utiliza exclusivamente um deles, pois em sua prática docente, com toda complexidade a ela subjacente, faz uso de elementos de cada um deles. Entretanto o autor a salienta que cada professor faz, consciente ou não e de maneira privilegiada, o uso de elementos de cada um deles e concordamos com o autor nesse destaque. Para nós, o estabelecimento do CONTRATO DIDÁTICO (consciente ou não) está associado à concepção de ensino e de aprendizagem que subjaz à prática de cada professor e ambos podem ser fatores de influências na construção do conceito visado.

Feitas as devidas discussões sobre o nosso objeto de estudo e atribuídos tipos específicos de Contratos Didáticos em função das ideias de Charnay (2001) e demais autpres da literatura de referência, no próximo capítulo, procuraremos entender melhor nosso objeto matemático, o saber escolar fração.

4. NÚMEROS RACIONAIS: AS FRAÇÕES

Como parte da fundamentação teórica, este capítulo está separado em quatro seções. Na primeira, tratamos da conceitualização do saber escolar fração, levando em consideração seus elementos históricos, epistemológicos e matemáticos. Na segunda, tratamos de sua conceitualização, levando em consideração os elementos didáticos. Esta subseção está dividida em três subseçõesdas: na primeira, a concepção de fração enquanto parte e todo; na segunda, razão e, na terceira, quociente. Na terceira seção, discutimos as possíveis causas para as dificuldades de aprendizagem fração apresentadas pela literatura de referência no tocante e, na quarta, os direcionamentos dados pelos documentos curriculares PCN (2001) e BNCC (2017) para esse saber escolar.

4.1 CONCEITUALIZAÇÃO DO SABER ESCOLAR FRAÇÃO: ELEMENTOS HISTÓRICOS, EPISTEMOLÓGICOS E MATEMÁTICOS

Na antiguidade, assim como no mundo contemporâneo, o saber escolar fração está presente nas práticas sociais, inclusive, desde muito cedo. Por isso, segundo Silva (2005), desde a Antiguidade há, na gênese da numeração fracionária, registros de práticas com o objetivo de realizar medições a partir da comparação com uma unidade tomada como referência. Assim, para a autora "o número surge, então, da necessidade de dividir a unidade escolhida, para que a medição se concretize" (SILVA, 2005, p. 60).

A título de exemplo, a autora menciona que os egípcios antigos empregavam parte do corpo para tomar como unidade de medida de comprimento: cúbito, palmos, dedos, etc. Já na China antiga, ainda no século II a. C, há registros de unidades empregadas na medição de tecidos e terras, quais sejam: *pi, zhang, chi, jin, liang, zhu, bu, um, ging*. Mais tarde, com o advento da expansão comercial, por volta do século XII, na Inglaterra, o rei Henrique I estabelece a jarda como unidade oficial para medidas de comprimento. A jarda, por sua vez, equivale à medida da ponta do nariz até o polegar do rei, com o braço estendido.

Desse modo, sabe-se que as crianças já possuem um conhecimento intuitivo sobre ele, mesmo antes de chegarem à escola, baseando-se, essencialmente, em experiências vivenciadas no seu dia a dia (CRUZ e SPINILLO; 2014). Por exemplo, ao dividirem frutas chocolates ao meio. Em sentido mais amplo, as pessoas lidam cotidianamente com fração em situações diversas, tais como ao lerem uma receita culinária, ao pedirem uma pizza ao garçom e vê-lo dividindo em partes iguais e na compra de produtos vendidos por quilograma.

O conteúdo fração é parte das atividades humanas desde muito tempo, pois os egípcios e mesopotâmicos, conforme assinala Powel (2018), já usavam frações em atividades diárias. De forma mais detalhada, ele surgiu a partir das necessidades dos indivíduos, quando se depararam com medições de comprimento em que a unidade escolhida não cabia em um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida.

Nessa mesma linha de ideias, Powell (2019) chama atenção ao fato de que para medir as distâncias da terra, os antigos agrimensores egípcios esticaram cordas nas quais o comprimento entre dois nós representava uma unidade de medida. No mundo contemporâneo, esse saber permeia as práticas sociais, desde muito cedo. Nesse sentido, sabe-se que as crianças já possuem um conhecimento intuitivo sobre ele, mesmo antes de chegarem à escola, baseando-se, essencialmente, em experiências vivenciadas no seu dia a dia (PITKETHLY & HUNTING, 1996; SPINILLO e CRUZ, 2004). Por exemplo, aspectos que envolvem a ideia de divisão pela metade, bem como a noção de meia volta mostram situações que fazem uso da noção de fração. Em sentido mais amplo, as pessoas lidam cotidianamente com o saber fração em situações diversas, tais como na leitura de uma receita culinária, indicador do nível de combustível de um veículo e na compra de produtos vendidos por quilograma.

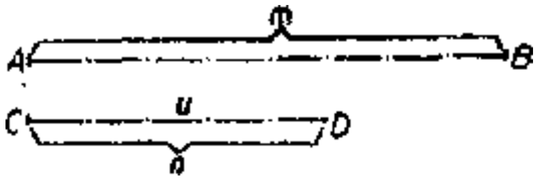
Além dos usos sociais, o saber fração possibilita estabelecer articulações com outros campos da Matemática, em especial com Grandezas e Medidas e Geometria. Um exemplo dessa articulação é visto na medição de comprimentos, destacado por Caraça (1951), o qual está no cerne do desenvolvimento desse saber. É também por meio das frações que se estabelece uma relação intrínseca entre Números, Grandezas e Medidas e Geometria. Por exemplo, quando a criança é convidada a identificar a fração $\frac{3}{4}$ representada em um retângulo dividido em quatro partes de mesma área, sendo três delas hachuradas, entram em cena o número, a figura geométrica e a grandeza área. Outra articulação possível acontece entre frações e outros conceitos do campo numérico, entre eles, proporcionalidade e probabilidade.

Diante das ideias expostas, podemos dizer que as frações surgiram a partir de uma necessidade humana, em especial ao passo que os indivíduos queriam saber, por exemplo, a extensão de uma distância d, em comparação com uma unidade de medida u. Para tanto, teríamos dois casos: no primeiro, u cabe uma quantidade inteira de vezes em d e, no segundo, u não cabe uma quantidade inteira de vezes em d e, por isso, precisa ser subdividido em partes menores, cujo processo vai produzir um número fracionário.

Nessa perspectiva, Caraça (1951, p. 35) define esse novo número, conforme segue:

Sejam, (Figura 5), os dois segmentos de recta $A'B$ e $C'D$, em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento $u - A'B$ contém m vezes e $C'D$ contém n vezes o seguimento.

Figura 5 - Segmentos de recta $A'B$ e $C'D$.



Fonte: Caraça (1951, p. 35).

Diz-se, por definição, que a medida do segmento $A'B$, tomando $C'D$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escreve-se:
n

1) $A'B = \frac{m}{n}. C'D$, quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não $n$nulo); se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é $n$cociente da divisão; se m não for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ diz-se fracionário (CARAÇA, 1951, p. 35).
O número$\frac{m}{n}$. diz-se, em qualquer hipótese, racional - ao número m chama-se numerador e ao número n denominador.

Ante o exposto, recorrendo ao contexto da medida, Caraça (1951) nos traz uma distinção interessante relacionando os números inteiros e os números fracionários, definindo-os, em todo caso, como um número racional. Segundo o autor, o número fracionário $\frac{m}{n}$ é também inteiro, quando é m é um múltiplo de n.

Powel (2018; 2019) corrobora a perspectiva de número fracionário apresentada por Caraça (1951), ou seja, aquela pautada na medição na qual se estabelecem relações entre grandezas, ao mesmo tempo em que apresenta uma segunda perspectiva, entendida como a subdivisão de um inteiro em partes iguais. Segundo o autor, essa ideia leva em consideração a perspectiva formalista pautada na utilização de regras e símbolos matemáticos. Para esses casos, a perspectiva de relação não é evidenciada, cuja ênfase recai na contagem das subdivisões do todo. O autor ainda destaca que, em cada uma delas, existe uma origem histórica e consequência epistemológica enfatizando sua influência no conhecimento do referido conceito. Uma dimensão importante por ele ressaltada em relação ao particionamento é que:

> O entendimento dominante atual de como uma fração recebe seu nome está enraizado em um desenvolvimento relativamente recente na história da matemática. Esse desenvolvimento histórico ocorreu no início do século 20 e é baseado em uma visão filosófica defendida pelo influente matemático alemão David Hilbert, chamada de formalismo. Os formalistas acreditavam que toda a matemática pode ser formulada com base em regras de manipulação de fórmulas, sem qualquer referência aos significados das fórmulas ou contextos práticos.
> (...)
> Uma definição formalista de números racionais é a seguinte: os números racionais representados como frações comuns são símbolos bipartidos que expressam

> quocientes ou razões de dois inteiros, a / b, de modo que a e b são inteiros e $b \neq 0$. Na expressão, a/b, a é chamado de dividendo ou numerador e b o divisor ou denominador. (POWELL, 2019, p. 701).

Essa citação nos remete à ideia advinda dos formalistas, em que viam a Matemática como meros objetos primários do pensamento matemático, apenas representações de símbolos independentes de seus significados (SIMONS, 2009). Para o autor, essa crença filosófica relacionada à natureza da Matemática permeia a educação matemática e tem como consequência a pouca atribuição de sentido para as crianças.

Ademais, Segundo Powell (2019), na abordagem dessa perspectiva, educadores matemáticos desenvolveram representações visuais que fornecem a definição formal de uma fração com interpretações que envolvem a partição de itens do cotidiano, a partir da utilização de pizzas, barras de chocolate, dentre outros elementos. Diante disso, Bertoni (2009, p.12) destaca que "o foco principal é tornar clara para a criança a existência de situações significativas do contexto que demandam a introdução de novos números. Números têm que funcionar na vida, não só em figuras divididas, onde nem adquirem verdadeiramente esse significado". Uma forma de ilustrar uma situação com sentido para as crianças seria perguntar-lhes qual seria a divisão de 5 chocolates para 4 crianças. Elas poderiam concluir que a resposta não daria em um número inteiro e sim por um fracionário.

Para Powell (2019), embora tais contextos fornecem às crianças acesso visual à definição formalista de uma fração e seu símbolo bipartido $\frac{a}{b}$, essa perspectiva acarreta dificuldades cognitivas para os alunos. Detalhes sobre alguns entraves ocasionados em função dessa perspectiva serão abordados em tópico específico mais adiante.

Para além dessa definição de número fracionário associado à ideia de medida, Niven (1984) apresenta outra em um contexto essencialmente matemático. Logo, para ele "um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma $\frac{a}{d}$, onde a e d são inteiros e d não é zero". (NIVEN, 1984, p. 30).

Segundo o autor, cotidianamente, costuma-se utilizar como sinônimos os termos "número fracionário" e "fração", inclusive na escola. Entretanto, sob a ótica da Matemática, Niven (1984) escreve que "a palavra fração sozinha, é usada para designar qualquer expressão algébrica, como, por exemplo,

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad \frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$$

Com isso, ele ressalta que a expressão $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ é uma fração, mas não é um número racional, visto que não pode ser escrita como uma razão de dois números inteiros com denominador diferente de zero. Já a fração $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$ é um número racional, uma vez que pode ser escrita como razão de dois números inteiros com denominador não nulo. Ou seja, segundo o autor, toda todo número facionário é uma fração, mas nem toda fração é um número fracionário, pois algumas delas podem não ser escrita como a razão entre dois números inteiros.

Ressaltamos, entretanto, que para nós, o termo fração será entendido como um número racional fracionário, por entendermos que em diferentes espaços e documentos institucionais, o entendimento de fração como tal já está pacificado. Segundo Caraça (1951) e Níven (1984), em Matemática existem os números fracionários. Entretanto, para que um saber se torne ensinável, faz-se necessário sua transposição, que se materializa nos documentos curriculares. Neste caso, os números fracionários assumem o status de fração e, por consequência, assumem diferentes significados.

Diante das ideias expostas, destacamos a importância da análise histórica dos números racionais, sua distinção com os inteiros e as frações. Para além dela, consideramos importante, na próxima subseção, discutirmos os aspectos didáticos relacionados às diferentes concepções que perpassam o saber investigado, nos anos iniciais do EF.

4.2 CONCEITUALIZAÇÃO DAS DIFERENTES CONCEPÇÕES DO SABER ESCOLAR FRAÇÃO: ELEMENTOS DIDÁTICOS

No contexto didático, um aspecto importante destacado pelos PCN (BRASIL, 1997) é a necessidade de se optar por começar o estudo das frações pelo seu reconhecimento nas práticas sociais. Esse documento observa ainda que é muito comum o uso de representações dos números racionais em sua forma decimal; já as situações dirigidas ao racional na forma frações ficam resumidas a ideias vinculadas a metade, terços e quartos.

Acerca disso, estudiosa do conceito afirma ainda que facetas de um mesmo número, as duas representações são, geralmente, tratadas de modo estanque, como se dissessem respeito a números diferentes e explica que:

> São confundidos o número e suas representações. Por estarem presentes nas quantias monetárias e nas medidas, as representações decimais tendem a ser mais aceitas pelos alunos; o que é reforçado pelo fato de os cálculos feitos com as representações decimais apresentarem bastante analogia com os cálculos feitos com números naturais. Já as representações fracionárias aparecem raramente em situações culturais, são insolitamente constituídas de dois números naturais e um traço separando-os; os cálculos são tão diferentes que nem parece tratar-se de operações com os mesmos significados daquelas entre números naturais. (BERTONI, 2004, p. 2).

Em relação à concepção de fração, por exemplo, (BERTONI, 2009, p. 12) destaca que "por mais que crianças aprendam os procedimentos da associação de números a figuras divididas e de regras que se diz fornecerem o resultado de operações, não há sombra de dúvida de que não estão entendendo e elaborando a construção desse conceito".

Outra dimensão importante destacada por Mandarino (2010) do ponto de vista didático é que o ensino de frações possa garantir aos estudantes o início de seu estudo a partir da exploração da divisão em seus dois sentidos: enquanto repartição e medida. Para a autora, incentivar o trabalho com divisão não significa ensinar o algoritmo, e destaca "É preciso explorar os significados das operações e o cálculo de resultados por processos operatórios espontâneos, antes da apresentação dos algoritmos formais ou não formais".

Além de um trabalho desenvolvido em função desses dois elementos, Câmara dos Santos e Maciel (2007) chamam atenção para o fato de que a construção do conceito de fração requer um determinado período de tempo, necessitando de diferentes experiências que permitam sua compreensão. Corroborando essas ideias, BNCC (2017) sugere que o ensino desse conteúdo aconteça desde o 2º ano do EF e se estenda até o final desse nível de ensino, enfatizando que a cada ano haja um aumento na complexidade de seu ensino. Defendemos essa ideia e consideramos ser de extrema importância o início desses estudos desde os anos iniciais da Educação Básica.

Para além dessas recomendações, uma questão importante que destacamos é a possibilidade de se estabelecer articulações entre as frações que de Números e operações com outras unidades temáticas da Matemática, em especial Grandezas e Medidas e Geometria. A exemplo dessa articulação, temos a medição de comprimentos, destacada por Caraça (1951). Assim como, ao ser convidada, uma criança identifica a fração $\frac{3}{4}$ representada em um retângulo dividido em quatro partes com três delas hachuradas, entram em cena o número, a figura geométrica e a grandeza da área. A fração também pode exprimir uma razão entre duas grandezas; é o caso, por exemplo, quando se questiona a relação entre o número de meninas e meninos numa classe com 16 meninas e 12 meninos, que é o mesmo que dizer que na classe existem quatro meninas para cada três meninos.

Além da articulação entre unidades temáticas, outra possível acontece entre frações e demais conceitos do campo numérico, entre eles, proporcionalidade e probabilidade. Isso posto, percebemos a importância desse conceito, em especial para a compreensão de outros. Diante disso, Powell (2019) chama atenção ao fato de que a dificuldade no entendimento das frações pode comprometer o progresso dos estudantes com os conceitos. Esse entendimento é, inclusive, importante para que eles avancem, também, na aprendizagem de outros conceitos, como é o caso daqueles relacionados ao pensamento algébrico e à Álgebra, uma vez que a generalização da Aritmética pode exigir que tais competências já tenham sido desenvolvidas pelos estudantes. Apesar dos usos sociais, das articulações com outras unidades temáticas e com outros conteúdos matemáticos, não é possível afirmar que eles são suficientes para a construção do conhecimento formal; por isso, é necessário que se faça um trabalho bem estruturado para possibilitar a sua aprendizagem.

Melo *et al* (2013) ressaltam o quanto a aprendizagem das frações exige uma reflexão cuidadosa por parte dos professores, principalmente em relação ao papel e funcionamento das suas representações e significados. Corroborando essa ideia BNCC (BRASIL, 2017) destaca que o professor deverá desenvolvê-lo em função das ideias de: número (elemento dos racionais), operador (quando se relaciona à inteiros discretos ou contínuos) e ainda como representante de relações (entre parte e todo, razão entre a partes).

Em relação às representações, é importante destacarmos o seu papel importante na construção do conhecimento matemático. Além de destacar tal importância, os PCPE trazem algumas delas que podem ser trabalhadas na educação básica, no que se refere aos números racionais:

> A Matemática comporta uma diversidade de formas simbólicas, presentes em seu corpo de conhecimento. Língua natural, linguagem simbólica, desenhos, gráficos, tabelas, diagramas, ícones, entre outros, desempenham papel central, não só para representar os conceitos, relações e procedimentos, como para a própria formação deles. No caso por exemplo, um mesmo número racional pode ser representado por diferentes símbolos tais como $\frac{1}{4}$, 0,25, 25%, ou pela área de uma região plana ou, ainda, pela expressão "um quarto" (PERNAMBUCO, 2012, P. 19-20).

Por entendermos que, além das representações, as diferentes concepções do saber escolar fração são elementos didáticos importantes para o nosso estudo, nos deteremos em apresentar os contemplados nos PCN (BRASIL, 1997) e na BNCC (BRASIL, 2017), sejam eles: parte-todo, razão e quociente, mas sabendo que existem outros. Um aspecto importante destacado por Mandarino (2010) é que, no ensino fundamental, não é importante apresentar essa classificação, mas promover situações diferenciadas que contemplem os diferentes significados. Além disso, a autora coloca que a abordagem deve principiar pelo significado parte-todo, mas que não se deve ficar restrito a ele. Para melhor entendê-los, detalharemos, separadamente, cada um deles.

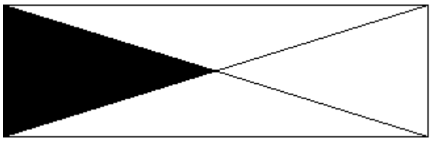
4.2.1 Concepção de Fração enquanto parte e todo

Segundo Campos, Magina e Nunes (2006), o significado parte-todo consiste na partição de um conjunto em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada por *n*. Mandarino

(2010) acrescenta ainda que ele se divide em parte-todo de grandezas contínuas e de grandezas discretas. Essas ideias se encontram no cerne daquelas colocadas por Powel (2018, P. 82), em que “uma fração é uma relação contável ou aditiva que compara dois aspectos de uma quantidade dividida ou discretizada em partes iguais, do total das partes discretas considera-se um certo número delas”.

Em se tratando das grandezas contínuas e discretas, colocadas por Mandarino (2010),. a primeira está associada às grandezas geométricas (comprimento, área e volume), enquanto a segunda, refere-se a coleções de objetos. A título de ilustração, tem-se no primeiro caso, frações de uma pizza e, no segundo, fração de conjunto de bolinhas de gude. Mandarino (2010) destaca que, na relação parte-todo, o que deve ser equivalente é a grandeza, ainda que seus objetos sejam qualitativamente distintos, conforme mostrado nas figuras 5 e 6. A fração $\frac{1}{4}$ pode ser representada por diferentes regiões, mas todas de mesma área, considerando que os retângulos são congruentes.

Figura 6 - Representação de fração parte-todo com grandeza contínua.



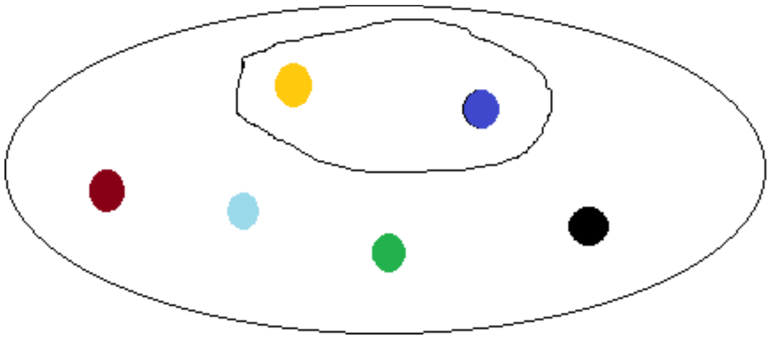
Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 7 - Representação de fração parte-todo com grandeza contínua.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Em se tratando das frações enquanto parte-todo com grandezas discretas, o que é equivalente é a cardinalidade dos subconjuntos de uma coleção de objetos, não necessariamente de mesma natureza, conforme Figura 7. Uma fração$\frac{2}{6}$ do conjunto a seguir, representa duas das seis bolinhas, que independe da cor de cada uma delas.

Figura 8 - Representação de fração parte-todo com grandeza discreta.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Um aspecto importante colocado por Powel (2018) é que, quando se discute fração parte- todo envolvendo grandeza contínua, o todo que era contínuo, a partir do momento de sua partição, torna-se em partes discretas. Com isso, segundo o autor, a partição de uma grandeza contínua se torna em algo discreto ou contável.

Além disso, o autor enfatiza que esse significado está na origem do conhecimento desse saber. Por esta razão, seu ensino deve principiar por ele, de modo a reproduzir minimamente o processo natural de sua construção e de seu desenvolvimento. Por esta razão, também há um detalhamento por nós dado no referido texto, justificando-se pela epistemologia dada ao saber, que emerge da ideia de fração parte-todo. Para os que seguem, o leitor não encontrará minuciosa discussão.

4.2.2 Concepção de Fração enquanto razão

A concepção de razão, segundo Mandarino (2010), consiste em estabelecer, por meio de uma fração, uma comparação de grandezas, que podem ser contínuas ou discretas e não necessariamente de mesma natureza. Para exemplificar, as do primeiro caso são vistas ao comparar a relação entre meninas e meninos em uma sala de aula, enquanto no segundo caso, na vazão de água de uma torneira, em uma dada duração de intervalo de tempo.

Esses exemplos ilustram, simultaneamente, um caso de uma grandeza de mesma natureza (quantidade de estudantes) e de naturezas distintas (volume de água e duração de intervalo de tempo). Em se tratando desse significado, a autora chama atenção para o fato de que a comparação não acontece entre partes de um mesmo inteiro, mas de inteiros distintos, diferentemente do que acontece com o significado parte-todo. No exemplo da pizza dado anteriormente, uma fração parte-todo relaciona partes da mesma pizza, enquanto no exemplo que relaciona a razão entre a quantidade de estudantes por sexo, os inteiros são distintos, sendo um formado pelos meninos e o outro pelas meninas.

4.2.3 Concepção de Fração enquanto quociente

A concepção de fração como quociente consiste na representação fracionária da divisão de dois números inteiros, em que um deles, o denominador, não é zero. É o caso, por exemplo, da divisão de 2 por 3, representada por 2/3. Segundo Mandarino (2010), esse significado exige um pouco mais de abstração por se afastar ligeiramente de contextos próprios dos estudantes, conforme os casos anteriores. Por isso, por vezes, sua abordagem é deixada para os anos finais do ensino fundamental. Um aspecto a ser destacado desse significado em relação à fração enquanto parte-todo, é que nele acontece uma divisão entre dois números inteiros, sendo um deles diferente de zero, enquanto no outro, tem-se uma divisão de um todo em partes iguais.

De um modo geral, Mandarino (2010) evidencia que a abordagem dessas concepções deve ser feita de forma progressiva e que um novo significado seja introduzido somente após o estudante adquirir familiaridade com aquele que está sendo ensinado. Ela enfatiza também a necessidade da compreensão de cada significado, não se restringindo à reprodução de nomenclaturas, classificações e nem a casos simples e particulares.

A propósito, como também acontece na abordagem de muitos outros saberes escolares, o estudo das frações requer um conjunto sofisticado de tarefas que deem conta de alcançar todas essas concepções e faz-se necessário um trabalho bem estruturado para possibilitar a sua aprendizagem. Em função disso, concordamos com Moretti e Souza (2015, p. 161), quando afirmam que "a apropriação do conhecimento não se dá pelo simples contato natural com os fenômenos físicos e sociais circundantes, mas por meio da mediação que se estabelece sob condições de educação e de modo intencional". Diante desse contexto, percebemos a necessidade de desenvolvimento de um trabalho mais efetivo sobre as frações, em especial no 5º ano, iniciando-se com o significado parte-todo e ampliando-se gradativamente para os demais, em função de situações.

A partir da necessidade de um ensino em função da existência das diferentes concepções do saber escolar fração, é interessante ressaltar o papel de extrema importância do professor, pois ele será o responsável por criar situações que possam favorecer a construção e ampliação desse conceito pelos estudantes. Nessa circunstância, Câmara dos Santos e Maciel (2007) chamam atenção para a necessidade de abordar em salas de aula situações diversificadas que permitam que os estudantes atribuam sentido às diferentes concepções desse saber escolar.

Essa indicação reforça a importância de dirigir o nosso olhar à escola e identificar como esse conteúdo vem sendo trabalhado em seus diversos aspectos, para ser possível analisar os fatores de influências, em especial se as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA e os contratos didáticos funcionam como tais. Para além de procurar compreender esses dois elementos teóricos como fatores de influências na aprendizagem de frações, na próxima subseção discutiremos outros, apontados pela literatura de referência.

4.3 AS FRAÇÕES E AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DOS ESTUDANTES NO ENSINO FUNDAMENTAL

A abordagem do conceito de fração nessa modalidade de ensino, a princípio pode parecer uma atividade simples e desenvolvida sem muitas dificuldades, pelo menos se tomarmos como referência para essa análise o emprego de procedimentos prototípicos. O mesmo, no entanto, não se pode afirmar sobre o processo de aprendizagem em uma perspectiva investigativa, de construção do conhecimento, de forma autônoma pelos estudantes, tendo o professor como elemento norteador, mediador do processo, como preconizam os pressupostos da TSD.

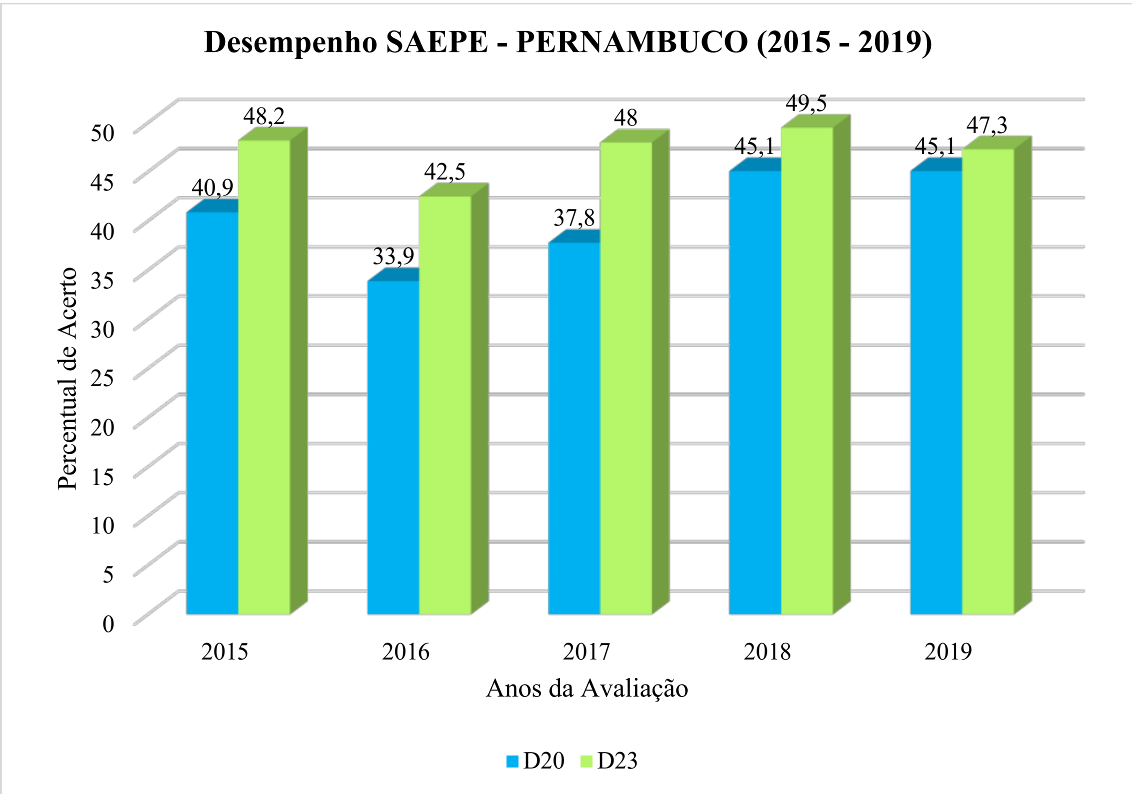
Uma das ideias destacadas nos estudos de Landim e Morais (2019) é a de que, à primeira vista, a dificuldade das crianças pode estar relacionada com o emprego de estratégias que valorizam a memorização e a técnica sem que sejam encorajadas à análise e à reflexão frente às atividades propostas. “Por mais que crianças aprendam os procedimentos da associação de números a figuras divididas e de regras que se diz fornecerem o resultado de operações, não há sombra de dúvida de que não estão entendendo e elaborando a construção dos números fracionários (BERTONI, 2009, p. 12). É muito comum que crianças alcancem algum sucesso na resolução de tarefas que envolvem frações mesmo distantes da compreensão conceitual desses números, sobretudo quando empregam procedimentos memorizados.

Desenhar figuras geométricas, dividi-las em partes de mesmo tamanho, pintar algumas destas partes e depois escrever a relação entre o número de partes pintadas e a quantidade total de partes não tem sido suficiente para expressar o que está implícito nesse processo tão trivial na escola que é o saber escolar fração, que deve ser compreendido, dentre outros aspectos, a partir da insuficiência dos números naturais na resolução de problemas cotidianos.

A partir dessas ideias, Landim e Morais (2019) destacam que as escolhas do professor na apresentação desse conteúdo ainda apresentam traços de uma abordagem tradicional que deixa de lado a preocupação com o processo de compreensão conceitual que lança mão de um apanhado de regras e técnicas sem nenhum significado para a criança, em detrimento da preocupação com o processo de compreensão conceitual.

Em geral, a forma arbitrária como as frações têm sido abordadas na Educação Básica parece, pelo menos a priori, justificar o baixo rendimento. Esse fato pode ser constatado em função dos resultados dos exames de avaliação externa, pois eles vêm mostrando que os estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem de frações, conforme revelou o Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco (2015-2019). O gráfico seguinte apresenta os resultados dos descritores referentes a Números e operações, especialmente as habilidades que envolvem resolução de problemas com números racionais e, mais particularmente, as que envolvem os diferentes significados das frações apresentados pelos estudantes em tarefas que exigem a mobilização desse conteúdo.

Gráfico 1 - Desempenho dos estudantes do 5 ano do EF em relação aos descritores D20 e D23.



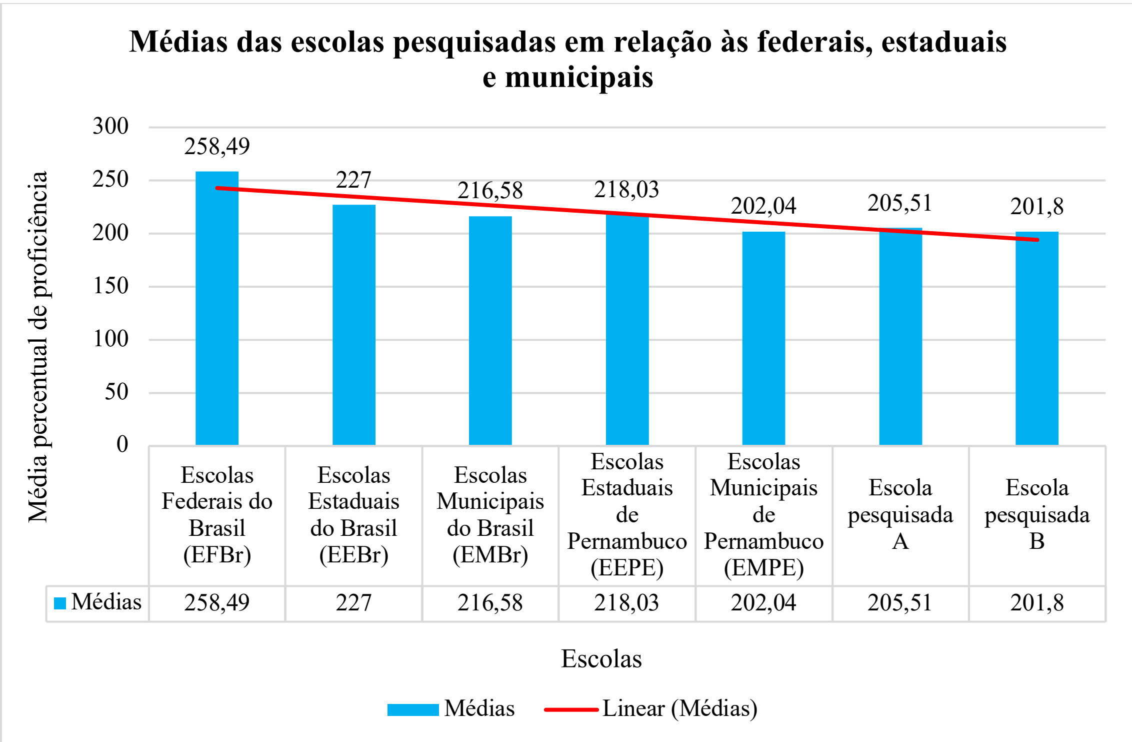
Fonte: Dados fornecidos via e-mail enviado pela Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco.

Os descritores D20 e D23 requerem, respectivamente, identificar as diferentes representações de um mesmo número racional e resolver problemas com números racionais expressos em forma de fração envolvendo diferentes significados.

Para ambos os descritores, o desempenho dos estudantes está aquém do desejável, tendo em vista que o percentual de acerto está abaixo de 50 %. É importante destacar que o descritor D20, embora tenha crescido a partir de 2017 em relação ao ano anterior, em 2019 ele se estagnou. Já o descritor D23 indica uma estagnação e, por vezes, até mesmo uma queda em relação ao ano anterior, como aconteceu entre os anos de 2018 e 2019.

Uma questão importante a ser destacada é que, apesar de o Município onde foi desenvolvida a pesquisa empírica liderar o IDEB[18] nos anos iniciais do EF, muitas escolas ainda apresentam coeficientes insatisfatórios em relação aos descritores que envolvem Números e Operações, mais especificamente associados às Frações. Dentre aquelas que apresentaram baixos índices em relação às federais, estaduais e municipais do Brasil, selecionamos duas como sendo nosso campo de investigação. O Gráfico 2 mostra as médias das proficiências das escolas selecionadas em relação às demais.

Gráfico 2 - Médias das escolas pesquisadas em relação às federais, estaduais e municipais.

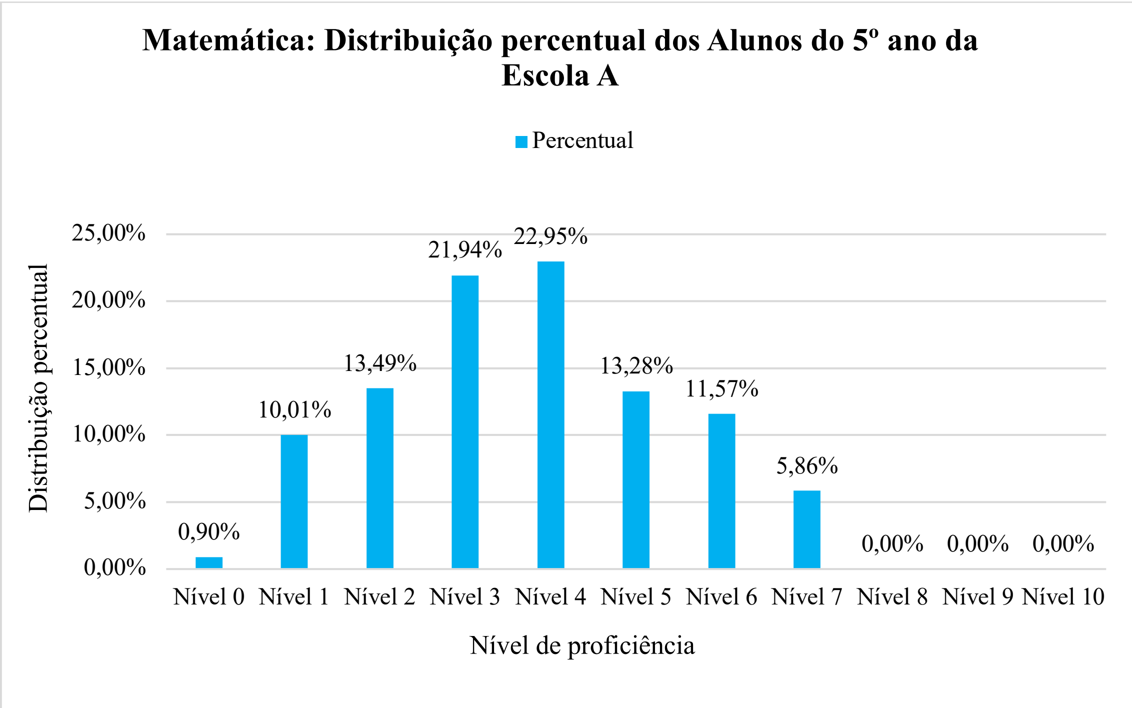


Fonte: INEP (2017)

[18] Instrumento criado pelo Governo Federal com o intuito de medir a qualidade do ensino da Educação Básica.

Assim, partimos da constatação de que ainda há entraves na aprendizagem em geral, e de frações em particular. Apesar da Escola A ter apresentado um nível de proficiência[19] acima da média das escolas municipais de Pernambuco, enquanto a Escola B apresentou um nível abaixo dessa média, quando se trata do conteúdo frações, os estudantes de ambas apresentam resultados semelhantes (níveis 3 e 4). No primeiro, os estudantes associam a fração $\frac{1}{4}$ a uma de suas representações gráficas e no segundo, reconhecem uma fração como representação da relação parte-todo, com o apoio de até cinco figuras, e associam a metade de um total ao seu equivalente em porcentagem. Os percentuais desses níveis são mostrados nos Gráficos 3 e 4.

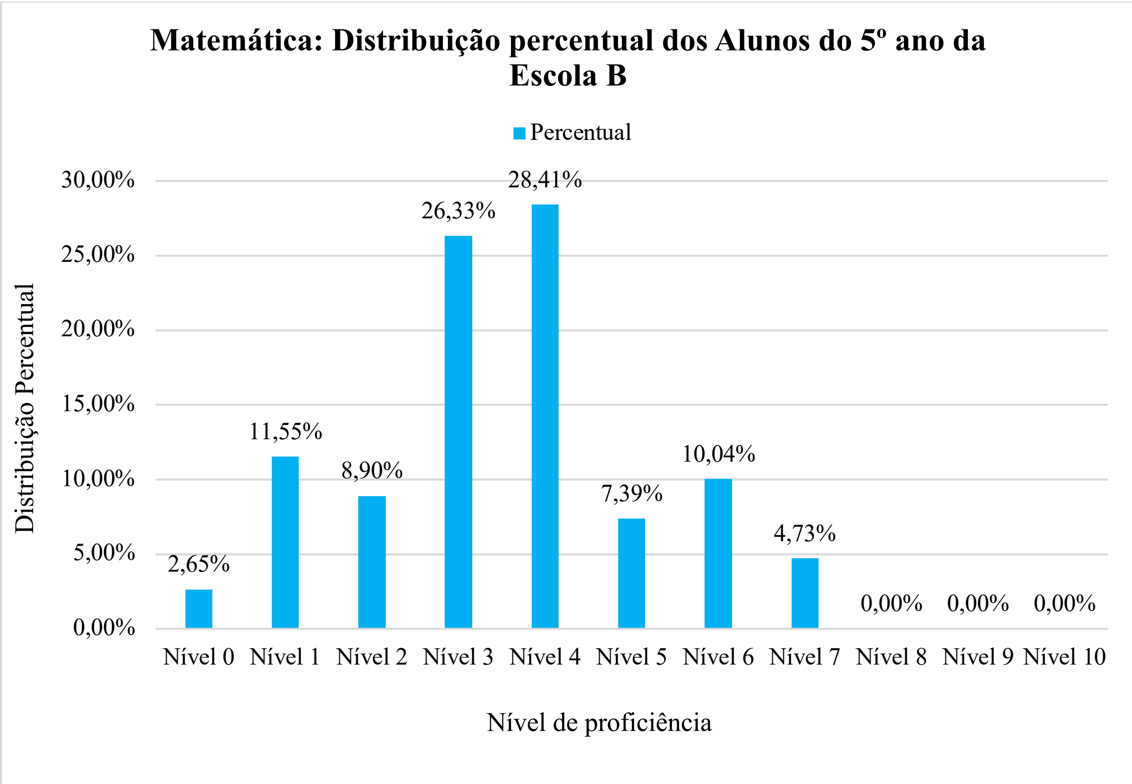
Gráfico 3 - Escola A: Distribuição Percentual dos Alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental por Nível de Proficiência - Matemática.



Fonte: INEP (2017) – Jaboatão dos Guararapes (PE).

[19] Proficiência refere-se ao conhecimento ou à aptidão demonstrados por estudantes avaliados em determinada disciplina e etapa de escolaridade (SAEPE, 2017, p. 18).

Gráfico 4 - Escola B: Distribuição Percentual dos Alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental por Nível de Proficiência - Matemática.



Fonte: INEP (2017) – Jaboatão dos Guararapes (PE).

Em todo caso, esses dados indicam que o desempenho dos estudantes não apresenta uma aprendizagem progressiva e consistente sobre os conteúdos avaliados, tendo em vista as oscilações observadas. Com isso, parece haver evidências de que na aprendizagem de frações existem entraves persistentes. Um aspecto importante a ser destacado é que essa dificuldade não se relaciona apenas ao contexto da educação brasileira, para Powell (2019, p.79):

> embora o conhecimento de frações seja essencial escolasticamente e socialmente, em muitos países, os estudantes têm dificuldades para compreender e operar com frações (OECD, 2014). O autor ainda destaca que aprender frações exige não apenas proficiência processual, mas também entendimento.

Em se tratando de pesquisas que se debruçaram sobre o objeto fração, Maia (2019) teve por objetivo inventariar as pesquisas produzidas em programas de pós-graduação strictu sensu brasileiros no período de 1997 a 2017 e que investigaram ou responderam questões referentes à aprendizagem de números racionais nos diferentes níveis do currículo. Dentre os resultados observados, a pesquisadora mostrou que:

> há um consenso entre os pesquisadores por ela analisados no sentido de que os números fracionários são fortemente focados no significado de parte-todo e que isso acaba levando a não compreensão dos números fracionários pelos alunos. Além disso, a maioria sugere mudanças do currículo na prática docente (MAIA, 2019, p. 8).

As ideias expostas pela autora reafirmam os elementos já mencionados anteriormente, ao se tratar sobre a ênfase em fração com significado parte-todo, como elemento de influência na compreensão do conteúdo investigado.

Em geral, "as frações sempre representaram um grande desafio aos estudantes, mesmo nas séries finais do Ensino Fundamental" (VAN DE WALLE, 2009, p. 322). Dentre os diversos conteúdos explorados nessa modalidade de ensino, em relação aos que os estudantes apresentam dificuldades, o ensino dos números racionais (frações e decimais) ainda é um desafio a ser enfrentado por professores, haja vista as dificuldades das crianças na compreensão dos seus diferentes significados (BERTONI, 2009).

As análises dos dados de pesquisas realizadas em função dessa temática, como, por exemplo, a de Câmara dos Santos e Maciel (2007), mostram a necessidade de se debruçar para analisar melhor esse objeto matemático. Uma dimensão importante mostrada é que nas demandas de formação continuada de professores de todos os níveis de ensino, as frações aparecem como uma das ideias que mais apresentam dificuldades no processo de ensino e aprendizagem.

O estudo de Maciel (2006) teve como objetivo identificar a concepção de frações e de equivalência de frações de alunos nas séries finais do ensino fundamental e do ensino médio. Para tanto, ele aplicou um teste diagnóstico para 630 alunos da rede municipal do Recife e do Estado de Pernambuco. As concepções por ele observadas mostraram que, na comparação de fração, os alunos consideram a de maior valor aquela que tem os maiores termos correspondentes. Além disso, ele observou que entre duas frações, a de maior denominador será sempre a de menor valor e que a equivalência de frações está estritamente associada à igualdade entre seus termos correspondentes.

Oliveira e Araman (2017), por exemplo, realizaram um estudo com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental (EF) e do 3º ano do Ensino Médio (EM) acerca dos entraves sobre os números racionais. Os autores discutiram 5 atividades e as analisaram com base na Análise de Conteúdo proposta por Bardin (2004). As análises dos resultados destacaram que os estudantes apresentam muitas dificuldades em todas as representações dos números racionais (fração, decimal e pictórica) e que essas estão presentes nos dois níveis de ensino, EF e EM, indistintamente.

Além dos estudantes, essa dificuldade tem sido observada com os professores. A pesquisa de Silva (2005) trata das concepções de um grupo de professores de Matemática sobre números fracionários e aprendizagem de alunos do 5º ano, de autonomia e dificuldades de possíveis mudanças dessas concepções em uma formação continuada. De um modo geral, a autora afirma que os professores constroem, para a quinta série, organização matemática muito rígida com tipos de tarefas que associam a concepção parte-todo em contextos de superfícies, mobilização a técnica de dupla contagem das partes e, com menos incidência, a concepção de razão.

Diante das ideias expostas, um aspecto importante a ser destacado é que, apesar desse estudo abordar a relação entre as concepções de ensino e o CONTRATO DIDÁTICO como fatores de influências na aprendizagem dos números racionais, e frações em particular, existem outros que podem estar contribuindo. O primeiro deles é a crença de que é um conteúdo fácil de ensinar e de aprender, fazendo com que muitos dos docentes não se atentem para a sua complexidade. Por essa razão, muitos deles priorizam determinados elementos e formas de abordagem desse conteúdo, acreditando que eles são suficientes para que a criança o compreenda. Nesse sentido, Moreto (2003) destaca que eles podem ser levados a crer que seus alunos alcançaram o objetivo de aprender aquilo que foi ensinado. Esse sucesso, como o autor aponta, na realidade é um pseudossucesso, pois os estudantes não avançaram na compreensão desse conteúdo. Na verdade, o que ocorre é uma forma de resolver por semelhança as atividades propostas.

O segundo fator surge ao serem priorizados alguns elementos desse conteúdo como, por exemplo, a ênfase nos problemas que tratam do modelo parte-todo(quase sempre são os mais frequentes nos livros didáticos) em detrimento dos demais e utilização de algoritmos Segundo Mandarino (2010), os livros didáticos não apenas priorizam fração com significado parte-todo, como também abordam de forma secundária o significado de razão. Por isso, a autora afirma que “Apesar de muito utilizada em situações reais, esta ideia não está suficientemente presente nos livros didáticos e nas salas de aula” (MANDARINO, 2010, p. 112).

Em geral, abordam com muita recorrência tarefas em que a unidade é uma região geométrica, seja ela retangular ou circular, como por exemplo, *uma pizza grande geralmente é dividida em oito fatias, Eduarda comeu duas fatias da pizza, qual a fração que representa a parte da pizza que Eduarda comeu?* Por outro lado, também podem ser identificadas atividades nas quais a unidade é um conjunto discreto de elementos, como acontece nas situações que fazem referência a determinada quantidade de laranjas em uma cesta de frutas, por exemplo.

O fato é que os problemas do tipo parte-todo - seja a unidade contínua ou discreta – parecem relacionados de forma mais imediata a contextos que são familiares aos estudantes. No entanto, apesar de tarefas cotidianas serem bem vistas como ponto de partida ao processo de aprendizagem do conteúdo, não se pode deixar de considerar que é papel da instrução escolar ir além do que acontece ao redor da criança, sobretudo proporcionando experiências com um amplo conjunto de situações de diferentes naturezas e que exigem condutas variadas dos estudantes (VERGNAUD, 1996).

Dessa forma, o modelo conceitual parte-todo, geralmente adotado para o estudo das frações, foi observado como dificultador do reconhecimento de outros significados, confirmando o que há muito tempo dizem pesquisadores como Kerslake (1986); Campos e Cols (1995); Nunes e Bryant (1997); Cavalcanti (2004) e Landim e Morais (2019). É o caso das tradicionais divisões de chocolate, pizza, figuras geométricas ou conjuntos de brinquedos ou bombons em partes iguais.

Ao analisar a abordagem de fração em um livro didático destinado ao 4° ano do ensino fundamental, Landim e Morais (2019) constataram que aproximadamente 59 % das atividades tratavam de fração com significado parte-todo, enquanto não houve ocorrências com o significado de razão. Analisando cronologicamente, mesmo após 10 anos em relação a constatações anteriores (SILVA, 1997; BEZERRA, 2001; CAMPOS E MAGINA, 2005; SANTOS, 2005; CAMPOS, MAGINA E NUNES 2006; BERTONI, 2009; MANDARINO, 2010), os resultados de Landim e Morais (2019) indicam haver pouco avanço em relação a uma abordagem menos desigual no que se refere aos diferentes significados das frações.

Essa abordagem evidencia uma compreensão parcial do conteúdo, por não contemplar as diferentes situações nas quais ele se aplica, a exemplo de razão. Segundo Mandarino (2010), fração com significado de razão é bastante usual em situações cotidianas e por isso seu ensino se justifica em sala de aula. Ainda assim, segundo ela e conforme os resultados obtidos por Landim e Morais (2019), o significado de razão não vem recebendo um tratamento devido, inclusive, por vezes, sequer é trabalhado.

Ao enfatizar o trabalho com o significado parte-todo, surge outra dificuldade que é muito comum os estudantes perceberem a fração como uma combinação de dois números – *numerador e denominador* – e não como um número que exprime a relação entre a parte e o todo, em diferentes contextos e com significados variados. É interessante destacar que as primeiras atividades dirigidas às crianças na aprendizagem de frações devem explorar a ideia de parte fracionária do todo e pode empregar modelos de área ou região, de comprimento e de conjuntos. Também é importante que elas compreendam que uma fração não indica necessariamente o tamanho do todo ou das partes, mas exprime a relação entre esses dois elementos (VAN DE WALLE, 2009).

Em vista disso, muitas das atividades propostas nos livros didáticos favorecem o entendimento da fração como uma combinação de dois números; é o caso, por exemplo, de quando a criança é encorajada a contar partes pintadas de uma dada figura sem que compreenda a sua ação, conforme já mencionamos. Em se tratando desse recurso pedagógico, outra questão que pode dificultar a aprendizagem desse conteúdo é que neles a abordagem das frações geralmente vem desarticulada dos números naturais, o que pode dar vida à compreensão de que são objetos distintos do campo numérico (BERTONI, 2009).

Diferente do que acontece nos problemas do tipo parte-todo, que são mais comuns ao cotidiano dos estudantes, é a abordagem normalmente de situações do tipo $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, que representam os problemas do modelo *quociente*. Nesse contexto, a criança é encorajada a dividir harmoniosamente duas barras de chocolates para cinco crianças, por exemplo. Então é quando percebem, de forma mais evidente, a insuficiência dos números naturais para resolver determinados tipos de problemas, sobretudo aqueles nos quais a unidade é formada por um conjunto discreto de n elementos que devem ser divididos em partes iguais e superior a quantidade n, como é o caso da divisão de duas barras de chocolates de forma justa para cinco crianças, mencionado anteriormente.

O quarto elemento diz respeito à natureza dos números fracionários, sobre a qual repousa um conjunto de obstáculos[20] epistemológicos com implicações diretas no ensino e na aprendizagem. No estudo dos números racionais, em particular das frações, os estudantes costumam se apoiar nas propriedades dos números naturais e estendê-las para o conteúdo investigado. Diante desse contexto, no que diz respeito à abordagem do significado parte-todo, Powell (2018, p. 82) destaca que "ela está baseada na contagem e numa concepção aditiva, os estudantes usam as propriedades e procedimentos dos números naturais para fazer inferências sobre números fracionários".

Segundo Powell (2018), isso acontece porque o sentido de frações é mal construído e fundamenta sua ideia em função de um estudo desenvolvido por Carpenter et al (1980) em que analisaram uma amostra nacionalmente representativa de estudantes americanos com 13 anos de idade (do 8° ano) que precisavam escolher a estimativa mais próxima para soma de 12/13+7/8 entre 1, 2, 19 21, ou "não sei." A maioria deles, escolheu 19 e 21 do que 2, e a resposta mais comum foi "19". Percebemos com esse estudo que a dificuldade apresentada

[20] Bachelard (1938) os definem como um saber resistente no processo de aprendizagem e que, a priori, dificulta ou impede o progresso do estudante diante de um determinado saber. Essas resistências podem ser originadas por obstáculos ontogenéticos, didáticos ou epistemológicos. Nesse momento, nos interessa de forma particular os de natureza epistemológica, visto que nosso foco é o professor. Ele é discutido por Bachelard (1938) e por Brousseau (1996) como um conhecimento relacionado à própria natureza do saber, que pode dificultar a emergência de outro. Para o último autor, o obstáculo tem a mesma natureza do conhecimento, isto é, constitui-se por um conjunto de objetos, relações, formas de entendimento, previsões, ramificações inesperadas, dentre outros elementos que buscam adaptar-se localmente, pelo processo que conhecemos como acomodação. Todavia, algumas vezes, essa adaptação extrapola o seu campo de validade.

pelos estudantes brasileiros não é tão diferente do que acontece em outros países, em relação ao conteúdo investigado.

Dentre os obstáculos epistemológicos inerentes às frações, podemos analisar alguns deles: o primeiro é que no conjunto dos números naturais, a multiplicação de dois números, em que um deles é diferente de zero ou 1, resulta em um número maior que quaisquer das partes. Com base no seu conhecimento de propriedades das operações com números naturais, os estudantes dificilmente entendem que a multiplicação de uma fração por outra fração positiva às vezes produz um resultado menor que os operandos originais (POWELL, 2018, P. 82). O segundo é que, na comparação das frações unitárias, comparam-se tão somente os denominadores, na condição de números naturais. O terceiro é que, para os números fracionários existem diferentes representações numéricas, enquanto para os números naturais, há somente uma. Para ilustrar as três situações acima, apresentamos ocorrências em cada campo numérico no Quadro 6.

Quadro 6 - Exemplos de obstáculos epistemológicos para os números fracionários.

Domínio Exemplos	**Naturais**	**Fracionários**	**Observações**
1	2*3 = 6	½*1/3 = 1/6	Enquanto que no domínio dos números naturais o produto é maior que as partes, nos fracionários, isso não necessariamente acontece
2	3 > 2	½ > 1/3	Ao comparar 1/2 com 1/3, os alunos costumam comparar 2 e 3 e concluir que 1/3 >1/2, pois 3>2.
3	3	1/3	Enquanto que não existe outra representação numérica para o número 3 no conjunto dos números naturais, o número 1/3 pode ser representado numericamente por 2/6 = 3/9 = ...

Fonte: Os autores.

Ao analisarmos as informações presentes no Quadro 6, constatamos que o referido conteúdo traz consigo entraves associados à sua natureza. Essas nuances indicam ser necessário um olhar mais cuidadoso e reflexivo por parte dos professores acerca de seu ensino e requer uma mudança de posição em relação à maneira como eles lidam com fração em sala de aula. Em outras palavras, apesar de ser um conteúdo que carrega certa complexidade, boa parte dos professores o entendem como ser de fácil ensino e por isso não se atentam para suas particularidades.

A esse respeito, Câmara dos Santos e Santos Filho (2015) investigaram 152 professores em turmas de 4° e 5° ano do ensino fundamental, com o objetivo de identificar conhecimentos e entraves desses docentes no desenvolvimento de trabalho com racionais. As análises mostraram que os professores usaram as nomenclaturas prototípicas das frações sem compreender a sua natureza. Isto é, concebia uma fração apenas como partes iguais de um inteiro. Não compreendiam o princípio da ordenação de frações unitárias, não concebiam uma fração como um número e não compreendiam que um número racional pode ter diferentes representações. Essa pesquisa revelou que os obstáculos acima mencionados perpassam pela compreensão dos professores. Dessa forma, entende-se que esses obstáculos precisam ser enfrentados para que não originem os obstáculos didáticos.

O quinto fator refere-se às fragilidades no domínio conceitual por parte dos professores, gerando-se dificuldades no ensino e na aprendizagem desse conteúdo. Dessa forma, Silva (2010) entende que dificuldades em relação ao domínio do conteúdo e à produção para o ensino baseado em regras prontas, localizadas em desenvolvimentos históricos mais recentes, devem-se à crença na aprendizagem por memorização. Esse condicionamento evidenciado pelo autor é, talvez, de forma inconsciente, reconhecido em sala de aula pelos estudantes, que por sua vez percebem as dicas e sinais. Estes dois últimos elementos podem lhe tirar a possibilidade de atuarem como sujeitos ativos no processo de construção de conhecimentos, levando-os por vezes à não compreensão dos objetos de um determinado saber.

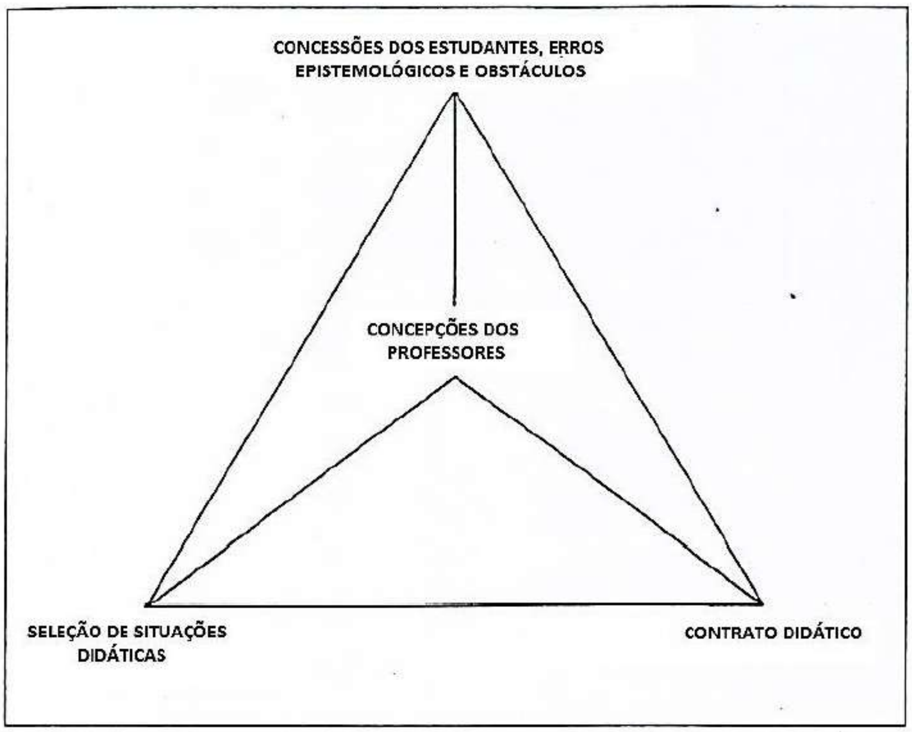
A partir das ideias explicitadas, na busca por entender, de forma mais aprofundada, as raízes do fracasso escolar em levar os estudantes dos anos iniciais a lidar adequadamente com frações, nos questionamos se a ênfase no ensino com métodos, técnicas de memorização e utilização de algoritmos e se as regras, além de outros elementos que regem o CONTRATO DIDÁTICO, são justificáveis por meio de uma forma mais global de estruturar os processos de ensino e aprendizagem, que por sua vez dependem, dentre alguns aspectos, das concepções de ensino mobilizadas pelos professores em prática docente. Carrillo e Contreras (1995), por exemplo, sinalizam em seus estudos a existência de obstáculos epistemológicos, construídos em função de concepções dos professores sobre a matemática e seu ensino; afirmando:

> Uma certa concepção sobre Matemática ou Educação Matemática poderia caracterizar a interpretação e tomada de decisão sobre as concepções, erros de aprendizagem ou obstáculos epistemológicos dos alunos, orientaria a uma certa opção de seleção de

> conteúdo ou busca de situações didáticas, e permitiria ou justificaria o quadro de negociação (implícito ou explícito) de um determinado CONTRATO DIDÁTICO (Brousseau, 1989). Nesse sentido, por exemplo, uma concepção da matemática como algo essencialmente instrumental ou uma concepção de a educação matemática marcadamente tecnológica, levaria a uma seleção de conteúdos bastante distintos daqueles que seriam obtidos em consequência de uma dinâmica da matemática, ou uma concepção investigativa da educação matemática (CARRILLO E CONTRERAS, 1995, p. 80-81, tradução nossa)[21].

Ao analisar essa citação, percebemos o quanto as concepções dos professores podem influenciar suas práticas, visto que muitas decisões podem ser tomadas em função delas, em especial a seleção de situações para construção de um determinado conteúdo. Uma dimensão importante a ser destacada pelos autores é que elas podem levar os professores ao estabelecimento de Contratos Didáticos e conduzir os estudantes a erros. A Figura 9 ilustra de forma concisa essa ideia.

Figura 9 - Concepções de ensino, CONTRATO DIDÁTICO e obstáculos.



Fonte: Carrillo e Contreras, 1995, p. 80.

[21]Una determinada concepción sobre la Matemática o la Educación Matemática podría caracterizar la interpretación y toma de decisiones acerca de las concepciones, errores de aprendizaje u obstáculos epistemológicos de los alumnos, orientaría una determinada opción de selección del contenido o búsqueda de situaciones didácticas, y permitiría o justificaría el marco de negociación (implícito o explícito) de un determinado contrato didáctico (Brousseau, 1989). En este sentido, por ejemplo, una concepción de la matemática como algo esencialmente instrumental o uná concepción de la educación matemática marcadamente tecnológica, llevarían a una selección de contenidos bastante distinta de la que se obtendría como consecuencia de una concepción dinámica de la matemática, o una concepción investigativa de la educación matemática.

Diante do exposto, percebemos como as concepções de ensino podem direcionar a prática docente e estabelecer Contratos Didáticos específicos e levar os estudantes a cometerem erros. Sendo assim, acreditamos que, ao direcionar nosso olhar para as concepções, pode-se, a partir delas, ver se apontam para um determinado tipo de CD, pois, de acordo com os pressupostos, apresentados as concepções podem influenciar e até mesmo definir as ações das práticas docentes

Segundo Powell (2018), até agora, as pesquisas em Educação Matemática não têm avançado na prática do ensino de frações e de suas operações a fim de que os estudantes possam construir e apropriar o conhecimento com facilidade. Por isso, considerarmos importante discutir o conteúdo em termos epistemológicos e didáticos, por acreditarmos que ela consequentemente pode resultar em reflexões que alcancem a atuação docente. Além disso, achamos interessante também, na próxima subseção, analisar as orientações dadas pelos PCN (1997) e BNCC (2017) em relação ao conteúdo investigado, visto que eles são documentos que devem nortear o processo de ensino e de aprendizagem.

4.4 O ENSINO DAS FRAÇÕES SOB O OLHAR DE DIFERENTES DOCUMENTOS CURRICULARES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste estudo, fizemos uma análise situada e comparativa de fração no 5° ano do ensino fundamental presente nos PCN (BRASIL, 1997) e BNCC (BRASIL, 2017). Ela situa cada documento no tempo e no espaço, considerando as dimensões social, política e econômica. Isso possibilita evidenciar as condições e restrições que pesam sobre cada documento, em particular sobre o objeto matemático em foco, no momento de sua concepção. Ao considerarmos que esses documentos regem os currículos, influenciam o planejamento e a tomada de decisões dos professores, procuramos conhecer o que eles trazem a respeito do ensino das frações no 5º ano do EF.

Os PCN anos iniciais formam um conjunto de documentos orientadores do ponto de vista curricular, publicados em 1997. Sua concepção se deu a partir de amplo debate com a participação dos diferentes segmentos que lidam direta ou indiretamente com a educação brasileira, com representantes da sociedade civil, de classes (professores), governamental e acadêmica. Um ponto de destaque é que essa discussão foi contemporânea à formulação, debates e promulgação da LDB, a qual instituiu uma política de Estado para a educação nacional. Com isso, essa publicação rompeu com a forma tradicional como o ensino da Matemática acontecia, que consistia na exposição do conteúdo oralmente pelo professor, por meio de definições, exemplos, demonstrações e finalizava com lista de exercícios, mostrando-se ineficaz.

Já a BNCC é um documento normatizador que instituiu um conjunto de competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em sala de aula, ao longo da educação básica. Ela foi concebida em função de diferentes olhares (representantes de professores, de pesquisadores, de lideranças comunitárias, da sociedade civil organizada e de governo) entre 2015 e 2017. Dessa forma, a base define um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais, ou seja, tudo aquilo que os estudantes precisam minimamente aprender. Um destaque por ela dado é o fato de que nenhuma escola brasileira poderá deixar de trabalhar os conteúdos nela presentes, sendo definidos como essenciais para todo estudante da educação básica brasileira, matriculados em redes públicas ou em escolas privadas, em qualquer lugar do país.

A partir da análise dos documentos, destacamos alguns elementos importantes em relação ao ensino de fração no 5° ano do EF. O primeiro é que, em se tratando das aproximações e distanciamentos entre os documentos, constatamos que os PCN preconizam o trabalho com frações somente a partir do segundo ciclo, por algumas razões. Primeiro, as frações não aparecem de forma recorrente em contextos diários das crianças, como acontecem com os números decimais. Segundo, ao estudar os números racionais, a criança costuma se apoiar nas ideias trazidas do campo dos naturais. No entanto, a natureza epistemológica do primeiro termina por ocasionar aos alunos a criação de alguns obstáculos. Por exemplo, o produto de dois números naturais não nulos e diferente de um é sempre maior que cada um dos fatores. Para o caso dos números fracionários isso não necessariamente acontece.

Por outro lado, a BNCC já sugere que o ensino desse conteúdo aconteça a partir do 2º ano, isto é, já no primeiro ciclo, ao propor o objeto de conhecimento "Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte" (p. 282), com vistas ao desenvolvimento da habilidade (EF02MA08)" que indica: resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais". (p. 283).

Considerando o objeto de conhecimento acima descrito, entendemos que a ideia de metade se legitima por estar presente no universo infantil, diferente da ideia de terça parte. Além disso, a BNCC não apresenta argumentos que justifiquem essa inserção da ideia de metade já a partir do segundo ano. Por essas razões, entendemos ser necessária uma abordagem cuidadosa, tendo em vista as dificuldades de aprendizagem, bem como a complexidade desse saber escolar (CÂMARA DOS SANTOS, 2005; BERTONI, 2009).

Um segundo elemento refere-se às diferentes concepções das frações (parte e todo, quociente, razão). Nos PCN encontram-se, a partir do 2° ciclo, sugestões para uma abordagem integrada por meio da resolução de problemas, além de uma descrição sobre cada um deles. Esse documento ressalta que o conteúdo deve ser retomado e aprofundado nos dois ciclos finais. Ainda que não haja indicação explícita para uma abordagem integrada das diferentes concepções das frações, a organização em ciclo sugere de forma tácita essa abordagem.

Em se tratando da BNCC, observamos que o trabalho com a concepção parte e todo e quociente inicia de maneira intuitiva no 2° ano, é ampliada no 3° ano e formalizada no 4° ano, o que consideramos pertinente, tendo em vista o desenvolvimento cognitivo das crianças dessa etapa de ensino. Entretanto, há uma sinalização para o trabalho apenas com essas concepções a partir do 4° ano, sem mencionar a concepção de operador e de razão. A primeira aparece no 6° ano, mas ambas são formalmente introduzidas somente no 7° ano. Essa situação pode levar a uma fragmentação do conteúdo, tendo em vista que as concepções se relacionam entre si. Além disso, o trabalho dissociado pode comprometer a compreensão das especificidades de cada uma por não permitir uma comparação entre elas.

Um terceiro elemento diz respeito à estruturação de cada documento. Enquanto os PCN fundamentam suas escolhas, a BNCC apenas lista os objetos de conhecimento e suas respectivas habilidades. Por exemplo, os PCN sugerem que a abordagem das frações seja introduzida somente a partir do segundo ciclo, tendo em vista sua complexidade conceitual. Nesse sentido, o documento explicita questões de natureza epistemológica e contextos pouco recorrentes nas práticas sociais como impeditivos para sua abordagem.

Para ilustrar essas duas situações, temos no primeiro caso que um obstáculo se manifesta quando a criança, ao multiplicar dois números fracionários, espera que o resultado seja sempre maior que quaisquer dos fatores, como acontece no conjunto dos números naturais. No segundo, em contextos sociais do universo da criança, os números decimais se destacam em detrimento dos fracionários, o que foi potencializado com o surgimento da calculadora. Esses destaques, portanto, são relevantes sob a ótica do processo de ensino e de aprendizagem. Diante disso, destacamos, de um modo geral, a importância que as escolhas apresentadas sejam justificadas, inclusive para uma melhor compreensão das orientações dadas.

Um aspecto importante trazido pelos PCN, que para nós merece ser destacado, foi a mudança de enfoque sobre a organização e abordagem dos conteúdos, assumindo três categorias: conceituais, procedimentais e atitudinais. A primeira estabelece a aprendizagem de conteúdos para o desenvolvimento intelectual do estudante. A segunda contempla, dentre outras coisas, a tomada de decisão de maneira consciente, bem como a realização de ações buscando atingir metas. Por fim, as atitudinais contemplam todo o saber escolar, considerando que a compreensão de atitudes e valores é inerente ao processo de ensino e de aprendizagem. Percebe-se, portanto, que as três classes de conteúdos devem ser exploradas de maneira integrada, sem privilégio a nenhuma delas.

Encontramos também, na avaliação dos referidos documentos, alguns pontos em comum em uma análise mais geral dos elementos da relação didática envolvidos no processo de ensino e a de aprendizagem que merecem destaques. O primeiro foi a modificação do papel dos estudantes e do professor em relação às frações. Os estudantes devem ser agentes ativos na construção do conhecimento, partindo do já aprendeu anteriormente em suas práticas sociais, a partir da metodologia de resolução de problemas. Diante desse contexto, o *National Council of Teachers of Mathematics* NCTM (1980)[22], apresentou recomendações para o ensino da Matemática. Dentre elas, as que interessam neste trabalho: a importância do desempenho de um papel ativo do estudante na construção do conhecimento; a ênfase na resolução de problema e a exploração da Matemática a partir de problemas vividos no cotidiano e encontrados em diversas disciplinas.

O segundo ponto em comum diz respeito ao professor, que passa de transmissor do conhecimento a organizador, facilitador, mediador do processo de aprendizagem. Para ser possível desempenhar esse papel, deverá levar em conta as condições socioculturais, expectativas, competência cognitiva de seus estudantes e, acima de tudo, escolher situações didáticas que possibilitem a construção de conceitos.

Conquanto, apesar destas recomendações, tanto nacionais quanto internacionais dos documentos orientadores para o ensino, análises dos resultados do SAEB mostram que as maiores dificuldades encontradas em questões se relacionam à aplicação de conceitos e à resolução de problemas, em especial de frações. Assim, essa dificuldade ainda é fortemente marcada pelas análises dos últimos resultados dessa mesma avaliação. Para justificar, talvez, ainda esse déficit em relação a elas, os PCN salientam que:

> As orientações sobre abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda são bastante desconhecidas; outras vezes a resolução de problemas tem sido incorporada como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação de aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente de escolha de técnicas ou formas de resolução conhecidas pelos alunos (BRASIL, 1997, p. 24).

[22] Fundado em 1920, o Conselho Nacional de Professores de Matemática é a maior organização de ensino de matemática do mundo. O NCTM realiza conferências nacionais e regionais anuais para professores e publica cinco periódicos.

Visando a mudar o quadro, as orientações trazidas tanto por PCN (1997) e BNCC (2017) salientam que essa metodologia de resolução de problemas deve priorizar a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favorecer a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios, como preconizam os pressupostos da TSD.

O terceiro aspecto está intrinsecamente relacionado à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Para tanto, os dois documentos recomendam o uso de recursos didáticos para a compreensão e utilização das noções matemáticas, o uso integrado a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.

O quarto elemento em comum é o papel de incentivador das aprendizagens e a interação/cooperação entre os estudantes, considerados tão importantes como a do professor/estudante. Eles propõem algumas aprendizagens, mas salientam que elas só poderão ser possíveis desde que o professor estimule os estudantes a criar, comparar, rever, perguntar e discutir. Tornar os estudantes sujeitos ativos, protagonistas do processo de aprendizagem e o professor, um mediador desse processo. Em relação à interação, os PCN trazem esse texto, no corpo do documento:

> É importante atentar para o fato de que as interações que ocorrem na sala de aula – entre professor e aluno ou entre alunos – devem ser regulamentadas por um “CONTRATO DIDÁTICO” no qual, para cada uma das partes, sejam explicitados claramente seu papel e suas responsabilidades diante do outro (BRASIL, 1997, p. 41 – 42).

Ao analisarmos a citação, consideramos haver um equívoco conceitual na definição de CONTRATO DIDÁTICO, pois nem sempre é possível explicitar papéis e responsabilidades dos sujeitos envolvidos no jogo didático. A partir do momento dessa explicitação, e na ausência de um determinado saber, acreditamos que essas responsabilidades estarão relacionadas a um contrato pedagógico, e não ao didático.

De modo geral, os PCN salientam que a atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas” como, por exemplo, regras de CONTRATO DIDÁTICO que são estabelecidas de forma involuntária em sua maioria, mas internalizadas pelos estudantes. É necessário pensar na construção e na apropriação do conhecimento matemático pelo estudante, de forma que ele venha a se servir dele para compreender e transformar sua realidade.

Além disso, o referido documento ressalta o fato de que o estudo dos fenômenos relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática pressupõe a análise de variáveis envolvidas nesse processo – estudante, professor, saber matemático – assim como das relações entre eles. Por isso, acreditamos que as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA e o CONTRATO DIDÁTICO, por exemplo, podem ser considerados fatores de influências e podem estar interferindo nesta relação, pois: tem-se buscado, sem sucesso, uma aprendizagem em Matemática pelo caminho da reprodução de procedimentos e da acumulação de informações, apesar de os documentos orientadores de ensino sinalizarem para uma perspectiva diferente, já explicitada anteriormente.

Discutidos os devidos elementos teóricos em que nos apoiamos, no próximo capítulo apresentamos a trajetória metodológica a ser percorrida para o desenvolvimento do nosso trabalho.

5 ITINERÁRIO METODOLÓGICO

Neste capítulo, dividido em três seções, apresentamos a trajetória metodológica a ser percorrida para o desenvolvimento do nosso trabalho. Na primeira, delineamos o percurso metodológico; na segunda, os instrumentos de levantamento de dados, divididos em duas subseções. Na primeira, a entrevista semiestruturada e na segunda, o acompanhamento das aulas. Na terceira seção, temos as categorias de análises utilizadas.

5.1 PERCURSO METODOLÓGICO

Apresentamos, nesta seção, as escolas, os sujeitos participantes e o objeto matemático de estudo, ressaltando os critérios de escolhas.

Foram selecionadas duas escolas da rede municipal de ensino de Jaboatão dos Guararapes, denominadas ficticiamente por A e B, que apresentaram médias de proficiência SAEB (2017) abaixo das estaduais e nacionais.

Em relação ao nosso objeto matemático o saber escolar frações, podemos dizer que foi escolhido por ser um conteúdo que, de acordo com as orientações curriculares PCN (BRASIL,1997); BNCC (BRASIL, 2017), deve ser abordado desde os anos iniciais do EF, sendo trabalhado em diversas situações didáticas de forma direta ou indireta, ao longo dos anos escolares desse nível de ensino.

Porém, de acordo com dados obtidos nos instrumentos de avaliação externa SAEB-(2013-2017) e SAEPE (2015-2019), os estudantes estão concluindo a primeira parte dessa etapa de ensino com dificuldades na construção desse saber escolar. Optamos pela escolha do 5º ano pois, conforme orientação dos documentos anteriormente citados, é nesse ano que o conteúdo frações deve ser tratado de uma forma sistemática e aprofundada em função de suas diferentes concepções.

Para iniciar a pesquisa empírica, fomos às duas escolas selecionadas. Para coletar dados, conversamos com as respectivas gestoras e pedimos a permissão para realização. Após recebermos a autorização, falamos com as professoras que aceitaram participar. Foi esclarecido para elas que faríamos uma entrevista com um grupo maior (10)[23] mas o acompanhamento das aulas aconteceria com um menor (3).

[23] Esse total se deu pela quantidade de turmas de 5º ano nas referidas escolas.

Na coleta dos dados, selecionamos para acompanhar 3 professoras, pois nosso critério para continuidade eram os professores que apresentassem características preponderantes da concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática Baldista, Escadinha e Socioconstrutivista, alinhadas às categorizadas por Câmara dos Santos (2005). Para ser possível essa seleção, fizemos uma análise das respostas dadas pelas 10 professoras na entrevista e as selecionamos em função das concepções explicitadas.

Diante desses critérios, foram selecionadas as professoras Joana, da escola A, Maria e Ana, da escola B. Os nomes a elas atribuídos, assim como os dos estudantes envolvidos, são fictícios, com o intuito de preservar o caráter ético e confidencial das informações de acordo com aceitação do termo de consentimento livre e esclarecido, assinados por elas. Pedimos também às professoras autorização para gravação das entrevistas e das aulas em áudio.

Até o final de 2019, acompanhamos a professora Joana e Maria. Não foi possível acompanhar Ana, pois sua turma funcionava no mesmo horário que o de Maria. Diante disso, combinamos com ela para acompanhá-la no segundo bimestre do ano de 2020. Entretanto, em função da pandemia do Coronavírus, só foi possível acompanhar as duas anteriormente citadas. Joana, que apresentou características preponderantes da concepção de ensino e de aprendizagem socioconstrutivista; e Maria, da baldista, não sendo possível acompanhar Ana que apresentou características preponderantes da escadinha, pois as aulas foram suspensas em março de 2020.

A primeira professora acompanhada foi Joana, efetiva, 13 anos de experiência docente, com formação em ciência da computação, mas tinha o curso de magistério. Sua turma era composta por 24 estudantes, com idades entre 09 e 11 anos. A segunda foi Maria, 25 anos de experiência, também efetiva, formada em pedagogia. Sua turma era composta por 22 estudantes, com idades entre 10 e 14 anos. Ambas utilizaram seis aulas de 2h cada para trabalhar o conteúdo fração. Consideramos que a quantidade de estudantes em uma turma é um elemento importante quando se trata de analisar o CONTRATO DIDÁTICO negociado em sala de aula. Entretanto, por terem praticamente o mesmo total nas turmas observadas, acreditamos que esse não foi um fator que interferiu na análise do fenômeno investigado.

5.2 INSTRUMENTOS DE LEVANTAMENTO DE DADOS

5.2.1 A entrevista semiestruturada

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012), a entrevista, além de permitir uma obtenção mais direta e imediata dos dados, serve para aprofundar o estudo, complementando outras técnicas de coletas de dados. Somando-se a isso, Minayo (2008) acrescenta que "entrevistas que combinam perguntas fechadas e abertas oferecem a quem as realiza a possibilidade de aprofundar o tema além do roteiro planejado". A partir das recomendações dos autores, fizemos uma entrevista semiestruturada[24] incluindo questões abertas e fechadas com as 10 professoras selecionadas, de acordo com critérios já descritos e, do resultado, selecionamos 3 e acompanhamos 2.

Na entrevista, tínhamos um roteiro que foi dividido em três blocos. No primeiro, abordamos questões sobre o livro didático. O material didático escolhido pela rede, assim como outros por elas adotados em sua prática de sala de aula, forneceu indicadores sobre as características do CONTRATO DIDÁTICO por ele negociado. A preferência por materiais mais estruturados, com ênfase no excesso de exercícios de aplicação pode indicar a tendência a uma concepção baldista associada a um CONTRATO DIDÁTICO Normativo.

Já os materiais que tendiam a oferecer maior liberdade aos estudantes, com atividades que permitiam a eles maior protagonismo, puderam indicar tendência a uma concepção escadinha associada a um CONTRATO DIDÁTICO Incitativo. Por outro lado, materiais didáticos que promoviam a colocação dos estudantes frente a problemas mais desafiadores, que permitiam a interação entre eles, os professores e o conteúdo, que os levassem à reflexão para construção do conhecimento de forma autônoma, podiam indicar a tendência a uma concepção socioconstrutivista associada a um contrato do tipo Aproximativo.

No segundo bloco, tratamos de questões voltadas à avaliação, pois entendemos que a forma como se avalia, os instrumentos utilizados, o olhar do professor diante do que foi construído pelos estudantes, nos dá indícios de sua concepção de ensino. A baldista e escadinha embasadas em uma avaliação de cunho mais tradicional, focada na classificação, utilizadas para mensurar a quantidade de conteúdos aprendidos, na maioria das vezes pela via da memorização, enquanto a socioconstrutivista, embasada em aspectos processais, fundamentadas na compreensão e aprimoramento e ressignificação do processo da aprendizagem dos estudantes.

[24] As entrevistas estão nos Apêndices A e B.

E no terceiro, abordamos questões sobre a prática docente que nos levou a compreender ainda mais os indícios das concepções de ensino e de aprendizagem mobilizadas, assim como as características do CONTRATO DIDÁTICO por elas estabelecidas.

Participaram da entrevista, inicialmente, dez (10) professores, com o objetivo de identificarmos as características preponderantes das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA subjacentes ao discurso deles e analisadas a partir da categorização de Câmara dos Santos (2005). Em função das análises dos resultados selecionamos três, que tiveram as características preponderantes de suas CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA de acordo com a categorização do referido autor.

Em relação à entrevista semiestruturada, um elemento importante a destacar é que, ao partirmos da ideia de que toda relação é por natureza contratual e que nem sempre o discurso proferido nos evidencia a concepção de ensino construída, acreditamos que o Contrato do tipo experimental (que é realizado implicitamente entre sujeitos analisados e pesquisador) pode exercer influência nas respostas dadas pelas professoras.

Muitas vezes, as respostas dadas pelo sujeito investigado podem não refletir necessariamente suas práticas (dizem o que nós, pesquisadores, gostaríamos de ouvir), as concepções que as constituem, assim como podem também, algumas vezes, explicitar suas expectativas, as que gostariam de ser. Por isso, achamos importante acompanhar as aulas das professoras selecionadas. Ademais, esse instrumento nos ajudou a realizar o primeiro objetivo do nosso trabalho, que se referiu à caracterização das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA de professores do 5º Ano do EF, nas turmas investigadas.

5.2.2 Acompanhamento das aulas

Muitas vezes, as respostas dadas pelo sujeito investigado em uma entrevista podem sofrer interferência de um contrato experimental, ou até mesmo, no nosso caso que investigamos as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, podem surgir no discurso. Algumas vezes, a explicitação de expectativas, das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA que o sujeito gostaria de ter, mas não necessariamente as que as constituem e não refletirem necessariamente suas práticas. Por isso, achamos importante acompanhar as aulas das professoras selecionadas.

Como material de análise, as aulas observadas e gravadas das professoras sobre o conteúdo frações, na perspectiva de identificar o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido, em função da Teoria das Situações Didáticas (BROSSEAU, 1996; 1998; 2008), com destaque aos componentes do Triângulo Didático: professor-estudante e saber, dentre outros. É importante salientar que direcionamos a gravação para as professoras e seus estudantes em atividades individuais ou coletivas, com o intuito de registrar as ações entre eles. Além disso, houve uma observação minuciosa e detalhada para a transcrição das aulas, em função do material coletado em áudio, com o objetivo de retratar naturalmente a realidade escolar vivenciada, particularmente o ambiente da sala de aula. Esses registros nos deram indícios do fenômeno investigado, assim como sua relação com as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA que emergiram nas práticas docentes e sua estreita relação com as dificuldades da aprendizagem de frações.

Observamos, gravamos e transcrevemos as quatro[25] aulas das professoras (Maria e Joana), quando foi trabalhado o conteúdo fração. A análise desse material nos ajudou a verificar os seguintes objetivos: identificar o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido em função de seus elementos essenciais e constitutivos e associá-lo as características predominantes das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA que subjazem às práticas docentes quando é ensinado o conteúdo frações no 5º Ano do EF, e reconhecer se esses dois construtos teóricos são fatores que podem estar dificultando o desempenho de frações de estudantes do 5º ano do EF.

Outrossim, em função desse instrumento de coleta de dados, foi possível também responder às perguntas de pesquisa: as concepções de ensino explicitadas pelos professores teoricamente (em seus discursos) se materializam na prática docente? Ou ficam apenas no campo de suas expectativas? Como se caracterizam os elementos essenciais do CD? Quais os elementos constitutivos do CONTRATO DIDÁTICO (expectativas, negociação, ruptura, renegociação do contrato, regras, efeitos) surgem quando os professores trabalham frações?

5.3 CATEGORIAS ANALÍTICAS

A partir das ideias mostradas por Minayo (2008), compreendemos que, para análise e interpretação dos dados coletados de uma pesquisa, é extremamente importante superar o empirismo para adentrar a realidade do fenômeno investigado, ou seja, é preciso ir além das

[25] Apesar dos quadros 09 e 11 trazerem a quantidade de 06 aulas dadas, apenas transcrevemos 04(quatro), visto que 02(duas) foram utilizadas para exercícios do LD e realização do simulado.

aparências ou das hipóteses a priori do pesquisador para garantir a fidedignidade das informações. Desse modo, para nos apoiar teoricamente, utilizamos os estudos desenvolvidos sobre CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, CONTRATO DIDÁTICO, Números racionais, em especial frações.

Para definir as categorias analíticas, tomamos como referência as abordagens relativas às Concepções de Ensino e de Eprendizagem de Matemática: Baldista, Escadinha e Socioconstrutivista – Câmara dos Santos (1997; 2005); tipos específicos de CONTRATO DIDÁTICO por nós atribuídos em função dos modelos de aprendizagem de Charnay (2001). Os elementos essenciais ao CD, baseadas em Jonnaert e Borght (2002): a divisão de responsabilidades; a tomada de consciência do implícito; a relação ao saber e a comunicação didática. Os elementos constitutivos desse fenômeno, tendo por base Almeida (2016): expectativas, regras, rupturas, efeitos, renegociação e fatores que podem estar dificultando a aprendizagem de frações.

Para conceituar concepções, utilizamos a definição, do ponto de vista teórico, como "conjunto de conhecimentos e de saberes frequentemente solicitados juntos para resolver situações empiricamente como modelos de respostas coerentes, dada por uma parte importante dos sujeitos sobre uma classe de situação" (BROUSSEAU, 1997, p, 18), assim como o "olhar trazido por Martins (2016, p.54), ao destacar que "as concepções de ensino são fundadas a partir das várias experiências vivenciadas ao longo da história de vida de cada professor de Matemática.

O conceito de CONTRATO DIDÁTICO foi definido em função da TSD por Brousseau (1996, p.38) como "um conjunto de comportamentos (específicos) do professor que são esperados pelos alunos, e um conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor mediados pelo saber". No capítulo seguinte, apresentamos os resultados desse itinerário metodológico.

6. ANÁLISE DE DADOS

Apoiados na fundamentação teórica discutida e nos dados coletados, dividimos esse capítulo em seis seções. A primeira se destinou a caracterizar as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA das professoras. Dessa forma, buscamos identificá-las com o cuidado de não as rotular com essa ou aquela concepção, mas a partir de elementos preponderantes que caracterizam suas CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA. Para tanto, nos baseamos na entrevista semiestruturada, cujas perguntas foram construídas para identificar elementos que se fundamentam nas ideias construídas na categorização de Câmara dos Santos (2005) e as complementamos com outros trazidos pelos estudos de (MARTINS, 2016). Na presente seção, apresentamos em três subseções as características da concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática. Na primeira, as da professora Ana. Na segunda, de Joana e na terceira, de Maria.

Na segunda seção, apresentamos em três subseções as características da concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática observadas no acompanhamento das aulas. Na primeira, as da professora Joana e na segunda, da professora Maria.

Na terceira, procuramos comparar se as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA observadas a partir da entrevista, se materializavam nas aulas dadas sobre frações, para analisarmos a relação discurso e prática.

Na quarta seção, identificamos os elementos essenciais e constituvos do CONTRATO DIDÁTICO estabelecidos em sala de aula. Também separamos em duas subseções:na primeira, da professora Joana e, na segunda, da professora Maria.

Na quinta, analisamos em duas subseções os construtos teóricos CD estabelecido e as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, com intuito de identificar se eles podem ser considerados fatores de influências no desempenho de fração. A primeira, apresenta os da professora Joana; e, na segunda da professora maria.

Para finalizar esse capítulo, abordamos na sexta seção, outros fatores de influências que podem estavar interferindo no desempenho do referido saber escolar, nas referidas turmas.Vale ressaltar que, ao término dele, foi possível identificar o CONTRATO DIDÁTICO que estava por trás das estratégias didáticas utilizadas pelas professoras e as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA , e sua comprovação como fatores de influências no desempenho de frações, além de outros que constatamos no acompanhamento.. A partir desse conhecimento, passamos a entender melhor as causas, que têm levado os estudantes dos anos iniciais do EF a não compreendê-lo adequadamente, especificamente nas turmas investigadas.

6.1 ANÁLISE DAS CARACTERÍSTICAS DAS CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM FUNÇÃO DA ENTREVISTA SEMIESTRUTIRADA

É importante destacarmos que para fazermos a devida caracterização, utilizaremos as letras “T”, “C” e “I” seguidas da sequência numérica para indicar: a primeira, o trecho da fala da professora. A segunda, para identificar a característica da concepção de ensino de Matemática de cada professora, identificada pelos autores e, a terceira, a ideia trazida na categorização de Câmara dos Santos (2005), que fundamenta tanto o trecho identificado na fala das professoras quanto à característica identificada pelos autores.

6.1.1 Professora Ana

Ana apresentou, em sua fala, características de duas concepções: uma predominantemente escadinha e a outra com alguns traços da baldista. É como se ela vivesse um conflito entre o desejo de ser escadinha e a concepção de que a verdadeira Matemática estaria associada ao modelo baldista. Assim, entendemos que ela não revela uma única concepção de ensino.

Essa observação vem corroborar uma das ideias defendidas no texto, de que é possível a mobilização de diferentes concepções de ensino e de aprendizagem da Matemática. A seguir, apresentamos cinco trechos (T1, T2, T3, T4,...) da fala da professora Ana em sua entrevista, nos quais foi possível identificarmos características associadas à Concepção Escadinha. Para as discussões, nos aportamos na categorização de Câmara dos Santos (2005).

> *T1- Observo as questões do livro, vou modificando, porque O LD vai dificultando a compreensão do menino. Em seguida, trabalho muitas atividades desse mesmo jeito. Questão de Matemática que não faz parte da rotina, mudo a linguagem, reescrevo o problema para eles terem uma compreensão fácil.*

A partir da análise desse trecho, definimos a característica: Elaboração e oferta de situações contínuas de treinamento. Ela se justifica em função da ideia do autor: “o professor oferece situações sistemáticas de treinamento, para consolidação de um novo comportamento”.

> *T2- É tudo explicado detalhadamente, eu vou mostrando os caminhos, vou dando pistas de como chegar ao resultado. Observo o que esse livro traz e vou modificando. Eu construo, eu retiro do LD.*

À leitura desse trecho, definimos a característica: supõe que o estudante é pouco capaz de compreender as coisas. Não é capaz de avançar sem a ajuda dela. Ela se justifica em função da ideia do autor: “o professor não pode “largar” a mão do estudante, porque se o fizer, ele se sentirá perdido, sem saber onde ir”.

> *T3- Mostro a forma como a maioria trabalha, dou exemplos. Tento mastigar ao máximo que eu posso os conteúdos para quando as avaliações vierem eles possam ter essa facilidade de responder. Leitura fácil. O LD complica muito.*

Analisando esse trecho, definimos a característica: O aluno é o centro do processo. Ela se justifica em função da ideia do autor: “o estudante é o centro da aprendizagem, e o papel do professor é favorecer a sua ação”.

> *T4- Avalio a participação do estudante nas atividades que faz na sala e em casa, em pesquisas realizadas, na participação nas aulas em especial nos resultados projetos realizados e também na avaliação do bimestre.*

A partir da análise desse trecho, definimos a característica: Não vê a prova como único instrumento avaliativo. Avaliação é processual. Ela se justifica em função da ideia do autor: “é preciso o professor racionalizar a construção de sequências didáticas, para facilitar, consequentemente, a elaboração e execução do processo de avaliação”.

> *T5 - Adequo o problema e envolvo na realidade do aluno.*

Após análise desse trecho, definimos a característica: Criação de contextos para os conceitos, próximos da realidade de cada estudante, respeitando o que ele já sabe para “facilitar” a aprendizagem. Ela se justifica em função da ideia do autor: “esse modelo permite uma individualização do processo de ensino, a partir do momento em que o estudante "sobe a escada" de acordo com suas possibilidades".

Como já mencionado anteriormente, além da Concepção Escadinha, a professora Ana também apresentou em sua fala característica da Concepção Baldista. A seguir, apresentamos um trecho (T6) no qual foi possível identificar características associadas a essa concepção.

> *T6- Eu vou ter que avaliar, se ele fez o processo e errou alguma coisa nesse processo, alguma coisa está errada. Mas não é para errar porque as questões que eu passo não são difíceis, se errou talvez eu não tenha passado o assunto direito, ou ele não prestou atenção. Infelizmente vou ter que considerar errado, por que o resultado não tá errado? Eu particularmente, considero errado.*

Analisando esse trecho, definimos a característica: avaliação binária, ou é certo ou é errado. Não há consideração do processo de construção do conhecimento percorrido pelo estudante, o que interessa para a professora é o resultado final a que ele chegou. Pode assumir a culpa pelo erro cometido escrito por nós. Ela se justifica em função da ideia do autor: "a culpa pelos erros será atribuída ao professor, à medida que ele não explicou direito ou deu muito rápido o assunto.

Os exemplos mostrados vêm corroborar uma das ideias que defendemos na pesquisa, a de que nenhum professor utiliza exclusivamente uma das concepções; em sua prática docente, com toda sua complexidade, utiliza elementos de cada uma delas. Entretanto, apesar de tudo, cada professor faz uma escolha, consciente ou não e de maneira privilegiada, de uma delas, ou seja, muitas vezes ele apresenta características predominantemente de uma concepção, mas pode ser modificada em função de alguns elementos e apresentar características de outra.

Essa questão foi percebida no discurso da professora, já que apresentou muitas características da concepção escadinha; entretanto, quando se trata de avaliar seu estudante, ela é enfática ao dizer que o resultado final é o que interessa, ou está certo ou errado, e ainda levanta a possibilidade do erro cometido pelo estudante ser originado pelo repasse incorreto do assunto.

Diante desse contexto, concordamos com Câmara dos Santos (1997) ao esclarecer, em seus estudos, que não há superioridade de uma concepção em relação à outra, assim como elas não são mutuamente excludentes. Na nossa análise, vimos duas concepções complementando o perfil da professora. A partir dos elementos preponderantemente identificados no discurso de Ana e das ideias trazidas em função dos elementos teóricos sobre CONCEPÇÕES DE ENSINO

E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, fizemos a caracterização da concepção escadinha, mostrada no Quadro 7.

Quadro 7 - Caracterização da Concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática escadinha ampliada em função da literatura de referência.

SEÇÃO	DESCRIÇÃO
Professor	Favorece a ação do estudante na construção do conhecimento; Está mais distante do objeto do conhecimento.
Ensino	Dividido em etapas; Tem ênfase na realização de problemas organizados pelo professor; Objetiva o desenvolvimento da autonomia do estudante; Aproxima o estudante do objeto do conhecimento.
Erro	Aspecto negativo; Deve ser evitado de aprendizagem.
Recurso Didático	É diversificado (livros, apostilas, jornal, jogos, internet, dentre outros) para dar apoio ao trabalho desenvolvido na sala de aula com finalidade didática.
Avaliação	Processual, sistemática, de acompanhamento da aprendizagem dos estudantes e ressignificação das suas ações, assim como as dos professores.
Estudantes	Ativos em relação ao conhecimento; Centro do processo de ensino e aprendizagem.
Aprendizagem	Organizada em etapas sucessíveis e mais simples possíveis.

Fonte: Elaborado pelos autores em função de Câmara dos Santos (2005) e Martins (2016).

Os elementos que caracterizam esta concepção conferem à Matemática uma representação parcialmente positiva. Ela deve favorecer interações múltiplas entre os estudantes e os conteúdos que devem ser aprendidos, sendo necessário potencializar e favorecer as construções de estruturas intelectuais. Em geral, considera-se importante problematizar atividades em diferentes epapas para que envolve-los, provocando reflexão e discussão. Por ser dividida em etapas, a fragmentação do conteúdo é vista como um ponto negativo dessa concepção

Pela associação que estamos procurando fazer entre concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática e CD, acreditamos que elas nos dão indícios de que será estabelecido em sala de aula o do tipo incitativo que se relaciona a uma concepção escadinha, cujas características já foram apresentadas no 4.

As análises da professora Ana ficaram apenas em função da entrevista semiestruturada, sendo possível apenas realizar a caracterização da concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática, pois foi realizada em função desse instrumento e de elementos teóricos. Até o final de 2019, acompanhamos as professoras Joana e Maria. Não foi possível acompanhar Ana, pois sua turma funcionava no mesmo horário da turma de Maria, conforme já exposto anteriormente. Diante disso, combinamos com a professora em acompanhá-la no segundo bimentre do ano de 2020. Entretanto, em função da pandemia do Coronavírus, só foi possível acompanhar as duas anteriormente citadas. Joana, que apresentou características preponderantes da concepção de esnino e de aprendizagem socioconstrutivista e Maria, da baldista, não sendo possível acompanhar Ana que apresentou características preponderantes da escadinha, pois as aulas foram suspensas em março de 2020.

6.1.2 Professora Joana

A professora apresentou, em sua fala, características da concepção socioconstrutivista. A seguir, apresentamos quatro trechos da entrevista realizada, aos quais foi possível atribuir, a cada um deles, uma característica da concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática associada às ideias trazidas na categorização de Câmara dos Santos (2005).

> *T1- Eu provoco eles e comento: fulano resolveu dessa maneira, você respondeu dessa... Estão corretas? Alguém acha que está errado? Por que está errado? Eles vão dizendo a posição que eles acham, vão dizendo se está certo, errado e porque eles acham.*

C1: conhecimento é construído e não repassado pelo professor. Compreende a importância do seu papel problematizador para aprendizagem.

I1: “como no próprio processo histórico de construção do conhecimento, os objetos foram sendo construídos como respostas a problemas específicos”.

T2 – Aparecem as diferentes formas de resolver. Cada um mostra o que fez. Após darem o retorno oralmente, vamos ao quadro pegar um ou duas resoluções, se forem diferentes e instigar para que eles digam se está certo ou não. Somente a parte que vai armar e resolver, não. É esse fazer, eles praticarem.

C2: os estudantes são agentes ativos no processo de construção do conhecimento; seus pensamentos matemáticos são valorizados.

I2: "para resolver um problema, o sujeito não pode ficar numa situação passiva".

T3 - Mas eu pergunto: o resultado das frações está correto? Eles interagem, mostrando como resolveram as frações. Além de aceitar a resolução do outro, começam também a utilizar essa nova forma de resolução.

C3: valorização da interação entre os estudantes/professora; estudantes/conteúdo e estudantes/pares.

I3: "retrata a aquisição de novos conhecimentos, está estreitamente ligada à interação entre o sujeito e o objeto de estudo".

T4 - A questão de situações problemas focados no contexto dos alunos e no que eles já sabem, pois hoje já não se trabalha de forma isolada.

C4: considera as representações do estudante e procura construir a aprendizagem em função delas.

I4: "o estudante inicia uma aprendizagem com uma bagagem de representações".

Em geral, observamos que Joana apresentou, preponderantemente, em seu discurso características da concepção de ensino e de aprendizagem da Matemática Socioconstrutivista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005). Além delas, podemos citar outros elementos importantes, identificados no discurso da professora, que justificam essa classificação, sejam eles: questionamento dos estudantes para ir negociando com eles a responsabilidade de suas aprendizagens; incentivo a exposição de resolução das atividades, observação de respostas corretas ou não e sistematização de algumas ideias a partir de conclusões chegadas pelo grande grupo; demostração inicial de confiança no potencial de cada um dos estudantes; cuidado de envolvimento deles na aula. Os trechos a seguir vêm corroborar alguns dos elementos identificados:

> *T6 - Não gosto de dizer a eles nós vamos trabalhar tal conteúdo. Para eles isso não é interessante. Interessante é quando a gente apresenta a situação problema no início e estimula eles a resolverem, como a gente vai resolver? E aparecem as diferentes formas de resolver. Cada um mostra o que fez. Após darem o retorno oralmente, vamos ao quadro pegar uma ou duas resoluções, se forem diferentes e instigar para que eles digam se está certo ou não. Geralmente tem aqueles que se abstém e começam a dizer assim: o meu tem esse resultado que tá diferente do que está ali então eu não vou nem falar, mas quando chegamos no resultado final ele diz: professor o meu resultado foi esse também, mas eu não fiz dessa maneira. A partir daí, vamos falar do conteúdo. (Fala da Professora Joana na entrevista semiestrurada).*

> *T7- Fração... Pergunto o que eles sabem; vou fazendo questionamentos e trazendo esclarecimentos, vamos pra parte escrita, escrevemos, por exemplo, a situação-problema, resolvem e explico algumas coisas a mais e eles escrevem no caderno, utilizam o LD, respondem e leem as informações que só vão agregar valores. Trago material concreto e vão utilizar o que aprenderam. Peço pra eles trazerem tb. Enfim, é um processo de mão dupla. Eu proponho pra eles e eles também colaboram. É claro que tem aquele grupo que é mais difícil, não assimilam como os outros, que requer um tempo maior (tempo de aprendizagem).*

A partir dos elementos preponderantemente identificados no discurso de Joana e das ideias trazidas pela teoria sobre CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA, fizemos a caracterização da concepção socioconstrutivista, mostrada no Quadro 8.

Quadro 8 - Caracterização da Concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática socioconstrutivista ampliada em função da literatura de referência.

SEÇÃO	DESCRIÇÃO
Professor	Tem uma relação horizontal com os estudantes, ou seja, ambos são responsáveis pela construção do conhecimento; Visto como mediador do processo de ensino e aprendizagem.
Ensino	Tem ênfase na realização de problemas e nas estratégias utilizadas pelos estudantes; Objetiva o desenvolvimento da autonomia.
Erro	Considerado como intrínseco ao processo de aprendizagem; Instrumento diagnóstico para o professor entender o que os estudantes estão compreendendo do saber em jogo; Natural, faz parte do processo de aprendizagem; Utilizado para redirecionar situações incompreendidas pelos estudantes ou mal trabalhadas pelo professor.
Recurso Didático	É diversificado (livros, apostilas, jornal, jogos, internet, dentre outros) para dar apoio ao trabalho desenvolvido na sala de aula com finalidade didática.
Avaliação	Aplicada em função de diferentes instrumentos, considerando os vários contextos de aprendizagem; Processual, sistemática, de acompanhamento da aprendizagem dos estudantes e ressignificação das suas ações, assim como as dos professores.
Estudantes	Ativos em relação ao conhecimento; Centro do processo de ensino e aprendizagem.
Aprendizagem	Construção dos estudantes em função de seus conhecimentos prévios e reflexão sobre o saber em jogo.

Fonte: Elaborado pelos autores em função de Câmara dos Santos (2005) e Martins (2016).

Os elementos que caracterizam esta concepção conferem à Matemática uma representação positiva, diferente da ideia construída ao longo da história e que, certamente, devem exercer influências no trabalho desenvolvido pelas professoras. Em geral, podemos dizer que nessa concepção, o processo de aprendizagem é um todo integrado com destaque ao papel do estudante que é o centro do processo, sujeito ativo na produção do conhecimento em uma perspectiva dialética. Ele deve ter condições de ressignifica-lo, a partir de situações problemas, previamente planejadas pelo professor, que deverão levar em consideração as diferentes formas de raciocinar. A aprendizagem é baseada na interação professor, estudantes e objeto do conhecimento. É importante haver uma articulação entre os saberes escolares com a realidade vivenciada pelos estudantes em suas práticas sociais.

Pela associação que estamos procurando fazer entre concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática e CD, acreditamos que ela nos dá indícios de que será estabelecido, em sala de aula, o do tipo aproximativo, que se relaciona a uma concepção de ensino socioconstrutivista, cujas características já foram apresentadas no Quadro 5.

6.1.3 Professora Maria

A professora apresentou em sua fala características da concepção baldista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005). A seguir, apresentamos quatro trechos da entrevista realizada, com os quais foi possível associá-las às ideias trazidas na categorização do autor.

> *T1 - A gente tem que parar e explicar tudinho, e eu digo: tem que fazer. Eles querem tudo prontinho, que a gente faça tudo, já querem a resposta. E respondo no quadro. Respondo todas as atividades no quadro.*

C1: a professora apresenta o conteúdo, explica; faz muitos exemplos parecidos e os resolve; coisas práticas; fáceis. Oferece tudo pronto e acabado; professor controla a situação, determinando o que o estudante deve aprender ou não.

I1: “ao professor, cabe a missão de transmitir o conhecimento; comunicando-o; mostrando em seguida algumas de suas aplicações, por meio de exemplos ou exercícios resolvidos”.

> *T2 - Tem que olhar o quadro, prestar atenção no que estou falando.*

C2: os estudantes não têm conhecimento, são elementos passivos na relação didática, considerados uma tábula rasa.

I2: “a cabeça do estudante se apresenta como um balde vazio, ou seja, ele não sabe nada sobre o novo conhecimento”.

T3 - Gosto de atividades que tenham as operações fundamentais eles têm muita dificuldade. Eles vêm com essa defasagem, não sabem nem armar.

C3: para o professor a aprendizagem se dá pela repetição de muitos exercícios e do mesmo raciocínio, ou seja, seguindo conjuntos de regras e procedimentos.

I3: "quando o professor apresenta uma bateria de exercícios (em geral extremamente longa) em que os estudantes vão aplicar o novo conhecimento".

T4 - Livro com bastante atividades, suporte para o professor, planejamento, orientação para o professor trabalhar.

C4: professor precisa sempre de tudo pronto e acabado.

I4: "o professor vive em busca constante do "pronto", essa ideia no ensino da matemática está arraigada ao CONTRATO DIDÁTICO habitual de grande parte de nossas salas de aulas".

Além dessas características, outras nos chamaram atenção com a análise desse instrumento. A primeira aconteceu ao perguntarmos a Maria qual concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática caracterizava sua prática docente. Ela respondeu que se considerava tradicional e construtivista. Os trechos a seguir mostram os argumentos utilizados por ela para justificar sua resposta.

Sou tradicional, quando trabalho as contas secas. Eu gosto de dar a conta seca pra quando eles forem para os problemas, terem noção do que fazer. É tudo explicado detalhadamente, eu vou mostrando os caminhos, vou dando pistas de como chegar ao resultado. Sou Construtivista quando trago os problemas do SAEB, porque são difíceis; também quando crio problemas com a realidade deles.

A segunda foi que, ao ser questionada se os estudantes discutiam, confrontavam suas ideias, suas estratégias de resolução de problemas, Maria respondeu:

Não. Eles falam, mas eu coloco no quadro a resposta como deveria fazer, monto o problema, o que for eles copiam.

A terceira é que a professora é controladora da situação; a interação com os estudantes foi muito pouca e não houve uma valoração do pensamento matemático deles, muito menos do confronto de estratégias construídas para resolverem um problema como observamos no trecho a seguir:

> *P - Quando encontram caminhos diferentes para um problema. Eles discutem, confrontam essas ideias?*
> *T4 - Não. Eles falam, mas eu coloco no quadro a resposta como deveria fazer, montar o problema, o que for. Eles copiam.*

Em geral, o discurso de Maria caracterizou-se como predominantemente informativo, de apresentação do conteúdo frações. A professora negociou o contrato por baixo, acreditava que os estudantes não conseguiam avançar sem a ajuda dela. Dava tudo pronto e acabado, como mostram os trechos a seguir:

> *T8 - A gente tem que parar e explicar tudinho, e eu digo: tem que fazer. Eles querem tudo prontinho, que a gente faça tudo, já querem a resposta. E respondo no quadro. Respondo todas as atividades no quadro.*
> *T9.- Eu geralmente trago alguma coisa de casa, o suporte. Eu gosto de imprimir em casa. Faço uma pesquisa do conteúdo, um resumo pra conversar com eles, as vezes imprimo uma figura. Mostro pra eles verem e depois vou repassar e fazer atividades relacionadas ao conteúdo.*

Esse tipo de ensino não é preconizado pelos documentos orientadores de ensino. Os PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2017) propõem que a atividade matemática escolar não seja “olhar para coisas prontas e definitivas” como, por exemplo, regras de CONTRATO DIDÁTICO que são estabelecidas de forma involuntária em sua maioria, mas internalizadas pelos estudantes. É necessário pensar na construção e na apropriação do conhecimento matemático pelos estudantes, de forma que eles venham a se servir dele para compreenderem e transformarem suas realidades.

Ao ser evidenciado pela professora a necessidade de encontrar, no Livro Didático, questões de fácil compreensão, e que trouxessem um planejamento para o professor, nos mostra que ela precisa de ajuda tanto em relação ao domínio desse conteúdo, assim como em suas opções metodológicas e didáticas Trechos que justificam essa discussão são mostrados a seguir:

> *T10 - Gosto de livro com bastante atividades, suporte para o professor, planejamento, orientação para o professor trabalhar.*

A partir das características fortemente identificadas no discurso de Maria, fizemos a caracterização da concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática baldista, mostrada no Quadro 10.

Quadro 9 - Caracterização da Concepção baldista de ensino e de aprendizagem de Matemática ampliada em função da literatura de referência.

SEÇÃO	DESCRIÇÃO
Professor	Tem um papel ativo e central como detentor do saber, transmissor dos conhecimentos e condutor da aprendizagem dos estudantes.
Ensino	Ênfase nos exercícios, na repetição de conceitos e na memorização; Baseado na transmissão dos conteúdos.
Erro	Um elemento a ser evitado, pois evidencia o fracasso do professor; Não é considerado como elemento didático, a não ser para ser corrigido pelo professor, sem ser ressignificado.
Recursos Didáticos	Escassos, em sua maioria, lousa, fichas de exercícios; Não são utilizados com fins didáticos e sim para memorização dos conteúdos transmitidos.
Avaliação	Realização de uma "Prova" escrita, com tempo determinado; Classificatória.
Estudante	Receptor dos conhecimentos; É um ser "passivo" que deve "aprender" os conteúdos transmitidos pelo professor.
Aprendizagem	Receptiva e mecânica; Memorização de conhecimento.

Fonte: Elaborado pelos autores em função de Câmara dos Santos (2005) e Martins (2016).

Os elementos que caracterizam esta concepção conferem à Matemática uma representação negativa, pois o ensino é baseado em abordagens que priorizam a memorização, a repetição e o repasse de conteúdo, elementos historicamente construídos e muitas vezes utilizados nos dias atuais pelos professores. Segundo os PCPE (PERNAMBUCO, 2012, p. 22). “Ela é sem dúvida a mais encontrada na maioria de nossas salas de aula”. Nela são ignorados os sujeitos como protagonistas de seu conhecimento; a realização de exercícios pelos estudantes em função do que foi fornecido pelo professor consiste em uma parte fundamental desta concepção.

Um aspecto importante a ser destacado nesse tipo de concepção é que não são considerados aspectos da realidade dos estudantes ou questões de seu interesse, já que as aulas de matemática são pautadas em procedimentos mecânicos, padronizados e muitas vezes carregadas de regras de CONTRATO DIDÁTICO, que são estabelecidas pelos professores e absorvidas pelos estudantes, diferentemente do que preconiza a TSD e os documentos orientadores da escola básica. Em geral, as fichas de atividades costumam ser os recursos protagonistas nestes ambientes, diferente do que acontece quando se busca uma relação com a vida real, com a interação, com situações desafiadoras, numa perspectiva de um ambiente de aprendizagem aberto à investigação.

Pela associação que estamos procurando fazer entre concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática e CD, acreditamos que ela nos dá indícios de que será estabelecido, em sala de aula, o do tipo normativo, que se relaciona a uma concepção de ensino socioconstrutivista, cujas características já foram apresentadas no Quadro 3.

6.2 AS CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA IDENTIFICADAS NA PRÁTICA DOCENTE SOB O OLHAR DA TSD

6.2.1 Professora Joana

A professora Joana foi à primeira professora a ser acompanhada. O planejamento obedeceu à ordem estabelecida no Quadro 9.

Quadro 10 – Assuntos abordados por Joana nas aulas sobre fração.

AULA	PROPOSTA DA AULA
1	Construção da concepção de fração enquanto parte e todo.
2	Leituras de frações e noções preliminares de frações equivalentes.
3	Construção daconcepção de frações equivalentes.
4	Realização de exercícios do livro didático com foco em frações.
5	Construção daconcepção de fração de uma quantidade.
6	Realização de simulado.

Fonte: Os autores.

Em relação ao acompanhamento das aulas, observamos alguns elementos da prática docente que nos deram indícios de elementos de uma ou mais CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA , dentre os quais podemos citar: o primeiro é que a professora sempre questionava os estudantes e ia negociando com eles a responsabilidade de suas aprendizagens; fomentava o levantamento de estratégias e sistematização de ideias a partir de conclusões chegadas e demonstrava, inicialmente, confiança no potencial de cada um deles. Ela sempre tinha o cuidado de 136ossíve-los na aula.

O segundo, diz respeito à capacidade de articulação das aulas com as anteriores, como uma forma de revisão do que se foi estudado. A professora organizava as situações de ensino consultando o documento norteador do município, livros didáticos de Matemática, o caderno do Aprova Brasil (para trabalhar questões relacionadas às que irão fazer nas avaliações externas), alguns sites de Matemática eram também suas fontes de pesquisa (na busca de situações diferentes para serem vivenciadas pelos estudantes). O LD era utilizado com frequência como parte complementar das atividades propostas.

O terceiro é que os estudantes eram convidados, em alguns momentos, a participar de forma ativa para construir seu conhecimento. A interação entre eles os colegas e a professora foi outro ponto importante observado na caracterização do CD. Diferentes estratégias foram criadas no sentido de incentivar sua participação no processo de construção do conhecimento. Para tanto, a professora utilizou diversos elementos, tais como: resgate de conhecimentos prévios, realização de cálculo mental, formulação de hipóteses sobre os possíveis resultados, debate das estratégias encontradas para solução de determinado problema, construção de síntese ao final das discussões, que eram feitas no quadro pela professora.

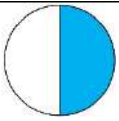
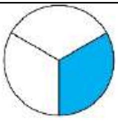
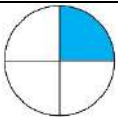
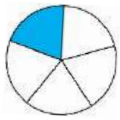
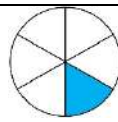
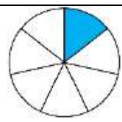
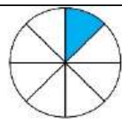
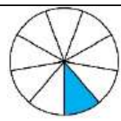
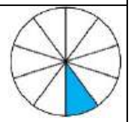
O quarto elemento é que foi desenvolvido um trabalho em função das diferentes concepções desse saber escolar. Entretanto, a ênfase maior foi na de parte e todo, não havendo compreensão por parte dos demais e aprofundamento necessário. Foram sugeridas apenas poucas atividades que envolviam as demais concepções. Essas questões também entram em desacordo com o que foi enunciado pela professora no primeiro dia de aula, quando enfatizou a necessidade de aprofundamento do conteúdo investigado, visto que eles eram 5º ano e já tinham estudado em anos anteriores.

O saber escolar fração foi ensinado em função das atividades sugeridas pela professora nas várias situações de comunicação promovidas. O que se observou foi sua intenção inicial em construí-lo em um processo dialógico, com a participação dos estudantes, por meio de questionamentos. Ela não o trouxe pronto e acabado. Em detrimento a esses aspectos interessantes, percebemos alguns que talvez não contribuíram para o bom desempenhos dos estudantes.

O primeiro é que nem sempre foi 137ossível a professora conduzir o processo de ensino em uma perspectiva de construção, pois existem conteúdos que precisam ser instruídos, com os quais se fazia necessária a instrução, o repasse do conhecimento pronto e acabado, como por exemplo, ao se trabalhar o nome dos termos das frações, nas leituras de frações, dentre outros.

Sendo assim, entendemos que em situações específicas como essas, não há possibilidade de problematizar, construir o conhecimento de forma dialógica, pois essa questão tem a ver com a natureza do conhecimento, são convenções ancoradas em uma lógica. Não podemos pois, querer que os estudantes construam sozinhos um conhecimento que é fundamentado em uma convenção internacional, onde a professora tem que utilizar um modelo instrutivo como mostra os recortes a seguir:

> *T2- Cada pedaço desse eu vou chamar de $\frac{1}{8}$. O segundo pedaço, $\frac{2}{8}$; o terceiro, $\frac{3}{8}$, se comer 4 pedaços, $\frac{4}{8}$; se comer cinco pedaços, $\frac{5}{8}$; seis pedaços, $\frac{6}{8}$; sete pedaços, $\frac{7}{8}$ e se comer os oito, $\frac{8}{8}$. Que é igual ao inteiro, ou seja, todos os pedaços foram comidos. Tanto é que se você tem 8 e divide por 8 vai dar igual a 1, (professora chama o nome da aluna Maria). Ou seja, o inteiro. Construam isso aqui no caderno de vocês. Porque vamos fazer uma tabelinha...*

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
								
Meio Metade	Um terço	Um quarto	Um quinto	Um sexto	Um sétimo	Um oitavo	Um nono	Um décimo

Professora Joana Nosso tempo foi suficiente, tem gente que está terminando, vai terminar aí, mas enquanto isso, olhem para cá, vamos dar continuidade. Aqui está a forma que nós lemos cada uma dessa fração que está representada aqui em cima.

Entretanto, um ponto importante a destacar é que, apesar da necessidade de instrução em determinados casos, com alguns conceitos, observamos uma certa recorrência dessa situação em momentos que eram possíveis se trabalhar em uma perspectiva de colaboração, dialogicidade, construção compartilhada do conhecimento entre professor e estudantes, como bem enfatizado pela professora algumas vezes. No trecho a seguir, mostramos como a professora tira do estudante a possibilidade de reflexão, construção/ampliação do conceito em estudo e termina por validar uma ideia incorreta de fração enquanto divisão.

Professora Joana - Nós estamos estudando fração, pra chegar a uma fração nós fizemos o que com isso aqui? Nós fizemos o que com isso aqui?
Alunos - Nós dividimos.
Professora Joana - Nós dividimos, mas essa divisão, a forma de você repartir tem que ser igual. Se eu pego uma barra de chocolate, ela está inteira, vou fracionar ela, repartir ela entre (por exemplo, as colegas, Evelin e Elen). Dou uma parte dessa aqui a Evelin e dou essa parte aqui bem maior a Elen. Dividi igualmente?
Alunos - Não.
Professora Joana - Mas eu fracionei, eu reparti, só que não foi igualmente, ou seja, quem ficou com esse pedaço aqui, ficou com a parte maior e quem ganhou esse, ficou com a parte menor. Aí quando eu vou ver em quantos pedaços eu poderia ter dividido essa barra de chocolate, 1, 2, 3, 4, 5 pedaços...

Ao anlisarmos esse recorte percebemos que muitas das conclusões foram chegadas pela professora. Ela poderia incentivar os estudantes a chegarem a elas. Até mesmo, ter elaborado questionamentos mais desafiadores, reflexivos, pois os estudantes já tinham uma noção do conceito (que não era de todo correta, não demonstrava compreensão), mas ao invés de ser descontruída, foi reforçada pelas ideias apresentadas por Joana.

O segundo aspecto que consideramos negativo foi o fato de haver interesse maior da professora no resultado (os que estavam corretos) dos problemas, em detrimento da discussão, com os estudantes, das estratégias pelos estudantes encontradas para resolvê-los. Em geral não houve uma valorização desse processo, em especial percebemos uma ausência do debate coletivo sobre elas, diferentemente do que foi enfatizado no discurso como elemento importante. Destacamos a preocupação da professora com o resultado final, com a resposta correta e não com o processo de construção do conhecimento dos estudantes, que poderia dar indícios de como eles estavam pensando, aspecto esse enfatizado por ela na entrevista.

Acreditamos que a socialização das estratégias ampliaria o repertório de soluções por cada um deles. Ademais, a partir do momento em que a professora registra as estratégias e faz um acompanhamento delas, terá condições de se instrumentalizar e conhecer o caminho percorrido e como os estudantes estão aprendendo, ou seja, é preciso olhar o que eles fizeram e não apenas o resultado a que chegaram.

Apesar de o discurso de Joana ter enfatizado a valorização das estratégias de resolução das equipes, oportunizando trabalho colaborativo em grupos, ao final o que foi feito era validado em função do que ela considerava ser correto, sem muita discussão em relação às estratégias encontradas. Então, era necessário que os estudantes se mobilizassem de forma mais reflexiva nesse processo. De modo geral, percebemos que a interação aconteceu tanto por parte dela e os estudantes, mas não entre eles, nem com o objeto do conhecimento.

A importância de estimular os estudantes a desenvolverem uma autonomia em relação ao processo de aprendizagem é antiga (BROUSSEAU 1996; ONUCHIC, 2009). Nessa busca, as orientações curriculares dadas por PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL; 2017) sinalizam para sua exposição a metodologias de investigação a fim de que participem de forma efetiva, da construção do conhecimento.

Ademais, os pressupostos preconizados pela TSD enfatizam a importância de se levar em conta o processo de elaboração do conhecimento: nele as dificuldades mostradas pelos estudantes devem ser vistas como tentativa de construção de conhecimento e uma oportunidade de o professor intervir para ajudá-los a reconstruí-lo, para que a aprendizagem ocorra. Em geral, não houve discussão no sentido de que as estratégias encontradas na solução dos problemas fossem valorizadas pela professora.

O terceiro aspecto relaciona-se ao reconhecimento do erro como um importante elemento didático. Apesar de Joana ter relatado, durante a entrevista, considerar o erro um elemento intrínseco ao processo, um instrumento diagnóstico para o professor entender o que os estudantes estão compreendendo e o que deve ser utilizado para redirecionar situações ainda incompreendidas ou mal trabalhadas pelo professor, essa postura não foi observada durante as aulas. Ao contrário disso, ela terminava por validar no quadro a resposta que achava correta e os estudantes a copiavam, tendo suas diferentes elaborações desconsideradas.

O quarto aspecto diz respeito às situações propostas pela professora. Consideramos ser importante que fossem mais desafiadoras, irem além dos conhecimentos que os estudantes já tinham para respondê-las, sendo possível a construção de novos significados para o saber escolar frações, enquanto parte e todo, razão e quociente, como preconizam os PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2017).

Sentimos falta de uma problematização por parte da professora, visto que em seu discurso ficou claro que gostava que os estudantes trabalhassem em uma perspectiva de investigação. O tempo todo eles foram incentivados a chegar à solução dos problemas, mas o debate das estratégias confronto de ideias não chegou a ser feito, como veremos no trecho a seguir:

> *Professora Joana - Se nós temos 24 alunos, e eu disser que desses 24, 3/4 vieram para aula. Quantos alunos vocês acham que vão estar na sala? Aluno - 18.*
> *Professora Joana - Por quê? Vamos entender o que o colega fez. Dividiu 24 em 4 partes e viu que cada parte é equivalente a 6. Tem várias formas de chegar ao resultado, mas ele fez a adição. 6 + 6 + 6. Ele poderia ter feito 24 - 6. Maria fez também. 3*6, 18. Existem vários caminhos, o colega me mostrou um diferente, com desenho (ele não quer explicar, não tem problema, está certo também), mas tem outros para entendermos frações.*

No trecho a seguir, percebemos que a professora validou como certa a resposta do estudante, com a frase “muito bem” ao final de uma resposta correta; essa atitude era recorrente. Percebemos um certo comportamento behaviorista (Skinner, 1938) em função de um sistema de estímulo e resposta, isto é, os estudantes foram bem-sucedidos, apresentaram respostas certas, foram recompensados com estímulos (muito bem!!!) dados pelo meio (própria professora), que influenciavam o comportamento deles. Analisamos esse fato como recompensas pelas respostas dadas corretamente por eles, como veremos no recorte a seguir.

> *Professora Joana – Como é que eu leio essa fração (ainda sobre a fração $\frac{2}{3}$)?*
>
> *Aluno - Dois terços.*
>
> *Professora Joana - O numerador dessa (professora apresenta a fração $\frac{3}{4}$).*
>
> *Aluno - 3.*
>
> *Professora Joana - O denominador...*
>
> *A - 4.*
>
> *Professora Joana - Então eu leio essa fração...*

Ainda nesse contexto, outro ponto a ser destacado é a questão da devolução, ou seja, o momento em a professora deveria lançar situações e deixar que os estudantes tomassem para si a responsabilidade em resolver a atividade, sem sua ajuda ou interferência. Essa seria uma das formas deles entrarem diretamente em contato com o saber. Ao final, ela voltaria à cena do jogo apenas para fazer a institucionalização.

O quinto ponto diz respeito à pouca interação dos estudantes com o conteúdo, que poderia ter acontecido de formas diferentes para que fossem requeridos esquemas de conhecimentos que deveriam ser ajustados, cada vez mais, à natureza desse conteúdo. Os estudantes apenas recebiam as atividades, realizavam individualmente e, ao serem questionados, falavam as respostas que chegaram. As que estavam corretas eram escritas no quadro e todos eles copiavam. Consideramos importante a professora incentivar os estudantes a expor os resultados encontrados, discutir coletivamente sobre eles utilizando argumentos próprios, confrontá-los para que chegassem a algumas conclusões.

Uma dimensão importante, destacada por Brousseau (1996) em relação a essa questão, é a necessidade de estabelecimento de três relações entre os elementos do triângulo didático: relação professor-estudantes, estudantes-saber e professor-saber. Os PCPE (PERNAMBUCO, 2012) também destacam que o ensino e a aprendizagem de Matemática implicam estabelecer relações entre alguém que ensina (o professor), alguém que aprende (os estudantes) e o objeto do conhecimento (o saber).

O sexto ponto observado foi que a maior parte dos turnos de falas era da professora. Todavia, era visível a tentativa dela em ter uma participação mais expressiva de seus estudantes, que acontecia por meio de questionamentos, a nosso ver, muito simples, não muito desafiadores a ponto de não causar muitas reflexões, desestruturar o velho conhecimento sobre frações e construir novos, aprofundá-los, como podemos observar no recorte a seguir.

> *Professora Joana - O que é isso?*
> *Aluno - Maçã.*
> *Professora Joana - Quantas?*
> *Aluno - Uma.*
> *Professora Joana - Ela está inteira ou em pedaços?*
> *Aluno - Inteira*
>
> *Professora Joana- A maçã está completa, e eu vou dividir essa maçã, certo? (A professora divide fisicamente a maçã e pergunta): Eu tenho quantas maçãs?*
> *Professora Joana- Uma maçã. Eu vou continuar utilizando o número 1. Corta maçã fisicamente. Ela está inteira?*
> *Aluno- Não!*
> *Professora Joana- Está dividida em quantas partes?*
> *Aluno- 2.*

Após evidenciarmos os elementos predominantes na prática docente de Joana, podemos inferir que ela apresentou características alinhadas mais próximas à socioconstrutivista, mas em alguns momentos se basearam na baldista também. Além dos já explicitados, outro elemento que nos ajuda nessa análise é o fato de não identificamos nenhuma situação adidática vivenciada na prática docente de Joana, que poderia reforçar a primeira caracterização (do discurso) dela enquanto socioconstrutivista. Para ser considerada apenas como socioconstrutivista, como enfatizou em seu discurso, dentre outros aspectos, era necessário criar situações para permitir que os estudantes estivessem em contato direto com o conteúdo e fosse tendo o controle sobre o que eles estivessem fazendo, para identificar o momento certo da institucionalização.

A ausência de situações adidáticas, conceituadas por Brousseau (1986) como aquelas em que há uma intencionalidade didática, definida a partir do momento em que o professor elabora uma situação e, em função dela, os estudantes são capazes de colocar em funcionamento e utilizar o conhecimento que está construindo, na ausência de qualquer professor, onde há a busca deles por soluções de forma autônoma, reforça a ideia de que a professora trabalhou também em função de uma concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática baldista.

Segundo Pais (2008), considerar a situação a-didática é ultrapassar a velha ideia de professor enquanto único transmissor do conhecimento; esse fato não ocorreu. Outrossim, Silva (2008), ao tomar como base os estudos de Brousseau, chama atenção ao fato de que, ao se planejar as situações didáticas, é preciso ter momentos em que os estudantes se encontrem sozinhos diante do problema a resolver, sem a intervenção do professor.

Esse momento é considerado como a-didático, ou seja, os estudantes devem se relacionar com um problema utilizando apenas seus próprios conhecimentos, sentindo-se desafiados por ele e não com algum algoritmo pronto e fornecido pelo professor. Este, por sua vez, não deveria intervir diretamente nas opções de solução. De modo geral, as situações a-didáticas constituem o momento de grande potencialidade, justamente por possibilitar o rompimento das condenáveis práticas da repetição e do modelo, que levam os estudantes a verdadeiros processos mecânicos de resolução (BARUK, 1975).

Um aspecto importante da situação adidática é a devolução da responsabilidade pela aprendizagem para os estudantes, para que estes entrem em contato direto com o saber em questão e o professor só retorna no momento de fazer a institucionalização. Além disso, sua verdadeira potencialidade consiste na tentativa de romper com as velhas práticas de repetição e modelo, que tanto são utilizadas pelas abordagens das pedagogias tradicionais.

Em se tratando do conteúdo fração, verificamos que ele foi ensinado pela professora em função das atividades sugeridas nas várias situações de comunicação promovidas. Apesar de sua expectativa em construí-lo com participação ativa dos estudantes, percebemos que aconteceu parcialmente, não de forma efetiva como esperado. Em alguns momentos, percebemos que Joana assumiu a responsabilidade de repassar o saber escolar em jogo e os estudantes se colocaram como sujeitos que 'recebiam' os conhecimentos sem muito protagonismo. Esse contexto nos remete a Becker (2012), ao enfatizar que longe de uma concepção de conhecimento como construção, embora não raras vezes usem esse termo, os docentes acreditam que o ensino é condição suficiente para se aprender ou se tomar posse do conhecimento matemático.

Diante das análises realizadas, consideramos que a prática da professora Joana apresentou traços da socioconstrutivista e da baldista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005). Nesse sentido, Charnay (2001) chama atenção ao fato de que o professor, apesar de utilizar elementos das diferentes concepções, se apoia na maioria das vezes em um tipo delas para o desenvolvimento de suas atividades. Em função disso, consideramos que as características da concepção socioconstrutivista foram mais presentes na prática da professora.

Apesar de observamos a preocupação da professora em construir o conceito de fração com a participação dos estudantes em função de seus questionamentos, eles não levavam à compreensão ou ao aprofundamento do conteúdo. Direcioná-los de forma simplória não foi suficiente para ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura mental. Ela poderá acontecer com situações desafiadoras, a partir da construção de um meio antagônico (que não existiu), considerado ideal pelo que preconiza a TSD.

Ao término de uma das aulas, em que um dos objetivos era construir o conceito do saber escolar fração, questionamos os estudantes sobre o que tinham compreendido, o que significava para eles esse conceito, a partir do que fora vivenciado na aula, e obtivemos as seguintes respostas:

> *Estudante 1- É uma coisa que se divide mais de uma vez, tipo em 5 partes.*
> *Estudante 2- É dividir uma coisa, como uma maçã ou um papel.*
> *Estudante 3- É dividir alguma coisa.*
> *Estudante 4- Dividir.*
> *Estudante 5- Não soube responder.*
> *Estudante 6- Não soube responder.*
> *Estudante 7- Dividir as coisas com as pessoas.*
> *Estudante 8- Uma fração é um conteúdo que pode ser dividido em várias partes.*
> *Estudante 9- Igual a divisão.*

Ao analisarmos as aulas da professora Joana, em especial esse recorte, foi evidente que o que ficou na cabeça deles em relação ao conceito de fração foi a ideia de dividir algo, e não de um número. Dessa forma, não se pode afirmar sobre o sucesso e sim de um pseudosucesso no processo de aprendizagem de fração, na turma observada, nem seu aprofundamento como foi explicitado pela professora na entrevista e no primeiro dia de aula "É logico que no próximo bimestre a gente vai aprofundar e consolidar o conteúdo" e no primeiro dia de aula "Trabalhamos coisa pouca e agora vamos aprofundar" e preconizado pelos PCN (BRASIL, 1997) e pela BNCC (BRASIL, 2017).

6.2.2 Professora Maria

Maria foi a segunda a ser acompanhada. Seu planejamento obedeceu à ordem estabelecida no Quadro 11.

Quadro 11 - Acompanhamento das aulas da Professora Maria.

AULA	PROPOSTA DA AULA
1	Leitura e representação de frações.
2	Realização de atividades sobre a leitura e representação de frações.
3	Adição e subtração de fração com mesmo denominador.
4	Operações com frações.
5	Realização de atividades no livro didático
6	Realização do simulado

Fonte: Elaborado pelos autores.

Em relação ao acompanhamento da prática docente, consideramos alguns pontos que merecem destaque. O primeiro ponto foi que a professora iniciou o trabalho dando as regras e modelos para serem seguidos pelos estudantes, aplicando o ensino centrado na repetição e repasse de conhecimento. Becker (2012), por exemplo, chama atenção ao fato de o conteúdo, quando é transmitido diretamente, o professor espera que os estudantes consigam a façanha de adquiri-lo em função dos seus sentidos, ou seja, ouvindo e vendo o que o professor se propõe a oferecer, para passar a trabalhar como veremos no recorte a seguir:

> *Professora Maria: Se for diferente o denominador, tenho que tirar o m.m.c, mas é complexo, vou dar isso a vocês não. É muito mais trabalho, mas aqui com denominador igual é facilzinho. Não copia esse outro exemplo, porque eu não vou dar isso não. Não vamos fazer com m.m.c e sim sem o m.m.c. Como? Repito o denominador e somo o numerador. Façam a letra b.*

Ao analisar esse recorte, encontramos evidências, na fala da professora, de se trabalhar coisas fáceis, menos complexas com estudantes Essa questão nos remete ao segundo ponto pois percebemos que os estudantes eram considerados elementos passivos, na relação didática, meros receptores, o que pode resultar em uma “aprendizagem mecânica, de memorização”. Na maioria das vezes eles apenas prestavam atenção, escutavam, copiavam. Não se percebia no discurso momentos em que a professora incitava a ação/participação de forma reflexiva, a não ser para dar respostas simples, em especial, resultados de algoritmos propostos no quadro pela professora e que ela mesma respondia, como mostram os trechos a seguir:

> *T2 - Tem que olhar o quadro, prestar atenção no que estou falando.*
> *T3 - E respondo no quadro. Respondo todas as atividades no quadro.*

O terceiro foi que o desenvolvimento do conteúdo não estava de acordo com as orientações dos documentos curriculares, visto que os PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2017) enfatizam seu aprofundamento, em especial a partir do ensino em função das suas diferentes concepções. Mesmo a professora tendo explicitado para os estudantes essa expectativa, vimos que ela não foi trabalhada efetivamente, pois apenas as concepções de fração como parte e todo e quociente foram trabalhadas de forma superficial, gerando dificuldade de compreensão do saber escolar em jogo, com ênfase na primeira concepção.

Nesse sentido, Powell (2018) enfatiza que ao utilizar o significado de uma fração e seu símbolo bipartido a, essa perspectiva acarreta dificuldades cognitivas para os alunos e ainda destaca que é um desafio conceitual, pois a equipartição de um objeto não confere significado a uma fração imprópria.

> *Bora ver frações, quando eu tenho $\frac{1}{2}$, vejam aí na cópia. Como eu represento isso em forma de fração? Olhem para o quadro, prestem atenção. Como represento$\frac{1}{2}$, quem sabe? Faço o inteiro (professora desenha um círculo) e passo o traço no meio e pinto a metade. Agora $\frac{1}{3}$... como faço? Tenho 1 inteiro e divido em quantas partes? (Fala da professora Maria).*
> *Aluno- 3.*
> *Professora Maria - 3, como vou fazer $\frac{1}{3}$?*
> *Aluno - Pinta um e deixa 2.*
>
> *Professora Maria - Agora $\frac{1}{4}$... como represento? Tenho 1 e divido em quantos?*
> *Aluno - 4*
> *Professora Maria - Agora vocês vão fazer $\frac{1}{5}$! Divido em quantos?*

Aluno - 5.

Professora Maria - Façam $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$.

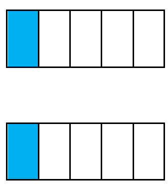
Com a ênfase nessa concepção, a aprendizagem ficou comprometida pois os estudantes apenas memorizaram as regras estabelecidas. Da mesma forma que a professora, eles ficaram presos nas partes de uma fração e não conseguiram estabelecer a relação entre seus termos, ou seja, ficaram sem entender que a fração é a representação de um único número – e não de dois naturais, um em cima e outro embaixo. Nesse sentido, era importante que os estudantes compreendessem que uma fração não indica necessariamente o tamanho do todo ou das partes, mas exprime a relação entre a parte e o todo (VAN DE WALLE, 2009).

Ademais, percebemos o trabalho desenvolvido a partir da ideia de fração enquanto divisão, realização do algoritmo dessa operação. De acordo com Mandarino (2010), incentivar o trabalho com divisão não significa ensinar o algoritmo, e destaca "É preciso explorar os significados das operações e o cálculo de resultados por processos operatórios espontâneos, antes da apresentação dos algoritmos formais ou não formais" (incluí essa citação). Consideramos, inclusive, esse fato como uma regra de CONTRATO DIDÁTICO que será discutida posteriormente.

Professora Maria - Se a mãe tiver 2 barras de chocolate, pode dividir para 5 filhos?

Aluno - Dá sim.

Professora Maria - vamos ver quanto fica. (Professora faz a divisão 2/5= 0,4



O quarto ponto foi que a aprendizagem de frações estava relacionada à repetição de exercícios fáceis, do mesmo tipo, que exigiam o mesmo raciocínio dos apresentados e respondidos pela professora no quadro, com a pseudoparticipação dos estudantes como mostra o recorte a seguir:

Professora Maria - Façam $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$...

Professora Maria - Vocês colam a atividade no caderno, ao lado copiam o nome e a figura e o espaço que está em branco é para vocês pintarem o que está faltando.

Apesar de a professora, em seu discurso, procurar comentar sobre fração própria e imprópria (quando mencionou um exemplo da questão que caiu no simulado do Aprova Brasil), não houve o desenvolvimento do trabalho em função do saber escolar fração, pois o considerava de grande complexidade e mais uma vez o resolveu utilizando o algoritmo da divisão.

Professora Maria - Lembram do aprova? $\frac{4}{3}$*?*

Professora Maria – (Faz a divisão $\frac{4}{3}$*=1,3) Essa fração é mais complexa. Eu quero mostrar que a fração pode ter numerador maior que o denominador e vice-versa. A fração representa a divisão que eu quero. Se eu for fazer um bolo e colocar* $\frac{1}{2}$ *ou* $\frac{3}{4}$ *de açúcar. Qual é maior?*

Aluno - $\frac{3}{4}$*. Mostra a divisão.*

O quinto ponto foi em relação ao meio. Podemos observar que foi totalmente aliado aos estudantes, ou seja, não ofereceu nenhuma dificuldade, nenhum desafio que viesse a desestabilizá-los cognitivamente. Em várias situações, foi percebido que esse elemento funcionou sem gerar grandes conflitos, discussões por parte da turma. Tais constatações vão de encontro ao que preconiza Brousseau (1996), já que para ele o meio deve possibilitar a interação de forma autônoma dos estudantes em relação às situações em que interage e em relação ao professor. O autor ainda acrescenta que o meio deve ser organizado para a aprendizagem em uma perspectiva de interação em função de alguns elementos, tais como: desequilíbrios, assimilações e acomodações, que possibilitarão aos estudantes reflexões sobre suas ações e retroações, impondo restrições através de regras que devem ser respeitadas. Para melhor ilustrar essa questão, mostraremos os recortes a seguir:

Professora Maria - Eu gosto muito de trabalhar problemas. Gosto de criar problemas mais ***facilzinhos*** *para eles entenderem. Eu pego umas* ***coisas bem práticas****. Eu faço bem assim. Mamãe foi a feira e comprou 10 laranjas, 20 bananas e maçãs. Quantas frutas mamãe comprou? Aí já vai fazer uma operação de ... Só pra ele entender que alí ele vai somar.*

Outro procedimento da professora, em que observamos nesse meio aliado, foi quando em uma aula de iniciação ao estudo das frações com tempo previsto para 2h, ela começou entregando uma atividade xerocada para os estudantes, pedindo para que lessem as frações, porque precisariam saber como se fazia a leitura, já que eram 5º ano, e que no quotidiano era comum aparecerem situações em que eles necessitariam desse conhecimento.

Em função da utilização de um meio aliado aos estudantes, Maria não proporcionou uma interação entre eles e nem com ela mesma, em especial porque esse meio não necessita ser necessariamente físico, uma manipulação do real; ela poderia também ser mental. Assim, ao antecipar as etapas da institucionalização, ocasionou prejuízos para um aspecto primordial que vem sendo discutido nesse trabalho, que é a necessidade de construção do conhecimento pelos estudantes, dificultando a aprendizagem do conteúdo sob avaliação.

O sexto ponto diz respeito à interação. Constatamos que só aconteceu quando a professora realizava questionamentos simples, fáceis para os estudantes, como foram vistos anteriormente, e que, na maioria das vezes, eram respondidos por ela mesma. Entre os estudantes, não houve nenhuma forma de interação. Observamos ainda em nossa análise que a professora tinha pouco repertório de perguntas para os problemas simples que foram propostos. Apenas a verificação pelo cálculo foi realizada no quadro.

Isso nos leva a refletir sobre o que diz Brousseau (2008) ao se referir à seleção sensata dos problemas propostos que devem fazer, pela própria dinâmica, que o estudante evolua. O professor deve ter consciência da escolha feita e avaliar o grau de dificuldade ou de desafio na proposta. Nesse caso, o desafio foi insuficiente para sustentar questionamentos que fomentassem maiores reflexões.

Para Ricardo, Slongo e Pietrocola (2003), o estudante, ao aceitar que o professor extrapole sua responsabilidade diante do CONTRATO DIDÁTICO e lhe apresente situações facilitadoras que induzem aos resultados desejados, estará perdendo espaço de atuação no sistema didático e, muito provavelmente, não se apropriará do conhecimento.

Diante do contexto apresentado, é interessante destacarmos a dificuldade na gestão do trabalho didático proposto pela professora. Para Brousseau (2008), há uma necessidade de estruturação de situações ricas, problematizadoras; do ponto de vista da atividade cognitiva dos estudantes, depende, na maioria das vezes, da escolha de boas atividades. As propostas apresentadas pela professora foram prejudicadas, já que não funcionaram como elemento estruturador de um meio antagonista, não permitindo interação entre os estudantes nem aprendizagem por parte deles. Diante desse contexto, sabemos que ela acontecerá:

> A partir das interações das crianças com situações fundamentais; os tipos de contextos que podem fomentar a construção de sentido e a promoção de um processo de construção do conhecimento, organizado em torno de um tipo de jogo, que o desenvolvimento de uma situação didática. (BROUSSEAU, 1997, p. 30).

Em relação às fases das situações didáticas, como estão intrinsecamente relacionadas à interação, à seleção de atividades, observamos que a única trabalhada pela professora foi a institucionalização. Em relação a esse último ponto, é interessante ressaltar que:

> Se a institucionalização for realizada muito cedo, ela interromperá a construção do significado, não oportunizando ao estudante uma aprendizagem adequada, o que poderá ocasionar dificuldades tanto para quem ensina, quanto para quem aprende. Da mesma forma, se é realizada após o momento adequado, ela reforçará compreensões inexatas, e por consequência, haverá um atraso na aprendizagem, gerando dificuldades nas aplicações dos conhecimentos construídos. (ALMOULOUD, 2007, p.40).

Ao analisarmos essa citação e compararmos com as aulas observadas, destacamos que a institucionalização acontecia muito cedo, pois a professora, além de explicitar todo conhecimento que era preciso ser construído, resolvia todas as atividades no quadro, tirando do estudante a possibilidade de construção do conhecimento de forma eficaz. Diante disso, destacamos que é preciso que o professor tenha muito cuidado em relação a essa fase da TSD, assim como o tempo para iniciar ou finalizar a sistematização dos saberes matemáticos.

É importante salientar que essa atitude da professora impossibilitava a realização de duas fases muito importantes da TSD: a devolução e validação. A primeira ficou comprometida, pois ela respondia aos questionamentos proferidos e a segunda, porque a partir do momento que intervinha respondendo as atividades propostas, colocava em questão todo o trabalho envidado pelos estudantes na dialética de validação.

Em geral, o conteúdo fração foi trabalhado de forma superficial, mesmo a professora tendo afirmado, na entrevista semiestruturada, que daria um aprofundamento. O foco ficou nas partes, mas não conseguiu estabelecer a relação parte e todo. Basicamente, trabalhou leitura de frações, apresentação em linguagem natural, representação utilizando figuras prototípicas (círculo e retângulo), operações com frações de mesmo denominador.

Consideramos que essas lacunas deixadas no ano investigado geraram dificuldades na aprendizagem que poderão ser aumentadas quando os estudantes retomarem esse conteúdo nos anos posteriores. Acreditamos que essa lacuna pode estar associada à fragilidade no domínio do saber ecolar fração por parte da professora Maria. Essa situação vem corroborar as ideias defendidas por Câmara dos Santos (1995), pois destaca que a forma como o professor constitui a relação com determinado saber poderá repercutir no modo como ele ensina e também como seu estudante irá construí-lo.

Além disso, o autor chama atenção ao fato de que a relação epistêmica que o professor tem com o saber lhe dará condições de desenvolver diversos aspectos importantes para o ensino. Dentre eles, podemos citar: seleção de conteúdos, tendo em vista as indicações dos documentos norteadores; elaboração e execução do planejamento a partir de situações didáticas; atribuição de significados, propriedades e articulação entre os conceitos matemáticos e a gestão dos diferentes tempos (didáticos, do professor e das aprendizagens dos estudantes).

A partir da análise dos pontos explicitados na prática docente de Maria, podemos inferir que ela apresentou claramente características da concepção de ensino e de aprendizagem da Matemática Baldista, confirmando nossa análise inicial, pois não percebemos elementos de uma prática socioconstrutivista Câmara dos Santos (2005), como a professora havia comentado na entrevista.

6.3 RELAÇÃO ENTRE AS CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA IDENTIFICADAS NA ENTREVISTA E OBSERVADAS NAS PRÁTICAS DOCENTES

Em função das análises dos dados coletados, percebemos que, em relação à entrevista semiestruturada, a professora Joana apresentou preponderantemente características da concepção de ensino e de aprendizagem da Matemática Socioconstrutivista. No entanto, na observação de sua prática, percebemos que ela não conseguiu manter apenas as características identificadas no discurso e desenvolveu suas aulas com características preponderantes dessa concepção, mas da Baldista também (CÂMARA DOS SANTOS, 2005).

A professora Maria apresentou predominantemente, na entrevista, características da concepção de ensino e de aprendizagem da Matemática Baldista, acreditando também ser socioconstrutivista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005). Ao acompanharmos sua prática docente, percebemos que ela apresentou hegemonicamente, características da primeira concepção.

A partir das ideias expostas, gostaríamos de destacar alguns pontos que consideramos importantes. O primeiro é que, em relação às duas professoras observadas, o discurso proferido foi um pouco diferente da prática, em especial o de Joana. Acreditamos que uma das possibilidades dessa situação pode ser resultante de um Contrato Experimental ou até mesmo das condiçoes não moficáveis que lhes são impostas pela escola e a que elas precisavam se adequar.

O segundo é que as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA subjacentes à prática docente podem estar muito arraigadas às próprias vivências; e em especial às marcas de contratos didáticos anteriormente construídos. Elas trazem elementos que são intrinsecamente constituídos nesse sujeito. Seu discurso pode revelar a concepção que ele gostaria de ter, o que considera ideal, mas não necessariamente a que a constitui, como vimos, em especial, com a professora Joana.

Ponte (1992) chama atenção ao fato de que assim como as crenças, as concepções estão associadas às ações que os professores tomam em sua prática docente; e após fazer uma importante revisão da literatura sobre o tema, o autor concluiu que as concepções vão se refletir, na maioria das vezes, nas práticas docentes (THOMPSON, 1992). Ademais, Brousseau (1997) chama atenção ao fato de que há a possibilidade de algumas concepções adquiridas não desaparecem, prontamente, para dar lugar a outra melhor, ou mais adequada. Sendo assim, elas podem ser resistentes, provocando, consequentemente, erros e constituindo-se em um obstáculo. O quadro 12 retrata a distinção entre as concepções de ensino e de aprendizagem identificadas no discurso e as observadas na prática docente das referidas professoras.

Quadro 12 - Relação entre concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática no discurso e na prática docente.

CONCEPÇÃODEENSINOEDEAPRENDIZAGEMDE MATEMÁTICA		
PROFESSORA	**Entrevista**	**Acompanhamento das aulas**
JOANA	Socioconstrutivista	Baldista/socioconstrutivista
MARIA	Socioconstrutivista/ Baldista	Baldista

Fonte: Os autores.

Diante do exposto, podemos inferir e responder o nosso primeiro questionamento: As concepções de ensino de Matemática identificadas pelos professores em seus discursos se materializam na prática docente? Ou ficam apenas no campo de suas expectativas? Nas turmas investigadas, não necessariamente, pois tanto em relação à Joana quanto a Maria, identificamos teoricamente (discurso) CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA que se materializaram, mas também encontramos indícios diferentes do que foi preconizado.Esse fato é ratificado nas ideias de Carrilo e Contreras (1995) ao ressaltar a natureza interativa (teórico-prática) do conhecimento profissional que pode levar o professor a expressar ideias que considere desejáveis e que ainda não caracterizam sua prática.

6.4 ELEMENTOS DO CONTRATO DIDÁTICO IDENTIFICADOS NO ACOMPANHAMENTO DAS AULAS DAS PROFESSORAS

Na presente seção apresentamos, em cinco subseções os elementos essenciais e os constitutivos associados ao CD, as relações entre as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA com as possíveis dificuldades na aprendizagem de frações, assim como procuramos identificar e caracterizar o CONTRATO DIDÁTICO em função das relações estabelecidas entre professor-estudante e o saber escolar frações.

Para tanto, foi importante levarmos em conta a possibilidade de verificação do referido fenômeno didático que se estabeleceu em cada turma pesquisada, pois acreditamos que cada professora estabelecerá seu próprio CONTRATO DIDÁTICO. Por conseguinte, acredita-se que todo CONTRATO DIDÁTICO é único e instável. Assim, ele deve esta dupla especificidade aos múltiplos produtos dos saberes presentes na relação didática (JONNAERT, 1996).

6.4.1 Elementos essenciais do CD estabelecidos pela professora Joana

À luz dos estudos de Jonnaert e Borght (2002), identificamos em relação às frações alguns elementos essenciais que se relacionam intrinsecamente ao CONTRATO DIDÁTICO estabelecido: **A 1ª ideia se relaciona à divisão de responsabilidades** – há funções e papéis em jogo nas interações da relação didática em questão, onde se evidenciam as responsabilidades principalmente em relação à professora, como veremos nessa situação ao explicar o assunto, ou definir um conceito:

> *Professora Joana - Agora, antes de continuar essa parte, se eu perguntar pra vocês o que é fração? O que vocês me dizem? Nós estamos estudando fração, pra chegar a uma fração nós fizemos o que com isso aqui? Nós fizemos o que com isso aqui?*
> *Estudante - Nós dividimos.*
> *Professora Joana - Mas essa divisão, a forma de você repartir tem que ser igual.*

Percebemos que, no tocante à **divisão de responsabilidades**, os sujeitos da relação didática alunos/professora dividem em parte esse papel. Ela detinha o conhecimento e ia, com a ajuda dos estudantes, tentando despertar neles participação para juntos, chegarem à construção do conceito. Porém, algumas vezes, as escolhas didáticas não favorecereram esse processo. Observamos logo no início a apresentação da ideia que os estudantes tinham de fração enquanto divisão, e reforçada pela professora ao acrescentar que era uma divisão, mas deveria ser em partes iguais. Destacamos que nesse trecho há uma decisão didática inadequada (considerar fração como duas ações, dividir e comer) que pode gerar um obstáculo, a partir do momento em que os estudantes podem considerar fração como dois números, e não como um só.

A **2ª ideia, a tomada de consciência do implícito** – quando da manifestação de situações em que a professora, ou os estudantes transgrediram alguma das regras, buscou-se a renegociação delas. Percebemos essa situação no recorte mostrado anteriormente quando a professora perguntou aos estudantes o que é fração. Para eles, era apenas divisão, mas ela quebra a regra estabelecida ao acrescentar que era preciso dividir, mas em partes iguais, como veremos no recorte a seguir:

> *Professora Joana - Mas essa divisão, a forma de você repartir tem que ser igual. Se eu pego uma barra de chocolate, ela está inteira, vou fracionar ela, repartir ela entre (por exemplo, as colegas, Evelin e Elen). Dou uma parte dessa aqui a Evelin e dou essa parte aqui bem maior a Elen. Dividi igualmente?*
> *Estudante - Não.*
> *Professora Joana - Mas eu fracionei, eu reparti, só que não foi igualmente. Entenderam então o que é fração? Dividir em partes iguais.*

Diante do imprevisto, a regra anteriormente estabelecida foi renegociada. A partir do momento que a professora percebeu a definição incompleta, que muitos estudantes explicitaram, procurou refazê-la, quebrando assim a regra estabelecida.

Apesar das rupturas serem elementos que sinalizam para avanço na aprendizagem, o caso explicitado incorreu em mais um erro conceitual. No último recorte, observamos a confirmação da decisão didática tomada inadequadamente, que pode criar mais uma regra e gerar dificuldades em função do CONTRATO DIDÁTICO vigente. Na tentativa de acertar, a definição dada pela professora não colaborou para compreensão dos estudantes desse saber escolar. Ao contrário, os induziu ao fracasso por não lidarem adequadamente com fração.

A **3ª ideia, a relação com o saber** – foi caracterizada por um ensino que inicialmente tendia a uma perspectiva de efetivação e aprofundamento das diferentes concepções do saber escolar fração. Apesar de a professora apresentá-las, as situações didáticas e o meio não contribuíram para o sucesso na aprendizagem do referido conceito.

6.4.2 Elementos essenciais do CD estabelecidos pela professora Maria

Tomando por base os estudos de Jonnaert e Borght (2002), identificamos, em relação ao conteúdo fração, algumas ideias que se associam intrinsecamente ao CONTRATO DIDÁTICO estabelecido: a **1ª diz respeito à divisão de responsabilidades** – a professora tinha responsabilidade de ensinar, repassar o saber escolar em jogo e os estudantes deveriam olhar para o quadro, copiar, permanecer em silêncio durante a explicação pois estavam ali com a intenção de aprender; para tanto, deveriam prestar atenção na aula para que a aprendizagem ocorresse, enfatizando dessa forma a autoridade e o domínio do professor com relação ao conteúdo a ser ensinado.

Em diversos momentos, foi observada essa responsabilidade desejada pela professora desde a entrevista: “Tem que olhar o quadro, prestar atenção no que estou falando... se não na prova, não vão nem saber o que estou falando”. Em alguns momentos da aula, ao explicar o assunto e/ou resolver as atividades por ela propostas:

> *Professora Maria - Pedro recebeu R$ 1000,00, gastou ¼ do salário com aluguel. Quanto sobrou para outras despesas? GENTE!! (professora aumenta a voz), presta atenção como eu faço a conta.*

Analisamos que, em relação à divisão de responsabilidades, os sujeitos da relação didática professora e estudantes cumpriram seus papéis, o dela de “ensinar” e o deles, o de “aprender” tudo da forma como foi ensinado pela professora. É muito comum no cotidiano das salas de aula, a ideia de que professor bom é aquele que mantém sua turma quieta, em silêncio, prestando atenção ao professor. Nós não concordamos com esse posicionamento e acreditamos que as dificuldades apresentadas pelos estudantes na construção de conceitos matemáticos, em especial as frações, sofreram a influência dessa forma de ensinar da professora.

A **2ª ideia, a tomada de consciência do implícito** – Apesar da manutenção das regras implícitas ser fundamental para o processo de ensino e de aprendizagem, nesse caso, especificamente, a conciência de uma regra de CD, poderia levar os estudantes a uma quebra e possível aprendizagem do conceito. Na realização do simulado, os estudantes tiveram contato com uma questão que requeria o conhecimento do conceito de fração imprópria, mas a professora praticamente só trabalhou as impróprias. Esse parecia ser um momento em que a consciência das regras propiciaria conflitos e espaços para trocas entre os parceiros, mas a professora apenas comentou o conceito e não houve aprofundamento, mesmo sabendo que todos eles erraram a questão.

A **3ª ideia, a relação com o saber** – foi caracterizada por uma fragilidade conceitual por parte da professora, perceptivel quando, em muitos momentos, Maria evitava abordar aspectos complexos relacionados ao saber escolar em jogo, como veremos nos recortes a seguir:

> *Professora Maria - Eu geralmente trago alguma coisa de casa, o suporte. Eu gosto de imprimir em casa. Faço uma pesquisa do conteúdo um resumo e pra conversar com eles, às vezes imprimo uma figura.*
> *Professora Maria - Se for diferente o denominador, tenho que tirar o m.m.c, mas é complexo, vou dar isso a vocês não. É muito mais trabalho, mas aqui com denominador igual é facilzinho. Não copia esse outro exemplo, porque eu não vou dar isso não. Não vamos fazer com m.m.c e sim sem o m.m.c. Como? Repito o denominador e somo o numerador. Façam a letra b.*
> *Mostro pra eles verem e depois vou repassar e fazer atividades relacionadas ao conteúdo.*

6.4.3 Elementos constitutivos da Professora Joana

Antes de analisarmos as aulas observadas da Professora Joana, elencamos no quadro 13 um elemento constitutivo do CONTRATO DIDÁTICO (expectativa) preconizado por Brousseau (1996; 1998; 2008) que foi identificado na entrevista semiestruturada da professora.

Quadro 13 - Expectativas da Professora Joana.

PERGUNTA	TRECHO	EXPECTATIVA
Como é sua interação quando eles estão falando das estratégias de resolução encontradas?	T1-Como eu faço a correção individual, percebo que encontraram diversas formas de resolução. A partir daí eu provoco eles e comento: fulano resolveu dessa maneira,você respondeu dessa... Estão corretas? Alguém acha que está errado? Por que está errado?	Que os estudantes exponham suas Estratégias de resolução de problemas.
	T2- A partir daí eu provoco eles e comento: fulano resolveu dessa maneira, você respondeu dessa... Estão corretas? Alguém acha que está errado? Por que está errado? Eles vão dizendo a posição que eles acham, vão dizendo se está certo, errado e por que eles acham.	Ter uma boa interação com os estudantes e eles com os demais colegas;
Você usa problemas nas suas aulas?	T3-Se você olhar no quadro, gráficos, tabelas, situações do dia a dia deles. Se ele comprou um bolo, como ele vai dividir em 4 partes, a parte fracionária é aquela que ele vai dividir para os colegas.	Os estudantes não são tábulas rasas, trazem vivências e experiências de seu dia a dia;

Fonte: Os autores.

Com o objetivo de refletir e identificar o CD estabelecido pela professora Joana, tivemos o cuidado de observar as transcrições das aulas, em função da fundamentação teórica discutida no capítulo 1. Para ser possível essa identificação, nos debruçamos sobre os elementos constitutivos desse fenômeno e utilizamos as definições apresentadas por Almeida (2016) para nos apoiarmos.

No que se refere à expectativa, o autor a define como o que o professor espera dos estudantes e o que eles esperam do professor, em relação ao trabalho na sala de aula (relativo ao saber específico que está em cena). No primeiro dia, a professora Joana começou lembrando que ia iniciar o conteúdo, mas que muitos já haviam estudado anteriormente e que a própria turma já havia tido noções elementares quando foi trabalhado o gênero textual receita. Isto nos revelou, de forma explícita, que o trabalho com o conteúdo frações já não era mais novidade para os estudantes, ou seja, existia a expectativa, por parte dela, de que se eles já houvessem estudado, o esperado é que já soubessem alguma coisa, como veremos no recorte a seguir.

> *Vamos começar hoje o assunto de fração. Para alguns não é assunto novo porque viram alguma coisa no 4º ano. Esse ano já falamos superficialmente sobre fração, sobre alguma receita que aparecia lá, algumas frações. Trabalhamos coisa pouca e agora vamos aprofundar (Professora Joana).*

Uma segunda, ainda pautada nesse recorte, era de aprofundamento e compreensão dos diferentes significados de frações. Percebemos a adequação dessa expectativa com as orientações trazidas pelos documentos orientadores da escola básica, já que recomendam seu aprofundamento de forma gradativa, PCN (BRASIL,1997), a partir do segundo ciclo e BNCC (BRASIL,2017) já iniciado no 2º ano do primeiro ciclo. Verificamos que essa expectativa não foi totalmente atingida, visto que a professora trabalhou preponderantemente o significado parte-todo de frações, aspecto contínuo; apenas em uma atividade apresentou um exemplo com o discreto.

Uma terceira, era que os estudantes prestassem atenção quando ela estivesse explicando. Dessa forma, percebemos como os elementos do CONTRATO DIDÁTICO foram se materializando no decorrer da sala de aula e condicionando a relação entre professor e estudantes. Nesse aspecto, percebemos uma contradição com a ideia apresentada na entrevista, em que a professora enfatizou a importância dos estudantes na construção do conhecimento, mas, nas aulas, muitas informações conceituais foram, pouco a pouco, transmitidas por Joana e os estudantes deveriam estar atentos e copiarem depois.

> *Aqui nós temos, pra ler uma fração é preciso conhecer o seu de-no- minador pra ler uma fração é preciso conhecer o seu denominador e prestar atenção quando o professor está explicando, seu Manoel. (Professora Joana).*

Os estudantes procuraram estar em consonância com o contrato vigente, a partir do momento em que questionavam se podiam copiar o que foi explicitado, passando assim de ativo a passivo na relação contratual. Ainda em relação a esse recorte, percebemos o surgimento de um contrato diferencial para alguns estudantes no que diz respeito às expectativas, a exemplo do estudante Manoel. Concordamos com Schubauer-Leoni (1988) ao chamar atenção ao fato de que as expectativas do professor em relação à forma com que os estudantes se relacionam com o saber em jogo é diferente, variando de estudante para estudante. Em muitos momentos da aula, a professora chamava atenção do estudante Manoel para que prestasse atenção. Sua expectativa era de explicar e o estudante aprender, se prestasse atenção à explicação dada. Para ela, alguns deles não tinham condições de aprender e precisavam estar mais atentos que outros à explicação, a exemplo de Manoel, como veremos nos recortes a seguir.

> *Aqui nós temos, pra ler uma fração é preciso conhecer o seu de-no- minador pra ler uma fração é preciso conhecer o seu denominador e prestar atenção quando o professor está explicando, seu Manoel. (Professora Joana).*
>
> ...
>
> *Não sei porque Manoel não está falando, não entendi ainda! Vou esperar. Ainda tem 3 pra você ler, Manoel. Numerador... (Professora Joana).*

Quanto a esse contrato diferencial, podemos relacioná-lo a um efeito de CONTRATO DIDÁTICO definido como Pigmaleão Brousseau (1996), em que o professor cria expectativas em relação à aprendizagem dos estudantes, como se existisse uma espécie de acordo tácito entre os parceiros, no qual limita a exigência à imagem que faz da capacidade tanto do professor para os estudantes, quanto deles para com ele.

Um aspecto interessante a destacar é que o efeito pigmaleão está no coração do CD, está relacionado ao efeito das expectativas, não é perverso. Entretanto, a condução dada por alguns professores, pode desviá-lo para o sentido perverso do Contrato Diferencial. Não podemos dizer que esse tipo de Contrato não possa existir, já que estamos lidando com subjetividade, entretanto, faz-se necessária uma constante vigilância contratual (didática) por parte do professor, para que esse fenômeno das espectativas não possa ser conduzido de forma perversa e prejudicar a aprendizagem dos estudantes.

Corroborando essa ideia, Henry (1991) destaca que inicialmente os efeitos do CONTRATO DIDÁTICO podem ser identificados desde seu próprio cumprimento na relação didática, em função das expectativas que os parceiros têm uns com os outros e o denomina como efeito Pigmaleão. Para Brito Menezes e Câmara dos Santos, (2017), "o professor, de certa forma, "elege" determinados alunos que ele supõe que vão ter sucesso, em detrimento daqueles que ele supõe que serão fadados ao fracasso".

Em geral, o professor está mais disponível para aquele aluno eleito, com o qual ele estabelece um contrato permeado por expectativas positivas. Dessa forma, a partir de suas próprias expectativas, a professora elegia os estudantes que teriam sucesso assim como aqueles que não teriam; no caso de Manoel, foi percebido que ela estabelecia uma expectativa negativa em relação a ele.

Durante a realização das atividades, algumas situações demonstraram que a professora possuía expectativas diferentes em relação à aprendizagem de alguns estudantes, o que podia indicar um Contrato Diferencial, ou seja, Manoel era um dos que acreditava que não teria sucesso em suas aprendizagens.

Em contrapartida, havia para outros estudantes expectativas positivas, consideradas por nós como decorrentes também de um Contrato Diferencial, a exemplo de João. A professora sempre o convidava para responder as questões. A certeza de que iria acertar, talvez fosse o motivo da escolha, como veremos no recorte a seguir.

> *Professora Joana - Aqui nós temos a fração* $\frac{5}{10}$. $\frac{5}{10}$ *pode ser representado também por qual forma decimal?*
>
> *Estudantes - 0,5.*
>
> *Professora Joana - Por quê 0,5, João? João vai responder.*
>
> *Estudante João faz a divisão e responde que sim, pode 5 ser dividido por 10.*
>
> $$\begin{array}{r|l} 5\boxed{0} & 10 \\ \cline{2-2} 50 & 0.5 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Observamos, no recorte mostrado, a professora demonstrando que possui expectativas positivas em relação à aprendizagem de João, já que, depois de ela não ter respondido uma pergunta realizada por um dos estudantes que lhe havia perguntado algo sobre fração, direcionou o questionamento a João.

Diante da discussão apresentada, é interessante destacarmos que existe uma relação entre o Contrato Diferencial e o Didático. Segundo Schubauer-Leoni (1988), o primeiro não deve ser visto como um tipo de contrato, e sim uma deformação (perversa) do segundo, pois carrega consigo as mesmas características dele no sentido estrito: diz respeito às expectativas, negociações, divisão de responsabilidade, etc.

Entretanto, a autora chama atenção ao fato de que ele se diferencia do Didático, à medida que o professor estabelece expectativas diferentes para os estudantes, em função da relação que eles têm com o saber em jogo. Em geral, há aqueles para os quais o professor tem uma expectativa negativa, como no caso de Manoel; em outros, positivas como Maria, João, etc.

Nesse cenário, é interessante pensarmos que, ao nos reportarmos às experiências profissionais, iremos lembrar de que, muitas vezes, o professor, ao iniciar o ano letivo, e com pouco conhecimento de seus estudantes, já pensa e até comenta quais estudantes irão se "dar bem", serão aprovados, e os que provavelmente estarão fadados ao fracasso, à reprovação.

Esse é um simples exemplo, que agora tem uma definição do conceito a partir de uma teoria. É preciso refletir até que ponto as escolhas, a forma de ensinar, as regras construídas e internalizadas por nossos estudantes, os contratos diferenciais firmados podem ser considerados elementos que, ao invés de ajudar, dificultam a aprendizagem.

Além disso, a professora Joana, em relação a outros estudantes, por vezes desconsiderava seus questionamentos, como veremos a seguir.

> *Professora Joana- Todos esses números aqui estão mostrando a metade de uma quantidade. (Professora explana: "Alan tem uma pergunta" e o estudante fala "Se dividirmos 8 para 3?"). Eu não falei o algarismo 3. Falei 2, 4, 8 e 16. (A professora mostra as divisões da torta por 2, 4, 6 e 16, não explica ao estudante como dividir 8 para 3, e pergunta se alguém ouviu ela falar em dividir para 3 pessoas. Os estudantes respondem que não).*

Analisando o recorte, verificamos que, na relação didática inicial com fração, os estudantes, ao perguntarem como realizar a divisão 8/3, não compreendiam o seu significado, dúvida decorrente de regra de CONTRATO DIDÁTICO estabelecida em que o numerador de uma fração deveria ser sempre menor que o denominador. Mesmo a professora tendo dito que não se preocupassem, pois iriam estudar mais adiante devido à sua complexidade, eles demonstraram inquietação e esse fato foi notório.

Essa situação seria uma grande oportunidade para ruptura da regra estabelecida. Segundo Brousseau (1998), a aprendizagem repousará nessas quebras e nas possíveis renegociações realizadas. Ademais podemos associá-la à segunda ideia definida na concepção socioconstrutivista, a de equilíbrio (CÂMARA DOS SANTOS, 2005). O autor mostra que a passagem de uma fase a outra do conhecimento requer um certo desequilíbrio. À medida que o antigo conceito é posto em questão, oportuniza a chegada de um novo equilíbrio.

Essa ideia vai de encontro à perspectiva de aprendizagem enquanto acúmulo de conhecimentos, ou que acontece de forma linear. Nela, há o desencadeamento da percepção, por parte dos estudantes, da insuficiência de seus conhecimentos para a resolução de determinados problemas, fazendo-os perceber, também, conhecimentos e regras automatizadas, levando-os a colocá-los em xeque. Para nós, essas regras automatizadas se relacionam ao CONTRATO DIDÁTICO estabelecido e colocar em xeque, significa quebrá-las para uma possível negociação.

Esse contexto nos dá evidências da fragilidade conceitual apresentada pela professora no que diz respeito à apropriaçao do saber em jogo, como por exemplo, a ideia, mostrada a seguir, de que se o denominador de uma fração for maior que o outro, ela também será maior. Essa situação termina por ocasionar o estabelecimento de regras e possíveis obstáculos didáticos que se relacionam estritamente ao CONTRATO DIDÁTICO estabelecido.

Podemos também inferir que essa fragilidade conceitual pode ser outro fator que também pode ter influenciado na aprendizagem do conteúdo investigado. Nesse sentido, concordamos com Menezes (2006), ao concluir em seus estudos que os fenômenos didáticos se relacionam de forma estreita e que o conhecimento do conteúdo do professor aparece também como um elemento central na relação didática, influenciando de maneira direta a construção do conhecimento pelos estudantes.

Além dessa questão, outra evidência que percebemos foi a existência de um conhecimento de vida cotidiana trazido pelos estudantes que não foi considerado pela professora, diferentemente do que explicitou em sua entrevista. Nessa ilustração, percebemos que o direcionamento dado por ela não foi bom, à medida em que ela está tomando como foco o denominador da fração, e não a fração como um todo, levando-os a construir a noção de fração como dois números independentes, representados um sobre o outro, como veremos no recorte a seguir.

> *Professora- Se você compra uma pizza e divide com outra pessoa. Não, não, uma pizza vai dividir com 4 pessoas, então você vai comer... Como chamo? Estudante - Metade e a outra pessoa vai comer... Outra metade. Professora - Só que na hora que você for comer, chega mais duas pessoas. Vai ter que dividir em quantas partes?*
>
> *Estudante - 4.*
>
> *Professora- Seu pedaço, metade, ficou maior ou menor?*
>
> *Estudante - Menor.*
>
> *Professora- Na hora que você vai pegando chegam mais 2. Vai dividir em quantas partes?*
>
> *Estudante - 6.*

> *Professora - Uma pizza para dividir pra 6 pessoas. Cada um só vai comer* $\frac{1}{6}$.
>
> *Depois chegam mais 2. Quantos pedaços?*
>
> *Estudante -8.*
>
> *Professora- Esses pedaços estão aumentando ou diminuindo?*
>
> *Estudante - Diminuindo*
>
> *Professora - Mas você está percebendo que o número está aumentando.*

Nesse cenário, Bertoni (2009) ressalta que por mais que crianças aprendam os procedimentos da associação de números a figuras divididas e de regras que se diz fornecerem o resultado de operações, não há sombra de dúvida de que não estão entendendo e elaborando a construção do conceito de frações.

Nesse outro trecho, vemos mais um reforço da regra que pode gerar um obstáculo didático, segundo Brousseau (1996). Mesmo não sendo possível analisar esse tipo de obstáculo, pois nossa pesquisa não focou nos estudantes, percebemos que o direcionamento da situação, dado pela professora, pode dificultar a aprendizagem de frações para alguns estudantes.

> *Professora- Exatamente quanto maior número, menor é o pedaço. Se eu dividir novamente, vou ficar com 32, 1/32. Se eu dividir novamente, vou ficar com 128, 1/128. Se eu dividir novamente, vou ficar com 256, 1/256. Se eu dividir novamente, vou ficar com 512, 1/512. Se eu dividir novamente, vou ficar com 1024, 1/1024. Então Se aquela folhinha, fosse a pizza, e dividisse pra 1024 pessoas cada um iria receber esse pedacinho. Quanto maior for esse número que chamamos de denominador, menor será o pedaço.*

Em contrapartida, percebemos um elemento importante ao analisarmos esse trecho. Ao comentar essa situação "então se aquela folhinha, fosse a pizza, e dividisse pra 1024 pessoas cada um iria receber esse pedacinho" percebemos o direcionamento da professora em função de uma questão do cotidiano dos estudantes e que o extrapola, trazendo à tona a necessidade de abstração. É sabido que a extrapolação faz parte do processo de ensino e de aprendizagem da matemática e que o estudante precisa compreender as coisas a partir do concreto, mas ele precisa superar, ir além dele e ter acesso a um universo de possibilidades que é possível em um contexto matemático.

Nesse sentido, chamamos a atenção sobre a necessidade de se desenvolver o ensino da matemática em função de alguns elementos, como por exemplo o estímulo à capacidade de abstração dos estudantes. Por não ser uma ciência tangível, sua imagem fica distante para eles, sobretudo para as crianças que ainda não são capazes de associar algumas ideias abstratas com facilidade. Cabe ao professor então, adotar situações que as aproximem dos conteúdos, trazendo essas ideias abstratas para a realidade, como meios de construção de conhecimento e afastando o mito da Matemática enquanto disciplina engessada, rígida e abstrata.

Uma quarta expectativa, agora por parte dos estudantes, foi a necessidade de validação, pela professora, do conhecimento por eles construídos, como veremos no recorte a seguir.

> *Professora Joana: Se nós temos 24 alunos, e eu disser que desses 24, ¾ vieram para aula. Quantos alunos vocês acham que vão estar na sala?*
> *Estudante: 18*
> *Professora Joana:Por quê? Vamos entender o que o colega fez. Dividiu 24 em 4 partes e viu que cada parte é equivalente a 6. Tem várias formas de chegar ao resultado, mas ele fez a adição. 6 + 6 + 6. Ele poderia ter feito 24 - 6. Alguém poderia dizer também. 3 * 6, 18 também. Existem vários caminhos, o colega mostrou um, mas tem outros para entendermos frações. Como disse a vocês, a fração divide em partes iguais. Então a gente vai ver quanto cada uma daquelas representa. No nosso caso, representa 6. Voltando para o exemplo da nossa de aula, como nós temos 24, vou dividir em 3 partes iguais. Cada parte desse vale quanto?*

Essa foi uma expectativa dos estudantes em relação à professora, por acreditarem que ela tinha uma relação mais próxima com o conteúdo e que deveria ser a pessoa responsável por validar as respostas por eles encontradas. Mesmo tendo encontrado estratégias diferentes, utilizaram a sugerida pela professora na resposta da questão. Tal situação nos remete a uma regra de CONTRATO DIDÁTICO mostrada por Henry (1991), de que existe sempre uma resposta à questão de matemática, e o professor a conhece, ou seja, deve-se então, sempre, dar uma resposta, que será, eventualmente, corrigida pela professora.

Sobre a negociação, é definida por Almeida (2016) como uma convenção de uma ou mais pessoas, a qual implica na aceitação de certos papéis e obrigações a cumprir por cada uma das partes envolvidas, um acordo entre parceiros. No nosso caso, diz respeito, também, a como a professora negociou o saber com os estudantes numa situação didática. Particularmente em nosso estudo, como ela negociou frações.

Inicialmente, o acordo teoricamente preconizado pela professora consistia em uma responsabilidade recíproca, tanto dela quanto dos estudantes, na construção do conhecimento. No entanto, vimos que a regra do jogo mudou e Joana passou a transmiti-lo e eles passaram a recebê-los. Além disso, houve uma negociação explícita que, no início das aulas, eles fariam um trabalho com frações, de forma mais efetiva, aprofundada e uma implícita sobre o fato deles já conhecerem esse objeto matemático, pois já haviam estudado antes. Ademais, as ações didáticas da professora nos mostraram o ensino do conceito em função de alguns dos seus significados. Esse fato vai de encontro às expectativas iniciais da professora, assim como as que preconizam PCN (1997) e BNCC (2017), já que esse aprofundamento e o trabalho com os diferentes significados de frações no ano estudado são pontos em comum sinalizados pelos referidos documentos.

Sobre os efeitos do CONTRATO DIDÁTICO, destacamos que eles não foram contemplados na sistematização de Almeida (2016), mas os consideramos como um dos principais elementos constitutivos desse fenômeno; são vistos por nós como práticas correntes realizadas, quase que inevitáveis ao funcionamento da classe, mas que podem também, de alguma forma, interferir, prejudicar, confundir o estudante no processo de aprendizagem.

Dentre os classificados por Brousseau (2008), foram observados dois deles: o primeiro foi o Topaze. Na tentativa de que os estudantes não errassem as respostas das perguntas realizadas, a professora dava muitas dicas. A partir do momento em que ela fornecia essas pistas ao apontar as primeiras sílabas das respostas, incorria nesse efeito.

Percebemos em muitos momentos que a professora optava por criar condições para dar as respostas aos estudantes, na expectativa de que eles avançassem em suas aprendizagens. Entretanto, esse comportamento a fazia esquecer do engajamento que eles deveriam ter no processo, visto que a resposta, que deveria ser por eles elaboradas, era antecipadamente determinada, como veremos nos recortes a seguir.

Efeito Topaze:

Professora Joana - Então eu digo que esse 1 é o meu número in...
Aluno - Inteiro.
Professora Joana - Ainda nada... como eu leio isso aqui?
Aluno 2 - Meio.

Professora Joana - Meio ou me...
Aluno - Metade.
Professora Joana - Cada parte dessa, vou chamar de um...
Professora Joana - Quarto.
Professora Joana - Dois quintos, ok. O número que está na parte superior é o que eu chamo numerador, o número que está na parte inferior é o que eu chamo de de...
Aluno - Denominador.

O segundo identificado foi a **resposta esperada**. Este último, podemos remetê-lo ao definido por Henry (1991) como efeito de expectativa incompreendida, entendido como aquele em que a professora acreditou que a resposta dos estudantes seria a que ela desejava. O recorte abaixo justifica esse efeito.

Resposta esperada pela professora

Professora Joana - Então a barra de chocolate foi dividida em 5 partes iguais. Mas eu disse que eu comi 2/5. Vou pintar quantas ali?
Aluno - 2.
Professora Joana - Se eu perguntar quantas sobraram?
Aluno - 3.
Professora Joana - 3 o quê?
Aluno - 3/5.

Para entendermos melhor o trecho que justifica o segundo efeito, é interessante observarmos que: na primeira pergunta feita pela professora, vimos que ela se baseou em pedaços de chocolate. Logo o estudante deu a resposta “3” baseado nisso. Mas ela esperava que ele desse a resposta em termos de uma fração, estabelecendo assim um efeito de resposta esperada, como mostrou o exemplo. Podemos dizer também que esse exemplo revela uma expectativa do professor em relação aos seus estudantes, que só foi satisfeita quando um deles deu a resposta correta com a ajuda dela.

Outro exemplo de expectativa mal compreendida, aconteceu quando a professora, ao mostrar uma pizza dividida em oito pedaços, esperava que os estudantes fossem em certa direção, mas eles não compreenderam o que ela esperava e foram em outra; mas eles tinham razão, como poderemos ver no recorte a seguir.

> *Professora Joana - Agora vamos lá, se eu tiver por exemplo, aquele exemplo da pizza. Se eu tiver 2 pizzas e preciso dividi-la para 3 pessoas. Qual seria fração que eu ia utilizar para essas duas pizzas?*
> *Aluno - A pizza tem 8 fatias como é possível dividir?*
> *Professora Joana - A pizza vem inteira, quem vai dividir somos nós. Nós temos 2 pizzas e temos Joana, Isa e Manoel para comer. Se Joana pegar 1 pizza, Manoel pegar a outra, não sobrará para Isa. Isso não tá dividido corretamente. Então queremos dividir para que todos possam comer suas fatias para que todos possam comer igualmente. Como é que a gente faz?*
> *Aluno - 2 pedaços para cada.*
> *Professora Joana - Não dá. Alguém já foi sozinho e comeu uma pizza inteira, sem dividir?*
> *Aluno - Sim.*
> *Professora Joana - Mas a ideia é de que quando você vai com alguém e vai partir. Se você vai com 1 pessoa, você precisa dividir a pizza em quantos pedaços?*
> *Aluno - 3,*
> *Aluno2 - 4.*
> *Professora Joana - Olhem só, vocês estão visualizando a pizza que vem partida, vamos pensar na pizza caseira, como dividi-la? Se tem 3 pessoas, vamos dividir em quantas partes?*
> *Aluno - 3.*
> *Professora Joana - A nossa colega fez aqui... 3 partes e vai fazer a mesma coisa com a outra. Agora nós temos 3 aqui e 3 aqui. Dessa daqui vai um pedaço pra Joana, um pedaço pra Isa e um pedaço pra Daniel. Todo mundo comeu a mesma quantidade? sim ou não?*
> *Aluno - Sim.*
> *Professora Joana - Vamos tentar representar quanto cada um comeu dessa pizza.*
> *Aluno -* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{2}{6}$.

Em relação à expectativa mal compreendida -, é preciso analisarmos a importância e o tratamento que deve ser dado ao "erro", pois ele pode ser visto em face de instruções incompreendidas pelos estudantes, levando-os a revelar como estão pensando. O erro pode ser considerado como um instrumento que redireciona o planejamento e realização de situações de ensino, em busca da aprendizagem de um determinado conceito, e apresenta uma relação estreita de quem ensina para quem aprende. Por isso, Brousseau (1986) afirma que ele é um elemento que merece destaque, pois tem um novo enfoque trazido pelos pressupostos da TSD. Deixa de ser considerado como um desvio imprevisível e passa a ser visto como uma dificuldade valiosa e parte da aquisição do saber.

Ainda no que se refere à análise desse trecho, percebemos uma ruptura entre professora e estudantes. Eles estão em uma situação real, vivida em seus cotidianos, enquanto ela, em uma situação escolar. Essa observação nos remete a uma questão abordada na problemática inicial, em que evidenciamos existir usos de frações fora da escola, mas eles não vão fazer os estudantes compreenderem esse conteúdo na escola. Eles podem dar suporte sim, mas rompem com o funcionamento de frações na escola.

Sobre as rupturas, Almeida (2016) destaca que elas podem ser percebidas, por exemplo, quando os estudantes não atuam da forma esperada pelo professor – frente ao saber – ou quando o professor não atua da forma esperada pelos estudantes. Identificamos três delas. Para melhor apresentá-las, nomeamos como I, II e III.

A primeira (I) que achamos merecer destaque foi a dificuldade dos estudantes em responder as perguntas realizadas pela professora. Consideramos que eles, aparentemente, ainda estavam acostumados a um modelo de contrato em que a aula acontece em forma de apresentação do conteúdo, seguida de explicações e exercícios repetitivos de fixação, caracterizando assim, a relação didática (comum no ensino fundamental). De certa forma, percebemos uma certa dificuldade ao novo contrato proposto inicialmente pela professora.

Consideramos ser esta a primeira marca de ruptura de contrato que podemos identificar. Uma ruptura numa cláusula marcada por hábitos de antigos contratos (aula expositiva), e uma ruptura interna, quando os estudantes, apesar da intenção da professora em construir de forma dialógica o conceito em questão (frações), não apresentaram, em contrapartida, uma compreensão efetiva do processo. Acreditamos que essa dificuldade pode ser justificada pelo pouco período (quatro meses) em que a professora começou a trabalhar com essa turma.

A segunda (II) aconteceu quando a professora sugeriu a divisão de duas pizzas para três pessoas, como mostra o trecho a seguir.

Professora Joana - Agora vamos lá, se eu tiver por exemplo, aquele exemplo da pizza. Se eu tiver 2 pizzas e preciso dividi-la para 3 pessoas. Qual seria fração que eu ia utilizar para essas duas pizzas?
Aluno - A pizza tem 8 fatias como é possível dividir?
Professora Joana - A pizza vem inteira, quem vai dividir somos nós. Nós temos 2 pizzas e temos Joana, Isa e Manoel para comer. Se A pizza vem inteira, quem vai dividir somos nós. Nós temos 2 pizzas e temos pegar 1 pizza, Manoel pegar a outra, não sobrará para Isa. Isso não tá dividido corretamente. Então queremos dividir para que todos possam comer suas fatias para que todos possam comer igualmente. Como é que a gente faz?
Aluno - 2 pedaços para cada.
Professora Joana - Não dá. Alguém sozinho e comeu uma pizza inteira, sem dividir?
Aluno - Sim.
Professora Joana - Mas a ideia é de que quando você vai com alguém e vai partir. Se você vai com 1 pessoa, você precisa dividir a pizza em quantos pedaços?
Aluno - 3
Aluno2 - 4.
Professora Joana - Olhem só, vocês estão visualizando a pizza que vem partida, vamos pensar na pizza caseira, como dividi-la? Se tem 3 pessoas, vamos dividir em quantas partes?
Aluno - 3.
Professora Joana - A nossa colega fez aqui... 3 partes e vai fazer a mesma coisa com a outra. Agora nós temos 3 aqui e 3 aqui. Dessa daqui vai um pedaço pra Joana, um pedaço para Isa e um pedaço pra Gabriel. Todo mundo comeu a mesma quantidade/ sim ou não.
Aluno - Sim.

Esse recorte nos faz refletir que houve uma ruptura na cláusula do contrato inicial; houve uma negociação de significado, um conhecimento de vida por trás das respostas dos estudantes que não foi considerado pela professora. Consideramos que a professora rompeu com a ideia inicialmente explicitada no discurso, pois a valorização do contexto, das situações cotidianas foi amplamente explicitada por Joana em seu discurso.

Todavia, na prática, esses elementos foram desconsiderados. Nesse exemplo, ficou muito claro que ela se encontrava no mundo abstrato da Matemática, enquanto seus estudantes vislumbravam um mundo real, por eles experienciado. Diante desse contexto, é interessante destacarmos que a negociação do significado seria fundamental para o avanço das aprendizagens.

A terceira (III) marca de ruptura do CONTRATO DIDÁTICO aconteceu quando o estudante realizou a atividade de uma maneira diferente da proposta pela professora. Implicitamente se negociou que a atividade podia ser realizada só com divisão em partes iguais, como podemos observar no recorte a seguir.

> *Professora Joana - Se nós temos 24 alunos, e eu disser que desses 24, ¾ vieram para aula. Quantos alunos vocês acham que vão estar na sala?*
> *Estudante1 - 18*
> *Professora Joana - Por quê? Vamos entender o que o colega fez. Dividiu 24 em 4 partes e viu que cada parte é equivalente a 6. Tem várias formas de chegar ao resultado, mas ele fez a adição. 6 + 6 + 6. Ele poderia ter feito 24 - 6. Alguém poderia dizer também. 3 * 6, 18 também. Existem vários caminhos, o colega mostrou um, mas tem outros para entendermos frações. Como disse a vocês, a fração divide em partes iguais. Então a gente vai ver quanto cada uma daquelas representa. No nosso caso, representa 6. Voltando para o exemplo da nossa de aula, como nós temos 24, vou dividir em 3 partes iguais. Cada parte desse vale quanto?*

Essa situação também estava em desacordo com o discurso proferido pela professora na entrevista, em que enfatizava “Eles interagem, mostrando como resolveram, porque às vezes existem maneiras diferentes de resolver. Cada um mostra a sua maneira e dizem: olha professora, eu resolvi de outra forma, mas eu pergunto: o resultado tá correto? Se tá correto, vamos observar”. Pois ela não levou em consideração a forma diferente com que o estudante resolveu o problema. Embora tivesse analisado, ao final só validou os que haviam feito da maneira sugerida por ela.

Uma questão que consideramos importante destacar diz respeito à fragilidade conceitual apresentada por Joana em relação às ideias sobre o saber escolar fração, como veremos no recorte a seguir.

> *Professora Joana - E agora eu tenho quantas maçãs?*
> *Aluno - 1.*
> *Aluno 2 - 4.*
> *Professora Joana- E agora eu tenho quantas maçãs? Essa maçã, foi dividida em quantas partes?*
> *Aluno - 4.*
> *Professora Joana - Cada parte dessa, vou chamar de um...*
> *Professora Joana - Quarto. Se eu tomei uma parte dessa, eu estou comendo ...1/4. Se eu tomar duas partes, eu estou comendo ... Olha como eu represento 2/4. Se eu tomar três partes dessa, eu estou comendo ...3/4...Se eu tomar quatro partes dessa, eu estou comendo ...4/4... que significa que ela está in... completa. Posso dividir essa maçã?*
> *Aluno - Pode.*
> *Professora Joana- Agora eu tenho quantos pedaços?*
> *Aluno - 8.*
> *Professora Joana - Mas eu tenho quantas maçãs?*
> *Aluno - 1.*
> *Professora Joana - Cada pedaço desse eu vou chamar de 1/8... O segundo pedaço, 2/8; o terceiro, 3/8, se comer 4 pedaços, 4/8; se comer cinco pedaços,5/8; seis pedaços,6/8; sete pedaços, 7/8 e se comer os oito, 8/8. Que é igual ao inteiro, ou seja, todos os pedaços foram comidos. Tanto é que se você tem 8 e divide por 8 vai dar igual a 1, Maria. Ou seja, o inteiro. Construam isso aqui no caderno de vocês. Porque vamos fazer uma tabelinha...*

Ao analisá-lo de um ponto de vista matemático, consideramos haver uma mistura na noção de ordem do número natural com a noção de número enquanto medida. Cada pedaço destacado pela professora é equivalente a 1/8 e não da forma como ela coloca que "segundo pedaço, 2/8; o terceiro, 3/8, se comer 4 pedaços, 4/8". Essa questão vem ratificar uma das conclusões dos estudos de Câmara dos Santos e Maciel (2007), ao afirmarem que as dificuldades dos estudantes no que se refere ao saber escolar frações às vezes se assemelham às dos professores.

Em relação a esse mesmo recorte, outro ponto que merece destaque foi que, em meio à divisão de responsabilidade, que discutimos anteriormente, apareceram indícios de uma reorganização contratual por parte da professora. Após realização de muitas perguntas e sucessivas respostas "erradas" dos estudantes, houve uma espécie de reorganização contratual, que é um tipo de ruptura de CONTRATO DIDÁTICO mais brando.

Nela, a professora de certa forma "desistiu" de construir o conceito com a participação do estudante e começa a apresentar situações de repetição, com o intuito de a aprendizagem acontecer. Mesmo tendo a expectativa de desenvolver a aula em função de um contrato aproximativo, foi notório que, apesar de ter se esforçado para utilizar uma metodologia diferenciada (a ideia de construção do conhecimento em função de uma aula dialogada), com a utilização de recursos (maçã, desenhos, corte físico de folha de oficio, utilização do calendário, pizzas, barras de chocolate, etc.), a professora não conseguiu manter a cláusula do contrato inicial e termina, ela mesma, por quebrá-lo mudando de metodologia, na expectativa que a aprendizagem acontecesse.

Diante desse contexto, Silva (2016) destaca que o CONTRATO DIDÁTICO existe em função do aprendizado dos estudantes; após sua ruptura, um novo contrato pode surgir e ser renegociado. Esta situação ficou muito clara, pois ao final das aulas, ao ver que os estudantes não estavam entrando no jogo, a professora procurou em muitos momentos apresentar, de imediato, o conhecimento a ser aprendido, não realizando a devolução nesse momento específico da aula. Momentos dessa quebra/troca de CONTRATO DIDÁTICO, seguido de uma reorganização contratual pode ser percebida, como mostra o recorte a seguir.

Professora Joana - E aqui eu tenho... um...
Aluno - Sétimo.
Professora Joana - Aqui eu tenho um...
Aluno - Oitavo.
Professora Joana - Aqui eu tenho um...
Aluno - Nono.
Professora Joana - Aqui eu tenho um...
Aluno - Décimo.

Nessa reorganização/mudança contratual, a professora passou de um ensino em uma perspectiva investigativa (contrato aproximativo, que para nós ficou no campo em sua expectativa, ou seja, na teoria) e adotou aulas expositivas, comumente relacionadas a um contrato normativo. Com isso, observamos que as renegociações das normas do CONTRATO DIDÁTICO afetaram a aprendizagem dos estudantes no que se refere ao saber que estava em jogo.

Ademais, é interessante destacarmos um ponto importante diante desse distanciamento percebido entre a concepção predominantemente identificada no discurso e a observada na prática. Nele vemos a possibilidade das concepções de ensino e de aprendizagem serem situadas, ou seja, os sujeitos não terem necessariamente uma concepção única. No trabalho específico com frações, a professora não conseguiu, por alguma razão, implementar uma forma de conduzir o processo de ensino e de aprendizagem convergente com a ideia de problematização, talvez até por conta do próprio conteúdo, que traz em seu cerne dificuldades relacionadas à sua própria natureza, como por exemplo, os obstáculos epistemológicos.

Diante desse contexto, uma dimensão importante que merece ser destacada é que essa situação não faz com que coloquemos um rótulo ou uma etiqueta sobre a professora. O que se constatou, a partir de conjunto de evidências, foi uma tendência ao predomínio de uma certa concepção de ensino e de aprendizagem de Matemática naquelas aulas e o estabelecimento de um novo CONTRATO DIDÁTICO.

Uma questão importante destacada por Charnay (2001), em relação à modelização de CONTRATO DIDÁTICO definida, é que nenhum professor utiliza exclusivamente um deles, pois em sua prática docente, com toda complexidade a ela subjacente, ele faz uso de elementos de cada um deles. Entretanto, há uma ressalva do autor e concordamos com ele ao salientar que cada professor faz, consciente ou não e de maneira privilegiada, a escolha de um deles. Para nós, o estabelecimento do CONTRATO DIDÁTICO (consciente ou não) está muito associado à concepção de ensino e de aprendizagem que subjaz à prática de cada professor e esses dois elementos teóricos podem ser fatores de influências na aprendizagem do saber escolar investigado. Muitos dos elementos constitutivos desse fenômeno já identificados, já nos dão indícios dessa relação.

Diante desse contexto, é importante destacarmos que Joana repetiu uma mesma situação, na tentativa de fazer ocorrer a aprendizagem por parte dos estudantes. Quebram-se, momentaneamente, dessa forma, a concepção socioconstrutivista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005) e a ideia de um CONTRATO DIDÁTICO Aproximativo, inicialmente por ela teoricamente estabelecido: a de construir o conhecimento com a participação do estudante e passa-se, então, à vigência de uma concepção baldista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005) associada a um CONTRATO DIDÁTICO Normativo, justificado por algumas das evidências mostradas nos trechos a seguir:

> *Professora Joana- Observe essa fração aqui no numerador, eu leio que número?*
> *Aluno- 1.*
> *Professora Joana- O denominador, qual é?*
> *Aluno- Meio.*
> *Professora Joana- Só que esse meio é representado pelo algarismo 2. Então todas as vezes que encontrarmos uma fração que tiver o algarismo 2, nós vamos ler meio. Esse daqui nós temos o numerador...*
> *Aluno- 2.*
> *Professora Joana- O denominador...*
> *Aluno- 3.*
> *Professora Joana- Como é que eu leio essa fração?*
> *Aluno- Dois terços.*
> *Professora Joana- O numerador dessa.*
> *Aluno- 3.*
> *Professora Joana- O denominador... Então eu leio essa fração...*
> *Aluno- Três quartos.*
> *Professora Joana- Muito bem.*
> *Professora Joana- Essa daqui numerador...*
> *Aluno- 1.*
> *Professora Joana- Denominador...*
> *Aluno- 5.*
> *Professora Joana- Como leio essa fração?*
> *Aluno- Um quinto.*
> *Professora Joana- Essa daqui numerador...*
> *Aluno- 1.*
> *Professora Joana- Denominador...*
> *Aluno- 6.*
> *Professora Joana- Como leio essa fração?*
> *Aluno- Um sexto.*

> *Professora Joana- Então aqui eu tenho as frações de denominador de 2 a 9. 2, 3, ... Lembrando que se tiver eu 2, leio meio, se tiver 3 eu leio terço, se tiver 4 eu leio quarto, se tiver 5 eu leio quinto, se tiver 6 eu leio sexto, se tiver 7 eu leio sétimo, se tiver 8 eu leio oitavo, se tiver 9 eu leio nono. Nesse exemplo aqui nós temos frações com denominadores 10,100 e 1000. Então a leitura vai mudar.*

Nessa nova direção tomada pela professora, de repetição e não de interação dos estudantes com o conteúdo em jogo, não favorece que eles avancem na perspectiva da aprendizagem, de modificação da relação deles com o saber inicial, ou seja, observamos que ela toma para si a situação e, prolongando seu turno de fala, procurou explicar detalhadamente as regras relativas à leitura de frações.

Assim, percebe-se a instituição de uma tensão, na qual a professora tenta se livrar de uma possível dificuldade de compreensão por parte dos estudantes e toma a palavra em função de repetições da mesma ideia inúmeras vezes, dando tudo pronto e acabado a eles. Essa busca constante do "pronto", no ensino da Matemática, está fortemente arraigada no CONTRATO DIDÁTICO habitual de grande parte de nossas salas de aulas: qual professor de Matemática não escutou após uma "demonstração" exaustiva da construção de um novo conceito, a célebre frase: "mas professor, por que você não colocou logo a fórmula"? (CÂMARA DOS SANTOS, 2007, p. 12).

A partir das evidências justificadas em função dos recortes trazidos, podemos também inferir que os estudantes não conseguiram dar sentido ao conceito de fração em função da concepção que estava subjacente à prática docente da professora investigada. Não queremos aqui defender que uma ou outra concepção pode ser a melhor, mas a condução que foi dada ao processo de ensino e de aprendizagem por meio das situações didáticas utilizadas pode ter sido fator de influências na aprendizagem do referido conteúdo, assim como o CONTRATO DIDÁTICO vigente.

Nessa circunstância, os PCPE (PERNAMBUCO,2012) destacam que a concepção baldista é a mais encontrada nas salas de aula; caracteriza o ensino como transmissão de conhecimento, verbalização; a aprendizagem como recepção e acúmulo de conteúdo; o professor como transmissor; o estudante receptor e o objeto de conhecimento. O referido documento ainda destaca que essa concepção tem por um lado a vantagem de possibilitar aos estudantes a aprendizagem de um grande número de mensagens emitidas pelo professor e, por outro lado, a desvantagem de fazer deles sujeitos passivos do ato de aprender, obedientes, e considerarem a palavra do professor como única verdade.

Em função do novo contrato estabelecido, continuamos a analisar os elementos constitutivos. Sobre as regras de CONTRATO DIDÁTICO, podemos classificá-las. segundo Almeida (2016), como explícitas ou implícitas. As primeiras são claras, expressas sem ambiguidade pelas partes em questão; são percebidas no momento em que o saber se encontra em jogo pelo professor ou o estudante. As regras implícitas são aquelas que não são explicitamente formuladas por um dos parceiros (quase sempre, o professor), mas que são construídas de forma mais subliminar e, embora implícitas, são fundamentais para a condução da relação didática e para fazer valer o CONTRATO DIDÁTICO negociado. Identificamos quatro regras nas aulas observadas e, para apresentá-las, enumeramos de I até IV. Além delas, observamos duas, intrinsecamente relacionadas ao Contrato Pedagógico, visto que não tinham relação com o saber fração e também as apresentaremos.

REGRA I - O denominador de uma fração deve ser maior que o numerador.

Ao ensinar o conteúdo frações, todos os exemplos dados pela professora remetiam ao número do denominador maior que o do numerador. Esse fato levou os estudantes a internalizarem esta regra (construída implicitamente pela professora).

Ao fazerem um simulado que ocorre semanalmente para se prepararem para a realização das provas externas, eles se depararam com um problema em que a resposta ia de encontro à regra internalizada. Infelizmente a maioria errou a questão. O trecho a seguir mostra de forma mais detalhada essa discussão.

> *Professora Joana- Uma coisa que aconteceu no simulado de vocês foi o contrário da fração que eu ensinei para vocês. Tinha uma fração que tinha o numerador maior, que era o 30. A questão foi essa: Marcos dividiu 30 cartas de um jogo para 5 crianças. Aqui é 30/5. Essa divisão pode ser representada por uma fração. Muita gente colocou 5/30 porque entendia que a gente for falar de fração, o número maior tinha que ficar embaixo, mas isso não é verdade. Alan uma vez me fez uma pergunta se podia 4 dividir por 1. E eu disse que não podia dividir por 1, só se divide por mais de 1. Mas se eu tenho 30 e quero dividir para 5. É 30/5, agora 5 para dividir para 30. Aí sim, seria invertido, o cinco ficaria em...*
> *Aluno- Baixo.*
> *Aluno 2- Cima.*

Professora Joana- Aqui nós tivemos e muita gente se confundiu e errou a questão. Depois vamos trabalhar uns probleminhas... Isso foi só a correção da atividade, serviu como revisão.

Foi muito interessante esse momento, pois vimos como implicitamente uma regra foi construída pela postura da professora. Ao apresentar apenas um tipo de fração (com numerador menor que o denominador), os estudantes internalizaram, acabando por errar a questão do simulado em que apareceu uma fração que tinha o numerador maior que o denominador.

Acreditamos que, parte das regras que regem esse fenômeno, se justifica por meio de uma forma mais global de estruturar os processos de ensino e aprendizagem, que por sua vez dependem, dentre outros fatores, de concepções de ensino e de aprendizagem. A partir dessa ideia, é interessante destacarmos que um dos elementos constitutivos do CONTRATO DIDÁTICO (regras) influenciou diretamente a aprendizagem dos estudantes, pois um dos erros por eles cometidos deu-se em função da decorrência de uma regra estabelecida implicitamente pela professora: o denominador de uma fração deveria ser sempre maior que o numerador.

Ao internalizarem a regra, todos os estudantes erraram a questão do caderno do Aprova Brasil em que apareceu uma fração cujo numerador era maior que o denominador. Esse problema foi apenas comentado pela professora na aula após a realização do teste. Para nós, uma intervenção por parte dela poderia levá-los à ruptura da regra estabelecida e, consequentemente, a uma melhoria na aprendizagem de frações.

Essa situação, que se refere ao elemento da relação inicial com o conteúdo, nos mostrou algo que Brito Menezes (2006) chamou atenção em seus estudos ao salientar que, ao entrar em cena na sala de aula um novo saber (conceito de fração imprópria), gera uma tensão mais evidente entre os polos do triângulo didático e uma maior assimetria, já que o estudante está mais distante do saber.

Entretanto, nesse caso específico, a professora demonstrou uma certa dificuldade conceitual e não quebrou a regra de CD estabelecida (o numerador de uma fração deve ser menor que o denominador) e os estudantes não avançaram em suas aprendizagens. Nesse sentido, Brousseau (2008) destaca que a aprendizagem repousa na quebra do Contrato estabelecido.

Esse contexto vem nos ajudando a validar nossa hipótese de que o estudo mais aprofundado do CONTRATO DIDÁTICO estabelecido pode nos ajudar a entender melhor as raízes do fracasso escolar, em levar os estudantes dos anos iniciais a lidar adequadamente com frações. Acreditamos que, parte das regras que regem esse fenômeno, se justificam por meio de uma forma mais global de estruturar os processos de ensino e aprendizagem, que por sua vez dependem, dentre outros fatores, de concepções de ensino.

REGRA II - Construir a noção de fração como dois números independentes, representados um sobre o outro.

No decorrer da aula, à medida em que a professora tomou como foco o denominador da fração e não a fração como um todo, levou os estudantes à ideia de fração como dois números independentes. Para nós, essa situação dificulta a compreensão deles em ver fração como um número e favorece a ideia de seu conceito enquanto dois números, um que se escreve no numerador e o outro no denominador, comumente destacado por pesquisadores da área.

É muito comum os estudantes perceberem a fração como uma combinação de dois números - numerador e denominador – e não como um número que exprime a relação entre a parte e o todo, em diferentes contextos e com significados variados (BERTONI, 2004, Powell 2019). A seguir, mostraremos exemplos para ilustrar nossa análise.

> *Professora Joana- Eu tenho que contar o todo, muita gente, na hora de representar uma fração, acaba se complicando por causa disso. Porque eu já vi gente respondendo uma questão dessa aqui. Tinha lá: represente com números essa fração que estava na figura. Aí tava lá desse mesmo jeitinho. Prestem atenção que eu não quero ver vocês cometendo esse erro. Aí a pessoa foi, sabia que estava... Tem quantas destacadas?*
> *Aluno1- 3;*
> *Aluno2- 4.*
> *Professora Joana- Destacadas, pintadas?*
> *Aluno1- 1*
> *Professora Joana- Então ele foi lá e colocou 1... Só que, na hora de representar embaixo ele não contou o todo, só colocou o que não estava pintado. A gente não tá somando, a gente não tá juntando uma que está pintada aqui... com mais três não. A gente tá querendo saber dessa parte aqui foi retirada de uma figura que foi repartida em quantas partes? 1, 2, 3, 4. Então aqui é o 4.*
> *Professora Joana – (desenha 1/4 no quadro) eu tenho que colocar em cima mostrando quantas eu pintei aqui e aqui embaixo eu tenho que colocar o...*
> *Alunos - Todo.*

REGRA III - Não se pode dividir por 1.

No decorrer da discussão com os estudantes, a professora, ao ser questionada por um deles da possibilidade de se dividir pela unidade, estabeleceu a referida regra.

> *Professora Joana- Não se divide com denominador 1. Se divide para 1?*
> *Aluno- Não.*
> *Professora Joana- Só se divide a partir de 2. Eu tenho 1 lápis, pra mim. Posso dividir pra 1? Não, ele é meu. Se eu tiver 2 lápis, para mim. Preciso dividir?*
> *Aluno- Não.*
> *Professora Joana- Não divido, são meus. Só divido se for para mais de uma pessoa, mais de uma parte. Se minha pizza tá inteira, vai dividir pra 1? Aí compra 1 bolo, vai dividir?*
> *Aluno- Não.*
> *Professora Joana- Você pode fracionar ele e comer por partes. Vou comer ¼ desse bolo. Mas se você tem 2 pra dividir pra 1, não é possível essa divisão porque só se divide para mais de 1.*

Essa regra nos remete à fragilidade conceitual por parte da professora, pois não compreende o significado de fração enquanto quociente de dois números naturais. Essa situação corrobora o que, algum tempo atrás, os estudos de Cavalcanti (2004) destacaram no sentido de haver lacunas em diversas características e ideias fundamentais acerca de frações. Portanto, concordamos com Bertoni (2004) e ainda enfatizamos que, mesmo depois de se passar mais de uma década, as ideias da autora ainda são muito pertinentes quando destaca que a abordagem das frações no Ensino Fundamental, a princípio, pode parecer uma atividade simples e desenvolvida sem muitas dificuldades, pelo menos se tomarmos como referência para essa análise o emprego de procedimentos prototípicos.

Nessa regra construída pela professora percebemos claramente a concepção que ela está tendo das frações, à medida que exclui implicitamente o significado quociente. Uma dimensão importante destacada por Caraça (1951) é que os inteiros são racionais, entretanto não são números fracionários, embora apresente no estudo dos números racionais os inteiros escritos na forma a/b. As diferentes representações das frações em seus distintos significados é uma das mais relevantes indicações tanto dos (PCN, 1997) quanto da (BNCC, 2017).

REGRA IV – Fração é divisão.

A professora tinha a ideia de que o conceito de fração se resumia em uma divisão em partes iguais, como veremos no recorte a seguir. Essa regra nos remete a uma das ideias destacada nos estudos de Landim e Morais (2019), pois enfatiza que, à primeira vista, a dificuldade das crianças pode estar relacionada com o emprego de estratégias que valorizam a memorização e a técnica (regras de CONTRATO DIDÁTICOs) sem que sejam encorajadas à análise e à reflexão frente às atividades propostas. Essa ideia é corroborada por uma das estudiosas do conceito, ao destacar que: "Por mais que crianças aprendam os procedimentos da associação de números a figuras divididas e de regras que se diz fornecerem o resultado de operações, não há sombra de dúvida de que não estão entendendo e elaborando a construção dos números fracionários". (BERTONI, 2009, p. 12).

> *Professora - Agora, antes de continuar essa parte, se eu perguntar pra vocês o que é fração? O que vocês me dizem? Nós estamos estudando fração, pra chegar a uma fração nós fizemos o que com isso aqui? Nós fizemos o que com isso aqui?*
> *Estudante - Nós dividimos.*
> *Professora- Nós dividimos*
> *Professora - Mas essa divisão, a forma de você repartir tem que ser igual.*

Observamos que a professora reforça a ideia construída pelos estudantes, e como o que ela diz é uma verdade para eles, constata-se o estabelecimento de mais uma regra de CONTRATO DIDÁTICO. Além de identificarmos as regras de CONTRATO DIDÁTICO, percebemos outras duas que consideramos serem mais apropriadas para o Contrato Pedagógico, pois não se relacionaram a um saber específico mas, sim, ao funcionamento da sala de aula. Sejam elas:

REGRA 1 do Contrato pedagógico – Repetição leva ao entendimento do conteúdo.

Os estudantes, ao repetirem uma mesma situação, levavam a professora a considerar que após este momento e nestas condições (olharem a lousa), eles teriam compreendido o conceito abordado, como mostraremos no recorte a seguir.

> *Professora- Gabriel tá olhando pra onde? Olhe pra cá. Vamos lá novamente, quando eu observo essa fração como eu leio?*
> *Estudante- Meio ou metade.*

Professora- - Ou seja, em qualquer lugar que você estiver se você observar uma fração dessa, por exemplo, tem isso aqui na receita: $\frac{1}{2}$*xícara de trigo- como eu vou ler essa fração?*
A - Meia xícara de trigo.
Professora- - Pode ser assim também tá? $\frac{1}{2}$ *colher de manteiga. Como vou ler essa fração?*
Estudante- - Meia colher de manteiga.
Professora-– Bora, tô ouvindo não!
Estudante- - Meia colher de manteiga.
Professora-- Sempre que tiver assim$\frac{1}{2}$*, vai indicar que eu tinha o inteiro, que depois foi divido em quantas partes? 2 partes, então vai ficar a metade, né Isa! Terminou, olha pra cá.* $\frac{1}{2}$ *xícara de trigo, meia colher de manteiga e se tiver assim.* $\frac{1}{2}$ *kg de açúcar, como leio aqui?*
Professora- e Estudante- Meio quilo de açúcar.
Professora - Então só pra vocês entenderem, Gabriel. Só para vocês entenderem que dessa forma nós estamos com o meio ou a metade, estou dizendo que eu tinha o inteiro que foi dividido em quantas partes?
Estudante- 2.

REGRA 2 - É preciso seguir o modelo proposto pela professora para resolver as atividades.

Em diversos momentos das aulas observamos as diferentes estratégias mobilizadas e compartilhadas pelos estudantes na resolução das atividades propostas. Todavia, não era feita uma reflexão sobre elas e sua utilização como diversas possibilidades de solução. O que acontecia era a proposição de um modelo a ser seguido e, por isso, o raciocínio dos estudantes não era valorizado, não lhes proporcionando momentos de construção do conhecimento pois, no final, o que prevalecia era a regra instituída pela professora. Era preciso que os estudantes seguissem o modelo de resolução proposto.

Essas regras de contrato pedagógico vieram a reforçar as características do CONTRATO DIDÁTICO Normativo estabelecido, relacionado à concepção de ensino e de aprendizagem baldista que subjazia a prática docente de Joana, que por sua vez consideramos fatores de influências na aprendizagem de fração, na turma investigada.

6.4.4 Elementos constitutivos da Professora Maria

Antes de analisarmos as aulas observadas da Professora Maria, elencamos alguns elementos constitutivos do CONTRATO DIDÁTICO (regras e efeitos), preconizados por Brousseau (1996; 1998; 2008), assim como regras do Contrato Pedagógico Filoux (1971) e Brito Menezes (2006), identificados na fala da professora. Identificamos quatro regras nas aulas observadas e as apresentaremos, enumeradas de I até IV. Além delas, observamos duas, intrinsecamente relacionadas ao Contrato Pedagógico, visto que não tinham relação com o saber fração e também as apresentaremos.

REGRA I do CONTRATO DIDÁTICO: os números para resolver o problema deveriam aparecer de forma explícita no enunciado. Essa regra é comumente utilizada pelos estudantes. Para eles era preciso encontrar no enunciado todos os números que necessitariam para resolver as operações, como mostra o recorte:

> *T1- Às vezes trabalho problemas do tipo: Maria comprou 3 dúzias de ovos. Quantos ovos ela comprou? Eles perguntam o que é dúzia? Como vou armar? Porque ali só tem um número.*

Como no exemplo mencionado pela professora, o número trinta e seis não aparecia de forma explícita, os estudantes precisariam entender quanto valia uma dúzia. Dessa forma, tiveram dificuldade, pois estão acostumados à regra. Diante disso, Almouloud (2007) chama atenção para o fato de que é normal o professor oferecer sempre problemas em que os números necessários para a solução se encontram no enunciado.

Ao ter contato com problemas que não têm solução, os números não estão todos presentes no enunciado para solução, têm mais de uma, têm excesso de dados para resolução ou não são resolvidas com operações numéricas, os estudantes resolvem-nas a partir de regras de CONTRATO DIDÁTICO internalizadas do tipo: “Para resolver um problema em matemática, basta pegar os números do enunciado e descobrir a boa operação a ser feita”. No nosso caso, a professora afirma que os estudantes não resolveriam o problema.

A partir do momento que a professora destaca que os estudantes não compreendem o problema e procura no enunciado dados numéricos para respondê-lo, sabemos que essa relação está comprometida. Dessa forma, acreditamos que o principal elemento da relação didática, que é a aprendizagem, não será efetivado.

Regra 1 do Contrato Pedagógico: aprender matemática, resolver problemas, está relacionado a fazer contas, como mostrada no recorte a seguir:

T2- Problemas com as operações fundamentais. Pois eles já têm a obrigação de montar a operação... Eu gosto de dar a conta seca para quando eles forem para os problemas, terem noção do que fazer.

A professora reforça a ideia de que fazer Matemática é aprender e seguir fielmente conjuntos de regras e procedimentos.

As expectativas são apresentadas no quadro 14, onde destacamos os trechos que nos levaram a identificá-las.

Quadro 14 - Expectativas identificadas na entrevista da professora Maria

TRECHO	EXPECTATIVA
T1-A gente tem que parar e explicar tudinho; eles vêm a mim e vou explicando.	Saber transmitir o conhecimento de forma clara.
T3-Se não prestarem atenção ao que eu digo, na prova, nãovão nem saber o que estão fazendo.	Que os estudantes prestem atenção à explicação, para aprender o conteúdo quando aparecer na avaliação.

Fonte: Os autores

Além dos elementos observados no discurso da professora, com o objetivo de analisar a relação entre o CONTRATO DIDÁTICO e as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA como fatores de influências na aprendizagem de frações, tivemos o cuidado de observar as transcrições das aulas, em função da fundamentação teórica discutida no Capítulo 1. Para ser possível essa identificação, nos debruçamos sobre os elementos constitutivos desse fenômeno e utilizamos as definições apresentadas por Almeida (2016) para nos apoiar.

Sobre as expectativas, observamos três (3): a primeira, logo no primeiro dia, quando Maria começou a aula lembrando que os estudantes já haviam estudado o conteúdo frações, mas na referida série eles fariam um estudo mais aprofundado. Este fato nos revela, de forma explícita, que o trabalho com o conteúdo frações já não era mais novidade para eles, ou seja, existiam expectativas por parte da professora de que se os estudantes já haviam estudado, o esperado era que já soubessem alguma coisa.

O recorte a seguir aponta a professora em um diálogo, em que negocia, explicitamente, com seus estudantes que o terceiro bimestre é o momento de trabalhar/aprofundar o estudo das frações. Dá a entender a existência de uma negociação implícita com eles sobre o fato deles já conhecerem o conteúdo.

> *Professora Maria - Nesse início do III bimestre, vamos estudar frações. Apesar de que vocês já estudaram antes, mas agora vamos aprofundar porque vocês são 5º ano.*

Apesar da explicitação dessa expectativa, no decorrer das aulas observamos que não houve um aprofundamento do ensino de frações, pois esperava-se que ele fosse trabalhado em seus diferentes significados, como recomendam os documentos orientadores da educação básica ao destacarem a necessidade de exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão PCN (1997) e, no âmbito nacional, mais atual: Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica (BNCC, 2017). Os recortes abaixo ilustram essa situação.

> *P - Se for diferente o denominador, tenho que tirar o m.m.c, mas é complexo, vou dar isso a vocês não. É muito mais trabalho, mas aqui com denominador igual é facilzinho. Não copia esse outro exemplo, porque eu não vou dar isso não. Não vamos fazer com m.m.c e sim sem o m.m.c. Como? Repito o denominador e somo o numerador. Façam a letra b.*

A segunda expectativa foi a utilização de um jogo (dominó, de um lado tinha o desenho da fração, do outro, sua representação fracionária) para fixação do que foi estudado na aula, isto é, existiam expectativas, por parte da professora, que os estudantes estivessem aprendido o assunto e iriam fixá-lo por meio do jogo. É muito interessante essa expectativa, pois ela nos direciona a mais um problema do ensino da Matemática, que é a ideia do professor em usar materiais lúdicos para ajudar na compreensão dos conteúdos matemáticos.

Percebemos o objetivo da professora em utilizar o jogo para fixar, mas ele não oportunizava nenhum tipo de desafio para os estudantes, não contribuiu muito para a aprendizagem do conteúdo, muito menos para seu aprofundamento, como esperado pela professora inicialmente. No que se refere à utilização de materiais lúdicos nas aulas de matemática, é comum percebemos que os professores utilizam para explicar conceitos ou até mesmo exemplificá-los.

Na aula, a professora, para fazer a associação das frações com suas representações, usou o jogo (dominó) com o objetivo de reforçar o que foi trabalhado. Vale salientar, que mesmo utilizando um recurso concreto, lúdico, Maria continuou fazendo uma abordagem expositiva do conteúdo, reforçando as condições que foram estabelecidas no CONTRATO DIDÁTICO, regendo assim o comportamento de ambos no que se refere ao saber. Logo, o CONTRATO DIDÁTICO se constitui como “regra do jogo e a estratégia da situação didática” (BROUSSEAU, 1986).

A terceira expectativa explicitada pela professora, em seu discurso, foi a importância das interações entre os estudantes na realização das atividades propostas, pois valorizava o processo investigativo. Porém, percebemos que esse elemento não foi desenvolvido, pois as vezes que ela pediu para que os estudantes trabalhassem em duplas, ressaltava que cada um fizesse o seu. Eles se dispersaram, havia muita conversa e a realização da atividade não se efetivava e, mais uma vez, a professora continua destacando suas explicações usando o quadro como uma forma de dar respostas aos estudantes, resolvendo as atividades.

Sobre os Efeitos de CONTRATO DIDÁTICO, foram identificados dois nas aulas observadas da professora. O primeiro, o Topaze, foi estabelecido em função de dicas dadas pela professora, iniciando as primeiras sílabas das respostas para que os estudantes não errassem. Para Brousseau (1986), ao fornecer “pistas” e apontar antecipações por meio de dicas em sua fala no momento em que encontram dificuldades, faz com que eles não as superem nem avancem, esquecendo-se, porém, do engajamento necessário que deveriam ter nesse processo. O trecho abaixo ilustra essa discussão.

> *Topaze:*
>
> *Professora Maria - 50 dividido por 2, quanto dá? Faço 50/2, ou 50/2 (algoritmo) e encontro 25. Ela acertou então 25 questões, que é a me... Aluno - Tade.*

O segundo efeito foi a resposta esperada ou expectativa incompreendida (HENRY, 1995). Os trechos abaixo justificam os efeitos anteriormente citados.

Resposta esperada pela professora, ou expectativa incompreendida (Henry, 1995):

Na primeira pergunta feita pela professora vimos que ela se baseou em pedaços da torta, o estudante deu a resposta “5”. Na segunda pergunta, ela esperava que ele desse a resposta em termos de uma fração; entretanto ele continuou respondendo com um cardinal “2”. Estabelece-se assim um efeito de resposta esperada, como mostra o exemplo a seguir.

> *Professora Maria- Mauro comeu $\frac{3}{5}$ de uma torta de abacaxi. Que fração da torta sobrou? Como descubro isso? Se ele comeu $\frac{3}{5}$, quanto divido essa fração?*
> *Aluno- 5.*
> *Professora Maria- Muito bem, restou quanto?*
> *Aluno- 2.*
> *Professora Maria $\frac{2}{5}$, muito bem.*

Outra questão que merece destaque é a ruptura de CONTRATO DIDÁTICO normalmente estabelecida. Observamos algumas delas. A primeira foi que, ao considerarmos que professores baldistas, como foi classificada Maria, iniciam suas aulas mostrando a definição do conceito a ser trabalhado. O que caracterizou essa quebra foi o fato de a professora (elemento responsável pela ação didática), inverter a ordem de ensino, quando apresentou inicialmente exemplos de frações para serem lidas, exercícios a serem realizados e apenas no final, definiu o conceito. O Contrato estabelecido deveria ser: apresentação de definição, realização de atividades para servirem de modelos e proposição de exercícios com o mesmo raciocínio. Acreditamos que essa ruptura seja justificada pela expectativa da professora explicitada inicialmente de que os estudantes já haviam estudado frações anteriormente.

A segunda ruptura aconteceu quando a professora, ao propor uma atividade em grupo, percebemos aparentemente que os estudantes não estavam preparados para essa situação e não houve compreensão, por parte deles, do que a professora estava propondo. Essa ruptura causou certa desorganização da sala.

Ademais, observamos também que a proposta de se trabalhar em grupo não era para que os estudantes discutissem, refletissem, conjecturassem, expusessem suas estratégias de resolução ou até mesmo as validassem, como preconizam os documentos oficiais norteadores do ensino fundamental os PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2017), já que a professora pedia, mesmo em grupo, que cada um fizesse a sua atividade e compartilhasse com o colega. Não consideramos essa situação como uma proposta de trabalho colaborativo. É o que mostra o recorte a seguir:

Professora Maria - Agora vamos resolver uns problemas. Para ficar facilitado, vamos fazer em grupo de 5, para ajudar um ao outro. Cada um faz o seu e conversa com o colega.

A terceira ruptura relacionada à fração aconteceu quando, implicitamente, os estudantes tinham internalizado a regra de que o denominador de uma fração deveria ser sempre maior. Observamos no próprio discurso da professora, em função da entrevista que ela respondeu, que também esta regra estava internalizada pela professora, ou até mesmo considerava o conceito de fração imprópria como uma ideia complexa para os estudantes entenderem, como mostra o trecho a seguir:

Vou mostrar que o número fracionário é menor do que o inteiro, dependendo de como ele seja, né! Por exemplo $\frac{1}{6}$..., não é maior que 1, é um dividido por 6, mas pode ser maior que 1. Dependendo da fração, se eu botar uma fração que numerador seja maior, ela pode dar mais do que 1, mas aí já vai ser mais profundo e eles podem não compreender.

Entretanto, uma das questões da prova das avaliações externas contemplou esse conceito e a professora rompe seu CONTRATO DIDÁTICO inicial que considerava o conceito de fração imprópria difícil para os estudantes e o aborda, como veremos no recorte a seguir.

P - *Quando eu quero representar uma fração, como vou representar? $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{10}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{20}{6}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{11}{8}$? Essas frações são diferentes, as representações. Quando a gente tem a fração, temos o numerador e denominador. Nesse exemplo $\frac{3}{2}$, ela é maior que o inteiro. Quanto dá $\frac{3}{2}$?*

A - *1,5. (Professora representa com figura).*

P - *Lembram do Aprova? $\frac{4}{3}$? (Professora faz a divisão*

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{3} & 1,3 \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 1 & \end{array}$$

). Essa fração é mais complexa. Eu quero mostrar que a fração pode ter numerador maior que o denominador e vice-versa.

Percebemos, em função do recorte mostrado, que nesse momento poderia haver uma ruptura e renegociação da regra anteriormente estabelecida. A partir da contextualização dada pela professora, os estudantes poderiam aprender que era possível dividir quando o numerador fosse maior que o denominador e que uma fração podia ser maior que a unidade. Entretanto, a professora considerava esse conceito complexo e não se aprofundou na discussão. Apenas mostrou um exemplo e prosseguiu suas aulas com representações em que o denominador era menor que o numerador. É muito esclarecedor quando Brousseau (1998) destaca que a aprendizagem repousa nas rupturas do CONTRATO DIDÁTICO.

Assim como Joana, é interessante reforçarmos que a ruptura e a renegociação são fundamentais para o avanço das aprendizagens. Nesse exemplo, no caso das frações, nosso objeto de estudo, a cláusula que fração é menor que o todo não levou a uma quebra de contrato, e não foi renegociada para o caso das frações maiores que a unidade. Acreditamos que, se houvesse essa ruptura, a aprendizagem avançaria, e o fracasso em relação à aprendizagem de frações fosse amenizado.

Diante desse contexto e do ponto de vista da ruptura de contrato, percebeu-se que a aprendizagem não repousou, necessariamente, sobre o funcionamento do contrato, mas sobre suas rupturas (BROSUSSEAU, 1996). Isso faz com que o ato de aprender implique para o estudante romper com o contrato anteriormente estabelecido, como veremos no recorte a seguir.

> *Professora Maria- Nessa aqui, por exemplo, tem o denominador maior que o numerador.* $\frac{2}{5}$*. Posso dividir 2 laranjas para 5 pessoas?*
> *Aluno- Não.*
> *Professora Maria- Pode sim, mas vou fracionar igualmente, dividir igualmente. Se a mãe tiver 2 barras de chocolate, pode dividir para 5 filhos?*
> *Aluno- Dá sim.*

Regras de CONTRATO DIDÁTICO: elencamos quatro, identificadas nas observações das aulas da professora Maria. Essas regras foram enumeradas de I a IV.

REGRA I – Só pode dividir quando o numerador é menor que o denominador. Diferentemente das outras regras (pois não foi estabelecida explicitamente pelo professor), essa foi uma das internalizadas pelos estudantes (talvez pela excessiva utilização) já que acreditavam não ser possível dividir a fração quando o numerador fosse maior que o denominador, como mostra o recorte a seguir.

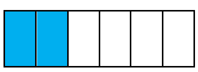
Professora Maria- Nessa aqui, por exemplo, tem o denominador maior que o numerador. 2/5. Posso dividir 2 laranjas para 5 pessoas?
Aluno- Não.

Apesar de não explicitar, observamos que a professora tinha essa regra internalizada, pois nas aulas iniciais apenas deu exemplos com frações em que o denominador era maior que o numerador. Os estudantes acabaram por internalizá-la também. Esse recorte a seguir ilustra bem a situação.

Professora - *Depois vou falar a nomenclatura do que é $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$... mostrar que o número fracionário é menor do que o inteiro, sempre.*
Professora - *Sempre teremos o número fracionário menor que o inteiro?*
Professora - *Sim, dependendo de como ele seja, né! Por exemplo $\frac{1}{6}$..., não é menor que 1?*
Professora - *E a fração $\frac{3}{2}$, é maior que 1?*
Professora -*Eita, é mesmo, pode ser maior que 1 também, né! Dependendo da fração, se eu botar uma fração que numerador seja maior, ela pode dar mais do que 1, mas aí já vai ser mais profundo. Mas de início eu faço assim, fazendo os desenhos com denominadores maior que o numerador porque é simples. Depois peço para eles copiarem, faço atividades, muitas atividades relacionadas ao conteúdo.*

REGRA II - Fração como dois números independentes: outra regra de contrato estabelecida foi a ideia de fração como dois números, no denominador o total de quadradinhos em que foi dividido o todo e no numerador, a quantidade de quadradinhos que foi pintada. Exemplos serão mostrados a seguir.

Professora Maria- Deixa eu mostrar um modelo da outra questão. Como descobrir uma fração a partir da representação? O número de quadradinho pintado é o numerador. O denominador é a quantidade de quadradinhos que tenho.



Dividi quantos?

Aluno- 6.

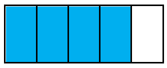
Professora Maria- E pintei...

Aluno- 2.

Professora Maria- Qual a fração?

Aluno- $\frac{2}{6}$.

Professora Maria- Dividiu agora em:



Aluno- 5.

Professora Maria- E pintei...

Aluno- 4.

Professora Maria- Então são $\frac{4}{5}$*...Quatro quintos (escreve em linguagem natural).*

Dessa forma, compreendemos que a professora tem uma ideia de fração, como dois números distintos, um que se escreve no numerador e outro no denominador. Nesse exemplo, confirmamos mais uma vez o que tem sido preconizado pela literatura em relação ao conceito de frações construído erroneamente pelos estudantes. É muito comum eles perceberem a fração como uma combinação de dois números - numerador e denominador – e não como um número que exprime a relação entre a parte e o todo em diferentes contextos e com significados variados (BERTONI, 2004). Nessa mesma linha de ideias, Silva e Almouloud (2005) salientam que é muito comum os estudantes perceberem a fração como uma combinação de dois números – numerador e denominador – e não como um número que exprime a relação entre a parte e o todo em diferentes contextos e com significados variados.

REGRA III: o trabalho excessivo com a concepção de fração enquanto parte e todo. Durante todas as aulas que observamos, esta foi a única concepção apresentada pela professora aos estudantes. Bertoni (2004) destaca que um aspecto importante que acentua essas dificuldades são as escolhas do professor na apresentação desse conteúdo, já que ainda apresentam traços de uma abordagem tradicional, conforme ilustramos nos exemplos um e dois a seguir.

EX1:Professora Maria- Temos aqui o círculo. Foi dividido em quantas partes? 8 não foi? (Coloca esse número no denominador da fração). E pintou quantas partes? 6, né? A parte dividida é o denominador da fração e a *pintada é o numerador. Então temos a fração $\frac{6}{8}$. A professora faz a representação no quadro utilizando o círculo.*

EX2: Professora Maria- E essa aqui, dividiu em quantas partes?
Aluno- 9.
Professora Maria- E ficou quantas partes?
Aluno -4
Professora Maria- A fração é então $\frac{4}{9}$.A professora faz a representação no quadro utilizando um retângulo.

Como já mencionado anteriormente, e que a literatura vem enfatizando, essa forma de ensinar é uma das situações que apontamos para reflexão. Trata-se justamente do ensino excessivo de frações, utilizando o significado parte-todo, sempre a mesma forma, seguindo modelos e regras. Para alguns autores:

> O ensino de frações é ministrado geralmente, a partir da concepção parte/todo, que permite que a criança, por intermédio da contagem das partes, desenvolva a linguagem necessária para as frações e as regras das operações, sendo capaz de reproduzir respostas corretas em algumas situações. Esse modelo de ensino, não desenvolve, entretanto, a comparação das partes com a unidade pois as crianças não participam diretamente da divisão do inteiro, este modelo se torna estático, não permitindo, inclusive, que o conceito de número racional se desenvolva plenamente. (SILVA e ALMOULOUD, 2005, p. 79).

Além disso, é importante salientarmos que, de acordo com Landim e Morais (2019), desenhar figuras geométricas, dividi-las em partes de mesmo tamanho, pintar algumas destas partes e depois escrever a relação entre o número de partes pintadas e a quantidade total de partes, não tem sido suficiente para expressar o que está implícito nesse processo tão trivial na escola, que é o conceito de número fracionário.

Conquanto, majoritariamente, essa foi a forma trabalhada pela professora. Esta situação vai de encontro ao que se preconiza nas recomendações dadas por diferentes documentos oficiais PCN (BRASIL, 1997) e BNCC (BRASIL, 2017) que norteiam o ensino brasileiro, pois eles destacam a abordagem de outros significados de fração, da forma mais integrada possível.

REGRA IV – Concepção de fração enquanto divisão. Existe uma crença em Matemática, segundo a qual os estudantes compreendem que, resolver um problema, está intrinsecamente relacionado à efetuar operações e que a tarefa deles é encontrar uma operação e resolvê-la corretamente. Na maioria das vezes, ela é explicitada pelo próprio professor, mediante a pergunta do estudante (esse problema é de quê? Mais, menos, etc.). Essa questão vem corroborar a ideia de que “Para resolver um problema em matemática, basta pegar os números do enunciado e descobrir a boa operação a ser feita. (ALMOULOUD, 2007, p. 91).

A professora Maria não procurou desmistificar para seus estudantes essa crença que acreditamos ser mais uma regra de CONTRATO DIDÁTICO. Na maioria das aulas, associou o conceito de fração a uma divisão, como já vimos em muitos dos trechos delas extraídos e mostraremos outros a seguir, ou seja, observamos que ela sempre realizava a operação de cálculo da divisão para validação das respostas às questões propostas sobre o conteúdo.

> *Ex2: Professora Maria - Maria tinha 40 figurinhas. Deu a $\frac{1}{2}$ para sua irmã? Ficou com quantas figurinhas?*
> *A - 20.*
> *P - Como fizeram?*
> *A - Dividi 40 por 2.*
> *P - Você pode fazer a continha $\frac{40}{2}$ = 20 (mostra a resolução do algoritmo para* $\begin{array}{r|l} 4'0 & 2 \\ \underline{4} & \overline{20} \\ 0\,0 & \end{array}$ *).*

Além de identificarmos as regras de CONTRATO DIDÁTICO, percebemos outras duas que consideramos serem mais apropriadas para o Contrato Pedagógico, pois não se relacionaram a um saber específico, mas, sim, ao funcionamento da sala de aula.

REGRA 1 do Contrato pedagógico: Utilização de exercícios prototípicos para que os estudantes pudessem segui-lo: ao começar a responder os exercícios, o que constatamos é que a professora apresentou apenas exercícios de frações que reproduziam as mesmas estruturas dos prototípicos, que eram, na maioria das vezes, muito conhecidos nas atividades propostas pelos professores, assim como nos livros didáticos dos anos iniciais.

> *Professora Maria- Agora resolvam as atividades em dupla para discutirem, mas cada um faz o seu. Vou mostrar o primeiro, para vocês verem como se faz, vou dar exemplo. Querem?*
> *Aluno- Sim.*
> *Professora Maria- Quando quero 2/5.Desenha um pentágono e pinta 2 partes. Como faço? Aqui tem quantas partes?*
> *Aluno- 2.*

Professora Maria- As partes pintadas podem ser qualquer uma, desde que sejam 2. Deixa eu mostrar um modelo da outra questão. Vou colocar outros exemplos para vocês responderem. Ao terminarem vamos usar o jogo das frações para fixarem melhor o assunto.

Esse é o tipo de estratégia pedagógica mais utilizada, em que o professor ensina como fazer e o estudante aprende exercitando da mesma maneira, estabelecendo assim regras de CONTRATO DIDÁTICO. Ele deixa de lado a preocupação com o processo de compreensão conceitual, em detrimento de um apanhado de regras e técnicas sem nenhum significado para a criança. Quando os estudantes se deparam com uma situação diferente, em que a regra não funciona e o modelo aprendido não se enquadra, eles deixam de fazer a atividade.

A valorização desse tipo de situação vai de encontro às ideias preconizadas da TSD, pois leva o estudante ao estabelecimento de regras em detrimento da compreensão do conceito. Se levarmos em conta a compreensão e a diversidade das representações desse conceito, não se pode afirmar sobre o sucesso no processo de aprendizagem das crianças, na referida modalidade de ensino.

De modo geral, destacamos que Maria trabalhou em função das características predominantes da concepção de ensino e de aprendizagem Baldista Câmara dos Santos (2005), em que apresentou um ensino por exposição de conteúdo e questões que se resolviam em função de um mesmo raciocínio. Essa mesma forma de apresentação das atividades, não conduziu os estudantes à construção efetiva do conceito de frações. A partir da análise de vários elementos constituintes do CD, consideramos que o estabelecido se relacionou ao Normativo.

O que pudemos perceber é que a professora passava rapidamente pelos "problemas" sem grandes interferências, uma vez que eles davam conta do CONTRATO DIDÁTICO em vigor, isto é, não percebemos problema que tivesse objetivo de desafiar os estudantes, de provocar um desequilíbrio sociocognitivo, que os impulsionassem à construção de conhecimentos de forma autônoma, como preconiza a Teoria das Situações Didáticas.

Ao contrário, se as situações de ensino fossem desafiadoras, poderiam desencadear a percepção, por parte dos estudantes, de que as ferramentas que possuíam eram insuficientes para a resolução de determinados problemas. Além disso, os fariam perceber, também, conhecimentos e regras automatizadas, levando-os a colocá-los em xeque. Para nós, essas regras automatizadas se relacionam ao CONTRATO DIDÁTICO estabelecido e colocar em xeque, significa quebrá-las para uma possível renegociação. Segundo Brousseau (1998), a aprendizagem repousará nessas quebras e nas possíveis renegociações realizadas.

Diferentemente disso, a repetição de uma estrutura de problemas comumente utilizados, foi o foco do trabalho desenvolvido.

Em geral, bem mais que Joana, as aulas da professora Maria foram baseadas em repasse do conhecimento, memorização de técnicas e procedimentos. Ao analisarmos suas aulas, não se pode afirmar sobre o sucesso no processo de aprendizagem do conceito em estudo, na turma observada, nem seu aprofundamento como preconizado por PCN (BRASIL, 1997) e BNCC (BRASIL, 2017).

6.5 AS CONCEPÇÕES DE ENSINO E O CONTRATO DIDÁTICO ESTABELECIDO EM SALA DE AULA COMO FATORES DE INFLUÊNCIAS NO DESEMPENHO DO SABER ESCOLAR FRAÇÃO.

Há tempos atrás, os estudos de Gimeno (1991) afirmam que o apoio do conhecimento à prática é precário, convertendo-se numa das causas que levam muitos professores a agir de acordo com as suas convicções e com mecanismos adquiridos culturalmente através da socialização, mais do que com o suporte do saber especializado, de tipo pedagógico. Carrillo e Contreras (1995) já sinalizavam para o reflexo das concepções dos professores nas práticas docentes, e podem ser consideradas fatores de influências na aprendizagem, levando os estudantes a cometerem erros.

Para os autores, certa concepção sobre Matemática, o ensino ou até mesmo da Educação Matemática poderia caracterizar a interpretação e tomada de decisão sobre as concepções, erros de aprendizagem ou obstáculos epistemológicos dos alunos; orientaria a uma certa opção de seleção de conteúdo ou busca de situações didáticas, e permitiria ou justificaria o quadro de negociação (implícito ou explícito) de um determinado CONTRATO DIDÁTICO (BROUSSEAU, 1989).

Para ilustrar essa idéia, os autores exemplificam a situação da seguinte forma: se o professor tem uma concepção da matemática como algo essencialmente instrumental ou uma concepção de educação matemática marcadamente tecnológica, levaria a uma seleção de conteúdos bastante distintos daqueles que seriam obtidos em consequência de outro que tem uma concepção dinâmica da matemática, ou uma concepção investigativa da educação matemática.

Na perspectiva das ideias explicitadas, percebemos que as duas professoras investigadas foram caracterizadas a partir de diferentes concepções. Joana foi caracterizada por ter expectativas da Socioconstrutivista, mas desenvolveu alguns elementos associados à Baldista

(CÂMARA DOS SANTOS, 2005) associados num CONTRATO DIDÁTICO Aproximativo e, por vezes, Normativo (CHARNAY, 2001); diferentemente de Maria, que apresentou elementos apenas da Baldista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005) associada a um Contrato Normativo (CHARNAY, 2001)

Em geral, nas aulas, percebeu-se que para ensinar o "novo" conteúdo, normalmente as professoras baseavam-se em regras estabelecidas com seus estudantes, como por exemplo "fração representa a divisão que eu quero", "fração não pode ser maior que o inteiro", "a parte dividida é o denominador da fração e a pintada é o numerador". Esse direcionamento dado ao ensino de frações vai na direção de uma ideia do conceito enquanto particionamento (POWELL, 2019). Essa perspectiva, assim como a de medição, se justifica a partir de uma origem histórica e pode acrescentar consequência epistemológica, enfatizando sua influência no conhecimento do referido conceito.

Essa perspectiva também reforça uma visão filosófica, chamada de formalismo, em que se acreditava que toda a Matemática podia ser formulada com base em regras de manipulação de fórmulas, sem qualquer referência aos significados das fórmulas ou contextos práticos. Foi nesse cenário que percebemos o desenvolvimento desse conteúdo, já que não vimos compreensão efetiva por parte dos estudantes, nem aprofundamento, como preconizam os PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2017).

Outra questão observada foi a ênfase em associar frações a situações relacionadas ao contexto dos estudantes, como a divisão de pizzas e chocolates. Para Powell (2019), ao procurar trazer essa ideia para as práticas sociais, associando-as a barras de chocolates, pizzas, dentre outras representações, como aconteceu nas aulas observadas, tais concepções fornecem às crianças acesso visual à definição formalista de uma fração e seu símbolo bipartido, $\frac{a}{b}$. Entretanto, o autor acrescenta que, para os alunos, essa perspectiva acarreta dificuldades cognitivas. Da mesma forma, vimos que ambas as professoras procuraram ilustrar o saber escolar fração a partir da utilização desses recursos, tentativa que, a nosso ver, não contribuiu muito para a aprendizagem.

Um desafio conceitual é que a equipartição de um objeto não confere significado a uma fração imprópria, uma fração cujo numerador é maior que seu denominador. Essa situação foi por nós evidenciada no estudo empírico, diante da dificuldade de os estudantes não compreenderem esse tipo de fração, visto que a maioria das atividades e exemplos (os quais consideramos uma regra de CD) foram focados nas frações próprias. Quando da realização do simulado para as avaliações externas, eles acabaram por errar uma questão que necessitava da compreensão desse conceito.

Apesar de Maria ter feito um comentário sobre o acontecido, a intervenção dela não ocasionou uma ruptura da regra estabelecida e por eles assimilada. Ademais, a ideia trabalhada de forma excessiva de fração enquanto divisão de partes iguais pode ter levado os estudantes à não compreensão desse conceito enquanto um número, e sim dois, um que se escreve no numerador e outro, no denominador, como aconteceu na turma observada, pois percebemos a ideia repassada pela professora de fração enquanto dois números.

Diante desse contexto, Powell (2019) salienta que outra questão cognitiva surge de uma ênfase instrucional na estrutura de duas partes da forma simbólica de uma fração e chama atenção ao fato de que, em vez de comunicar que uma fração holisticamente tem uma única magnitude, o foco instrucional sugere aos alunos que ela é composta de duas partes numéricas distintas e os prepara para aplicar propriedades de número inteiro inadequadamente para avaliar frações. Há uma tendência de os estudantes terem o foco nas partes de uma fração por não a compreender enquanto uma relação entre o todo e suas partes, situação essa que é reforçada pelas professoras no decorrer das aulas.

Ainda nessa circunstância, os estudos de Silva e Almouloud (2005) analisaram as concepções dos professores de Matemática sobre os números fracionários e a aprendizagem dos estudantes sobre o referido conceito. Suas análises dos resultados evidenciaram que os docentes constroem para a "5ª série" organizações matemáticas muito rígidas, com tipos de tarefas que associam, predominantemente, a concepção parte-todo em contextos de superfícies. Apesar do longo tempo transcorrido, percebemos que, na atualidade, essa questão ainda se configura como um dos pontos de influências na aprendizagem de frações.

Aliada à concepção de ensino baldista (CÂMARA DOS SANTOS, 2005), mais associada a Maria, percebemos que o CONTRATO DIDÁTICO vigente era o de dar explicações meramente expositivas, repassar o conteúdo e fazer atividades de fixação. Estudiosos da Educação Matemática (BROUSSEAU, 1996; CHEVALLARD, 2001, dentre outros) têm questionado se a dificuldade na construção de conceitos matemáticos está associada, dentre outras causas, às relações estabelecidas entre o professor, estudante e o saber ou ainda, mais especificamente, às regras que estabelecem comportamentos esperados tanto por parte do professor, quanto do estudante.

Quando se tratou de analisarmos tanto a relação das professoras quanto dos estudantes no que diz respeito ao saber em jogo, percebemos a grande inquietação, conversas paralelas entre eles e pouco interesse nas explicações dadas. Para continuar a condução delas, era necessário chamar atenção deles com as frases “olhem para o quadro”, “prestem atenção”, “se vocês não olharem e prestarem atenção, não saberão responder a prova”. Diante do exposto, podemos constatar a dificuldade de os estudantes se envolverem no processo de aprendizagem, em que o conhecimento matemático era resultado de uma construção vinda da interação com o meio (aliado) didático, assim como percebido nos estudos do caso Gael.

Apesar da prática docente de Joana estar associada também a um Contrato Aproximativo, acreditamos que um dos fatores que levou os estudantes ao fraco desempenho do saber em jogo esteve relacionado à proposição do meio aliado, que não gerou neles desequilíbrios cognitivos. Sobre isso, Oliveira e Mastroianni (2016) destacam que este tipo de meio organizado pelas professoras não deve ser considerado adequado para efetivar o processo de construção do conhecimento, pois é constituído por elementos facilitadores e por uma preparação que exime os sujeitos do processo investigativo e do esforço para a superação de eventuais dificuldades e restrições. Os autores ainda destacam que isso se deve ao fato de os componentes cognitivos já se encontrarem explicitados na forma de exemplos ou modelos e, frequentemente, o componente social é substituído por exposições/instruções do professor.

Percebemos outro ponto de acordos realizados que induziram o comportamento das professoras e estudantes no tocante ao conteúdo investigado. Havia um interesse deles em copiar as informações, ao mesmo tempo em que eram repassadas sobre o conteúdo. Essa foi uma regra de contrato pedagógico que regia as salas, pois sempre questionavam se podiam copiar. Porém, as professoras respondiam que só poderiam fazê-lo após terminada toda a explicação.

Essa regra, mesmo sendo do pedagógico, revelou mais um aspecto da concepção baldista e do CONTRATO DIDÁTICO Normativo, ambos pautados na repetição de procedimentos desenvolvidos pelo professor, que era detentor do conhecimento e considerava importante explicar tudo e os estudantes apenas prestavam atenção, copiavam e repetiam. Entendemos que, se o ensino for baseado na perspectiva apenas de repasse, pode não dar a chance de os estudantes construírem os conceitos adequadamente, pois suas ações serão limitadas na repetição de tarefas. Silva (2010) entende que dificuldades em relação ao domínio do conteúdo e à produção para o ensino baseado em regras prontas, localizadas em desenvolvimentos históricos mais recentes, devem-se à crença na aprendizagem por memorização.

Diante desse contexto, Landim e Morais (2019) destacam que as escolhas do professor na apresentação desse conteúdo ainda apresentam traços de uma abordagem tradicional, que deixa de lado a preocupação com o processo de compreensão conceitual em detrimento de um apanhado de regras e técnicas sem nenhum significado para a criança. Essas questões nos levam a considerar que contratos didáticos são estabelecidos em função das concepções de ensino que subjazem às práticas docentes, e que esses elementos teóricos podem ser vistos como fatores de influências na aprendizagem de frações.

A partir das ideias expostas, destacamos outra questão que consideramos importante. As professoras, buscando manter o seu papel (que está estabelecido implicitamente no contrato) em função do conteúdo matemático proposto, faziam e respondiam muitas das próprias questões que eram direcionadas aos estudantes diante do conteúdo frações. Dessa forma, a aprendizagem do conceito ficou prejudicada, pois tanto Maria quanto Joana impediram que eles participassem, de forma efetiva, da construção do conhecimento.

Ao fazer e elas mesmas responderem seus questionamentos, as professoras tiravam dos estudantes a possibilidade de reflexão sobre uma resposta possível e de compreensão do assunto abordado, comprometendo dessa forma, a aprendizagem. Consequentemente, por algumas vezes, podemos pensar que, ao procurar atender ao comportamento esperado pela professora, eles podiam estar respondendo de forma automática, como destacam os estudos de Baruk (1975), ou seja, sem ter tido muita compreensão das ideias matemáticas envolvidas.

De modo geral, observamos que as relações existentes na sala de aula entre professoras e estudantes diante do conteúdo fração, que estava em jogo, estavam sendo condicionadas pela concepção de ensino baldista, alinhada a um CONTRATO DIDÁTICO Normativo vigente, que aconteceu, implicitamente e se manteve no decorrer das aulas observadas. Sobre esse fenômeno, concluímos que seus elementos constituintes: negociação, efeitos, rupturas, divisão de responsabilidades, em especial suas regras, nos fizeram perceber que foram fatores que influenciaram a aprendizagem de frações, em especial porque nos permitiu a compreensão das atitudes e dos comportamentos dos atores didáticos, trazendo à tona sua relação com as concepções de ensino subjacentes à prática docente das professoras investigadas.

Nesse sentido, muitos elementos constitutivos associados ao CONTRATO DIDÁTICO podem ter influenciado negativamente o desempenho de frações, pois os estudantes tiveram dificuldade de compreender e aprofundar esse saber escolar em função de suas diferentes concepções, como preconizam os documentos orientadores do Ensino Fundamental PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2017).

Diante das ideias expostas, destacamos que apenas ficou na cabeça dos estudantes a ideia de frações enquanto dois números distintos; divisão de dois números, um que se escreve em cima e outro embaixo. Em geral, as professoras foram construindo a ideia de parte e todo de maneira progressiva, mantendo sempre o 1 (um inteiro no numerador e ampliando o denominador) e na maioria das vezes utilizando as divisões de figuras prototípicas com barras de chocolate, pizzas, etc.

De acordo com Powell (2019), essas representações visuais trazem a definição formal de uma fração com interpretações cotidianas e fornecem às crianças acesso visual à definição formalista de uma fração e seu símbolo bipartido, a / b. O significado da representação visual envolve a divisão de uma área em partes iguais discretas ou a identificação de um subconjunto de uma coleção de objetos e, em seguida, uma contagem dupla e processo de registro: (1) o número de partes iguais ou objetos e (2) o número de partes de interesse ou objetos em um subconjunto identificado. Para os alunos, essa perspectiva acarreta dificuldades cognitivas.

Dessa maneira, podemos inferir que a resposta dos estudantes indica que eles entenderam a fração como uma divisão, isto é, como uma operação, reflexo da concepção que subjazia ambas as professoras em suas práticas docentes e não como número. Acreditamos que isso foi um reflexo das escolhas das professoras, pois, como vimos, elas enfatizaram, em todo momento, que fração é dividir. Corroborando essa ideia, Powell (2019) destaca que outra questão cognitiva surge de uma ênfase instrucional na estrutura de duas partes da forma simbólica de uma fração. Em vez de comunicar que uma fração holisticamente tem uma única magnitude, o foco instrucional sugere aos alunos que uma fração é composta de duas partes numéricas distintas e os prepara para aplicar propriedades de número inteiro inadequadamente para avaliar frações.

Essa situação vai de encontro às recomendações de pesquisas realizadas, pois já são bastante conhecidas as indicações para a importância de tratar o conteúdo frações, na sala de aula, a partir dos seus diferentes significados: quociente, operador, razão, parte-todo, dentre outros Nunes e Bryant (1997); Maciel e Câmara dos Santos (2007); Bertoni (2009); Van de Walle, (2009); Landim e Morais (2019).

Entretanto, essa dificuldade na compreensão do conceito e de suas diferentes concepções corrobora as conclusões chegadas por Oliveira e Araman (2017), que realizaram um estudo com alunos do 9º ano do EF e do 3º ano do Ensino Médio, acerca das dificuldades sobre os números racionais. Os autores discutiram 5 atividades e as analisaram com base na Análise de Conteúdo proposta por Bardin (2004).

As análises dos resultados mostraram que os estudantes apresentam muitas dificuldades em todas as representações dos números racionais (fração, decimal e pictórica) e que essas estão presentes nos dois níveis de escolaridade. Ainda destacam que, embora o conteúdo dos números racionais esteja disposto nos documentos oficiais, os estudantes do 3º ano do Ensino Médio apresentam dificuldades. Nosso estudo vem corroborar/ampliar essa discussão e mostra que, nos anos iniciais do EF, ela também se confirma.

Sob a ótica do ensino e da aprendizagem, nas turmas pesquisadas, percebemos como a relação professoras, estudantes e saber tiveram uma grande importância no processo de construção do conhecimento sob avaliação. Nesse sentido, em função das análises realizadas, constatamos como os elementos do CONTRATO DIDÁTICO estabelecido e as concepções de ensino e de aprendizagem da Matemática, puderam ser vistos como fatores de influências na aprendizagem de frações. Um aspecto importante em relação ao CONTRATO DIDÁTICO, destacado por Jonnaert e Borght (2002), é que ele tem a função de gerir as relações entre professor, estudantes e saber.

Essa gestão deve acontecer de forma a não cristalizar essas relações em regras definitivas e sim colocá-las em tensão para que sejam realizadas uma série de rupturas, consideradas necessárias, para permitir que os parceiros da relação didática modifiquem permanentemente as suas relações com o saber e com os conhecimentos. A aprendizagem escolar é sempre tributária dessas rupturas. Se essa tensão tivesse acontecido, e regras fossem rompidas, a aprendizagem efetiva poderia ter acontecido nas turmas investigadas.

Nessa circunstância, concluímos que no ambiente escolar, em busca do saber, o CONTRATO DIDÁTICO e as concepções de ensino assumiram um papel de destaque no processo de ensino do saber escolar frações, funcionando como fatores de dificuldades na construção do conceito investigado.

Diante das ideias expostas, Jonnaert e Borght (2002) destacam que é por uma série de regras do jogo estabelecidas pelo CONTRATO DIDÁTICO que os estudantes constroem suas trajetórias da dependência em face do professor até sua autonomia no que se refere ao saber. Esse fenômeno gera essas trajetórias jogando com base em regras estabelecidas entre professores e estudantes. Os autores destacam que eles concretizam essa passagem da dependência à autonomia por meio de situações que ele encontra na relação didática. Estas últimas, por sua vez, foram desenvolvidas em um meio aliado e não possibilitaram essa autonomia.

Uma dimensão que merece destaque é que parte das dificuldades dos estudantes pode ser explicada em função de alguns elementos constitutivos do CONTRATO DIDÁTICO, em especial seus efeitos e regras estabelecidas, resultados de concepções de ensino e de aprendizagem da Matemática construídas pelas professoras em suas vivências pessoais e profissionais. Os estudos desenvolvidos por Almouloud (2007) mostram que a ideia de CONTRATO DIDÁTICO faz com que possamos analisar e interpretar alguns fenômenos. Na maioria das vezes, eles não são evidentes, mas mantêm uma estreita relação e podem interferir no processo de ensino e de aprendizagem.

Nessa mesma linha de ideias, Pedrosa et al (2016), em seus estudos, apresentaram uma realidade problemática quanto ao aprendizado dos estudantes em relação às frações. Mostraram que eles chegam ao ensino médio com nível de aprendizado baixo. Na intenção de melhorar esse quadro, os pesquisadores fomentam reflexões e propõem estratégias para o ensino desse conteúdo, com o objetivo de promover a autonomia e protagonismo discente, quebrando a lógica de aula centrada na figura do professor. Essa visão adotada pelos autores é a preconizada pela Teoria das Situações Didáticas. Concordamos com esse protagonismo e acreditamos que, ao tirar o foco do ensino do professor, o estudante poderá ter melhores condições de construir sua aprendizagem.

De acordo com Arruda, Soares e Moretti (2016), o CONTRATO DIDÁTICO permite circunscrever certos fenômenos de ensino e trazer um novo olhar, além de interrogar-se de modo novo a complexidade da relação didática. Para eles, muitos dos erros por eles manifestados em suas respostas se originam na má interpretação do CONTRATO DIDÁTICO. Diante dessas dificuldades mostradas pela literatura, resultados de pesquisas e documentos oficiais PCN (BRASIL, 1997) e a BNCC (BRASIL, 2017), há muito tempo vêm enfatizando a necessidade de um trabalho consistente e contextualizado com esse conteúdo.

Esse fato vem reforçar nossa hipótese de que o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido em sala de aula nos ajudou a entender melhor as dificuldades dos estudantes dos anos iniciais do EF para lidarem adequadamente com frações, uma vez que estavam relacionados às características predominantes das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA subjacentes às práticas docentes, as quais, por sua parte, influenciaram a aprendizagem de frações.

6.6 OUTROS FATORES DE INFLUÊNCIAS NO DESEMPENHO DO SABER ESCOLAR FRAÇÃO

Além de termos identificado os dois construtos teóricos concepções de ensino e CD como elementos de influência no desempenho dos estudantes em relação ao saber escolar fração, podemos inferir que, durante a investigação realizada observamos outros. Dentre eles podemos elencar:

O primeiro relaciona-se à própria natureza do saber em jogo. Dada a sua natureza epistemológica, consideramos emergir obstáculos epistemológicos no processo de ensino e, por consequência, provocar dificuldades no desempenho dos estudantes, como veremos no recorte a seguir.

> *Professora- Se você compra uma pizza e divide com outra pessoa. Não, não, uma pizza vai dividir com 4 pessoas, então você vai comer... Como chamo?*
> *Estudante - Metade e a outra pessoa vai comer... Outra metade.*
> *Professora - Só que na hora que você for comer, chega mais duas pessoas. Vai ter que dividir em quantas partes?*
> *Estudante - 4.*
> *Professora- Seu pedaço, metade, ficou maior ou menor?*
> *Estudante - Menor.*
> *Professora- Na hora que você vai pegando chegam mais 2. Vai dividir em quantas partes?*
> *Estudante - 6.*
> *Professora - Uma pizza para dividir pra 6 pessoas. Cada um só vai comer* $\frac{1}{6}$*.*
> *Depois chegam mais 2. Quantos pedaços?*
> *Estudante -8.*
> *Professora- Esses pedaços estão aumentando ou diminuindo?*
> *Estudante -- Diminuindo*
> *Professora - Mas você está percebendo que o número está aumentando.*

Ao analisarmos esse recorte, percebemos que a própria professora incorre em um obstáculo epistemológico ao comentar que o pedaço de pizza está diminuindo e a fração está aumentando. Na realidade, o pedaço está diminuindo e a fração também. Entretanto, a representação do denominador está aumentando, mas não a fração. Percebemos que ela também está olhando para o denominador da fração, que realmente está aumentando. Talvez esteja utilizando de forma inadequada a ideia dos naturais para o campo dos racionais.

Em se tratando dos PCN (BRASIL, p. 101) observamos que eles apresentam alguns obstáculos epistemológicos inerentes às frações, os quais, na perspectiva da TSD, podem figurar como impeditivos para se trabalhar alguns aspectos desse conteúdo em sala de aula. Destacamos a necessidade desses obstáculos serem enfrentados pelos professores, para que não venham a se tornar didáticos e dificultarem a aprendizagem do saber escolar investigado.

O segundo foi a evidência de que as professoras, em especial, Maria, desenvolveram o trabalho com ênfase no ensino do saber escolar fração, a partir da concepção parte e todo. Cavalcanti (2004) destaca, em seu estudo com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que o modelo conceitual parte-todo, geralmente adotado para o estudo das frações. Nessa mesma linha de ideias, Silva e Almouloud (2005) analisaram as concepções dos professores de Matemática sobre os números fracionários e a aprendizagem dos estudantes sobre o referido conceito. Suas análises dos resultados evidenciaram que os docentes constroem para a "5ª série" organizações matemáticas muito rígidas, com tipos de tarefas que associam predominantemente a concepção parte e todo em contextos de superfícies.

Apesar do longo tempo transcorrido, percebemos que na atualidade essa questão ainda se configura como um dos pontos de influências na aprendizagem de frações. Em vista disso, por já termos identificado que as práticas das referidas professoras se ancoram a uma concepção de ensino e de aprendizagem de matemática de repasse de conhecimentos, acreditamos que esse fato justifica a ênfase em tal concepção, em detrimento das demais.

Simons (2009) destaca que essa perspectiva de concepção de fração, focada na partição ou parte e todo, retoma a ideia advinda dos formalistas em que viam a Matemática como meros objetos primários do pensamento matemático, apenas representações de símbolos independentes de seus significados. Para o autor, essa crença filosófica relacionada à natureza da Matemática permeia o ensino tradicional da Matemática e tem como consequência a pouca atribuição de sentido para as crianças. Esse fato foi observado como dificultador do reconhecimento de outros significados do saber escolar fração, confirmando o que há muito tempo dizem pesquisadores como Kerslake (1986); Campos e Cols (1995); Nunes e Bryant (1997); Bertoni (2009), Powell (2019) dentre outros.

O terceiro é que tanto Maria quanto Joana apresentaram algumas fragilidades relacionadas ao domínio do saber escolar fração. Cronologicamente, vemos uma preocupação com essa questão em função de análises de pesquisas realizadas. Para Gimeno (1991), o apoio do conhecimento à prática é precário, convertendo-se numa das causas que levam muitos professores a agir de acordo com as suas convicções e com mecanismos adquiridos culturalmente através da socialização, mais do que com o suporte do saber especializado, de tipo pedagógico.

Cavalcanti (2004) percebeu que nas CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA dos professores do 5 º ano existem lacunas em diversas características e ideias fundamentais acerca de frações e acrescenta que muitas das dificuldades enfrentadas pelas crianças raciocinando com esse saber escolar, estendem-se aos professores.O que se tem observado a partir de análises de pesquisas é que os professores sabem pouco matemática, assim como lhes faltam, muitas vezes, conhecimentos específicos, além da necessária segurança para tratar dos assuntos que ensinam (SILVA E ALMOULOUD, 2005). Em geral, suas práticas ainda são muito influenciadas por suas concepções de ensino e de aprendizagem, construídas ao longo de seus percursos pessoais e profissionais, às vezes sem muito alinhamento com os estudos recentemente desenvolvidos e orientações curriculares.

Além disso, segundo Brito Menezes (2006), a inserção do professor no triângulo didático dar-se-á a partir do momento em que ele levar em consideração sua relação com o saber e com o tempo didático. Um aspecto importante destacado pela autora é que o primeiro elemento definirá: as situações de ensino, a postura do professor diante dos estudantes, seu papel, de que forma negociará o CONTRATO DIDÁTICO e até mesmo como se dará o processo de transposição didática.

O olhar trazido por Martins (2016, p.54), destaca que “as concepções de ensino são fundadas a partir das várias experiências vivenciadas ao longo da história de vida de cada professor de Matemática. Elas relacionam-se também à profissionalização do professor, marcando sua identidade e são relevantes no desenvolvimento da sua prática. Cronologicamente, vemos uma preocupação com essa questão em função de análises de pesquisas realizadas e comprovamos que essa questão ainda é um desafio a ser enfrentado.

Joana algumas vezes, em sua prática, incorreu em erros conceituais, demonstrando fragilidades em sua relação com o conteúdo. Para ilustrar, temos o exemplo da pizza. Inicialmente ela sugeriu que fosse dividida por 2, depois diz que chegaram mais duas pessoas e ela dividiu por 4 e chegaram mais duas e ela dividiu por 6. Na verdade, aqui, ao dividir ficaram 8 pedaços e não 6, pois o que estava sendo dividido eram os pedaços anteriores e não pela quantidade de pessoas. Esse fato pode ser constatado por meio de evidências retratadas no recorte a seguir:

> *Professora Joana- Então eu tenho uma folha que foi dividida em 4 partes. Agora me digam uma coisa. Esses pedaços, observem que os números estão aumentando. Antes eu tinha 2, agora eu tenho 4, os pedaços, esses pedaços estão aumentando ou diminuindo? A1 - Aumentando. A2- Diminuindo. Professora Joana - Ele estava assim... agora tá assim (mostra os pedaços das folhas). Quanto maior será o número aqui, menor será o pedaço. Quanto maior for o número aqui, menor será o pedaço.*

Da mesma forma, podemos ilustrar com exemplos de recortes a seguir retirados da fala de Maria.

> *Professora Maria- Se for diferente o denominador, tenho que tirar o m.m.c, mas é complexo, vou dar isso a vocês não. É muito mais trabalho, mas aqui com denominador igual é facilzinho. Não copia esse outro exemplo, porque eu não vou dar isso não. Não vamos fazer com m.m.c e sim sem o m.m.c. Como? Repito o denominador e somo o numerador.*

O quarto aspecto se refere à utilização de elementos do cotidiano dos estudantes como uma forma de contextualização dos conceitos matemáticos. Em relação a fração temos as tradicionais divisões de chocolate, pizzas, etc. O que vimos no acompanhamento das aulas é que, algumas vezes, esses elementos foram utilizados esvaziados de sentido para os estudantes. Bertoni (2009) destaca que o foco principal é tornar clara para a criança a existência de situações significativas do contexto que demandam a introdução de novos números.

Desse modo é importante destacarmos que números têm que funcionar na vida, não só em figuras divididas, onde nem adquirem verdadeiramente esse significado. Na aula, o contexto pode ser puramente matemático, isto é, não é necessário que a questão apresentada seja referente a um fato cotidiano. O importante é que os procedimentos relacionados a ele sejam inseridos em uma rede de significados mais amplos em que o foco não seja o cálculo em si, mas as relações que são permitidas estabelecer entre os diversos conhecimentos que os estudantes já têm. Diante desse contexto, BNCC (2017) chama atenção ao fato de que é preciso que os cálculos sejam contextualizados, mas é importante entendermos o que é contextualizar. Por isso, reafirmamos mais uma vez, a necessidade de um conhecimento do conteúdo, pois acreditamos que essa reflexão se faz necessária.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos nossas considerações sobre os capítulos apresentados, assim como da tese delineada e as dificuldades encontradas, que levaram a uma reestruturação do caminho a ser percorrido. Em geral, daremos destaque aos principais resultados obtidos com o intuito de compreender a relação entre CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA e CONTRATO DIDÁTICO como fatores de influências na aprendizagem de frações, a partir das ideias trazidas pela literatura de referência, das entrevistas semiestruturadas com os professores e a observação de suas aulas, como elementos de construção de dados para análise da referida relação.

No que se refere aos instrumentos de coleta de dados, um aspecto que consideramos importante mencionar foi o redirecionamento dado à pesquisa por causa da pandemia do coronavírus. No nosso corpus, fizemos a entrevista com 10 professores que lecionavam nas escolas selecionadas, conforme critérios anteriormente expostos. Desses 10, ficamos com 3 cujas características das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA estavam alinhadas àquelas definidas por Câmara dos Santos (2005): baldista, socioconstrutivista e escadinha.

Até o término do ano de 2019, havíamos acompanhado as professoras que demonstraram características predominantes das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA baldista e socioconstrutivista, mas ficamos impossibilitados de acompanhar a que apresentou características predominantes da escadinha. Por conseguinte, houve apenas a realização da caracterização dessa concepção que, inicialmente, teria as características trazidas em função do discurso proferido, analisado em função da literatura de referência, mas não puderam ser verificadas a partir do acompanhamento das aulas sobre frações, situação não possível visto que as escolas foram fechadas. Diante desse contexto, consideramos ser importante a realização de novos estudos que não tenham essa limitação.

O primeiro resultado dado pelo nosso estudo foi a utilização das ideias de Charnay para atribuir tipos de CONTRATOS DIDÁTICOS específicos, considerando os elementos da relação didática e dos modelos de aprendizagens propostos pelo autor em função do conceito de CONTRATO DIDÁTICO, por não ter na literatura uma referência para esse fenômeno. Para tanto, analisamos teoricamente “concepções” de ensino e de aprendizagem sob diferentes olhares, com o intuito de identificarmos pontos convergentes entre elas, associando-as a um tipo de CONTRATO DIDÁTICO específico que pode ser estabelecido em sala de aula.

Atribuimos então: Concepção de ensino Baldista – CD Normativo; Escadinha – Incitativo; Socioconstrutivista – Aproximativo.

Com base na entrevista semiestruturada, fizemos a caracterização das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA das professoras analisadas. Joana apresentou, na teoria, características preponderantes da Socioconstrutivista; Ana, da escadinha e baldista e Maria, da baldista, apesar de acreditar ser socioconstrutivista também. Essa análise nos possibilitou atingir nosso primeiro objetivo, pois caracterizamos as CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA em função da literatura de referência, com ênfase em CÂMARA DOS SANTOS (2005).

Na observação das práticas, percebemos que Joana não conseguiu manter apenas características preponderantes da concepção de ensino socioconstrutivista e desenvolveu suas aulas em função da baldista. Da mesma forma, a professora Maria apresentou na teoria características preponderantes da baldista e acreditava também ser socioconstrutivista, mas apresentou, majoritariamente, elemento da baldista.

Diante do exposto, gostaríamos de destacar alguns pontos que consideramos importantes: o primeiro é que, em relação às professoras observadas, o discurso proferido foi um pouco diferente da prática, em especial o de Joana. Acreditamos que essa situação pode ser resultante de um Contrato Experimental. O segundo é que as concepções de ensino de Matemática subjacentes à prática docente estão muito arraigadas às próprias vivências e, em especial, às marcas de contratos anteriormente construídos, elas trazem elementos que são intrinsecamente constituídos nesse sujeito.

Destacamos aqui, particularmente, a desarticulação entre teoria e prática no que diz respeito às CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA. Entretanto, é importante destacar que embora as professoras tenham apresentado características predominanrtes da concepção baldista e do contrato normativo, entendemos que não é uma característica dominante delas no todo. Entendemos que o saber foi parte importante no processo de ensino, pois ele, por si só, é complexo, já traz em seu bojo obstáculos relativos à sua própria natureza. Existiram também outras características que podem ter influenciado na aprendizagem do conteúdo como por exemplo, as avaliações externas. Por tudo isso, há em uma medida uma relatividade na identificação dessa concepção e no CONTRATO DIDÁTICO estabelecido.

Ademais, é importante acrescentar que não consideramos nem Maria nem Joana por completo encaixadas numa ou em outra concepção. A problemática se mostra mais complexa, na medida em que demonstramos que cada uma desenvolveu suas aulas em função da concepção baldista e de um CONTRATO DIDÁTICO Normativo, em uma perspectiva de minimizar as possíveis lacunas no ensino, fazendo o que tinham condições de fazer, dentro das possibilidades concretas que possuíam.

Essa análise nos possibilitou atingir nosso segundo objetivo, e concluímos que nessas duas turmas especificamente, as concepções identificadas pelas professoras em seus discursos não se materializaram totalmente na prática. Algumas vezes, o discurso do professor pode revelar a concepção que ele gostaria de ter, o que considera ideal, mas não necessariamente a que o constitui.

Em relação ao segundo instrumento de coleta de dados, a observação da prática docente, foram percebidos alguns elementos importantes preconizados pela TSD, dentre eles podemos destacar que a organização do meio e das situações não promoveram grandes reflexões, problematizações, sendo ineficaz na promoção de desequilíbrios cognitivos. O meio envolveu apenas o cotidiano e aspectos utilitários, fazendo com que a noção de contexto ficasse empobrecida, podendo até conduzir ao enfraquecimento dos processos de ensino e de aprendizagem do conteúdo investigado. Outrossim, essa situação veio a reforçar o que defendemos na problemática inicial, por considerarmos que existem usos de frações fora da escola. Entretanto, eles não são suficientes para que os estudantes possam entender o conteúdo na escola. Eles podem dar o suporte, mas rompem com o funcionamento de frações na escola, sendo necessária uma prática que os ajude na aprendizagem desse conteúdo.

Em relação às situações de ensino, os exemplos utilizados foram bastante simples e limitantes, diferente do que vem sendo preconizado nos documentos curriculares PCN (BRASIL, 1997) e BNCC (BRASIL, 2017). Parece-nos que a escola ou a aula de Matemática têm o papel de provocar nos estudantes a tarefa de resolver “problemas” do cotidiano, geralmente o indivíduo nem precisa de escola ou do saber escolar para resolver tais problemas. Diferente disso, acreditamos que a proposta deve ser partir de situações cotidianas, com as quais os estudantes já convivem com maior familiaridade para favorecerem a construção de novos saberes e o desenvolvimento de competências que eles ainda não possuem.

Do contrário, acabamos por ecoar o discurso do senso comum que, por vezes, chega a ser preconceituoso, dadas as suas limitações. Para ilustrar, é como se um estudante de uma comunidade pobre tivesse uma escola limitada apenas ao seu contexto social, olhando apenas no “entre os muros da comunidade”. Em geral, as situações não estavam em consonância com as ideias de Brousseau (1997), no sentido de que os estudantes aprendem a partir de uma adaptação a um meio que deve ser fator de dificuldades, contradições e desequilíbrios.

Diante disso, percebemos que as situações didáticas propostas pela professora, fizeram com que os estudantes desenvolvessem uma relação “primária” com o conteúdo frações, ou seja, uma relação que nem é de todo nova, não se viu uma modificação da relação inicial deles com o conteúdo investigado. Para Câmara dos Santos (1997), essa relação vai se modificando à medida que eles se apropriam dos conteúdos trabalhados em sala de aula, e é mediada pelo professor. Além disso, em muitas atividades realizadas percebemos que o conhecimento de vida tão enfatizado, retratado nos questionamentos, nas respostas dadas pelos estudantes, não era considerado pelas professoras. Vimos algumas vezes, como no exemplo da divisão da pizza (mostrado por Joana) uma ruptura, professora e estudantes se encontravam em situações diferentes: Joana no maravilhoso mundo abstrato da Matemática, enquanto os estudantes no mundo real, vivenciado em seu cotidiano.

Nessa perspectiva, os estudantes não desenvolveram uma aprendizagem fundada em competências e habilidades necessárias para uma aplicação adequada dos conhecimentos, como preconizam os documentos oficiais, nesse nível de ensino. Mesmo o saber escolar fração ter sido apresentado em função de suas diferentes concepções, exceto razão, consideramos que houve um pseudosucesso em relação à sua aprendizagem, visto que o que ficou na cabeça dos estudantes foi seu entendimento enquanto divisão de dois números, um que se escreve abaixo do outro.

Explorar o CONTRATO DIDÁTICO do ponto de vista teórico e prático também se configurou, no nosso entendimento, como uma valiosa contribuição desse estudo. Diferentemente do que foi mencionado ao longo da construção dessa tese, as pesquisas sobre esse fenômeno culminaram por adquirir certo caráter instrumental: tomava-se por base a noção e identificavam- se as suas caraterísticas na sala de aula. Nós utilizamos uma atribuição para esse fenômeno, alinhado a uma concepção de ensino e de aprendizagem da Matemática e procuramos, na prática docente, analisá-los como fatores de influências no desempenho de frações.

Diante disso, percebemos diferentes elementos essenciais (divisão de responsabilidades, consciência do implícito, relação ao saber) e constitutivos (regras, expectativas, rupturas, negociação, efeitos) desse fenômeno que alinhados a uma concepção de ensino, foram considerados fatores de influências no desempenho do saber escolar fração. No que diz respeito aos elementos essenciais do CONTRATO DIDÁTICO, destacamos a relação ao saber investigado, pois as professoras demonstraram uma certa fragilidade conceitual em seu domínio. A ênfase dada ao ensino da concepção parte e todo pode ser justificada por essa fragilidade, de acordo com Câmara dos Santos (2005).

Já no tocante aos elementos constitutivos, destacamos que as professoras: estabeleceram regras que precisariam ser rompidas, para que verdadeiramente o aprendizado acontecesse; incorreram em efeitos, em especial, o pigmaleão que está no coração do CONTRATO DIDÁTICO, se relaciona ao efeito das expectativas do professor para com seus estudantes, ele precisa existir na relação didática, desde que haja uma vigilância contratual (didática) para que ele não venha a prejudicar os estudantes, como aconteceu, em especial, com a professora Joana, que demonstrava, de forma explícita, ter expectativas positivas com alguns estudantes e outros não e na divisão de responsabilidades, percebemos que Maria cumpriu seu papel de "ensinar" - transmitir o conteúdo e o estudante o de "aprender" - receber tudo da forma como foi ensinado.

Maria desenvolveu suas aulas em função da concepção de que ensinar se relaciona à apresentação do conteúdo, atividades de memorização, transmissão do conhecimento pronto e acabado. Diante disso, foi perceptível que eles entraram no jogo ao aceitarem que a professora cumprisse sua responsabilidade diante do CONTRATO DIDÁTICO, pois apresentava situações facilitadoras que os induziam a resultados desejados, ou, como acontecia na maioria das vezes, elas próprias respondiam no quadro.

Já Joana dividia em parte essa responsabilidade e oportunizava os estudantes participação ativa, em função de seus questionamentos e acompanhava a aprendizagem deles e até em determinada situação possibilitou aos estudantes momentos de abstração, mostrando que a extrapolação faz parte do processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Em geral, percebemos que as experiências pessoais e carreira docente, contribuíram para a construção de filtros e/ou concepções, onde as professoras desenvolveram seu modo de pensar e agir.

Essa análise nos possibilitou atingir nosso terceiro objetivo, pois identificamos o CONTRATO DIDÁTICO estabelecido em função de seus elementos essenciais e constitutivos e das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA que subjaziam as práticas docentes quando foi ensinado o conteúdo frações, nas turmas investigadas.Brousseau (2000) destaca que em função do CONTRATO DIDÁTICO é possível entender elementos importantes que estruturam a dinâmica da sala de aula que podem ora facilitar, ou também dificultar a aprendizagem. No nosso caso, percebemos que ele dificultou o processo e que, relacionados às CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA subjacentes às práticas docentes das professoras, foram fatores de influências na aprendizagem de fração essenciais.

Assim, pode-se concluir, com fundamento nos teóricos estudados e aplicados na observação de aulas de matemática no 5 ano do EF, com o saber escolar fração, que nem sempre a transposição didática reflete o pensamento explicitado do professor; pelo contrário, as relações dentro de uma situação didática tendem a influenciar de tal maneira as concepções teóricas de quem ensina, que imprimem uma ordem e um comportamento distantes do pensado e, muitas vezes, externado. O papel do professor no processo interativo em sala de aula é essencial e, para desempenhá-lo, ele há que ter a consciência de que, quase sempre, seu discurso em sala de aula ajuda na manutenção das dificuldades geradas pelo CD implícito em sua visão tradicional, no que concerne ao ensino e à aprendizagem do saber escolar fração.

Para além dessa relação, percebemos outros fatores que influenciaram na aprendizagem do conteúdo investigado. O primeiro foi a natureza epistemológica do saber escolar fração; o segundo, a ênfase dada ao ensino da concepção parte e todo, em detrimento das demais; o terceiro foi a utilização de elementos do contexto esvaziados de sentidos; o quarto relaciona-se à fragilidade conceitual por parte das professoras e o quinto diz respeito a algumas condições não modificáveis de ensino, às quais as professoras precisaram se submeter.

Essa análise nos possibilitou atingir nosso quarto objetivo, pois nos possibilitou reconhecer os possíveis fatores que podem estar dificultando a aprendizagem do saber escolar fração, para além das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA e contratos didáticos nas turmas investigadas. Essa análise nos fez atingir nosso quarto objetivo, pois nos possibilitou reconhecer os possíveis fatores que podem estar dificultando a aprendizagem do saber escolar fração, para além das CONCEPÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA e CONTRATOS DIDÁTICOS nas turmas investigadas.

A partir das ideias expostas, consideramos ter alcançado os objetivos propostos pelo estudo e validado nossa hipótese: o estudo do CONTRATO DIDÁTICO como elemento teórico nos ajudou a entender melhor as dificuldades dos estudantes dos anos iniciais do EF para lidar adequadamente com fração. Acreditamos que ele está relacionado às características predominantes das concepções de ensino e foram considerados fatores de influências no desempenho desse saber escolar, nas turmas investigadas.

Em vista disso, Brousseau (2000) destaca que o CONTRATO DIDÁTICO pode ser visto como um construto teórico utilizado como referência analítica para abordagem do processo de ensino e de aprendizagem. De maneira geral, em função desse fenômeno, é possível entender elementos importantes que estruturam a dinâmica da sala de aula que pode ora facilitar, ou também dificultar a aprendizagem.

Ademais, esta tese nos atentou ao fato de que os construtos teóricos complementares - CONTRATO DIDÁTICO e concepções de ensino de matemática nos permitiram ver coisas diferentes ainda não investigadas e a possibilidade de diálogos entre eles. De maneira geral, em função do CD, foi possível entender elementos importantes que estruturam a dinâmica da sala de aula que pode ora facilitar, ou também dificultar a aprendizagem. Dessa forma pode se desdobrar por outras veredas investigativas, como:

- Investigar em que medida o CONTRATO DIDÁTICO se relaciona (ou sofre influência) do Contrato Institucional;
- Mesmo as duas professoras tendo demonstrado características da concepção de ensino e de aprendizagem baldista, apresentaram algumas características diferentes, tanto no seu discurso, quanto em sua prática docente. Essa questão nos remete a outra possibilidade de estudo: investigar essas diferenças e suas relações com possíveis diferenças de CD;
- Propor uma tipologia de CD em função de epistemologias internas, visto que nosso trabalho e outros que encontramos na literatura de referência utilizaram-se de epistemologias externas ao CD.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, G. S; CÂMARA DOS SANTOS, M.; ORTIGÃO, M. I.R. Construção do currículo de matemática: como os professores dos anos iniciais compreendem o que deve ser ensinado? Revista BOLEMA, Rio Claro/SP, v. 28, n. 49, p. 638-661, 2014.

ALMEIDA, F.E. L. O CONTRATO DIDÁTICO e as organizações matemáticas e didáticas: analisando suas relações no ensino de equação do 1 grau a uma incógnita. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e matemática), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

ANDRADE, D.; MOGNON, A.; NEVES, K.C.R. Ruptura no contrato didático na disciplina matemática em um município paranaense. Anais[...].São Paulo: XI ENEM, 2013.

Andrews, P. & Hatch, G. A comparison of Hungarian and English teachers´ conceptions of mathematics and its teaching. Educational Studies in Mathematics, 2000.

AMOULOUD, S.A. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ARAÚJO, A.L. Rompendo o contrato didático: utilização de estratégias metacognitivas na resolução de problemas de álgebra. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2009.

ARAÚJO, L.F.; CÂMARADOS SANTOS, M. E ACIOLY RÉGNIER, N.M. Metacognição ou automatismo: o que acontece quando o contrato didático é rompido? Confluências entre a didática e a psicologia na resolução de problemas algébricos. In: Anna Paula Brito Lima, Iranete Maria da Silva Lima, Lúcia de Fátima Araújo e Vladimir Lira de Andrade (orgs); Pesquisas em fenômenos didáticos: alguns cenários. Coleção Fenômenos Didáticos na classe de matemática. Recife: Editora da UFRPE, 2010.

ARTIGUE, M. Épistémologie et didactique. In: Recherche em didactique des mathématiques. Revue La Pensée Sauvage, Grenoble, v. 10, n.2.3. p. 241-286, 1990.

Atallah, F., Bryant, S. & Dada, R. Learner and teacher conceptions and dispositions of mathematics from a middle eastern perspective. Research in Higher Education Journal - Mathematics Conceptions and Dispositions, 2000. Disponível em: https://www.aabri.com/manuscripts/10461.pdf . Acesso em: 02 jan 2020.

BALACHEFF, N. Preuve et démonstration em Mathématiquesaucollège. Recherche em Didactique des Mathématiques, vol. 3, n. 3, 1982.

BARDIN, L. Análise de conteúdo. Tradução: Luís Anterro Reto e Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2011.

BARROS, J. P. P. Constituição de "Sentidos" e "Subjetividades": aproximações entre Vygostky e Bakhtin. [In] ECOS – Estudos Contemporâneos da Subjetividade, v.1, n. 2, 2012.

BARUK, S. A l’âge du Captaine. Paris, Eds Seul, 1975.

BECKER, F. Educação e construção do conhecimento. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

BECKER, F. Epistemologia do professor de matemática. Petropólia, RJ: Vozes, 2012.

BECKER, F. Modelos pedagógicos e modelos epistemológicos. Educação e Realidade, Porto Alegre, v. 19, n. 1, jan/jun, 1994.

BELTRÃO, R. C.; SOUZA, C. M. P; SILVA, C. P. S. CONTRATO DIDÁTICO e suas Influências na Sala de Aula. Revista Educação Matemática e Pesquisa, v. 12, n. 2, 2010. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2812 . Acesso em: 20 jan 2021.

BEHR, M., LESH, R., POST, T. R., & SILVER, E. A. "Rational number concepts". In: R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematical concepts and processes. New York: Ed. Academic Press, 1983.

BERTONI, N. E. Um novo paradigma no ensino e aprendizagem das frações. Palestra. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

BERTONI, N. E. Pedagogia: Educação e Linguagem matemática IV, frações e número fracionários. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BESSOT, A. Panorama del quadro teórico del la didactica matemática. In Francia. Anno XV - Serie IV - Vol.1, n°1. Italie: L'educazione matematica, 1994.

BEZERRA, F. J. B. Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações: uma abordagem criativa para a sala de aula. 2001, 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BORBA, V. A sala de aula como espaço psíquico: articulações entre a didática, a psicanálise e a relação ao saber na proposição de uma tipologia de CONTRATO DIDÁTICO. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) -Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife,2018.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria do Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Área de Matemática, 1997. BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. 2017.

BRASIL. SAEB – 2015. Matemática. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2015. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/>. Acesso em: 27 ago 2018.

BRITO MENEZES, A.P.A. CONTRATO DIDÁTICO e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental. Tese

(Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) -Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2006.

BRITO, A. P. A.; CÃMARA DOS SANTOS, M. C. CONTRATO DIDÁTICO: Interface entre o psicológico e o didático na análise do processo de ensino-aprendizagem da matemática e das ciências. Revista Debates em Ensino de Química, v. 3, n. 1, p.p. 6-27, 2017.www.ead.codai.ufrpe.br/index.php/REDEQUIM/article/download/1355/1117 . Acesso em: 02 ago 2019.

BROUSSEAU, G. Le contratDidactique: Le Milieu. RDM, v.9, n.3, pp.309-336, 1988.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches em didactique des mathématiques, Revue La Pensée Sauvage, v. 7/2, Grenoble, 1986.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, Jean (Org.). Didática das matemáticas, p. 35-113. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BROUSSEAU, G. La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. 1997

BROUSSEAU, G. La théorie des situations didactiques. Revue La PenséeSauvage. Brum, M. (1991). Les variations didactiques dansl'organizations des conditions d'apprentissage. Toulouse: Editions Universitaires de Sud, 1998.

BROUSSEAU, G. Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. Le cas de Gaël revisité (1999-2009). Hal: Archives-Ouvertes, France. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620/document . Acesso em: 20 abr 2020.

BROUSSEAU, G. O não dito é essencial. Revista Nova Escola. Edição 264, 2013.

BROUSSEAU, G. BROUSSEAU, N. WARFIELD, V. Teaching fractions through situations: a fundamental experimente. New York: Springer, 2014.

BRUM, W.P. ISOLANI, L.G. O contrato didático e a frequente ruptura das regras implícitas nas avaliações de matemática. Anais [...]. Curitiba: XI ENEM, 2013.

BRUN, J. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CÂMARA DOS SANTOS, M. MACIEL, A. Analisando o Rendimento de Alunos das Séries Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em Atividades Envolvendo Frações e Ideias Associadas, revista bolema online. 2007.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Algumas Concepções sobre o ensino aprendizagem de matemática. Educação Matemática em Revista, n. 12, p. 11-15, 2005.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. Revista do professor de matemática, n. 50. São Paulo: sociedade brasileira de matemática, 2002.

CAMPOS T. & MAGINA, S. Primary school teachers' concepts Of fractions and teaching strategies. ICME 10. Copenhague. 2005. Disponível em: file:///C:/Users/Downloads/545-1472-1-PB%20(1).pdf. Acesso: 07 mai 2020.

CAMPOS, T.M.M; MAGINA, S; NUNES, T. Educação Matemática em Pesquisa. v. 8, n. 1, pp. 125-136, São Paulo, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais da Matemática. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1951.

CARNEIRO, R.F & PASSOS, C.L.B Concepções de Matemática de Alunas-Professoras dos Anos Iniciais. Educação & Realidade, v. 39, n. 4, p.p. 1113-1133, Porto Alegre, 2014.

CARPENTER, T. P. et al. Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school. Mathematics Teacher, v. 73, n. 5, p. 329-338, 1980.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANNS, A. D. (1993a). Na vida, dez; na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática. In. CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANNS, A. D. (Orgs.). Na vida dez, na escola zero (7a ed., pp.23-43). São Paulo: Cortez, 2003.

CARRILLO,J. & CONTRERAS-GONZALES, L. Um modelo de categorias e indicadores para el análises de las concepciones del professor sobre la matemática y su ensenanza. Educacion Matemática.v.7, n.3, p. 79-92, 1995. Disponível em: https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/cef/article/view/9198/4638. Acesso em: 15 fev 2021.

CARVALHO, A. M. P. de.[et al.]. Ciências no ensino fundamental: o conhecimento físico. São Paulo: Scipione, 1989.

CARVALHO, J.B. Matemática Ensino Fundamental. In: Números e operações. Mandarino: M.C.F, 2010.

CAVALCANTI, J.D.B Concepções sobre fração de professores da 1ª fase do ensino fundamental do município de Tupanatinga. Monografia (Licenciatura em Matemática) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

CAVALCANTI, J.D.B; CÂMARA DOS SANTOS, M. Algumas considerações acerca da utilização do termo concepção como noção teórica nas pesquisas em educação Matemática. Anais V Congresso Internacional de Matemática, Canoas, 2010.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a Resolução de Problemas. In: Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Cecília Parra et al. Tradução: Juana Cuñaliorens. Porto Alegre: artes médicas, 2001.

CHEVALLARD, Y. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra [et. al.]; Porto Alegre: Arte médicas, 1996.

CHEVALLARD, Y. Approche na thropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In: Maury, S. & Caillot, M. (éds), Rapport au savoir et didactiques, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104.

CHEVALLARD, Y. La transposición didáctica: del saber sábio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

CHEVALLARD, Y. Aspectos problemáticos de la formación docente. XVI Jornadas del Seminário Interuniversitario de Investigacion em didáctica de las matemáticas, Huesca, 2001. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/. Acesso em: 22 ago 2020.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique. Grenoble: La pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Le concept de rapport au savoir – Rapport personel, rapport institutionnel, rapport officiel. In: Actes du séminaire de didactique des mathématiques. n. 108, 1988.

CHEVALLARD, Y. Conceitos fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma Abordagem Antropológica. In: Jean Brun. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. Actes de l'UE de la Rochelle, v. 12, n.2, p. 91-118, 1998.

CHEVALLARD, Y.; BOSH, M.&GASCÓN, J. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto alegre: Artes médicas, 2001.

CHEVALIER, M.C. & BRIAND, J. Les Enjeux Didactiques dansl' Enseignement des Mathématiques. Paris: Hatier, 1995.

CRUZ, M.S.S; SPINILLO, A.G. A resolução de adição de frações por crianças através do referencial de metade. Anais[...]. Recife: VII Encontro nacional de Educação Matemática, 2004.

CUNHA, M. H. Saberes profissionais de professores de matemática: dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. Revista Millenium online, 2000. Disponível em: www.ipv.pt . Acesso em: 31 mai 2020.

CURY, H. N. As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos. Tese (Doutorado em Ciências Humanas-Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

D'AMORE, Bruno. Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. Boletim de Educação Matemática – Bolema. v.20, n.28, p.p.179-205, 2007.

DANTE, L. R. Ápis: Matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

DAVYDOV, V. V.; TSVETKOVICH, Z. H. On the objective origino the concept of fractions. Focus on Learning Problems in Mathematics, v. 13, n. 1, p.p. 13-64, 1991.

DUSO, L.; CLEMENT, L.; PEREIRA, P.B.; ALVES FILHO, J.P. Modelização: uma possibilidade didática no ensino de biologia. Revista Ensaio, v. 02, pp. 29-44, Belo Horizonte, 2013

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FERNANDES, D. N; GARNICA, A V M. Concepções de Professores de Matemática: contribuições para um referencial teórico. Boletim GEPEM, n. 40, pp. 11-36, Rio de Janeiro, 2002.

FERNANDES, D. N. Concepções de professores de Matemática: uma contra- doutrina para nortear a prática. Dissertação (Mestrado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos–Científicos) -Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

FERREIRA, A. C. O desafio de ensinar – aprender matemática no noturno: um estudo das crenças dos estudantes de uma escola pública de Belo Horizonte. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação) – Unicamp, Campinas, 1988.

FILLOUX, J. Du Contrat Pedagogique. Paris: Dunod, 1974.

FIORENTINI, D. et al. Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. Educação em Revista - Dossiê Educação Matemática, Belo Horizonte, UFMG 2003.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Coleção formação de professores. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FRANCO, C.; STAJN, P.; ORTIGÃO, M. I.R. Mathematics teachers, reform and equality: results from the Brazilian national assessment. Journal for research in mathematics educatiion, Reston, v. 38, n.4, p. 393-419, 2007.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIMENO, J. Consciência e ação sobre a prática como libertação profissional dos professores. In: A Nóvoa. Profissão professor. Lisboa: Publicações D. Quixote,1991.

GUIMARÃES, H. Ensinar Matemática: Concepções e práticas. Dissertação (Mestrado). Universidade de Lisboa. Lisboa, APM, 1988.

GUIMARÃES, H. Concepções, crenças e conhecimento: afinidades e distinções essenciais. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. 2010. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/handle/10451/11019. Acesso em: 03 jan 2021.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Disponível em: http://www.ugr.es/local/jgodino. Acesso em: 12 dez 2019.

GONTIJO, C.H.; SILVA, E.B.; CARVALHO,R.P.F. A criatividade e as situações didáticas no ensino e aprendizagem da matemática. Linhas Críticas, v.18.n.35, Brasília, p.29-46,2012.

GRINGS, E. T. de O.; CABALLERO, C.; MOREIRA, M. A. Possíveis indicadores de invariantes operatórios apresentados por estudantes em conceitos da termodinâmica. Rev. Bras. Ensino Fís. [online], vol.28, n.4, p.463-471, c2006.

HENRY, M. Didactiquedes Mathématiques: sensibilizations à ladidctique em vue de la formation initiale dês ensignants de mathématiques. Laboratoire de Mathématiques- IREM, Bensaçon, 1991.

JONNAERT, P; BORGHT, C. V. Criar Condições para Aprender: o socioconstrutivismo na formação de professores. Tradução: Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002.

JONNAERT, P. À propos du Contrat Didactique! In: Recherche de cahiersen. Éducation.
Vol. 1, nº 2, p. 195-234. Éditionsdu CRP, Sherbrooke,1994.

KERSLAKE, D. Fractions: Children’s Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics. Project. Windsor: NFER-Nelson, 1986.

LIMA, A.P.A.B.; LIMA, I.M.S.; ARAÚJO, L.; ANDRADE, L.V.X. Pesquisas em
Fenômenos didáticos: alguns cenários. In ARAÚJO, L.F.; SANTOS, M.C.; 2012.

LIMA, I.M.S. Conhecimentos e concepções de professores de matemática: análise de sequências didáticas. Educação matemática pesquisa, v.13n.02, 2011.

LIMA, I.M.S.; LIMA M.; FRANCO, CUNHA, K. S. Reflexões sobre Formação de Professores e Processos de Ensino e Aprendizagem. In BRITO MENEZES, A.P.A.; CAVALCANTI, J.D.B Concepções de ensino e de aprendizagem, modelos pedagógicos e a ideia de configuração epistemológica, Recife, Ed. Universitária, 2013.

LOCKE, J. Essai sur l'entendement humain. Livres I et II. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2001.

LOVIS, K.A; FRANCO, V. S. As concepções e os conhecimentos de geometria euclidiana de um grupo de professores de matemática da educação básica. Em teia: Revista de educação Matemática ibero-americana, UFPE, 2015.

MACHADO, S. D. A. Educação matemática: uma (nova) introdução. São Paulo: Educ, 2008.

MACIEL, A; CÂMARA, M. Analisando o Rendimento de Alunos das Séries Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em Atividades Envolvendo Frações e Ideias Associadas. Boletim de Educação Matemática, v. 20, n. 28, p.p. 163-177, 2007.

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221871009. Acesso em: 21 fev 2021.

MAGINA, S. Repensando adição, subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais. MAGINA, S; CAMPOS, T. M.; GITIRANA, (orgs). 1 ed. São Paulo: PROEM, 2001.

MAYA, D. Um Levantamento de Teses e Dissertações sobre o Ensino e Aprendizagem de Números Racionais nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (1997-2017). EBRAPEM, UNICSUL - Campus Anália Franco, São Paulo – SP, 2019.

MARGOLINAS, C. De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1993.

MARGOLINAS, C. Le milieu et lecontrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. Université d'été de La Rochelle, 1998, La Rochelle, France.

MARTINS, R. Concepções sobre a matemática e seu ensino na perspectiva de professores que ensinam matemática em licenciaturas de Alagoas. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências e Matemática) -Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

MATOS, D.A.S.; JARDILINO, J.R.L. Os conceitos de concepção, percepção, representação e crença no campo educacional: similaridades, diferenças e implicações para a pesquisa.

Educação & formação. Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará, Ceará, 2016.

MEC/INPE/DAEB. Matrizes Curriculares de referência para o SAEB. Brasília: INEP, 2008.

MEIER, W. M. B. Obstáculos didáticos na educação matemática: o conceito de

números racionais no 6º ano do ensino fundamental. Cascavel. Dissertação (Mestrado em educação) -Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Paraná 2012.

MORAIS, M. D. M. Papel da Compreensão Leitora na resolução de Problemas Matemáticos. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem) -Universidade Católica de Pernambuco. Recife, 2010.

MORAIS, M.D E LANDIM, E. Análise praxeológica da abordagem de frações em um livro didático do 4º ano do Ensino Fundamental. Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo v. 21. 2019.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.17, n.3, p. 597-616, 2015.

MORETTI, V.D. E SOUZA, N.M.M. Educação Matemática nos anos iniciais do ensino Fundamental: princípios pedagógicos. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2015.

MINAYO, M. O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde. 11. ed. São Paulo: Hucitec, 2008.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglion. A Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

NCTM Normas profissionais para o ensino da Matemática. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original publicado em 1991). Nogueira, (1994).

NÓBREGA, G.M.M; FALCÃO, J.T.R. Abordagem das Dificuldades de Ensino e aprendizagem do Domínio da Estatística na Graduação em Psicologia: um olhar através do CONTRATO DIDÁTICO. Bolema, Rio Claro SP, v.33, n.65, p. 1155-1174, dez 2019.

NUNES, T.; BRYANT, P. Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

ONUCHIC, L.D.L.R; ALLEVATO, N.S.G; NOGUTI, F. C. H; JUSTULIN, A. M. Resolução de Problemas: teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

OLIVEIRA, N; ARAMAN, E.M.O Dificuldades na aprendizagem dos Números racionais manifestadas em dois níveis de escolaridade. RPEM, Campo Mourão, Pr, v.6, n.10, p.175- 203, jan.-jun. 2017.

OLIVEIRA, G.P E MASTROIANNI, M.T.M. R. Resolução de problemas matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental: uma investigação com professores polivalentes. Revista Ensaio, Belo Horizonte, v.17, n. 2, p. 455-482, 2015.

ORTIGÃO, M. I. R. Avaliação e Políticas Públicas: possibilidades e desafios para a Educação Matemática. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, n. 29, p. 71-98, 2008.

PAIS, L.M. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PAVLOV, I. P., Conditioned reflexes: An investigation of the physiological activity of the cerebral cortex (G. V. Anrep, Ed.). London: Oxford, 1927.

PEDROSA, V.N.M; FONTENELLE, F.C.F; MENEZES, D.B.; PINHEIRO, A. C. M.

Sequência Fedathi e análise de erros contribuindo para o ensino de frações atrelado ao ogo fraction matcher. Anais - 12 Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 2016.
PERNAMBUCO. Base Nacional Curricular Comum. Secretaria de Educação, Recife: SE, 2017.
PERNAMBUCO. Currículo de Pernambuco. Secretaria de Educação, Recife: SE, 2018.
PERNAMBUCO. Matrizes Curriculares de Referência para o Estado de Pernambuco. Recife: SE, 2015
PERNAMBUCO. Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Matemática. Secretária de Educação, Recife: SE, 2012.
PERRIN-GLORIAN, M. J. Analyse d'um problème de fonctions em termes de milieu: structuration du milieu pour le maître et pourl'élève. Actes de l'université d'été de la Rochelle, Clermont-Ferrand, IREM de Clermont-Ferrand, 1998.
PIAGET, J., La psychogenèse des connaissances et as signification épistémologique. Paris: Point Seuil, 1979.
PONTE, J.P. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Eds.). Educação e Matemática: Temas de investigação (pp. 186-239). Lisboa: IIE e Secção de Educação e Matemática da SPCE. (1992).
PONTE, J. Mathematics Teachers´ professional knowledge. Proceedings of PME XVIII (pp. I/195-210), Lisboa, Portugal. 1994a).
PONTE, J. O desenvolvimento profissional do professor de Matemática. Educação e Matemática, v. 31, 9-13. (1994b).
PONTE J P.& QUARESMA, M. Representações e raciocínio matemático dos alunos na resolução de tarefas envolvendo números racionais numa abordagem exploratória. Universidade de Lisboa. Uni-pluri/universidad, v. 14, n. 1, 2014.
POWELL, A. B. How does a fraction get its name? Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática, v. 3 n. 3. 2019.
POWELL, A. B. Melhorando a Epistemologia de Números Fracionários: uma Ontologia baseada na História e Neurociência. Revista de matemática, ensino e cultura. ano 13 - n. 29. 2018.
POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. P. P. A solução de problemas: aprender pra resolver, resolver para aprender. In POZO, J. I. (org.). A solução de problemas: aprender pra resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RICARDO, E; SLONGO, I; PIETROCOLA, M. A perturbação do CONTRATO DIDÁTICO e o gerenciamento dos paradoxos. Investigações em Ensino de Ciências, v.8, n. 2, p. 153-163, São Paulo, 2003.

RIQUELME, P.M.D. Estudio de las concepciones y creencias de los profesores de educación primaria chilenos sobre la competencia matemática. Universidad de Granada, Espanha, 2005.

ROCHA, V.A.S. BARROS, R. A Estado da arte das pesquisas acadêmicas brasileiras sobre concepções de Professores que ensinam matemática (2001 - 2012). Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.21, n.1, p. 347-360, 2016.

ROQUE, T. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSEIRA, N. A. F. Educação Matemática e Valores: das Concepções dos Professores à Construção da Autonomia. Brasília: Liber livro, 2010.

ROSEIRA, N. A. F. Educação Matemática e Valores: das Concepções dos Professores à Construção da Autonomia. Dissertação (Mestrado em educação) Universidade Estadual da Bahia, Salvador, 2004.

SANTOS FILHO, J.F.S. Investigando como professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

SANTOS, R. V. dos. Abordagens do Processo de Ensino e Aprendizagem. JAN/FEV/MAI. Integração. Ano XI, nº 40. p. 19-31, 2005.

SARRAZY, B. Le contrat didactique. Revue française de pédagogie. n. 112, p. 85-118, 1995.

SCHLIEMANN, A. D. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In A. D. SCHLIEMANN, CARRAHER, D. W. CARRAHER e T. N. CARRAHER, (Orgs.). Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez, 2003.SMOLE, K. C. S e DINIZ, M. I. Ler escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. Le contrat didactique: um cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les eleves em mathématique. Europian Journal of Psychological Education, 1(2), 1986, 139-153.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. Le contrat didactique dans une approche psychosociale des situations d'ensigneiment. Interactions Didactiques, 1988. p. 63-75.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. Le contrat didactique: une construction theorique et une conaissance pratique. Interactions Didactiques. 9, 1988b, 68-80.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. & GROSSEN, M. Negotiating the Meaning os questions in didactic and experimental contracts. Europian Journal of Psychology of Education. v. 3 nº 4, p. 451-471, 1993.

SCHMITTAU, J. Cultural-historicaltheoryandmathematicseducation. In: KOZULIN, A.; GINDIS, B. et al. (ed.). Vygotsky's educational theory in cultural context. Cambridge, UK: Cambridge, 2003. p. 225-245.

SIMONS, P. Formalism. In: IRVINE, A. D. (ed.). Philosophy of mathematics. Burlington, MA: North Holland, 2009. p. 291-310.

SILVA, M.J.F. Sobre a introdução de número fracionário. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

SILVA, M. R. G. da. Concepções didático-pedagógicas do professor pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1993.

SILVA, K. G. da. (Re) Constituição de Fontes e uma Análise Inicial Visando ao Estudo de Concepções sobre "Geometria" num momento de Reformulação Curricular.
Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SILVA, B. CONTRATO DIDÁTICO. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.) Educação Matemática – Uma (nova) introdução. São Paulo. EDUC. p. 49-75.2008.

SILVA, J.P. SANTOS, J.C. O tempo na sala de aula e as concepções de ensino-aprendizagem de matemática: relações em uma aula de matemática. CONEDU, 2016.

SILVA, M. J. F. Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, T. R. F. da. Investigando os efeitos do contrato didático em uma sala de aula de Matemática: O caso da circunferência e do círculo. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

SOUTO, B. Ensinar a ensinar e aprender a ensinar: representações de professores e alunos em relação à formação inicial dos cursos de licenciatura na Universidade Federal do Amapá. Dissertação (Mestrado); Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2007.

SKINNER, B. F., The behavior organisms. New York: Apple ton Century Crofts, 1938.

THOMPSON, A.G. Teachers´ conceptions of Mathematics and mathematical teaching:
Three case studies. Tese (Doutoramento)- Universidade da Georgia, 1992.

THOMPSON, A.G. A relação entre concepções de matemática e concepções de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. Zetetiké, v.5, n 8, p. 11- 44 , 1997.

NUNES, T. N.; BRYANT, P. Crianças Fazendo Matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

VAN DE WALLE, J. A. Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUM, J. (Org.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, p. 155-191. 1996.

VIEIRA, K.R.C.F; NAPPI, J.W.R. E HANSEN, M.F. O contrato didático no ensino de ciências nas séries iniciais: análise de seus elementos e regras. Anais [...]. . Porto alegre: IV Encontro Ibero-americano de Coletivos Escolares e Redes de Professores que Fazem Investigação na Sua Escola, 2012.

VYGOTSKY, L.S. A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. COLE (et al); tradução NETO, J.C; BARRETO, M.E. AFECHE,
S.C. 7. ed. São Paulo: Martins fontes, 2007.

YAMAMOTO, E. M. Estudo de concepções e crenças de licenciandos sobre o ensino de Matemática. Tese de doutorado (Educação - Psicologia da Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

ZABALA, A. A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre, RS: Artmed, 1998.

ZIMER, T.T. B. Aprendendo a ensinar matemática nas séries iniciais do ensino fundamental. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação, São Paulo, 2008.

APÊNDICE A – ENTREVISTA DA PROFESSORA MARIA

Entrevista semiestruturada – Professora Maria

P - Pesquisador.
PM - Professora Maria.

P - Quais os critérios que você usou para escolher o livro de matemática?

PM - Eu gosto do livro que tem bastante atividades, porque tem livro que só tem conteúdo, conteúdo, não tem atividade e nem suporte para o professor. Tem livro que não dá um planejamento, não dá nada, não dá orientação para o professor trabalhar. Esse livro que escolhemos tinha um suporte para o professor e um livro extra de projetos.

P - Além desse livro, tem algum outro que você gosta, trabalha para fazer o planejamento?

PM - Sim. Depois te digo os nomes.

P - Em relação às atividades, qual o tipo que você gosta?

PM - Gosto das atividades que tenham as operações fundamentais, eles têm muita dificuldade ainda. Pra mim fica difícil trabalhar outros conteúdos enquanto eles não dominarem as quatro operações. Eu acho que eles vêm com essa defasagem de outras turmas, não conseguem fazer uma subtração com reserva e até somas com fatores diferentes eles não conseguem, não sabem armar.

P - Além dessa questão das operações fundamentais, existe outro critério que vc adotou para escolha?

PM - Eu gosto muito de trabalhar problemas. Gosto de criar problemas mais facilzinhos para eles entenderem. Eu pego umas coisas bem práticas. Eu faço bem assim. Mamãe foi à feira e comprou 10 laranjas, 20 bananas e maçãs. Quantas frutas mamãe comprou? Aí já vai fazer uma operação de ...Só pra ele entender que alí ele vai somar. E também vai forçar ele ler. Eu gosto de fazer o problema bem facilzinho pra introduzir o problema e gosto de trabalhar com gráficos pra eles interpretarem porque geralmente, nas provas externas, trabalham muito com gráfico e eu também estou procurando trabalhar com as provas, questão da prova. Porque as vezes no livro não tem o que cai na prova.

P - Então você gostaria que o livro contemplasse questões parecidas com as das provas?

PM - Sim. Eu tô fazendo o seguinte, eu pesquiso as questões e imprimo em casa e trago as questões pra resolver em sala de aula. Noto que quando eles vão fazer essa prova, ficam voando porque o programa da gente é totalmente diferente, os livros não contemplam.

P - Então você acha que eles têm dificuldades nessas provas. E um dos fatores que dificulta é o fato de não aparecerem essas questões.

PM - Sim. Deveria ter um material de apoio da secretaria pra gente trabalhar.

P - Você usa o livro didático deles?

PM - Não. O livro deles tem um nível muito alto e os alunos têm um nível de aprendizagem muito abaixo do que realmente deveria ter.

P - Vocês fizeram alguma observação em relação à BNCC na escolha desse livro?

PM - Não.

P - A escola fez algum trabalho com a BNCC com vocês?

PM - Não, paramos apenas um dia pra ler, mas nada muito profundo.

P - Você gosta de trabalhar com RP?

PM - Gosto.

P - E os alunos?

PM - Alguns gostam, principalmente os que leem. Estou com uma turma de 27 alunos, mas apenas 13 leem. Dou o problema, mas tenho que fazer o problema bem facilzinho. Quando dou os problemas das avaliações externas, só os que atingem o nível são os que dominam a leitura.

P - Quando você vai dar um conteúdo novo, como seria a construção desse conceito com seus alunos? Como você trabalharia em uma perspectiva de resolução de problema?

PM - Eu geralmente trago alguma coisa de casa, o suporte. Eu gosto de imprimir em casa. Faça uma pesquisa do conteúdo, um resumo e pra conversar com eles, as vezes imprimo uma figura. Mostro pra eles verem e depois vou repassar e fazer atividades relacionadas ao conteúdo.

P - Por exemplo, se você fosse ensinar frações, como seria esse passo a passo desde o início até a verificação de que ele aprendeu?

PM - Eu geralmente faço uma explanação no quadro e pergunto a eles se sabem o que é fração. Aí vou, faço um desenho no quadro. Coloco um disco, coloco ele inteiro. Aqui é um inteiro. Então coloco outro disco, se dividir na metade, eu já pinto, aqui é um meio. Como vou representar um meio em número fracionário? Como vou representar um terço? Aí eu vou representar toda forma de desenho. Depois vou falar a nomenclatura do que é $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$... mostrar que o número fracionário é menor do que o inteiro.

P - Sempre teremos o número fracionário menor que o inteiro?

PM - Sim, dependendo de como ele seja, né? Por exemplo $\frac{1}{6}$..., não é menor que 1?

P - E a fração 3/2, não é maior que 1?

PM - Eita, é mesmo, pode ser maior que 1 também! Dependendo da fração, se eu botar uma fração que numerador seja maior, ela pode dar mais do que 1, mas aí já vai ser mais profundo. Mas de início eu faço assim, fazendo os desenhos. *Depois peço para eles copiarem, faço atividades, muitas atividades relacionadas ao conteúdo.*

P - Essas atividades seguem o mesmo modelo?

PM - Não, por isso que eu gosto de pesquisar materiais diferentes na internet.

P - Se você colocar uma atividade diferente daquelas que fez, acha que o estudante terá dificuldade em responder?

PM - Tem. A gente tem que parar e explicar tudinho, e eu digo: tem que fazer. Eles querem tudo prontinho, que a gente faça tudo, já querem a resposta. Eu digo, não, tentem fazer. Eles tentam. Aí depois eu vejo: os que tentaram fizeram, então eu ajudo os que não tentaram. E respondo no quadro. Respondo todas as atividades no quadro.

P - Como é essa correção?

PM - Eles vêm a mim E vou explicando, faça assim. Outro dia, trabalho o mesmo conteúdo e sempre atividades.

P - Como é sua avaliação?

PM - Pra mim, gosto de avaliar pela correção dos cadernos, gosto de avaliar pelo que ele aprende no dia, como corrijo individualmente os cadernos, sei mais ou menos o nível de cada aluno.

P - Tem outro instrumento?

PM - A prova, quando a gente faz a prova da unidade, mas a prova é só para dizer que fez mesmo. Porque já sei mais ou menos o nível que está cada um pelo caderno. E quando faz, fica perguntando, copia, fica perguntando, faço uma discussão, nem copia nem liga. Quando prestam atenção, quando faço uma discussão o que é... Tem que olhar o quadro, prestem atenção no que estou falando... na prova, não vão nem saber o que estou falando.

P - Com quem não está aprendendo, o que você faz?

PM - Fica difícil, a turma é numerosa, eu passo para outro conteúdo, seria bom um outro professor, para dar um suporte. Tem alunos que têm defasagem, são quinto ano mas com nível de primeiro.

P - Trabalha em grupo ou individualmente?

PM - Individual, mas como eles se sentam próximos, ficam dando suporte, uns ajudam os outros e eu deixo.

P - Existem troca entre você e seus alunos?

PM - Tem. Eu paro, faço problema, mostro. Tem uns que já dão aquela resposta. E tem alunos que eu nem pensava que ele sabia e a gente fica admirada. Tem aluno que a gente pensa que sabe e ele fica voando...

P - Quando encontram caminhos diferentes para um problema. Eles discutem, confrontam essas ideias?

PM - Não. Eles falam, mas eu coloco no quadro a resposta como deveria fazer, montar o problema, o que for... eles copiam. Tem alunos que conseguem fazer logo, me mostram, eu corrijo. E outros, mando refazer. Refaz.

P - Eles gostam de resolver problema?

PM - Sim.

P - Quando um aluno resolve um problema. Você olha o resultado final ou o processo?

PM - O processo, eu olho e digo pra ele corrigir, porque sei que ele sabe. Considero uma parte do problema, muitas vezes é falta de atenção.

P - Usas muito a RPM?

PM - Não muito, porque estão com problema de leitura. Divido a turma. Coloco problemas para os que sabem ler. Problemas de nível alto.

P - O que seria um problema de nível alto?

PM - Aquele que eles usam um raciocínio lógico pra resolver.

P - Poderias dar um exemplo?

PM - Um problema com gráficos. Em função dos gráficos, eles vão analisar várias questões. Tem que ler e interpretar as questões.

P - Constrói problemas ou só utiliza os do LD?

PM - Procuro construir. A maioria dos problemas do livro são muito complexos e eles não têm habilidade em resolver. Parto do problema mais fácil e depois vou para o difícil.

P - Você constrói a partir do que acha que eles vão conseguir fazer?

PM - Sim. Os problemas das avaliações externas, eu faço uma adaptação para eles entenderem como ele é.

P - O que você prioriza nessa adaptação?

PM - Problemas com as operações fundamentais. Pois eles já têm a obrigação de montar a operação... Eu gosto de dar a conta seca pra quando eles forem para os problemas, terem noção do que fazer.

P - Você dá dicas para resolver seus alunos?

P - Não, separo por blocos. Só adição, subtração. Às vezes trabalho problemas do tipo: Maria comprou 3 dúzias de ovos. Quantos ovos ela comprou? Eles perguntam o que é dúzia? Como vou armar? Porque ali só tem um número.

P - Eles têm dificuldade com esse tipo de problema?

PM - Têm.

P - Por que você acha que eles têm dificuldade com esse tipo de problema?

PM - Porque não sabem o que é dúzia, dezena. É mais fácil para eles problemas que já têm os números.

P - E o teu planejamento, como é feito?

PM - Eu uso muito o LD, mas coloco também atividades extras que vejo fora, da internet. Atividades prontas, trago. Eles estão aprendendo. Fazem e estão entendendo. Abrindo horizontes com coisas diferentes. Já estão acostumados, uns ajudam outros.

P - No final eles conseguem aprender o que você ensina?

PM - Uma grande parte, porque tem os fatores que te falei que dificultam.

P - Que tipo de professora você se considera?

PM - Sou um pouco tradicional e construtivista.

P - Em quais momentos você se considera tradicional?

PM - Quando trabalho as contas secas. E construtivista quando trago os problemas do SAEB, por exemplo, que são difíceis. Quando crio problemas com a realidade deles. Não faço só uma parte. A escola pública é difícil, não temos materiais, jogos, laboratórios.

P - Você acha que eles gostam mais quando você é tradicional ou construtivista?

PM - Tradicional, quando trabalho com as contas secas. Como muitos não leem, a conta seca é o que eles conseguem. Eles acham mais fácil, não têm obrigação de interpretar. Já os que leem gostam mais dos problemas. O que dificulta a matemática é a falta da leitura, interpretação de texto, eles não entendem, não decodificam. ENTÃO eu vou e explicou para eles. Os que não leem, quando eu leio, eles entendem, mas se for pra eles fazerem sozinhos, eles não fazem,

P - E os que leem?

PM - Alguns que compreendem, fazem. Acho que muitos alunos estão acostumados a pegar tudo pronto.

P - E quem acostuma?

PM - Até a gente, professor. Eles ficam esperando a resposta

P - Com você acontece isso?

PM - Acontece. Eu dou a resposta. Espero trazer o caderno, depois que alguns trouxeram e que não vai sair mais nada dali eu vou e dou a resposta. Corrijo no quadro.

P - Eles apagam a resposta deles?

PM - Sim, apagam

P - E você acha que assim eles aprendem?

PM - Aprendem. Eu sempre gostei do professor que corrige, porque às vezes a gente faz uma coisa e não sabe se está certo. Geralmente não temos um caderno de resposta, quando temos no LD[26] você entende o que foi.

P - Querias um caderno de resposta para o professor?

PM - Não, para o aluno.

P - Se ele tem o caderno de resposta. Vai se esforçar para responder?

---

[26] Livro Didático.

PM - Como existia no livro. Você não vai ter o problema todo solucionado, mas tem a resposta. Porque eles não têm essa noção. Em casa também não tem quem o ajude, não passo tarefa de casa porque eles não têm quem ajude.

P - Se o aluno faz diferente do seu, o que você faz?

PM - Chegando a mesma resposta, para mim tá ótimo. Por exemplo, no problema da dúzia ele pode somar 12 três vezes, pode multiplicar, representar as bolinhas, tá ótimo. Quero que ele compreenda.

P - Se você der um conceito para os alunos e pedir para que eles resolvam questões do livro. Eles conseguem?

PM - Alguns sim, porque sempre digo: façam tal e tal página. Alguns copiam e já vão respondendo, mas tem aqueles que eu acho que têm preguiça de pensar.

P - Então você vai e explica?

PM - Aí depois digo: vamos responder. Respondo explicando e pedindo atenção, pedindo que respondam como faz, vejam como é que faz.

P - Convida os estudantes para responder no quadro?

PM - Às vezes, porque fica uma briga danada. Gosto do quadro, mas há conflitos.

P - Mas nessa correção, você questiona os alunos?

PM - Não, vou fazendo e explicando.

APÊNCIDE B – ENTREVISTA DA PROFESSORA JOANA

Entrevista semiestruturada – Professora Joana

P - Pesquisador.
PJ - Professora Joana.

P – Quais os critérios que você usou para escolher o livro de matemática?

PJ -A questão de situações-problema focadas no contexto dos alunos, pois hoje já não se trabalha de forma isolada. Somente a parte que vai armar e resolver, não. Vamos resolver situações em que alunos vivenciem no dia a dia deles, com a família deles para que eles possam ter uma compreensão melhor dessas situações-problema e também focar na resolução. O ponto principal é um livro contextualizado que buscasse o máximo da realidade do aluno, na qual ele está inserido.

P - Como você definiria uma situação-problema?

PJ- É aquele tipo de questão que utiliza o contexto do aluno. A utilização do uber, por exemplo. O pai do aluno utiliza o uber e muitas vezes ele não entende que os conteúdos estão contidos naquela situação. Uma questão na qual descreva o dia do aluno e a partir dalí ele tira uma questão matemática pra resolver. Como é sua interação quando eles estão falando das estratégias de resolução encontradas?

P – Você usa problemas nas suas aulas?

PJ- Sempre, sempre. Não trabalho de forma isolada. Se você olhar no quadro, gráficos, tabelas, situações do dia a dia deles. Exemplo: Paulinho vai à lanchonete, tem lá os preços, a tabela, ele vai comprar determinados produtos. Quanto ele vai pagar? Quanto vai receber de troco? Pode partir pra área de frações. Se ele comprou um bolo, como ele vai dividir em 4 partes, a parte fracionária é aquela que ele vai dividir para os colegas.

P- Os alunos, como é o processo de resolução e como é a devolutiva para você?

PJ- Eu trabalho corrigindo individualmente e coletivamente também. Principalmente se eu criar um problema e colocar o nome de alguém da sala. Eles gostam, se sentem parte daquela questão. Se sentem entusiasmados para resolver as questões.

P- Essa correção coletiva, como é?

PJ- Eles interagem, mostrando como resolveram, porque às vezes existem maneiras diferentes de resolver. Cada um mostra a sua maneira e dizem: olha professor, eu resolvi de outra forma, mas eu pergunto: o resultado tá correto? Se tá correto, vamos observar.

P- Qual seu posicionamento quando eles encontram formas diferentes de resolver?

PJ- Alguns entendem que só há aquela forma de resolver e dizem: o meu é que tá certo porque eu resolvi dessa maneira. Não, então eu digo que dessa outra maneira também chega-se ao resultado. Além de aceitar a resolução do outro, começam também a utilizar essa nova forma de resolução.

P- Além desse livro, tem algum outro que você gosta, trabalha para fazer o planejamento?

PJ- Não, apenas as orientações curriculares. Município, mas trago outros materiais, cópias, bagagens de anos anteriores. Considero o livro bem legal, eles são consumíveis agora, um grande avanço. Gosto de trabalhar o concreto porque a gente percebe que há uma assimilação maior. A semana passada trabalhei medidas de comprimento. Trouxe trena, fita métrica, eles utilizaram a régua. Começaram a medir objetos que eles têm. Propus que a gente fizesse a medida da altura de cada um e colocamos em um cartaz, ele está incompleto porque nesse mesmo cartaz estou trabalhando unidade de medida de comprimento, tempo(idade) e massa (em que cada um vai trazer o seu peso) e no final do ano vamos fazer um comparativo... Quem cresceu, o quanto cresceu. Quem aumentou ou diminuiu de peso e a idade tb. Acho que faremos isso em outubro. É esse fazer, eles praticarem. Gosto também da parte lúdica, ano passado eu trabalhei formas geométricas espaciais e até criei um jogo da memória. Era pra eles encontrarem a figura, o nome. Quando o jogo se tornou muito simples, acrescentei mais peças, tinham agora que encontrar a figura, o nome e um objeto que tivesse o mesmo formato. Eles aprendiam brincando que é muito legal e eles pediam. Matemática era considerado bicho papão e você vê o aluno pedindo pra fazer uma atividade matemática, que pra ele é um jogo, mas pra você, é a concretização de uma aprendizagem. Eu busco muito trabalhar nessa perspectiva, com o concreto, jogos e também com a contextualização de onde eles estão inseridos.

P- Como é sua interação quando eles estão falando das estratégias de resolução encontradas?

PJ- Como eu faço a correção individual, percebo que encontraram diversas formas de resolução. A partir daí eu provoco eles e comento: fulano resolveu dessa maneira, você respondeu dessa... Estão corretas? Alguém acha que está errado? Por que está errado? Eles vão dizendo a posição que eles acham, vão dizendo se está certo, errado e porque eles acham.

P- E no final, o que você faz?

PJ - Eu mostro as duas formas, se as duas foram utilizadas corretamente, eles acatam as duas maneiras. E começam utilizar as duas maneiras.

P- O aluno que não fez da maneira que era correta? Qual o seu posicionamento?

PJ- Eu não coloco no caderno que está errado, a partir do que discutimos e foi colocado no quadro ele vai fazer a própria correção, e traz pra eu novamente corrigir e ver se realmente fizeram ou não. Porque tem aqueles que não fazem. Acabam não fazendo, fecha o caderno e fica por isso mesmo. Eu sempre dou uma devolutiva pra eles. A tarefa de casa, por exemplo, sempre corrijo, boto a data. Então eles têm essa responsabilidade.

P- Quando você vai dar um conteúdo novo, como seria a construção desse conceito com seus alunos? Como você trabalharia em uma perspectiva de resolução de problema?

PJ - Não gosto de dizer a eles, nós vamos trabalhar tal conteúdo. Pra eles isso não é interessante. Interessante é quando a gente apresenta a situação-problema no início e estimula eles a resolverem, como a gente vai resolver? E aparecem as diferentes formas de resolver. Cada um mostra o que fez. Após darem o retorno oralmente, vamos ao quadro pegar um ou duas resoluções, se forem diferentes e instigar para que eles digam se está certo ou não. Geralmente tem aqueles que se abstém e começam a dizer assim: o meu tem esse resultado que tá diferente do que está ali então eu não vou nem falar, mas quando chegamos no resultado final ele diz: professor o meu resultado foi esse tb, mas eu não fiz dessa maneira. A partir daí, vamos falar do conteúdo. Por exemplo... Isso aqui se trata de fração... Vamos explicar o que é fração. Pergunto o que eles sabem e vou fazendo questionamentos e trazendo esclarecimentos utilizo figuras ilustrativas... A partir daí vamos pra parte escrita, escrevemos por exemplo, a situação-problema, resolvem e explico algumas coisas a mais e eles escrevem no caderno. Logo após eles utilizam o LD, respondem as atividades e leem as informações que tem lá que só vão agregar valores. Depois trago material concreto, e vão puder utilizar o que aprenderam. Pode ser: material dourado, ábaco, jogo, figuras ilustrativas. Peço também pra eles trazerem tb. O colega trouxe, por exemplo, a trena de carpinteiro, que era diferente. Enfim, é um processo de mão dupla. Eu proponho pra eles e eles tb colaboram. É claro que tem aquele grupo que é mais difícil, não assimilam como os outros, que requer um tempo maior.

P- E você dá um tratamento para eles?

PJ - Sim, com uma nova abordagem, com um novo recurso e até com uma atividade diferenciada, só não deixo ele sem fazer nada.

P - Seus alunos acompanham o livro?

PJ - Sim. Para alguns, que têm dificuldades de leitura é mais difícil, mas o professor tem que ficar mais próximo nesse momento, mas isso não impede deles fazerem. Eu geralmente trago alguma coisa de casa, o suporte. Eu gosto de imprimir em casa. Faça uma pesquisa do conteúdo um resumo e pra conversar com eles, as vezes imprimo uma figura. Mostro pra eles verem e depois vou repassar e fazer atividades relacionadas ao conteúdo.

P- Você usa sempre o livro? Gosta dele?

PJ - Sim, gosto dele. Eles têm um horário e trazem o livro. Entretanto, tem aulas que não usamos o livro. E eles perguntam; estamos com o livro, mas não vamos utilizá-lo? Não vamos, nem sempre, tem conteúdo que não precisamos utilizar, tem também coisas diferenciadas que eu trago pra trabalhar com vocês. Não é somente o livro, ele é apenas um suporte.

P- Como- Como é sua avaliação?

PJ- Pra mim gosto de avaliar pela correção dos cadernos, gosto de avaliar pelo que ele aprende no dia, como corrijo individualmente os cadernos, sei mais ou menos o nível de cada aluno.

P- Tem outro instrumento?

PJ- O processo avaliativo a gente vê como indispensável no dia a dia. Através dele, a gente vai ver o que o aluno aprendeu, o que está aprendendo e o que precisa aprender. É um processo, não é algo fechado e também não uso uma norma. Não uso só a avaliação escrita, são as atividades que estou sempre corrigindo, a interação em sala de aula, aqueles que dão sua opinião, que falam, que perguntam, não só aqueles que dão sua opinião mas também as dúvidas, porque tem aqueles que não dão sua opinião mas tem as dúvidas sobre o assunto. Sempre mostro a eles a importância de perguntar e também avalio a integração aluno-aluno, aluno professor e nós temos avaliação bimestral.

P- Como você vê essa avaliação?

PJ- Como ela é elaborada pelo professor eu vejo como muita tranquila, e não tem aquela questão é o dia da prova. Como sabemos qual é a semana da avaliação, não transmitimos isso para o aluno. Não dizemos para o aluno, tal dia é tal prova, estudem. É uma forma de avaliar o que aluno aprendeu durante o bimestre. Eles perguntam, os pais perguntam e a prova? Eu respondo, vamos fazer uma atividade para avaliar o que o aluno aprendeu.

P- As questões da sua prova são diferentes das que você trabalha no dia a dia?

PJ- Não. A diferença é que eu mudo as situações-problema, mas o contexto, a complexidade é a mesmo, até porque eu sempre digo pra eles que eu nunca vou cobrar de vocês aquilo que não foi trabalhado em sala de aula. E às vezes acontece uma coisa engraçada. A gente faz uma atividade avaliativa bimestral e eles consideram muito fácil. E eu digo, quando vocês consideram fácil é porque aprenderam. Pra mim, isso é positivo. É lógico que no próximo bimestre a gente vai aprofundar e consolidar o conteúdo, mas quando o aluno compreende que aquele conteúdo tá fácil, eu me sinto bem. O preocupante é quando em uma avaliação ou em atividade em classe. a maioria erra, acho que a metodologia tem que mudar porque essa não funcionou. Se eles consideram simples, a aprendizagem fluiu.

P- E o teu planejamento, como é feito?

PJ- O ponto de partida é a proposta pedagógica do município. A partir daí teremos os conteúdos e as atividades, as habilidades se tornam nossos objetivos e acrescentamos situações didáticas, os recursos e a forma de avaliar: atividades escritas, oral pesquisa...Eu uso muito o LD, mas coloco também atividades extras que vejo fora, da internet. Atividades prontas, trago. Eles estão aprendendo. Fazem e estão entendendo. Abrindo horizontes com coisas diferentes. Já estão acostumados, uns ajudam outros.

P- Que recursos usa?

PJ- Datashow, vídeos para construir situações-problema.

Ainda não chegamos na produção, mas no segundo semestre eles já elaboram, hoje eles às vezes elaboram oralmente, damos uma enxugada e eles resolvem.

P- E a Tarefa de casa?

PJ- Passo e corrijo no outro dia. No início eles não traziam. Eu comecei a negociar com eles. Se eles levassem 3 tarefas e não trouxessem eu chamaria um responsável para conversar e aí melhorou. Precisamos do *feed back* dos pais. Porque eles cobram de nós e temos que cobrar deles também.

P- Que tipo de professora você se considera?

PJ- Não somos 100% Sou um pouco tradicional e, nem 100% construtivista. A própria estrutura não ajuda nisso, recursos tecnológicos. Tem escola que tem laboratório de matemática, por exemplo. Não posso abraçar totalmente o construtivismo porque mesmo que a escola oferecesse tudo isso, tem práticas que eu considero necessária do tradicional. Como por exemplo, quando eu uso o quadro, tarefa para casa, são atividades tradicionais, mas indispensáveis para o acompanhamento do aluno. Pode ser que eu chegue a trabalhar com o construtivismo, mas acho difícil porque com as mudanças tecnológicas, as coisas vão ficando ultrapassadas muito rápidas e nós vamos utilizá-las ainda.

P- Em quais momentos você se considera construtivista tradicional?

PJ- Quando trabalho lúdico, material concreto e da forma de interagirem no momento da aula. Antes não tinha essa abertura, você chegava, dizia como fazia e pronto. Hoje há uma troca, eu mostro caminhos, eles escolhem pra chegar no mesmo lugar, caminhos diferentes.

APÊNDICE C – AULA 1 DA PROFESSORA MARIA

Transcrição de áudio - Professora Maria

Legenda:

P - Fala da professora.

A - Alunos.

Aula 1: Leitura e representação de Fração

P - Quando eu quero representar uma fração, como vou representar? $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{10}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{20}{6}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{11}{8}$? Essas frações são diferentes, as representações. Quando a gente tem a fração, temos o numerador e denominador. Nesse exemplo $\frac{3}{2}$, ela é maior que o inteiro. Quanto dá $\frac{3}{2}$?

A - 1,5. (*Professora representa com figura*).

P - Lembram do Aprova[27]? $\frac{4}{3}$? (*Professora faz a divisão* $\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \underline{3} & 1{,}3 \\ 10 & \\ \underline{9} & \\ 1 & \end{array}$). Essa fração é mais complexa. Eu quero mostrar que a fração pode ter numerador maior que o denominador e vice-versa. A fração representa a divisão que eu quero. Se eu for fazer um bolo e colocar $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$ de açúcar, qual é maior?

A - $\frac{3}{4}$. (*Mostra a divisão* $\begin{array}{r|l} 3'0 & 4 \\ \underline{28} & 0{,}75 \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$).

P - Usamos fração em diversas situações. Na culinária, o encanador para saber as bitolas dos canos...matemática é para usar na vida.

P - Nessa aqui, por exemplo, tem o denominador maior que o numerador. $\frac{2}{5}$. Posso dividir 2 laranjas para 5 pessoas?

A - Não.

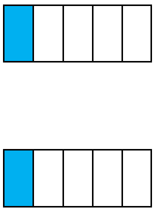
27 Caderno.

P - Pode sim, mas vou fracionar igualmente, dividir igualmente. Se a mãe tiver 2 barras de chocolate, pode dividir para 5 filhos?

A - Dá sim.

P - Vamos ver quanto fica. (*Faz a divisão* $\frac{2}{5}$).

P - $\begin{array}{r|l} 2'0 & 5 \\ \underline{20} & 0,4 \\ 0 & \end{array}$.



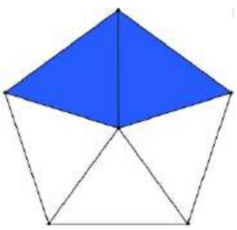
P - É só para vocês terem a noção de que a fração tanto representa maior que o inteiro e menor que ele também $\frac{2}{5}$ por exemplo.

P - (*Faz a divisão* $\frac{20}{6} = 3,3$). Vou ter o resultado, a divisão maior que o inteiro. Não dá exato, as vezes a divisão não é exata, como esse resultado de $\frac{20}{6}$.

P - Outro exemplo: $\frac{15}{7}$ (*professora faz a divisão* $\begin{array}{r|l} 15 & 7 \\ \underline{14} & 2,1 \\ 10 & \\ \underline{7} & \\ 3 & \end{array}$). Agora resolvam as atividades em dupla para discutirem, mas cada um faz o seu. Vou mostrar o primeiro para vocês verem como se faz, vou dar exemplo. Querem?

A - Sim.

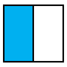
P - Quando quero $\frac{2}{5}$. (*Desenha um pentágono e pinta 2 partes*). Como faço? Aqui tem quantas partes?



A - 2.

P - As partes pintadas podem ser qualquer uma, desde que sejam 2. Deixa eu mostrar um modelo da outra questão. Como descobrir uma fração a partir da representação? O número de quadradinho pintado é o numerador. O denominador é a quantidade de quadradinhos que tenho.

P - $\frac{1}{2}$ (*Professora representa a fração em forma de barra*).



P - Para lermos até dez usamos décimos, a partir de onze, usamos o cardinal acompanhado da palavra avos. Vejam os exemplos: $\frac{3}{7}$ três sétimos; $\frac{15}{27}$ quinze vinte e sete avos; $\frac{5}{9}$ cinco nonos; $\frac{2}{10}$ dois décimos e $\frac{9}{100}$ nove centésimos. Vou colocar outros exemplos para vocês responderem. Ao terminarem, vamos usar o jogo das frações para fixarem melhor o assunto.

APÊNDICE D – AULA 2 DA PROFESSORA MARIA

Transcrição de áudio - Professora Maria

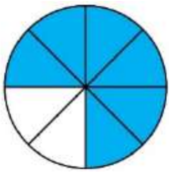
Legenda:

P - Fala da professora.

A - Alunos.

Aula 2: Leitura e representação de Fração-atividades de fixação

P - Temos aqui o círculo. Foi dividido em quantas partes? 8 não foi? (*Coloca esse número no denominador da fração*). E pintou quantas partes? 6, né? A parte dividida é o denominador da fração e a pintada é o numerador. Então temos a fração $\frac{6}{8}$.



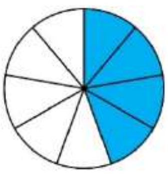
P - Essa aqui, dividiu em quantas partes?

A - 9.

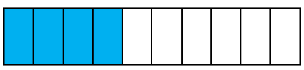
P - Pintou quantas partes?

A - 4.

P - A fração é então $\frac{4}{9}$.



P - Essa aqui, dividiu em quantas partes?



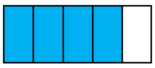
A - 10.

P - Pintou quantas?

A - 4.

P - Então ficou $\frac{4}{10}$.

P - Dividiu agora em?



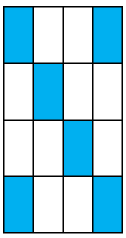
A - 5.

P - E pintei...

A - 4.

P - Então são $\frac{4}{5}$... Quatro quintos (*escreve em linguagem natural*).

P - Olhem esse aqui... Dividi quantos?

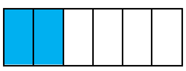


A - 16.

P - Pintei quantos?

A - 6.

P - São $\frac{6}{16}$ (*professora escreve seis dezesseis avos*). E esse agora? Dividi quantos?



A - 6.

P - E pintei...

A - 2.

P - Qual a fração?

A - $\frac{2}{6}$.

P - Vamos corrigir os problemas que passei para casa. Quem não fez, copia. Quem não respondeu, responde agora comigo.

Problema 1: Relacione a 2ª coluna de acordo com a 1º.

a)	$\frac{1}{2}$	( ) um vinte e seis avos
b)	$\frac{1}{4}$	( )um vinte avos
c)	$\frac{1}{20}$	( ) meio/metade
d)	$\frac{1}{26}$	( )um quarto

Problema 2: Maria tinha 40 figurinhas. Deu $\frac{1}{2}$ para sua irmã. Ficou com quantas figurinhas?

A - 20.

P - Como fizeram?

A - Dividi 40 por 2.

P - Você pode fazer a continha $\frac{40}{2}$ = 20 (*mostra a resolução do algoritmo para* $\begin{array}{l|l} 4'0 & 2 \\ \underline{4} & \overline{20} \\ 0\,0 & \end{array}$).

Problema 3: Paulo tinha 30 carrinhos. Vendeu $\frac{1}{3}$ dos seus carrinhos. Com quantos carrinhos ele ficou? Como fizeram?

A - Botei 30 e 3 embaixo. Fiz a divisão.

P – (*Mostra o algoritmo da divisão* $\frac{30}{3}$ $\begin{array}{l|l} 3'0 & 3 \\ \underline{3} & \overline{10} \\ 0\,0 & \end{array}$ *e pergunta em seguida*)... Ele ficou com quanto? 10?

A - Não.

P - $\frac{30}{10}$ = 3, mas eu tenho que fazer outra continha para saber o resultado (*mostra 30 - 10= 20*). Ele ficou com 20.

Problema 4: Ana fez uma prova de 50 questões. Acertou $\frac{1}{2}$ das questões. Quantas questões ela acertou? Como faço essa conta?

A - Divide.

$$\begin{array}{r|l} 5'0 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{4} & 25 \\ 10 & \\ \underline{10} & \\ 0 & \end{array}$$

P - 50 dividido por 2, quanto dá? Faço $\frac{50}{2}$. (*Professora resolver o algoritmo da divisão e explana:*). Ela acertou então 25 questões, que é a me...

A - Tade (*aluno completa*).

Problema 5: Pedro recebeu R$ 1000,00, gastou $\frac{1}{4}$ do salário com aluguel. Quanto sobrou para outras despesas? GENTE!! (*professora aumenta a voz*), presta atenção. Como eu faço a conta?

A - Divide.

P - Divide o quê? (*A turma faz silêncio ...*).

P - Divido 1000 por 4, que dá 250,00 né?

A - É.

P - Quanto vai sobrar para outras despesas?

A – (*Respondem oralmente*) 1.000,00 – 250,00, que dá R$ 750,00.

APÊNDICE E – AULA 3 DA PROFESSORA MARIA

Transcrição de áudio - Professora Maria

Legenda:

P - Fala da professora.

A - Alunos.

Aula 3: Adição e subtração de Fração com mesmo denominador

P – (*Escreve no quadro "Adição de frações"*). Como eu faço a adição de frações? É bem facilzinha.

A - Facilzinha para senhora.

P - Quando os denominadores são iguais, repetimos o denominador e somamos o numerador. Vejam o modelo.

a)$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

P - Se for diferente o denominador, tenho que tirar o m.m.c, mas é complexo, vou dar isso a vocês não. É muito mais trabalho, mas aqui com denominador igual é facilzinho. Não copia esse outro exemplo, porque eu não vou dar isso não. Não vamos fazer com m.m.c e sim sem o m.m.c. Como? Repito o denominador e somo o numerador. Façam a letra b.

b)$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=?$

Estão vendo? É fácil. A regra é essa: repete o denominador e soma o numerador. 3 + 1 é?

A - 4.

P - Vou colocar outros para vocês fazerem do mesmo jeito.

c)$\frac{2}{3}+\frac{2}{7}$; eita, errei, o denominador dos dois tem que ser sete. É assim $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$.

P - É fácil, né? Vou colocar outros para exercitarem.

d)$\frac{1}{12}+\frac{5}{12}$.

e)$\frac{3}{10}+\frac{1}{10}$.

f)$\frac{1}{9}+\frac{3}{9}$.

g)$\frac{4}{15}+\frac{5}{15}$.

P - Façam essas daqui, são faceizinhas.

P - A subtração é bem parecida. Quando tenho o sinal de menos, eu tenho uma su...

A – btração.
a)$\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

A - Tem a de multiplicar também né?

P - A de multiplicar é diferente. Façam essas mais:

b)$\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$.

c)$\frac{8}{15}-\frac{1}{15}$.

d)$\frac{9}{10}-\frac{7}{10}$.

e)$\frac{4}{11}-\frac{3}{11}$.

f)$\frac{6}{13}-\frac{2}{13}$.

g)$\frac{7}{14}-\frac{1}{14}$.

h)$\frac{8}{15}-\frac{4}{15}$.

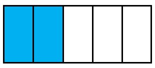
(**Observação:** *Os estudantes foram convidados pela professora Maria a responderem as questões no quadro e acertaram*).

P - Vamos resolver esses problemas agora. Rafael está montando um quebra-cabeça de 80 peças. Ele já montou $\frac{3}{5}$ do quebra cabeça. Quantas peças faltam para Rafael terminar de montar o quebra-cabeça? (*A professora lê o problema para os estudantes e pergunta*): Como vocês acham que vai fazer esse problema? (*Escreve no quadro* $\frac{80}{5}$).

P - A gente vai achar $\frac{80}{5}$ da peça. (*Faz o algoritmo*

$$\begin{array}{r|l} 8'0 & 5 \\ \hline 5 & 16 \\ \hline 30 & \\ 30 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

obtendo 16 como valor final). Então $\frac{1}{5}$ = 16 peças. Ele já montou quantos? Se ele já montou $\frac{3}{5}$ para chegar ao inteiro falta quanto? Vou pegar essa fração.



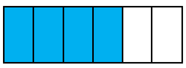
P - Quanto falta?

A - 2.

P - Se $\frac{1}{5}$ = 16 peças. Quanto vai dar $\frac{2}{5}$?

A – 32. (*Professora fala: Muito bem!*).

P - Entenderam? Então vamos fazer outro. Sabendo-se que uma pizza foi dividida em 6 pedaços. E que se comeu quatro pedaços. Qual a fração foi consumida?



P - Se a pizza foi dividida em 6 pedaços, cada parte vale?

A - $\frac{1}{4}$.

P - Não, é $\frac{1}{6}$. Se a pessoa comeu 4 pedaços temos: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$. Entenderam?

A - Sim.

APÊNDICE F – AULA 4 DA PROFESSORA MARIA

Transcrição de áudio - Professora Maria

Legenda:

P - Fala da professora.

A - Alunos.

Aula 4: Operações com Fração

P - (*Fala para os estudantes que vai fazer um bolo de caneca e coloca no quadro dois cartazes um com o nome: bolo de chocolate na caneca e outro com desenho do bolo. Em seguida, entrega uma receita para eles e comenta*: Como a gente estudou fração e a pesquisadora Dora está nos observando, vamos fazer um bolo bem fácil. Aí tá a receita. Esse bolo dá numa caneca dessa. Olhem os ingredientes. Olhem, eu vou usar esses medidores que equivalem a uma colher. Primeiro vamos usar esses ingredientes e bater no liquidificador 1 ovo, 3 colheres de açúcar, 1 colher de óleo e 4 colheres de leite. Batemos tudo no liquidificador por 2 minutos.

P - Depois mistura o conteúdo com 2 colheres de trigo e 3 colheres de chocolate. Prestem atenção: essa mistura vai encher $\frac{2}{3}$ da caneca. Quem sabe como é? Quando ele diz $\frac{2}{3}$ o que significa? Quer dizer, quantas partes tem essa caneca?

A - 3.
P - E vou pintar quantas partes?

A - 2.
P - Agora eu vou despejar. Vou mostrar a quantidade, ficou espaço, é a medida certinha, 2/3 porque ele vai crescer até em cima. (*Mostra aos alunos e coloca no micro-ondas. Repete a receita*).

P - Agora vamos resolver uns problemas. Para ficar facilitado, vamos fazer em grupo de 5, para ajudar um ao outro. Cada um faz o seu e conversa com o colega. (*Apesar da sugestão, os alunos resolvem individualmente. A professora Maria dá tempo, em seguida fala:*) vamos ver as respostas. Como é o 1? Quem fez? Como fizeram? (*Professora lê o problema:*) Diana e Flávia colecionam papéis de carta. Diana tem 384 papéis e Flávia tem a metade. Quantos papéis de carta têm as duas juntas? Como vou fazer o cálculo? Quem sabe? Vejam bem, prestem atenção (*professora lê de novo o problema*). Diana tem quantos papéis? E Flávia?

A - Metade.

P - Quanto é metade em fração? É meio, né? Divido por quanto? Por 2, né? (*Faz a divisão no quadro:* $\frac{392}{2}$ *= 192*). Metade é 192, mas ele quer saber quanto tem as duas juntas. Tenho que somar, né? (*Arma o algoritmo 384 + 192= 526 e em seguida lê no segundo problema:*) Roberta comeu $\frac{3}{8}$ de uma torta de chocolate de manhã e $\frac{2}{8}$ a tarde. Que fração da torta ela comeu? Presta atenção. Quando ela diz que a torta tem $\frac{3}{8}$ ela foi dividida em quantas partes?

A - 8.

P - Se ela comeu $\frac{3}{8}$, comeu 3 partes, né? Então veja, Roberta comeu $\frac{3}{8}$ de manhã e comeu $\frac{2}{8}$ a tarde. Quanto ela comeu? Como a gente soma frações? Ela comeu $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$. Dá quanto?

A - 5.

P - Cinco o quê? Ela comeu $\frac{5}{8}$. (*Professora lê o próximo problema*:) Numa competição, Renato percorreu, de skate $\frac{4}{7}$ de uma estrada e de patins $\frac{2}{7}$. Que fração da estrada Renato percorreu? Faz de conta que essa estrada é dividida em 7 partes, percorreu $\frac{4}{7}$ de skate e $\frac{2}{7}$ de patins. Então vamos somar, né? $\frac{4}{7} + \frac{2}{7}$, dá quanto?

A - 6.

P - $\frac{6}{7}$. Vejam que essa parte eles entenderam. (*Professora lê o próximo problema:*) Mauro comeu $\frac{3}{5}$ de uma torta de abacaxi. Que fração da torta sobrou? Como descubro isso? Se ele comeu $\frac{3}{5}$, quanto divido essa fração?

A - 5.

P - Muito bem, restou quanto?

A - 2.

P - $\frac{2}{5}$, muito bem.

APÊNDICE G – AULA 1 DA PROFESSORA JOANA

Transcrição de áudio - Professora Joana

Legenda:

P - Fala da professora.

A - Alunos.

Aula 1: Construção da concepção de Fração enquanto parte e todo

P - Vamos começar hoje o assunto de fração. Para alguns não é assunto novo porque viram alguma coisa no 4º ano. Esse ano já falamos superficialmente sobre fração, sobre alguma receita que aparecia lá algumas frações. Trabalhamos coisa pouca e agora vamos aprofundar. Para dar início eu trouxe... O que é isso?

A - Maçã.

P - Quantas?

A - 1.

P - Nós vamos utilizar maçã. Se eu tenho uma maçã eu utilizo somente o número 1. Ela está inteira ou em pedaços?

A - Inteira.

P - Então eu digo que esse 1 é o meu número in...

A - Inteiro.

P - Porque ele está completo, a maçã está completa. E eu vou dividir essa maçã, certo? Eu tenho quantas maçãs? Uma maçã. Eu vou continuar utilizando o número 1. (*Professora corta a maçã e fala:*)... Ela está inteira?

A - Não.

P - Está dividida em quantas partes?

A - 2.

P - Então, uma maçã foi dividida em duas partes. Aqui eu estou fracionando a maçã, ou seja, estou repartindo, dividindo a maçã em partes. Quem lembra $\frac{1}{2}$? Está aqui o desenho $\frac{1}{2}$.

P - Essa aqui... Quem lembra como se lê isso aqui (*ainda sobre* $\frac{1}{2}$)?

A - Um dois;
A2- um inteiro;
A3- um meio;
A4- dois e meio.

P - Ainda nada... como eu leio isso aqui? (*professora continua a falar da fração* $\frac{1}{2}$).

A - Meio..

P - Meio ou me...

A - Metade.

P - Se eu tiver $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$...ou seja, metade mais metade... vamos continuar dividindo a maçã... Todo cuidado, não está tão exato o corte, mas vamos imaginar que está... E agora eu tenho quantas maçãs?

A – 1;

A2- 4.

P - E agora eu tenho quantas maçãs? Essa maçã, foi dividida em quantas partes?

A - 4.

P - Cada parte dessa, vou chamar de um...

P - Quarto. Se eu tomei uma parte dessa, eu estou comendo .$\frac{1}{4}$. Se eu tomar duas partes, eu estou comendo... Olha como eu represento $\frac{2}{4}$. Se eu tomar três partes dessa, eu estou comendo ...$\frac{3}{4}$. Se eu tomar quatro partes dessa, eu estou comendo ...$\frac{4}{4}$... que significa que ela está in... teira. Posso dividir essa maçã?

A - Pode.

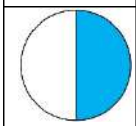
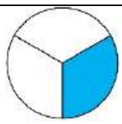
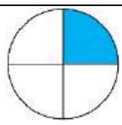
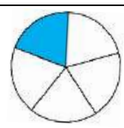
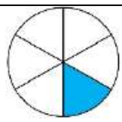
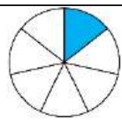
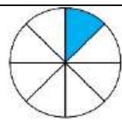
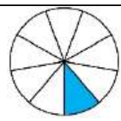
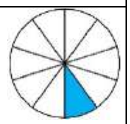
P - Agora eu tenho quantos pedaços?

A - 8.

P - Mas eu tenho quantas maçãs?

A - 1.

P - Cada pedaço desse eu vou chamar de $\frac{1}{8}$. O segundo pedaço, $\frac{2}{8}$; o terceiro, $\frac{3}{8}$, se comer 4 pedaços, $\frac{4}{8}$; se comer cinco pedaços, $\frac{5}{8}$; seis pedaços, $\frac{6}{8}$; sete pedaços, $\frac{7}{8}$e se comer os oito, $\frac{8}{8}$. Que é igual ao inteiro, ou seja, todos os pedaços foram comidos. Tanto é que se você tem 8 e divide por 8 vai dar igual a 1, (*professora chama o nome da aluna Maria Gabriela*). Ou seja, o inteiro. Construam isso aqui no caderno de vocês. Porque vamos fazer uma tabelinha...

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
								
Meio Metade	Um terço	Um quarto	Um quinto	Um sexto	Um sétimo	Um oitavo	Um nono	Um décimo

P - Nosso tempo foi suficiente, tem gente que está terminando, vai terminar aí, mas enquanto isso, olhem para cá, vamos dar continuidade. Aqui está a forma que nós lemos cada uma dessa fração que está representada aqui em cima. Agora, antes de continuar essa parte, se eu perguntar pra vocês o que é fração? O que vocês me dizem? Nós estamos estudando fração, pra chegar a uma fração nós fizemos o que com isso aqui? Nós fizemos o que com isso aqui?

A - Nós dividimos.

P - Nós dividimos

P - Mas essa divisão, a forma de você repartir tem que ser igual. Se eu pego uma barra de chocolate, ela está inteira, vou fracionar ela, repartir ela entre (por exemplo, as colegas, Evelin e Elen). Dou uma parte dessa aqui a Evelin e dou essa parte aqui bem maior a Elen. Dividi igualmente?

A - Não.

P - Mas eu fracionei, eu reparti, só que não foi igualmente, ou seja, quem ficou com esse pedaço aqui, ficou com a parte maior e quem ganhou esse, ficou com a parte menor. Aí quando eu vou ver em quantos pedaços eu poderia ter dividido essa barra de chocolate, 1, 2, 3, 4, 5 pedaços... Agora.eu vou entender qual foi a parte que Evelin ganhou. Qual foi a parte? 1 de quantos pedaços?

A_1 - 4.

A_2 - 5.

P - De quantos pedaços?

P - Contar de novo. Quantos pedaços?

A - 5.

P - Então ela ganhou 1... 1... como eu leio essa fração?

A -$\frac{1}{5}$.

P - Ou seja, a quinta parte dos cinco pedacinhos que tinha aqui, ela ganhou somente uma parte que foi a quinta parte ou um quinto. Quando vocês observam aqui... Esse número fracionário... Essa fração, como é que eu leio ela? (*Um estudante responde dizendo: fala do estudante. A professora logo fala:*) Só tem Esley na sala não! Eliel tá olhando pra onde? Olhe pra cá. Vamos lá novamente, quando eu observo essa fração como eu leio?

A - Meio ou metade.

P - Ou seja, em qualquer lugar que você estiver se você observar uma fração dessa, por exemplo, tem isso aqui na receita: $\frac{1}{2}$ xícara de trigo- como eu vou ler essa fração?

A - Meia xícara de trigo.

P - Pode ser assim também tá? $\frac{1}{2}$ colher de manteiga. Como vou ler essa fração?

A - Meia colher de manteiga.

P – Bora, tô ouvindo não!

A - Meia colher de manteiga.

P - Sempre que tiver assim $\frac{1}{2}$, vai indicar que eu tinha o inteiro, que depois foi divido em quantas partes? 2 partes, então vai ficar a metade, né Isabele! Terminou, olha pra cá. $\frac{1}{2}$xícara de trigo, meia colher de manteiga e se tiver assim. $\frac{1}{2}$ kg de açúcar, como leio aqui?

P e A - Meio quilo de açúcar.

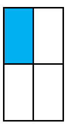
P - Então só pra vocês entenderem, Gabriel. Só para vocês entenderem que dessa forma nós estamos com o meio ou a metade, estou dizendo que eu tinha o inteiro que foi dividido em quantas partes?

A - 2.

P - Em quantas partes?

A - 2.

P - Se eu tenho um, não consigo dividir por 1, divido por 2 ou 4. Partindo pra esse outro aqui (*Professora escreve* $\frac{1}{4}$*no quadro*) oh, eu tenho um inteiro que foi dividido em quantas partes?



A – 1;

A2- 3;

A3- 4.

P - Vocês estão esquecendo a parte que está pintada! Tem que contar o 1. Inclusive, eu preciso observar, eu prestei atenção quando vocês estavam respondendo aqui que vocês não contam com a parte que está destacada. Tem que prestar atenção nisso. Isso aqui foi dividido em duas partes: 1, 2... Eu estou contando também com essa parte que está destacada. Esse daqui, Maria Gabriela, foi dividida em quantas partes? 3 Aqui oh. 1,2,3. Incluindo também a parte destacada. Esse aqui foi dividida nem quantas partes?

A - 4.

P - 4 partes. Esse aqui em quantas partes?

A - 5.

P - Eu tenho que contar o todo, muita gente, na hora de representar uma fração, acaba se complicando por causa disso. Kauan. Porque eu já vi gente respondendo uma questão dessa aqui. Tinha lá: represente com números essa fração que estava na figura. Aí tava lá desse mesmo jeitinho. Prestem atenção que eu não quero ver vocês cometendo esse erro. Aí a pessoa foi, sabia que estava... Tem quantas destacadas?

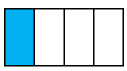
A – 3;

A2- 4.

P - Destacadas, pintadas?

A – 1.

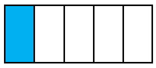
P - Então ele foi lá e colocou 1... Só que, na hora de representar embaixo ele não contou o todo, só colocou o que não estava pintado. A gente não tá somando, a gente não tá juntando uma que está pintada aqui... com mais três não. A gente tá querendo saber dessa parte aqui foi retirada de uma figura que foi repartida em quantas partes? 1, 2, 3, 4. Então aqui é o 4.



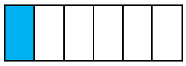
P – (*Professora desenha* $\frac{1}{4}$ *no quadro*) Eu tenho que colocar em cima mostrando quantas eu pintei aqui e aqui embaixo eu tenho que colocar o...

A - Todo.

P - Muito bem, não é só colocar os que estão vazios não, eu tenho que contar o todo. Da mesma forma eu tenho aqui oh, 1, 2, 3, 4 e 5(contagem de quantas partes o todo foi dividido)... tá aqui.



P - Quantas estão destacadas? 1. Aqui eu tenho, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (contagem de quantas partes o todo foi dividido). Tem quantas destacadas? 1.



P - Então eu não posso representar aqui e colocar o cinco não. Eu tenho que colocar o total. Estão entendendo?

A - Sim.

P - Leio como esse aqui que tem 5?

A - Um quinto.

P - Leio um...

A - Quinto...

P - Esse aqui eu leio... um... sexto. Agora prestem atenção, quando eu falo um sexto, não tô me referindo a isso tudo aqui não! Estou me referindo a esse pedacinho aqui. Esse aqui é o equivalente a 1/6, ou seja, eu tinha um inteiro que foi dividido em 6 partes iguais e eu tirei uma parte dessa. Como é que eu chamo uma parte dessa?

A - $\frac{1}{3}$.

P - E aqui eu tenho... um...

A - Sétimo.

P - Aqui eu tenho um...

A - Oitavo.

P - Aqui eu tenho um...

A - Nono.

P - Aqui eu tenho um...

A - Décimo.

P - Nós vamos ver hoje o quantitativo de 10 (frações com denominadores até 10). Um décimo. (*Um estudante pergunta se é igual ao décimo que as pessoas que trabalham recebem e o professor diz que não e explica*). Mas o décimo que as pessoas chamam, o nome certo é o décimo terceiro salário. Por quê? Todo mês a pessoa que trabalha mensalmente recebe o salário. Quando termina o ano, a pessoa tem recebido 12 salários porque são 12 meses no ano. Aí existe o pagamento do décimo terceiro salário. Salário extra (*aluno responde*). Muito bem! Tomando o exemplo que Isabele falou, nós temos 12 meses no ano. Pra gente esclarecer direitinho. 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º, 10º, 11º e 12º. O ano completo. Mas prestem bem atenção. Estamos em que mês?

A – Julho.

P - Julho aqui na tabela é o 1º, 2º, 3º, qual mês?

A - Sétimo.

P - Então, indo pra fração, qual é a quantidade que eu coloco aqui embaixo? Total. E o total dá quanto?

A - 1, 7, 12.

P - E o total dá quanto? Olhando para essa tabela todinha aqui.

A - 12.

P - Vamos contar de novo 1, 2... 12 então o ano foi dividido em 12 partes. Então vou botar aqui 12. Se nós estamos no mês de julho, quantos meses passamos aqui?

A - 7.

P - Então nós termos fração $\frac{7}{12}$. Se eu perguntasse agora, desses 12, quantos ainda faltam pra terminar o ano?

A - 5.

P - Então essa fração $\frac{7}{12}$ representa, João Vitor, a quantidade de meses que já vivenciamos durante o ano. A quantidade dessa outra fração aqui são os meses que ainda faltam para terminar o ano. Nós estamos na metade ou já passamos da metade do ano?

A - Já passou da metade.

P - Por quê? A metade do ano seriam quantos meses?

A - 6.

P - Observem que aqui o 7 é maior que o 5 da outra fração. Isso quer dizer que o período que nós passamos é maior do que ainda falta. Esse assunto está dentro das frações, dos números fracionários. Vamos pegar o mesmo exemplo com os dias da semana. Quantos dias tem a semana?

A - 7.
P - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 7 é o to...

A - Tal.
P - Qual o primeiro dia da semana? Domingo é o primeiro, por isso que segunda é o segundo, terça é o terceiro. Quantos dias já passaram?

A - 3.

P - 3 dias já passaram. $\frac{3}{7}$.

P - Então vejam só 3 dias = 3/7 o todo 7, os dias se passaram = 3. Se eu perguntar agora, qual a fração que eu vou representar para os dias que faltam para acabar a semana?

A - 3; 4; 4; 7; $\frac{4}{7}$.

P - Observem: o total dos dias da semana embaixo. Observe que eu não coloquei o 3, embaixo vai ser sempre o que? O to...

A – tal.

P - Só mais um exemplo sobre frações. Quantas folhas eu tenho aqui?

A - 1.

P - Uma folha. Se eu pego essa folha, divido ao meio, tenho quantas folhas?

A - 1.
P - Uma folha, só que ela está dividida em quantas partes?

A - 2.
P - Como é que eu chamo essa parte? Metade ou...

A - Meio.
P - Essa daqui é outra metade, ou...

A - Meio.
P - Não vou dizer que tenho 2 folhas, está dividida em 2 partes iguais, metade, metade, meio, meio... Se eu fosse entregar a Gabriel e Edriel, cada um ia receber uma metade, não iam ficar com uma folha. Agora observem, como é que represento com fração, com número fracionário essa figura aqui? 1 dividido por 2? Agora vou pegar essa folha, dobrá-la ao meio e vou dividir. E agora eu tenho quanto?

A - 4.

P - 1, 2, 3, 4. Então eu tenho uma folha que foi dividida em 4 partes. Agora me digam uma coisa. Esses pedaços, observem que os números estão aumentando. Antes eu tinha 2, agora eu tenho 4, os pedaços, esses pedaços estão aumentando ou diminuindo?

A - Aumentando, Diminuindo.
P - Ele estava assim... agora tá assim (*mostra os pedaços das folhas*). Quanto maior será o número aqui, menor será o pedaço. Quanto maior for o número aqui, menor será o pedaço. Agora vou dar exemplo da pizza. Se você compra uma pizza e divide com outra pessoa. Não, não, uma pizza vai dividir com 4 pessoas, então você vai comer... Como chamo?

A - Metade e a outra pessoa vai comer... Outra metade.

P - Só que na hora que você for comer, chega mais duas pessoas. Vai ter que dividir em quantas partes?

A - 4.
P - Seu pedaço, metade, ficou maior ou menor?

A - Menor.

P - Na hora que você vai pegando chegam mais 2. Vai dividir em quantas partes?

A - 6.

P - Uma pizza para dividir pra 6 pessoas. Cada um só vai comer $\frac{1}{6}$. Depois chegam mais 2. Quantos pedaços?

A - 8.

P - Esses pedaços estão aumentando ou diminuindo?

A - Diminuindo.

P - Mas você está percebendo que o número está aumentando? Então quanto maior esse número aqui for, menor o pedaço. Aqui é a mesma coisa. Se eu pegar a folhinha e dividir 8 partes. $\frac{1}{8}$. Cada pedaço desse representa $\frac{1}{8}$.. Se eu dividir novamente, vou ficar com 16, $\frac{1}{16}$. Tá maior ou tá menor?

A - Menor.

P – Exatamente. Quanto maior número, menor é o pedaço. Se eu dividir novamente, vou ficar com 32, $\frac{1}{32}$. Se eu dividir novamente, vou ficar com 128, $\frac{1}{128}$. Se eu dividir novamente, vou ficar com 256, $\frac{1}{256}$. Se eu dividir novamente, vou ficar com 512, $\frac{1}{512}$. Se eu dividir novamente, vou ficar com 1024,$\frac{1}{1024}$. Então, se aquela folhinha, fosse a pizza, e dividisse pra 1024 pessoas cada um iria receber esse pedacinho. Quanto maior for esse número que chamamos de denominador, menor será o pedaço. Porque está dizendo em quantas partes o inteiro foi dividido. Então fração é exatamente isso, é você pegar o todo, repartir ele em partes i...

A - guais.

P - Vamos lá, vamos imaginar que eu tenho essa fração$\frac{2}{5}$, eu estou dizendo que uma barra de chocolate que eu tinha eu comi $\frac{2}{5}$. Estão vendo a barra de chocolate?

A - Não.

P - Mas se eu perguntar a vocês, temos quantas partes iguais essa barra de chocolate que eu dividi?

A - Não.

P - Olhem para aqui.

A - Sim. 5.

P - Qual o total?

A - 5.

P - Então a barra de chocolate, foi dividida em 5 partes iguais. Mas eu disse que eu comi $\frac{2}{5}$. Vou pintar quantas ali?

A - 2.

P - Se eu perguntar quantas sobraram?

A - 3.

P - 3 o que?

A - $\frac{3}{5}$.

P - Ou seja, de 5 barrinhas que tinham, sobraram 3. De cinco barrinhas comi 2. Dessa forma que nós vamos representando as frações. Temos agora a atividade.

Problema 1: Dona Joana fez uma torta para que sua neta e suas três amigas repartissem igualmente. Ajude as meninas repartirem a torta.

Quantos pedaços da torta cada menina poderá comer?

a) Anita pegou o primeiro pedaço da torta. Esse pedaço pode ser representado por qual fração?

b) Se a torta fosse repartida para duas pessoas elas comeriam mais ou menos?

c) Se dividirmos a torta em 8 partes. Quantas partes cada criança poderá comer? Como representamos isso em fração?

(*Os alunos resolveram a atividade, a professora a corrigiu individualmente. Depois de um certo tempo, explicou a resolução, deu mais um tempo e resolveu coletivamente, no quadro. Para finalizar, pediu que os alunos resolvessem a atividade do livro sobre fração*).

No final da aula, questionei (pesquisadora) alguns alunos sobre o que tinham entendido por fração.

João: É uma coisa que se divide mais de uma vez, tipo em 5 partes.

Eliel: É dividir uma coisa, como uma maçã ou um papel.

Luiz Fernando: É dividir alguma coisa.

Gustavo: Dividir.

Maria Gabriela: Não soube responder.

Raí: Não soube responder.

João Vitor: Dividir as coisas com as pessoas.

Isabele: Uma fração é um conteúdo que pode ser dividido em várias partes.

Gabriel: Igual a divisão.

APÊNDICE H – AULA 2 DA PROFESSORA JOANA

Transcrição de áudio - Professora Joana

Legenda:
P - Fala da professora.
A - Alunos.

Aula 2: Leituras de Fração e noções preliminares de Fração equivalente.

P - Aqui está aquela parte que nós falamos sobre leitura de frações. Estamos na verdade dando continuidade àquilo que tínhamos feito. Lembrando que uma fração tem numerador e denominador, certo? Quando a gente observa essa fração $\frac{2}{5}$ como eu leio essa fração?

A - Dois quintos.
P - Dois quintos, ok. O número que está na parte superior é o que eu chamo numerador, o número que está na parte inferior é o que eu chamo de de...

A - nominador.

P - Aqui nós temos, pra ler uma fração é preciso conhecer o seu de-no-minador, pra ler uma fração é preciso conhecer o seu denominador e prestar atenção quando o professor está explicando, seu Ediel. Ou seja, sempre o número que está na parte superior, que é o numerador eu já falei pra vocês que vamos ler normalmente, eu vou ler como cardinal. Se é um eu leio 1. Se é dois, eu leio 2. 3... e assim sucessivamente. O número que está embaixo que é o denominador ele vai mudando, tá. Observe essa fração aqui (*professor apresenta a função* $\frac{1}{2}$ *para os alunos*) no numerador, eu leio que número?

A - 1.
P - O denominador, qual é?

A - Meio.

P - Só que esse meio é representado pelo algarismo 2. Então todas as vezes que encontrarmos uma fração que tiver o algarismo 2, nós vamos ler meio. Esse daqui (*professora apresenta a função* $\frac{2}{3}$) nós temos o numerador...

A - 2.

P - O denominador...

A - 3.

P - Como é que eu leio essa fração (*ainda sobre a função* $\frac{2}{3}$)?

A - Dois terços.

P - O numerador dessa (*professora apresenta a função* $\frac{3}{4}$).

A - 3.

P - O denominador...

A - 4.

P - Então eu leio essa fração...

A - Três quartos.

P - Muito bem. Essa daqui (*professora apresenta a função* $\frac{1}{5}$) numerador...

A - 1.

P - Denominador...

A - 5.

P - Como leio essa fração?

A - Um quinto.

P - Essa daqui (*professora apresenta a função* $\frac{1}{6}$) numerador...

A - 1.

P - Denominador...

A - 6.

P - Como leio essa fração?

A - Um sexto.

P - Não sei porque Eliel não está falando, não entendi ainda! Vou esperar, ainda tem 3 pra você ler. Numerador... (*professora apresenta a função* $\frac{5}{7}$).

A - 5.

P - Denominador...

A - 7.

P - Aqui eu leio...

A - Cinco sétimos.

P – Numerador (*professora apresenta a função* $\frac{1}{8}$).

A - 1.

P - Denominador...

A - 8.

P - Como leio essa fração?

A - Um oitavo.

P – Numerador (*professora apresenta a função* $\frac{4}{9}$)...

A - 4.

P - Denominador.

A - 9.

P - Como leio essa fração?

A - Quatro nonos.

P - Então aqui eu tenho as frações de denominador de 2 a 9. 2, 3,.... Lembrando que se tiver eu leio meio, se tiver 3 eu leio terço, se tiver 4 eu leio quarto, se tiver 5 eu leio quinto, se tiver 6 eu leio sexto, se tiver 7 eu leio sétimo, se tiver 8 eu leio oitavo, se tiver 9 eu leio nono. Nesse exemplo aqui nós temos frações com denominadores 10, 100 e 1000. Então a leitura vai mudar. Essa aqui eu tenho (*professora apresenta a função* $\frac{1}{10}$). Numerador...

A - 1.

P - denominador...

A - 10.

P - Então eu leio...

A - Um décimo.

P - Aqui eu tenho (*professora apresenta a função* $\frac{3}{100}$) numerador...

A - 3.

P - Denominador...

A - 100.

P - Então eu tenho...

A - Três centésimos.

P - Ou seja, de 100, eu tirei 3. Numerador... (*professora apresenta a função* $\frac{15}{1000}$).

A - 15.

P - Denominador...

A - 1000.

P - Então eu tenho...

A - Quinze centésimos.

P - Ou seja, de 1000 eu tirei 15, ou a gente deixou apenas 15 milésimos. Algumas vezes precisamos usar a palavra avos. Lembram que a gente comentou? Aqui oh, qual numerador? (*professora apresenta a função* $\frac{7}{11}$).

A - 7.

P - Denominador?

A - 11.

P - Aqui eu tenho...

A - Sete onze avos.

P - Numerador... (*professora apresenta a função* $\frac{1}{12}$).

A - 1.

P - Denominador...

A - 12.

P - Aqui eu tenho...

A - Um doze avos.

P - Numerador? (*professora apresenta a função* $\frac{9}{20}$).

A - 9.

P - Denominador?

A - 20.

P - Aqui eu tenho...

A - Nove vinte avos.

P - O que eu quero mostrar pra vocês novamente, pra gente não esquecer de forma alguma, é que esse algarismo que está na parte inferior da fração, ele é a totalidade, ou seja, se eu observo essa fração aqui e quero representá-la, eu começo fazendo a divisão em quantas partes? Total.

A - 20.

P - Olhem, lembrando que quando a gente fala de fração não é só tirar não. Vinte tira 9, você pode está deixando. Ok? Depende da situação que você estiver utilizando essa fração. Por exemplo, esses 20. Vou destacar 9. Vamos imaginar o seguinte. Uma sala de aula tem 20 alunos mas faltaram esses 9. Se a gente for acrescentar a quantidade de alunos que faltaram com frações $\frac{9}{20}$. Mas se a gente for representar os alunos que vieram à aula tem quantos alunos?

A - 11.

P - 11 de quantos?

A - 20.

P - Então essa é a fração dos alunos que estão na aula $\frac{11}{20}$ e $\frac{9}{20}$ os alunos que faltaram. Vamos ver outro exemplo, aqui conosco, contando. 24 alunos, vamos fazer a fração que representa os meninos e a fração que representa as meninas. Os dois como estamos falando da mesma turma vamos trabalhar com o total. Qual é o total?

A - 24.

P - Agora contando as meninas. Essa é a fração que representa as meninas $\frac{8}{24}$. Nós temos oito vinte e quatro avos. Se temos oito ali, a soma dos meninos vai dar 16. Essa é a fração que representa:

Meninas	Meninos
$\frac{8}{24}$	$\frac{16}{24}$

P - Já dá perceber que a fração com valor maior é essa daqui (*aponta para a fração associada aos meninos*) porque tem mais meninos que meninas. Isso aqui sempre nós vamos ler na parte inferior 24 avos. Maria Gabriela. Olha só vou pegar esse exemplo: $\frac{3}{4}$. Se nós temos 24 alunos, e eu disser que desses 24, $\frac{3}{4}$ vieram para aula. Quantos alunos vocês acham que vão estar na sala?

A - 18.

P – Por quê? Vamos entender o que o colega fez. Dividiu 24 em 4 partes e viu que cada parte é equivalente a 6. Tem várias formas de chegar ao resultado, mas ele fez a adição. 6 + 6 + 6. Ele poderia ter feito 24 - 6. Alguém poderia dizer também. 3*6, 18 também. Existem vários caminhos, o colega mostrou um, mas tem outros para entendermos frações. Como disse a vocês, a fração divide em partes iguais. Então a gente vai ver quanto cada uma daquelas representa. No nosso caso, representa 6. Voltando para o exemplo da nossa aula, como nós temos 24, vou dividir em 3 partes iguais. Cada parte desse vale quanto?

A - 2, 3.

P - Vou perguntar de novo, nós temos 24 e vamos dividir em 3 partes iguais. Cada parte vai valer...

A - 8.

P - 8 vou colocar pequenininho.

8	8	8

P - Nós vimos que o total de meninas é igual a 8. Então essa parte da fração da turma hoje representa a quantidade de meninas, ou seja, qual é a fração que representa a quantidade de meninas?

A - 8.

P - Fração, fração. Olha para cá para essa figura. Esquece esse algarismo aqui...

A - 3, 8.

P - 1... Quando tenho três embaixo, como é que eu leio?

A - Um terço.

P -Quando eu falei representar a fração é isso aqui, posso representar fração com números ou com figuras. Então eu estou pedindo para representar com números. Se eu coloco a figura, tô querendo que você represente com números. Então aqui a gente já percebe que $\frac{1}{3}$ é de meninas e de meninos quanto é? Qual a fração? Olha para a figura. Eu estou pedindo representação de fração. Eu não estou pedindo soma. Se eu tenho aqui a quantidade de meninas representada por essa parte, então é a parte que vai ficar no numerador. Qual é o total?

A - 3.

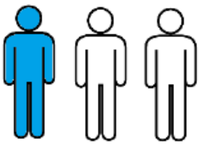
P - Essa é a quantidade, a fração que representa a quantidade de meninas $\frac{1}{3}$. Essa é a fração que representa a quantidade dos meninos $\frac{2}{3}$. 8 + 8 = 16. O total, foram 24 alunos. A fração, ela pode ser somada se elas tiverem denominadores iguais.$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Primeiro a gente vê se é igual. É igual? É igual.

A - É.

P - Em princípio, eu vou juntar $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ inteiro. A turma toda foi dividida em três partes, onde $\frac{1}{3}$são meninas e $\frac{2}{3}$ são meninos. Se a gente pegar aqui na sala, temos 3 professores, 1, 2, 3. Um homem e 2 mulheres. Vejam que antes o número maior era de meninos no caso de professores, o número maior é de mulheres. Qual é a fração que indica o total de homens, professor da sala?

P - 1.

A - $\frac{1}{3}$.



P - De três só tem 1, que é homem. E o que sobrou. Nessa figura aqui represento $\frac{2}{3}$.

P - 2.... Então essa é a representação dessa fração.

A - $\frac{2}{3}$.

P - Agora vamos lá, se eu tiver por exemplo, aquele exemplo da pizza. Se eu tiver 2 pizzas e preciso dividi-la para 3 pessoas. Qual seria fração que eu ia utilizar para essas duas pizzas?

A - A pizza tem 8 fatias, como é possível dividir?
P - A pizza vem inteira, quem vai dividir somos nós. Nós temos 2 pizzas e temos Adeilton, Isabele e Ediel para comer. Se Adeilton pegar 1 pizza, Ediel pegar a outra, não sobrará para Isabele. Isso não tá dividido corretamente. Então queremos dividir para que todos possam comer suas fatias para que todos possam comer igualmente. Como é que a gente faz?

A - 2 pedaços para cada.
P - Não dá. Alguém já foi sozinho e comeu uma pizza inteira, sem dividir?

A - Sim.
P - Mas a ideia é de que quando você vai com alguém e vai partir. Se você vai com 1 pessoa, você precisa dividir a pizza em quantos pedaços?

A - 3,

A2- 4.

P - Olhem só, vocês estão visualizando a pizza que vem partida, vamos pensar na pizza caseira, como dividi-la? Se tem 3 pessoas, vamos dividir em quantas partes?

A - 3.

P - A nossa colega fez aqui... 3 partes e vai fazer a mesma coisa com a outra. Agora nós temos 3 aqui e 3 aqui. Dessa daqui vai um pedaço pra Adeilton, um pedaço pra Isabele e um pedaço pra Gabriel. Todo mundo comeu a mesma quantidade? Sim ou não?

A - Sim.

P - Vamos tentar representar quanto cada um comeu dessa pizza.

A - $\frac{2}{3}$

A2- $\frac{2}{6}$.

P - Cada um comeu $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{6}$?

A - $\frac{2}{3}$.

P - Vamos lá, se eu comer $\frac{2}{3}$, Gabriel também comeu $\frac{2}{3}$ e Isabele comeu $\frac{2}{3}$. Vamos ver $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$. Ok.

P - Vamos lá. Alguns colegas falaram $\frac{2}{6}$ porque temos o total 6 e cada um vai comer 2 fatias da pizza. Nesse caso aqui a gente viu por cada pizza, que cada pessoa vai comer $\frac{1}{3}$. Isso aqui é um assunto que mais na frente vamos ver e se chama frações equivalentes. Ou seja $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$. Se eu pegar esse número aqui $\frac{2}{6}$ e dividir o numerador e o denominador por 2. Porque nós temos duas pizzas. Se eu tenho 2 e divido pra duas pessoas vai dar quanto?

A - Silêncio.

P - Podem responder, tenham medo não. Se errar a gente conserta.

A - 1.

P - E 6 dividido por 2?

A - 3.

P - Então chegamos ao mesmo resultado. Então é certo dizer que cada pessoa vai comer $\frac{1}{3}$ e é certo dizer que a pessoa vai comer $\frac{2}{6}$, porque de 6 pedaços a pessoa vai comer 2, mas se juntarmos as duas pizzas cada pessoa vai comer $\frac{1}{3}$ porque vai comer um pedaço. Entenderam? Se eu quiser representar essa primeira fração, eu tenho quantas partes?

A - Duas.

P - Vou destacar quantas?

A - 2.
P - Tenho quantas partes?

A - 3.
P - Vou destacar quantas?

A - 2.
P - Tenho quantas partes?

A - 4.
P - Vou destacar quantas?

A - 3.
P - Tenho quantas partes?

A - 5.
P - Vou destacar quantas?

A – 1;
A2- 5.
P - Tenho quantas partes?

A - 6.
P - Quando eu pergunto a quantidade de partes, vocês vão olhar o denominador, né isso? Que é o algarismo que está embaixo. Vou destacar quantas?

A - Uma.

A - Se a gente tiver 2 e o número debaixo for 1, como representar?

P - A gente tem aí uma fração que vai dar um número inteiro, porque se eu tenho o 2, eu vou dividir o 2 para 1?

A - Não.

P - Então 2 dividido para 1 é 2, mas pode acontecer por exemplo de termos uma fração em que o número maior está em cima, eu tenho 4 e o 2 está embaixo. Então eu tenho quatro divido por 2, vai dar quanto?

A - 2.

P - Temos aqui uma fração inteira, só que por exemplo. Se temos quatro pedaços para dividir para 2 pessoas, cada uma vai ganhar....

A - 2.

P - Só que nessa forma aqui, o número que está maior é como se nós tivéssemos quatro inteiros. Se eu tenho 4 inteiros vai precisar eu fracionar isso daqui? Tenho quatro pizzas, vai precisar eu fracionar, dividir em fatias com outra pessoa?

A - Não.

P - Eu tenho 4 pizzas, fico com 2 pizzas inteiras e você fica com 2 inteiras. Entendeu? Ou seja, se o número que está em cima for maior, dá para ser dividido de forma inteira pelo que está embaixo. Mas vamos imaginar que não fosse 4, fosse 5. Cinco para dividir para 2 pessoas. Cada uma ia ganhar duas e meia. Imagine R$ 5,00. Cada um vai ganhar R$ 2,00 e R$ 0,50.

A - E quando tem o denominar igual a 1?

P - Quando tem denominador 1, vai ser igual a 2. Não se divide com numerador 1. Se divide para 1?

A - Não.

P - Só se divide a partir de 2. Eu tenho 1 lápis pra mim. Posso dividir pra 1? Não, ele é meu. Se eu tiver 2 lápis, para mim. Preciso dividir?

A - Não.

P - Não divido, são meus. Só divido se for para mais de uma pessoa, mais de uma parte. Se minha pizza tá inteira, vai dividir pra 1? Aí compra 1 bolo, vai dividir?

A - Não.

P - Você pode fracionar ele e comer por partes. Vou comer $\frac{1}{4}$ desse bolo. Mas se você tem 2 pra dividir pra 1, não é possível essa divisão porque só se divide para mais de 1. Continuando aqui, temo quanto no total?

A - 7.

P - Vou destacar quanto?

A - 5.

P - 1, 2, 3, 4, 5. Aqui temos cinco sétimos. Temos quanto no total?

A - 8.

P - Vou destacar...

A - 1.

P - Aqui eu tenho...

A - 9.

P - E vou destacar...

A - 4.

APÊNDICE I – AULA 3 DA PROFESSORA JOANA

Transcrição de áudio - Professora Joana

Legenda:
P - Fala da professora.
A - Alunos.

Aula 3: Fração equivalente

P - Olha só, nós vamos retomar a última prova que fizemos, a prova Brasil, contemplou essa parte de frações e eu vou fazer a correção. Foram 4 questões.

Lição 1: Carlos está pintando o muro da casa, represente com uma fração a parte que ele já pintou.

P - Se ele pintou somente essa parte aqui (*aponta para parte pintada da fração*), ele pintou o inteiro?

A - Não.
P - Ele pintou o quê?

A - Meio.
P - Meio ou metade. E na fração, como nós representamos essa parte que está pintada? Primeiro, nós vamos pra totalidade, nós temos quantas partes aqui?

A - 2.

P - Essa parte aqui, coloco na parte superior ou inferior?

A - Inferior.

P - Inferior, que é o denominador. Em cima, a parte que ele tomou nós representamos dessa forma $\frac{1}{2}$. No final, ele pintou a metade do muro.

Lição 2: Rafael está comprando um quebra cabeça com 80 peças. Montou $\frac{3}{5}$. Só que pra gente identificar na fração quanto é $\frac{3}{5}$ de 80, nós temos que pegar esse 80 que é quantidade total de peças e dividir em quantas partes iguais?

A - 5.

P - Que é total

P - Aqui nós temos que o número 80 tem que ser dividido por 5. $\frac{80}{5}$= 16. Cada parte dessa é 16.

16 16 16 16 16

P - 16*3= quanto é?

A - 48.

P - Nós temos que Rafael já montou 48 peças. E nós podemos descobrir quantas peças faltam pra terminar o quebra-cabeça? Agora eu tenho 16 quantas vezes?

A_1 - 3.

A_2- 2.

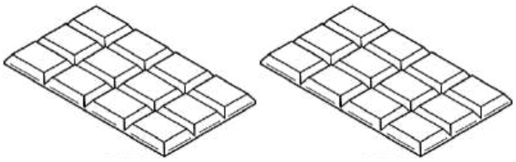
P - 16 * 2= 32

P – Ainda faltam 32 peças pra ele utilizar. Antes de ir para próxima questão. Existe outra forma pra eu saber o valor que vai dar de $\frac{3}{5}$ de 80. Posso fazer 80* $\frac{3}{5}$. Preciso multiplicar: 80*3 (*a professora faz a multiplicação a parte junto com os alunos 80*3 = 240*), agora é só dividir a multiplicação por 5. $\frac{240}{5}$ = 48 (*o professor faz a divisão a parte junto com os alunos*).

P - Posso dividir 3 por 5?

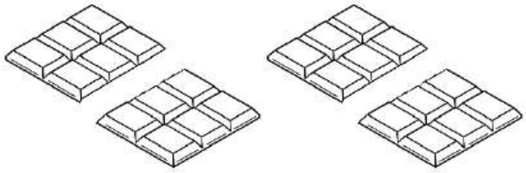
A - Não.

Lição 3: Pedro comprou 2 barras de chocolate para dividir igualmente para 4 crianças. Represente com uma fração a parte da barra de chocolate que será distribuída para cada criança.

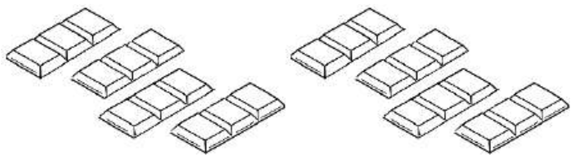


P - Eu tenho 2 barras pra dividir pra 4 pessoas. Eu poderia fazer logo assim, cada uma vai ganhar?

A - Meio.



P - Mas poderia dividir assim também.



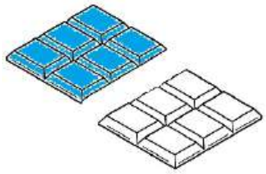
P - Só que cada criança vai 2 partes dessa aqui, ou seja, $\frac{2}{4}$.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$.

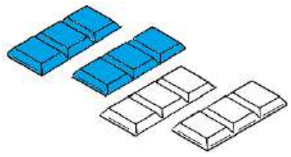
P - Na adição/subtração, se os denominadores são iguais você repete o denominador e soma os numeradores. Então cada criança ganha $\frac{1}{4}$ ou $\frac{2}{4}$. É o que chamamos frações equivalentes. Ou seja, frações que tem o mesmo valor. Quem ganhou $\frac{1}{2}$ ganha igual a quem ganhou $\frac{2}{4}$.

A - Como assim professor?

P - Vamos imaginar que seja a mesma barra de chocolate. Evany ganhou essa parte aqui $\frac{1}{2}$. Ganhou a metade, né?



P - Carlos ganhou essa parte $\frac{2}{4}$.



Ele ganhou a metade?

A - Sim.

P - Sim. Só que essa metade está dividida em duas partes, tá? Isso aqui é a metade, é $\frac{1}{2}$. Isso aqui é metade porque tenho 4 e usei 2. Essa fração é igual a essa, tem o mesmo valor. Como é que a gente descobre as frações que tem o mesmo valor? Eu posso pegar a fração. Quero saber as duas frações que têm o mesmo valor de $\frac{1}{2}$. Posso multiplicar ele por 2. 1x2, quanto? (*Turma ficou em silêncio*) podem responder, tenham medo não.

A - 2.

P – 2*2, quanto é?

A_1 - 4.

A_2 - 8.

P - Se eu pegar esse último $\frac{2}{4}$ e multiplicar por 2. 2 * 2= ? Dá quanto?

A - 4.

P - 4 * 2 = ?

A - 8.

P - Se eu fizer novamente, por 2. 4 * 2 = ?

A - 8.

P - 8 * 2 = ?

A - 16.

P - Fração $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$... Isso chamamos frações equivalentes. Vou representar com o nome de vocês. Temos 4 frações. João Gabriel ganhou metade de uma torta, olha como vou representar isso:

Ele ganhou essa parte aqui. Se eu for representar com número fracionário. Foi dividido em quantas partes?

A - 2.

P - Ele ganhou quantas partes?

A – 1.

P - Então eu tenho essa fração aqui... $\frac{1}{2}$. Que representa a quantidade que João ganhou. Isabele ganhou $\frac{2}{4}$. A mesma ilustração vou usar.

Quem ganhou mais, João ou Isabele?

A - Empate, deu igual.

P - Vocês percebem que eu vou representar, são iguais, são chamadas de frações equivalentes. Vamos continuar... Laís ganhou $\frac{4}{8}$.

Quem ganhou mais? Gabriel, Isabele ou Laís?

A_1 - Laís.

A_2 - Igual.

A3 - Laís.

P - Tá igual, mas tá dividido em partes me...

A - Nores.

P - Observem que estamos usando a mesma metade. Wesley $\frac{8}{16}$.vamos dividir aqui agora, temos 16, dividido em partes, ele ganhou 8.

(*A professora continua falando*) ganhou a me...

A - tade.

P - Os 4, mesmo utilizando frações diferentes, ganharam a mesma quantidade. Todos esses números aqui estão mostrando a metade de uma quantidade. (*Professora explana: "Alan tem uma pergunta" e aluno fala "Se dividirmos 8 para 3?"*) Eu não falei o algarismo 3. Falei 2, 4, 8 e 16. (*A professora mostra as divisões da torta por 2, 4, 6 e 16*, *não explica ao aluno como dividir 8 para 3, e pergunta se alguém ouviu ele falar em dividir para 3 pessoas. Os estudantes respondem que não*).

Hora da merenda.

P - Metade 2 = 1, metade de 4 = 2, metade de 8 = 4, metade de 16 = 8. Ou seja, todo mundo ganhou a metade. Alguém pode pensar que quem ganhou 8, ganhou mais. Só que eu falei para vocês que, em fração, quanto maior o número do denominador, os pedaços vão ficando menores. Lembram que eu mostrei com a folhinha e ficou cada vez o pedaço menor?

P - Uma coisa que aconteceu no simulado de vocês foi o contrário da fração que eu ensinei para vocês. Tinha uma fração que tinha o número maior, que era o 30. Marcos dividiu 30 cartas de um jogo para 5 crianças. Aqui é $\frac{30}{5}$. Essa divisão pode ser representada por uma fração. Muita gente colocou $\frac{5}{30}$ porque entendia que a gente for falar de fração, o número maior tinha que ficar embaixo, mas isso não é verdade e Alan uma vez me fez uma pergunta se podia 4 dividir por 1, e eu disse que não podia dividir por 1, se divide por mais de 1. Mas se eu tenho 30 e quero dividir para 5. É $\frac{30}{5}$, agora 5 pra dividir pra 30. Ai sim, seria invertido, o cinco ficaria em...

A_1 - Baixo.
A_2 - Cima.

P - Aqui nós tivemos e muita gente se confundiu e errou a questão. Depois vamos trabalhar uns probleminhas... Isso foi só a correção da atividade, serviu como revisão. Agora vou colocar dois probleminhas pra gente resolver. Vocês podem anotar... (*A professora faz uma anotação sobre Fração equivalente e pede para os alunos copiarem*). Agora vocês vão somente tirar as dúvidas sobre frações equivalentes. O que são equivalentes?

P - São as frações que representam uma mesma parte, lembrando que os sempre que os números sejam diferentes, e resolverem duas páginas do livro que tem assunto de frações equivalentes.

APÊNDICE J – AULA 5 DA PROFESSORA JOANA

Transcrição de áudio - Professora Joana

Legenda:

P - Fala da professora.

A - Alunos.

Aula 5: Concepção de Fração de uma quantidade

P - Recapitulando, a gente fez essa figura, vocês viram que é possível representarmos na forma fracionária.

P - No total nós temos quanto?

A - 10.

P - E nós destacamos?

A - 1.

P - Então nós temos $\frac{1}{10}$. A partir daí, nós fizemos a divisão e vimos que quando ele está na forma fracionária e preciso escrever na forma decimal eu preciso dividir o 1 por quanto?

A - 10.

P - Dividir por quanto? (*Estudantes ficam em silêncio*). Estão com medo de falar?

A - 10.

P - Posso dividir 1 por 10?

A - Não.

P - O que eu faço?

A - Bota o zero com uma vírgula.

P - Então eu tenho $\frac{10}{10}$= 1. $\frac{1}{10}$= 0,1, um décimo na forma fracionária e um décimo na forma deci....

A - Mal.

P - Lembrando que, um décimo é maior ou menor que o inteiro?

A - Menor.

P - Menor, vejam que o inteiro é isso aqui tudinho. Um décimo é uma parte de 10. Para completar o inteiro, eu preciso de quantas partes?

A - 10.

P - Ok. Partimos agora para os centésimos. Nós temos a figura que está repartida em 100 partes iguais. Por isso que nós colocamos o 100 no denominador, Gustavo. E nós destacamos quantos?

A - 1.

P - Ou seja, um centésimo. É você pegar uma barrinha de chocolate e dividi-la em 100 partes apenas $\frac{1}{100}$. Ou então a pizza, pegá-la e dividir em 100 partes iguais. A pizza tem que ser muito grande. Então mais uma vez. Nós fizemos uma divisão para representar com decimais, os décimos. Só que nesse caso aqui, como nós fizemos temos 1 pra dividir por quanto?

A - 100.

P - Posso dividir 1 por 100?

A - Não.

P - Como é que eu faço?

A - Bota o zero com uma vírgula, mas ficou menor... boto outro zero e outro zero.

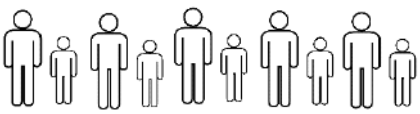
P - E por fim temos o milésimo. Fui buscar o material dourado mas ele estava ocupado, na próxima aula, vamos utilizá-lo.

P - Eu tenho 1 para dividir para 1000. Aquela dica que eu dei para vocês, simplesmente eu preciso observar quantos zeros eu tenho aqui e repito. Só que aqui ele vem depois do algarismo. Tenho 1 vou dividir por 1000. Acrescento, como nós fizemos no primeiro caso, tenho 0 e zeros após a vírgula. 10 dá pra dividir por 1000?

A – Não. (Não entendi essa resposta dos alunos).
P - Então acrescento 0 e mais 0, a vírgula só coloco uma vez aqui. (*Professora escreve 0,001*).

P - Tenho 100, dá pra dividir por 1000? Aqui nós temos a diferença. Um décimo, uma casa decimal. Um centésimo, duas casas e o centésimo, três casas decimais. Vamos a atividade que vocês responderam no livro de vocês. Conte quantas pessoas há na cena ao lado e complete as frases.

P – a) Há quantas pessoas?



A - 10.

P - Cada pessoa corresponde a quantos décimos do total?

A - 1.

P - Porque se eu tenho 10 pessoas e eu destaco somente 1, então é $\frac{1}{10}$. Temos um quadro explicativo que diz: $\frac{1}{10}$ é a representação como fração, e 0,1 é um décimo na forma decimal. Então essa representação aqui é fracionária $\frac{1}{10}$ e essa aqui é deci...

A - mal.

P - Cada pessoa corresponde a $\frac{1}{10}$ do total de pessoas, como vocês já falaram e temos aí. **b)** Há Quantas crianças na cena?

A - 5.

P - Se tem 5 crianças, são quantos décimos?

A - 5.

P - Por quê? O total de pessoas são 10. E nós temos quantas crianças?

A - 5.

P - Aqui nós temos a fração $\frac{5}{10}$.

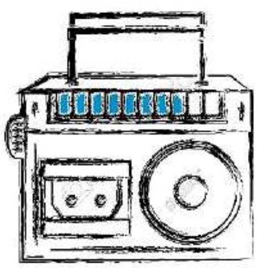
P - $\frac{5}{10}$pode ser representado também por qual forma decimal?

A - 0,5.

P - Por quê 0,5? (*Professora fez o algoritmo da divisão* $\begin{array}{r|l} 5\boxed{0} & \underline{\ 10\ } \\ \underline{50} & 0{,}5 \\ 0 & \end{array}$ *e perguntou:*) pode? João Vitor vai responder.

Fez a divisão 5/10... Pode? Joao Vitor vai responder. Tem 5 dividido por 10, não dá porque o cinco menor...

P - Vamos lá continuando. Um aparelho de som tem um mostrador com a intensidade de volume que varia de 0 a 1. Quanto mais alto o som, mais partes vermelhas ficam visíveis no mostrador. Esse problema tá dizendo que começa do 0 e vai até 1. Do 0 até um existem 10 volumes, ou seja, números menores que estão dentro. 0,1; 0,2; 0,3 é menor que 1?



A_1 - Não.

A_2 - Maior.

A_3 - Menor.

P - Prestem atenção...

0,3 é desse tamanho

P - E 1 é esse tamanho.

0, 3 é uma parte do 1. Continuando... Depois do 0,3... 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1.

A - 10.

P - Não é 10 é 1! Que fração do mostrador corresponde a cada parte em que ele está dividido? Vou ler novamente... primeira coisa que nós precisamos saber é em quantas partes está dividido isso aqui...

A - (*Os alunos contam com a professor*) 10.

P - O total é 10, coloco aqui e cada parte dessa... se eu escolher apenas essa parte. Escolhi quanta?

A - 1.

P - Vou perguntar novamente. Que fração do mostrador corresponde a cada parte em que ele está dividido?

A_1 - 10.

A_2 - Um dez.

P - Que fração é essa? $\frac{1}{10}$. Então vocês colocam na forma de fração e decimal. Qual intensidade do volume registrado mostrador no aparelho?

A - $\frac{8}{10}$.

P -$\frac{8}{10}$ porque são os oito que estão pintados. No total eu tenho 10 e estão destacados 8. Vamos.