UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

JOÉLIA SANTOS DE LIMA

FRAMEAGAP UM DISPOSITIVO PARA O ACOMPANHAMENTO DA APRENDIZAGEM: Um estudo em Sala de Aula Invertida sobre cônicas

Recife-PE
2021

JOÉLIA SANTOS DE LIMA

FRAMEAGAP UM DISPOSITIVO PARA O ACOMPANHAMENTO DA APRENDIZAGEM: Um estudo em Sala de Aula Invertida sobre cônicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica a ser apresentado à banca para título de mestre em educação matemática e tecnológica.

Orientadora: Profª. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Recife-PE
2021

Catalogação na fonte
Bibliotecária Natalia Nascimento, CRB-4/1743

L732f Lima, Joélia Santos de.

FrameAGAP um dispositivo para o acompanhamento da aprendizagem: um estudo em sala de aula invertida sobre cônicas. / Joélia Santos de Lima. – Recife, 2021.

143 f.: il.

Orientadora: Verônica Gitirana Gomes Ferreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2021.

Inclui Referências.

1. Matemática – Ensino Superior. 2. Metodologias de Ensino. 3. Matemática – Geometria Analítica. 4. Avaliação da Aprendizagem. 5. UFPE - Pós-graduação. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. (Orientadora). II. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2021-078)

JOÉLIA SANTOS DE LIMA

FRAMEAGAP UM DISPOSITIVO PARA O ACOMPANHAMENTO DA APRENDIZAGEM: Um estudo em Sala de Aula Invertida sobre cônicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática e Tecnológica a ser apresentado à banca para título de mestre em educação matemática e tecnológica.

Aprovada em: 14/06/2021

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª.Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. José Armando Valente (Examinador Externo)
Universidade Estadual de Campinas

Profª. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico aos meus pais, que como professores da Educação Básica sempre defenderam uma educação pública de qualidade para todos, me incentivando a estudar e me tornar o que sou hoje, Professora.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida, por esse caminho que me ajudou a traçar e por ter atendido todas as minhas preces (que não foram poucas) para que tudo desse certo nessa trajetória, conseguindo carona de Bananeiras pra Recife (não é nada perto), uma orientadora maravilhosa, amigos legais e uma casa muito boa com colegas de apartamento melhores ainda.

Agradeço a minha família, meus pais João Vital de Lima e Margarida Noélia Santos de Lima e a minha irmã Maristela Santos de Lima, que sempre me motivaram, confiaram no meu potencial mais que eu mesma e me incentivaram nos estudos, não medindo esforços para que eu conseguisse seguir meus sonhos e realizá-los.

A Laíse Munique, com quem eu compartilho minha vida e os meus sonhos, obrigada por todas as palavras de incentivos nos dias difíceis, a paciência, o amor, o cuidado e as ajudas computacionais quando meu computador adivinhava meu aperreio e quebrava na hora.

Agradeço à minha orientadora, Verônica Gitirana Gomes Ferreira por tudo e por tanto. Obrigada por todos os ensinamentos, por ter me dito que “nada se perde, tudo se recicla" e por ter me conduzido tão bem nesse caminho, com muita paciência, muito trabalho colaborativo, leveza, alegria, calma, humor, carinho e cuidado. E que mesmo enfrentando momentos difíceis, com a força que tem e a leveza que leva a vida nunca me deixou desamparada, me ensinando muita coisa e estando comigo para que aprendêssemos juntas também, principalmente SQL.

Agradeço ao professor Tennyson por todos os ensinamentos e por me ajudar nessa jornada da ciência dos dados. E ao meu amigo, Gustavo Lima Jr. pela ajuda com esse mundo da Sala de Aula Invertida e dos Dispositivos.

Agradeço aos meus amigos do mestrado, em especial: A Poli pelo acolhimento, pelos abraços, potes de açaí e palavras de carinho. À Rosana pela amizade, conversa, pelas trocas de experiência do mundo das pessoas do interior na capital e pelas caronas a pé. Ao meu amigo Rafael Marinho pelas caronas de carro, amizade, mensagens de fé e esperança e compartilhamento de desesperos e pequenos surtos. A Rayssa pela amizade, trabalhos epistemológicos e cafés da tarde na tapioca. A Elba pelas frases objetivas e de efeito. A Flávia pela amizade e ensinamentos de ABNT e desesperos. Cláudia, pelos cuidados de mãe, caronas e trabalhos em equipe. A Rita e Glauci pelo compartilhamento de saberes e pela alegria nos trabalhos em grupo.

Agradeço aos amigos com quem dividi um lar, Ingrid, Isabela, e em especial, Fernando Ferard, pelo acolhimento. A convivência leve, alegre e de muita parceria foi importante para enfrentar os dias difíceis longe da família e dos amigos.

RESUMO

A personalização do ensino, na Sala de Aula Invertida, tem apresentado bons resultados para o Ensino Superior de Matemática, porém apresenta estratégias de pouca escalabilidade. É nesse contexto que o GERE - Grupo de Estudos sobre Recursos para a Educação vem desenvolvendo um Framework para suporte ao professor no ensino personalizado. Esta pesquisa integra tal projeto e tem como objetivo construir e validar um framework (FrameAGAP) para o acompanhamento da aprendizagem personalizada de estudantes em um contexto da sala de aula invertida sobre o conteúdo de cônicas. A Teoria dos Campos Conceituais embasou a estruturação do conhecimento no FrameAGAP, a análise dos materiais e das situações e a comparação deles. Posteriormente, mapeamos as habilidades, significados e representações das situações sobre cônicas e variáveis que implicassem em maior maturidade para resolução da situação. Todo o material foi implementado em um banco de dados. Para testar o FrameAGAP, acompanhamos três licenciandos de matemática, no tópico de cônicas de Geometria Analítica. A cada atividade da disciplina, os protocolos desses estudantes eram analisados com o FrameAGAP para identificação de materiais para suprir dificuldades e novas situações para testagem ou aprofundamentos. Os estudantes conseguiram superar diferentes tipos de erros que apresentaram. O FrameAGAP permitiu-nos acompanhar os conhecimentos e dificuldades dos estudantes, auxiliando-nos como professor na identificação, escolha e desenvolvimento de materiais e situações adequados para a personalização da aprendizagem.

Palavras-chave: Metodologias Ativas. Avaliação. Geometria Analítica. Campos Conceituais. Aprendizagem personalizada.

ABSTRACT

The personalization of teaching, in the Inverted Classroom, has shown good results for University education in Mathematics, but it has low scalability strategies. It is in this context that the GERE - Study Group on Resources for Education (acronym for Grupo de Estudos sobre Recursos para a Educação) has been developing a Framework to support teachers in personalized teaching. This research is part of this project and aims to build and validate a framework (FrameAGAP) for monitoring personalized student learning in an inverted classroom context on the content of conics. The Conceptual Fields Theory was the basis for the structuring of knowledge in FrameAGAP, the analysis of materials and situations and their comparison. Subsequently, we mapped the skills, meanings and representations of situations on conics and variables that implied greater maturity in resolving the situation. All material was implemented in a database. To test FrameAGAP, we followed three math undergraduates on the topic of Analytical Geometry conics. At each activity of the discipline, the protocols of these students were analyzed with FrameAGAP to identify materials to meet difficulties and new situations for testing or deepening. Students were able to overcome different types of errors they presented. FrameAGAP allowed us to monitor the knowledge and difficulties of students, helping us as a teacher in identifying, choosing and developing materials and situations suitable for personalizing learning.

Keywords: Active Methodologies. Evaluation. Analytical Geometry. Conceptual Fields. Personalized learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AVA-Ambiente Virtual de Aprendizagem

EsM-Ensino sob Medida

FrameAGAP- *Framework* para Acompanhamento e Gestão de Aprendizagens Personalizadas

GERE-Grupo de Estudos em Recursos Educacionais

IES-Instituições de Ensino Superior

IpC-Instrução por Colegas

JiTT- *Just-in-Time Teaching*

PI-*Peer Instruction*

SAI-Sala de Aula Invertida

SIGAA-Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas

SQL-*Structured Query Language*

TCC-Teoria dos Campos Conceituais

TCLE-Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UFPE-Universidade Federal de Pernambuco

UFRN-Universidade Federal do Rio Grande do Norte

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo de meu curso de Licenciatura em Matemática foi possível vivenciar e identificar as dificuldades enfrentadas por estudantes do Ensino Superior ao se depararem com disciplinas específicas do curso, como Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear. As dificuldades advindas da Educação Básica são levadas para o Ensino Superior, e sozinho, o estudante não tem um norte, de quais caminhos deve seguir para que aprenda o que ainda não sabe. Além disso, a metodologia de ensino frequentemente utilizada nessas disciplinas segue um roteiro que inicia com a apresentação do conteúdo por parte do professor, podendo ser apresentação de teoremas, leis, definições. Logo após, costuma-se apresentar à aplicação desses conhecimentos em alguns problemas resolvidos, seguindo dos propostos. O professor, então, ensina como resolver o problema; os estudantes mais comunicativos tiram algumas dúvidas; os mais tímidos corriqueiramente tentam compreender a partir das dúvidas dos mais comunicativos. Assim, o professor entrega uma lista de exercícios para os estudantes que devem resolver a fim de se prepararem para as provas. Isto se repete durante todo o semestre.

Essa metodologia foi ou ainda é a forma como muitas pessoas estudaram Cálculo ou Geometria Analítica. As constantes retenções e alto índice de fracasso levam muitos pesquisadores e, mesmo, instituições a buscar alternativas. Algumas metodologias de ensino foram desenvolvidas a fim de proporcionar melhorias no ensino e diminuir as dificuldades encontradas por alunos e professores em relação à Matemática no Ensino Superior. Uma das metodologias de Ensino é o Ensino Híbrido, tradução do termo *Blended Learning*, que de acordo com Friesen (2012) tem origem incerta, mas uma de suas primeiras ocorrências foram identificadas em um comunicado à imprensa de 1999, pela empresa *EPIC Learning de Atlanta, USA*. Enquanto metodologia de ensino, integra modelos presenciais e virtuais. Essas metodologias, por sua vez, também colaboram com o cenário do Ensino Superior uma vez que propõe a participação ativa do estudante nos momentos de aula.

A metodologia de Ensino Híbrido que abordamos neste trabalho é a Sala de Aula Invertida (SAI), que consiste no privilégio do tempo de sala de aula para interação com o estudante, dando a ele o papel ativo, e a parte de apresentação ou leitura do conteúdo é deixada para o momento em que o estudante não tem o professor presente. Há, portanto, uma inversão de tempos de aprendizagem. Neste modelo de ensino, o professor prepara os materiais de apresentação do conteúdo antecipadamente e os envia para os alunos, estes podem ser, por exemplo, em forma de textos, vídeos, animações etc. É possível utilizar também situações para que os discentes resolvam antes da aula com base no material disponibilizado pelo professor. Os estudantes, por sua vez, devem se preparar para a aula estudando o material em casa, resolvendo as situações propostas pelo docente e anotando as dúvidas que se depararam no estudo do material enviado. Ao resolverem tais situações, eles enviam as resoluções para o professor, que analisa quais dificuldades os alunos apresentam, podendo discutir as situações com maior índice de dificuldade. Na sala, o tempo de aula é utilizado para a resolução dessas situações, discussões acerca do que foi estudado pelos estudantes. Neste modelo de ensino, é sugerido que eles levem suas dúvidas para sala de aula, para que estas possam ser discutidas com professores e estudantes, para que de modo colaborativo e possam ir aprendendo juntos.

As tecnologias digitais na Sala de Aula Invertida são opções de recursos que o professor pode utilizar. Uma dessas ferramentas são os ambientes virtuais de aprendizagem (AVA), nos quais o professor pode disponibilizar para o estudante materiais, como vídeos, textos ou animações. Também é possível criar grupos de discussões *on-line*, ou utilizar *quizzes* para que os alunos resolvam antes da aula. A tecnologia digital possibilita que professores e estudantes possam se comunicar e ter um *feedback* de suas ações, como é o caso do estudo desenvolvido por Sucipto *et al.* (2017) que utiliza o sistema de gestão de aprendizagem Edmodo[1] integrado à Sala de Aula Invertida como recurso que possibilite flexibilização do ensino. De acordo com (SUCIPTO *et al.*, 2017) os estudantes que fizeram uso deste recurso apresentaram um bom desempenho e o principal motivo pode ter sido a capacidade de retroceder o vídeo ou ler o material da lição completamente no ritmo individual do estudante.

Devido às dificuldades encontradas por estudantes de ciências exatas de cursos superiores, muitas pesquisas acontecem nesse âmbito. Um exemplo é o trabalho de Pavanelo e Lima (2017) que utilizam a Sala de Aula Invertida como metodologia de ensino na disciplina de Cálculo 1. Nesse estudo, os estudantes conseguiram obter um desempenho melhor nas avaliações com o uso desta

[1] O Edmodo é uma plataforma educacional gratuita, pode ser acessada em: https://new.edmodo.com/

metodologia. Além da melhoria no desempenho em avaliações, a Sala de Aula Invertida pode contribuir também com a autonomia dos estudantes, uma vez que estes devem se responsabilizar quanto aos estudos em casa.

Além da autonomia, outra contribuição que a sala de aula invertida é a flexibilização de materiais de aprendizagem de acordo com as necessidades de cada estudante. Como um tipo de Ensino Híbrido, a SAI pode colaborar com a personalização do ensino por meio da flexibilização do ensino de acordo com as necessidades dos alunos. Pode-se flexibilizar para obter ou melhorar determinada habilidade, levando em consideração o perfil de aprendizagem do estudante, ou mesmo, para que cada um possa aprender, de acordo com seu ritmo. Assim, cabe ao professor verificar as necessidades deles, quais habilidades precisam ser alcançadas e quais caminhos eles precisam traçar para que consigam alcançá-las.

No Ensino Híbrido, assim como na SAI, propõem-se instrumentos de avaliações frequentes para que seja possível acompanhar o desenvolvimento dos alunos por meio de suas respostas ao longo da disciplina. Possibilita, ainda, que o discente avalie sua aprendizagem refletindo sobre suas dificuldades, necessidades e avanços. Deste modo, nossa questão de pesquisa é: como construir um framework para auxiliar o professor no acompanhamento da aprendizagem personalizada dos estudantes?

Por um lado, o ensino pautado na postura ativa do estudante possibilita a personalização e flexibilização; por outro lado, lidar com decisões e escolhas de materiais e proposição de situações de forma personalizada exige do professor um grande esforço tanto na análise dos protocolos dos alunos e na sistematização das informações para escolha de materiais. Por acreditar que a SAI, conjuntamente com o uso de tecnologias digitais pode colaborar com a personalização do ensino, criamos como subgrupo do Grupo de Estudos em Recursos Educacionais (GERE), um subgrupo sobre SAI. Neste subgrupo, estudamos esta metodologia de ensino e seus processos de flexibilização e personalização da aprendizagem. Desta forma, pensamos na criação de um dispositivo com o qual o professor pudesse fazer um acompanhamento das aprendizagens dos estudantes, mapeando suas habilidades e dificuldades, e identificando quais recursos poderiam ser mais adequados à aprendizagem de cada estudante. Vimos no vídeo um recurso que pudesse ajudar o estudante em suas dificuldades específicas, mas precisávamos também de algo que nos ajudasse a organizar e gerir a identificação das dificuldades dos discentes, a partir disso, pensamos na utilização da Teoria dos Campos Conceituais do Psicólogo e Didáta Gérard Vergnaud (1990). Esta teoria nos ajudou a estruturar o dispositivo, identificar os melhores recursos (situações e materiais como vídeos, textos, simulações) adequados às necessidades dos estudantes. Este estudo culminou com a pesquisa de Lima Jr. (2020), que validou o dispositivo para o acompanhamento da aprendizagem de uma aluna sobre o conteúdo de frações, vendo a dificuldade existente a respeito das frações. Agora, observando as dificuldades encontradas por estudantes do Ensino Superior a respeito da disciplina de Geometria Analítica, que tem entre as disciplinas de matemática uma grande taxa de retenção, pensamos em acompanhar os alunos neste contexto, em relação ao conteúdo de cônicas, que também gera dificuldades.

Esta proposta de estudo tem como objetivo geral construir e validar um framework para o acompanhamento da aprendizagem personalizada de estudantes de Geometria Analítica, em um contexto da sala de aula invertida sobre o conteúdo de cônicas. Como objetivos específicos temos:

(a) Adaptar a estruturação de conhecimentos desenvolvida em Lima Jr. (2020) para o campo das cônicas;

(b) mapear os componentes que permitem construção da estruturação de conhecimento necessário à aprendizagem de cônicas em Geometria Analítica;

(c) Testar e validar a estrutura de acompanhamento do desenvolvimento de três estudantes por meio do framework;

(d) Construir uma estrutura de análise de situações e recursos didáticos sobre cônicas, a partir da adaptação da estrutura de conhecimento (a);

(e) Construir e analisar teoricamente situações e recursos didáticos para compor o banco de recursos e o banco de situações;

(f) Identificar as possibilidades do framework quanto ao acompanhamento da aprendizagem dos estudantes.

Estruturamos esta dissertação, com a fundamentação teórica, após esta Introdução, dividida em quatro seções. Nelas abordamos a contribuição de cada estudo em nossa pesquisa. Assim, apresentamos a noção de metodologias ativas e do Ensino Híbrido, assim como a relevância do uso dessas metodologias no ensino e aprendizagem, como autonomia e protagonismo do estudante na aprendizagem. Na seção 2.2, apresentamos e discutimos a SAI, com foco na abordagem que utilizamos e sua contribuição para otimização do tempo de sala de aula, flexibilização e personalização. Na seção 2.3, discutimos o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, alguns aspectos históricos e as dificuldades encontradas por estudantes do Ensino Superior ao cursarem essa componente curricular. No capítulo 3, apresentamos o FrameAGAP e sua criação. Descreveremos sobre o método utilizado nesta pesquisa no capítulo 4, seguido das discussões e resultados obtidos no capítulo 5, por fim, as considerações finais e as referências que utilizamos em nosso estudo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E CONCEITOS BÁSICOS

Apresentamos aqui as ideias e argumentos que fundamentam esta pesquisa. Abordamos o conceito da aprendizagem prática, colaborativa, híbrida (tópico 2.1) e a Sala de Aula Invertida (tópico 2.2).

Além disso, descreveremos a Teoria dos Campos Conceituais (no tópico 2.3) que é a base para a construção do FrameAGAP. E por fim, abordamos o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica (tópico 2.4), objeto matemático de estudo nesta dissertação.

2.1 METODOLOGIAS ATIVAS E ENSINO HÍBRIDO

Em um mundo no qual discutimos e pensamos a diversidade e as singularidades de cada um, precisamos aproveitar a força que vem dessa discussão e pensar em uma educação diversificada, que atenda aos diversos saberes e alunos, desde aqueles que vão bem em tudo, aqueles que vão bem em português, mas têm dificuldades em história, e tantas outras situações que nos deparamos em sala de aula.

Desse modo, trabalhar com as metodologias ativas também oportuniza novas configurações de relacionamento entre os alunos, já que partilham o que se estão aprendendo, as atividades propostas podem gerar inquietações, dúvidas que podem ser discutidas entre eles e resolvidas assim de forma colaborativa.

Estas novas configurações de relacionamento atingem não somente aluno-aluno, mas também o professor-aluno, pois assim, o docente reflete sobre a sua prática, antes centralizadas em si, como sujeito que transmite a informação e examina se os estudantes a compreenderam.

Diferente do citado anteriormente, nas metodologias ativas, o professor deve incentivar a autonomia dos estudantes, para que possam tomar a frente do seu próprio processo de aprendizagem, pesquisando, discutindo com professores e colegas sobre o que está sendo aprendido. Professores devem também promover espaços para que sejam realizadas atividades colaborativas, práticas, participativas, com momentos individuais e coletivos.

Segundo Moran (2017, p. 23) com as “Metodologias ativas: aprendemos melhor através de práticas, atividades, jogos, projetos relevantes do que da forma convencional, combinando colaboração (aprender juntos) e personalização (incentivar e gerenciar os percursos individuais).”

Neste espaço, cabe pensar que cada aluno tem sua singularidade, assim, é importante abordar sobre a flexibilização, que traz essa dinâmica de planejar quais caminhos são melhores para que o discente “A” trilhe, e quais percursos podem ser seguidos pelo estudante “B”. Em parceria com o professor (que nesta metodologia tem um papel também de orientador) o estudante pode escolher um caminho, não obrigatoriamente igual ao dos demais alunos.

O professor promove ambientes que estimulem a troca de saberes, a interação, momentos de orientações e a flexibilização da aprendizagem, os alunos podem traçar caminhos diferenciados de acordo com seu modo de aprender.

Com as tecnologias digitais que temos hoje, podemos integrar estas a educação, seja na parte administrativa, na qual é possível armazenar dados dos estudantes, professores, registros de aulas, entre outros, ou, combinando as tecnologias com metodologias de ensino, como as metodologias ativas.

É possível combinar as metodologias ativas com o Ensino Híbrido (que mescla o ensino presencial com a educação on-line), de acordo com Moran (2017, p.23):

> A combinação da aprendizagem ativa e híbrida com tecnologias móveis é poderosa para desenhar formas interessantes de ensinar e aprender. A aprendizagem ativa dá ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor; a aprendizagem híbrida destaca a flexibilidade, a mistura e compartilhamento de espaços, tempos, atividades, materiais, técnicas e tecnologias que compõem esse processo ativo.

As metodologias ativas e o Ensino Híbrido buscam colaborar com o ambiente educacional, levando em consideração a importância do desenvolvimento de competências, como o trabalho em grupo, proatividade, autonomia, entre outros, que busquem preparar o aluno para lidar com um mundo de complexidades.

No Ensino Híbrido, as tecnologias de ensino *online* são utilizadas para contribuir com a metodologia de ensino. Assim, os momentos *online* e de sala de aula são planejados de modo em que haja consonância entre características do ensino *online* (como o acesso a diversos tipos de materiais gratuitos, vídeos, animações, textos, *e-books*, jogos educacionais e instruções à distância) e características do ensino presencial (colaboração, momentos de discussões, compartilhamento de saberes e a supervisão dos professores). Christensen, Horn e Staker (2013, p. 7), apresentam uma definição desta metodologia de ensino:

> O ensino híbrido é um programa de educação formal no qual um aluno aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino online, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, lugar, modo e/ou ritmo do estudo, e pelo menos em parte em uma localidade física supervisionada, fora de sua residência.

A maneira de combinar ensino *online* com as aulas presenciais está sendo uma das formas de inovar em sala de aula, promovendo uma aprendizagem integrada. O professor, neste sentido, pode utilizar recursos para instruir os estudantes de acordo com suas habilidades, ou preparar momentos presenciais em ambientes diversificados, não só na sala de aula, mas em ambientes que incentivem interação, colaboração e acompanhamento dos alunos presencialmente.

É possível, também, promover diferentes modelos de ensino de modo que contemple as várias realidades de tempo de estudo dos alunos, ou seja, os estudantes podem escolher em que período do seu dia será dedicado aos estudos *on-line* e quais serão seus percursos de aprendizagem.

O modelo de Ensino Híbrido pode ter equilíbrio de tempos (tempo presencial e tempo *on-line*) ou distribuição de tempos diferentes, alguns com mais tempo na modalidade on-line e menos tempo na modalidade presencial. Assim, apresentamos os modelos de Ensino Híbrido e aprofundamos no próximo tópico deste trabalho o modelo de ensino híbrido que é utilizado nesta pesquisa, a Sala de Aula Invertida.

Existem quatro modelos de Ensino Híbrido: Modelo de Rotação, Modelo Flex, Modelo a La Carte e o modelo Virtual Enriquecido.

Os modelos de rotação fazem uso do ensino *online* em pelo menos uma de suas etapas. Segundo Horn e Staker (2015), esta categoria inclui qualquer curso ou matéria em que os estudantes alternam – em uma sequência fixa ou a critério do professor – entre modalidades de aprendizagem em que pelo menos uma seja *online*, como mostra a Figura 1 a seguir.

Figura1: Modelos de Ensino Híbrido

Fonte: Christensen, Horn e Staker, (2013, p. 28)

O modelo de rotação é dividido em quatro grupos: Modelo de Rotações por estações, laboratórios rotacionais, Sala de Aula Invertida e rotação individual, como mostra a Figura 1.

Os modelos que estão mais próximos à cor azul, combinam o ensino presencial com o ensino on-line, com quantidade de tempo mais equivalente, um meio a meio. Além disso, apresentam uma base mais próxima com o ensino presencial, quando comparados com os modelos que estão mais próximos ao ensino *on-line* (na parte verde da Figura 1).

Os modelos da Zona Híbrida (parte azul) apresentam características do ensino tradicional. Nestas metodologias, boa parte do tempo é dedicada aos momentos presenciais, com discussões, trabalhos em equipe, entre outros. Estas metodologias podem ser integradas em sala de aula por professores que queiram utilizar novas metodologias, fazendo uso de tecnologias de forma significativa.

Como mostra a Figura 1, o Modelo de Rotação, localizado na Zona Híbrida, se subdivide em outros quatro modelos, são eles: A rotação por estações, laboratório rotacional, Sala de Aula Invertida e rotação individual.

Na rotação por estações, o professor pode conduzir o ensino com rotatividade de horários; assim, o aluno passa por cada estação em determinada quantidade de tempo, as atividades em cada estação podem acontecer de forma individual ou em grupos, *on-line* ou presencialmente, com o acompanhamento e orientação do professor. Segundo Christensen, Horn e Staker (2013, p.27) “o **modelo de Rotação por** Estações — ou o que alguns chamam de Rotação de Turmas ou Rotação em Classe — é aquele no qual os alunos revezam dentro do ambiente de uma sala de aula.”

No Laboratório Rotacional, o professor pode propor atividades que sejam realizadas não apenas no ambiente de sala de aula, é possível utilizar recursos on-line assíncronos ou síncronos. Christensen, Horn e Staker (2013, p.27) afirmam que, “o **modelo de Laboratório Rotacional** é aquele no qual a rotação ocorre entre a sala de aula e um laboratório de aprendizado para o ensino *on-line*.”

O modelo de Sala de Aula Invertida reorganiza o tempo em sala de aula, com momentos de instruções *on-line* e presencialmente, pode haver discussões e atividades práticas sobre o que está sendo estudado. Segundo Christensen, Horn e Staker (2013, p.27) **“**é aquele no qual a rotação ocorre entre a prática supervisionada presencial pelo professor (ou trabalhos) na escola e a residência ou outra localidade fora da escola para aplicação do conteúdo e lições *on-line*.”

Na rotação individual, que na Figura 1 se encontra fora da Zona Híbrida (se distanciando do modelo mais tradicional e presencial). O aluno recebe instruções personalizadas, seguindo caminhos de aprendizagens únicos e de acordo com suas necessidades individuais, decidindo em parceria com o professor quando devem avançar. Segundo Christensen, Horn e Staker (2013, p. 27) “O **modelo de Rotação Individual** difere dos outros modelos de Rotação porque, em essência, cada aluno tem um roteiro individualizado e, não necessariamente, participa de todas as estações ou modalidades disponíveis.”

Os modelos Flex, A La Carte e Virtual, que na Figura 1, estão fora da Zona Híbrida, apresentam características de ensino mais *on-line* que presencial. Estas metodologias podem colaborar com a aprendizagem de estudantes que não podem participar de cursos exclusivamente presenciais, como os alunos que trabalham em horário comercial e enfrentam dois turnos durante a semana ou ainda, discentes que têm filhos e precisam passar mais tempo em casa. Neste sentido, Christensen, Horn e Staker, (2013, p. 27) apontam que:

> O **modelo Flex** é aquele no qual o ensino *online* é a espinha dorsal do aprendizado do aluno, mesmo que ele o direcione para atividades *offline* em alguns momentos. Os estudantes seguem um roteiro fluido e adaptado individualmente nas diferentes modalidades de ensino, e o professor responsável está na mesma localidade.

No modelo A La Carte, o tempo e o espaço onde uma disciplina poderá ser cursada são flexíveis. Os estudantes podem escolher participar de forma *on-line* e ter também auxílio do professor em sala de aula (ou fora dela) nos momentos presenciais.

No Modelo Virtual Enriquecido é possível dedicar determinado tempo de um curso integral, em parte presencial e outra on-line. Este modelo pode ser utilizado por escolas que funcionam em tempo integral, de modo que os alunos possam dividir o tempo em que se dedicarão à parte presencial e *on-line*.

Os modelos de Ensino Híbrido podem colaborar com o processo de responsabilidade dos estudantes em relação à sua própria aprendizagem. Como visto, os alunos podem flexibilizar a aprendizagem, ao decidir quando necessitam voltar ou avançar no conteúdo estudado. Também podem escolher o tempo em que a aprendizagem pode acontecer, decidindo se desejam pausar, avançar, rever ou aprofundar os conteúdos estudados.

Embora os alunos de uma turma possam ter a mesma idade, não quer dizer que eles aprendam da mesma forma, nem em um mesmo ritmo. Alguns podem aprender determinado assunto com mais facilidade, outros não. As dúvidas acerca de um mesmo conteúdo podem ser diferenciadas. Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p. 59) apontam que:

> estudantes da mesma idade não têm as mesmas necessidades, possuem relações diferentes com professores e/ou tecnologias digitais e nem sempre aprendem do mesmo jeito e ao mesmo tempo. Nem sempre é necessário que toda a turma caminhe no mesmo ritmo. Avançamos gradativamente para outro desafio da educação: a personalização do ensino.

Numa aula tradicional, o conteúdo parte de um mesmo ponto, onde se examinam todos os alunos da mesma forma e, muitas vezes, ainda que se tenha um resultado sobre o desempenho dos alunos, esse não é retomado.

Para Schneider (2015. p. 81), “Há muito se discute a possibilidade de um ensino que atenda às necessidades de aprendizagem do aluno; entretanto, hoje, contamos com um facilitador: o uso das novas tecnologias em sala de aula.” Assim, o professor pode auxiliar os alunos, acompanhado as necessidades dos estudantes e o que pode ser feito para que apresentem um desempenho melhor.

A personalização é centrada no aluno, neste processo o professor apresenta *feedbacks*, retoma o que for preciso e planeja quais são os melhores caminhos para que o estudante consiga aprimorar sua aprendizagem, segundo Schneider (2015, p. 81) "Personalizar significa que as atividades a serem desenvolvidas devem considerar o que o aluno está aprendendo, suas necessidades, dificuldades e evolução – ou seja, significa centrar o ensino no aprendiz."

Desta maneira, o aluno pode se auto avaliar, refletindo sobre o que, do seu ponto de vista, pode ser melhorado e como pode ser feito. De acordo com Scheneider (2015, p. 81), "Um ensino personalizado exige muito mais do estudante, que tem de ter autonomia e responsabilidade a ponto de ir atrás de suas necessidades, curiosidades e interesses."

A busca pelo desenvolvimento da aprendizagem dos alunos pode fazer com que estes compreendam suas responsabilidades, sintam-se engajados durante os momentos de aprendizagens e que colaborem com outros estudantes para que consigam aprender juntos. Scheneider (2015, p. 84) argumenta que:

> Para o estudante, os benefícios da personalização são, sobretudo, a motivação – que substitui a frustração por não aprender e não acompanhar o ritmo, ditado, muitas vezes, pelo professor – e a maximização do aprendizado, no sentido de que o aluno tem oportunidade de aprender de forma individual, com o grupo, com o uso das tecnologias e, efetivamente, com o professor.

Sabendo que os alunos apresentam estilo e tempos de aprendizagens diferenciados, deve-se refletir sobre a importância de se utilizar metodologias que se adaptem às necessidades dos estudantes.

As plataformas adaptativas são ferramentas que podem ser utilizadas em metodologias de ensino, como em modelos de Ensino Híbrido de modo que se possa acompanhar o desenvolvimento dos alunos, apresentando *feedbacks* do que pode ser melhorado. Segundo Lima e Moura (2015) essas plataformas são ferramentas que "facilitam bastante a metodologia de ensino híbrido."

Os modelos de Ensino Híbrido também podem ser combinados, mas devem atender aos mesmos critérios citados no início do texto, conter pelo menos em uma de suas etapas um modelo de ensino *on-line*, conter locais físicos onde tenha colaboração do professor no momento de aprendizagem e propor uma aprendizagem integrada.

Os usos das metodologias ativas e do Ensino Híbrido contribuem significativamente com a aprendizagem dos estudantes e podem ser utilizado em diversas modalidades de ensino, como no Ensino Fundamental, Médio, Educação de Jovens e Adultos, embora ainda existam muitas pesquisas que abordem o ensino e aprendizagem com a utilização dessas metodologias no Ensino Superior, devido às dificuldades enfrentadas por estudantes desta modalidade. Uma das abordagens do Ensino Híbrido bastante utilizada no Ensino Superior, tem sido a Sala de Aula Invertida, que abordaremos com mais detalhe no próximo tópico.

2.2 SALA DE AULA INVERTIDA

Diante das dificuldades encontradas na Educação Superior no ensino das disciplinas de ciências exatas, é necessário pensar metodologias de ensino que possam contribuir com este campo de ensino. Uma das metodologias pensadas para este nível de ensino é a Sala de Aula Invertida.

Nela, acontece um momento de antecipação, no qual o professor envia previamente aos alunos materiais de estudos. Em casa, os estudantes trabalham no conteúdo sugerido pelo docente e em sala de aula acontecem as resoluções de problemas e discussões. De acordo com Valente (2014, p.85):

> A inversão ocorre uma vez que no ensino tradicional a sala de aula serve para o professor transmitir informação para o aluno que, após a aula, deve estudar o material que foi transmitido e realizar alguma atividade de avaliação para mostrar que esse material foi assimilado.

No decorrer das disciplinas de ciências exatas, é comum que se apresente, por exemplo, os teoremas, as leis, em seguida que se exemplifique o teorema aplicado a um problema. Geralmente, essa etapa é realizada pelo professor, que logo após entrega uma lista de exercícios para que os alunos apliquem o teorema nos problemas da lista. Por fim, acontece um momento de avaliação, em geral baseada nos exercícios da lista. Este ciclo segue por todo semestre.

O que acontece na Sala de Aula Invertida é que ela modifica esse roteiro utilizado muitas vezes em sala de aula. Segundo Valente (2014, p.87) “A dificuldade da inversão ocorre especialmente nas disciplinas das ciências exatas, nas quais a sala de aula é usada para passar o conhecimento já acumulado.” Deste modo, algumas pesquisas são realizadas nesse contexto, como é o caso do estudo de Casselman, Ohlsen e Atwood (2017) que observando as dificuldades dos estudantes na disciplina de Química Geral 1, na universidade de Utah (EUA). Para resolver, implementaram pré-requisitos matemáticos a serem estudados pelos alunos, além de utilizarem a metodologia de Sala de Aula Invertida com o auxílio da Teoria de Resposta ao Item. Por meio da pesquisa conseguiram identificar em quais tópicos os estudantes apresentavam dificuldades. A partir daí, utilizaram exercícios metacognitivos voltados às dificuldades. Casselman; Ohlsen e Atwood (2017, p. 456) afirmaram que “Essas etapas aumentaram nossas taxas de sucesso para aproximadamente 76%.”.

No modelo tradicional, boa parte do tempo de aula é utilizado para à explicação de conteúdos e outra destinada aos exercícios práticos, ou outras atividades. Assim, o tempo para discutir o que foi compreendido ou as dificuldades acaba sendo reduzido. Bergmann e Sams (2019, p. 12), corrobora com essa discussão ao afirmar que:

> No modelo tradicional, os alunos geralmente comparecem à aula com dúvidas sobre alguns pontos do dever de casa da noite anterior. Quase sempre dedicávamos os primeiros 25 minutos a atividades de aquecimento e a explicações dos pontos obscuros. Em seguida, apresentávamos novo conteúdo durante 30 ou 45 minutos e destinávamos o restante da aula a práticas independentes ou a experiências de laboratório.

Desta forma, o professor reserva o tempo em que estaria explicando o conteúdo, para tirar dúvidas dos alunos e focar naquilo que não está sendo compreendido. De acordo com Bergmann e Sams (2019), com o novo método a atenção maior passa a ser dada àqueles que mais precisam. Ao circular pela sala, eles conseguem direcionar a atenção aos que bloqueiam ou apresentam dificuldade.

Esse redirecionamento de tempo abre espaço também para as trocas de ideias, compartilhamento de saberes e discussões sobre as dúvidas que surgem a partir do material previamente elaborado pelo professor.

Com o desenvolvimento das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC’s), facilitou-se esse processo de elaboração e procura de materiais, como artigos, vídeos, jogos, entre outros. Além da possibilidade de se utilizar ferramentas/plataformas de edição e de autoria, como o *Canva*[2], ambientes de compartilhamentos, como o Google *Classroom*. Tudo isso vem contribuindo com a adoção do modelo por professores.

Os vídeos têm sido um dos materiais mais utilizados para o envio do conteúdo a ser estudado previamente. Assim, o aluno pode iniciar seus estudos conforme o seu tempo disponível. Segundo Valente (2014, p. 92), “Os vídeos gravados têm sido os mais utilizados pelo fato de o aluno poder assisti-los quantas vezes for necessário e dedicar mais atenção aos conteúdos que apresentam maior dificuldade.”

Porém, pesquisadores como Bergmann e Sams (2019, p. 11) apontam a importância de instruir os alunos com formas de assistir aos vídeos, caso o vídeo seja o recurso utilizado pelo professor.

> Nós os incentivamos a desligar iPods, telefones e outras distrações enquanto assistem ao vídeo. Sugerimos que “pausem” e “retrocedam” o professor, encorajando-os a usarem sem parcimônia o botão “pausa” para que possam anotar pontos importantes da lição. Além disso, também orientamos os alunos a adotarem o método Cornell de anotações, em que transcrevem os pontos importantes, registram quaisquer dúvidas que lhes ocorram e resumem o conteúdo aprendido.

Incentivar os alunos a realizar anotações neste modelo de ensino, ao serem levados para sala de aula pode ajudar o professor na verificação de materiais adequados, dúvidas comuns dos alunos e discussões em sala de aula.

O vídeo não precisa ser obrigatoriamente gravado pelo docente, caso este não tenha ferramentas de edição, câmera com boa resolução, dispositivo de armazenamento de dados, entre outras situações, é possível encontrar bons vídeos em canais de professores que trabalham com esse recurso e que o disponibilizam de forma gratuita, com uma boa edição, com animações, entre outras coisas.

Enquanto recurso tecnológico, pode ser utilizado pelo professor, mas existem muito mais disponibilizados até gratuitamente, como o *Canva*' por exemplo, onde é possível elaborar documentos, infográficos, apresentações, posts, entre outros, com a possibilidade de incluir imagens, figuras, animações e textos com fontes variadas.

A sala de aula é plural, diversificada, deste modo, a utilização de recursos variados não só dinamiza o que está sendo aprendido, como respeita os diferentes

[2] O Canva é um editor de *design* gráfico que permite criar documentos, apresentações e outros materiais personalizados de forma gratuita. Disponível em: https://www.canva.com/

gostos. Visto que alguns alunos irão gostar de assistir mais aos vídeos, outros dos textos, existem os que preferem infográficos e tem aqueles que amam os *softwares* de simulação, assim se faz importante integrar tais recursos.

Ao pensarmos no modelo tradicional de ensino, percebemos que nele é mais difícil que se leve em consideração a pluralidade da sala de aula, tornando difícil tanto o uso de diversos recursos, como a percepção das diferentes habilidades que os estudantes apresentam.

Ao ensinarmos um conteúdo para uma turma, nem sempre levamos em consideração que os alunos são diferentes, apresentam gostos diversos, personalidades variadas, necessidades e dificuldades diferentes. Deste modo, a inversão colabora com a possibilidade de se trabalhar melhor com os diferentes recursos e com as diversidades em sala de aula. Segundo Bergmann e Sams (2019, p. 25):

> Uma das dificuldades nas escolas de hoje consiste em acomodar uma ampla variedade de habilidades em cada turma. Temos todos os tipos de alunos, contemplando desde os que superam as expectativas, passando pelos que se situam na média e os que nem sempre compreendem o conteúdo, até chegar aos que mal conseguem ler. A inversão da sala de aula nos mostrou como muitos de nossos alunos são carentes e o quão poderoso é o novo método para atender às necessidades de cada estudante, em meio a toda diversidade.

Levando em consideração as diversidades, as necessidades variadas de cada aluno, é mais fácil personalizar o ensino. Para Bergmann e Sams (2019), a personalização pôde ser feita por eles, por conhecer os estudantes ao acompanhá-los resolvendo os problemas.

Na utilização da Sala de Aula Invertida é importante que se tenham momentos de acompanhamento do desempenho dos estudantes. Estas avaliações podem ocorrer como um teste, um *quizz*, enviado juntamente com o material didático disponibilizado pelo professor, como uma forma de entender quais dificuldades os alunos estão tendo, para que sejam trabalhadas em aula. Assim como, podem ocorrer em outros momentos, como no momento presencial, quando as atividades realizadas podem servir como base para a avaliação.

Um exemplo de personalização utilizando testes rápidos pode ser observado no trabalho realizado por Medeiros e Bessa (2017) que desenvolveram o MiniTeste, uma ferramenta de testes em tempo real integrada a um banco de questões diversas (o MultiProva) e ao Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas (SIGAA), da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), para ser utilizado na metodologia de Instrução por pares. Medeiros e Bessa (2017, p. 9) indicam que "o uso de testes rápidos, como os que são criados com a ferramenta MiniTeste, possibilita que o docente prepare diversos cenários para o momento do encontro presencial, de forma que a aula possa ser adaptada às necessidades da turma". Com a utilização desses testes de forma frequente, é possível observar as dificuldades dos estudantes e da turma.

As avaliações realizadas frequentemente podem dar indicativos de dificuldades que estão sendo encontradas pelos estudantes, assim o professor pode orientar e acompanhar melhor o desempenho dos alunos. É necessário que o aluno esteja ciente de sua aprendizagem, deste modo é importante que professores e alunos utilizem os *feedbacks* para que se tenha um panorama do que é preciso aprender. Valente (2014, p. 91) argumenta o seguinte:

> A sala de aula presencial assume um papel importante nessa abordagem pedagógica pelo fato de o professor estar observando e participando das atividades que contribuem para o processo de significação das informações que os estudantes adquiriram estudando on-line. Nesse sentido, o feedback é fundamental para corrigir concepções equivocadas ou ainda mal elaboradas.

Com a utilização de *feedbacks*, os alunos ficam cientes de sua aprendizagem, assim, com a ajuda do professor podem focar no que é mais necessário para cada um. Valente (2014) chama a atenção também para a conscientização desenvolvida pelos estudantes ao se prepararem anteriormente para a aula.

A SAI pode desenvolver a autonomia dos estudantes, uma vez que estes precisam iniciar seus estudos *on-line* a partir de materiais elaborados pelo professor. É importante que o docente observe a autonomia de sua turma ao propor esta metodologia de ensino. Segundo Valente (2014, p. 93), "O ponto considerado mais problemático é o fato de o aluno não se preparar antes da aula e, com isso, não ter condições de acompanhar o que acontece na sala de aula presencial." Ao apresentar esta crítica, Valente (2014, p. 93) cita uma solução apontada por Bergman e Sams (2012), na qual "a solução para os alunos que não se preparam antes das aulas é a realização de tarefas ou autoavaliações que são computadas no processo de avaliação formal do aluno."

Além da possibilidade de se desenvolver a autonomia dos alunos, a Sala de Aula Invertida pode estimular a colaboração entre os estudantes, que nos momentos presenciais de discussão e trocas de conhecimentos, aprendem com os saberes dos outros e ensinam também. De acordo com Valente (2014, p. 93) “Essa colaboração entre alunos, a interação do aluno com o professor são aspectos fundamentais do processo de ensino e de aprendizagem que a sala de aula tradicional não incentiva.” Essa colaboração pode ser mediada por recursos que possibilitem o trabalho em equipe, como atividades compartilhadas no *Jamboard*[3], além disso, existe a possibilidade de se escolher uma abordagem de Sala de Aula Invertida que proporcione uma melhor organização da aula, incentivando a colaboração, flexibilização e personalização.

A Sala de Aula Invertida apresenta algumas abordagens (ou métodos) com algumas diferenças, como é o caso dos métodos *Peer Instruction* (PI), em português o termo é traduzido como Instrução por Colegas (IpC) e o *Just-in-Time Teaching* (JiTT), com termo em português traduzido como Ensino sob Medida (EsM). Aprofundamos esta última abordagem, pois faz parte da proposta deste trabalho e nos referimos a este método utilizando o termo em português.

No Ensino sob Medida os materiais (teórico e questões de aquecimento) são enviados previamente pelo professor, os alunos estudam o material, resolvem as questões e as retornam para o professor, que as utilizam como *feedback*, de modo que se possa planejar a aula a partir do conhecimento prévio demonstrado pelos estudantes, conforme apontam Araújo e Mazur (2013, p. 371) indicam que:

> O ponto principal no EsM é a possibilidade do professor planejar suas aulas a partir dos conhecimentos e dificuldades dos seus alunos, manifestadas através das respostas que eles fornecem em atividades de leitura prévias aos encontros presenciais.

Os exercícios prévios incentivam o aluno a refletir sobre o material estudado. No ensino de ciências exatas, estas questões não precisam ser necessariamente problemas de cálculo, elas podem ter outras formas, como questões discursivas, por exemplo. Araújo e Mazur (2013), por exemplo, ao introduzir o trabalho em sala de aula, fazem o aquecimento com base em atividades para promover o pensamento crítico, buscam que os alunos argumentem.

---

[3] O Google *Jamboar*d é um quadro branco colaborativo, digital e gratuito, que pode ser utilizado na realização de trabalhos em grupos. Disponível em: https://jamboard.google.com/

As questões servem de base para discussões. Tendo as respostas antecipadamente, o professor pode planejar abordagens, os recursos, que poderão ser utilizadas em sala de aula, levando em consideração as informações sobre a compreensão e dificuldades que obteve com as respostas dos alunos.

A forma como o tempo é utilizado e o roteiro proposto por esta metodologia podem ser fatores de engajamento para os estudantes, uma vez que o momento de explicação do conteúdo é breve e os estudantes são incentivados a discutir e agir em sala de aula. Segundo Araújo e Mazur (2013, p. 372) “O ponto principal para promover o engajamento dos estudantes durante a aula é que haja mudança nas atividades que realizam.”

As questões de aquecimento são norteadoras. Elas informam ao professor as dificuldades dos estudantes, porém durante o momento presencial da aula, podem ser discutidas tanto as questões de aquecimento num primeiro momento, como outras questões para resolução em sala de aula. Assim, com a utilização de recursos digitais, o professor pode ter *feedbacks* antes da aula, durante e após a aula. Neste modelo de ensino, a utilização dos *feedbacks* é frequente.

Com a utilização desta metodologia e com os testes que verificam a aprendizagem dos estudantes nos momentos antes, durante e após a aula, o professor pode planejar estratégias didáticas que apoiem a aprendizagem do aluno, como criar grupos colaborativos de aprendizagem entre os alunos.

Abordamos aqui sobre a diversidade de estudantes em sala de aula, a existência de dificuldades, a flexibilização, personalização e de como a Sala de Aula Invertida e o Ensino sob Medida podem ser utilizados para colaborar com as aprendizagens dos estudantes.

Personalizar o ensino, ainda que utilizando as metodologias aqui citadas, não é tarefa fácil. Apresentamos neste tópico, exemplos da personalização, pois acreditamos que o professor pode utilizar recursos para gestão de aprendizagem que o permita fazer um acompanhamento personalizado do estudante.

Com o uso destes recursos é possível informar ao estudante por meio de *feedbacks* quais são suas dificuldades, quais recursos podem-lhe ajudar e quais situações ele deve trabalhar para que consiga desenvolver determinado conceito. Segundo Vergnaud (1990), um conceito é formado a partir de situações a dominar.

Partindo desta ideia, abordamos no próximo tópico (2.3) a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida pelo psicólogo Gerard Vergnaud (1990), visto que ela ajudará na compreensão do leitor sobre a criação e o funcionamento do FrameAGAP para o acompanhamento da aprendizagem personalizada.

2.3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Nesta pesquisa, utilizamos como base para a construção do dispositivo tanto em sua primeira versão, validada por Lima Jr (2020), como nesta segunda versão, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), que foi desenvolvida pelo psicólogo, pesquisador e educador matemático Gerárd Vergnaud, recebendo influência das teorias dos renomados psicólogos Jean Piaget, com a teoria construtivista, e Lev Vygotsky, com a sócio-histórica.

A TCC é uma teoria que trata psicológica e didaticamente a construção e desenvolvimento de conceitos, partindo de uma pergunta central: Como o sujeito adquire e desenvolve conceitos? É difícil lembrar exatamente do dia que aprendemos a somar, por exemplo, isto porquê para que isso acontecesse nós passamos por um processo, envolvendo várias atividades que nos foram dadas, contamos nos dedos, fazendo traços no papel ou utilizando algoritmo da adição, alguns conseguem aprender de forma mais rápida, outros demoram um tempo, alguns utilizam desenhos, outros algoritmos, os percursos não são iguais, mas acabamos aprendendo, assim passamos a construir e desenvolver a ideia de adição.

Como estamos sempre mencionando sobre conceito, é importante destacar o sentido de conceito nesta teoria. Os conceitos nos ajudam a resolver uma determinada situação, quando nos deparamos com essas situações a resolver desenvolvemos também os conceitos, pode parecer um pouco confuso num primeiro momento, mas como explica Gitirana *et. al.* (2020, p. 13) “Os conceitos matemáticos têm os seus sentidos traçados a partir de uma variedade de situações e, normalmente, cada uma dessas situações não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito.” Ou seja, os conceitos estão conectados uns aos outros, interagem entre si. O estudante ao trabalhar com situações variadas desenvolve o conceito.

Para se compreender melhor, Vergnaud (2017, p. 17), apresenta algumas ideias básicas sobre sua teoria:

> a- Um conceito adquire sentido em função da multiplicidade de problemas aos quais responde.

> b- Os conceitos não funcionam isoladamente, mas sim vinculados uns aos outros, numa ampla e complexa rede.
> c- A aprendizagem de todas as propriedades e relações que envolvem tais conceitos acontecem por meio de uma longa história, entrelaçada por uma série de filiações e rupturas.
> d- Através das ideias anteriores, se pode definir um critério pragmático do conhecimento, onde um conceito não remete apenas à sua definição explícita, mas, basicamente, à sua possibilidade de funcionar na resolução de problemas.

Assim, é necessário que o professor possibilite que o estudante tenha contado com os diferentes tipos de situações para que o conceito adquira significado, podendo levar um tempo para que ele construa e desenvolva tais conceitos.

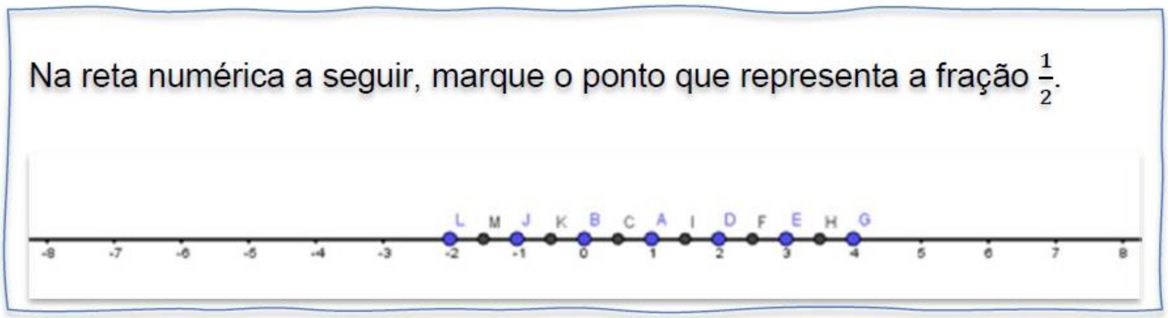
Recebendo a influência dos estudos de Piaget, Vergnaud (2017, p.18) diz que “os conceitos se organizam em forma de esquema”, que “são a organização invariante da conduta diante de uma classe de situações dadas.” Ele também destaca alguns elementos dos esquemas como “metas e antecipações, regras de ação, invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) e as inferências.”

Vergnaud (2017, p.18) diz que “O campo conceitual é um conjunto de situações cujo tratamento implica em esquemas, conceitos e teoremas, em estreita conexão, assim como as representações simbólicas suscetíveis de serem utilizadas para representá-los”. Um campo conceitual é formado por 3 (três) elementos principais para que o estudante chegue a desenvolver um conceito, que de acordo com Vergnaud (2017, p.18) “envolve um conjunto de situações que lhe dão significado: um conjunto de invariantes - propriedades do conceito - subjacentes ao raciocínio e um conjunto de símbolos utilizados para sua representação.”

Se olharmos o campo aditivo, por exemplo, as situações são os problemas abordados, as representações referem-se às formas que um conceito pode ser representado, e os invariantes podem ser descritos como a característica que determinado conceito apresenta. Estes são formados pelos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Vergnaud (2017) define o primeiro como um conceito tido como apropriado por parte do sujeito e o segundo como uma proposição que o estudante considera como verdadeira. Segundo Pessoa (2009, p. 44), “enquanto os teoremas-em-ação ainda não estão no nível da explicitação, os conceitos-em-ação estão mais próximos da formação de conceitos.”

Ao construir ou desenvolver um conceito, este apresenta diferentes significados e representações, em seu trabalho sobre o Mapeamento destinados ao acompanhamento individualizado em Sala de Aula Invertida: *Design* de um dispositivo modelado para o conteúdo de frações de recursos, Lima Jr. (2020) utiliza apresenta os diferentes significados a respeito da adição de frações, abaixo temos uma situação apresentada por ele, com significado **quociente entre dois números**:

Figura 2: Problema com fração como número na reta numérica



Fonte: Lima Jr. (2020, p. 32).

Outro significado para situações sobre frações, abordadas no trabalho de Lima Jr (2020, p.34), são as situações com significados de razão: “Para fazer uma mistura de cimento, um mestre de obras usa a razão de 3 para 7, 3 partes de cimento para 7 partes de areia fina. Seu auxiliar foi fazer uma mistura com 14 pás de areia fina, quanto ele teve que colocar de cimento?”

A utilização dos campos conceituais pode contribuir com o desenvolvimento de conceitos para conteúdos da Educação Básica, como também conteúdos do Ensino Superior, como é o caso da pesquisa realizada por Bittar (2009) sobre as Contribuições da TCC para o estudo das dificuldades dos alunos na passagem da Geometria Afim à Geometria Vetorial. Ela estuda sobre os vetores no ensino francês no qual estudantes estudam esse conceito antes do Ensino Superior, que é visto em cursos de Geometria Analítica e Álgebra Vetorial, por exemplo.

Em seu estudo Bittar (2009) utiliza de situações que "revelam as noções de classe de equivalência, igualdade vetorial e representante de uma classe de equivalência, pois esses conceitos são fundamentais para a compreensão do objeto matemático vetor”. Ela afirma que a TCC foi uma ferramenta eficaz para o estudo das dificuldades dos estudantes, sendo delas, a confusão entre direção e sentido de um vetor, por muitos estudantes acharem que estes apresentam o mesmo conceito.

Do mesmo modo, nesta pesquisa utilizamos a TCC para identificar conhecimentos e dificuldades dos estudantes sobre o estudo das cônicas. Nela identificamos e apresentamos alguns de seus significados, como, objeto de deslocamento e objeto geométrico.

As cônicas são parte da ementa de disciplinas de cursos superiores em ciências exatas, como Geometria Analítica, no próximo tópico abordaremos um pouco sobre a Geometria Analítica e os aspectos referentes ao seu ensino.

2.4 ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA

A Geometria Analítica é o ramo da matemática que surge unindo elementos da Geometria Plana com a Álgebra. Segundo Santos (2016, p. 31), “a evolução da Geometria Analítica, segundo os estudiosos da história da Matemática, possui divergências no que se refere à época e de como ela teria surgido”. Em alguns dos estudos sobre a história da Geometria Analítica, destacam-se os estudos dos gregos no desenvolvimento desta área, de acordo com Trentin (2011) citando Arno Bayer *et al.* (1998, p. 135), diz:

> É importante considerar que quase tudo o que estudamos na geometria plana era do conhecimento dos antigos gregos. Após os gregos, podemos registrar um grande avanço no século XVII, com os trabalhos do francês René Descartes (1596-1650), em seu livro La Géometrie, onde é estabelecido um novo método: a geometria das coordenadas ou geometria analítica.

Segundo Santos (2016, p. 31), “os gregos antigos dedicaram-se consideravelmente à Álgebra Geométrica e a ideia de coordenadas foi usada no mundo antigo pelos egípcios e romanos na agrimensura; e pelos gregos na confecção de mapas.”

A partir do Século XVII, muitos trabalhos destacam a importância dos estudiosos franceses René Descartes e Pierre de Fermat nos estudos sobre Geometria Analítica. Santos (2016, p.32) aponta ainda que:

> A essência real da Geometria Analítica reside na transferência de uma representação geométrica para uma representação algébrica, porém, para que ela desempenhasse plenamente esse papel, foi necessário esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Podemos assim dizer que houve a contribuição de vários estudiosos e da época e foi somente no século XVII que as contribuições de René Descartes e Pierre de Fermat possibilitaram que ela fosse sistematizada.

Ao relacionar Geometria com a Álgebra, a Geometria Analítica permite que os problemas de Geometria sejam tratados a partir de procedimentos algébricos. Procedimentos esses que permitem identificar pontos específicos, intersecções entre objetos geométricos, como as órbitas no espaço. Essa interação entre campos da Matemática termina por não ficar restrito ao campo do que chamamos de Geometria Analítica na escola, que de fato são o estudo dos objetos geométricos. Álgebra em articulação com a Geometria, surge no estudo das funções, dos sistemas lineares. Além de ser essencial no estudo de várias áreas aplicadas e do conhecimento como: problemas de otimização, problemas da mecânica celeste, problemas das engenharias, etc. É nesse sentido que a Geometria Analítica se configura como um dos principais componentes dos cursos das exatas.

A sua importância para a ciências e para aplicações não implica, porém que, a Geometria analítica tenha sido um curso livre de dificuldades por parte dos alunos. Nasser, Vaz e Torraca (2015), por exemplo, observaram as dificuldades dos estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática em relação à disciplina de Geometria Analítica. Eles apontam dificuldades em relação aos conceitos básicos da Geometria Analítica, como a localização e o reconhecimento de pontos em um plano cartesiano.

Outras dificuldades são apresentadas por Nasser, Vaz e Torraca (2015, p. 8) ao solicitarem: "Esboce os pontos A(1,1) e B(5,4) no plano cartesiano. Em seguida, calcule a distância entre A e B". Nasser, Vaz e Torraca (2015, p.8) afirmam que:

> O cálculo da distância entre dois pontos foi, dentre estes tópicos, aquele em que os alunos apresentaram um dos melhores índices de acertos. Algumas soluções, no entanto, denotam a dificuldade em compreender o conceito de distância, [...], em que a distância foi interpretada como o vetor que liga os dois pontos dados.

A confusão entre distância e vetor articula-se a à introdução das grandezas vetoriais, como força, velocidade, aceleração, etc. Em outra questão, Nasser, Vaz e Torraca (2015, p. 8) ao apresentarem o problema "Represente no plano cartesiano o vetor v = (3,4). Qual é o módulo deste vetor?" afirmam que "Apenas 23,3% dos alunos souberam calcular o módulo desse vetor, enquanto 70% deles deixaram em branco." Além disso, na resolução desta questão são utilizadas abordagens físicas. Ao resolver a questão, um dos alunos aponta a direção direita, o sentido nordeste e a distância do vetor como sendo 5 u.m (unidade de medida) e outro afirma que nunca teve essa matéria na escola, daí sua dificuldade em calcular o módulo de um vetor.

Embora Geometria Analítica faça parte do currículo de matemática na Educação Básica, muitas vezes no último ano do Ensino Médio, os alunos que estão no Ensino Superior podem apresentar dificuldades com a disciplina. Segundo Nasser, Vaz e Torraca (2015, p. 11), “devido ao ensino compartimentalizado na Escola Básica, os estudantes têm chegado ao Ensino Superior sem fazer conexões e transposições didáticas entre os conteúdos estudados.”

É possível perceber a existência de algumas dificuldades relacionadas à aprendizagem de habilidades em Geometria Analítica, assim a necessidade de estudar tais dificuldades e planejar quais caminhos serão utilizados para que os alunos possam desenvolver suas habilidades em Geometria Analítica.

Em um estudo realizado por Santos (2016) com a finalidade de observar questões sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria Analítica, entre os anos de 1991 a 2014, foi realizada uma análise de 76 projetos políticos pedagógicos de cursos de Licenciaturas em Matemática das Instituições de Ensino Superior (Federais e Estaduais brasileiras). Sobre o estudo, Santos (2016, p. 55) diz que:

> A leitura desses projetos pedagógicos de formação profissional nos mostrou que o ensino de Geometria Analítica está organizado em uma grade horária de 80 horas. Algumas IES disponibilizam uma carga horária de 120 horas, divididas em dois semestres, sendo que o 1º semestre é destinado à Geometria Analítica Plana, e o 2º semestre, à Geometria Analítica Espacial.

Santos (2016, p.55) destaca que em algumas Instituições de Ensino Superior a disciplina de Geometria Analítica está dividida em Geometria Analítica Plana e Geometria Analítica Espacial.

> Dentre os projetos pedagógicos de formação profissional analisados, o estudo da Geometria Analítica Plana aparece em 30 IES e 46 IES iniciam o curso com a Geometria Analítica Espacial. O estudo de Retas e Planos é priorizado em 62 IES, em segundo lugar, observamos que os Vetores estão sendo propostos em 57 IES, já o estudo das Cônicas e Quádricas estão presentes em 40 IES.

Observa-se, ainda, que em algumas Instituições o Ensino de Vetores aparece nas primeiras aulas de Geometria Analítica, o que pode ser uma das dificuldades enfrentadas por alunos dos primeiros semestres do curso de Licenciatura em

Matemática, uma vez que, no Ensino Médio, nem sempre se aborda vetores na disciplina de matemática.

Os cursos de Geometria Analítica, geralmente seguem o roteiro: Introdução aos vetores, produto interno, produto vetorial, reta, plano, distâncias, cônicas, transformação de coordenadas (translação e rotação de eixos) e quádricas. iniciando com o ensino de vetores e por fim, o ensino das cônicas e quádricas. Nesta pesquisa, trabalharamos com o acompanhamento da aprendizagem dos estudantes sobre o conteúdo de cônicas.

Os estudos das secções cônicas tiveram a contribuição de inúmeros matemáticos, dentre eles Apolônio (c. 262-190 a.C.) e Meaceno (c. 380-320 a.C.), com seus estudos por volta do século IV a.C. Nesse período, de acordo com Mol (2013, p. 55) sabia-se que "uma seção de um cone de base circular por um plano perpendicular a uma de suas geratrizes produzia curvas diferentes de acordo com o ângulo do vértice do cone: elipse, parábola ou hipérbole para ângulos agudo, reto ou obtuso, respectivamente."

Apolônio que também estudava sobre as cônicas, chegando a publicar o estudo "As cônicas" que teve grande relevância no seu tempo. A respeito dos estudos de Apolônio, Mol (2013, p. 55) diz que

> Apolônio obteve as três curvas interceptando um cone oblíquo de base circular por um plano secante variável: uma parábola, para um plano paralelo a uma das geratrizes; uma elipse, para um plano secante interceptando apenas uma das folhas do cone; e uma hipérbole, para um plano interceptando as duas folhas. Apolônio obteve propriedades características dessas três curvas que, em notação moderna, se traduzem nas equações: $y^2 = px$ (parábola); $y^2 = x(p - p\ a\ x)$ (elipse); $y^2 = x(p + p\ a\ x)$ (hipérbole).

Mais tarde, as cônicas teriam aplicações em outros campos da ciência, como nos estudos desenvolvidos em astronomia pelo matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), segundo Macedo (2008, p. 97) "Durante aproximadamente 18 séculos, não houve estudos detalhado sobre aplicações das cônicas no mundo físico. Porém, pesquisas de físicos e astrônomos foram mostrando aplicações do estudo de Apolônio no mundo em que vivemos."

Nos capítulos dedicados às cônicas, em livros de Geometria Analítica, é possível ver a contribuição dos estudos dos matemáticos acima citados. Inicialmente são apresentadas as cônicas como interseções de um cone circular reto por um plano inclinado, a descrição do lugar geométrico das cônicas e em alguns livros, aplicações das cônicas, como no estudo desenvolvido por Kepler, mais conhecido como as Leis de Kepler.

Porém, estudantes apresentam dificuldades em relação aos estudos dessas curvas. Nem sempre são apresentados para estes estudantes aplicações das cônicas, como no caso, das leis de Kepler acima citadas. Observando as dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo de cônicas, Souza e Kato (2013) apresentam um estudo acerca da delimitação do campo conceitual das cônicas, segundo os descritores geométricos e algébricos, utilizando como foco a curva parábola.

Souza e Kato (2013) iniciam sua pesquisa, levando em consideração os descritores geométricos e algébricos, que estabelecem o conjunto de propriedades que caracterizam cada cônica. Os descritores geométricos são obtidos pelo corte do cone reto duplo com plano (paralelo, secante e perpendicular a base do cone), obtendo assim, cada uma das curvas: circunferência, elipse, parábola e hipérbole. E os descritores algébricos são obtidos pelos coeficientes não nulos da seguinte equação $F(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Neste trabalho, as autoras trabalham com sete situações sobre parábolas, por exemplo e identificam alguns invariantes, como destacam Souza e Kato (2013, p.8)

> Não diferenciar os elementos foco e vértice da parábola: Isso ocorre porque o foco é dado por $F = (p,0)$ ou $F = (0,p)$ [...]; Não reconhecer a equação reduzida da parábola: os alunos consideraram a equação reduzida da parábola como sendo $x^2 = 4px$ e $y^2 = 4py$, ao invés de $x^2 = 4py$ e $y^2 = 4px$ [...]; A identificação desses invariantes apontam algumas das dificuldades, dos alunos, na identificação das cônicas, e seus elementos, na sua forma algébrica. [...] é possível afirmarmos que essas deficiências podem prejudicar os alunos na identificação de domínios de funções de várias variáveis, por exemplo, em que, no caso de funções de R2 em R3, o domínio são regiões do plano.

Tendo em vista que os estudantes apresentam dificuldades em relação ao estudo das cônicas, em nossa pesquisa, utilizamos o FrameAGAP que tem como base a Teoria dos Campos Conceituais, no qual pensamos as situações, os invariantes e as representações. No próximo capítulo, descreveremos o FrameAGAP e sua criação.

3 FRAMEAGAP: FRAMEWORK PARA ACOMPANHAMENTO E GESTÃO DE APRENDIZAGEM PERSONALIZADA

Em nosso referencial teórico abordamos um pouco sobre metodologias de ensino, a flexibilização e a personalização reconhecendo a singularidade de cada aluno. Os pontos que os diferem de outros estudantes e que se deve levar em consideração no momento de ensinar e avaliar, possibilitando que cada estudante trilhe um caminho de aprendizagem adaptado às suas particularidades.

No decorrer deste estudo, citamos o vídeo como um recurso com capacidade de contribuir com o trabalho do professor e com a aprendizagem dos estudantes, que podem aprender a qualquer hora, em qualquer lugar, apresentamos também outros recursos com essa mesma finalidade.

Nos referimos aos sistemas de gestão de aprendizagem como ferramenta que colabora com a aprendizagem personalizada, disponibilizando para professores e alunos um *feedback* de suas aprendizagens.

Abordamos a Teoria dos Campos Conceituais e a ideia de Vergnaud (1999), o qual diz que o estudante aprende quando se depara com situações a dominar, por fim, discorremos sobre o contexto do ensino de Geometria Analítica.

Agora, neste capítulo apresentaremos o FrameAGAP, no intuito de que o leitor possa compreender como cada estudo apresentado no referencial teórico foi fundamental para sua criação, bem como se deu seu desenvolvimento e adaptação para o acompanhamento de aprendizagens personalizadas.

3.1 FRAMEAGAP: O QUE É E COMO SURGIU?

No decorrer do curso de mestrado, com o intuito de desenvolver pesquisas sobre a Sala de Aula Invertida e a fim de aprofundar os estudos concerne a essa metodologia de ensino, criamos em março de 2019 um subgrupo sobre SAI. O subgrupo foi formado por quatro integrantes do Grupo GERE (sendo estes, Profª Verônica Gitirana, Luiz Gustavo Lima Jr, Rosana Silva e Joélia Lima) que tinham o interesse de estudar esta metodologia de ensino.

Observando nestes estudos a importância de se trabalhar com a personalização do ensino e visto que nesta metodologia de ensino os vídeos eram bastante utilizados, por ser um recurso que apresentava bons resultados devido à possibilidade de flexibilização. O estudante poderia assistir aos vídeos no horário que considerasse melhor levando em consideração sua rotina e muitas vezes, o seu trabalho, pois se adaptava aos estudantes, que também trabalhavam, percebemos a possibilidade de se utilizar o ensino personalizado, fazendo um acompanhamento da aprendizagem dos estudantes, onde o professor pudesse decidir quais recursos enviaria ao aluno, dentre os materiais adequados para ele (vídeos e situações). Daí, a possibilidade de criar um dispositivo (e não utilizar os existentes, já que estes utilizam a automação para escolha e envio de recursos) que pudesse ajudar neste contexto.

Deste modo, buscamos uma teoria que nos ajudasse na estruturação do dispositivo, nos norteando quanto à avaliação das habilidades dos estudantes, de modo que pudéssemos analisar suas dificuldades e conhecimentos, assim, recorremos à Teoria dos Campos Conceituais.

A criação do subgrupo sobre Sala de Aula Invertida culminou com o estudo de Lima Jr. (2020), que observou as dificuldades existentes em relação à aprendizagem do conteúdo de frações e validou a 1ª versão do dispositivo para o acompanhamento da aprendizagem de uma estudante sobre esse conteúdo. O dispositivo foi estruturado levando em consideração a Teoria dos Campos Conceituais, no qual foram observados os invariantes, os significados e as representações presentes no campo conceitual aditivo das frações.

Em 2020 com a inclusão de novos membros do GERE nos estudos sobre o até então Dispositivo (Profº Rogério, Rafael Marinho, Profº Ross Nascimento, o professor da disciplina de Geometria Analítica Profº, Valdir Bezerra e o Profº de Ciência dos Dados, Tennyson Accetti), passamos a chamar o Dispositivo de FrameAGAP, que significa, *Framework* para o Acompanhamento e Gestão de Aprendizagens Personalizadas. Esta nova configuração do grupo culminou neste segundo estudo aqui apresentado, desenvolvido por Lima (2021), observando as dificuldades encontradas por estudantes do Ensino Superior em relação à disciplina de Geometria Analítica e em relação ao conteúdo de cônicas. Adaptamos e tentamos validar o dispositivo construído por Lima Jr. (2020) para que fosse utilizado na disciplina de Geometria Analítica, com o ensino das cônicas, que tivesse uma capacidade maior, já que na pesquisa de Lima Jr. (2020) só foi possível testá-lo com uma estudante e estruturando o dispositivo para o campo conceitual das cônicas.

No próximo tópico apresentaremos o processo de construção e adaptação do dispositivo, destacando as diferenças entre as duas versões 1ª versão - Dispositivo de Lima Jr. (2020) - e 2ª versão - FrameAGAP Lima (2021), tanto do ponto de vista estrutural, com os elementos utilizados para construção, quanto do ponto de vista do objeto matemático, acerca dos conteúdos abordados em cada versão.

3.2 CONSTRUÇÃO: DO DISPOSITIVO AO FRAMEAGAP

Desde a construção do Dispositivo (2019-2020) e adaptação para o FrameAGAP (2020-2021) esse ambiente computacional vem sendo estudado e modificado de modo que a cada nova versão o professor possa:

- Fazer um acompanhamento da aprendizagem dos estudantes;
- Enviar para estes um *feedback* de suas aprendizagens;
- Enviar situações e recursos que ajudem os estudantes a superar as dificuldades ou avançar no conteúdo quando o aluno apresenta ter compreendido o conteúdo.

Na Figura 3, mostramos um resumo das mudanças estruturais do dispositivo, composição de sua equipe, recursos utilizados, capacidade, entre outros fatores que mencionaremos a seguir.

Figura 3: Modificações estruturais do Dispositivo ao FrameAGAP

Fonte: elaborada pela autora (2021).

A 1ª versão do *software* foi desenvolvida com uso de dados em planilhas, de modo que pudéssemos inserir, modificar ou excluir dados de forma colaborativa. Para isso, utilizamos as Planilhas eletrônicas, que nos permitiu que, a cada reunião para discussão do dispositivo, qualquer membro da equipe pudesse incluir dados, como vídeos, por exemplo.

Ainda na primeira versão, em abril de 2019, a equipe era composta por uma professora do Ensino Superior e 3 estudantes de pós-graduação. Naquele momento, construímos o dispositivo de modo que este tivesse capacidade de fazer o acompanhamento de um único estudante e com a utilização de um único recurso, o vídeo.

Em abril de 2020, teve início a criação da 2ª versão do *software*, com a proposta de aumentar a capacidade de acompanhamento e testar o FrameAGAP com um grupo de estudantes. Passamos a utilizar o banco de dados em linguagem SQL (Structured Query Language), com a finalidade de trabalhar com esses dados em plataforma na internet, a qual pretende ser a versão final do FrameAGAP. Para que isso fosse possível, participamos de estudos semanais (teóricos e práticos) em grupo sobre o uso do SQL, com as orientações do professor Tennyson Accetti.

Nesta segunda versão, vimos a necessidade de ampliar o grupo para que pudéssemos aprender, planejar e estruturar o FrameAGAP utilizando a linguagem SQL. O aumento da equipe também possibilitou pensar como a Geometria Analítica, seria implementada ao FrameAGAP. Assim, a equipe passou a contar com três professores de matemática do Ensino Superior, um professor de ciência de dados, dois professores de matemática da Educação Básica e dois estudantes de pós-graduação. Deste modo, estruturamos o banco de dados para que fosse possível acompanhar um grupo de estudantes e integramos na plataforma mais um recurso (a simulação em Geogebra), além do recurso já existente, o vídeo.

Do ponto de vista do objeto matemático em sua primeira versão, Lima Jr. (2020) estruturou o dispositivo, utilizando a Teoria dos Campos Conceituais, como observado na seção 2.3, Vergnaud (2017, p. 18) menciona que "a construção de um conceito envolve um conjunto de **situações** que lhe dão significado: um conjunto de **invariantes** - propriedades do conceito - subjacentes ao raciocínio e um conjunto de símbolos utilizados para a **representação.**"

Estes atributos foram os pilares da estrutura do dispositivo, que no estudo de Lima Jr. foi voltado ao campo conceitual das frações, contendo matriz de conhecimento com dados sobre as Habilidades do Cálculo Numérico, Habilidades do Cálculo Relacional, Estruturas Aditivas, Representações, Dificuldades. As informações sobre a Matriz de Conhecimento, estão presentes em outras matrizes, como na Matriz de Situações, que informa quais conhecimentos são mobilizados por cada situação. Na Matriz de vídeos, informando quais conhecimentos estão presentes em cada um dos vídeos e na Matriz de desenvolvimento do estudante que inclui os dados sobre os conhecimentos demonstrados pela estudante. Na Figura 4, apresentamos a matriz de conhecimento do Dispositivo.

Figura 4: Matriz de Conhecimento do Dispositivo validado por Lima Jr

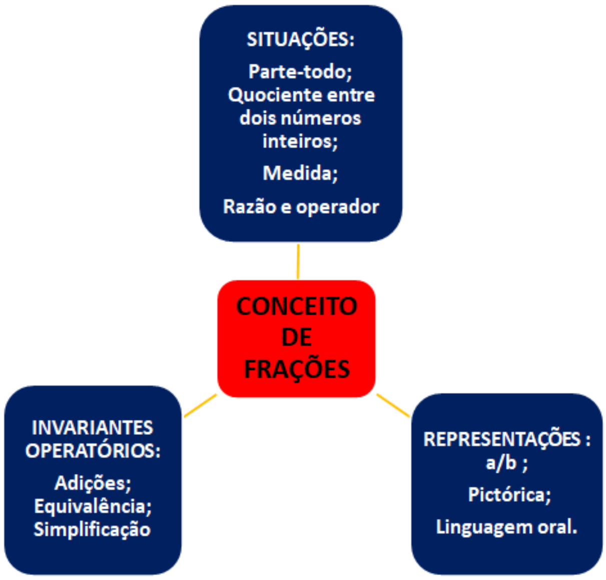
Tipo	Conhecimento	Código								
Habilidade do Cálculo numérico										
	Adição de frações	HN1	Grupo	Habilida	Código	Estrutura	Significa c	Repres	Dificuldade	
	Simplificação e Reconhecimento de frações equivalentes	HN2				1	1	1		Interp
	Converter uma fração em outra representação	HN3				1	1	2		Interp
Habilidade do Cálculo relacional						1	2	1		Interp
	Interpretação do problema	HR1				1	2	2		Interp
	Interpretação do resultado das operações em relação ao problema	HR2				1	3	1		Interp
						1	3	2		Interp
Significados de fração						1	4	1		Interp
	Parte-todo	S1				1	4	2		Interp
	Fração de quantidade ou operador	S2				1	5	1		Interp
	Número	S3				1	5	2		Interp
	razão	S4				2	1	1		Interp
	medida	S5				2	1	2		Interp
Estruturas aditivas						2	2	1		Interp
	Composição com total desconhecido	E1				2	2	2		Interp
	Composição com parte desconhecida	E2				2	3	1		Interp
	Comparação aditiva (Equalização)	E3		erpretação do problema	HR1	2	3	2		Interp
Representações de fração						2	4	1		Interp
	a/b ou A sobre B	R1				2	4	2		Interp
	Fração de área	R2				2	5	1		Interp

Fonte: Lima Jr. (2020, p. 44)

Na Figura 4 trazemos o Dispositivo em forma de banco de dados elaborado por Lima Jr. (2020), que foi estruturado com base na TCC. Nele foram mapeados vídeos e situações que abordassem este campo conceitual. Por exemplo, “Problema do tipo Composição com total desconhecido, com fração com significado de Parte-todo, representadas por a/b, com denominadores iguais”. Além disso, nesse estudo, considera-se os níveis de dificuldades. O exemplo anterior tem nível de dificuldade 1, enquanto a situação: “Problema do tipo Composição com total desconhecido, com fração com significado de Parte-todo, representação a/b, com denominadores não múltiplos" apresenta nível de dificuldade 3.

Na Figura 5 apresentamos a formação do conceito de frações, presente no estudo de Lima Jr(2020).

Figura 5: Conceito de frações no estudo de Lima Jr



Fonte: Lima Jr. (2020, p. 35)

Na Figura 5, estão presentes os significados das frações nas situações utilizadas no estudo, os invariantes operatórios e as representações contidas em cada situação.

Se estendendo da primeira à segunda versão do *software*, a Teoria dos Campos Conceituais foi um ponto chave para que pudéssemos escolher e analisar situações e recursos a serem trabalhados e disponibilizados aos estudantes, pois o dispositivo tem como parte de sua estrutura a tríade (Situação, Significados e Representação) citada por Vergnaud (1999) para que seja possível adquirir e desenvolver conceitos. Agora, no contexto da disciplina de Geometria Analítica, sobre o conteúdo de cônicas com alunos do Ensino Superior.

Tendo apresentado um pouco sobre o FrameAGAP, a construção do dispositivo e um pouco do processo de adaptação, mostraremos no próximo capítulo a metodologia que utilizamos em nossa pesquisa, a sua base teórica, os participantes e etapas da pesquisa.

4 METODOLOGIA

Esta pesquisa é parte de um estudo maior realizado no âmbito do GERE - Grupo de Estudos sobre Recursos para a Educação, na qual propomos o desenvolvimento de um dispositivo que permita ao professor acompanhar os conhecimentos e dificuldades dos estudantes, o auxiliando na identificação de bons materiais para a personalização da aprendizagem. Atuamos nesta dissertação, melhorando o desenvolvimento do dispositivo para o contexto de conteúdos da Geometria Analítica.

Para adaptar o Dispositivo construído inicialmente por Lima Jr. utilizamos a Linguagem SQL, onde foram inseridas algumas informações previamente selecionadas, como habilidades necessárias para se resolver situações sobre cônicas, suas representações, significados e invariantes. A partir das resoluções das situações pelos estudantes, incluímos sua avaliação no banco de dados, e fizemos um mapeamento de forma manual dos conhecimentos apresentados por eles e quais seriam os recursos que os ajudariam.

A metodologia utilizada nesta pesquisa foi a *Design Experiments (Ou Design Research)*, que de acordo com Brown (1992) é a metodologia que trata de uma pesquisa de intervenção projetada para informar a prática.

4.1 DESIGN EXPERIMENT

Segundo Abar e Alencar (2013), o *Design Experiments* permite um progressivo aprimoramento da investigação, pois se aplica uma primeira versão de um projeto para posterior análise, resultando numa revisão baseada nas experiências colhidas e avaliadas. Cobb *et al.* (2003, p.11), ao citar sobre o *Design Experiments* em pesquisas educacionais, afirma que "O objetivo principal de um experimento de *design* é melhorar o *design* inicial, testando e revisando conjecturas, conforme informado pela análise contínua do raciocínio dos alunos e do ambiente de aprendizagem." Cobb *et al.* (2003, p. 11 Tradução nossa) argumenta que:

> O determinante crucial em qualquer tipo de experimento de *design* é que a equipe tenha coletivamente o conhecimento necessário para realizar as funções associadas ao desenvolvimento de um *design* inicial, conduzindo o experimento e realizando uma análise retrospectiva sistemática.

Desta forma, a metodologia de *Design Experiments* possibilita que um projeto, após aplicação, possa ser melhorado levando em consideração as análises anteriores, de modo que se possa melhorar o experimento, conforme aponta Cobb *et al.*, (2003, p. 12. Tradução nossa),

> Uma das características distintivas da metodologia do *Design Experiment* é que a equipe de pesquisa aprofunda o entendimento do fenômeno sob investigação enquanto o experimento está em andamento. Portanto, é importante que a equipe gere um registro abrangente do processo de *design* em andamento.

No *Design Experiments* é usado o termo "ecologia", no qual é possível entender que os elementos da pesquisa estão interligados, como acontece com o significado da ecologia que une um sistema complexo de interações/conexões entre os seres vivos e o ambiente em que estão inseridos. De acordo com Cobb *et al.* (2003, p. 9), "Usamos a metáfora de uma ecologia para enfatizar que os contextos projetados são conceituados como sistemas de interação e não como um conjunto de atividades ou uma lista de fatores separados que influenciam o aprendizado."

No ambiente educacional, uma ecologia apresenta algumas características, como afirma Cobb *et al.*, (2003, p. 9. Tradução nossa)

> Os elementos de uma ecologia de aprendizagem geralmente incluem as tarefas ou problemas que os alunos devem resolver, os tipos de discurso que são incentivados, as normas de participação estabelecidas, as ferramentas e os materiais relacionados fornecidos e os meios práticos pelos quais os professores em sala de aula pode orquestrar as relações entre esses elementos.

A metodologia de *Design Experiments* no contexto educacional pode ser utilizada para desenvolver meios que colaborem com o estudo da aprendizagem. Cobb *et al.*, (2003, p. 3. Tradução nossa), ao citar sobre a metodologia de *Design Experiments* aplicada às pesquisas educacionais, diz que:

> O objetivo da experimentação de *design* é desenvolver uma classe de teorias sobre o processo de aprendizagem e os meios projetados para apoiar essa aprendizagem, seja a aprendizagem de alunos individuais, de uma comunidade de sala de aula, de uma comunidade profissional de ensino, ou de uma escola ou distrito escolar visto como uma organização

Cobb *et al.* (2003, p.10) afirmam que “Os estudos de *design* são tipicamente bancos de ensaio para inovação. A intenção é investigar as possibilidades de melhoria educacional, trazendo novas formas de aprendizado para estudá-las.”

Abar e Alencar (2013, p.356) afirmam que na metodologia *Design Experiments* algumas variáveis devem ser observadas:

> Variáveis de clima (cooperação entre os aprendizes, compromisso, grau de esforço apresentado pelos aprendizes etc.) e avaliada por meio de técnicas de observação – como intervenção na prática ou gravações em vídeo – e notas de campo; variáveis de aprendizagem (conhecimentos, conteúdo, habilidades e disposições) e avaliada, por exemplo, por meio de entrevistas orais, pré-testes, pós-testes e perguntas e respostas curtas; variáveis sistêmicas (alteração, expansão, sustentabilidade, alteração, facilidade de adoção e custos), avaliada por meio de entrevistas estruturadas e pesquisas e/ou por meio de relatos que mostrem as vantagens e dificuldades encontradas pelos professores ao realizar o experimento.

De acordo com Barbosa e Oliveira (2015, p. 527):

> Podemos dizer que uma pesquisa de desenvolvimento refere-se àquelas investigações que envolvem delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões.

Deste modo, acreditamos que a metodologia citada irá nos ajudar no desenvolvimento e análise do dispositivo para auxiliar a aprendizagem dos alunos na aprendizagem de Geometria Analítica.

4.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

O dispositivo foi experimentado em uma disciplina de Geometria Analítica do 2º período do curso de Licenciatura em Matemática, que atende a diversas cidades do agreste de Pernambuco. Com o aceite dos professores da disciplina, que já vinham utilizando a Sala de Aula Invertida a um semestre, experimentamos o dispositivo para acompanhamento de três de seus estudantes, identificados posteriormente por códigos (1M2, 7M2 e 18F2).

Foi feito o convite para todos os estudantes da turma de Geometria Analítica. Sete alunos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), destes, cinco assinaram o termo na fase inicial da coleta de dados, 3 deles participaram de todas as fases da pesquisa e dois não conseguiram participar das atividades solicitadas. Dois estudantes assinaram o TCLE quando a coleta de dados já estava em andamento, assim, não participaram da pesquisa. Vale ressaltar que um outro pesquisador realizou um estudo anterior nesta mesma disciplina, daí a possível causa dos poucos participantes neste estudo.

A turma de Geometria Analítica era composta por 52 estudantes dos cursos Licenciatura em Matemática, Física e Química, da Universidade Federal de Pernambuco, Campus Caruaru. Estes estudantes estavam divididos em duas turmas, a M2 (do curso de Matemática) e a F2 (do curso de Física), o número 2 indica o semestre em que aconteceu a disciplina, neste caso, 2º semestre de 2020. Deste modo, codificamos os participantes da pesquisa a partir da contagem feita de acordo com a ordem de chamada, seguido da turma (M ou F) e o semestre letivo (2). Ex.: 18F2, estudante nº 18, da turma F do 2º semestre.

Os estudantes tiveram seus dados utilizados com o dispositivo como parte normal da disciplina. No entanto, só foram utilizados para a pesquisa os dados daqueles que permitiram tal utilização, por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), com a garantia do anonimato e sigilo dos dados. Além disso, devido à Pandemia de Covid-19, como protocolo de segurança, as aulas da disciplina de Geometria Analítica foram ministradas de forma Remota Emergencial. A metodologia de ensino SAI utilizada foi adaptada para esse contexto.

4.3 ETAPAS DA PESQUISA

Em relação às etapas metodológicas, seguimos as seguintes etapas:

A. Mapeamento das habilidades esperadas na disciplina de Geometria Analítica;

Foram identificadas quais habilidades são esperadas para os estudantes que estão cursando Geometria Analítica desenvolvem, em relação ao conteúdo de cônicas (elipse, parábola, hipérbole e circunferência), suas representações, e significados assumidos nas situações.

Para mapear as habilidades, foi necessário a análise de situações previamente pela pesquisadora (em resoluções de situações e pesquisa em livros didáticos que abordassem cônicas, como no livro Geometria Analítica Vetorial: Licenciatura em Matemática de Macedo (2008).

B. Montagem de um primeiro Banco de Recursos, com análise a partir das habilidades e variáveis listadas, tomando por base os bancos de vídeos do *Youtube* e *Khan Academy*.

Nesta etapa, procuramos vídeos sobre cônicas no *Youtube* e na *Khan Academy*, de modo que encontrássemos vídeos que trabalhassem as habilidades listadas. Esses vídeos foram incluídos no banco de recursos, e seus dados foram levados à Tabela Recurso-Conhecimento, onde foi analisado quais conhecimentos cada vídeo explorava.

C. Adaptação do protótipo de dispositivo para o conteúdo;

Nesta etapa, foram escritos os códigos de linguagem de programação para o funcionamento do FrameAGAP, a adaptação do dispositivo para o campo das cônicas, onde foram incluídos os dados dos estudantes (nome, *e-mail*, turma), além das informações como Espaço, Tema, Maturidade, Significado, Representação, que levavam em consideração o objeto matemático em estudo, as cônicas. A adaptação também ocorreu para que pudéssemos ter uma quantidade maior de estudantes que participariam do acompanhamento personalizado.

D. Criação do Banco de situações;

A escolha de situações foi realizada levando em consideração a metodologia de ensino utilizada na disciplina, a Sala de Aula Invertida e uma de suas abordagens o Ensino Sob Medida. Deste modo, as situações eram escolhidas uma semana antes da aula síncrona, incluídas no banco de dados, e levadas ao banco de Situação-Conhecimento. Neste, analisamos quais conhecimentos cada situação mobilizou. As situações eram enviadas ao estudantes por meio do Google *Classroom*, com links para os formulários onde estavam contidas as situações, os alunos as resolviam e nos retornavam as respostas no mínimo 24 horas antes da aula, para que pudéssemos fazer uma análise prévia, e a partir das dificuldades apresentadas, propor novas situações a serem discutidas na aula síncrona. As situações foram retiradas de livros digitais de livre acesso para que os estudantes pudessem resolvê-las.

Devido ao contexto da Pandemia de Covid-19, ao invés de nos referirmos a presencial e on-line, termo comumente utilizado no Ensino Híbrido nos referimos ao formato de aula síncrona e assíncrona. Ferreira (2001, p.677) sincrônico significa algo “que ocorre ao mesmo tempo que outra coisa”. Neste sentido, as aulas síncronas são aquelas que acontecem de forma simultânea, professores e estudantes podem manter contato imediato, em tempo real. Já a palavra assíncrona, é um antônimo para síncrono, e segundo Dicionário *online* de Português (2021) significa algo “que não ocorre ou não se efetiva ao mesmo tempo.” Deste modo, nas aulas assíncronas professores e estudantes não mantém uma comunicação (seja por vídeo, ou mensagem de texto) em tempo real.

E. Montagem de teste a partir das habilidades a serem desenvolvidas em cada fase da exploração do curso; a montagem teste utilizando um banco de dados de questões sobre Geometria Analítica, possibilitará a análise e refinamento da matriz de habilidades, assim como o banco de vídeos.

Com a chegada das resoluções das atividades dos estudantes, iniciamos a etapa **E**. Ao nos retornarem as resoluções de suas situações, nós as analisávamos e mapeávamos os tipos de erros que cada estudante apresentava, alguns tipos de erros foram incluídos previamente ao Banco de Dados, outros foram incluídos tendo analisado as resoluções dos estudantes. Do mesmo modo, a Tabela de Maturidade, algumas foram incluídas previamente, outras só após a análise das resoluções dos estudantes.

F. Aplicação do teste com a turma de Geometria Analítica;

Com os dados sobre as resoluções das atividades dos estudantes, como tipos de erros, conhecimentos e maturidades apresentadas nas resoluções de situações. Testamos o FrameAGAP na indicação de recursos e situações a serem exploradas e mobilizadas pelos estudantes a partir dos conhecimentos e dificuldades apresentadas por eles nas resoluções de situações.

G. Análise dos resultados, uso do dispositivo para decisão de materiais a sugerir para estudantes. Assim, seguimos para a análise dos resultados da primeira fase interativa do *Design*, como sugere a metodologia de *Design Experiments,* a fim de possibilitar melhorias no experimento.

Tendo as respostas dos estudantes, os conhecimentos, os tipos de erros e maturidades, a análise dos resultados foi feita com a análise das tabelas de acompanhamento, tipo de erro, maturidade, recurso, recurso-conhecimento e situações conhecimento, onde analisamos quais recursos e situações poderiam ajudar os estudantes em suas necessidades, esses recursos e novas situações foram enviadas aos estudantes por *e-mail*, junto ao *feedback* de suas resoluções e em anexo um formulário com o link do recurso e a situação a resolver.

H. Melhoria do dispositivo e do Banco de Recursos;

Tendo, visto em algumas situações que o vídeo por si só não deu conta de ajudar o estudante em sua resolução, incluímos em uma segunda semana, as simulações.

I. 2ª fase interativa do *design*, reiniciando no item E. Na 2ª fase do *Design* poderemos reiniciar a montagem teste, levando em consideração a análise dos resultados que realizada no item G.

Sobre o termo habilidades que utilizamos neste trabalho, nos referimos às habilidades como definem Silva e Feliceti (2014) citando Perrenoud (1999), habilidade trata-se de uma sequência de modos operatórios, de induções e deduções, onde são utilizados esquemas de alto nível. De acordo com Silva e Feliceti (2014) onde citam Perrenoud (1999), a habilidade é uma série de procedimentos mentais que o indivíduo aciona para resolver uma situação real, onde ele precisa tomar uma decisão. Por exemplo, quando um aluno está aprendendo a multiplicar, ele utiliza a habilidade da adição e da conservação do número, que ele já possui, para resolver o novo problema.

Considerando a Teoria dos Campos Conceituais que utilizamos na elaboração desta pesquisa, as habilidades podem ser vistas no conceito de esquema. Segundo Vergnaud (2017, p.65), o esquema “é uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dada”. Deste modo, as habilidades nas definições apresentadas se referem às estratégias utilizadas pelos estudantes no enfrentamento de situações tanto no contexto cotidiano, como escolar.

Para a utilização da Sala de Aula Invertida como metodologia de ensino foi necessário o uso de uma plataforma que pudesse nos auxiliar em relação ao envio de atividades, materiais, vídeos, entre outros. Desta forma, escolhemos o Google *Classroom* como ferramenta que possibilitou a comunicação entre professor e aluno, na postagem de materiais prévios a aula e o *e-mail* como ferramenta para envio de *feedback* e materiais de apoio para os estudantes.

Em relação aos recursos utilizados neste trabalho, utilizamos a segunda versão do Dispostivo, o FrameAGAP, sendo este um Banco de Dados em

Linguagem SQL como uma ferramenta de auxílio para o acompanhamento e envio de situações e recursos aos participantes da pesquisa.

4.4 COLETA DE DADOS

Os instrumentos de coleta de dados desta pesquisa foram o Google Classroom (integrado ao formulário *Google Form)* e o *e-mail* institucional dos estudantes participantes da pesquisa.

Como utilizamos a metodologia de Sala de Aula Invertida e o modelo de Ensino Sob Medida, no Google Classroom eram postados os materiais teóricos a serem estudados antecipadamente pelos alunos e em anexo um formulário com as situações assíncronas e as situações síncronas.

No dia 21 de outubro de 2020 enviamos por meio do *Google Classroom* o material teórico (sendo um slides sobre cônicas, contendo *link* para vídeos, textos em PDF e simulações em Geogebra) e o formulário de atividade contendo três situações assíncronas sobre elipse e circunferência, que foram resolvidas e enviadas pelos estudantes no dia 27 de outubro de 2020.

Tendo as resoluções das atividades assíncronas, entregues antes do momento da aula síncrona, analisamos as resoluções dos estudantes observando as habilidades e dificuldades apresentadas por eles. Estes dados nos ajudaram a escolher as situações para aula síncrona e a compor o banco de dados do frameAGAP inseridos posteriormente.

No dia 31 de outubro enviamos para os participantes da pesquisa os primeiros materiais de apoio, referente às atividades assíncronas sobre circunferência e elipse. Os materiais foram enviados por *e-mail*, no qual foi anexado um formulário *Google form*, contendo vídeos indicados pelo dispositivo e situações a serem resolvidas pelos estudantes.

Entre os dias 31 de outubro e 2 de novembro, recebemos as resoluções das situações indicadas com uso do frameAGAP dos estudantes 18F2 e 1M2, que nos enviaram as fotos de suas soluções anexadas ao formulário do *google form*. Com os dados, foi feito o acompanhamento da aprendizagem e os inserimos no dispositivo.

Entre os dias 06 e 12 de novembro, enviamos material de apoio aos estudantes 7M2 e 18F2 referente a situação indicada pelo FrameAGAP. Além disso, tendo recebido no dia 02 de novembro as atividades assíncronas sobre parábola e hipérbole, as analisamos para escolher as situações da aula síncrona e verificar as habilidades, conhecimentos e dificuldades apresentadas pelos alunos, deste modo, no dia 12 de novembro enviamos o material de apoio sobre parábola e hipérbole. Entre os dias 15 e 24 de novembro recebemos por *e-mail* as resoluções das atividades assíncronas (sobre parábola e hipérbole) e as situações indicadas por meio do dispositivo.

No próximo capítulo apresentaremos os resultados e discussão deste estudo, mostrando as situações que foram utilizadas, o acompanhamento por meio do dispositivo e como o dispositivo foi utilizado na metodologia de ensino que foi utilizada neste estudo.

5 DISCUSSÃO E RESULTADOS

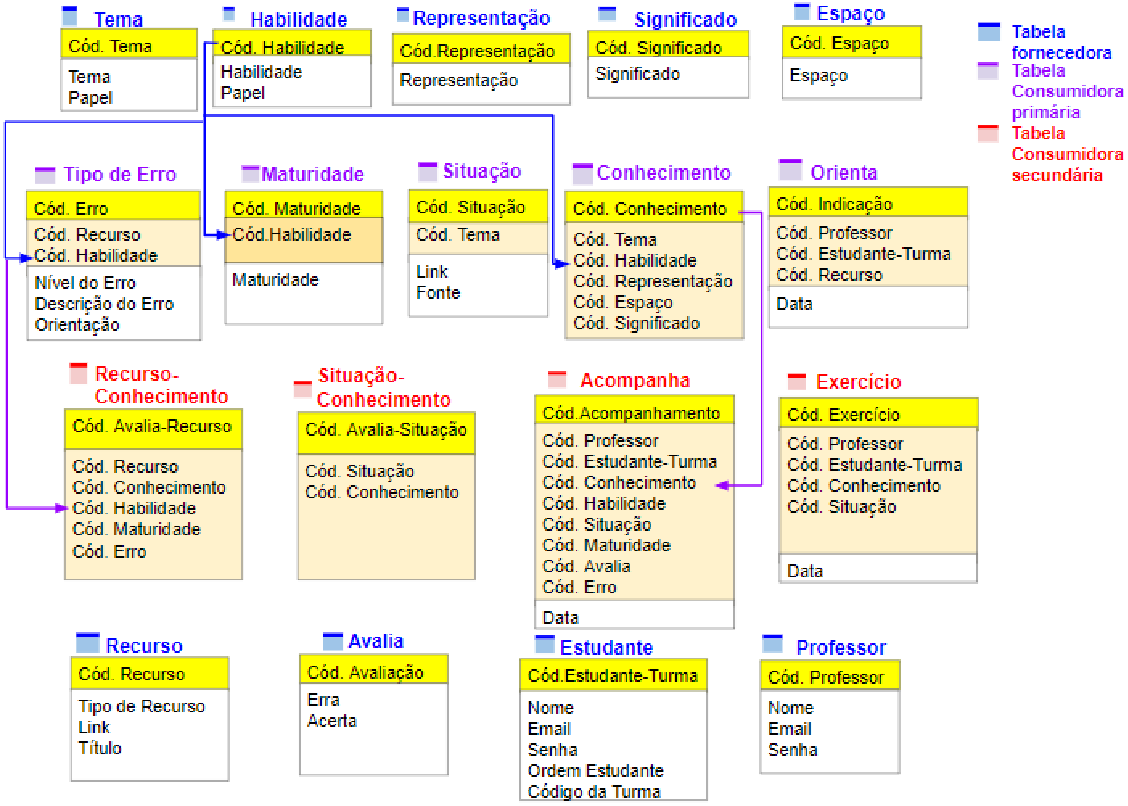
Neste capítulo apresentamos os resultados e discussões deste trabalho. Dividido em quatro tópicos, apresentaremos inicialmente a adaptação do Dispositivo para o FRAMEAGP. No tópico 5.2 abordamos a relação entre o professor, o Dispositivo e o FrameAGAP. No tópico 5.3, realizamos a análise do acompanhamento de cada estudante, apresentando as situações, recursos e os conhecimentos explorados e mobilizados por eles, além da análise da evolução de cada estudante. Por fim, no tópico 5.4 expomos as discussões dos resultados deste estudo.

5.1 FRAMEAGAP: O PROCESSO DE ADAPTAÇÃO

Na segunda versão do dispositivo, com a proposta de fazer um acompanhamento da aprendizagem de um grupo de estudantes e sobre o conteúdo de cônicas, passamos da utilização dos dados armazenados em planilhas eletrônicas, para os dados armazenados na linguagem SQL (Structured Query Language). Assim, nesta segunda versão existe uma quantidade maior de tabelas, com mais dados que a versão anterior.

Na Figura 6, apresentamos as 18 tabelas que compõem a estrutura do FrameAGAP e os dados contidos em cada uma delas. Separamos as tabelas em 3 tipos: Fornecedoras (representadas pelas tabelas em título azul), Consumidoras primárias (representadas pelas tabelas em título roxo) e Consumidoras secundárias (representadas pelas tabelas em título vermelho). Além disso, é necessário observar que cada dado da tabela tem seu código de identificação, sendo este único, na Figura 6 representado pelas linhas em cor amarela.

Figura 6: Organização dos dados em tabela do FrameAGAP



Fonte: Elaborada pela autora (2021)

As tabelas Fornecedoras recebem os dados inseridos pelo pesquisador, como as habilidades para que seja possível resolver uma situação, temas que serão estudados, além de dados sobre os alunos e os professores. Essas tabelas são importantes nesta construção, pois elas serão responsáveis por fornecer dados inseridos pelo usuário (neste caso, o professor/pesquisador) para outras tabelas, daí, seu nome. Vale ressaltar que, elas não são dependentes de outras tabelas, elas fornecem os dados para as tabelas Consumidoras.

As tabelas Consumidoras primárias (tipo de erro, maturidade, situação, orienta e conhecimento) recebem informações das tabelas Fornecedoras. Os dados que são originários das tabelas Fornecedoras são levados às Consumidoras primárias por meio do seu código de identificação. Na Figura 6, esses dados advindos das Fornecedoras aparecem nas Consumidoras primárias representados pelas linhas em cor laranja.

As tabelas Consumidoras secundárias recebem os dados tanto das tabelas Fornecedoras, quanto das Consumidoras primárias, pelo menos, um de seus dados é advindo deste último caso. Além disso, todas as tabelas Consumidoras secundárias recebem dados da tabela de conhecimento. Na Figura 6, os dados originários das Fornecedoras e Consumidoras primárias, são representados nas tabelas Consumidoras secundárias pelas linhas em cor laranja.

Na Figura 6, é apresentado um exemplo de percurso dos dados da tabela de Habilidades, nesta tabela são inseridas as informações sobre as habilidades essenciais para aprender cônicas (como identificar seus elementos, determinar a equação de uma cônica na origem ou fora dela, entre outros). Cada habilidade contém seu código de identificação, sendo assim, este é levado para as tabelas de tipo de erro (identificando os possíveis erros de determinada habilidade, como os erros nas tentativas de esboçar o gráfico de uma cônica). Também são levados para as tabelas de maturidade e conhecimento. Este último é ainda levado para a tabela de acompanhamento.

Outro registro que se observa na Figura 6, são as informações de textos representada pela linha branca contida nas tabelas, com ele é possível adicionar informações importantes em cada tabela, como descrever dados sobre as habilidades, representações, entre outros. Além de ter um controle referente às datas de acompanhamento da aprendizagem do estudante, dia de envio de uma situação ou recurso, dia de recebimento e acompanhamento de cada situação.

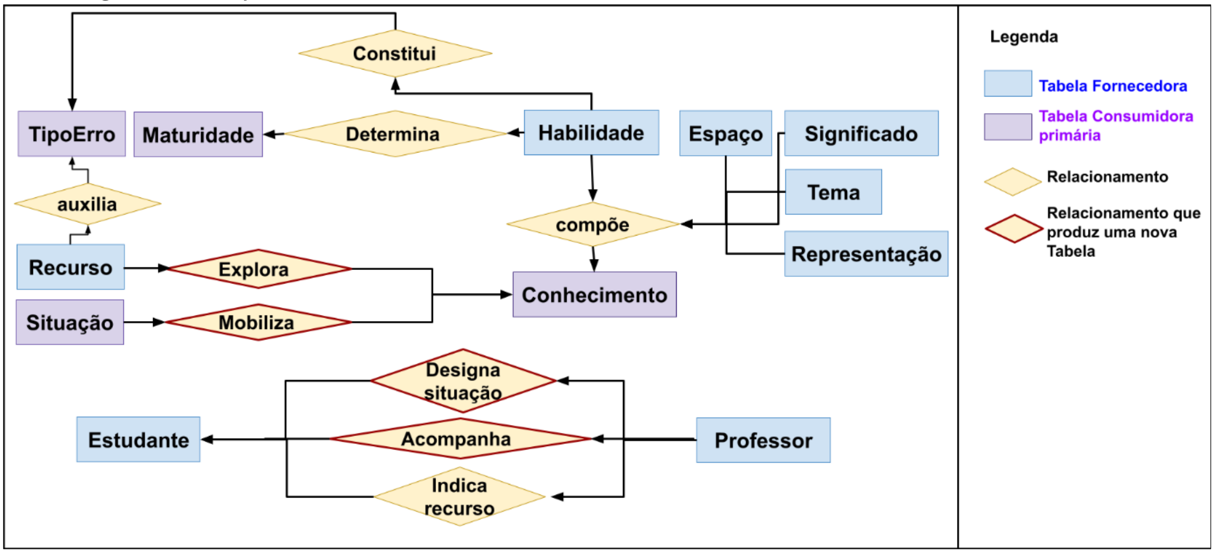
Mencionando um pouco sobre a organização das tabelas, as informações contidas em cada uma e o funcionamento do percurso dos dados (na Figura 6), descreveremos sobre o relacionamento de cada tabela e o motivo da escolha de cada uma, utilizando a Figura 7.

Para facilitar o entendimento sobre o funcionamento do dispositivo, apresentamos na Figura 7 (e posteriormente nas Figuras 8 e 9), uma adaptação do Modelo de Entidade-Relacionamento (MER), proposto pelo cientista da computação Peter Chen, em 1976.

Segundo Chen (1976, p.9, tradução nossa) “O Modelo Entidade-Relacionamento adota a visão mais natural de que o mundo real consiste em entidades e relacionamentos.” Ou seja, neste modelo é possível organizar os dados de um banco levando em consideração as situações observadas no mundo real. Além disso, para Chen (1976, p.10, tradução nossa) “O Modelo Entidade-Relacionamento pode ser usado como base para uma visão unificada dos dados.” Nele, é possível observar com detalhes as relações entre os dados que vão de uma tabela para outra.

Neste modelo, o Banco de Dados é apresentado de forma geral e visível. Não são utilizadas flechas para indicar o relacionamento entre uma tabela e outra, mas aqui faremos uso de flechas para indicar o fluxo de dados que são enviados de uma tabela para outra. Além disso, no mapa de relacionamento que apresentamos na Figura 7, não existe uma ordem de início, meio e fim em que o mapa deve ser lido.

Figura 7: Mapa do Modelo Entidade-Relacionamento das tabelas do FrameAGAP



Fonte: Elaborada pela autora (2021)

A adaptação do dispositivo a esta nova versão, o FrameAGAP, está atrelada a Teoria dos Campos Conceituais. Assim, nesta adaptação conservamos alguns elementos como, as habilidades (que são os invariantes e as regras de ação e de controle, contendo as propriedades dos conceitos esperados para que o estudante aprenda cônicas), o Significado que cada situação sobre cônicas possui, sendo eles, objeto de deslocamento no plano ou espaço, objeto geométrico e grandeza vetorial, e a Representação, onde estão o conjunto das representações contidas em cada situação e que os estudantes podem utilizar ao resolvê-las. Na Figura 7, essas tabelas estão localizadas no canto superior direito, em azul.

Alguns elementos não existiam na primeira versão do dispositivo, e nesta foram utilizados, como é o caso do Tema (no qual incluímos os dados sobre os temas abordados, como elipse, hipérbole, parábola, circunferência, operações numéricas, entre outros, estes dados poderiam ser temas principais da disciplina de Geometria Analítica, bem como, temas advindos de outras disciplinas) e do Espaço (que foi incluído nesta segunda versão devido ao objeto matemático da Geometria

Analítica, onde se têm situações que trabalham com o R^2, R^3, ou ainda, em um espaço qualquer).

A configuração que se tinha na primeira versão do dispositivo, com o conhecimento sendo constituído pelas habilidades, representações, significados, passa por uma nova reorganização nesta nova versão do dispositivo. Deste modo, o conhecimento nesta nova versão é composto pelas Habilidades, Representações, Tema, Espaço e Significado. Tendo como base desta estrutura a TCC e a Geometria Analítica.

No Dispositivo inicial tínhamos as Habilidades e o seu nível de dificuldades. Nesta nova versão, o nível de dificuldades passou a ser chamado de maturidade, devido à TCC, onde os estudantes utilizam seus esquemas para resolver uma determinada situação, podendo ser esquemas mais complexos ou não. Segundo Greca e Moreira (2003, p.54)

> Dos quatro elementos que constituem os esquemas (objetivo do esquema, regras de ação e controle, invariantes operatórios e possibilidades de inferência), somente os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) são indispensáveis na articulação entre uma situação que o sujeito enfrenta e o esquema que possui para poder resolvê-la.

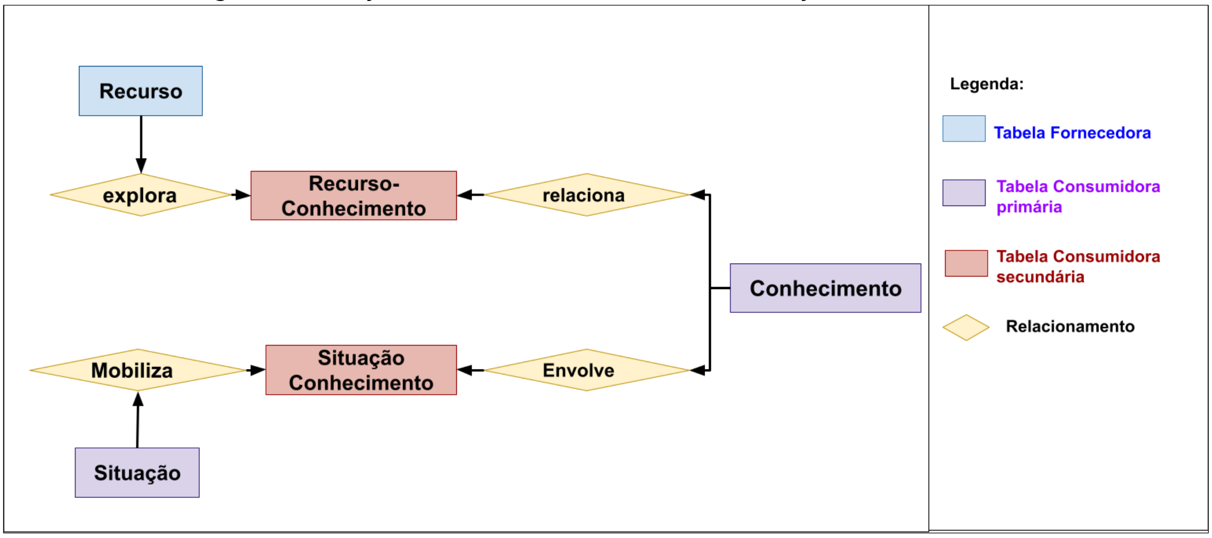
Assim, na Figura 7 observamos que a tabela de Habilidades determina a Maturidade e constitui também o Tipo de erro. Desta forma, obtemos informações sobre as maturidades e erros que os estudantes apresentam em relação à determinada habilidade, ao tentar resolver uma situação e quais teoremas-em-ação e conceitos-em-ação ele apresenta. De acordo com Greca e Moreira (2003, p.54) “Um teorema-em-ação é uma proposição que se supõe verdadeira sobre a situação e um conceito-em-ação é um objeto, um predicado ou uma categoria de pensamento tida como relevante a ela.”

Deste modo, é necessário que se faça um mapeamento dos tipos de erros apresentados pelos estudantes, para que possam ser trabalhados em situações que esses erros entrem em conflito. Ao trabalhar esses tipos de erros e os superar, os estudantes amadurecem, passam a ter um estoque maior de estratégias para enfrentar situações semelhantes ou outras situações.

Existe uma relação importante apresentada na Figura 7, em relação ao conhecimento, recursos e situações. Pois, levando em consideração a TCC o conhecimento acerca de um conceito é mobilizado quando o estudante entra em contato com as situações. Utilizamos também a relação Conhecimento e recurso, pois acreditamos que um recurso (como vídeos e simulações sobre uma resolução de problemas) ajuda o estudante nas estratégias que podem ser utilizadas por ele ao tentar resolver uma situação. Além disso, o recurso pode auxiliar o estudante sobre algum tipo de erro que este esteja cometendo ao resolver uma situação.

Na Figura 8, focaremos nas relações Recurso-Conhecimento e Situação-Conhecimento, neste primeiro caso temos que um recurso explora um conhecimento, assim como um conhecimento pode estar relacionado ao uso de um recurso. Na Figura 8 mostramos que este relacionamento entre Recurso e Conhecimento, gera no FrameAGAP uma nova tabela, a tabela Recurso-Conhecimento, onde se armazenam os dados dos conhecimentos explorados em cada recurso. É feito também o cruzamento dos dados das tabelas Situação-Conhecimento, pois o conhecimento envolve uma situação a dominar e a situação mobiliza o conhecimento. Nesta relação, armazenam-se as informações sobre os conhecimentos mobilizados em cada situação, como mostra a Figura 8.

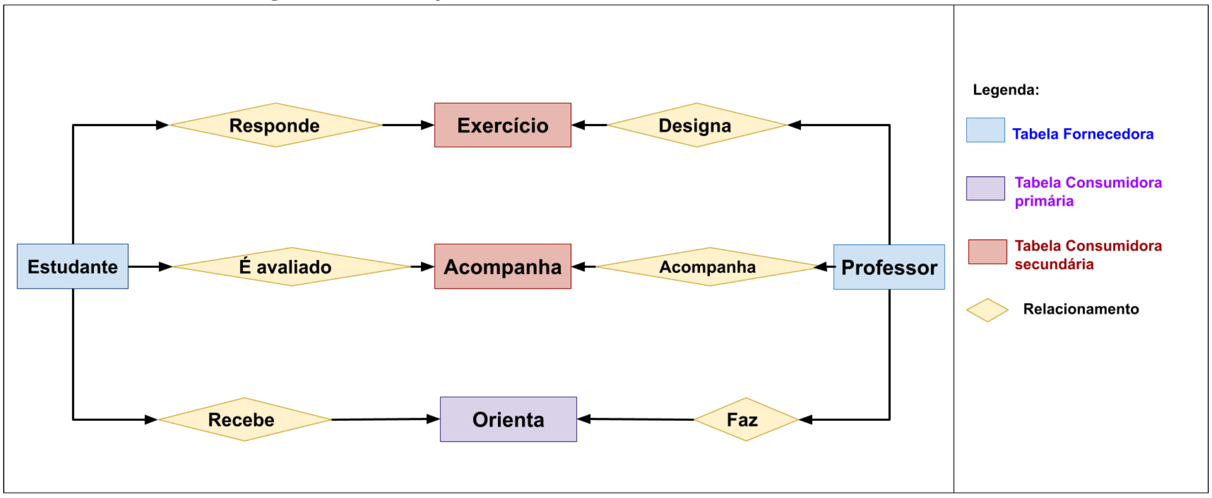
Figura 8: Relações Recurso-Conhecimento e Situação-Conhecimento



Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Temos por fim na Figura 7 a relação professor-estudante, na qual o professor designa situações ao estudante, fazendo o acompanhamento da sua aprendizagem ao indicar recursos que podem ajudar o estudante em suas dificuldades. Vamos aprofundar a relação professor-estudante com a Figura 8.

Figura 9: Relação Professor-Estudante no FrameAGAP



Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Na relação Professor-Estudante, o professor Designa exercícios aos estudantes, estes respondem e o enviam de volta ao professor, as informações sobre esta relação são levadas a tabela exercício. Na Figura 8 em cor vermelha por ser uma tabela consumidora secundária, nesta tabela são armazenadas as informações sobre a data de envio da atividade, a situação enviada, o conhecimento a ser mobilizado, o código do professor que designou a situação ao estudante e o código do estudante que recebeu a atividade, para que se tenha um controle sobre as atividades designadas ao estudante.

Na metodologia de ensino que propomos utilizar nesta pesquisa, se faz uma avaliação constante do estudante, para que professores e alunos tenham *feedbacks* sobre as aprendizagens, dificuldades de modo que se possa verificar os caminhos que o estudante pode seguir visto seu aprendizado. Deste modo, no FrameAGAP, o professor faz o acompanhamento do estudante por meio de avaliações (exercícios, situações em sala ou fora dela). Esse relacionamento gera a Tabela Acompanha, uma das mais importantes desta nova versão do dispositivo, para ela são levados os dados sobre os conhecimentos que o estudante demonstra ter, os tipos de erros que ele apresenta na resolução de uma situação, sua maturidade em relação a uma determinada habilidade, a situação resolvida por ele, se ele erra ou acerta a questão, qual o professor fez o acompanhamento e qual aluno está sendo acompanhado e a data do seu acompanhamento. Todos estes dados ficam armazenados na Tabela de Acompanhamento.

Na tabela de acompanhamento o professor identifica quais os conhecimentos e quais os tipos de erros que os estudantes apresentam, bem como as situações que resolveram se acertaram ou erraram, fazem o mapeamento do recurso que pode ajudar o estudante em suas dificuldades. A partir disso, surge outra tabela deste relacionamento Professor-Estudante, a tabela Orienta. Nela ficam as informações sobre o professor que está indicando algum recurso, o aluno que recebe a indicação, o código do recurso indicado e a data de indicação.

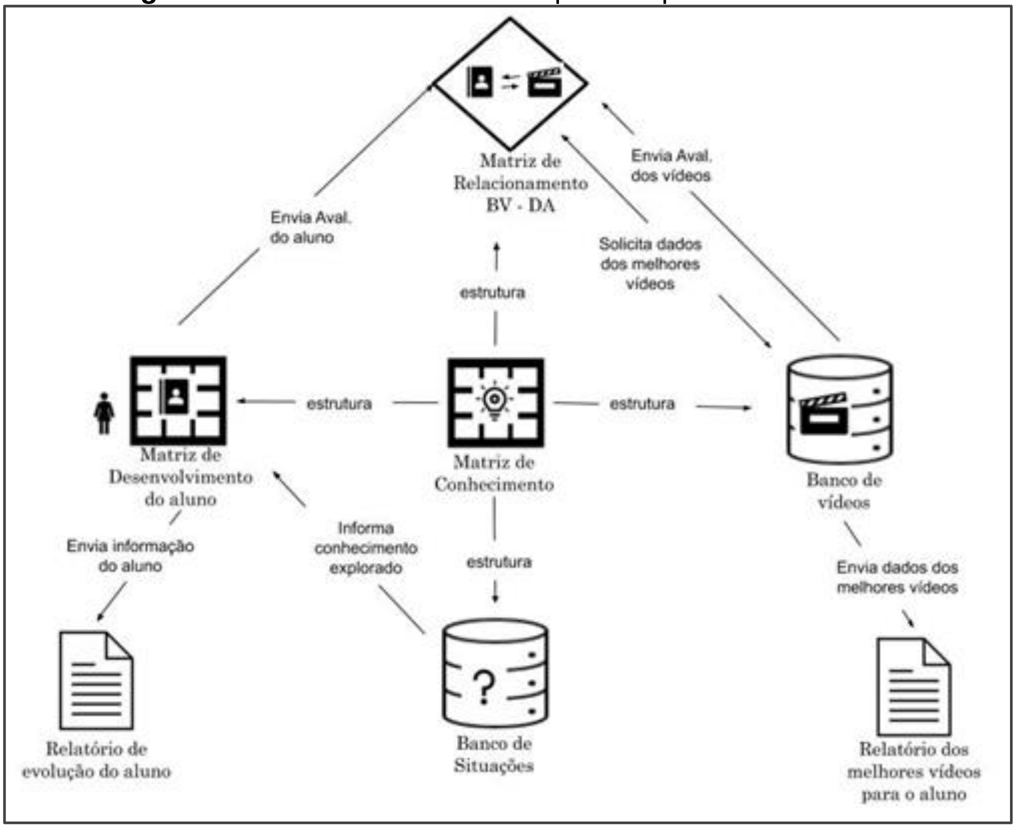
Tendo apresentado o processo de mudança do Dispositivo ao FrameAGAP e o funcionamento do FrameAGAP, descreveremos no próximo tópico sobre a relação entre o professor e o dispositivo.

5.2 O PROFESSOR, O DISPOSITIVO E O FRAMEAGAP

Tanto no Dispositivo construído e validado por Lima Jr. (2020), como nesta nova versão apresentada neste trabalho, o professor que utiliza o dispositivo é o pesquisador, mencionaremos aqui, sobre como se dá a relação entre o professor e o dispositivo em sua primeira e segunda versão, mostrando inicialmente o seu funcionamento.

No funcionamento da 1ª versão, a Matriz de conhecimento assume a centralidade, pois ela é responsável por estruturar o Banco de Vídeos, Banco de Situações, Matriz de Desenvolvimento do aluno e a Matriz de Relacionamento, como é possível ver na Figura 10:

Figura 10: Funcionamento do Dispositivo por Lima Jr



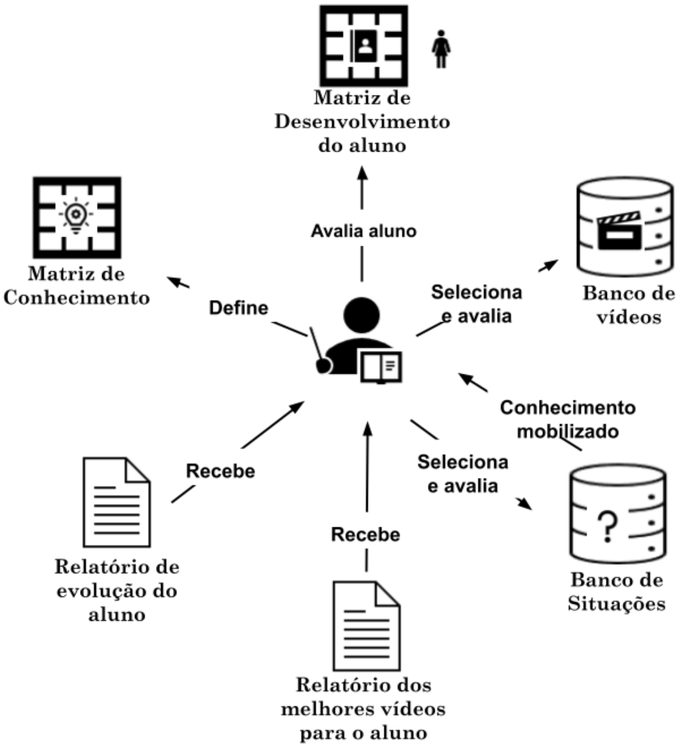
Fonte: Lima Jr. (2020, p. 81)

Na 1ª versão tínhamos como base fundamental o cruzamento de dados importantes, como a Matriz de conhecimento (onde estão os dados sobre as habilidades, os significados, as estruturas aditivas das frações, representações e dificuldades), que estrutura o Banco de Situações informando quais conhecimentos serão explorados, além disto, a Matriz de conhecimento também estrutura a Matriz de desenvolvimento do estudante (onde se armazenam os dados sobre os conhecimentos e as dificuldades apresentadas pelo estudante em cada situação resolvida). Dessa maneira, o professor pode acompanhar a aprendizagem do aluno, gerando para o professor um relatório sobre a evolução do aluno, como mostra a Figura 10.

Os dados sobre o desenvolvimento do estudante são levados à Matriz de Relacionamento, que cruza os dados sobre o desenvolvimento do estudante e quais vídeos contidos no banco de vídeo podem ajudar o aluno, gerando ainda, um relatório dos melhores vídeos para as dificuldades apresentadas por ele, como mostra a Figura 10.

Para que o funcionamento do Dispositivo pudesse acontecer, ao professor era destinado algumas funções, para facilitar o entendimento sobre papel do professor na utilização do Dispositivo, apresentamos a Figura 11:

Figura 11: O papel do professor na utilização do Dispositivo



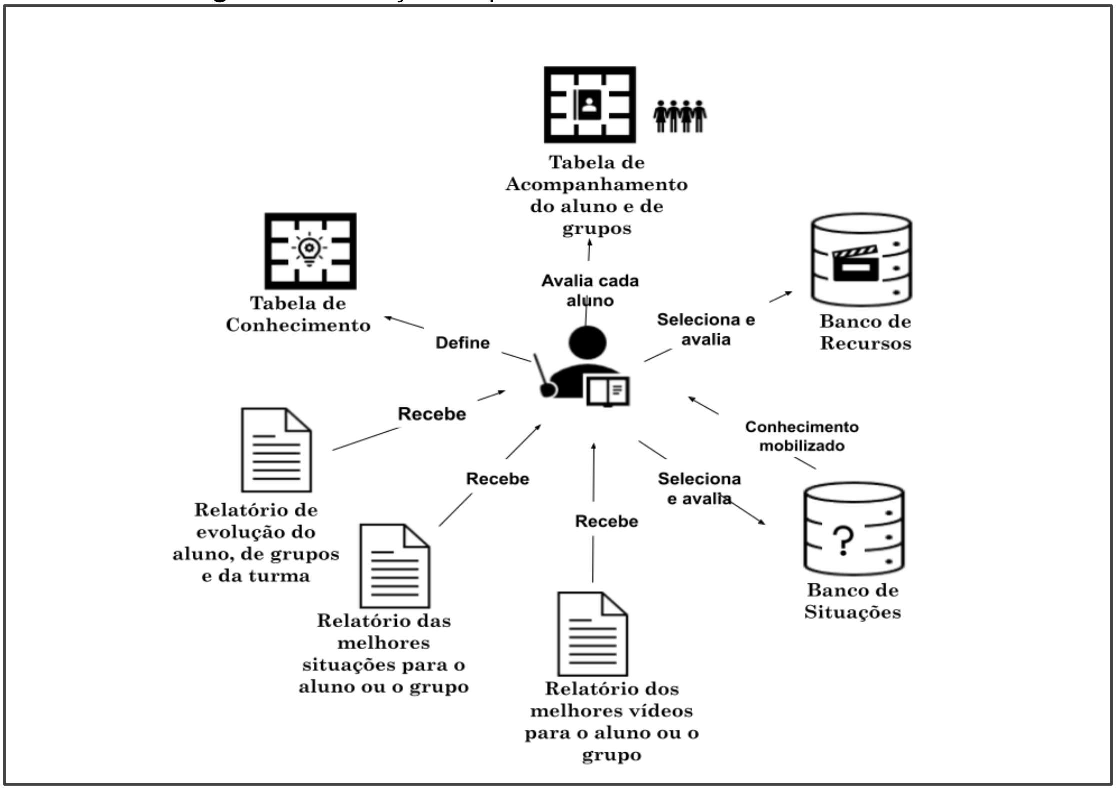
Fonte: Lima Jr. (2020, p. 79)

Na primeira versão, validada na pesquisa de Lima Jr (2020), o professor, que era também o pesquisador, testava o dispositivo com um estudante, para isso, ele analisava e selecionava os vídeos e situações, depositando esses recursos no banco de vídeos e banco de situações, respectivamente. Fazia a avaliação do estudante e inseria as informações na matriz de desenvolvimento do aluno. Além disso, o professor definia a matriz de conhecimento, contendo as habilidades a serem trabalhadas, significados das situações, suas representações, como mostra a Figura 11.

Ao inserir os dados no dispositivo, o professor recebe relatório da evolução do aluno, relatório dos melhores vídeos indicados para o aluno, quais conhecimentos estão sendo mobilizados pelo estudante, por meio do banco de situações, como indica a Figura 11.

Do Dispositivo ao FrameAGAP a capacidade de acompanhamento passa a ser para um grupo de estudantes e temos também às mudanças estruturais, assim, apresentamos a relação do professor e o FrameAGAP na Figura 12:

Figura 12: Relação do professor e o uso do FrameAGAP



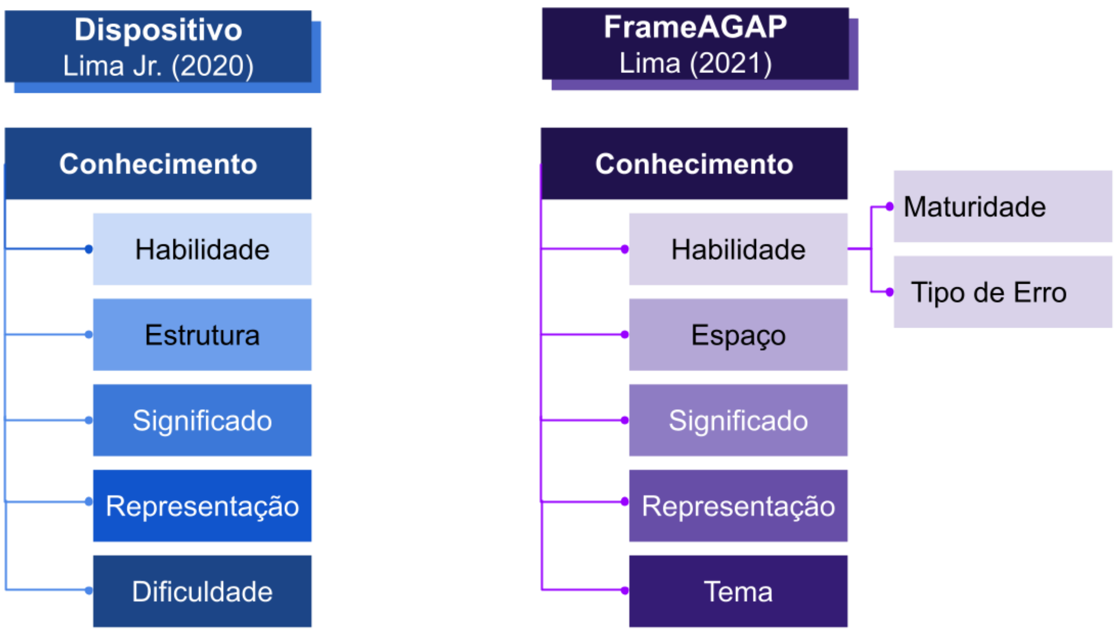
Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Nesta segunda versão, testamos o FrameAGAP para um grupo de estudantes, assim, ao usar o dispositivo o professor analisa e seleciona os recursos (vídeos e simulações), depositando esses recursos no banco de recursos, seleciona e analisa as situações e banco de situações, respectivamente. Avalia o estudante e insere as informações na Tabela de Acompanhamento. O professor define a Tabela de conhecimento, contendo as habilidades a serem trabalhadas, significados das situações, suas representações, espaço e tema a ser estudado, como mostra a Figura 12.

Como é possível observar na Figura 12, ao inserir os dados no dispositivo, o professor recebe relatório da evolução do aluno, relatório dos melhores recursos (vídeos e simulações) indicados para o aluno, quais conhecimentos estão sendo mobilizados pelo estudante, por meio do banco de situações e avaliado o estudante o professor pode enviar para ele um recurso que possa o ajudar, bem como uma nova situação, para que o estudante possa mobilizar os conhecimentos em que ele ainda apresenta dificuldades.

Na Figura 13 apresentamos uma comparação na estrutura do conhecimento do Dispositivo com a do FrameAGAP. No Dispositivo, o conhecimento era estruturado pelas Habilidades, Estruturas, Significados, Representação e Dificuldades. Já no FrameAGAP, o conhecimento se estrutura pelas Habilidades, que definem as Maturidades e Tipos de Erros apresentados pelos estudantes, Espaço (onde é possível especificar o espaço que se está trabalhando, R^2, R^3, ou um espaço qualquer), Significado, Representação, Tema (onde é possível incluir temas da ementa da disciplina, como vetores, distâncias e temas que não fazem parte da ementa, como operações numéricas, figuras geométricas. Assim, é possível trabalhar as dificuldades dos estudantes não só nos temas pertencentes a ementa, mas outros temas).

Figura 13: Comparação entre a estrutura de conhecimento do Dispositivo e o FrameAGAP



Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Com a construção do FrameAGAP estruturando o conhecimento como apresentado na Figura 13, foi possível fazer o acompanhamento personalizado de um grupo de estudantes, no conteúdo de cônicas, além de outros temas como pontos no plano cartesiano, quadrado do trinômio perfeito e outras habilidades que eram necessárias para que fosse possível resolver as situações proposta sobre cônicas. Assim, apresentamos no próximo tópico o acompanhamento personalizado de cada estudante.

5.3 ACOMPANHAMENTO DOS ESTUDANTES

Como a metodologia de ensino utilizada nesta pesquisa foi a Sala de Aula Invertida, levando em consideração uma de suas abordagens, o Ensino Sob Medida, as questões apresentadas foram organizadas em situações da parte assíncrona (enviadas para os estudantes previamente junto ao material de estudo) e situações da parte síncrona (escolhidas levando em consideração às dificuldades apresentadas pelos estudantes na parte assíncrona, para que fossem discutidas em sala de aula, que devido à Pandemia de Covid-19, acontecia de forma virtual). Além disso, a disciplina de Geometria Analítica, em que se realizou esta pesquisa, foi organizada por semanas temáticas. As semanas que eram parte do conteúdo desta pesquisa foram as semanas 8 e 9, na 8 foram trabalhados os conteúdos de circunferência e elipse e Semana 9, tratando das hipérboles e parábolas.

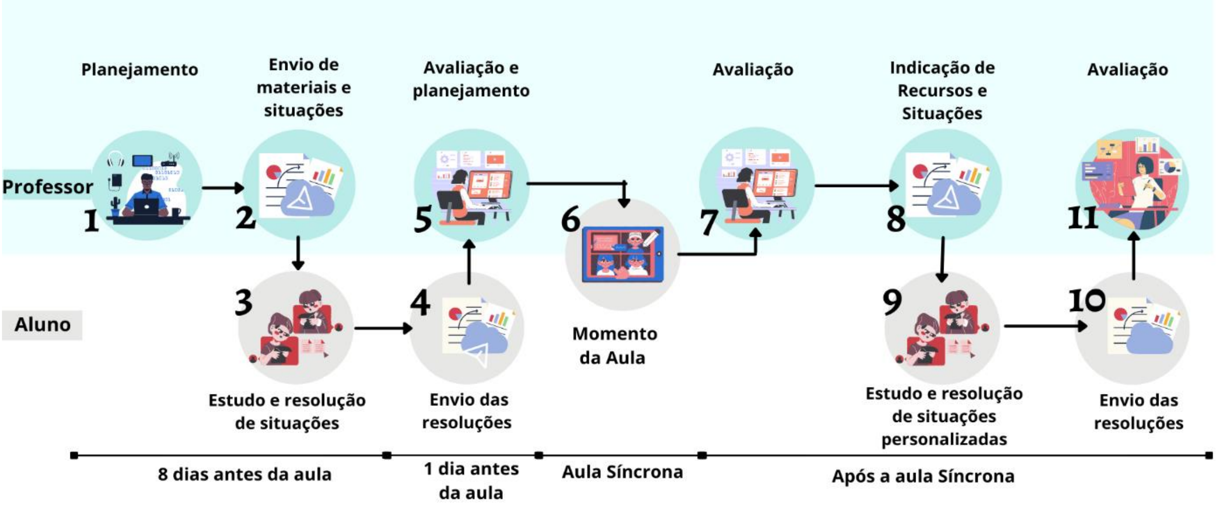
Integramos a Metodologia de Ensino Sob Medida ao FrameAGAP, na qual contamos com o auxílio do FrameAGAP para o acompanhamento personalizado dos estudantes. Assim, como mostra a Figura 14, o professor planeja com pelo menos 8 dias antes da aula os materiais e situações do momento assíncrono e envia estes materiais aos estudantes.

Os alunos estudam o material proposto pelo professor (sendo vídeo, texto ou slides), resolvem as situações do momento assíncrono e enviam as resoluções para o professor, pelo menos um dia antes da aula. O docente avalia os conhecimentos, habilidades, maturidades, dificuldades e tipos de erros dos estudantes e insere esses dados no FrameAGAP. Ele ainda planeja e escolhe as situações que serão discutidas em sala de aula.

Logo após, acontece o momento da aula síncrona, onde serão discutidas e resolvidas as situações planejadas pelo professor no passo 5. Ao fim da aula síncrona, os estudantes enviam as resoluções das situações para o professor. Após a aula síncrona, o professor avalia os estudantes, insere os dados dos tipos de erros, maturidades, habilidades e conhecimentos no FrameAGAP. Nele os dados ficam armazenados, sendo possível que o professor analise e indique para os estudantes os recursos e situações que melhor se adequam as suas dificuldades.

Os estudantes estudam os materiais indicados (vídeos, simulações), resolvem as situações propostas e enviam as soluções para o professor, que avalia novamente cada estudante, inserindo os dados dessas novas resoluções no FrameAGAP, e vendo a necessidade de cada aluno, o professor pode retomar ao passo 8, indicando materiais e recursos ao estudante para uma nova avaliação.

Figura 14: O Ensino Sob Medida e o FrameAGAP



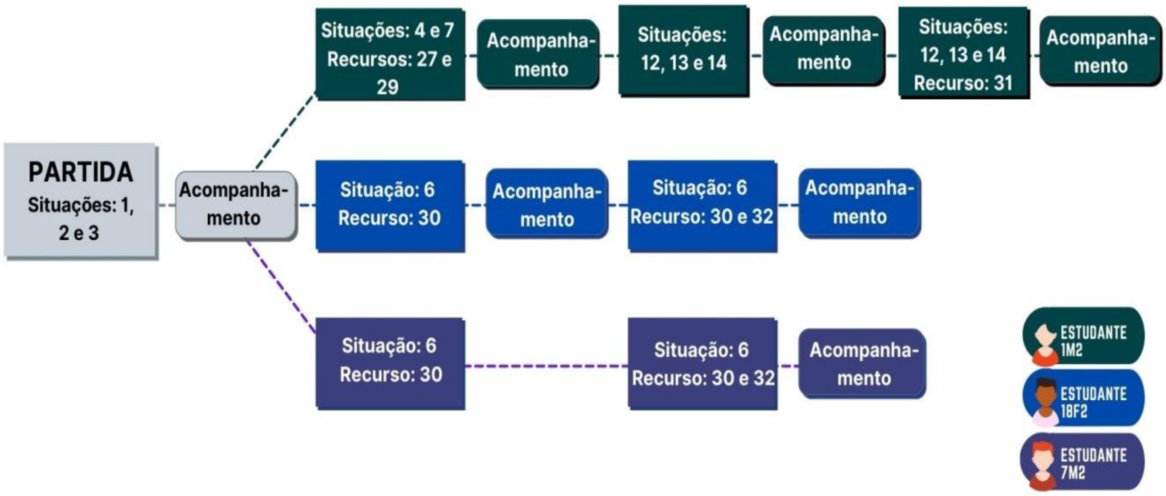
Fonte: Adaptada de Araújo e Mazur (2013, p. 374)

Nesta pesquisa, foi realizado o acompanhamento das aprendizagens de três estudantes, são eles: 1M2, 7M2 e 18F2, dois deles são estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e um do curso de Licenciatura em Física. Os códigos para identificação foram utilizados para garantir o anonimato dos participantes da pesquisa.

Apresentaremos o acompanhamento feito por meio do FrameAGAP a partir das resoluções das questões assíncronas enviadas aos estudantes e das situações escolhidas com a ajuda do dispositivo a partir dos conhecimentos apresentados por cada um.

Os estudantes partiram de situações comum, foram elas as questões 1, 2 e 3, sobre elipse e circunferência, enviadas aos estudantes junto com o material teórico da disciplina de Geometria Analítica, que trazia uma apresentação em slides com link de anexo para texto e vídeo sobre as cônicas obtidas por meio do corte de um cone circular reto com um plano inclinado e paralelo a base (no caso da circunferência), o lugar geométrico da circunferência e elipse, seus elementos, aplicações e alguns exemplos resolvidos. O envio do material teórico e das questões assíncronas foi feito por meio do Google *Classroom*, da turma de Geometria Analítica.

Figura 15: Acompanhamento dos estudantes com o FrameAGAP



Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Como mostra a Figura 15, os estudantes 1M2, 18F2 e 7M2 partem das situações 1, 2 e 3 enviadas no momento assíncrono, da semana 8, que tratava os temas elipse e circunferência. O professor faz o acompanhamento do estudante, avaliando os conhecimentos, habilidades, maturidades e tipos de erros apresentados, os alunos recebem situações e recursos personalizados.

Na Figura 15, é possível observar que a partir da resolução das situações, os alunos trilham caminhos diferentes, mas é possível que estudantes com dificuldades semelhantes, como no caso dos estudantes 7M2 e 18F2 utilizem os mesmos recursos e situações.

Vale ressaltar que cada situação e recurso, é acompanhado por um código identificador, como é possível observar na Figura 15, estes números que acompanham cada situação e recurso são ordens que eles estão registrados no FrameAGAP. O mesmo acontece com os números que acompanham os Conhecimentos, Habilidades, Maturidades, Tipos de Erro como será apresentado a seguir e estes apresentam a mesma justificativa.

Nos próximos subtópicos apresentaremos o acompanhamento personalizado de cada estudante, quais os recursos, situações foram utilizados por cada estudante, além disso, quais conhecimentos, habilidades, maturidades e tipos de erros apresentados pelos alunos e explorado por cada recurso. Iniciamos a seguir com o acompanhamento da estudante 1M2.

5.3.1 Acompanhamento da estudante de Matemática 1M2

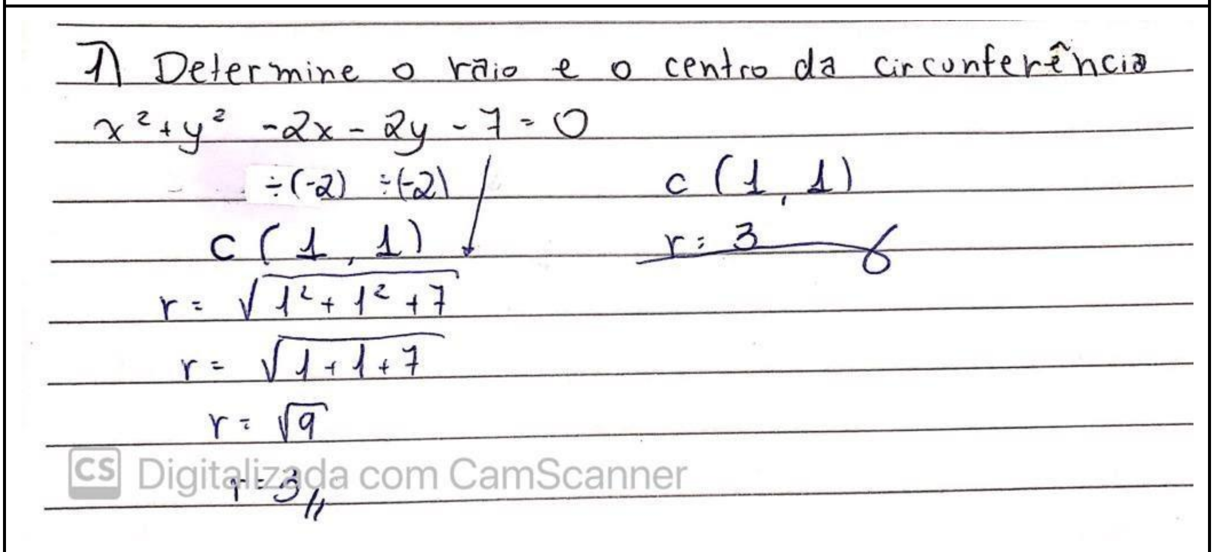
Neste subtópico apresentaremos o acompanhamento da estudante 1M2 por meio do FrameAGAP, mostrando as situações, os recursos que a estudante trabalhou e os conhecimentos e dificuldades demonstrados pela estudante.

A estudante 1M2 no decorrer da pesquisa, trabalhou com um total de 8 situações, sendo 3 questões do momento assíncrono sobre circunferência e elipse, 2 situações enviadas após análise da resolução com o FrameAGAP e 3 questões assíncronas sobre hipérbole e parábola, corrigidas posteriormente pela estudante após ter recebido recursos para auxiliar nas resoluções das situações.

A situação 1 apresentada no Quadro 1, foi enviada para os estudantes da turma de Geometria analítica junto com o material assíncrono sobre circunferência e elipse. Nesta situação pretendíamos analisar os conhecimentos que os alunos apresentavam sobre o conceito de raio e centro a partir da equação geral da circunferência, a situação tem como significado objeto geométrico e representação algébrica.

Quadro 1: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 1

Situação 1: Determine o centro e o raio da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.


1) Determine o raio e o centro da circunferência

$x^2+y^2-2x-2y-7=0$

$\div(-2) \quad \div(-2)$

$c(1,1)$ $\quad$ $c(1,1)$

$r: 3$

$r=\sqrt{1^2+1^2+7}$

$r=\sqrt{1+1+7}$

$r=\sqrt{9}$

$r=3$

Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro

1	22. (*) Determinar o raio e as coordenadas do centro a partir da equação circunferência;	2. A partir da equação geral da circunferência.	Acerta	Nulo
15	(#) 41. Completar quadrado.	94. Quando os coeficientes são números inteiros.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Analisada a resolução da aluna 1M2 nesta situação, percebemos que ela consegue determinar o centro e o raio da circunferência utilizando como ferramenta o fato de que, se um produto notável é $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$, então é possível realizar a divisão $-2 \cdot a \cdot b \div (-2)$ para determinar o valor b.

Na equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ dada na situação 1, a estudante 1M2 divide $-2 \cdot x \div (-2)$ e $- 2 \cdot y \div (-2)$, tendo como resultado ambas as divisões 1, assim ela determina o centro da circunferência C(1,1). Utilizando a ideia de fatoração do trinômio do quadrado perfeito, ela eleva ambos os resultados obtidos ao quadrado, e o soma com o termo independente da equação geral da circunferência, ficando com: $1^2 + 1^2 + 7$, onde ela calcula a raiz quadrada para encontrar o raio da circunferência $r = \sqrt{1^2 + 1^2 + 7}$, encontrando 3 como raio da circunferência. Notamos que, a estudante consegue trabalhar algebricamente com a equação, utilizando a fatoração para determinar elementos da circunferência, demonstrando o conhecimento 15, maturidade 94, de nível 2, onde registramos “nulo” por não encontrar nenhum tipo de erro, nesta estratégia, como mostra o Quadro 1 da situação 1.

Deste modo, é possível perceber que a estudante consegue determinar com facilidade o centro C (1,1) e o raio (r = 3) da circunferência. Como uma das maturidades da estudante 1M2 registadas no acompanhamento de sua aprendizagem no FrameAGAP têm se a habilidade 22 (Determinar o raio e as coordenadas do centro a partir da equação circunferência), com maturidade 2 (A partir da equação geral da circunferência), de nível 2, da na tabela de acerto registramos que a estudante acerta a questão e na tabela “tipo de erro”, registramos “nulo”, pois ela consegue cumprir com o que foi pedido.

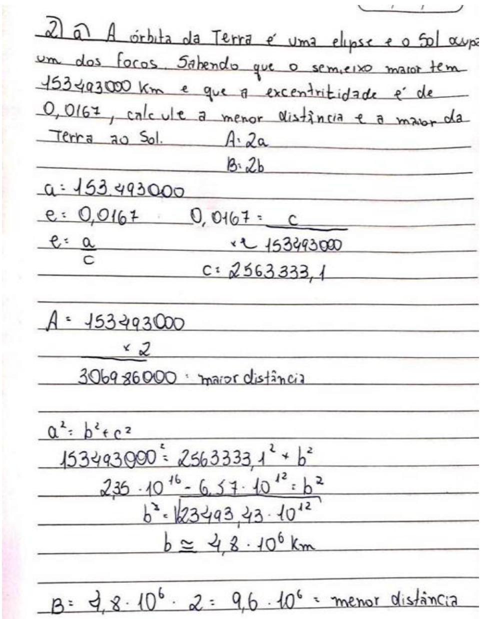
Na situação 2, apresentada no Quadro 2, trabalhamos uma situação sobre elipse, tendo como significado o deslocamento de um ponto no plano. Neste caso, deslocamento da Terra em torno do sol e se utiliza a representação em linguagem natural, que contextualiza a situação, daí em sua resolução, a estudante pode se utilizar desta representação e usar outras como, representação geométrica e algébrica. Essa situação foi escolhida para que fosse possível trabalhar a identificação dos elementos da elipse (eixos e semieixos maior, menor e focal), conhecer o ponto da elipse de menor distância ao foco, a excentricidade de uma elipse, além de descobrir uma das aplicações das cônicas: A lei das órbitas de Johannes Kepler.

Como é possível observar no Quadro 2, para solucionar a situação 2, a estudante utiliza os dados disponibilizados na questão. Ela escreve A = 2a, ao que aparenta para identificar o eixo maior da elipse, e B = 2b para identificar o eixo menor. Utilizando duas informações importantes, a que a excentricidade é de 0,0167 e o semieixo maior a = 153 493 000 km.

Como a excentricidade é 0,0167 a aluna substitui este dado e a medida do semieixo (a), para determinar c (medida do semieixo focal), ela escreve a excentricidade como $e = \frac{a}{c}$, mas calcula $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{153\,493\,000}$, logo, ela determina a medida do semieixo focal.

Quadro 2: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 2

Situação 2: A órbita da Terra é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Sabendo que o semieixo maior tem 153 493 000 km e que a excentricidade é de 0,0167, calcular a menor e a maior distância da Terra ao Sol.



2) a) A órbita da Terra é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Sabendo que o semeixo maior tem 153493000 Km e que a excentricidade é de 0,0167, calcule a menor distância e a maior da Terra ao Sol.

A: 2a

B: 2b

a: 153.493000

e: 0,0167 0,0167 = c / 153493000

e: a/c

c: 2563333,1

A = 153493000 × 2 = 306986000 = maior distância

$a^2 = b^2 + c^2$

$153493000^2 = 2563333,1^2 + b^2$

$2,35 \cdot 10^{16} - 6,57 \cdot 10^{12} = b^2$

$b^2 = 23493,43 \cdot 10^{12}$

$b \cong 4,8 \cdot 10^6$ Km

$B = 4,8 \cdot 10^6 \cdot 2 = 9,6 \cdot 10^6$ = menor distância

Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
21	32. (*) Interpretar o resultado da situação.	9. Quando é necessário o uso de mais de uma equação para resolver a situação.	Erra	2701. Dificuldade na interpretação do problema
7	26. (*)Envolver o contexto e a equação.	11. Quando esta não é dada na situação.	Erra	2601. Não Reconhece a distância do foco ao vértice como menor (maior) distância de um ponto da elipse a um dos focos.
22	27.(*) Interpretar a situação com passagem para a linguagem geométrica.	12. Quando a situação envolve a utilização de mais de uma equação para ser resolvida.	Erra	2701. Dificuldade na interpretação do problema.
5	28. (*) Identificar o ponto na elipse de menor distância para o foco.	11. Quando esta não é dado na situação.	Erra	2601. Não Reconhece a distância do foco ao vértice como menor (maior) distância de um ponto da elipse a um dos focos.

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Logo depois, ela multiplica o semieixo focal por 2, obtendo a medida do semieixo maior, faz uso da relação a² = b² + c² para determinar a medida do semieixo menor. Encontrado b, ela multiplica 2b, obtendo a medida do eixo menor da elipse. Assim, ela conclui que B = 2b é a menor distância entre Terra e o sol.

Assim, foi possível mapear algumas dificuldades da estudante na resolução da situação 2. Quando ela conclui que B = 2b é a menor distância, isto pode acontecer porque em relação ao eixo maior (2a), tem se que 2b < 2a. De forma análoga ela conclui que o eixo maior 2a é a maior distância entre a Terra e o sol.

Algumas das dificuldades apresentadas pela estudante foram: Dificuldades quanto a interpretação do problema e não reconhecimento da distância do foco ao vértice como menor (maior) distância de um ponto da elipse a um dos focos. O que poderia facilitar na interpretação da situação seria a representação geométrica da situação.

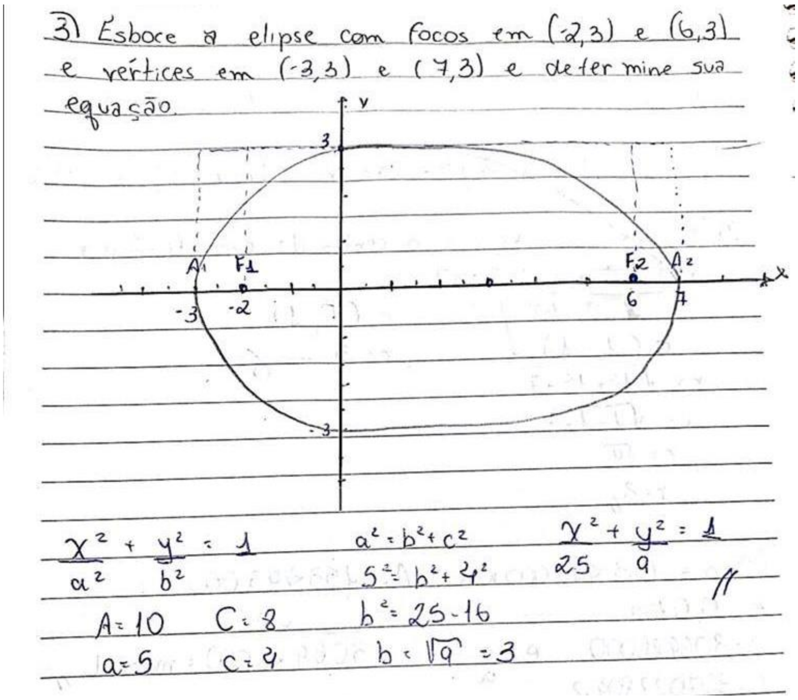
Tendo escolhido a situação 2 com significado objeto de deslocamento no plano e tendo representação em linguagem natural, escolhemos um outro tipo de situação para compor as 3 questões assíncronas. A situação 3 foi escolhida para trabalhar com a elipse tendo como significado objeto geométrico e a representação cartesiana, onde foram dados os pontos de dois vértices e dos focos de uma elipse com centro fora da origem e era pedido que os estudantes determinassem sua equação e gráfico. Assim, para que a situação fosse resolvida, um dos caminhos que poderia ser seguido era utilizar a representação cartesiana, traçando os pontos dados no plano cartesiano, e a partir daí, determinar a medida do eixo maior e eixo focal da elipse, em seguida determinar os semieixos e descrever a equação e o gráfico da elipse.

Nesta situação, os estudantes trabalharam com o esboço do gráfico a partir de suas coordenadas, a identificação dos elementos da elipse, a determinação da equação a partir dos elementos encontrados.

No Quadro 3, apresentamos a situação 3 e a resolução da aluna 1M2.

Quadro 3: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 3

Situação 3: Esboce a elipse com focos em (- 2, 3) e (6, 3) e vértices em (- 3, 3) e (7, 3) e determine a sua equação.



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
8	35. (*) Esboçar o gráfico da elipse a partir das coordenadas dos focos e vértices;	6. Com centro fora da origem (0,0).	Erra	3503. Dificuldade ao raçar o gráfico da elipse com centro fora da origem.
9	36 (#). Traçar pontos no plano cartesiano;	15. Não coincidentes com um dos eixos x ou y, ou seja, do tipo (x,y).	Erra	3601. Dificuldade em traçar pontos no plano cartesiano.
13	40 (*). Determinar a equação reduzida da elipse transladada.	16. Quando o eixo focal é paralelo ao eixo x ou y.	Erra	4001. Dificuldade em construir a equação da elipse transladada.

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

A estudante 1M2 em sua resolução, esboça o sistema de coordenadas ortogonais, identificando os eixos x e y. Ao tentar traçar o ponto dos foco, F_1(-2, 3) por exemplo, ela desenha o caminho da coordenada fazendo pontilhados paralelos a y e passando por x = -2, pontilhados passando por y = 3 e paralelo ao eixo x, porém, não marca os pontos na interseção dos caminhos, ou seja, não marca os pontos F_1(-2, 3) e F_2 (6 , 3),mas, F_1(-2, 0) e F_2 (6 , 0). De forma análoga ela faz com os pontos A_1(-2, 3) e A_2 (6 , 3), os trocando por A_1(-2, 0) e A_2 (6 , 0). Assim, no acompanhamento da aluna 1M2, onde foi analisada a habilidade secundária 36, “traçar pontos no plano cartesiano”, referente a maturidade 15 “não coincidentes com um dos eixos x ou y, ou seja, do tipo (x,y)” de nível 2, a estudante apresentou o tipo de erro 3601 “Dificuldade em traçar pontos no plano cartesiano”.

Analisamos que a estudante consegue determinar as medidas dos eixos maior, sendo A = 10, e obtendo a = 5, do mesmo modo ela encontra a medida do eixo focal C = 8, logo determina c = 4. A partir daí, ela utiliza a relação $a^2 = b^2 + c^2$ para determinar o valor b = 3. É observado assim, que ela conhece os elementos eixo maior, eixo focal da elipse, sabendo que os semieixos correspondem a metade do eixo, ela consegue determiná-los. Semelhantemente ao que ela também faz na situação 2 comentada anteriormente. Assim, nesta situação 3, não escrevemos a identificação dos elementos como sendo uma dificuldade.

Ao escrever a equação da elipse ela escreve como uma elipse com centro na origem do sistema de coordenadas *xoy*. E ao esboçar o gráfico, ela esboça o eixo focal coincidindo com o eixo x, onde na verdade, o eixo focal estaria paralelo a x, passando pelo ponto y = 3. Deste modo, no acompanhamento de sua aprendizagem registramos que nas habilidades 35 “Esboçar o gráfico da elipse a partir das coordenadas dos focos e vértices” e 40 “Determinar a equação reduzida da elipse transladada” referente as maturidades 6 “Com centro fora da origem (0,0)” e 16 “quando o eixo focal é paralelo ao eixo x ou y”, de nível 2, respectivamente. Os tipos de erros apresentados pela estudante na situação 3, foram: 3503 “Dificuldade ao traçar o gráfico da elipse com centro fora da origem” e 4001 “Dificuldade em construir a equação da elipse transladada”.

Tendo essas informações, procuramos no banco de dados, situações e recursos que pudessem mobilizar os conhecimentos que a aluna apresentava dificuldades. Deste modo, escolhemos o recurso 27[4] por ser dentre os recursos sobre elipse que trabalhavam com algumas dificuldades da estudante, o que explorava de forma mais detalhada como traçar pontos no plano cartesiano, explicando sobre as coordenadas e como a partir deles esboçar o gráfico da elipse. Embora, não fosse um recurso que partisse de uma situação com representação cartesiana, já que sua representação era algébrica. O vídeo parte da equação geral da elipse, chega a reduzida e a partir disso é feito o esboço do gráfico, de todo modo, dentre os recursos existentes os aspectos de construção do gráfico, pontos

[4] O recurso 27 de título “(p.200 Ex.33) Equação, centro, vértices, foco e excentricidade para a elipse”. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=PUxn53iBRPw

do plano e a determinação da equação reduzida da elipse e a relação desta com o gráfico é bem explorado neste recurso. Escolhemos o recurso 29[5], por trabalhar com algumas dificuldades apresentadas pela estudante em relação a resolução da situação 2. Neste recurso, é utilizado a linguagem natural, no qual o professor do vídeo inicia falando sobre os elementos da elipse, o conceito de afélio e periélio e sua excentricidade.

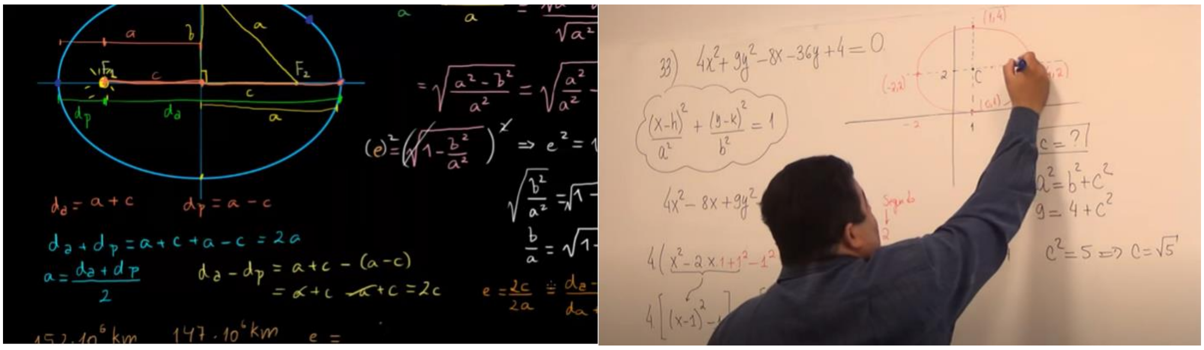
Analisadas às resoluções das situações 1, 2 e 3 da estudante 1M2, enviamos por *e-mail* um *feedback* sobre as dificuldades da estudante, anexando um formulário com os recursos 27 e 29, que serão apresentados no Quadro 4, seguido das situações 4 e 7, que serão apresentadas posteriormente.

Observando o Quadro 4 é possível identificar que o recurso 27 explora três das dificuldades apresentadas pela estudante, são elas: 3503, 3601 e 4001. Uma dificuldade que a estudante não apresenta e que o recurso 27 explora é a dificuldade 4101 “completar quadrado”. Já o recurso 29, auxilia nas dificuldades 2601 e 2701 apresentadas pela estudante na resolução da situação 2.

Comparando a tabela de Recurso-conhecimento, na coluna tipo de erro (que correspondem aos tipos de erros que os vídeos podem ajudar), com a tabela do acompanhamento da estudante 1M2 nas situações 2 e 3, na coluna tipo de erro (que apresenta as dificuldades encontrada pela estudante), foi possível verificar que esses recursos poderiam colaborar com a aprendizagem da estudante, bem como as situações 4 e 7.

[5] O recurso 29 por titulo “Elipses (parte 3) - excentricidade, afélio, periélio”. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=AEnXscwa8DQ&t=574s

Quadro 4: Conhecimentos explorados pelos recursos 27 e 29



Recurso	Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Tiro de erro
27	19	4. Esboçar o gráfico da elipse a partir de suas equações.	6. Com centro fora da origem (0,0).	3503. Dificuldade ao traçar o gráfico da elipse com centro fora da origem.
27	9	36. Traçar pontos no plano cartesiano	15. Não coincidentes com um dos eixos x ou y, ou seja, do tipo (x,y).	3601. Dificuldade em traçar pontos no plano cartesiano.
27	13	40. Determinar a equação reduzida da elipse transladada.	20. A partir da equação geral.	4001.Dificuldade em construir a equação da elipse transladada.
27	15	41. Completar quadrado.	94. Quando os coeficientes são números inteiros.	4101. Não consegue completar quadrados corretamente.
29	21	32. Interpretar o resultado da situação.	9. Quando é necessário o uso de mais de uma equação para resolver a situação.	2701. Dificuldade na interpretação do problema
29	7	26. Envolver o contexto e a equação.	11. Quando esta não é dada na situação.	2601. Não Reconhece a distância do foco ao vértice como menor (maior) distância de um ponto da elipse a um dos focos.
29	22	27. Interpretar a situação com passagem para a linguagem geométrica.	12. Quando a situação envolve a utilização de mais de uma equação para ser resolvida.	2701. Dificuldade na interpretação do problema.

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

A situação 7 enviada para a estudante, tem o mesmo significado da situação 2 “objeto de deslocamento no plano” e a mesma representação “linguagem natural”. Então, a partir das dificuldades apresentadas pela estudante na situação 2, foi elaborada pela pesquisadora a situação 7, visto que nos materiais utilizados na disciplina de Geometria analítica, não foram exploradas muitas situações com o significado objeto de deslocamento no plano, grande parte das situações têm como significado objeto geométrico.

Feito o acompanhamento da aprendizagem, enviamos um *e-mail* com o anexo ao formulário Google, orientando para a estudante 1M2 que assistisse ao vídeo 29, tentasse resolver a situação 7 e que nos enviasse sua resolução. Do mesmo modo, pedimos que ela assistisse ao vídeo 27, resolvesse a situação 4 e nos enviasse a resolução.

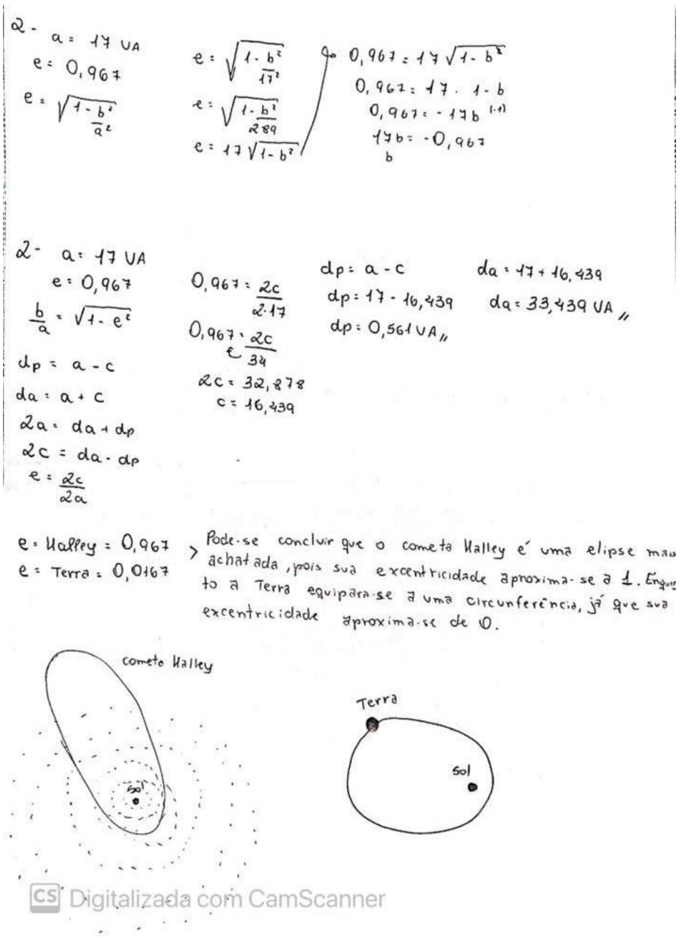
Na situação 7, é dito que o cometa Halley orbita o sol, que seu semieixo maior tem 17 UA (unidades astronômicas) e é dada sua excentricidade. Pede se então que a estudante determine a maior e menor distância do Halley ao Sol. Ao fim, a estudante teria que comparar a excentricidade da órbita do Halley, com a excentricidade da órbita da Terra, justificando suas relações, como mostra o Quadro 5.

Em sua resolução a estudante 1M2 inicia calculando a excentricidade da órbita do Halley, por um meio que é ensinado no vídeo 29 o qual ela assistiu que é, utilizar o semieixo focal c, a partir da relação $a^2 = b^2 + c^2$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, sabendo que $e = \frac{c}{a}$, tem-se $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, manipulando algebricamente chegamos a: $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}$, utilizando algumas propriedades de potência e raiz, vem que: $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$. Então o professor no vídeo pede que os estudantes vejam o vídeo e utilizem essa última fórmula para investigar algebricamente e geometricamente o que acontece quando a excentricidade aumenta e quando ela diminui.

Assim, é visto que a estudante faz anotações sobre essas formas de determinar os elementos e calcular a excentricidade que é apresentada no vídeo, tentando determinar inclusive a medida do semieixo menor da elipse, como é possível observar no Quadro 5.

Quadro 5: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 7

Situação 7: O Cometa Halley é visível na Terra a cada 75 ou 76 anos, quando atinge o periélio. Sabe-se que o semieixo maior de sua órbita mede 17 UA (Unidades Astronômicas) e que sua excentricidade é de 0,967. Calcule a menor e a maior distância do cometa ao Sol. Comparando a excentricidade do cometa Halley, com a excentricidade da órbita da terra (E = 0,0167), o que se pode concluir? Faça um esboço da situação.



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
21	32(*). Interpretar o resultado da situação.	9. Quando é necessário o uso de mais de uma equação para resolver a situação.	Acerta	Nulo
7	26(*). Envolver o contexto e a equação.	11. Quando esta não é dada na situação.	Acerta	Nulo
22	27(*). Interpretar a situação com passagem para a linguagem geométrica.	12. Quando a situação envolve a utilização de mais de uma equação para ser resolvida.	Acerta	Nulo
5	28(*). Identificar o ponto na elipse de menor distância para o foco.	11. Quando este não é dada na situação.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Logo após a discussão sobre a excentricidade no vídeo, o professor apresenta o conceito de periélio (ponto em que um planeta está mais próximo ao sol), afélio (ponto em que um planeta está mais afastado do sol) e sobre a Lei das órbitas de Kepler “A órbita de todo planeta é uma elipse com o sol em um dos focos.” Assim, apresentasse o periélio e o afélio geometricamente, e algebricamente ele mostra como é possível utilizar as medidas dos semieixos para calcular a menor e maior distância de um planeta ao sol, e utiliza a soma das distâncias (Distância afélio + Distância periélio) para determinar o eixo maior da elipse (2a), fazendo distância afélio - Distância periélio, ele indica que obtém-se o eixo focal (2c) e a partir disso é possível calcular a excentricidade como $e = \frac{2c}{2a}$. Como exemplo, ele utiliza o periélio e o afélio da Terra.

Na resolução da estudante, ela utiliza a excentricidade $e = \frac{2c}{2a}$, para determinar o eixo (2c = 32,878) e o semieixo focal (c = 16, 439). Já tendo o semieixo maior da elipse a = 17 UA, ela faz o cálculo do periélio$d_p = 17 - 16,439 = 0{,}561\ UA$, de forma análoga ela calcula o afélio $d_p = 17 + 16,439 = 33,439\ UA$.

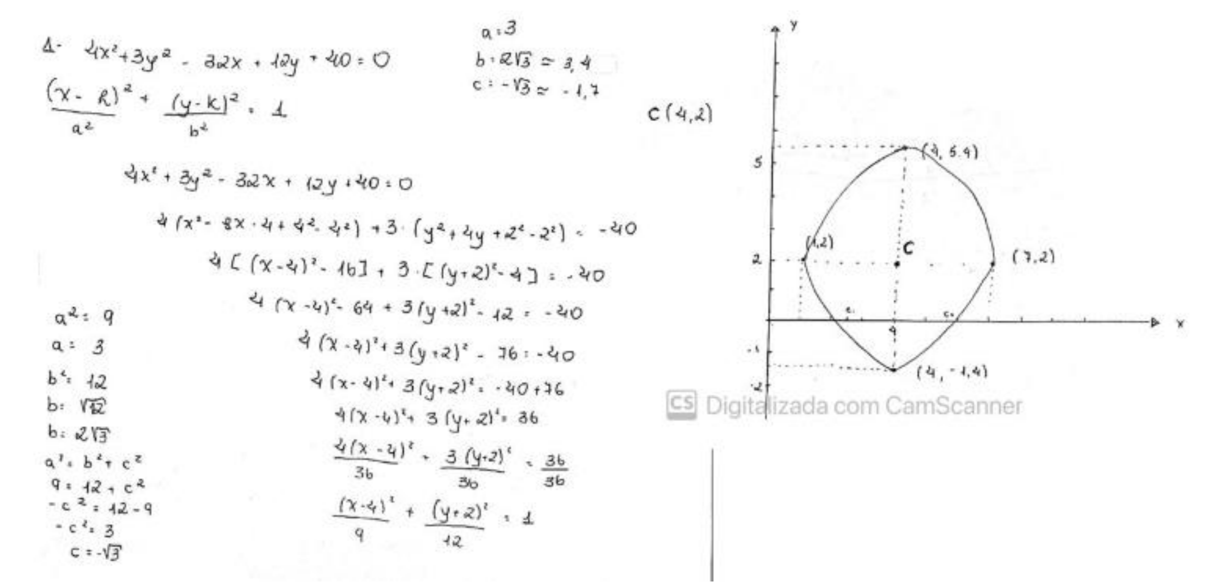
No Quadro 5, é possível verificar que a partir das excentricidades a estudante conclui que “O cometa Halley é uma elipse mais achatada, pois sua excentricidade se aproxima de 1. Enquanto a Terra equipara-se a uma circunferência, já que sua excentricidade se aproxima de 0.” E ao representar a órbita dessas elipses, ela desenha a órbita do Halley mais achatada e da Terra mais próxima a uma circunferência. O que demonstra que ela consegue agora representar geometricamente a situação resolvida. Sobre as excentricidades ela diz que o Halley é mais achatado, e que a Terra é equiparada a uma circunferência, porém é possível perceber que ela se refere às órbitas destes, pois representa a Terra ao redor do Sol, uma órbita quase que circular.

No acompanhamento da estudante em relação à situação 7, registramos no banco de dados que ela não apresenta nenhum tipo de dificuldade em relação às maturidades 9 interpretar a situação, utilizando os dados da situação “quando é necessário o uso de mais de uma equação para resolver a situação”, 11 Conhecer um dos vértices como ponto de menor distância ao seu foco mais próximo, “quando esta não é dada na situação”, 12 Interpretar a situação com passagem para a linguagem geométrica “quando a situação envolve a utilização de mais de uma equação para ser resolvida”, referente às habilidades 32, 26/28 e 27 respectivamente e apresentando nível 2.

A partir da análise da resolução da situação 3, enviamos para a estudante a situação 4, que assim como o recurso 27, apresenta significado “objeto geométrico” e representação algébrica, escolhemos a situação para que ela trabalhasse nas dificuldades apresentadas nos tipos de erros referentes às habilidades 35, 36 e 40, como mostra o Quadro 6.

Quadro 6: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 4

Situação 4: Construa o gráfico da elipse $4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$ e identifique a medida dos seus elementos (a,b e c).



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
9	36 (#). Traçar pontos no plano cartesiano;	15. Não coincidentes com um dos eixos x ou y, ou seja, do tipo (x,y).	Acerta	Nulo
13	40 (*). Determinar a equação reduzida da elipse transladada.	16. Quando o eixo focal é paralelo ao eixo x ou y.	Acerta	Nulo
8	35. (*) Esboçar o gráfico da elipse a partir das coordenadas dos focos e vértices;	6. Com centro fora da origem (0,0).	Erra	3504. Determinar o centro da elipse quando uma das coordenadas é um número negativo.
14	5. (*) Identificar os parâmetros a, b e c, da elipse, e a sua excentricidade.	5. Quando não são dados na situação.	Erra	503. Faz os elementos da elipse como sendo um número negativo. (ex. - c).

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

A situação 4, trabalha com as habilidades 36 (#) “Traçar pontos no plano cartesiano”, 40 (*) “Determinar a equação reduzida da elipse transladada”, 35. (*) “Esboçar o gráfico da elipse a partir das coordenadas dos focos e vértices” e 5. (*)

“Identificar os parâmetros a, b e c, da elipse, e a sua excentricidade”, como mostra o Quadro 6.

A equação geral da elipse discutida no vídeo 27 ($4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$) é uma equação semelhante à apresentada na situação 4 ($4x^2 + 3y^2 - 32x - 12y + 40 = 0$). Percebe-se assim, o porquê da manipulação dessa equação geral, para que se chegue em sua forma reduzida, assim é possível verificar mais facilmente o centro da elipse e as medidas dos semieixos maior e menor.

Deste modo, o professor escreve $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, que se obtém manipulando a equação geral da elipse, até que se chegue em sua forma reduzida. Neste caso, quando a elipse tem eixo focal paralelo ao eixo x, ele ainda discute a relação da equação e do gráfico da elipse, em relação a posição do semieixo maior no denominador da equação. Então, podemos perceber que a estudante anota como se escreve a equação geral da circunferência.

Em seguida, ele mostra como utilizar os produtos notáveis (conhecido também como método de completar quadrado) para que tendo a equação geral possamos chegar na equação reduzida. Assim, a estudante utiliza desses procedimentos algébricos ensinados no vídeo para chegar na equação reduzida da elipse, aprendendo uma outra forma de trabalhar com equações gerais, em relação a utilizada por ela na situação 1.

Com a equação reduzida da elipse, a estudante 1M2 esboça seu gráfico, traçando corretamente os pontos no plano cartesiano. Deste modo, percebemos que ela não apresenta nesta resolução a dificuldade 3601 “Dificuldade em traçar pontos no plano cartesiano”. No esboço da elipse, ela consegue representar uma elipse com centro fora da origem, não apresentando a dificuldade 3503 “Dificuldade ao traçar o gráfico da elipse com centro fora da origem”, e chegando na equação da elipse transladada percebemos que ela supera a dificuldade 4001 “Dificuldade em construir a equação da elipse transladada.”

Assim, muitas dificuldades apresentadas por ela na resolução da situação 3, são superadas com a situação 4, porém, a estudante apresenta o tipo de erro, 3504 “Dificuldade em determinar o centro da elipse quando uma das coordenadas é um número negativo”, o qual não tinha sido ainda registrado no banco de dados e que a partir desta resolução passamos a registrar. A saber, o vídeo 27 também não aborda esse tipo de erro.

Esse erro ocorre pelo fato de não diferenciar que na equação $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y+k)^2}{b^2} = 1$, tem-se $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-(-k))^2}{b^2} = 1$, logo o centro da elipse seria o ponto C (h, -k), no caso da elipse apresentada na situação 4 seu centro seria C(4, -2). Assim, registramos esse tipo de erro (3504), para que pudéssemos trabalhar nele em uma outra situação sobre cônicas.

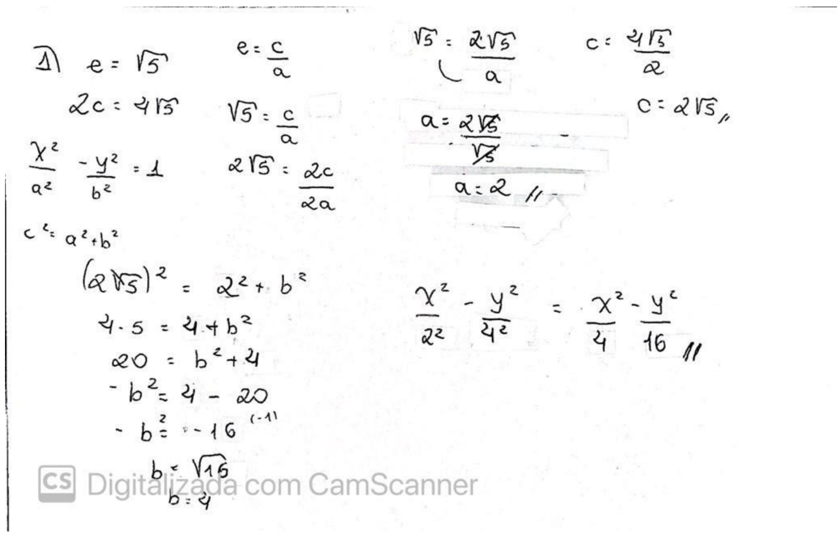
A partir de agora, discutiremos a análise das resoluções da estudante 1M2, nas atividades assíncronas sobre parábola e hipérbole, essas situações foram enviadas para os estudantes da turma de Geometria analítica, de modo, que só foi feito o acompanhamento por meio do FrameAGAP dos participantes da pesquisa, como feito anteriormente também, nas situações 1, 2 e 3. No Quadro 7, apresentamos a situação 12, a resolução feita pela estudante 1M2 e o seu acompanhamento.

Escolhemos a situação 12, por ser uma situação que tem como representação a linguagem natural e como significado o objeto geométrico. A partir da situação 12, resolvida pela estudante 1M2, é possível perceber que ela inicia identificando a excentricidade da hipérbole corretamente $e = \sqrt{5}$ e conhece a distância focal $2c = 4\sqrt{5}$, sabendo que o semieixo focal é o eixo focal dividido por dois ela determina que $c = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$. Também utiliza a excentricidade ($e = \frac{c}{a}$) da hipérbole para determinar o semieixo maior (a) e conclui que a = 2. Assim, registramos em seu acompanhamento, que no conhecimento 29, para a habilidade 46 “Identificar os elementos a, b e c da hipérbole”, maturidade 24 “quando estes não são dados na situação”, de nível 2, a estudante acerta o elemento correspondente a esse objetivo da questão, não apresentando nenhum tipo de erro.

Abaixo, como outro passo para chegar à conclusão do problema, ela consegue determinar a medida do semieixo (b) da hipérbole, utilizando a relação $c^2 = a^2 + b^2$, daí, tem-se, b = 4. Neste caso, a estudante apresenta o conhecimento 30, que tem como habilidade 47 “Utilizar a relação $c^2= a^2 + b^2$ para determinar elementos da Hipérbole”, representação 5 “Algébrica” e Significado “Objeto geométrico”. A maturidade para o conhecimento 30 foi a 26 “quando um dos elementos é dado na situação”, a avaliação é que ela acerta e não apresenta nenhum tipo de erro.

Quadro 7: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 12

Situação 12: Determine Equação da hipérbole cuja excentricidade é raiz de 5 e cuja distância focal é quatro vezes raiz de 5. (O centro coincide com a origem e os focos estão sobre o eixo x). E esboce seu gráfico.


1) $e = \sqrt{5}$ $\quad e = \frac{c}{a}$ $\quad \sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{a}$ $\quad c = \frac{4\sqrt{5}}{2}$

$2c = 4\sqrt{5}$ $\quad \sqrt{5} = \frac{c}{a}$ $\quad a = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ $\quad c = 2\sqrt{5}$ //

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad 2\sqrt{5} = \frac{2c}{2a}$ $\quad a = 2$ //

$c^2 = a^2 + b^2$

$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 + b^2$

$4 \cdot 5 = 4 + b^2$

$20 = b^2 + 4$

$-b^2 = 4 - 20$

$-b^2 = -16 \; (-1)$

$b = \sqrt{16}$

$b = 4$

$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16}$ //

Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
29	46(*). Identificar os elementos a, b e c da hipérbole.	24. Quando estes não são dados na situação.	Acerta	Nulo
30	47(*). Utilizar a relação $c^2 = a^2 + b^2$ para determinar elementos da Hipérbole	26. Quando um dos elementos é dado na situação	Acerta	Nulo
31	48(*). Determinar a equação da Hipérbole	29. Com centro na origem (0,0).	Erra	4801. Não faz $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, retirando a igualdade, ficando uma expressão numérica apenas.
32	49(*). Esboçar o gráfico da Hipérbole	32. Com centro na origem (0,0).	Erra	4901. Não faz o esboço do gráfico.

Fonte: elaborado pela autora (2021)

Ao escrever a equação da hipérbole, a estudante consegue utilizar os elementos da hipérbole para escrever a equação, porém, não iguala a expressão a 1. No canto superior esquerdo, ela anota corretamente como se escreve a equação reduzida da hipérbole na origem, o que temos indício de que ela pode saber, mas como ela não iguala a expressão a 1 no fim de sua solução, registramos o erro. Assim, avaliamos que para o conhecimento 31, na habilidade 48 “Determinar a equação da Hipérbole”, referente a maturidade 29 “ com centro na origem”, nível 1, o erro apresentado pela estudante foi 4801 “Não faz $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, retirando a igualdade, ficando uma expressão numérica apenas”.

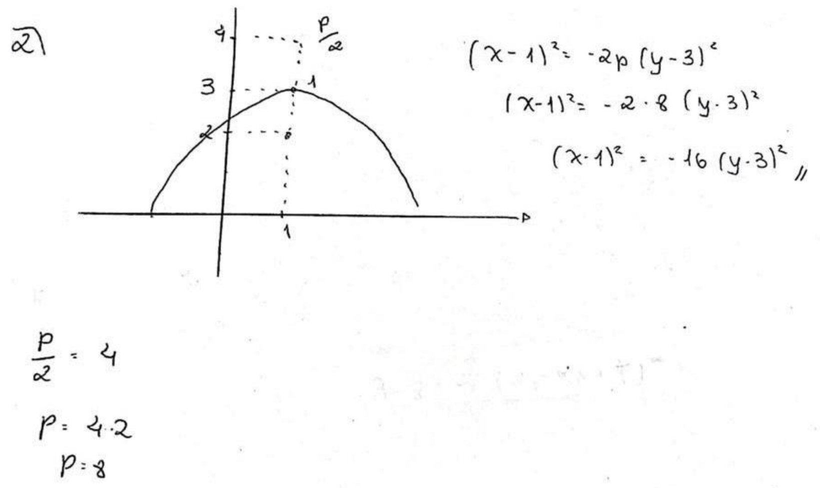
Pede se no fim da situação 12 que a estudante faça o esboço do gráfico, como não havíamos registrado no banco de dados a maturidade referente ao fato do estudante não esboçar o gráfico, registramos para o conhecimento 32, habilidade 49 “Esboçar o gráfico da hipérbole”, maturidade 32 “na origem”, nível 1, na avaliação registramos que a estudante erra e como tipo de erro descrevemos o 4901 “Não faz o esboço do gráfico”.

Discutiremos agora a resolução da situação 13 pela estudante 1M2, que foi escolhida para compor as questões assíncronas da semana 9, a qual abordamos a hipérbole e a parábola, por ser uma situação em que se tinha significado de objeto geométrico, com a representação n-upla. Ao tentar resolver a situação os estudantes poderiam utilizar a representação cartesiana e algébrica na solução desse problema. Uma estratégia possível seria: traçar pontos no plano cartesiano, identificar os elementos da parábola, de acordo com o foco, identificar a concavidade e daí descrever a equação. No Quadro 8, apresentamos a situação 13, a resolução da estudante 1M2 e o acompanhamento de sua aprendizagem utilizando o FrameAGAP.

Na resolução da situação 13, a estudante 1M2 representa graficamente a parábola dada, traçando inicialmente os pontos do vértice (1,3) e do foco (1,2), para esboçar o gráfico, passando pelo foco e com a concavidade para baixo, que faz de forma correta. Deste modo, ela apresenta o conhecimento 37, habilidade 13 “Identificar a concavidade da parábola verificando se é voltada para esquerda, direita, cima, baixo”, maturidade 73 “a partir da posição do vértice e foco”. Sendo assim, ela não apresentou nenhum tipo de erro sobre a concavidade da parábola.

Quadro 8: Acompanhamento da estudante 1M2 da situação 13

Situação 13: Determine a equação da parábola com vértice em (1, 3) e foco em (1, 2) e esboce o gráfico.



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
35	11.(*) Identificar os elementos da parábola (foco, diretriz, vértice, parâmetro).	66. Quando dois deles são dados na situação.	Erra	1101. Não identifica os elementos da parábola corretamente.
33	50. (*) A partir do gráfico da parábola, identificar quando p é menor que 0.	37. Quando o gráfico não é dado na situação.	Acerta	Nulo
34	51. (*) Esboçar o gráfico da Parábola	41. Quando o eixo focal é paralelo a x ou y.	Erra	5101. Faz o valor p/2 como sendo uma coordenada da parábola, e não a medida do foco ao vértice.
36	12. (*) Determinar a equação reduzida da parábola.	71. Tendo as coordenadas do vértice e foco.	Erra	1201. Reconhece a forma da equação transladada da parábola, em relação ao plano xy inclui as coordenadas do vértice na equação, mas não determina corretamente o parâmetro, o que deixa incorreta a equação.
37	13. (*) Identificar a concavidade da parábola (voltada para esq, direita, cima, baixo).	73. A partir da posição do vértice e foco.	Acerta	Nulo
38	52. Determinar o valor do parâmetro P de uma parábola	43. A partir das coordenadas do vértice e foco.	erra	5201. Não identifica corretamente o valor do parâmetro P.

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Ela também traça o ponto (1,4), que é justamente o ponto por onde passa a reta diretriz paralela ao eixo x, chamando esse ponto de $\frac{p}{2}$, que no material indicado seria a distância do foco ao vértice e também a distância do vértice a reta diretriz. Junto ao ponto (1,3) ela escreve o número 1, porém, não indica se “1” seria a distância do vértice (1,3) ao ponto (1,4). Abaixo do gráfico, ela escreve $\frac{p}{2} = 4$, assim, registramos o tipo de erro 5101 “Interpreta a medida $\frac{p}{2}$ como sendo uma coordenada da parábola, e não a distância do foco ao vértice”, que neste caso, seria 1. O erro 5101 foi registrado como parte do conhecimento 34, tendo habilidade 51 “Esboçar o gráfico da parábola” e maturidade 41 “Quando o eixo focal é paralelo a x ou y”.

A notação utilizada por ela, ao chamar o ponto (1,4) de $\frac{p}{2}$também causa confusão para que ela consiga determinar o parâmetro da parábola. Tendo escrito $\frac{p}{2} = 4$, ela determina o parâmetro $p = 8$, que seria a distância da reta diretriz ao foco. Algebricamente, ela consegue determinar o parâmetro, mas mostra não reconhecer a relação algébrica - geométrica para a medida do parâmetro. Deste modo, com o parâmetro errado, ela não chega à equação correta da parábola. Sobre o conhecimento do conceito do parâmetro, como medida do foco a diretriz, foi registrado no acompanhamento da estudante que no conhecimento 35, habilidade 11 “Identificar os elementos foco, diretriz, vértice, parâmetro da parábola”, maturidade 66 “quando dois deles são dados na situação” de nível 1, a estudante apresenta o tipo de erro 1101 “Não identifica os elementos da parábola corretamente”.

Por ter essa dificuldade quanto a identificação do parâmetro, foi utilizado o tipo de erro 1101 que inclui a dificuldade de identificação dos elementos como sinônimo de todos os elementos, pois na tabela do tipo de erro, referente a habilidade 11, não tinha sido registrada a dificuldade elemento por elemento de forma individualizada.

Como ela determina incorretamente o parâmetro da parábola, a equação por consequência também fica errada, assim, para o conhecimento 36, habilidade 12 “Determinar a equação reduzida da parábola”, maturidade 71 “tendo as coordenadas do vértice e foco” de nível 1, a aluna apresentou o tipo de erro 1201 “Reconhece a forma da equação transladada da parábola, em relação ao plano xy inclui as coordenadas do vértice na equação, mas não determina corretamente o parâmetro, o que deixa a equação incorreta”.

Em sua resolução, a estudante mostra conhecer a relação entre a concavidade e o parâmetro, quando p < 0. Deste modo, em seu acompanhamento percebemos que ela apresenta o conhecimento 33, habilidade 50 “a partir do gráfico da parábola, identificar quando p é menor que 0”, maturidade 37 “quando o gráfico não é dado na situação” de nível 2, acertando a relação do gráfico da parábola e a equação no sentido de se ter p < 0.

Um erro que a estudante apresenta e que não foi registrado, pois nos passou despercebido na resolução da avaliação, é que ela eleva ao quadrado o segundo membro da equação, que pode ter sido apenas um descuido dela, ou ela apresenta realmente essa dificuldade. No material teórico enviado aos estudantes, apresentamos o lugar geométrico da parábola, como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano tal que a distância de um ponto P ao foco F é igual da distância de P à reta diretriz, assim utilizamos $d(P,F) = d(P,P')$ para deduzir a equação da parábola, discutindo sobre os elementos, concavidade e sua relação com o parâmetro. Deste modo, ao reavaliar a aluna verificaremos como ela irá trabalhar com a equação da parábola, se elevará novamente o segundo membro da equação.

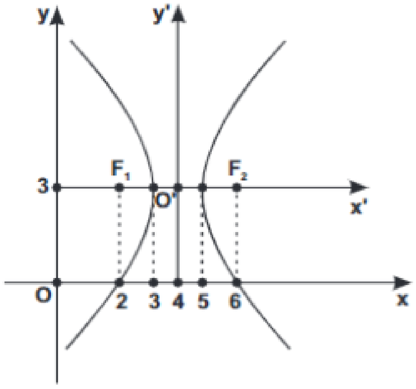
A última situação que compôs o exercício para o momento assíncrono da semana 9 sobre parábola e hipérbole foi a questão 14. Por ser uma situação com representação cartesiana (gráfica), onde se parte inicialmente do gráfico da hipérbole. O significado da situação foi o objeto geométrico, pois como havíamos comentado anteriormente sobre as situações da semana 8, foi difícil encontrar nos materiais, situações com o significado de deslocamento no plano.

No Quadro 9 apresentaremos a situação 14, seguido da resolução da estudante 1M2 e os conhecimentos apresentados por ela ao tentar solucionar a situação.

A estudante inicia sua solução escrevendo a forma da equação reduzida da hipérbole de centro na origem. Ao lado, ela identifica corretamente os elementos da hipérbole, escreve a medida do eixo real, onde a = 1 e a medida do semieixo focal, fazendo 4 - 2 (sendo 4 a coordenada x do centro e 2 a coordenada x do foco). Desse modo ela demonstra nesta situação conhecer os elementos da hipérbole, por meio do seu gráfico. Para determinar b, ela faz uso da relação $c^2 = a^2 + b^2$, com a qual encontra a medida do semieixo imaginário $b = \sqrt{3}$.

Quadro 9: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 14

Situação 14: Determine a equação da hipérbole representada abaixo:



3) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$a = 1$

$c = 4-2$

$c = 2$

$c^2 = a^2 + b^2$

$2^2 = 1^2 + b^2$

$b^2 = 4-1$

$b = \sqrt{3}$

$\dfrac{x^2}{1^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

$\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ //

Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
39	46. Identificar os elementos a, b e c da hipérbole.	24. Quando estes não são dados na situação.	Acerta	Nulo
40	48. Determinar a equação da Hipérbole.	30. Com centro transladado.	Erra	4802. modela a equação da hipérbole transladada como se fosse na origem.
41	47. Utilizar a relação $c^2 = a^2 + b^2$ para determinar elementos da Hipérbole.	26. Quando nenhum elemento é dado na situação.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

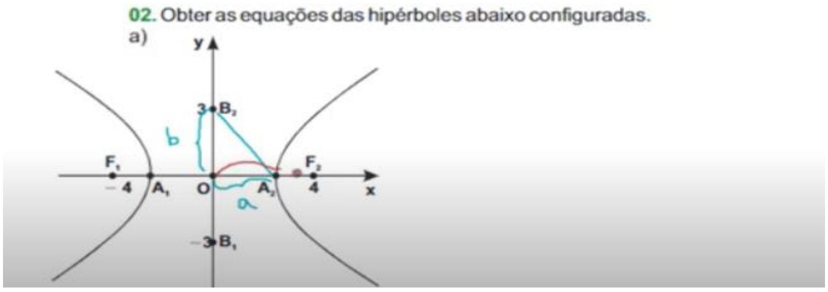
Com os elementos da hipérbole, ela os utiliza para escrever sua equação, substitui as medidas dos semieixos real e imaginário na equação, mas no numerador, os deixa em relação ao sistema xoy, sem levar em consideração o centro O'(4, 3). Para que a representação gráfica da hipérbole estivesse de acordo com a equação, a estudante teria que escrevê-la em relação ao sistema x'o'y', ou modificar a equação, incluindo nela as coordenadas do centro. Deste modo, para esta estudante foi necessário trabalhar com os conhecimentos sobre a equação da hipérbole transladada e o seu gráfico, tanto em relação ao sistema x'o'y, quanto a um sistema transladado x'o'y'.

Analisando a resolução da estudante 1M2, concluímos o acompanhamento da sua aprendizagem na resolução da situação 14 registrando que ela conhece os elementos da hipérbole, apresentando o conhecimento 39, habilidade 46 "Identificar os elementos a, b e c da hipérbole", maturidade 24 "quando estes não são dados na situação", não apresentando nenhum tipo de erro. Para o conhecimento 40, habilidade 48 "Determinar a equação da Hipérbole", maturidade 30 "com centro transladado", apresentou-se o tipo de erro foi 4802 "Faz a equação transladada como se fosse na origem". Por fim, no conhecimento 41, habilidade 47 "Utilizar a relação $c^2 = a^2 + b^2$ para determinar elementos da Hipérbole", maturidade 26 "quando nenhum elemento é dado na situação" de nível 3, não foi registrado erro.

Analisadas as questões assíncronas 12, 13 e 14 da estudante 1M2, inserimos os dados dos seus conhecimentos, tipos de erro, maturidade no banco de dados na tabela de acompanhamento, foi feita a análise no banco de recurso e conhecimento para verificar quais recursos trabalhariam com os tipos de erros apresentados pela estudante, na análise percebemos que não tínhamos nenhum recurso que desse conta de todos os tipos de erros e que contivessem exemplos sobre parábolas e hipérboles em um só vídeo. Deste modo, criamos o recurso 31 em formato de vídeo em que exploramos os tipos de erros apresentados pela estudante, tentando abordar o significado e as representações abordados nas situações 12, 13 e 14 das questões assíncronas.

Nos Quadros 10 e 11 apresentamos alguns conhecimentos explorados no recurso 31.

Quadro 10: Conhecimentos explorados pelo recurso 31



Recurso	Conheci mento	Habilidades	Maturidade	Tiro de erro
31	29	46(*). Identificar os elementos a, b e c da hipérbole.	24. Quando não são dados na situação.	4601. Confunde os elementos da hipérbole com os elementos da elipse.
31	30	47(*). Utilizar a relação $c^2= a^2 + b^2$ para determinar elementos da Hipérbole.	26. Quando nenhum elemento é dado na situação.	4702. Confunde as medidas, semieixo real (a) com o semieixo imaginário (b). Confunde tbm o semieixo focal, como sendo as medidas dos semieixos da hipérbole. Não utilizando corretamente as medidas a,b e c.
31	31	48(*). Determinar a equação da Hipérbole.	29. Com centro na origem (0,0)..	4801. Não faz $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, retirando a igualdade, ficando uma expressão numérica apenas.
31	32	49(*). Esboçar o gráfico da Hipérbole.	32. Com centro na origem (0,0)..	4901. Não faz o esboço do gráfico.
31	35	11.(*) Identificar os elementos da parábola (foco, diretriz, vértice, parâmetro).	66. Quando dois deles são dados na situação.	1101. Não identifica os elementos da parábola corretamente.
31	33	50. (*) A partir do gráfico da parábola, identificar quando p é menor que 0.	37. Quando o gráfico não é dado na situação.	5001. Determina a medida p, mas não verifica graficamente quando $p < 0$.
31	34	51. (*) Esboçar o gráfico da Parábola	41. Quando o eixo focal é paralelo a x ou y.	5101. Faz a medida p/2 como sendo uma coordenada da parábola, e não a medida do foco ao vértice.
31	36	12. (*) Determinar a equação reduzida da parábola.	71. Tendo as coordenadas do vértice e foco..	1201. Reconhece a forma da equação transladada da parábola, em relação ao plano xy inclui as coordenadas do vértice na equação, mas não determina corretamente o parâmetro, o que deixa incorreta a equação.

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Quadro 11: Conhecimentos explorados pelo recurso 31 (Continuação)

Recurso	Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Tiro de erro
31	37	13. (*) Identificar a concavidade da parábola (voltada para esq, direita, cima, baixo).	73. A partir da posição do vértice e do foco.	1301. Não identifica corretamente a concavidade da parábola, se é voltada para esquerda, direita, cima ou baixo.
31	38	Determinar a medida do parâmetro P de uma parábola	43. A partir das coordenadas do vértice e foco.	5201. Não identifica corretamente a medida do parâmetro P.
31	40	48. Determinar a equação da Hipérbole.	30. Com centro transladado.	4802. Faz a equação transladada como se fosse na origem.
31	41	47. Utilizar a relação $c^2= a^2 + b^2$ para determinar elementos da Hipérbole.	26. Quando nenhum elemento é dado na situação.	4701. Faz a subtração da menor medida pela maior, tendo $b^2 = -a^2 + c^2 \Rightarrow b = \text{sqrt}((-a)^2 + c^2)$, o que torna errado o valor de b.

Fonte: elaborado pela autora (2021)

Com o recurso 31[6] que, por se tratar de um vídeo com duração de 40 minutos, com 7 situações discutidas por 5 minutos em média, entramos em contato por *e-mail* com a estudante lhe dando o *feedback* sobre o acompanhamento da sua aprendizagem e informando sobre a duração do vídeo. Perguntamos se ela aceitaria assisti-lo para que refizesse as questões da atividade do momento assíncrono ou síncrono. A estudante então aceitou assistir ao vídeo, resolvendo e nos devolvendo a resolução das questões da atividade assíncrona 12, 13, e 14, discutidas anteriormente.

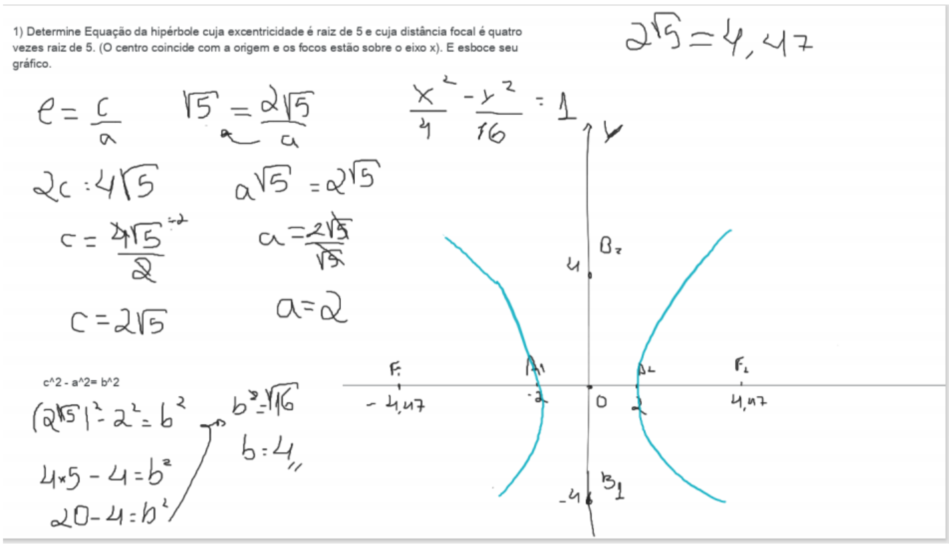
O recurso 31 trabalha com 12 conhecimentos, todas as situações apresentadas no vídeo têm significado objeto geométrico, com situações que apresentam representação cartesiana, linguagem natural, n-upla, assim como nas situações resolvidas pela estudante. É discutido também no vídeo os tipos de erros apresentados por ela, como, o erro 4801 sobre como escrever a equação de modo que não se confunda com uma expressão numérica. O esboço do gráfico da hipérbole é também abordado, trabalhando com o tipo de erro 4901, além de discutir sobre os elementos da parábola, o esboço do gráfico e sua equação, de modo que a estudante pudesse trabalhar com as dificuldades 1101, 5101, 1201 e as demais apresentadas por ela.

[6] O recurso 31 trata-se do vídeo "Exemplos - Parábolas e Hipérboles". Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=4ZGLLt14JnQ

Ao receber o vídeo 31 que havia sido enviado por email, a estudante nos retorna a resolução das situações 12, 13 e 14 refeitas por ela. No Quadro 12 apresentamos a solução da situação 12.

Quadro 12: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 12 retificada

Situação 12: Determine Equação da hipérbole cuja excentricidade é raiz de 5 e cuja distância focal é quatro vezes raiz de 5. (O centro coincide com a origem e os focos estão sobre o eixo x). E esboce seu gráfico.



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
29	46(*). Identificar os elementos a, b e c da hipérbole.	24. Quando estes não são dados na situação.	Acerta	Nulo
30	47(*). Utilizar a relação $c^2= a^2 + b^2$ para determinar elementos da Hipérbole	26. Quando um dos elementos é dado na situação	Acerta	Nulo
31	48(*). Determinar a equação da Hipérbole	29. Com centro na origem (0,0).	Acerta	Nulo
32	49(*). Esboçar o gráfico da Hipérbole	32. Com centro na origem (0,0).	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Nesta resolução é possível perceber que ela conhece a equação da hipérbole, a escrevendo de forma correta, assim registramos que a estudante demonstra o conhecimento 31, habilidade 48 “Determinar a equação da Hipérbole”, maturidade 29 “com centro na origem (0,0)” de nível 1, superando o tipo de erro 4801, apresentado em sua primeira resolução.

A estudante esboça o gráfico da hipérbole de forma correta, utilizando uma notação mais organizada para os pontos dos vértices e focos. Mostrando assim, conhecer o gráfico da hipérbole, seus elementos e como estes se relacionam com o gráfico. A partir disso, registramos que a estudante apresenta o conhecimento 32, habilidade 49 “Esboçar o gráfico da Hipérbole”, maturidade “com centro na origem”, de nível 1 e consegue superar o tipo de erro 4901 “não esboçar o gráfico”.

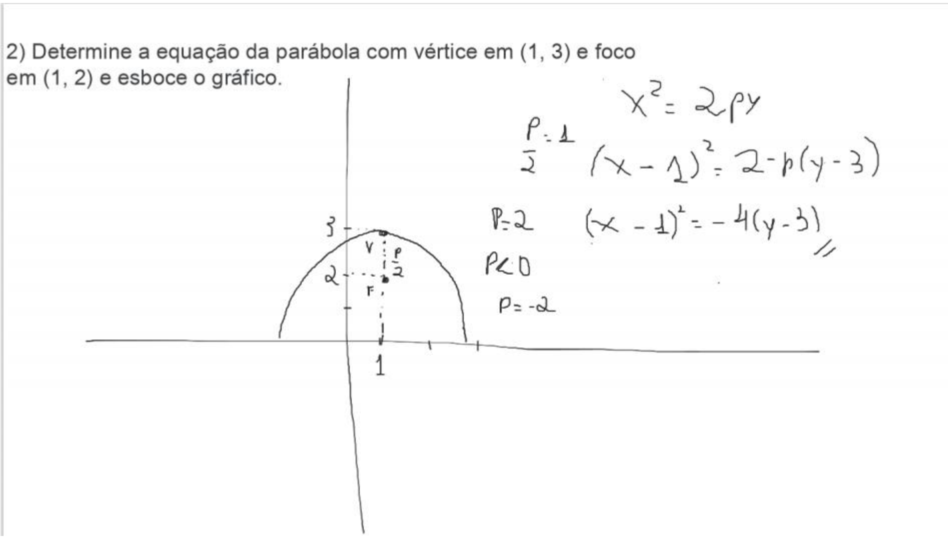
Após assistir ao recurso 31 a estudante refaz a situação 13, como mostramos a seguir. Alguns erros cometidos em sua primeira solução são superados, como o erro 1101 “Não identifica os elementos da parábola corretamente”. Neste caso, a estudante apresentava desconhecer o parâmetro como a distância do foco a reta diretriz, e $\frac{p}{2}$como a distância do foco ao vértice. Ao refazer a situação 13, notamos que ela faz $\frac{p}{2}$ como a distância do foco ao vértice, conseguindo representar algebrica e geometricamente a medida $\frac{p}{2}$. Deste modo, para o conhecimento 35, habilidade 11 “Identificar os elementos foco, diretriz, vértice e parâmetro da parábola”, maturidade 66 “quando dois deles são dados na situação” de nível 1, a estudante não apresentou erro.

Refazendo a resolução ela faz $\frac{p}{2}$ como a distância do vértice ao foco, ela determina corretamente o parâmetro, de forma algébrica, não o representa geometricamente. Deste modo, ela apresenta o conhecimento 38, habilidade 11 “determinar a medida do parâmetro p de uma parábola”, maturidade 43 “a partir das coordenadas do vértice e foco” de nível 1.

Em sua resolução, ela inicia escrevendo a equação da parábola em sua forma reduzida na origem, mas na linha seguinte ela descreve a equação parábola transladada com vértice no ponto V(1,3), apresentando assim, o conhecimento 36, habilidade 12 “determinar a equação reduzida da parábola”, maturidade 71 “tendo as coordenadas do vértice e foco” a equação da parábola transladada”, de nível 1, como mostra o Quadro 13.

Quadro 13: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 13 retificada

Situação 13: Determine a equação da parábola com vértice em (1, 3) e foco em (1, 2) e esboce o gráfico.				



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
35	11.(*) Identificar os elementos da parábola (foco, diretriz, vértice, parâmetro).	66. Quando dois deles são dados na situação.	Acerta	Nulo
33	50. (*) A partir do gráfico da parábola, identificar quando p é menor que 0.	37. Quando o gráfico não é dado na situação.	Acerta	Nulo
34	51. (*) Esboçar o gráfico da Parábola	41. Quando o eixo focal é paralelo a x ou y.	Acerta	Nulo
36	12. (*) Determinar a equação reduzida da parábola.	71. Tendo as coordenadas do vértice e foco.	Acerta	Nulo
37	13. (*) Identificar a concavidade da parábola (voltada para esq, direita, cima, baixo).	73. A partir da posição do vértice e foco.	Acerta	Nulo
38	52. (*) Determinar a medida do parâmetro P de uma parábola	43. A partir das coordenadas do vértice e foco.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Como em sua primeira resolução, a aluna conhece quando p < 0, a partir do esboço do gráfico da parábola, apresentando o conhecimento 33, habilidade 50 “a partir do gráfico da parábola, identificar quando p é menor que 0”, maturidade 37 “quando o gráfico não é dado na situação” de nível 2. A partir da posição do vértice e do foco, a estudante conhece que a concavidade da parábola é voltada para baixo, apresentando o conhecimento 37, habilidade 13 “identificar quando a concavidade da parábola é voltada para esquerda, direita, cima, baixo”, maturidade 73 “a partir da posição do vértice e foco" de nível 2. A partir disso, traça corretamente o gráfico da parábola, apresentando o conhecimento 34, habilidade 51 “esboçar o gráfico da parábola”, maturidade 41 “quando o eixo focal é paralelo a x ou y”, de nível 2.

A estudante supera o erro 5101 “faz o valor $\frac{p}{2}$ como sendo uma coordenada da parábola, e não a medida do foco ao vértice”, e identifica corretamente o valor do parâmetro p, superando o erro 5202 “não identifica corretamente o valor do parâmetro P”, além de utilizar melhor as notações, identificando os pontos do vértice e foco, chamando de V(1,3) e F(1,2). Deste modo, muitos erros apresentados na primeira resolução da estudante são superados nesta segunda resolução.

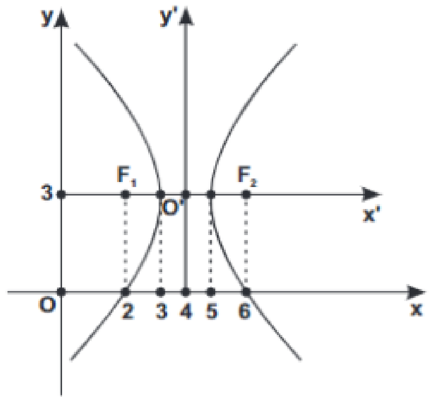
Após assistir ao recurso 31, a estudante também refaz a situação 14, que apresentamos no Quadro 13.

A aluna inicia identificando os elementos semieixo real (a = 1) e semieixo focal (c = 2), conhecendo o semieixo como a distância do centro a um dos vértices do eixo real da hipérbole. Deste modo, a estudante apresenta o conhecimento 39, que tem como habilidade 46 “identificar os elementos a, b e c da hipérbole”, maturidade 24 “quando estes não são dados na situação” de nível 2, não apresentando nenhum tipo de erro. No conhecimento 39, a representação para identificação dos elementos é a 21 “Cartesiana - Geométrica”. A partir do gráfico da cônica é possível identificar seus elementos, o espaço é o 1 “R^2” e o significado do conhecimento 39 é o 1 “objeto geométrico”.

Tendo os elementos da hipérbole e conhecendo que $c^2 = a^2 + b^2$, a estudante utiliza a relação $c^2 - a^2 = b^2$ para determinar a medida do semieixo imaginário. Deste modo, registramos o conhecimento 41, habilidade 47 “utilizar a relação $c^2 = a^2 + b^2$ para determinar elementos da hipérbole” e maturidade 26 “quando um dos elementos é dado na situação”, de nível 3.

Quadro 14: Acompanhamento da estudante 1M2 na situação 14 retificada

Situação 14: Determine a equação da hipérbole representada abaixo:



3) $a = 1$ $\quad c^2 - a^2 = b^2$

$c = 2$ $\quad 2^2 - 1^2 = b^2$

$4 - 1 = b^2$

$b^2 = 3$

$b = \sqrt{3}$

(x-x0)^2/a^2 - (y-y0)^2/b^2 =1

$\frac{(x-4)^2}{1} - \frac{(y-3)^2}{3} = 1$

Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
39	46. Identificar os elementos a, b e c da hipérbole.	24. Quando estes não são dados na situação.	Acerta	Nulo
40	48. Determinar a equação da Hipérbole.	30. Com centro transladado.	Acerta	nulo
41	47. Utilizar a relação $c^2= a^2 + b^2$ para determinar elementos da Hipérbole.	26. Quando nenhum elemento é dado na situação.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Do lado direito da resolução a estudante escreve a equação reduzida da hipérbole transladada, com centro no ponto O' (4, 3). Apresentando então o conhecimento 40, Habilidade 48 "determinar a equação da hipérbole", maturidade 30, de nível 2, "com centro transladado", superando o tipo de erro 4802 "faz a equação transladada como se fosse na origem" de sua primeira resolução.

Ao fim do acompanhamento da aprendizagem da estudante 1M2, foi possível perceber que com a ajuda dos recursos e situações enviados, ela conseguiu superar muitas dificuldades que apresentava inicialmente, como traçar pontos no plano cartesiano, escrever corretamente a equação de uma cônica transladada, conhecer a maior e menor distância de um planeta ao sol, esboçar o gráfico de uma cônica, identificar elementos e utilizar melhor as notações em suas resoluções. Sendo assim, foi possível perceber que ela teve uma evolução, porém, alguns erros apresentados por ela, mesmo após a utilização dos recursos poderiam ser trabalhados como, o erro 503 “faz os elementos da elipse como sendo um número negativo. (ex. – c)”, 3504 “determinar o centro da elipse quando uma das coordenadas é um número negativo”, que pode não ter sido superado, pois ela não trabalhou com situações e recursos que exploravam essa habilidade. Além disso, tendo visto vídeos sobre pontos no plano cartesiano e o esboço do gráfico de uma elipse, a estudante poderia enfrentar uma situação com o significado objeto geométrico e a representação cartesiana, como na situação 1.

No acompanhamento personalizado da estudante 1M2 o FrameAGAP possibilitou:

- Dar suporte às dificuldades apresentadas por ela;
- Traçar um caminho de acompanhamento personalizado;
- Dar suporte não só às dificuldades sobre cônicas (conteúdo parte da ementa do conteúdo), mas em outros temas, como as operações numéricas tema que não fazia parte da ementa da disciplina de Geometria Analítica, mas que ela pôde estudar;
- Indicar recursos criados para as dificuldades apresentadas pela estudante 1M2;
- Não reapresentar os mesmos tipos de erros em situações semelhantes;
- Ter registro de todo processo de acompanhamento da estudante, possibilitando que ela receba *feedback* dos conhecimentos e tipos de erros apresentados.

No próximo subtópico veremos o acompanhamento do estudante 7M2, em relação às questões assíncronas e as situações recebidas a partir do acompanhamento utilizando o FrameAGAP sobre circunferência e elipse.

5.3.2 Acompanhamento da estudante de Matemática 7M2

Neste subtópico apresentaremos o acompanhamento do estudante 7M2 por meio do FrameAGAP, as situações, os recursos que ele trabalhou e quais as dificuldades e conhecimentos foram apresentados por ele.

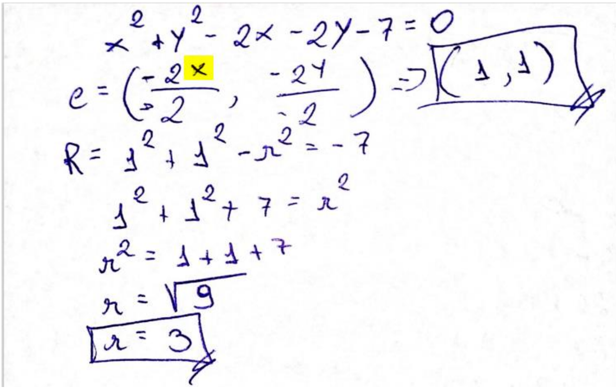
O estudante 7M2 é aluno do curso de Licenciatura em Matemática da UFPE, campus Caruaru e no decorrer da pesquisa ele trabalhou com um total de 4 situações, sendo 3 questões do momento assíncrono e uma situação enviada por *e-mail* após análise da resolução com o FrameAGAP, todas as situações sobre circunferência e elipse.

As situações 1, 2 e 3 foram enviadas para o estudo assíncrono junto com o material teórico da disciplina de Geometria Analítica para todos os estudantes, participantes ou não da pesquisa, sendo assim, iniciamos o acompanhamento do estudante 7M2 analisando as situações anteriormente citadas.

Como dito no caso da estudante 1M2, escolhemos a situação 1 para analisar os conhecimentos sobre o conceito de raio e centro a partir da equação geral da circunferência, tendo o significado objeto geométrico e a representação algébrica.

Em sua resolução o estudante 7M2 utiliza um método bem semelhante ao da aluna 1M2 para determinar o centro e o raio da circunferência. Eles não utilizam a fatoração do trinômio do quadrado perfeito para a partir da equação geral chegar na equação reduzida. Aqui é utilizado outro caminho, onde conhecendo que o trinômio pode ser escrito como $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, se sabe inicialmente que a = 1, logo, dividindo $2ab$por 2 é possível determinar b = 1, deste modo, por conhecer a equação da circunferência ele identifica que o centro da circunferência é C (1, 1), como mostra o Quadro 15.

Quadro 15: Acompanhamento do estudante 7M2 na situação 1

<table>
<tr><td colspan="5">Situação 1: Determine o centro e o raio da circunferência x² + y² - 2x - 2y - 7 = 0.</td></tr>
<tr><td colspan="5">
</td></tr>
<tr><td>Conhecimento</td><td>Habilidades</td><td>Maturidade</td><td>Avalia</td><td>Tipo de Erro</td></tr>
<tr><td>1</td><td>22. (*) Determinar o raio e as coordenadas do centro a partir da equação circunferência;</td><td>2. A partir da equação geral da circunferência.</td><td>Acerta</td><td>Nulo</td></tr>
<tr><td>15</td><td>(#) 41. Completar quadrado.</td><td>94. Quando os coeficientes são números inteiros.</td><td>Acerta</td><td>Nulo</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Para determinar o raio da circunferência o aluno utiliza as coordenadas do raio ao quadrado $1^2 + 1^2$ e o termos independente da equação - 7, deste modo ele determina que $r^2 = 9$, logo o raio é 3, apresentando assim o conhecimento 1, habilidade 22 “determinar o raio e as coordenadas do centro a partir da equação da circunferência”, maturidade 2, de nível 2, “a partir da equação geral da circunferência" sem apresentar nenhum tipo de erro na resolução desta situação.

Na situação 2, escolhida por ter como significado o deslocamento no plano e representação em linguagem natural, o estudante inicia escrevendo como se determina a excentricidade e o valor que assume na situação. Deste modo, ele demonstra conhecer como calcular a excentricidade e consegue identificar corretamente os elementos da elipse, utilizando a medida do semieixo maior (a) corretamente no cálculo da excentricidade. Assim, ele determina a medida do semieixo focal da elipse (c), como mostra o Quadro 15.

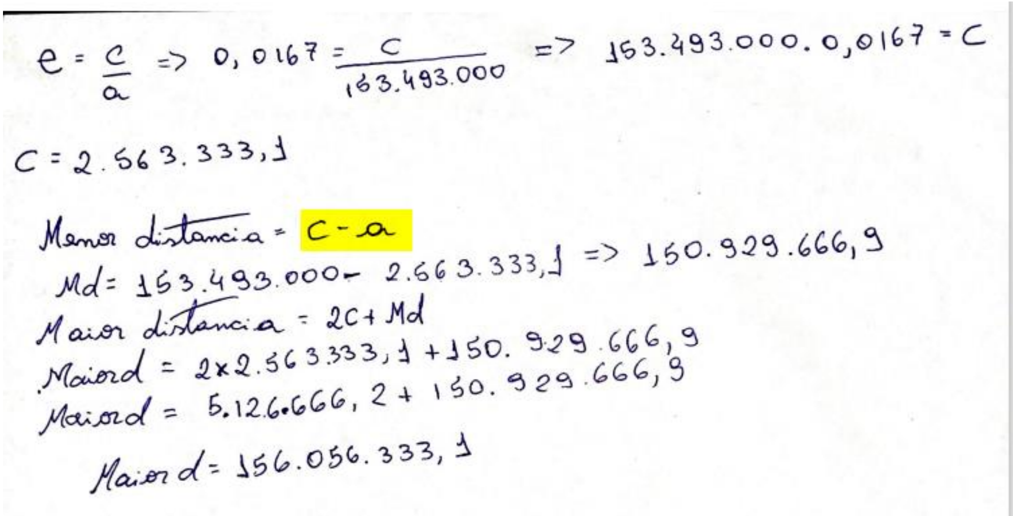
O aluno 7M2 não faz a representação da situação, mas determina a maior e menor distância corretamente. Inicialmente para a menor distância ele escreve ser c - a (que daria um resultado negativo), porém, na linha abaixo ele escreve a menor distância como sendo a subtração do semieixo maior (a) pelo semieixo focal, ou seja, a - c, chegando ao resultado correto.

Para determinar a maior distância ele a escreve como sendo 2c (distância focal) somado a menor distância que obteve no resultado anterior. Deste modo, ele demonstra conhecer os elementos da elipse para determinar a maior e a menor distância da Terra ao sol.

Para o estudante 7M2, em relação ao conhecimento 7, habilidade 26 “Envolver o contexto e a equação”, maturidade 11 “quando esta não é dada na situação” de nível 2, incluímos no banco de dados e registramos no acompanhamento do estudante o tipo de erro 502 “faz c - a como a medida do semieixo maior menos medida do semieixo focal igual a um número positivo, sendo a > c”, que comentamos anteriormente, o estudante neste caso ele consegue identificar os elementos da elipse, determinar menor distância, apresentando o conhecimento 5, habilidade 28 “identificar o ponto na elipse de menor distância para o foco” e a maturidade 11 “quando este não é dado na situação” de nível 2, mas comete esse equívoco quando faz c - a, inclusive, a foto aparece marcada nesta parte, pois como a correção se deu também por meio do Google *Classroom*, foi possível informar ao aluno sobre o erro já que para esse tipo de erro específico não tínhamos nenhum vídeo disponível no banco de dados.

Quadro 16: Acompanhamento do estudante 7M2 na situação 2

Situação 2: A órbita da Terra é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Sabendo que o semieixo maior tem 153 493 000 km e que a excentricidade é de 0,0167, calcular a menor e a maior distância da Terra ao Sol.


$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 0,0167 = \frac{c}{153.493.000} \Rightarrow 153.493.000 . 0,0167 = C$

$C = 2.563.333,1$

Menor distancia = $C - a$

$Md = 153.493.000 - 2.563.333,1 \Rightarrow 150.929.666,9$

Maior distancia = $2C + Md$

$Maiord = 2 \times 2.563.333,1 + 150.929.666,9$

$Maiord = 5.126.666,2 + 150.929.666,9$

$Maior\ d = 156.056.333,1$

Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
7	26. Envolver o contexto e a equação.	11. Quando esta não é dada na situação.	erra	502. Faz c - a (medida do semieixo maior) - (medida do semieixo focal) igual a um número positivo. Sendo a > c.
21	32. (*) Interpretar o resultado da situação.	9. Quando é necessário o uso de mais de uma equação para resolver a situação.	Acerta	Nulo
22	27.(*) Interpretar a situação com passagem para a linguagem geométrica.	12. Quando a situação envolve a utilização de mais de uma equação para ser resolvida.	Acerta	Nulo
5	28. (*) Identificar o ponto na elipse de menor distância para o foco.	11. Quando esta não é dado na situação.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Na resolução da situação o estudante utiliza a representação algébrica, não representa geometricamente o problema, deste modo, ao conhecimento 22, habilidade 27 “interpretar a situação com passagem para a linguagem geométrica”, maturidade 12 “quando a situação envolve a utilização de mais de uma equação para ser resolvida” de nível 2, registramos que ele acerta a situação conseguindo resolvê-la algebricamente, não apresentando nenhum tipo de erro para este conhecimento.

Ao fim da situação, o estudante indica qual a maior e menor distância da Terra ao Sol, apresentando o conhecimento 21, habilidade 32 “interpretar o resultado da situação” e maturidade 9 “quando é necessário o uso de mais de uma equação para resolver a situação” de nível 2.

Na situação 3 analisamos a resolução dos participantes da pesquisa ao trabalhar com uma situação sobre elipse tendo como significado objeto geométrico e a representação cartesiana. Deste modo, em sua resolução o estudante utiliza um *software* (Geogebra) que foi apresentado e utilizado pelos professores da disciplina desde o início do curso, das situações analisadas, o aluno 7M2 é o único que utiliza o Geogebra para representar uma situação, como mostra o Quadro 17.

Ele inicia a solução selecionando os pontos dos focos (A e B) e dos vértices do eixo maior (C e D), deste modo, utilizando os A, B e D para traçar o gráfico da elipse. Tendo o gráfico, ele marca os pontos E e F, que são os vértices do eixo menor da elipse, na construção realizada no Geogebra o aluno 7M2 traça as retas $x = 2$ e $y = 3$.

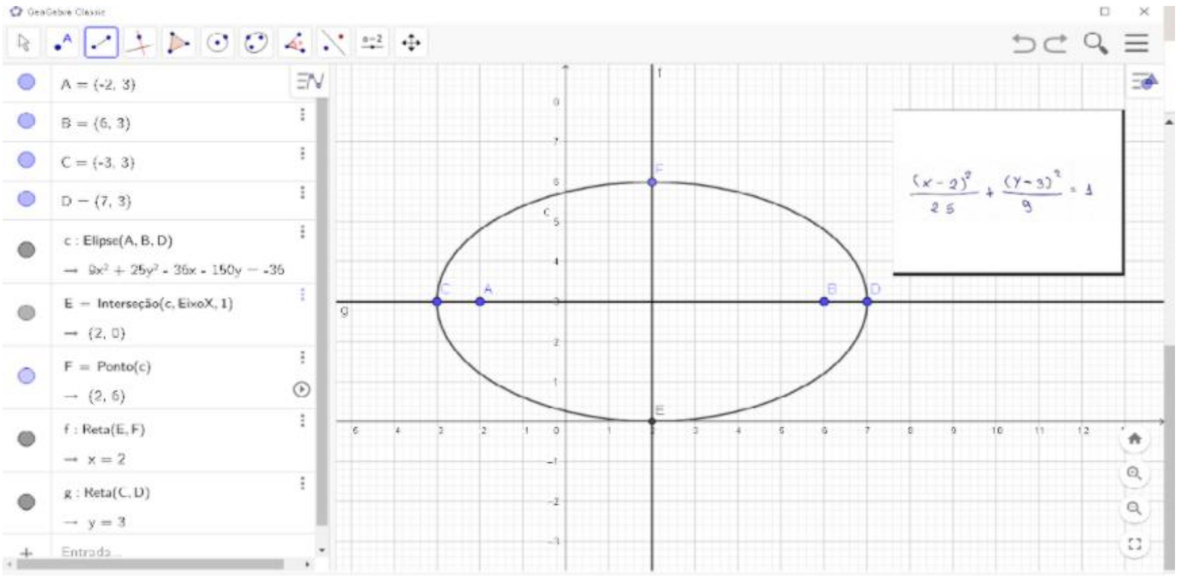
No canto superior direito da solução, ele escreve a equação da elipse de forma correta, tendo como centro o ponto (2,3) e como medida do semieixo maior $a = 5$ e como medida do semieixo menor $b = 3$.

Embora o estudante tenha utilizado o *software* Geogebra, ele demonstra ter o conhecimento 8, que trata da construção das curvas cônicas e tem como habilidade 35 “esboçar o gráfico da elipse a partir das coordenadas dos focos e vértices”, e a maturidade 6, de nível 2, “com centro fora da origem”.

A partir do gráfico o estudante consegue determinar a equação da elipse fora da origem (0,0), apresentando assim o conhecimento 13, com a habilidade 40 “determinar a equação reduzida da elipse transladada” e demonstrado a maturidade 16 “quando o eixo focal é paralelo ao eixo x ou y”, que tem nível 2.

Quadro 17: Acompanhamento do estudante 7M2 na situação 3

Situação 3: Esboce a elipse com focos em (- 2, 3) e (6, 3) e vértices em (- 3, 3) e (7, 3) e determine a sua equação.



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
8	35. (*) Esboçar o gráfico da elipse a partir das coordenadas dos focos e vértices;	6. Com centro fora da origem (0,0).	Acerta	Nulo
9	36 (#). Traçar pontos no plano cartesiano;	15. Não coincidentes com um dos eixos x ou y, ou seja, do tipo (x,y).	Acerta	Nulo
13	40 (*). Determinar a equação reduzida da elipse transladada.	16. Quando o eixo focal é paralelo ao eixo x ou y.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Embora não tenha utilizado o recurso lápis e papel, o estudante utilizando o Geogebra apresenta o conhecimento 9, habilidade 36 “traçar pontos no plano cartesiano”, demonstrando a maturidade 15, “não coincidentes com um dos eixos x ou y, ou seja, do tipo (x,y)”, de nível 2.

As questões anteriores, analisadas para o caso do estudante 7M2 foram avaliadas pelos professores da disciplina antes da aula síncrona, como parte de uma das etapas da Sala de Aula Invertida na abordagem do ensino sob medida, deste modo, ao avaliar as resoluções do estudante 7M2, vimos que este não apresentava muitos tipos de erros em suas resoluções, assim, no acompanhamento de sua aprendizagem no banco de dados, foram inseridos os dados sobre os conhecimentos aos quais ele apresentou dificuldade, poupando tempo para preencher a tabela de outros estudantes que apresentaram mais dificuldades.

Utilizando as tabelas de acompanhamento, conhecimento, situação-conhecimento e representação, foi observado que o estudante 7M2 não tinha trabalhado com situações sobre cônicas no R^3 e que havia sido registrada uma situação deste tipo nas tabelas situações e situação-conhecimento, deste modo, como o estudante não havia apresentado dificuldades, optamos por propor que o estudante trabalhasse com situações que não havia trabalhado, neste caso, a situação 6.

No dia 31 de outubro de 2020 foi encaminhado aos estudantes 7M2 e 18F2 (que será apresentado após a análise do estudante 7M2). Inicialmente a situação 6 e o recurso 30, como o estudante 18F2 teve dificuldades quanto a representação do corte do cilindro com um plano inclinado quando este tem 30º, foi enviado no dia 06 de novembro de 2020 um segundo recurso, uma simulação em Geogebra mostrando o cilindro interceptado por um plano com inclinação de 30º, contendo também outros elementos que tratam a situação, como o raio do cilindro, r = 6, para ajudar na resolução do problema.

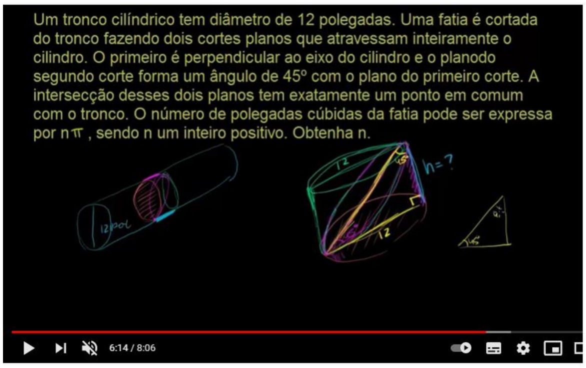
Embora ainda não tivéssemos no dia 06 de novembro recebido a resposta da situação 6 do estudante 7M2, fizemos o envio do recurso 32 para ele nesta data, motivados pela dificuldade de representação apresentada pelo estudante 18F2. No dia 24 de novembro, os estudantes 7M2 e 18F2 fizeram o envio da resolução da situação 6. Como eles receberam a mesma situação e os mesmos recursos, eles resolveram a questão juntos, pois o dia em que enviaram a questão era também a data da reposição da avaliação da turma de Geometria Analítica, que eles não precisavam comparecer.

Por meio de um formulário, enviado por *e-mail*, foi anexada a situação 6 e os recursos 30[7] e 32. Por mensagem, a pesquisadora propôs que os estudantes assistissem ao vídeo (recurso 30), utilizassem a simulação no Geogebra (recurso 32) para visualizar melhor o problema e assim, que resolvessem a situação 6, foi pedido também que se possível fizessem anotações e justificassem a resposta.

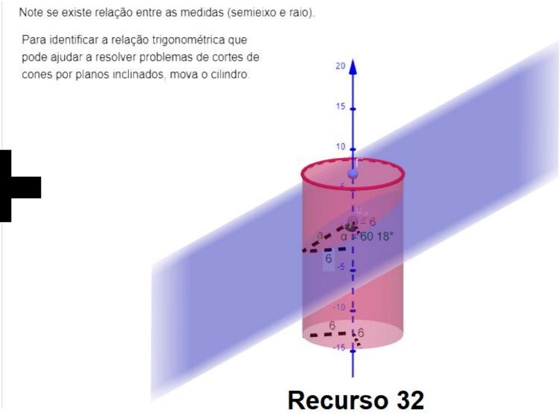
---

[7] O recurso 30 trata-se do vídeo intitulado "Corte de um cone circular reto com um plano inclinado" e pode ser acessado utilizando o link: https://www.youtube.com/watch?v=jJUexwzNCfs

Quadro 18: Conhecimentos explorados pelos recursos 30 e 32



Recurso 30



Recurso 32

Recursos	Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Tiro de erro
30 e 32	42	53. Representar o problema no R³.	47. Quando é dado um esboço na situação.	5301. Não representar o problema no R³.
30 e 32	43	44. Identificar a elipse a partir de um cone cortado por um plano inclinado	21. Quando a representação geométrica não é dada na situação.	4401. Não identifica a elipse como um corte de um cone com um plano inclinado.
30	44	54. Utilizar relações trigonométricas como possibilidade de resolução de problemas.	50. Quando os elementos não são dados na situação.	5401. Não utiliza relações trigonométricas como possibilidade de resolução de problemas.
30 e 32	45	57. Identificar o problema com passagem do R³ para o R²	56. Quando o contexto solicita não representação.	5701. Não identifica a possibilidade de passar de uma representação do R³ para o R².
32	47	56. Identificar a relação entre raio e semieixo menor, quando a elipse é obtida por um corte com um plano inclinado.	54. A partir de uma representação dada.	5601. Dificuldade em identificar que o semieixo menor é igual ao raio quando a elipse o cone é cortado por um plano inclinado.

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

No Quadro 18 apresentamos quais conhecimentos são explorados pelos recursos 30 e 32, como, o conhecimento 43, habilidade 44 “identificar a elipse a partir de um cone cortado por um plano inclinado”, onde o vídeo apresenta a maturidade 50 “quando os elementos não são dados na situação”; conhecimento 44, habilidade 54 “utilizar relações trigonométricas como possibilidade de resolução de problemas”; conhecimento 45, habilidade 57 “identificar o problema com passagem do R³ para o R²”, alguns conhecimentos estão presentes em ambos os recursos, como os conhecimentos 42, 43 e 45.

Ao receber a situação 6 e os recursos 30 e 32[8], o estudante 7M2 resolve o problema junto com o estudante 18F2, como foi dito anteriormente.

Pela dificuldade em representar o problema no R^3, e como este pode ser resolvido utilizando a passagem do R^3 para o R^2, ele representa na sua solução o problema já em R^2, pois na simulação enviada eles poderiam observar o cilindro cortado pelo plano, com inclinação de 30°, rotacionar e assim, encontrar outras relações, apresentando então o conhecimento 45, habilidade 57 “identificar o problema com passagem do R^3 para o R^2”, maturidade 56 “quando o contexto solicita não representação” de nível 2, como é possível ver em sua resolução apresentada no Quadro 19.

Ele faz algumas anotações antes da resolução. São elas, a medida do raio ser igual a 6, o ângulo igual a 30°, conseguindo identificar a elipse e alguns de seus elementos a partir do corte do cilindro com o plano, onde identificamos que o estudante apresenta o conhecimento 43, habilidade 44 “identificar a elipse a partir de um cone cortado por um plano inclinado” e maturidade 21 “quando a representação geométrica não é dada na situação”, de nível 2.

O estudante também observa que a medida do semieixo menor é igual a 6, apresentando o conhecimento 47, habilidade 56 “identificar que o semieixo menor é igual ao raio quando a elipse o cone é cortado por um plano inclinado” e maturidade 54 “a partir de uma representação dada”, de nível 1.

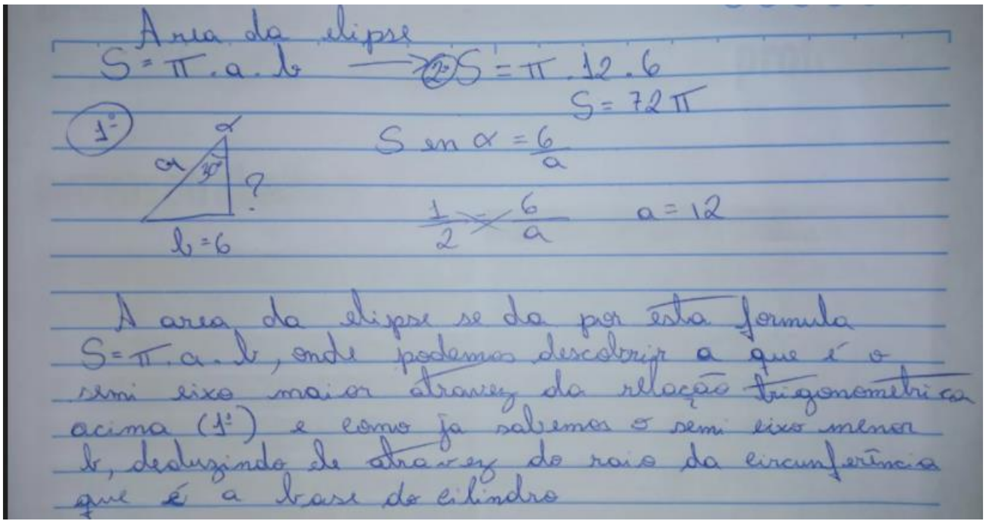
Em sua resolução ele identifica a medida do semieixo maior da elipse, como sendo a medida da hipotenusa, a medida do semieixo menor (b) sendo igual a 6, e identifica um dos ângulos sendo de 30°, que é a inclinação do plano que corta o cilindro.

Tendo essas informações e representando geometricamente o triângulo retângulo com suas medidas e ângulo, ele opta por utilizar o cálculo do seno de um ângulo. Apresentando assim o conhecimento 44, habilidade 54 “utilizar relações trigonométricas como possibilidade de resolução de problemas” e maturidade 50 “quando os elementos não são dados na situação” de nível 2.

[8] Recurso 32: Simulação em Geogebra com acesso em: https://www.geogebra.org/m/xzw4swnq

Quadro 19: Acompanhamento do estudante 7M2 na situação 6

Situação 6: Um cilindro de revolução tem por base um círculo de R = 6. Determinar a área da elipse intersecção do cilindro por um plano que forma com o seu eixo um ângulo de 30º. Sabendo que a área é dada por S = "pi". a. b.



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
42	53. Representar o problema no R³.	47. Quando é dado um esboço na situação.	Acerta	Nulo
43	44. Identificar a elipse a partir de um cone cortado por um plano inclinado.	21. Quando a representação geométrica não é dada na situação.	Acerta	Nulo
44	54. Utilizar relações trigonométricas como possibilidade de resolução de problemas.	50. Quando os elementos não são dados na situação.	Acerta	Nulo
45	57. Identificar o problema com passagem do R³ para o R².	56. Quando o contexto solicita não representação	Acerta	Nulo
46	55. Determinar a área de uma elipse.	52. Tendo a equação, mas não tendo os elementos.	Acerta	Nulo
47	56. identificar que o semieixo menor é igual ao raio quando a elipse o cone é cortado por um plano inclinado.	54. A partir de uma representação dada.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

O estudante consegue determinar a área da elipse, utilizando a informação para o cálculo de área que foi dada na situação e incluindo as medidas dos semieixos maior e menor (a e b) que encontrou, deste modo apresenta-se o conhecimento 46, habilidade 55 “determinar a área de uma elipse”, maturidade 52 “tendo a equação, mas não tendo os elementos”, de nível 2.

Ao fim do acompanhamento do estudante 7M2 podemos ver que ele apresenta poucos tipos de erros, onde poderia ser trabalhado ainda o tipo de erro 502 “faz a medida do semieixo maior (a) menos a medida do semieixo focal (c) igual a um número positivo, sendo a > c” e seguir com outras situações com significados e representações variadas para o estudante.

Para o acompanhamento personalizado do estudante 7M2 o FrameAGAP possibilitou:

- Aprofundar os conhecimentos referentes às cônicas;
- Informar quais situações e recursos se adequaram melhor aos conhecimentos e dificuldades apresentadas por ele;
- Informar quando um recurso não era suficiente para dar suporte aos conhecimentos e dificuldades apresentadas por ele. No caso do estudante 7M2, ele recebeu os recursos vídeo e simulação, que juntos conseguiram contemplar os conhecimentos necessários para resolver a situação 6;
- Indicar recursos criados para a necessidade do estudante, a partir das dificuldades e tipos de erros apresentados. O recurso 32 foi criado a partir das dificuldades pelo estudante 18F2, mas que pôde ser utilizado pelo estudante 18F2;
- Indicar qual estudante apresentava conhecimentos semelhantes ao 7M2, neste caso, o 18F2. Formando um grupo para aprofundar os conhecimentos sobre as cônicas;
- Receber acompanhamento personalizado a cada situação resolvida e receber *feedback* dos conhecimentos e dificuldades apresentadas.

5.3.3 Acompanhamento da estudante de Matemática 18F2

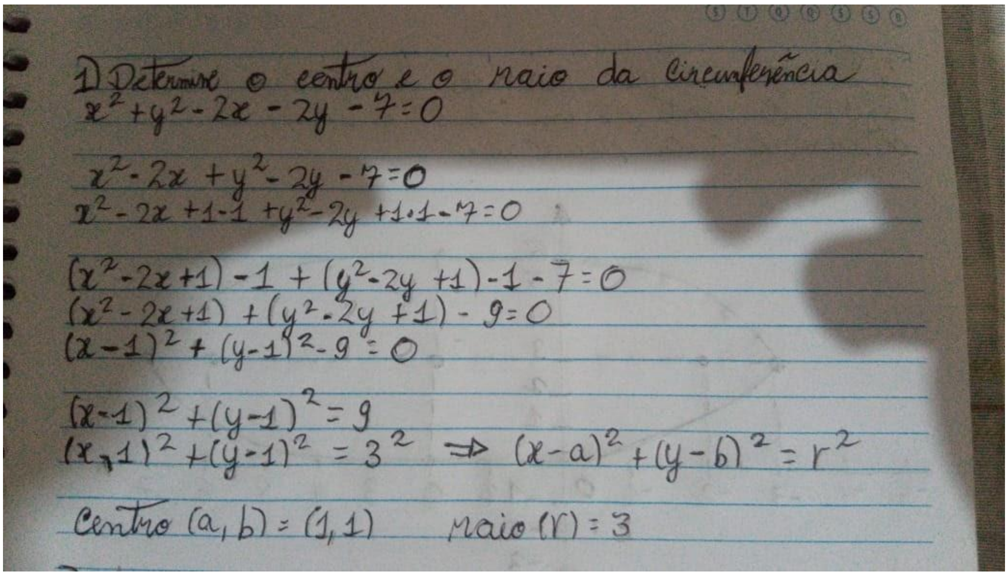
A seguir, apresentaremos a análise do acompanhamento da aprendizagem do estudante 18F2, inicialmente das situações assíncronas, na parte de cônicas 1: circunferência e elipse, seguido da situação 6, em que o estudante 18F2 resolve em parceria com o aluno 7M2 e por fim, as situações da cônicas 2: parábola e hipérbole.

O estudante 18F2 é estudante do curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal de Pernambuco, campus Caruaru. No decorrer da pesquisa, ele trabalhou com um total de 4 situações, sendo 3 questões do momento assíncrono e uma situação enviada após a análise utilizando o FrameAGAP, esta última, o estudante erra e refaz a resolução, como veremos no Quadro 20.

Ao resolver a situação 1, o estudante 18F2 parte da equação da circunferência dada na situação, tentando determinar o centro e o raio utilizando a fatoração do quadrado perfeito (também chamada de método de completar quadrado), ele adiciona e subtrai 1 na equação, obtendo $x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$.

Em seguida ele organiza a equação com parênteses, para que possa substituir $(x^2 - 2x + 1)$ por $(x - 1)^2$ e $(y^2 - 2y + 1)$ por $(y -1)^2$, de modo que se possa utilizar a equação em sua forma reduzida, demonstrando o conhecimento 15, habilidade 41 “completar quadrado” e Maturidade 94 “quando os coeficientes são números inteiros.”, de nível 2.

Quadro 20: Acompanhamento do estudante 18F2 na situação 1

<table>
<tr><td colspan="5">Situação 1: Determine o centro e o raio da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="5">
</td></tr>
<tr><td>Conhecimento</td><td>Habilidades</td><td>Maturidade</td><td>Avalia</td><td>Tipo de Erro</td></tr>
<tr><td>1</td><td>22. (*) Determinar o raio e as coordenadas do centro a partir da equação circunferência;</td><td>2. A partir da equação geral da circunferência.</td><td>Acerta</td><td>Nulo</td></tr>
<tr><td>15</td><td>41. (#) Completar quadrado.</td><td>94. Quando os coeficientes são números inteiros.</td><td>Acerta</td><td>Nulo</td></tr>
</table>

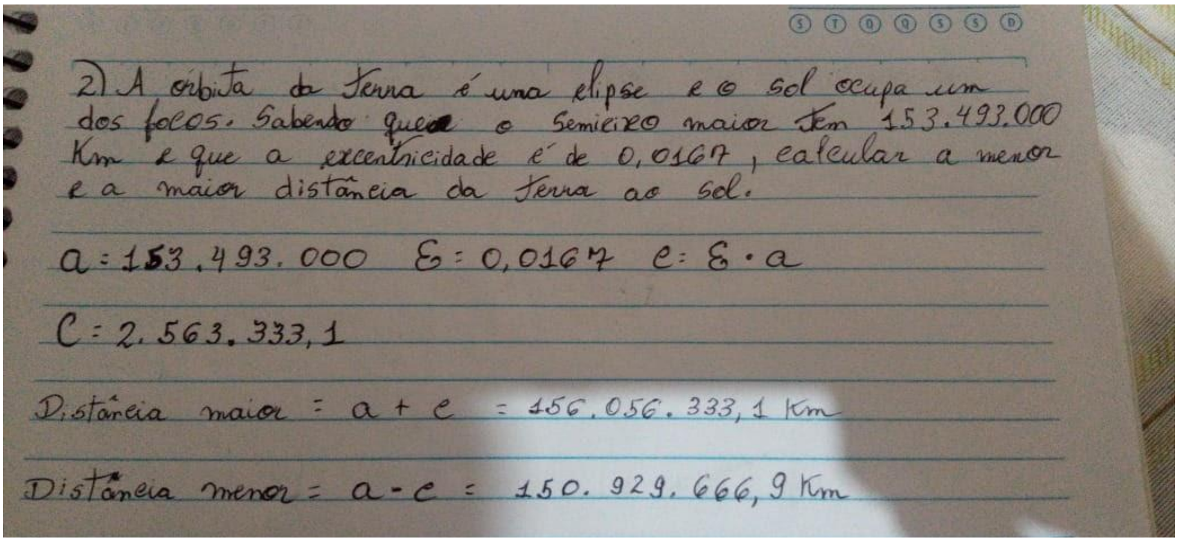
Fonte: Elaborada pela autora (2021)

A partir da equação reduzida ele escreve ao lado (x - a)² + (y - b)² = r², que é a equação reduzida da circunferência, onde o centro é C (a,b) e o raio r, concluindo assim que o centro da circunferência é C (1,1) e o raio é r = 3, apresentando ter o conhecimento 1, habilidade 22 “determinar o raio e as coordenadas do centro a partir da equação circunferência” e maturidade 2 “a partir da equação geral da circunferência”, que tem nível 2. Na resolução da situação 1 feita pelo estudante 18F2 não registramos nenhum tipo de erro.

Veremos agora a resolução da situação 2, que tem como significado deslocamento no plano e representação em linguagem natural, conforme apresenta o Quadro 21.

Quadro 21: Acompanhamento do estudante 18F2 na situação 2

Situação 2: A órbita da Terra é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Sabendo que o semieixo maior tem 153 493 000 km e que a excentricidade é de 0,0167, calcular a menor e a maior distância da Terra ao Sol.


2) A órbita da Terra é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Sabendo que o semieixo maior tem 153.493.000 Km e que a excentricidade é de 0,0167, calcular a menor e a maior distância da Terra ao sol.

a: 153.493.000 ε: 0,0167 c: ε · a

C: 2.563.333,1

Distância maior = a + c = 156.056.333,1 Km

Distância menor = a - c = 150.929.666,9 Km

Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
7	26. Envolver o contexto e a equação.	11. Quando esta não é dada na situação.	Acerta	Nulo
21	32. (*) Interpretar o resultado da situação.	9. Quando é necessário o uso de mais de uma equação para resolver a situação.	Acerta	Nulo
22	27.(*) Interpretar a situação com passagem para a linguagem geométrica.	12. Quando a situação envolve a utilização de mais de uma equação para ser resolvida.	Acerta	Nulo
5	28. (*) Identificar o ponto na elipse de menor distância para o foco.	11. Quando esta não é dado na situação.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

O estudante 18F2 resolve a situação 2 identificando inicialmente o semieixo maior da elipse "a" dada na situação, tendo a excentricidade e o semieixo maior da elipse, ele utiliza essas informações para obter a medida do semieixo focal da elipse "c", deste modo, ele faz a "Distância Maior = a +c" e a "Distância Menor = a - c". Apresentando o conhecimento 5, habilidade 28 "identificar o ponto na elipse de menor distância para o foco" e maturidade 11 "quando esta não é dada na situação" de nível 2.

Encerrando a resolução da situação, o aluno escreve qual a maior e menor distância da Terra ao sol em quilômetros, demonstrando o conhecimento 21, habilidade 32 "interpretar o resultado da situação" e maturidade 9 "quando é necessário o uso de mais de uma equação para resolver a situação" de nível 2.

No acompanhamento da aprendizagem do estudante na situação 2, foi visto que o estudante consegue resolver a questão de forma correta, deste modo, não registramos nenhum tipo de erro. Em relação ao conhecimento 22, habilidade 27 "interpretar a situação com passagem para a linguagem geométrica", maturidade 12 "quando a situação envolve a utilização de mais de uma equação para ser resolvida" de nível 2, registramos que embora o aluno não faça uso da linguagem geométrica, ele consegue acertar a situação.

Apresentamos agora a resolução da situação 3, que tem como significado objeto geométrico e representação cartesiana.

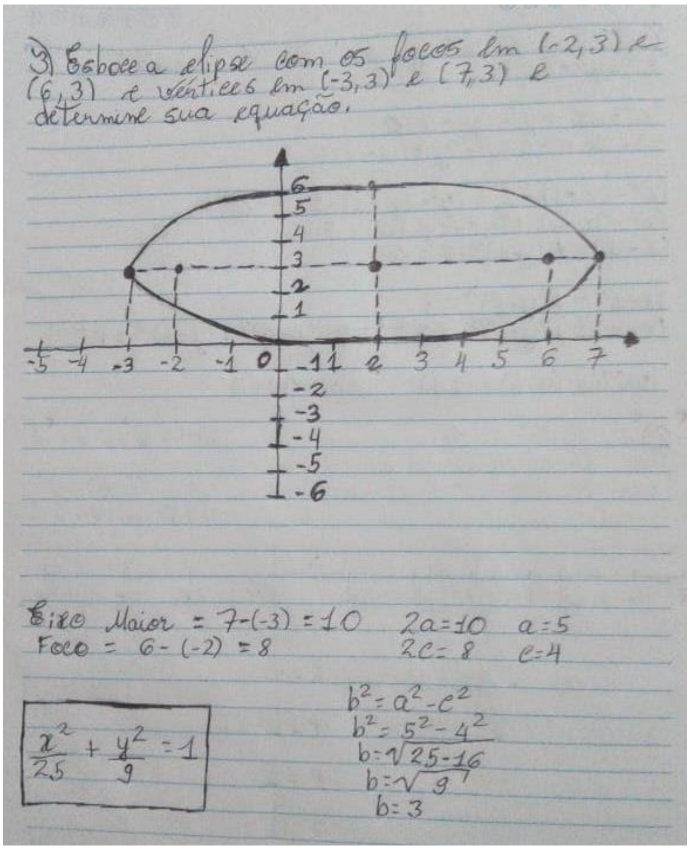
Como é possível observar no Quadro 21, o estudante 18F2 inicia a solução fazendo o esboço da elipse, traça então os pontos dos focos (-2, 3) e (6, 3) e os pontos de dois dos quatro vértices (- 3, 3) e (7, 3), tendo estas coordenadas ele consegue esboçar a curva da elipse dada na situação, apresentando o conhecimento 9, habilidade 36 "traçar pontos no plano cartesiano" e maturidade 15 "não coincidentes com um dos eixos x ou y" de nível 2, e o conhecimento 8, habilidade 35 "esboçar o gráfico da elipse a partir das coordenadas dos focos e vértices" tendo a maturidade 6 "com centro fora da origem", nível 2.

Abaixo do esboço do gráfico ele determina a medida do semieixo maior da elipse utilizando as coordenadas x dos vértices, fazendo a subtração da abscissa final pela abscissa inicial 7 - (-3) = 10, onde 10 é a medida do eixo maior da elipse.

Deste modo, conhecendo que a medida do eixo maior (2a) é o dobro da medida do semieixo maior (a), obtendo que esta é igual a 5 (a =5).

De forma semelhante ele obtém a medida do semieixo focal, utilizando as coordenadas x dos focos, ele faz a subtração das abscissas do foco, abscissa final pela abscissa inicial 6 - (-2) = 8, onde 8 é a medida do eixo focal (2c) e conhecendo que o eixo focal é o dobro do semieixo, ele obtém que o semieixo focal (c) é 4.

Quadro 22: Acompanhamento do estudante 18F2 na situação 3

<table>
<tr><td colspan="5">Situação 3: Esboce a elipse com focos em (- 2, 3) e (6, 3) e vértices em (- 3, 3) e (7, 3) e determine a sua equação.</td></tr>
<tr><td colspan="5">
</td></tr>
<tr><td>Conhecimento</td><td>Habilidades</td><td>Maturidade</td><td>Avalia</td><td>Tipo de Erro</td></tr>
<tr><td>8</td><td>35. (*) Esboçar o gráfico da elipse a partir das coordenadas dos focos e vértices;</td><td>6. Com centro fora da origem (0,0).</td><td>Acerta</td><td>Nulo</td></tr>
<tr><td>9</td><td>36 (#). Traçar pontos no plano cartesiano;</td><td>15. Não coincidentes com um dos eixos x ou y, ou seja, do tipo (x,y).</td><td>Acerta</td><td>Nulo</td></tr>
<tr><td>13</td><td>40 (*). Determinar a equação reduzida da elipse transladada.</td><td>16. Quando o eixo focal é paralelo ao eixo x ou y.</td><td>Acerta</td><td>Nulo</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Para determinar a medida do semieixo menor da elipse, ele utiliza o Teorema de Pitágoras, na forma $b^2 = a^2 - c^2$, substituído a medida do semieixo maior (a) e semieixo focal (c) na equação ele encontra que a medida do semieixo menor é 3.

Note que ao determinar a equação da elipse, o estudante a escreveu como sendo uma elipse com centro na origem do sistema de coordenadas, quando na verdade a elipse tem centro no ponto (2, 3). Além disso, na avaliação do estudante 18F2 na situação 3, nos passou despercebido que ele havia escrito a equação de forma equivocada, assim, por errar na avaliação deste estudante nesta situação. O erro é levado para o acompanhamento, sendo registrado como se o aluno apresentasse o conhecimento 13, habilidade 40 “determinar a equação reduzida da elipse transladada” e maturidade 16 “quando o eixo focal é paralelo ao eixo x ou y” de nível 2, quando na verdade o estudante não determina corretamente a equação da elipse transladada.

Na semana em que foram analisadas as situações sobre elipse e circunferência foi registrado que o estudante 18F2 não apresentava erros, assim, visto que nas tabelas Acompanhamento, Conhecimento, Espaço e Situação - Conhecimento, o estudante não tinha trabalhado com nenhuma situação no R^3 ou que possibilitasse a passagem do R^3 para o R^2, foi proposto que os estudantes 18F2 e 7M2 trabalhassem com a situação 18.

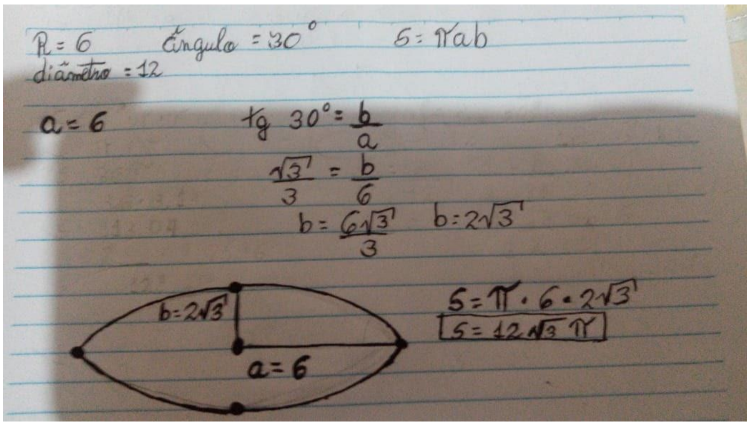
Foi visto também que nas tabelas de Recurso e Recurso-Conhecimento tinha sido registrado o recurso 30, vídeo que tratava de um problema sobre cônicas tendo como espaço o R^3.

Deste modo, tendo registrado no FrameAGAP que os estudantes 18F2 e 7M2 não apresentavam dificuldades em relação às questões síncronas, enviamos a ambos os estudantes o recurso 30 e a situação 6, para que trabalhassem com outro tipo de situação. Neste primeiro momento, apenas o estudante 18F2 nos envia a resolução da situação, como é possível ver no Quadro 22.

O estudante 18F2, inicia fazendo algumas anotações sobre as informações dadas na situação, como o raio da base, o ângulo de inclinação do plano que corta o cilindro, sabendo que o raio da base é 6, tem-se o diâmetro igual a 12. Além disso, ele define que a medida do semieixo maior da elipse (a) é igual a 6, que é a medida do raio.

Quadro 23: Acompanhamento do estudante 18F2 na situação 6

Situação 6: Um cilindro de revolução tem por base um círculo de R = 6. Determinar a área da elipse intersecção do cilindro por um plano que forma com o seu eixo um ângulo de 30º. Sabendo que a área é dada por S = "pi". a. b.



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
42	53. Representar o problema no R³.	48. Quando não é dado um esboço na situação.	Erra	5301. Não representar o problema no R³.
43	44. Identificar a elipse a partir de um cone cortado por um plano inclinado.	21. Quando a representação geométrica não é dada na situação.	Acerta	Nulo
44	54. Utilizar relações trigonométricas como possibilidade de resolução de problemas.	50. Quando os elementos não são dados na situação.	Erra	5402. Utiliza a relação trigonométrica incorreta para a solução do problema devido a erros anteriores.
45	57. Identificar o problema com passagem do R³ para o R².	56. Quando o contexto solicita não representação	Acerta	Nulo
46	55. Determinar a área de uma elipse	52. Tendo a equação, mas não tendo os elementos.	Erra	5501. Determina incorretamente a área da cônica.
47	56. identificar que o semieixo menor é igual ao raio quando a elipse o cone é cortado por um plano inclinado.	55. A partir de um esboço feito a mão.	Erra	5601. Dificuldade em identificar que o semieixo menor é igual ao raio quando a elipse o cone é cortado por um plano inclinado.

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

O aluno não representa a situação no R³, o que poderia colaborar com a identificação dos elementos da elipse, pois na simulação enviada eles poderiam observar o cilindro cortado pelo plano, apresentando então o conhecimento 42, habilidade 53 “representar o problema no R^3”, maturidade 48 “quando não é dado um esboço na situação”, onde registramos o tipo de erro 5301. Não representar o problema no R^3”, de nível 2.

O estudante faz a passagem da situação dada em R^3 para o R^2, apresentando então o conhecimento 45, habilidade 57 “identificar o problema com passagem do R^3 para o R^2” e maturidade 56 “quando o contexto solicita não representação”, de nível 2.

Fazendo o esboço da elipse formada pelo corte do plano inclinado com o cone, observamos então a presença do conhecimento 43, habilidade 44 “Identificar a elipse a partir de um cone cortado por um plano inclinado” e maturidade 21 “quando a representação geométrica não é dada na situação” nível 2.

Pela dificuldade na representação do problema no R^3, o estudante apresenta dificuldades em identificar os elementos da elipse, sem os relacionar com as informações sobre o raio e diâmetro do cilindro.

Ele determina previamente no início de sua resolução que o semieixo maior da elipse é igual ao raio da base do cilindro, o que é um equívoco. Assim, identificamos o conhecimento 47, habilidade 56 “identificar que o semieixo menor é igual ao raio quando a elipse o cone é cortado por um plano inclinado”, maturidade 55 “a partir de um esboço feito a mão” de nível 2, e tipo de erro 5601 “dificuldade em identificar que o semieixo menor é igual ao raio quando a elipse o cone é cortado por um plano inclinado”.

Tendo o semieixo maior da elipse para que se possa determinar sua área, o estudante determina a medida do semieixo menor utilizando a relação trigonométrica da tangente para o ângulo de inclinação igual a 30°. Neste caso, o aluno observa que é possível utilizar relações trigonométricas, quando se tem relações no triângulo retângulo que estão na elipse, identificamos assim o conhecimento 44, habilidade 54 “utilizar relações trigonométricas como possibilidade de resolução de problemas”, maturidade 50 “quando os elementos não são dados na situação” apresentando o tipo de erro 5402 “utiliza a relação trigonométrica incorreta para a solução do problema devido a erros anteriores”.

Obtendo o semieixo menor e tendo anteriormente a medida do semieixo maior o estudante faz o cálculo da área da elipse, utilizando $S = \pi \cdot a \cdot b$. Deste modo, identificamos a presença do conhecimento 46, habilidade 55 “determinar a área de uma elipse”, maturidade 52 “tendo a equação, mas não tendo os elementos” nível 2 e tipo de erro 5501 “determina incorretamente a área da cônica”.

Visto a dificuldade em representar o problema no R^3, foi elaborado o recurso 32, que se trata de uma simulação em Geogebra, onde apresentamos o cilindro cortado por um plano com inclinação de 30°, no qual os estudantes pudessem rotacionar o cilindro e identificar a relação entre os elementos da elipse e do cilindro.

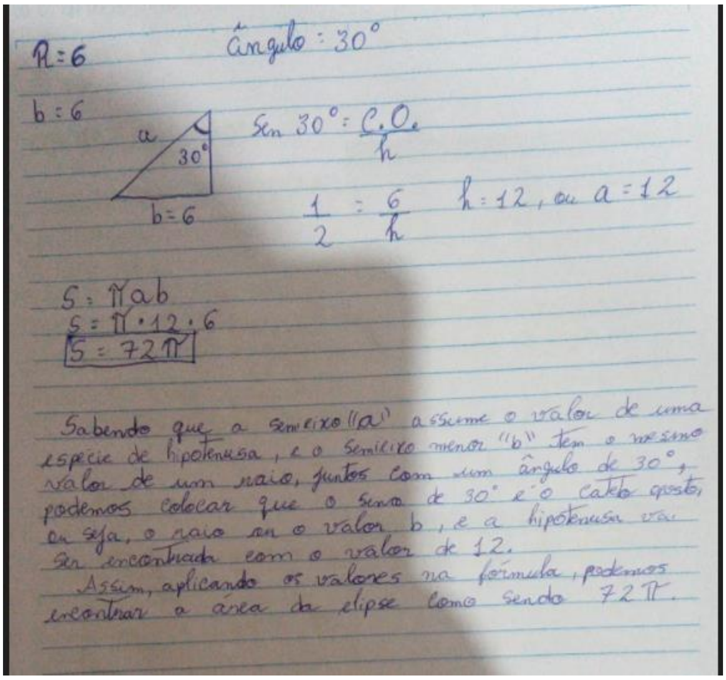
Após o recebimento dos recursos 30 e 32, o estudante 18F2 juntamente com o aluno 7M2 resolvem a situação 6. No Quadro 23 mostraremos o acompanhamento do estudante 18F2 na resolução da situação 6.

O estudante 18F2 inicia do mesmo modo que fez na resolução anterior, fazendo anotações sobre as informações que ele obtém do problema, são elas, raio da base igual a 6, o ângulo do plano inclinado igual a 30°. Identifica a elipse e seus elementos, assim, observamos que o estudante apresenta o conhecimento 43, habilidade 44 “identificar a elipse a partir de um cone cortado por um plano inclinado” e maturidade 21 “quando a representação geométrica não é dada na situação” de nível 2.

Nesta resolução o aluno observa que a medida do semieixo menor é igual a 6, diferente do que tinha observado na resolução anterior, deste modo, apresentando o conhecimento 47, habilidade 56 “identificar que o semieixo menor é igual ao raio quando a elipse o cone é cortado por um plano inclinado” e maturidade 54 “a partir de uma representação dada”, de nível 1. Também identifica a medida do semieixo maior da elipse, como sendo a medida da hipotenusa, a medida do semieixo menor (b) sendo igual a 6, e um dos ângulos sendo 30°, que é a inclinação do plano que corta o cilindro.

Quadro 24: Acompanhamento do estudante 18F2 na situação 6 retificada

Situação 6: Um cilindro de revolução tem por base um círculo de R = 6. Determinar a área da elipse intersecção do cilindro por um plano que forma com o seu eixo um ângulo de 30º. Sabendo que a área é dada por S = "pi". a. b.



Conhecimento	Habilidades	Maturidade	Avalia	Tipo de Erro
42	53. Representar o problema no R³.	47. Quando é dado um esboço na situação.	Acerta	Nulo
43	44. Identificar a elipse a partir de um cone cortado por um plano inclinado.	21. Quando a representação geométrica não é dada na situação.	Acerta	Nulo
44	54. Utilizar relações trigonométricas como possibilidade de resolução de problemas.	50. Quando os elementos não são dados na situação.	Acerta	Nulo
45	57. Identificar o problema com passagem do R³ para o R².	56. Quando o contexto solicita não representação	Acerta	Nulo
46	55. Determinar a área de uma elipse	52. Tendo a equação, mas não tendo os elementos.	Acerta	Nulo
47	56. identificar que o semieixo menor é igual ao raio quando a elipse o cone é cortado por um plano inclinado.	54. A partir de uma representação dada.	Acerta	Nulo

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Não faz o esboço da elipse como ele tinha feito na resolução anterior, acreditamos que devido ao uso do recurso 32 que possibilita ter uma visualização da situação 6, sendo assim, ele representa geometricamente o triângulo retângulo com as informações de suas medidas e ângulo, onde a hipotenusa é o semieixo maior e um dos catetos o semieixo menor e diferente da resolução anterior, ele utiliza a relação trigonométrica do seno de um ângulo. Observamos assim, o uso do conhecimento 44, habilidade 54 “utilizar relações trigonométricas como possibilidade de resolução de problemas” e maturidade 50 “quando os elementos não são dados na situação” de nível 2.

Por fim, o estudante determina a área da elipse, utilizando a informação para o cálculo de área que foi dada na situação, incluindo as medidas dos semieixos (maior e menor) a e b, que encontrou. Identificamos assim, a presença do conhecimento 46, habilidade 55 “determinar a área de uma elipse” e maturidade 52 “tendo a equação, mas não tendo os elementos” de nível 2.

Para o acompanhamento da aprendizagem personalizada do estudante 18F2 o FrameAGAP possibilitou:

- Dar suporte às dificuldades apresentadas e aprofundar os conhecimentos referente às cônicas;
- Informar quais situações e recursos se adequavam as dificuldades e conhecimentos apresentados pelo estudante;
- Indicar quando um recurso não era suficiente para dar suporte às dificuldades apresentadas pelo estudante. No caso do estudante 18F2, o FrameAGAP possibilitou integrar dois recursos, o vídeo e a simulação;
- Receber um recurso criado a partir dos conhecimentos e dificuldades apresentadas por ele, neste caso, a simulação;
- Receber acompanhamento personalizado a cada situação resolvida e um *feedback* dos conhecimentos e dificuldades apresentadas;
- Informar qual estudante apresentava conhecimentos semelhantes ao 18F2, neste caso, o 7M2. Formando um grupo para aprofundar os conhecimentos sobre as cônicas.

Para que o professor pudesse acompanhar os alunos de forma personalizada, o FrameAGAP possibilitou:

- Ter um relatório dos conhecimentos e tipos de erros apresentados pelo estudante na resolução de situações, podendo visualizar a evolução do estudante no decorrer do tempo;
- Autonomia para escolher, (dentre os recursos e situações que mais se adequam as dificuldades dos estudantes) quais deseja indicar para o aluno;
- Criar recursos que atenda às necessidades do estudante, a partir das dificuldades apresentadas por ele na resolução de situações;
- Criar recursos tendo como base as dificuldades apresentadas pelo estudante, quando não forem encontrados recursos adequados para auxiliar o aluno, além de, incluir estes recursos no banco de dados do FrameAGAP;
- Analisar a variabilidade de conhecimentos que os recursos e situações podem explorar e mobilizar;
- Formar grupos de aprofundamento de conhecimento com os estudantes;
- Ter relatório dos recursos e situações que estão sendo enviados para o estudante, com registro de data e hora, por meio da Tabela Orienta;
- Incluir e excluir recursos, situações, temas, conhecimentos, tipos de erros no FrameAGAP sempre que precisar.

Ao apresentar nos tópicos 5.3.1, 5.3.2 e neste último o acompanhamento da aprendizagem dos estudantes, foi possível perceber que o FrameAGAP nos possibilitou fazer um acompanhamento personalizado da aprendizagem dos alunos, mostrando um caminho a ser trilhado por cada um a partir dos conhecimentos e dificuldades apresentados por eles.

Foi possível mapear os materiais de apoio que colaborassem com a aprendizagem dos estudantes, deste modo, por meio das situações e recursos indicados, muitas dificuldades apresentadas por eles foram superadas.

Verificamos que quando não tínhamos no banco de dados um recurso que explorasse as dificuldades dos estudantes, com a utilização do FrameAGAP era possível identificar as dificuldades apresentadas e elaborar um recurso que explorasse os conhecimentos necessários para superar tal dificuldade, como foram os casos dos recursos 31 e 32.

Foi possível perceber a variabilidade de situações que estavam presentes no banco de dados, quais eram seus significados, habilidades, representações, maturidade e quais conhecimentos elas mobilizavam. Além disso, identificamos a dificuldade em encontrar nos livros de Geometria Analítica, situações com o significado “objeto de deslocamento no plano”, já que a maior parte das situações apresentavam significado “objeto geométrico”.

Essas foram algumas das possibilidades encontradas no decorrer desta pesquisa com a utilização do FrameAGAP. No próximo tópico, discutiremos os resultados encontrados no decorrer deste estudo.

5.4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Temos visto as discussões sobre a importância de se levar em consideração as necessidades e particularidades dos estudantes, propondo metodologias de ensino nas quais o aluno pode trabalhar em colaboração, discutindo mais com os colegas e professor, ao invés de ouvir apenas o monólogo do docente.

Algumas dessas metodologias de ensino utilizadas para trabalhar a autonomia e proatividade, proporcionando momentos de colaboração e discussão, são as Metodologias Ativas. É possível, ainda, unir às metodologias ativas ao Ensino Híbrido, trazendo um modelo de ensino que leva em consideração o tempo de aprendizagem do estudante, flexibilizando o ensino, como nos mostrou Moran (2017).

Como uma das abordagens do Ensino Híbrido, temos a Sala de Aula Invertida, que modifica os tempos de aprendizagem e que pode ser utilizada para contribuir com a aprendizagem dos estudantes do Ensino Superior como mostram as pesquisas de Casselman, Ohlsen e Atwood (2017), utilizando a Sala de Aula Invertida para o Ensino de Química Geral I, e Pavanelo e Lima (2017) no ensino de Cálculo I. Foi possível ver resultados semelhantes com nossa pesquisa utilizando a metodologia no Ensino de Geometria Analítica.

No mundo em que vivemos hoje, é possível pensar em tecnologias existentes ou recém-criadas por pesquisadores para integrar à Sala de Aula Invertida de modo que o professor possa fazer um acompanhamento da aprendizagem dos alunos. Deste modo, tecnologias para gerenciamento de aprendizagem são pensadas para que se possa fazer um acompanhamento da aprendizagem dos estudantes, tornando possível a flexibilização. Segundo Sucipto *et al* (2017), que utilizam o Edmodo integrado a Sala de Aula Invertida, a flexibilização é uma das características principais para o bom resultado do uso do Edmodo nesta metodologia, onde citam: “A capacidade de retroceder o vídeo ou ler o material da lição completamente no ritmo individual dos alunos pode ser o principal motivo.” A capacidade de flexibilização está presente em nossa pesquisa, que utiliza um recurso para Acompanhamento e Gestão de Aprendizagem (FrameAGAP), onde o estudante pode escolher a melhor hora para assistir aos vídeos, podendo pausar, avançar ou retrocedê-los.

A Personalização do ensino é também um ponto chave dos resultados desta pesquisa, bem como nas pesquisas de Medeiros e Bessa (2017), que mostra um dispositivo (MiniTeste) para utilização na metodologia de Instrução por Pares, que permite que o professor faça uma avaliação personalizada dos estudantes em seus testes, e visto a necessidade baseado na quantidade de erros E >75%, é feito um reteste, após discussão em grupos, como se faz na metodologia de Instrução por Pares.

Em consonância com os estudos apresentados por Medeiros e Bessa (2017), Sucipto *et al* (2017) e Casselman, Ohlsen e Atwood (2017) temos a utilização de sistemas de gestão de aprendizagem que permitam personalizar a aprendizagem, identificando as dificuldades dos estudantes e traçando caminhos para que consigam superá-las, a avaliação feita de forma frequente, o *feedback* dado aos estudantes e a flexibilização da aprendizagem.

Cada estudo acima citado utilizou um sistema de gestão de aprendizagem diferente (Edmodo, Teoria de Resposta ao Item e MiniTeste), que possibilitou personalizar a aprendizagem dos estudantes. Esta pesquisa com o uso do FrameAGAP, se distancia das citadas ao passo que utilizamos como base na estruturação do dispositivo e do acompanhamento da aprendizagem, a Teoria dos Campos Conceituais.

Com a utilização do FrameAGAP, mapeamos os significados, representações, habilidades, maturidade das situações e dos recursos sobre o conteúdo de cônicas. Além disso, foi possível identificar os conhecimentos, dificuldades e maturidades dos estudantes, enviado para estes materiais de apoio que fossem capazes de mobilizar e explorar determinados conhecimentos.

Ao longo desta pesquisa abordamos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1999) e de como os conceitos são construídos e desenvolvidos. Foi possível identificar nos acompanhamentos dos estudantes essa rede complexidade é o conhecimento. Como no caso da estudante 1M2, que apresentou dificuldades quanto à identificação do parâmetro, onde não esperávamos que dificuldades como essas fossem aparecer, fazendo com que utilizássemos a "dificuldade de identificação dos elementos" como sinônimo de todos os elementos.

Nas análises realizadas com o uso do FrameAGAP foi possível perceber lacunas no próprio ensino da Geometria Analítica. Onde, tivemos dificuldades para encontrar nos livros situações que tivessem como significado "objeto de deslocamento no plano". De forma análoga, tivemos essa mesma dificuldade em relação à procura dos recursos. O que nos indica a importância de se trabalhar com o ensino nesse ramo da matemática, de modo que se abordem os vários significados nas situações da Geometria Analítica.

Deste modo, o FrameAGAP possibilitou fazer o acompanhamento personalizado da aprendizagem dos estudantes. Estruturando o dispositivo com base na Teoria dos Campos Conceituais conseguimos detalhar o conhecimento dos estudantes acerca do conteúdo de cônicas, além dos conhecimentos mobilizados pelas situações e explorados nos vídeos. Foi possível ainda, identificar algumas lacunas em relação ao ensino de Geometria Analítica e as dificuldades apresentadas por estudantes do Ensino Superior em relação ao estudo das cônicas.

No próximo capítulo, veremos as considerações finais deste estudo, suas limitações e nossa pretensão em relação aos estudos futuros utilizando o FrameAGAP.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização do Ensino Híbrido traz como pontos principais de suas discussões a flexibilização e personalização do ensino, que não é uma tarefa fácil. Deste modo, recursos tecnológicos são utilizados de forma que o professor consiga fazer um acompanhamento da aprendizagem dos estudantes, mapeando o que ele sabe, quais dificuldades, necessidades e quais materiais poderiam ajudar.

Pensando nas dificuldades encontradas por estudantes, em disciplinas de ciências exatas e como forma de contribuir com o processo de flexibilização e personalização da aprendizagem, a pesquisa faz o mapeamento dos conhecimentos e dificuldades apresentadas pelos estudantes sobre o conteúdo de cônicas, indicando quais recursos e situações podem ser utilizados por ele para colaborar com sua aprendizagem, numa metodologia de Sala de Aula Invertida adaptado ao ensino remoto, devido ao contexto da Pandemia de Covid-19 em que aconteceu a coleta de dados.

Sendo assim, conseguimos mapear os componentes que possibilitaram a construção da estruturação de conhecimento necessário à aprendizagem de cônicas em Geometria Analítica. Por exemplo, as habilidades dos estudantes, que foram divididas em principal (que fazem parte do conteúdo de cônicas) e secundária (que não fazem parte do conteúdo de cônicas), as maturidades, os significados de cônicas, o espaço, as representações e dificuldades.

Foi possível adaptar a estruturação de conhecimentos de Lima Jr. (2020) para o campo das cônicas, identificando habilidades, estruturas, representações, significados de circunferência, parábola, elipse e hipérbole.

Testamos e validamos a estrutura de acompanhamento do desenvolvimento de um grupo de estudantes por meio do FrameAGAP. Por meio do qual foi possível fazer o acompanhamento individual de cada aluno e verificar quais estudantes apresentavam conhecimentos semelhantes de modo que pudessem trabalhar em suas dificuldades ou enfrentar novas situações em grupos, como no caso dos estudantes 18F2 e 7M2.

Previamente, construímos uma estrutura de análise das situações e dos vídeos sobre circunferência, elipse, parábola e hipérbole. Na qual, utilizamos como base a Teoria dos Campos Conceituais, mapeando os significados, representações, habilidades, maturidades e dificuldades que esses recursos pudessem explorar e mobilizar.

Construímos e analisamos teoricamente situações e recursos para compor o banco de recursos e o banco de situações. Além disso, foi possível identificar as lacunas no ensino da Geometria Analítica em relação às situações propostas em livros didáticos, onde se abordam mais situações sobre um mesmo significado, o objeto geométrico, não tendo uma variabilidade de significados nas situações para a construção do conceito de cônicas. Do mesmo modo, vimos que muitos dos vídeos disponibilizados no *YouTube* exploravam o significado “objeto geométrico”.

Identificamos as possibilidades do framework quanto ao acompanhamento da aprendizagem dos estudantes, permitindo que o professor possa identificar recursos e situações que possibilitem auxiliar os estudantes em suas dificuldades e aprofundar os conhecimentos daqueles que demonstravam ter compreendido o conteúdo.

Foi possível testar e analisar o dispositivo quanto ao acompanhamento de um estudante e de um grupo de estudantes, quanto à escolha de vídeos e quanto à escolha de situações adequadas ao seu desenvolvimento. Assim, conseguimos identificar lacunas no conhecimento dos estudantes, como em detalhar as dificuldades apresentadas no traçado de pontos no plano cartesiano quando as coordenadas são negativas.

Por fim, conseguimos construir e validar um framework por meio do estudo do acompanhamento da aprendizagem de um grupo de estudantes sobre cônicas, em uma metodologia da Sala de Aula Invertida, adaptada para o ensino remoto, com auxílio para identificação de material de conteúdo e de situações, no estudo da Geometria Analítica do Ensino Superior.

Neste capítulo apresentamos o que o *Framework* para o Acompanhamento e Gestão de Aprendizagens Personalizadas nos proporcionou em relação ao acompanhamento da aprendizagem dos estudantes de Geometria Analítica. No próximo tópico abordaremos as limitações desta pesquisa e o que pretendemos investigar em estudos futuros.

6.1 LIMITAÇÕES DA PESQUISA

Uma das dificuldades que enfrentamos nesta pesquisa foi a adaptação do modelo de Sala de Aula Invertida para o contexto do Ensino Remoto, em decorrência da Pandemia de Covid-19, período em que esta pesquisa estava sendo desenvolvida.

Outro obstáculo que enfrentamos foi em relação a busca de situações e vídeos sobre cônicas em livros de Geometria Analítica e na Plataforma de vídeo *YouTube* que tivessem o significado de “objeto de deslocamento no plano”.

Outro fator de limitação foi em relação ao tempo da pesquisa e a construção do FrameAGAP, utilizando a linguagem SQL, onde não foi possível automatizar alguns comandos a tempo da coleta de dados. Deste modo, o trânsito de informações contidos no banco de dados foi realizado pela pesquisadora.

Também tivemos dificuldades em relação à não participação de sujeitos que receberam um dos recursos que pretendíamos ter testado, o infográfico, sendo destinado aos estudantes que apresentaram poucas dificuldades.

6.2 ESTUDOS FUTUROS

Para estudos futuros pretendemos:

- Fazer o mapeamento das habilidades, significados e representações para a toda a disciplina de Geometria Analítica e para outros conteúdos da disciplina de Matemática;
- Criar um banco prévio dos significados, representações, conhecimentos, habilidades, maturidades e tipos de erros apresentados por estudantes na Disciplina de Geometria Analítica. Com objetivo de minimizar o trabalho o trabalho do professor, mas permitindo que ele possa incluir recursos, situações, conhecimentos e tipos de erros que desejar no FrameAGAP;
- Incluir recursos para pequenas dificuldades no banco de dados do FrameAGAP, como os infográficos;
- Automatizar funções do FrameAGAP e incluir telas de trabalho que melhorem o *design* do *software* e facilitem o trabalho do professor, visto que o acompanhamento de um grupo de estudantes pode ser realizado de forma

eficaz, mas seria difícil, com a tecnologia que utilizamos hoje, acompanhar uma turma com 30 estudantes;

- Atualizar o FrameAGAP, integrando outras tecnologias ao formato de Banco de Dados em SQL que utilizamos atualmente, para que ele possa ser utilizado por outros professores, visto que, ele está sendo utilizado apenas pelos pesquisadores e que na versão atual a utilização por outro professor seria um pouco trabalhoso.

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. P.; ALENCAR, S. V. A Gênese Instrumental na interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de matemática. **Bolema** vol. 27. n. 46, Rio Claro, ago. 2013.

ARAÚJO, I.S.; MAZUR, E. Instrução pelos Colegas e Ensino sob Medida: Uma proposta para engajamento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 30, n.2, p. 362-384, 2013.

DICIO. **Dicionário Online de Português**. Porto: 7Graus, 2021. Disponível em: https://www.dicio.com.br/assincrono/. Acesso em: 20/08/2021.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F.M. **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação** [recurso eletrônico]. Porto Alegre: Penso, 2015. e-PUB.

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P**. Por que a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática?** Perspectivas da Educação Matemática. v. 8, n. temático, 2015. MS, 2015.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de aula invertida:** uma metodologia ativa de aprendizagem. 1a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

BITTAR, M. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para o estudo das dificuldades dos alunos na passagem da Geometria Afim à Geometria Vetorial. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1 ed. Curitiba: Editora CRV, 2009. p. 53–76.

BROWN, A. L. Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Inteventions in Classroom Settings. **The Journal of the Learning Sciences**, v. 2, n. 2, p. 141-178, 1992.

CANVA. **Canva**, 2021. Design para todos. Disponível em: https://www.canva.com/. Acesso em: 25/08/2021.

CASSELMAN B.L.; OHLSENB.R.; ATWOOD, C.H. How we have used Item Response Theory and classroom management to improve student success rates in large general chemistry classes. **Nova Quim**, v. 40, 2017.

CHEN, P. P. S. The Entity-Relationship Model: Toward a Unified View of Data. **ACM Transactions on Database Systems**, v. 1, n. 1, p. 9-36, 1976. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1769466/mod_resource/content/1/p9-chen.pdf. Acesso no dia: 29/08/2021.

CHRISTENSEN, C. M.; HORN, M. B.; STAKER, H. ***Ensino híbrido*: uma inovação disruptiva?** Uma introdução à teoria dos híbridos. San Mateo: Clayton Christensen Institute, 2013. Disponível em:http://porvir.org/wp-content/uploads/2014/08/PT_Is-K-12-blended-learning-disruptive-Final.pdf. Acesso em: 27 de janeiro de 2020.

COBB, P.; CONFREY, P.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research**. Educational Researcher**, v. 32, n.1, p. 9 -13, Jan./Feb. 2003.

FERREIRA, A.B.H. Miniaurélio Século XXI: O minidicionário da língua Portuguesa. 5ª edição. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FRIESEN, Norm. **Report: defining blended learning.** 2012. Disponível em:https://www.normfriesen.info/papers/Defining_Blended_Learning_NF.pdf Acesso em: 09/04/2021.

GITIRANA, Verônica. *et al.* **Repensando multiplicação e divisão:** contribuições da teoria dos campos conceituais. [*E-book*]. São Paulo: PROEM, 2020.

GOOGLE. **Google Jamboard**, 2021. Google Jamboard: quadro branco digital e colaborativo. Disponível em: https://jamboard.google.com/. Acesso em: 25/08/2021.

GRECA, Ileana Maria; MOREIRA, Marco Antonio. Do saber fazer ao saber dizer: uma análise do papel da resolução de problemas na aprendizagem conceitual de Física. **Ensaio: Pesquisa em educação em Ciências**. V. 5, n. 1, Porto Alegre, 2003, p. 52-67.

HORN, M.B.; STAKER, H. **Blended:** usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

LIMA Jr., L.G. **Mapeamento de recursos destinados ao acompanhamento individualizado em sala de aula invertida:** Design de um dispositivo modelado para o conteúdo de frações. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 2020.

LIMA, Joélia. **Cone interceptado por plano, Geogebra, 6**, nov. 2020. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xzw4swnq. Acesso em: 25/08/2021.

LIMA, Joélia. **Exemplos - Parabólas e Hipérboles**. Youtube, 12 nov. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=4ZGLLt14JnQ. Acesso em: 25/08/2021.

LIMA, L. H. F.; MOURA, F. R**.** O professor no Ensino Híbrido. In: SCHNEIDER, F. Otimização do espaço escolar por meio do modelo de ensino híbrido. In: BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F.M. **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação** [recurso eletrônico]. Porto Alegre: Penso, 2015. e-PUB.

MACEDO, Marcos Antônio. **Geometria analítica vetorial**. Fortaleza, UAB/IFCE, 2008.

MEDEIROS, R. A. C; BESSA. André. MiniTeste: uma ferramenta ágil para aplicação de avaliações personalizadas.**Renote:** Novas Tecnologias na Educação, vol. 15, 2017.

MOL, Rogério S. **Introdução à história da matemática.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MORAN, J. M. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora:** uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2017.

NASSER, L.; VAZ, R. F. N.; TORRACA, M. A. A. Transição do Ensino Médio para o Superior: Investigando Dificuldades em Geometria Analítica. *In:* **VI SIPEM, Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Novembro, 2015, Goiás, **Anais.** Disponível em: https://professorrafaelvaz.webnode.com/_files/200000015-0e4770f492/TRANSI%C3%87%C3%83O%20DO%20ENSINO%20M%C3%89DIO%20PARA%20O%20SUPERIOR.pdf acesso no dia: 21/02/2020.

PAVANELO, E.; LIMA, R. Sala de aula invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. **Bolema,** Rio Claro, SP, v. 31, n. 58, p. 739-759, ago. 2017.

PESSOA, C. A. S. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do raciocínio combinatorio do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese (doutorado) Universidade Federal de Pernambuco - UFPE. Recife. 2009.

SANTOS, A. T. C. **O Estado da Arte das Pesquisas brasileiras sobre Geometria Analítica no período de 1991 a 2014.**Tese (doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. São Paulo. 2016.

SCHNEIDER, F. Otimização do espaço escolar por meio do modelo de ensino híbrido. In: BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F.M. **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação** [recurso eletrônico]. Porto Alegre: Penso, 2015. e-PUB.

SILVA, G. B.; FELICETTI, V. L. Habilidades e competências na prática docente: perspectivas a partir de situações-problema. **Educação Por Escrito**, Porto Alegre, v. 5, n. 1, p. 17-29, jan.-jun. 2014.

SOUZA, J. T. G. KATO, L. A. Um estudo do campo conceitual das cônicas. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, Curitiba, 2013. **Anais.** Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3356_1744_ID.pdf . Acessado em: 10/05/20.

SUCIPTO, Taufiq Lilo Adi *et al.* The Influence of Learning Management Technology. **International Journal of Pedagogy and Teacher Education**. Indonesia, Vol.1, 2017.

TRENTIN, P. H**.** Alguns textos de história em livros de matemática: uma primeira aproximação. **Revista História da Ciência e Ensino: construindo interfaces.** vol. 3, p. 1-6, 2011.

VALENTE, J. A. Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. **Educar em Revista**, v. 4, p. 79-97, 2014ª.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, Gérard. **Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud:** Teoria dos Campos Conceituais TCC. Porto Alegre, GEEMPA, 2017.

APÊNDICE A-TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLAREDIO-TCLE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

Convidamos o (a) Sr. (a) para participar como voluntário (a) da pesquisa Dispositivo para a Sala de Aula Invertida no ensino da Geometria Analítica, que está sob a responsabilidade do (a) pesquisador (a) Joélia Santos de Lima,

joelialiima@

Todas as suas dúvidas podem ser esclarecidas com o responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concorde com a realização do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

O (a) senhor (a) estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade.

A pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa da UFPE, sob 36735520.3.0000 em 10 de setembro de 2020.

* ESTE TCLE PODE SER BAIXADO E IMPRESSO PELO LINK: https://docs.google.com/forms/d/1o639TbsDFZqJLwYPmlJ6ouFzydW-D4VOGTIpAe4FZOA/edit?usp=

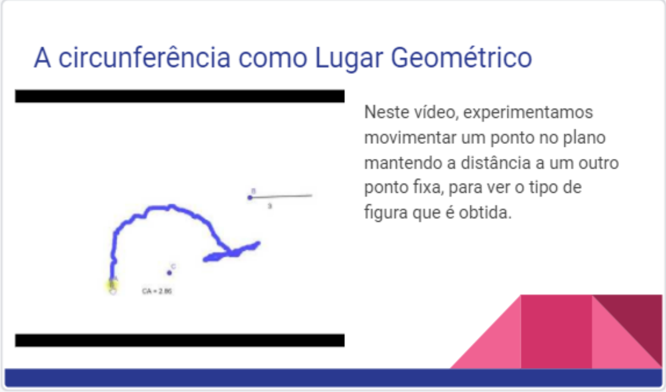
** É IMPORTANTE QUE O PARTICIPANTE DA PESQUISA GUARDE EM SEUS ARQUIVOS UMA CÓPIA DESTE DOCUMENTO (Orientação CONEP de 05/06/2020)

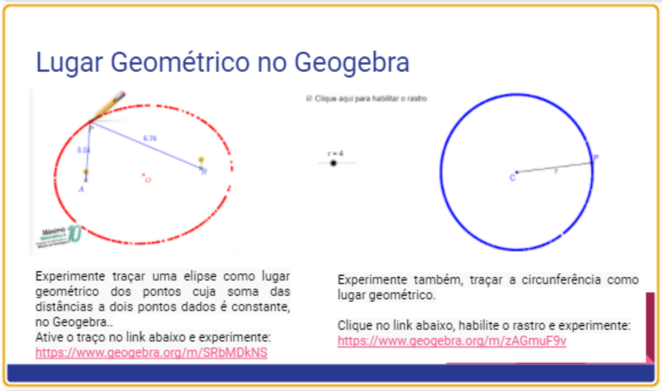
APÊNDICE B – MATERIAL TEÓRICO ENVIADO AOS ESTUDANTES DE GEOMETRIA ANALÍTICA

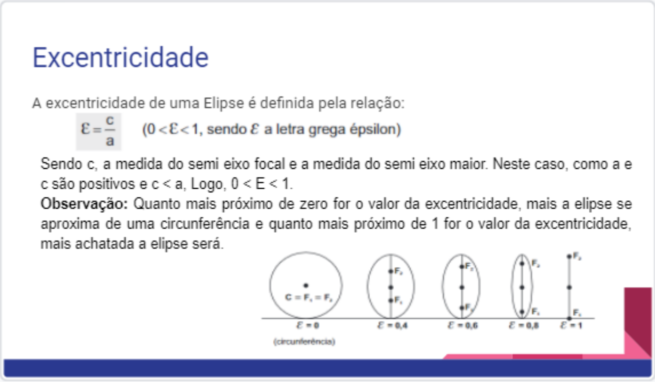
Os estudantes da disciplina de Geometria Analítica receberam o material apresentado abaixo. Trata-se de um slide elaborado pela pesquisadora e os professores da disciplina. Nele, foi abordado o conteúdo de cônicas, com inclusão de link para livro didático de livre acesso utilizado pelos professores no decorrer da disciplina, simulações no Geogebra e vídeos sobre cônicas disponíveis no Youtube. O material foi disponibilizado na Sala Virtual da disciplina de Geometria Analítica, no Google Classroom.

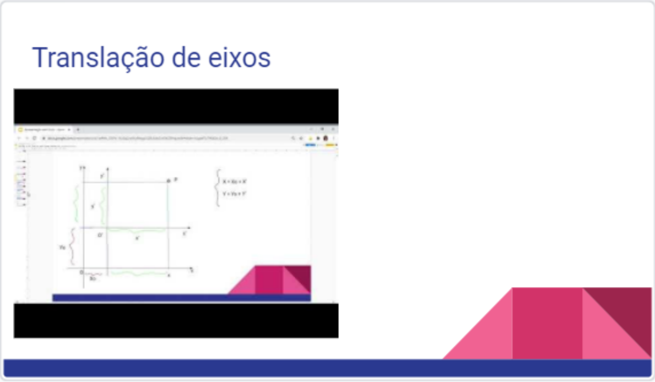
Na primeira semana, os estudantes receberam o material que abordava as cônicas de forma geral, como a obtenção das cônicas por meio de cortes do cone circular reto. Na semana oito, foi enfatizado o estudo da circunferência e elipse.

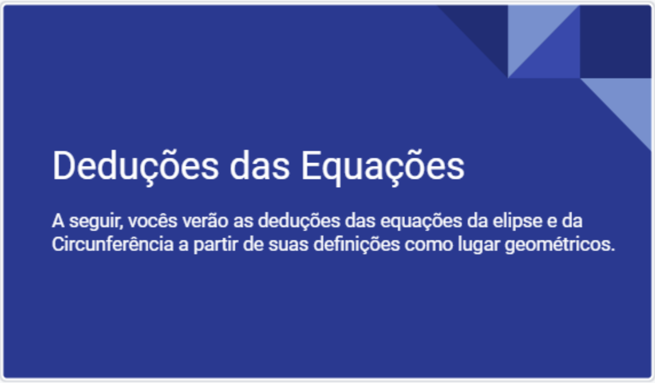

Material Teórico:
A seguir, vocês verão o material teórico das Cônicas I, que conta com vídeos e a bibliografia.

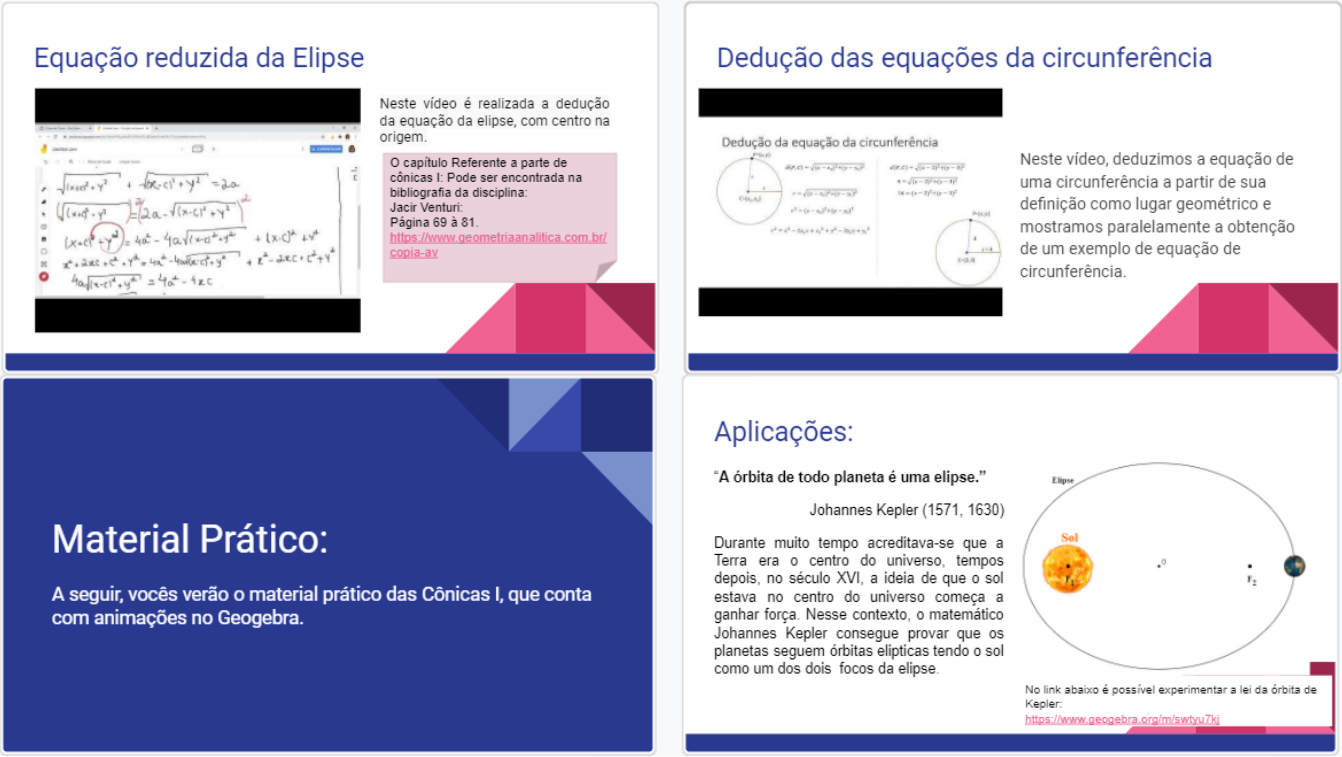

A circunferência como Lugar Geométrico
Neste vídeo, experimentamos movimentar um ponto no plano mantendo a distância a um outro ponto fixa, para ver o tipo de figura que é obtida.


Lugar Geométrico no Geogebra
Experimente traçar uma elipse como lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos dados é constante, no Geogebra..
Ative o traço no link abaixo e experimente:
https://www.geogebra.org/m/SRbMDkNS
Experimente também, traçar a circunferência como lugar geométrico.
Clique no link abaixo, habilite o rastro e experimente:
https://www.geogebra.org/m/zAGmuF9v


Excentricidade
A excentricidade de uma Elipse é definida pela relação:
$\mathcal{E} = \frac{c}{a}$ $(0 < \mathcal{E} < 1$, sendo $\mathcal{E}$ a letra grega épsilon)
Sendo c, a medida do semi eixo focal e a medida do semi eixo maior. Neste caso, como a e c são positivos e c < a, Logo, 0 < E < 1.
Observação: Quanto mais próximo de zero for o valor da excentricidade, mais a elipse se aproxima de uma circunferência e quanto mais próximo de 1 for o valor da excentricidade, mais achatada a elipse será.
(circunferência)


Translação de eixos

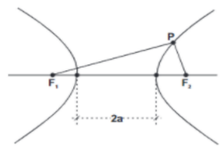

Deduções das Equações
A seguir, vocês verão as deduções das equações da elipse e da Circunferência a partir de suas definições como lugar geométricos.



Na semana 9, enfatizamos o estudo da hipérbole e parábola. Enviamos novamente um slide com materiais teóricos, contendo os vídeos sobre a dedução das equações da hipérbole e parábola, link para o material em texto utilizado (o livro didático de livre acesso utilizado pelos professores) e links para as simulações disponíveis no Geogebra. O material apresentado abaixo foi inserido na turma virtual da disciplina de Geometria Analítica, do Google *Classroom.*

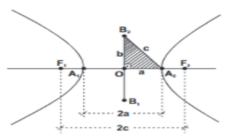
Hipérbole

LUGAR GEOMÉTRICO: HIPÉRBOLE



Definição: É o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que o valor absoluto da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F1 e F2 (focos), do mesmo plano, é uma constante (2a), onde 2a < d(F1, F2).

ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE



F1 , F2: focos. A distância entre os focos F1 e F2 , igual a 2c, denomina-se distância focal.
O: Centro da hipérbole; é o ponto médio do segmento F1F2 .
A1, A2: vértices da hipérbole.
Eixo real ou transverso: é o segmento A1A2 e cujo comprimento é 2a.
Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B1B2 e cujo comprimento é 1.

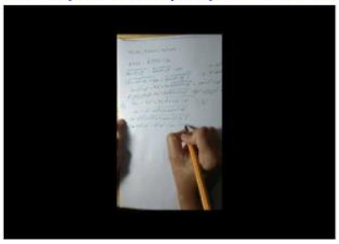
EXCENTRICIDADE

É definida pela relação:

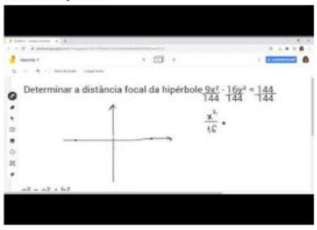
$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

(E > 1)Como a e c são positivos e c > a, depreende-se que e > 1. Há uma proporcionalidade entre a excentricidade e a abertura da hipérbole: quanto maior a excentricidade maior a abertura e vice-versa.

Dedução da equação reduzida da Hipérbole

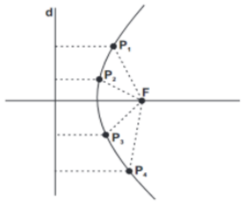


Exemplo:



Parábola

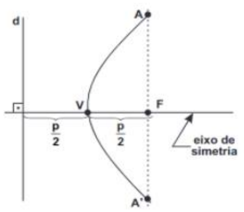
Lugar geométrico da Parábola



Considere-se, em um plano α, um ponto F e uma reta d que não contém F. Denominamos **parábola** de foco F e diretriz d ao lugar geométrico dos pontos do plano a que equidistam de d e F.

Referência: J. Venturi, pg. 41.

Elementos da parábola



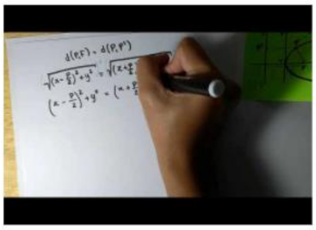
Denominamos:

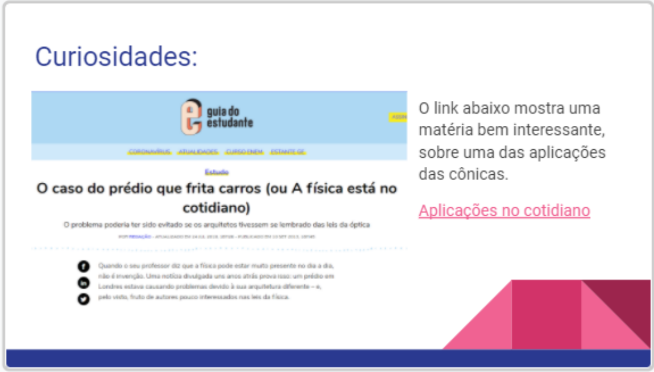
F: foco
d: diretriz
V: vértice
p: parâmetro, que representa a distância do foco à diretriz (p≠ 0).

reta VF: eixo de simetria da parábola.

Referência: J. Venturi, pg. 42.

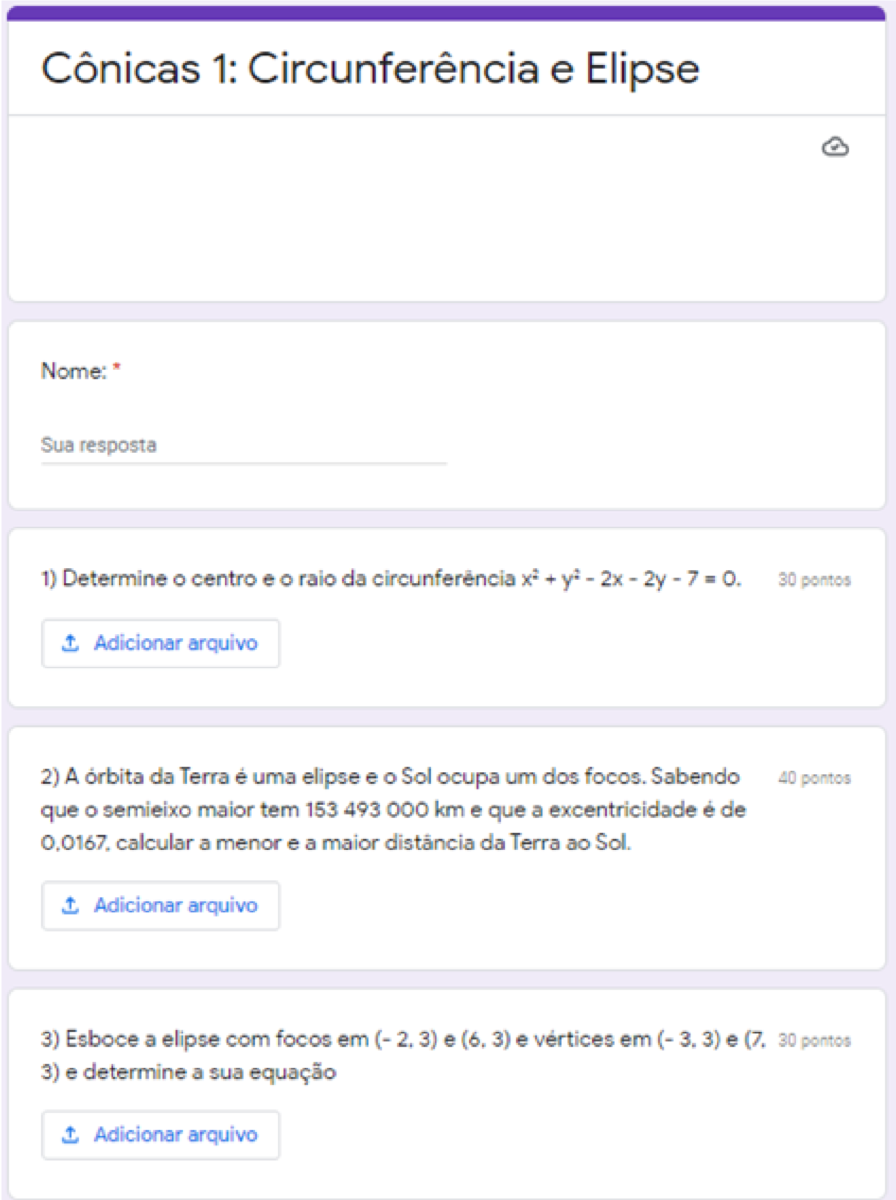
Dedução da equação da Parábola





APÊNDICE C – FORMULÁRIO DAS ATIVIDADES ASSÍNCRONAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Além do material teórico envido aos estudantes, foi anexado na sala virtual da turma de Geometria Analítica o formulário para atividade assíncrona. Assim, os alunos estudaram o material teórico e resolveram as situações propostas nas semanas 8 e 9. Na semana 8, foram abordadas as cônicas de forma geral, onde foi enfatizado o estudo da circunferência e elipse. Abaixo, apresentamos o formulário utilizado, contendo as situações 1, 2 e 3.



Cônicas 1: Circunferência e Elipse

Nome: *

Sua resposta

1) Determine o centro e o raio da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$. 30 pontos

Adicionar arquivo

2) A órbita da Terra é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos. Sabendo que o semieixo maior tem 153 493 000 km e que a excentricidade é de 0,0167, calcular a menor e a maior distância da Terra ao Sol. 40 pontos

Adicionar arquivo

3) Esboce a elipse com focos em (- 2, 3) e (6, 3) e vértices em (- 3, 3) e (7, 3) e determine a sua equação 30 pontos

Adicionar arquivo

O formulário para atividade assíncrona (com as situações 12, 13 e 14), foi enviado para todos os estudantes da turma de Geometria Analítica. As situações abordavam o estudo das curvas hipérbole e parábola.

Cônicas II

joelia.lima@

Nome

Sua resposta

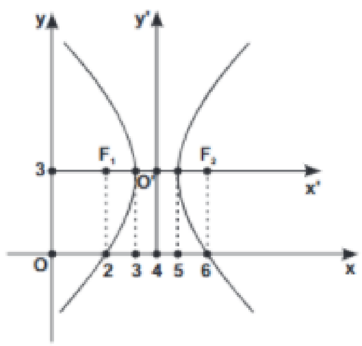
1) Determine Equação da hipérbole cuja excentricidade é raiz de 5 e cuja distância focal é quatro vezes raiz de 5. (O centro coincide com a origem e os focos estão sobre o eixo x). E esboce seu gráfico. 30 pontos

Adicionar arquivo

2) Determine a equação da parábola com vértice em (1, 3) e foco em (1, 2) e esboce o gráfico. 35 pontos

Adicionar arquivo

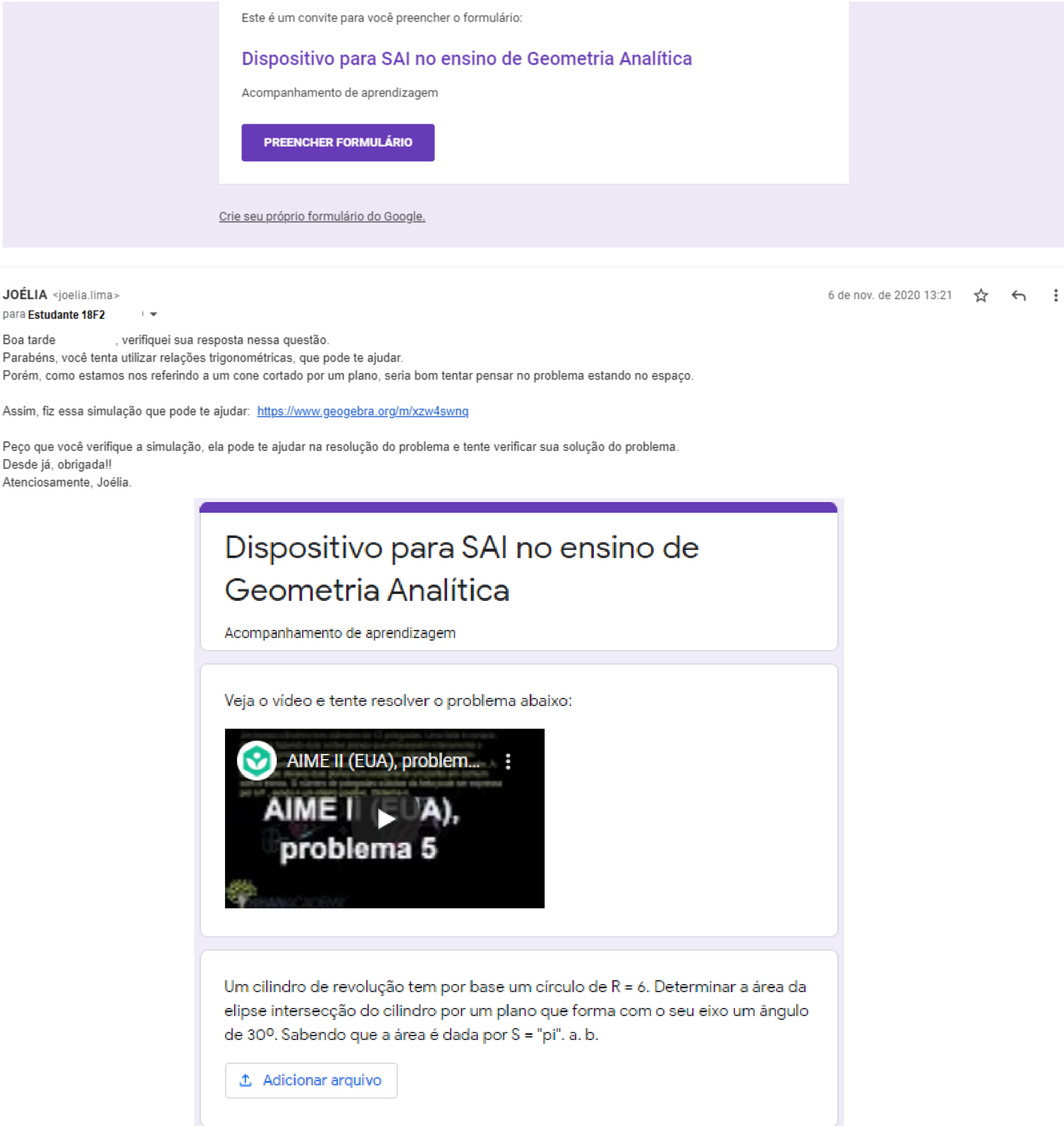
3) Determine a equação da hipérbole representada abaixo: 35 pontos



Adicionar arquivo

APÊNDICE D – FORMULÁRIO DAS SITUAÇÕES E RECURSOS ENVIADOS AOS PARTICIPANTES POR E-MAIL

Para os participantes da pesquisa, as situações na disciplina de Geometria Analítica eram analisadas e os dados inseridos no FrameAGAP. Os recursos e situações eram enviados em um formulário anexado ao *e-mail*. Neste *e-mail*, também dávamos aos participantes um *feedback* de seu acompanhamento, como mostra a imagem abaixo.


Este é um convite para você preencher o formulário:

Dispositivo para SAI no ensino de Geometria Analítica

Acompanhamento de aprendizagem

PREENCHER FORMULÁRIO

Crie seu próprio formulário do Google.

JOÉLIA <joelia.lima> 6 de nov. de 2020 13:21
para Estudante 18F2

Boa tarde , verifiquei sua resposta nessa questão.
Parabéns, você tenta utilizar relações trigonométricas, que pode te ajudar.
Porém, como estamos nos referindo a um cone cortado por um plano, seria bom tentar pensar no problema estando no espaço.

Assim, fiz essa simulação que pode te ajudar: https://www.geogebra.org/m/xzw4swnq

Peço que você verifique a simulação, ela pode te ajudar na resolução do problema e tente verificar sua solução do problema.
Desde já, obrigada!!
Atenciosamente, Joélia.

Dispositivo para SAI no ensino de Geometria Analítica

Acompanhamento de aprendizagem

Veja o vídeo e tente resolver o problema abaixo:

AIME II (EUA), problem...
AIME II (EUA), problema 5

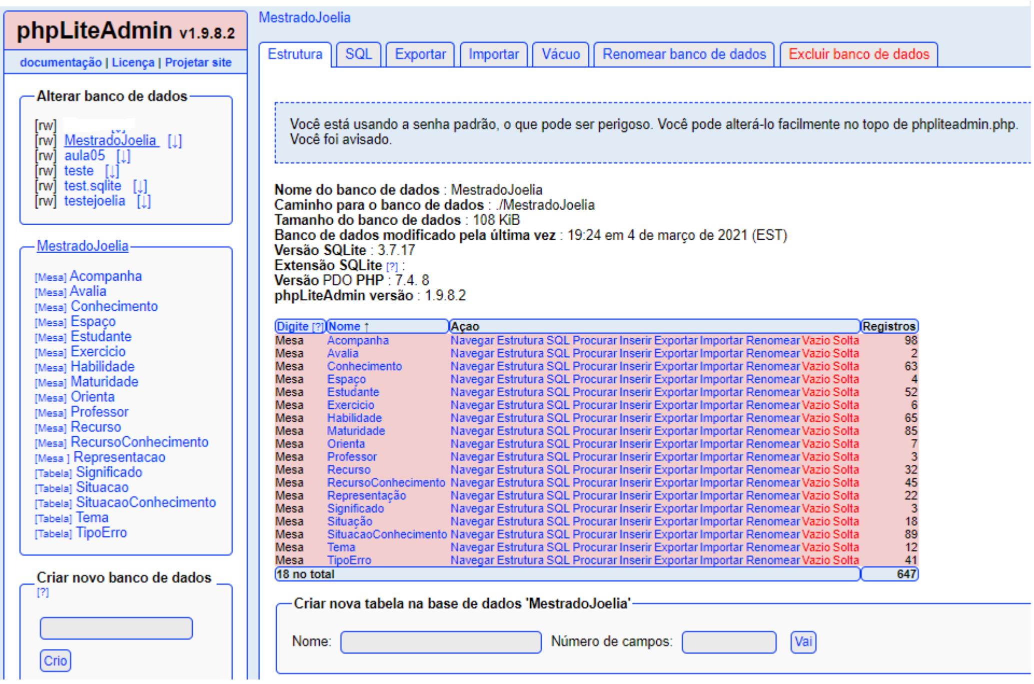
Um cilindro de revolução tem por base um círculo de R = 6. Determinar a área da elipse intersecção do cilindro por um plano que forma com o seu eixo um ângulo de 30º. Sabendo que a área é dada por S = "pi". a. b.

Adicionar arquivo

APÊNDICE E – BANCOS DE DADOS DO FRAMEAGAP

Para construção do FrameAGAP criamos 18 tabelas que possibilitaram fazer um acompanhamento personalizado de cada estudante por meio da análise dos dados inseridos nos bancos de dados do FrameAGAP. Abaixo, apresentamos as tabelas que o compõe.

Visão Geral do Banco de Dados



Tabelas Fornecedoras

Tabelas Consumidoras Primárias

Tipo de Erro

← T →	CodErro	CodHab	NivelErro	Descricao	Orientacao	CodRecurso
Edit Delete	501	5	1	Não identifica corretamente os elementos da elipse	NULL	NULL
Edit Delete	502	5	2	Faz c - a (medida do semieixo maior) - (medida do semieixo focal) igual a um número positivo. Sendo a > c	NULL	NULL
Edit Delete	503	5	3	Faz os elementos da elipse como sendo um número negativo. (ex. - c)	NULL	NULL
Edit Delete	801	8	1	não conhece a parábola como lugar geométrico.	Utilizar recursos que apresentem a definição de parábola como lugar geométrico.	31
Edit Delete	1101	11	1	Não identifica os elementos da parábola corretamente.	Rever quais são os elementos da parábola, suas propriedades, para que assim possa reconhecer os elementos em gráficos ou situações que tratem sobre essa cônica.	NULL
Edit Delete	1201	12	1	Reconhece a forma da equação transladada da parábola, em relação ao plano xy inclui as coordenadas do vértice na equação, mas não determina corretamente o parâmetro, o que deixa incorreta a equação.	É preciso investigar como se determina a medida p, que é o parâmetro da parábola, e assim incluí-lo na equação de modo que esta fique correta.	NULL
Edit Delete	1202	12	2	Faz a equação reduzida da parábola transladada em relação ao plano xy, como se fosse a equação reduzida parábola na origem.	Materiais que mostrem como representar a equação reduzida da parábola na origem e fora da origem, em relação ao eixo xoy, e em relação ao eixo x'y'.	NULL
Edit Delete	1301	13	1	Não identifica corretamente a concavidade da parábola, se é voltada para esquerda, direita, cima ou baixo.	NULL	31
Edit Delete	1801	18	1	Não identifica a possibilidade de utilizar a distância entre dois pontos na resolução de problemas de cônicas.	NULL	NULL
Edit Delete	1901	19	1	Não identificar a possibilidade de uso do cálculo da distância de um ponto a uma reta para resolver problemas de cônicas	NULL	NULL
Edit Delete	2001	20	1	Não consegue determinar a equação reduzida da parábola quando se tem apenas um um ponto da parábola e a sua reta diretriz.	NULL	NULL

Maturidade

← T →	CodMaturidade	CodHab	Descrição
Edit Delete	1	22	A partir da equação reduzida da circunferência.
Edit Delete	2	22	A partir da equação geral da circunferência.
Edit Delete	3	24	Tendo coordenadas em um dos eixos (x ou y) do plano.
Edit Delete	4	24	Tendo estes, coordenadas em um dos eixos paralelos a x ou y do plano.
Edit Delete	5	5	Quando não são dados na situação.
Edit Delete	6	35	Com centro fora da origem (0,0).
Edit Delete	7	32	Quando é necessário o uso de uma única equação dada na situação
Edit Delete	8	32	quando é necessário o de uma equação não dada na situação
Edit Delete	9	32	Quando é necessário o uso de mais de uma equação para resolver a situação.
Edit Delete	10	26	Não conhece um dos vértices como ponto de menor distância ao seu foco mais próximo.

Situação

← T →	CodSituacao	CodTema	Ligação	Fonte
Editar Excluir	1	8	https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdZ_8zpjshNx96i_is70eHIlu67dOI3jxKZTsFUmyitN3aLbQ/viewform	IEZZI, Fundamentos de Mate São Paulo, Atual. Ed. 1977-7
Editar Excluir	2	8	https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdZ_8zpjshNx96i_is70eHIlu67dOI3jxKZTsFUmyitN3aLbQ/viewform	VENTURI, Jacir J., 1949 -Cô Jacir J. Venturi - 6.ª ed. - Cur
Editar Excluir	3	8	https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdZ_8zpjshNx96i_is70eHIlu67dOI3jxKZTsFUmyitN3aLbQ/viewform	VENTURI, Jacir J., 1949 -Cô Jacir J. Venturi - 6.ª ed. - Cur 4.
Editar Excluir	4	8	https://docs.google.com/forms/d/1uEyihIJB54Y_iMDBHE7s4GqCwhGowyVc234xpu_ZLQM/edit	VENTURI, Jacir J., 1949 -Cô Jacir J. Venturi - 6.ª ed. - Cur Questões 9 e 10. Venturi, pá
Editar Excluir	5	8	https://docs.google.com/forms/d/1K1t5EKhNFGrLfZFasflZzGrxd1E9PrvHk23k_5R8Uu0/edit	VENTURI, Jacir J., 1949 -Cô Jacir J. Venturi - 6.ª ed. - Cur

Conhecimento

← T →	CodConhec	CodTema	CodHab	CodRep	CodEsp	CodSign
Editar Excluir	1	8	22	5	1	[illegible]
Editar Excluir	2	8	23	5	1	2
Editar Excluir	3	8	24	5	1	1
Editar Excluir	4	8	34	3	1	1
Editar Excluir	5	8	28	2	1	2
Editar Excluir	6	8	25	7	1	2
Editar Excluir	7	8	26	2	1	2
Editar Excluir	8	8	35	2	1	1
Editar Excluir	9	8	36	2	1	1

Orienta

← T →	CodIndicacao	CodProf	CodEstTurma	CodRecurso	Dados
Editar Excluir	1	3	7F2	26	30/10/2020
Editar Excluir	2	3	1F2	27	30/10/2020
Editar Excluir	3	3	1F2	28	30/10/2020
Editar Excluir	4	3	1M2	27	31/10/2020
Editar Excluir	5	3	1M2	29	31/10/2020
Editar Excluir	6	3	7M2	30	31/10/2020
Editar Excluir	7	3	18F2	30	31/10/2020

Tabelas Consumidoras Secundárias

Situação-Conhecimento

← T →	IdAvaliaSituacao	CodSituacao	CodConhec
Editar Excluir	1	1	1
Editar Excluir	2	2	2
Editar Excluir	3	3	3
Editar Excluir	5	2	5
Editar Excluir	6	2	6
Editar Excluir	7	3	4
Editar Excluir	8	3	8
Editar Excluir	9	3	9
Editar Excluir	10	3	10
Editar Excluir	11	3	11
Editar Excluir	12	3	12
Editar Excluir	13	3	13
Editar Excluir	14	3	14
Editar Excluir	15	1	15
Editar Excluir	16	4	9
Editar Excluir	17	4	15

Acompanhamento

← T →	CodAcompanha	CodProf	CodEstTurma	Dados	CodConhec	CodHab	CodSituacao	CodMaturidade	CodAvalia	CodErro
Editar Excluir	1	3	1M2	27/10/2020	1	22	1	2	0	ULO
Editar Excluir	2	3	1M2	27/10/2020	21	32	2	8	1	2701
Editar Excluir	3	3	1M2	27/10/2020	7	26	2	10	1	2601
Editar Excluir	4	3	1M2	27/10/2020	22	27	2	12	1	2701
Editar Excluir	5	3	1M2	27/10/2020	5	28	2	10	1	2601
Editar Excluir	6	3	1M2	27/10/2020	9	36	3	14	1	3601
Editar Excluir	7	3	1M2	27/10/2020	8	35	3	6	1	3503
Editar Excluir	8	3	1M2	27/10/2020	13	40	3	16	1	4001
Editar Excluir	9	3	1M2	27/10/2020	8	35	3	6	1	3503
Editar Excluir	10	3	1F2	27/10/2020	15	41	1	7	1	4101
Editar Excluir	11	3	1F2	27/10/2020	11	38	2	17	1	501
Editar Excluir	12	3	1F2	27/10/2020	14	5	2	18	1	501
Editar Excluir	13	3	1F2	27/10/2020	8	35	3	6	1	3503
Editar Excluir	14	3	7M2	27/10/2020	1	22	1	2	0	ULO
Editar Excluir	15	3	7M2	27/10/2020	7	26	2	18	1	502
Editar Excluir	16	3	7M2	27/10/2020	13	40	3	16	0	ULO
Editar Excluir	17	3	7F2	27/10/2020	1	22	1	2	0	ULO
Editar Excluir	18	3	7F2	27/10/2020	7	26	2	9	0	ULO
Editar Excluir	19	3	7F2	27/10/2020	8	35	3	6	1	3503
Editar Excluir	20	3	18F2	27/10/2020	1	22	1	2	0	ULO
Editar Excluir	21	3	18F2	27/10/2020	7	26	2	18	0	ULO

Recurso-Conhecimento

← T →	IdAvaliaRecurso	CodRecurso	CodConhec	CodHab	CodMaturidade	CodErro
Editar Excluir	31	31	37	13	73	1301
Editar Excluir	32	31	38	52	42	5201
Editar Excluir	33	31	39	46	24	4601
Editar Excluir	34	31	39	46	24	4602
Editar Excluir	35	31	40	48	29	4801
Editar Excluir	36	31	41	47	26	4701

Exercício

← T →	CodExercicio	CodProf	CodEstTurma	CodConhec	CodSituacao	Dados
Editar Excluir	1	3	7F2	16	5	30/10/2020
Editar Excluir	2	3	1F2	11	4	30/10/2020
Editar Excluir	3	3	18F2	24	6	31/10/2020
Editar Excluir	4	3	7M2	24	6	31/10/2020
Editar Excluir	5	3	1M2	11	4	30/10/2020
Editar Excluir	6	3	1M2	6	7	30/10/2020