UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Joicy Priscila de Araújo Cruz

Hipersuperfícies tipo-espaço máximas em variedades de Lorentz possuindo um campo de vetores tipo-luz paralelo

Recife

2021

Joicy Priscila de Araújo Cruz

Hipersuperfícies tipo-espaço máximas em variedades de Lorentz possuindo um campo de vetores tipo-luz paralelo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador : Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos

Recife

2021

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C957h Cruz, Joicy Priscila de Araújo
Hipersuperfícies tipo-espaço máximas em variedades de Lorentz possuindo um campo de vetores tipo-luz paralelo / Joicy Priscila de Araújo Cruz. – 2021.
81 f.

Orientador: Fábio Reis dos Santos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2021.
Inclui referências.

1. Geometria. 2. Vetores. I. Santos, Fábio Reis dos (orientador). II. Título.

516 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2021 - 136

JOICY PRISCILA DE ARAUJO CRUZ

HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO MÁXIMAS EM VARIEDADES DE LORENTZ POSSUINDO UM CAMPO DE VETORES TIPO-LUZ PARALELO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 20/07/2021

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velasquez (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

____

Prof. Dr. Marcio Henrique Batista da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

OBSERVAÇÃO

A defesa em epígrafe foi realizada integralmente, por videoconferência, envolvendo a Banca Examinadora e o discente, através de recursos de videoconferência, que possibilitaram realizar a discussão acadêmica sobre o objeto de estudo, com som e imagem. A defesa assim ocorreu, em virtude da suspensão das atividades acadêmicas presenciais, adotada pelo Consórcio Pernambuco Universitas e os Institutos Federais do Estado de Pernambuco, por período indeterminado (UPE, UFPE, UFRPE, IFPE, IFR Sertão, UNICAP e UNIVASF), considerando a pandemia do novo Coronavírus (COVID-19).

Aos meus pais e irmãos

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela vida e por sempre ter ao meu lado pessoas que não medem esforços para me ajudar.

Aos meus pais, Pedro e Neide, por todo incentivo e apoio em minhas escolhas e pelos conselhos que me foram dados. Aos meus irmãos, Eduardo e Patrícia, pelo carinho de sempre. A mãe que a vida me presenteou, Maria das Graças, por sempre acreditar que posso ir mais longe.

Aos colegas que fiz ao longo curso. Aos amigos, Élida e João P. que sempre me incetivaram e tiveram a paciência de me ouvir reclamando das dificuldades do curso, por cada riso e conversa.

Ao Prof. Dr. Fábio Reis por ter aceito me orientar, pela dedicação, disposição e principalmente pelo conhecimento que a mim foi transmitdo. Obrigada.

Ao Prof. Dr. Marco Antonio e ao Prof. Dr. Marcio Batista por ter aceitado fazer parte da banca examinadora.

A todos professores do Dmat-UFPE, fundamentais para essa jornada. A Coordenação da Pós-graduação em Matemática da UFPE e a Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante e, em particular, hipersuperfícies tipo-espaço máximas imersas em um espaço-tempo pp-wave satisfazendo a condição de convergência tipo-tempo (TCC). Primeiro faremos uma breve introdução ao espaço-tempo pp-wave e estabeleceremos a fórmula para o laplaciano de uma função suporte relacionado a hipesuperfície tipo-espaço neste espaço-tempo. Em seguida, mostraremos que toda hipersuperfície tipo-espaço máxima fechada (compacta sem bordo) é totalmente geodésica e em particular não há hipersuperfícies tipo-espaço fechada cuja curvatura média constante é diferente de zero. Além disso, exibiremos um exemplo de hipersuperfícies tipo-espaço máximas em espaços-tempo pp-wave. E assim, podemos apresentar resultados relacionados a curvatura gaussiana e parabolicidade que caracterizam superfícies máximas nessas variedades Lorentzianas e a partir desses resultados estabelecer sob qual hipótese as superfícies completas máximais são totalmente geodésicas. Finalmente, com base nos resuldados citados anteriormente mostraremos uma extensão para o clássico teorema de Calabi-Bernstein para superfícies máximas completas em espaço-tempo pp-wave 3-dimensional.

Palavras-chaves: hipersuperfície tipo-espaço; curvatura média constante; máximas; espaço-tempo pp-wave; teorema Calabi-Bernstein.

ABSTRACT

In this work we will study constant mean curvature spacelike hypersurfaces and in particular maximal spacelike hypersurfaces immersed in pp-wave spacetimes satisfying the timelike convergence condition (TCC). First we will make a brief introduction to pp-wave spacetime and establish the formula for the Laplacian of a support function related to space-like hypersurface in this spacetime. Then, we will show that every closed maximal hypersurface (compact without boundary) is totally geodesic and in particular the non-existence of compact spacelike hypersurfaces whose constant mean curvature is non-zero and also. Furthermore, we will show an example of maximal space-like hypersurfaces in pp-wave spacetimes. And so, we can present results related to Gaussian curvature and parabolicity that characterize maximum surfaces in these Lorentzian manifolds and from these results establish under which hypothesis the maximum complete surfaces are totally geodesic. Finally, based on the results mentioned above we will show an extension of the classical Calabi–Bernstein theorem for complete maxima surfaces in 3-dimensional pp-wave spacetime.

Keywords: spacelike hypersurfaces; constant mean curvature; maximal; pp-wave spacetime; Calabi-Bernstein theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Recentemente, o espaço-tempo pp-wave (plane-fronted waves with parallel rays) atraiu muita atenção devido à detecção experimental de ondas gravitacionais e por suas propriedades geométricas clássicas. Originalmente Brinkmann definiu o espaço-tempo pp-wave como qualquer espaço-tempo cujo tensor métrico pode ser descrito na forma, $ds^2 = H(u,x,y)du^2 + 2dudv + dx^2 + dy^2$, onde H é uma função suave (BRINKMANN, 1925). Hoje define-se o espaço-tempo pp-wave uma variedade Lorentziana $\overline{M}$ que admite um campo vetorial ξ tipo-luz paralelo globalmente definido, i.e. $\langle \xi, \xi \rangle = 0, \xi \neq 0$ tal que $\overline{\nabla}\xi = 0$. Esta família de espaços-tempos contém soluções exatas da equação de campo de Einstein que modela a radiação (eletromagnetica ou gravitacional) que se move na velocidade da luz.

No decorrer dos anos, o estudo das hipersuperfícies tipo-espaço imersas em espaço-tempo Lorentzianos vem despertanto imenso interesse físico e matemático. O termo tipo-espaço significa que a métrica induzida da métrica Lorentziana ambiente é uma métrica positiva definida. Do ponto de vista físico, esse interesse é justificado pelo tratamento de diversos problemas em relatividade. Como por exemplo, no eletromagnetismo, uma hipersuperfície tipo-espaço é um conjunto de dados iniciais que determina o fututo do campo eletromagnético que satisfaz as equações de Maxuell e analogamente, para as equações simples da matéria. Para mais detalhes sobre a relevância de hipersuperfícies com curvatura média constante na Relatividade Geral veja (MARSDEN J; TIPLER F, 1980).

Do ponto de vista matemático, o interesse por tais hipersuperfícies tipo-espaço é motivado por suas boas propriedades tipo-Bernstein. De fato, hipersuperfícies máximas em um espaço-tempo são pontos críticos do funcional área. Quando o ambiente é uma varieade Lorentziana, uma hipersuperfície é dita máxima se possui curvatura média identicamente nula. Foi provado por Bernstein (BERNSTEIN S, 1915) que os únicos gráficos inteiros e mínimos no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ são os planos. Este resultado pode ser extendido naturalmente para o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$ e é chamado teorema de Calabi-Bernstein :

As únicas superfícies tipo-espaço completas máximais no espaço espaço de Lorentz-

Minkowski $\mathbb{L}^3$ *são os planos tipo-espaço.*

Inicialmente, Calabi (CALABI, 1970) provou tal resultado para $n \leq 4$ e posteriormente por Cheng e Yau (CHENG S; YAU S, 1976) foi extentido para qualquer n, mostraram que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas e maximas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ são os hiperplanos tipo-espaço. Lembremos que o teorema de Bernstein para gráficos mínimos no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ é válido para $n \leq 7$ (SCHOEN; SIMON; YAU S, 1975). No entanto, Bombieri, Giorgi e Giusti (BOMBIERE; GIORGI; GIUSTI, 1969) mostraram que o teorema não é válido para $n \geq 8$.

O teorema de Calabi-Bernstein teve um papel de grande importância no estudo e crescimento da teoria global de superfícies máximais no espaço de Lorentz-Minkowski. Desde sua demosntração original diversos autores abordaram o resutado de diferentes perspectiva, proporcionando diversas extensões e novas provas para o teorema. Como podemos ver em (ALíAS L; PALMER, 2001), Alías e Palmer mostram uma nova abordagem do problema, baseado na obtenção de uma estimativa local para a curvartura total em discos geodésicos de superfícies máximas em $\mathbb{L}^3$. Outras provas para o teorema clássico de Calabi-Bernstein pode ser estudados em (ALEDO J; ROMERO; RUBIO R, 2015; ROMERO, 1996; ROMERO; RUBIO R, 2010). Assim como, outras extensões dos resultados clássicos foram provadas (ALBUJER; ALíAS L, 2011; CABALLERO; ROMERO; RUBIO R, 2010; ESTUDILLO F; ROMERO, 1992).

Agora, daremos uma breve descrição dos capítulos que compõe está dissertação. Nos capítulos 1 e 2 apresentaremos a notação que será usada ao longo do texto, assim como os conceitos necessários para a abordagem do capítulo seguinte.

No capítulo 3, trabalharemos com hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante, em particular máximas, em espaço-tempo pp-wave satisfazendo a condição de convergência tipo-tempo (TCC). Na Seção 3.1, faremos uma breve discussão sobre os espaços tempo pp-wave e apresentaremos a fórmula para o laplaciano de uma função suporte da hipersuperfície tipo-espaço em tal espaço-tempo.

Proposição 1.0.1. *Sejam* $\overline{M}^{n+1}$ *um espaço-tempo pp-wave e* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço imersa isometricamente em* $\overline{M}^{n+1}$*. Então*

$$\Delta\eta = n\langle \nabla H, T\rangle + \eta\left(\overline{Ric}(N,N) + |A|^2\right), \tag{1.1}$$

onde $|\cdot|$ *denota a norma de Hilbert-Schimidt de* A *definida por* $|A|^2 = tr(A^2)$*.*

Em seguida, como uma aplicação da Proposição acima provaremos que nestes espaço-tempo toda hipersuperfície máxima fechada deve ser totalmente geodésica.

Teorema 1.0.2. *Sejam* $\overline{M}^{n+1}$ *um espaço-tempo pp-wave satisfazendo a* TCC *e* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço fechada. Se* M^n *possui curvatura média constante, então ela deve ser totalmente geodésica. Como uma consequência direta, não existe hipersuperfície tipo-espaço fechada em* $\overline{M}^{n+1}$ *cuja curvatura média é diferente de zero.*

A Seção 3.2 será direcionada aos espaços-tempo pp-wave 3-dimensionais. Inicialmente, veremos um exemplo que comprova a existência de hipersuperfícies máximas em tais espaços-tempo. Assim, poderemos obter resultados relacionados a curvatura gaussiana e parabolicidade que caracterizam as superfícies máximas nessas variedades Lorentzianas e determinar sobre qual hipótese as superfícies completas máximas serão totalmente geodésicas.

Por fim, com base nos resultados citados acima, generalizaremos o clássico teorema de Calabi-Bernstein para superfícies máximas completas em espaço-tempo pp-wave 3-dimensionais.

Teorema 1.0.3. *Sejam* $\overline{M}^3$ *um espaço-tempo pp-wave satisfazendo a* TCC *e* $x : S^2 \to \overline{M}^3$ *uma superfície completa e maximal. Então* S^2 *é totalmente geodésica.*

Como consequência deste teorema podemos obter o clássico teorema de Calabi-Bernstein.

Este trabalho teve como base o artigo: On maximal hypersurfaces in Lorentz manifolds admitting a parallel lightlike vector field, publicado em 2016, J.A.S Pelegrín, A.Romero e R.M.Rubio (PELEGRíN J; ROMERO; RUBIO R, 2016).

2 PRELIMINARES

2.1 ELEMENTOS DE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Esta seção objetiva estabelecer as notações que serão utilizadas nas demais seções destas notas. Para maiores detalhes indicamos (O'NEILL, 1983; CARMO M, 2008).

Definição 2.1.1. *Dizemos que um conjunto M é uma variedade diferenciável (Hausdorff e com base enumerável) de dimensão n, se existir uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, tais que:*

(a) $M = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha(U_\alpha)$;

(b) Para todo par $\alpha, \beta \in \Lambda$, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$ e $x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações

$$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta}) \to x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \quad e \quad x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \to x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$$

são diferenciáveis.

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado parametrização de M em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é uma vizinhança coordenada em p . A família $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é chamada de atlas de M. Um atlas $\mathcal{A}$ de M dá origem a um único atlas maximal $\tilde{\mathcal{A}}$, dado por

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{x : U \to M\,;\, x^{-1} \circ x_\alpha \text{ e } x_\alpha^{-1} \circ x \quad \text{são suaves para todo } \alpha \in \Lambda\},$$

este atlas maximal é chamado de estrutura diferenciável de M.
Indicaremos que M tem dimensão n por M^n. Note que uma n-variedade possui uma estrutura topológica natural. Para isso definimos

$$A \subset M \text{ é aberto } \iff x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha)) \text{ é aberto no } \mathbb{R}^n \text{ para todo } \alpha \in \Lambda.$$

Exemplo 2.1.2. *Um mesmo conjunto M pode admitir mais de uma estrutura diferenciável. Seja $M = \mathbb{R}$. Veja que M possui um atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, I)\}$ que possui a identidade $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como a única parametrização. Este atlas gera uma estrutura diferenciável denotada por $\tilde{\mathcal{A}}$. Por outro lado, M pode ser munido de um outro atlas $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, x(t) = t^3)\}$ composto também por uma única parametrização e que gera uma* *outra estrutura diferenciável* $\tilde{\mathcal{A}}_1$ *distinta de* $\tilde{\mathcal{A}}$*: de fato,* $x^{-1} \circ I = \sqrt[3]{t}$ *não é diferenciável em* 0 *e portanto* $x \notin \tilde{\mathcal{A}}$*.*

Definição 2.1.3. *Sejam* M^n *e* N^m *variedades diferenciáveis. Uma aplicação* $F : M \to N$ *é diferenciável em* $p \in M$ *se dada uma parametrização* $y : V \subset \mathbb{R}^m \to N$ *em* $F(p)$*, existe uma parametrização* $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *em* p *tal que* $F(x(U)) \subset y(V)$ *e a aplicação*

$$y^{-1} \circ F \circ x : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$*.*

Dizemos que F é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Usando a condição (b) da Definição 2.1.1, podemos provar que tal definição independe das parametrizações escolhidas. A função $y^{-1} \circ F \circ x$ é chamada a expressão local de F nas parametrizações x e y.

Definição 2.1.4. *Uma aplicação diferenciável* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *de um intervalo aberto* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *de* $\mathbb{R}$ *sobre uma variedade diferenciável* M*, é uma curva diferenciável em* M*. Se* $\alpha(0) = p \in M$*, o vetor tangente à curva* α *em* $t = 0$ *é o funcional* $\alpha'(0) : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$\alpha'(0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0},$$

onde $\mathcal{C}^\infty(M)$ *é o conjunto das funções diferenciáveis em* M*.*

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ denotado por T_pM e chamado de espaço tangente de M em p.

A partir da ideia de espaço tangente é possível estender à variedades diferenciáveis a noção de derivada em uma aplicação diferencial.

Proposição 2.1.5. *Seja* $F : M^n \to N^m$ *uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis* M *e* N*. Para cada* $p \in M$ *e cada* $v \in T_pM$*, escolha uma curva diferenciável* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *tal que* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha'(0) = v$*. A aplicação* $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ *dada por* $dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(0)$ *é uma aplicação linear que não depende da escolha de* α*. Esta aplicação é a diferencial de* F *em* p*.*

Definição 2.1.6. *Um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis M^n e N^n é uma aplicação $F : M^n \to N^n$ diferenciável com inversa diferenciável.F é dito um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem abertos U de p em M e V de $F(p)$ em n tais que $F : U \to V$ é um difeomorfismo.*

No Exemplo 2.1.2, as variedades de dimensão 1 $\{(\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{A}})\}$ e $\{(\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{A}}_1)\}$, são difeomorfas via $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(t) = t^3$.

A demonstração do teorema seguinte é uma aplicação imediata do Teorema da Função Inversa no $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.7. (da Aplicação Inversa) *Se $F : M^n \to N^n$ é uma aplicação diferenciável entre variedades e se $p \in M^n$ é tal que $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é um isomorfismo, então existe um aberto $U \subset M$ que contém p tal que $F\Big|_U$ é um difeomorfismo.*

Definição 2.1.8. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente com $m > n$. Dizemos que a aplicação $F : M \to N$ é uma*

(a) imersão se a aplicação diferencial $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$;

(b) a imersão F é dita um mergulho se $F : M \to F(M)$ é um homeomorfismo (com $F(M)$ tendo a topologia induzida por N).

(c) Se F é um mergulho, $F(M)$ é chamada de subvariedade mergulhada.

(d) Se F é uma imersão, $F(M)$ é chamada de subvariedade imersa.

Exemplo 2.1.9. *Uma parametrização $x : U \to M^2$ de uma superfície regular $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é por definição uma imersão.*

Como aplicação do Teorema da Aplicação Inversa 2.1.7, obtem-se

Proposição 2.1.10. *Seja $F : M^n \to N^m$ é uma aplicação diferenciável entre variedades de dimensão $n \geq m$ e q é um valor regular de F. Então o conjunto $F^{-1}(q) \subset M$ é uma subvariedade diferenciável de dimensão $n - m$.*

O próximo resultado mostra que localmente uma imersão pode ser vista como um mergulho.

Proposição 2.1.11. *Seja* $F : M^n \to N^m$*,* $m \geq n$*, uma imersão de uma variedade diferenciável* M^n *na variedade diferenciável* N^m*. Então para cada ponto* $p \in M$*, existe uma vizinhança* $V \subset M$ *de* p *tal que a restrição* $F\big|_V : V \to N$ *é um mergulho.*

Definição 2.1.12. *Um campo de vetores* X *em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência que a cada ponto* $p \in M$ *associa um vetor* $X(p) \in T_pM$*. Em termos de aplicações,* X *é uma aplicação de* M *no fibrado tangente* TM*. O campo é diferenciável se a aplicação* $X : M \to TM$ *é diferenciável.*

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *é possível escrever*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\partial_i$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ *é uma função em* U *e* $\{\partial_i\}$ *é a base associada a* x*,* $i = 1, \ldots, n$*.*

A aplicação X é dita um campo de vetores em M e denotaremos $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Definição 2.1.13. *Dizemos que uma variedade diferenciável* M *é orientável se admite uma estrutura diferenciável* $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *tal que:*

(a) Para todo par $\alpha, \beta \in \Lambda$*, com* $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ *a diferencial da mudança de coordenadas* $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ *tem determinante positivo.*

Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição (a) é uma orientação para M. Duas estruturas diferenciáveis satisfazendo a condição (a) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a condição (a).

Exemplo 2.1.14. *(a) Toda variedade cujo atlas possui uma única parametrização é orientável, pois o atlas consistindo desta única parametrização é trivialmente coerente (isto é,* $det(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha) > 0$*).*

(b) Variedades que podem ser cobertas por duas parametrizações cuja interserção é um conjunto conexo também são orientáveis. Se na interseção o determinante da derivada da mudança de coordenadas é negativo, basta trocar a ordem das variáveis em uma das parametrizações, para mudar o sinal do determinante e assim obter um atlas.

(c) A esfera $\mathbb{S}^n$ pode ser coberta por duas projeções estereográficas que se interceptam ao longo de um conjunto conexo (a interseção é a esfera menos os pólos).

Uma superfície que não satifaz o item (a) da Definição 2.1.13 é dita não-orientável. Os próximos resultados são devidos a colchetes de Lie.

Definição 2.1.15. *Sejam X e Y campos de vetores em $\mathfrak{X}(M)$. Definimos o colchete de Lie dos campos X e Y, denotado por $[X,Y]$ como*

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

para toda $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$.

Proposição 2.1.16. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M e sejam*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i \quad e \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j$$

as expressões de X e Y associadas a um sistema de coordenadas locais $x : U \to M$. Então existe um único campo de vetores $[X,Y]$, dado pela Definição 2.1.15, cuja expressão em coordenadas locais é:

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_i \partial_i(b_j) - b_i \partial_i(a_j)\right) \partial_j.$$

Segue então que:

Proposição 2.1.17. *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$, então:*

(a) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] \quad e \quad [X, cZ + dW] = c[X,Z] + d[X,W]$

(b) $[X,Y] = -[Y,X]$

(c) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ *(Identidade de Jacobi)*

(d) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$

2.2 FORMAS BILINEARES SIMÉTRICAS

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma forma bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma aplicação que satisfaz:

1. $b(au, v) = ab(u, v) = b(u, av)$;

2. $b(u + w, v) = b(u, v) + b(w, v)$;

3. $b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w)$,

para todo $u, v, w \in V$.

A forma b é dita *simétrica* se $b(u, v) = b(v, u)$, para todo $u, v \in V$.

Definição 2.2.1. *Dizemos que a forma bilinear b é:*

1. *Positiva definida se para todo $v \in V$ com $v \neq 0$ implicar $b(v, v) > 0$;*

2. *Negativa definida se para todo $v \in V$ com $v \neq 0$ implicar $b(v, v) < 0$;*

3. *Não-degenerada se $b(v, w) = 0$ para qualquer $w \in V$ implicar $v = 0$.*

O caso em que b é semi-definida é análogo trocando apenas a desigualdade estrita. Se b é uma forma bilinear simétrica em V então para qualquer subespaço $W \subset V$, a restrição $b\Big|_{W \times W}$, denotada por $b\Big|_{W}$ é ainda simétrica e bilinear.

Definição 2.2.2. *O índice ν de uma forma bilinear simétrica b em V é o maior inteiro que denota a dimensão do subespaço W de V tal que $b\Big|_{W}$ é negativa definida.*

Assim $0 \leq \nu \leq dim V$, e $\nu = 0$ se, e somente se, b é positivo definido. A função $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v, v)$ é chamada a *forma quadrática associada* de b. Em alguns casos é mais conveniente trabalhar com a forma quadrática do que com a própria b, e não há perda de generalidade pois b pode ser recuperada pela identidade de polarização

$$b(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base para V, a matriz $(b_{ij})_{n \times n} = b(e_i, e_j)$ é chamada matriz de b relativa a base $e_1, \ldots, e_n$. Uma vez que b é simétrica, esta matriz é simétrica.

Lema 2.2.3. *Uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se, a matriz relativa a uma base (e portanto a todas) é invertível.*

Demonstração. Seja $e_1, \dots, e_n$ uma base para V. Se $u \in V$, então $b(u,v) = 0$ para todo $v \in V$ se, e somente se, $b(u, e_i) = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Uma vez que (b_{ij}) é simétrica,

$$b(u, e_i) = b\left(\sum_j u_j e_j, e_i\right) = \sum_j u_j b(e_j, e_i) = \sum_j b_{ij} u_j.$$

Assim b é degenerada se, e somente se, existem números não todos nulos $u_1, \dots, u_n$ tais que $\sum_j b_{ij} u_j = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Mas isso é equivalente a dependência linear das colunas da matriz (b_{ij}), isto é, (b_{ij}) ser singular. ■

Definição 2.2.4. *Um produto escalar g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre V*

Exemplo 2.2.5.

1. *Um produto interno é um produto escalar positivo definido. Quando $V = \mathbb{R}^n$, temos o produto interno canônico definido por*

$$u \cdot v = \sum_i u_i v_i.$$

   Muitas propriedades do produto interno valem para produtos escalares, porém alguns fenômenos novos surgem quando g é indeterminado, isto é, $g(v,v) = 0$, mas $v \neq 0$.

2. *Observemos que mudando um sinal do produto escalar usal do $\mathbb{R}^2$ conseguimos um exemplo de escalar indefinido.Defina $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por*

$$g(u,v) = u_1 v_1 - u_2 v_2.$$

   Observe que g é simétrica e bilinear. Considerando a base $\{(1,0),(0,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, que g é não degenerada. Assim, g é um produto escalar indefinido e a sua forma quadrática associada é dada por $q(v) = u_1^2 - u_2^2$.

Definição 2.2.6. *Seja V um espaço vetorial com produto escalar e seja W um subespaço de V. O complemento ortogonal de W é o subespaço $W^\perp$ de todos os vetores em V que são ortogonais a todo vetor em W, ou seja,*

$$W^\perp = \{v \in V\,;\, v \perp W\}.$$

Lema 2.2.7. *Se W é um subespaço de um espaço com produto escalar V, então*

1. *$dim\, W + dim\, W^\perp = n = dim\, V$;*

2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

3. *Um subespaço* W *de* V *é não degenerado se, e somente se,* $V = W \oplus W^{\perp}$.

Demonstração. 1. Dado $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ base de W podemos extender para uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ de V. Temos que , $v \in W^{\perp}$ se, e somente se, $g(v, e_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k$. Em termos de coordenadas temos que

$$g(v, e_i) = g\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j,\ e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j\ g(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j = 0 \quad (1 \leq i \leq k).$$

Temos k equações lineares e n incógnitas, pelo Lema 2.2.3, g_{ij} é invertível e, portanto, as linhas no sistema linear acima são linearmente independentes e a matriz tem posto k. Assim o espaço das soluções tem dimensão $n - k$. Por construção essas soluções de n-uplas $(v_1, ..., v_n)$ fornece os vetores $v = \sum v_j e_j$ de $W^{\perp}$

2. Seja $w \in W$. Para todo $v \in W^{\perp}$ $g(w, v) = 0$, então $w \in (W^{\perp})^{\perp}$. Portanto, $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$. Da teoria de Álgebra Linear segue que

$$\begin{aligned} dim\,(W^{\perp})^{\perp} &= dim\,V - dim\,W^{\perp} \\ &= dim\,V - (dim\,V - dim\,W) \\ &= dim\,W. \end{aligned}$$

Logo, $(W^{\perp})^{\perp} = W$

3. Observemos que

$$dim\,(W + W^{\perp}) + dim\,(W \cap W^{\perp}) = dim\,W + dim\,W^{\perp}.$$

Pelo item (1), $dim\,W + dim\,W^{\perp} = dim\,V = n$. Consequentemente, $W + W^{\perp} = V$ se, e somente se, $W \cap W^{\perp} = 0$. Portanto, qualquer uma dessas opções vale a $V = W \oplus W^{\perp}$. Mas $W \cap W^{\perp} = \{w \in W; w \perp W\} = 0$ então W é não-degenerado.

■

Um subespaço W de V é dito não-degenerado, se $g\big|_W$ for não-degenerado. Quando V é um espaço vetorial munido de produto interno, qualquer subespaço W é também munido de produto interno, portanto não-degenerado.

Nós definimos a norma do vetor $v \in V$ por $|v| = \sqrt{|g(v, v)|}$. Um vetor v é chamado vetor unitário se $|v| = 1$, i.e., se $g(v, v) = \pm 1$.

Lema 2.2.8. *Todo espaço vetorial munido de um produto escalar $V \neq \{0\}$ possui uma base ortonormal.*

Demonstração. Vamos provar por indução.

Seja $dim\, V = 1$. Tomando $v \in V$, v é uma base para V e $g(v, v) < 0$ *ou* $g(v, v) > 0$. Segue que $v_1 = \frac{v}{|v|}$ é um vetor unitário e $g(v, v) = -1$ *ou* $g(v, v) = 1$ portanto, v_1 é base ortonormal de V

Supondo válido para $n - 1$, vamos provar para n Como g é não degenerada, existe um vetor w_1 tal que $g(w_1, w_1) \neq 0$.Seja $W = span\{w_1\}$. Como $V = W \oplus W^{\perp}$, $dim\, W^{\perp} = n - 1$, sendo $W^{\perp}$ subespaço vetorial existe base $\{w_2, ..., w_n\}$ de $W^{\perp}$ tal que $g(w_i, w_j) = 0$ se $i \neq j$. Temos também que $g(w_i, w_i) = 0$ se $i > 1$, onde $w_i \in W^{\perp}$. Assim $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ é uma base ortogonal de $V = W \oplus W^{\perp}$. Vamos ortonormalizar essa base.

Se $g(w_i, w_i) > 0$, tome $v_i = \frac{w_i}{|w_i|}$ e $g(v_i, v_i) = 1$, analogamente se $g(w_i, w_i) < 0$ tomamos $v_i = \frac{v_i}{|v_i|}$ e $g(v_i, v_i) = -1$. Portanto, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal de V. ■

Para uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de um espaço vetorial V munido de um produto escalar, temos

$$g(e_i, e_j) = \varepsilon_j \delta_{ij}$$

onde, $\varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1$ e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se i} = j \\ 0, & \text{se i} \neq j \end{cases}.$$

Sempre que for conveniente, devemos ordenar os vetores em uma base ortonormal para que os sinais negativos, se houver, vêm primeiro na chamada assinatura $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

Lema 2.2.9. *Seja $e_1 \dots, e_n$ uma base ortonormal de V, com $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$. Então toda $v \in V$ é escrito de maneira única como*

$$v = \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

Demonstração. É suficiente mostrar que

$$\left(v - \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i) e_i\right) \perp e_j,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

De fato, sendo e_j um elemento qualquer de V, temos

$$\begin{aligned} g\left(v - \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i)e_i, e_j\right) &= g(v, e_j) - \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i) g(e_i, e_j) \\ &= g(v, e_j) - g(v, \sum_i \varepsilon_i g(e_i, e_j)e_i) \\ &= g(v, e_j) - g(v, e_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como e_j é arbitrário e a métrica é não degenerada, segue que

$$v = \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i)e_i.$$

■

Seja π de V a projeção ortogonal em um espaço não degenerado W. Como uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_k\}$ de W pode ser extendida para uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de V, então

$$\pi(v) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j g(v, e_j)e_j$$

Lema 2.2.10. *Para qualquer base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V o número de sinais negativos na assinatura $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ é o índice ν de V.*

Demonstração. Seja exatamente os m primeiros ε_i negativos. No caso em que g é definida temos $m = \nu = 0$ ou $m = \nu = n$ e cocluí-se a demonstração.

Então, suponha que $0 < m < n$. Segue que g é negativo definido em $S = span\{e_1, ..., e_m\}$ e então $m \leq \nu$. Para mostrar o caso contrário, seja W um subespaço tal que $g\big|_W$ é negativo definido e definindo $\pi : W \to S$ por,

$$\pi(w) = \ -\sum_{i=1}^{m} g(w, e_i)e_i$$

Temos que π é linear e mostraremos que π é injetiva. Assim, seguirá que $dim\, W \leq dim\, S$ e como W é arbitrário $v \leq dim\, S = m$. Se $\pi(w) = 0$, então

$$w = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(w, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(w, e_i)e_i + \sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i g(w, e_i)e_i = \sum_{i=m+1}^{n} g(w, e_i)e_i$$

Como $w \in W$, temos

$$\begin{aligned} 0 \geq g(w,w) &= g\left(\sum_{i=m+1}^{n} g(w,e_i)e_i, \sum_{k=m+1}^{n} g(w,e_k)e_k\right) \\ &= \sum_{i,k=m+1}^{n} g(w,e_i)g(w,e_k)g(e_i,e_k) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} g(w,e_i)^2. \end{aligned}$$

Assim, $g(w,e_i)^2 = 0$ para todo $i > m$, como g é não-generada $w = 0$. ■

2.3 VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

No que segue, representaremos por $\mathfrak{X}^*(M)$ o conjunto das 1-formas diferenciáveis sobre M.

Definição 2.3.1. *Seja M uma variedade. Um campo tensorial do tipo (r,s) em M é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinear $T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{C}^\infty(M)$. Indicaremos por $\mathfrak{T}^r_s(M)$ o conjunto de todos os (r,s) campos tensoriais em M.*

Exemplo 2.3.2. *Se $T : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ é $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinear, defina o campo tensorial*

$$\overline{T} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

por

$$\overline{T}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(T(X_1, \ldots, X_s)).$$

$\overline{T}$ é $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear, e consequentemente, um campo tensorial do tipo $(1,s)$. Sendo assim, iremos considerar o próprio T como campo tensorial do tipo $(1,s)$.

Definição 2.3.3. *Um tensor métrico g em uma variedade diferenciável M é um tensor do tipo $(0,2)$ simétrico, não degenerado em M de índice constante. Em outras palavras, $g \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ leva suavemente cada ponto $p \in M$ em um produto escalar g_p em T_pM, e o índice de g_p é o mesmo para todo $p \in T_pM$. Ou seja,*

$$\begin{array}{rcccccl} g & : & M & \longrightarrow & \mathfrak{T}^0_2(M) & & \\ & & p & \longmapsto & g_p & : & T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & & & & & \quad (u,v) \quad \longmapsto \; g_p(u,v) \end{array}$$

é uma aplicação suave tal que,

1. $g_p(u, v) = g_p(v, u)$, *para todos* $u, v \in T_pM$

2. $g_p(u, v) = 0$, *para todo* $v \in T_pM$, *implica* $u = 0$;

3. $ind(T_pM) = ind(T_qM)$, *para todos* $p, q \in M$ *com* $p \neq q$.

Definição 2.3.4. *Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável* M *munida com um tensor métrico* g.

O valor comum ν do índice de g_p em uma variedade semi-Riemanniana M é chamado *índice de M.* Note que $0 \leq \nu \leq n = dim\,(M)$. Se $\nu = 0$, então M é uma variedade Riemanniana. Neste caso, cada g_p é um produto interno em T_pM.

Quando $\nu = 1$ e $n \geq 2$, então M é dita uma *variedade de Lorentz.*

Notação 2.3.5. *Denotemos por* $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ *o tensor métrico. Assim* $g(u, v) = \langle u, v \rangle$, *para todo* $u, v \in T_pM$ *e* $g(U, V) = \langle U, V \rangle$, *para todo* $U, V \in \mathfrak{X}(M)$.

Para um sistema de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ em $\mathfrak{U} \subset M$, as componentes de g em $\mathfrak{U}$ são

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n.$$

Assim, para os campos de verores $V = \sum_i V^i \partial_i$ e $U = \sum_j U^j \partial_j$, podemos escrever g como

$$g(U, V) = \langle U, V \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} U^i V^j.$$

Como g é não degenerada temos que em cada $p \in M$ a matriz $(g_{ij}(p))_{n \times n}$ é invertível e a sua inversa é denotada por $(g^{ij}(p))_{n \times n}$. A fórmula usual para a inversa de uma matriz nos garante que as funções g_{ij} são suaves em U. Além disso, como g é simétrica, então $g_{ij} = g_{ji}$ e consequentemente $g^{ij} = g^{ji}$, para quaisquer $i = 1, \ldots, n$. Finalmente em $\mathfrak{U}$ o tensor métrico g pode ser escrito como

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j. \tag{2.1}$$

Assim, se $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$g(U, V) = \sum_{ij} g_{ij} (dx^i \otimes dx^j)(U, V) = \sum_{ij} g_{ij} dx^i(U) \cdot dx^j(V) = \sum_{ij} g_{ij} U^i \cdot V^j.$$

Exemplo 2.3.6. *Seja $M = \mathbb{R}^n$, e para cada $p \in M$ temos que T_pM é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Assim se $(x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas usuais do $\mathbb{R}^n$, então*

$$\langle u_p, v_p \rangle = \sum_i u^i v^i,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$, onde $u_p = \sum_i u^i \partial_i$ e $v_p = \sum_j v^j \partial_j$. Desta maneira, $\mathbb{R}^n$ munido com esta métrica nos dá uma variedade Riemanniana chamada espaço Euclidiano $n-$dimensional.

Exemplo 2.3.7. *Seja ν um inteiro tal que $0 \leq \nu \leq n$. Então $\mathbb{R}^n$ munido com o tensor métrico*

$$\langle u_p, v_p \rangle_p = -\sum_{i=1}^{\nu} u^i v^i + \sum_{j=\nu+1}^{n} u^j v^j,$$

de índice ν nos dá uma variedade semi-Riemanniana $\mathbb{R}^n_\nu$, chamado espaço semi-Euclidiano, de índice ν e dimensão n. Observe que quando $\nu = 0$, $\mathbb{R}^n_\nu$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, e para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ é chamado espaço de Lorentz-Minkowski n-dimensional, frequentemente denotado por $\mathbb{L}^n$.

Fixando a notação

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, \text{se} & 1 \leq i \leq \nu; \\ +1, \text{se} & \nu + 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

então o tensor métrico de $\mathbb{R}^n_\nu$ pode ser escrito como

$$g = \sum_i \epsilon_i dx^i \otimes dx^i.$$

Definição 2.3.8. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana com tensor métrico $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que $v \in T_pM$ é*

1. *tipo-espaço se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$;*

2. *tipo-tempo se $\langle v, v \rangle < 0$;*

3. *nulo se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.*

O conjunto

$$\mathcal{C}_p = \{v \in T_pM \,;\, \langle v, v \rangle = 0,\, v \neq 0\}$$

de todos os vetores nulos de T_pM é chamado cone nulo em $p \in M$. Quando M é uma variedade de Lorentz, os vetores nulos são chamados de *tipo-luz*.

Para cada $p \in M$, seja

$$\begin{array}{ccccccc} q & : & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & & v & \longmapsto & q(v) & = & \langle v, v\rangle, \end{array}$$

a forma quadrática associada ao produto escalar $\langle\ ,\ \rangle$. Temos que q determina $\langle , \rangle$. Observemos que

$$q(fV) = \langle fV, fV\rangle = f^2\langle V, V\rangle = f^2 q(V),$$

para qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ e toda $f \in C^\infty(M)$. Assim, temos que q não é $C^\infty(M)$-linear e portanto não é um campo tensorial.

2.3.1 Conexão de Levi-Civita e geodésicas

Seja M uma variedade semi-Riemanniana e sejam V, W dois campos de vetores em M. Queremos calcular a taxa de variação de W na direção de V_p, para cada ponto $p \in M$. No espaço Euclidiano temos naturalmente como a derivada de um campo em relação a outro. Para o nosso contexto, vamos introduzir o conceito de conexão, mas antes.

Definição 2.3.9. *Sejam $u^1, \ldots, u^n$ as coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n_\nu$. Se V e $W = \sum_i W^i\partial_i$ são campos de vetores em $\mathbb{R}^n_\nu$, o vetor*

$$D_V W = \sum_i V(W^i)\partial_i,$$

é chamada a derivada covariante de W na direção de V.

Agora definiremos a conexão.

Definição 2.3.10. *Uma conexão ∇ em uma variedade M é uma função*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

satisfazendo, para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$

(i) $\nabla_V W$ é $C^\infty(M)$-linear em V;

(ii) $\nabla_V W$ *é* $\mathbb{R}$*-linear em* W*;*

(iii) $\nabla_V(fW) = f\nabla_V W + V(f)W$ *para toda função* $f \in C^\infty(M)$*.*

Assim, $\nabla_V W$ *é chamada a derivada covariante de* W *na direção de* V *com respeito a conexão* ∇*.*

Na definição anterior, (i) nos diz que $\nabla_V W$ é um tensor em V. Assim, podemos examinar o seu caráter pontual , isto é, dado $v \in T_pM$, o vetor $\nabla_v W \in T_pM$, esta bem definido e denotamos por $(\nabla_v W)_p$ onde V é um campo tensorial tal que $V_p = v$. O item (iii) nos diz que $\nabla_V W$ não é um tensor em W.

Vejamos agora um resultado de caráter algébrico, o qual nos diz que na presença da métrica podemos identificar campos com 1-formas.

Proposição 2.3.11. *Seja* M *uma variedade semi-Riemanniana. Se* $V \in \mathfrak{X}(M)$ *seja* V^* *uma* $1-$*forma em* M *tal que*

$$V^*(X) = \langle V, X\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$*. Então a função*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^*(M) \\ & & V & \longmapsto & f(V) = V^*(X) = \langle V, X\rangle \end{array}$$

é um isomorfismo $C^\infty(M)-$*linear de* $\mathfrak{X}(M)$ *para* $\mathfrak{X}^*(M)$*.*

Demonstração. Primeiramente observemos que f é $C^\infty(M)-$linear, pois é dada por uma $1-$forma que é $C^\infty(M)-$linear. Para mostrar o isomorfismo, basta mostrar que a aplicação é uma bijeção, uma vez que já temos a linearidade.

1. f é injetora.

   De fato, seja $f(V) = f(W)$, então

   $$\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

   Então

   $$\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle \Leftrightarrow \langle V - W, X\rangle = 0 \Leftrightarrow V = W,$$

   uma vez que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer e a métrica e não degenerada.

   Portanto f é injetora.

2. f é sobrejetora.

   É necessário exibirmos um $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$\theta(X) = \langle V, X \rangle, \ \forall \ X \in \mathfrak{X}(M).$$

   A unicidade é dada pelo item (i). Mostraremos que podemos encontrar um tal campo V em uma vizinhança coordenada U arbitrária. Seja $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, então podemos escrever $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$ em U e tomemos $V \in \mathfrak{X}(M)$ dado por $V = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i \partial_j$. Então desde que (g^{ij}) e (g_{ij}) são matrizes inversíveis, temos

$$\begin{aligned} \langle V, \partial_k \rangle &= \left\langle \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j, \partial_k \right\rangle = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle \\ &= \sum_{ij} g^{ij}\theta_i g_{jk} = \sum_{ij} \theta_i \delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k). \end{aligned},$$

   onde δ_{ik} é o delta de Kronecker. Portanto f é sobrejetora.

■

Definição 2.3.12. *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão ∇. Dizemos que a conexão é compatível com a métrica, quando ela satisfaz qualquer uma das condições da abaixo:*

1. *Para todos os campos paralelos V e W ao longo de qualquer curva diferenciável α em M vale:*

$$\langle V, W \rangle = constante.$$

2. *Para todos os campos vetoriais V e W ao longo de qualquer curva diferenciável α em M vale*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle.$$

3. *Para todos os campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vale*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Lema 2.3.13. *Sejam M uma variedade Riemanniana e ∇ uma conexão simétrica e compatível com a métrica de M^n. Então, temos*

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_Z X, Y \rangle &= Z\langle X, Y \rangle + X\langle Z, Y \rangle - Y\langle Z, X \rangle \\ &- \ \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle, \end{aligned} \tag{2.2}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Temos que:

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

Somando as duas primeiras equações e subtraindo a terceira temos, usando a simetria de ∇ que:

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle$$

$$= \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_Z X, Y\rangle &= Z\langle X,Y\rangle + X\langle Z,Y\rangle - Y\langle Z,X\rangle \\ &- \ \langle Z,[X,Y]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle. \end{aligned}$$

■

A equação (2.2) é conhecida como *fórmula de Koszul*.

Definição 2.3.14. *Seja $x : U \to M$ uma parametrização de M, com campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Se*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k, \tag{2.3}$$

então as n^3 funções suaves $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ são os símbolos de Christoffel *da conexão em U.*

Veremos na próxima Proposição que as propriedades da conexão de Levi-Civita permitem mostrar que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \left(\partial_i(g_{jm}) + \partial_j(g_{im}) - \partial_m(g_{ij})\right) g^{mk}. \tag{2.4}$$

Em particular, temos: $[\partial_i, \partial_j] = \nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i = \sum_{k=1}^{n}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k)$. Como $[\partial_i, \partial_j] = 0$ então temos $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, para todos $i, j, k = 1, \ldots, n$. Além disso, segue que

$$0 = [\partial_i, \partial_j] = \nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\partial_i = \sum_{k=1}^{n}(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k = 0.$$

Portanto $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_i}\partial_i$. A partir disso, dizemos que a conexão ∇ é *simétrica*.

Se $M = \mathbb{R}^n$, então $\Gamma_{ij}^k = 0$ para todos $i, j, k = 1, \ldots, n$. De fato, seja $\partial_1, ..., \partial_n$ um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^n$, temos $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$, onde $1 \leq i, j \leq n$. Logo, as derivadas da métrica são nulas , isto é , todos os *Símbolos de Christoffel* são nulos.

A conexão esta diretamente ligada a métrica, desde que acrescentemos a compatibilidade e uma outra propriedade relacionada ao colchetes de Lie, é o que nos mostra o teorema de existência e unicidade da conexão de *Levi-Civita*, mas precisamente

Teorema 2.3.15. (Levi-Civita) *Em uma variedade semi-Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que*

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(conexão simétrica);*

2. $Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$, *para todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Para a unicidade, suponha que ∇^1 e ∇^2 sejam duas conexões simétricas e compatíveis com a métrica de M. Uma vez que o lado direito de (2.2) não depende da conexão, temos

$$\langle \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z \rangle = \langle \nabla_X^1 Y, Z \rangle - \langle \nabla_X^2 Y, Z \rangle = 0,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto $\nabla^1 = \nabla^2$.

Para a existência, é suficiente mostrar que a conexão existe em uma vizinhança coordenada. Defina ∇ como em (2.2) e seja (U, x) um sistema coordenado de M. Aplicando (2.2) em campos coordenados cujos colchetes de Lie são nulos, temos

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle = \frac{1}{2} \left(\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_i, \partial_l \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle \right). \tag{2.5}$$

Recorde que

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad \text{e} \quad \nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m \partial_m. \tag{2.6}$$

Inserindo (2.6) em (2.5),

$$\sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{1}{2} \left(\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_i, \partial_l \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle \right). \tag{2.7}$$

Finalmente, multiplicando ambos os lados de (2.7) pela matriz inversa g^{lk} e observando que $g_{ml} g^{lk} = \delta_{km}$,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \left(\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_i, \partial_l \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle \right) g^{kl}. \tag{2.8}$$

Esta fórmula certamente define uma conexão em cada vizinhança coordenada. Além disso, a fórmula (2.8) garante que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Assim, temos que a conexão é simétrica.

Para mostrar a compatibilidade com a métrica, mostraremos que $\nabla g = 0$. Note que em coordenadas locais, as componentes de ∇g são da forma:

$$\begin{aligned}\nabla g(\partial_j, \partial_j, \partial_k) &= \partial_k(g_{ij}) - \langle \nabla_{\partial_k}\partial_i, \partial_j\rangle - \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k}\partial_j\rangle \\ &= \partial_k(g_{ij}) - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ki}^l \langle \partial_l, \partial_j\rangle - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \langle \partial_i, \partial_l\rangle \\ &= \partial_k(g_{ij}) - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l g_{il}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Usando (2.7) duas vezes,

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l g_{il} = \frac{1}{2}\left(\partial_k(g_{ij}) + \partial_k(g_{ji})\right) = \partial_k(g_{ji}).$$

Portanto, de (2.9) segue o resultado. ■

Definição 2.3.16. *Uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se*

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \quad em \quad I.$$

Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existem $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e uma única geodésica $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, tal que $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$.

Encerraremos com alguns conceitos relativos a tensores numa variedade diferenciável M.

Definição 2.3.17. *A derivada covariante de um $(1, r)$-tensor T é um $(1, r+1)$-tensor ∇T dado por*

$$\begin{aligned}\nabla T(X_1, \dots, X_r, Z) &= (\nabla_Z T)(X_1, \dots, X_r) \\ &= Z\left(T(X_1, \dots, X_r)\right) - T(\nabla_Z X_1, \dots, X_r) \\ &\quad - T(X_1, \dots, \nabla_Z X_r).\end{aligned}$$

Dizemos que um tensor é paralelo quando $\nabla T = 0$. Em particular, se $Z \in \mathfrak{X}(M)$, convém considerar o $(1, 1)$-tensor

$$\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$. Neste sentido, dizemos que um campo é paralelo se $\nabla Z = 0$.

Exemplo 2.3.18. *Em uma variedade semi-Riemanniana M^n com métrica g e a conexão ∇ compatível com a métrica, temos que $\nabla g = 0$. De fato, seja X, Y, Z campos de vetores. Temos que:*

$$\begin{aligned}
\nabla g(X,Y,Z) &= \nabla_Z g(X,Y) \\
&= Zg(X,Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\
&= Z\langle X,Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\
&= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0.
\end{aligned}$$

2.3.2 Curvaturas

Definição 2.3.19. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. O tensor curvatura R de M é a aplicação*

$$\begin{array}{rcccl}
R : & \mathfrak{X}(M)^3 & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) & \\
& (X,Y,Z) & \longmapsto & R(X,Y,Z) & = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z.
\end{array}$$

Uma vez que fixados os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar o operador curvatura $R(X,Y)$ dado por

$$\begin{array}{rcccl}
R : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) & \\
& Z & \longmapsto & R(X,Y)Z & = R(X,Y,Z).
\end{array}$$

Se $M = \mathbb{R}^n$ o tensor curvatura R de M é nulo. Sejam X, Y e Z campos diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ e $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, então

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n) \quad \text{e} \quad \nabla_Y Z = (Yz_1, \ldots, Yz_n).$$

Logo,

$$\nabla_X\nabla_Y Z = (XYz_1, \ldots, XYz_n), \qquad \nabla_Y\nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]}Z = ([X,Y]z_1, \ldots, [X,Y]z_n).$$

Portanto

$$R(X,Y)Z = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z = 0.$$

Observemos que o tensor curvatura é linear em relação a aditividade e trilinear em relação ao produto com elementos do anel $C^\infty(M)$. Além disso, o tensor curvatura satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 2.3.20. *Se $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, então*

1. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle = 0$;
2. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,X)Z, W\rangle$;
3. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$;
4. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

Demonstração. 1. Basta mostra que

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

De fato, pela simetria da conexão temos:

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\
&\qquad = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_Z\nabla_Y X \\
&\qquad\quad + \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_X\nabla_Z Y + \nabla_{[X,Z]}Y \\
&\qquad = \nabla_Y[X,Z] + \nabla_z[Y,X] + \nabla_X[Z,Y] \\
&\qquad\quad - \nabla_{[X,Z]}Y - \nabla_{[Y,X]}Z - \nabla_{[Z,Y]}X \\
&\qquad = [Y,[X,Z]] + [Z,[Y,X]] + [X,[Z,Y]] = 0,
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade foi usada a identidade de Jacobi em colchetes de Lie.

2. Segue imediatamente da definição.

3. Pela multilinearidade do tensor R, escrevemos:

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z+W, Z+W\rangle &= \langle R(X,Y)Z+W, Z\rangle + \langle R(X,Y)Z+W, W\rangle \\
&= \langle R(X,Y)Z, Z\rangle + \langle R(X,Y)W, Z\rangle + \langle R(X,Y)Z, W\rangle \\
&\quad + \langle R(X,Y)W, W\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, se mostrarmos que $\langle R(X,Y)T, T\rangle = 0$ estaremos concluindo que:

$$\langle R(X,Y)Z+W, Z+W\rangle = \langle R(X,Y)Z, Z\rangle = \langle R(X,Y)W, W\rangle = 0,$$

ou seja,
$$\langle R(X,Y)W,Z\rangle + \langle R(X,Y)Z,W\rangle = 0.$$

Agora observe que:

$$\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = \langle \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y + \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle.$$

Da compatibilidade da conexão com a métrica,

$$Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle = \langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle,$$

ou seja,
$$\langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle = Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle.$$

Da mesma forma,

$$\langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle = X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle.$$

Além disso também temos que:

$$X\langle Z,Z\rangle = \langle \nabla_X Z, Z\rangle + \langle Z, \nabla_X Z\rangle = 2\langle \nabla_X Z, Z\rangle$$

implicando em
$$\langle \nabla_X Z, Z\rangle = \frac{1}{2}X\langle Z,Z\rangle.$$

Daí,
$$\langle \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle.$$

Assim, por (1.91),(1.92) e (1.93) temos:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,Z\rangle &= Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle\\ &= \frac{1}{2}Y\langle (X\langle Z,Z\rangle) - \frac{1}{2}X(Y\langle X,Z\rangle) + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle\\ &= -\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = 0.\end{aligned}$$

4. Para demonstrar o último item, usaremos o item (i) e escreveremos

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(Y,Z)X,W\rangle + \langle R(Z,X)Y,W\rangle = 0,$$

$$\langle R(Y,Z)W,X\rangle + \langle R(Z,W)Y,X\rangle + \langle R(W,Y)Z,X\rangle = 0,$$

$$\langle R(Z,W)X,Y\rangle + \langle R(W,X)Z,Y\rangle + \langle R(X,Z)W,Y\rangle = 0,$$

$$\langle R(W,X)Y,Z\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle = 0.$$

Aplicando o item (ii), somando as equações acima, obtemos

$$2\langle R(Z,X)Y,W\rangle + 2\langle R(W,Y)Z,X\rangle = 0$$

e, portanto,

$$\langle R(Z,X)Y,W\rangle = \langle R(Y,W)Z,X\rangle = 0.$$

■

Para o nosso estudo, é mais conveniente ver o tensor curvatura em um sistema de coordenadas. Seja (U,x) um sistema de coordenadas em torno do ponto $p \in M$. Então,

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_k = \sum_l R_{ijk}^l \partial_l.$$

Assim R_{ijk}^l são as componentes da curvatura R em (U,x). Para exprimirmos R_{ijk}^l em termos dos coeficientes de Christoffel Γ_{ij}^k da conexão Riemanniana, escrevemos,

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \partial_j(\Gamma_{ik}^s) - \partial_i(\Gamma_{jk}^s).$$

Fazendo

$$\langle R(\partial_i,\partial_j)\partial_k,\partial_s\rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks},$$

poderemos escrever as identidades da Proposição 2.3.20 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} &= 0, \\ R_{ijks} = -R_{jiks} = -R_{ijsk} &= 0 \\ R_{ijks} &= R_{ksij}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Observemos que sempre que $p \in M$ e $v, w \in T_pM$ gerarem um subespaço bi-dimensional não-degenerado de T_pM, segue do Lema 2.2.3 que $|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 \neq 0$. Portanto, podemos definir a seguir a curvatura seccional que está intimamente relacionado com o operador de curvatura.

Lema 2.3.21. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional não-degenerado do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Para qualquer duas bases de σ podemos relaciona-las pelas equações

$$v = ax + by,$$

$$w = cx + dy,$$

onde o determinante dos coeficientes $ad - bc$ é diferente de zero. Um cálculo mais aprofundado mostra que

$$\langle R(v,w)v, w\rangle = (ad - bc)^2 \langle R(x,y)x, y\rangle,$$

e

$$(|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2) = (ad - bc)^2(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2).$$

Portanto $K(v,w) = K(x,y)$. ■

Agora podemos definir a

Definição 2.3.22. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K(x,y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamada a curvatura seccional de σ em p.*

Se uma aplicação multilinear $F : T_p(M)^4 \to \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades (2.3.20), dizemos que F é tipo-curvatura. Sendo F tipo-curvatura, das propriedades (2.3.20), segue que se $F(x,y,x,y) = 0$, para todos $x, y \in T_pM$ tais que $\sigma = span(x,y)$ é um plano não-degenerado, então $F \equiv 0$. Com isso, pode-se mostrar que:

Lema 2.3.23. *Seja F uma função tipo-curvatura em T_pM tal que*

$$K(x,y) = \frac{F(x,y,x,y)}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}$$

sempre que $\sigma = span(x,y)$ é um plano não-degenerado. Então,

$$\langle R(x,y)z, w\rangle = F(x,y,z,w),$$

para todos $x, y, z, w \in T_pM$.

Uma variedade semi-Riemanniana M tem *curvatura constante* se a função curvatura seccional é constante. O próximo resultado nos dá uma fórmula simples para R quando K é constante.

Corolário 2.3.24. *Se M tem curvatura seccional constante C, então*

$$R(x,y)z = C(\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x).$$

Demonstração. Observe que definindo $F(x,y,z,w) = C(\langle z,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle)$, temos que F é uma função tipo-curvatura em cada ponto, e $F(x,y,x,y) = C(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2)$. Se $\sigma = span(x,y)$ é um plano não-degenerado, então

$$K(x,y) = C = \frac{F(x,y,x,y)}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2},$$

e o resultado segue do lema anterior:

$$\langle R(x,y)z,w\rangle = F(x,y,z,w) = C(\langle z,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle)$$

ou seja,

$$\langle R(x,y)z,w\rangle = C(\langle z,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle).$$

■

Definição 2.3.25. *Sejam M uma variedade semi-Riemanniana, $p \in M$, $\{e_1,\ldots,e_n\}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança de p e ε_i o sinal de e_i. A aplicação $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinear $Ric : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, definida em p por*

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle R(X,e_i)e_i, Y\rangle \tag{2.11}$$

é chamada curvatura de Ricci de M.

Observemos que o valor de $Ric(X,Y)$ em p independe do referencial escolhido.Além disso, o tensor de Ricci é simétrico

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle R(X,e_i)e_i, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle R(e_i,X)Y, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle R(Y,e_i)e_i, X\rangle = Ric(Y,X). \end{aligned}$$

Em particular, se existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que

$$Ric(X,X) \geq \kappa\langle X,X\rangle$$

para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, dizemos que a curvatura de Ricci de M é limitada inferiormente.

A curvatura escalar é o traço da curvatura de Ricci . Isto é, tomando o traço na equação (2.11),

$$S = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j Ric(e_j, e_j) \tag{2.12}$$

obtemos a curvatura escalar de M^n.

Definição 2.3.26. *Uma variedade Riemanniana M^n é dita ser uma variedade de Einstein se existe uma função suave $f : M^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$Ric_p(X, Y) = f(p)\langle X, Y\rangle_p,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial como na Definição 2.3.25, segue que

$$S(p) = tr(Ric_p) = \sum_j Ric_p(e_j, e_j) = f(p)\sum_j^n \langle e_j, e_j\rangle = nf(p)$$

Donde, $f(p) = \frac{1}{n}S(p)$. Assim, M^n é uma variedade de Einstein se e somente se

$$Ric_p(X, Y) = \frac{S(p)}{n}\langle X, Y\rangle_p,\ p \in M^n \text{ e } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Exemplo 2.3.27. *Seja M^2 uma variedade Riemanniana. Podemos considerar sua curvatura seccional como uma função $K : M^2 \to \mathbb{R}$. Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonomal para T_pM temos pelo Corolário 2.3.24 que*

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \sum_{i=1}^{2}\langle R(X, e_i)Y, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2}\langle K(p)(\langle X, Y\rangle e_i - \langle e_i, Y\rangle X), e_i\rangle \\ &= K(p)\sum_{i=1}^{2}\langle X, Y\rangle\langle e_i, e_i\rangle - K(p)\sum_{i=1}^{n}\langle X, Y\rangle \\ &= K(p)\langle X, Y\rangle. \end{aligned}$$

Por 2.12, $S(p) = 2K(p)$. Assim, $Ric(X, Y) = \frac{S(p)}{2}\langle X, Y\rangle$.

Portanto, uma variedade Rimanniana 2-dimensional é uma variedade de Einstein. Logo, toda superfície é uma variedade de Einstein.

2.3.3 Alguns operadores diferenciáveis

Estenderemos agora os conceitos de vetor gradiente, divergente, Hessiano e Laplaciano para variedades semi-Riemannianas. O referencial $E_1, \ldots, E_n$ sempre denotará um referencial ortonormal em um ponto $p \in M$ com assinatura $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$.

Definição 2.3.28. *O gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$, o qual denotaremos por ∇f, é um campo vetorial metricamente equivalente a diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$. Assim*

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Em termos de um sistema de coordenadas (U, x) de M, ∇f pode ser escrito como segue:

$$\nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j. \tag{2.13}$$

Com efeito, sejam $p \in M$ e $\partial_1, \ldots, \partial_n$ um referencial. Recordemos que

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Aplicando a Definição 2.3.28,

$$\langle \nabla f, \partial_j \rangle = df(\partial_j) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(\partial_j) = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Como ∇f um campo vetorial, podemos escrever

$$\nabla f = \sum_j a_j \partial_j,$$

logo

$$\langle \nabla f, \partial_i \rangle = \left\langle \sum_j a_j \partial_j, \partial_i \right\rangle = \sum_j a_j \langle \partial_j, \partial_i \rangle = \sum_j a_j g_{ij},$$

o que implica $a_j = \sum_j g^{ij} \langle \nabla f, \partial_i \rangle$. Portanto

$$\nabla f = \sum_j a_j \partial_j = \sum_{ij} g^{ij} \langle \nabla f, \partial_i \rangle \partial_j = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j,$$

o que mostra o afirmado.

Proposição 2.3.29. *Se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, temos* *(a)* $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

(c) $\nabla F = h'(f)\nabla f$, *onde* $F = h \circ f$ *com* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função suave.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para mostrar o item (a) vejamos que da Definição 2.3.28, temos

$$\langle \nabla(f+g), X\rangle = (X)(f+g) = X(f) + X(g) = \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle = \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle$$

Assim,

$$\langle \nabla(f+g) - \nabla f - \nabla g, X\rangle = 0.$$

Como X foi escolhido arbitrariamente, segue que

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g.$$

Para o item (b), vemos que

$$\langle \nabla(fg), X\rangle = X(fg) = gX(f) + fX(g) = \langle g\nabla f, X\rangle + \langle f\nabla g, X\rangle = \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle.$$

Dai,

$$\langle \nabla(fg) - g\nabla f - f\nabla g, X\rangle = 0,$$

e consequentemente,

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$$

O item (c) segue de modo análogo, basta ver para todo X que

$$\langle \nabla F, X\rangle = X(h \circ f) = h'(f)X(f) = h'(f)\langle \nabla f, X\rangle = \langle h'(f)\nabla f, X\rangle.$$

Assim,

$$\nabla F = h'(f)\nabla f,$$

mostrando o desejado. ■

Proposição 2.3.30. *Seja* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. *Dados* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$, *seja* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *uma curva diferenciável tal que* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha'(0) = v$. *Então*

$$\langle \nabla f, v\rangle = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0}.$$

Em particular, se p *é um ponto de máximo ou mínimo local para* f, *então* $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Seja V uma extensão local de v. Então

$$\langle \nabla f, v \rangle = (V(f))(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0}.$$

Suponhamos agora que p seja um ponto de máximo local para f (o caso mínimo local é análogo). Então, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p tal que $f(p) \geq f(q)$ para todo $q \in U$. Assim, se v e α são tais que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, então $f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0} = 0.$$

Uma vez que $v \in T_pM$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $\nabla f(p) = 0$. ■

Definição 2.3.31. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dizemos que $p \in M$ é um ponto crítico de f se $\nabla f(p) = 0$.*

Da Proposição 2.3.30 temos que todo ponto de máximo ou mínimo local de f é um ponto crítico de f.

Proposição 2.3.32. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana conexa e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Se $\nabla f = 0$ em M, então f é constante em M.*

Demonstração. Fixemos $p \in M$ e seja

$$A = \{q \in M\,;\, f(q) = f(p)\}.$$

A continuidade de f garante que A é fechado. Sendo $A \neq \emptyset$, se mostrarmos que A é aberto, seguirá da conexidade de M que $A = M$ e consequentemente, f será constante. De fato, seja $q \in A$ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada conexa de q em M. Para todo $r \in U$, existe uma curva diferenciável $\alpha : [0,1] \to U$ tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha(1) = r$. Da Proposição 2.3.30, temos que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) = \langle \nabla f, \alpha'(t) \rangle = 0.$$

Assim a função $f \circ \alpha$ é constante em $[0,1]$. Em particular,

$$f(p) = f(q) = (f \circ \alpha)(0) = (f \circ \alpha)(1) = f(r),$$

donde $r \in A$. Como $r \in U$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $U \subset A$ e portanto, A é aberto. ■

Definição 2.3.33. *Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos a divergência do campo X como a função $div\, X : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$div\, X = tr(Y(p) \to \nabla_Y X(p)), \quad p \in M.$$

Em particular, se $E_1, \ldots, E_n$ é um referencial ortonormal, escrevemos

$$div\, X = \sum_i \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

A seguinte proposição destaca algumas propriedades do divergente.

Proposição 2.3.34. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{C}^2(M)$, temos*

(a) $div(X+Y) = div\, X + div\, Y$;

(b) $div(fX) = f div\, X + X(f)$.

Demonstração. Para provar o item (a), lembremos que o traço é um funcional linear, fazendo uso da Definição 2.3.33, temos

$$div(X+Y) = tr(\nabla(X+Y)) = tr(\nabla X + \nabla Y) = tr(\nabla X) + tr(\nabla Y) = divX + divY.$$

Para o item (b), seguimos de modo análogo

$$div(fX) = tr(\nabla(fX)) = tr(f\nabla X + df X) = f tr(\nabla X) + tr(df(X)) = f divX + X(f).$$

O que conclui a demonstração. ∎

Definição 2.3.35. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Hessiano de f, denotado por $Hess\, f$, é o campo tensorial $Hess\, f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ dado por*

$$(Hess\, f)(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

O próximo resultado, nos dá algumas propriedades do *Hessiano*.

Lema 2.3.36. *O Hessiano de f é um campo tensorial do tipo $(0,2)$ simétrico tal que*

$$(Hess\, f)(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y) f,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. $Hess\, f$ é $C^\infty(M)$-linear em cada entrada.Pois,

$$\begin{aligned}(Hess\, f(gX+Z,Y) &= \langle \nabla_{gX+Z}\nabla f, Y\rangle \\ &= \langle g\nabla_X\nabla f + \nabla_Z\nabla f, Y\rangle \\ &= \langle g\nabla_X\nabla f, Y\rangle + \langle \nabla_Z\nabla f, Y\rangle \\ &= g(Hess\, f)(X,Y) + (Hess\, f)(Z,Y).\end{aligned}$$

Desta forma, $Hess\, f$ é um tensor do tipo $(0,2)$.

Como $\langle \nabla f, Y\rangle = Y(f)$, temos que

$$\begin{aligned}X(Y(f)) = X\langle \nabla f, Y\rangle &= \langle \nabla_X\nabla f, Y\rangle + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hess\, f)(X,Y) + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hess\, f)(X,Y) + (\nabla_X Y)f,\end{aligned} \tag{2.14}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Para a simetria, vamos usar a definição dos colchetes. Observe que por um lado

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

mas por outro lado usando a simetria da conexão de Levi-Civita, temos

$$[X,Y](f) = (\nabla_X Y)f - (\nabla_Y X)f,$$

daí

$$X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f.$$

Assim pela equação (2.14) temos

$$(Hess\, f)(X,Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f = (Hess\, f)(Y,X),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. O que conclui o Lema. ■

Definição 2.3.37. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Definimos, $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ o operador Laplaciano de M por*

$$\Delta f = tr(Hess\, f),$$

para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Observe que o Laplaciano também pode ser visto da seguinte maneira:

$$\Delta f = \sum_i \varepsilon_i \langle (Hess\, f)(E_i), E_i \rangle = \sum_i \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = div(\nabla f). \tag{2.15}$$

Proposição 2.3.38. *Se $f, g \in \mathcal{C}^2(M)$, temos*

(a) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$;

(b) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$;

(c) $\Delta F = h'(f)\Delta f + h''(f)|\nabla f|^2$, *onde* $F = f \circ h$ *com* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função suave.*

Demonstração. Observemos que o item (a) segue diretamente da Definição 2.3.37 e do primeiro item da Proposição 2.3.34 .

$$\Delta(f+g) = div(\nabla(f+g)) = div(\nabla f + \nabla g) = div(\nabla f) + div(\nabla g) = \Delta f + \Delta g.$$

Para o item (b), faremos uso da Proposição 2.3.29 e da Proposição 2.3.34

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) = div(\nabla(fg)) &= div(f\nabla g + g\nabla f) \\
&= div(f\nabla g) + div(g\nabla f) \\
&= f div(\nabla g) + \nabla g(f) + g div(\nabla f) + \nabla f(g) \\
&= f div(\nabla g) + g div(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla g \rangle + \langle \nabla g, \nabla f \rangle \\
&= f div(\nabla g) + g div(\nabla f) + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle \\
&= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, para a prova de (c) usaremos a expressão para o gradiente de uma função composta, item (c) da Proposição 2.3.29. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\Delta F = div(\nabla F) &= div(h'(f)\nabla f) \\
&= h'(f)div(\nabla f) + \nabla f(h'(f)) \\
&= h'(f)div(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla h'(f) \rangle \\
&= h'(f)div(\nabla f) + h''(f)|\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Concluindo a demonstração. ■

Finalizaremos esta seção apresentando algumas consequência do Teorema de Stokes.

Teorema 2.3.39. (da divergência) *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo de M é munido com a orientação e a métrica induzidas por M e ν denota o normal unitário exterior a M ao longo de ∂M, então*

$$\int_M (div\, X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M).$$

Note que no caso de ν ser o normal unitário interior a M ao longo de ∂M, o segundo membro da igualdade no Teorema 2.3.39 muda de sinal.

Definição 2.3.40. *Dizemos que uma variedade Riemanniana é fechada, quando ela é compacta e possui fronteira vazia ($\partial M = \emptyset$).*

Nesta configuração, temos

Corolário 2.3.41. *Se M^n é uma variedade Riemanniana fechada, orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\int_M (div\, X) dM = 0.$$

Definição 2.3.42. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{C}^2(M)$. Dizemos que:*

(a) f é harmônica quando $\Delta f = 0$ em M^n;

(b) f é subharmônica quando $\Delta f \geq 0$ em M^n;

(c) f é superharmônica quando $\Delta f \leq 0$ em M^n.

Teorema 2.3.43. (Hopf) *Se M é uma variedade Riemanniana fechada, orientada e conexa, então toda função subharmônica $f \in \mathcal{C}^2(M)$ é constante.*

Demonstração. Considerando $X = \nabla f$ no Teorema 2.3.39, escrevemos

$$\int_M \Delta f dM = \int_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial \nu} d(\partial M),$$

onde $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \langle \nabla f, \nu \rangle$ é a derivada normal de f ao longo de ∂M. Por outro lado, como estamos supondo que $\partial M = \emptyset$, segue da igualdade acima,

$$\int_M \Delta f dM = 0.$$

Como f é subharmônica, pela Definição 2.3.42, $\Delta f \geq 0$. Assim devemos ter que $\Delta f = 0$ sobre M. Agora fazendo $g = f$ no Proposição 2.3.38 item (b), concluímos

$$0 = \frac{1}{2}\int_M \Delta(f^2)dM = \int_M (f\Delta f + |\nabla f|^2)dM = \int_M |\nabla f|^2 dM \geq 0.$$

Portanto, $|\nabla f| = 0$ e consequentemente $\nabla f = 0$ sobre M. Segue então da Proposição 2.3.32 que f é constante em M. ∎

Em particular o resultado é válido para toda função harmônica e superharmônica.

Definição 2.3.44. *Uma variedade Riemanniana M^n é dita ser parabólica se as funções constantes são as únicas funções subharmônica sobre M^n que são limitadas superiormente, isto é para uma função $u \in \mathcal{C}^2(M)$*

$$\Delta u \geq 0 \quad e \quad u \leq u^* < +\infty \quad implica\ em \quad u = const.$$

A partir dessa definição, o seguinte resultado devido a Alías e Caminha (ALíAS L; CAMINHA, 2017), será importante para a obtenção dos resultados principais dessa dissertação.

Proposição 2.3.45. *Uma variedade Riemanniana completa (não-compacta) e conexa é parabólica se, e somente se, cada função subharmônica positiva limitada é constante.*

Demonstração. A parte "se" segue diretamente da definição sem a necessidade da positividade da função. É suficiente provar a parte "somente se". Assim, seja M^n uma variedade Riemanniana completa não compacta e conexa tal que cada função positiva limitada e subharmônica é constante.

Se $u : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função subharmônica a qual é limitada por cima e $g = e^u$, então g é uma função suave limitada e positiva em M^n. Além disso, das propriedades dos Laplaciano, não é difícil verificar que

$$\Delta g = g\Delta u + g|\nabla u|^2$$

assim g é também subharmônica. Então, nossas hipóteses mostram que g é constante e, uma vez que $\nabla g = g\nabla u$, segue que $\nabla u = 0$. Portanto, u é também constante, e M^n é parabólica. ∎

Finalizamos esta seção enunciando um resultado clássico devido A. Huber cuja prova pode ser encontrada em (HUBER, 1957).

Proposição 2.3.46. *Toda superfície completa e não-compacta com curvatura Gaussiana não-negativa é parabólica.*

3 VARIEDADE DE LORENTZ

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos fundamentais e propriedades das variedades de Lorentz. Iniciaremos relembrando a seguinte definição:

Definição 3.0.1. *Uma variedade de Lorentz* $(\overline{M}, \overline{g})$ *é uma variedade semi-Riemanniana cuja métrica* $\overline{g}$ *possui índice igual a* 1.

O exemplo mais simples de variedade de Lorentz é o espaço de Lorentz-Minkowski que nada mais é que o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com a métrica

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1}y_{n+1}.$$

O espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ com esta métrica Lorentziana é conhecido como espaço de Lorentz-Minkowski e denotado por $\mathbb{L}^{n+1}$. Assim como o espaço Euclidiano, o Lorentz-Minkowski também possui curvatura seccional constante e igual a zero.

Exemplo 3.0.2. *Seja* $\mathbb{L}^{n+1}$ *o espaço de Lorentz-Minkowski com seu produto escalar usual* $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *com relação a forma quadrática*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{n+1}^2$$

Para $n \leq 2$, *o espaço de Sitter* n*-dimensional é a hiperquádrica*

$$\mathbb{S}_1^n(r) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\, \langle x, x\rangle = r^2\right\}.$$

Se $f : \mathbb{L}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *é a função definida por* $f(x) = \langle x, x\rangle$, *então* f *é diferenciável e tal que* $\mathbb{S}_1^n(r) = f^{-1}(r^2)$. *Denotemos por* ∇^0 *a conexão de Levi-Civita de* $\mathbb{L}^{n+1}$. *Uma vez que o gradiente* $\nabla^0 f$ *não se anula em nenhum ponto de* $f^{-1}(r^2)$, *temos que* $\mathbb{S}_1^n(r)$ *é uma hipersuperfície mergulhada em* $\mathbb{L}^{n+1}$. *De fato, como*

$$\langle\nabla^0 f, X\rangle = X(f) = X\langle x, x\rangle = 2\langle\nabla^0_X x, x\rangle = \langle 2X, x\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L})$. *Dai* $\nabla^0 f(x) = 2x$ *e portanto*

$$|\nabla^0 f(x)|^2 = 4r^2 \neq 0,$$

para todo $x \in f^{-1}(r^2)$.

3.1 ORIENTAÇÃO TEMPORAL

Seja V um espaço vetorial Lorentziano, isto é, um espaço vetorial munido de um produto escalar de índice constante igual a 1. Considere o conjunto

$$\mathcal{T} = \{u \in V; \langle u, u\rangle < 0\}.$$

Para cada $u \in \mathcal{T}$ defina

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v\rangle < 0\}$$

chamado o *cone tipo-tempo* de V contendo u.

Como primeiro resultado, temos o seguinte lema.

Lema 3.1.1. *Sejam $v, w \in \mathcal{T}$. Então,*

1. *O subespaço $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço e*

$$V = span\{v\} \otimes \{v\}^{\perp}.$$

Consequentemente, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$, onde

$$C(-v) = -C(v) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v\rangle > 0\};$$

2. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa)*

$$|\langle v, w\rangle| \geq |v||w|,$$

onde $|v| = \sqrt{-\langle v, v\rangle}$, valendo a igualdade se, e somente se, v e w são linearmente dependentes;

3. *Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}$, $w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v, w\rangle < 0$. Consequentemente*

$$w \in C(v) \Longleftrightarrow v \in C(w) \Longleftrightarrow C(v) = C(w).$$

Demonstração. 1. Afirma-se que $span\{v\}$ é não degenerado com índice igual a 1.

De fato, sendo v um vetor tipo-tempo, temos que

$$ind(span\{v\}) = 1.$$

Agora suponha que $u = av \in span\{v\},\ a \in \mathbb{R}$. Então se $\langle u, v\rangle = 0$ e sendo v tipo-tempo, temos $\langle v, v\rangle = -\beta^2$, para algum $\beta \in \mathbb{R}^*$. Daí,

$$0 = \langle u, v\rangle = \langle av, v\rangle = -a\beta^2,$$

logo segue que, $a = 0$. Portanto $u = 0$ de concluímos que o subespaço $span\{v\}$ é não degenerado o que mostra a nossa afirmação.

Agora, sendo $span\{v\}$ subespaço não degenerado com índice 1, então pelo Lema (2.2.7)

$$V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp} = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}$$

e

$$1 = ind(V) = ind(span\{v\}) + ind(v^{\perp}) = 1 + ind(v^{\perp}).$$

Assim, $ind(v^{\perp}) = 0$ e portanto $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço.

Afirmemos agora que

$$\mathcal{T} = C(v) \cup C(-v),$$

onde esta união é disjunta.

De fato, se $z \in \mathcal{T}$ então $z \in V$ e $\langle z, z\rangle < 0$. Como $V = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}$ então $z = av + w$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $w \in \{v\}^{\perp}$. Logo,

$$\langle z, v\rangle = \langle av + w, v\rangle = \langle av, v\rangle + \langle w, v\rangle = -a\beta^2.$$

Se $a > 0$ então $\langle z, v\rangle < 0$, e neste caso, $z \in C(v)$. Agora se $a < 0$ então $\langle z, v\rangle > 0$. Equivalentemente $\langle z, -v\rangle < 0$ e neste caso, $z \in C(-v)$, ou seja,

$$z \in \mathcal{T} \Rightarrow z \in C(v) \ \ ou \ \ z \in C(-v).$$

Reciprocamente, se $z \in C(v) \cup C(-v)$ então $z \in C(v)$ ou $z \in C(-v)$. Se $z \in C(v)$ então $z \in \mathcal{T}$ e $\langle z, v\rangle < 0$. Se $z \in C(-v)$ então $z \in \mathcal{T}$ e $\langle z, -v\rangle < 0$. Em qualquer caso, $z \in \mathcal{T}$ e portanto $\mathcal{T} = C(v) \cup C(-v)$.

2. Escreva $w = av + \widehat{w}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\widehat{w} \in \{v\}^{\perp}$. Sendo $\{v\}^{\perp}$ tipo-espaço então $\langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle \geq 0$. Como $w \in \mathcal{T}$ então $\langle w, w\rangle < 0$. Assim

$$\langle w, w\rangle = \langle w = av + \widehat{w}, w = av + \widehat{w}\rangle = a^2\langle v, v\rangle + \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle,$$

$$\Rightarrow a^2\langle v,v\rangle = \langle \widehat{w},\widehat{w}\rangle - \langle w,w\rangle.$$

logo

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle^2 &= \langle v, av+\widehat{w}\rangle^2 = a^2\langle v,v\rangle^2 + \langle v,\widehat{w}\rangle^2\\ &= a^2\langle v,v\rangle\langle v,v\rangle = (\langle w,w\rangle - \langle \widehat{w},\widehat{w}\rangle)\langle v,v\rangle\\ &= \langle w,w\rangle\langle v,v\rangle - \langle \widehat{w},\widehat{w}\rangle\langle v,v\rangle\\ &\geq \langle w,w\rangle\langle v,v\rangle = (-\langle w,w\rangle)(-\langle v,v\rangle)\\ &= |w|^2|v|^2,\end{aligned}$$

uma vez que, $-\ \langle \widehat{w},\widehat{w}\rangle\langle v,v\rangle \geq 0$.

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $\langle \widehat{w},\widehat{w}\rangle = 0$, isto é $\widehat{w} = 0$. Assim, a igualdade acontece se, e somente se, $w = av$.

3. Queremos mostrar que se $v \in C(u)$ e w é tipo-tempo então $w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v,w\rangle < 0$.
Como $C\left(\dfrac{u}{|u|}\right) = C(u)$, assumiremos que u é um vetor unitário tipo-tempo. Escreva $v = au + \widehat{v}$ e $w = bu + \widehat{w}$, com $a,b \in \mathbb{R}^*$ e $\widehat{v},\widehat{w} \in \{u\}^{\perp}$. Como v e w são vetores tipo tempo, então $\langle v,v\rangle < 0$ e $\langle w,w\rangle < 0$. Daí,

$$\begin{aligned}0 > \langle v,v\rangle &= \langle au+\widehat{v}, au+\widehat{v}\rangle\\ &= a^2\langle u,u\rangle + \langle \widehat{v},\widehat{v}\rangle\\ &= -a^2(-\langle u,u\rangle) + |\widehat{v}|^2\\ &= -a^2|u|^2 + |\widehat{v}|^2 = -a^2 + |\widehat{v}|^2.\end{aligned}$$

Com um cálculo análogo encontramos que

$$0 > \langle w,w\rangle = -b^2 + |\widehat{w}|^2.$$

Então

$$|a| > |\widehat{v}| \quad \text{e} \quad |b| > |\widehat{w}|,$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle &= \langle au+\widehat{v}, bu+\widehat{w}\rangle\\ &= ab\langle u,u\rangle + a\langle u,\widehat{w}\rangle + b\langle \widehat{v},u\rangle + \langle \widehat{v},\widehat{w}\rangle\\ &= -ab + \langle \widehat{v},\widehat{w}\rangle.\end{aligned}$$

Agora como $v \in C(u)$ temos

$$0 > \langle v, u\rangle = \langle au + \widehat{v}, u\rangle = a\langle u, u\rangle = -a,$$

e seque que $a > 0$.

Suponhamos que $w \in C(u)$, então

$$0 > \langle u, w\rangle = \langle u, bu + \widehat{w}\rangle = b\langle u, u\rangle = -\ b,$$

daí, $b > 0$ e assim, $ab > 0$. Agora usando a desigualdade de Cauchy-Scharwz clássica para $\widehat{v}, \widehat{w}$ temos

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle &= -ab + \langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle \leq -ab + |\langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle| \leq -ab + |\widehat{v}||\widehat{w}|\\ &< -\ ab + |a||b| = -\ ab + ab = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v, w\rangle < 0$.

■

Definição 3.1.2. *Seja $\overline{M}$ uma variedade de Lorentz e $\mathcal{T}$ uma função em $\overline{M}$ a qual corresponde a cada ponto $p \in \overline{M}$ um cone tipo-tempo $\mathcal{T}_p \in T_p\overline{M}$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é diferenciável quando para cada $p \in \overline{M}$ existem uma vizinhança U de p e $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ tais que $V(q) \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in U$.*

Uma tal função diferenciável é dita uma orientação temporal de $\overline{M}$. Se $\overline{M}$ admite uma orientação temporal então dizemos que $\overline{M}$ é temporalmente orientado.

O próximo resultado nos permite uma maneira mais simples de mostrar quando uma variedade é temporalmente orientada.

Proposição 3.1.3. *Uma variedade Lorentziana $\overline{M}$ é temporalmente orientada se, e somente se, existe um campo $K \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo globalmente definido em $\overline{M}$.*

Demonstração. Se $K \in \mathfrak{X}(M)$ é tipo-tempo então, defina

$$\mathcal{T}_p = C(K(p)),$$

e observe que $\mathcal{T}_p$ é diferenciável e determina uma orientação temporal em $\overline{M}$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{T}$ uma orientação temporal em $\overline{M}$. Como $\mathcal{T}$ é diferenciável em ponto $p \in \overline{M}$, existe uma vizinhança U de $\overline{M}$ na qual o campo de vetores tipo-tempo K_U esta definido, tal que $K_U(q) \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in U$. Assim obtemos uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de $\overline{M}$ e campos de vetores tipo-tempo K_{U_α} tais que $K_{U_\alpha}(q) \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in U_\alpha$. Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ e considere o campo

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha}.$$

Temos que K esta bem definido pois em cada ponto de $\overline{M}$ a soma em α é finita. Além disso

$$\begin{aligned}\langle K(q), K(q)\rangle &= \left\langle \sum_\alpha f_\alpha(q) K_{U_\alpha}(q), \sum_\beta f_\beta(q) K_{U_\beta}(q) \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha(q) f_\beta(q) \langle K_{U_\alpha}(q), K_{U_\beta}(q)\rangle,\end{aligned}$$

como $K_{U_\alpha}, K_{U_\beta} \in \mathcal{T}_q$ então, pelo item (iii) do Lema 3.1.1, temos

$$\langle K_{U_\alpha}(q), K_{U_\beta}(q)\rangle < 0,$$

e como $0 \leq f_\alpha(q) \leq 1$ obtemos que

$$\langle K(q), K(q)\rangle < 0.$$

Uma vez que q é um ponto arbitrário de $\overline{M}$ temos que K é um campo de vetores em $\overline{M}$ tipo-tempo. ■

Sempre que uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação $\mathcal{T}$ como na Definição 3.1.3, ou de um campo vetorial tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ a ela correspondente, será denominada uma orientação temporal para $\overline{M}$.

Seja $\mathcal{T}$ uma orientação temporal para $\overline{M}$ e $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $K(q) \in \mathcal{T}_q$ (respectivamente, $-K(q) \in \mathcal{T}_q$) para todo $q \in \overline{M}$, dizemos que K aponta para o futuro (respectivamente, aponta para o passado). Sendo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ uma orientação temporal para $\overline{M}$, segue do item (iii) do Lema 3.1.1 que um campo vetorial tipo-tempo K sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro (respectivamente, para o passado) se, e somente se, $\langle K, X\rangle < 0$ (respectivamente, $\langle K, X\rangle > 0$).

Exemplo 3.1.4. *O espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ é temporalmente orientado, pois*

$$K = \frac{\partial}{\partial t} = (1, 0, \ldots, 0)$$

é um campo de vetores tipo-tempo globalmente definido em $\mathbb{L}^{n+1}$.

3.2 IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Definição 3.2.1. *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente com $m > n$. Dizemos que a aplicação $x : M \to \overline{M}$ é uma imersão se a aplicação diferencial $dx_p : T_pM \to T_{x(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$.*

O número $k = m - n$ é chamado *codimensão* de x.

Definição 3.2.2. *Uma imersão $x : M \to \overline{M}$ entre duas variedades semi-Riemannianas com métricas $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente é chamada imersão isométrica se*

$$\langle u, v\rangle_M = \langle dx_p(u), dx_p(v)\rangle_{\overline{M}},$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Seja $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Como ao redor de cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que $x\big|_U$ é um mergulho sobre $x(U)$, podemos identificar U com a sua imagem $x(U)$, isto é x é localmente a aplicação inclusão. Além disso, podemos considerar o espaço tangente de M em p com um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}$ em p e escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Definição 3.2.3. *Sejam $\overline{M}^m$ uma variedade semi-Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Então dados campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Com relação à $(\overline{\nabla}_X Y)^\top$, pode-se mostrar que é uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica de M. E segue da unicidade da conexão de Levi-Civita que $(\overline{\nabla})^\top$ é a conexão de Levi-Civita de M e denotamos por ∇.

Assim obtemos a *Fórmula de Gauss*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{3.1}$$

a qual define uma aplicação

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

chamada a *Segunda Forma Fundamental* da imersão x.

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, pelas propriedades das conexões de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ *e* ∇ temos que a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ dada por $\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.

Consideremos os campos de vetores $X \in M$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, e denotemos por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\ \overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_\xi X = -\ (\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}.$$

Uma vez que para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} 0 = X\langle \xi, Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp} + (\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}, Y\rangle + \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X,Y)\rangle \\ &= \langle -A_\xi X, Y\rangle + \langle \xi, \alpha(X,Y)\rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle. \tag{3.2}$$

Em particular, a aplicação $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X,\xi) = A_\xi X$ é bilinear sobre $C^\infty(M)$. Assim, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear sobre $C^\infty(M)$ e, de (3.2) auto adjunta, isto é

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle A_\xi Y, X\rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A aplicação A_ξ é chamada *operador de forma* ou *operador de Weingarten* da imersão x.

A componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$, que é denotada por $\nabla^{\perp}_X \xi$, define uma conexão compatível com o fibrado tangente normal $TM^{\perp}$ no seguinte sentido:

$$\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

é $C^\infty(M)$-linear em X, $\mathbb{R}$-linear em ξ e para todo $h \in C^\infty(M)$,

$$\nabla^{\perp}_X (h\xi) = h\nabla^{\perp}_X \xi + X(h)\xi.$$

Além disto, $\nabla^{\perp}$ é compatível com a métrica, ou seja,

$$X\langle \xi, \eta\rangle = \langle \nabla^{\perp}_X \xi, \eta\rangle + \langle \xi, \nabla^{\perp}_X \eta\rangle, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp},$$

onde $\langle \, , \rangle$ é a métrica de $\overline{M}$. Dizemos que $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal de x, e obtemos a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_{\xi} X + \nabla^{\perp}_X \xi.$$

A partir da segunda forma fundamental, introduzimos a seguinte definição:

Definição 3.2.4. *Definimos o vetor curvatura média de M^n em $\overline{M}$ como o traço da segunda forma fundamental. Mais especificamente,*

$$H = \frac{1}{n} tr(\alpha).$$

Uma vez que o operador A_{ξ} é simétrico em cada direção $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ podemos definir a curvatura média em cada direção ξ. Isto é, se $e_1, \ldots, e_n$ é um referencial ortonormal ao longo de M^n, de (3.2) e (3.2.4), escrevemos

$$\langle H, \xi\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \alpha(e_i, e_i), \xi\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle A_{\xi}(e_i), e_i\rangle = \frac{1}{n} tr(A_{\xi}).$$

Definição 3.2.5. *A subvariedade M^n é dita ser totalmente geodésica quando a segunda forma fundamental de M^n em $\overline{M}^m$ é identicamente nula, isto é $\alpha \equiv 0$.*

Agora, usando a fórmula de Gauss e Weingarten, obtemos as equações básicas das imersões isométricas para o nosso interesse: a equação de Gauss e Codazzi.

Proposição 3.2.6. *Seja M uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}$. Sejam R e $\overline{R}$ os tensores curvatura de M e $\overline{M}$ respectivamente, e α a segunda forma fundamental. Então para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

1. *(Equação de Gauss)*

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle - \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle;$$

2. *(Equação de Codazzi)*

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z),$$

Demonstração. Veja (CARMO M, 2008). ■

Como aplicação direta do Teorema 3.2.6, temos

Corolário 3.2.7. *(da Equação de Gauss) Se $\{X, Y\}$ é uma base para um plano tangente não degenerado de M gerado por $X, Y \in T_pM$, então*

$$\overline{K}(X,Y) = K(X,Y) + \frac{\langle \alpha(X,Y), \alpha(X,Y)\rangle - \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

onde $\overline{K}$ e K denotam as curvaturas seccionais de $\overline{M}$ e M respectivamente.

Demonstração. Observe que fazendo $X = Z$ e $W = Y$ na equação de Gauss (3.2.6), temos que

$$\langle \overline{R}(X,Y)X, Y\rangle = \langle R(X,Y)X, Y\rangle + \langle \alpha(X,Y), \alpha(Y,X)\rangle - \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y)\rangle,$$

uma vez que $|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2 \neq 0$ temos

$$\frac{\langle \overline{R}(X,Y)X, Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2} = \frac{\langle R(X,Y)X, Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2} + \frac{\langle \alpha(X,Y), \alpha(Y,X)\rangle - \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

o que implica

$$\overline{K}(X,Y) = K(X,Y) + \frac{\langle \alpha(X,Y), \alpha(X,Y)\rangle - \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}.$$

■

Definição 3.2.8. *Uma variedade é dita flat quando a curvatura seccional é identicamente nula.*

O espaço Euclidiano n-dimensional é uma variedade *flat*, uma vez que em $\mathbb{R}^n$ os *Símbolos de Christoffel* são identicamente nulos pois são dados pelas derivadas da métrica que são nulas neste espaço. De modo análogo vemos que o espaço de Lorentz-Minkowski também é uma variedade flat.

Exemplo 3.2.9. *Mostremos que a esfera n-dimensional*

$$\mathbb{S}^n(r) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \langle p, p\rangle = r^2\}$$

tem curvatura seccional constante $K = \dfrac{1}{r^2}$, se $n \geq 2$.

Com efeito, seja $p = \sum_i u^i \partial_i$ *o vetor posição de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *para* $p \in \mathbb{S}^n(r)$. *Se* $\overline{\nabla}$ *é a conexão de Levi-Civita de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *então*

$$\overline{\nabla}_X p = \sum_i X(u^i)\partial_i = \sum_i X^i \partial_i = X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$. *Daí,*

$$\langle p, p\rangle = r^2 \Rightarrow 0 = X\langle p, p\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X p, p\rangle = 2\langle X, p\rangle$$

o que implica

$$0 = \langle X, p\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$, *isto é, o vetor posição* p *é ortogonal a* $\mathbb{S}^n$.

Considere agora $U = \dfrac{p}{|p|} = \dfrac{p}{\sqrt{\langle p, p\rangle}} = \dfrac{p}{r}$ *e afirmamos que*

$$\alpha(V, W) = -\frac{1}{r}\langle V, W\rangle U,$$

para todo $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$. *De fato,*

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(V, W), U\rangle &= \langle (\overline{\nabla}_V W)^{\perp}, U\rangle = \frac{1}{r}\langle (\overline{\nabla}_V W)^{\perp}, p\rangle \\
&= \frac{1}{r}\langle \overline{\nabla}_V W, p\rangle = -\frac{1}{r}\langle W, \overline{\nabla}_V p\rangle \\
&= -\frac{1}{r}\langle V, W\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^{n+1}$ *é flat, pelo Corolário (3.2.7)*

$$\begin{aligned}
K(V, W) &= \frac{\langle \alpha(V, V), \alpha(W, W)\rangle - \langle \alpha(V, W), \alpha(V, W)\rangle}{|V|^2|W|^2 - \langle V, W\rangle^2} \\
&= \frac{\frac{1}{r^2}\langle \langle V, V\rangle U, \langle W, W\rangle U\rangle - \frac{1}{r^2}\langle \langle V, W\rangle U, \langle V, W\rangle U\rangle}{|V|^2|W|^2 - \langle V, W\rangle^2} \\
&= \frac{1}{r^2}.
\end{aligned}$$

Lembremos que pelo Corolário 2.3.24, se M possui curvatura seccional constante C podemos escrever o tensor curvatura como

$$R(X, X)Z = C(\langle Z, X\rangle Y - \langle Z, Y\rangle X).$$

Com isso, temos a seguinte consequência:

Corolário 3.2.10. *Se a variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante C, então para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos:*

1. *Equação de Gauss*

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle = C(\langle Z,X\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Z,Y\rangle\langle X,W\rangle)\\ + \ \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle - \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle;\end{aligned}$$

2. *Equação de Codazzi*

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z).$$

3.2.1 Hipersuperfícies tipo-espaço

Agora reescreveremos as equações básicas das imersões isométricas apresentadas na seção anterior para o caso em que o espaço ambiente $\overline{M}$ é uma variedade Lorentziana $(n+1)$-dimensional e M é uma hipersuperfície tipo-espaço imersa.

Definição 3.2.11. *Uma imersão suave $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade n-dimensional conexa em uma variedade de Lorentz $(n+1)$-dimensional é dita uma hipersuperfície tipo-espaço quando a métrica induzida pela imersão x em M^n for Riemanniana. E neste caso denotemos a métrica de M e $\overline{M}$ por $\langle , \rangle$.*

De agora em diante, $\overline{M}^{n+1}$ denotará uma variedade de Lorentz e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\overline{M}^{n+1}$. Vamos supor que foi fixada uma orientação N para a hipesuperfície tipo-espaço, isto é, um campo suave normal e unitário, globalmente definido em M^n. Nos referiremos à N como sendo a *Aplicação Normal de Gauss* de M.

Uma vez que há apenas uma direção normal, deixaremos de escrever o subíndice em no operador de Weingarten A para denotar a direção normal. Com exceção da métrica, denotaremos por $\overline{\nabla}$ e $\overline{R}$ a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de $\overline{M}$, respectivamente, e por ∇ e R a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de M respectivamente.

Então dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, não é difícil ver que a fórmula de Gauss (3.1) se escreve como:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y\rangle N. \tag{3.3}$$

Por outro lado, uma vez que N é um campo unitário e normal, temos

$$0 = X\langle N, N\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle = 0,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim,

$$(\overline{\nabla}_X N)^{\perp} = -\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle N = 0.$$

Logo, podemos escrever a fórmula de Weingarten da seguinte forma

$$\overline{\nabla}_X N = (\overline{\nabla}_X N)^{\top} = -AX. \tag{3.4}$$

Assim, a curvatura média H é dada por

$$H = -\frac{1}{n} tr(A).$$

Definição 3.2.12. *Seja M^n uma subvariedade de $\overline{M}^m$. Dizemos que uma imersão isométrica M^n é máxima em $p \in M$ quando $H(p) = 0$ e que M^n é uma subvariedade máxima quando é máxima em todos os pontos de M.*

Usando o fato que

$$\alpha(X, Y) = -\ \langle AX, Y\rangle N,$$

podemos ver que a equação de Gauss pode ser escrita como

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^{\top} + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX, \tag{3.5}$$

e a equação de Codazzi por

$$(\overline{R}(X, Y)N)^{\top} = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y, \tag{3.6}$$

onde pela Definição 2.3.17, ∇A satisfaz

$$\nabla A(Y, X) = (\nabla_X A)Y = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.7}$$

No caso em que a curvatura seccional de $\overline{M}$ é constante C, as equações de Gauss e Codazzi são, respectivamente

$$R(X, Y)Z = C(\langle Z, X\rangle Y - \langle Z, Y\rangle X) + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX$$

e

$$(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y.$$

3.3 CAMPOS CONFORMES

Definição 3.3.1. *Uma campo vetorial tangente $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é dito um campo conforme se a derivada de Lie da métrica Lorentziana com respeito a Y satisfaz*

$$\mathcal{L}_Y\langle , \rangle = 2\phi\langle , \rangle,$$

para alguma função suave $\phi \in C^\infty(M)$.

O resultado que mostraremos agora caracteriza os campos conformes.

Lema 3.3.2. *Um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é conforme se, e somente se,*

$$\langle \nabla_V Y, W\rangle + \langle \nabla_W Y, V\rangle = 2\phi\langle V, W\rangle,$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ e para alguma função suave $\phi \in C^\infty(M)$.

Demonstração. De fato, sendo $\mathcal{L}_Y$ um tensor derivação podemos usar a Definição 2.3.17, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y\langle V, W\rangle &= Y\langle V, W\rangle - \langle \mathcal{L}_Y(V), W\rangle - \langle V, \mathcal{L}_Y(W)\rangle \\
&= \langle \nabla_Y V, W\rangle + \langle V, \nabla_Y W\rangle - \langle [Y, V], W\rangle - \langle V, [Y, W]\rangle \\
&= \langle \nabla_Y V, W\rangle + \langle V, \nabla_Y W\rangle - \langle \nabla_Y V, W\rangle \\
&\quad + \ \langle \nabla_V Y, W\rangle - \langle V, \nabla_Y W\rangle + \langle V, \nabla_W Y\rangle \\
&= \langle \nabla_V Y, W\rangle + \langle \nabla_W Y, V\rangle.
\end{aligned}$$

Logo pela definição (3.3.1) temos

$$\langle \nabla_V Y, W\rangle + \langle \nabla_W Y, V\rangle = 2\phi\langle V, W\rangle,$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. ■

Como consequência do Lema 3.3.2 acima temos que se a função conforme ϕ é identicamente nula, Y é dito um *campo de Killing*.

Definição 3.3.3. *Numa variedade semi-Riemanniana M um campo conforme K é dito fechado se, para qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ temos $\nabla_V K = \phi V$, onde ϕ é uma função suave em M.*

4 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção apresentaremos os resultados principais desta dissertação. Antes disso, faremos uma breve apresentação do espaço ambiente bem como suas propriedades.

4.1 ESPAÇOS-TEMPO PP-WAVE

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz munida de um campo de vetores ξ tipo-luz e paralelo, isto é

$$\langle \xi, \xi \rangle = 0, \quad \xi \neq 0 \quad \textit{tal que} \quad \overline{\nabla}\xi = 0.$$

Observemos que $\overline{M}^{n+1}$ é temporalmente orientado, de fato, podemos munir $\overline{M}^{n+1}$ com uma orientação temporal escolhendo como cone futuro o que contém esse campo vetorial tipo-luz em sua fronteira. Assim, se $\overline{M}^{n+1}$ é também conexo, ele se converte em um espaço-tempo. Seguindo a terminologia usada em (STEPHANI et al., 2003), chamaremos $\overline{M}^{n+1}$ de uma espaço-tempo pp-wave. Convém observar aqui que esta notação não é universalmente aceita, havendo alguns autores que chamam $\overline{M}^{n+1}$ de espaço-tempo de Brinkmann (BLANCO O; SáNCHEZ; SENOVILLA J, 2013).

Proposição 4.1.1. *Se V é um campo vetorial conforme fechado e tipo-luz de uma variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+1}$, então V é paralelo.*

Demonstração. Se V é um campo conforme, segue da Definição 3.3.3 que

$$\mathcal{L}_V g = 2\phi g,$$

onde ϕ é uma função suave e $g = \langle\,,\rangle$ denota a métrica Lorentziana de $\overline{M}^{n+1}$. Assim, se V é localmente um campo gradiente (fechado),

$$\overline{\nabla}_X V = \phi X, \tag{4.1}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Agora, por V ser um campo vetorial tipo-luz em $\overline{M}$, temos de (4.1),

$$0 = X\langle V, V\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X V, V\rangle = 2\phi\langle X, V\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Logo, $\phi V = 0$. Como V é não nulo, devemos ter que ϕ é identicamente nulo. Portanto, de (4.1), segue que V é um campo paralelo. ■

4.1.1 Hipersuperfícies tipo-espaço em um espaço-tempo pp-wave

Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa isometricamente no espaço-tempo pp-wave $\overline{M}^{n+1}$.

Podemos decompor o campo vetorial paralelo e tipo-luz globalmente definido ξ ao longo de M^n em sua parte tangente e normal, isto é

$$\xi = \xi^\top + \xi^\perp. \tag{4.2}$$

Para simplificar a notação, a partir de agora denotaremos $T := \xi^\top$. Assim, da fórmula de Pitágoras, segue a seguinte identidade:

$$0 = \langle \xi, \xi \rangle = |T|^2 + \langle \xi^\perp, \xi^\perp \rangle.$$

Proposição 4.1.2. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade de Lorentz munida de um campo vetorial tipo-luz e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa isometricamente em $\overline{M}^{n+1}$. Então M^n é orientada.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que $\xi^\perp$ é um campo vetorial tipo-tempo, isto é,

$$\langle \xi^\perp, \xi^\perp \rangle = -|T|^2 < 0, \tag{4.3}$$

Afirmamos que o campo vetorial

$$N := \frac{1}{\sqrt{\langle T, T \rangle}} \xi^\perp. \tag{4.4}$$

é suave, unitário e tipo-tempo. Com efeito, a suavidade segue do modo como N foi definido em (4.4) e para mostrar que é unitário temos,

$$\begin{aligned}
\langle N, N \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\langle T, T \rangle}} \xi^\perp, \frac{1}{\sqrt{\langle T, T \rangle}} \xi^\perp \right\rangle \\
&= \frac{1}{\langle T, T \rangle} \langle \xi^\perp, \xi^\perp \rangle \\
&= \frac{1}{\langle T, T \rangle} (-\langle T, T \rangle) = -1,
\end{aligned}$$

mostrando o afirmado.

Assim definido, N é um campo vetorial tipo-tempo, normal e unitário. Portanto M^n é orientada. ■

Observemos que T nunca se anula. Lembremos que a existência de um campo vetorial que nunca se anula pode dar algumas obstruções topologicas quando a hipersuperfície M^n é compacta. De fato, o teorema de Poicaré-Hopf nos assegura que uma variedade Riemanniana compacta munida de um campo vetorial que nunca se anula deve possuir característica de Euler igual a zero. Neste sentido, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.1.3. *Considere a variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+2}$ dada pelo produto $\Sigma^n \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, dotado da métrica Lorentziana*

$$\langle , \rangle = \langle \, , \rangle_\Sigma + 2d\alpha d\nu + \mathcal{H}(x,\alpha)d\alpha^2, \quad x \in \Sigma^n,$$

onde $(\Sigma^n, \langle \, , \rangle_\Sigma)$ é uma variedade Riemanniana compacta, $\mathbb{S}^1$ a esfera unitária, α uma coordenada angular em $\mathbb{S}^1$ e $\nu \in \mathbb{R}$. Não é difícil ver que na métrica acima ∂_ν é um campo paralelo. Além disso, ele é tipo-luz em $\overline{M}^{n+2}$, pois

$$\begin{aligned}
\langle \partial_v, \partial_v \rangle &= \langle \partial_\nu, \partial_\nu \rangle_\Sigma + 2d\alpha d\nu(\partial_\nu, \partial_\nu) + \mathcal{H}(x,\alpha)d\alpha^2(\partial_\nu, \partial_\nu)\\
&= (d\alpha \otimes d\nu)(\partial_\nu, \partial_\nu) + (d\nu \otimes d\alpha)(\partial_\nu, \partial_\nu) + \mathcal{H}(\alpha, x)(d\alpha \otimes d\alpha)(\partial_\nu, \partial_\nu)\\
&= dx(\partial_\nu)dx(\partial_\nu) + d\alpha(\partial_\nu)d\nu(\partial_\nu) + d\nu(\partial_\nu)d\alpha(\partial_\nu) + \mathcal{H}(x,\alpha)d\alpha(\partial_\nu)d\alpha(\partial_\nu)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade foi usada a fórmula do produto simétrico.

Além disso, $\overline{M}^{n+2}$ admite uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, de fato, veja que $\Sigma^n \times \mathbb{S}^1$ é uma hipersuperfície compacta de $\overline{M}^{n+2}$, assim se assumirmos que $\mathcal{H}$ é positiva, teremos que a métrica induzida sobre $\Sigma^n \times \mathbb{S}^1$ é Riemanniana e consequentemente espacial. Por fim, veja que $\Sigma^n \times \mathbb{S}^1$ possui característica de Euler igual a zero, pois, $\chi(\Sigma^n \times \mathbb{S}^1) = \chi(\Sigma^n) \cdot \chi(\mathbb{S}^1) = 0$, uma vez que $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$.

Por (4.2), podemos escrever

$$\xi = T - \langle N, \xi \rangle N. \tag{4.5}$$

De fato, segue de (4.3) e (4.4) que

$$\langle N, \xi \rangle N = \langle \xi^\perp, \xi^\perp \rangle \frac{\xi^\perp}{|T|^2} = -\xi^\perp.$$

Tomando a derivada covariante acima com respeito ao campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ segue das fórmulas de Gauss e Weingarten,

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\nabla}_X \xi &= \overline{\nabla}_X (T - \langle N, \xi\rangle N) \\ &= \overline{\nabla}_X T - X\langle N, \xi\rangle N - \langle N, \xi\rangle \overline{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X T + \alpha(X, T) + \langle A(X), T\rangle N + \langle N, \xi\rangle A(X). \end{aligned}$$

onde foi usado que ξ é um campo paralelo. Decompondo em parte tangente e normal,

$$\nabla_X T = -\langle N, \xi\rangle A(X) \quad \text{e} \quad \alpha(X, T) = -\langle A(X), T\rangle N. \tag{4.6}$$

De agora em diante consideremos a função $\eta = \langle N, \xi\rangle$. Como η é sempre não nula, escolhamos a orientação N de M^n tal que $\eta > 0$. Nesta configuração, temos

Proposição 4.1.4. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa isometricamente em $\overline{M}^{n+1}$. Então*

$$\Delta \eta = n\langle \nabla H, T\rangle + \eta \left(\overline{Ric}(N, N) + |A|^2\right), \tag{4.7}$$

onde $|\cdot|$ denota a norma de Hilbert-Schimidt de A definida por $|A|^2 = tr(A^2)$.

Demonstração. Primeiramente afirmamos que

$$\nabla \eta = -A(T). \tag{4.8}$$

De fato, seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Pela Definição 2.3.28, escrevemos

$$\langle \nabla \eta, X\rangle = X(\eta) = X\langle N, \xi\rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, \xi\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X \xi\rangle = \langle -A(X), T\rangle = \langle X, -A(T)\rangle.$$

Como a métrica é não degenerada e X arbitrário segue a igualdade em afirmada.

Consideremos agora $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em M^n. Pela Definição 2.3.33 e (3.7), temos que

$$div(A(T)) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} A(T), E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} A)T, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A(\nabla_{E_i} T), E_i\rangle.$$

Por outro lado, usando (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} div(A(T)) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} A)T, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A(-\langle N, \xi\rangle A(E_i)), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} A)T, E_i\rangle - \langle N, \xi\rangle \sum_{i=1}^{n} \langle A^2(E_i), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} A)T, E_i\rangle - \langle N, \xi\rangle tr(A^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} A)T, E_i\rangle - \langle N, \xi\rangle |A|^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pela equação de Codazzi 3.6,

$$\langle(\nabla_{E_i}A)T,E_i\rangle = \langle(\nabla_T A)E_i,E_i\rangle + \langle\overline{R}(T,E_i)N,E_i\rangle, \tag{4.10}$$

onde $\overline{R}$ denota o tensor curvatura de $\overline{M}^{n+1}$. Substituindo (4.10) em (4.9),

$$\begin{aligned} div(AT) &= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_T A)E_i,E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(T,E_i)N,E_i\rangle - \langle N,\xi\rangle|A|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_T A)E_i,E_i\rangle - \overline{Ric}(T,N) - \langle N,\xi\rangle|A|^2, \end{aligned} \tag{4.11}$$

com $\overline{Ric}$ denotando o tensor curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$.

Por outro lado, seja $p \in M^n$, consideremos o referencial $\{E_1,...,E_n\}$ geodésico em p, isto é, $(\nabla_{E_j}E_i)(p) = 0$, $1 \leq i,j \leq n$. Assim, o primeiro termo de (4.11) é dado por

$$\begin{aligned} \langle\nabla H,T\rangle = T(H) &= T\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle A(E_i),E_i\rangle\right) \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle\nabla_T(A(E_i)),E_i\rangle + \langle A(E_i),\nabla_T E_i\rangle\right) \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\langle\nabla_T(A(E_i)),E_i\rangle + \langle E_i,A(\nabla_T E_i\rangle\right) \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_T A)E_i,E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle A(\nabla_T E_i),E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle A(\nabla_T E_i),E_i\rangle \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_T A)E_i,E_i\rangle, \end{aligned}$$

onde usamos que,

$$\nabla_T E_i = \nabla_{\left(\sum_j\langle T,E_j\rangle E_j\right)}E_i = \sum_j\langle T,E_j\rangle\nabla_{E_j}E_i = 0.$$

Logo,

$$div(A(T)) = -n\langle\nabla H,T\rangle - \overline{Ric}(T,N) - \langle N,\xi\rangle|A|^2, \tag{4.12}$$

De (2.15) e (4.8)

$$\Delta\eta = div(\nabla\eta) = -div(A(T)), \tag{4.13}$$

e segue de (4.13) e (4.12)) que o laplaciano da função η é dado por

$$\Delta\eta = n\langle\nabla H,T\rangle + \overline{Ric}(T,N) + \eta|A|^2. \tag{4.14}$$

Além disso, pela linearidade do tensor curvatura de Ricci,

$$\overline{Ric}(\xi,N) = \overline{Ric}(T - \langle N,\xi\rangle N,N) = \overline{Ric}(T,N) - \langle N,\xi\rangle\overline{Ric}(N,N).$$

Uma vez que ξ é paralelo, temos que $\overline{Ric}(\xi, N) = 0$, dai

$$\overline{Ric}(T, N) = \eta \overline{Ric}(N, N). \tag{4.15}$$

Portanto, inserindo (4.15) em (4.14), concluimos que

$$\Delta\eta = n\langle \nabla H, \xi \rangle + \eta \left(\overline{Ric}(N, N) + |A|^2 \right). \tag{4.16}$$

■

Antes de mostra uma aplicação deste resultado, necessitaremos da seguinte definição:

Definição 4.1.5. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo. Dizemos que $\overline{M}^{n+1}$ obedece:*

(i) A Condição de Convergencia tipo-tempo (TCC) se

$$\overline{Ric}(X, X) \geq 0,$$

para todo campo tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

(ii) A Condição de Convergencia tipo-luz (NCC) se

$$\overline{Ric}(Z, Z) \geq 0,$$

para todo campo tipo-luz $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Proposição 4.1.6. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave satisfazendo a TCC e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média constante. Então, a função η é constante se, e somente se, M^n é totalmente geodésica.*

Demonstração. Como M^n possui curvatura média constante, segue da Proposição 4.1.4

$$\Delta\eta = \eta(\overline{Ric}(N, N) + |A|^2).$$

Sendo η uma constante, temos que $\Delta\eta = 0$. Além disto, como $\eta > 0$

$$\overline{Ric}(N, N) + |A|^2 = 0, \tag{4.17}$$

o TCC nos garante que $\overline{Ric}(N, N) \geq 0$. Então, segue de (4.17) que ,$\overline{Ric}(N, N) = 0$ *e* $|A|^2 = 0$, isto é, $A = 0$ e consequentemente M^n é totalmente geodésica.

Para a reciproca, se M^n é totalmente geodésica de (4.8) temos que

$$\nabla\eta = -A(T) = 0.$$

Pela Proposição 2.3.32, se $\nabla\eta = 0$ em M^n, então η é constante. ■

Agora estamos em condições de mostrar o seguinte resultado de Rigidez:

Teorema 4.1.7. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ um espaço-tempo pp-wave satisfazendo a TCC e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço fechada. Se M^n possui curvatura média constante, então ela deve ser totalmente geodésica. Como uma consequência direta, não existe hipersuperfície tipo-espaço fechadas em $\overline{M}^{n+1}$ cuja curvatura média é diferente de zero.*

Demonstração. Uma vez que M^n possui curvatura média constante, (4.16) se escreve como

$$\Delta\eta = \eta\left(\overline{Ric}(N,N) + |A|^2\right),$$

Tomando a integral em ambos os lado e aplicando o Teorema da Divergência 2.3.39,

$$0 = \int_M \Delta\eta\, dM = \int_M \eta\{\overline{Ric}(N,N) + |A|^2\}dM. \tag{4.18}$$

Sendo $\eta > 0$ e $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz a TCC, segue que

$$\eta\left(\overline{Ric}(N,N) + |A|^2\right) \geq 0. \tag{4.19}$$

Consequentemente de (4.18),

$$\eta\left(\overline{Ric}(N,N) + |A|^2\right) = 0.$$

Como $\eta > 0$,

$$\overline{Ric}(N,N) + |A|^2 = 0. \tag{4.20}$$

Portanto, segue de (4.20) que $\overline{Ric}(N,N) = 0$ e $|A|^2 = 0$. Mostrando que $A = 0$, isto é, M^n é totalmente geodésica.

Para a segunda parte, suponhamos por absurdo que existe hipersuperfície tipo-espaço fechada tal que $H = const. \neq 0$. Então,

$$tr(A) = -nH \neq 0, \tag{4.21}$$

mas pelo que foi mostrado que $A = 0$ implicando em $tr(A) = 0$, chegando a um absurdo com (4.21). ■

Observação 4.1.8. *O Teorema 4.1.7 pode ser visto como uma consequência da Proposição 4.1.6. Uma vez que η é subharmonica por* (4.19)*, o Teorema 2.3.43 asseguranos que η é uma constante positiva. Logo a conclusão segue da Proposição 4.1.6.*

4.2 UMA EXTENSÃO DO TEOREMA DE CALABI-BERNSTEIN

Nesta seção lidaremos com pp-waves 3-dimensionais. Exemplos de espaços-tempo nestas condições pode ser encontrado em (BOUBEL; MOUNOUD, 2016) e (CHAICHI; GARCIA-RíO; VáZQUE-ABAL M,). Daremos agora um exemplo de uma hipersuperfície tipo-espaço maximal imersa nesse espaço.

Considere a variedade diferenciável

$$\mathbb{R}^3 = \{(u, v, x) : u, v, x \in \mathbb{R}\}$$

dotada com a família de métricas Lorentziana dada por

$$\overline{g} = \mathcal{H}(u, x)du^2 + 2dudv + dx^2. \tag{4.22}$$

Observemos que no caso em que $\mathcal{H}(u, x) = \mathcal{H} = cte$ (não-nula), temos o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$. De fato, considerando o Lorentz-Minkowski $(\mathbb{L}^3, \tilde{g})$ e tomando a base $\{u = (0, 0, \sqrt{\mathcal{H}}), v = (0, 1/\sqrt{\mathcal{H}}, -1/\sqrt{\mathcal{H}}), x = (1, 0, 0)\}$, temos que

$$\tilde{g}_{uu} = -\mathcal{H} \quad \tilde{g}_{uv} = \tilde{g}_{xx} = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{ux} = \tilde{g}_{vv} = \tilde{g}_{vx} = 0.$$

Assim, de (2.1) temos que,

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= -\mathcal{H}du^2 + dudv + dvdu + dx^2 \\ &= -\mathcal{H}du^2 + 2dudv + dx^2, \end{aligned}$$

ou seja, a expressão da métrica (4.22) em que $\mathcal{H} > 0$. Quando $\mathcal{H} < 0$, basta considerar a base escrevendo $\sqrt{-\mathcal{H}}$.

Vamos estudar os símbolos de Christoffel associado a métrica $\overline{g}$. Para isso, vamos obter os componentes da matriz $\overline{G} = (\overline{g}_{ij})_{3\times 3}$ associada a base $\{\partial_u, \partial_v, \partial_x\}$. Seguiremos a seguinte convenção de indices

$$1 \to u, \quad 2 \to v \quad \text{e} \quad 3 \to x.$$

Dessa forma a matrix das componentes da métrica é dada por,

$$\overline{G} = \begin{pmatrix} \overline{g}_{uu} & \overline{g}_{uv} & \overline{g}_{ux} \\ \overline{g}_{vu} & \overline{g}_{vv} & \overline{g}_{vx} \\ \overline{g}_{xu} & \overline{g}_{xv} & \overline{g}_{xx} \end{pmatrix}$$

em que

$$\begin{aligned} \overline{g}_{11} &= \overline{g}_{uu} = \overline{g}(\partial_u, \partial_u) \\ &= \mathcal{H}(u,x)du^2(\partial_u,\partial_u) + 2dudv(\partial_u,\partial_u) + dx^2(\partial_u,\partial_u) \\ &= \mathcal{H}(u,x)(du \otimes du)(\partial_u,\partial_u) + (du \otimes dv)(\partial_u,\partial_u) + (dv \otimes du)(\partial_u,\partial_u) \\ &\quad + (dx \otimes dx)(\partial_u,\partial_u) \\ &= \mathcal{H}(u,x)du(\partial_u)\dot{d}u(\partial_u) + du(\partial_u)dv(\partial_u) + dv(\partial_u)du(\partial_u) + dx(\partial_u)dx(\partial_u) \\ &= \mathcal{H}(u,x). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$\overline{g}_{xx} = \overline{g}_{uv} = 1 \quad \text{e} \quad \overline{g}_{vv} = \overline{g}_{ux} = \overline{g}_{vx} = 0. \tag{4.24}$$

Sendo $\overline{g}$ simétrica, segue de (4.23) e (4.24),

$$\overline{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}(u,x) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uma vez que $\overline{g}$ não degenerada a matriz $\overline{G}$ possui uma inversa a qual é dada por

$$\overline{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\mathcal{H}(u,x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtido os coeficientes da métrica, agora vamos calcular os símbolos de Christoffel da métrica $\overline{g}$. Antes disso, lembremos de (2.8) que

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad i,j,k = 1,2,3$$

Além disso, de (2.4)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}(\partial_i(\overline{g}_{mj}) + \partial_j(\overline{g}_{im}) - \partial_m(\overline{g}_{ij}))\overline{g}^{mk}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uu}^{v} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}(\partial_u(\overline{g}_{mu}) + \partial_u(\overline{g}_{um}) - \partial_m(\overline{g}_{uu}))\overline{g}^{mv} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_u(\overline{g}_{uu}) + \partial_u(\overline{g}_{uu}) - \partial_u(\overline{g}_{uu}))\overline{g}^{uv} + \frac{1}{2}(\partial_u(\overline{g}_{vu}) + \partial_u(\overline{g}_{uv}) - \partial_v(\overline{g}_{uu}))\overline{g}^{vv} \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_u(\overline{g}_{xu}) + \partial_u(\overline{g}_{ux}) - \partial_x(\overline{g}_{uu}))\overline{g}^{xv} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(u,x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{uu}^{x} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}(\partial_u(\overline{g}_{mu}) + \partial_u(\overline{g}_{um}) - \partial_m(\overline{g}_{uu}))\overline{g}^{mx} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_u(\overline{g}_{uu}) + \partial_u(\overline{g}_{uu}) - \partial_u(\overline{g}_{uu}))\overline{g}^{ux} + \frac{1}{2}(\partial_u(\overline{g}_{vu}) + \partial_u(\overline{g}_{uv}) - \partial_v(\overline{g}_{uu}))\overline{g}^{vx} \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_u(\overline{g}_{xu}) + \partial_u(\overline{g}_{ux}) - \partial_x(\overline{g}_{uu}))\overline{g}^{xx} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(u,x),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{xu}^{v} = \Gamma_{ux}^{v} &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}(\partial_u(\overline{g}_{mx}) + \partial_x(\overline{g}_{um}) - \partial_m(\overline{g}_{ux}))\overline{g}^{mv} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_u(\overline{g}_{ux}) + \partial_x(\overline{g}_{uu}) - \partial_u(\overline{g}_{ux}))\overline{g}^{uv} + \frac{1}{2}(\partial_u(\overline{g}_{vx}) + \partial_x(\overline{g}_{uv}) - \partial_v(\overline{g}_{ux}))\overline{g}^{vv} \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_u(\overline{g}_{xx}) + \partial_x(\overline{g}_{ux}) + \partial_x(\overline{g}_{ux}))\overline{g}^{xv} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(u,x).
\end{aligned}$$

De modo análogo, podemos verificar que os outros símbolos são identicamente nulos.

Agora vamos obter o tensor de curvatura. Para isso recordemos que

$$\overline{R}_{ijks} = \langle \overline{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_s \rangle,$$

é dado por

$$\overline{R}_{ijks} = \sum_{l=1}^{n} \overline{R}_{ijk}^{l}\overline{g}_{ls}$$

onde,

$$\overline{R}_{ijk}^{s} = \sum_{l=1}^{3}\Gamma_{ik}^{l}\Gamma_{jl}^{s} - \sum_{l=1}^{3}\Gamma_{jk}^{l}\Gamma_{il}^{s} + \partial_j\Gamma_{ik}^{s} - \partial_j\Gamma_{jk}^{s}.$$

Portanto das relações (2.10), obtemos

$$\overline{R}_{uxux} = -\overline{R}_{xuux} = -\overline{R}_{uxxu} = \overline{R}_{xuxu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}(u,x).$$

enquanto os outros índices são identicamente nulos

As componentes da curvatura de Ricci segue de

$$\overline{R}_{ik} = \sum_{j=1}^{3} \overline{R}^{j}_{ijk} = \sum_{s,j=1}^{3} \overline{R}_{ijks}\overline{g}^{sj}.$$

Assim, usando as compenentes do tensor curvatura obtidas previamente, obtemos que única compente não nula é

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{uu} &= \sum_{s,j=1}^{n} \overline{R}_{ujus}\overline{g}^{sj} \\
&= \sum_{s=1}^{n} (\overline{R}_{uuus}\overline{g}^{su} + \overline{R}_{uvus}\overline{g}^{sv} + \overline{R}_{uxus}\overline{g}^{sx}) \\
&= \overline{R}_{uvuu}\overline{g}^{uv} + \overline{R}_{uvuv}\overline{g}^{vv} + \overline{R}_{uxux}\overline{g}^{xx} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}(u, x).
\end{aligned}$$

Portanto, a forma local para a curvatura de Ricci dessa família de métricas será dada por

$$\overline{Ric} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} du \otimes du.$$

Supondo que a função $\mathcal{H}$ é tal que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}(p) \neq 0,$$

para algum ponto p, concluímos que esta famíla de métricas admite espaços-tempos que não são isométricos ao $\mathbb{R}^3$ e que admite campo vetorial paralelo tipo-luz global.

Além disso, podemos dar exemplos de hipersuperfícies máximas fechadas em espaços-tempos da família anterior, que não são isométricas ao $\mathbb{L}^3$.

Exemplo 4.2.1. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função suave e $c \in \mathbb{R}$ um valor regular de F. Pela Proposição 2.1.10, o conjunto de nível $\Sigma^2 = F^{-1}(c)$ é uma hipersuperfície fechada em $\mathbb{R}^3$.*

Encontraremos agora o campo $\overline{\nabla} F$. Aplicando os cálculos feitos previamente, ob-

temos de (2.13)

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla} F &= \sum_{i,j}^{3} \overline{g}^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \partial_j \\
&= \sum_{j}^{3} \left(\overline{g}^{uj} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial u} + \overline{g}^{vj} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v} + \overline{g}^{xj} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&= \left(\overline{g}^{uu} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} + \overline{g}^{vu} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} + \overline{g}^{xu} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&\quad + \left(\overline{g}^{uv} \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} + \overline{g}^{vv} \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} + \overline{g}^{xv} \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&\quad\quad + \left(\overline{g}^{ux} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \overline{g}^{vx} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} + \overline{g}^{xx} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

Calculando o produto escalar,

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F \rangle &= \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 \overline{g}_{uu} + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial v} \right) \overline{g}_{uv} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial x} \overline{g}_{ux} \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial v} \right) \overline{g}_{uv} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 \overline{g}_{vv} + \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial v} \right) \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial x} \overline{g}_{ux} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial v} \right) \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \overline{g}_{xx} \\
&= \mathcal{H} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \\
&= 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} - \mathcal{H} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Portanto, está hipersuperfície é tipo-espaço com a métrica induzida, se e somente se o campo vetorial $\overline{\nabla} F$ *é tipo-tempo em* Σ^2 *o que significa pedir*

$$
2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} - \mathcal{H} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 < 0.
$$

Agora, se denotarmos por A_n *o operador de forma em* Σ^2 *associado ao campo vetorial normal unitário*

$$
n = \frac{1}{|\overline{\nabla} F|} \overline{\nabla} F
$$

pelo Lema (2.3.36) temos que

$$\begin{aligned}
\langle A_n(w_1), w_2\rangle &= \langle -\overline{\nabla}_{w_1} n, w_2\rangle \\
&= -w_1\langle n, w_2\rangle + \langle n, \overline{\nabla}_{w_1} w_2\rangle \\
&= -w_1\left\langle \frac{\overline{\nabla} F}{|\overline{\nabla} F|}, w_2\right\rangle + \left\langle \frac{\overline{\nabla} F}{|\overline{\nabla} F|}, \overline{\nabla}_{w_1} w_2\right\rangle \\
&= -\frac{w_1}{|\overline{\nabla} F|}\langle \overline{\nabla} F, w_2\rangle + \frac{1}{|\overline{\nabla} F|}\langle \overline{\nabla} F, \overline{\nabla}_{w_1} w_2\rangle \\
&= \frac{-w_1(w_2(F)) + (\overline{\nabla}_{w_1} w_2)(F)}{|\overline{\nabla} F|} \\
&= \frac{-(\overline{Hess}F)(w_1, w_2)}{|\overline{\nabla} F|},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde $\overline{Hess}F$ *denota o hessiano da função* F *em* $(\mathbb{R}^3, \overline{g})$ *e* $w_1, w_2 \in T_p\Sigma$.

A partir dos símbolos de Christoffell vamos determinar a conexão associada a métrica $\overline{g}$. *Lembremos que* $\overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \overline{\nabla}_{\partial_j}\partial_i$ *e usando (2.3),* $\overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\partial_k$, *temos que as únicas conexões não nulas são*

$$\overline{\nabla}_{\partial_u}\partial_u = \sum_{k=1}^{3}\Gamma_{uu}^k\partial_u = \Gamma_{uu}^u\partial_u + \Gamma_{uu}^v\partial_v + \Gamma_{uu}^x\partial_u = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}$$

e

$$\overline{\nabla}_{\partial_u}\partial_x = \sum_{k=1}^{3}\Gamma_{ux}^k\partial_k = \Gamma_{ux}^u\partial_u + \Gamma_{ux}^v\partial_v + \Gamma_{ux}^x\partial_x = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Tomando $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ *e definindo*

$$W_1 = w_1^u\partial_u + w_1^v\partial_v + w_1^x\partial_x \quad e \quad W_2 = w_2^u\partial_u + w_2^v\partial_v + w_2^x\partial_x,$$

temos pela Definição 2.3.35

$$(\overline{Hess}F)(W_1, W_2) = \langle \overline{\nabla}_{W_1}\overline{\nabla} F, W_2\rangle, \tag{4.27}$$

em que

$$\overline{\nabla}_{W_1}\overline{\nabla} F = \left(\overline{\nabla}_{W_1}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Pela Definição (2.3.10), temos que

$$\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_{W_1}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&\qquad = \overline{\nabla}_{W_1}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \overline{\nabla}_{W_1}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \mathcal{H}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v} + \overline{\nabla}_{W_1}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Como as únicas conexões não nulas são $\overline{\nabla}_{\partial_u}\partial_u$ e $\overline{\nabla}_{\partial_u}\partial_x$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{W_1}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} =&\overline{\nabla}_{w_1^u\partial_u}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}+\overline{\nabla}_{w_1^x\partial_x}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\\
&= w_1^u\left(\frac{\partial F}{\partial v}\overline{\nabla}_{\partial_u}\partial_u\right)+w_1^x\left(\frac{\partial F}{\partial v}\overline{\nabla}_{\partial_x}\partial_u\right)+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\\
&= \frac{1}{2}w_1^u\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}-\frac{1}{2}w_1^u\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}w_1^x\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}$$

Analogamente, como $\overline{\nabla}_{\partial_v}\partial_i = 0$ para $i = u, v, x$ vemos que

$$\overline{\nabla}_{W_1}\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\mathcal{H}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v} = W_1\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\mathcal{H}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{W_1}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} &= w_1^u\left(\frac{\partial F}{\partial x}\overline{\nabla}_{\partial_u}\partial_x\right)+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\\
&= \frac{1}{2}w_1^u\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{W_1}\overline{\nabla}F = &\frac{1}{2}w_1^u\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}-\frac{1}{2}w_1^u\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}w_1^x\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\\
&+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\mathcal{H}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v}+\frac{1}{2}w_1^u\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Por fim, fazendo o produto escalar com W_2 , obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\overline{\nabla}_{W_1}\overline{\nabla}F, W_2\rangle = &W_1\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)(\mathcal{H}w_2^u+w_2^v)+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\mathcal{H}\frac{\partial F}{\partial v}\right)w_2^u\\
&+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{1}{2}w_1^uw_2^u\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}-\frac{1}{2}w_1^uw_2^x\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}+\frac{1}{2}w_1^xw_2^u\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)\\
&+W_1\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)w_2^x+\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\left(w_1^uw_2^u\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Agora, considere o espaço-tempo pp-wave $\mathbb{R}^3$ com a métrica dado em (4.22) tomando $\mathcal{H}$ como uma função positiva tal que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(p) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}(p) \neq 0,$$

para algum ponto $p \in \mathbb{R}^3$. Para $\lambda \in \mathbb{R}^+$, considere

$$F(u, v, x) = \lambda v.$$

Levando em conta (4.25) *e* (4.27) *a hipersuperfície* $F^{-1}(c)$ *é tipo-espaço. Lembremos que*

$$tr(T) := \sum_{i=1}^{n} \langle T(e_i), e_i \rangle$$

é o traço de um operador T, *onde* $e_1, ..., e_n$ *é um referencial ortonormal. Deste modo, para o nosso exemplo segue que* $tr(A_n) = \sum_{i=1}^{2} \langle A_n(W_i), W_i \rangle$.

Fazendo o produto escalar por W_1 *em* (4.28), *obtemos*

$$\begin{aligned}(\overline{Hess}F)(W_1, W_1) &= \frac{1}{2}\lambda w_1^u w_1^x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \frac{1}{2}\lambda w_1^u w_1^x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + W_1(-\lambda\mathcal{H}) w_1^u \\ &= -\lambda w_1^u w_1^x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \lambda w_1^u w_1^x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0.\end{aligned}$$

Assim, por (4.26) $\langle A_n(W_1), W_1 \rangle = 0$. *De modo análogo, vemos que* $\langle A_n(W_2), W_2 \rangle = 0$. *Portanto,* $tr(A_n) = 0$ *e* $F^{-1}(c)$ *é máximal.*

Agora que já sabemos da existencia de hipersuperfícies tipo-espaço máximas nesses espaços-tempo *pp*-wave, podemos considerar S^2 uma superfície tipo-espaço máximal. A partir disso, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.2.2. *Sejam* $\overline{M}^3$ *um espaço-tempo pp-wave satisfazendo a TCC e* $x : S^2 \to \overline{M}^3$ *uma superfície completa e maximal. Então* S^2 *é parabólica.*

Demonstração. Considere ξ um campo vetorial tipo-luz paralelo e $\beta = \{E_1, E_2\}$ um referencial ortormal para S^2. Sendo N normal e unitário, podemos completar este referencial de modo que $\{E_1, E_2, N\}$ é um referencial ortonormal em $\overline{M}^3$. Usando a Proposição 3.2.6, obtemos da equação de Gauss (3.5),

$$R(T, E_i)T = (\overline{R}(T, E_i)T)^{\top} + \langle A(T), T \rangle A(E_i) - \langle A(E_i), T \rangle A(T).$$

Tomando o produto escalar com E_i e somando em $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} \langle R(T, E_i)T, E_i \rangle &= \sum_{i=1}^{2} \langle \overline{R}(T, E_i)T, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{2} \langle A(T), T \rangle \langle A(E_i), E_i \rangle \\ &- \sum_{i=1}^{2} \langle \langle A(E_i), T \rangle A(T), E_i \rangle.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Observemos que,

$$\overline{Ric}(T, T) = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i \langle \overline{R}(T, E_i)E_i, T \rangle = \sum_{i=1}^{2} \langle \overline{R}(T, E_i)E_i, T \rangle - \langle \overline{R}(T, N)N, T \rangle$$

assim, de (4.29) segue que

$$\begin{aligned}
Ric(T,T) = &-\sum_{i=1}^{2}\langle \overline{R}(T,E_i)T,E_i\rangle + \langle \overline{R}(T,N)N,T\rangle - \langle \overline{R}(T,N)N,T\rangle \\
&-\sum_{i=1}^{n}\langle A(T),T\rangle\langle A(E_i),E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\langle A(E_i),T\rangle A(T),E_i\rangle \\
= &\,\overline{Ric}(T,T) + \langle \overline{R}(T,N)N,T\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle A(T),T\rangle\langle A(E_i),E_i\rangle \\
&+\sum_{i=1}^{n}\langle\langle A(E_i),T\rangle A(T),E_i\rangle.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Observemos que os termos da identidade acima podem ser escritos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\langle\langle A(E_i),T\rangle A(T),E_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle A(T),E_i\langle A(E_i),T\rangle\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle A(T),E_i\langle E_i,A(T)\rangle\rangle \\
&= \langle A(T),A(T)\rangle
\end{aligned}$$

e, como S^2 é maximal

$$\sum_{i=1}^{2}\langle A(T),T\rangle\langle A(E_i),E_i\rangle = \langle A(T),T\rangle\sum_{i=1}^{2}\langle A(E_i),E_i\rangle = 2H\langle A(T),T\rangle = 0.$$

Portanto, de (4.30) segue que

$$Ric(T,T) = \overline{Ric}(T,T) + \langle \overline{R}(T,N)N,T\rangle + \langle A^2(T),T\rangle. \tag{4.31}$$

Uma vez que toda superfície é uma variedade de Einstein, seu tensor curvatura de Ricci satisfaz

$$Ric(T,T) = K|T|^2 = K\eta^2. \tag{4.32}$$

Assim, de (4.5),

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(\xi,\xi) &= \overline{Ric}(T-\langle N,\xi\rangle N, T-\langle N,\xi\rangle N\rangle \\
&= \overline{Ric}(T,T) - 2\langle N,\xi\rangle\overline{Ric}(T,N) + \langle N,\xi\rangle^2\overline{Ric}(N,N).
\end{aligned}$$

Sendo $\overline{\nabla}\xi = 0$ e usando (4.15),

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}(T,T) &= 2\langle N,\xi\rangle\overline{Ric}(T,N) - \langle N,\xi\rangle^2\overline{Ric}(N,N) \\
&= 2\langle N,\xi\rangle^2\overline{Ric}(N,N) - \langle N,\xi\rangle^2\overline{Ric}(N,N) \\
&= \eta^2\overline{Ric}(N,N)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(T,N)N,T\rangle &= \langle \overline{R}(\xi+\langle N,\xi\rangle N,N)N,\xi+\langle N,\xi\rangle N\rangle \\ &= \langle \overline{R}(\xi,N)N,\xi\rangle + \langle \overline{R}(\xi,N)N,\langle N,\xi\rangle N\rangle \\ &\quad + \langle \overline{R}(\langle N,\xi\rangle N,N)N,\xi\rangle + \langle \overline{R}(\langle N,\xi\rangle N,N)N,\langle N,\xi\rangle N\rangle,\end{aligned} \tag{4.34}$$

em que

$$\langle \overline{R}(\langle N,\xi\rangle N,N)N,\xi\rangle = \langle N,\xi\rangle\langle \overline{R}(N,N)N,\xi\rangle = \langle N,\xi\rangle\langle \overline{R}(\xi,N)N,N\rangle.$$

Assim, de (4.34)

$$\langle \overline{R}(T,N)N,T\rangle = \langle \overline{R}(\xi,N)N,\xi\rangle + 2\eta\langle \overline{R}(\xi,N)N,N\rangle + \eta^2\langle \overline{R}(N,N)N,N\rangle = 0. \tag{4.35}$$

Portanto, substituindo, (4.32) e (4.33), (4.34) em (4.31) temos que

$$K\eta^2 = \eta^2\overline{Ric}(N,N) + \frac{1}{2}|A(T)|^2$$

e consequentemente,

$$K \geq \overline{Ric}(N,N),$$

uma vez que $\eta > 0$.

Finalmente, o TCC garante que $K \geq 0$, logo segue da Proposição 2.3.46 que S^2 é parabólica. ■

Agora, podemos afirmar

Teorema 4.2.3. *Sejam $\overline{M}^3$ um espaço tempo pp-wave satisfazendo a TCC e $x : S^2 \to \overline{M}$ uma superfície completa maximal. Então S^2 admite a função positiva e limitada η sendo constante se e somente se S^2 é totalmente geodésica.*

Demonstração. Para primeira implicação, observemos que Teorema de Cayley-Hamilton garantenos que

$$A^2 - tr(A)A + det(A)I = 0.$$

Como $tr(A) = -2H = 0$, segue que

$$A^2 = -det(A)I.$$

Tomando o traço em ambos os lados

$$|A|^2 = -det(A)tr(I) = -2det(A)$$

e assim,

$$det(A) = -\frac{1}{2}|A|^2.$$

Logo

$$A^2 = \frac{1}{2}|A|^2 I.$$

Portanto, segue de (4.8),

$$|\nabla\eta|^2 = \langle A^2(T), T\rangle = \frac{1}{2}|A|^2|T|^2 = \frac{1}{2}|A|^2\eta^2. \tag{4.36}$$

Como η é uma função constante

$$|\nabla\eta|^2 = \langle A^2(T), T\rangle = \frac{1}{2}|A|^2\eta^2 = 0.$$

Sendo η positiva , $|A|^2 = 0$ o que implica $A = 0$. Então, S é totalmente geodésica. Para a reciproca, se S^2 é totalmente geodésica, por (4.16)

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= 2\langle\nabla H, T\rangle + \eta\left(\overline{Ric}(N,N) + |A|^2\right)\\ &= \eta\overline{Ric}(N,N).\end{aligned} \tag{4.37}$$

O TCC garante que $\overline{Ric}(N,N) \geq 0$, e assim η é subharmonica. Pela Proposição 4.2.2 temos que S^2 é parabólica. Portanto, como η é positiva limitada, a Proposição 2.3.45 assegura-nos que η deve ser constante. ■

Podemos dar o seguinte resultado de rigidez.

Teorema 4.2.4. *Sejam $\overline{M}^3$ um espaço-tempo pp-wave satisfazendo a TCC e $x : S^2 \to \overline{M}^3$ uma superfície completa e maximal. Então S^2 é totalmente geodésica e flat.*

Demonstração. Pela Proposição 2.3.38 item (c), escrevemos

$$\Delta\left(\frac{1}{\eta}\right) = -\frac{1}{\eta^2}\Delta\eta + \frac{2}{\eta^3}|\nabla\eta|^2.$$

Assim, de (4.37) e (4.36),

$$\Delta\left(\frac{1}{\eta}\right) = -\frac{1}{\eta}\overline{Ric}(N,N) \leq 0.$$

Reescrevendo,

$$\Delta\left(-\frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{\eta}\overline{Ric}(N,N) \geq 0, \tag{4.38}$$

onde na última desigualdade foi usada a TCC.

Assim, $-1/\eta$ é uma função subharmônica limitada superiormente. Como S^2 é parabólica, devemos ter que $-1/\eta$ é constante. Consequentemente η é uma função positiva e constante. Pelo Teorema 4.2.3 segue que S^2 é totalmente geodésica.

Além disso, sendo η uma constante positiva, de (4.38)

$$0 = \Delta\left(-\frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{\eta}\overline{Ric}(N, N) \geq 0,$$

isto é, $\overline{Ric}(N, N) = 0$.

Substituindo em (4.39),

$$K\eta^2 = \eta^2\overline{Ric}(N, N) + |A(T)|^2 = 0. \tag{4.39}$$

Mostrando que S^2 é flat, o que conclui a demonstração. ■

Como consequência imediata obtemos o clássico teorema de Calabi–Bernstein.

Corolário 4.2.5. *As únicas superfícies completas maximais no espaço Lorentz–Minkowski* $\mathbb{L}^3$ *são os planos tipo-espaço.*

Demonstração. Seja S^2 uma superfície tipo-espaço completa e maximal no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$. Uma vez que $\mathbb{L}^3$ é um espaço-tempo pp-wave e satisfaz a TCC, pois é flat, segue do Teorema 4.2.4 que S^2 é totalmente geodésica. Como as únicas superfícies totalmente geodésicas tipo-espaço de $\mathbb{L}^3$ são os planos tipo-espaço segue o resultado. ■

REFERÊNCIAS

ALBUJER, A.; ALíAS L, J. Parabolicity of maximal surfaces in lorentzian product spaces. *Math*, p. 453–64, 2011.

ALEDO J, A.; ROMERO, A.; RUBIO R, M. The classical calabi–bernstein theorem revisited. *J. Math. Anal. Appl.*, p. 1172–7, 2015.

ALíAS L, J.; CAMINHA, A. On the scarcity of non-totally geodesic complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in a lie group with bi-invariant lorentzian metric. *Diff. Geom. and its App.*, p. 49–64, 2017.

ALíAS L, J.; PALMER, B. On the gaussian curvature of maximal surfaces and the calabi- bernstein theorem bull. *London Math. Soc.*, p. 454–8, 2001.

BERNSTEIN S, N. Sur une theorme de geometrie et ses applications aux derives parrtielles du type elliptique. *Comm. Inst. Sci. Math. Mech. Univ. Kharkov*, p. 38–45, 1915.

BLANCO O, F.; SáNCHEZ, M.; SENOVILLA J, M. M. Structure of second-order symmetric lorentzian manifolds. *J. Eur. Math. Soc.*, p. 595–634, 2013.

BOMBIERE, E.; GIORGI, E.; GIUSTI, E. Minimal cones and the bernstein problem. *Invent. Math*, p. 243–268, 1969.

BOUBEL, C.; MOUNOUD, P. Affine transformations and parallel lightlike vector fields on compact lorentzian 3-manifolds. *T. Am. Math. Soc*, 2016.

BRINKMANN, H. Einstein spaces which are mapped conformally on each othe. *Math. Ann.*, p. 119–45, 1925.

CABALLERO, M.; ROMERO, A.; RUBIO R, M. Uniqueness of maximal surfaces in generalized robertson–walker spacetimes and calabi–bernstein type problems. *J. Geom. Phys.*, p. 394–402, 2010.

CALABI, E. Examples of bernstein problems for some nonlinear equations. *Proc. Symp. Pure Math.*, p. 223–230, 1970.

CARMO M, P. *Geometria Riemanniana*. [S.l.]: IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

CHAICHI, M.; GARCIA-RíO, E.; VáZQUE-ABAL M, E. Three-dimensional lorenz manifolds admitting a parallel null vector field. *J. Phys. A*.

CHENG S, Y.; YAU S, T. Maximal space-like hypersurfaces in the lorentz–minkowski spaces. *Ann. Math.*, p. 407–19, 1976.

ESTUDILLO F, J. M.; ROMERO, A. Generalized maximal surfaces in lorentz–minkowski space. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, n. 515–24, 1992.

HUBER, A. On subharmonic functions and differential geometry in the large. *Commentarii Mathematici Helvetici*, p. 13–72, 1957.

MARSDEN J, E.; TIPLER F, J. Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity. *Phys. Rep.*, p. 109–39, 1980.

O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.* [S.l.]: Academic Press, New York, 1983.

PELEGRíN J, A. S.; ROMERO, A.; RUBIO R, M. On maximal hypersurfaces in lorentz manifolds admitting a parallel lightlike vector field. *Quant. Grav.*, p. 1–8, 2016.

ROMERO, A. Simple proof of calabi-bernstein's theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, p. 1315–7, 1996.

ROMERO, A.; RUBIO R, M. New proof of the calabi–bernstein theorem. *Geom. Dedicata*, p. 173–6, 2010.

SCHOEN, R.; SIMON, L.; YAU S, T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. *Acta Math*, p. 275–88, 1975.

STEPHANI, H.; KRAMER, D.; MACCALLUN, M.; HOENSELAERSAND, C.; HERLT, E. Exactly solutions of einstein's fields equations. *Cambridge University Press*, 2003.