

**EFEITOS DE VISUALIZAÇÃO EM ATIVIDADES DE COMPARAÇÃO
DE COMPRIMENTOS DE LINHAS ABERTAS**

PEDRO RIBEIRO BARBOSA

**EFEITOS DE VISUALIZAÇÃO EM ATIVIDADES DE COMPARAÇÃO
DE COMPRIMENTOS DE LINHAS ABERTAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

RECIFE
2007

Barbosa, Pedro Ribeiro

Efeitos de visualização em atividades de comparação de comprimentos de linhas abertas / Pedro Ribeiro Barbosa. – Recife : O Autor, 2007.

316 f. : il., tab.; quad.; gráficos.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE, 2007.

Inclui bibliografia e anexos.

1. Geometria - Grandezas. 2. Grandezas geométricas - Comprimento. 3. Educação matemática - Visualização. 4. Linhas abertas. I. Título.

**37
372.7**

**CDU (2.ed.)
CDD (20ed.)**

**UFPE
CE2007-018**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO**

**EFEITOS DE VISUALIZAÇÃO EM ATIVIDADES DE COMPARAÇÃO DE
COMPRIMENTOS DE LINHAS ABERTAS**

COMISSÃO EXAMINADORA



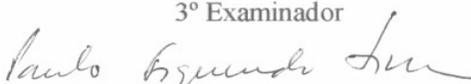
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
1º Examinador/Presidente



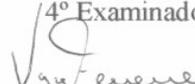
Prof. Dr. Franck Rene Gilbert Bellemain
2º Examinador



Prof.ª Dr.ª Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
3º Examinador



Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima
4º Examinador



Prof.ª Dr.ª Verônica Gitirana Gomes Ferreira
5º Examinador

RECIFE, 03 de maio de 2007.

DEDICATÓRIA

Ao Criador

dos céus e da terra.

À minha

amada família.

Aos meus estimados

orientadores da Graduação e Pós-Graduação.

AGRADECIMENTOS

Ao Eterno,

por ser a minha rocha, o meu rochedo em que me refugio, o meu escudo, o meu baluarte, único digno de ser adorado.

Aos meus pais (in memoriam),

pelo exemplo de vida do meu pai e pela grandeza de amor da minha mãe, em que pese eu não ter compartilhado em virtude da sua morte precoce.

A minha esposa e minhas filhas,

que abriram mão de tantos momentos para que eu realizasse este sonho.

Aos meus familiares e parentes,

especialmente minhas irmãs e meu irmão, por podermos compartilhar nossas lutas e vitórias de cada dia.

Ao meu sempre orientador da minha caminhada profissional,

Prof. José Urânio das Neves

Ao meu orientador, que tenho muita gratidão, por tudo que fez por mim,

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos.

Ao meu orientador do Mestrado por seus ensinamentos e pela grandeza de pessoa que é,

Prof. Dr. Paulo Figueiredo de Lima.

À professora Dr.^a Paula Moreira Baltar Bellemain,

pelas contribuições efetivas para concretização desta tese.

As quase filhas Alessandra e Maríthiça,

que também me ajudaram na vitória deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação, especialmente

meus ex-professores que me ajudaram ampliar minha visão sobre

pesquisa em Educação Matemática (Marcelo, Paula, Paulo e Verônica).

A todos que me ajudaram na cidade do Recife, para que eu desenvolvesse meus estudos de

Doutorado em Educação.

Aos professores e funcionários da Unidade Acadêmica de Educação da UFCG,

pela compreensão nos momentos de ausência dessa Instituição.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a concretização deste trabalho.

RESUMO

O propósito deste trabalho foi investigar, por meio de uma seqüência de atividades, os eventos de visualização intitulados efeitos visuais a partir de comparações de comprimentos entre pares de linhas abertas. Procurou-se avançar no sentido de uma melhor sistematização das discussões sobre tais fenômenos, inclusive, estabelecendo conexões com elementos teóricos sobre percepção e visualização e, ainda, sobre aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos relacionados à grandeza comprimento. No que tange a este último viés, foi adotado como suporte teórico básico o modelo didático de Douady e Perrin-Glorian (1989), que trata da articulação e diferenciação entre os quadros geométrico, das grandezas e numérico, sendo que as situações exploradas se restringiram à passagem entre os dois primeiros. O experimento foi desenvolvido numa turma de 4.^a série do Ensino Fundamental, na cidade de Campina Grande, no estado da Paraíba. Foi aplicada uma seqüência de atividades numa única sessão no ambiente papel e lápis, contando com a participação de 28 alunos. A análise das produções dos alunos veio confirmar a hipótese principal levantada, qual seja, de que os efeitos visuais ocorrem mesmo que as comparações se efetuem apenas entre pares de linhas abertas. Além do mais, outras modalidades de eventos de visualização foram detectadas. Os resultados sinalizam que os alunos, ao compararem comprimentos entre linhas abertas, evocam conhecimentos influenciados por fenômenos visuais, os quais interferem nas respostas indicadas e que estão delimitados como integrantes da operação cognitiva de visualização.

PALAVRAS-CHAVE: Visualização. Efeitos visuais. Linhas abertas. A grandeza comprimento. Comprimento.

RESUMÉ

Ce travail a eu pour but de rechercher, à travers une suite d'activités, les événements de visualisation nommés des effets visuels à partir de comparaisons de longueurs parmi les paires de lignes ouvertes. On a cherché d'avancer dans le sens d'une meilleure systématisation des discussions sur tels phénomènes, y compris les connexions établies avec des éléments théoriques sur la perception et la visualisation et, encore sur les aspects épistémologiques, didactiques et cognitifs par rapport à la grandeur de longueur. En ce qui concerne ce dernier biais, le modèle didactique de Douady et Perrin-Glorian (1989) a été adopté comme support théorique, puisqu'il traite de l'articulation et de la différenciation entre les cadres géométrique, des grandeurs et numérique. Les situations exploitées se limitent au passage entre les deux premiers. Les essais de cette recherche ont été développés dans une classe de la 4^{ème} série de l'Enseignement Fondamental, à la ville de Campina Grande, état de la Paraíba. La suite d'activités a été appliquée dans une seule séance de l'ambient papier et stylo avec la participation de 28 élèves. L'analyse des productions des élèves vient de confirmer la principale hypothèse que les effets visuels arrivent même que les comparaisons s'effectuent seulement entre les paires de lignes ouvertes. Les modalités d'événements de visualisation ont été détectées. Les résultats signalent que, quand les élèves comparent les longueurs entre les lignes ouvertes, ils évoquent des connaissances influencées par des phénomènes visuels et ils interviennent dans les réponses indiquées et ils sont délimités comme des intégrants de l'opération cognitive de visualisation.

Mots-Clés : Visualisation. Effets visuels. Lignes ouvertes. Grandeur longueur. Longueur.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Figuras da 2. ^a atividade do experimento de Brito (2003).....	29
Figura 2: Exemplos de configurações das leis de proximidade, semelhança e fechamento...	30
Figura 3: Figuras da 3. ^a atividade da 2. ^a sessão do experimento de Barbosa (2002).....	31
Figura 4: Diagrama da operação cognitiva visualização.....	82
Figura 5: Rede de paralelogramos.....	96
Figura 6: Figuras da 1. ^a atividade da 1. ^a sessão do experimento de Barbosa (2002).....	114
Figura 7: Efeito “projeção horizontal” da 1. ^a atividade da 1. ^a sessão do experimento de Barbosa (2002).....	116
Figura 8: Efeito “projeção horizontal” da 3. ^a atividade da 2. ^a sessão do experimento de Barbosa (2002).....	118
Figura 9: Efeito “linha imaginária” da 3. ^a atividade da 2. ^a sessão do experimento de Barbosa (2002).....	119
Figura 10: Efeito “espaço ocupado” da 3. ^a atividade da 2. ^a sessão do experimento de Barbosa (2002).....	120
Figura 11: Efeito “linha imaginária” e “espaço ocupado” da 5. ^a atividade da 2. ^a sessão do experimento de Barbosa (2002).....	122
Figura 12: Segmentos de reta em uma fachada de casa.....	126
Figura 13: Fachada de casa com efeitos “projeção horizontal” e “projeção vertical.....	127
Figura 14: Efeito linha imaginária “pontos mais extremos” da 2. ^a atividade do experimento de Brito (2003).....	131
Figura 15: Efeito “projeção horizontal” da 2. ^a atividade do experimento de Brito (2003)..	132
Figura 16: Organização de figuras realizadas pelo aluno.....	134
Figura 17: Ilustrações de figuras com indicações de letras nas proximidades das extremidades.....	158
Figura 18: Ilustração com linhas pontilhadas que mostram a diferença nos respectivos comprimentos dos segmentos de reta.....	167
Figura 19: Efeito “projeção horizontal” da atividade 3.....	170
Figura 20: Efeito “projeção vertical” da atividade 3.....	171
Figura 21: Figuras da 2. ^a atividade da 2. ^a sessão do experimento de Barbosa (2002).....	172
Figura 22: Efeito “projeção vertical” na atividade 4.....	191
Figura 23: Efeito “espaço ocupado” na atividade 4.....	192
Figura 24: Interferência “projeção inclinada” na atividade 5.....	203
Figura 25: Efeito “espaço ocupado” na atividade 5.....	204
Figura 26: Efeito “espaço ocupado” na atividade 6.....	212
Figura 27: Efeito “projeção horizontal” na atividade 6.....	212
Figura 28: Efeito “linha imaginária interextremidades” na atividade 6.....	213
Figura 29: Efeito “projeção vertical” na atividade 6.....	215
Figura 30: Efeito “linha imaginária interextremidades” na atividade 7.....	228
Figura 31: Efeito “espaço ocupado” na atividade 7.....	229
Figura 32: Efeito “linha imaginária interextremos” na atividade 8.....	237
Figura 33: Efeito “linha imaginária interextremidades” na 2. ^a atividade de Brito (2003)..	237
Figura 34: Efeito “linha imaginária interextremos” na 2. ^a atividade de Brito (2002).....	238
Figura 35: Efeito “espaço ocupado” na atividade 8.....	238
Figura 36: Efeito “espaço ocupado” na atividade 9.....	247
Figura 37: Efeito “espaço ocupado” na 2. ^a atividade do experimento de Brito (2003).....	248

Figura 38: Efeito “linha imaginária interextremidades” na atividade 9.....	249
Figura 39: Efeito “linha imaginária interextremos” na atividade 9.....	249
Figura 40: Efeito “espaço ocupado” na atividade 10.....	259
Figura 41: Efeito “projeção oblíqua” na atividade 10.....	261
Figura 42: Efeito “projeção horizontal” na atividade 11.....	270
Figura 43: Efeito “projeção vertical” na atividade 11.....	270
Figura 44: Efeito “espaço ocupado” na atividade 11.....	271
Figura 45: Efeito “linha imaginária interextremidades” na atividade 11.....	271

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Modelo didático de Douady & Perrin-Glorian (1989).....	73
Quadro 2: Fluxo no modelo didático.....	104
Quadro 3: Levantamento das ocorrências/efeitos nas respectivas atividades do experimento de Barbosa (2002).....	123
Quadro 4: Levantamento dos efeitos nas atividades do experimento de Barbosa (2002)....	124
Quadro 5: Levantamento das ocorrências/efeitos nas respectivas atividades do experimento de Brito (2003).....	134
Quadro 6: Levantamento dos efeitos nas atividades do experimento de Brito (2003).....	136
Quadro 7: Levantamento das ocorrências/efeitos nas respectivas atividades do experimento de Teixeira (2004).....	142
Quadro 8: Levantamento dos efeitos nas atividades do experimento de Teixeira (2004)...	143
Quadro 9: Levantamento dos estudos em que foram detectados efeitos pela 1. ^a vez.....	145
Quadro 10: Paralelo entre as denominações atribuídas aos efeitos visuais.....	146
Quadro 11: Grupos dos efeitos.....	146
Quadro 12: Resumo dos aspectos gerais das atividades.....	155
Quadro 13: Seqüência das respostas nas atividades.....	158
Quadro 14: Elementos considerados na análise das respostas.....	159
Quadro 15: Modelo de tabela adotado na análise preliminar da atividade 3.....	160
Quadro 16: Respostas esperadas na atividade 1.....	174
Quadro 17: Respostas esperadas na atividade 2.....	174
Quadro 18: Respostas esperadas na atividade 3.....	174
Quadro 19: Ocorrências na atividade 1.....	182
Quadro 20: Ocorrências na atividade 2.....	183
Quadro 21: Ocorrências na atividade 3.....	183
Quadro 22: Ocorrências de eventos de visualização nas atividades (1, 2 e 3).....	185
Quadro 23: Ocorrências dos procedimentos nas atividades (1, 2 e 3).....	187
Quadro 24: Respostas esperadas na atividade 4.....	193
Quadro 25: Ocorrências na atividade 4.....	197
Quadro 26: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 4.....	198
Quadro 27: Ocorrências dos procedimentos na atividade 4.....	200
Quadro 28: Respostas esperadas na atividade 5.....	204
Quadro 29: Ocorrências na atividade 5.....	208
Quadro 30: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 5.....	208
Quadro 31: Ocorrências dos procedimentos na atividade 5.....	209
Quadro 32: Respostas esperadas na atividade 6.....	216
Quadro 33: Ocorrências na atividade 6.....	222
Quadro 34: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 6.....	223
Quadro 35: Ocorrências dos procedimentos na atividade 6.....	224
Quadro 36: Respostas esperadas na atividade 7.....	230
Quadro 37: Ocorrências na atividade 7.....	232
Quadro 38: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 7.....	233
Quadro 39: Ocorrências dos procedimentos na atividade 7.....	234
Quadro 40: Respostas esperadas na atividade 8.....	239
Quadro 41: Ocorrências na atividade 8.....	243

Quadro 42: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 8.....	243
Quadro 43: Ocorrências dos procedimentos na atividade 8.....	244
Quadro 44: Respostas esperadas na atividade 9.....	249
Quadro 45: Ocorrências na atividade 9.....	254
Quadro 46: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 9.....	255
Quadro 47: Ocorrências dos procedimentos na atividade 9.....	256
Quadro 48: Respostas esperadas na atividade 10.....	260
Quadro 49: Ocorrências na atividade 10.....	265
Quadro 50: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 10.....	266
Quadro 51: Ocorrências dos procedimentos na atividade 10.....	267
Quadro 52: Respostas esperadas na atividade 11.....	272
Quadro 53: Ocorrências na atividade 11.....	274
Quadro 54: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 11.....	275
Quadro 55: Ocorrências dos procedimentos na atividade 11.....	276
Quadro 56: Organização das atividades onze em cinco grupos.....	280

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Levantamento dos erros nos dois modelos da 2. ^a atividade do experimento de Brito (2003).....	130
Tabela 2: Estratégias utilizadas pelos alunos na 1. ^a atividade (Teixeira, 2004).....	139
Tabela 3: Anexo E: Resumo dos dados das atividades (1, 2 e 3).....	176
Tabela 4: Anexo E: Resumo dos dados das atividades 4.....	194
Tabela 5: Anexo E: Resumo dos dados das atividades 5.....	205
Tabela 6: Anexo F: Resumo dos dados das atividades 6.....	217
Tabela 7: Anexo F: Resumo dos dados das atividades 7.....	230
Tabela 8: Anexo F: Resumo dos dados das atividades 8.....	240
Tabela 9: Anexo F: Resumo dos dados das atividades 9.....	250
Tabela 10: Anexo F: Resumo dos dados das atividades 10.....	261
Tabela 11: Anexo F: Resumo dos dados das atividades 11.....	272
Tabela 12: Ocorrências de eventos de visualização por atividade.....	279
Tabela 13: Síntese dos efeitos e interferências detectados nas atividades.....	281
Tabela 14: Ocorrências dos procedimentos por atividade.....	282

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	16
CAPÍTULO 1 – PERCEPÇÃO E VISUALIZAÇÃO.....	23
1.1 Introdução.....	24
1.2 A percepção sob o ponto de vista da Gestalt.....	26
1.3 Considerações sobre percepção à luz de conhecimentos Piagetianos.....	38
1.4 Alguns aspectos da visualização à luz de estudos da Educação Matemática.....	54
CAPÍTULO 2 – ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS, DIDÁTICOS E COGNITIVOS SOBRE AS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS: A GRANDEZA COMPRIMENTO.....	65
2.1 Introdução.....	66
2.2 Considerações epistemológicas e didáticas sobre as grandezas geométricas.....	67
2.3 Considerações epistemológicas e didáticas sobre a grandeza comprimento.....	76
2.4 Breves considerações cognitivas da formação do conceito de comprimento.....	94
2.5 O fluxo no modelo didático dos quadros considerando o quadro da visualização na relação com a grandeza comprimento.....	101
CAPÍTULO 3 – O ACERVO EXPERIMENTAL DOS EFEITOS VISUAIS.....	107
3.1 Introdução.....	108
3.2 Considerações gerais sobre os experimentos do acervo.....	109
3.3 Os fenômenos efeitos visuais.....	113
3.4 Ajustando as denominações dos efeitos visuais.....	145
CAPÍTULO 4 – DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO E DA SEQUÊNCIA DAS ATIVIDADES.....	149
4.1 Introdução.....	150
4.2 Caracterização da amostra.....	151
4.3 Aplicação da seqüência de atividades.....	152
4.4 Descrição da seqüência de atividades.....	152

CAPÍTULO 5 – APRESENTANDO E ANALISANDO AS ATIVIDADES.....162

5.1 Apresentação da primeira atividade.....	163
5.2 Apresentação da segunda atividade.....	164
5.3 Apresentação da terceira atividade.....	165
5.3.1 Análise preliminar das atividades 1, 2 e 3.....	166
5.3.1.1 Introdução.....	166
5.3.1.2 Interpretação de respostas possíveis.....	169
5.3.2 Análise posterior das atividades 1, 2 e 3.....	176
5.4 Apresentação da quarta atividade.....	189
5.4.1 Análise preliminar da atividade 4.....	190
5.4.1.1 Introdução.....	190
5.4.1.2 Interpretação de respostas possíveis.....	191
5.4.2 Análise posterior da atividade 4.....	193
5.5 Apresentação da quinta atividade.....	201
5.5.1 Análise preliminar da atividade 5.....	202
5.5.1.1 Introdução.....	202
5.5.1.2 Interpretação de respostas possíveis.....	203
5.5.2 Análise posterior da atividade 5.....	205
5.6 Apresentação da Sexta atividade.....	210
5.6.1 Análise preliminar da atividade 6.....	211
5.6.1.1 Introdução.....	211
5.6.1.2 Interpretação de respostas possíveis.....	211
5.6.2 Análise posterior da atividade 6.....	217
5.7 Apresentação da sétima atividade.....	226
5.7.1 Análise preliminar da atividade 7.....	227
5.7.1.1 Introdução.....	227
5.7.1.2 Interpretação de respostas possíveis.....	227
5.7.2 Análise posterior da atividade 7.....	230
5.8 Apresentação da oitava atividade.....	235
5.8.1 Análise preliminar da atividade 8.....	236
5.8.1.1 Introdução.....	236
5.8.1.2 Interpretação de respostas possíveis.....	236
5.8.2 Análise posterior da atividade 8.....	239
5.9 Apresentação da nona atividade.....	245
5.9.1 Análise preliminar da atividade 9.....	246
5.9.1.1 Introdução.....	246
5.9.1.2 Interpretação de respostas possíveis.....	246
5.9.2 Análise posterior da atividade 9.....	250
5.10 Apresentação da décima atividade.....	257
5.10.1 Análise preliminar da atividade 10.....	258
5.10.1.1 Introdução.....	286
5.10.1.2 Interpretação de respostas possíveis.....	258

5.10.2	Análise posterior da atividade 10.....	261
5.11	Apresentação da décima primeira atividade.....	268
5.11.1	Análise preliminar da atividade 11.....	269
5.11.1.1	Introdução.....	269
5.11.1.2	Interpretação de respostas possíveis.....	269
5.11.2	Análise posterior da atividade 11.....	272
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....		277
ANEXOS.....		289
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		307

INTRODUÇÃO

Quando ingressamos neste Programa de Pós-Graduação, no Núcleo de Didática de Conteúdos Específicos, ainda para cursar Mestrado, tivemos a alegria de nos engajarmos no Grupo de Pesquisa Pró-Grandezas que começou ser consolidado, enquanto grupo de pesquisa, na Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, no ano de 2000. É bem verdade que alguns estudos já vinham sendo desenvolvidos por intermédio do LEMAT – Laboratório de Ensino de Matemática do Departamento de Matemática desta instituição.

Nosso engajamento se deu, principalmente pelo nosso interesse em pesquisar sobre a grandeza comprimento. Mais de um motivo nos despertou para estudarmos sobre esta grandeza geométrica. Entre outros, poderíamos assinalar nossa trajetória profissional trabalhando na formação de professores – Escola Normal e Curso de Pedagogia – na cidade de Campina Grande, no estado da Paraíba. São experiências acumuladas há mais de vinte anos e que nos têm permitido refletir, entre outros aspectos, sobre a gênese da grandeza comprimento; inclusive, orientando professores para trabalhar este tópico com alunos nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Um outro motivo, que também favoreceu, foi saber que dois outros amigos que cursavam Mestrado conosco estavam pesquisando sobre as grandezas área e volume respectivamente, favorecendo, por conseguinte, estudos mais sistemáticos sobre as grandezas geométricas. Como aspecto mais relevante, que norteou nosso

interesse, houve a compreensão da importância de desenvolver um estudo sobre um tópico inserido na abrangência das grandezas e medidas que, além da contribuição dentro dos conhecimentos matemáticos, epistemológicos, didáticos e cognitivos, tivesse um grande valor social.

No entanto, na realização da nossa pesquisa para obtenção do título de mestre, objetivávamos elaborar uma seqüência didática¹ que permitisse a construção do conceito de perímetro para ser explorada nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Posteriormente, mais em decorrência do fator tempo, percebemos que tal elaboração seria inviável por se tratar de um produto com características bem mais completas. Fizemos a opção em prepararmos uma seqüência de atividades. Esta constou de questões originais complementadas com outras já aplicadas em estudos desenvolvidos sobre o tema, por meio de um projeto de pesquisa proposto pelo PRÓ-MATEMÁTICA, programa integrante da cooperação técnica da Embaixada da França com o Ministério da Educação e do Desporto, do Brasil, que, segundo Pires (1999), tinha como intuito a melhoria da formação inicial e continuada dos professores que trabalham com Matemática, nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Foi no desenvolvimento da pesquisa, por meio da análise dos dados, que verificamos um acentuado número de erros. Tal evidência nos estimulou a focalizarmos nossas atenções para tentar descobrir as causas geradoras deles. Passamos a suspeitar que houvesse outras interferências que ultrapassavam o conhecimento matemático exigido, o qual era identificar a linha de maior comprimento ou a de menor comprimento, sem fazer uso de instrumentos de medida. Também tivemos atividades, ainda que raramente, em que o aluno era convocado a identificar as linhas que apresentavam igual comprimento.

¹ Uma seqüência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de sessões, tendo em vista o seu caráter específico para a pesquisa (PAIS, 2001, p. 102).

Começamos a admitir que essas influências fossem decorrentes de fenômenos de visualização. Em seguida, levantamos algumas hipóteses relacionadas aos erros percebidos e a denominamos de efeitos visuais². Estes foram classificados originalmente em: “efeito da extensão horizontal”; “efeito da linha imaginária” e “efeito do espaço ocupado”.

O primeiro efeito – extensão horizontal – está associado a uma escolha que o aluno estabelece na comparação entre linhas, tomando por base apenas as extensões horizontais dos caminhos, no lugar de considerar todo o comprimento dos respectivos entes geométricos a serem comparados (ver figura 7).

O segundo efeito – linha imaginária – diz respeito a uma escolha na qual o aluno realiza a comparação entre linhas considerando as extensões que ligam as extremidades, ou os pontos mais extremos, dos respectivos entes geométricos que deverão ser comparados (ver figura 9).

Por fim, o terceiro efeito – espaço ocupado – trata da escolha que o aluno efetua na comparação entre linhas, baseando-se em supostos espaços de envoltura sobre os entes geométricos sujeitos à referida comparação (ver figura 10).

Posteriormente, esses eventos foram detectados em outros experimentos como os de Brito (2003), Teixeira (2004) e Souza (2004). Tais constatações foram verificadas, na sua grande maioria, em situações com linhas abertas; sendo portanto, em raros momentos, detectadas nas atividades de linhas fechadas. Para estas, cabem novos estudos com o propósito de se extrair melhores conclusões. Nas linhas abertas os efeitos visuais foram percebidos com mais frequência nas linhas “quebradas”³ e curvas.

Na investigação desenvolvida por Brito (2003), foi possível descobrir novas modalidades desses fenômenos visuais. No entanto, passamos a acreditar que outros eventos

² Efeitos visuais estão sendo considerados os fenômenos de visualização que foram detectados nas respostas dos alunos, no momento de estabelecer comparações entre linhas, e que serão discutidos no capítulo III deste trabalho.

³ Por linhas “quebradas” entendam-se como as linhas poligonais abertas.

de visualização dessa natureza pudessem ser detectados. Assim, nos propusemos realizar esta pesquisa buscando que outros efeitos visuais viessem à tona.

Por se tratar de um estudo de tese, procuramos avançar em termos de uma discussão teórica envolvendo os aspectos da percepção e visualização, relacionando-os aos efeitos visuais. Com esse propósito, discutimos algumas contribuições das teorias da Gestalt e a de Piaget e de subsídios diversos da Educação Matemática. Em outra vertente, avançamos numa abordagem epistemológica e didática da grandeza comprimento, procurando relacionar tal grandeza com a operação cognitiva da visualização. Por último, apresentamos o acervo experimental desses eventos de visualização, à luz dos resultados obtidos nos experimentos supracitados.

Tínhamos como hipótese principal que os fenômenos de visualização, denominados efeitos visuais, se manifestam no momento em que se evoca do aluno que estabeleça a comparação apenas entre pares de linhas abertas para identificar as de maior ou menor comprimento.

Com o intuito de averiguar nossa hipótese é que elaboramos uma seqüência de atividades com alguns aspectos distintos dos que foram contemplados nos estudos anteriores. Um deles foi o fato de explorarmos atividades apenas com linhas abertas. Essa opção se justifica porque, por meio de tais situações, foi detectada quase a totalidade dos efeitos visuais. Um outro aspecto é que, em todas as atividades disponibilizadas, o aluno efetuou as comparações apenas entre dois entes geométricos. Tal opção se explica pela necessidade de se ter um maior controle das variáveis envolvidas, por exemplo: o formato das linhas e a maneira como foram dispostas no espaço. Implícito a essa escolha estava o interesse de verificar se os efeitos se manifestavam mesmo em comparações supostamente mais simples. O outro aspecto que podemos destacar foi que exploramos atividades constando comparações apenas entre segmentos de reta, o que não havia sido feito nas pesquisas anteriores. Uma outra

característica do experimento é que não foram disponibilizados medianeiros⁴ para os alunos, apenas lápis e borracha branca.

O ambiente papel e lápis tem se constituído como um canal privilegiado das descobertas dos efeitos visuais, até porque estes estão associados à visualização, havendo necessidade que os entes geométricos estejam dispostos no campo⁵ para serem observados visualmente. Nesse sentido, é que optamos em explorar as atividades apenas no modelo papel e lápis sem medianeiros, para que o aspecto visual passasse a ser praticamente o recurso privilegiado de evocação, por parte do aluno.

Nos experimentos de Barbosa (2002) e Teixeira (2004) foram explorados o modelo papel e lápis com uso de medianeiros, enquanto no de Brito (2003), além deste modelo, também fez-se uso de um outro modelo intitulado papel e lápis com uso de manipulativos, por meio do qual, também verificou vestígios desses eventos visuais.

A análise que realizamos no experimento foi enriquecida visando uma melhor compreensão dos efeitos visuais. Diferentemente dos estudos anteriores, que trataram sobre esses fenômenos, contamos com suportes teóricos abrangentes envolvendo a percepção e a visualização, além das experiências acumuladas dos experimentos em que foram detectados tais fenômenos. Por fim, sabíamos que os erros eram fontes riquíssimas desses fenômenos visuais, mas não desprezamos a possibilidade de se manifestarem entre as respostas consideradas como certas.

O suporte teórico adotado está referendado nas pesquisas de Régine Douady e Marie Jeanne Perrin-Glorian (1989) que diferenciam, como processo didático para o conceito de área, os seguintes quadros: o quadro geométrico, compondo-se de figuras geométricas propriamente ditas; o quadro das grandezas que se relaciona à idéia de área, constituindo-se

⁴ Nome genérico para qualquer ente que possa mediar a comparação, podendo ser uma régua não-graduada, um fio, um cordão, etc.

⁵ Campo está sendo considerado como o espaço da folha branca das atividades em que se expõem as figuras a serem visualizadas para o estabelecimento das comparações.

nas propriedades das figuras geométricas; por último, o quadro numérico, relacionado às medidas da grandeza área, formado por números reais não negativos. Fizemos uma adaptação do modelo didático dessas teóricas para desenvolver o trabalho com a grandeza comprimento. Outros estudos adotaram o mesmo procedimento, como foram os casos de Perrot et al (1998), Barbosa (2002 e Brito (2003), para grandeza comprimento, ou ainda, Oliveira (2002) e Barros (2002), para a grandeza volume.

Mister se faz lembrar que uma das hipóteses centrais de Douady e Perrin-Glorian (1989) sugere que o amálgama precoce entre os quadros geométrico, das grandezas e das medidas, está na raiz de muitas dificuldades de aprendizagem, verificadas nos alunos. Assim sendo, recorreremos às atividades de comparação de comprimentos que são as que favorecem a articulação dos quadros geométrico e das grandezas.

A classificação dos componentes desses quadros permite um melhor entendimento das grandezas geométricas, pois delimita exatamente o que é o objeto geométrico, a grandeza e a medida da grandeza. Trabalhamos com situações que exploram a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas, constituindo-se como um momento crucial da construção do conceito da grandeza - no nosso caso, comprimento.

Por meio de situações de comparação é que se efetua a gênese artificial da grandeza comprimento. É na constatação da equivalência ou não, quando se compara dois ou mais entes quaisquer, que se forma a essência do conceito de comprimento. Não se trata de situações em que o olhar didático é suficiente para compreender o significado dessa passagem. É imprescindível considerar o aspecto epistemológico para entender o que está subjacente nesses estabelecimentos de tais comparações. Talvez seja essa falta de entendimento que tem levado a um salto precoce do quadro geométrico ao quadro das medidas. Para ampliarmos a discussão epistemológica e didática do que estamos abordando é que iremos nos respaldar em algumas contribuições de pesquisadores que tiveram a

preocupação de considerar as relações entre esses quadros, propostos por Douady e Perrin-Glorian (1989).

No que tange aos subsídios sobre as grandezas e medidas foram considerados estudos já desenvolvidos sobre as grandezas geométricas, tais como: Perrot et alli (1998); Câmara dos Santos (1999); Bellemain & Lima (2002); Barbosa (2002); Brito (2003), Teixeira (2004) e outros.

Finalizando, diríamos que temos a expectativa de poder contribuir com alguns aspectos de conhecimentos relacionados aos eventos de visualização intitulados efeitos visuais, delimitando-os como integrantes da operação cognitiva visualização e na relação com o modelo didático supracitado.

CAPÍTULO 1 – PERCEPÇÃO E VISUALIZAÇÃO

1.1 Introdução

O título deste capítulo caracteriza os dois pilares de abordagens tratadas na elaboração deste segmento da tese. É difícil delimitar em que se interceptam e em que são disjuntos. Antecipamo-nos para anunciar que não nos detivemos nesses parâmetros fronteiriços. No entanto, ao longo da nossa discussão, é possível perceber as correntes teóricas que mais se afinam com tais aspectos. Sobre percepção há uma produção teórica extremamente consolidada. A visualização, por sua vez, vem tendo ampliado seu arcabouço teórico. A primeira tem se ancorado basicamente em estudos da Psicologia e com algumas contribuições na própria Epistemologia, especialmente, da genética. A segunda está querendo assumir uma identidade no que podemos delimitar de Educação Matemática, mas com muitas das contribuições oriundas de aspectos cognitivos. Não é demais acentuarmos que a percepção, numa perspectiva genérica, atinge a todos os órgãos dos sentidos, mas nossa discussão restringe-se ao campo visual.

Do ponto de vista teórico, no que se refere à percepção, estamos nos alicerçando em alguns elementos da Gestalt e da teoria Piagetiana. Como desdobramentos desta última, também inserimos algumas considerações sobre as relações espaciais e a representação no espaço. Quanto à visualização, nos respaldamos em estudos específicos da Educação

Matemática, tentando estabelecer uma aproximação entre a geometria e aspectos visuais, com destaque especial para subsídios cognitivos.

Não tivemos a pretensão de efetuarmos nenhum confronto entre essas correntes teóricas. Pelo contrário, focamos nossas atenções na busca de averiguar algumas contribuições que cada uma traz, e tentamos nos subsidiar para estabelecermos algumas conexões com certos fenômenos de visualização, mais especificamente, denominados de efeitos visuais.

Obviamente que essas fontes são as mais representativas desses dois aspectos. A percepção está intimamente imbricada com os estudos da Gestalt ou vice-versa, mas também há de se reconhecer as grandes contribuições da escola Piagetiana. A visualização, por sua vez, nos remete concomitantemente às colaborações teóricas de pesquisadores da Educação Matemática.

Os dois pilares, ao mesmo tempo em que evocam conhecimentos da Psicologia cognitiva, também gozam de afinidades com conhecimentos matemáticos, especialmente, quando os enfoques perceptivos ou visuais estão relacionados à geometria.

Portanto, tentamos trazer algumas das contribuições mais expressivas sobre percepção e visualização que foram possíveis extrairmos das nossas modestas leituras, mas que demandaram muitas inquietações para compormos as idéias significativas de cada respectivo pilar teórico, isto é, no sentido que se aproximassem sobremaneira com o nosso intuito maior que era de nos subsidiarmos de mais elementos esclarecedores sobre os eventos de visualização mencionados.

1.2 A percepção sob o ponto de vista da Gestalt

Antes de efetuarmos quaisquer considerações mais específicas sobre a percepção sob o ponto de vista da Gestalt, tentaremos esclarecer sobre esse termo que é um substantivo de origem alemã. De acordo com Engelmann (2002), há dois significados distintos: “a forma e uma entidade concreta que possui entre seus vários atributos a forma” (p. 2). Este segundo é o que passa a ser utilizado pelo grupo gestaltista de Berlim. Quanto à expressão gestaltismo, Penna (1978) assinala referir-se “à teoria elaborada por Wertheimer, Köhler e Koffa, a partir de 1912” (p.157).

Esses três pesquisadores são os expoentes da teoria que se tornou conhecida como a Escola de Berlim. Eles foram mais além do que uma teoria psicológica da Gestalt, pois avançaram no sentido de uma teoria gestáltica do universo. Não é por acaso a assertiva de Engelmann (2002): “A gestalt apesar de nascer na psicologia, era demonstrada na biologia e também na física” (p. 8).

Foi nesse último campo de conhecimentos que esses teóricos procuraram elaborar um movimento mais amplo centrado sobre a noção de estrutura. Trata-se de um conceito básico de gestaltismo, como diz Penna (1978):

Não o de estrutura definida como síntese de elementos, e muito menos como expressão aditiva de componentes elementares, mas como conjunto não-somativo de partes cujas funções dependem da posição que elas ocupam na própria totalidade (p. 165).

Essa natureza de estrutura nos faz lembrar da configuração exposta nos cenários (ambiente papel e lápis) em que foram detectados os efeitos visuais. Cada linha como componente desse conjunto não-somativo de partes cujas funções dependem da posição ocupada no todo, ou seja, de acordo como estão dispostas na totalidade exercerá funções com maiores ou menores influências.

A ênfase dada ao conceito de estrutura sinaliza o gestaltismo como uma forma de estruturalismo, embora Piaget fizesse questão de delimitar como um tipo não genético, por não considerar a relevância da dimensão histórica, restringindo a amplitude do gestaltismo à área da percepção. É esse viés que nos interessa discutir e que a partir deste momento procuraremos nos ater.

Para Penna (1978) foi por meio da publicação de “Experimentelle Studien” que se inicia a construção de uma teoria da percepção. Dentro dos estudos da percepção os adeptos da Gestalt privilegiaram os aspectos visuais em detrimento de outros canais sensitivos, como é o caso, por exemplo, do tato.

Vurpillot (1969) fez uma afirmativa que confirma esse certo privilégio da visão enquanto modalidade sensorial:

[...], parece que os dados visuais são os únicos capazes de nos oferecer um espaço perceptivo estruturado, distante, e o espaço visual seja o que mais se aproxima do espaço físico euclidiano. Assim, é que, durante longo tempo, tendeu-se a restringir o estudo da percepção do espaço ao do espaço visual (p. 153).

Em seguida, esta pesquisadora evidenciou o fato que novas pesquisas, por exemplo, colocam em conflito dados visuais com dados auditivos, mostrando que tal redução ao aspecto visual não tinha legitimidade e “que as informações não visuais desempenhavam um importante papel na construção de um espaço perceptivo” (VURPILLOT, 1969, p. 153).

Em se tratando do trabalho matemático desenvolvido nas escolas, no que diz respeito às atividades relacionadas a espaço perceptivo, quase sempre se resumem às explorações da dimensão visual. Ainda há uma preocupação na Educação Infantil em trabalhar com outros sentidos, mas na medida em que se avança nas séries do Ensino Fundamental, e nas demais, vai se restringindo a essa dimensão, até porque os conhecimentos que mais permitem estabelecer as relações perceptivas estão vinculados à geometria, sendo o apelo para o aspecto visual o canal privilegiadamente evidenciado.

Segundo Penna (1978) alguns pesquisadores fizeram críticas veementes à Escola de Berlim por restringir-se ao estudo das formas visuais e abnegaram da investigação de outros sentidos. Esses críticos pertenciam à Escola de Leipzig que era uma versão do movimento gestaltista, e, como as demais versões desse movimento, deram muita ênfase no combate ao elementarismo, embora tenham se distanciado daquela, especialmente por não concordarem com a “transposição do conceito de Gestalt ou forma para os campos físico e biológico”, pois entendiam que apenas os fenômenos psíquicos dispunham condições de organicidade e significação (p. 160).

Em que pese as divergências dentro do próprio movimento, como de algumas outras correntes teóricas, inclusive as não tão antagônicas como a de Piaget, que se insere na linha cognitivista, não se pode deixar de reconhecer as efetivas contribuições da teoria Gestalt, especialmente no campo da percepção. Não é por acaso que esses estudos têm despertado interesse em quem investiga na área de Educação Matemática sobre geometria, como podemos confirmar no trabalho desenvolvido por Flores Bolda (1997):

A teoria da Gestalt é, por um lado, uma filosofia e, por outro, uma psicologia. De um lado ela introduz as noções de forma ou de estrutura na interpretação do mundo físico, assim como do mundo biológico e mental. Por outro, ela aplica estas mesmas noções no domínio especial da psicologia, em problemas precisos e concretos. Ela é dedicada, sobretudo, ao estudo da percepção, da aprendizagem e solução do campo visto como um todo.

O que nos interessa, aqui neste trabalho, é a investigação dos fatores perceptivos e intelectuais que têm intervenção nas situações de organização da percepção visual, ou melhor, dos princípios que regem os modos como os olhos percebem os objetos no espaço. De fato, encontramos estes fatores nos trabalhos que a Escola Gestaltiana renovou os estudos sobre a percepção e sobre o pensamento (p. 27).

Essa pesquisadora, para melhor compreender os fenômenos relacionados ao desenvolvimento da competência heurística através da reconfiguração, envolvendo aspectos da Geometria e Visualização, buscou no seu trabalho se apropriar dos referenciais teóricos dos princípios da organização da percepção estabelecidos pela Psicologia da Gestalt e por meio da teoria das representações de R. Duval.

Flores Bolda (1997) adotou os princípios enunciados por Wertheimer, isto é, referente às leis que regem a percepção de estruturas, subordinadas a um princípio geral – o da boa forma ou da pregnância que tem a característica de impregnar no espírito do indivíduo uma percepção do processo de gruação de elementos.

A esse princípio estariam subordinadas algumas leis, como a da “proximidade, da semelhança, do destino comum, da melhor direção e do fechamento”. Não se constituem apenas como reguladoras da percepção, mas como leis cognitivas, valendo para a totalidade do comportamento (PENNA, 1978, p. 175).

Essas leis ou princípios de organização perceptual podem ser classificados no campo por dois padrões: os lineares e os não-lineares. Antes de efetuarmos algumas considerações sobre estes, gostaria de esclarecer o que Koffka (1973) chama de campo: “consiste numa parte branca contínua, o fundo da página, e numa parte preta contínua, as linhas” (p. 162).

Obviamente que neste caso está considerando a parte correspondente à figura como o artefato preto, podendo ter a configuração linear ou não-linear. Com exemplo do padrão linear podemos apresentar uma situação explorada na segunda atividade do experimento de Brito (2003)

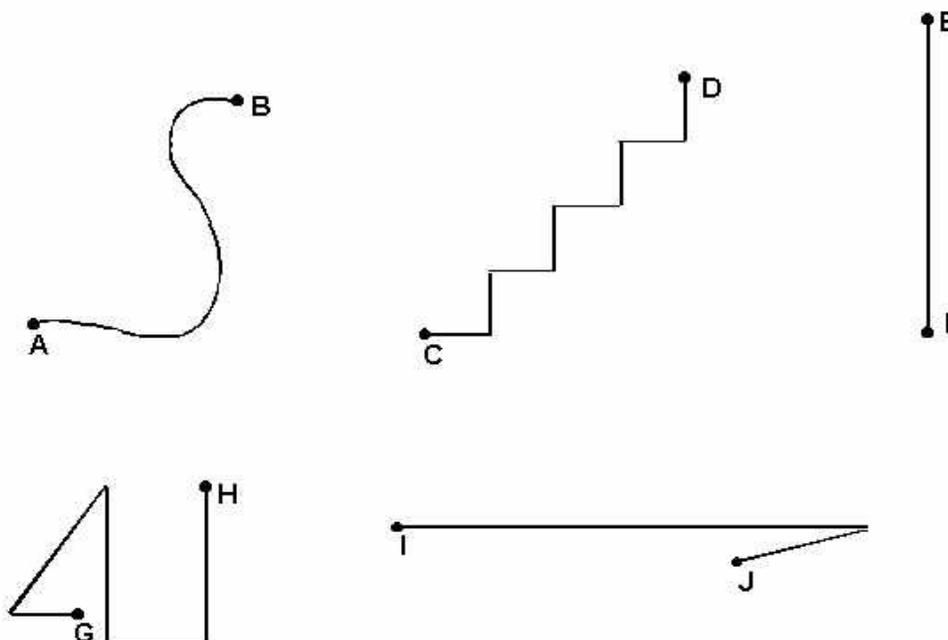


Figura 1: Figuras da 2.^a atividade do experimento de Brito (2003)

Como podemos observar anteriormente, as linhas apresentadas têm essa característica de serem contínuas e se constituem em configurações lineares. Diferentemente, pontos ou linhas dispostos de forma descontínua viriam a formar os padrões não-lineares. Temos abaixo exemplos de algumas dessas configurações:

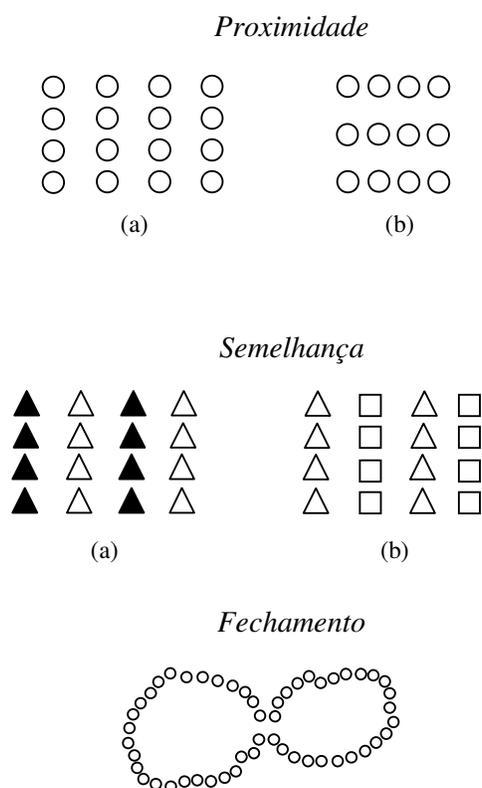


Figura 2: Exemplos de configurações das leis de proximidade, semelhança e fechamento

Por meio desses modelos, podemos observar que os elementos próximos tendem a ser percebidos juntos – proximidade. Os elementos que apresentam características comuns tendem a ser vistos de forma destacada, constituindo um agrupamento particular – semelhança. Por fim, a configuração em que os elementos tendem a constituir uma figura mais fechada – fechamento.

Koffka (1973) ressaltou que não se constitui tarefa tão simples formular a lei de proximidade e que “quando o campo contém certo número de partes iguais, as que estiverem

em maior proximidade organizar-se-ão numa unidade superior” (p. 175). Ele admite que haja forças reais de atração entre os elementos desses agrupamentos. No entanto, há fatores mais fortes de atração, e considera que “a igualdade da forma é um fator mais forte de organização do que a igualdade da cor” (p. 176).

Nos experimentos em que foram detectados os efeitos visuais, foi possível perceber que, ao comparar certas linhas para identificar a de menor ou maior comprimento, o aluno parecia focar suas atenções em certas partes das linhas, especialmente quando havia uma outra linha que também tinha uma característica próxima da que estava comparando. Por exemplo, na terceira atividade da segunda sessão do experimento de Barbosa (2003), dez alunos (34,5%) optaram em escolher o caminho EF como o mais comprido, talvez porque tinha uma parte que exerceu uma maior influência nessa decisão (ver figura 3). Tal fenômeno foi considerado como resultante do efeito “projeção horizontal”, que será descrito no capítulo 3.

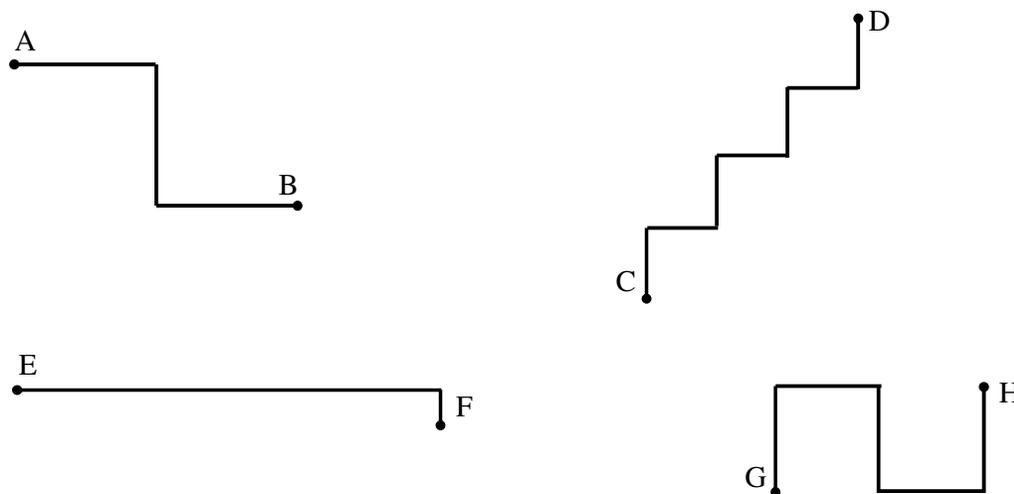


Figura 3: Figuras da 3.^a atividade da 2.^a sessão do experimento de Barbosa (2002)

Todas as quatro linhas apresentaram algo em comum nas suas respectivas formas – parte com extensão horizontal. Talvez tal característica tenha facilitado o estabelecimento da comparação considerando esse ponto de vista.

Como a extensão de uma parte de EF se sobressai entre as demais, terminou sendo a opção escolhida por dez alunos. Porém, a mesma interpretação cabe para incidência de 16 alunos (55,2%) terem optado para escolher CD como o caminho mais comprido. Nesse caso a característica comum que estaria sendo considerada era a extensão vertical de toda figura. Baseando-se nos eventos de visualização seria denominado efeito da “projeção vertical”. Para essa atividade, cabe a ressalva que o aluno poderia estar sendo influenciado pelo efeito “associa número a comprimento”, isto é, considerando a característica em comum em cada linha como a provenientes dos “números de pedaços” que dispõem. Enfim, é como se a resposta fosse afetada por alguma força de atração visual que se destacasse. Independente das respostas efetuadas, elas parecem assinalar que alguns alunos são mais influenciados por determinadas forças de atração.

Engelmann (2002) enfatizou a definição de Köhler quanto à força da Gestalt, associando ao grau de interdependência de suas partes. Uma Gestalt é considerada forte na medida em que a energia de seu processo aumenta, enquanto é tida como fraca quando a energia de seu processo diminui.

Relacionando a energia gestáltica com os efeitos visuais, talvez possamos afirmar que eles se manifestam com mais intensidade na medida em que essa energia do processo aumenta. Reciprocamente, os efeitos visuais vão se manifestando com menor intensidade na proporção que essa energia de processo diminui, isto é, com Gestalt fraca.

Aproveitamos para apresentar um exemplo descrito por Engelmann (2002) que traduz a influência dessa energia:

Podemos citar como exemplo, um ser humano sentado ante sua escrivaninha, em cima da qual há uma borracha e um livro. Podemos dizer que a borracha constitui uma Gestalt forte e o mesmo pode-se dizer com relação ao livro. A superfície da

mesa com os dois objetos, borracha e o livro, constitui também uma Gestalt. Entretanto, será uma Gestalt bem mais fraca do que as duas Gestalten⁶. Através do isomorfismo, na medida em que o ser humano olha para a mesa, os perceptos⁷ ‘borracha’, ‘livro’ e ‘alto da mesa contendo a borracha e o livro’ são também Gestalten, com a seguinte diferença entre elas: ‘borracha’ e ‘livro’ apresentam mais força do que ‘alto da mesa contendo a borracha e o livro’ (p. 6).

Esse autor defende que, ao se considerar múltiplos graus de forças da Gestalt, melhor seria utilizar um contínuo em que se ia estabelecendo níveis de uma Gestalt mais forte, intermediada por outras, até atingir uma Gestalt mais fraca, e assim por diante. Ele questiona sobre o que denominaria de força quase nula. E procura responder por meio de um exemplo, em que considera a “Gestalt formada pelos perceptos de uma borracha na mesa e mais a lua, no momento em que é visível através da janela. Ainda que possua alguma força”, por ser o valor tão diminuto, sugere nulificá-la para efeitos práticos (ENGELMANN, 2002, p. 6).

Considerando os eventos de visualização que estamos tratando, poderíamos dizer que a não presença deles sugere a ausência da força da Gestalt. Assim, cabe nulificá-la em termos de efeitos visuais.

A busca da essência dos processos perceptivos se constitui num alvo dos gestaltistas e, como disse Penna (1978): “essa essência manifestou-se através da relação figura/fundo, magistralmente descrita por E. Rubin” (p. 174). O mote da percepção é a figura, pois é ela que permite uma apreensão consciente e é o objeto da evocação.

O que constitui o tema da percepção, contudo, é a figura. Somente ela se dá em condições de uma apreensão consciente e somente ela é objeto de evocação [...]. O ato perceptivo cumpre-se em função da presença de um objeto. Os objetos ausentes no tempo ou no espaço, obviamente, não podem ser percebidos. Poderão ser pensados ou imaginados, poderão ser evocados. Não poderão, contudo, ser percebidos. Cabe, no entanto, o registro de que uma ausência pode ser coberta por uma insinuação de presença. Teríamos, pois os objetos presentes e claramente perceptualizáveis, e os que, não se dando como presentes, revelam-se, todavia, insinuados pelos que se mostram. É a dialética do *visível e do invisível*. É a distinção entre o *presente* e o *co-presente* (PENNA, 1978, p. 177).

É provável que em algumas ocasiões um conhecimento mobilizado no ato de perceber esteja associado não ao que esteja propriamente explícito – perceptível, mas, contrariamente,

⁶ De acordo com Engelmann o termo “Gestalten” é o plural em alemão de “Gestalt”. Ele recomenda que em português é melhor falar em “Gestalten” do que em “Gestalts”.

⁷ Percepto é o conteúdo mental do que é percebido.

naquilo que está implícito – imperceptível. Contudo, mister se faz considerar essa dialética do visível com o invisível, até porque neste último pólo poderá se ter melhor clareza de nuances do primeiro. Particularmente, em muitas ocasiões, alguns alunos podem visualizar alguns aspectos em certas figuras que não necessariamente são visíveis para outros.

Nessa relação dialética do visível com o invisível que assinala a distinção entre o presente e o co-presente, é possível associar que os entes geométricos apresentados (por exemplo, linhas) correspondem aos objetos presentes, enquanto os efeitos visuais poderiam ser associados com os objetos co-presentes.

Coube a E. Rubin o mérito de descrever as propriedades funcionais da figura:

(1) a de que só a figura tem forma, sendo o fundo dela destituído; (2) a de que a linha de contorno pertence à figura, e não ao fundo; (3) a de que a figura projeta-se em plano mais próximo do percebido do que o fundo; (4) a de que o fundo continua por trás da figura; (5) a de que só a figura se constitui em tema consciente; (6) a de que, no processo da memória, só a figura é objeto de evocação; (7) a de que a cor que recobre a figura se define fenomenologicamente como de superfície, por oposição à do fundo que se revela de cor de transparência (PENNA, 1978, p. 176).

Koffka (1973) admitiu haver uma dependência funcional de figura e fundo porque nessa relação figura-fundo, a figura está sobre o fundo, dependendo do mesmo para que esteja exposta. “O fundo serve como uma ‘estrutura’ ou moldura em que a figura está enquadrada ou suspensa e, por conseguinte, determina a figura” (p. 194). No entanto, ele fez questão de evidenciar: “é pela figura que nos ‘interessamos’; é a figura que recordamos e não o fundo” (p. 196).

Ainda retomando a dialética do visível com o invisível – explícito com o implícito – poderíamos estabelecer uma correspondência que o explícito está associado à forma, enquanto o *implícito* ao fundo. Não nos parece tão determinante esse conflito dialético como algo que determinará o *status* de um em detrimento do outro; inclusive, mesmo que o fundo se caracterize por trás da figura ou que apenas a figura seja tema consciente, isso não significa que o fundo seja somente no ato perceptivo; pelo contrário, ele pode exercer fortes influências em determinados sujeitos de acordo com o contexto em que está sendo

considerado. No entanto, a figura é distinguida a partir da existência de um contorno que a separa do fundo.

Por outro lado, é compreensível que no processo da memória só seja evocada a figura. Pois é de fato o objeto que está presente, já que qualquer manifestação do fundo flui do objeto e não o oposto. Contrariamente, não parece uma sinalização tão sugestiva associar a cor do fundo com a idéia de transparência, porquanto neste pólo é possível que ocorram algumas nebulosidades que nem sempre são tão transparentes como se poderia considerar, especialmente quando se trata das relações perceptivas.

Engelmann (2002) admite duas naturezas de consciência: “a consciência-imediata, que o indivíduo humano observa imediatamente e por um período não maior do que alguns segundos; e a consciência-mediata [...] que é observada através da mediação da memória – consciência-mediata-do-observador” – ou por intermédio de diversas mediações através de outros indivíduos, as quais denominou como consciência-mediata-de-outros (p.12).

No que diz respeito ao tempo, esse autor fez questão de destacar que, embora seja um espaço pequeníssimo de tempo, se trata de um período de tempo e que mesmo sendo pequeníssimo é indeterminado por não ser possível calcular.

Não se pode deixar de considerar que em determinadas situações alguns equívocos perceptivos sejam oriundos dessa consciência imediata. Talvez seja o momento que tanto o pólo fundo quanto o pólo figura atuem com maior intensidade no sentido de gerar interpretações perceptivas deformadas, pois se trata de uma percepção mais global e instantânea, em que se verifica essa ocorrência em muitas ocasiões quando são exploradas atividades que evocam as observações de figuras.

Por outro lado, os equívocos perceptivos procedentes dessa consciência imediata podem favorecer maiores ou menores forças gestálticas. Neste caso, poderíamos também

associar a maiores ou menores manifestações de eventos de visualização do tipo que estamos abordando.

O cumprimento do evento perceptivo dá-se em relação a um objeto considerado no seu significado mais amplo. Estando disposto no espaço, ele vai ser localizado, subordinado a um sistema de referência. Ora o processo revela-se centrado no percebedor, que opera como ponto de referência, ora o processo efetua-se por descentração, isto é, o objeto será relacionado a outro que exerça mais influência dentro do campo (PENNA, 1978, p. 178).

Como na ocorrência do evento perceptivo existe a participação do observador não é salutar admitir que os entes observados sejam vistos com a mesma padronização. Portanto, é natural que o ato da percepção possa gerar, em algumas ocasiões, dificuldades visuais para uns e para outros não.

Encerramos estas considerações desses conhecimentos gestálticos enfatizando alguns aspectos sobre acertos e erros, inclusive os que dizem respeito à observação. Um primeiro aspecto a ressaltar diz respeito a uma das grandes contribuições de Köhler que foi estabelecer uma hierarquia nos procedimentos de erro. Os erros podem ser classificados tanto como bons quanto maus. Os primeiros seriam aqueles que demonstrariam uma apreensão de algum aspecto do problema, enquanto, no segundo caso, um total desconhecimento em termos de compreensão do problema envolvido.

Particularmente, gostaríamos de destacar que os erros podem ir além da compreensão do problema em si, ou seja, serem reveladores de conhecimentos obscurecidos. Uma ilustração típica desse fato são os provenientes desses eventos de visualização dos efeitos que nos deram condições de verificar que, além do conhecimento matemático, havia outro implícito que era de ordem cognitiva.

Penna (1978) faz uma série de considerações da visão gestaltista sobre as boas e más respostas. As boas respostas são as que são ensinadas pelos adultos e que os professores têm

expectativas que venham a ser repetidas de acordo com o que foi ensinado. As más viriam de encontro a essas expectativas. A ênfase está nas “respostas, nos resultados, em detrimento dos processos, dos caminhos” trilhados (p. 229).

De acordo com esse autor, Köhler propôs não só uma tipologia sobre erros, mais, também por extensão, aos próprios acertos. Estes tidos como maus quando obtidos por acaso ou decorrentes por artifícios de memorização automatizada. Diante de tais eventos, os bons erros são melhores aceitos pelos gestaltistas.

Não é difícil ser detectado que alguns alunos apresentem respostas certas, mas que não se tenha a garantia de uma mobilização cognitiva correta. Por exemplo, no experimento de Barbosa (2002), algumas respostas de alunos sinalizaram no sentido de considerar a ordem alfabética nas suas indicações e não o aspecto do comprimento em si, inclusive esse investigador alertou para que na elaboração das atividades fosse evitado, entre outros aspectos, o uso de letras que pudessem gerar algum tipo de associação:

Em segundo lugar, percebemos, em especial, nas questões de ordenação com mais de dois elementos, que pode intervir a idéia de ordenar as figuras, segundo a ordem alfabética das letras que a simbolizam, No planejamento de atividades de sala de aula, mister se faz o uso de letras que não apresentem características de ordenação alfabética (p. 179).

Nessa atividade (3 da 2.^a sessão) que foi apresentada anteriormente, um aluno pode ter indicado o caminho AB como o mais curto e o caminho GH como o mais comprido, sendo influenciado pela ordem alfabética, isto é, as duas primeiras letras associando ao comprimento menor, enquanto as duas últimas, ao comprimento maior. Assim, as indicações estariam corretas, embora a mobilização cognitiva não estivesse adequada.

Quanto aos erros de observação, Penna (1978) mencionou que eles podem se constituir em geradores de graves erros de conduta. “Como sempre, contudo, a preocupação centraliza-se nas respostas. Nunca em suas fontes. Nunca a nível de percepção sistematizada de que esse é o significado da observação” (p. 231).

Penna (1978) também citou dois exemplos históricos de graves conseqüências da teoria psicológica, mas que destacaremos apenas o de E. Rubin, responsável pela respectiva correção:

Sua correção processou-se graças à *descoberta* de um fundo que toda figura supõe, e sem o qual ela deixa de se discriminar. Afinal, não há figura sem fundo nem fundo sem figura. É a constatação da totalidade, a verificação de que toda percepção é global. Nisso, a grande contribuição vincula-se ao movimento da teoria da forma. Só que permanece pouco explorada como descoberta relevante na escola (p. 231).

Ao encerramos estas reflexões sobre a percepção no ponto de vista da Gestalt, lembramos que Penna (1978) afirmou que os erros de observação são comuns em sala de aula e que há uma expectativa indevida: “a de que o que o mestre está vendo e lhe parece óbvio esteja, por igual, sendo visto por todos com a mesma evidência” (p. 231).

1.3 Considerações sobre percepção à luz de conhecimentos piagetianos

Tratamos nesta etapa sobre conhecimentos relacionados à percepção que foram abordados por Piaget e seus colaboradores, como são os casos de Inhelder, Vurpillot e Francès. Em decorrência do forte vínculo que mantém com esse tema, fizemos algumas inserções sobre aspectos relacionados às relações espaciais. Estas se apresentam como um desdobramento natural da percepção, sobretudo, quando a discussão gira em torno dos conhecimentos piagetianos, que trouxeram grandes contribuições nessa abordagem. Breves comentários foram acrescidos sobre a representação do espaço. Num primeiro momento, apresentamos alguns comentários efetuados por Penna. Numa segunda etapa, a discussão foi enriquecida com a colaboração dos estudos desenvolvidos por Lovell.

Se na Gestalt a percepção ocupa uma posição privilegiada, em Piaget, cabe à ação esse papel de destaque como fonte que origina o conhecimento. Na visão Piagetiana a inteligência é desvinculada da percepção, estando diretamente subordinada à ação. Enquanto para os

gestaltistas há uma espécie de isomorfismo cognitivo – “as mesmas leis da percepção definiriam as atividades de pensamento” (PENNA, 1978, p. 189).

Esse autor afirmou que o próprio Piaget propôs serem distribuídas as teorias da percepção em dois grandes grupos, sendo o fenômeno da constância⁸ que seria o referencial em torno do qual estariam divididas. Piaget & Inhelder (1974) especificaram a distinção da constância num ponto de vista da grandeza em relação ao da forma:

Chama-se constância da grandeza à percepção da grandeza real de um objeto situado a distância independente do seu apequenamento aparente; a constância da forma é a percepção da forma habitual do objeto (por exemplo, visto de frente ou no plano frontal-paralelo etc.) independente da sua apresentação perspectiva (p. 31-32).

Segundo Penna (1978) o gestaltismo da Escola de Berlim admitiu a proposta de Hering, ou seja, que a constância “era explicada como um fenômeno de reestruturação do campo perceptivo semelhante ao da transposição de um conjunto não somativo isomorficamente representado por eventos de natureza neuro-cerebral” (p. 259). Além disso, não aceitava que conhecimento prévio pudesse influir de forma significativa no fenômeno perceptivo.

Piaget (1969), abordando o desenvolvimento das percepções, afirmou que se trata de um aspecto que gera alguns problemas, inclusive relacionados aos mecanismos da própria percepção. Como exemplo, cita o fato de esses mecanismos não evoluírem de acordo com a idade. A evolução do conhecimento sempre foi um motivo de grande atenção desse pesquisador, e detectar essa estagnação nesse mecanismo despertou-lhe bastante interesse, pois o enfoque epistemológico sempre prevaleceu nos seus estudos (p.1-2).

Ele percebeu efeitos que os denominou de “primários” ou “efeitos de campo” e que conservavam as suas leis qualitativas como o passar do tempo, variando apenas quantitativamente. Tais efeitos abrangeriam a maioria das ilusões óptico-geométricas e vão

⁸ O fenômeno da constância diz respeito ao modo invariante em que se revelam os objetos à nossa percepção, independente da distância e da perspectiva em função das quais são apreendidos (PENNA, 1978, p. 259).

diminuindo em termos de quantidade com a idade. Exemplifica o caso em que um retângulo sem diagonal tem seu lado maior superestimado.

A expressão “efeitos de campo” sugere lembrar os “efeitos visuais”. O uso comum do termo efeito na segunda expressão é pura coincidência, não havendo qualquer relação com o uso piagetiano, pois quando foi adotado por Barbosa (2002), este desconhecia que se tratava de uma nomenclatura já explorada. Outrossim, talvez valha a ressalva que os “efeitos visuais” possam ser classificados como bons exemplos de ilusões óptico-geométricas.

Um efeito atribuído por Piaget (1969) foi o de centração em que estaria relacionado a um fator ou grupo de fatores que intervém na percepção visual e comum a todas as idades: “é o fato de os elementos centrados pelo olhar serem superestimados em relação aos que não o são” (p. 7).

Também nos sentimos instigados a associar os “efeitos visuais” com o efeito de centração. Genericamente, podemos dizer que tais eventos de visualização correspondem aos “efeitos de campo”, enquanto o efeito de centração pode estar associado a qualquer um dos efeitos em que houve uma parte superestimada.

Trata-se de um efeito que considerou de certa complexidade e distinguiu a possibilidade dos seguintes fatores interferirem no citado fenômeno:

1) a superestimativa dos elementos situados na zona central (fóvea) do campo visual por oposição à sua periferia; 2) a intensidade ou atenção; 3) a duração da centração; 4) a ordem de sucessão (sendo superestimado o último elemento centrado: e o ‘erro temporal clássico’; 5) a nitidez objetiva (distância do sujeito, iluminação, etc) (PIAGET, 1969, p. 7).

Esse autor preferiu não discutir cada um desses possíveis fatores, mas enriqueceu a discussão relatando algumas experiências que confirmaram a existência dos mesmos. Não os iremos descrever, mas apenas apresentar a conclusão que ele chegou por meio dos fatos dos experimentos:

[...], olhando uma figura, não se percebem todas as partes, segundo as mesmas proporções: basta que uma entre elas entre mais do que as outras para provocar uma superestimativa momentânea ou sistemática (PIAGET, 1969, p. 9).

Esse evento da contração, em que determinado elemento é superestimado em relação a outros, tem semelhança com o princípio da pregnância anunciado por Wertheimer, em especial no que diz respeito à lei da semelhança. Nas duas situações é focalizado algo que se destaca visualmente, isto é, o indivíduo é influenciado pelo efeito do que mais lhe chama atenção entre os entes visualizados.

Piaget (1969) também fez algumas considerações sobre atividades perceptivas que vão evoluindo ou que se constituem com a idade. Identificou-as como de natureza variada, tais como: “explorações simples ou polarizadas, transportes ou transposições de grandezas, de formas (portanto de proporções entre grandezas) no espaço ou no tempo, transportes de direções, referenciações, antecipações, esquematizações, etc” (p. 16).

Também não iremos descrever cada uma dessas atividades, mas apenas evidenciar o caso do efeito de polarização, isto é, decorrente da superestimativa das verticais em relação às horizontais, ou ainda, entre duas verticais iguais quando uma tem prolongada uma parte no setor superior do campo.

Considerando o exemplo do experimento de Barbosa (2002), apresentado na figura 3, 55,2 % dos alunos optou em indicar o caminho CD como o mais comprido, exatamente o que tem maior comprimento na vertical. Tal opção sugere que, provavelmente, foram influenciados pelo efeito da “projeção vertical”. Por outro lado, 34,5 % indicaram o caminho EF como o mais comprido, sendo este o que tem maior extensão na horizontal. Essa escolha sugere que podem ter sido influenciados pelo efeito da “projeção horizontal”. Assim sendo, é possível que tais resultados – com vantagem para o aspecto vertical – decorram desse efeito da polarização.

Penna (1973) anunciou resumidamente dois padrões bem diversificados de fenômenos perceptivos que foram distinguidos por Piaget:

(1) os que resultam de efeitos de campo ou de contração, que não supõem qualquer movimento do olhar e são visíveis em um único campo de contração; (2) os que

supõem deslocamentos de olhar no espaço ou de comparações no tempo, todos orientados por uma exploração ativa de sujeito (PENNA, 1973, p. 270).

No caso deste segundo, que supõem deslocamentos no espaço, desenvolvem-se com a idade. Por fim, ainda retratando esse aspecto evolutivo da percepção, no que tange à organização desse processo, este autor enfatizou a necessidade de se considerar duas fases:

(1) a primeira, caracterizada pela perspectiva egocêntrica, ou seja, pela incapacidade de o percebedor admitir a idéia de que outro ângulo de apreciação dos objetos, além do seu próprio, seja possível; (2) a segunda, definida pela descentração, que permite a aceitação de outros ângulos perceptivos além do próprio (PENNA, 1973, p. 269).

Sobre a centração, Piaget & Inhelder (1993) afirmaram que, quando esta ocorre de forma isolada, ela é deformante por ser incompleta e conduzir à superestimação do elemento centrado em detrimento dos elementos periféricos da zona de centração. Para eles, é na passagem de uma centração a outra – ou descentralização – que se conduzirão “a uma correção ou regulação das centrações umas pelas outras, e quanto mais numerosas as centrações, mais a percepção será objetiva” (p. 40).

Estamos admitindo que, em algumas ocasiões, os fenômenos de visualização dos efeitos visuais também possam estar associados a esse caráter da centração. Os alunos centram o foco para aspectos isolados das figuras e desconsideram outros aspectos por os elegerem inconscientemente como periféricos. Deste modo, como foi dito anteriormente, ao considerarmos certa semelhança do conceito de centração com o de pregnância da concepção gestáltica, os efeitos visuais podem ser manifestações de eventos indicados por essas duas correntes teóricas.

Vurpillot (1969) afirma que percebemos os objetos como se eles estivessem “situados uns em relação com os outros e mantendo entre si relações de distância” (p. 96). Os efeitos visuais foram detectados em atividades nas quais os alunos precisavam comparar os entes, configurando-se como situações em que havia necessidade de estabelecer relações entre tais entes.

Essa autora fez questão de ressaltar algumas observações preliminares, como o sentido genérico da palavra objeto que envolve não só o indivíduo percebido como qualquer elemento perceptivamente isolável, e o da não “unicidade” de espaços, mas da existência de “vários”, havendo necessidade de se “distinguir os múltiplos espaços dos matemáticos, do espaço físico e dos espaços perceptivos” (p. 96).

De acordo com Vurpillot (1969):

Um espaço matemático é construído a partir de um pequeno número de axiomas e descrito por uma geometria. Algumas dessas geometrias podem ser aplicadas, mais ou menos felizmente, ao espaço físico e a um ou outro dos espaços perceptivos (p. 96).

Uma outra observação preliminar que esta pesquisadora mencionou, e que interessa aos nossos estudos, diz respeito ao atributo de todo ser vivo dispor de órgãos sensoriais que são os canais de comunicação com o mundo físico. Portanto, o espaço perceptivo deste ser depende das características do mundo físico em que ele vive e dos sistemas sensoriais que dispõe.

No que tange à geometria topológica, que na visão Piagetiana é a que goza de grande afinidade com os aspectos perceptivos, Piaget & Inhelder (1993) fizeram a seguinte assertiva:

[...] as noções espaciais fundamentais não são euclidianas: são ‘topológicas’, isto é, repousam simplesmente nas correspondências bicontínuas que recorrem aos conceitos de vizinhança e de separação, de envolvimento e de ordem, etc., mas ignoram qualquer conservação das distâncias, assim como toda projetividade (p. 11).

De início, as relações espaciais são topológicas e vão se tornando paulatinamente projetivas e métricas.

[...], antes de qualquer organização projetiva e, mesmo, euclidiana do espaço, a criança começa por construir e utilizar certas relações elementares, como a vizinhança e a separação, a ordem, o envolvimento e o contínuo, correspondendo às noções que os geômetras chamam ‘topológicas’, e que consideram, igualmente, como elementares do ponto de vista da reconstrução teórica do espaço (PIAGET & INHELDER, 1993, p. 15).

Em nosso entendimento, tais relações topológicas estão configuradas na dimensão geométrica, ou seja, não permitindo à criança estabelecer relações a ponto de avançar no sentido de construção da grandeza. Tal elaboração é oriunda das relações instituídas nas

dimensões projetiva e euclidiana.

Parece-nos que o momento é oportuno para esclarecermos os três tipos de geometria que começam a ser abordados e que continuarão sendo no decurso dos comentários que se seguem. Assim, é que evocamos a colaboração do que foi apresentado por Duhalde & Cuberes (1998):

Geometria Euclidiana: refere-se às transformações que somente mudam a posição do objeto e, portanto, conservam-se o tamanho, as distâncias e as direções, ou seja, os aspectos relacionados com a medida.

Geometria Projetiva: ocupa-se das propriedades espaciais que se conservam ao projetar um objeto, ou ao observá-lo desde diferentes posições. É a geometria das sombras. Nela se conserva a retitude, não a medida.

Geometria Topológica: [...] Neste enfoque as figuras são submetidas a transformações tão violentas que perdem todas as suas propriedades métricas e projetivas, com a condição de que não se produzam cortes (p. 63).

Segundo Piaget & Garcia (1983) a geometria tem início com Euclides: “por um período durante o qual se estudam as propriedades das figuras e dos corpos geométricos enquanto ‘relações internas’ entre os elementos destas figuras e destes corpos” (p. 110).

Para esses pesquisadores, essa etapa da geometria não toma em consideração o espaço enquanto tal, como também, por conseqüência, não considera as transformações das figuras no interior de um espaço que as abrangeria todas. Optaram em denominar esta fase de intrafigural.

Uma etapa posterior foi caracterizada pelo estabelecimento de relação entre as figuras, manifestada especificamente na busca de transformações, conectando as figuras por várias configurações de “correspondências, mas sem chegar à subordinação das transformações às estruturas de conjunto. É o período durante o qual a geometria predominante é a geometria projetiva” (PIAGET & GARCIA, 1983, p. 110). Esta fase foi chamada de interfigural.

As atividades em que foram detectados os efeitos visuais foram em situações interfiguras, isto é, o aluno era convocado a estabelecer comparações entre duas ou mais figuras. Por conseguinte, esses eventos de visualização estão configurados predominantemente na geometria projetiva.

Por último, a terceira fase, caracterizada pela preeminência das estruturas, foi chamada de transfigural. Esta surge bem mais tarde, constituindo-se numa característica da geometria euclidiana. Complementa Piaget & Garcia (1983):

Estas três etapas, bem delimitadas na história da geometria, testemunham a evolução no processo da conceptualização das noções geométricas. Não se trata de períodos de “crescimento” dos conhecimentos (em relação à etapa precedente), mas de uma reinterpretação total dos fundamentos conceptuais [...].

Um tal processo evolutivo demonstra a posição sustentada desde há muito tempo pela epistemologia genética ao mostrar, mediante numerosos exemplos retirados da psicologia genética, que o desenvolvimento cognitivo nunca é linear e exige, no momento de acesso a qualquer nível, a reconstrução do que foi adquirido nos níveis precedentes (p. 110-111).

É um paralelo extremamente rico que esses pesquisadores conseguem estabelecer entre a epistemologia genética e a evolução da história da geometria. Trata-se de uma reorganização dos conhecimentos, inspirada numa perspectiva nova e conectada a uma reinterpretação dos conceitos intrafigural, interfigural e transfigural.

Para Piaget & Garcia (1983) a psicogênese do espaço tem início a partir das relações intrafigurais. Eles sugerem que sejam evocados modelos da representação em que é possível verificar, desde os primeiros, desenhos. Por exemplo, a distinção entre figuras abertas e fechadas, ou entre as retilíneas e curvilíneas. São relações que derivam da comparação entre propriedades internas de duas ou mais figuras. Diferentemente, a relação interfigural considera a posição das figuras num espaço englobante.

Galvez (1996) ao comentar sobre a obra “A representação do espaço na criança” de Piaget & Inhelder, ressalta que tal elaboração teve o propósito de defender a tese que, “no domínio da geometria, a ordem genética de aquisição das noções espaciais é inversa à ordem histórica do progresso da ciência” (p. 242).

Lovell (1988), mesmo reconhecendo os valiosos experimentos desenvolvidos por Piaget e Inhelder, discordava dessa tese que eles defendiam sobre a concepção do espaço – a criança alcança inicialmente os conceitos topológicos de uma figura, e só depois atinge os do espaço projetivo e euclidiano que são construídos quase simultaneamente – por ter realizado

uma série de experiências e verificado que uns resultados estavam de acordo com os desses dois pesquisadores e outros não. Assim, defendeu a necessidade de maiores evidências experimentais para aceitação dessa concepção de espaço.

Tomando por base essa tese piagetiana poderíamos dizer que há um desencontro entre os aspectos filogenéticos e ontogenéticos, isto considerando o campo da geometria que está registrado historicamente, ou seja, a elaboração inicial foi da geometria euclidiana, vindo em fase bem posterior a projetiva e, por último, a topológica. Dessa forma, esta é a configuração da trajetória filogenética, enquanto para Piaget o fluxo ontogénético ocorre em sentido contrário.

Em relação ao pensamento geométrico, Lovel (1988) faz os seguintes comentários sobre os estudos piagetianos:

Para Piaget, as relações espaciais não são entendidas a priori pela criança, apenas porque a estrutura da mente humana determina o pensamento que a mente pode adotar. Tampouco decorrem das imagens que se tornaram ligadas de acordo com as leis de associação, nem são passivamente impressas em sua mente por meio de sensação (isto é, chegadas de sinais visuais ou táteis). Ao invés, a representação de espaço decorre das atividades do indivíduo que ocorreram no decorrer de muitos anos (LOVELL, 1988, p. 88).

Na sua compreensão, a criança adquire imagens por meio de sua atividade perceptual. Essa atividade deve ser considerada como constituída das explorações visual e tátil. Complementando, Lovel (1988) diz que, para Piaget, as relações topológicas são as únicas possíveis de a criança representar para si mesma, e que o pensamento geométrico mais evoluído não pode se resumir às imagens estáticas.

Para Piaget & Inhelder (1993), na análise psicogenética do espaço, o que se torna difícil é que “a construção progressiva das relações espaciais progredirem, distintamente, em dois planos: o plano perceptivo ou sensorio-motor e o plano representativo ou intelectual. (p. 17).

Não é tarefa fácil diferenciar o plano sensitivo do plano inteligível. Ao acompanhar estas posições teóricas que estamos apresentando, são perceptíveis os pontos que divergem

essas duas principais correntes abordadas. O fato é que esses dois planos possuem uma relação forte com os conhecimentos geométricos e necessitam de maiores esclarecimentos.

Particularmente, nos questionamos em saber até que ponto essa fronteira entre o sensível e o inteligível, também está diretamente associado a uma outra que separa a delimitação geométrica da delimitação da grandeza. Parece-nos que *a priori* é pertinente considerar tal extensão, pois enquanto no sensível a espontaneidade é uma nas suas relações, diferentemente o inteligível traz implícito nas suas relações a atividade sistemática, bem caracterizada por meio da ação.

Quando Piaget & Inhelder (1993) afirmaram que as percepções iniciais da criança se efetuam em relações elementares como vizinhança, separação, ordem, envolvimento e o contínuo, é possível admitir que estas – topológicas – estão bem mais próximas do campo do sensível, enquanto as que se referem às relações projetivas e métricas, estão mais associadas ao campo do inteligível.

Segundo Lovell (1988), esses dois autores fazem alusão que, a partir de 6 anos, os conceitos topológicos vão aos poucos dando lugar a conceitos projetivos e euclidianos. Complementa esse pesquisador afirmando que “no espaço projetivo os objetos estão localizados relativamente um ao outro, embora não haja mensuração” (p. 85).

Essa assertiva vem mais uma vez confirmar o quanto as atividades em que foram observados os fenômenos efeitos visuais estão configurados no espaço projetivo, não só porque os entes geométricos estavam dispostos uns em relação aos outros, mas também, pela não ocorrência da mensuração, já que as situações eram restritas ao ato comparativo.

Lovell (1988) evidenciou o argumento de Piaget & Inhelder sobre o espaço projetivo, no que tange ao seu início numa perspectiva psicológica, isto é, se manifesta “quando um objeto já não é mais pensado isoladamente, mas começa a ser considerado em relação a ‘um

ponto de vista”. Nesse caso, “a criança começa a compreender quais as formas dos objetos quando vistos de posições diferentes” (p. 86).

Para Vurpillot (1969) a “geometria topológica define o conjunto das propriedades de uma figura que se conservam quando de uma transformação contínua” (p. 98). Ela exemplifica a transformação contínua como a que sofre uma figura desenhada sobre uma placa da borracha, sendo possível esticá-la, de acordo com os respectivos meridianos. A medida não é possível de ser realizada, por não haver sistemas de referências, apenas há possibilidade de situar um objeto considerando seu vizinho. Este sistema vai surgir graças ao desenvolvimento de um espaço representativo.

Piaget & Inhelder (1993) descreveram sobre as relações espaciais elementares que ocorrem na percepção primitiva, ou seja, as percepções iniciais quando a criança está desenvolvendo os exercícios reflexos.

A primeira que eles acreditam ser a mais elementar das relações espaciais foi a da vizinhança, identificada como a classe mais elementar da estrutura perceptiva, isto é, a “proximidade” dos elementos percebidos num mesmo campo.

A segunda relação espacial elementar apresentada foi a da separação, que consiste em estabelecer uma relação de separação entre dois elementos, ou seja, dissociá-los ou favorecer um meio em que se possa distingui-los.

Como terceira relação espacial apresentada foi a que se estabelece entre elementos concomitantemente vizinhos e separados, no caso de estarem distribuídos em seqüência. Trata-se da relação de ordem ou de sucessão espacial.

A circunscrição (ou de envoltório) é mais uma proporcionada como relação espacial que ocorre na percepção elementar. Esses autores exemplificam que numa seqüência de ordem ABC, o elemento B é percebido como estando “entre” A e C, constituindo-se numa circunscrição a uma dimensão. Quando se tratar de uma superfície, um dado elemento

também poderá ser percebido como rodeado pelos outros. Porém, no que diz respeito “A três dimensões, a circunscrição é dada numa certa relação de interioridade, como o de um objeto numa caixa fechada” (PIAGET & INHELDER, 1993, p. 22).

Por último, esses pesquisadores apresentaram a relação de continuidade no caso das linhas e das superfícies que eles acreditam intervir a partir do início da percepção. Contudo, questionam até que ponto “o conjunto de um campo perceptivo constitui um campo espacial contínuo”. Para eles, não há comprovação “que num campo particular, tal como um campo visual, por exemplo, o contínuo perceptivo seja de mesmo caráter em todos os níveis de desenvolvimento” (PIAGET & INHELDER, 1993, p. 23).

Para Francès (1969) a identificação ou o reconhecimento perceptivo constitui-se como o comportamento perceptivo mais habitual nas situações vitais. Afirma ainda que numa “perspectiva experimental, a percepção se apresenta como uma resposta a uma estimulação fisicamente definível, isto é, o que o sujeito vê ou ouve no que lhe mostramos” (p. 177). Em se tratando da percepção da grandeza espacial ou intensiva admite que:

é uma resposta dada em consequência de uma abstração de alguns caracteres da forma ou do objeto ou do campo em seu conjunto funcionando como graduações de estimulação cujos graus considera que estejam associados a escalas aprendidas (FRANCÈS, 1969, p. 179).

No seu entendimento é difícil determinar a demarcação “que separa as formas dos objetos tais como percebemos, porque todo objeto apresenta uma forma e toda forma, enquanto é sustentada por um substrato material situado no espaço e tempo”, termina assumindo o caráter de objeto seja para quem a experimenta ou para quem a manipula (FRANCÈS, 1969, p. 180).

Não é por acaso o questionamento levantado por Hershkowitz (1994) sobre o *status* ontológico das entidades geométricas: “A questão é se as entidades geométricas são parte do mundo físico real e se não são, o que elas são”? (p. 29). A resposta a essa questão foi remetida a reflexões filosóficas, que não nos interessa discutir, neste momento.

Piaget & Inhelder (1993) consideram, de forma geral, que as relações perceptivas elementares correspondem a relações espaciais também elementares, fazendo-se necessário,

[...] distinguir ao lado da percepção pura e essencialmente receptiva, tal como a que resulta de uma centralização dada, uma ‘atividade perceptiva’ que começa com as mudanças de centralização (ou descentralização) e que consiste em comparações, transposições, antecipações, etc. A necessidade dessa distinção é atestada pelo fato de, se os efeitos de simples percepção são relativamente constantes com a idade (por exemplo, as ilusões geométricas simples diminuem apenas um pouco no curso do desenvolvimento), os efeitos da atividade perceptiva, ao contrário, aumentarem progressivamente com a evolução, e veremos precisamente um bom exemplo disso na ‘percepção estereognóstica’ que se torna mais fina na mediada dos progressos da atividade perceptiva de caráter tátil-cinestésico (p. 31).

Segundo esses autores, essa ‘atividade perceptiva’ é a extensão da inteligência sensório-motora em ação antes do surgimento da representação. Esta consiste – “seja ao evocar objetos em sua ausência, seja quando duplica a percepção em sua presença – em completar seu conhecimento perceptivo referindo-se a outros objetos não atualmente percebidos” (PIAGET & INHELDER, 1993, p. 32). Contrariamente, a percepção resulta de um conhecimento dos objetos em contato direto com eles.

A representação ao mesmo tempo em que se constitui num prolongamento da percepção, também introduz algo novo, um “sistema de significações que comporta uma diferenciação entre o significante e o significado” (PIAGET & INHELDER, 1993, p. 32). Assim sendo, a passagem da percepção à representação espacial se apóia tanto no significante quanto no significado que correspondem à imagem e ao pensamento.

Piaget & Inhelder (1993) consideram que quando se restringe ao nível da percepção, o significante e o significado terminam sem serem claramente diferenciados, “o primeiro não constituindo senão um índice, um aspecto, portanto, do conjunto”. Quando se dá em nível de representação, significante e significado são diferenciados e essa diferenciação caracteriza “precisamente o pensamento representativo em oposição à percepção” (p. 58).

Especificamente, no que se refere à reta, esses autores afirmam que a sua percepção ocorre precocemente, mas sua representação que envolve o ato de construí-la ou reconstruí-la ocorre só em etapa bem posterior. Eles não consideram que se constitua numa noção

topológica, “porque para transformar uma simples linha em uma reta é necessário introduzir ou um sistema de pontos de vista, ou um sistema de deslocamentos, de distâncias e de medidas”. Nessa perspectiva, “a representação da reta supõe, assim, o espaço projetivo ou o espaço euclidiano” (PIAGET & INHELDER, 1993, p. 169).

Eles também asseguram que uma criança, ao perceber uma reta vertical, estando esta localizada numa altura paralela ao quadro visual do sujeito, procura representá-la

[...] como diminuindo de comprimento quando inclinada para a frente ou para trás, porque a criança compreende que ela perde, então, em altura, considerada de seu ponto de vista, o que ganha em profundidade... (PIAGET & INHELDER, 1993, p. 207).

Quanto às relações euclidianas, esses autores afirmam que o “realismo intelectual marca a aparição das retas, dos ângulos, dos círculos, quadrados e outras formas geométricas simples, ainda que sem medidas, nem proporções precisas”. Complementam, afirmando que é possível interpretar o “realismo intelectual” do desenho infantil como um início de uma construção projetiva e euclidiana e que apenas em torno de 8-9 anos, em média, é que aparecem formas de desenhos que considera simultaneamente perspectivas, proporções e medidas ou distâncias (PIAGET & INHELDER, p. 67-68).

Essa preocupação simultânea trata-se de uma manifestação de “realismo visual” que “parece mostrar que as relações projetivas (perspectiva) não precedem as relações euclidianas (medida, coordenadas e proporções) nem o inverso”, mas que tais sistemas são construídos de forma solidária em que um se apóia no outro (PIAGET & INHELDER, 1993, p. 68).

Considerando a propositura do modelo de Douady & Perrin-Glorian (1989), as relações projetivas procedem às relações euclidianas. De acordo com esta proposta, como momento inicial, tem-se o quadro geométrico em que estão manifestados os entes geométricos. Em seguida, vem o quadro das grandezas que está fortemente associado à manifestação de perspectiva. Por fim, o quadro numérico que tem na manifestação da medida sua culminância principal. É interessante ressaltar que os efeitos visuais que foram detectados

em situações do quadro das grandezas também apresentam essa forte relação com o aspecto da projeção (perspectiva).

Lovell (1988), ao procurar classificar as relações espaciais, chamou atenção para o fato que a maioria das pessoas teve algum contato com conhecimentos geométricos euclidianos na escola e que estas relações “dizem respeito a ‘magnitudes’, como comprimento, tamanho de ângulos, áreas e volumes” (p. 82).

As grandezas indicadas são exatamente as geométricas e embora seja uma assertiva correta, a de ângulo é bem menos usada. Há também de se reconhecer que as experiências desenvolvidas quase sempre não permitem estabelecer relações que contribuam para compreensão dos conceitos dessas respectivas grandezas.

De acordo com Lovell (1988), no espaço euclidiano “os objetos são localizados por meio de eixos de referência (comprimento, largura, altura) e a criança desenvolve suas idéias de medição, de modo que pode traçar uma figura euclidiana”, por exemplo, um retângulo, e pode medir seus lados (p. 86).

Ainda sobre essa exploração visual ou tátil esse autor afirma que, na opinião de Piaget, as relações iniciais da criança são muito pobres, por isso apenas as relações topológicas se tornam possíveis de serem representadas para si mesmas e que se torna “impossível o pensamento geométrico mais avançado para um sujeito que possui somente uma coletânea de imagens estáticas” (LOVELL, 1988, p. 88).

Esse investigador evidencia que as ações efetuadas sobre os objetos ou figuras que vão permitir as crianças avançarem no sentido de construir um sistema coerente de relações espaciais e resume:

Neste caso, também o pensamento surge da interiorização das ações executadas; em suma, o pensamento geométrico é em essência um sistema de operações interiorizadas. A imagem, surgindo da atividade perceptual, certamente adquire a capacidade de servir como um suporte ao raciocínio espacial; e as imagens das figuras espaciais e as dos resultados das operações mentais executadas sobre estas figuras são igualmente necessárias para o pensamento geométrico. Mas o elemento vital para ocasionar sistemas coerentes de pensamentos geométricos são as operações (LOVELL, 1988, p. 88).

Conclui dizendo que, para Piaget, “os conceitos espaciais resultam de ações internalizadas e não de imagens de objetos ou de eventos, ou mesmo de imagens dos resultados das ações”. Inspirado nas opiniões desse epistemólogo, Lovell (1988) sugere três tipos de atividades:

- ações em que os objetos são colocados perto um do outro (proximidade); ou em série (ordem); ações de circundar, apertar, afrouxar. Estas ações tendem a desenvolver conceitos topológicos;
- ver e desenhar objetos de ângulos diferentes; dobrar e desdobrar superfícies. Cortar objetos e mostrar várias seções; aumentar e reduzir figuras; rotacionar figuras. Estas ações ajudam a desenvolver conceitos projetivos;
- desenho de figuras semelhantes; experimentos envolvendo linhas e planos horizontais e verticais; mensuração; coordenação de grupos por distância e direção em leiautes de modelo. Estas atividades ajudam a desenvolver conceitos euclidianos (p. 89).

Tomando como referência a categorização descrita acima, é possível dizer que as atividades sugeridas no terceiro bloco são as que mais se aproximam das que compuseram o nosso experimento.

Por fim, encerramos estas considerações sobre alguns aspectos que tratam sobre a percepção sob um ponto de vista da teoria Piagetiana, com algumas reflexões trazidas por Piaget & Inhelder (1993) que tratam das relações espaciais. Inicialmente, eles realçam que a principal diferença entre as relações topológicas e as relações projetivas e euclidianas está relacionada ao de coordenação das figuras entre si. Assim, as relações são primeiramente topológicas, isto é, restritas a cada figura e envolvem relações de vizinhança, de separação, de ordem, de envolvimento e de continuidade. A relação de uma figura com outra é de natureza biunívoca e bicontínua que decorre de analogias de estruturas entre as figuras envolvidas. Diferentemente do que ocorre nas relações espaciais euclidianas e projetivas que os objetos são considerados nas configurações uns em relação aos outros, baseando-se em “sistemas de conjunto que consistem, seja em projeções ou perspectivas, seja em ‘coordenadas’ que dependem de certos eixos, e é por isso que as estruturas projetivas e euclidianas” são consideradas mais complexas e cuja elaboração ocorre mais tardiamente (p. 168).

1.4 Alguns aspectos da visualização à luz de estudos da Educação Matemática

Ultimamente, há um reconhecimento entre os pesquisadores em Educação Matemática sobre a importância de se desenvolver a habilidade da visualização. É o que enfatiza Flores (2003):

Nesta última década, diversas pesquisas em educação matemática apontam para a importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento da habilidade de visualização. Isto porque há um reconhecimento da importância de se compreender a percepção das informações visuais, tanto para a formação matemática do educando quanto para sua educação de uma maneira geral, num mundo cada vez mais semiotizado (p. 22).

Kaleff & Rei (1996) também dão depoimentos entusiásticos sobre tal habilidade:

Estamos convencidos de que processos nos quais o aluno tem incentivada a habilidade de visualizar figuras geométricas espaciais não somente contribuem para o desenvolvimento do raciocínio espacial, mas também favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-abstrato, preparando o aluno para estudos matemáticos mais avançados (p. 11).

Esses autores dão destaque para as virtudes da visualização vislumbrando preparar alunos para estudos matemáticos mais avançados. Em que pese constituir-se como uma meta possível, a contribuição dessa operação visual vai além dessas fronteiras matemáticas, ajudando não só a formação do pensamento do indivíduo, mas a própria cidadania.

A preocupação com o desenvolvimento da visualização não tem se restringindo aos conhecimentos matemáticos, mas por extensão também tem afetado outras áreas de conhecimento, como testemunha Fainguelernt (1999):

Nos últimos anos, a pesquisa em Geometria tem sido amplamente estimulada por novas idéias da própria Matemática e de outras disciplinas, incluindo a Ciência da Computação. Portanto, é necessário desenvolver uma educação visual adequada a fim de que possam ser exploradas as possibilidades que emergem da computação gráfica, que influenciam muitos aspectos de nossas vidas (p. 21).

Os recursos visuais provenientes da informática têm contribuído para um ver com muito mais sofisticação, inclusive facilitando a visualização dos próprios entes geométricos, sobretudo em decorrência do atributo da dinâmica que lhe é peculiar. Não é por acaso o realce de Lévy (1999) ao artefato da simulação como um novo modo de conhecimento trazido pela

cibercultura, constituindo-se como uma operação que amplia a imaginação individual, especialmente por permitir a produção de animações dinâmicas e complexas.

Em termos de Educação Matemática, há necessidade de pesquisas que investiguem as influências de fenômenos de visualização por meio da informática. Por exemplo, os próprios efeitos visuais verificados nos ambientes papel e lápis ou com materiais manipulativos, poderiam ser explorados e testados por meio desse recurso.

Fainguellernt (1999) ressalta a importância do estudo da Geometria como meio fundamental para favorecer o desenvolvimento do “pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que se constituem como habilidades essenciais para leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida” (p. 53).

Concordamos com essa autora sobre esse destaque da importância da geometria como meio favorecedor ao desenvolvimento espacial, mas é importante também não esquecermos da grande importância que o desenho geométrico pode propiciar nesse mesmo sentido.

Aliás, a própria Fainguelernt (1999) enfatiza a constatação verificada sobre a importância da visualização tanto por seu valor, quanto “pelo tipo de processos envolvidos que são necessários e podem ser transferidos” não só para outras áreas da Matemática, mas também para distintas áreas do conhecimento (p. 53).

Smole (1996) diz, sem receio de estar cometendo algum excesso, “que o desenvolvimento infantil é, e um determinado período da infância, essencialmente espacial e que o estudo de formas e as relações espaciais” constituem-se como “uma das melhores oportunidades para relacionar a matemática à dimensão espacial da inteligência” (p. 105).

Gutierrez (1991) sublinhou a importância da percepção visual em diversas atividades da vida, isto é, que vai além das necessidades da aprendizagem escolar ou da geometria. Para ele, esse valor é que faz com que “diferentes grupos de investigadores, com objetivos e

contextos distintos, se preocupem em estudar esse campo da percepção espacial, que tem recebido diversos nomes como ‘percepção espacial’, ‘imaginação espacial’, ‘visão espacial’, ou ‘visualização’” (p. 44).

Não parece salutar esse congestionamento de nomenclaturas. Tal fato talvez seja um indício de que a visualização ainda está incipiente nos passos teóricos. De qualquer forma, é sempre necessário que seja delimitada a dimensão conceitual que está sendo considerada.

Hershkowitz (1994) fez questão de destacar as contribuições de Gardner no que diz respeito à inclusão da inteligência espacial como uma das inteligências múltiplas presentes em um indivíduo. Justificou o ponto de vista deste teórico em usar a expressão “inteligência espacial” em vez de “inteligência visual”, com o seguinte comentário: “É interessante notar que as habilidades de criar e de transformar as imagens mentais não são dependentes dos estímulos visuais físicos, indivíduos cegos desde o nascimento também possuem estas habilidades” (p. 36).

O próprio Gardner (1995) detalha essa distinção:

As populações cegas ilustram a distinção em ter a inteligência espacial e a percepção visual. Uma pessoa cega pode reconhecer formas através de um método indireto: passar a mão ao longo do objeto traduz a duração do movimento, que por sua vez é traduzida no formato do objeto. Para a pessoa cega, o sistema perceptivo da modalidade tátil equivale à modalidade visual na pessoa que a enxerga (p. 26).

Por outro lado, o não desenvolvimento de uma concepção do espaço traz transtornos para muitos adultos, é o que explicita Gálvez (1996):

[...] há grande quantidade de adultos que, através de sua interação extra-escolar com o ambiente, não conseguiram desenvolver uma concepção do espaço que lhes permita um controle adequado de suas relações espaciais, controle que lhes possibilite orientar autonomamente seus deslocamentos em âmbitos de determinada magnitude (p. 251).

Diante de todos esses depoimentos, parece que não é exagero dizer que se tornou um ultimato do mundo contemporâneo o desenvolvimento da capacidade visual. Não queremos com essa assertiva desconsiderar a importância das outras naturezas de percepção, até mesmo

porque muitos são aqueles que não dispõem do recurso da visão, seja por causa congênita ou proveniente de algum acidente e que terminam recorrendo a outros canais perceptivos.

Vejam os que diz Almeida (1999) a respeito do uso dos sentidos pelo homem:

O ser humano é essencialmente visual, mas a assimilação do mundo pelo homem não é limitada à visão. Os outros sentidos também interferem e colaboram na aprendizagem do homem. Os portadores de deficiência visual podem identificar formas através do tato. Todos os canais de comunicação do homem com o seu meio devem ser trabalhados na aprendizagem, ou seja, torna-se importante e imprescindível que o ensino/aprendizagem não se limite a um único veículo de comunicação – a visão (p. 41).

Duhalde & Cuberes (1998) também mencionam a visão e o tato como os sentidos que caracterizam os primeiros contatos da criança:

Os primeiros contatos que a criança tem com o meio que a rodeia são de origem sensorial, particularmente centrados na visão e no tato. Toca os objetos, os atira, os segue com seu olhar e vê como desaparecem e reaparecem. Começa assim a construir diferentes espaços que estão ligados ao que percebe com cada um dos sentidos (p. 61).

Almeida (1999) chama atenção para a dependência que existe entre a aprendizagem e o desenvolvimento dos sentidos, destacando a visão como o sentido que se sobressai na captação de informações do mundo exterior:

O fato é que de alguma forma a aprendizagem fica dependente do desenvolvimento dos sentidos. É certo que alguns sentidos são utilizados com vias mais rápidas para entrada de certas informações na mente, mas é possível, com o decorrer do desenvolvimento cognitivo de um indivíduo a substituição de alguns dos sentidos por outros. Dentre os sentidos, a visão é um dos que têm destaque na forma como o indivíduo capta as informações do mundo exterior (p. 27).

Del Grande (1994) afirmou que “a visão se desenvolve como resultado de muitas experiências acumuladas” e que o fato do estudo da percepção ter raízes na psicologia, na filosofia e na física, talvez explique a dificuldade em se ter uma definição mais universalmente aceita (p. 156).

Não se pode perder de vista que a percepção tem esse caráter bem mais universal, não se constituindo como um conhecimento exclusivo de nenhuma ciência. Também devemos ter bastante cuidado em pensar a percepção além das fronteiras do aspecto visual. Todavia, em que pese esses dois atenuantes, a Matemática é privilegiada nessa relação perceptiva,

sobretudo, em decorrência das contribuições que a geometria possibilita em termos do incremento da visualização.

No que tange a percepção espacial, Del Grande (1994) procurou conceituar como a capacidade “de reconhecer e discriminar estímulos no espaço, a partir do espaço, e interpretar esses estímulos associando-os a experiências anteriores” (p. 156).

Esse pesquisador destacou a importância das habilidades da percepção para uma vida escolar bem sucedida:

As habilidades de percepção são importantes para o sucesso no início da vida escolar e têm uma grande influência sobre a estabilidade da criança. O ajustamento e o progresso serão maiores se as habilidades de percepção espacial da criança estiverem à altura das tarefas que ela enfrentar. O mundo visual é o resultado de um processo lento que cria um mundo de objetos, semelhantes ou diferentes, interdependentes e significativos (DEL GRANDE, 1994, p. 167).

Del Grande (1994) relatou que alguns estudos sugerem a existência de sete aptidões espaciais. São elas: coordenação visual-motora; percepção de figuras em campos; constância de percepção; percepção da posição no espaço; percepção de relações espaciais; discriminação visual e memória visual. Tentaremos apresentar resumidamente como esse autor descreveu cada uma delas.

A coordenação visual-motora diz respeito à capacidade de coordenar a visão com o movimento do corpo. A percepção de figuras em campos corresponde ao ato visual que permite identificar uma figura específica (o foco) num quadro (campo). Nesse caso, faz-se necessário que sejam desconsiderados quaisquer estímulos visuais irrelevantes. A constância de percepção (forma ou tamanho) corresponde à habilidade de reconhecimento que um objeto tem propriedades invariáveis, por exemplo, tamanho e forma, mesmo que possam causar impressões distintas de acordo com o ponto em que é observado. A percepção da posição no espaço está relacionada à capacidade de determinar a relação de um objeto com outro e com o observador. Um caso típico dessa necessidade é quando duas figuras são congruentes e se apresentam “diferentes” em decorrência de um movimento de rotação, mas a criança não

consegue distinguir essa congruência por conta desse deslocamento. A percepção de relações espaciais diz respeito à habilidade de visualizar dois ou mais entes em relação a si mesmo ou em relação um ao outro. A discriminação visual é a capacidade de diferenciar aspectos semelhantes e distintos entre entes. Por fim, a memória visual que corresponde à capacidade de lembrar com exatidão de um ente que não está presente, tendo que relacionar suas características com outros entes que estejam presentes ou não.

Dentre as aptidões descritas acima, duas estão mais associadas com os conhecimentos mobilizados que dizem respeito aos efeitos visuais: a percepção das relações espaciais e a discriminação visual. Nas situações em que foram detectados esses fenômenos de visualização, tanto havia necessidade de se estabelecer comparações entre os entes geométricos, isto é, identificando os que eram semelhantes ou diferentes (discriminação visual), no que tange aos comprimentos, quanto nessa prática comparativa visual era invocado o estabelecimento relacional perceptivo (relações perceptivas) entre os entes que configuravam o campo perceptível.

Del Grande (1994) chamou atenção para que na elaboração dos currículos devessem constar aspectos que considerassem o desenvolvimento da percepção de espaço e que também levasse em conta o processo de informação visual da criança (p. 167). Admitimos que não só a visualização precisa ser repensada em termos de um melhor aproveitamento curricular, mas, os aspectos cognitivos, no sentido geral, deveriam receber uma melhor atenção, pelo menos, que estivessem mais bem explicitados nas relações com os conhecimentos matemáticos nas quais gozam de tantas afinidades.

Gordo (1993), em sua investigação sobre a visualização espacial e a aprendizagem matemática, desenvolvida no 1.º ciclo do ensino básico, chegou a destacar:

Partindo do pressuposto de que a Matemática nos pode ajudar a compreender o mundo que nos rodeia, uma parte dessa compreensão é de natureza espacial. Além disso, ainda utilizamos noções espaciais nas representações do mundo real. Daí a importância de proporcionar ambientes de aprendizagem facilitadores das capacidades espaciais no indivíduo e, nomeadamente, na criança (p. 27).

Essa pesquisadora, nas reflexões finais de sua pesquisa, sugeriu que sejam efetuadas investigações para verificar a aprendizagem específica de conceitos:

A visualização espacial encontra-se presente em muitas áreas da Matemática. É, por isso, importante investigar nessas áreas, de forma a tentar perceber qual a sua influência na aprendizagem específica de conceitos (GORDO, 1993, p. 95).

Flores (2001) chama atenção para não se confundir a habilidade da visualização com a da percepção visual. A primeira permite perceber um objeto em sua totalidade, enquanto a segunda é restrita ao conhecimento do objeto, sua identificação, que permitirá construir uma imagem mental sobre o mesmo.

Para Fainguelernt (1999) “visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais” (p. 53).

No nosso entendimento, a visualização poderia ser considerada como uma operação de pensamento no sentido do tratamento que foi dado por Raths (1977), isto é, compondo um grupo de atividades que tem como objetivo aguçar o pensamento cognitivo por meio da mobilização de alguns conhecimentos. Dentre estes, podemos destacar o da comparação, classificação, imaginação, interpretação, etc. Se notabiliza em relação às demais porque, quando é acionada, é capaz de mobilizar algumas outras operações de pensamento. Portanto, apresenta uma arquitetura cognitiva um pouco mais engenhosa.

De acordo com Matos & Gordo (1993), a visualização espacial facilita a aprendizagem da Geometria e se desenvolve pelas experiências geométricas em sala de aula. Esses autores complementam dizendo que ela:

Engloba um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percebem o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos (p. 13).

Fainguelernt (1999) afirma que o que há de complexo no papel da visualização, no que tange ao “processo de formação de desenvolvimento de conceitos geométricos”, opera por duas direções:

Por um lado, não podemos formar uma imagem de um conceito, identificar suas características e dar exemplos sem visualizar seus elementos. Por outro lado, esses elementos visuais podem empobrecer a imagem atual que se quer construir (p. 56).

Mesmo que haja algum risco no tocante a uma concepção inadequada por imagem formada de algum conceito, talvez seja menos danoso que não fazer uso do recurso de visualizar, pois o importante é ter a sensibilidade de verificar até que ponto o conceito realmente foi formado. Uma saída seria testar outra natureza de representação como foi proposto por Duval (1995)

Esse pesquisador vem dando contribuições que têm provocado um realce especial nas pesquisas em Educação Matemática, trazendo subsídios inovadores, permitindo um novo olhar para o fenômeno didático da matemática. É o que podemos testemunhar no depoimento de Machado (2003):

Muitos investigadores, que tomaram conhecimento de análises de atividades matemáticas, em termos de registro de representação, interessaram-se por essa abordagem, e passaram a adotá-la em suas pesquisas. Assim, os trabalhos de Raymond Duval sobre os registros de representações semióticas têm servido de base para várias pesquisas concernentes à aquisição do conhecimento matemático e à organização de situações de aprendizagem desses conhecimentos (p. 8).

O novo modelo de funcionamento cognitivo do pensamento proposto por Duval (1995) tem permitido uma melhor compreensão dos problemas relacionados à aprendizagem de conhecimentos matemáticos.

A originalidade do trabalho desse pesquisador está relacionada à trilha cognitiva que fez opção, rompeu o paradigma da busca no universo dos conceitos para evocar a importância das representações semióticas. Para isso, ele lembra que se observe a história do desenvolvimento da Matemática para verificar que a evolução do pensamento matemático teve como condição fundamental o desenvolvimento das representações semióticas. Estas condicionadas a duas razões básicas. Primeiro ele cita o fato de que as possibilidades de tratamento matemático estão condicionadas ao sistema de numeração a ser utilizado. Exemplifica com as operações de cálculo, que dependem do sistema de numeração decimal. O segundo fato indica que os objetos matemáticos, a partir dos números, “não são objetos

diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos” (DUVAL, 2003, p. 14).

Um outro aspecto desse teórico ter evocado as representações semióticas diz respeito à grande variedade delas que são utilizadas em Matemática. Por exemplo, os sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural.

Catto (2000) sublinhou que essas representações semióticas são “as produções constituídas pelo emprego de símbolos pertinentes a um sistema de representação imbuído de significado e funcionamento”. No entanto, segundo esse autor, é comum atribuir mais importância às representações mentais que “são as imagens ou concepções que o indivíduo tem a respeito de um objeto, uma situação ou problemática” (p. 27).

Damm (1999) afirmou que essas representações assim como as computacionais, não são distintas, mas que apenas efetuam funções diferentes. As computacionais cumprem uma função de tratamento automático, as mentais de objetivação e as semióticas de objetivação e de expressão e que estas são indissociáveis. No caso das representações semióticas, essa autora faz questão de lembrar os dois que apresentam: o da forma, correspondente ao representante e o conteúdo que se refere ao representado (p. 141).

Para Duval (2003) há dois tipos de transformações de representações semióticas: os tratamentos e as conversões. Enquanto as transformações de tratamentos ocorrem num mesmo registro, as de conversões se efetuam mudando o registro e conservando os objetos denotados. Para o primeiro caso, esse autor exemplificou uma situação de cálculo que se restrinja ao mesmo sistema de escrita ou de representação de números. Para o segundo, exemplificou a situação da passagem da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

Esse pesquisador ressaltou a função da atividade da conversão tanto do ponto de vista matemático quanto cognitivo. A primeira contribui unicamente na escolha do registro em que

os tratamentos a serem efetuados são mais viáveis. No entanto, é no ponto de vista cognitivo que a conversão surge como atividade de transformação representacional fundamental, que conduzirá aos mecanismos subjacentes de compreensão. Ele alerta para o fato que tal distinção não é, em muitas ocasiões, considerada nas pesquisas em didática e nem no ensino de matemática.

Duval (2003) considera que compreender matemática sugere a capacidade na mudança de registro, alegando que não se deve, em hipótese alguma, não discernir um objeto de sua representação. Como vimos anteriormente, os objetos matemáticos não são acessíveis perceptivamente. Por outro lado, por mais paradoxal que pareça, o acesso a eles se efetua impreterivelmente por meio das representações semióticas. Mais ainda, diz esse autor:

[...] a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação [...]

A dificuldade se deve ao fato de que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível (DUVAL, 2003, p. 21).

Ele sugere que a compreensão matemática esteja associada a conhecer ao menos dois registros de representação distintos, por considerar como o meio de não gerar confusão entre o conteúdo de uma representação com um respectivo objeto representado. No seu entendimento, a prática de “enclausuramento” de cada registro gerará efeito contrário, isto é, a não compreensão matemática.

Duval (2003) fez questão de enfatizar a necessidade de se recorrer ao aspecto cognitivo, por admitir que o objetivo do ensino de matemática – formação inicial – não se relaciona à formação de futuros matemáticos, nem para capacitá-los com conhecimentos que só serão porventura usados bem mais tarde, mas “contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização” (p. 11).

Assim sendo, é visível que nessa conexão do aspecto cognitivo com o conhecimento matemático, a visualização ocupa um destaque especial da preocupação desse teórico, mais ainda, acentua que tal aspecto deve ser um dos alvos na busca do desenvolvimento da criança.

Concluimos levantando a suspeita de que esse viés mais cognitivo da visualização termina contribuindo para uma menor aceitação no meio dos que lidam com Matemática. Não estamos nos referindo aos profissionais que trabalham com esse conhecimento e estão de alguma forma engajados com Educação Matemática. Porém, aos que estão envolvidos com a disciplina e entendem que a visualização por não ser objeto matemático, não a explora com mais veemência.

**CAPÍTULO 2 – ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS,
DIDÁTICOS E COGNITIVOS SOBRE
AS GRANDEZAS GEOMÉTRICAS: A
GRANDEZA COMPRIMENTO**

2.1 Introdução

Abordaremos neste capítulo alguns aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos que envolvem as grandezas geométricas, procurando destacar, particularmente, a grandeza comprimento.

As considerações serão respaldadas em algumas contribuições da literatura inerente à Educação Matemática. No entanto, haverá um realce especial para os trabalhos desenvolvidos por pesquisadores da Escola Francesa e por alguns estudos do Grupo Pró-Grandezas da Universidade Federal de Pernambuco.

A primeira etapa será destinada à exposição mais geral que envolve aspectos epistemológicos e didáticos relacionados às grandezas geométricas. O segundo momento trará este enfoque, mas com afunilamento para a grandeza comprimento. Em seguida, dedicaremos alguns comentários sobre aspectos cognitivos relacionados à formação do conceito de comprimento. Por fim, encerramos estabelecendo reflexões sobre o modelo didático dos quadros que foi proposto por Douady & Perrin-Glorian (1989), que é uma propositura básica de elaboração desta tese. Trataremos, sobretudo, como se efetua o fluxo por meio dos respectivos quadros, mas propondo que se considere no modelo, em caráter transversal, a operação cognitiva da visualização como um componente integrante da construção da grandeza comprimento, mesmo que não se caracterize como objeto matemático.

Encerramos estas breves considerações introdutórias nos baseando numa assertiva de Barbosa (2002): “[...], com o desenvolvimento da epistemologia da Matemática, foi possível ter maior compreensão da relação entre a geometria e o mundo físico” (p.43). Portanto, é evocando, sobretudo, aspectos dessa relação, que será permeada a abordagem a seguir.

2.2 Considerações epistemológicas e didáticas sobre as grandezas geométricas

Entendemos ser pertinente inserirmos nas nossas reflexões teóricas os aspectos epistemológicos e didáticos, para tentarmos realçar os pontos convergentes com as grandezas geométricas, isto é, mapeando em que dimensão se efetua tal afinidade.

Segundo Pais (2001):

A epistemologia é o estudo da evolução das idéias essenciais de uma determinada ciência, considerando os grandes problemas concernentes à metodologia, aos valores e ao objeto desse saber, sem vincular necessariamente ao contexto histórico desse desenvolvimento. (p. 33).

De acordo com esse autor a história da ciência diferencia-se da epistemologia dessa ciência: “enquanto a primeira está associada a nomes, datas, culturas e contextos, a segunda se refere exclusivamente à formação dos conceitos em si mesmo” (PAIS, 2001, p. 33).

Essa distinção também ocorre entre a história da Matemática e a epistemologia da Matemática. Porém, é possível que alguns elementos desta última sejam encontrados por meio de subsídios históricos. Em contrapartida, há elementos da evolução do conhecimento matemático que não se tem subsídios históricos, especialmente quando se deseja resgatar as noções mais primitivas. Não há como apelar para alguma natureza de registro documental ou similar. Esses subsídios se tornam praticamente irrecuperáveis quando se busca reconstituir os conhecimentos matemáticos mais elementares.

Piaget (1978) deu uma grande contribuição epistemológica quando percebeu esse

desafio da ciência no resgate de reconstituição do conhecimento. Conhecedor dessa limitação se inspirou nos estudos da biologia, mais especificamente no aspecto da embriologia, admitindo “que a psicologia da criança constitui uma espécie de embriologia mental”. Nessa perspectiva, mesmo reconhecendo que houve certo exagero no paralelismo⁹ entre a filogênese e a ontogênese, salientou tratar-se de uma pista importante de inspiração para resgate epistemológico (p.7-8).

A busca por entender a evolução de um conhecimento de uma determinada ciência deverá restringir-se a um campo rigorosamente específico. Concordamos com Pais (2001) quando afirma que “toda epistemologia está associada a uma determinada ciência e não faz sentido considerá-la genericamente, sem pontuar a evolução de um determinado conceito” (p. 33-34). Por exemplo, o nosso trabalho está delimitado à trajetória da construção da grandeza comprimento, respaldado, principalmente, na configuração de estudos da Didática da Matemática¹⁰.

É no contexto de tais estudos que Artigue (1990) destaca algumas funções da análise epistemológica. Uma delas diz respeito à desmistificação das “representações errôneas que a prática de ensino tende a induzir”, ou seja, ir de encontro a essa crença acerbada do conhecimento matemático como algo perfeito e acabado. Uma outra função indicada por essa pesquisadora refere-se ao controle epistemológico do conhecimento matemático que vai ser ensinado. Ao mesmo tempo em que exerce essa função de “vigilância epistemológica”¹¹,

⁹ Há certo privilégio no estabelecimento desse paralelismo entre a filogênese e a ontogênese no que diz respeito ao conhecimento matemático, pois se trata de uma configuração bem mais propícia de ser realizada. Não foi por acaso que Piaget escolheu essa ciência para comprovar essa correspondência de conhecimento.

¹⁰ A didática da Matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2001, p. 11).

¹¹ A “vigilância epistemológica” é uma expressão usada por Chevallard (1991) que faz menção à distância existente entre o saber científico, o saber a ensinar e o saber ensinado. Assim, a vigilância visa evitar o desgaste do saber original.

efetua, por conseguinte, uma filtragem da transposição didática¹² decorrente. Por fim, também apresenta como função da análise epistemológica, a possibilidade de uma melhor visão sobre os erros dos alunos, como também sobre possíveis situações que desencadeiam a superação dos mesmos (p. 244-245).

O nosso entendimento é que a “vigilância” tanto deve ser de ordem epistemológica quanto didática. Por isso, a transposição didática não pode se restringir a de natureza externa, mas também atingir a transposição didática interna¹³ porque é nessa configuração que ocorre o fluxo das diversas criações didáticas, que vai além do conteúdo em si, estando associado aos artifícios didáticos utilizados pelo professor em sala de aula.

De acordo com Pais (2001), tais invenções dizem respeito aos conteúdos incorporados aos programas na busca de atender as necessidades de ensino e, por conseguinte, facilitar a aprendizagem (p. 19). Reconhecemos que algumas dessas invenções podem trazer resultados satisfatórios para a aprendizagem, mas, em determinadas ocasiões, são gerados resultados extremamente danosos, consolidando concepções quase sempre duradouras e de difícil restauração. Pelas dificuldades de abstração do conhecimento matemático, este termina sendo um campo fértil para tais criações, sobretudo, por estarem associadas aos recursos metodológicos.

Não se têm mecanismos de acompanhamento tão eficientes para esta transposição, nem se pode admitir que essa vigilância venha tolher a criatividade do professor em sala de aula, mas nos parece salutar evocar que os profissionais que tenham condição de ajudar precisam estar engajados nessa vigilância para evitar o surgimento de novos obstáculos, com

¹² Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os “objetos de ensino”. O “trabalho” que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 39).

¹³ A transposição didática interna ocorre na sala de aula na relação estabelecida pelo professor com o conhecimento e com os alunos. Portanto, vem impregnada da subjetividade de cada professor.

destaque para os didáticos, que parecem contribuir de forma mais intensa no processo de alteração do saber original.

Quanto aos obstáculos didáticos Artigue (1990) identificou alguns mecanismos produtores deles: a generalização de forma abusiva, o excesso de formalismo, uma contextualização restrita a uma maneira fixa e o amálgama de noções sobre referenciais dados (p. 261-262).

Pelo que observamos acima, os mecanismos apontados por Artigue (1990) são de natureza didática. Eles foram ilustrados em contextos de conhecimentos matemáticos, mas os epistemológicos também podem ser considerados nessa ciência. Evidentemente que não podemos desconsiderar que, no processo ensino-aprendizagem, o viés do obstáculo didático tem efetiva contribuição e, algumas vezes, são mais intensos do que os que são gerados apenas no conhecimento em si.

Por meio da noção de obstáculo epistemológico, Bachelard (1996) procurou ilustrar fatos relacionados à formação histórica dos conceitos científicos. Segundo Pais (2001):

Seu objetivo era interpretar as condições de evolução da ciência, delineando bases para realizar o que chamou de psicanálise do conhecimento objetivo. Para isso, descreveu, em detalhes, a essência da noção de obstáculo que é hoje amplamente mencionada em estudos de didática. Bachelard observou que a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de reconhecimento científico passa, quase sempre, pela rejeição de conhecimentos anteriores e se defronta com um certo número de obstáculos. Assim, esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de que detém esse conhecimento (p.39).

De acordo com Iglioni (1999) “é principalmente na noção de obstáculo que se pode perceber a interdependência entre Epistemologia e Didática”. A mesma ainda afirma que coube a Brousseau em 1976 introduzir essa noção na Didática da Matemática (p. 97).

Uma pertinente colocação dessa autora sinaliza para essa intersecção entre a epistemologia e a didática:

A noção de obstáculo pode ser utilizada tanto para analisar a gênese histórica de um conhecimento como o ensino ou a evolução espontânea do aluno. Pode-se portanto pesquisar os obstáculos epistemológicos a partir de uma análise histórica ou a partir de dificuldades resistentes entre os alunos procurando confrontá-los (IGLIORI, 1999, p. 98).

Não é evento difícil de ser constatado que os “nós de resistência” da evolução do conhecimento matemático também terminam constituindo-se como “nós de resistência” para entendimento do conhecimento matemático do aluno. Aliás, segundo Pais (2001), na Matemática, “os obstáculos aparecem com mais intensidade na fase da aprendizagem e síntese do conhecimento, do que em seu registro histórico” (p. 41).

Quanto às resistências específicas, no que diz respeito à aprendizagem da Matemática, mais especificamente ao conhecimento das grandezas e medidas, Douady & Perrin-Glorian (1989) citam algumas:

A possibilidade de medir a área de uma superfície depende da compatibilidade entre a sua forma e a forma da superfície unitária, ou seja, só é possível medir a área de uma superfície, se for possível ladrilhar efetivamente, com um número inteiro de exemplares da superfície unitária;
A área é vinculada à superfície e não se dissocia de outras características da mesma (seu perímetro, por exemplo);
A validade das fórmulas é estendida a situações nas quais elas não são mais matematicamente válidas (por exemplo, calcular a área de um paralelogramo fazendo o produto dos comprimentos dos lados) (p. 394-395).

Em que pese tais exemplos destacarem a grandeza área e, sutilmente, fazerem menção a perímetro, que diz respeito à grandeza comprimento, as dificuldades na aprendizagem também se estendem às demais grandezas, sejam geométricas ou não.

Para Douady & Perrin-Glorian (1989), as dificuldades com os problemas que envolvem área, isto é, os erros e as lacunas, decorrem da “concepção forma” e da “concepção número”. São duas concepções exploradas de maneira disjunta, sem o devido estabelecimento de relações entre o campo geométrico e o campo numérico (p. 395).

Essas pesquisadoras apresentaram uma importante contribuição na busca de articular os dois campos citados anteriormente, permitindo estabelecer tanto uma relação epistemológica quanto didática entre tais aspectos. Mais do que isso, organizando os conceitos relacionados às grandezas geométricas, por meio de quadros¹⁴, ressaltando que

¹⁴ Um quadro é constituído de objetos do ramo da Matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa, num dado momento, a esses objeto e relações (DOUADY & PERRIN-GLORIAN, 1989, p. 389).

tomaram como referencial a grandeza área. Sobre tal procedimento assim se pronunciou Barbosa (2002):

Esse mapeamento, proposto por essas estudiosas, tem estimulado pesquisadores franceses e brasileiros a desenvolverem estudos, considerando esses quadros, que permitem, entre outros aspectos, tirar da obscuridade o conceito de grandeza (p. 31).

Tirar do anonimato o conceito de grandeza tem duplo sentido: o de natureza epistemológica e, mais ainda, o de natureza didática. A perspectiva epistemológica, por permitir a reflexão da construção de um conceito que no processo evolutivo transitou nas instâncias do quadro geométrico, perpassando pelo quadro das grandezas até atingir o quadro numérico. A perspectiva didática, por permitir que seja considerado o estabelecimento das relações de tais quadros, tanto em pesquisas quanto na esfera do saber a ensinar.

Fazer vir à tona o conceito de grandeza talvez seja o aspecto mais louvável desse mapeamento dos quadros propostos por essas pesquisadoras, especialmente porque alerta pesquisadores e educadores sobre a passagem precoce do quadro geométrico para o quadro numérico, por conseguinte, desconsiderando-se o quadro das grandezas.

Mesmo que a configuração tratada, num primeiro momento, tenha sido específica ao conceito de área, esse “tirar da obscuridade” pode ser considerado como algo extensivo aos demais conceitos de grandezas.

Nas pesquisas desenvolvidas por Barbosa (2002) e Brito (2003), que trataram sobre a grandeza comprimento, as de Duarte (2002) e Silva (2004), que trataram sobre a grandeza área, além das de Oliveira (2002) e Barros (2003), que investigaram sobre a grandeza volume, em todas elas, foi aproveitada a mesma modelização didática proposta por Douady e Perrian-Glorian (1989).

Perrot et al. (1998), que adotaram essa modelização, a descreveram do seguinte modo:

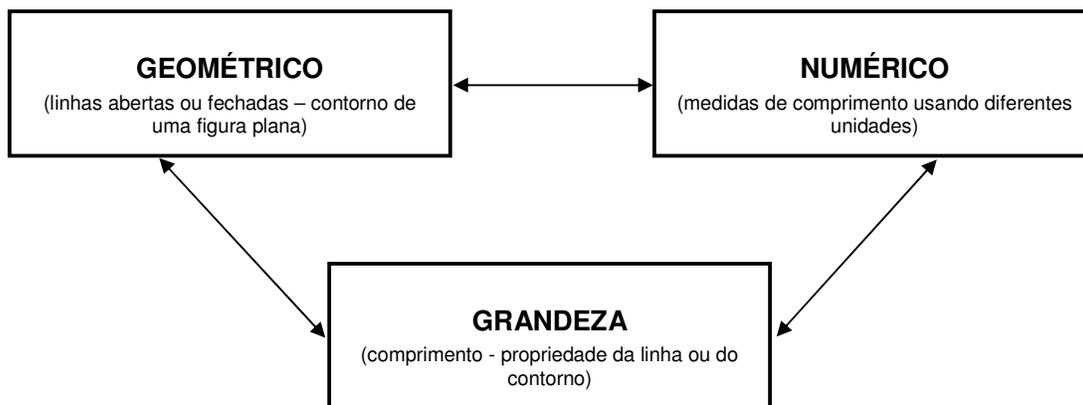
O **quadro geométrico**, constituído pelas linhas e superfícies. O **quadro das grandezas**, comprimentos e áreas: com processos de comparação bem escolhidos, nem sempre numéricos, se pode realizar classes de equivalência de linhas, de superfícies; com processos operatórios adequados sobre linhas, superfícies, se pode induzir uma lei interna sobre as grandezas. O **quadro numérico**, consistindo nas medidas do comprimento das linhas e da área das superfícies, que pertencem ao

conjunto dos números reais não negativos: linhas ou superfícies pertencendo à mesma classe, tendo mesma grandeza, têm também a mesma medida, qualquer que seja a unidade escolhida (p. 5).

Esse modelo sugere que do quadro geométrico participam as linhas abertas ou fechadas. Estas últimas, constituindo-se o que chamamos de contorno de uma figura plana, sejam poligonais ou não. Completando o quadro, participam as superfícies planas. Sugere ainda que, do quadro das grandezas, conste a participação de comprimentos e áreas, caracterizados de forma distinta das linhas e superfícies planas, pois, diferentes linhas podem possuir o mesmo comprimento e diferentes superfícies podem possuir a mesma área (LIMA, 1995, p. 2). Por fim, o quadro numérico completa o modelo, e é por meio dele que ficam caracterizadas as situações das medidas propriamente ditas, sejam elas de comprimentos ou áreas.

Apresentamos, a seguir, em forma de esquema, esse modelo didático adaptado à grandeza comprimento:

Quadro 1: Modelo didático de Douady & Perrin-Glorian (1989)



Câmara dos Santos (1999) apresentou uma descrição um pouco diferente para o modelo didático, classificando os quadros como pólo geométrico, pólo grandeza e pólo numérico:

O pólo geométrico seria aquele composto das figuras geométricas em si mesmas; em nosso caso, particularmente, pelas linhas e superfícies das figuras geométricas.

O pólo grandeza estaria relacionado, nesse trabalho, com as idéias de perímetro e de área, sendo aqui compreendidos como propriedades das figuras geométricas. Finalmente, o pólo numérico nos remeteria ao número associado à medida das grandezas área e perímetro, enquanto números reais não negativos (p. 4).

A título de esclarecimento, lembramos que Barbosa (2002) situou “o conceito de perímetro como uma instância da grandeza comprimento, por sua vez, participante do campo conceitual¹⁵ da grandeza área” (p. 31). Complementou dizendo: “o conceito de perímetro passa a ser um caso particular da grandeza comprimento, diferenciando-se do objeto geométrico em si, que é uma linha fechada” (p. 32). Portanto, as grandezas comprimento e área, “juntamente com o volume e o ângulo, formam o que chamamos de grandezas geométricas, inseridas dentro de um campo maior, denominado de grandezas” (p. 30).

No caso desta pesquisa, as atividades trabalhadas se limitam à grandeza comprimento, mais especificamente por meio de situações que permitam as comparações entre linhas abertas. Essa preocupação de investir nessa modalidade de situações de comparação prende-se ao fato que elas “se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas”. (BELLEMAIN, 2000, p. 7).

As ocorrências de efeitos visuais foram verificadas, originalmente, e na quase totalidade das atividades, entre as situações de comparação com linhas abertas. Em que pese essa incidência desses fenômenos ocorrerem entre figuras dessa natureza, isso não quer dizer que tais fatos visuais não possam estar presentes entre as linhas fechadas. Aliás, os estudos de Brito (2003) e Souza (2004) confirmaram ocorrências dessas modalidades e serão apresentadas no capítulo 3.

Bellemain (2000) afirmou que “quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência”. Baseando-se nessa assertiva Barbosa (2002) complementou:

Da mesma forma, quando comparamos linhas (ou comprimentos) teremos que

¹⁵ Um campo conceitual é definido como um conjunto de situações cuja apropriação requer o domínio de vários conceitos de naturezas diferentes (Magina et al, 2001, p. 20).

decidir se pertencem, ou não, a uma mesma classe de equivalência, Para a primeira situação, estabelecer a relação de equivalência é descobrir se têm, ou não a mesma área, permitindo a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas. Para a segunda situação, estabelecer a relação de equivalência é descobrir se possuem, ou não, o mesmo comprimento, para situações com contorno de figuras planas, se possuem, ou não, o mesmo perímetro, também permitindo a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas (p. 33-34).

Pelo que observamos acima, Barbosa (2002) fez uma extensão do que foi apresentado por Bellemain (2000). Esta autora mencionou a comparação no tocante a duas superfícies, enquanto ele alegou que igual procedimento ocorre quando se compara duas linhas, sejam elas fechadas ou não, havendo necessidade de se decidir se pertence ou não a mesma classe de equivalência. Aliás, cabe expandir esse estabelecimento entre entes relacionados a outras grandezas.

Uma outra extensão adotada por Barbosa (2002), proveniente de uma propositura de Bellemain (2000), diz respeito à possibilidade da distinção entre as situações estáticas e as dinâmicas. As primeiras tratam das comparações entre superfícies que não estão sujeitas aos efeitos do movimento, enquanto as segundas estariam sujeitas às interferências do movimento. Para Barbosa (2002):

Da mesma forma, poderíamos pensar em termos das linhas (abertas ou fechadas) que seriam comparadas, mas, sem sofrer efeitos de movimento, Diferentemente, as situações dinâmicas sofrem efeitos de deformações e transformações geométricas (p. 34).

Assim como o comprimento e a área, o volume também é uma grandeza geométrica e permite explorar comparações tanto em situações estáticas quanto em situações dinâmicas. Portanto, é igualmente possível sugerir a ampliação dessa propositura para entes relacionados à grandeza volume, embora as deformações e transformações geométricas sejam bem mais complexas.

Dando continuidade a estas reflexões que envolvem as grandezas, Câmara dos Santos (1999) indica que há um obstáculo didático relacionado à confusão entre a grandeza e a medida da grandeza:

É comum encontrarmos alunos estabelecerem que, na ausência de números,

não existem grandezas, o que leva à concepção de que o único jeito de comparar grandezas é comparando números. Como exemplo, podemos citar o fato dos alunos afirmarem freqüentemente que um retângulo de área 20 é maior que um outro retângulo de área 15, sem que a 'grandeza área' seja colocada em questão na comparação, limitando-se a uma comparação de números (p. 3).

A afirmativa desse autor é apenas uma pequena sinalização da forte influência que os números exercem sobre os demais conhecimentos matemáticos. A concepção que prevalece entre os alunos é a de que os números são os referenciais para resoluções das diversas situações que lhe apresentem, mesmo que sejam dispensáveis em determinadas ocasiões. Por exemplo, na comparação entre superfícies ou linhas, em que apenas precisa identificar a que seja maior ou menor, não há necessidade de evocar algum número, mas o aluno termina apelando para esse recurso como se fosse o único meio de resolver a atividade.

Câmara dos Santos (1999) ainda cita outro tipo de obstáculo didático: a crença que apenas os segmentos de reta possuem comprimento. Aponta que o uso privilegiado da régua, termina favorecendo a associação entre comprimento e linha reta, gerando, por sua vez, “a concepção que ‘somente os polígonos têm perímetro, e a única maneira de determiná-lo é apoiando-se nos vértices para medir os lados” (p.3).

Corroborando o destaque do uso privilegiado da régua, Barbosa (2002) também apontou ter detectado certa dificuldade dos alunos em manusear cordões ou fios como instrumentos para comparar linhas, inclusive no manuseio de réguas não-graduadas. Obviamente que a cultura matemática que prevalece é de fazer pouco uso de materiais concretos, mais ainda, quando ocorre no estabelecimento de comparação de comprimento se restringe a réguas convencionais associadas a medidas de segmentos de reta.

2.3 Considerações epistemológicas e didáticas sobre a grandeza comprimento

Com o objetivo de melhor sistematizar as discussões, dividimos as reflexões

epistemológicas sobre a grandeza comprimento em dois momentos. O primeiro, podemos classificar como uma etapa mais da gênese da referida grandeza, por isso, em algumas ocasiões, recorreremos a algumas inferências. O segundo momento, compreendendo uma etapa de elaboração mais formal, ainda que constituído apenas de elementos mais iniciais.

A primeira etapa é resultado de uma elaboração mais de inferências, até mesmo porque não haveria como se ter informações seguras de conhecimentos produzidos em tempos tão primitivos, mas tivemos o cuidado de propor uma delimitação dentro de parâmetros extremamente óbvios, inspirados nos quadros propostos por Douady & Perrin-Glorian (1989), nas reflexões epistemológicas que nos permitem estabelecer algumas relações e nas próprias conexões que podemos fazer em relação aos conhecimentos matemáticos trabalhados na escola.

A segunda etapa, por sua vez, está baseada em registros do processo de construção do conhecimento da grandeza comprimento, embora a abordagem exposta seja extremamente breve, até porque o experimento que desenvolvemos explora apenas situações que se relacionam com a primeira etapa de elaboração desse conhecimento, no contexto da dimensão comparativa, que especificaremos mais adiante.

As relações do homem com a natureza sugerem que, observando-a, foram favorecidas experiência de percepção espacial. Sobre esse fato Barbosa (2002) fez a seguinte assertiva:

Como fruto da percepção, é possível imaginar que as linhas ou, como caso particular, os contornos começaram a ser percebidos nas nuanças do corpo, nos trajetos dos rios, nos envoltos das folhas, nas concavidades das rochas, no horizonte no mar, entre outros. Não se pode perder de vista que os corpos são em si de natureza tridimensional, mas, o efeito dessa visualização tem características unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais (p. 37).

Ainda reforçando a influência da perspectiva da percepção na caminhada do homem primitivo, esse autor também assinalou: “a dimensão perceptiva nesses estágios elementares do conhecimento, sem dúvida, desempenhou papel preponderante” (BARBOSA, 2002, p. 38). No entanto, as experiências do homem foram se tornando mais elaboradas, a ponto de

conseguir estabelecer algumas discriminações visuais, desde “corpos geométricos naturais diversos: o próprio corpo, as folhas das árvores, os astros, etc”. Segundo esse autor, há indícios sinalizando de “uma evolução da percepção (visualizando o todo do corpo), para a discriminação (visualizando as partes do corpo)”. (p.37).

Pelo que está exposto acima, os termos usados foram percepção e discriminação, que estão inseridos como etapas constituintes da operação cognitiva da visualização. Para evitarmos que se confunda o termo percepção que é usado com mais de um significado, dependendo da corrente teórica, passaremos a fazer uso da expressão “observação visual”, sabendo que a estamos considerando como uma “percepção visual” de caráter bem elementar. É costume se usar esta denominação na Educação Infantil sinalizando tratar-se de uma “olhadela superficial”, que absorve apenas a totalidade da figura.

Considerando que os entes naturais, enquanto componentes do mundo físico, terminam se constituindo como representantes geométricos espontâneos, há de se reconhecer que é muito remota a interdependência entre a geometria e a visualização. Assim sendo, desde os primórdios da existência humana que os entes da natureza são de alguma forma visualizados. Nada é mais natural que o homem procurasse visualizar o que estava exposto. Obviamente que essa operação cognitiva da visualização também teve todo um processo de desenvolvimento. Num primeiro momento, uma simples observação atendia ao nível de relacionamento desse homem primitivo com a natureza. Numa etapa posterior, essa relação cognitiva foi se sofisticando a ponto de ser capaz de estabelecer relações que o permitia distinguir semelhanças e diferenças entre os entes, ou seja, saindo de um nível da “observação” e atingindo ao patamar da “discriminação”.

Portanto, o visualizar associado à “observação visual” constitui-se sobremaneira na capacidade de identificar os entes diversos. No entanto, quando o visualizar permite realizar uma comparação entre os entes, configura-se uma “discriminação visual”. No caso dos entes

apresentarem uma diferença acentuada de tamanho entre eles, a ponto de não precisar haver nenhum tipo de manuseio físico para compará-los, podemos dizer que se caracteriza uma “discriminação visual passiva”. Distintamente, tanto da “observação visual”, quanto da “discriminação visual passiva”, há um tipo de comparação que, intrínseca à sua efetivação, traz a necessidade de uma ação, isto é, constituindo-se como uma “discriminação visual ativa”.

Foi a partir do episódio da “discriminação visual ativa” que o homem construiu o conceito de grandeza, tendo a capacidade de diferenciar se dois entes possuem ou não o mesmo tamanho. Em particular, no caso de linhas, se têm ou não o mesmo comprimento. Dizendo de outra forma, se os entes pertencem ou não à mesma classe de equivalência. O advento da modalidade “discriminação visual ativa” estabeleceu uma configuração que evoca o ato de discriminar comparando dois ou mais entes de forma contínua. Muito provavelmente, o homem primeiro efetuou a “discriminação visual ativa direta”, isto é, entre os próprios entes envolvidos, para depois, executar a “discriminação visual ativa indireta”, havendo necessidade do uso de medianeiros.

O uso de medianeiros foi um momento espetacular de construção do conhecimento, pois, subjacente a esse recurso, estava efetuando-se a operação da transitividade. Por meio desta, o homem percebeu que na impossibilidade de comparar diretamente os entes X e Z, poderia usar o recurso de um ente Y, que faria a mediação entre eles. Assim, passou a ter condição de mobilizar um novo conhecimento e constatar que se Y era equivalente a X, e Y era equivalente a Z, logo X também era equivalente a Z. Da simples comparação direta, o artifício do medianeiro deu ao homem a possibilidade de estabelecer comparações indiretas.

Por meio da “discriminação visual ativa – contínua”, seja direta ou indireta, que permitiu ao homem verificar a equivalência, estava configurado um novo pólo – o da grandeza. Uma nova relação começava a ser estabelecida – entre o pólo geométrico e o pólo

da grandeza – tendo a visualização participação efetiva nessa afinidade, contribuindo, inclusive, com essa modalidade mais avançada de comparação.

Tentando estabelecer um paralelo com o conhecimento difundido no saber da escola, podemos dizer que a “observação visual” diz respeito à identificação de entes independentes, sem estabelecer algum tipo de comparação entre eles. Enquanto que a “discriminação visual passiva” é caracterizada pelo estabelecimento de comparação entre entes de forma bem rudimentar, sem haver necessidade da ação, e estão associadas às situações que exploram os conceitos pequeno e grande. Por fim, a “discriminação visual ativa” configura-se pela comparação cuja principal característica é a ação, e está associada aos conceitos menor e maior.

A “observação visual” e a “discriminação visual passiva” são construídas bem mais cedo pela criança, ainda quando cursam a Educação Infantil. Aliás, é possível nesse nível escolar perceber o quanto os termos pequeno e grande são usados com fluidez. Por outro lado, a “discriminação visual ativa” é construída nas séries iniciais do Ensino Fundamental. É quando começamos a perceber o uso correto dos conceitos menor e maior. Muitas vezes estes últimos conceitos são usados em situações que nós podemos categorizar como decorrente de uma “discriminação visual passiva”, mas quando os tamanhos em jogo envolvem pequenas diferenças, o único meio é o apelo para os mecanismos de uma “discriminação visual ativa - contínua”, não importando se é de natureza direta ou indireta. Assim, as crianças poderão indicar se dois entes possuem o “mesmo tamanho”, ou indicar o menor e, conseqüentemente, o maior.

O homem, em época muito posterior, conseguiu superar o nível da “discriminação visual ativa - contínua”. Nessa nova etapa cognitiva elaborou a modalidade da “discriminação visual ativa - descontínua” que lhe permitiu verificar a equivalência de forma ainda mais sofisticada. Na contínua usava os medianeiros, agora, a partir da descontínua, tem início o uso

de outros tipos de entes que assumem esse papel de mediar a comparação. Primeiro usou os entes categorizados como arbitrários e, posteriormente, os que foram categorizados como padrões. Essa nova configuração, em que se verifica a transição da modalidade contínua para a descontínua, marca o surgimento do pólo numérico.

Os entes a que o homem recorreu variaram de acordo com as culturas dos povos. Desde entes da natureza e, principalmente, partes do próprio corpo humano foram usadas como meios de comparação. Estes entes receberam o nome de unidades arbitrárias. A necessidade de comunicação entre os povos de culturas distintas levou o homem à necessidade de criar entes que servissem de referência para todos. Enfim, surgem então as unidades padronizadas. Dessa forma, a “discriminação visual ativa - descontínua” pode ser desmembrada em duas: a arbitrária e a padronizada. Assim, estas duas últimas fases encerram a última etapa da cadeia que estamos apresentando.

Resumindo, de acordo com a configuração que estamos delimitando, sugerimos que esse segmento da visualização seja mapeado em uma cadeia que, inicialmente, seja desmembrada em duas situações distintas: “observação visual” e “discriminação visual”. Esta última podendo ser dividida em duas ocorrências: “discriminação visual passiva” e “discriminação visual ativa”. Esta segunda – a “discriminação visual ativa - contínua” pode ocorrer de forma “direta” – quando os entes são comparados diretamente entre si, ou de forma “indireta” – quando se faz mister o uso de medianeiros. No entanto, a “discriminação visual ativa” também pode ocorrer de forma descontínua. No caso desta última, pode ser desmembrada na arbitrária e na padronizada.

As ocorrências da “observação visual” e da “discriminação visual passiva” estão associadas ao quadro geométrico. A “discriminação visual ativa - contínua” ao quadro das grandezas. Enquanto a “discriminação visual ativa – descontínua” está associada ao quadro numérico. Todas as situações de “discriminação visual” estão categorizadas como ocorrências

da comparação, por conseguinte, da visualização. O diagrama a seguir ilustra essa cadeia de visualização:

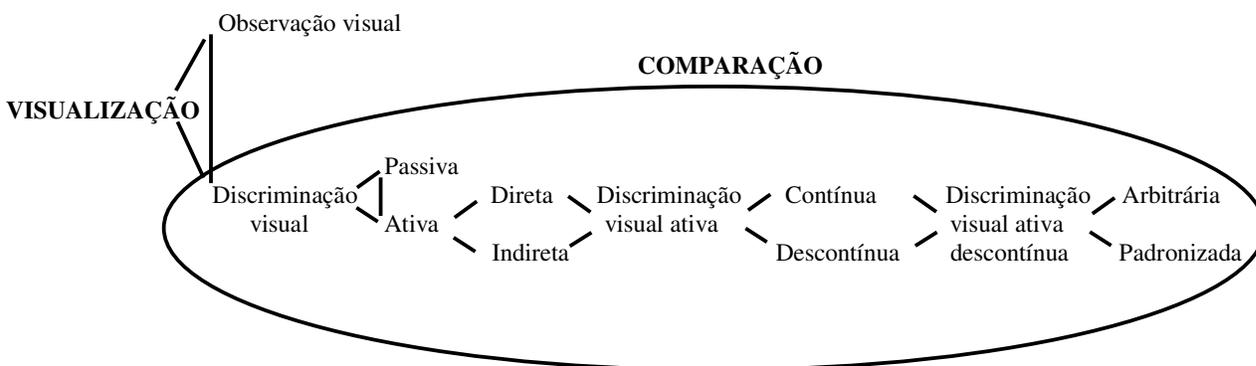


Figura 4: Diagrama da operação cognitiva visualização

E em que pese a culminância do conceito de grandeza ter ocorrido na passagem do pólo geométrico para o pólo das grandezas, a plenitude desse conceito só foi atingida no estabelecimento das relações entre esses três pólos.

Quanto aos efeitos visuais podemos dizer que são fenômenos de visualização que foram detectados especificamente nas situações de “discriminação visual”, transitando nas ocorrências entre a “passiva” e a “ativa”. Por exemplo, ao se explorar atividades de comparação, no modelo papel e lápis com uso de medianeiros, há alunos que não recorreram a tais instrumentos, preferindo confiar apenas no aspecto visual. Nesse caso, estabeleceram a comparação sem agir sobre os entes; por isso essa modalidade foi denominada de “discriminação visual passiva”. Tendo como referencial esse mesmo modelo, como exemplo de ocorrência da “discriminação visual ativa” associada à ocorrência de um efeito visual, é possível citar o caso do aluno que usou um medianeiro influenciado por um fenômeno de visualização. Por exemplo, em vez de sobrepor o medianeiro sobre a linha em si, apelou para comparar os comprimentos entre as respectivas extremidades de cada linha – efeito “linha imaginária interextremidades”. Na verdade houve ação do aluno, mas, inadequadamente,

porque o efeito influenciou a atitude errada. Por último, não podemos deixar de registrar os casos do mau uso dos medianeiros por erro de manipulação. Podemos indicar o caso da sobreposição de linhas “quebradas”, que necessita maior cuidado e nem sempre o aluno tem zelo na sua prática, refletindo nos resultados do que está comparando.

Parece que é importante esclarecer que a visualização envolve tanto o olhar – característica do ato físico, quanto o ver – característica do ato mental. Talvez seja possível associar que no pólo geométrico haja mais influência do aspecto visual, no pólo das grandezas uma maior influência do aspecto tátil, enquanto no pólo numérico tenha, como consequência dos aspectos anteriores, mais influência do aspecto mental. Se tais influências estão configuradas entre o sensível e o inteligível, a visualização também tem essa característica.

Esperamos que a descrição desse dispositivo da cadeia da visualização, envolvendo a comparação, possa contribuir para algumas reflexões epistemológicas da grandeza comprimento. Obviamente que se trata de uma propositura, e, como tal, aberta para discussões que possam revelar mais alguns aspectos a serem considerados. Não é demais acrescentarmos que estas reflexões, mesmo que estejam possibilitando situar os eventos dos efeitos visuais, estão configurados em situações provenientes do ambiente papel e lápis, isto é, não provêm de contextos originais da evolução do conhecimento correspondente a esta grandeza.

Tratando sobre as classes de situações que dão sentido ao conceito de área, Bellemain (2000) caracterizou três:

- As **situações de comparação** se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas. Quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com frequência, os quadros geométricos e numérico vão ser necessários à resolução dos problemas de comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação à do quadro das grandezas.
- Nas **situações de medida**, destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade.
- As **situações de produção** são diferentes das anteriores do ponto de vista da tarefa cognitiva do aluno. Enquanto nas situações de comparação e medida em geral há apenas uma resposta correta para cada situação, as situações de produção, frequentemente admitem várias respostas corretas. Além disso, apesar da resposta

esperada para uma situação de produção ser uma superfície (objeto geométrico), a intervenção dos outros quadros pode ser tão importante quanto a do quadro geométrico (p. 7-8).

Essas situações foram adotadas por Bellemain (2000) no trabalho com o conceito de área. Barbosa (2002), no experimento que desenvolveu sobre a grandeza comprimento, aplicou apenas as situações de comparação. Também adotaremos igual procedimento por entendermos que por meio delas foram descobertas as incidências dos efeitos visuais.

Quando Bellemain (2000) delimita as situações de comparação situadas em torno do quadro das grandezas, trata-se de uma demarcação que corresponde a uma “discriminação visual ativa – contínua”, em que é possível averiguar ou não a equivalência entre os entes das grandezas envolvidas. Configura-se como uma situação que pode ser efetuada por dois meios: a comparação que ocorre diretamente entre os entes e a comparação que precisa de um mediador para o estabelecimento de sua ocorrência. Neste último caso, optamos em denominar o canal de mediação por mediano.

Por exemplo, considerando uma situação da grandeza comprimento, no primeiro caso, o aluno compararia dois entes móveis e diria se eles tinham ou não o mesmo comprimento. Diferentemente, no segundo caso, quando os entes são fixos, teria que ser usado um mediano para se verificar a comparação. É mais provável que na evolução epistemológica o homem tenha inicialmente experimentado situações com entes móveis, para depois explorar situações com entes fixos, exigindo o uso de medianos.

Mais uma vez, buscando recorrer ao conhecimento disseminado no meio escolar, lembramos que nas nossas experiências na década de oitenta, quando orientávamos professoras para trabalhar nas séries iniciais a gênese da grandeza comprimento, estimulávamos que fossem criadas situações com entes móveis e fixos, provocando as condições associadas a esses momentos epistemológicos e de caráter extremamente artificial.

Todos os entes eram previamente escolhidos, no ambiente da sala de aula, sendo que alguns eram produzidos com esse fim.

Iniciávamos pelo momento de comparar dois entes fixos com grande diferença de comprimento, o que corresponde à “discriminação visual passiva”, pois era facilmente percebido o ente mais comprido e o mais curto. O segundo momento ocorria entre um ente fixo e um móvel. Começava com situações com diferença considerável de tamanho, em seguida, com pequena, visando provocar no aluno que recorresse à comparação dos dois entes, aproximando o móvel do fixo. Tratava-se de uma comparação direta, sem necessidade de um mediano. O terceiro momento era realizado entre dois entes móveis, o que facilitava a comparação direta. O quarto momento era o mais importante, pois se dava entre dois entes fixos, o que provocava o aluno a fazer uso de algum tipo de mediano. Em algumas ocasiões, os alunos chegavam a usar o palmo ou o apagador, isto é, explorando unidades arbitrárias. Tais atitudes eram naturais de acontecer, porque esses alunos (3.^a e 4.^a séries do ensino Fundamental) já dispunham da ferramenta dos números. Estabelecendo um paralelo com o contexto em que foram detectados os efeitos visuais, podemos dizer que eles estariam categorizados como entes fixos, sendo que, previamente, eram disponibilizados medianos para os alunos efetuarem as comparações.

Nos experimentos nos quais foram averiguados os efeitos visuais, sobretudo, Barbosa (2002) e Brito (2003), os alunos dispunham de medianos que favoreciam o estabelecimento das comparações. Todavia, nem sempre utilizavam tais instrumentos de mediação, preferindo recorrer apenas ao recurso visual, caracterizando a “discriminação visual passiva”. Esse aspecto deve ter contribuído para uma maior incidência dos efeitos visuais.

No que tange à representação é provável que o homem tenha desenvolvido algumas experiências iniciais, antes mesmo de conseguir construir o conceito de grandeza. Por

exemplo, considerando o contexto de elaboração que permeia o quadro geométrico – linhas ou contornos, Barbosa (2002) destacou:

Como fruto da ação, é possível imaginar que as linhas, ou os contornos, começaram a ser representados a partir dos entalhes nas rochas, das chanfraduras nos troncos das árvores, dos cortes nas folhas, dos riscos nos solos arenosos, além de outros, marcando, assim, um avanço na relação geométrica: o homem saindo do campo da percepção para o da representação (p. 37).

Sair do campo da percepção visual para o da representação foi um avanço apenas dentro das relações do próprio quadro geométrico, mas sem atingir a etapa mais avançada de do quadro das grandezas. Estamos tratando de uma representação também rudimentar, caracterizada por reproduções bastante grosseiras dos entes observados.

As construções geométricas foram, paulatinamente, adquirindo um maior embelezamento simétrico, com a sofisticação dos entalhes, dos cortes e das marcas. Os sítios arqueológicos são manifestações reais desse avanço:

Em certos sítios arqueológicos, encontram-se vasos de cerâmica decorados (ou fragmentos dessa cerâmica), e tradicionalmente tem-se usado uma espécie de geometria rudimentar para estudá-los. Frequentemente classificam-se os ‘motivos’ desenhados como triângulos, círculos e outros mais. (...) Se, como acontece muitas vezes, os motivos estão arranjados em padrões que se repetem (faixas ou padrões estampados), então o padrão completo pode ser analisado de acordo com suas simetrias (CROWE & THOMPSON, 1996, p. 133).

Até mesmo a capacidade de classificação, não importando o toque de primitividade acionado, está circundada no quadro geométrico. Aliás, implícito a esse classificar pode estar a operação comparativa, mas apenas na dimensão de aspectos qualitativos, por exemplo, o reconhecimento que um ente de forma quadrática era diferente de um ente circular e vice-versa. Portanto, trata-se de mais um avanço, mas sem conseguir romper a barreira que levaria ao quadro das grandezas.

A gênese dos conceitos geométricos foi permeada pelas experiências da percepção, representação e classificação. A escola também procura oportunizar situações que estimulem essas experiências. Obviamente, com contextos completamente diferentes. Primeiro porque a evolução da história dos conceitos traz a marca da espontaneidade, enquanto as experiências que as crianças vivenciam na escola são sobrecarregadas de situações provocadas. Segundo porque a evolução do conhecimento resulta de uma produção histórica em que muitos atores

participaram do processo, enquanto nas situações escolares se busca que cada criança vivencie sua própria experiência. Como terceiro e último aspecto podemos apontar a variável tempo que na evolução natural não sofre influência de limite, enquanto na escola essa variável termina sendo determinante. Quase sempre, como decorrência de tempo, os conceitos são “atropelados”, pois a construção dos mesmos é desprezada e os alunos terminam tendo acesso aos conceitos como algo pronto e acabado, sem ter oportunidade de participar de todo um processo de elaboração.

Eves (1994) denominou a fase de descobertas iniciais de elementos geométricos por “geometria subconsciente”. No entendimento desse autor:

As primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria são, inquestionavelmente, muito antigas. Parecem ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos (p. 1).

Também concordamos que as relações iniciais do homem, no tocante a aspectos da geometria, se originaram do reconhecimento de configurações físicas e da comparação entre formas e tamanhos. Embora Eves (1994) não tenha explicitado, observa-se que primeiro destacou as relações estritamente geométricas. No segundo momento é que fez menção às relações de grandezas. Nessa perspectiva, estaria sendo respeitada a trajetória que ocorre do quadro geométrico para o quadro das grandezas.

Uma outra colocação apresentada por Eves (1994) é que “Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levaram a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes” (p.1). Comungamos com tal pensamento, por entendermos que foram as necessidades de sobrevivência que se tornaram um campo fértil para o surgimento das relações geométricas.

Após essas considerações que tratam sobre a gênese de conceitos que estão associados aos quadros geométrico, das grandezas e numérico, nos sentimos instigados a acrescentarmos alguns outros aspectos que dizem respeito à etapa da gênese da grandeza comprimento, cuja

culminância se efetuou quando o homem foi capaz de estabelecer uma comparação que denominamos de “discriminação visual ativa” – contínua, seja por meio de comparação direta (entre os próprios entes), seja por meio da comparação indireta (com uso de medianeiros).

A gênese da grandeza comprimento emergiu da capacidade do indivíduo distinguir se dois entes quaisquer são ou não equivalentes, enquanto a gênese do número surgiu quando o indivíduo foi capaz de distinguir se dois empilhamentos quaisquer eram ou não equiopotentes. A formação desses dois conceitos nos estimula a pensar que eles apresentam algo em comum, pois nos dois casos há necessidade de equiparar para que a relação da comparação seja estabelecida. Portanto, admitimos que essa semelhança no desenvolvimento dos dois conceitos é possível que se verifique entre a gênese do número e a gênese de alguma outra grandeza geométrica.

Barbosa (2002) destacou:

No mundo físico, comparar o comprimento de caminhos ou de linhas, comparar distâncias entre dois locais são, sem dúvida, operações bastante primitivas, realizadas pelo homem nas várias culturas, desde épocas imemoriais. (p. 38).

Não se tem registros da elaboração da gênese dessas situações. No entanto, no que tange à grandeza comprimento, tentaremos superar um pouco essa lacuna apresentando algumas considerações que dizem respeito ao conceito de perímetro, que é um caso particular dessa grandeza.

Barbosa (2002) levantou um questionamento sobre como surgiu o conceito de perímetro e tentou responder, alegando que:

Em primeiro lugar, parece-nos pertinente considerar o conceito de perímetro num *continuum* de contextos que vai das situações do mundo físico, essencialmente empírico às elaborações abstratas, de características formais, no âmbito da Matemática (p. 38).

Inúmeras situações práticas foram efetivadas até que surgissem as elaborações mais abstratas que deram entendimento ao conceito de perímetro, obviamente que resulta de um desmembramento do conceito de comprimento.

[...] A noção de perímetro, como comprimento da linha fechada que forma o contorno de uma região plana, decerto acompanha a evolução do conceito de comprimento de caminhos. Como exemplo de possíveis situações práticas, em sociedades primitivas, que podem ter favorecido o surgimento da noção de perímetro, destacamos: confecção de cestos de palha; confecção de peneiras,

confeção de redes de pesca e outros mais (BARBOSA, 2002, p. 38).

Como esse autor fez questão de afirmar, apenas destacou alguns exemplos, mas alguns outros poderiam ser indicados. De qualquer forma, após superar essa fase da “discriminação ativa” que redundou na noção de comprimento, enquanto grandeza, ou mesmo a do caso particular, que é o perímetro, uma nova etapa deu prosseguimento na relação estabelecida pelo homem com o mundo físico.

Para Barbosa (2002), o que caracteriza essa nova fase é o surgimento de mais uma operação, também “muito primitiva no desenvolvimento do conhecimento humano sobre o mundo físico, que é a da medição de grandezas” (p. 39).

Essa ênfase primitiva se refere à das unidades arbitrárias, que não se tem como precisar tal surgimento. É bem verdade que existem registros históricos sobre o uso de algumas dessas unidades, mas não podemos assegurar quando começou a ser utilizada essa modalidade em tempos mais remotos. Esse pesquisador afirma ainda que, apesar de ser uma operação primitiva e onipresente, reveste-se de significativa complexidade e que inclui:

a) a seleção da grandeza a medir nos objetos ou nos fenômenos do mundo físico; b) a escolha de uma unidade de medida; c) a opção pelo instrumento ou meio de medição; c) a produção da medida da grandeza (BARBOSA, 2002, p. 39).

Cada um dos componentes anunciados acima tem sua importância que pode afetar ou não o resultado que se espera na efetivação dessa operação. Se não é realizada a seleção prévia da grandeza a medir não é possível que a medição da grandeza seja bem sucedida. No entanto, esse fenômeno de insucesso poderá também ocorrer caso não seja escolhida uma unidade adequada de medida ou um instrumento apropriado para a grandeza que está sendo explorada. Enfim, a produção eficiente da medida da grandeza é permeada por essas fases anteriores, só assim é que poderá ocorrer uma produção de medida satisfatória.

Barbosa (2002) também chama atenção para o fato da medida da grandeza ser um número, inclusive, indicando que nos casos mais simples significa “o número de vezes que a unidade cabe na grandeza a medir” (p. 39). Como decorrência desse evento destaca a íntima

relação existente, ao longo da evolução do pensamento, entre grandeza e número. Assim sendo, sugere que essa precocidade da passagem do quadro geométrico para o quadro numérico seja oriunda de uma convivência antiga entre o número e a grandeza, ficando esta obscurecida enquanto conceito.

Barbosa (2002) ainda enfatizou a própria necessidade da medição de grandezas como um aspecto que contribuiu para ampliações da noção de número que ocorreram no desenvolvimento do saber científico. Assim, desde cedo, a noção de perímetro – comprimento do contorno – vai ser acompanhada do conceito de medida desse mesmo comprimento.

Segundo Eves (1994) “muitas observações do seu cotidiano devem ter levado o homem primitivo à concepção de curvas, superfícies e sólidos”. Como exemplo, ele indica entre outros, as observações do contorno do sol, da lua e o arco-íris (p. 2). Todavia, antes de qualquer registro histórico, o homem

tornou-se capaz de, a partir de um certo número de observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, extrair certas propriedades gerais e relações que incluía as observações anteriores (p. 4).

Uma situação particular que caracteriza essa capacidade de extrair uma lei ou regra resulta do estabelecimento de relações exemplificadas por Eves (1994): “Por exemplo, a comparação dos comprimentos de caminhos circulares e de seus diâmetros levaria, num certo período de tempo, à lei geométrica de que a razão entre a circunferência e o diâmetro é constante”. Esse autor denominou essa fase de elaboração do conhecimento de “geometria científica”, “uma vez que indução, ensaio e erro e procedimentos empíricos eram os instrumentos de descoberta”. Para ele, não há dados que permitam estimar quantos séculos foram passados “até que o homem fosse capaz de elevar a geometria ao *status* de ciência”. Por outro lado, há certo consenso, entre escritores, de ter sido o vale do rio Nilo, no Egito antigo, o palco em que a geometria ter-se-ia tornado científica. Muito embora, também se apontem outras regiões do Oriente antigo, que teriam realizado essas atividades de mensuração da

agricultura: “... bacias de outros grandes rios, como o Tigre e o Eufrates na Mesopotâmia, o Indo e o Ganges na região centro-sul da Ásia e o Hwang Ho e Yangtzé na Ásia oriental” (p. 4-5).

Essa ênfase que é dada na história da matemática de se indicar a relação geométrica com a prática de medições no cenário do rio Nilo, tem tido uma repercussão tão intensa, que parece afetar o entendimento das grandezas comprimento e área quando está sendo considerado o aspecto epistemológico.

Há um descompasso entre o epistemológico e o histórico nessa relação. É como se houvesse uma cumplicidade coletiva em desconsiderar a gênese dos conceitos comprimento e área, enquanto grandezas. Tal convivência respinga na dimensão didática, fazendo que muitos professores também adotem a prática da passagem precoce do quadro geométrico para o quadro das grandezas. Assim, o modelo didático proposto por Douady e Perrin-Glorian(1989) ajuda a efetuarmos essa reflexão epistemológica, pois permite compreendermos que na construção do conhecimento, houve esse transitar da dimensão do geométrico para a dimensão da grandeza, para só depois, atingir a dimensão do numérico.

Eves (1994) destacou duas provas de registros da atividade humana relacionada ao campo da geometria, intimamente ligada à prática do medir: Uma primeira se refere ao achado de “algumas tábulas de argila cozida desenterradas na Mesopotâmia e que se acredita datarem, pelo menos em parte, do tempo dos sumérios, por volta do ano 3000 a. C”. A outra prova indicada aponta para “as tábulas cuneiformes babilônicas provindas de períodos posteriores”. Esse autor também destaca que, por meio de um grande número de exemplos concretos, é possível perceber “que os babilônios do período 2000-1600 a.C. conheciam as regras gerais para o cálculo de áreas” e que “a circunferência de um círculo era tomada como sendo o triplo do diâmetro e a área do círculo como um doze avos da área do quadrado construído sobre um lado de comprimento igual à circunferência do círculo” (p. 5).

Fechando o ciclo denominado por Eves de “geometria científica”, ele sinaliza para a possibilidade dos povos indianos e chineses também terem realizações em geometria, semelhantes aos egípcios e babilônios. No entanto, reconhece que os registros dos egípcios, em pedras e papiros, aliados ao clima excepcionalmente seco, possibilitaram uma grande resistência durante o passar dos tempos. Como aspecto favorável à durabilidade dos registros babilônicos, esse autor faz menção ao caráter imperecível das tábulas de argila cozida. Contrariamente, os materiais usados pelos indianos e chineses eram perecíveis, como fibras de entrecasca de árvores e bambu, não permitindo que se tenha maiores informações das suas realizações.

Para Eves (1994) coube aos gregos transformarem “a geometria empírica, ou científica, dos egípcios e babilônios antigos, no que poderíamos chamar de geometria ‘sistemática’ ou ‘demonstrativa’” (p.7). Essa nova fase é quando começam a surgir as primeiras contribuições matemáticas, com destaque para os trabalhos desenvolvidos por Euclides, Arquimedes e Apolônio, entre 300 e 200 A. C., período denominado por Boyer (1974) de “Idade Áurea” da matemática grega. De acordo com este autor foram as preocupações com as dimensões possíveis do universo que instigaram Arquimedes a fazer suas primeiras investidas de tamanhos de corpos celestes e foi ele quem “inaugurou o clássico método dos perímetros para calcular π , e achou que π está situado $223/71$ e $22/7$, ou que, com duas casas decimais, π é dado por 3,14”. Eves (1994) destacou que, com esse procedimento, Arquimedes deu início à longa história de se buscar aproximações cada vez mais cuidadosas para o valor de π (p. 10).

Pelo que foi descrito anteriormente, é possível perceber que, a partir da geometria grega, tem início uma evolução dos conceitos geométricos e relativos às grandezas no tocante a uma maior abstração e formalização. Todavia, são as relações mais primitivas que ocorreram entre a geometria e o mundo físico que mais nos interessaram, porque por meio

delas é que foi possível estabelecer relações para melhor compreendermos o processo construção da grandeza comprimento, etapa primordial das nossas reflexões.

Encerramos este segmento alertando que foi nessa conjuntura de eventos tão primitivos e de tanto significado para o conhecimento matemático, que se configurou o cenário propício que desencadeou a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas, mas com a efetiva cumplicidade da mobilização de aspectos da visualização, que tem na efetivação da “discriminação visual ativa” a culminância primordial do evento, mas nem por isso podemos deixar de reconhecer que mesmo os momentos anteriores relacionados à “observação visual”, “discriminação visual passiva”, “representação” e até da “classificação” que se configuram no quadro geométrico, também são elementos importantes no processo evolutivo da grandeza comprimento. Todos eles fazem parte de um processo contínuo e após a construção do conceito dessa grandeza não estagnaram em sofisticação, permitindo que as relações do homem com o espaço fossem cada vez mais se lapidando. Tanto é que a plenitude do conceito de grandeza vem no estabelecimento das relações entre os quadros geométrico, das grandezas e numérico.

Reforçamos que estamos considerando o “observar” – no primeiro momento – como algo que só envolve a variável do perceber de forma delimitada, isto é, anterior à “discriminação visual passiva”. No caso da “representação” também admitimos que antes de se tornar uma elaboração sofisticada da mente, teve um longo período de limitação em que estaria associada a experiências circundadas dentro do quadro geométrico, assim como o que podemos considerar em termos da “classificação”. São três momentos configurados no quadro geométrico, mas sem ultrapassar a fronteira para o quadro das grandezas e, por conseguinte, sem atingir o quadro numérico. No entanto, após o homem estabelecer relações nos quadros das grandezas e numérico, teve condições de retornar ao quadro geométrico com ferramentas bem mais sofisticadas, possibilitando ampliar as relações de “observação”, “representação”,

“classificação” e da própria “comparação”. Assim, dando continuidade ao caráter espiral do conhecimento, no caso em questão, da grandeza comprimento.

2.4 Breves considerações cognitivas sobre a formação do conceito de comprimento

Enfocaremos esta etapa do capítulo sobre alguns aspectos cognitivos da formação do conceito de comprimento, nos inspirando nas contribuições de Van-Hiele, nos estudos desenvolvidos por Piaget e seus seguidores, e complementaremos com alguns subsídios abordados por outros teóricos.

A seguir, passaremos a focar aspectos relacionados ao modelo de pensamento geométrico de Van-Hiele¹⁶. No entanto, antes de focar a propositura em si, gostaríamos de contextualizar um pouco as circunstâncias que resultaram nessa elaboração.

Em primeiro lugar, cabe destacar que os erros foram os sinalizadores iniciais das observações de Pierre Van-Hiele e sua esposa, Dina. Eles foram detectados entre alunos de nível secundário no domínio de conteúdos geométricos. A partir dessas constatações esses dois professores começaram a investigar como os conceitos geométricos são formados, tendo como resultado a criação do modelo de Van-Hiele, que incorporou ao aspecto cognitivo o aspecto didático.

Um aspecto do modelo que foi assinalado por Matos (1992), e que cabe ser realçado, diz respeito à convergência da visão gestaltista da cognição. “Para Van-Hiele, assim como a

¹⁶ O modelo Van-Hiele de pensamento geométrico emergiu dos trabalhos de doutoramento de Dina Van-Hiele-Geldof (1984a) e Pierre Van-Hiele (1984b), finalizados simultaneamente na Universidade de Utrecht. Como Dina faleceu pouco depois de terminar sua tese, foi Pierre quem esclareceu, aperfeiçoou e promoveu a teoria. Salvo na União Soviética, cujo currículo de geometria foi reformulado na década de 60 para adaptar-se ao modelo Van-Hiele, o trabalho demorou a merecer atenção internacional. Só na década de 70 um norte-americano, Izaak Wirszup (1976), começou a escrever e a falar sobre o modelo (CROWLEY, 1994, p. 1).

psicologia de Gestalt, não há objetos isolados nem conceitos por si, mas todas as entidades existem num contexto” (p. 94).

Sobre esse modelo, Nasser (1992) realizou alguns comentários: primeiro, ele sugere que a aprendizagem em geometria ocorre progredindo, obedecendo a uma seqüência de níveis de compreensão de conceitos; segundo, que o avanço para outro nível se dá por meio de atividades apropriadas, perpassando por cinco fases de aprendizagem, sendo que não pode ser dado um salto sobre algum dos níveis; terceiro, tais níveis estão caracterizados em decorrência de relações entre os objetos de estudo e linguagem próprias, não podendo haver compreensão quando o aluno é submetido a um curso mais alto do que o nível atingido; por fim, que a elevação a um determinado nível está mais associada a uma situação de ensino adequada do que relacionada à idade ou a maturação. Para Nasser (1992), a ultrapassagem a um determinado nível sem ter vivido experiências adequadas em níveis anteriores, talvez seja o motivo de muitas das dificuldades apresentadas por alguns alunos.

Crowley (1994) sintetizou o modelo, apresentando cada nível. O primeiro nível (básico), enumerado como zero, caracteriza-se pela visualização.

Neste estágio inicial, os alunos percebem o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Os conceitos de geometria são vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos. As figuras geométricas, por exemplo, são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física, não por suas partes ou propriedades (p. 2).

Segundo esse pesquisador, nesse estágio, o aluno pode reconhecer quadrados, retângulos, até mesmo reproduzi-los, mas seria incapaz de reconhecer que essas figuras têm ângulos retos ou que os lados opostos são paralelos.

O segundo nível, enumerado como nível 1, caracteriza-se como uma análise:

No nível 1, começa uma análise dos conceitos geométricos. Por exemplo, através da observação e da experimentação, os alunos começam a discernir as características das figuras. Surgem então propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Assim, reconhece-se que as figuras têm partes, e as figuras são reconhecidas por suas partes (CROWLEY, 1994, p. 3).

Crowley (1994) exemplificou por meio de uma rede de paralelogramos, como mostra a figura a seguir, afirmando que “eles poderiam, ‘colorindo’ ângulos iguais, ‘estabelecer’ que os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais” (p. 3).

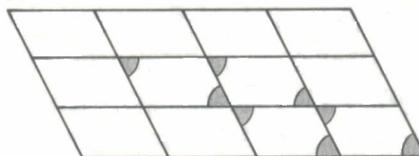


Figura 5: Rede de paralelogramos

De acordo com o modelo, o terceiro nível caracteriza-se pela dedução informal:

Neste nível os alunos conseguem estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras (por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais) quanto entre figuras (um quadrado é um retângulo porque tem todas as propriedades de um retângulo). Assim, eles são capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classes é compreendida. As definições têm significado. Os alunos acompanham e formulam argumentos informais (CROWLEY, 1994, p. 3).

Crowley (1994) sugere que se trata de um nível em que os alunos “não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas” (p. 4), diferenciando-se do quarto nível, em que o aluno é capaz de construir demonstrações, inclusive por mais de uma maneira.

O quarto nível que foi enumerado como nível 3, caracteriza-se pela dedução.

Neste nível compreende-se o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. São percebidos a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações (CROWLEY, 1994, p. 4).

Por último, o quinto nível, enumerado como nível 4, caracteriza-se pelo rigor. “Neste estágio, o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, pode-se estudar geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. A geometria é vista no plano abstrato” (CROWLEY, 1994, 4).

Há de se destacar que os resultados de um estudo desenvolvido por Câmara dos Santos (1998), que investigou os níveis de pensamento geométrico proposto por Van-Hiele,

sinalizam para o reconhecimento de tais níveis, mas que é possível “observar um mesmo aluno trabalhando, simultaneamente, em mais de um nível, em função da situação” (p. 402).

Se formos estabelecer um paralelo entre o modelo proposto por Van-Hiele e a propositura que apresentamos sobre a construção da grandeza comprimento, podemos admitir que a cadeia da visualização – contendo desde a “observação visual” até a etapa da “discriminação visual ativa – descontínua” de natureza padronizada, corresponde basicamente aos dois primeiros níveis do modelo de Van-Hiele, com inclinação para o inicial que foi caracterizado pela visualização.

O modelo desse pesquisador foi estabelecido dentro dos parâmetros das relações geométricas, enquanto na proposta do quadro da visualização, apenas as etapas da “observação visual” e da “discriminação visual passiva” estão inseridas rigorosamente no quadro geométrico. Todavia, as relações de comparações estabelecidas para atingir os quadros seguintes evocam os conhecimentos geométricos. Além do mais, os conhecimentos mobilizados para se atingir os quadros das grandezas e numéricos, não vão além do que está caracterizado no nível 1, pois neste está configurado o ato da experimentação, permitindo ao aluno discernir as características das figuras, inclusive com o surgimento de propriedades e a capacidade de conceituar classes de configurações.

Portanto, o cenário de elaboração da grandeza comprimento tem suas raízes delimitadas nas relações geométricas, contando com a participação da operação cognitiva da visualização, caracterizada pelos aspectos visual, tátil e mental. Este último associado à mobilização de imagens mentais. Portanto, a visualização rompe a barreira do que é mais visual, levando o aluno a acionar os conhecimentos propícios que as situações evocam, inclusive da própria ação, para que se avance no estabelecimento das relações que passam a ser estabelecidas de forma mais complexa em termos de mentalização das imagens.

No que tange à construção da grandeza comprimento, de acordo com Lovell (1988), as expressões de comprimento e medidas, “isto é mais comprido do que aquilo”; ou “aquilo é mais alto do que isto”; e, em relação à distância: “perto” e “longe”, são logo cedo usadas pelas crianças, que absorvem no contato social com os adultos. Na escola, a criança vai tendo contato com os conceitos de extensão ou comprimento, por meio das atividades em sala de aula. (p. 94).

Esse autor enriquece as discussões sobre como a criança compreende esses conceitos, a partir dos estudos desenvolvidos por Piaget e seus colaboradores. Lovell (1988) relatou um dos experimentos testados pelo grupo piagetiano. Inicialmente, foi solicitado à criança que procurasse construir uma torre igual a do experimentador (que continha doze blocos), em outra mesa que estava posicionada de tal forma que a sua superfície se mostrava mais baixa. Outros materiais foram disponibilizados: tiras de papel, bastões, régua, etc. A criança era estimulada a usá-los, mas não recebia orientações sobre o uso. Constataram-se os seguintes estágios:

(a) até cerca de 4 ½ anos de idade, havia somente uma comparação visual. A criança julgava a segunda torre como de igual altura que a primeira, dando um passo para trás e fazendo a estimativa. Isto era feito não importando a diferença das alturas das superfícies das mesas;

(b) este procedimento era para os indivíduos de 4 ½ a 7 anos de idade, aproximadamente. Inicialmente a criança poderia encostar um grande bastão alcançando o topo das torres para ter a certeza de que estas se encontravam niveladas. Quando compreendia que a base das torres não estava na mesma altura, algumas vezes procurava colocar sua torre na mesma mesa do modelo. Naturalmente, isso não era permitido. Mais tarde, as crianças começaram a procurar instrumento de medição, e algumas começaram a usar seus corpos com esta finalidade;

(c) a partir de 7 anos, havia uma tendência crescente para usar algum objeto simbólico (por exemplo, um bastão) a fim de imitar o tamanho. Muito ocasionalmente uma criança construía uma terceira torre, a partir da primeira, e a transportava para a segunda: isso era permitido. Com mais freqüência, porém, ela usava um bastão que era exatamente do mesmo comprimento que a altura da torre do modelo (LOVELL, 1988, p. 94).

Segundo Lovell (1988), algumas crianças optaram pelo uso das mãos, outras, os braços, mas, as que perceberem a fragilidade do procedimento, começaram a dispor o corpo paralelo à torre e marcar na perna para verificar na outra torre se correspondia às respectivas

alturas. As crianças dispunham de uma cadeira ou um tamborete para facilitar o processo adotado.

Para Piaget e seus colaboradores, usar o corpo como meio de medida é um avanço e tal prática deve ter origem na percepção visual, quando a criança visualiza os objetos, e nas ações motoras, por exemplo, quando busca reproduzir o modelo. Para eles, são essas percepções motoras que originam imagens, por conseguinte, atribuindo um valor simbólico, inicialmente, ao próprio corpo como ferramenta de medida e, posteriormente, esse valor é transferido para um objeto, por exemplo, uma régua (LOVELL, 1988, p. 94).

Na descrição de Lovell (1988), após essa prática do valor simbólico, a criança adota esse meio intermediário de um modo operacional na mente, traduzindo o princípio lógico da transitividade de que $A = B$, e $B = C$, $A = C$. Acrescenta, ainda, que foi verificado que mesmo crianças que usaram um bastão mais comprido do que o necessário, ou até bastão mais curtos do que a torre, foram capazes de estabelecer a comparação de forma adequada, fazendo uma transposição correta no tocante aos comprimentos adotados.

Por meio desse experimento desenvolvido por Piaget e seus seguidores, é possível perceber que as crianças vivenciaram experiências transitando entre “discriminações visuais ativas - contínuas e descontínuas”. Os materiais foram disponibilizados para todas elas. Algumas efetuaram as manipulações, mas não obtiveram sucesso nas transposições realizadas. Essas poderiam ser classificadas como as que estariam correspondendo ao momento da “discriminação visual passiva”, porque mesmo que se utilize de ferramentas de comparações não conseguem atingir o nível desejado. Portanto, o uso precoce de um instrumento não significa garantia de avanço na atividade que está sendo submetida.

Lovell (1988) também destacou outros aspectos importantes dos estudos de Piaget, de Inhelder e de Szeminska. Em primeiro lugar, sobre a distinção que as crianças fazem entre distância e extensão (comprimento). Aquele corresponde à separação linear de objetos, ou

“espaço vazio”, enquanto este diz respeito ao tamanho do espaço “preenchido”. No caso, poderia ser um tipo de mediano.

No experimento desenvolvido por Piaget e sua equipe, constando essas preocupações, solicitou-se à criança que dissesse se dentre duas árvores (de brinquedo) estavam elas perto uma da outra ou estavam bastante separadas. Após responderem, as árvores permaneciam na posição anterior, sendo que entre elas colocava-se uma separação de papelão (mais alta) e indagava-se à criança se as árvores continuavam “tão perto” ou “tão separadas” quanto antes. Foi verificado, no estágio até 5 anos de idade, que a criança considerava uma parte da distância como toda, “de modo que quando a tela era interposta e a distância dividida em duas partes, ela dizia que a distância entre as duas árvores era menor”. Na verdade, “não podia verbalizar o fato de que estava confusa com a relação todo-parte”. No segundo estágio, após cerca de 5 anos, “a criança dizia que a distância global era menor, porque aquela distância entre as árvores, tomada pela tela, precisava ser tirada, já que era um ‘espaço preenchido’”. Só após 7 anos, é que a distância era conservada, “apesar dos objetos colocados no meio, e a noção de distância se tornava operacional” (LOVELL, 1988, p. 95).

Finalmente, Piaget e seu grupo reforçam o ponto de vista de que “a conservação de comprimento somente pode ser conseguida quando a criança compreende que o lugar ocupado por um objeto permanece do mesmo comprimento quando o objeto é removido”; e, sentido inverso, “o tamanho de um lugar que anteriormente estava vazio continua precisamente o mesmo quando está preenchido por um objeto”. Também argumenta que, como pré-requisito para mensuração, a criança precisa compreender “que um objeto permanece do mesmo comprimento, independente da mudança de posição” (LOVELL, 1988, p. 95).

Sobre a conservação de comprimento, concluímos esta etapa apresentando mais uma inserção de Lovell (1988):

Contudo, a conservação de comprimento quando um objeto é submetido à mera mudança de posição, não implica necessariamente um entendimento de mensuração. Embora uma criança seja capaz de conservar o comprimento se dois conjuntos de objetos forem apresentados em linhas retas e em alinhamento exato, ela pode não conservar se um conjunto for rearranjado a uma linha curva ou em ziguezague (p. 96).

2.5 O fluxo no modelo didático dos quadros considerando a visualização na relação com a grandeza comprimento

O modelo didático proposto por Douady & Perrin-Glorian (1989) é uma fonte de inspiração de toda esta tese, e por isso está sendo retomado nesta última etapa do capítulo. Agora, sentimos a necessidade de refletir sobre os quadros considerando o fluxo possível entre cada um deles, inclusive relacionando-os com a visualização, que sugerimos seu ingresso no modelo como um aspecto integrante na construção da grandeza comprimento, mesmo que não se caracterize como objeto matemático. Este é o motivo que no diagrama está configurado numa disposição diferente dos demais, isto é, em caráter transversal.

Já havíamos anunciado na parte três deste capítulo que tais quadros nos permitiram fazer algumas reflexões epistemológicas relacionadas à gênese da grandeza comprimento, destacando essa configuração mais de inferências que permeia esse processo. Contudo, cabe destacar que eles também nos permitem refletir sobre a própria participação da visualização, inclusive perpassando pelo estabelecimento das relações com os efeitos visuais.

A sugestão da inserção da visualização, no modelo didático proposto por Douady & Perrin-Glorian (1989), consiste da compreensão que o mesmo sempre teve participação efetiva nesse processo de gênese, ainda que alguns queiram atribuir um papel apenas coadjuvante.

Quando se pensa no desenvolvimento epistemológico de um conceito, é comum considerar os aspectos da evolução desse conhecimento centrando as atenções na perspectiva da ciência que a referida noção está inclusa. Esse ponto de vista é correto, todavia tem que se

ter o cuidado para não afetar a compreensão do conceito envolvido. Por exemplo, se o foco da abordagem diz respeito a um conhecimento matemático, parece que é proibido se pensar em termos epistemológicos na interferência de outros conhecimentos. No caso que estamos tratando, entendemos que essa noção da grandeza comprimento está conectada à visualização, que é uma manifestação que mantém afinidades mais próximas ao campo cognitivo.

No tocante a cognição, há bons avanços de estudos que buscam aproximar cada vez mais esses conhecimentos. Porém, diante do que já se produziu, os profissionais que lidam com Matemática já poderiam tirar proveitos bem mais significativos dessa relação. Particularmente, quanto ao viés da visualização, apenas recentemente é que estamos vendo sinalizar pesquisas que tratam sobre esse tema, embora de forma bem incipiente. Portanto, é preciso haver um despertar no sentido que numa perspectiva epistemológica essa operação cognitiva teve participação efetiva no processo de construção de conhecimentos da geometria, das grandezas e medidas e dos próprios números.

É provável que a fronteira entre o sensível e o inteligível levantado por Câmara dos Santos (1999), mais do que destacar uma diferença dentro do próprio conhecimento matemático, como havíamos questionado antes, considerando que poderia estar associado à delimitação do quadro geométrico ao quadro das grandezas, esteja, implicitamente, relacionado mais fortemente a uma fronteira associada a manifestações da visualização.

Pelo que estamos elaborando, vai ficando configurado que dois aspectos devem ser considerados nas reflexões epistemológicas da grandeza comprimento: o aspecto matemático e o aspecto cognitivo, que tem a visualização como uma grande contribuição. Se não foram os erros detectados em experimentos de Mestrado, que denominamos de efeitos visuais, muito provavelmente, não estaríamos fazendo esta discussão. Por intermédio deles detectamos que as dificuldades dos alunos nas atividades com a grandeza comprimento não eram genuinamente de natureza matemática, mas tinha uma outra raiz – a visualização.

O modelo original de Douady & Perrin-Glorian (1989) enfatiza três aspectos eminentemente matemáticos: o geométrico; o das grandezas e o numérico. Sugerimos que seja considerado o aspecto da visualização, como um viés cognitivo com forte relação com tais conhecimentos matemáticos.

Quando introduzimos no título desta seção a expressão “fluxo no modelo didático” é porque entendemos que a característica marcante do padrão proposto é a natureza dinâmica que o envolve. Ele não é estático e não deve ser visto como tal. O fluxo é contínuo e não tem caráter linear, pelo contrário, é reentrante. Ao se atingir um novo quadro, a volta ao anterior ocorre com ferramentas mais sofisticadas, permitindo ampliar o estabelecimento das relações no retorno a cada quadro.

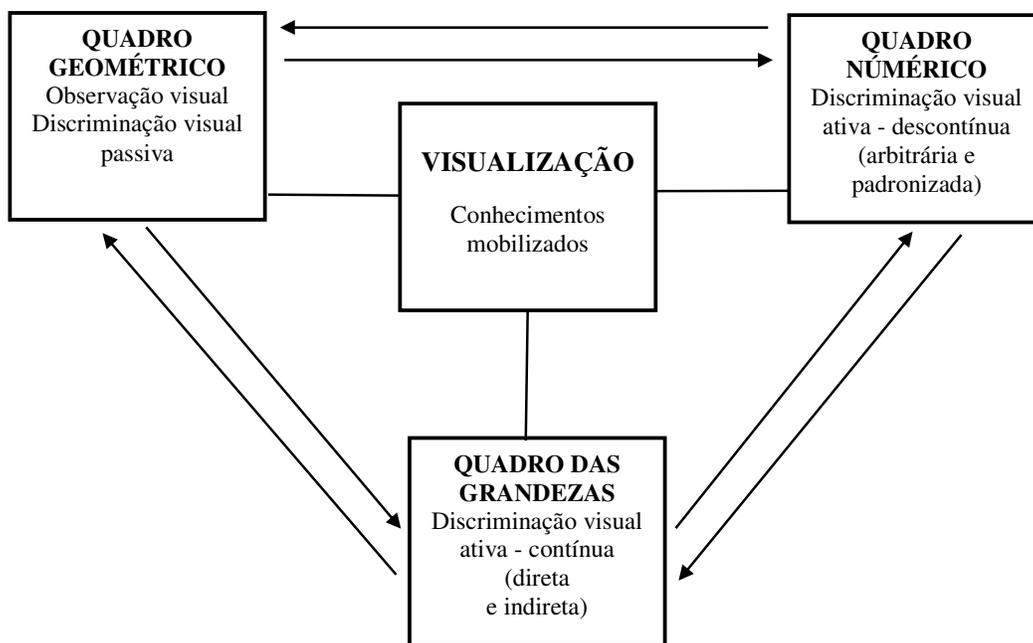
Na configuração que estamos propondo, no quadro geométrico participam as situações de “observação visual” e “discriminação visual passiva”. No quadro das grandezas temos a “discriminação visual ativa – contínua”, que pode ser direta ou indireta (com uso de medianeiros). Por fim, no quadro numérico ocorre a “discriminação visual ativa – descontínua”, seja por meio de unidades arbitrárias ou padronizadas. Entendemos que o estabelecimento relacional da visualização com os quadros se efetua por meio dessas quatro situações.

O primeiro momento categorizado como algo que está associado à mobilização do conhecimento da “observação”. Os demais momentos todos podendo ser categorizados como manifestações da mobilização dos conhecimentos da “comparação”. Portanto, a visualização é uma operação cognitiva complexa que se efetua com a participação da mobilização de outros conhecimentos como é o caso da observação, classificação, comparação, representação, etc.

Diante do que temos apresentado, sugerimos que no modelo didático possa constar uma nova configuração que considere o aspecto da visualização, tendo essa conexão estabelecida por esse viés cognitivo, considerando a “observação” e, principalmente, a

“comparação”, como vemos a seguir:

Quadro 2: Fluxo no modelo didático



Na configuração de modelo proposto acima, o aspecto da visualização que está centralizado faz o elo entre os três outros por ter participação em cada um dos momentos. Portanto, é a contribuição cognitiva que vem estabelecer essa conexão.

Entre os três quadros que compõem o aspecto matemático observa-se a presença de setas nos dois sentidos entre cada um deles. Trata-se apenas de uma representação do caráter espiral que os relaciona.

Quando o homem foi capaz de transpor do quadro geométrico para o quadro das grandezas atingindo, por sua vez, o estabelecimento da comparação contínua, tal evento não significou que não mais voltasse ao anterior, como é o caso do quadro geométrico. Pelo contrário, passou a contar com mais uma ferramenta para estabelecer relações geométricas. Da mesma forma, ao transpor do quadro das grandezas e atingir a comparação descontínua, passou a contar com ferramentas mais sofisticadas, não só para voltar ao quadro das grandezas e estabelecer relações ainda mais consistentes em termos de grandezas, mas ainda,

podendo instituir novas relações geométricas numa amplitude bem superior. Isso significou que o homem estava podendo sair do quadro numérico ao quadro geométrico e vice-versa.

Quanto a essa relação recíproca dos dois últimos quadros, sugerimos que tal evento favoreceu a existência de um “atalho epistemológico”. Estamos admitindo que tal conexão contribuiu para estreitar o relacionamento entre o quadro geométrico e o quadro numérico, sobretudo, pela praticidade do uso dos conhecimentos dos números no campo geométrico. Essa vinculação epistemológica tem ocasionado um impacto de tamanha intensidade que também tem gerado um “atalho didático”. A facilidade da conexão entre o quadro geométrico e o quadro numérico, ou vice-versa, termina estimulando o intercâmbio entre um e outro, ajudando a desconsiderar o quadro das grandezas. Nessa perspectiva, o “atalho didático” tem raízes epistemológicas. Tomando como base a evolução epistemológica, não foi esse o trajeto dado pela humanidade. Dificilmente o homem atingiu a construção das comparações descontínuas, sem antes ter experimentado situações da comparação contínua.

Tanto o “atalho epistemológico” quanto o “atalho didático” terminam sendo legitimados pela história da Matemática. Esta também desconsidera a evolução epistemológica, por exemplo, das grandezas comprimento e área. Quando consultamos livros ou outras produções que tratam de conhecimentos da história da geometria, quase sempre, tais fontes indicam o cenário do Egito como o palco inicial das relações envolvendo aspectos da geometria com aspectos das medidas. Portanto, é uma ênfase na conexão do quadro geométrico para o quadro numérico e vice-versa. Assim, a história da Matemática também corrobora para consolidação do “atalho didático”. Evidentemente, que a história se baseia naquilo que está documentado ou no que se têm provas materiais, independentemente se a grandeza é precursora do número.

Trazendo para um contexto de sala de aula, quando o aluno adquire a ferramenta do número, sendo desafiado a comparar o comprimento entre dois entes quaisquer, mesmo sem

conhecer um instrumento de medida apropriado, ele pode apelar para o uso de unidade arbitrária, por exemplo, o palmo da mão, um apagador, uma caixa, etc. Nesse caso o próprio aluno passa a ser o ator ativo do “atalho didático”.

Concluimos esta descrição sobre o fluxo no modelo didático dos quadros propostos por Douady & Perrin-Glorian (1989), considerando a inserção da visualização como um aspecto integrante do processo de construção da grandeza comprimento, admitindo que estas reflexões possam contribuir para o arcabouço teórico relacionado à epistemologia dessa grandeza geométrica, e quiçá, ajudar futuros estudos na área da Educação Matemática.

**CAPÍTULO 3 – O ACERVO EXPERIMENTAL
DOS EFEITOS VISUAIS**

3.1 Introdução

Neste capítulo, descreveremos o acervo experimental resultante dos experimentos em que foram detectados os eventos os quais foram categorizados como efeitos visuais. Trata-se de um acervo incipiente, que tem como base os estudos de pesquisas do Mestrado em Educação da Universidade Federal de Pernambuco, desenvolvidos por Barbosa (2002), Brito (2003) e Teixeira (2004). Também está inserida uma contribuição de uma pesquisa de Mestrado em Educação, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, desenvolvida por Souza (2004). São os dois primeiros que apresentam o maior número de ocorrências do que se tem acumulado sobre esses conhecimentos, já que os dois últimos tinham preocupações mais distintas, diminuindo as oportunidades de serem averiguadas tais fenômenos de visualização.

Num primeiro momento, faremos considerações mais gerais sobre essas pesquisas com o objetivo de situar melhor o que foi abordado em cada temática. Logo após, discutiremos cada um dos efeitos, sempre procurando ilustrar com os exemplos originais e os principais comentários relacionados a cada um deles. Também complementaremos com levantamentos sistemáticos e sinópticos desses fenômenos em cada um dos experimentos. Posteriormente, introduziremos uma etapa que trata dos ajustes efetuados nas denominações atribuídas aos efeitos visuais.

Quanto aos efeitos visuais, seguiremos uma sistemática de apresentação baseando-nos nas atividades, na medida em que foram surgindo esses fenômenos, em cada um desses experimentos, de acordo com a ordem cronológica respectiva de cada pesquisa. Assim, daremos início a partir das situações exploradas no experimento desenvolvido por Barbosa (2002), nas quais, originalmente, surgiram os efeitos visuais e em que se teve um maior número de situações com variedade desses eventos. Em seguida, evocaremos as contribuições dos outros três experimentos que essas influências visuais foram detectadas.

3.2 Considerações gerais sobre os experimentos do acervo

As pesquisas que compõem o acervo experimental que iremos expor se inserem no bojo de outros estudos.

Os primeiros estudos tiveram início no ano de 1995, através do LEMAT – Laboratório de Ensino de Matemática do Departamento de Matemática da UFPE (Universidade Federal de Pernambuco). Podem ser apontados os estudos de Lima (1995), Baltar (1996), Perrot et all (1998), Câmara dos Santos (1999) e Bellemain & Lima (2000) (BARBOSA & BRITO, 2004, p. 1).

Os demais constituem-se como as contribuições desenvolvidas pelo Grupo Pró-grandezas¹⁷, vinculado ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Pernambuco, Núcleo de Didática de Conteúdos Específicos, área de Matemática.

Dentre as pesquisas¹⁸ que trataram sobre as grandezas geométricas, durante os anos de existência do grupo, uma abordou sobre a grandeza ângulo de autoria de Lima (2000), três sobre a grandeza comprimento, com autorias respectivas de Barbosa (2002), Brito (2003) e Teixeira (2004), uma sobre a grandeza área pesquisada por Duarte (2002) e duas sobre a

¹⁷ O Grupo Pró-grandezas foi criado no ano de 2000, em torno de um projeto de pesquisa para o ensino dos conceitos de comprimento e área, proposto pelo PRÓ-MATEMÁTICA, programa integrante da cooperação técnica da Embaixada da França com o Ministério da Educação e do Desporto do Brasil (BARBOSA, 2002, p. 16).

¹⁸ As pesquisas que estão sendo consideradas são as que foram desenvolvidas como atividades submetidas a Programas de Pós-Graduação, em caráter de Mestrado.

grandeza volume, que foram desenvolvidas por Oliveira (2002) e Barros (2003) respectivamente. Uma outra produção que também está inserida como uma produção do grupo é a pesquisa desenvolvida por Souza (2004), independente de se constituir como uma investigação de um outro Mestrado em Educação, atrelada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Esta tratou sobre as grandezas comprimento e, principalmente, área, embora tenha se reportado a uma análise genérica de problemas que envolveriam as grandezas geométricas como um todo.

Exatamente as quatro pesquisas que trataram sobre a grandeza comprimento formam o que estamos denominando do nosso acervo experimental.

A primeira foi a de Barbosa (2002) intitulada: “Efeitos de uma seqüência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no ensino fundamental”. O propósito da investigação foi analisar os efeitos de uma seqüência de atividades para uma fase inicial da construção dos conceitos de comprimento e perímetro. Ocorreu entre alunos da 4.^a série do 2.^o Ciclo do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Campina Grande – PB. O ambiente explorado foi o papel e lápis com uso de medianeiros.

Em seguida, veio a de Brito (2003) denominada “Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2.^o ciclo do Ensino Fundamental”. Teve como objetivo geral investigar os conhecimentos-emoção, mobilizados por alunos de uma turma de 4.^a série do 2.^o Ciclo do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal da cidade do Recife – PE. Trabalhou com o ambiente papel e lápis com uso de medianeiros e no ambiente com materiais manipulativos.

Como terceira pesquisa, houve a desenvolvida por Teixeira (2004) a qual recebeu o título “Concepções de alunos de Pedagogia sobre os conceitos de comprimento e perímetro”. Esta visou investigar as concepções de alunos de pedagogia sobre os conceitos comprimento e perímetro. Foi realizada entre alunos de 2.^o e 8.^o períodos do curso de Pedagogia da Faculdade

de Formação de Professores da cidade de Nazaré da Mata – PE. O ambiente explorado foi o do papel e lápis com uso de medianeiros.

Por fim, a de Souza (2004) denominada “Análise de estratégias de resolução de problemas de grandezas geométricas em avaliações institucionais em larga escala de redes públicas do estado de Pernambuco”. O estudo buscou analisar as estratégias de alunos de 4.^a, 5.^a e 8.^a série do Ensino Fundamental de redes públicas de Pernambuco, por meio de problemas envolvendo os conceitos de perímetro e/ou de área, procurando identificar possíveis obstáculos associados aos erros apresentados. Explorou protocolos de alunos dos municípios de Recife e do Cabo (NAPE – Núcleo de Avaliação e Pesquisas da UFPE), além de outros (SAEPE – Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco/2002).

Portanto, tem início nos estudos de Barbosa (2002), quando este pesquisador começou a interpretar as respostas dos alunos nas atividades de uma seqüência de atividades. Foram as incidências dos erros que mais chamaram atenção durante as análises e que culminaram com a elaboração de algumas hipóteses. Estas constituem o que chamamos de efeitos visuais.

No ano seguinte, Brito (2003) desenvolveu um estudo em que teve condições de verificar esses efeitos visuais com muito mais cuidado, tendo um maior controle das variáveis didáticas¹⁹ nas atividades elaboradas, possibilitando uma melhor observação dos respectivos eventos.

De forma consecutiva, Teixeira (2004) desenvolveu uma pesquisa que também possibilitou detectar alguns dos fenômenos visuais, mas numa escala bem mais reduzida, até porque seus estudos não tinham propósito específico quanto à verificação desses eventos e como o foco principal era sobre concepções dos alunos relacionado à grandeza comprimento, diminuíram as situações em que eles pudessem ser constatados.

¹⁹ Entenda-se por variáveis didáticas como os aspectos que podem interferir nas respostas dos alunos em cada uma das atividades.

Ainda no mesmo ano, Souza (2004) na análise do seu experimento, também se referiu a uma situação que ao interpretar sugeriu que houvesse influência de um efeito visual.

Nem o próprio trabalho de Barbosa (2002) tinha, inicialmente, a preocupação de analisar tais efeitos. O que ele estava propondo, era elaborar uma seqüência didática que favorecesse a construção, por parte de alunos das séries iniciais, do conceito de comprimento, incluindo perímetro como instância particular daquele. As restrições de tempo para elaboração da seqüência, complementado pelas apreciações dos erros surpreendentes, terminaram contribuindo para o estudo focalizar a análise dos efeitos de uma seqüência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro, no 2.º Ciclo do ensino Fundamental.

Brito (2003), por sua vez, ao desenvolver seu estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2.º Ciclo do Ensino Fundamental, teve condição de averiguar os conhecimentos-em-ação mobilizados por alunos da referida série. Dentre essas mobilizações estão inseridos os efeitos visuais. Dessa forma, na análise de suas categorias considerou, preliminarmente, a possibilidade desses eventos de visualização ocorrerem.

Não temos a preocupação em ficarmos estabelecendo um paralelo entre esses dois estudos²⁰, embora em várias ocasiões tornam-se inevitáveis determinadas comparações. Quase sempre, estaremos à procura de contribuições de cada um deles, na busca de termos mais elementos que elucidem os conhecimentos referentes aos efeitos visuais.

Contudo, destacaremos a seguir os três aspectos indicados por Brito (2003) que diferenciam seu trabalho do de Barbosa (2002):

1. Na pesquisa de Barbosa foram elaboradas 17 atividades para serem aplicadas no ambiente papel e lápis, enquanto que na nossa foram elaboradas 6 atividades, sendo que cada uma delas foi descrita para ser aplicada em dois momentos: no primeiro,

²⁰ Este paralelo foi realizado num trabalho apresentado no VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, com o título “Algumas reflexões sobre duas pesquisas relacionadas à grandeza comprimento”, na modalidade comunicação científica (BARBOSA & BRITO, 2004, p. 1-15).

fazendo uso de papel e lápis e, no segundo, com o uso de materiais manipulativos, formando um conjunto de 12 atividades, apresentadas com o objetivo de verificar a influência de tais materiais;

2. A coleta de dados foi feita através dos protocolos dos alunos, como na pesquisa de Barbosa, mas, também, utilizamos as anotações feitas durante a observação na parte relativa à manipulação dos materiais, além da entrevista realizada no término dos testes;

3. Não só analisamos e interpretamos as respostas certas e/ou erradas, mas caracterizamos, também, as estratégias de resolução e os conhecimentos implícitos adotados pelos alunos, considerando a influência do uso de materiais manipulativos na ampliação de tais estratégias (BRITO, 2003, p. 21).

Pelos aspectos apresentados, além da diferença do número de atividades que os diferenciaram, no experimento de Brito (2003), ela trabalhou um segundo ambiente, caracterizado pela exploração de materiais manipulativos. Neste, realizou uma entrevista ao término de cada teste, permitindo alguns esclarecimentos quanto às estratégias de resolução e os conhecimentos implícitos adotados pelos alunos.

3.3 Os fenômenos efeitos visuais

Como anunciado anteriormente, foi no estudo de Barbosa (2002) que se iniciam as observações desses fenômenos de visualização caracterizados por efeitos visuais. Ao analisar os efeitos da aplicação da seqüência de atividades, eles começaram a ser detectados. Algumas das dificuldades captadas nesse estudo ficaram bem explícitas, porque estavam manifestas, de alguma forma, por meios bem evidentes. Outras, contrariamente, necessitaram de algumas articulações provenientes das respostas dos alunos até serem levantadas as hipóteses. A frequência dos erros dos alunos passou a ser um grande sinalizador de que poderia ter algo implícito por trás daquelas respostas. Os erros começaram a ser interpretados como verdadeiras pistas e constituíram-se nos principais indicadores dos eventos efeitos visuais.

Desde a análise dos protocolos da 1.^a atividade da 1.^a sessão do experimento²¹, esse pesquisador enfatizou o grande número de erros cometidos pelos alunos. A atividade²² constava de dois itens, sendo que no primeiro era para o aluno identificar o caminho mais comprido, enquanto no segundo deveria identificar o mais curto. Os caminhos apresentados eram mistos e todos abertos (com dois segmentos de reta, duas linhas curvas e uma linha “quebrada”), como podem ser visto abaixo:

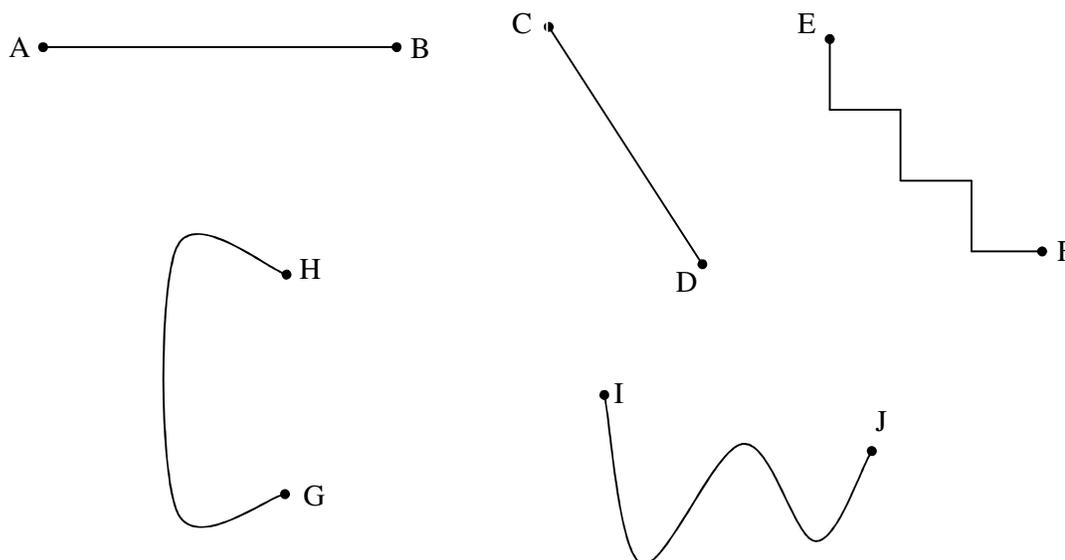


Figura 6: Figuras da 1.^a atividade da 1.^a sessão do experimento de Barbosa (2002)

Barbosa (2002) detectou que, pelo menos em um dos itens, 69,0% dos alunos cometeram algum erro, contrariamente do que estava previsto. “Isso revela que um contingente elevado de alunos da turma investigada apresenta dificuldades na resolução de problemas do tipo presente na Atividade 1” (p. 88).

Ao interpretar os erros cometidos por 8 sujeitos (27,6%), do total de 29, esse pesquisador sugeriu, pela primeira vez, a existência de um tipo de influência visual:

²¹ O experimento constou de quatro sessões e com a seguinte distribuição de atividades em cada uma: cinco na primeira; seis na segunda; duas na terceira e quatro atividades na quarta e última sessão.

²² Essa atividade, posteriormente, serviu de inspiração no experimento desenvolvido por Brito (2003) e foi utilizada no experimento de Teixeira (2004), que fez pequenas mudanças nas configurações das figuras.

Quanto a possíveis interpretações dos erros cometidos no item (a), julgamos que a indicação do caminho AB, por parte de oito sujeitos, leva-nos a supor que tais alunos consideraram a “extensão horizontal” dos caminhos, ou seja, o comprimento da projeção da curva sobre uma reta horizontal. No caso em questão, tais projeções têm os seguintes comprimentos aproximados: AB (5 cm); CD (2 cm); EF (3 cm); GH (2 cm) e IJ (4 cm). Chamaremos a essa hipótese, a partir de agora, de “efeito da extensão horizontal” (BABOSA, 2002, p. 90-91).

O item dizia respeito à indicação do caminho mais comprido e 19 alunos cometeram erro, mas apenas a resposta de 8 deles foi interpretada como indício desse efeito. Considerando a influência desse evento, observa-se que as diferenças entre incidências das medidas dessas projeções são acentuadas, pois o caminho que mais se aproxima da medida de AB (5 cm) é o IJ (4 cm), com uma diferença de 1cm.

Quanto aos medianeiros²³, foi verificado que todos os alunos fizeram uso de algum tipo, mas sete deles só utilizaram régua. Essa exclusividade foi apontada como podendo estar associada aos erros dos alunos, pois à situação em jogo não cabia tal uso, pois envolvia comparação de comprimento de curvas.

Portanto, estava configurado o que passou a ser denominado como “efeito da extensão horizontal”, cuja ilustração pode ser observada a seguir. No estudo original não constavam as representações das figuras afetadas por tal fenômeno. No entanto, resolvemos apresentá-las, não só porque foi o primeiro detectado entre os efeitos visuais, mas, também, para que fique melhor caracterizado a influência desse evento. Considerando as projeções em cada caminho temos, em ordem decrescente, as seguintes medidas: AB (5 cm); IJ (4 cm); EF (3 cm); CD (2 cm) e GH (2 cm).

²³ Os medianeiros usados para as comparações foram os seguintes instrumentos: uma “régua” não-graduada, confeccionada de cartolina branca; uma “régua” não-graduada, confeccionada de folha de transparência; um fio fino e flexível e dois cordões de cores diferentes.

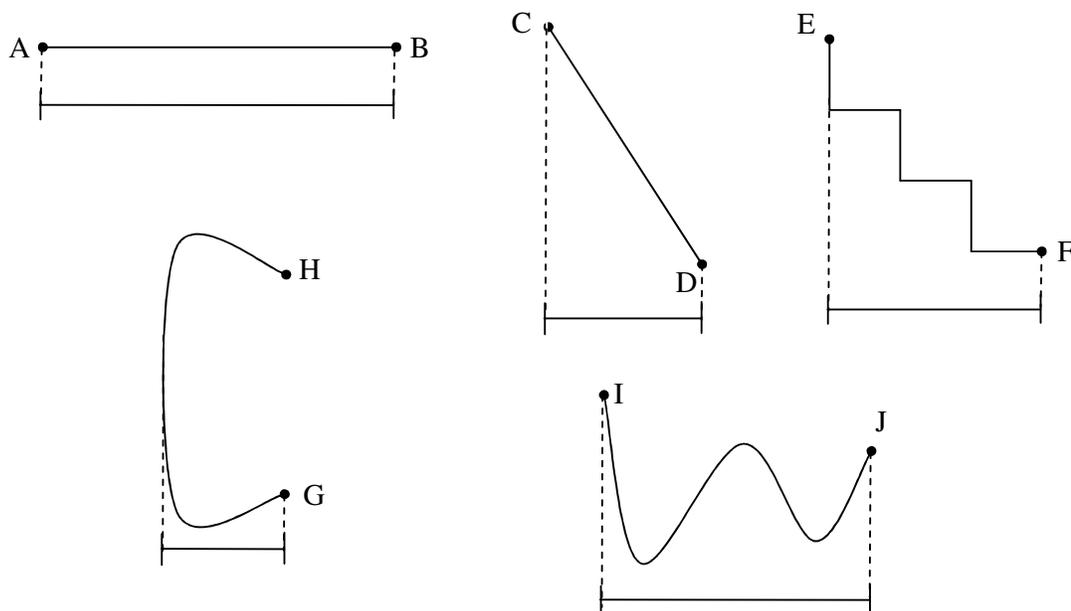


Figura 7: Efeito “projecção horizontal” da 1.^a atividade da 1.^a sessão do experimento de Barbosa (2002)

Ainda nessa atividade, no mesmo item, foi apontada uma segunda influência visual, também oriunda de erros cometidos por 8 alunos: “...já havíamos antecipado sua ocorrência, acreditando-se decorrer do número de pequenos segmentos que compõem a ‘escada’, o que acarreta dificuldades no uso de instrumentos de comparação de comprimentos” (BARBOSA, 2002, p. 91).

É provável que alguns alunos estabeleceram a comparação associando número de partes de segmentos como a variável que determina o comprimento entre os caminhos. Outros podem ter optado em estabelecer a comparação por meio dessa relação porque tiveram dificuldades no uso de algum instrumento. O fato é que estava se configurando como mais um efeito, embora, num primeiro momento, não foi tido com esse *status*.

Essa primeira atividade, constando caminhos mistos, foi muito rica para a ocorrência dos efeitos. Entretanto, ainda não se tinha um pouco mais de clareza sobre os mesmos, até porque foram sendo descobertos na continuidade das análises.

Na 3.^a atividade da 2.^a sessão do experimento desenvolvido por Barbosa (2002) novamente foram detectadas influências visuais nas respostas indicadas pelos alunos que deveriam identificar, no primeiro item, o caminho mais comprido, enquanto, no segundo, o mais curto. Os quatro caminhos apresentados eram todos formados por linhas poligonais abertas (ver figura 3).

Mais uma vez os erros continuaram sendo as grandes pistas sobre essas influências visuais. Segundo Barbosa (2002) o “índice de erros, em pelo menos um dos itens, foi excessivamente elevado, a saber, 96,6%” (p.128). Num primeiro momento da interpretação do número elevado de erros, esse pesquisador suspeitou que estivesse associado à utilização inadequada de instrumentos, especialmente por considerar a existência de muitos ângulos, presentes nas curvas de algumas figuras. Posteriormente, ao confrontar os resultados entre as respostas dos itens, admitiu estar vinculado à mobilização de uma certa estratégia:

Um exame mais detido, no entanto, levou-nos a observar o contraste entre o número de acertos do item (b) – 20 alunos – e do item (a) – 1 aluno. Isso induziu-nos a pensar que, antes de utilizar qualquer instrumento de comparação, a grande maioria dos alunos teria feito uma pré-escolha, separando as curvas pelo critério do comprimento de sua projeção sobre uma horizontal, o que faria AB e GH parecerem, evidentemente, mais curtos, ao passo que EF e CD seriam, visivelmente, mais compridos (BARBOSA, 2003, p. 129).

Essa pré-escolha caracteriza o momento da estratégia propriamente dita, isto é, quando ocorre a mobilização do conhecimento que varia de acordo com cada situação. Na do caso acima, Barbosa (2002) descreveu que, ao separar as curvas, o aluno obedeceu ao critério do comprimento de sua projeção sobre uma horizontal, isto é, influenciado pelo “efeito da projeção horizontal”. Diante do que está exposto, a manipulação do instrumento incide como uma etapa posterior ao conhecimento a ser acionado. Assim sendo, a mobilização do conhecimento, enquanto processo, não só antecede o manuseio do instrumento, mas termina sendo determinante para o procedimento que se materializa. No estudo original também não foi apresentada a ilustração desse evento, mas resolvemos introduzi-la:

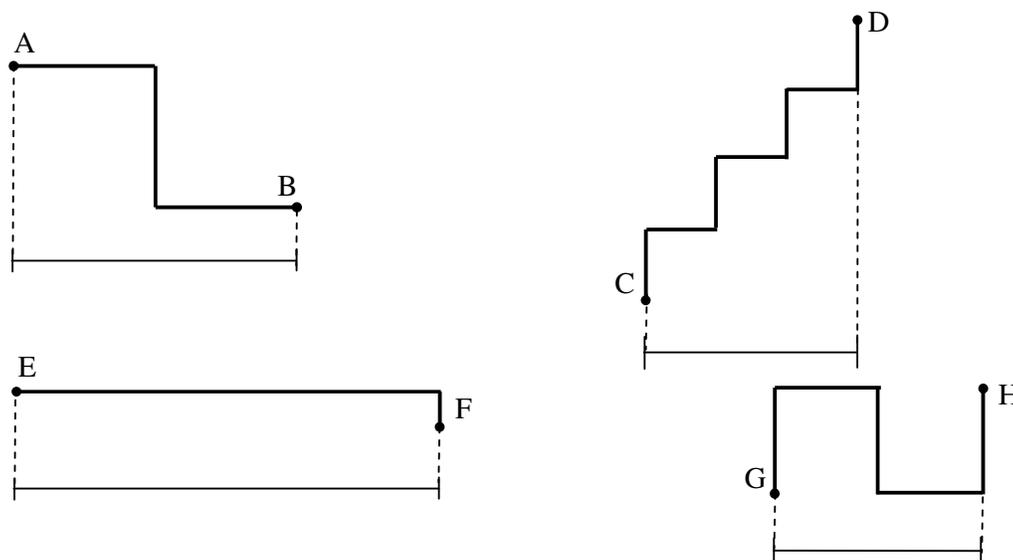


Figura 8: Efeito “projecção horizontal” da 3.^a atividade da 2.^a sessão do experimento de Barbosa (2002)

Ao interpretar os erros manifestos nessa atividade, Barbosa (2002) também levantou uma outra hipótese de estratégia: “Por outro lado, poderia ter ocorrido, em alguns casos, a estratégia que considera o comprimento do caminho tomado entre os seus pontos extremos. Chamamos a essa hipótese de ‘efeito da linha imaginária’” (p. 130).

Esse investigador considerou o comprimento do caminho entre os pontos mais extremos. Por coincidência, estes corresponderam às extremidades de cada um dos caminhos, como pode ser visto a seguir e essas linhas imaginárias teriam os seguintes comprimentos: 4,5 cm (AB); 5,0 cm (CD); 6,0 cm (EF) e 3,4 cm (GH).

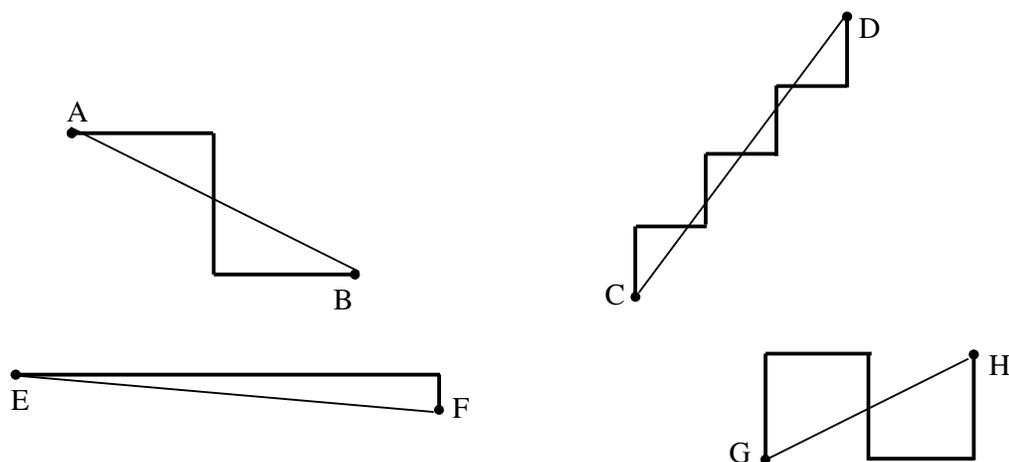


Figura 9: Efeito “linha imaginária” da 3.^a atividade da 2.^a sessão do experimento de Barbosa (2002)

Veremos, na página 139 (figura 14), exemplos em que as linhas imaginárias serão tomadas a partir dos pontos mais extremos dos caminhos e não das suas extremidades.

De acordo com Barbosa (2002), uma terceira estratégia também foi considerada: “poderia resultar do emprego da visualização do ‘espaço ocupado’ pela curva para fazer uma triagem inicial e, em seguida, usar algum instrumento da ‘caixa de ferramentas’ para a comparação final” (p. 130). As simulações dos caminhos a seguir procuram caracterizar as influências do respectivo efeito visual “espaço ocupado”:

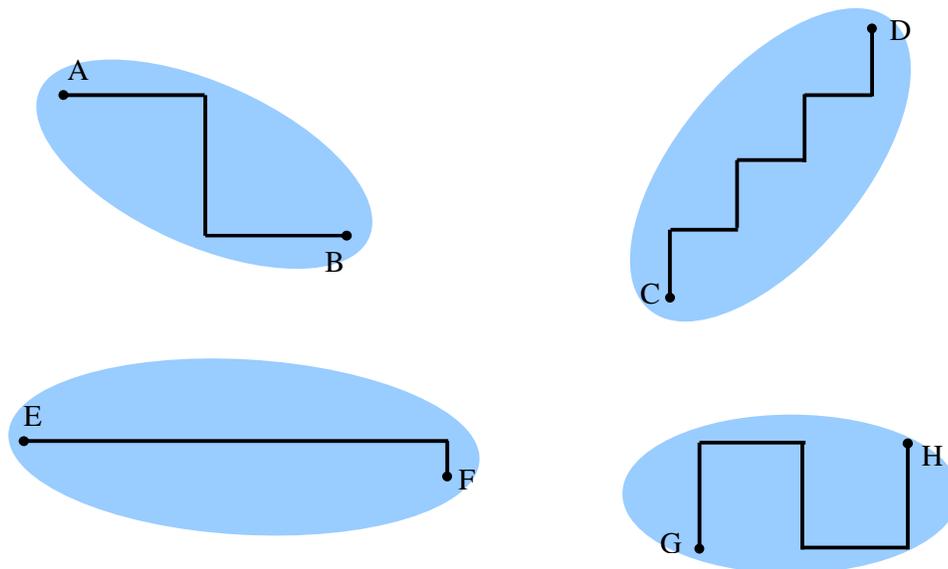


Figura 10: Efeito “espaço ocupado” da 3.^a atividade da 2.^a sessão do experimento de Barbosa (2002)

Nesse caso é evocada a visualização do “espaço ocupado” como o conhecimento mobilizado no estabelecimento da comparação para identificação dos caminhos. Segundo Barbosa (2002): “..., o aluno estaria associando o comprimento da curva à área de uma certa ‘região ocupada pela curva’, levando-o a indicar GH como o caminho mais curto” (p. 131).

Os comentários que seguem no próximo parágrafo não estavam expostos no estudo original da pesquisa, mas são observações que conseguimos extrair das respostas verificadas. Como anunciado anteriormente, os efeitos foram sendo descobertos paulatinamente, logo, não havia nas primeiras atividades um olhar do pesquisador que permitisse uma análise considerando cada um dos fenômenos de visualização que atualmente se tem conhecimento.

Assim sendo, destacamos que a presença marcante de respostas erradas (16 alunos) com a indicação do caminho CD como o mais comprido, também sugere a possibilidade de terem associado o número de partes da “escada”, isto é, como a variável que determinaria o

comprimento entre os caminhos. Neste caso, estaria se configurando a influência do efeito “associa número a comprimento”.

Considerando esse evento, a ordem crescente que obedece ao número de pedaços de cada caminho é: 2 (EF); 3 (AB); 5 (GH) e 7 (CD). Não foi detectado nenhum caso em que um mesmo aluno indicasse EF como o mais curto e CD como o mais comprido. A indicação de EF como o mais curto seria um fato muito difícil de ocorrer porque um pedaço da linha poligonal aberta era extremamente comprido (6,0 cm) e que favorecia a influência de outros efeitos, como o da “projeção horizontal” ou da “linha imaginária”. Aliás, além dos 16 que indicaram o caminho CD, dois alunos optaram pelos caminhos CD e EF como resposta para o mais comprido. É possível que ora estivessem sendo influenciados pelo efeito da “projeção horizontal”, ora pelo efeito de “associa número a comprimento”. Também não está descartado, que as respostas dos alunos que optaram pelo caminho CD podem resultar da influência do efeito da “projeção vertical”, já que, considerando essa influência, há uma diferença considerável quando se compara com os demais caminhos.

Na 5.^a atividade da 2.^a sessão do experimento investigado por Barbosa (2003) os fenômenos de visualização foram mais uma vez detectados. Como nas atividades anteriores, no item “a” era para o aluno identificar o caminho mais comprido e no “b” o mais curto. Os caminhos foram todos homogêneos, constando apenas linhas curvas.

Os dois últimos eventos da atividade anterior também foram indicados como influenciadores das respostas dos alunos: “linha imaginária” e “espaço ocupado”.

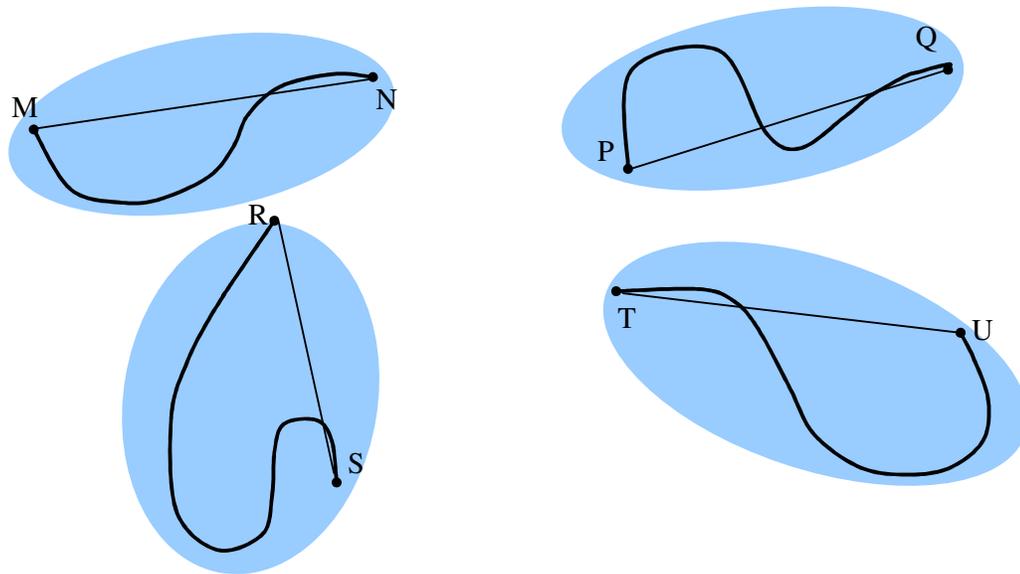


Figura 11: Efeito “linha imaginária” e “espaço ocupado” da 5.^a atividade da 2.^a sessão do experimento de Barbosa (2002)

Baseando-se nas “linhas imaginárias” acima, os comprimentos em ordem crescente, são os seguintes: 3,8 cm (RS), 4,7 cm (PQ), 4,8 cm (MN) e 4,9 cm (TU). Portanto, 4 alunos (13,8 %) que indicaram RS como o caminho mais curto podem ter sido influenciados pelo efeito da “linha imaginária”. “Por outro lado, os 15 alunos (51,7%), que indicaram erradamente TU ou MN, como o mais comprido, podem ter sido influenciados pelo ‘efeito da linha imaginária’ ou pelo ‘efeito do espaço ocupado’” (BARBOSA, 2002, p. 141).

Mesmo que não tenha ilustrado o efeito da “projeção horizontal”, esse pesquisador também sugeriu a possibilidade de ter sido uma ocorrência que contribuiu para o engano de 4 alunos (13,8%) indicarem RS como o caminho mais curto. Neste caso, este caminho poderia ser indicado tanto como resultante da influência da “projeção horizontal” quanto da “linha imaginária”.

As ocorrências dos efeitos visuais detectados na investigação realizada por Barbosa (2002) se encerram na 6.^a atividade da 2.^a sessão. Tratava-se de mais uma situação com caminhos mistos, num total de quatro (um segmento de reta, uma linha poligonal aberta e

duas linhas curvas), mas foi uma questão distinta das anteriores, pois era para o aluno colocar os caminhos em ordem crescente de acordo com os respectivos comprimentos. Foi sugerido que dois alunos podem ter cometido erro considerando o comprimento dos caminhos como a distância entre os seus extremos, isto é, efeito da “linha imaginária”.

Em seguida, apresentaremos um resumo do levantamento sistemático e sinóptico do que foi detectado no experimento de Barbosa (2002), identificando as atividades em que foram averiguadas as ocorrências e o tipo de efeito observado.

Nem sempre os eventos estão caracterizados com uma terminologia específica do efeito detectado, mas sempre haverá uma descrição que tenta caracterizar o registro da ocorrência que decorre de alguma influência de visualização.

Quadro 3: Levantamento das ocorrências/efeitos nas respectivas atividades do experimento de Barbosa (2002)

Identificação da Atividade/Sessão	Descrição da ocorrência registrada e nomeação do efeito
Atividade 1 1. ^a Sessão	Ocorrência: “consideraram a ‘extensão horizontal’ dos caminhos”. Nomeação: “efeito da extensão horizontal”
Atividade 1 1. ^a Sessão	Ocorrência: “número de pequenos segmentos que compõem a escada” Nomeação: Não foi atribuída
Atividade 3 2. ^a Sessão	Ocorrência: “separação das curvas pelo critério de sua projeção sobre uma horizontal” Nomeação: Ficou implícita - projeção sobre uma horizontal
Atividade 3 2. ^a Sessão	Ocorrência: “considerar o comprimento tomado entre os seus pontos mais extremos” Nomeação: “efeito da linha imaginária”
Atividade 3 2. ^a Sessão	Ocorrência: “emprego da visualização do ‘espaço ocupado’ pela curva” Nomeação: “efeito do espaço ocupado”
Atividade 5 2. ^a Sessão	Ocorrência: “o ‘efeito da projeção horizontal’ pode ter gerado o engano dos 4 alunos (13,8%) que indicaram RS como o caminho mais curto” Nomeação: “efeito projeção horizontal”
Atividade 5 2. ^a Sessão	Ocorrência: “os 15 alunos (51,7%), que indicaram erradamente TU ou MN como o caminho mais comprido, podem ter sido

	influenciados” pelo... Nomeação: “efeito da linha imaginária”
Atividade 5 2. ^a Sessão	Ocorrência: “os 15 alunos (51,7%), que indicaram erradamente TU ou MN como o caminho mais comprido, podem ter sido influenciados” pelo... Nomeação: “efeito espaço ocupado”
Atividade 6 2. ^a Sessão	Ocorrência: “terem considerado o comprimento dos caminhos como a distância entre os seus extremos” Nomeação: “efeito da linha imaginária”

É importante ressaltar que na tabela acima apenas estão destacadas as atividades e as ocorrências em que foram registrados os eventos de visualização no trabalho original. Todavia, na atividade 3 da 2.^a sessão, constatamos que alguns alunos parecem ter sido influenciados por outro evento visual e que registramos como sendo uma ocorrência associada ao número de partes da “escada” que determinaria o comprimento entre os comprimentos. O fato de dois alunos terem optado pela indicação do caminho CD como o mais comprido também sugere a influência do efeito “projeção vertical”, mas preferimos não inserir essas ocorrências, para preservar o que efetivamente foi registrado em cada experimento.

Observando as caracterizações das ocorrências registradas e as nomeações dos efeitos, resumimos no quadro abaixo cada um dos fenômenos detectados no respectivo experimento.

Quadro 4: Levantamento dos efeitos nas atividades do experimento de Barbosa (2002)

Ordem	Atividade/Sessão	Efeito visual
1. ^o	1 / 1. ^a	“Efeito da extensão horizontal”
2. ^o	1 / 1. ^a	“Efeito associa número a comprimento”
3. ^o	3 / 2. ^a	“Efeito projeção horizontal”
4. ^o	3 / 2. ^a	“Efeito da linha imaginária”
5. ^o	3 / 2. ^a	“Efeito do espaço ocupado”
6. ^o	5 / 2. ^a	“Efeito projeção horizontal”

7.º	5 / 2. ^a	“Efeito linha imaginária”
8.º	5 / 2. ^a	“Efeito espaço ocupado”
9.º	6 / 2. ^a	“Efeito linha imaginária”

Em que pese os nove registros de efeitos, há repetição entre eles; logo, rigorosamente, foram detectados quatro: “efeito da projeção horizontal” (1.º, 3.º e 6.º); “efeito que relacionou ‘degraus’ a comprimento” (2.º); “efeito linha imaginária” (4.º, 7.º e 9.º) e “efeito espaço ocupado” (5.º e 8.º). O efeito da projeção horizontal quando surgiu na primeira ocasião (1.º) foi nomeado como “efeito da extensão horizontal”. Nos demais é que foi designado como “efeito projeção horizontal”. Enquanto o “efeito que relacionou ‘degraus’ a comprimento” recebeu, posteriormente, a nomeação “efeito associa número a comprimento”. Portanto, estas foram as terminologias que prevaleceram.

O experimento desenvolvido por Brito (2003) possibilitou uma melhor compreensão dos efeitos visuais, pois analisou suas atividades considerando cada um dos eventos de visualização como suas categorias *a priori*. Trouxe contribuições reveladoras dos efeitos, em que pese ter trabalhado apenas duas questões com linhas abertas, mas também detectou tais eventos em situações com linhas fechadas. Uma novidade foi constatar os efeitos em situações apenas com segmentos de retas, mas na configuração de uma fachada de uma casa. Outra inovação foi ter introduzido o uso de manipulativos que permitiu ampliar o entendimento dos fenômenos. Portanto, ela explorou dois modelos: o ambiente papel e lápis, em que foi disponibilizada uma “caixa de ferramentas” e o ambiente de materiais manipulativos, o qual os entes geométricos foram representados por palitos ou fios.

A primeira atividade da experimentação foi composta por quatro segmentos de reta inseridos na configuração supracitada, sendo dois em posição prototípica (horizontal e vertical) e dois em posição não-prototípica (inclinados).

Segundo a pesquisadora foi uma questão inspirada numa atividade elaborada por Barbosa (2002), mas que fez algumas mudanças, desde o enunciado, às dimensões dos segmentos, à maneira que foi apresentada, introduziu cores aos segmentos, além da resposta que deixou de ser aberta para múltipla escolha.

A atividade de Barbosa (2002) a qual se inspirou, tinha os caminhos com os seguintes comprimentos: 3,5 cm (AB); 4,5 cm (GH); 5,0 cm (CD) e 5,0 cm (EF). Ela alterou para os comprimentos: 6,0 cm (GH-verde); 6,5 cm (AB-amarelo); 7,0 cm (EF-vermelho) e 7,5 cm (CD-azul), além do mais foram colocados em uma configuração de uma fachada de casa, como podem ser vistos a seguir:

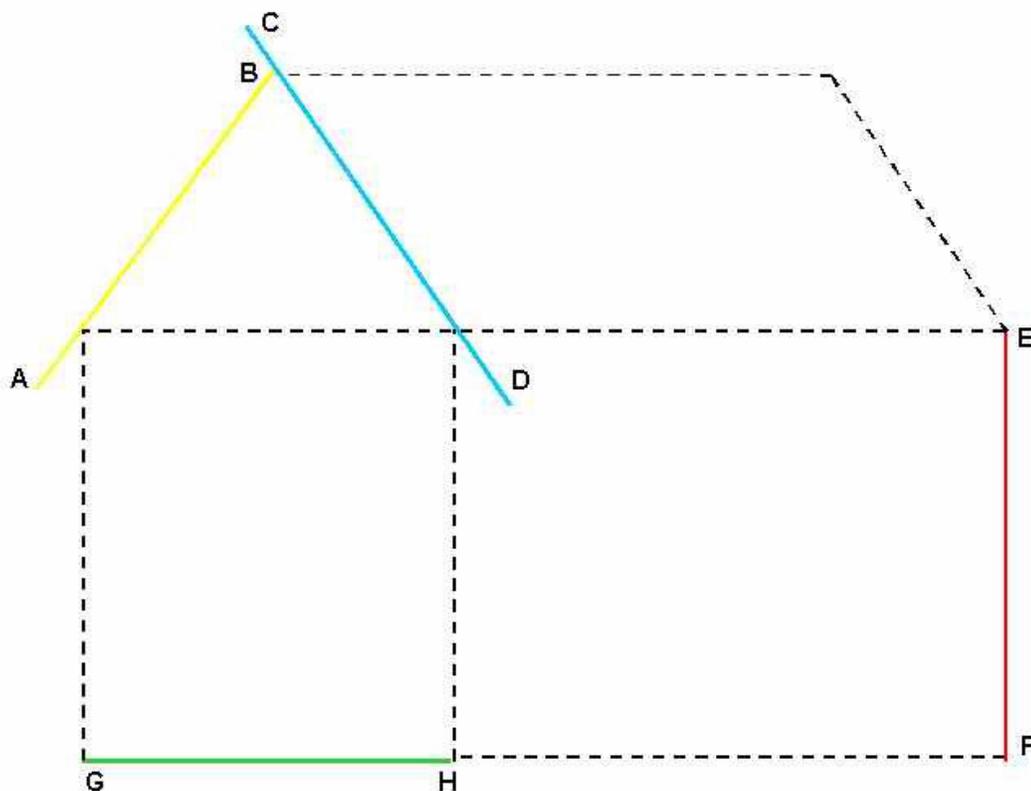


Figura 12: Segmentos de reta em uma fachada de casa

Brito (2003), ao interpretar os erros dos alunos, sugeriu que cinco sujeitos no primeiro teste devem ter indicado o caminho AB como o mais curto por influência do efeito da “projeção horizontal”:

[...], leva-nos a supor que tais alunos, ao realizarem essa escolha entre os dois caminhos mais curtos, AB e GH, consideraram o efeito da ‘projeção horizontal’ dos caminhos, o que foi previsto na análise a priori, ou seja, o comprimento da projeção do segmento sobre uma reta horizontal, [...], onde a projeção do caminho AB-amarelo é mais curta do que a do caminho GH-verde (p. 90).

Em seguida, apresentou a ilustração das respectivas projeções (horizontal e vertical) incidentes sobre os dois caminhos mais curtos (AB e GH) e os dois mais compridos (CD e EF):

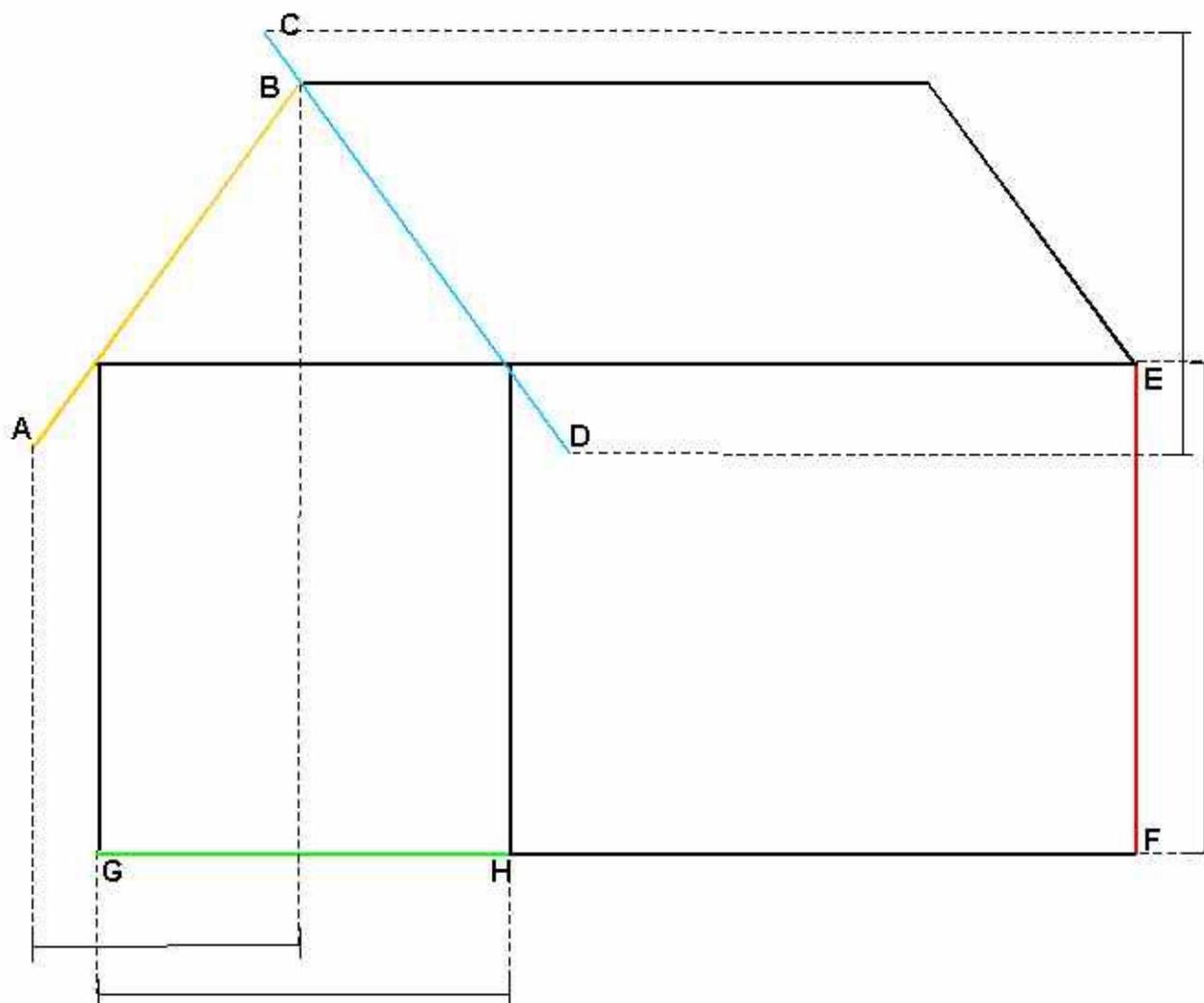


Figura 13: Fachada de casa com efeitos “projeção horizontal” e “projeção vertical”

No entanto, esses cinco alunos acertaram a resposta da atividade quando se submeteram ao uso de manipulativos. Tal fato levou a pesquisadora a admitir que, no modelo de atividade com uso de medianeiros, houve uma maior superação quanto às influências do efeito da “projeção horizontal”. Embora tenha destacado o caso de dois alunos que haviam acertado no primeiro modelo e errado no segundo.

Outro destaque salientado por Brito (2003), ao analisar as estratégias dos vinte e quatro alunos que participaram do modelo com uso de manipulativos, foi que quem se apropriou do recurso da “observação visual” errou em pelo menos um dos itens. Deste, participaram treze alunos, sete optaram pelo recurso da “sobreposição de medianeiros”, três “juntaram os palitos a serem comparados” e um não foi identificada à estratégia utilizada.

Dentre os alunos que apelaram para a visualização, segundo supôs essa pesquisadora, dois alunos ao indicarem o palito vermelho (EF) no item a – caminho mais comprido, e o palito verde (GH) no item b – caminho mais curto, consideraram o efeito da “projeção vertical” dos palitos.

Por fim, Brito (2002), ao finalizar a análise referente à primeira atividade, afirmou:

[...], percebemos que o uso de material manipulativo permitiu a ampliação das possibilidades de estratégias, além de melhorar o uso dos procedimentos de “observação visual” e “sobreposição de medianeiros”, sendo possível fazer movimentos alterando posições prototípicas e não-prototípicas. No entanto, a nossa expectativa era a de que os alunos apresentassem um maior índice de acertos no 2º teste, principalmente no item (a), pois, considerávamos que houvesse a utilização, pela maior parte dos alunos, da estratégia da “junção dos próprios palitos a serem comparados” (p. 94).

Mesmo no ambiente de materiais manipulativos, o fenômeno da visualização se sobressaiu-se, pois 13 alunos optaram por esse recurso, o que representa 50% do total dos sujeitos que participaram dessa etapa do experimento.

A segunda atividade explorada por essa pesquisadora foi composta apenas com caminhos mistos e também foi inspirada numa questão do experimento de Barbosa (2002):

Esta atividade foi inspirada em questões – propostas na seqüência elaborada, no ambiente papel e lápis, por Barbosa (2002) – que exploravam a comparação de

comprimentos entre vários tipos de curvas planas, na qual fizemos alterações aproveitando apenas dois exemplos de caminhos (AB e CD) utilizados por esse pesquisador e acrescentamos três caminhos: um segmento de reta na vertical (EF) e duas linhas poligonais abertas (GH e IJ) (BRITO, 2003, p. 97).

Em ordem crescente, os comprimentos dos cinco caminhos são: 5 cm (EF-verde); 7 cm (AB-amarelo); 8 cm (CD-azul); 9 cm (IJ-preto) e 10 cm (GH-vermelho) (ver figura 1). Diferentemente da atividade anterior, que contemplava uma diferença apenas de 0,5 cm entre as dimensões dos caminhos, já que todos eram segmentos de reta, nesta, foi de pelo menos 1,0 cm, até porque o trabalho de sobreposição se tornou bem mais difícil.

Segundo essa investigadora, os cinco caminhos foram escolhidos por permitirem apresentar respostas diferentes para o caminho mais comprido e para o mais curto, em todas as possibilidades de erros, sendo possível identificar diferentes conhecimentos mobilizados, como, por exemplo, as influências dos “efeitos”.

A mobilização do conhecimento “comparação de comprimento dos caminhos” levaria o aluno a indicar como respostas corretas: a linha poligonal aberta GH (vermelho), como caminho mais comprido e o segmento de reta EF (verde), como o mais curto. Contudo, houve um número de acertos bem menor quando comparado com a atividade anterior. Por exemplo, no ambiente papel e lápis, na primeira atividade, os acertos atingiram os percentuais 95,8 % no item “a” e 62,5 % no item “b”, enquanto nesta atividade caíram respectivamente para 25,0 % e 58,4%.

Quanto aos erros detectados na atividade, foram considerados como decorrentes das interferências visuais dos efeitos: “projeção horizontal”, “projeção vertical”, “linha imaginária”, “espaço ocupado” e “pontos mais extremos”.

Tabela 1: Levantamento dos erros nos dois modelos da 2.^a atividade do experimento de Brito (2003)

ATIVIDADE 2 – ITENS (a) (b)					
Item	Erro	Papel e lápis		Manipulativos	
		#	%	#	%
a	IJ-preto (pontos mais extremos)	12	50	13	54,2
	EF-verde (projeção vertical)	1	4,2	-	-
	CD-azul	5	20,8	-	-
b	GH-vermelho (espaço acupado, linha imaginária ou pontos mais extremos)	5	20,8	4	16,7
	IJ-preto	1	4,2	-	-
a e b	a) IJ-preto b) GH-vermelho (pontos mais extremos)	2	8,3	4	16,7
	a) IJ-preto b) EF-verde (projeção horizontal)	7	29,7	9	37,5
	a) EF-verde b) GH-vermelho (projeção vertical)	1	4,2	-	-
	a) CD-azul b) GH-vermelho (linha imaginária)	2	8,3	-	-

Observa-se que o efeito com maior número de ocorrências é o dos “pontos mais extremos”, quando o aluno teve que indicar o caminho mais comprido, com uma presença considerável no ambiente papel e lápis (50%), e mais ainda, no ambiente com uso de materiais manipulativos (54,2%). Ele também se fez presente entre os efeitos que devem ter contribuído para que 20,8 % e 16,7 % alunos, indicassem o caminho mais curto nesses respectivos ambientes.

Ao ser considerado esse efeito, as linhas seriam ordenadas segundo os comprimentos: 3,5 cm (GH-vermelho); 4,8 cm (AB-amarelo); 5,0 cm (EF-verde); 5,7 cm (CD-azul) e 7,0 cm (IJ-preto). Tomando por base a distância dos pontos mais extremos de cada caminho, GH-

vermelho é o caminho mais curto e IJ-preto é o mais comprido, como pode ser visto nas ilustrações a seguir:

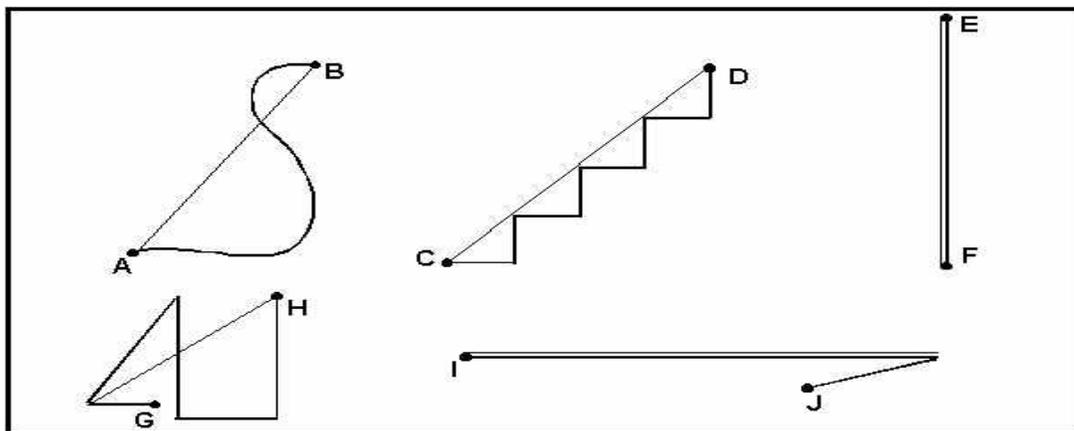


Figura 14: Efeito linha imaginária “pontos mais extremos” da 2.^a atividade do experimento de Brito (2003)

Segundo a análise de Brito (2003), a influência do efeito “pontos mais extremos”, entre os manipulativos, talvez se explique pela ausência do efeito da “projeção horizontal”, considerando que os representantes das linhas eram móveis e não tinham posições fixas. Em segundo lugar, porque constatou, durante a aplicação do teste, que os alunos recorreram apenas ao procedimento da “observação visual” ao indicar o caminho mais curto, enquanto para indicar o caminho mais comprido, além do processo anterior, ordenaram as peças de tal forma que sugeria tomar como base o efeito “pontos mais extremos”.

Pelas respostas apresentadas na tabela anterior, é possível verificar que um outro efeito que também se destacou em número de ocorrências foi o da “projeção horizontal”. Este fica evidenciado, quando são consideradas as respostas, simultaneamente, do caminho IJ-preto como o mais comprido (errada), enquanto o caminho EF-verde como o mais curto (resposta certa). Contudo, essa pesquisadora ressaltou que não descarta a possibilidade da escolha do

caminho de maior comprimento ter sido baseada na influência do efeito “pontos mais extremos”.

Por meio do efeito “projeção horizontal”, a ordem crescente dos comprimentos seria: 0,0 cm (EF-verde); 2,7 cm (AB-amalero); 3,0 cm (GH-vermelho); 4,0 cm (CD-azul) e 7,0 cm (IJ-preto). Se considerarmos rigorosamente a dimensão da projeção horizontal do caminho EF-verde, seria praticamente nula. Talvez esse seja o motivo que numa situação como esta faz com que o aluno opte pelo caminho imediatamente maior, neste caso, em indicar AB-amarelo como o mais curto e IJ-preto como o mais comprido, influenciado por esse efeito da “projeção horizontal”. A seguir, têm-se as ilustrações das projeções em cada uma das figuras da atividade:

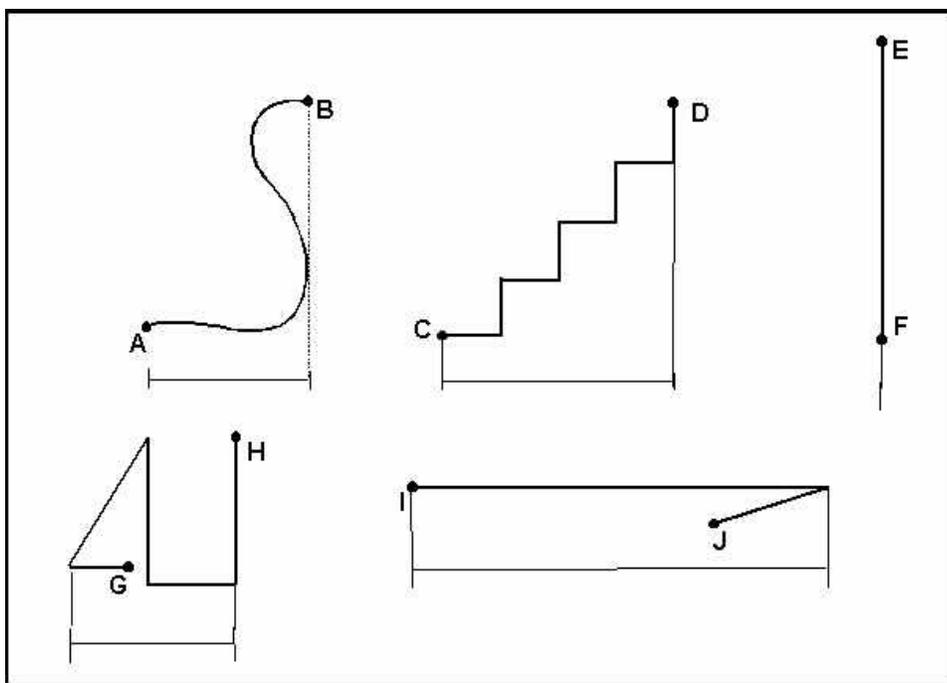


Figura 15: Efeito “projeção horizontal” da 2.^a atividade do experimento de Brito (2003)

Antes de encerrarmos as considerações sobre os efeitos na segunda atividade do experimento que estamos tratando, destacamos duas considerações assinaladas por Brito (2003). A primeira foi o caso das respostas dos alunos 5 e 22 ao escolher o caminho CD para

o item (a) e EF para o item (b), o que levou essa pesquisadora supor que tais alunos, “tenham sido influenciados pelo critério do caminho que tivesse maior ou menor número de pedaços, ou seja, o de maior ou menor número de ‘quinas’” (p. 106). Configurando-se numa manifestação da influência do efeito “associa número a comprimento”.

A segunda diz respeito à conclusão dessa autora quando comparou os dois modelos explorados, isto é, constatou uma menor influência dos efeitos no ambiente com uso de materiais manipulativos, principalmente de “projeção horizontal” e “projeção vertical”, “uma vez que os caminhos não tinham posições fixas como ocorreu no ambiente papel e lápis” (BRITO, 2003, p. 110).

Outra questão explorada por Brito (2003), a qual voltou a detectar os efeitos, foi a atividade 5. Ela foi inspirada no experimento de Barbosa (2002) e também realizou algumas mudanças. O objetivo da atividade era verificar se o aluno identificava a figura/objeto de maior perímetro, de menor perímetro e a de perímetros iguais, dentre quatro linhas fechadas (três poligonais e uma não-poligonal).

A indicação da figura/objeto C-rosa como a de menor perímetro (item b), no modelo papel e lápis, levou essa investigadora a suspeitar que alguns alunos consideraram o aspecto da “altura”, isto é, a influência da “projeção vertical”. Esta resposta errada foi a opção escolhida por 13 alunos (54,2 %) no referido modelo. Enquanto no modelo com uso de materiais manipulativos, admitiu que, pela maneira com que 6 alunos organizaram os objetos, especialmente o rosa e o verde, no item “a” eles também foram influenciados pelo efeito da “projeção vertical”, considerando que todos eles indicaram o objeto verde no item “b”.

Destacou, também, as explicações apresentadas, por dois desses alunos:

- (item-a): “Eu peguei e medi todas elas; quem é mais grande é o rosa”;
- (item-b): “Peguei, medi o amarelo; peguei o azul, medi; peguei o rosa, medi. O que é o mais menor é o verde” (aluno 27).

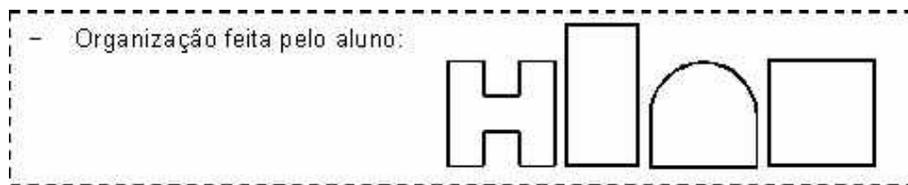


Figura 16: Organização de figuras realizadas pelo aluno

- (item-c): “Porque, assim... Eu entendi, assim: maior perímetro, maior altura” (aluno 25) (BRITO, 2003, p. 138).

Ainda como influência de efeito na quinta atividade houve a interpretação que os 6 alunos (25,0 %) que indicaram as figuras/objetos A-amarelo e B-azul no item “c” erraram por influência do “espaço ocupado”, pois ocupam um mesmo espaço na vertical e na horizontal.

A sexta e última atividade do experimento de Brito (2003) também sinalizou com a possibilidade de um evento similar a esse descrito anteriormente, no que se refere ao fenômeno do “espaço ocupado”, pois 13 alunos (54, 2%) indicaram, no modelo papel e lápis, as figuras/objetos B-amarelo e C-verde, como tendo perímetros iguais. Igual opção também ocorreu por parte de 15 alunos (62,5 %). A diferença em relação à atividade anterior é que, naquela, as indicações corresponderam às alternativas erradas, enquanto nesta as corretas. Neste caso, confirmando que os efeitos também podem favorecer as indicações de respostas corretas.

Em seguida, é possível verificar um quadro que resume as ocorrências de visualização dos eventos que estamos abordando de acordo com cada atividade.

Quadro 5: Levantamento das ocorrências/efeitos nas respectivas atividades do experimento de Brito (2003)

Identificação da Atividade (ambiente)	Descrição da ocorrência registrada e nomeação do efeito
Atividade 1 (APL) - primeira -	Ocorrência: “a indicação do caminho AB, por parte de cinco sujeitos (1,7,8,30,34) no item ‘b’ do primeiro teste, leva-nos a supor que tais alunos, ao realizarem essa escolha entre os dois caminhos mais curtos, AB e GH, consideraram o efeito da ‘projeção horizontal’ dos caminhos” (p. 90). Nomeação: “efeito da projeção horizontal”

Atividade 1 (AMM) - segunda -	Ocorrência: “supomos que os alunos 15 e 21, ao indicarem o palito vermelho no item ‘a’ e o palito verde no item ‘b’, consideraram o efeito da ‘projeção vertical’ dos palitos” (p. 93). Nomeação: “efeito da projeção vertical”
Atividade 2 (APL) - primeira -	Ocorrência: “uma outra situação ocorrida neste ambiente foi o caso dos alunos que indicaram IJ como o caminho mais comprido e, como mais curto, o caminho AB. Acreditamos que, nesta situação, esses sujeitos tenham considerado um provável efeito da projeção horizontal” (p. 106). Nomeação: “efeito da projeção horizontal”
Atividade 2 (APL) - segunda -	Ocorrência: “Analisando ainda outros casos de erros cometidos, temos o aluno que marcou os caminhos EF (item “a”) e GH (item “b”), podendo ter sido influenciado pelo critério de um provável efeito da projeção vertical, não previsto na análise a priori, bem como o aluno 21, ao escolher os caminhos CD (item “a”) e IJ (item “b”)”. Nomeação: “efeito da projeção vertical”
Atividade 2 (AMM) - terceira -	Ocorrência: “observando o desempenho dos alunos com o uso de materiais manipulativos, verificamos que o efeito ‘pontos mais extremos’ foi o que mais influenciou nas suas respostas” (p. 106). Nomeação: “efeito dos pontos mais extremos”
Atividade 2 (APL) - quarta -	Ocorrência: “Dentre esses erros, temos o caso dos alunos 5 e 22 que escolheram o caminho CD para o item ‘a’ e EF para o item ‘b’, levando-nos a supor que, nesta escolha, tenham sido influenciados pelo critério que tivesse maior ou menor de pedaços, ou seja, o de maior ou menor número de ‘quinas” (pp. 105, 106). Nomeação: Não foi atribuída
Atividade 5 (APL/AMM) (AMM) - primeira -	Ocorrência: “Um fato importante a observar é que os alunos que apresentaram a figura/objeto C-rosa para a de menor perímetro, supomos que eles além de terem sido influenciados pelos aspecto da área, podem também ter considerado o aspecto da ‘altura’, ou seja a influência da ‘projeção vertical” (p. 138). - “No teste com uso de manipulativos, de acordo com a posição os alunos (1,15, 25, 27, 30 e 34) organizaram os objetos, especialmente, o rosa e o verde, julgamos que eles podem ter considerado no item (a) não a ‘projeção horizontal’ e sim a ‘projeção vertical’, uma vez que todos eles indicaram o objeto verde no item (b)” (p. 138). Nomeação: “efeito projeção vertical”
(APL/AMM) - segunda -	Ocorrência: “Ainda com relação aos erros cometidos no item (c), observamos os alunos que erraram ao indicarem as figuras/objetos A-amarelo e B-azul como tendo perímetros iguais. Julgamos que nessa situação tenha ocorrido a influência do efeito ‘espaço ocupado” (p. 139). Nomeação: efeito “espaço ocupado”
Atividade 6 (APL/AMM) - primeira -	Ocorrência: “No entanto, supomos que alguns desses alunos indicaram, no item (b), as figura/objetos B-amarelo e C-verde como tendo perímetros iguais considerando o efeito de ‘espaço ocupado’, analogamente como ocorreu na atividade 5, quando as figuras/objetos A-amarelo e B-azul foram escolhidas como perímetros iguais por ocuparem o mesmo espaço na vertical e na horizontal” (p. 147). Nomeação: “efeito espaço ocupado”

Pelas descrições ressaltadas na tabela acima, as ocorrências verificadas que se referem apenas no primeiro teste (ambiente papel e lápis - APL) são: atividade 1 (a primeira) e atividade 2 (primeira, segunda e quarta). As ocorrências registradas apenas no segundo teste (ambiente materiais manipulativos – AMM) são: atividade 1(segunda) e atividade 2(terceira). As atividades 5 e 6 tiveram registros de ocorrências, simultaneamente, nos dois ambientes. A seguir apresentaremos um quadro sinóptico dos efeitos verificados neste experimento.

Quadro 6: Levantamento dos efeitos nas atividades do experimento de Brito (2003)

Ordem	Atividade	Efeito visual
1.º	1	“Efeito projeção horizontal”
2.º	1	“Efeito projeção vertical”
3.º	2	“Efeito projeção horizontal”
4.º	2	“Efeito projeção vertical”
5.º	2	“Efeito pontos mais extremos”
6.º	2	Nomeação não atribuída, mas que se refere a relacionar “degraus” com comprimento.
7.º	5	“Efeito projeção vertical”
8.º	5	“Efeito espaço ocupado”
9.º	6	“Efeito espaço ocupado”

Por coincidência, como no experimento de Barbosa (2002), também foram registradas nove situações de efeitos; mas, como se repetem, temos um total de cinco tipos: “efeito da projeção horizontal” (1.º e 3.º); “efeito da projeção vertical” (2.º, 4.º e 7.º); “efeito dos pontos mais extremos” (5.º); “efeito que relaciona ‘degraus’ a comprimento” (6.º) e “efeito espaço ocupado” (8.º e 9.º). Por meio do quadro acima, é possível conferir que foram registrados cinco situações de projeções, sendo duas horizontais e três verticais. É bom lembrar que no

referido estudo também foram detectados esses fenômenos visuais em situações com linhas fechadas.

O efeito da “projeção vertical” é um desmembramento do efeito da “projeção horizontal”. Ambos têm a mesma característica, isto é, resultam de uma projeção que o aluno faz dos caminhos a serem comparados.

O “efeito dos pontos mais extremos” é também uma extensão do efeito “linha imaginária”. Como foi visto anteriormente, quando Barbosa (2002) levantou a hipótese, inicial, fez referência entre os pontos mais extremos (pp. 130, 178). No entanto, os exemplos explorados sempre coincidiram em ser estes os das próprias extremidades dos caminhos. Diferentemente, Brito (2003) explorou exemplos em que o comprimento entre os pontos mais extremos não correspondia às extremidades, resultando em considerar um novo efeito (“pontos mais extremos”). Portanto, a primeira modalidade do efeito “linha imaginária” foi detectado entre as extremidades dos caminhos, enquanto a segunda modalidade ocorreu entre os pontos mais extremos dos caminhos.

O terceiro experimento do acervo é o que foi desenvolvido por Teixeira (2004), mas, como foi anunciado nas considerações gerais deste capítulo, foram poucas as contribuições no que se referem aos efeitos, porque foi uma experiência que não teve preocupação em enfatizar esses fenômenos de visualização, inclusive porque estão quase sempre associados aos erros e não houve investimento em analisar as respostas a partir dos mesmos, o que fica evidenciado a partir da assertiva da própria autora:

Vale ressaltar, neste momento, que a presente pesquisa não tem o propósito de analisar os tipos de erros cometidos pelos alunos nas atividades, mas, identificar, a partir das estratégias e instrumentos utilizados por eles, suas concepções acerca dos conceitos comprimento e perímetro (TEIXEIRA, 2004, p. 94).

Vê-se claramente que o realce principal não está no conhecimento que porventura um aluno venha a mobilizar – conectado ao erro – mas, associado aos procedimentos de resolução na busca de detectar concepções sobre os conceitos de comprimento e perímetro.

A primeira atividade do experimento de Teixeira (2004) foi retirada da 1.^a atividade da 1.^a sessão da investigação de Barbosa (2003) que está representada na página 6 deste capítulo.

No entanto, foram realizadas algumas alterações:

Uma delas foi inverter a ordem de apresentação de figuras (linhas) que, inicialmente, vinham como: AB (reta), CD (curva), EF (reta), GH (quebrada) e IJ (curva). Essa alteração foi para quebrar, um pouco, a ordem seqüencial de apresentação das linhas retas e curvas, no sentido de evitar uma possível associação entre a ordem crescente alfabética e a ordem crescente de comprimento (TEIXEIRA, 2004, p. 93).

Embora não tenha sido destacado na citação acima, no estudo original havia uma relação entre os comprimentos e as indicações das letras dos caminhos, pois IJ era o caminho de maior comprimento (8 cm), enquanto os de menor comprimento eram o CD (4 cm) e AB (5 cm), o que aumentava a possibilidade de se efetuar essa associação, embora esse evento não tenha sido verificado na análise dessa atividade, mas em outras que foi solicitado do aluno que ordenasse os respectivos caminhos:

[...], percebemos, em especial nas questões de ordenação com mais de dois elementos, que pode intervir a idéia de ordenar as figuras, segundo a ordem alfabética das letras que a simbolizam. No planejamento de atividades de sala de aula, mister se faz o uso de letras que não apresentem características de ordenação alfabética (BARBOSA, 2002, p. 179).

Na nova indicação adotada por Teixeira (2003), as linhas passaram a ter a seguinte ordem: AB – reta (4 cm); EF – reta (5 cm); GH – quebrada (6 cm); IJ – curva (7 cm) e CD – curva (8 cm).

Uma outra alteração introduzida foi que: “[...], a linha curva GH (IJ, nesta atividade) sofreu uma rotação de 90°, com o objetivo de permitir ao aluno um melhor manuseio do material de comparação durante a realização da atividade”, que, segundo a pesquisadora, escolheu-a pela “riqueza na variedade dos tipos de linhas e, principalmente, por permitir que os alunos adotem diferentes estratégias de resolução” (TEIXEIRA, 2004, p. 93).

Na análise a posteriori da primeira atividade, em que pese o uso considerável do procedimento “sobreposição de medianeiros”, ainda foi possível verificar que alguns alunos optaram pela “observação visual”.

Tabela 2: Estratégias utilizadas pelos alunos na 1.ª atividade (Teixeira, 2004)

A T I V I D A D E 1				
Estratégias utilizadas pelos alunos	Alunos do 2.º período		Alunos do 8.º período	
	Item (a)	Item (b)	Item (a)	Item (b)
Sobreposição dos instrumentos	73 %	71 %	84 %	68 %
Observação visual	21 %	27 %	9 %	21 %
Não identificamos	6 %	2 %	7 %	11 %

Mesmo que quase sempre os efeitos estão associados ao procedimento da “observação visual”, é possível que as ocorrências desses fenômenos visuais estejam relacionadas à utilização de outros recursos. Por exemplo, Teixeira (2004) relatou o caso do aluno que escreveu: “usei a haste de plástico para ver o comprimento aproximado e os comparei” (p. 96). No entendimento dessa pesquisadora, esse aluno pode ter usado a palavra ‘comprimento’, mas influenciado por eventos de visualização:

Analisando o depoimento desse aluno, verificamos que ele menciona a palavra ‘comprimento’; no entanto, ele poderia estar concebendo essa grandeza como a distância entre os pontos da figura, ou como o espaço que a figura desenhada ocupou, denominada, por Barbosa (2002), respectivamente, de “linha imaginária” e “espaço ocupado”, ou ainda, pelas “projeções horizontais e verticais” (TEIXEIRA, 2004, p. 97).

Em que pese essa suspeita, as demais respostas indicadas por esse mesmo aluno parecem sinalizar com a possibilidade de ter alcançado a compreensão do significado de comprimento, isto é, superando a concepção geométrica.

Quanto a alunos que utilizaram o recurso da “observação visual”, interpretou como, possivelmente, tendo sido:

[...] influenciados pela forma das figuras, ora porque apresentava mais dobras (degraus) e, portanto, seria a de maior comprimento, como foi o caso dos alunos 27 (2.º período) e 28 (8.º período), ora porque tinha mais curvas, como foi o caso do aluno 23 (2.º período) (TEIXEIRA, 2004, pp. 98, 99).

Essa influência que a investigadora descreveu como decorrente da forma das figuras, seja com a característica de considerar mais dobras da figura, isto é, os degraus, ou ainda, considerar as curvas da figura, entendemos que são evidências da manifestação do efeito “associa número a comprimento”.

No estudo de Barbosa (2002), essa variável de associar número a comprimento foi detectada desde a 1.^a atividade da 1.^a sessão, aliás foi prevista na análise a priori. Inicialmente, essa ocorrência foi descrita como decorrente “[...], do número de pequenos segmentos que compõem a ‘escada’, o que acarreta dificuldades no uso de instrumentos de comparação de comprimentos” (p. 88). Nessa perspectiva, estávamos sinalizando que, ao realizar a comparação, era considerada a associação entre o número de partes de segmentos como variável que determinaria o comprimento entre os caminhos. Na 3.^a atividade da 2.^a sessão, esse evento voltou a se repetir, embora, no estudo original, não tenha sido indicado. No entanto, ao analisarmos as respostas desse experimento, verificamos que elas sinalizam para ocorrência desse evento, como foi descrito anteriormente (p. 11-12).

O evento apresentado no parágrafo anterior também foi detectado no estudo de Brito (2003) e foi descrito por essa investigadora que os alunos submetidos a esse evento “[...], tenham sido influenciados pelo critério do caminho que tivesse maior ou menor número de pedaços, ou seja, o de maior ou menor número de ‘quinas’” (p. 106).

Portanto, embora sejam distintas as descrições, a característica do evento é a mesma, o que nos leva a padronizarmos a nomenclatura do mesmo e que voltaremos a tratar na etapa posterior.

Continuando esse levantamento dos eventos de visualização no experimento desenvolvido por Teixeira (2004), na atividade 2, que foi de produção e não de comparação, como todas as demais em que foram averiguados os efeitos visuais, novamente há indicação da presença de um desses eventos.

A atividade consistia em solicitar do aluno que desenhasse uma figura cujo comprimento total fosse igual à soma dos comprimentos de duas linhas (AB – segmento de reta e CD – linha curva). Ao analisar as estratégias utilizadas, essa pesquisadora registrou a ocorrência significativa de alunos (19% no 2.º período e 36% no 8.º período) que efetuaram a soma tomando outros comprimentos e não os das figuras dadas. Identificou por meio de desenhos e dos depoimentos escritos, que dois entre esses sujeitos, sendo um do 2.º e outro do 8.º período, realizaram a soma utilizando o comprimento da figura AB e o comprimento da “linha imaginária” da figura CD.

Tal ocorrência foi verificada não só porque a figura apresenta um comprimento correspondente à soma entre esses dois comprimentos, mas, pelo uso exclusivo da régua na verificação dos comprimentos das figuras dadas (TEIXEIRA, 2004, p. 106).

Foi uma constatação extremamente significativa porque esses alunos construíram uma figura considerando exatamente o comprimento do segmento AB mais a distância entre as extremidades da linha curva CD, que correspondente ao que temos denominado, até então, influência do efeito “linha imaginária”.

No entendimento de Teixeira (2004), é provável que esses alunos, que se basearam nessa influência, “tivessem uma concepção de que só é possível somar comprimentos de figuras quando estas se apresentam na forma de segmentos de retas” (p. 110).

Na sétima e última atividade do experimento dessa investigadora, há uma indicação da influência da “projeção vertical” a qual descreveremos a seguir.

A questão envolvia quatro linhas fechadas, duas poligonais e duas não-poligonais. Era formada de três itens e o aluno deveria identificar: no primeiro, a figura de maior perímetro; no segundo, a de menor perímetro e, no terceiro, as figuras que apresentavam perímetros iguais. A escolha da figura C no item “a” – maior perímetro – por parte de 3 alunos do 2.º período e 5 alunos do 8.º período, foi interpretada como resultante da influência do evento “projeção vertical”.

Quadro 7: Levantamento das ocorrências/efeitos nas respectivas atividades do experimento de Teixeira (2004)

Identificação da Atividade	Descrição da ocorrência registrada e nomeação do efeito
Atividade 1	<p>Ocorrência: “Analisando o depoimento desse aluno, verificamos que ele menciona a palavra ‘comprimento’; no entanto, ele poderia estar concebendo essa grandeza como a distância entre os pontos extremos da figura, ou como o espaço que a figura desenhada ocupou, denominada por Barbosa (2002), respectivamente, de ‘linha imaginária’ e ‘espaço ocupado’, ou ainda pelas ‘projeções horizontais e verticais’ (p. 97). Nomeações: efeitos “linha imaginária”; “espaço ocupado” e “projeções horizontais e verticais”</p>
Atividade 1	<p>Ocorrência: “Fazemos a suposição de que os alunos que utilizaram a estratégia da observação visual, possivelmente foram influenciados pela forma das figuras, ora porque apresentava mais dobras (degraus) e, portanto, seria a de maior comprimento como foi o caso dos alunos 20 (2.º período) e 28 (8.º período), ora porque tinha mais curvas, como foi o caso do aluno 23 (2.º período) (pp. 98, 99). Nomeação: “Não foi atribuída”</p>
Atividade 2	<p>Ocorrência: “Dentro desse percentual, pudemos identificar, através dos desenhos e dos depoimentos escritos, que dois deles, respectivamente, dos 2.º e 8.º períodos, por exemplo, efetuaram a soma utilizando o comprimento da figura AB e o comprimento da ‘linha imaginária’ da figura CD” (p. 106). Nomeação: efeito “linha imaginária”</p>
Atividade 7	<p>Ocorrência: “Acreditamos, ainda, que na comparação dessas figuras os alunos tivessem sido influenciados pelo critério área, quando apontaram a figura B para o item (a), e pelo critério ‘projeção vertical’, quando escolheram a figura C para esse mesmo item, como foram os casos dos alunos 3; 10; e 34, do 2.º período, e dos alunos 1; 9; 14; 25; 27, do 8.º período” (pp. 160, 161). Nomeação: efeito “projeção vertical”</p>

Dentre os experimentos que estão sendo considerados nesta etapa, este foi o que teve o menor número de registros de efeitos, mas por razões que já foram anteriormente esclarecidas. Não é demais lembrar que se a análise das respostas tivesse voltada para detectar os erros dos alunos, talvez os efeitos tivessem vindo à tona de forma mais significativa.

Após esse levantamento das ocorrências de visualização verificadas no experimento de Teixeira (2004), expostas no quadro anterior, temos abaixo o resumo efeitos registrados em cada atividade.

Quadro 8: Levantamento dos efeitos nas atividades do experimento de Teixeira(2004)

Ordem	Atividade	Efeito visual
1.º	1	Efeitos: “linha imaginária”, “espaço ocupado” e “projeções horizontais e verticais”
2.º	1	Nomeação não atribuída, mas que se refere a relacionar “degraus” com comprimento.
3.º	2	“Efeito linha imaginária”
4.º	7	“Efeito da projeção vertical”

Foram poucas as situações de efeitos registradas, isto é, apenas quatro, mas com uma boa variedade de efeitos: “efeito da linha imaginária” (1.º e 3.º); “efeito do espaço ocupado” (1.º); “efeito projeção horizontal” (1.º); “efeito projeção vertical” (1.º e 4.º) e “efeito que relacionou ‘degraus’ a comprimento” (2.º). Mister se faz assinalar que na primeira situação consta o registro de quatro tipos de efeitos, porque a pesquisadora admitiu que eles poderiam ter contribuído na resposta do aluno, embora não distinguiu exatamente quem poderia exercer maior influência.

O quarto e último experimento que também fez alusão a um tipo de efeito visual foi o de Souza (2004), embora tenha se restringido a uma única ocorrência. Este pesquisador, ao analisar protocolos de uma atividade envolvendo os conceitos de perímetro e área, desenvolvida com alunos de turmas das 5.^a série do Ensino Fundamental da rede pública de Pernambuco, levantou a suposição que 43,9% dos alunos não conseguiram diferenciar as duas grandezas exploradas. Além de apresentar outras possíveis causas também assinalou que poderiam estar associando “uma concepção em que a forma e a grandeza se identificam no sentido de o ‘mais cheio’ ou o mais ‘espichado’, ter maior área” (p. 65).

As expressões ‘mais cheio’ e ‘mais espichado’ que foram adotadas por Souza (2004) são modalidades distintas de fazer menção a influências do efeito “espaço ocupado”. Ele inclusive destacou que estudos como os de Barbosa (2002) e Duarte (2002) “têm mostrado como a ‘forma’ das figuras afeta os conceitos de área e perímetro” (p. 65).

O que foi descrito sobre os quatro experimentos constitui basicamente o que se dispõe do acervo empírico sobre os fenômenos visuais dessa equipe de pesquisa. É evidente que consta essencialmente aspectos detectados e expostos por cada um dos pesquisadores, excetuando-se a terceira atividade do experimento de Barbosa (2002), em que acrescentamos alguns comentários a partir de respostas de alunos que participaram da pesquisa e que não foi incluído no trabalho original. É pertinente realçar que nesse estudo, especialmente nas análises das primeiras atividades, não se tinha maiores esclarecimentos sobre esses eventos de visualização, contribuindo de alguma forma, para não se explorar melhor possíveis outras pistas dessas ocorrências. É no trabalho de Brito (2003) que os cuidados com esses fenômenos foram mais acentuados. Por fim, o de Teixeira (2004) e o de Souza (2004), que as naturezas das investigações não favoreciam uma melhor análise de tais fatos, mas ainda foram registrados alguns.

Cabe lembrar que os três últimos vieram corroborar com o estudo que originou as primeiras descobertas desses eventos de visualização e que novos estudos poderão contribuir para que alguns outros efeitos sejam detectados.

3.4 Ajustando as denominações dos efeitos visuais

Há necessidade de se ajustar as terminologias atribuídas aos efeitos visuais, até porque nas primeiras descobertas não se esperavam os desdobramentos que viriam emergir na continuidade dos estudos e que trouxeram algumas extensões desses eventos.

O fato é que nos sentimos quase na obrigação de efetuarmos uma padronização quanto às nomenclaturas a serem adotadas, não só por termos detectados as primeiras ocorrências, mas também por estarmos executando este trabalho que delimita um mapeamento do que até então foi produzido do acervo experimental. Além do mais, porque a cunhagem²⁴ é uma necessidade para que avance o conhecimento, pois imperativo a este, é que os entes tenham nomes para que haja comunicação.

Apresentaremos, a seguir, um resumo sobre os efeitos visuais de acordo com os estudos em que foram detectados pela 1.^a vez. É importante lembrar que a terminologia usada é a que foi registrada originalmente.

Quadro 9: Levantamento sobre os estudos em que foram detectados efeitos pela 1.^a vez

Efeito visual	Estudo em que foi detectado pela 1.^a vez
“Efeito da extensão horizontal”	Barbosa (2002)
“Efeito que relacionou ‘degrau’ a comprimento”	Barbosa (2002)
“Efeito da linha imaginária”	Barbosa (2002)
“Efeito do espaço ocupado”	Barbosa (2002)
“Efeito da projeção vertical”	Brito (2003)
“Efeito dos pontos mais extremos”	Brito (2003)

²⁴ Entenda-se cunhagem como o processo de cunhar, isto é, de atribuir um nome a um ente que ainda não recebeu.

Preferimos efetuar pequenos ajustes na terminologia, mas, quase sempre, respeitamos as nomenclaturas adotadas nos trabalhos originais. Vejamos no quadro abaixo como ficou cada uma delas:

Quadro 10: Paralelo entre as denominações atribuídas aos efeitos visuais

Denominação anterior	Denominação atual
“Efeito da extensão horizontal”	Efeito “projeção horizontal”
“Efeito que relacionou ‘degrau’ a comprimento”	Efeito “associa número a comprimento”
“Efeito da linha imaginária”	Efeito “linha imaginária interextremidades”
“Efeito do espaço ocupado”	Efeito “espaço ocupado”
“Efeito da projeção vertical”	Efeito “projeção vertical”
“Efeito dos pontos mais extremos”	Efeito “linha imaginária interextremos”

Pelas denominações expostas acima, percebe-se que alguns efeitos possuem características comuns. Portanto, é possível classificá-los de acordo com os seguintes grupos: “efeitos projeções”; “efeitos linhas imaginárias”; “efeitos associações” e “efeitos espaços ocupados”, como mostra o quadro abaixo:

Quadro 11: Grupos dos efeitos

Grupos	Efeitos
“Efeitos projeções”	Efeito “projeção horizontal” Efeito “projeção vertical”
“Efeitos linhas imaginárias”	Efeito “linha imaginária interextremidades” Efeito “linha imaginária interextremos”
“Efeitos associações”	Efeito “associa número a comprimento”
“Efeitos espaços ocupados”	Efeito “espaço ocupado”

Aproveitando e ampliando o que foi apresentado na introdução desta tese podemos dizer que os “efeitos projeções” estão associados a uma escolha que o aluno estabelece a

comparação tomando por base apenas as extensões horizontais ou verticais das linhas, no lugar de considerar todo o comprimento dos respectivos entes geométricos a serem comparados. Enquanto os “efeitos linhas imaginárias” estão associados a uma escolha a qual o aluno realiza a comparação considerando as extensões que ligam as extremidades ou os pontos mais extremos das linhas que deverão ser comparadas. Já os “efeitos associações” dizem respeito a uma escolha que o aluno efetua a comparação entre linhas por meio de alguma associação que relaciona como uma variável mais importante que o comprimento em si. E os “efeitos espaços ocupados” dizem respeito a uma escolha que o aluno efetua a comparação considerando espaços de envolturas ou nas proximidades dos entes geométricos a serem comparados.

É importante esclarecer que, quanto ao grupo dos “efeitos linhas imaginárias”, os que foram cunhados por “linha imaginária interextremidades” estão associados aos comprimentos entre os pólos das linhas, enquanto os que foram denominados por “linha imaginária interextremos” estão associados aos comprimentos entre os pontos mais extremos, inclusive os das extremidades, quando for o caso. Adotamos essa nova convenção com o propósito de melhor caracterizar cada um dos efeitos, restaurando a expressão “linha imaginária” para cada um das duas situações, além de completarmos com termos que procuram resgatar o significado original dos exemplos em que foram detectados, isto é, no primeiro caso que se relacionavam as situações que envolviam as distâncias entre extremidades dos caminhos, enquanto no segundo caso, as distâncias entre os pontos mais extremos dos caminhos, incluindo aqueles.

Quanto a esse conhecimento mobilizado que está associado a relacionar ‘degraus’/‘partes’ a comprimento, fizemos a opção em cunhar por efeito “associa número a comprimento”. No caso particular, refere-se à associação do número dos “degraus”/“partes” com o comprimento do caminho considerado.

Em que pese a fonte principal da descoberta dos eventos de visualização intitulados como efeitos visuais, terem sido os erros, também vimos que tais fenômenos podem estar subjacentes a respostas tidas como certas. Um exemplo que podemos destacar é o que foi verificado no experimento de Brito (2003) o qual foi anteriormente descrito. É uma sinalização de que resolver corretamente uma atividade não significa, necessariamente, mobilização correta do conhecimento. É uma situação bem mais difícil de acontecer, mas não pode ser desconsiderada sua possibilidade de ocorrência.

Mesmo que as atividades as quais foram detectados esses fenômenos de visualização explorassem conceitos relacionados a comprimento – campo das grandezas – eram disponibilizadas aos alunos figuras – campo geométrico. Dessa forma, a evocação da visualização surgia como uma necessidade intrínseca para a resolução das questões.

Dizendo de outra forma, o que foi dito no parágrafo anterior é que ao ser solicitado dos alunos que estabelecesse comparações de comprimento entre entes geométricos, estes, necessariamente precisavam ser visualizados. Assim, começamos a perceber que muitos dos erros extrapolavam os conhecimentos da grandeza comprimento em si, remetendo à visualização.

Por último, é pertinente ressaltar que temos expectativas que outros fenômenos de visualização poderão ser detectados, não só no experimento que estamos desenvolvendo, mas em futuros trabalhos que porventura venham a ser efetuados e que tenham como propósito investigar esses eventos visuais.

**CAPÍTULO 4 – DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO
E DA SEQÜÊNCIA DE
ATIVIDADES**

4.1 Introdução

Este capítulo trata da descrição do nosso experimento e da seqüência de atividades. Está composto de três etapas: a primeira que caracterizamos nossa amostra; a segunda etapa em que destacamos a aplicação da seqüência de atividades; por último, temos a terceira etapa, na qual efetuamos a descrição da seqüência de atividades.

Dentre as considerações mais gerais do experimento, queremos destacar, inicialmente, que as atividades exploradas não foram elaboradas com o objetivo de ensino; ou seja, não tivemos interesse em nenhuma natureza de intervenção pedagógica, mas em tentar verificar as influências dos eventos de visualização nas situações exploradas. Nossa intenção foi detectar efeitos visuais a partir de atividades que tinham como propósito levar o aluno a estabelecer comparações de comprimentos, sem fazer uso de medidas. As referidas atividades foram divididas em cinco grupos que serão descritos no item 4.4.

O experimento foi desenvolvido por meio de uma única sessão, e a análise ocorreu em dois momentos: o primeiro, que caracterizamos por análise preliminar, e o segundo, em que foi realizada a análise posterior das atividades, após a aplicação da seqüência adotada. Portanto, foram os protocolos dos alunos que se tornaram os nossos instrumentos de análise.

4.2 Caracterização da amostra

Participaram do experimento 28 alunos de uma turma de 4.^a série do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Campina Grande, no estado da Paraíba, situada num bairro da periferia da cidade. Esses alunos são oriundos de famílias de baixa renda que habitam nos arredores da escola.

A faixa etária variou de 9 até 14 anos. Quanto a essas idades extremas só tivemos um aluno para cada caso. As demais idades variaram da seguinte forma: dez alunos com 10 anos; oito alunos com 11 anos; seis alunos com 12 anos e dois alunos com 13 anos. Considerando esse aspecto da idade pelo menos os de 12 anos em diante estão numa média de idade superior ao que é mais padrão em se tratando de uma turma de 4.^a série, isto é, geralmente um aluno cursa essa série entre 9 e, no máximo, 11 anos. Dessa forma, nove alunos estão com uma faixa etária elevada para cursar essa série.

Em virtude de termos desenvolvido projetos nessa escola pública e termos um bom relacionamento com professores e com a direção, fizemos opção em efetuar nosso estudo investigatório nesse estabelecimento escolar.

A série escolhida decorreu por considerarmos tratar-se de um momento que o aluno já tem vivenciado experiências com conhecimentos de geometria que, de alguma forma, favorecem habilidades para resolver atividades como as que foram propostas na seqüência de atividades. Um segundo aspecto, que também estimulou nossa preferência, procedeu de ser uma série em que os alunos de escola pública apresentam um pouco mais de facilidade para descrever como conseguiu descobrir suas respectivas respostas. Como terceiro aspecto dessa opção, foi o fato dos experimentos de Barbosa (2002) e Brito (2003), principais estudos em que foram detectados os efeitos visuais, também ocorreram com turmas de 4.^a séries.

4.3 Aplicação da seqüência de atividades

A aplicação da seqüência de atividades ocorreu no dia 22 de maio de 2006, no turno da manhã, no horário de funcionamento da turma de 4.^a série. Foi realizada pelo pesquisador, mas contou com a colaboração da professora efetiva da referida série.

O tempo de aplicação foi de 1h40min, incluindo as orientações iniciais, distribuição e recolhimento do material. O aluno que entregou as atividades em menos tempo foi de 27 min, enquanto o que mais demorou atingiu 85 min. No anexo B é possível verificar a tabela que discrimina a distribuição do tempo gasto pelos alunos.

4.4 Descrição da seqüência de atividades

Esta seqüência de atividades foi elaborada visando, sobretudo, criar situações para tentar verificar efeitos visuais detectados em estudos anteriores de Barbosa (2002), Brito (2003) e Teixeira (2004), desenvolvidos em pesquisas do Mestrado em Educação da Universidade Federal de Pernambuco que abordaram sobre a grandeza comprimento. Tivemos a expectativa que novos efeitos fossem verificados considerando dois motivos: primeiro, porque a partir dos estudos supracitados passamos a ter maior vigilância quanto a possíveis influências visuais, inclusive por termos efetuados maiores investimentos teóricos específicos sobre percepção e visualização; uma outra causa, é que inserimos atividades elaboradas com variáveis específicas para detectar tais efeitos.

A principal diferença destas atividades em relação às usadas nesses estudos é que foram todas de comparação entre linhas abertas e sempre constituídas de apenas duas figuras. Nos experimentos anteriores, nas atividades em que se exploraram linhas abertas, ora eram de comparação, ora eram de produção. Quando ocorreu de se explorar situações com duas

figuras foi solicitado do aluno que elaborasse um novo caminho que fosse mais comprido do que tinha menor comprimento e mais curto do que apresentava maior comprimento, isto é, atividade de produção (BARBOSA, 2002, pp. 92, 117, 132). Nesse caso, o aluno era solicitado a mobilizar uma nova variável, a operação transitiva, gerando uma dificuldade a mais. O outro tipo de atividade com duas figuras foi solicitado ao aluno que operasse com a grandeza comprimento (TEIXEIRA, 2004, p. 101-104). Portanto, não temos maiores informações relacionadas a atividades específicas com pares de figuras e que se restrinjam a comparação entre elas, que nos ajudaria enriquecer mais as discussões, sobretudo, na interpretação das respostas. No entanto, admitimos que o trabalho com duplas de figuras nos permitem melhor esclarecimentos sobre os efeitos.

As influências visuais (“projeção horizontal”, “projeção vertical”, “linha imaginária interextremidades”, “linha imaginária interextremos”, “associa número a comprimento” e “espaço ocupado”) vieram à tona nos estudos supracitados, sendo detectados quase unicamente associados aos erros. Entretanto, isso não significa que estejam ausentes quando os acertos se manifestam, até mesmo porque, da mesma forma que os efeitos podem influenciar no sentido de dificultar a visualização das dimensões dos “objetos geométricos”, podem, por outro lado, favorecer tal diferenciação, estejam as figuras dispostas em posição prototípica ou não. Diante dessa possibilidade, fomos atentos, na análise dos protocolos, quanto a possíveis influências dos efeitos, mesmo quando o aluno realizou corretamente uma atividade.

As hipóteses iniciais apontam que os efeitos decorrem de influências visuais. Por esse motivo que a seqüência de atividades está composta por questões que evocam o uso do recurso visual, na modalidade de situações do ambiente papel e lápis. Assim sendo, o procedimento de resolução está quase restrito a tal recurso, pois mesmo que o aluno também pudesse se servir de

algum artifício como o uso dos dedos, lápis ou borracha, entendíamos que se tratava de uma possibilidade remota. No entanto, esta estratégia foi detectada por Brito (2003):

Outro fato importante a observar é que, dentre os alunos que utilizaram a estratégia de sobreposição de medianeiros, se verifica, com base nas anotações realizadas na tabela 17 do anexo 1, que 4 alunos não usaram os medianeiros disponíveis na caixa de ferramentas, mas, outros tipos, tais, como os dedos das mãos e lápis, recursos não previstos na análise a priori (p. 93).

A seqüência se compôs por uma única sessão composta com onze atividades. Ao final de cada atividade, inserimos uma pergunta complementar sobre como descobriu a referida resposta.

As atividades foram distribuídas em cinco grupos de acordo com as comparações a serem estabelecidas: o primeiro grupo com três atividades em que as comparações ocorreram apenas entre segmentos de reta; o segundo grupo com duas atividades, sendo uma comparação entre um segmento de reta e uma linha poligonal aberta, e a outra, entre um segmento de reta e uma linha curva; o terceiro grupo constituído por três atividades cujas comparações foram apenas entre linhas poligonais abertas; o quarto grupo formado por duas atividades, em que as comparações foram semelhantes ao do segundo grupo, isto é, ocorreram entre caminhos mistos, sendo que nestas situações foram sempre entre uma linha poligonal aberta e uma linha curva e o quinto grupo composto apenas por uma atividade que explorou comparação entre duas linhas curvas. Resumindo, podemos dizer que as comparações exploraram apenas o formato de linhas abertas nas três modalidades: retas, “quebradas” e curvas.

Temos a seguir um quadro em que estão esquematizados os aspectos gerais das atividades que foram propostas:

Quadro 12: Resumo dos aspectos gerais das atividades

Atividade	Grupo	Aspectos gerais das atividades
1	1.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de dois segmentos de reta com comprimentos distintos e posições prototípicas (disposição horizontal).
2	1.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de dois segmentos de reta com comprimentos distintos e posições prototípicas (disposição vertical).
3	1.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de dois segmentos de reta com comprimentos distintos e posições não-prototípicas (disposição oblíqua).
4	2.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de um segmento de reta e uma linha poligonal aberta, ambas com posição não-prototípica (disposição oblíqua).
5	2.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de um segmento de reta e uma linha curva aberta, ambas com posição não-prototípica (disposição oblíqua).
6	3.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de duas linhas poligonais abertas, ambas com posição prototípica.
7	3.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de duas linhas poligonais abertas, ambas com posição prototípica.
8	3.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de duas linhas poligonais abertas, ambas com posição prototípica.
9	4.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de uma linha poligonal aberta e uma linha curva aberta, ambas com posição prototípica.
10	4.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de uma linha poligonal aberta e uma linha curva aberta, ambas com posição não-prototípica.
11	5.º	- Comparação entre comprimentos ('mais curto') de duas linhas curvas, ambas com posição prototípica.

Na elaboração dessas atividades, tivemos cuidado na seleção das linhas quanto aos seguintes aspectos: o formato das linhas; a posição de cada uma; a maneira como foram dispostas no espaço e os respectivos comprimentos. Tais preocupações visavam possibilitar, por meio das diferentes respostas e procedimentos, que os alunos apresentassem a identificação de conhecimentos mobilizados utilizada na resolução das atividades, considerando que, a esse respeito, Perrin-Glorian (1995) evidencia que “os conhecimentos

colocados em jogo ou elaborados numa situação vão depender da escolha das variáveis didáticas” (p. 86).

Esses aspectos considerados foram baseados nas sugestões apresentadas por Barbosa (2002) e Brito (2003) que também foram seguidas por Teixeira (2004). Esses pesquisadores adotaram, para comparação entre segmentos de reta, a diferença de comprimento de um para outro em torno de 0,5cm. Para as demais situações em que envolviam comparações entre segmentos de reta com linhas poligonais abertas ou linhas curvas, ou ainda, entre essas duas últimas, a diferença utilizada era, no mínimo, por volta de 1,0cm. São diferenças consideradas apropriadas para o estabelecimento das comparações entre caminhos com essas medidas, mesmo que se evoque a sobreposição de medianeiros ou não. Se as diferenças entre as respectivas linhas forem bastante grandes ou, inversamente, bem pequenas, a comparação perde o sentido. No primeiro caso o aluno facilmente identificaria a mais comprida, ou a mais curta, dependendo do que fosse solicitado. No segundo caso, o recurso da visão deixaria de ser viável, restando apenas o uso de medianeiro ou de instrumento de medida, o que descaracterizaria o que estamos pretendendo.

Tivemos o cuidado de trabalhar com dimensões de linhas numa faixa entre 6,0cm e 8,5cm para os segmentos de reta, enquanto para as demais linhas com faixa de comprimento entre 6,0cm e 12,0cm. Entendemos que esses comprimentos são quase sempre adotados nas atividades dos livros didáticos e também no trabalho em sala de aula, até porque como as atividades são desenvolvidas na disposição retrato, as figuras têm dimensões adaptadas para um micro-espaco²⁵ como uma folha de papel com dimensões de 210mm X 297mm (Tipo A4), ou com medida aproximada.

²⁵ O micro-espaco está sendo considerado aquele delimitado por dimensões correspondentes as folhas de papel, folhas de caderno, páginas de livro; enfim, poderíamos inserir também as dimensões das cartolinas e outros papéis que estão categorizados como material escolar.

Até que ponto o alerta de Piaget quanto aos números perceptuais²⁶ poderia ser transposto para as grandezas? Poderíamos falar em “medidas de grandezas perceptuais”? Parece-nos que sim, nas situações em que não exista uma proporcionalidade entre os comprimentos a serem comparados e as respectivas diferenças entre eles. Por exemplo, se fosse uma comparação entre quatro caminhos retos em que tivesse comprimentos respectivos de 1,0cm; 2,0cm; 3,0cm e 4,0cm, com a diferença entre eles de 1,0cm, tornam-se bem visíveis quando comparados. Neste caso, se enquadrariam como “medidas de grandezas perceptuais”, tornando-se entes geométricos com medidas inadequadas para o estabelecimento das situações de comparação, como as que estamos propondo. O outro extremo é usar essa mesma diferença para quatro caminhos com comprimentos superiores a 15,0cm, cujo apelo para comparação visual praticamente perde o sentido. Portanto, essas proporcionalidades são nuanças que também foram consideradas.

Nos estudos dos pesquisadores que estamos nos baseando, os caminhos eram ilustrados com indicações de letras nas proximidades das extremidades. Tal prática trazia inconveniência de dois aspectos: associações do tipo primeiras letras (AB, BC) com menor comprimento e últimas letras (TU, XZ) com maior comprimento; um outro cuidado era colocar as letras indicativas dos caminhos um pouco deslocadas das extremidades para não passar uma certa idéia de “extensão” do mesmo, dando a impressão do caminho ser maior que o respectivo comprimento, como mostra as indicações a seguir:

²⁶ Números perceptuais foram considerados por Piaget como os que podem ser distinguidos por meio da percepção (olhadela). São inseridos nessa classificação números pequenos até 4 ou 5 unidades.

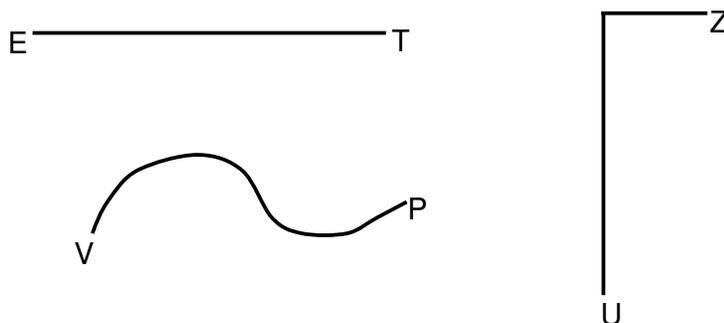


Figura 17: Ilustrações de figuras com indicações de letras nas proximidades das extremidades

Em decorrência dessas preocupações, optamos por ilustrar as linhas com duas cores distintas (azul e vermelha), inclusive para evitar alguma relação visual com outros elementos que compõem o ambiente²⁷ da atividade, sejam nos espaços destinados à pergunta ou a resposta. Aliás, tivemos o cuidado de não inserir no ambiente nenhum tipo de traço que contornasse tais espaços e nem o do cabeçalho, para não haver nenhuma interferência nesse sentido.

Um outro cuidado que tivemos foi evitar que as respostas estivessem associadas a alguma seqüência padronizada, isto é, a linha mais curta fosse, por exemplo, sempre a de cor vermelha ou azul, ou ainda, azul vermelha azul vermelha, ou vice-versa. O quadro abaixo mostra a seqüência das respostas de acordo com as cores das linhas, que estão distribuídas igualmente, sendo cinco para cada cor:

Quadro 13: Seqüência das respostas nas atividades

Atividades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Respostas	A*	V**	V	A	V	A	A	V	A	V	V

*A → Linha Azul

**V → Linha Vermelha

²⁷ Estamos considerando ambiente como o espaço do papel – micro-espaço – em que está inserida a atividade com as respectivas figuras.

Em virtude de estarmos interessados em verificar efeitos visuais e como nos restringimos à passagem do quadro geométrico ao quadro das grandezas, exploramos apenas situações de comparação de figuras sem o emprego de medidas.

No modelo adotado – papel e lápis – não foi disponibilizado nenhum material especial, exceto os convencionais – lápis grafite e a borracha branca. Assim, o aluno se encontrou nas condições do seu cotidiano da sala de aula. A pergunta básica e padrão para o aluno responder consistiu em que o mesmo identificasse o caminho mais curto. Como foram apenas dois caminhos, não perguntamos o caminho mais comprido; até porque, ao identificar o mais curto, esse outro foi simultaneamente identificado. Ao desconsiderar a alternância de perguntas, evitamos o risco de algum aluno responder um problema influenciado pelo que foi solicitado numa atividade anterior.

Procuramos sistematizar a análise preliminar em dois momentos: o primeiro, o qual procuramos apresentar os objetivos e justificar a escolha da atividade, descrevendo sobre as variáveis e o cenário em que está inserida; o segundo momento, destinado a prever as possíveis respostas que poderão ser apresentadas pelos alunos, complementando com rápidos comentários sobre os procedimentos que se constituem nos meios de validação a serem adotados.

Quanto à análise preliminar seguirmos uma sistemática de tabela considerando os seguintes elementos: modelos de atividades, respostas, conhecimentos mobilizados e procedimentos. O quadro abaixo mostra os elementos apreciados em cada atividade:

Quadro 14: Elementos considerados na análise das respostas

Elementos considerados			
Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução

Acreditamos que essa ordem disponibilizará ao leitor uma melhor compreensão dos elementos envolvidos; inclusive, porque na disposição como estão – da esquerda para direita – traduz o que ocorreu em cada momento: no início foi disponibilizado à indicação correspondente ao modelo de atividade, que se restringiu ao ambiente papel e lápis; no segundo momento o aluno expôs suas respostas; nas terceiras e quartas etapas coube ao pesquisador extrair, pela análise das respostas, quais os conhecimentos mobilizados e os procedimentos adotados pelo aluno para, em seguida, efetuar os respectivos registros.

No lugar de estratégias de resolução, preferimos adotar a expressão procedimentos de resolução por entender que caracteriza melhor o processo de validação utilizado pelo aluno. Por outro lado, os conhecimentos mobilizados constituem-se como as estratégias de mobilização que o aluno aciona para resolver cada atividade. Cabe esclarecer que continuaremos adotando a nomenclatura “estratégia de resolução”, quando fizermos menção aos estudos anteriores que trataram sobre os efeitos visuais.

Para facilitar um melhor entendimento da tabela, apresentamos a que usamos na análise preliminar da 3.^a atividade (p. 193).

Quadro 15: Modelo de tabela adotado na análise preliminar da atividade 3

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Vermelho	- Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Azul	- Efeito “projeção horizontal”.	- Observação visual. - Utilização de artifício.
	- Azul	- Efeito “projeção vertical”.	- Observação visual. Utilização de artifício.
	- Azul	- Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual.

Quanto ao modelo de atividade, consta apenas o do papel e lápis, pois exploramos um único ambiente. Em relação às respostas, o aluno poderia indicar: o caminho azul ou o

caminho vermelho. No caso dos conhecimentos mobilizados, estão indicadas quatro possibilidades: uma associada à mobilização correta – comparação de comprimento dos segmentos; três associadas a mobilizações incorretas – efeito “projeção horizontal”, efeito “projeção vertical” e interferência “associa posição a comprimento”. A denominação “interferência” nesta última categoria em vez de “efeito” se justifica por entendermos que estamos tratando de uma categoria ainda não verificada em outros experimentos. Em se confirmando eventos associados a essa categoria é que passaremos a usar o termo “efeito”. No que tange aos procedimentos estão sendo esperados que os alunos se utilizem da “observação visual” e da “utilização de artifício”. Consideramos pertinente destacar a diferença atribuída aos dois usos de “observação visual”. No primeiro caso, usamos tal expressão como uma etapa da operação cognitiva da visualização. No segundo caso, usamos como uma categoria de procedimento adotado pelo aluno para descobrir a linha mais curta em cada respectiva atividade.

É importante ressaltar que os conhecimentos mobilizados e os procedimentos de resolução estão sendo apresentados nas tabelas como categorias *a priori*. Mesmo que tenhamos previsto outras que ainda não foram detectadas não descartamos a possibilidade de surgir alguma outra natureza de mobilização.

A interpretação das possíveis respostas será enriquecida por meio da introdução de alguns resultados de estudos anteriores, além de complementarmos com breves inserções sobre aspectos abordados nos capítulos iniciais desta tese.

No próximo capítulo, trataremos das atividades com suas respectivas análise preliminar e análise posterior. Lembrando que primeiro serão apresentadas as atividades e, depois, virão os comentários das análises. No caso das três primeiras que compõem o primeiro grupo, faremos as respectivas apreciações conjuntamente.

**CAPÍTULO 5 – APRESENTANDO E
ANALISANDO AS
ATIVIDADES**

5.1 Apresentação da primeira atividade

ATIVIDADE 1

Observe os caminhos abaixo:



Marque com um X o caminho mais curto:

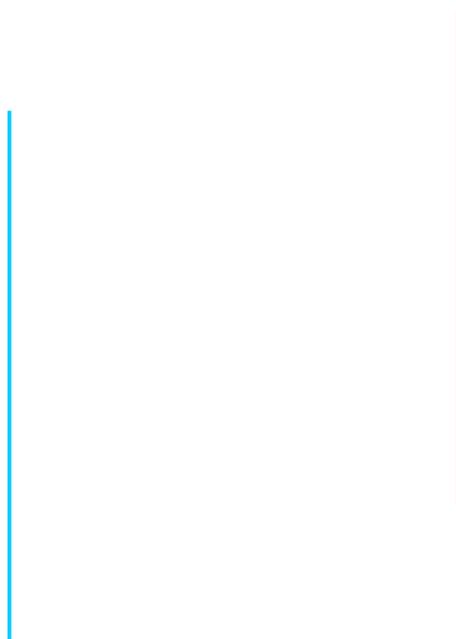
azul vermelho

Explique como você descobriu:

5.2 Apresentação da segunda atividade

ATIVIDADE 2

Observe os caminhos abaixo:



Marque com um X o caminho mais curto:

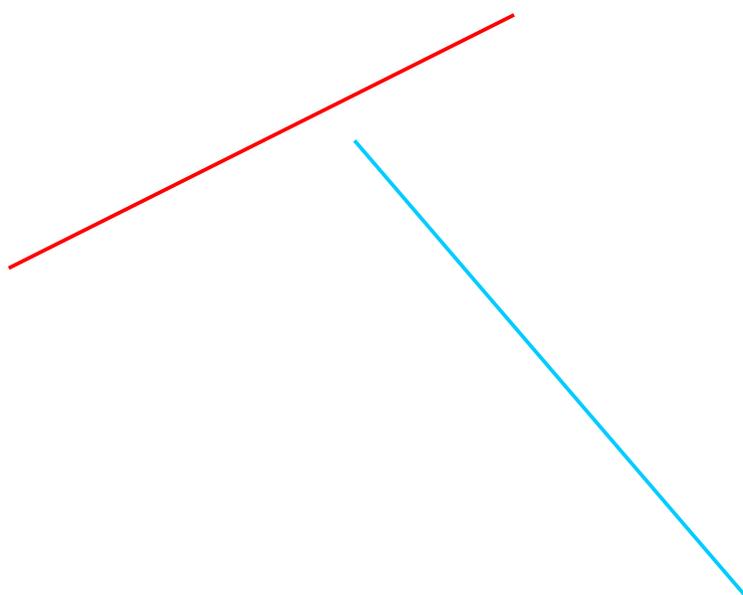
azul vermelho

Explique como você descobriu:

5.3 Apresentação da terceira atividade

ATIVIDADE 3

Observe os caminhos abaixo e responda:



Marque com um X o caminho mais curto:

azul vermelho

Explique como você descobriu:

5.3.1 Análise preliminar das atividades 1, 2 e 3

5.3.1.1 Introdução

Os objetivos da realização das atividades - 1, 2 e 3, foram verificar se algum efeito visual poderia se manifestar considerando que as comparações ocorreriam apenas entre pares de segmentos de reta, na primeira, dispostos horizontalmente; na segunda, verticalmente e na terceira, de forma inclinada. Portanto, a posição era uma variável importante que pretendíamos analisar e queríamos saber se ela se sobressaía ao aspecto do comprimento no momento da comparação; ou seja, se chegava a influenciar de tal maneira que levaria o aluno a fazer uma escolha do caminho baseado nesse componente. Uma outra variável que nos interessava verificar era se o aluno ao efetuar a comparação considerava algum tipo de projeção “horizontal” ou “vertical”.

No caso da atividade 1 consta um segmento de reta (cor azul) disposto horizontalmente e em posição prototípica, com comprimento de 7,0 cm, para ser comparado com outro segmento de reta (cor vermelha) disposto também na horizontal e em posição prototípica, com comprimento de 7,5 cm. O de cor azul está localizado numa posição um pouco acima ao de cor vermelha, ou seja, se colocássemos paralelamente um em relação ao outro teríamos uma diferença de 2,0 cm. Admitíamos que essa variável da posição poderia exercer alguma influência no que tange a algum efeito visual.

A atividade 2 é composta de um segmento de reta (cor azul) disposto verticalmente e em posição prototípica, com comprimento de 7,5 cm, para ser comparado com outro segmento de reta (cor vermelha) disposto de forma similar e em posição prototípica, com comprimento de 7,0 cm. Agora, diferentemente da atividade anterior, os dois segmentos estão localizados de forma paralela entre eles, obviamente que não há coincidência entre as

extremidades de cada um deles, até porque há uma diferença de comprimento de 0,5 cm entre os dois, sendo que o vermelho está deslocado mais para cima, o que representa uma diferença de 1,5 cm, como pode ser visto na ilustração abaixo:

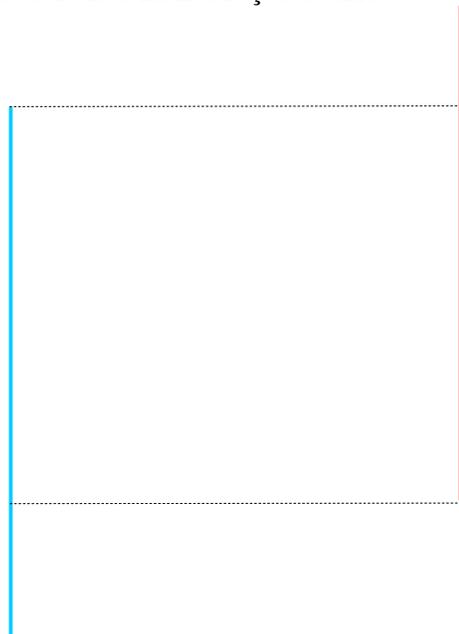


Figura 18: Ilustração com linhas pontilhadas que mostram a diferença nos respectivos comprimentos dos segmentos de reta

O deslocamento de 1,5 cm para cima do segmento vermelho faz lembrar o efeito de polarização assinalado por Piaget (1969) que se manifesta em decorrência da vertical ser superestimada em relação à horizontal, ou quando entre duas verticais iguais há em uma delas uma parte prolongada no setor superior do campo. É bem verdade que esses dois segmentos de reta não apresentam o mesmo comprimento, mas esse deslocamento do segmento da cor vermelha poderia contribuir no sentido de algum aluno associar a esse efeito de polarização destacada por esse pesquisador. Por outro lado, também estávamos admitindo que o paralelismo entre esses segmentos pudesse favorecer que fosse estabelecida a influência do efeito “projeção vertical”.

Por fim, na atividade 3, tanto o segmento azul que mede 8,5 cm quanto o segmento vermelho que mede 8,0 cm estavam dispostos de forma inclinada e, por conseguinte, em posição não-prototípica. A maneira como estão dispostos, seja em decorrência da localização

do segmento vermelho apresentar-se numa posição mais alta do que o de cor azul, ou ainda, em virtude da posição de um em relação ao outro possibilitar estabelecer algumas projeções espaciais, horizontais ou verticais, que poderiam estar associadas aos efeitos da “projeção horizontal” ou da “projeção vertical”. Em outras palavras, os dois segmentos apresentam uma disposição figural – configuração espacial – rica para o estabelecimento dessas influências.

Mesmo que se trate de uma comparação entre figuras que são aparentemente fáceis de identificar a de comprimento mais curto, estávamos admitindo que os efeitos visuais pudessem exercer alguma influência no momento do aluno fazer sua escolha. No caso da atividade 1, em virtude das figuras estarem configuradas de forma bem disjuntas, parecendo diminuir as interferências visuais de um segmento sobre o outro, mas caso algum aluno indicasse o segmento vermelho como o mais curto, era provável que estivesse associado ao fato de se encontrar localizado numa posição mais baixa que o azul. Assim, ele estaria fazendo confusão entre a posição e a comprimento. Quanto a atividade 2, como foi dito anteriormente, acreditávamos numa provável influência do efeito da “projeção vertical”. Enquanto a atividade 3, em decorrência dessa configuração não-prototípica parecer aumentar as chances dos efeitos ocorrerem, especialmente, “projeção horizontal” e “projeção vertical”, mas como decorrência da localização do segmento de reta vermelho, também admitíamos que poderia ocorrer influência no aluno em confundir posição com comprimento.

De acordo com os estudos realizados por Barbosa (2002), numa atividade em que os caminhos (quatro) eram compostos por segmentos de reta, não foi enfatizada a presença de algum tipo de efeito. Isso não significa que eles não poderiam estar presentes, até porque nessa investigação não se teve um maior controle sobre a presença ou não desses eventos. Estávamos acreditando que nesta pesquisa eles poderiam ser verificados, por termos uma maior compreensão dos possíveis conhecimentos mobilizados pelos alunos e das próprias estratégias de resolução.

Numa outra pesquisa desenvolvida por Brito (2003), na atividade sobre caminhos com segmentos de reta, terminou-se detectando indícios nas respostas dos efeitos da “projeção horizontal” e da “projeção vertical”. É bom evidenciar que nesta investigação a pesquisadora desde a análise a priori de cada atividade já estava atenta quanto à possibilidade de possíveis efeitos, sem se falar que teve oportunidade de fazer um trabalho mais cuidadoso quanto às estratégias de resolução, especialmente no modelo com uso de manipulativos.

5.3.1.2 Interpretação de respostas possíveis

Quanto ao aluno que efetivasse a mobilização adequada do conhecimento “comparação de comprimento dos segmentos”, responderia que o caminho mais curto, na atividade 1, era o segmento de reta azul, na atividade 2, o segmento de reta vermelho e na atividade 3, indicaria o segmento de reta vermelho.

Como não foi disponibilizado nenhum tipo de mediano para o aluno, acreditávamos que a comparação deveria ocorrer baseando-se principalmente por meio do recurso visual, embora também pudesse fazer uso de algum artifício com dedos ou lápis/borracha. De qualquer forma, esses eram os meios de validação mais evidentes que pareciam favorecer suas decisões.

Caso algum aluno indicasse o caminho mais curto com respostas diferentes das apresentadas acima – manifestação de uma mobilização inadequada – suspeitávamos que tais opções pudessem estar associadas aos efeitos da “projeção horizontal” ou “projeção vertical”, ou ainda, porque o aluno poderia estar “associando posição a comprimento”.

Na atividade 1, admitíamos a possibilidade que algum aluno se deixasse influenciar pelo aspecto do segmento de reta azul se encontrar numa posição “em cima” – mais alta – que

o segmento de reta vermelho e acreditar que este fosse mais curto apenas porque se encontrava numa posição mais baixa que o outro. Se um determinado aluno assim procedesse, entendemos que estaria tipificado uma situação de confundir-se posição com comprimento. Este evento também poderia se repetir na atividade 2, com uma diferença da anterior, pois nesta o segmento vermelho está apenas deslocado um pouco acima do segmento azul, enquanto naquela é todo o segmento azul que está numa posição acima. Na terceira atividade, é o segmento vermelho que se encontra numa posição acima do segmento azul, o que também poderia possibilitar essa influência de confundir posição com dimensão. Também havia expectativa que o aluno pudesse ser influenciado pelos efeitos da “projeção horizontal” ou da “projeção vertical”. É como se estivesse imaginando projeções para realizar comparação entre supostas linhas horizontais. A simulação abaixo mostra as projeções do segmento azul com comprimento de 5,6 cm, enquanto a do segmento vermelho é de 7,0 cm.

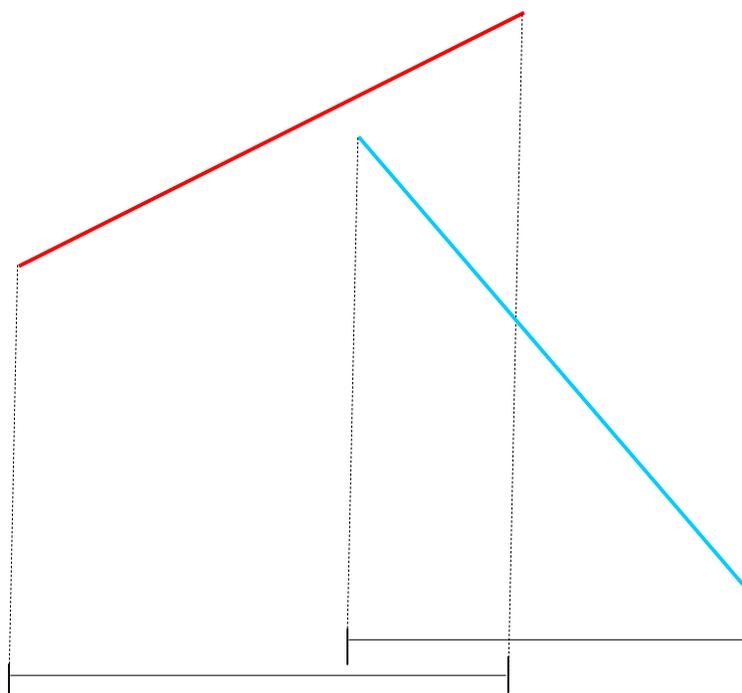


Figura 19: Efeito “projeção horizontal” da atividade 3

Esta outra simulação está relacionada à possibilidade do aluno ser influenciado pelo efeito da “projeção vertical”, em que a projeção do segmento azul corresponde a 6,2 cm, enquanto a do segmento vermelho é de 3,9 cm.

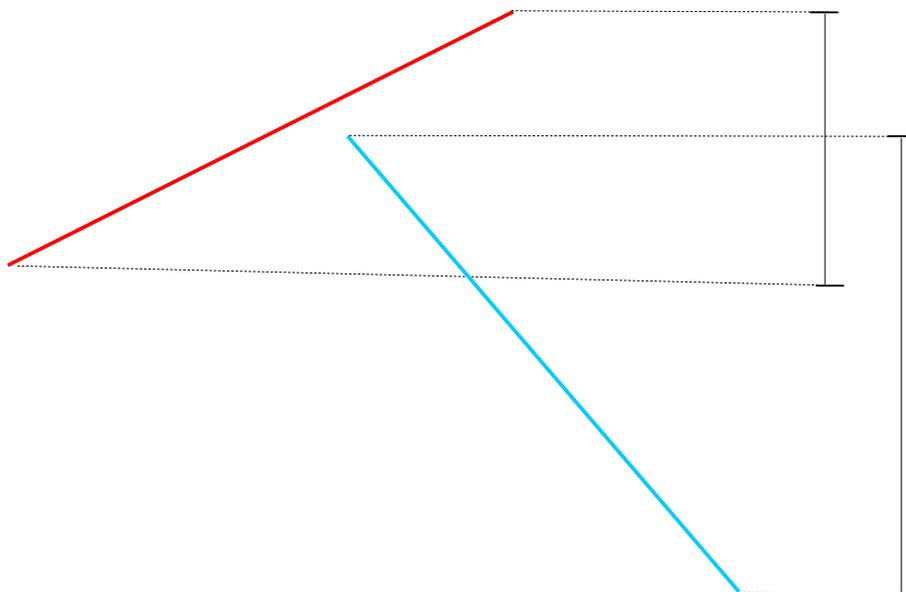


Figura 20: Efeito “projeção vertical” da atividade 3

No experimento desenvolvido por Barbosa (2002), numa atividade que explorou apenas segmentos de reta, foi considerada fácil para os alunos, o que se confirma pela quase totalidade de acertos nos dois itens explorados. Constavam quatro segmentos, sendo um segmento disposto horizontalmente e três em posição inclinada, como mostra a ilustração que segue:

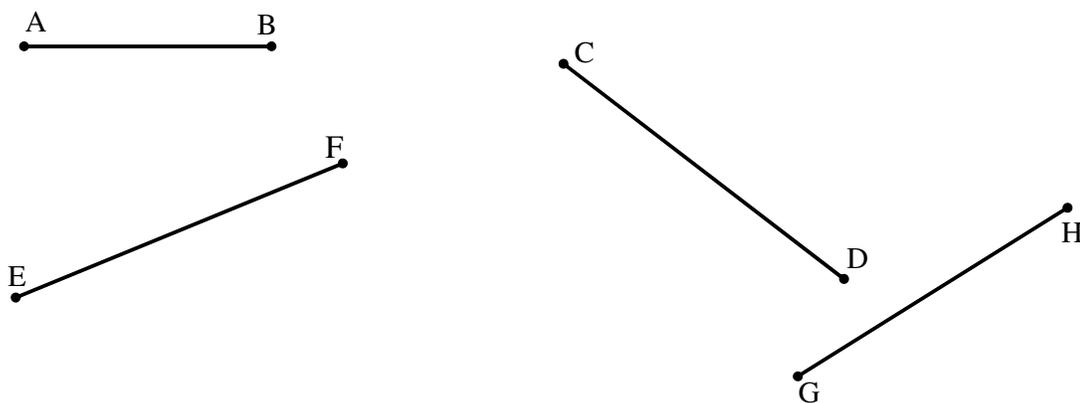


Figura 21: Figuras da 2.^a atividade da 2.^a sessão do experimento de Barbosa (2002)

Houve 100% de acertos na indicação do caminho mais curto (AB). Diante de tais resultados favoráveis é possível que o fato do segmento de reta AB se encontrar em posição prototípica tenha facilitado essa escolha. Apenas um aluno errou ao indicar o caminho GH como o mais comprido, entre 29 participantes, o que representou 3,4% .

Não foi registrado o provável motivo que levou o aluno a essa escolha. No entanto, é razoável admitir que a relacionou com as indicações das letras. Nesse caso, as duas primeiras letras – AB – representariam o caminho de menor comprimento, enquanto as duas últimas letras – GH – representariam o caminho de maior comprimento. Considerando que esta relação esteja correta, poderíamos também supor que, subjacente a indicação efetuada, há a possibilidade da ocorrência do efeito “associa número a comprimento”. Não seria o número tomado no sentido cardinal, mas ordinal. Em outras palavras, as letras estariam funcionando como os meios de associar aos números. Assim sendo, talvez pudéssemos sugerir que esse efeito pudesse ocorrer nas modalidades: cardinal e ordinal.

O depoimento de Barbosa (2002) confirma a facilidade de uma atividade composta apenas com segmentos de reta:

Verifica-se, assim, que a questão revelou-se muito mais fácil do que o previsto na análise a priori e o desempenho dos alunos mostra que a noção de comprimento, quando estão em jogo apenas segmentos de reta, é bem compreendida pelos alunos investigados (p. 124).

Por outro lado, no experimento desenvolvido por Brito (2003), numa atividade apenas com segmentos de reta, embora estivessem inseridos na configuração de uma casa (ver figura 12), os acertos na indicação do caminho mais curto não foram tão consensuais. Os segmentos foram apresentados na disposição horizontal (1), disposição vertical (1) e disposição inclinada (2), totalizando quatro.

Os da disposição inclinada têm alguma semelhança com os que propomos nesta atividade. Uma diferença é que naquele experimento eles se interceptavam, a extremidade do segmento amarelo em um ponto do segmento azul, e suas dimensões eram 6,5 cm e 7,5 cm respectivamente. Além do mais, era o de maior comprimento que estava numa posição mais em cima.

Em nosso experimento, optamos em apresentar os segmentos de reta sem se interceptarem, para que ficassem livres de alguma outra interferência. Por exemplo, para evitar que o aluno pensasse que o mais curto estivesse associado ao menor pedaço do segmento vermelho, ou que o segmento vermelho por não ser visto como um ente contínuo, mas dois pedaços, pudesse imaginar que seria maior, já que dois é maior que um.

Nessa atividade da pesquisa de Brito (2003), na indicação do caminho mais comprido, dos 24 alunos, 23 (95,8%) responderam corretamente, enquanto apenas 1 (4,2%) aluno errou. Para indicação do caminho mais curto, dos 24 alunos, 15 (62,5%) acertaram, 7 erraram (29,2%) e dois não responderam. Dentre estas erradas, esta pesquisadora interpretou que cinco delas estariam associadas ao efeito da “projeção horizontal” (ver figura 13).

Na tabela a seguir é possível verificar as respostas e os conhecimentos que esperávamos que viessem a ser mobilizados na atividade 3, além dos próprios procedimentos de resolução:

Quadro 16: Respostas esperadas na atividade 1

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Azul	- Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Vermelho	- Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual.

Na tabela abaixo, correspondente a atividade 2, era esperado, mais uma vez, que fossem mobilizados apenas os conhecimentos “comparação de comprimento dos segmentos” e que houvesse alguma interferência no sentido do aluno associar posição a comprimento.

Quadro 17: Respostas esperadas na atividade 2

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Vermelho	- Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Azul	- Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual.

A seguir temos a tabela que resume o que é esperado em termos da atividade 3, sendo dois efeitos e uma interferência.

Quadro 18: Respostas esperadas na atividade 3

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Vermelho	- Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.

- Papel e lápis	- Azul	- Efeito “projeção horizontal”.	- Observação visual. - Utilização de artifício.
	- Azul	- Efeito “projeção vertical”.	- Observação visual. Utilização de artifício.
	- Azul	- Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual.

Quanto aos procedimentos de resolução nas três atividades, os alunos poderiam usar a “observação visual” e a “utilização de algum artifício” que poderia ser com os dedos ou lápis/borracha. No que tange a este último recurso, o aluno tanto poderia fazer um uso adequado ou não²⁸. Em se tratando de comparação entre linhas poligonais abertas, a sobreposição pode ser efetuada não sobre o comprimento do caminho em si, mas em parte dele (associado ao efeito “interextremos”), ou apenas nas extensões das projeções (associado aos efeitos “projeção horizontal” ou “projeção vertical”), ou mesmo ligando extremidades de certos caminhos (associado ao efeito “interextremidades”). Para estes casos específicos, a “utilização de artifício” teria essa característica aleatória, por não considerar necessariamente o trajeto de cada respectiva linha a ser comparada, mas outros supostos trajetos. Por exemplo, um trajeto que liga os pontos das extremidades.

É importante lembrar que nesse modelo papel e lápis foram disponibilizados para o aluno apenas lápis grafite e borracha branca, mas isso não impede que ele apele para o uso de suas mãos/dedos. Mesmo que fosse uma possibilidade em termos de procedimento, admitíamos que prevalecesse a da “observação visual” porque o uso dos dedos e das mãos estaria mais associado à ação do contar ou medir ambientes (uso do palmo) com dimensões maiores que as figuras exploradas.

No experimento desenvolvido por Barbosa (2002), na atividade que só constava segmentos de reta (apresentados anteriormente), um fato destacado foi a preferência pelo uso

²⁸ Por exemplo, o aluno poderia usar uma borracha sobre uma linha poligonal, sem fazer uma sobreposição cuidadosa, especialmente, no momento de sobrepor as “quinas” que requer uma maior atenção.

de medianeiros não muito adequados, isto é, 16 alunos, correspondendo a 55,2%, não usaram réguas (instrumentos mais viáveis para trabalhar com segmentos de retas), mas fios ou cordões, num universo de 29 alunos, em que apenas um não usou nenhum tipo de instrumento. Pelo menos nessa atividade, a estratégia da “observação visual” foi insignificante quando comparada com a da “sobreposição de medianeiros”.

Em que pese esse alto índice de procura pelo uso do material, não estava descartada a possibilidade de alguns alunos optarem pelo recurso visual assim como foi detectado na investigação de Brito, (2003). Esta pesquisadora não precisou quantos alunos exatamente usaram ou não algum tipo de recurso, mas que uns alunos optaram pela estratégia da “observação visual”, enquanto outros preferiram fazer uso da “sobreposição de medianeiros”.

Por fim, era provável que os alunos usassem o recurso da “observação visual” e realizassem a mobilização correta da “comparação de comprimento dos segmentos”. Quanto ao procedimento “utilização do artifício”, seja com dedos ou lápis/borracha, acreditávamos ser um uso mais remoto, mas sua ocorrência poderia levar o aluno efetivar a mobilização correta da “comparação de comprimento dos segmentos”. Destacamos que o procedimento da “observação visual” era igualmente previsto como o recurso que poderia levar o aluno a efetivar as mobilizações inadequadas, neste caso, associar posição a comprimento. Por último, prevíamos que o procedimento da “utilização de artifício”, seja aleatório ou não, pudesse interferir para ocorrência dos efeitos da “projeção horizontal” e da “projeção vertical”.

5.3.2 Análise posterior das atividades 1, 2 e 3

Começaremos esta etapa apresentando a parte da tabela do anexo E que consta os resultados das atividades 1, 2 e 3, obtidos na aplicação da seqüência de atividades no modelo papel e lápis.

Tabela 3: ANEXO E: RESUMO DOS DADOS DAS ATIVIDADES (1,2 e 3)

ATIVIDADE 1			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	3, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28	21	75,00
Errada	1, 2, 6, 7, 10, 22, 23	7	25,00
Índice Percentual total de acertos e erros: C (21) 75,00% - E (6) 25,00%			
ATIVIDADE 2			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28	22	78,57
Errada	1, 2, 6, 10, 22, 23	6	21,43
Índice Percentual total de acertos e erros: C (22) 78,57% - E (6) 21,43%			
ATIVIDADE 3			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 28	17	60,71
Errada	5, 6, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27	11	39,29
Índice Percentual total de acertos e erros: C (17) 60,71% - E (11) 39,29%			

Considerando as 84 entradas nesse bloco de atividades, temos um total de 60 acertos (71,43%) e 24 erros (28,57%), indicando que, nesse conjunto de ocorrências, houve um número considerável de acertos. Tais resultados confirmam certa facilidade para resolução de atividades com entes geométricos composto apenas por segmentos de reta. Observa-se que os acertos diminuíram na atividade 3, como foi previsto na análise preliminar, pois o fato dos segmentos estarem numa configuração inclinada contribuía para maiores influências visuais, quando comparada com as duas anteriores.

Levando em conta as três primeiras atividades, 13 alunos acertaram as três questões (3, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21 e 28), enquanto 3 alunos (6, 22 e 23) erraram todas três. Ainda tivemos 3 outros alunos (1, 2 e 10) que erraram pelo menos duas e 9 outros fizeram uma indicação errada (5, 7, 18, 19, 20, 24, 25, 26 e 27).

Ao efetuarmos a análise das respostas nesse bloco de atividades nos anexos (G, H e I), foi possível detectar alguns indícios que caracterizam influências de eventos de visualização, mais especificamente, relacionado à principal variável que estávamos ponderando; isto é, o da posição. Deste modo, observamos sua manifestação, com uma característica além da que

tínhamos previsto como veremos mais adiante por meio do que foi apresentado pelo aluno 16. Ainda foram verificadas respostas decorrentes de influências do efeito da “projeção horizontal”.

Baseando-se no instrumento de pesquisa disponível – os protocolos – pudemos perceber que alguns alunos responderam, explicitamente, considerando a interferência “associa posição a comprimento”. Tal fato fica mais evidente por meio do aluno 23 que sempre argumentou nas três estratégias ter considerado essa variável:

Atividade 1 – Eu só descobri porque a linha vermelha está mais baixa do que a linha azul e para isso eu usei a mente.

Atividade 2 – Eu só descobri porque a linha azul está mais baixa e para isso eu usei o dedo.

Atividade 3 – Eu descobri que a linha azul está mais baixa porque eu usei o lápis.

O que chama atenção nas respostas desse aluno é a coerência em tomar por base o mesmo argumento. A cada atividade confirmava que era a posição que determinava a escolha de sua resposta, ao mesmo tempo, fazia referência a usos diferentes de recursos: a mente (observação visual); o uso do dedo (utilização de artifício) e uso do lápis (utilização de artifício). Quanto aos dois últimos, embora categorizados semelhantemente, foram usados componentes distintos nos respectivos artifícios (dedos e lápis).

Diferentemente do aluno anterior que errou as três questões, ou seja, até nisso houve consonância, o aluno 7 também justificou suas respostas com base na interferência “associa posição a comprimento”. Porém, errou apenas a primeira.

Atividade 1 – Porque eu descobri que o vermelho estava abaixo porque o azul estava em cima.

Atividade 2 – Eu tava com dúvida vermelho lado azul noutra lado.

Atividade 3 – Tava em cima porque vermelho azul tava abaixo.

A resposta da atividade 1 parece sinalizar que esse aluno iria também responder com a mesma coerência do aluno 23. Em outras palavras, o ente geométrico que está “em cima” é maior, enquanto a que está abaixo será menor. A configuração da primeira questão trazia implícito que as respostas seriam resolvidas considerando os pólos acima *versus* abaixo.

Todavia, a resposta da atividade 2 deixa transparecer que esse aluno entrou em desequilíbrio, na perspectiva de Piaget (1976), tanto é que ficou em dúvida. É como tivesse acontecido uma quebra no contrato didático estabelecido na atividade. A resposta certa não é garantia que tenha efetuado uma mobilização adequada de conhecimento. Isso também se verifica na atividade 3, pois nos parece que foi uma resposta sem ter bem segurança da indicação que estava fazendo, deixando entender que a posição dos segmentos de retas era mais significativa do que o comprimento em si. Assim, configura-se como interferência “associa posição a comprimento”.

Quanto as respostas do aluno 6 nas três atividades, algo que chama atenção é a coerência de sempre indicar o segmento “embaixo” como a resposta correta (o segmento vermelho, na atividade 1; o segmento azul na atividade 2 e o segmento azul na atividade 3). Mesmo que tenha indicado o segmento azul na atividade 2, no momento de explicar como descobriu, terminou usando a palavra vermelho. É provável que o equívoco foi específico da escrita.

Atividade 1 – Porque eu acho que o vermelho é mais mainho.

Atividade 2 – Porque eu acho que o vermelho é mais mainho.

Atividade 3 – Eu acho que ele é mais mainho.

Portanto, por errar em todas elas e pela insistência em associar o mais curto como aquele que está abaixo, admitimos que se materializa como uma pista importante que se deixa levar pela interferência “associa posição a comprimento”. Quanto à expressão “mais mainho” usado nas três explicações ainda nos fez pensar que estivesse associado a “mais baixinho”. Porém, ao indagarmos à professora sobre o termo usado, ela tirou a dúvida com o aluno e nos confirmou que “mainho” era maiorzinho.

As respostas dos alunos 13 e 16 na atividade 1 (indicaram corretamente o segmento azul) são um tanto provocantes, pois parecem sinalizar que consideram à interferência “associa posição a comprimento” por ângulos distintos.

Aluno 13 – Porque eu achei o azul muito assim pequeno. Achei a diferença dele porque ele ta em cima, eu achei estranho diferente do vermelho porque o azul é muito pequeno.

Aluno 16 – Porque o caminho vermelho está embaixo e o azul está em cima por isso dá para perceber que o azul é o caminho mais curto.

O argumento do aluno 13 sugere certa estranheza pelo fato do segmento azul estar “em cima”, mas ser menor que o segmento vermelho. É evidente que supera esse dilema da posição; inclusive, reforçando em duas ocasiões, no início e no término de sua descrição, que o azul é muito pequeno. Por outro lado, ter destacado essa variável da posição do azul “em cima” pode estar subjacente que algo estaria errado, isto é, admitir que o de maior comprimento deveria estar “em cima”.

O aluno 16, ao contrário, deixa explícito que considera o aspecto da posição, porém com uma lógica diferente do padrão - o que está “em cima” é o mais comprido e o que está abaixo é o mais curto. Por mais paradoxal que demonstre, até que não é tão incorreto considerar os entes mais compridos abaixo e os mais curtos acima. Isso pode estar relacionado à representação que esse aluno tenha dos entes no seu mundo cotidiano. Por exemplo, em alguns brinquedos de encaixe as peças mais compridas estão agrupadas abaixo, enquanto as mais curtas acima. O formato das pirâmides segue essa mesma configuração. Do mesmo modo pode ser visto nas arrumações de algumas fogueiras, as quais os galhos maiores ficam na parte mais inferior. Também é possível verificar algumas edificações que obedecem a essa padronização. Assim sendo, não é algo tão estranho um aluno ter como referência o maior está mais abaixo e o menor mais acima.

De qualquer forma, o aluno 13, mesmo que tenha manifestado considerar a posição nessa relação de comparação, deixa transparecer que chegou a superar essa variável no momento de decidir a opção de sua resposta. Por outro lado, quanto ao aluno 16, se prevalece este argumento tão paradoxal, é provável que houve a interferência da variável da posição. Neste caso, também estaria configurado uma situação que por trás de uma resposta certa ocorre a mobilização de um conhecimento inadequado.

Um aluno que também fez a indicação correta do segmento azul na atividade 1, mas que parece ser influenciado pelo aspecto da interferência “associa posição a comprimento” foi o 8, pois chegou a afirmar: “Eu cheguei a esse resultado porque é o caminho mais curto para minha casa”. Talvez estivesse querendo associar que indo por cima chega mais rápido na sua casa, já que a escola está localizada num breve declive. Assim, parece plausível admitir que o fato do segmento azul se encontrar numa posição acima, quando comparado com o segmento vermelho, está associado com a possibilidade de trajeto que faz até sua residência.

Uma situação um tanto atípica fica caracterizado nas respostas do aluno 10. Deixa entender que a variável posição foi considerada em detrimento do atributo comprimento. Porém, com uma característica diferente do que prevíamos, pois pelo que colocou sugere considerar o aspecto da posição no sentido lateral.

Atividade 1 – Porque eu achei o vermelho mais perto.

Atividade 2 – O azul está na frente do vermelho.

Atividade 3 – Porque o vermelho está muito mais perto do caminho curto por isso eu acho que o vermelho está mais perto.

Nesse caso, considerou mais curto o segmento mais perto do lado esquerdo. É possível que esteja associando com a leitura que é feita da esquerda para direita, dando idéia do menor para o maior.

Outra situação que podemos considerar como efeito visual é o fato do aluno resolver a atividade 1 estabelecendo uma comparação não por meio do comprimento em si, mas baseado no número de letras das palavras que envolveram as cores dos respectivos segmentos. Por exemplo, o aluno 18 considerou que o segmento azul era mais curto por ter um menor número de letras entre azul e vermelho. É de alguma forma uma indicação do efeito “associa número a comprimento”, embora caracterizado como uma modalidade diferente.

Estamos supondo que na atividade 3 os alunos 5, 18, 19, 20, 22, 24, 26 e 27 foram influenciados pelo efeito “projeção horizontal”, pois só por meio desse tipo de projeção que o

segmento azul teria comprimento menor que o vermelho. Dentre estes, uns deram respostas que demonstram mais insegurança nas suas escolhas:

Aluno 5 – Eu encontrei nesta conclusão e eu achava mais certo é o azul na minha opinião, mas eu não sei se está certo.

Aluno 22 – Eu encontrei pegando o meu dedo e medi os dois caminhos e peguei o lápis e medi os dois caminhos, mas depois eu pensei qual era o caminho e descobri o azul.

Outros alunos apresentaram respostas bem mais objetivas e em que pese demonstrar maior segurança nas escolhas que fizeram, não temos garantia que não possa ter ocorrido algum tipo de influência visual. Por exemplo:

Aluno 20 – O vermelho é mais grande e o azul mais pequeno.

Aluno 24 – Porque cheguei na conclusão que o azul é mais curto que o vermelho.

Aluno 26 – O azul é mais curto e o vermelho é mais longo.

Aluno 27 – Porque eu observei os dois e vi que o azul é o caminho mais curto.

É importante lembrar que quanto ao efeito “projeção vertical” ficaria bem mais difícil de ser detectado em alguma das respostas na atividade 3, até porque ele levaria o aluno a indicar a resposta de forma correta, o que torna mais complexo identificar uma situação dessa forma. No entanto, entendemos que algumas respostas, especialmente as que o aluno faz sua indicação e se utiliza do procedimento da “observação visual”, precisaria de um melhor esclarecimento do motivo que levou fazer sua escolha, não importando se fez uma indicação correta ou errada.

Nas tabelas que seguem, apresentaremos as ocorrências das respostas e dos conhecimentos mobilizados nas três atividades que foram efetuadas no modelo papel e lápis.

Quadro 19: Ocorrências na atividade 1

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Azul (3, 4, 5, 9, 11,12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28)	-Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul (18)	- Efeito “associa número a comprimento”.	- Utilização de artifício (contagem de letras).
	- Azul (8, 13, 16)	- Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual.

-Papel e lápis	- Vermelho (6, 7, 10, 23)	-Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual;
	- Vermelho (1, 2, 22)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual. - Utilização de artifício.

Quadro 20: Ocorrências na atividade 2

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Vermelho (3, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28)	-Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelho (7)	-Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual.
-Papel e lápis	- Azul (6, 10, 23)	-Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul (1, 2, 22)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual; - Utilização de artifício.

Quadro 21: Ocorrências na atividade 3

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Vermelho (1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 28)	-Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelho (7, 10)	-Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual.
-Papel e lápis	- Azul (5, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 27)	-Efeito da “projeção horizontal”	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul (6, 23)	-Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul (25)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual.

Mister se faz ponderar alguns aspectos quanto às modificações nessas tabelas em comparação com as da análise preliminar. Na parte destinada às respostas, inserimos a

identificação dos alunos que as efetuaram. Entre os conhecimentos mobilizados, apareceram novas categorias: efeito “associa número a comprimento” e “comparação indevida, sem identificar a causa”. Por último, é importante destacar que, quanto aos procedimentos de resolução, só serão discutidos em momento posterior, mas que houve predomínio do uso da “observação visual” entre as situações associadas aos eventos de visualização.

Quanto a atividade 1, foi contabilizado um total de 8 ocorrências associadas a influências visuais, sendo 7 relacionadas à “interferência associa posição a comprimento” e 1 ao efeito “associa número a comprimento”. Da primeira influência, 3 inclusas entre as respostas certas e 4 como respostas erradas. A segunda influência ocorreu como indicação de resposta certa. É mais uma situação a qual fica caracterizado que responder corretamente não significa mobilização correta do conhecimento que está sendo vivenciado.

Essa resposta do segundo evento nos estimula mais uma vez evocar o conceito de centração abordado por Piaget (1969). Nesse caso o aluno passou a desconsiderar à variável da comparação entre os entes geométricos e estabeleceu uma comparação no campo numérico. Parece que recorrer ao número é um fator mais seguro para resolver os problemas que lhe apresentam, isto é, termina superestimando o número em detrimento da grandeza.

Quanto às demais respostas, sobretudo, as que estão classificadas como erradas e categorizadas como “comparação indevida, sem identificar causa”, somos levados a questionar o que levou esses alunos a efetuarem tais indicações. Não descartamos a possibilidade da ocorrência de alguma natureza de um fenômeno de visualização.

Na atividade 2 apenas foram registrados 4 casos de alunos que tiveram suas respostas atribuídas aos fenômenos de visualização. Esse baixo índice talvez decorra do fato que a variável que se buscou trabalhar visava explorar a relação acima e abaixo, quando os segmentos não estavam rigorosamente localizados numa posição totalmente superior ou inferior ao outro. Esses casos identificados apresentaram respostas associadas à mobilização

do conhecimento interferência “associa posição a comprimento”. Mesmo tratando-se de uma mobilização inadequada, ainda foi registrada uma resposta correta. As demais foram inseridas entre as erradas. Também é possível que entre as três categorizadas como “comparação indevida, sem identificar a causa”, possa haver alguma interferência puramente visual.

Por último, na atividade 3, foram registradas 12 ocorrências relacionadas aos aspectos de visualização. Esse maior índice era previsto, pois envolvia segmentos de reta em posição não-prototípica. Foram 4 situações relacionadas à interferência “associa posição a comprimento” e 8 associadas ao efeito da “projeção horizontal”. Entre as do primeiro fenômeno, duas foram respostas certas e duas erradas. Quanto ao segundo evento, todas se constituíram como respostas erradas. Resumindo, nós tivemos as seguintes ocorrências por atividade:

Quadro 22: Ocorrências de eventos de visualização nas atividades (1, 2 e 3)

Atividades	Número de Ocorrências/	Conhecimentos mobilizados
Atividade 1	1 acerto ----- 7 (3 acertos e 4 erros)	- Efeito “associa número a comprimento”. ----- - Interferência “associa posição a comprimento”.
Atividade 2	4 (1 acerto e 3 erros)	- Interferência “associa posição a comprimento”.
Atividade 3	4 (2 acertos e 2 erros) ----- 8 erros	- Interferência “associa posição a comprimento”. ----- Efeito “projeção horizontal”

Ao observarmos a tabela acima, verificamos uma incidência de 24 ocorrências de um total de 84, o que representa 28,57%. Ainda podemos considerar como um bom número de casos. Primeiro porque os entes geométricos eram segmentos de reta, quando verificamos nos estudos anteriores que eles são mais freqüentes entre linhas poligonais abertas e linhas curvas. Depois porque constavam apenas dois segmentos, pois nos outros experimentos as situações exploradas envolviam quatro ou cinco entes geométricos.

Considerando a teoria da Gestalt, mais especificamente a lei da semelhança, entendemos que é pertinente ressaltar o fato de os segmentos de reta não terem partes que se destacam em suas respectivas representações, isto é, os segmentos de reta apresentam-se numa espécie de contínuo padronizado, sem constar algum tipo de “deformação” retilínea, diminuindo a possibilidade do aluno prender-se em partes comuns nos dois entes que estão sendo submetidos à comparação de comprimento.

Essa constatação leva-nos a admitir que haja menor força de atração entre os entes geométricos comparados. Por conseguinte, parece diminuir a atuação dos efeitos visuais. A nossa compreensão é que quanto maior for a interdependência entre as partes das figuras, maior também serão as possibilidades dos efeitos visuais manifestarem-se.

Tomando como referência os conhecimentos piagetianos, mais especificamente o efeito da contração, observa-se que também não houve grandes interferências no sentido de provocar maiores efeitos visuais. O motivo é o mesmo que argumentamos sobre a lei da semelhança da Gestalt. Sendo as figuras segmentos de reta, diminuem sobremaneira as possibilidades dos alunos superestimarem certos elementos das figuras do campo em detrimento de outros.

Entre as habilidades espaciais apresentadas nos estudos de Educação Matemática, é possível destacar que nas situações exploradas nas três atividades a “percepção espacial” e da “discriminação visual” sobressaíram-se em relação às demais. Até porque, o que era solicitado do aluno favorecia o uso dessas duas habilidades, pois ao comparar as linhas tanto era estabelecida uma “discriminação visual” quanto uma “percepção espacial” entre os entes geométricos comparados.

Quanto aos conhecimentos mobilizados, faremos um comentário mais pontual sobre o evento de visualização intitulado interferência “associa posição a comprimento”. Particularmente, gostaríamos de destacar o conceito básico do gestaltismo que é o de

estrutura. Penna (1978) assinalou que não se trata de estrutura como síntese de elementos e nem com viés aditivo dos elementos em jogo, mas como um conjunto não-somativo de partes em que suas funções estão dependentes da posição ocupada na totalidade. Esse último elemento que foca a dependência da função à própria posição considerando o todo é uma sinalização muito forte da proximidade desse fenômeno visual em que a posição termina sendo mais determinante do que a própria grandeza. Portanto, entendemos que de fato a posição é fator de interferência no momento da comparação de grandezas, cabendo realmente o reconhecimento desse evento como mais um efeito visual.

Aproveitaremos, neste momento, para tecermos algumas considerações sobre os procedimentos utilizados nas três atividades. Inicialmente, apresentaremos uma tabela que resume os procedimentos adotados em cada uma das atividades.

Quadro 23: Ocorrências dos procedimentos nas atividades (1, 2 e 3)

Atividades	Respostas		Procedimentos	Número de ocorrências
	Certas	Erradas		
Atividade 1	15	7	Observação visual	22
	6	1	Utilização de artifício	7
Atividade 2	14	5	Observação visual	19
	7	2	Utilização de artifício	9
Atividade 3	12	9	Observação visual	21
	5	3	Utilização de artifício	8

O total de vinte e nove ocorrências nas atividades 1 e 3 decorre do fato que tanto em uma quanto na outra um dos alunos utilizou, ao mesmo tempo, os procedimentos da “observação visual” e “utilização de artifício”. Aliás, este último ainda foi bastante acionado se considerarmos que se tratava de situações que propiciavam bastante o procedimento visual.

De 86 ocorrências a “utilização de artifício” foi evocada em 24 ocasiões. Destas, 8 estão associadas a respostas erradas, representando 34,78%. O total de ocorrências registradas relacionadas à “observação visual” foi de 62. Entre estas, 19 estão classificadas como

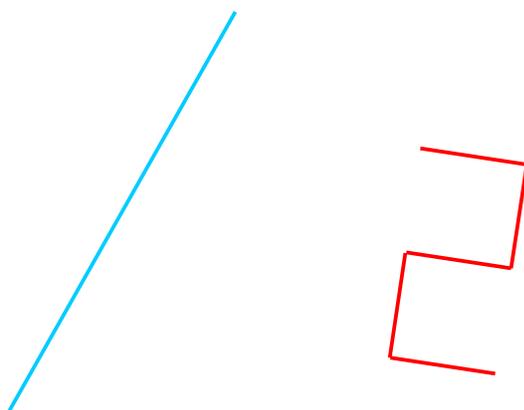
respostas erradas, o que significa 30,65%. Assim sendo, por meio desses dados não é procedente afirmar que a “observação visual” é determinante para incidência dos efeitos visuais. Aliás, tivemos uma maior ocorrência entre os alunos que utilizaram algum artifício.

É bom lembrar que procuramos categorizar os procedimentos em duas únicas categorias, mas eles foram bem diversificados; inclusive, houve uma situação na atividade 1 que o aluno 18 efetuou a “contagem das letras” e classificamos no recurso da “utilização de artifício”. Dos vinte e três que utilizaram este recurso, quinze optaram pelo uso de lápis, cinco apelaram para os dedos e três usaram o recurso da borracha. Essa variedade também foi verificada entre as respostas dos que fizeram uso da “observação visual”.

5.4 Apresentação da quarta atividade

ATIVIDADE 4

Observe os caminhos abaixo e responda:



Marque com um X o caminho mais curto:

azul

vermelho

Explique como você descobriu:

5.4.1 Análise preliminar da atividade 4

5.4.1.1 Introdução

A atividade 4 deu início a um novo grupo de questões, não em relação à pergunta, nem mesmo quanto ao objetivo que continua com o foco voltado para detectar as influências de efeitos visuais, mas porque as comparações passaram a ser realizadas entre linhas mistas. Neste caso, ocorreram entre um segmento de reta e uma linha poligonal aberta.

Trata-se de uma comparação mista, em que os dois “entes geométricos” estavam dispostos em posição não-prototípica e, pela configuração em que se apresentaram, pretendíamos verificar se o aluno ao estabelecer a comparação considerava a variável da projeção no sentido vertical (“projeção vertical”). Uma outra variável que estava sendo admitida dizia respeito a verificar se um aluno considerava certa envoltura da região que circunda cada figura (“espaço ocupado”). A primeira sinaliza para o efeito da “projeção vertical”, enquanto a segunda, para o efeito do “espaço ocupado”.

Dos experimentos que temos nos respaldado, quando ocorreram comparações mistas, foram realizadas entre quatro a cinco linhas abertas. Dessa forma, não temos maiores informações sobre o estabelecimento desse tipo de comparação com duas figuras apenas.

O comprimento do segmento de reta é de 6,5cm (azul) e o comprimento da linha poligonal aberta é de 7,5cm (vermelho).

5.4.1.2 Interpretação de respostas possíveis

O aluno responderia corretamente ao indicar o segmento de reta como o mais curto, resultado de uma mobilização correta de conhecimento que é a “comparação de comprimento dos segmentos”. Esta poderia ocorrer associada aos procedimentos da “observação visual” ou “utilização de artifício”.

No caso em que a escolha fosse a linha poligonal aberta como o caminho mais curto, admitimos que essa opção resultasse das seguintes mobilizações inadequadas: “projeção vertical” e “espaço ocupado”. Quanto aos procedimentos considerávamos que estivessem associados aos procedimentos da “observação visual”.

Dentre esses dois possíveis efeitos, parecia-nos mais provável que o aluno fosse influenciado pela “projeção vertical”, porque a configuração entre elas predispõe a essa conclusão por admitir que a comparação fosse estabelecida entre projeções de linhas verticais. De acordo com a simulação abaixo, é possível constatar os seguintes comprimentos dessas supostas linhas projetivas: 5,7 cm correspondente ao segmento de reta e 3,2 cm que corresponde à linha poligonal aberta.

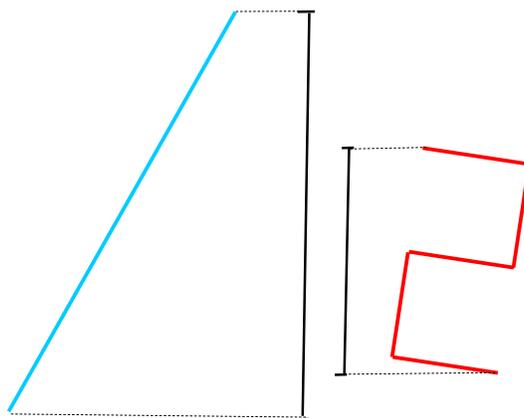


Figura 22: Efeito “projeção vertical” na atividade 4

Prevíamos que um aluno também pudesse imaginar supostas regiões de envoltura em cada caminho, constituindo-se numa influência do “espaço ocupado”, pois a presença da linha poligonal poderia estimular o aluno a estabelecer a comparação considerando essa região circundante. A ilustração abaixo tenta mostrar como seria a simulação dessa influência.

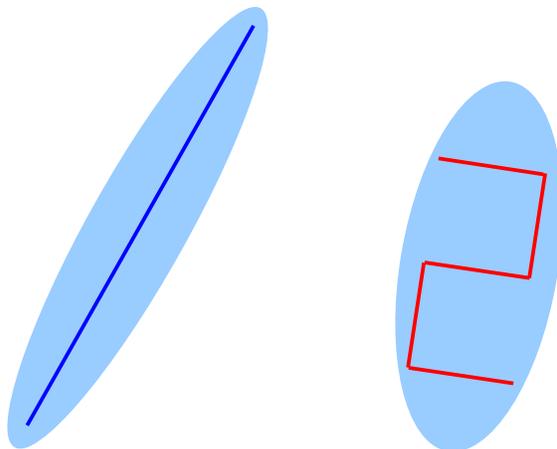


Figura 23: Efeito “espaço ocupado” na atividade 4

Quando as figuras são todas constituídas por linhas poligonais abertas, é provável que aumente a possibilidade de se verificar esse evento do “espaço ocupado”, como ocorreu entre as situações (ver figura 7) da 3.^a da 2.^a sessão do experimento desenvolvido por Barbosa (2002). Este pesquisador fez referência a esse fenômeno admitindo que “Uma outra estratégia poderia resultar do emprego da visualização do ‘espaço ocupado’ pela curva para fazer uma triagem [...] Adotando essa estratégia, o aluno estaria associando o comprimento da curva à área de uma certa ‘região ocupada pela curva’” (p. 130-131).

Brito (2003) também adotou o efeito “espaço ocupado” como uma das suas categorias de análise e constatou que 20,8% dos alunos foram influenciados por esse evento de influência visual (p. 102).

Na quadro que se segue, é possível verificar as respostas e os conhecimentos que se esperava que viessem a ser mobilizados.

Quadro 24: Respostas esperadas na atividade 4

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Azul	- Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Vermelho ----- - Vermelho	- Efeito “projeção vertical”. ----- - Efeito “espaço ocupado”.	- Observação visual. ----- - Observação visual.

O procedimento da “observação visual” estava categorizado em todas as situações e acreditava-se que poderia influenciar tanto a resposta certa quanto a errada. A “utilização de artifício” com os dedos ou lápis/borracha, embora previsto no modelo papel e lápis, constituía-se em uma menor possibilidade de ser efetuada.

Na segunda atividade do experimento de Brito (2003), em que foi constatado tanto o efeito da “projeção vertical” quanto o do “espaço ocupado”, prevaleceu o uso das estratégias “observação visual” e “sobreposição de medianeiros”, como afirmou: “Quanto às estratégias utilizadas na resolução dos dois modelos desta atividade, no ambiente papel e lápis, verificamos que os alunos usaram a ‘observação visual’ e a ‘sobreposição de medianeiros’” (p. 108). Todavia, essa pesquisadora não identificou os alunos que usaram uma ou outra estratégia.

5.4.2 Análise posterior da atividade 4

Inicialmente temos abaixo outra etapa do anexo E que consta os resultados da atividade 4, detectados na aplicação da seqüência de atividades.

Tabela 4: ANEXO E: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 4

ATIVIDADE 4			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	2, 3, 4, 5, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 27, 28	16	57,14
Errada	1, 6, 7, 9, 10, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 26	12	42,86
Índice Percentual total de acertos e erros: C (16) 57,14% - E (12) 42,86%			

Os acertos diminuíram quando comparamos com os resultados encontrados nas três primeiras atividades que atingiram o índice de 71,43%, enquanto nesta foi de 57,14%. Por outro lado, os erros atingiram a marca dos 42,86%, contra os 28,57% obtidos no bloco das três atividades anteriores.

O aumento dos erros era esperado porque as linhas envolvidas apresentam uma configuração mais complexa em relação as antecedentes. Na atividade 3 constou um segmento de reta em posição inclinada, na atual, além de estarem inclinadas, surge, pela primeira vez, uma linha poligonal aberta, o que dificulta um pouco mais o processo, especialmente para os alunos que costumam apelar para o recurso da “observação visual”.

Após realizarmos a análise do levantamento dos dados expressos no anexo J, verificamos que há presença de alguns indícios de eventos de visualização. Algumas das respostas sinalizam de forma mais evidente, enquanto em outras suspeitamos sobre o que estão subjacentes nas ocorrências, principalmente as que estão associadas a erros. Uma outra pista que será considerada está relacionada à trajetória de cada aluno, manifesta nas respostas anteriores. Por fim, faremos os comentários partindo dos indícios mais evidentes e começaremos das respostas classificadas como erradas.

A primeira resposta errada que nos chamou atenção foi a do aluno 7: “Tava de claro que vermelho, azul tava noutro lado”. Entendemos que três fatores favorecem suspeitar de influência de visualização: primeiro, porque o argumento que adota já sinaliza ter considerado o aspecto da posição – “noutro lado”; segundo, porque nas três atividades anteriores sempre acionou esse critério da posição em detrimento do comprimento e, por último, porque também

está associada ao erro, além do procedimento da “observação visual”. Diante de tais evidências, entendemos que sugerem a interferência “associa posição a comprimento”.

Uma outra resposta errada que categorizamos foi a do aluno 10: “O vermelho tem voltas, mas eu acho mais perto do que o azul”. A estratégia adotada sugere que este considerou o efeito “projeção vertical”. Nesse caso, parece que o segmento azul termina gerando certo impacto visual que passa a idéia de ser maior na perspectiva das projeções verticais. É possível que também tenha ocorrido à influência da “linha imaginária interextremidades”.

Este aluno tem uma desenvoltura nas questões anteriores semelhante ao aluno 7, reforçando a suspeita de ter sido influenciado por algum evento de visualização. Além desse histórico anterior e o argumento usado, também usou o procedimento da “observação visual” e marcou a alternativa errada.

O argumento do aluno 21 dá a entender que também foi influenciado por algum fenômeno visual: “Eu descobri olhando que o vermelho é mais curto porque é dobradinho”. Este último termo nos estimula a acreditar que admite uma região de envoltura da linha poligonal aberta menor que a do azul. Se de fato sua intenção era argumentar nesse sentido, estava configurada uma manifestação do efeito “espaço ocupado”.

Já a resposta do aluno 23 deixa transparecer de forma mais plausível o fenômeno que exerceu influência na sua decisão no momento de responder a questão: “Saber por que eu descobri porque eu usei a borracha e foi aí que descobri que se eu esticar a linha vermelho ela fica mais baixa do que a linha azul”. Por meio dessa explicação entendemos que houve interferência “associa posição a comprimento”. Deixa entender que ao esticar a linha poligonal aberta, parte da sua ponta inferior ficará mais embaixo do que a do segmento de reta, configurando-se que essa posição determinou sua escolha. Este aluno 23, mais do que os que foram analisados antes, têm um fluxo de respostas marcadamente influenciado por

fenômenos de visualização. A resposta errada se constitui como outro indício de uma configuração propícia a esse tipo de fenômeno. No entanto, diferentemente dos demais, usou como recurso de procedimento a “utilização de artifício” (borracha), reforçando a idéia que nem sempre se faz bom emprego do instrumento manipulado.

Encerrada essa etapa formada pelas ocorrências associadas aos eventos de visualização a partir dos erros, trataremos a partir deste momento das ocorrências relacionadas aos acertos. As respostas dos alunos 8, 13 e 17 nos chamaram atenção quanto a esses fatos. Por sinal, nas três situações foi utilizado o procedimento da “observação visual”.

A resposta do aluno 8 é a menos convincente no que diz respeito a ter recebido alguma natureza de fenômeno visual, mas preferimos categorizá-la em decorrência da suspeita que podemos levantar quanto ao argumento adotado. Afirmou: “Porque está em partes reta como uma linha”. Mesmo que a idéia inicial de interpretação é que tenha considerado a linha poligonal aberta maior não só maior por ter mais partes, mas porque ao juntá-las forma uma linha mais comprida, não descartamos que o fator determinante de sua opção tenha recaído no estabelecimento da relação do número de partes. Neste caso, o segmento de reta é menor por ter uma única, enquanto a linha poligonal consta cinco partes. Caso isso tenha sido o aspecto considerado, estaria configurado o efeito “associa número a comprimento”.

No caso do aluno 13, ele apresenta um argumento que sinaliza com mais consistência para presença de evento de visualização: “O azul ta mais curto porque o azul ta um traço e o vermelho ta como fosse um dois por isso o vermelho é maior do que o azul e um traço nunca ganha”. Ele relaciona um ao segmento de reta e dois a linha poligonal, isto é, se caracterizando como uma associação que confirma ser influenciado pelo efeito “associa número a comprimento”.

O aluno 17 demonstrou ter considerado o aspecto numérico, embora também levou em conta o estabelecimento da comparação por meio da grandeza propriamente dita: “Eu

descobri que o azul está menor do que o vermelho porque o vermelho está no formato de um cinco e também dá pra perceber que o vermelho está maior do que o azul'. Portanto, é mais uma situação que se caracteriza o efeito “associa número a comprimento”.

Após concluirmos essa análise do ciclo de respostas que sugeriram considerar algum tipo de interferência ou efeito visual, lembramos que algumas outras estratégias apresentadas podem sinalizar para alguns desses eventos, sobretudo, as que estão associadas a indicações erradas como foram os registros dos alunos: 1, 6, 15, 22, 24, 25 e 26. Interessante que todos eles se utilizaram do procedimento da “observação visual” que é um recurso que está associado a muitos dos fenômenos visuais.

A seguir apresentaremos as ocorrências das respostas, dos conhecimentos mobilizados e dos procedimentos que foram efetuados no modelo papel e lápis na atividade 4.

Quadro 25: Ocorrências na atividade 4

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Azul (2, 3, 4, 5, 11,12,14, 16, 18, 19, 20, 27, 28)	-Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul (8, 13, 17)	- Efeito “associa número a comprimento”.	- Observação visual.
-Papel e lápis	- Vermelho (10)	- Efeito “linha imaginária interextremidades”	- Observação visual.
	- Vermelho (10)	- Efeito “projeção vertical”	- Observação visual.
	- Vermelho (21)	- Efeito “espaço ocupado”	- Observação visual.
	- Vermelho (7, 9, 23)	-Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelho (1, 6, 15, 22, 24, 25,26)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual.

Como podemos verificar anteriormente, foram detectadas 9 ocorrências associadas a influências visuais. Dentre estas 3 categorizadas como respostas certas e 6 como erradas. As primeiras foram inseridas como resultantes do efeito “associa número a comprimento”. Entre as demais 3 estão relacionadas à interferência “associa posição a comprimento”. É provável que ainda resulte de certa contaminação das atividades anteriores, em que ficou estabelecido fortemente o contrato didático que a variável didática principal em jogo era a posição. As outras três situações foram inseridas como respostas erradas resultantes de efeitos visuais: “linha imaginária interextremidades”; “projeção vertical” e “espaço ocupado”.

Não descartamos que nas demais respostas, especialmente as erradas e que não foram identificadas às causas das suas escolhas, possam existir algum tipo de influência visual, até porque todos eles utilizaram do procedimento da “observação visual”.

Resumindo, foram registradas na atividade 4 o seguinte número de ocorrências:

Quadro 26: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 4

Atividades	Número de Ocorrências	Conhecimentos mobilizados
Atividade 4	3 acertos	- Efeito “associa número a comprimento”.
	1 erro	- Efeito “espaço ocupado”
	1 erro	- Efeito “linha imaginária interextremidades”
	1 erro	- Efeito “projeção vertical”
	3 erros	- Interferência “associa posição a comprimento”.

O total de ocorrências foi de nove e não houve nenhum caso em que um evento de visualização tenha ocorrido simultaneamente entre acertos e erros. Porém, foi registrada uma situação em que o aluno 10 pode ter recebido influência de dois tipos de efeitos: “linha imaginária interextremidades” e “projeção vertical”. Quando comparamos esta tabela com a

que envolveu as três primeiras atividades, verificamos que a média de ocorrências se manteve quase a mesma, se antes era de 28, 57%, passou a ser 31,03% . Como se trata de uma questão que um dos entes geométricos é uma poligonal aberta, até que poderia ter registrado mais ocorrências. No entanto, houve uma maior variedade dos eventos visuais, atingindo um total de cinco.

Quando comparamos às ocorrências registradas nesta atividade com as três primeiras atividades, verificamos na tabela acima a presença de dois novos efeitos: “espaço ocupado” e “linha imaginária interextremidades”.

Quanto ao efeito do “espaço ocupado”, instiga-nos lembrar da lei de fechamento proposta pela corrente da Gestalt, embora reconhecendo que esse evento de visualização é uma padronização linear – linha poligonal aberta. Por outro lado, quanto mais tem sido acentuada essa tendência a fechamento das linhas abertas, temos percebido maiores incidências de manifestação do efeito “espaço ocupado”. Nessa perspectiva, ao comparar as duas linhas, o aluno pode ter focado nas configurações de envoltura de cada figura e optado pela linha vermelha como a mais curta.

Ainda como uma extensão dessa tendência de fechamento, talvez não fosse exagero admitir que o aluno também faça uma comparação baseando-se no comprimento das extremidades da respectiva linha, considerando essa predisposição de fechamento. Nesse caso, o aluno despreza o comprimento da linha e foca suas atenções nas respectivas extremidades de cada linha, resultando no efeito “linha imaginária interextremidades”.

No que tange aos procedimentos utilizados na atividade quatro, prevaleceu o uso da observação visual, mas também com incidência considerável da “utilização de algum artifício”.

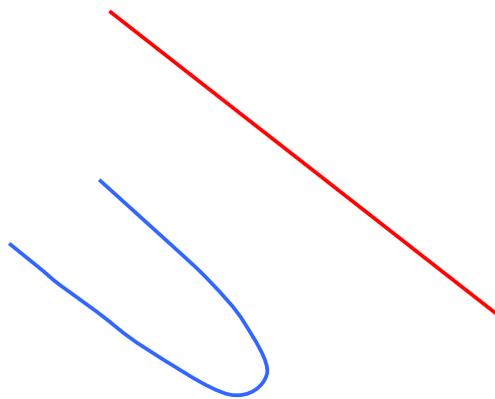
Quadro 27: Ocorrências dos procedimentos na atividade 4

Respostas		Procedimentos	Número de Ocorrências
Certas	Erradas		
11	10	Observação visual	21
5	2	Utilização de artifício	7

Cada aluno usou apenas um tipo de procedimento. Dessa forma, 75% das ocorrências foram relacionadas aos procedimentos de “observação visual” e 25% a “utilização de artifício”. Entre estas (7 situações), 71,43% (5 situações) correspondem a respostas certas, o que é um número considerável de acertos. Enquanto entre os 21 alunos que usaram a “observação visual” 10 indicaram a resposta errada no total de doze, representando um percentual de 83,33%. Pelo menos nesta atividade, poderíamos anunciar que os riscos de um aluno errar são bem maiores quando é efetuado o uso da “observação visual”.

5.5 Apresentação da quinta atividade**ATIVIDADE 5**

Observe os caminhos abaixo e responda:



Marque com um X o caminho mais curto:

() azul

() vermelho

Explique como você descobriu:

5.5.1 Análise preliminar da atividade 5

5.5.1.1 Introdução

A quinta atividade é mais uma situação formada por caminhos mistos, mas desta vez ocorre entre um segmento de reta e uma linha curva. Foi elaborada considerando basicamente três variáveis. Primeiro, verificar se o aluno era influenciado por meio de alguma projeção como as figuras estão inclinadas, a projeção também teria esta mesma característica, de natureza oblíqua, diferenciando-se das projeções que tinham sido verificadas nos estudos anteriores, ora de natureza horizontal ora vertical. Novamente, como nas atividades do 1.º grupo, objetivávamos verificar se o aluno, ao comparar as figuras, considerava a variável da posição, já que o segmento de reta vermelho encontrava-se numa posição “acima” da linha curva azul. E a última variável considerada, dizia respeito à possibilidade do aluno ser influenciado ou não pelo “espaço ocupado” pela região circundante das respectivas figuras, especialmente a linha curva azul que favorecia uma melhor configuração quanto a esse aspecto.

Os caminhos foram dispostos em posição não-prototípica, mas com certa configuração paralela entre eles que poderia favorecer a ocorrência desses eventos visuais. Não dispomos nos experimentos anteriores de comparações mistas como que estamos propondo, diminuindo nossas informações a respeito dessa situação. O comprimento do segmento de reta é de 7,0cm (vermelho) e o comprimento da linha curva é de 8,0cm (azul).

5.5.1.2 Interpretação de respostas possíveis

A mobilização adequada do conhecimento levará o aluno a efetuar a “comparação de comprimento dos segmentos” e a indicar a resposta correta que é o segmento de reta.

Caso o aluno indicasse como caminho mais curto a linha poligonal curva, supomos que essa opção poderia estar associada a fenômenos visuais como considerar projeção de natureza oblíqua, ou associar posição a comprimento e do efeito do “espaço ocupado”.

A configuração dupla dessas figuras, posição não-prototípica parecia favorecer a mobilização de certa projeção inclinada, neste caso, o aluno estabeleceria a comparação tomando como referências linhas inclinadas, como está ilustrado abaixo:

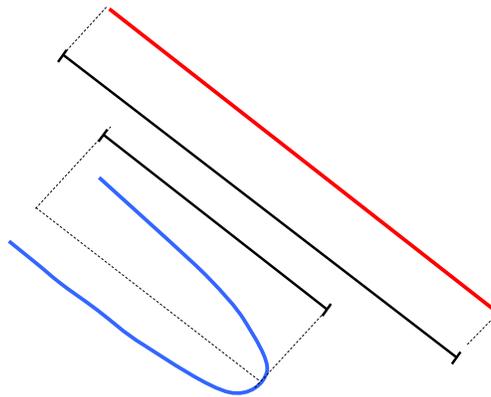


Figura 24: Interferência “projeção oblíqua” na atividade 5

Os comprimentos correspondentes a essas projeções são: 4,0 cm, para a linha azul e 7,0 cm, para a linha vermelha.

A posição do segmento de reta dando a idéia que estava sobre a linha curva também poderia levar o aluno a querer “associar posição a comprimento” e indicar a linha curva como mais curto. Mesmo sendo uma possibilidade mais remota não descartamos que algum aluno pudesse indicar a linha curva considerando regiões de envoltura sobre cada caminho e admitir

que esta ocupe um menor espaço. A simulação abaixo é uma tentativa de apresentar essa influência que o aluno poderia estar sujeito.

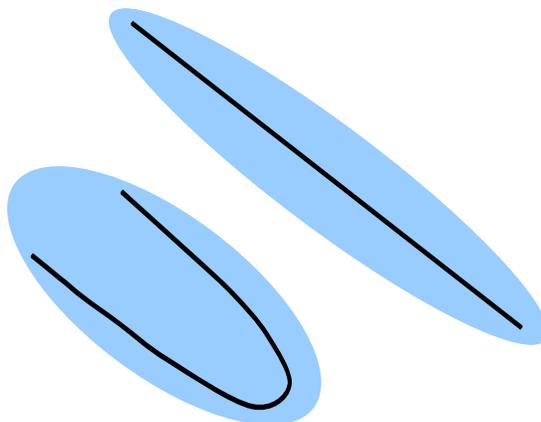


Figura 25: Efeito “espaço ocupado” na atividade 5

Nos estudos anteriores não foram detectados e nem considerados as interferências de “projeção oblíqua” e nem de “associar posição a comprimento”. Assim sendo, inserimos essas categorias como hipóteses e, quanto aos procedimentos que a elas estavam associadas, acreditávamos que prevaleceria o da “observação visual”, que será comentado posteriormente.

No quadro que se segue é possível verificar as respostas e os conhecimentos que se esperava que viessem a ser mobilizados.

Quadro 28: Respostas esperadas na atividade 5

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Azul	- Comparação de comprimento dos segmentos	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Vermelho	- Efeito “espaço ocupado”	- Observação visual.
	- Vermelho	- Interferência “projeção oblíqua”	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelho	- Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual.

Estávamos esperando que a comparação ocorresse baseando-se no recurso visual, mas também por meio de algum artifício como o uso de dedos ou lápis/borracha. Este constituindo-se como um meio mais seguro de validação. Mesmo que o aluno fizesse uso do recurso visual, ainda poderia improvisar algum instrumento (lápis/borracha) que lhe daria mais oportunidades para efetuar ou confirmar suas descobertas.

5.5.2 Análise posterior da atividade 5

De acordo com o que foi apresentado no anexo 5, Tabela 6, temos abaixo os seguintes resultados relacionados a atividade 5:

Tabela 5: ANEXO E: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 5

ATIVIDADE 5			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 26, 27	17	60,71
Errada	1, 6, 10, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 28	11	39,29
Índice Percentual total de acertos e erros: C (17) 60,71% - E (11) 39,29%			

Novamente o índice de acertos se manteve dentro do patamar da atividade anterior, pois houve apenas mais um, o que equivale a 60,71% de respostas certas. Essa constância no índice está coerente se considerarmos que não havia quase diferença entre os entes geométricos envolvidos nas duas situações, isto é, se na atividade 4 a comparação era para ser efetuada entre um segmento de reta e uma linha poligonal aberta, na questão 5 passou a ser entre um segmento de reta e uma linha curva.

Por meio do levantamento apresentado no anexo L, não se tem muitos elementos que indiquem ocorrências dos eventos de visualização. Entre as respostas erradas apenas as dos

alunos 10 e 23 ficaram mais evidentes a presença de algum tipo de efeito. De forma mais sutil, também categorizamos a do aluno 1. Em outras podem ter ocorrido algum tipo de influência, mas não conseguimos perceber. O fato de indicarem a linha errada, e às vezes, associados ao procedimento da “observação visual” constituem-se como sinalizadores mais evidentes. Destacamos, sobretudo, os argumentos adotados nas estratégias pelos alunos: 15, 19, 21, 22 e 24. Há muita convicção no argumento sugerido, o que nos leva a acreditar que poderia estar ocorrendo algum desses eventos de visualização, mas que não foram explicitamente manifestos. É igualmente possível que também tenha ocorrido algum tipo de fenômeno visual entre as respostas classificadas como certas, mas que não apresentam argumentos consistentes nas suas escolhas.

Uma primeira resposta que suspeitamos relacionar-se com evento de visualização é a do aluno 10, que assim expressou a estratégia usada: “O azul tem curvas, mas se torna perto”. Parece ter levado em conta as extremidades das respectivas linhas e não o comprimento total de cada ente geométrico em si. Dessa forma, se de fato foi essa variável que considerou, foi influenciado pelo efeito da “linha imaginária interextremidades”.

A outra resposta que também sugere influência visual é a do aluno 23 que argumentou: “Eu descobri com uma caneta porque se eu esticar a linha azul vai ficar mais baixa do que a linha vermelha”. Fica evidente que está considerando a interferência “associa posição a comprimento”, já que ao esticar uma das partes da linha curva para baixo, a deixa numa posição mais abaixo que a do segmento de reta, configurando-se que a relação acima e abaixo passou a variável determinante de sua escolha. O mais incrível é a coerência nas respostas deste aluno, ou seja, em todas as atividades tem demonstrado que recebe influência desse mesmo evento de visualização, constituindo-se como algo muito resistente em toda sua trajetória nas respectivas questões.

Por último, inserimos a resposta do aluno 1 que também suspeitamos relacionar-se com evento de visualização e que assim expressou a estratégia usada: “Eu achei no dedo, eu ajuntei os dedos”. No caso de ter juntado os dedos e realizado a contagem dos mesmos, entendemos que tal procedimento sinaliza para o efeito “associa número a comprimento”. O aluno estaria buscando alguma forma de estabelecer sua comparação por meio que considera mais fácil e que tem mais afinidade que é o processo de contagem. Poderíamos também admitir que o procedimento adotado se caracterize como uma medição propriamente dita em que as unidades usadas seriam os “dedos”. No entanto, o fato de indicar erradamente a resposta parece que está associado muito mais a um apelo da busca da relação com o número do que com o caráter de medir.

Respostas tidas como certas e que possam ter recebido influência de algum fenômeno visual, não categorizamos nenhum caso, embora suspeitemos da efetivação de alguma ocorrência, especialmente quando verificamos alunos afirmarem:

Aluno 3 – Porque o vermelho está reto e o azul está deitado, eu pensei e observei e soube qual era.

Aluno 7 – Vermelho tava deitado.

Todos dois argumentam o fato que um dos entes geométrico está deitado. Para o aluno 3, é a linha curva que está deitada, enquanto o aluno 7 afirma que é o segmento vermelho que está deitado. Qual o real sentido desse “deitado” para cada um dos alunos? É possível que subjacente a estes argumentos esteja presente alguma influência de efeito visual, embora não tenhamos como afirmar tal ocorrência.

Outras respostas, tanto entre as erradas quanto entre as certas, também nos instigam a suspeitar que possa haver algum tipo de influência visual, mas preferimos categorizar apenas as que foram mais convincentes nos seus argumentos. No quadro que se segue, além das respostas e dos conhecimentos mobilizados pelos alunos, também apresentamos os procedimentos que eles utilizaram.

Quadro 29: Ocorrências na atividade 5

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Vermelho (2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 26, 27)	- Comparação de comprimento dos segmentos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
-Papel e lápis	- Azul (10)	- Efeito “linha imaginária intextremidades”	- Observação visual.
	- Azul (1)	- Efeito “associa número a comprimento”.	- Utilização de artifício (dedos).
	- Azul (23)	- Interferência “associa posição a comprimento”	- Utilização de artifício (caneta).
	- Azul (6, 15, 19, 21, 22, 24, 25, 28)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual. - Utilização de artifício.

Pelo que pode ser visto na tabela acima, constam apenas 3 registros de fenômenos visuais, diminuindo sensivelmente o número de ocorrências quando comparada com a atividade anterior que atingiu um patamar de 32,14% (9 situações), enquanto nesta atividade foi de 10,71% (três situações). No entanto, há um bom número de respostas erradas classificadas como “comparação indevida, sem identificar a causa”, o que nos leva suspeitar que subjacente a essas escolhas possam existir influências de outros eventos de visualização. Aliás, mesmo entre as respostas tidas como certas, é provável que também haja influência de algum fenômeno visual, mas que não foi possível ser detectado.

A seguir está apresentado um resumo dos eventos de visualização verificados na atividade 5.

Quadro 30: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 5

Atividades	Número de Ocorrências	Conhecimentos mobilizados
Atividade 5	1 erro	Efeito da “linha imaginária interextremidades”
	1 erro	Efeito “associa número a comprimento”
	1 erro	Interferência “associa posição a comprimento”

Como pode ser visto acima os fenômenos de visualização foram acionados em 3 ocasiões e se restringiram a situações de respostas erradas. O bloco das 3 primeiras atividades obteve um índice de 28,57% de ocorrências. A atividade 4 atingiu 31,03%, enquanto esta foi de apenas 10,71% de ocorrências, isto é, um índice bem inferior aos dois anteriores. Terminou sendo uma surpresa essa baixa incidência.

Esse baixo índice de fenômenos de visualização faz-nos suspeitar que seja uma decorrência de uma fraca força da Gestalt no campo considerado, ou seja, entra as figuras envolvidas na comparação.

Quanto aos procedimentos acionados na atividade 5, como era esperado, prevaleceu o da “observação visual”, mas houve uma redução de 3 ocorrências quando comparada com a atividade anterior.

Quadro 31: Ocorrências dos procedimentos na atividade 5

Respostas		Procedimentos	Número de Ocorrências
Certas	Erradas		
11	7	Observação visual	18
7	3	Utilização de artifício	10

Nenhum aluno expressou ter utilizado os dois procedimentos ao mesmo tempo. As incidências das ocorrências foram respectivamente de: 64,29% para “observação visual” e 35,71% para utilização de artifício. Das 18 respostas relacionadas ao procedimento da “observação visual”, 8 foram indicadas erradamente, representando 44,44%. Das 10 referentes à “utilização de artifício”, apenas 3 foram erradas, correspondendo a 30 %. Mais uma vez observamos um maior número de casos de erros associados ao procedimento da “observação visual”, que também sofre as maiores influências dos efeitos visuais.

5.6 Apresentação da sexta atividade

ATIVIDADE 6

Observe os caminhos abaixo e responda:



Marque com um X o caminho mais curto:

azul

vermelho

Explique como você descobriu:

5.6.1 Análise preliminar da atividade 6

5.6.1.1 Introdução

Esta atividade iniciou um novo grupo de figuras, formada apenas por linhas poligonais abertas. Portanto, não se tratava de uma comparação mista e sua elaboração visava verificar se o aluno considerava, ao comparar configurações como a que estava sendo proposta, a variável do número de degraus/espelho dos caminhos com formato de escada, no lugar do comprimento correspondente a cada linha poligonal. Em outras palavras, se havia influência do efeito “associa número a comprimento”.

Também objetivávamos verificar se havia influência de outros efeitos como é o caso do “espaço ocupado”, “projeção horizontal” ou da “linha imaginária interextremidades” e o da “projeção vertical”.

A comparação entre linhas poligonais abertas torna bem mais rica as possibilidades de se verificar tais eventos. Esta situação permite explorar todos os casos detectados no experimento desenvolvido por Barbosa (2002).

Os caminhos foram dispostos em posição prototípica e o comprimento da linha poligonal azul é de 7,0cm, enquanto a linha poligonal vermelha mede 8,0cm.

5.6.1.2 Interpretação de respostas possíveis

A linha poligonal azul é a resposta correta que deveria ser indicada pelo aluno que efetuasse a mobilização da “comparação de comprimento de linhas poligonais abertas”. No

entanto, tal indicação poderia ser oriunda da influência dos efeitos “espaço ocupado”, ou “projeção horizontal” ou “linha imaginária interextremidades”.

O “espaço ocupado” da linha poligonal vermelha é maior que o da linha poligonal azul, facilitando ao aluno para que indicasse esta como a de menor comprimento. Na ilustração que se segue, é perceptível que havia uma ligeira vantagem da região de envoltura do caminho vermelho no que diz respeito à área circundante:

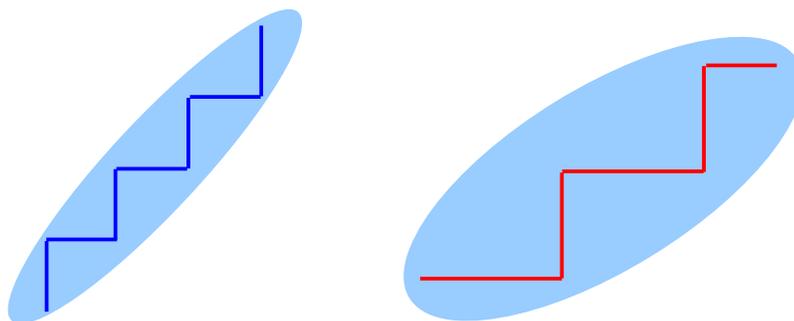


Figura 26: Efeito “espaço ocupado” na atividade 6

O aluno também poderia considerar as “projeções horizontais” dessas linhas poligonais como referenciais para o estabelecimento da sua comparação. Como a medida da linha poligonal azul é de 3,1 cm e a medida da linha poligonal vermelha é de 5,1 cm, a opção recairia no caminho azul, evidenciando a influência do efeito cuja ilustração está simulada abaixo:

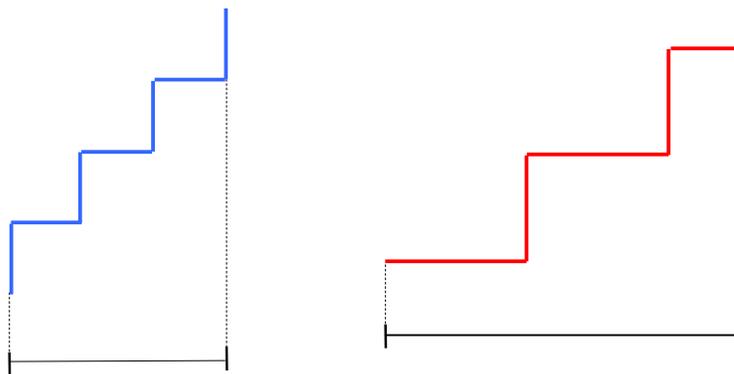


Figura 27: Efeito “projeção horizontal” na atividade 6

Uma outra possibilidade era o aluno considerar o comprimento entre as extremidades de cada linha. Assim procedendo, faria a escolha pela linha poligonal azul, cuja medida é de 5,0 cm, enquanto a vermelha mede 5,9 cm, como ver nas ilustrações a seguir:

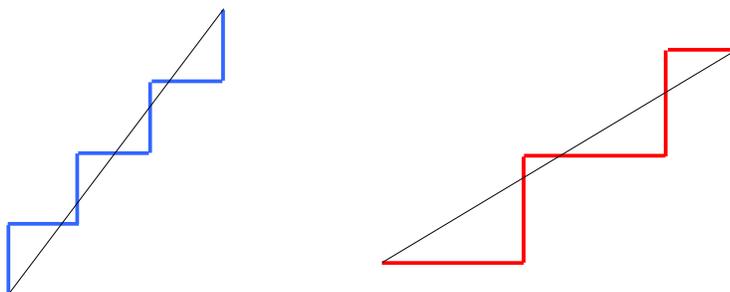


Figura 28: Efeito “linha imaginária interextremidades” na atividade 6

Todos os três eventos poderiam interferir visualmente para que o aluno fizesse a referida escolha, sinalizando que a resposta correta poderia estar associada a tais influências visuais. Portanto, esse exemplo parece tipificar que nem sempre a escolha de uma alternativa certa significa necessariamente que esteja associada a uma mobilização adequada de conhecimento. Muito provavelmente, numa atividade do cotidiano em sala de aula, trataria de uma nuance que tenderia a passar despercebida.

Diante dessa necessidade delicada de diferenciar a origem da resposta, aumentou nossa responsabilidade para estarmos atentos a essas possíveis influências. A solicitação para que o aluno explicasse como descobriu a resposta é mais um canal para extrairmos possíveis relações com os efeitos visuais.

Nos estudos anteriores, tais efeitos foram detectados associados aos erros. Alguns resultados dos estudos de Barbosa (2002) e Brito (2003) foram apresentados nas atividades anteriores sobre os efeitos “espaço ocupado” e “projeção horizontal”, mas não aos relacionados à “linha imaginária interextremidades”, que deixaremos para inserir algumas

considerações na próxima atividade que tem como objetivo verificar a influência deste respectivo efeito.

Após essas considerações sobre esses eventos de visualização que poderiam interferir na resposta correta, faremos os comentários seguintes quanto às possíveis influências dos efeitos associados a uma resposta errada; isto é, caso o aluno viesse a indicar o caminho vermelho como o mais curto. Tal escolha poderia estar vinculada à mobilização do conhecimento “associa número a comprimento”, ou ainda, da “projeção vertical”.

Ao considerarmos o efeito “associa número a comprimento”, estávamos admitindo que um aluno pudesse contar quantas partes tem cada linha poligonal e determinar quem é mais curta não em função do critério comprimento, mas dessa relação com o número de partes. Na situação desta atividade, a linha vermelha tem 5 partes e a azul 7. Nessa perspectiva, associaria que o caminho vermelho seria o mais curto.

Ao analisar as respostas da 3.^a atividade da 2.^a sessão (ver figura 3) para indicar o caminho mais comprido, Barbosa (2002) sugeriu que o erro cometido por 16 alunos (55,2%) pudesse ter ocorrido sob a influência de “associar número de partes a comprimento”. Mesmo sem ter enfatizado, também podemos admitir que o próprio efeito da “projeção vertical” poderia ter interferido nas respectivas respostas. Por outro lado, o caminho que possuía o menor número de partes era o EF, mas não houve registro dessa indicação. Cabe evidenciar que este caminho era o único em que os comprimentos das partes não eram padronizados, além do que a grande extensão da parte maior deve ter favorecido sua não indicação. Os erros (em número de 8) quanto ao caminho mais curto se concentraram na escolha da linha GH, o que parece estar associado ao efeito do “espaço ocupado”.

Há indícios no experimento de Brito (2003) que alguns alunos recorreram à mobilização de “associar número de partes a comprimento”, pelo que podemos confirmar na assertiva:

No modelo da atividade no ambiente papel e lápis, além destes tipos de erros apresentados anteriormente, verificamos que outros alunos cometeram erros, acertando apenas um item ou errando toda a questão, pelo que não pudemos classificá-los nos referidos efeitos. Dentre esses erros, temos o caso dos alunos 5 e 22 que escolheram o caminho CD para o item (a) e EF para o item (b), levando-nos a supor que, nesta escolha, tenham sido influenciados pelo critério do caminho que tivesse maior ou menor número de pedaços, ou seja, o de maior ou menor número de “quinas”. (p. 105-106).

Ao observarmos as figuras (ver figura 1), envolvidas nessa atividade, é possível inferir que esses alunos tenham sofrido alguma influência desse evento. Nessa mesma atividade, essa pesquisadora detectou indícios do efeito “linha imaginária interextremidades”, mas como deu mais ênfase às situações relacionadas a ligar os pontos mais extremos – interextremos – preferimos inserir tais considerações na atividade que trata especificamente sobre este conhecimento acionado.

Quanto à influência do efeito “projeção vertical”, em que o aluno projetaria “linhas imaginárias” para o estabelecimento dessa comparação, elas apresentariam os seguintes comprimentos: 4,1 cm de comprimento da projeção da linha poligonal azul e 3,2 cm de comprimento da projeção da linha poligonal vermelha. Nesse caso indicaria a linha poligonal vermelha como a mais curta. A simulação abaixo ilustra esse evento visual:

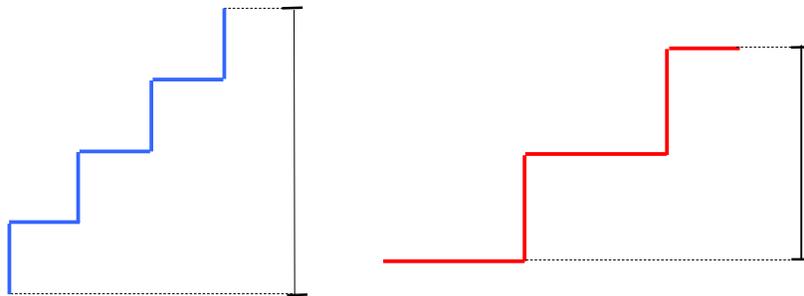


Figura 29: Efeito “projeção vertical” na atividade 6

No quadro a seguir, é possível notar a presença de efeitos que poderiam influenciar o aluno para atribuir as respostas erradas, mas também nas ocorrências de respostas certas.

Quadro 32: Respostas esperadas na atividade 6

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Azul	- Comparação de comprimento das linhas poligonais abertas.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul	- Efeito “espaço ocupado”.	- Observação visual.
	- Azul	- Efeito “projeção horizontal”.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul	- Efeito “linha imaginária enterextremidades”.	- Observação visual.
- Papel e lápis	- Vermelho	- Efeito “projeção vertical”.	- Observação visual.
	- Vermelho	- Efeito “associa número a comprimento”.	- Observação visual. - Contagem das partes.

O procedimento da “observação visual” é o único que está indicado como podendo ser acionado em qualquer uma das situações, mas é a primeira atividade que havia possibilidade desse recurso relacionar-se com mobilizações inadequadas (“espaço ocupado”, “projeção horizontal” e “linha imaginária interextremidades”) e que favoreciam respostas corretas.

A “utilização de artifício” que pode ser com os dedos ou lápis/borracha era uma alternativa presumível, mas um pouco mais difícil de acontecer. Um outro recurso previsto seria o aluno optar por contar as partes de cada “escada” e estabelecer a comparação a partir desse critério, o que levaria a concluir que linha poligonal vermelha é a mais curta por ter apenas 5 contra 7 da linha azul.

Barbosa (2002), ao fazer referência a um erro cometido por 8 alunos, numa atividade que constava figuras com tais características, comentou: “[...] já havíamos antecipado sua ocorrência, acreditando-se decorrer do número de pequenos segmentos que compõem a ‘escada’, o que acarreta dificuldades no uso de instrumentos de comparação de comprimentos” (p. 91).

Nesse experimento, uma atividade composta apenas de linhas poligonais abertas (“quebradas”), esse pesquisador, ao interpretar o número elevado de erros, justificou relacionar-se ao uso inadequado dos instrumentos:

Uma primeira explicação para a ocorrência de muitas respostas erradas poderia estar na imprecisão decorrente do uso inadequado dos instrumentos de comparação. O uso do cordão, ou do fio, por um número elevado de alunos e o fato de que 17 deles (58,6%) não terem utilizado as réguas, que seriam, em princípio, as “ferramentas” mais apropriadas ao problema, seria um indicador de que os erros advieram, em particular, do uso dos instrumentos considerando a existência de muitos ângulos, em virtude de haver algumas curvas (BARBOSA, 2002, p. 129).

Pelos dados acima, fica sinalizado que mesmo sendo disponibilizado ao aluno instrumentos adequados, não se tem a garantia que seja efetuado um bom uso do material, pois nem sempre ele sabe escolher qual o instrumento mais apropriado para ser usado em determinada situação.

Nesse mesmo experimento, em uma outra atividade que constava um caminho em forma de “escada”, prevaleceu o uso de cordão ou fio flexível. Por outro lado, no experimento de Brito (2003), que constava caminho com o referido formato, os alunos usaram como procedimento, no ambiente papel e lápis, a “observação visual” e a “sobreposição de medianeiros”.

5.6.2 Análise posterior da atividade 6

O número de acertos e erros na atividade 6 foi exatamente o mesmo, como podemos conferir na tabela abaixo, por meio dos dados do anexo F:

Tabela 6: ANEXO F: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 6

ATIVIDADE 6			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 19, 21, 24, 25	14	50,00
Errada	1, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 18, 20, 22, 23, 26, 27, 28	14	50,00
Índice Percentual total de acertos e erros: C (14) 50,00% - E (14) 50,00%			

Esta atividade registrou o terceiro menor índice de acertos, atingindo apenas 50 %, que obviamente também é o percentual de erros. É bom destacar que foi a primeira atividade envolvendo duas linhas poligonais abertas, dificultando ainda mais o estabelecimento da comparação. Era natural que com a maior incidência de erros, aumentasse a possibilidade de ocorrer eventos visuais, pois quase sempre o primeiro está associado ao segundo, aliado na maior parte ao procedimento da “observação visual”.

No anexo M é possível perceber um maior número de indícios da presença de fenômenos de visualização, que descreveremos nos próximos parágrafos.

Como procedemos nas análises anteriores, começaremos destacando as incidências entre as respostas erradas. A primeira é a que foi verificada no aluno 7: “Tava vermelho lado, azul medi lado”. Parece uma repetição do que aconteceu na atividade 4 efetuada por esse aluno. O argumento repete-se no que se refere a destacar o aspecto do lado, sinalizando por considerar posição. Esta variável já tinha acionado nas 3 primeiras atividades e como a resposta está associada ao erro e por utilizar o procedimento da “observação visual”, em virtude de tais elementos, entendemos que as evidências sugerem a interferência “associa posição a comprimento”.

A segunda resposta que nos instiga admitir algum tipo de influência é a do aluno 10: “Porque os degraus do vermelho é mais largo e o caminho fica mais curto”. Que relação pode existir entre degraus mais largos da linha poligonal vermelha com menor comprimento quando comparada com a linha poligonal azul? A resposta do aluno parece sinalizar que é mais curto porque tem menos obstáculos (7 na cor azul e 5 na cor vermelha), isto é, um menor número de “batentes” ou de “quinas”. É como numa situação real uma pessoa tivesse que percorrer bem mais curvas por um caminho quando comparado com outro. Portanto, isso nos leva acreditar que efetuou a comparação considerando o referencial numérico. Assim, admitimos que houve influência do efeito “associa número a comprimento”. Uma segunda

possibilidade, um pouco mais remota, seria estar influenciado pelo efeito da “projeção vertical”, já que por meio de tal projeção a linha poligonal vermelha é mais curta.

Uma outra resposta que também sugere ocorrência de um evento de visualização é a que foi manifesta pelo aluno 11: “Apesar do vermelho os traços serem grande, mas é o mais curto”. Observa-se que o argumento não diferencia da resposta apresentada pelo aluno 10, pois este usou a expressão “mais largo” fazendo referência ao tamanho do degrau, enquanto o aluno 11 usa a expressão “traços serem grande” querendo anunciar a mesma idéia. Assim sendo, admitimos que este aluno foi influenciado pelo efeito “associa número a comprimento”. Nessa perspectiva, estaria considerando que o vermelho mesmo tendo traços maiores, mas como tem menos, torna o comprimento menor. Semelhantemente, ao caso anterior, não descartamos que também possa ter ocorrido à influência do efeito “projeção vertical”, pois baseado nesse evento o comprimento da linha poligonal vermelha torna-se menor.

Uma quarta resposta que sinaliza ocorrência de evento de visualização é a do aluno 13: “O azul ta mais maior do que o vermelho porque o azul ta com um bocado de pedacinho”. É um argumento que fica bem evidente a associação que faz com o número de pedaços da linha poligonal azul ser maior do que os da linha poligonal vermelha. Baseando-se nessa evidência, admitimos configurar-se como efeito “associa número a comprimento”.

Pelo argumento do aluno 18, é possível que tenha considerado a influência da “projeção vertical”, pois afirmou: “Porque o azul está mais grande e o vermelho está mais pequeno”. Como anunciamos anteriormente, é por meio desse evento de visualização que a linha poligonal vermelha é mais curta. Também subjacente a esta resposta poderia ser que o aluno estivesse apenas focando qual o ente geométrico que ocupa uma posição mais acima, concluindo que essa variável o tornaria mais comprido. Se realmente estabeleceu a

comparação por meio dessa variável, poderíamos admitir que considerou a interferência “associa posição a comprimento”.

O sexto aluno que também apresenta resposta sugerindo que se baseia em efeito visual é o 26: “porque as escadas do vermelho é mais curto”. Deixa entender que estabelece a comparação das linhas como representações de escadas, logo, a vermelha é menor porque tem menos “batentes”. Baseando-se nesse parâmetro estaria influenciado pelo efeito “associa número a comprimento”. Também poderia estar considerando o efeito da “projeção vertical”, pois essa perspectiva permite o aluno concluir que a linha poligonal vermelha é mais curta.

Ainda tivemos, entre as respostas erradas, a do aluno 27 que também sinaliza ter recebido influência de fenômeno de visualização: “Porque o vermelho tem menos espaços”. Trata-se de mais uma comparação estabelecida por meio de relação numérica entre valores atribuídos as duas representações de escada, configurando-se como uma ocorrência do efeito “associa número a comprimento”.

Nas outras indicações de respostas erradas é provável que também existam outras ocorrências de visualização, mas como não há evidências nas descrições das estratégias, preferimos não categorizá-las entre tais fenômenos.

Também foi possível verificar indícios de efeitos visuais no meio das respostas certas. Destacaríamos as respostas dos alunos: 8, 12, 15, 16 e 21. A seguir podemos observar o que cada um descreveu na estratégia utilizada:

Aluno 8 – Porque está em partes pequenas.

Aluno 12 – Porque dá para ver que o azul é menos que o vermelho.

Aluno 15 – No começo eu pensava que era o vermelho, mas não é, só porque ele só tinha 3 escadinhas que ele era o menor então depois eu descobri que era o azul.

Aluno 16 – Eu descobri que o vermelho tem as curvas maior e o azul as curvas menor.

Aluno 21 – Porque o azul é mais curtinho e o espaço é pequeno.

A resposta do aluno 8 sugere que o estabelecimento da comparação teve como foco o formato de cada ente geométrico, prendendo-se ao aspecto das partes dessas linhas. Como as partes da linha poligonal azul são menores que a linha poligonal vermelha fez opção por

aquela. Essa estratégia nos leva a pensar que uma outra modalidade do efeito “linha imaginária interextremos” estaria vindo à tona. Seria a mobilização que ao invés do aluno focalizar suas atenções nos pontos mais extremos de toda extensão do ente geométrico, termina apelando para aspectos específicos, no caso, definiu as partes como preponderantes para sua resposta e efetuou a comparação baseando-se nelas.

No caso do aluno 12 alegando que o azul é “menos” que o vermelho, mais de uma interpretação sinaliza: primeiro não estabelece a comparação por meio do campo numérico, embora tenha usado o termo “menos” que está associado a tal campo; segundo, pode ser que está fazendo referência ao menor comprimento da linha poligonal azul considerando o efeito da “projeção horizontal”; terceiro, pode ter usado “menos” no sentido do menor espaço de envoltura na linha poligonal azul, constituindo-se como influência do efeito do “espaço ocupado”.

O aluno 15 deixou entender que momentaneamente esteve recebendo influência do efeito “associa número a comprimento”, pois fez menção que no início considerou o menor número de “escadinhas” do vermelho. Contudo, posteriormente superou esse fenômeno e fez a indicação considerando o aspecto do comprimento.

Assim como o aluno 8, a descrição da estratégia do aluno 16 também sugere que a comparação foi efetuada observando o formato de cada ente geométrico, isto é, considerando não o todo de cada respectiva linha, mas as partes das mesmas. Nessa perspectiva, fez opção pela linha poligonal azul porque as partes são menores que a linha poligonal vermelha. Entendemos que podemos categorizar como mais um caso do efeito “linha imaginária interextremos”, embora como uma modalidade distinta dos demais estudos.

Encerrando esse ciclo de respostas certas que sinalizam para ocorrência de fenômenos de visualização, temos a do aluno 21 que sugere três aspectos: “o azul é mais curtinho” porque o todo dessa linha apresenta uma “projeção horizontal” menor; ao anunciar “e o

espaço é pequeno” pode estar reforçando que está considerando a região de envoltura de cada linha, ou seja, influenciado pelo efeito do “espaço ocupado”; por último, “o azul é mais curtinho” pode estar considerando que suas partes são menores que a da linha poligonal vermelha. Talvez seja uma alusão que a comparação está baseada nas partes. Assim sendo, configura-se como uma provável influência do efeito “linha imaginária interextremos”, mas como as respostas dos alunos 8 e 16 considera os pontos extremos das partes e não da figura como um todo.

Pelo que descrevemos antes, verificamos que houve uma considerável incidência de fenômenos de visualização e que resumiremos a seguir, destacando as respostas dos alunos, os conhecimentos mobilizados e os respectivos procedimentos adotados por cada um.

Quadro 33: Ocorrências na atividade 6

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Azul (2, 3, 4, 5, 8, 9,12, 15,16, 17, 19, 21, 24, 25)	-Comparação de comprimento das linhas poligonais.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul (8, 16, 21)	- Efeito “linha imaginária interextremos”	- Observação visual.
	- Azul (12, 21)	- Efeito “projeção horizontal”	- Observação visual.
	- Azul (12, 21)	- Efeito “espaço ocupado”	- Observação visual.
	- Azul (15)	- Efeito “associa número a comprimento”	- Observação visual.
-Papel e lápis	- Vermelho (10, 11, 13, 26, 27)	- Efeito “associa número a comprimento”	- Observação visual. - Contagem das partes.
	- Vermelho (10, 11, 18, 26)	- Efeito “projeção vertical”	- Observação visual.
	- Vermelho (7, 18)	- Interferência “associa posição a comprimento”	- Utilização de artifício; - Observação visual.
	- Vermelho (1, 6, 14, 20, 22, 23,28)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual. - Utilização de artifício.

Diferentemente da atividade anterior, esta teve um maior número de ocorrências no tocante aos efeitos visuais, embora em algumas ocasiões verifiquemos que os mesmos alunos foram os protagonistas em mais de um desses eventos. Gostaríamos de destacar que a indicação do efeito “linha imaginária intextremos”, modalidade que considera as partes, reforça o conceito de centração assinalado por Piaget (1969). Trata-se de um foco que o aluno centra sobre as partes das figuras. Nesse caso, ele elege as partes que mais lhe chamam atenção .

Das 40 ocorrências registradas, 22 foram consideradas como respostas certas e 18 como erradas. Foram 19 ocorrências relacionadas a influências visuais (8 certas e 11 erradas), totalizando 47,5% de eventos de visualização, que é um patamar bem elevado.

Extraindo da tabela anterior apenas as ocorrências relacionadas aos eventos de visualização temos:

Quadro 34: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 6

Atividades	Número de Ocorrências	Conhecimentos mobilizados
Atividade 6	3 acertos	- Efeito “linha imaginária interextremos”
	2 acertos	- Efeito “projeção horizontal”
	2 acertos	- Efeito “espaço ocupado”
	6 (1 acerto e 5 erros)	-Efeito “associa número a comprimento”.
	4 erros	- Efeito “projeção vertical”
	2 erros	- Interferência “associa posição a comprimento”

Foi uma atividade com um considerável número de ocorrências de fenômenos de visualização, totalizando 19 situações (47,5%). Houve também uma boa variedade dos

eventos, sinalizando que a configuração dos entes geométricos para estabelecimento da comparação foi extremamente rica no sentido de tornar mais fértil as influências visuais.

Essa presença marcante dos eventos de visualização pode estar associada a uma considerável força de atração entre as duas figuras comparadas, isto é, uma em que ocorreu uma boa Gestalt. Nesse caso, a lei de organização que contribuiu para essa influência foi a da semelhança, destacando-se os traços horizontais e verticais de cada linha poligonal aberta e constituindo-se como os elementos que apresentaram características comuns.

Quanto ao efeito “associa número a comprimento”, talvez esteja associada à “concepção número” tratada por Douady & Perrin-Glorian (1989). Segundo essas autoras, algumas dificuldades na resolução de problemas com área são decorrentes dessa tendência do aluno restringir-se ora a uma “concepção forma” ora a uma “concepção número”. Portanto, na atividade que estamos tratando, como alguns alunos não desenvolveram uma “concepção grandeza” ao visualizar as formas dos entes geométricos, terminam sendo influenciados pela interferência do número.

Em relação aos procedimentos adotados, manteve-se quase o mesmo quadro da atividade anterior, pois apenas aumentou um caso de aluno que utilizou a “observação visual”, como pode ser visto discriminado abaixo.

Quadro 35: Ocorrências dos procedimentos na atividade 6

Respostas		Procedimentos	Número de Ocorrências
Certas	Erradas		
12	11	Observação visual	23
5	4	Utilização de artifício	9

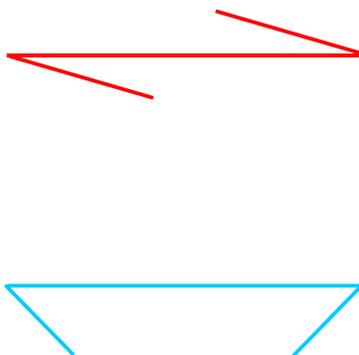
As incidências apontam para uma maioria vantajosa da “observação visual”, já que as vinte e três ocorrências associadas à “observação visual” representaram 71,88%, enquanto as nove associadas à “utilização de artifício” atingiram 28,12%. Quatro alunos utilizaram os dois

procedimentos: 3, 5, 19 e 23. Apenas este último não indicou corretamente a resposta. Pelos dados anteriormente, observa-se certo equilíbrio entre as respostas certas e erradas quanto aos usos dos procedimentos. Portanto, nesta atividade não há maiores evidências de supremacia ou detrimento de um procedimento em relação ao outro, no que diz respeito ao aumento de possibilidades de acertos ou erros.

5.7 Apresentação da sétima atividade

ATIVIDADE 7

Observe os caminhos abaixo e responda:



Marque com um X o caminho mais curto:

() azul () vermelho

Explique como você descobriu:

5.7.1 – Análise preliminar da atividade 7

5.7.1.1 Introdução

Esta é a segunda atividade do grupo formado entre linhas poligonais abertas. Por conseguinte, não se tratou de uma comparação entre caminhos mistos e sua elaboração visou verificar a influência do efeito da “linha imaginária interextremidades”.

Nos experimentos anteriores, em que foi detectado esse efeito, foi percebido que os alunos tendem ao comparar linhas poligonais abertas ou linhas curvas, considerando ora a distância entre as duas pontas das linhas, ora a distância entre pontos mais extremos. Assim sendo, nesta atividade interessávamos verificar a primeira delas, por isso tivemos o cuidado na escolha das figuras para que houvesse apenas influência do comprimento entre os pontos das extremidades e não do comprimento entre os “pontos mais extremos”. Este último será analisado na próxima atividade.

Além do efeito supracitado, tivemos expectativa que algum aluno pudesse ser influenciado pelo efeito do “espaço ocupado”. Os caminhos foram dispostos em posição prototípica e o comprimento da linha poligonal azul é de 8,0 cm, enquanto a linha poligonal vermelha mede 9,0 cm.

5.7.1.2 Interpretação de respostas possíveis

O aluno que efetuasse a mobilização correta, ou seja, a “comparação de comprimento de linhas poligonais abertas”, indicaria a linha poligonal azul como o caminho mais curto. Ao efetivar esta mobilização teria como validar sua resposta por dois procedimentos: “observação visual” e “utilização de artifícios”.

É provável que a principal causa da indicação da resposta errada nessa questão estivesse associada à mobilização inadequada do conhecimento “linha imaginária interextremidades”. A distância que liga as extremidades da linha poligonal azul é de 3,1 cm, enquanto a distância entre as extremidades da linha poligonal vermelha é de 1,5 cm, como mostra à simulação a seguir:

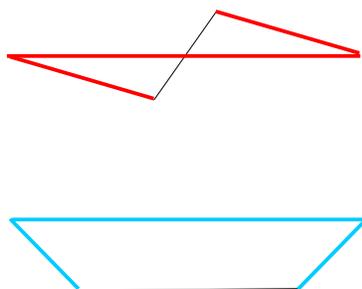


Figura 30: Efeito “linha imaginária interextremidades” na atividade 7

No experimento desenvolvido por Barbosa (2003), houve mais de uma atividade em que se suspeitou que os alunos estivessem sendo influenciados pelo efeito da “linha imaginária”.

Por outro lado, poderia ter ocorrido, em alguns casos, a estratégia que considera o comprimento do caminho tomado entre os seus pontos extremos. Chamamos a essa hipótese de “efeito da linha imaginária” (p. 130).

Gostaríamos de destacar às situações da atividade 3 (ver figura 9) da 2.^a sessão do experimento de Barbosa (2002). Esse pesquisador interpretou esse evento como o fator que explicaria as quatro indicações (13,8%) errôneas de GH como o caminho mais curto e EF como o mais comprido.

Em outra atividade também houve indicação que alguns alunos podem ter sido influenciados por esse efeito e o do “espaço ocupado”. “Por outro lado, os 15 alunos (51,7%), que indicaram erradamente TU ou MN como o caminho mais comprido, podem ter sido influenciados pelo ‘efeito linha imaginária’ ou pelo ‘efeito espaço ocupado’” (BARBOSA,

2002, p.141). Na atividade seguinte desse experimento também se interpretou que dois alunos podem ter mobilizado essa “linha imaginária”:

Uma interpretação possível para o erro de um outro grupo, com dois alunos, são eles terem considerado o comprimento dos caminhos como a distância entre os seus extremos, o que denominamos “efeito da linha imaginária”. Tais distâncias, no caso em análise, são: 1,5cm (EF), 4,0cm (AB), 4,5cm (CD) e 5,5cm (GH) (BARBOSA, 2002, p. 144).

Teixeira (2004) detectou no seu experimento que dois alunos foram influenciados pelo efeito da “linha imaginária”, como é possível constatar na assertiva abaixo:

Outro aspecto a ser observado nessa atividade é a ocorrência significativa de alunos, 19% no 2.º período e 36% no 8.º período, que fizeram a operação da soma utilizando outros comprimentos que não os das figuras dadas. Dentro desse percentual, pudemos identificar, através dos desenhos e dos depoimentos escritos, que dois deles, respectivamente, dos 2.º e 8.º períodos, por exemplo, efetuaram a soma utilizando o comprimento da figura AB e o comprimento da ‘linha imaginária’ da figura CD (p. 106).

Também admitíamos que algum aluno pudesse vir a ser influenciado pelo efeito “espaço ocupado”. Nesse caso, a linha poligonal azul está representando uma figura com idéia que ocupa maior espaço, enquanto a linha poligonal vermelha está representando uma figura com idéia de ocupar menor espaço, por conseguinte, seria indicada como a mais curta.

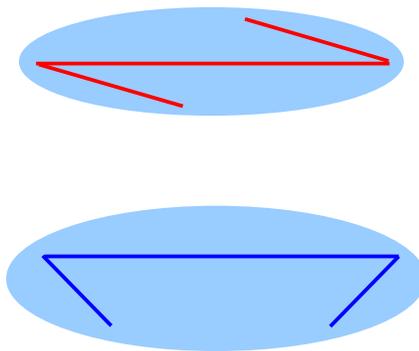


Figura 31: Efeito “espaço ocupado” na atividade 7

É bem provável que prevaleceria a mobilização “comparação de comprimento das linhas poligonais abertas”, mas não descartávamos que algum aluno fosse influenciado pelo efeito “linha imaginária interextremidades”, ou mesmo pelo “espaço ocupado”, como está apresentado na tabela que segue:

Quadro 36: Respostas esperadas na atividade 7

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Azul	- Comparação de comprimento das linhas poligonais abertas;	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Vermelho	- Efeito “linha imaginária interextremidades”.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelho	- Efeito “espaço ocupado”.	- Observação visual.

Mais uma vez o procedimento da “observação visual” apareceu como possibilidade de estar associado a qualquer das mobilizações possíveis. Mesmo que a “utilização de artifício” que pode ser com os dedos ou lápis já tenha sido verificada por Brito (2003), considerávamos remoto esse uso.

5.7.2 - Análise posterior da atividade 7

Esta atividade teve o mesmo número de acertos registrados na atividade 1 e as duas só perderam para a atividade 2 que apresentou 22 acertos, totalizando 78, 57%. Cabe ressaltar que as duas atividades anteriores exploraram situações envolvendo segmentos de reta.

Tabela 7: ANEXO F: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 7

ATIVIDADE 7			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 26, 27, 28	21	75,00
Errada	2, 7, 9, 15, 22, 23, 25	7	25,00
Índice Percentual total de acertos e erros: C (21) 75,00% - E (7) 25,00%			

O fato de constar duas linhas poligonais abertas nos levou a acreditar que poderia resultar numa maior incidência de erros. Da mesma forma, havia uma expectativa que

ocorresse um maior número de eventos de visualização. No entanto, os resultados não confirmaram nossas expectativas.

É uma conjunção de aspectos que favorecem esses fenômenos, mas o formato do ente é um dos pilares das ocorrências, principalmente quando possui um maior leque de detalhes como são os casos das linhas em formato de “escadas”. Um outro aspecto é se as linhas estão apresentadas em posição prototípica ou não. Cabe destacar também o fato de que há linhas em que se destaca muita uma determinada parte, por exemplo, um pedaço bem comprido que termina dando a idéia de ser mais comprida do que a outra a ser comparada. Há casos de aspectos que fogem um pouco do que temos estabelecido como convencional. É o caso da opção recair para nuanças na linha que lembra uma letra ou um algarismo, etc.

Entre as respostas erradas, a única que está explicitamente associada a evento de visualização é a que foi apresentada pelo aluno 7: “Tava em cima porque o vermelho. Azul abaixo porque dúvida queria sabe o vermelho. Azul tava abaixo”. É um argumento que demonstra estar admitindo certo confronto entre os pólos acima e abaixo. Esse aluno tem apresentado um perfil que evidencia dúvidas se faz opção em indicar a linha menor para que esteja acima ou abaixo. Portanto, consideramos que continua respondendo, tomando por base a interferência “associa posição a comprimento”.

Não percebemos vestígios nas demais estratégias usadas que se caracterizem como algum tipo de fenômeno de visualização. Outrossim, suspeitamos que subjacentes às respostas que foram indicadas erradamente, é provável que haja outras incidências de eventos visuais.

Também entre as resposta certas apenas uma sinalizou para algum tipo de fenômeno visual, que foi a do aluno 17: “Eu descobri que o azul está menor do que o vermelho porque o vermelho está quase que nem um z é por isso que o azul está mais menor do que o vermelho”. Deixa entender que a linha poligonal vermelha está associada a um “z”, por isso que ela

representa algo maior. Assim sendo, por ser a última letra do alfabeto, é provável que ele associe como se fosse o que ocuparia a posição do maior numeral.

Entendemos que se trata de uma resposta que não considera o estabelecimento da comparação pelo aspecto da grandeza, mas termina buscando se apropriar de uma associação que sugere, de forma subjacente, uma evocação ao efeito “associa número a comprimento”, não no sentido cardinal, mas ordinal. Fizemos referência a essa modalidade, quando interpretávamos uma resposta indicada na 2.^a atividade da 2.^a sessão do experimento de Barbosa (2002), que descrevemos na etapa da interpretação de respostas possíveis das atividades 1, 2 e 3, deste trabalho.

No geral, não temos outros elementos que sugerem algum tipo de ocorrência de visualização, apenas nos chamou atenção os argumentos dos alunos 26 e 27. O primeiro afirmou: “Porque as escadas do vermelho é mais curto”, enquanto o segundo assim se expressou: “porque o vermelho tem menos espaços”. Pelas respectivas argumentações, deveriam ter optado por indicar a linha poligonal vermelha, mas não foi o caso. No entanto, é pouco convincente associar a um efeito visual. A seguir apresentamos o quadro que sintetiza as ocorrências desta atividade que estamos tratando.

Quadro 37: Ocorrências na atividade 7

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Azul (1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11,12, 13, 14,16,18, 19, 20, 21, 24,26, 27, 28)	-Comparação de comprimento das linhas poligonais.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul (17)	- Efeito “associa número a comprimento”	- Observação visual.
-Papel e lápis	- Vermelho (7)	-Interferência “associa posição a comprimento”.	- Observação visual.
	- Vermelho (2, 9, 15, 22, 23,25)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual. - Utilização de artifício.

Por se tratar de uma comparação com linhas poligonais abertas, foi muito baixo o número de ocorrências dos acontecimentos relacionados às influências visuais. Apenas 2 registros entre os 28, representando 7,14%, sendo um associado à resposta errada e um a resposta certa. Talvez essa baixa incidência se explique pelo fato de que os 2 entes a serem comparados possuem uma das partes com as mesmas dimensões e que estavam dispostos paralelamente, facilitando sobremaneira o estabelecimento da comparação que terminou restringindo-se aos complementos das linhas exploradas.

Em decorrência da pequena quantidade de ocorrências de eventos de visualização, quase não faz sentido destacá-las numa tabela específica como colocamos abaixo. No entanto, por uma questão de darmos prosseguimento a uma mesma padronização, optamos por apresentá-la:

Quadro 38: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 7

Atividade	Número de Ocorrências	Conhecimentos mobilizados
Atividade 7	1 acerto	- Efeito “associa número a comprimento”
	1 erro	- Interferência “associa posição a comprimento”

Os efeitos “linha imaginária interextremidades” e “espaço ocupado”, que eram esperados como possíveis influenciadores nas respostas dos alunos, não foram verificados. Ao contrário, surgiram dois fenômenos não previstos. Tivemos o evento – associou com letra z – que propomos ser considerado como uma sinalização do efeito “associa número a comprimento”, mas como uma segunda modalidade, ou seja, a do aspecto ordinal. Porém, também tivemos outro evento que não era esperado, que se relaciona em considerar a variável da posição.

Pelos resultados obtidos, pudemos constatar que as respectivas representações das duas figuras não foram suficientes para provocarem maiores presenças de influências visuais.

Portanto, não se tratou de uma configuração que pudesse gerar uma maior interdependência entre as figuras do campo, por conseguinte, poderíamos dizer que se tratou de uma Gestalt fraca. Igualmente, poderíamos dizer no que tange ao efeito da contração discutido por Piaget, isto é, as figuras não propiciaram maiores possibilidades para que tivessem partes superestimadas em detrimento de outras, diminuindo as ocorrências das impressões visuais.

Quanto aos procedimentos utilizados, constatou-se uma significativa incidência do uso da “observação visual”. Nos dois tipos de procedimentos, as respostas certas foram três vezes maiores que as erradas.

Quadro 39: Ocorrências dos procedimentos na atividade 7

Respostas		Procedimentos	Número de Ocorrências
Certas	Erradas		
15	5	Observação visual	20
6	2	Utilização de artifício	8

O procedimento “observação visual” atingiu um percentual de 71,43%, enquanto o da “utilização de artifício” alcançou 28,57%; um patamar bem menos inferior. Não houve nenhum registro de aluno utilizar simultaneamente os dois processos. Das 7 incidências de respostas erradas, apenas 1 aluno usou o mecanismo “utilização de artifício”. No entanto, isso é um fato que deve ser considerado típico desta atividade, pois verificamos pelos resultados anteriores que seria precipitado querer associar de forma rigorosa a incidência de eventos ao uso do procedimento.

5.8 Apresentação da Oitava Atividade

ATIVIDADE 8

Observe os caminhos abaixo e responda:



Marque com um X o caminho mais curto:

() azul

() vermelho

Explique como você descobriu:

5.8.1 - Análise preliminar da atividade 8

5.8.1.1 Introdução

Esta é a terceira atividade da seqüência, do grupo que explora apenas linhas poligonais abertas. É a última desse grupo e sua elaboração visava verificar se o aluno estabelecia a comparação considerando todo comprimento de cada linha, ou considerando apenas os “pedaços” mais compridos dos respectivos segmentos. Neste caso, tais “pedaços” coincidiram com os pontos mais extremos dos caminhos.

Não se trata da distância entre as pontas das linhas, mas entre os pontos mais distantes em cada uma das linhas. A extensão que liga os pontos mais extremos da linha poligonal vermelha é de 6,0 cm, enquanto entre os pontos mais extremos da linha poligonal azul é de 5,0 cm. Entretanto, o comprimento da linha poligonal vermelha é de 6,5 cm, enquanto a linha poligonal azul mede 7,5 cm.

No caso em que o aluno indicasse que o caminho mais curto é a linha poligonal azul, estávamos admitindo que essa opção pudesse estar associada à influência do efeito “linha imaginária interextremos”.

Além do efeito supracitado tínhamos expectativa que algum aluno pudesse ser influenciado pelo efeito do “espaço ocupado”.

5.8.1.2 Interpretação de respostas possíveis

A mobilização “comparação de comprimento de linhas poligonais abertas” permitiria ao aluno indicar a resposta certa que é a linha poligonal vermelha. Por outro lado, é provável

que a indicação da resposta errada estivesse associada à mobilização inadequada “linha imaginária interextremos”.



Figura 32: Efeito “linha imaginária interextremos” na atividade 8

Brito (2003), ao detectar influência do efeito “linha imaginária interextremidades”, percebeu que havia interferências mais significativas na distância entre os pontos mais extremos, ao que estamos denominando do efeito “linha imaginária interextremos”. Neste, o comprimento considerado é o de uma linha imaginária entre os pontos mais extremos da figura, enquanto naquele, entre os pontos das respectivas extremidades – pontas das linhas. As simulações abaixo apresentam as duas modalidades extraídas do experimento dessa pesquisadora.

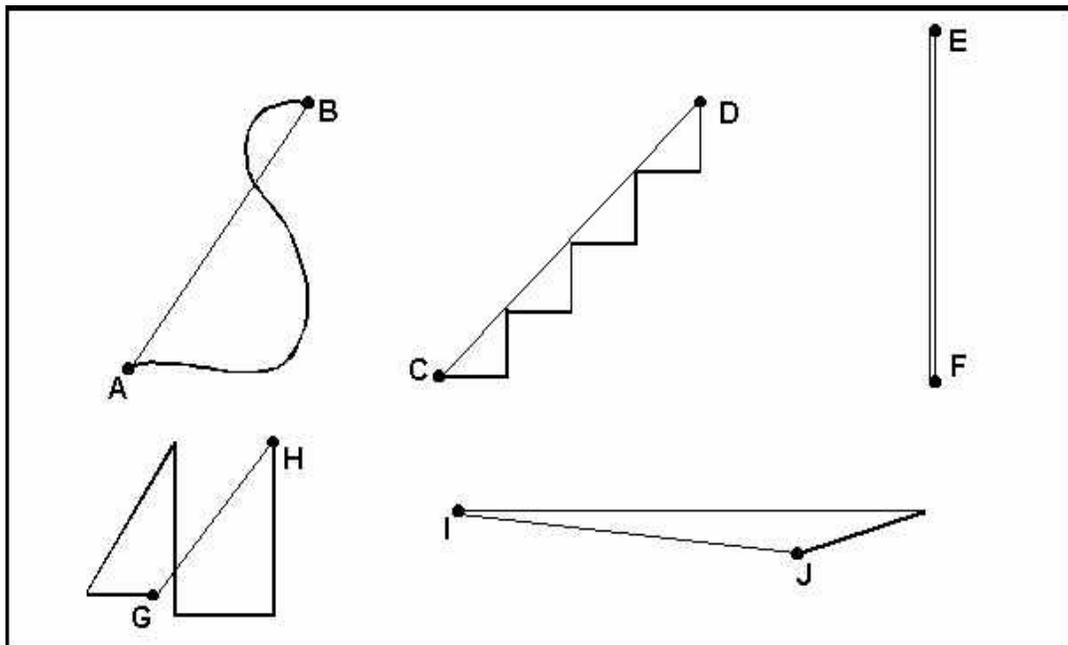


Figura 33: Efeito “linha imaginária interextremidades” na 2.^a atividade do experimento Brito (2003)

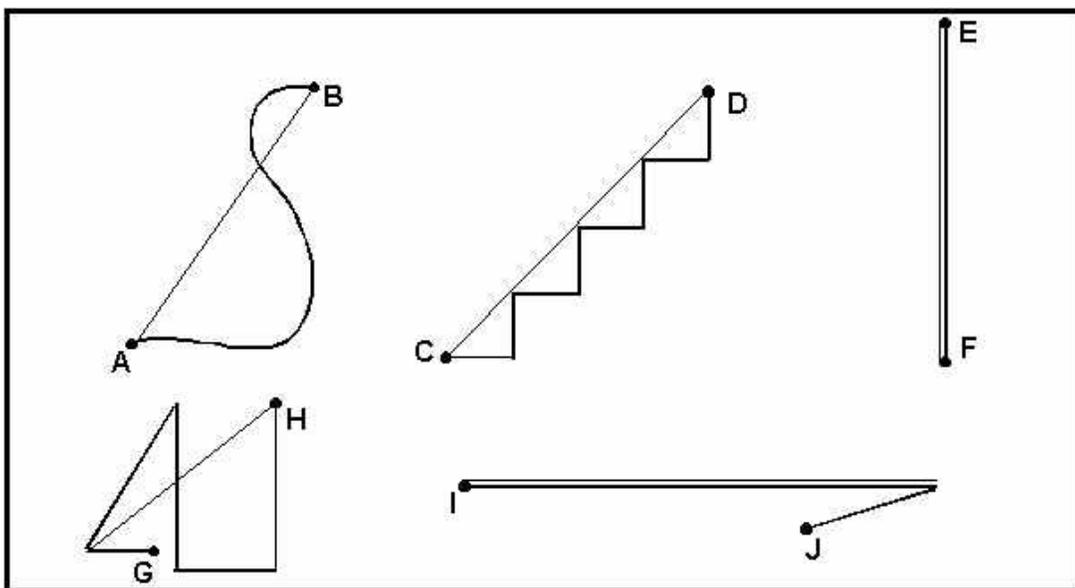


Figura 34: Efeito “linha imaginária interextremos” na 2.^a atividade do experimento de Brito (2002)

Não houve diferença nas simulações de tais efeitos no tocante à linha curva, à linha poligonal CD e ao segmento de reta.

Também admitíamos que algum aluno pudesse vir a ser influenciado pelo efeito “espaço ocupado”. Dessa forma, a linha poligonal vermelha estaria representando uma figura com idéia de ocupar maior espaço, o que poderia favorecer o aluno a pensar que era a mais comprida e indicar a linha azul que parecia ocupar um menor espaço.



Figura 35: Efeito “espaço ocupado” na atividade 8

No quadro abaixo, é possível observar os conhecimentos que eram esperados que os alunos viessem a mobilizar, com os respectivos procedimentos que poderiam estar relacionadas.

Quadro 40: Respostas esperadas na atividade 8

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Vermelho	- Comparação de comprimento das linhas poligonais abertas;	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Azul	- Efeito “linha imaginária interextremos”.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul	- Efeito “espaço ocupado”	- Observação visual.

É mais uma atividade em que havia expectativa que o procedimento da “observação visual” pudesse estar associado a qualquer uma das respostas. Talvez fosse o recurso preferido pelos alunos, sobretudo, por ser mais prático, diferentemente da “utilização de artifício” que implica em uma ação mais trabalhosa. Neste caso, o aluno poderia considerar apenas os “pedaços” mais compridos de cada caminho.

Na atividade de Brito (2002), em que também foi detectado tal efeito, ela constatou: “Quanto às estratégias utilizadas na resolução dos dois modelos desta atividade, no ambiente papel e lápis, verificamos que os alunos usaram a ‘observação visual’ e a ‘sobreposição de medianeiros’” (p. 108). Porém, essa pesquisadora não identificou os alunos que utilizaram os respectivos procedimentos.

5.8.2 Análise posterior da atividade 8

O número de acertos caiu um pouco em relação à atividade anterior. Esse fato talvez decorra das dificuldades sentidas pelos alunos no estabelecimento da comparação em virtude

dos formatos das linhas, pois apresentam configurações que geram mais dificuldades para o aluno identificar a linha mais curta da mais comprida.

Tabela 8: ANEXO F: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 8

ATIVIDADE 8			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 24, 26, 27, 28	18	64,29
Errada	2, 3, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 25	10	35,71
Índice Percentual total de acertos e erros: C (18) 64,29% - E (10) 35,71%			

Independente de um ligeiro acréscimo de ocorrências com erros, tínhamos mais expectativas quanto ao aumento de eventos de visualização; inclusive, em decorrência dos formatos dos entes geométricos, que favoreciam tais incidências. Afinal, um “pedaço” da linha vermelha é bem mais comprido do que o da linha azul. Em outras palavras, é uma configuração propícia para gerar episódios relacionados ao efeito “linha imaginária interextremos”.

Tratava-se de uma situação típica em que os alunos, ao olharem as duas figuras, poderiam não perceber todas as partes segundo as mesmas proporções, o que levaria a provocar uma superestimativa, assim como assinalou Piaget (1969). Porém, é possível que algum aluno tenha usado a lógica: azul tem 3 “pedaços” e vermelho tem apenas 2 “pedaços”.

Analisando as respostas erradas, a primeira que sinaliza incidência de evento de visualização é do aluno 2: “É o azul porque o caminho vermelho é longo e o azul é perto”. É um argumento que ficou bem evidente em considerar as distâncias dos pontos mais extremos de cada linha comparada. A linha poligonal vermelha é realmente mais comprida, baseando-se na distância de tais pontos, assim como a linha poligonal azul é mais curta por meio desse evento. Nesse caso, configurou-se uma incidência do efeito “linha imaginária interextremos”.

Um argumento bem consistente que também sinalizou para ocorrência de influência visual foi exposto pelo aluno 21: “Porque o espaço do azul é mais curto do que do vermelho”. Muito provavelmente, o uso da palavra espaço esteja associado ao impacto visual causado pela região de envoltura de cada linha poligonal que está sendo estabelecida à comparação. Diante dessa evidência, optamos em classificar tal resposta ao efeito do “espaço ocupado”.

Outra resposta que deixou transparecer ter considerado algum evento de visualização é a do aluno 23: “Eu descobri com uma folha de caderno dobrei e tirei a medida foi que descobri que o caminho mais curto é o caminho da linha azul”. A descrição do procedimento adotado terminou sendo uma evidência plausível que considerou o efeito da “linha imaginária interextremos”. Dobrar a folha de papel permite ao aluno estabelecer a comparação confrontando os dois maiores “pedaços” de cada linha poligonal aberta, isto é, tal atitude nos leva a acreditar que foi influenciado diretamente por esse efeito. Portanto, este procedimento caracteriza-se como uma situação atípica, pois quase sempre é “observação visual” que está mais associado a ocorrências de fenômenos de visualização.

O aluno 3 não efetuou uma argumentação que ficasse tão explícita ter considerado a influência do efeito “interextremos”: “Eu descobri com o lápis e com a borracha e com os dedos, isso é muito fácil para mim porque eu medi os tamanhos e soube qual foi o mais curto, foi o azul”. No entanto, a convicção no ato de medir, inclusive usando mais de um artifício, sinaliza que deve ter levado em conta a distância dos pontos mais extremos. Nessa perspectiva, preferimos categorizar como mais um caso do efeito “linha imaginária interextremos”.

Algumas outras respostas também nos leva a suspeitar que os alunos foram influenciados em considerar a distância dos pontos mais extremos, não porque explicitaram nos seus argumentos, mas pela incidência dos três aspectos: resposta errada; estratégia em que reconhece o azul como o mais curto e a opção do procedimento da “observação visual”:

Aluno 14 – Eu usei a cabeça e a memória.

Aluno 15 – Eu descobri medindo e o caminho mais curto era o azul.

Aluno 17 – Eu descobri assim. Eu pensava quem era o menor era o vermelho, mas depois eu pensei de novo aí quem era o menor era o azul porque o vermelho era o maior.

Aluno 19 – Os olhos olhando bem direitinho e vi que o azul era mais curto.

Também foram detectadas, entre as respostas classificadas como certas, estratégias que sinalizam para ocorrências de efeitos visuais:

Aluno 7 – O vermelho tava deitado porque eu queria sobre azul ta assim porque queria.

Aluno 16 – Eu descobri que o vermelho tem só uma curva e o azul tem duas.

Aluno 27 – O vermelho tem menos espaço porque tem um traço a menos e o azul é mais grande e tem um traço maior.

Pelo argumento exposto pelo aluno 7 e também considerando suas respostas anteriores, entendemos ser consistente admitirmos que ele continua insistindo em associar posição como fator determinante para sua escolha. Ele desejaria que a linha vermelha estivesse sobre a linha azul. Assim, nos parece pertinente categorizar sua resposta como interferência “associa posição a comprimento”.

Os alunos 16 e 27 argumentam o fato da linha poligonal vermelha ter apenas 1 traço, enquanto a linha poligonal azul apresenta 2. Uma alusão clara de que está sendo influenciado pelo efeito “associa número a comprimento”.

Encerrando esses comentários sobre as descrições das atividades dos alunos, lembramos que 2 alunos apresentaram argumentos incoerentes com suas respostas. O aluno 20 enfatizou que “o vermelho é mais grande do que o azul”, mas indicou corretamente o vermelho como o mais curto. Contrariamente, o aluno 22 argumentou que “Eu descobri porque eu olhei para os dois caminhos e vi que era o vermelho porque era o caminho curto”, porém indicou erradamente o caminho azul como o mais curto. Nos dois casos, computamos apenas suas respostas no tocante ao acerto e ao erro, sem considerar os respectivos argumentos.

Depois da atividade 6, esta que estamos descrevendo é a que apresentou o maior número de registros de fenômenos visuais. A seguir, apresentaremos numa tabela as incidências detectadas.

Quadro 41: Ocorrências na atividade 8

Modelo de atividade	Respostas/ alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Vermelho (1,4,5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 24, 26, 28)	-Comparação de comprimento das linhas poligonais.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelho (16, 27)	- Efeito “associa número a comprimento”	- Observação visual.
	- Vermelho (7)	- Interferência “associa posição a comprimento”	- Observação visual.
-Papel e lápis	- Azul (2, 3, 14, 15, 17, 19, 23)	- Efeito “linha imaginária interextremos”.	- Observação visual/ Utilização de artifício.
	- Azul (21)	- Efeito “espaço ocupado”	- Observação visual.
	- Azul (22, 25)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual.

Foi a atividade com o segundo maior número de eventos de visualização, isto é, totalizando 11 ocorrências (3 associadas a acertos e 8 a erros) das 31 efetuadas. Portanto, tais eventos atingiram um patamar de 41,94%.

Destacamos abaixo apenas os eventos de visualização detectados nesta atividade, enfatizando os acertos e erros relacionados a cada um dos respectivos fenômenos.

Quadro 42: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 8

Atividade	Número de Ocorrências	Conhecimentos mobilizados
Atividade 8	2 acertos	- Efeito “associa número a comprimento”
	1 acerto	- Interferência “associa posição a comprimento”
	7 erros	- Efeito “linha imaginária interextremos”
	1 erro	Efeito “espaço ocupado”

O efeito “linha imaginária interextremos” teve um maior número de situações – 7 ocorrências. Tal fato é explicável porque a linha poligonal vermelha tinha um “pedaço” bastante acentuado, favorecendo sobremaneira a influência desse evento.

Essa diferença saliente entre o tamanho do pedaço maior da linha poligonal vermelha em relação ao pedaço maior da linha poligonal azul, pode ser caracterizada como um caso típico de contração. Os tais “pedaços” terminaram sendo superestimados em detrimento das extensões das respectivas linhas, configurando-se como uma situação em que os alunos focaram suas atenções sobre essas partes que se destacaram.

O total de ocorrências no que tange aos procedimentos, tanto da “observação visual” quanto da “utilização de artifício”, foi o mesmo da atividade 7. Foram vinte situações em que se explorou o uso do primeiro recurso citado e oito situações exploradas por meio do segundo recurso.

Quadro 43: Ocorrências dos procedimentos na atividade 8

Respostas		Procedimentos	Número de Ocorrências
Certas	Erradas		
12	8	Observação visual	20
6	2	Utilização de artifício	8

Observa-se que houve uma evocação considerável ao recurso da “observação visual” que atingiu um 71,43%, contra 28,57% dos que se apropriaram do recurso da “utilização de artifício”. Dos 11 casos em que foram registradas ocorrências de eventos de visualização, 9 estão associados ao procedimento da “observação visual”, o que representa 81,82% e apenas 2 associados ao procedimento da “utilização de artifício”, representando 18,18%. Pelo menos esta atividade sinaliza uma maior possibilidade de se detectar fenômenos de visualização entre as situações que os alunos apelaram para o recurso da “observação visual”.

5.9 Apresentação da Nona Atividade

ATIVIDADE 9

Observe os caminhos abaixo e responda:



Marque com um X o caminho mais curto:

() azul

() vermelho

Explique como você descobriu:

5.9.1 Análise preliminar da atividade 9

5.9.1.1 Introdução

Esta é a primeira atividade do grupo cuja comparação ocorreu entre uma linha poligonal aberta e uma linha curva. Trata-se de uma comparação entre caminhos mistos e sua elaboração visava verificar se o aluno faria a comparação considerando a área da região de envoltura de cada respectiva linha, isto é, influenciado pelo efeito do “espaço ocupado”. Outros dois efeitos que também poderíamos verificar se exerciam alguma influência eram os da “linha imaginária interextremidades” e “linha imaginária interextremos”.

A linha curva foi tirada de uma atividade do experimento de Barbosa (2002, p. 137). Apenas foi dado um giro de rotação de 90° , no sentido anti-horário, enquanto a linha poligonal aberta foi extraída do experimento de Brito (2003, p. 95). Aliás, a mesma figura foi explorada na atividade 11 desta pesquisa.

Os caminhos foram dispostos em posição prototípica e o comprimento linha curva mede 9,0cm, enquanto o da linha poligonal aberta mede 10,0 cm.

5.9.1.2 Interpretação de respostas possíveis

A mobilização “comparação de comprimento de linhas abertas” permitiria ao aluno indicar a resposta certa que é a linha curva. Contudo, o desafio era bem maior para um aluno responder baseando-se apenas na “observação visual”.

Estávamos supondo que a mobilização “espaço ocupado” fosse a principal causadora pela indicação da resposta errada, isto é, a linha poligonal aberta. Observe a simulação correspondente a esse provável evento.

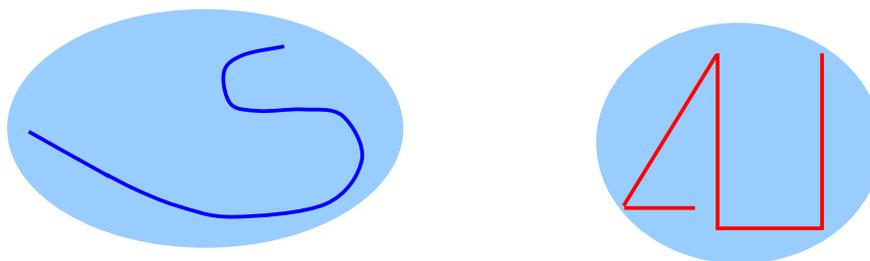


Figura 36: Efeito “espaço ocupado” na atividade 9

Pela ilustração acima, percebe-se uma característica da influência visual desse fenômeno é levar o aluno a admitir que a linha curva está representando uma figura com idéia de expansão, enquanto a linha poligonal está representando uma figura com idéia de limite.

Na questão em que Barbosa (2002) explorou essa figura constavam apenas linhas curvas (ver figura 11), e esse pesquisador suspeitou que pelo “menos 15 alunos (51,7%), que indicaram erradamente TU ou MN como o caminho mais comprido, podem ter sido influenciados pelos efeitos ‘linha imaginária’ ou ‘espaço ocupado’” (p. 141).

E na atividade em que Brito (2003) explorou a linha poligonal aberta desta atividade, ao considerar o efeito do “espaço ocupado”, verificou que ao se basear “na influência desse efeito, a ordem crescente dos comprimentos seria: GH-vermelho; EF-verde; IJ-preto; CD;azul e AB-amarelo” (p. 102). Nesse caso, o caminho GH-vermelho é aquele cujo efeito sugere que o caminho é mais curto e AB-amarelo sugere ser o caminho mais comprido. A seguir consta a simulação apresentada no seu experimento:

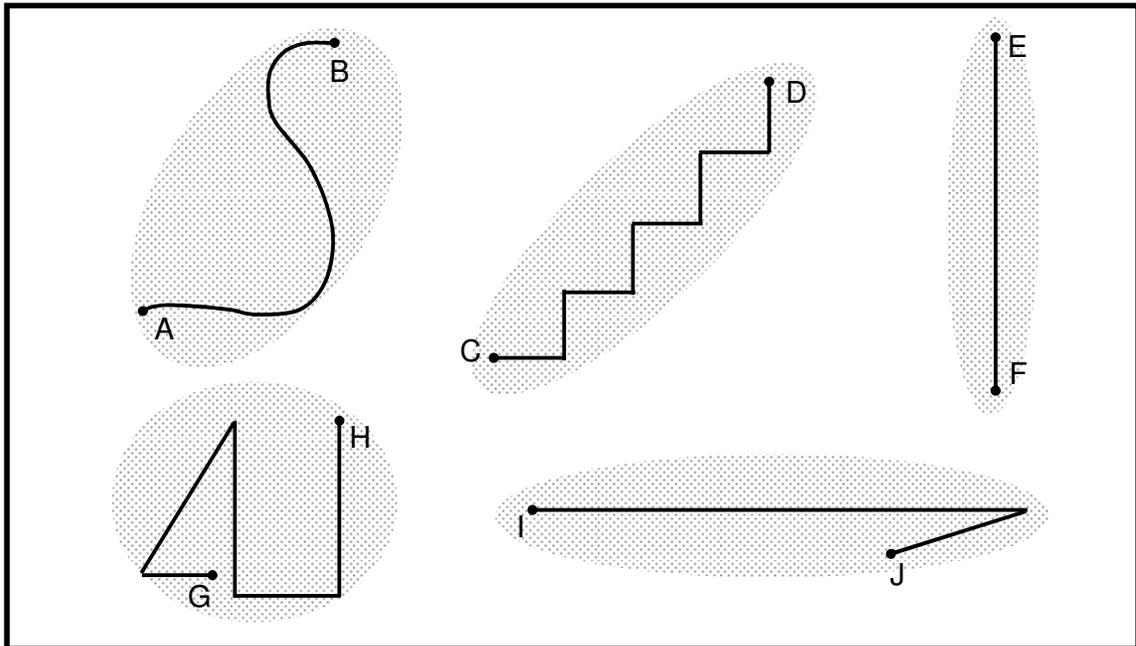


Figura 37: Efeito “espaço ocupado” na 2.^a atividade do experimento de Brito (2003)

Essa pesquisadora detectou que 5 alunos responderam a questão influenciados por esse efeito, o que representa 20,8% dos que participaram do modelo papel e lápis com uso de medianeiros.

Um outro efeito que poderia ser mobilizado por algum aluno era o da “linha imaginária interextremidades”. Seria o caso do aluno associar que a distância entre as respectivas pontas de cada linha passaria a ser o determinante do caminho mais curto ou mais comprido. Pela simulação a seguir, é possível verificar que os comprimentos correspondentes a essas linhas imaginárias são: 3,8 cm a linha curva e 2,8 cm a linha poligonal aberta.



Figura 38: Efeito “linha imaginária interextremidades” na atividade 9

Para a situação de a influência ser oriunda dos pontos mais extremos das figuras – “linha imaginária interextremos”, os comprimentos correspondentes seriam: 4,7 cm para a linha curva e 3,5 cm para a linha poligonal aberta, como está representado abaixo:

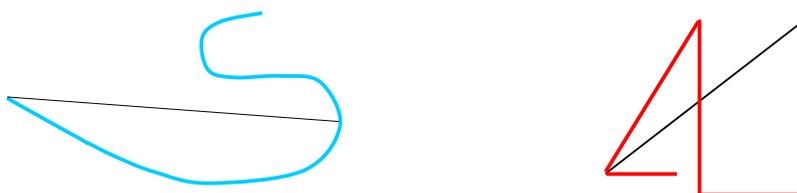


Figura 39: Efeito “linha imaginária interextremos” na atividade 9

Pelo quadro abaixo é possível observar que havia algumas possibilidades do aluno efetuar mobilizações inadequadas, restringindo a possibilidade do uso do conhecimento adequado que é a “comparação de comprimento dos caminhos”.

Quadro 44: Respostas esperadas na atividade 9

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Estratégias de resolução
- Papel e lápis	- Azul	- Comparação de comprimento dos caminhos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Vermelha	- Efeito “espaço ocupado”.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelha	- Efeito “linha imaginária interextremidades”.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelha	- Efeito “linha imaginária interextremos”	- Observação visual; - Utilização de artifício.

Acreditávamos que o procedimento que iria se sobressair fosse o da “observação visual”, especialmente nas respostas afetadas por influência de algum efeito. Por fim, no procedimento “utilização de artifício”, estávamos supondo que poderia ser usado, mas com possibilidade menos provável de ocorrência.

Na atividade em que Barbosa (2003) detectou o efeito do “espaço ocupado”, foi suposto que o aluno faria uma triagem inicial pela visualização e depois usaria algum instrumento para estabelecer a comparação, como pode ser vista na assertiva: “Uma outra estratégia poderia resultar do emprego da visualização do ‘espaço ocupado’ pela curva para fazer uma triagem inicial e, em seguida, usar algum instrumento da ‘caixa de ferramenta’ para a comparação final” (p. 130).

Em outra situação desse mesmo experimento, também foi levantada a hipótese que os alunos tenham procedido de forma semelhante a que foi descrita no parágrafo anterior, pois além do efeito ter sido detectado, todos os alunos usaram algum tipo de instrumento, recaindo a opção para os cordões ou fios (BARBOSA, 2002, p. 140).

5.9.2 - Análise posterior da atividade 9

Podemos observar na tabela abaixo que, pela primeira vez, os resultados de uma atividade apresentam um maior número de erros comparado ao de acertos, mesmo que seja apenas de duas ocorrências a mais.

Tabela 9: ANEXO F: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 9

ATIVIDADE 9			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 4, 6, 7, 10, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 25, 26	13	46,43
Errada	2, 3, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 27, 28	15	53,57
Índice Percentual total de acertos e erros: C (13) 46,43% - E (15) 53,57%			

Houve também uma considerável incidência nas ocorrências dos eventos de visualização, embora ainda tivesse uma situação associada à indicação de resposta certa. Começaremos analisando as situações das respostas erradas.

A primeira resposta que sinaliza para ocorrência de um evento de visualização é a do aluno 2: “é o vermelho porque é muito perto”. Este último termo pode estar fazendo referência à distância entre as extremidades da linha poligonal vermelha que é menor do que a linha poligonal azul. No entanto, não descartamos que esteja influenciado pelo efeito da “projeção horizontal”, pois parece muito mais consistente uma comparação baseando-se nesse aspecto do que propriamente nos pontos mais extremos como prevíamos antes. Também não descartamos que “muito perto” também sinalize para o efeito do “espaço ocupado”, já que tal aluno poderia estar querendo dizer que o espaço de envoltura do “vermelho” é menor implicando, por conseguinte, no mais perto do que o “azul”.

O aluno 3 também apresentou evidências que sugere influência de fenômeno visual. Argumentou na estratégia: “Eu vou te explicar foi assim meu medi o jeito da folha e eu pensei bem que eu soube a resposta que é o vermelho mais curto”. Esse mecanismo de dobrar a folha, em que procura sobrepor uma linha poligonal com a outra é uma recurso para estabelecer a comparação considerando quem tem menor comprimento no sentido horizontal. Tal mecanismo sinaliza para uma mobilização do efeito da “projeção horizontal”.

O argumento do aluno 8 sugere que tenha sido influenciado pelo efeito “associa número a comprimento”, pois expressou: “Porque está em cinco partes”. O incrível é que essa associação da quantidade o levaria a indicar a linha poligonal azul como mais curta, o que não foi o caso. Talvez tenha pesado o fato que no “vermelho” conste partes pequenas, enquanto o “azul” é um todo. Seja qual tenha sido a lógica, há uma evocação do aspecto numérico como meio de resolver a questão.

A resposta do aluno 21 também nos leva a admitir que possa ter ocorrido influência de fenômeno de visualização: “Eu achei o vermelho mais curtinho que o azul”. A expressão “mais curtinho” pode estar associada ao menor comprimento quando se compara as extensões horizontais entre as respectivas linhas. Neste caso, influenciado pelo efeito da “projeção horizontal”. Também poderia estar fazendo referência ao menor espaço que envolve a linha poligonal vermelha, sinalizando para ocorrência do efeito “espaço ocupado”.

Pelo argumento que o aluno 27 destacou, deixa transparecer forte evidência que considerou o efeito do “espaço ocupado”: “Porque o vermelho tem traços menores e o azul tem curvas e ele fica mais grande”. Os dois momentos da frase que escreveu sinalizam por considerar esse evento de visualização. Primeiro, diz que o “vermelho” tem traços menores, provavelmente querendo fazer referência ao fato de ser menor não em relação ao comprimento da linha, mas desse aspecto de ocupar menos espaço, sobretudo, quando diz que o “azul tem curvas e ele fica mais grande”. Essa segunda parte é mais significativa no sentido que considerou tal aspecto.

Outras respostas erradas também nos levam suspeitar que, subjacentes as suas indicações, haja influências de eventos visuais, com destaque para as dos seguintes alunos:

Aluno 9 – O vermelho é mais curto porque eu usei a borracha clipe e o lápis.

Aluno 12 – “Eu medi no lápis”.

Aluno 15 – “Observando muito medindo com o lápis tive uma idéia de medir com o dedo e fazendo estas coisas eu cheguei a descobrir que era o vermelho”.

Aluno 24 – “Na minha explicação que o vermelho é mais curto que o azul porque eu medi com o clipe”.

Há mais de um aspecto comum quando levantamos os dados desses quatro alunos: todos erraram; todos sinalizaram na argumentação da estratégia que efetuaram o ato do medir, excetuando-se o aluno 9 que deixou implícito tal mecanismo e todos exploraram o procedimento “utilização de artifício”. É estranho que se usaram um processo que traz mais segurança na indicação de suas respostas e mediram, logo é curioso o motivo de terem errado. O aluno 9, por exemplo, mencionou que fez uso de três instrumentos (borracha, clipe e lápis),

mas com todas essas ferramentas ainda se equivocou quanto a linha mais curta. É muito provável que o “medir” deles não correspondeu ao comprimento de cada linha poligonal, mas a supostas linhas resultantes da influência do efeito da “projeção horizontal”. Como segunda possibilidade um pouco mais remota, é possível que tenham se baseado nas distâncias das extremidades de cada linha, configurando-se como mobilização do efeito da “linha imaginária interextremidades”.

Mesmo o aluno 5 que argumentou: “Porque eu achava o azul mas eu olhei muito aí mudei de opinião”, também acreditamos que essa mudança de opinião resulte de alguma influência de efeito, embora não temos maiores vestígios dessa sinalização.

Entre as respostas certas também detectamos indícios de eventos de visualização com destaque para as seguintes estratégias:

Aluno 7 – “O azul ta cinco porque queria o azul mas eu olhei muito aí mudei de opinião”.

Aluno 10 – “O azul tem menos curvas”.

Aluno 16 – “Eu descobri que o vermelho tem muitas curvas”.

Aluno 17 – “Eu descobri que o azul era menor porque ele está na forma de um ésse”.

Aluno 26 – “Porque o azul é mais curto porque se parece com esse”.

As respostas das estratégias anteriores nos levam suspeitar que mais uma vez o aluno 7 sente-se inconformado com as configurações dos formatos e posições das linhas a serem comparadas. Nas outras atividades, ele deixou transparecer que estava querendo optar por uma linha, mas queria que estivesse apresentada de maneira diferente, seja quanto ao formato ou quanto à posição. Nesta, optamos em categorizar sua resposta como resultante do efeito “associa número a comprimento”, pois relaciona a linha curva evocando o aspecto numérico, embora não tenha ficado clara a relação estabelecida.

Os alunos 10 e 16 apresentaram argumentos com frases distintas para expressar a mesma idéia: “azul tem menos curvas” e “vermelho tem muitas curvas”. Podem visualizar o “azul” como apenas um todo ou o azul como composto de quatro partes, ou mesmo por três. No entanto, o “vermelho” apresenta cinco partes. Por meio desses argumentos esses alunos sugerem que consideraram o efeito “associa número a comprimento”.

Os dois últimos alunos (17 e 26) fizeram menção que levaram em conta o formato da linha poligonal azul. Entendemos que em decorrência dessa alusão poderiam estar associando – linha curva azul com a letra “s” – enquanto a linha poligonal vermelha com a letra “z”. O aluno 17 na atividade 7 estabeleceu esse tipo de associação, inclusive afirmando que uma figura lembrava a letra “z”. Nesta atividade, acreditamos que estariam buscando associar ordem de letra com o fato de ser maior ou menor numericamente. Se de fato foi o que imaginaram, estaria configurado mais um caso do efeito “associa número a comprimento”, mas por meio da modalidade ordinal.

A seguir, apresentaremos uma tabela com o resumo das ocorrências verificadas no levantamento e com destaque para o número de eventos de visualização que foi o maior em todas as atividades.

Quadro 45: Ocorrências na atividade 9

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Azul (1, 4, 6, 18, 19, 20, 22, 25)	-Comparação de comprimento das linhas poligonais.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Azul (7, 10, 16, 17, 26)	- Efeito “associa número a comprimento”	- Observação visual.
	- Azul (7)	- Interferência “associa posição a comprimento”	- Observação visual.
-Papel e lápis	- Vermelho (2, 3, 9, 12, 15, 24)	- Efeito “linha imaginária interextremidades”.	- Observação visual/ Utilização de artifício.
	- Vermelho (2, 3, 9, 12, 15, 21, 24)	- Efeito “projeção horizontal”.	- Observação visual/ Utilização de artifício.
	- Vermelho (2, 21, 27)	- Efeito “espaço ocupado”.	- Observação visual.
	- Vermelho (8)	- Efeito “associa número a comprimento”	- Observação visual.
	- Vermelho (5, 11, 13, 14, 23, 28)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual/ Utilização de artifício

Foram registradas 23 ocorrências de eventos de visualização, sendo 6 associados a acertos e 17 a erros. Considerando que tivemos um total de 37 ocorrências, estes fenômenos atingiram 62,16%. Um nível bem elevado se comparamos com os resultados anteriores que tinha a atividade 6 (o índice 47,5%, que era o maior registrado). Esse crescimento deve estar associado ao confronto do estabelecimento da comparação ser entre entes geométricos configurados de forma mais propícia para ocorrências de fenômenos visuais, não só porque se tratam de duas linhas poligonais, uma aberta e uma curva, mas também pelo formato e pelas posições como estão dispostas.

Destacamos abaixo apenas os eventos de visualização detectados nesta atividade, enfatizando os acertos e erros relacionados a cada um dos respectivos fenômenos.

Quadro 46: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 9

Atividade	Número de Ocorrências	Conhecimentos mobilizados
Atividade 9	1 acerto	- Interferência “associa posição a comprimento”
	6 (5 acertos e 1 erro)	- Efeito “associa número a comprimento”
	7 erros	- Efeito “projeção horizontal”
	- 6 erros	- Efeito “linha imaginária interextremidades”
	- 3 erros	- Efeito “espaço ocupado”

O efeito “associa número a comprimento” foi acionado em situações de acertos por cinco ocasiões e de erros por apenas uma ocasião. Além da variedade dos fenômenos de visualização, ainda tivemos uma grande quantidade de ocorrências, isto é, 23 situações no total. Aliás, foi a atividade com o maior número de registros.

Esse considerável número de eventos de visualização, tanto dos que foram categorizados como efeito ou quanto interferência, nos estimula acreditar que decorra de uma

Gestalt mais forte, isto é, as linhas produziram maiores efeitos de atração no campo considerado.

Acreditamos que as figuras envolvidas na comparação predisõem alguns fatores que interferem na visualização do aluno. Em outras palavras, elas são férteis em propiciar desvios visuais no aluno que terminam se manifestando nessas naturezas de eventos visuais.

No que tange ao uso dos procedimentos, foi proporcionalmente a maior incidência de ocorrências relacionadas à “observação visual”, ou seja, 21 situações contra 7 da “utilização de artifício”. Não foi registrado nenhum caso de um mesmo aluno ter usado simultaneamente os dois recursos.

Quadro 47: Ocorrências dos procedimentos na atividade 9

Respostas		Procedimentos	Número de Ocorrências
Certas	Erradas		
11	10	Observação visual	21
2	5	Utilização de artifício	7

O procedimento da “observação visual” atingiu 75 % contra 25 % da “utilização visual”. Das vinte e três ocorrências de fenômenos de visualização, quinze foram relacionadas ao recurso da “observação visual”, o que representa 65,21%; enquanto oito estão associadas à “utilização de artifício”, representando 34,78%. É mais uma atividade sinalizando para uma maior possibilidade de se detectar fenômenos de visuais entre as situações que os alunos apelaram para o recurso da “observação visual”.

5.10 Apresentação da décima atividade**ATIVIDADE 10**

Observe os caminhos abaixo e responda:



Marque com um X o caminho mais curto:

azul

vermelho

Explique como você descobriu:

5.10.1 - Análise preliminar da atividade 10

5.10.1.1 Introdução

Esta atividade foi elaborada com o intuito de verificar a influência do efeito “espaço ocupado”. Constituiu-se como mais uma comparação entre caminhos mistos. Observa-se que a linha vermelha tem um formato que dá idéia de expansão no espaço. É como se existisse uma região aberta para uma ampliação. No caminho azul, diferentemente, passa a idéia de limitação do espaço na área de influência dessa região.

Há uma característica distinta das figuras em que foi verificada alguma influência do efeito “espaço ocupado”, pois as regiões consideradas não são necessariamente de envoltura das figuras, mas as de confluência desse limite ou expansão.

Como as figuras estão dispostas entre si, com uma configuração específica, não descartávamos que essa disposição existente entre elas pudesse gerar alguma outra interferência visual. Por exemplo, levantamos a hipótese que o aluno poderia visualizar uma espécie de “projeção oblíqua” e associar que a figura que corresponderia a suposta “abertura maior” estivesse à linha mais comprida e na suposta “abertura menor” a linha mais curta.

Os caminhos foram dispostos em posição não-prototípica e o comprimento da linha poligonal vermelha é 8,5cm, enquanto a linha curva azul mede 9,5cm.

5.10.1.2 Interpretação de respostas possíveis

Ao mobilizar a “comparação de comprimento de caminhos” o aluno deveria indicar a linha poligonal aberta que é a resposta correta.

Suspeitávamos que alguns alunos pudessem ser influenciados pela mobilização “espaço ocupado” indicando erradamente o caminho mais curto, isto é, a linha curva que representa uma figura com idéia de limitação da área que ocupa, como pode ser visto na simulação abaixo essa suposta influência visual desse fenômeno.

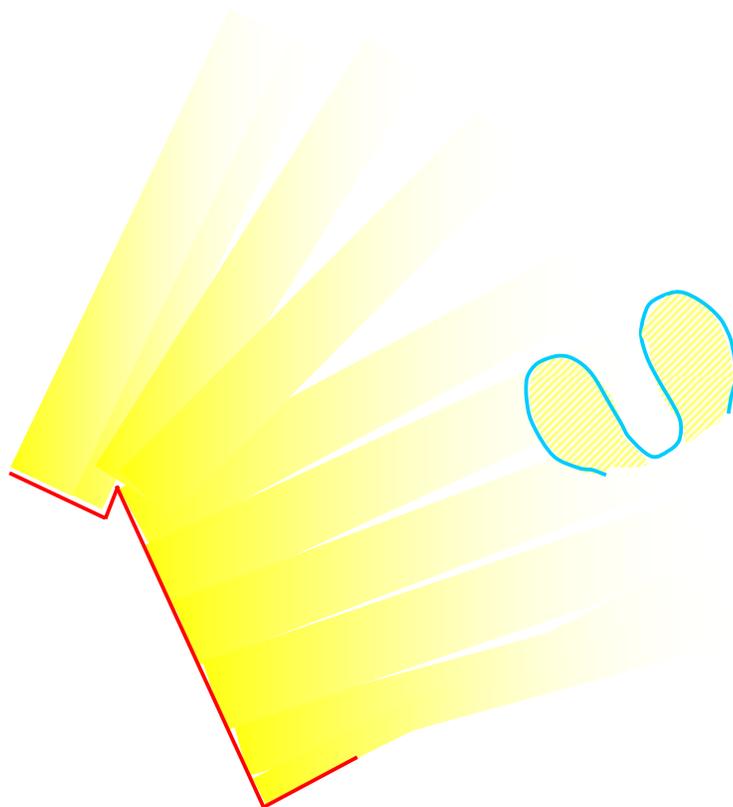


Figura 40: Efeito “espaço ocupado” na atividade 10

Havia possibilidade que algum aluno fosse influenciado pela mobilização de considerar uma espécie de “projeção oblíqua”, o que levaria a indicar a resposta errada. Neste caso, a linha curva. Trata-se de uma influência que foi considerada pela primeira vez; logo, não sabíamos se seria detectada sua ocorrência. A simulação que segue correspondente a esse provável evento.

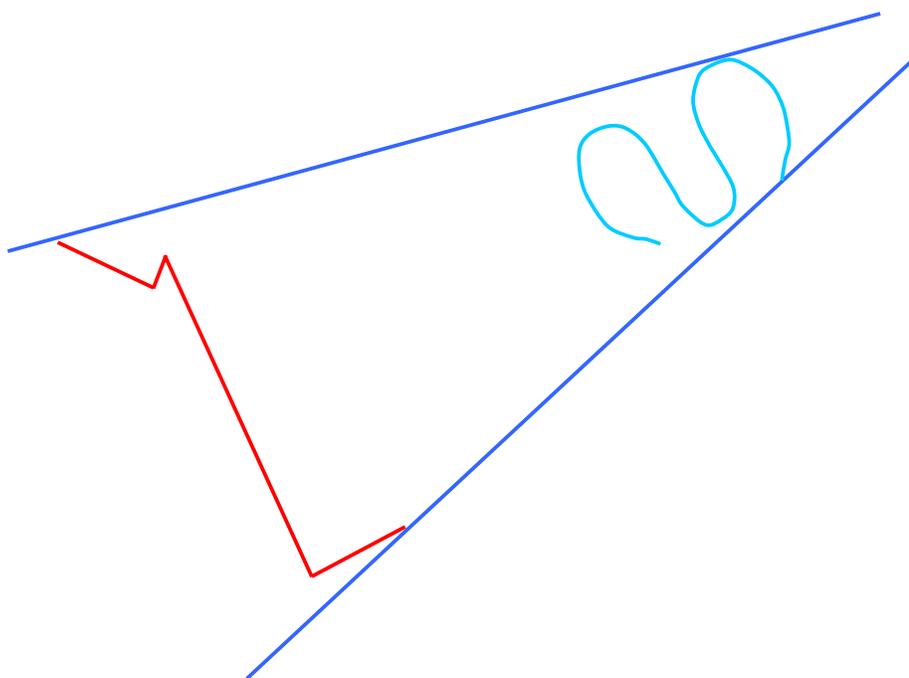


Figura 41: Efeito “projeção oblíqua” na atividade 10

Estávamos suspeitando que esse “pedaço maior” bem destacado da linha poligonal vermelha pudesse ser superestimado por alguns alunos, pois além de ser uma parte bem superior às demais da própria figura, também se diferencia bastante da figura comparada. Portanto, admitíamos que o conceito de contração enfatizado por Piaget (1969), que tem no elemento da superestimativa um fator diferenciador, viesse a contribuir com alguns eventos de visualização.

No quadro abaixo é possível observar a presença dos prováveis conhecimentos que esperávamos que os alunos viessem a mobilizar.

Quadro 48: Respostas esperadas na atividade 10

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Vermelha	- Comparação de comprimento dos caminhos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Azul	- Efeito “espaço ocupado”.	- Observação visual.
	- Azul	- Interferência “projeção oblíqua”	- Observação visual.

Acreditávamos que o procedimento de utilizar algum artifício como o uso de dedos ou de lápis talvez facilitasse um pouco a optar pela resposta correta, mas não dava garantia no momento da escolha. Quanto à “observação visual”, entendíamos que pudesse contribuir muito mais em função das interferências ou dos efeitos, pois em comparações estabelecidas em outros experimentos, esse procedimento esteve quase sempre associado a influências visuais.

5.10.2 Análise posterior da atividade 10

Esta atividade superou todas as demais quanto ao número de erros, inclusive superando a anterior que era a que tinha o maior número de casos registrados.

Tabela 10: ANEXO F: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 10

ATIVIDADE 10			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	6, 7, 9, 11, 16, 20, 22, 23, 25	9	32,14
Errada	1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 24, 26, 27, 28	19	67,86
Índice Percentual total de acertos e erros: C (9) 32,14% - E (19) 67,86%			

O número elevado de erros nesta atividade não trouxe como consequência um grande número de ocorrências de eventos de visualização. Contudo, teve uma boa variedade de casos. Partiremos nossa análise comentando sobre os casos relacionados aos erros.

O aluno 2 é o primeiro que traz contribuição para analisarmos ocorrência de fenômeno visual na sua resposta: “Porque o azul é mais perto de que o vermelho”. É um argumento bem parecido com o que apresentou na atividade anterior. Suspeitamos que a expressão “mais perto” relaciona-se a mais de um aspecto.

Um deles é que esteja considerando as distâncias das respectivas extremidades, influenciado pelo efeito da “linha imaginária interextremidades”. Poderia estar ocorrendo uma superestimativa do “pedaço maior” da linha poligonal vermelha, a ponto de tê-la como uma linha bem maior e considerar a as extremidades da linha curva azul como algo muito perto.

Outra possibilidade é que esteja baseando-se levando em conta a interferência da “projeção oblíqua”, com uma particularidade que, como as linhas estão dispostas, permite visualizar uma configuração angular. Por último, suspeitamos que subjacente ao “mais perto” poderia estar ocorrendo a influência do efeito “espaço ocupado”. Nesses dois eventos não se pode descartar a possibilidade de que o “pedaço maior” da linha poligonal vermelha esteja contribuindo para que esse aluno o superestime.

Uma outra resposta que também sinaliza para influência de fenômeno de visualização é a do aluno 3: “Porque são enroladinhas e eu soube logo qual foi eu pensei na mente e o azul todinhos eu pensei e soube e disse na ponta da língua”. É bem provável que ao destacar o fato da linha poligonal azul ser “enroladinha” estava querendo fazer alusão do limite do espaço de envoltura desse ente geométrico, diferentemente da linha poligonal vermelha que esse espaço de envoltura transparece que é algo bastante amplo. Diante do que colocamos, entendemos que se configurou o efeito do “espaço ocupado”.

A argumentação do aluno 4 é mais uma que transpareceu ter recebido influência de evento visual: “Quando eu vi o azul deu para vê o mais curto porque o vermelho tem linha grande e azul tem mais curva e mais curto”. No momento que destaca o fato do “vermelho” ter linha grande, sugere que foi influenciado pela interferência da “projeção oblíqua”. É por intermédio desse evento que fica realçado o aparente maior comprimento da linha poligonal vermelha.

Outra evidência do efeito “espaço ocupado” pode ser visto na argumentação adotada pelo aluno 5: “Porque o azul está enrolado”. É como fizesse associação de que se o ente

geométrico está enrolado, ele sinaliza ocupar um menor espaço de envoltura, diferentemente da linha poligonal vermelha que dá uma idéia de expansão.

No argumento apresentado pelo aluno 8, observa-se que foi influenciado por algum tipo de evento visual, pois assim expressou: “Porque está parecendo um m”. Mesmo que não sejam evidentes as pistas, suspeitamos que poderia estar associando a linha curva com a letra “m”, enquanto a linha poligonal com a letra “z”. Nesse caso, seria um apelo de considerar uma ordem alfabética, por conseguinte, relacionando com indicação de ser menor ou maior. Assim, poderia estar recorrendo ao efeito “associa número a comprimento”. Em outras atividades este aluno buscou associar número de partes, talvez, também estivesse procedendo da mesma forma.

A argumentação do aluno 10 sugere dizer que o fato de apresentar menos curvas torna o “azul” mais perto. Implícito pode estar acionando o evento “associa número a comprimento”, pois o fato de ter menos curvas é o que gera o suposto “encurtamento” da linha poligonal azul. Dizendo de outra forma, parece que está buscando evocar o número como canal de sua comparação. No entanto, não descartamos que ao enfatizar “se torna perto” pode estar subjacente um apelo a interferências “projeção oblíqua”, mas também ao efeito da “linha imaginária interextremidades”, já que esses dois fenômenos podem influenciar a um aluno admitir que o “azul” é mais perto.

Temos na resposta do aluno 17 um argumento que sugere ter recebido influência do efeito “associa número a comprimento”: “Eu descobri que o azul é o menor do que o vermelho porque o azul está na forma de eme e está menor do que o vermelho”. Essa busca de estabelecer a comparação associando às letras tem sido um recurso usado por este aluno em mais de uma atividade. Portanto, pelas justificativas apresentadas nas demais, admitimos que também esteja recorrendo ao efeito “associa número a comprimento”, como modalidade ordinal.

Indícios de evento de visualização são também verificáveis na resposta do aluno 21: “Porque o azul é mais curto e o espaço é pequeno”. Muito provavelmente este aluno ao usar a expressão “...e o espaço é pequeno” estava querendo fazer referência ao efeito do “espaço ocupado”, pois enquanto o da linha poligonal vermelha favorece uma visão ampliada do espaço de envoltura sobre a mesma, contrariamente, o da linha poligonal azul permite uma visão bem limitada desse espaço de envoltura.

Encerrando esse ciclo de respostas erradas com evidências de fenômenos de visualização, inserimos a do aluno 27: “Porque o vermelho é reto e grande e o azul é de curvas e mais menor”. O argumento adotado sugere que está estabelecendo à comparação por meio do interferência “projeção oblíqua”, pois este salienta o aspecto “reto” da linha poligonal vermelha em comparação com o aspecto curvo da linha poligonal azul.

É bem verdade que entre as outras respostas erradas há possibilidades da ocorrência de fenômenos de visualização, mas que por não ter vestígios mais evidentes nas argumentações das estratégias, optamos por não categorizá-las como tais eventos. Destacaríamos as seguintes situações dos alunos 13 e 18. O primeiro argumentou: “O azul é menor do que o vermelho porque o azul ta como fosse o jogo o vermelho é maior do que o azul”. Esse termo “jogo” gera dúvida. Não sabemos se está associando a um jogo convencional ou tem outro significado. A argumentação do segundo foi que: “O azul está mostrando que é mais pequeno e o vermelho está mostrando que é mais azul”. Também não ficou claro o que estava querendo dizer com “o azul está mostrando”, ou seja, se estava considerando que o azul está representando ser menor baseado no parâmetro da grandeza em si ou por meio de algum fenômeno visual.

Ilustramos duas possíveis situações que poderiam constar influências de alguma mobilização relacionada a eventos de visualização, mas outras poderiam completar essa lista, especialmente as que estão associadas a respostas erradas e uso do procedimento da

“observação visual”, pois são os requisitos que têm apresentados as maiores incidências desses registros.

Entre as respostas certas, destacamos como mobilização associada a fenômeno visual, o argumento apresentado pelo aluno 7: “O vermelho porque ta assim queria sabe”. De maneira implícita parece fazer alusão à relação formato *versus* posição. Pelos argumentos anteriores desse aluno temos verificado que esses dois aspectos tem sido constante nas afirmações, o que nos leva acreditar que continua recebendo influência da interferência “associa posição a comprimento”.

Por último, uma situação que nos chamou atenção foi a do aluno 11 que afirmou: “Porque o vermelho toma mais espaço que o azul por isso que o azul é o mais comprido”. Entendemos como um caso típico de superação do efeito “espaço ocupado”. Destaca ao fato do “vermelho” ter mais espaço, mas isso não significa que ele é o mais curto.

No quadro abaixo apresentaremos o resumo do que foi verificado em termos das ocorrências, sejam das respostas, dos conhecimentos mobilizados ou dos procedimentos de resolução.

Quadro 49: Ocorrências na atividade 10

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Vermelho (6, 9, 11, 16, 20, 22, 23, 25)	-Comparação de comprimento das linhas poligonais.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelho (7)	- Interferência “associa posição a comprimento”	- Observação visual.

-Papel e lápis	- Azul (2, 3, 5, 21)	- Efeito “espaço ocupado”.	- Observação visual.
	- Azul (2, 10)	- Efeito “linha imaginária interextremidades”.	- Observação visual.
	- Azul (8, 10, 17)	- Efeito “associa número a comprimento”	- Observação visual.
	- Azul (2, 4, 27)	- Interferência “projeção oblíqua”.	- Observação visual;
	- Azul (1, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 24, 26, 28)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual; Utilização de artifício.

Quase que chega a metade dos registros de casos da atividade anterior que atingiu 23 situações, enquanto nesta foi de apenas 13, sendo apenas uma entre as respostas certas. Nesse caso, das 31 ocorrências as 13 representaram 41,94%. O mesmo percentual da atividade 8, sendo que as duas correspondem ao terceiro maior número de casos registrados.

Na tabela abaixo estão destacados os eventos de visualização que foram verificados nesta atividade, incluindo a relação com os respectivos acertos e erros.

Quadro 50: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 10

Atividade	Número de Ocorrências	Conhecimentos mobilizados
Atividade 10	1 acerto	- Interferência “associa posição a comprimento”
	4 erros	Efeito “espaço ocupado”
	3 erros	- Efeito “associa número a comprimento”
	3 erros	- Interferência “projeção oblíqua”
	2 erros	- Interferência “linha imaginária interextremidades”

Mesmo que não tenha sido uma incidência tão elevada de eventos visuais, há de se reconhecer que houve uma diversificação considerável. Isso mostra que quando os entes

geométricos apresentam configurações mais complexas, aumenta a possibilidade de ocorrência dos fenômenos visuais.

Mesmo que tenhamos destacado a provável interferência do conceito de contração destacado por Piaget (1969), apenas quando analisamos a provável influência do efeito “linha imaginária interextremidades” sobre o aluno 2, as considerações sobre a contração caberia para o aluno 10 que também foi categorizado como tendo recebido tal influência. Igualmente, poderíamos dizer dos alunos que foram influenciados pela interferência “projeção oblíqua”.

Esta foi a atividade em que foi registrado o maior número de ocorrências de procedimentos relacionados à “observação visual”, atingindo vinte e cinco situações contra três associadas à “utilização de artifício”. A explicação mais plausível para apelo majoritário ao recurso visual deve-se ao fato das configurações das duas linhas, não só pelos respectivos formatos que apresentam, mas as posições que estão situadas.

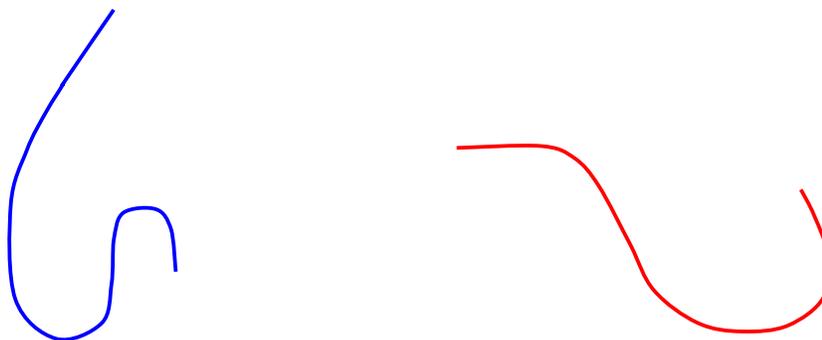
Quadro 51: Ocorrências dos procedimentos na atividade 10

Respostas		Procedimentos	Número de Ocorrências
Certas	Erradas		
7	18	Observação visual	25
2	1	Utilização de artifício	3

Os 89,29% de ocorrências do procedimento da “observação visual” retrata a grande incidência desse recurso, enquanto apenas 10,71% apelaram para o recurso da “utilização de artifício”. Essa alta incidência de evocação a tal recurso não vem associada com um alto índice de eventos de visualização, o que desmistifica um pouco a dependência que um possa ter do outro.

5.11 Apresentação da décima primeira atividade**ATIVIDADE 11**

Observe os caminhos abaixo e responda:



Marque com um X o caminho mais curto:

() azul

() vermelho

Explique como você descobriu:

5.11.1 Análise preliminar da atividade 11

5.11.1.1 Introdução

Ao elaborarmos esta atividade, tivemos como objetivo verificar a influência dos efeitos “projeção horizontal” ou “projeção vertical”. Também não descartávamos que pudesse ocorrer influência do efeito “espaço ocupado”. Suspeitamos como última hipótese, de alguma interferência do efeito da “linha imaginária interextremidades”. Foi a única situação em que os alunos deveriam comparar duas linhas curvas.

Extraímos as duas figuras de uma atividade proposta no experimento de Barbosa (2002). A de cor azul foi apresentada na atividade 9 deste trabalho, mas sofreu uma pequena alteração de rotação, enquanto aqui as duas estão com a configuração da pesquisa original. No referido experimento foram detectadas influências dos efeitos “projeção horizontal”, “linha imaginária” e “espaço ocupado”.

O comprimento da linha curva azul é 9,0 cm e a linha curva vermelha possui 8,0 cm.

5.11.1.2 Interpretação de respostas possíveis

No caso em que o aluno tivesse efetuado a mobilização “comparação de comprimento de linhas curvas” indicaria a linha curva vermelha como a mais curta. Tratava-se de uma mobilização um pouco mais difícil porque o recurso era o da “observação visual”.

Tomando como referência à “projeção horizontal” é possível perceber que a linha curva azul seria indicada como a mais curta, já que teria um menor comprimento caso o aluno levasse em conta esse efeito. Abaixo é possível verificar uma simulação desse efeito:



Figura 42: Efeito “projeção horizontal” na atividade 11

Distintamente, caso o aluno fosse influenciado pelo efeito da “projeção vertical”, indicaria a linha curva vermelha como a mais curta. A seguir, temos uma ilustração dessa provável influência.

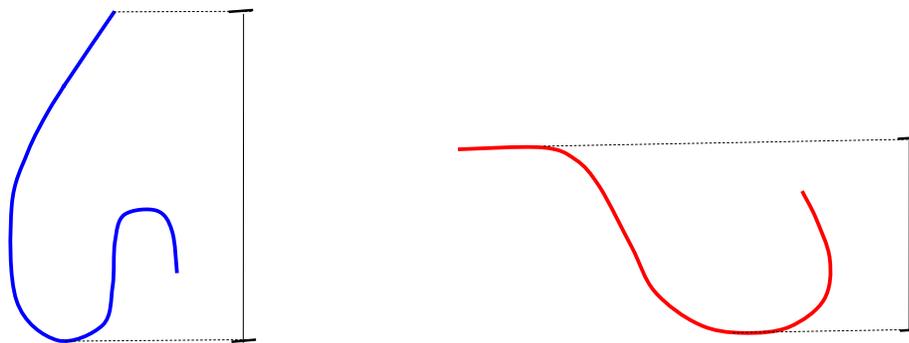


Figura 43: Efeito “projeção vertical” na atividade 11

No entanto, se no lugar desses dois efeitos o aluno se deixasse levar pela impressão causada pelo “espaço ocupado”, era mais provável que indicasse a linha curva azul como mais curta. Considerado esse efeito temos a seguinte ilustração:

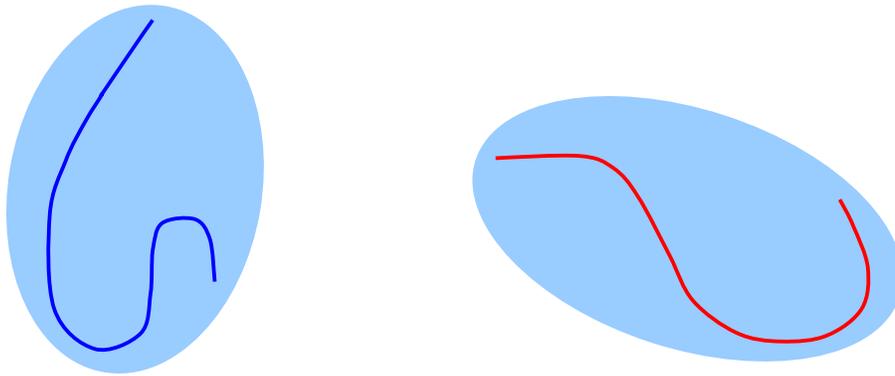


Figura 44: Efeito “espaço ocupado” na atividade 11

Se viesse a considerar o efeito da “linha imaginária interextremidades”, a indicação recairia para a linha azul que tem um comprimento baseado em tal efeito de 3,8 cm, enquanto a linha vermelha é de 4,9 cm, como mostra a ilustração abaixo:

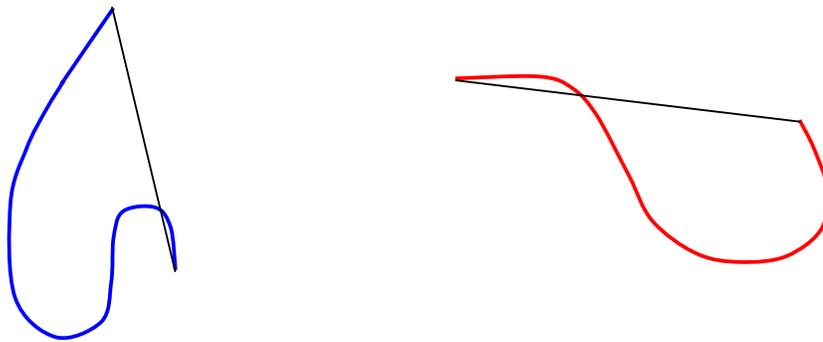


Figura 45: Efeito “linha imaginária interextremidades” na atividade 11

No quadro a seguir, é possível observar a presença de efeitos que poderiam influenciar o aluno a indicar a resposta errada.

Quadro 52: Respostas esperadas na atividade 11

Modelo de atividade	Respostas	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
- Papel e lápis	- Vermelha	- Comparação de comprimento dos caminhos.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
- Papel e lápis	- Azul	- Efeito “projeção horizontal”	- Observação visual.
	- Azul	- Efeito “projeção vertical”	- Observação visual.
	- Azul	- Efeito “espaço ocupado”	- Observação visual.
	- Azul	- Efeito “linha imaginária interextremidades”	- Observação visual.

O aluno poderia lograr um bom êxito mesmo usando o procedimento da “observação visual”. A utilização de algum artifício como o uso de dedos ou de lápis talvez facilitasse um pouco a optar pela resposta correta, mas também poderia estar associado às indicações resultantes de mobilizações inadequadas.

5.11.2 - Análise posterior da atividade 11

Ao lado da atividade oito que também registrou 10 casos de erros, as duas ocupam a terceira posição em menor número de situações registradas relacionadas a ocorrências de fenômenos visuais.

Tabela 11: ANEXO F: RESUMO DOS DADOS DA ATIVIDADE 11

ATIVIDADE 11			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 17, 18, 19, 24, 26, 27, 28	18	64,29
Errada	8, 9, 13, 14, 16, 20, 21, 22, 23, 25	10	35,71
Índice Percentual total de acertos e erros: C (18) 64,29% - E (10) 35,71%			

Houve uma alta incidência de acertos, constituindo-se como a terceira atividade nesse aspecto. Os episódios visuais foram poucos. Conseguimos detectar apenas 8 casos, sendo 4 relacionados a erros e 4 a acertos.

A primeira situação de resposta errada com argumento associado a evento de visualização foi a do aluno 13: “Porque o azul é mais curto do que o vermelho porque o azul é menor do que o vermelho”. Optar pela indicação da linha poligonal azul como mais curta é muito provável que esteja associado ao efeito da “projeção horizontal”. Por intermédio desse fenômeno, é perceptível um comprimento bem maior da linha vermelha quando comparada com a linha azul. Logo, acreditamos que houve influência de tal efeito.

A estratégia usada pelo aluno 16 também sinaliza influência de fenômeno visual: “Porque o vermelho está deitado e já mostra que ele é maior”. Esse destaque à posição do “vermelho” por estar deitado é uma indicação significativa que deve estar considerando o efeito da “projeção horizontal”, pois é o que favorece associar a um maior comprimento da linha poligonal, sobretudo, quando enfatiza que o “vermelho” está deitado.

O aluno 21 apresentou um argumento que tanto pode estar fazendo alusão ao efeito do “espaço ocupado”, quanto da “projeção horizontal”. Ele afirmou: “Porque o espaço do azul é mais curto que o vermelho”. Quando cita “espaço” parece considerar realmente um espaço de envoltura do “azul” que é menor que o do “vermelho”. Por conseguinte, também poderia estar fazendo referência à distância provocada pelo acionamento da “projeção horizontal”.

As demais respostas erradas que classificamos como “comparação indevida sem identificar a causa” também podem estar associadas a eventos de visualização, mas, como não há vestígios mais explícitos nos argumentos apresentados nas estratégias, optamos por não categorizá-las em tais fenômenos.

Também levantamos a hipótese que três respostas certas estejam associadas a episódios de visualização:

Aluno 4 – Porque o azul tem mais curva e vermelho não tem muita curva.
 Aluno 7 – O vermelho tava deitado porque é assim queria sabe azul ta assim.
 Aluno 10 – O vermelho tem menos voltas.
 Aluno 11 – O vermelho é o mais curto porque não está dando muitas voltas.

O argumento do aluno 4 sugere considerar o efeito “associa número a comprimento”. Com esse apelo de “ter mais curvas ou menos curvas”, deixa transparecer que, subjacente a tal evocação, busca-se estabelecer tal comparação associando ao número, por ser algo mais próprio de um conhecimento que tem maior intimidade.

O aluno 7 mais uma vez sinaliza que ainda está preso ao aspecto considerado desde as primeiras atividades, cuja ênfase era a variável da posição. Parece que faz sua indicação, mas quer sugerir que determinada linha deveria estar apresentada com uma configuração diferente da que está exposta.

Por fim, os argumentos dos alunos 10 e 11 também dar a entender que recorrem ao efeito “associa número a comprimento”, pois enfatizam o fato do “vermelho” ter “menos voltas” ou “não dá muitas voltas”, isto é, estabelecem o confronto da comparação considerando um aspecto quantitativo.

A seguir, vamos apresentar na tabela 11 um resumo com os poucos de eventos de visualização que foram detectados, acrescidos das respectivas respostas dos alunos e dos correspondentes procedimentos de resolução.

Quadro 53: Ocorrências na atividade 11

Modelo de atividade	Respostas/ Alunos	Conhecimentos mobilizados	Procedimentos de resolução
-Papel e lápis	- Vermelho (1, 2, 3, 5, 6, 9, 12, 15, 17, 18, 19, 24, 26, 27, 28)	- Comparação de comprimento das linhas poligonais.	- Observação visual; - Utilização de artifício.
	- Vermelho (4, 10, 11)	- Efeito “associa número a comprimento”	- Observação visual.
	- Vermelho (7)	- Interferência “associa posição a comprimento”	- Observação visual.

-Papel e lápis	- Azul (13, 16, 21)	- Efeito “projeção horizontal”.	- Observação visual.
	- Azul (21)	- Efeito “espaço ocupado”.	- Observação visual.
	- Azul (8, 9, 13, 14,20, 22, 23, 25)	- Comparação indevida, sem identificar a causa.	- Observação visual; Utilização de artifício.

Como observamos acima, das 31 ocorrências foram registradas apenas 8 relacionadas a fenômenos de visualização, distribuídos igualmente entre os erros e acertos. Resultou numa incidência de 25,80%. Como o aluno 21 foi categorizado por duas ocasiões, apenas 7 alunos efetuaram mobilização de algum tipo de episódio visual.

Com o objetivo de realçarmos os episódios de visualização, expomos na tabela abaixo os que foram acionados, seja entre as respostas certas ou erradas.

Quadro 54: Ocorrências de eventos de visualização na atividade 11

Atividade	Número de Ocorrências	Conhecimentos mobilizados
Atividade 11	3 acertos	- Efeito “associa número a comprimento”.
	1 acerto	- Interferência “associa posição a comprimento”
	3 erros	- Efeito “projeção horizontal”
	1 erro	- Efeito “espaço ocupado”

Mais uma vez não tivemos nenhum caso de um mesmo fenômeno visual se fazer presente simultaneamente entre incidências de acertos e erros. Um fato marcante que cabe registrar quanto aos registros visuais é a interferência “associa posição a comprimento” que está sendo detectada pela décima primeira vez, isto é, verificada em todas as atividades.

Essa ocorrência de três situações, que os alunos foram influenciados pelo efeito “associa número a comprimento”, é uma manifestação de quanto à concepção número é marcante. Aliás, Câmara dos Santos (1999) enfatizou ser comum encontrar “alunos

estabelecerem que, na ausência de números, não existem grandezas, o que leva à concepção de que o único jeito de comparar grandezas é comparando números” (p. 3).

Esta foi a atividade em que foi registrado o maior número de ocorrências de procedimentos relacionados à “observação visual”, atingindo vinte e cinco situações contra três associadas à “utilização de artifício”. A explicação mais plausível para o amplo apelo ao recurso visual deve-se ao fato das configurações das duas linhas, não só pelos respectivos formatos que apresentam, mas as posições que estão situadas.

Quadro 55: Ocorrências dos procedimentos na atividade 11

Respostas		Procedimentos	Número de Ocorrências
Certas	Erradas		
15	8	Observação visual	23
3	2	Utilização de artifício	5

Esta atividade também registrou um índice considerável de ocorrências relacionadas ao procedimento da “observação visual”, pois os vinte e três casos resultaram em 82,14%, enquanto os cinco casos associados ao procedimento da “utilização de artifício” corresponderam a 17,86%. Esse elevado apelo ao recurso da “observação visual” não está associado a um número elevado de eventos de visualização. No entanto, nesta atividade, todas as oito situações em que ocorreram incidências de tais fenômenos foram associadas à “observação visual”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estas reflexões finais seguirão dois vieses: um de caráter mais empírico, em que destacaremos aspectos relevantes do experimento, principalmente em função dos eventos de visualização; um outro de caráter mais teórico, em que enfocaremos aspectos pontuais sobre a percepção e visualização, como também, sobre aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos da grandeza comprimento, assinalando a visualização por meio de duas propostas: numa configuração de cadeia que expomos num diagrama e como integrante do modelo didático proposto por Douady & Perrin-Glorian (1989).

A nossa hipótese era que os efeitos visuais poderiam também ocorrer quando a comparação fosse estabelecida apenas entre pares de figuras. Era um desafio a que estávamos nos submetendo, pois a diminuição do número de figuras para serem comparadas no campo considerado estava, implicitamente, associada à diminuição da Gestalt. Em outras palavras, era como se estivesse atingindo o limite mínimo da energia de interdependência entre as figuras, com o propósito de verificar se esses fenômenos visuais ainda continuavam existindo em tais circunstâncias.

Não só foi possível detectar algumas ocorrências dos efeitos visuais, mas, além disso, verificamos outras que preferimos, num primeiro momento, denominar de “interferências”. Sendo elas: “projeção oblíqua” e “associação posição a comprimento”. Também detectamos

modalidades distintas dos efeitos “associa número a comprimento” e “linha imaginária interextremos”.

Quanto à interferência “projeção oblíqua”, tínhamos expectativas na sua ocorrência, inclusive, baseando-nos nas experiências que adquirimos com os eventos da “projeção horizontal” e “projeção vertical”. Se já tinham sido observadas influências projetivas nas configurações horizontal e vertical, nada mais natural que ocorressem numa configuração em que as figuras estivessem dispostas obliquamente.

No que tange à interferência “associa posição a comprimento”, era uma variável que queríamos verificar, mas as expectativas de sua ocorrência não se basearam em estudos anteriores, pois nunca tinha sido verificada. Assim sendo, não tínhamos maiores indícios que pudessem sinalizar sua efetivação. Para surpresa nossa, ela foi detectada em todas as atividades.

O efeito “associa número a comprimento” era mais uma modalidade de evento visual que esperávamos sua efetivação. Afinal, a prática de valorização excessiva dos números nas séries iniciais no Ensino Fundamental termina favorecendo a evocação de tal recurso, em detrimento do estabelecimento da comparação baseando-se na extensão da linha. No entanto, não esperávamos encontrar modalidades distintas desse fenômeno.

Os demais eventos de visualização que tinham sido observados nos experimentos anteriores eram de certa forma esperados que ocorressem, inclusive porque o experimento foi montado pensando em facilitar o aparecimento desses fenômenos. Contudo, algumas situações foram mais evidentes que outras.

Apresentamos, a seguir, uma tabela que sintetiza as mobilizações efetuadas pelos alunos e que foram categorizadas como ocorrências dos fenômenos visuais detectadas no decorrer da análise das onze atividades aplicadas. Adotamos a sistemática destacando primeiro os efeitos e depois as interferências. Entre eles estão indicados primeiro os acertos.

Tabela 12: Ocorrências de eventos de visualização por atividade

Atividades	Conhecimentos mobilizados	Número de Ocorrências/
- Atividade 1	- Efeito “associa número a comprimento”.	1 (acerto)
	- Interferência “associa posição a comprimento”.	7 (3 acertos e 4 erros)
- Atividade 2	- Interferência “associa posição a comprimento”	4 (1 acerto e 3 erros)
- Atividade 3	- Efeito “projecção horizontal”	8 (erros)
	- Interferência “associa posição a comprimento”	4 (2 acertos e 2 erros)
- Atividade 4	- Efeito “associa número a comprimento”.	3 (acertos)
	- Efeito “linha imaginária interextremidades”	1 (erro)
	- Efeito “espaço ocupado”	1 (erro)
	- Interferência “projecção vertical”	3 (acertos)
- Atividade 5	- Interferência “associa posição a comprimento”	1 (erro)
	- Efeito “linha imaginária interextremidades”	1 (erro)
	- Efeito “associa número a comprimento”	1 (erro)
- Atividade 6	- Interferência “associa posição a comprimento”	1 (erro)
	- Efeito “linha imaginária interextremos”	3 (acertos)
	- Efeito “projecção horizontal”	2 (acertos)
	- Efeito “espaço ocupado”	2(acertos)
	Efeito “associa número a comprimento”	6 (1 acerto e 5 erros)
	Efeito “projecção vertical”	4 (erros)
- Atividade 7	Interferência “associa posição a comprimento”	2 (erros)
	- Efeito “associa número a comprimento”	1 (acerto)
- Atividade 8	- Interferência “associa posição a comprimento”	1 (erro)
	- Efeito “associa número a comprimento”	2 (acertos)
	- Efeito “linha imaginária interextremos”	7 (erros)
	- Efeito “espaço ocupado”	1 (erro)
- Atividade 9	- Interferência “associa posição a comprimento”	1 (acerto)
	- Efeito “associa número a comprimento”	6 (5 acertos e 1 erro)
	- Efeito “projecção horizontal”	7 (erros)
	- Efeito do “espaço ocupado”	3 (erros)
	- Efeito “linha imaginária interextremidades”	6 (erros)
- Atividade 10	Interferência “associa posição a comprimento”	1 (acerto)
	- Efeito do “espaço ocupado”	4 (erros)
	- Efeito “associa número a comprimento”	3 (erros)
	- Efeito “linha imaginária interextremidades”	2 (erros)
	- Interferência “associa posição a comprimento”	1 (acerto)
- Atividade 11	- Interferência “projecção oblíqua”	3 (erros)
	- Efeito “associa número a comprimento”	3 (acertos)
	- Efeito “projecção horizontal”	3 (erros)
	- Efeito “espaço ocupado”	1 (erro)
	- Interferência “associa posição a comprimento”	1 (acerto)
	TOTAL	112

A atividade seis foi a que teve a maior variedade de eventos de visualização, com seis modalidades. Em seguida, foram as atividades nove e dez que atingiram o patamar de cinco variedades cada uma. Na atividade seis, a comparação foi entre duas linhas poligonais abertas, enquanto nas atividades nove e dez as comparações foram entre uma linha poligonal aberta e uma linha curva. No quadro a seguir apresentamos os cinco grupos explorados com as respectivas atividades e a modalidade de comparação estabelecida em cada uma delas.

Quadro 56: Organização das onze atividades em cinco grupos

GRUPOS	ATIVIDADES	COMPARAÇÃO
1.º	1	Dois segmentos de reta
	2	Dois segmentos de reta
	3	Dois segmentos de reta
2.º	4	Um segmento de reta e uma linha poligonal aberta
	5	Um segmento de reta e uma linha curva
3.º	6	Duas linhas poligonais abertas
	7	Duas linhas poligonais abertas
	8	Duas linhas poligonais abertas
4.º	9	Uma linha poligonal aberta e uma linha curva
	10	Uma linha poligonal aberta e uma linha curva
5.º	11	Duas linhas curvas

É provável que essa maior incidência dos fenômenos visuais em tais atividades decorra das configurações das figuras que terminam contribuindo para essas ocorrências. Nesse caso, estamos admitimos que os efeitos visuais manifestam-se em virtude de uma maior atração entre as figuras, isto é, na perspectiva enfatizada pela Gestalt. Além disso, como decorrência do efeito de contração proposto por Piaget (1969).

Das 339 ocorrências de respostas registradas nas onze atividades, 112 foram categorizadas como resultantes de eventos de visualização, o que representa 33,04%. Tivemos 33 casos associados a acertos (29,46%) e 79 associados a erros (70,54%). Ainda foi um

número elevado de acertos, considerando que quase sempre os efeitos eram detectados em situações de erros.

Entre os efeitos foi verificado o maior número de casos do efeito “associa número a comprimento”, atingindo 26 situações, o que terminou sendo uma surpresa porque só era esperado acontecer em apenas uma atividade. De qualquer forma é um evento que não se pode prever o que irá acontecer, pois o aluno costuma mobilizar tal conhecimento em situações imprevisíveis. A interferência “associa posição a comprimento”, atingiu também 26 situações. Esse resultado é coerente, considerando que pelo menos em cinco das atividades era esperado que houvesse manifestação desse fenômeno. Por outro lado, o número de 20 casos para o efeito da “projeção horizontal”, terminou sendo surpreendente, pois essa modalidade só era prevista ocorrer em apenas uma atividade. Estávamos acreditando que as respostas seriam mais acionadas considerando os efeitos das “linhas imaginárias interextremos ou interextremidades”, sem atentarmos para o fato que havia mais influência do efeito “projeção horizontal”, do que esses dois supracitados.

O número extremamente reduzido de casos associados à interferência “projeção oblíqua” corresponde ao que se esperava em termos de ocorrências. No entanto, também está relacionado ao pequeno número de atividades com os entes geométricos dispostos de forma oblíqua.

Portanto, categorizamos cinco tipos de efeitos e dois tipos de interferências, como mostra a tabela abaixo:

Tabela 13: Síntese dos efeitos e interferências detectados nas atividades

Conhecimentos mobilizados	Número de Ocorrências
- Efeito “associa número a comprimento”.	26
- Efeito “projeção horizontal”	20
- Efeito “espaço ocupado”	12
- Efeito “linha imaginária interextremidades”	10

- Efeito “linha imaginária interxtremos”	10
- Interferência “associa posição a comprimento”.	26
- Interferência “projeção oblíqua”	3
Total	112

A nossa compreensão é que as interferências também se caracterizam como eventos de visualização, cabendo serem categorizados como novas modalidades de efeitos visuais.

Após esse levantamento dos eventos de visualização e ao considerar todos eles como modalidades dos efeitos, cabe reagrupá-los nos seguintes subgrupos: os que dizem respeito às projeções (“projeção horizontal”; “projeção vertical” e “projeção oblíqua”); os que se referem às linhas imaginárias (“linha imaginária interextremidades” e “linha imaginária interxtremos”); os que correspondem ao apelo de associações (“associa número a comprimento” e “associa posição a comprimento”) e os que compõem o subgrupo de espaços ocupados (“espaço ocupado”). Poderíamos dizer que são quatro subgrupos: “efeitos projeções”; “efeito linhas imaginárias”; “efeitos associações” e efeitos “espaços ocupados”.

Em seguida, apresentaremos as ocorrências registradas quanto aos procedimentos de resolução que aconteceram nas respectivas atividades.

Tabela 14: Ocorrências dos procedimentos por atividade

Atividades	Tipo de procedimento	Número de ocorrências
Atividade 1	Observação visual	22
	Utilização de artifício	7
Atividade 2	Observação visual	19
	Utilização de artifício	9
Atividade 3	Observação visual	21
	Utilização de artifício	8
Atividade 4	Observação visual	21
	Utilização de artifício	7
Atividade 5	Observação visual	18
	Utilização de artifício	10
Atividade 6	Observação visual	23
	Utilização de artifício	9
Atividade 7	Observação visual	20
	Utilização de artifício	8

Atividade 8	Observação visual	20
	Utilização de artifício	8
Atividade 9	Observação visual	21
	Utilização de artifício	7
Atividade 10	Observação visual	25
	Utilização de artifício	3
Atividade 11	Observação visual	23
	Utilização de artifício	5
	TOTAL	314

Os procedimentos foram acionados por 314 vezes. O procedimento da “observação visual” teve um total de incidência de 233, enquanto o da “utilização de artifício” atingiu 81 ocorrências. O primeiro representou 74,20% dos casos e o segundo 25,80%. É natural essa supremacia do apelo à “observação visual”, pois o fato de não ter sido disponibilizado “ferramentas” que servissem como medianeiros terminou favorecendo a busca por esse recurso.

Das 233 ocorrências relacionadas à “observação visual”, 135 corresponderam a respostas certas e 98 a erradas. As primeiras representaram 57,94% e estas últimas 42,06%. Quanto ao procedimento “utilização de artifício”, foram 81 ocorrências, sendo 54 associadas a respostas certas, representando 66,67% e 27 associadas a respostas erradas, o que significa 33,33%.

Um tipo de artifício que não foi inserido na análise que também nos chamou bastante atenção foi o fato de mais de um aluno apelar para criar seus medianeiros. Uma aluna arrancou um fio de cabelo e fez a sobreposição das linhas usando esse recurso. Enquanto dois alunos deformaram o clipe que dispunha para usar com igual propósito. Esse foi o momento rico que nos fez lembrar do processo natural de construção do medianeiro efetuado pelo homem, isto é, foi a própria necessidade que contribuiu para essa culminância da referida construção.

No que tange às relações entre os aspectos teóricos e os fenômenos de visualização que analisamos, denominados efeitos visuais, alguns pontos gostaríamos de destacar.

Em primeiro lugar, que os dois pilares abordados no primeiro capítulo da tese, principalmente os alicerçados em elementos da Gestalt e da teoria Piagetiana, foram extremamente proveitosos para esclarecer alguns dos eventos visuais. Obviamente, pelo que está descrito neste trabalho, é possível verificar a presença de maiores afinidades com os estudos gestálticos.

A partir do conceito de estrutura, que é básico no gestaltismo, verificam-se vestígios dessa afinidade, pois podemos associar as figuras no campo das atividades como representantes do “conjunto não-somativo de partes cujas funções dependem da posição que elas ocupam na própria totalidade” (PENNA, 1978, p.165). Da mesma forma, poderíamos associar os efeitos visuais como integrantes desse conjunto não-somativo, embora nem sempre explícitos, que também apresentam funções dependentes da posição que ocupam na totalidade.

Já sublinhamos que na relação dialética do visível com o invisível, as figuras poderiam caracterizar o que está presente, enquanto os efeitos visuais caracterizariam o que está co-presente. Nesse sentido, as mobilizações dos conhecimentos que geram os efeitos visuais poderiam transitar entre o presente e o co-presente.

É bem verdade que a Gestalt privilegiou o sentido visual quando comparada com os demais. Por outro lado, essa ênfase terminou contribuindo, ainda mais, para quem tem preocupações em estudar fenômenos específicos como o do nosso objetivo de estudo, que está delimitado nessa circunscrição. Nessa perspectiva, ressaltamos, sobretudo, as contribuições que dizem respeito à organização da percepção visual, isto é, “dos princípios que regem os modos como os olhos percebem os objetos no espaço” (BOLDA, 1997, p. 27).

Particularmente, assinalamos as leis da *proximidade*, da *semelhança* e do *fechamento* que estão subordinadas ao princípio geral – da boa forma ou da pregnância. São por meio delas que percebemos mais afinidades com os eventos de visualização que temos tratado.

De acordo com Koffa (1973), não é tarefa tão simples formular a lei de proximidade do agrupamento, mais ainda, admite que havendo no campo um número de partes iguais, organizar-se-ão numa unidade superior as que estiverem mais próximas. É como existisse uma força de atração entre tais partes desses elementos, sendo que a forma exerce atração maior que a cor.

Uma outra natureza de agrupamento ou lei, que também sinaliza com muita afinidade com os efeitos visuais, é o da *semelhança*, exatamente porque está relacionada a ter elementos com características comuns. Assim, poderíamos considerar que há figuras com características comuns.

Os subgrupos “efeito das projeções” e “linhas imaginárias” parecem sofrer influências dessas duas leis. Para o primeiro caso, estamos admitindo que, ao efetuar as comparações, o aluno adota o critério de projetar linhas e tenta identificar a que tem maior ou menor comprimento, dependendo do que se pede. Nesse caso, essas projeções são decorrentes de partes dessas linhas que apresentam características comuns (horizontal, vertical ou oblíqua). Para o segundo caso, são as linhas que são imaginadas a partir de partes que se destacam nas figuras, ou simplesmente porque o aluno passa a considerar linhas que liguem as extremidades. Em uma outra situação, são essas partes consideradas que se destacam para o estabelecimento da comparação.

O próprio evento “associa número a comprimento” também parece sofrer influência da lei da *semelhança*, porque as partes contadas são as que se destacam quando é efetuada a comparação. Aliás, este fenômeno e os dois subgrupos citados anteriormente, também parecem estar associados ao efeito da *centração* assinalado por Piaget (1969), no qual o aluno

termina superestimando partes das figuras quando é evocada alguma natureza de percepção visual.

Acreditamos que a centração também influa para que o aluno superestime a posição da figura em detrimento do comprimento, ou ainda, até o subgrupo dos efeitos das situações autônomas também podem sofrer influências da centração.

Ainda sobre esse evento de visualização que o aluno “associa número a comprimento”, enfatizamos que há algumas relações com elementos teóricos que apresentamos, e destacaríamos a preocupação assinalada por Câmara dos Santos (1999). Este autor fez menção ao obstáculo didático relacionado à confusão entre a grandeza e a medida da grandeza, isto é, exemplificou ser freqüente alunos afirmarem um retângulo de área 20 ser maior que um de área 15. É a prática de considerar o número e não a grandeza. Entendemos que igual atitude aconteceu nas situações em que o aluno buscou associar o número e desconsiderou a grandeza.

Antes de retomarmos algumas considerações relacionadas aos efeitos visuais e aspectos epistemológicos, gostaríamos de enfatizar que Piaget & Garcia (1983), ao descreverem sobre as etapas da geometria associando-as às fases – intrafigural, interfigural e transfigural – nos permitiu perceber que os eventos de visualização que temos abordado se inserem na segunda fase, denominada interfigural. Não só caracterizaram como uma fase que se estabelecem relações entre figuras, mas como indicaram ser a etapa em que predomina a geometria projetiva.

As reflexões teóricas também nos levaram a delimitar a visualização como uma operação cognitiva, que nos possibilitou relacionar as respectivas situações de comparação. Mais do que isso, nos ajudou a delimitar de forma mais pontual as ocorrências dos efeitos visuais; inclusive, contribuindo para um melhor entendimento epistemológico da grandeza comprimento.

É bem verdade que essas reflexões foram enriquecidas por meio da modelização didática de Douady & Perrin-Glorian (1989). Dentre as várias contribuições, destacamos a compreensão de que a culminância de elaboração do conceito de grandeza se deu na passagem do pólo geométrico para o pólo das grandezas. Além disso, de que a plenitude desse conceito é atingida no estabelecimento das relações entre os pólos geométrico, das grandezas e dos números.

Mais uma vez sugerimos que se considere no modelo didático dessas pesquisadoras o aspecto da visualização, não como um viés de conhecimento matemático, mas cognitivo. Por isso propomos seu ingresso numa configuração de caráter transversal.

Antes de encerramos estas considerações finais, gostaríamos de enfatizar que mesmo sendo detectados alguns eventos de visualização há necessidade de melhores esclarecimentos quanto a tais fenômenos. Nesse sentido, apontamos como uma primeira limitação do nosso experimento o fato de não termos avançado numa perspectiva de realizamos uma etapa posterior – entrevista – que poderia ter nos ajudado em algumas ocasiões para termos mais clareza sobre os efeitos visuais.

Podemos confirmar essa lacuna até mesmo com a indicação de uma categoria dos conhecimentos mobilizados que denominamos de “comparação indevida, sem identificar a causa”, sendo registrado 61 ocorrências dessa modalidade nas 11 atividades. Talvez esse tenha sido o indício mais evidente, mas alguns outros poderiam ser assinalados. Por mais de uma ocasião, os registros dos alunos, quanto ao questionamento “Explique como você respondeu”, ficaram precisando de uma melhor compreensão sobre o que havia subjacente ao que foi explicitado na descrição.

Lembramos que o não investimento no recurso da entrevista se deu basicamente por dois motivos: o primeiro foi por entendermos que no nosso experimento já tínhamos elementos consideráveis para as reflexões que estávamos pretendendo. Segundo porque

tivemos uma preocupação em delimitar alguns aspectos que considerávamos de muita importância relacionados aos efeitos visuais; por exemplo, tentar descrever as etapas da visualização nessa relação com a grandeza comprimento; segundo, tentar contribuir nas relações sobre o fluxo do modelo didático envolvendo os quadros – geométrico, das grandezas e numérico – considerando o aspecto da visualização.

Alguns outros aspectos podem ser assinalados como limitações do nosso estudo. Um deles diz respeito a não termos efetivado um controle do perfil de cada aluno quanto às mobilizações nas respectivas respostas, mais ainda, se há alguma possível relação entre os efeitos e os sujeitos que são influenciados por esses eventos visuais. Outro aspecto que não assinalamos foi se o nível de escolaridade também tem alguma relação com uma maior ou menor incidência dos efeitos visuais. Um terceiro aspecto que é pertinente apontar diz respeito ao controle das variáveis envolvidas. Por exemplo, não fizemos nenhuma indicação do que aconteceria caso as variáveis fixadas para o primeiro grupo fossem exploradas nos demais grupos. Ainda podemos enfatizar como aspecto que caracteriza lacuna deste trabalho o fato de não termos condições de esclarecermos quais os efeitos que possam exercer mais influência quando as linhas forem fechadas.

Concluímos esta tese sugerindo que novos estudos sejam realizados não apenas com o propósito de superar essas lacunas do experimento que realizamos, mas também, que sejam realizados outros estudos que estabeleçam comparações considerando as duas etapas da “discriminação visual ativa” de natureza contínua: direta e indireta. Nesse caso, envolvendo situações com entes fixos e com entes móveis. Até mesmo no sentido de avançar para trabalhos que se considerem a “discriminação visual ativa” de natureza descontínua: arbitrária e padronizada. Também nos instiga estimular que novos estudos sejam realizados com atividades que contemplem variáveis didáticas em função de cada tipo de efeito visual.

ANEXOS

ANEXO A
FAIXA ETÁRIA DOS ALUNOS

ALUNO	IDADE	QUAIS	QUANTOS
1	10 anos		9 anos - 1
2	11 anos	9 anos - 15	10 anos - 10
3	12 anos		11 anos - 8
4	14 anos		12 anos - 6
5	11 anos	10 anos - 1; 6; 11; 12;	13 anos - 2
6	10 anos	13; 20; 21; 23; 26; 27	14 anos - 1
7	13 anos		
8	12 anos		
9	12 anos		
10	11 anos	11 anos - 2; 5; 10; 14;	
11	10 anos	16; 17; 22; 24	
12	10 anos		
13	10 anos		
14	11 anos		
15	9 anos	12 anos - 3; 8; 9; 15; 18;	
16	11 anos	25	
17	11 anos		
18	12 anos		
19	13 anos		
20	10 anos	13 anos - 7; 19	
21	10 anos		
22	11 anos		
23	10 anos		
24	11 anos		
25	12 anos	14 anos - 4	
26	10 anos		
27	10 anos		
28	12 anos		

ANEXO B

DURAÇÃO DA SESSÃO

ALUNO	SESSÃO	QUAIS	QUANTOS
1	32 min	Menos que 30 min – 6	Menos de 30 min - 1
2	37 min		
3	55 min		
4	74 min	De 31 a 40 min – 1; 2; 8; 10; 14; 18; 19; 20; 26;	De 31 a 40 min - 9
5	72 min		
6	27 min		
7	67 min		
8	35 min	De 41 a 50 min – 13; 15; 16; 24; 28	De 41 a 50 min - 5
9	59 min		
10	37 min		
11	61 min		
12	70 min	De 51 a 60 min – 3; 9; 21; 27	De 51 a 60 min - 4
13	47 min		
14	30 min		
15	45 min		
16	47 min	De 61 a 70 min – 7; 11; 12; 17; 22	De 61 a 70 min - 5
17	66 min		
18	34 min		
19	34 min		
20	31 min	Mais de 70 min – 4; 5; 25; 75	Mais de 70 min - 4
21	55 min		
22	67 min		
23	85 min		
24	47 min		
25	71 min		
26	39 min		
27	56 min		
28	44 min		

ANEXO C
LEVANTAMENTO DAS RE SPOSTAS

luno	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4	Atividade 5	Atividade 6	Atividade 7	Atividade 8	Atividade 9	Atividade 10	Atividade 11
1	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho
2	Vermelho	Azul	Vermelho								
3	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho
4	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho
5	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho
6	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho
7	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho							
8	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Azul
9	Azul	Vermelho	Vermelho	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Vermelho	Vermelho	Azul
10	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho
11	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Vermelho	Vermelho
12	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho
13	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Azul
14	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Azul
15	Azul	Vermelho	Vermelho	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho
16	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul
17	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Azul	Azul	Azul	Vermelho
18	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho
19	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho							
20	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul
21	Azul	Vermelho	Vermelho	Vermelho	Azul	Azul	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Azul
22	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul
23	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul
24	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho
25	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul
26	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho
27	Azul	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho
28	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Azul	Vermelho	Azul	Vermelho	Vermelho	Azul	Vermelho

ANEXO D
LEVANTAMENTO DOS ACERTOS E ERROS

Item	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4	Atividade 5	Atividade 6	Atividade 7	Atividade 8	Atividade 9	Atividade 10	Atividade 11
1	Errada	Errada	Certa	Errada	Errada	Errada	Certa	Certa	Certa	Errada	Certa
2	Errada	Errada	Certa	Certa	Certa	Certa	Errada	Errada	Errada	Errada	Certa
3	Certa	Errada	Errada	Errada	Certa						
4	Certa	Errada	Certa								
5	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Certa	Certa	Certa	Errada	Errada	Certa
6	Errada	Errada	Errada	Errada	Errada	Errada	Certa	Certa	Certa	Certa	Certa
7	Errada	Certa	Certa	Errada	Certa	Errada	Errada	Certa	Certa	Certa	Certa
8	Certa	Errada	Errada	Errada							
9	Certa	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Certa	Errada	Certa	Errada
10	Errada	Errada	Certa	Errada	Errada	Errada	Certa	Certa	Certa	Errada	Certa
11	Certa	Certa	Certa	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa
12	Certa	Errada	Errada	Certa							
13	Certa	Certa	Certa	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Errada	Errada
14	Certa	Certa	Certa	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Errada	Errada
15	Certa	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Errada	Errada	Errada	Certa
16	Certa	Errada									
17	Certa	Errada	Certa	Errada	Certa						
18	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Certa	Errada	Certa
19	Certa	Certa	Errada	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Certa	Errada	Certa
20	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Certa	Certa	Errada
21	Certa	Certa	Certa	Errada	Errada	Certa	Certa	Errada	Errada	Errada	Errada
22	Errada	Certa	Certa	Errada							
23	Errada	Certa	Errada								
24	Certa	Certa	Errada	Errada	Errada	Certa	Certa	Certa	Errada	Errada	Certa
25	Certa	Certa	Errada	Errada	Errada	Certa	Errada	Errada	Certa	Certa	Errada
26	Certa	Certa	Errada	Errada	Certa	Errada	Certa	Certa	Certa	Errada	Certa
27	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Certa	Certa	Errada	Errada	Certa
28	Certa	Certa	Certa	Certa	Errada	Errada	Certa	Certa	Errada	Errada	Certa

ANEXO E: RESUMO DOS DADOS DAS ATIVIDADES (1 a 5)

ATIVIDADE 1			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	3, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28	21	75,00
Errada	1, 2, 6, 7, 10, 22, 23	7	25,00
Índice Percentual total de acertos e erros: C (21) 75,00% - E (6) 25,00%			
ATIVIDADE 2			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28	22	78,57
Errada	1, 2, 6, 10, 22, 23	6	21,43
Índice Percentual total de acertos e erros: C (22) 78,57% - E (6) 21,43%			
ATIVIDADE 3			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 28	17	60,71
Errada	5, 6, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27	11	39,29
Índice Percentual total de acertos e erros: C (17) 60,71% - E (11) 39,29%			
ATIVIDADE 4			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	2, 3, 4, 5, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 27, 28	16	57,14
Errada	1, 6, 7, 9, 10, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 26	12	42,86
Índice Percentual total de acertos e erros: C (16) 57,14% - E (12) 42,86%			
ATIVIDADE 5			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 26, 27	17	60,71
Errada	1, 6, 10, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 28	11	39,29
Índice Percentual total de acertos e erros: C (17) 60,71% - E (11) 39,29%			

ANEXO F: RESUMO DOS DADOS DAS ATIVIDADES (6 a 11)

ATIVIDADE 6			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 19, 21, 24, 25	14	50,00
Errada	1, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 18, 20, 22, 23, 26, 27, 28	14	50,00
Índice Percentual total de acertos e erros: C (14) 50,00% - E (14) 50,00%			
ATIVIDADE 7			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 26, 27, 28	21	75,00
Errada	2, 7, 9, 15, 22, 23, 25	7	25,00
Índice Percentual total de acertos e erros: C (21) 75,00% - E (7) 25,00%			
ATIVIDADE 8			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 24, 26, 27, 28	18	64,29
Errada	2, 3, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 25	10	35,71
Índice Percentual total de acertos e erros: C (18) 64,29% - E (10) 35,71%			
ATIVIDADE 9			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 4, 6, 7, 10, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 25, 26	13	46,43
Errada	2, 3, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 27, 28	15	53,57
Índice Percentual total de acertos e erros: C (13) 46,43% - E (15) 53,57%			
ATIVIDADE 10			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	6, 7, 9, 11, 16, 20, 22, 23, 25	9	32,14
Errada	1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 24, 26, 27, 28	19	67,86
Índice Percentual total de acertos e erros: C (9) 32,14% - E (19) 67,86%			
ATIVIDADE 11			
Resposta	Aluno	#	%
Certa	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 17, 18, 19, 24, 26, 27, 28	18	64,29
Errada	8, 9, 13, 14, 16, 20, 21, 22, 23, 25	10	35,71
Índice Percentual total de acertos e erros: C (18) 64,29% - E (10) 35,71%			

ANEXO G: LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 1

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Errada	<i>Eu olhei o caminho mais curto e o achei o mais curto. Médi no lápis.</i>	Observação/ Utilização de artifício (lápis)
2	Errada	<i>É o vermeelho porque eu cheguei a essa conclusão</i>	Observação visual
3	Certa	<i>Eu acho que é o azul porque é mais curto e mais pequeno.</i>	Observação visual
4	Certa	<i>Eu usei o lápis para ver o caminho mais curto.</i>	Utilização de artifício (lápis)
5	Certa	<i>Porque o azul dá para perceber. Eu descobri porque eu usei a borracha.</i>	Utilização de artifício (borracha)
6	Errada	<i>Porque eu acho que o vermeelho é mais caminho.</i>	Observação visual
7	Errada	<i>Porque eu descobri que o vermeelho estava abaixo porque o azul estava em cima.</i>	Observação visual
8	Certa	<i>Eu cheguei a esse resultado porque é o caminho mais curto para minha casa.</i>	Observação visual
9	Certa	<i>Porque eu observei que o vermeelho é um caminho mais longo e o azul mais curto.</i>	Observação visual
10	Errada	<i>Porque eu achei o vermeelho mais perto.</i>	Observação visual
11	Certa	<i>Eu olhei direito e vi que o azul era mais curto do que o vermeelho.</i>	Observação visual
12	Certa	<i>Eu descobri que o caminho mais curto era o azul porque eu meedi com o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
13	Certa	<i>Porque eu achei o azul muito assim pequeno. Achei a diferença dele porque ele tá em cima, eu achei estranho diferente do vermeelho porque o azul é muito pequeno.</i>	Observação visual
14	Certa	<i>Eu meedi com os dedos e descobri que o caminho mais curto foi o azul.</i>	Utilização de artifício (dedos)
15	Certa	<i>Eu descobri observando a figura acima.</i>	Observação visual
16	Certa	<i>Porque o caminho vermeelho está em baixo e o azul está em cima por isso dá para perceber que o azul é o caminho mais curto.</i>	Observação visual
17	Certa	<i>Eu descobri que o azul era o caminho mais curto porque o vermeelho está maior do que o azul.</i>	Observação visual
18	Certa	<i>Porque o azul é mais curto porque tem menos letras.</i>	Contagem de letras
19	Certa	<i>Eu utilizei o lápis, eu dei o lápis e olhei onde cada um batia.</i>	Utilização de artifício (lápis)
20	Certa	<i>Eu achei que o azul é o mais pequeno, o vermeelho é mais grande.</i>	Observação visual
21	Certa	<i>Porque eu achei o azul mais curto.</i>	Observação visual
22	Errada	<i>Eu descobri porque eu olhei para os dois caminhos e vi que era o caminho vermeelho porque era o caminho curto</i>	Observação visual
23	Errada	<i>Eu só descobri porque a linha vermelha está mais baixa do que a linha azul e para isso eu usei a mente.</i>	Observação visual
24	Certa	<i>Eu descobri com o olhar que o azul é menor que o vermeelho por isso dá para ver que o azul é pequeno e o vermeelho é grande.</i>	Observação visual
25	Certa	<i>Arcom preinsive!</i>	Observação visual
26	Certa	<i>Porque o azul é mais pequeno do que o vermeelho que é mais grande e o azul é mais pequeno.</i>	Observação visual
27	Certa	<i>Porque eu observei e o azul é o caminho mais curto.</i>	Observação visual
28	Certa	<i>Eu descobri usando a cabeça porque é o certo usar a cabeça para responder a tarefa.</i>	Observação visual

ANEXO H: LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 2 (Modelo Papel e Lápis)

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Errada	<i>Eu achei olhando e descobri.</i>	Observação visual
2	Errada	<i>Eu descobri que é o azul porque ele é mais curto.</i>	Observação visual
3	Certa	<i>Eu observei e pensei e eu soube o que é mais curto é o vermelho porque eu vi que é mais curto.</i>	Observação visual
4	Certa	<i>Eu usei a borracha e dei para descobrir o caminho mais curto.</i>	Utilização de artifício (borracha)
5	Certa	<i>Porque eu usei a borracha, aí eu consegui e eu chei muito, aí eu pensei, aí eu achei que era o vermelho.</i>	Utilização de artifício (borracha)
6	Errada	<i>Porque eu acho que o vermelho é mais mais.</i>	Observação visual
7	Errada	<i>Eu tava com dúvida vermelho lado azul noutro lado.</i>	Observação visual
8	Certa	<i>Eu descobri usando o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
9	Certa	<i>Eu cheguei a essa conclusão porque eu medí com o dedo.</i>	Utilização de artifício (dedos)
10	Errada	<i>O azul está na frente do vermelho.</i>	Observação visual
11	Certa	<i>Eu vi que o vermelho é mais curto porque se com parar o vermelho com o azul o caminho mais curto é o vermelho.</i>	Observação visual
12	Certa	<i>Dá para ver que a cor vermelha é mais curta.</i>	Observação visual
13	Certa	<i>Porque o vermelho tá assim pequeno, mas só que o azul tá maior do que o vermelho. Só por um pedacinho o vermelho não é maior.</i>	Observação visual
14	Certa	<i>Eu medí e descobri que era o vermelho.</i>	Utilização de artifício
15	Certa	<i>Eu descobri olhando e cheguei a descobrir que o caminho mais curto é o vermelho.</i>	Observação visual
16	Certa	<i>Eu descobri medindo com o lápis e o erro caminho é o vermelho.</i>	Utilização de artifício (lápis)
17	Certa	<i>Eu descobri usando a memória porque se o azul tiver maior, claro que o vermelho é o caminho mais curto.</i>	Observação visual
18	Certa	<i>Porque o vermelho é mais curto.</i>	Observação visual
19	Certa	<i>Eu utilizei o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
20	Certa	<i>Eu achei que o vermelho mais pequeno e o azul mais grande.</i>	Observação visual
21	Certa	<i>O vermelho eu achei mais curto.</i>	Observação visual
22	Errada	<i>Eu descobri porque eu achei um jeito de achar o caminho mais curto, pegando o lápis e medindo dois caminhos e encontrei o azul.</i>	Utilização de artifício (lápis)
23	Errada	<i>Eu só descobri porque a linha azul está mais baixa e para isso eu usei meu dedo.</i>	Utilização de artifício (dedos)
24	Certa	<i>Eu descobri porque logo quando eu abri a folha eu vi que o vermelho é mais curto que o azul.</i>	Observação visual
25	Certa	<i>Incompreensível!</i>	Observação visual
26	Certa	<i>Vermelho é mais curto e azul é mais longo.</i>	Observação visual
27	Certa	<i>Eu observei e vi que o vermelho é o caminho mais curto.</i>	Observação visual
28	Certa	<i>Eu consegui esta resposta porque eu usei a cabeça e pensei.</i>	Observação visual

ANEXO I: LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 3

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Certa	<i>Eu descobri m edindo nos dedos.</i>	Utilização de artifício (dedos)
2	Certa	<i>Porque o vermelho está pequeno o azul está grande.</i>	Observação visual
3	Certa	<i>Eu vi a folha de lado e observei bem e soube qual foi, foi o vermelho, eu sei que foi ele por causa disso.</i>	Observação visual
4	Certa	<i>Deu para ver o mais curto e foi o vermelho.</i>	Observação visual
5	Errada	<i>Eu encontrei nesta conclusão e eu achava mais certo é o azul na minha opinião, mas eu não sei se está certo.</i>	Observação visual
6	Errada	<i>Eu acho que ele é mais m aiinho.</i>	Observação visual
7	Certa	<i>Tava em cima a porque vermelho azul tava abakko.</i>	Observação visual
8	Certa	<i>O vermelho porque é menor do que o azul.</i>	Observação visual
9	Certa	<i>Eu achei que o vermelho é m ais curto porque eu m arquei com o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
10	Certa	<i>Porque o vermelho está muito m ais perto do cam iinho curto por isso eu acho que o vermelho está mais perto (julgício Efeito posição).</i>	Observação visual
11	Certa	<i>Eu medi com o lápis e vi que o vermelho é o m ais curto.</i>	Utilização de artifício (lápis)
12	Certa	<i>Eu descobri que o vermelho é m enor do que o azul porque dá para ver.</i>	Observação visual
13	Certa	<i>O azul é m aiór bem pouquinha coisa do que o vermelho. Eles tem diferente porque o azul é m aiór um pouco do que o vermelho e por causa disso o vermelho não é m aiór.</i>	Observação visual
14	Certa	<i>Eu medi com o lápis e descobri.</i>	Utilização de artifício (lápis)
15	Certa	<i>Eu descobri observando, fiquei com muita dúvida, mas depois eu observei mais uma vez e descobri que era o vermelho.</i>	Observação visual
16	Certa	<i>Eu descobri com o meu lápis, você quando olha logo já percebe que o cam iinho azul é o m ais largo.</i>	Utilização de artifício (lápis)
17	Certa	<i>Eu descobri que o vermelho é m enor porque o azul está m aiór do que o vermelho.</i>	Observação visual
18	Errada	<i>Porque a linha azul está m enos pequeno.</i>	Observação visual
19	Errada	<i>Eu tam bém utilizei o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
20	Errada	<i>O vermelho é m ais grande e o azul m ais pequeno.</i>	Observação visual
21	Certa	<i>Porque achei o vermelho m ais curto.</i>	Observação visual
22	Errada	<i>Eu encontrei pegando o meu dedo e m edi os dois cam iinhos e peguei o lápis e m edi os dois cam iinhos, mas depois eu pensei qual era o cam iinho e descobri o azul.</i>	Utilização de artifício (lápis/dedo)/ Observação visual
23	Errada	<i>Eu só descobri que a linha azul está m ais kaka porque eu usei o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
24	Errada	<i>Porque cheguei na conclusão que o azul é m ais curto que o vermelho.</i>	Observação visual
25	Errada	<i>Incompreensível</i>	Observação visual
26	Errada	<i>O azul é m ais curto e o vermelho é m ais longo.</i>	Observação visual
27	Errada	<i>Porque eu observei os dois e vi que o azul é o cam iinho m ais curto.</i>	Observação visual
28	Certa	<i>Eu descobri porque eu li o parágrafo porque eu fiquei pensando.</i>	Observação visual

ANEXO J: LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 4

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Errada	<i>Eu descobri olhando o caminho mais curto, eu olhei os caminhos.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
2	Certa	<i>Eu descobri que o azul está mais curto do que o vermelho.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
3	Certa	<i>Eu descobri com a borracha e eu soube qual foi, foi o azul.</i>	Utilização de artifício (borracha)
4	Certa	<i>Eu descobri que usando a borracha seria mais fácil e o lápis.</i>	Utilização de artifício (borracha e lápis)
5	Certa	<i>Porque eu achava a resposta suficiente, eu achei o azul.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
6	Errada	<i>Porque ele é mais caminho.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
7	Errada	<i>Tava de claro que vermelho, azul tava outro lado.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
8	Certa	<i>Porque está em partes reta com o um a linha.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
9	Errada	<i>Eu achei que o vermelho porque eu me enfi com a borracha.</i>	Utilização de artifício (borracha)
10	Errada	<i>O vermelho tem voltas, mas eu acho mais perto do que o azul.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
11	Certa	<i>Eu descobri me olhando com a borracha.</i>	Utilização de artifício (borracha)
12	Certa	<i>Eu descobri porque o azul está mais curto do que o vermelho.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
13	Certa	<i>O azul tá mais curto porque o azul tá um traço e o vermelho tá com o fosse um dois por isso o vermelho é maior do que o azul e um traço nunca ganha.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
14	Certa	<i>Eu me di com o lápis e descobri.</i>	Utilização de artifício (lápis)
15	Errada	<i>Eu descobri que era o vermelho porque eu olhei muito, fiquei em dúvida e depois de um tempo eu cheguei a conclusão que era o vermelho.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
16	Certa	<i>Eu fui me olhando cada lado do caminho vermelho.</i>	Utilização de artifício
17	Certa	<i>Eu descobri que o azul está menor do que o vermelho porque o vermelho está no formato de um cinco e tá bem dá pra perceber que o vermelho está maior do que o azul.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
18	Certa	<i>Porque o vermelho está mais grande porque azul é menos pequeno.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
19	Certa	<i>Utilizando os olhos.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
20	Certa	<i>O azul é mais grande porque o vermelho é pequeno.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
21	Errada	<i>Eu descobri que o vermelho é mais curto porque é dobradinho.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
22	Errada	<i>Eu descobri olhando os dois caminhos e vi que era o vermelho porque o caminho vermelho era o mais curto.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
23	Errada	<i>Saber porque eu descobri porque eu usei a borracha e foi aí que descobri que se eu esticar a linha vermelha ela fica mais baixa do que a linha azul (Estão associar posição a com primeiro).</i>	Utilização de artifício (borracha)
24	Errada	<i>Não tinha opinião o vermelho, mas essa foi um pouco difícil.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
25	Errada	<i>Incompreensível</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
26	Errada	<i>Vermelho é mais curto e o azul é mais longo.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
27	Certa	<i>Porque o azul é reto e curto e o vermelho tem curvas e é mais longo.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual
28	Certa	<i>Eu descobri pensando com a cabeça. Eu pensei muito.</i>	<input type="checkbox"/> observação visual

ANEXO L: LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 5

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Errada	<i>Eu achei no dedo, eu ajuntei os dedos.</i>	Utilização de artifício (dedos)
2	Certa	<i>Eu descobri que o vermelho é mais curto.</i>	Observação visual
3	Certa	<i>Porque o vermelho está reto e o azul está deitado, eu pensei e observei e soube qual era.</i>	Observação visual
4	Certa	<i>É descobri que usando o lápis para os caminhos retos seria mais fácil e os caminhos que é dobrados.</i>	Utilização de artifício (lápis)
5	Certa	<i>Porque eu fiz uns pontinhos na borracha, mas eu consegui achar a resposta suficiente.</i>	Utilização de artifício (borracha)
6	Errada	<i>Porque ele é mais mais curto.</i>	Observação visual
7	Certa	<i>Vermelho táva deitado.</i>	Observação visual
8	Certa	<i>Viendo que o azul está maior.</i>	Observação visual
9	Certa	<i>Eu achei que o vermelho é mais curto porque eu abri o clipe.</i>	Sobreposição de medianeiros (clipe)
10	Errada	<i>O azul tem curvas, mas se torna perto.</i>	Observação visual
11	Certa	<i>Eu descobri me olhando com os dedos.</i>	Utilização de artifício (dedos)
12	Certa	<i>Medindo com o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
13	Certa	<i>O vermelho é mais curto do que o azul porque o azul ta entortado e é o vermelho mais curto do que o azul.</i>	Observação visual
14	Certa	<i>Eu medi com o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
15	Errada	<i>Eu medi, pensei muito e cheguei a descobrir que era o azul.</i>	Observação visual
16	Certa	<i>Eu fui me olhando a curva do caminho azul.</i>	Utilização de artifício
17	Certa	<i>Eu descobri que o vermelho está menor do que o azul porque o azul está com a dobradura grande.</i>	Observação visual
18	Certa	<i>Porque o vermelho está mais pequeno e o azul é mais pequena.</i>	Observação visual
19	Errada	<i>Descobri olhando para os dots.</i>	Observação visual
20	Certa	<i>O vermelho é mais grande porque o azul é mais pequeno.</i>	Observação visual
21	Errada	<i>Porque eu achei o azul mais curto do que o vermelho.</i>	Observação visual
22	Errada	<i>Eu encontrei quando eu peguei o lápis e medi o azul e o vermelho, achei que era o azul porque era o caminho mais curto.</i>	Utilização de artifício (lápis)
23	Errada	<i>Eu descobri com uma caneta porque se eu esticar a linha azul vai ficar mais baixa do que a linha vermelha (feito associar posição a comprimento).</i>	Utilização de artifício (caneta)
24	Errada	<i>Porque eu vi que o azul é mais curto que o vermelho, essa é a minha resposta.</i>	Observação visual
25	Errada	<i>Incompreensível</i>	Observação visual
26	Certa	<i>Porque o vermelho é mais curto e o azul.</i>	Observação visual
27	Certa	<i>Porque o vermelho é reto e o azul tem curvas por isso eu acho que o vermelho é o caminho mais curto.</i>	Observação visual
28	Errada	<i>Eu descobri porque eu sei ler, eu li o parágrafo para responder.</i>	Observação visual

ANEXO M LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 6

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Errada	<i>Eu olhei o caminho mais curto e achei.</i>	Observação visual
2	Certa	<i>É o azul porque ele é o caminho mais curto, ele é o mais curto mesmo.</i>	Observação visual
3	Certa	<i>Porque eu medi os lados e observei bem. E eu soube que era o azul. Eu m e pergunto por que um é pequeno e outro é grande por isso eu soube.</i>	Utilizou artifício/Observ. visual
4	Certa	<i>Eu usei a borracha para ver o vermelho, e azul, usei o lápis para ver mais curto.</i>	Utilizou artifício (borracha/ lápis)
5	Certa	<i>Porque eu usei a cabeça e a borracha e eu olhei muito.</i>	Utilizou borracha/Observ. visual
6	Errada	<i>Porque ele é mais alinhado e o azul eu achei pequeno.</i>	Observação visual
7	Errada	<i>Tava vermelho lado, azul medi lado.</i>	Utilização de artifício
8	Certa	<i>Porque está em partes pequenas.</i>	Observação visual
9	Certa	<i>Eu achei que o azul é mais curto porque eu meedi a borracha.</i>	Utilização de artifício (borracha)
10	Errada	<i>Porque os degraus do vermelho é mais largo e o caminho foi mais curto.</i>	Observação visual
11	Errada	<i>Apesar do vermelho os trapos serem grande, mas é o mais curto.</i>	Observação visual
12	Certa	<i>Porque dá para ver que o azul é menos que o vermelho.</i>	Observação visual
13	Errada	<i>O azul tá mais maior do que o vermelho porque o azul tá com um bocado de pedacinho.</i>	Observação visual
14	Errada	<i>Eu usei o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
15	Certa	<i>Não começo eu pensava que era o vermelho, mas não é, só porque ele só tinha 3 escadinhas que ele era o menor então depois eu descobri que era o azul.</i>	Observação visual
16	Certa	<i>Eu descobri que o vermelho tem as curvas maiores e o azul as curvas menores.</i>	Observação visual
17	Certa	<i>Eu descobri porque o azul e o vermelho está com a mesma dobradura, mas o azul está menor do que o vermelho.</i>	Observação visual
18	Errada	<i>Porque o azul está mais grande e o vermelho está mais pequeno.</i>	Observação visual
19	Certa	<i>Utilizando o lápis e os olhos, eu dei o lápis e olhei direitinho e meiquei.</i>	Utilizou lápis/Observação visual
20	Errada	<i>Porque o vermelho é mais grande e o azul é mais pequeno.</i>	Observação visual
21	Certa	<i>Porque o azul é mais curtinho e o espaço é pequeno.</i>	Observação visual
22	Errada	<i>Eu encontrei pegando o fundo do lápis e meedi os caminhos e depois eu pensei e achei o caminho vermelho.</i>	Utilização de artifício (lápis)
23	Errada	<i>Eu só descobri com o lápis e a mente, foi aí que eu tirei a realidade que o caminho mais curto e o caminho da linha vermelha.</i>	Utilizou lápis/Observação visual
24	Certa	<i>Porque eu cheguei na conclusão que é o azul na minha opinião por isso vermelho é mais pequeno.</i>	Observação visual
25	Certa	<i>Incompreensível</i>	Observação visual
26	Errada	<i>Porque as escadas do vermelho é mais curto.</i>	Observação visual
27	Errada	<i>Porque o vermelho tem menos espaços.</i>	Observação visual
28	Errada	<i>Eu descobri porque eu pensei muito por isso eu consegui responder pensando.</i>	Observação visual

ANEXO N: LE VANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 7

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Certa	<i>Eu achei olhando, observei e achei.</i>	Observação visual
2	Errada	<i>Porque o caminho mais curto é o vermelho.</i>	Observação visual
3	Certa	<i>Eu soube com o pensamento e pensei até aprender. É aprender com certeza vou aprender mais com você e com todos.</i>	Observação visual
4	Certa	<i>Porque os dois traços dois pontos é mais pequeno e do vermelho é mais alorzinho.</i>	Observação visual
5	Certa	<i>Porque eu achei o azul mais pequeno e eu usei a borracha e o número.</i>	Utilizou artifício (borracha)
6	Certa	<i>Porque ele é mais mais alinho e o azul eu achei pequeno.</i>	Observação visual
7	Errada	<i>Tava em cima porque o vermelho. Azul abaixo porque divida queria sabe o vermelho. Azul tava abaixo.</i>	Observação visual
8	Certa	<i>Eu descobri que o azul era mais curto porque esta em partes grandes.</i>	Observação visual
9	Errada	<i>Eu achei que o vermelho é mais curto porque eu medi com lápis e borracha.</i>	Utilização de artifício (lápis/borracha)
10	Certa	<i>O azul porque tem menos voltas.</i>	Observação visual
11	Certa	<i>Eu medi com o lápis e vi que o azul é o mais curto.</i>	Utilização de artifício (lápis)
12	Certa	<i>Eu medi com o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
13	Certa	<i>O vermelho agora é maior do que o azul porque o azul ta menor do que o vermelho, só passando um pedaço.</i>	Observação visual
14	Certa	<i>Eu usei os dedos.</i>	Utilização de artifício (dedos)
15	Errada	<i>Eu descobri olhando, tam bém observei e cheguei a descobrir que o vermelho.</i>	Observação visual
16	Certa	<i>Eu descobri o caminho sem as curvas é o mesmo tam alinho e com as curvas o vermelho é o maior.</i>	Observação visual
17	Certa	<i>Eu descobri que o azul está menor do que o vermelho porque o vermelho está quase que nem um z é por isso que o azul está mais menor do que o vermelho.</i>	Observação visual
18	Certa	<i>Porque o azul está no ostrado fotografia mais pequena.</i>	Observação visual
19	Certa	<i>Utilizei o lápis.</i>	Utilização de artifício (lápis)
20	Certa	<i>Eu fiz com dedo para conseguir a certa. O azul é mais pequeno.</i>	Utilização de artifício (dedos)
21	Certa	<i>Porque o azul é mais dobradinho do que o vermelho e eu achei mais curto.</i>	Observação visual
22	Errada	<i>Eu descobri porque eu olhei para os dois caminhos e vi que era o caminho vermelho porque era o caminho curto.</i>	Observação visual
23	Errada	<i>Eu descobri com um palito de picada, eu medi e vi que o caminho mais curto é o caminho da linha vermelha.</i>	Utilização de artifício (palito)
24	Certa	<i>Porque eu cheguei na conclusão que é o azul na minha opinião por isso vermelho é mais pequeno.</i>	Observação visual
25	Errada	<i>Incompreensível</i>	Observação visual
26	Certa	<i>Porque as escaidas do vermelho é mais curto.</i>	Observação visual
27	Certa	<i>Porque o vermelho tem menos espaços.</i>	Observação visual
28	Certa	<i>Eu descobri porque eu pensei muito por isso eu consegui responder pensando.</i>	Observação visual

ANEXO O: LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 8

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Certa	<i>Eu descobri olhando, apertei o lápis e achei o caminho mais curto.</i>	Utilização de artifício (lápis)
2	Errada	<i>É o azul porque o caminho vermelho é longo e o azul é perto.</i>	Observação visual
3	Errada	<i>Eu descobri com o lápis e com a borracha e com os dedos, isso é muito fácil para mim porque eu me dei os tam anhos e soube qual foi o mais curto foi o azul.</i>	Utilização de artifício (borrachas/ dedos/ lápis)
4	Certa	<i>Eu usei o lápis e me aqueci com a unha.</i>	Utilização de artifício (lápis)
5	Certa	<i>Porque eu usei a borracha e os meus eras.</i>	Utilização artifício (borrachas)
6	Certa	<i>Eu achei mais o caminho não sei o senhor.</i>	Observação visual
7	Certa	<i>O vermelho táva deitado porque eu queria sobre azul tá assim porque queria.</i>	Observação visual
8	Certa	<i>Porque está num a parte grande e num a parte pequena.</i>	Observação visual
9	Certa	<i>Eu achei o vermelho mais curto porque eu fiz do mesmo jeito da 7.</i>	Utilizou artifício (borrachas/lápis)
10	Certa	<i>Porque o vermelho tem a linha reta e um pouquinho de curva.</i>	Observação visual
11	Certa	<i>Eu descobri medindo com a borracha.</i>	Utilização de artifício (borrachas)
12	Certa	<i>Eu olhei bem e cheguei nessa conclusão que o vermelho é menor.</i>	Observação visual
13	Certa	<i>O azul é maior do que o vermelho só por causa de um pedaço o vermelho não é maior do que o azul.</i>	Observação visual
14	Errada	<i>Eu usei a cabeça e a mão ória.</i>	Observação visual
15	Errada	<i>Eu descobri medindo e o caminho mais curto era o azul.</i>	Observação visual
16	Certa	<i>Eu descobri que o vermelho tem só uma curva e o azul tem duas.</i>	Observação visual
17	Errada	<i>Eu descobri assim . Eu pensava quem era o menor era o vermelho, mas depois eu pensei de novo aí quem era o menor era o azul porque o vermelho era o maior.</i>	Observação visual
18	Certa	<i>Porque o vermelho está com uma parte quebrada e o azul está mais grande.</i>	Observação visual
19	Errada	<i>Os olhos olhando bem direitinho e vi que o azul era mais curto.</i>	Observação visual
20	Certa	<i>O vermelho é mais grande do que o azul.</i>	Utilização de artifício (dedos)
21	Errada	<i>Porque o espaço do azul é mais curto do que do vermelho.</i>	Observação visual
22	Errada	<i>Eu descobri porque eu olhei para os dois caminhos e vi que era o vermelho porque era o caminho curto.</i>	Observação visual
23	Errada	<i>Eu descobri com um a folha de caderno dobrei e tirei a medida foi que descobri que o caminho mais curto é o caminho da linha azul.</i>	Utilização de artifício (papel)
24	Certa	<i>Porque eu me dei com os dedos e não sei se está certo na minha opinião é o vermelho deu mais curto que o azul.</i>	Observação visual
25	Errada	<i>Incompreensível</i>	Observação visual
26	Certa	<i>Porque o vermelho é mais curto de que o azul.</i>	Observação visual
27	Certa	<i>O vermelho tem menos espaço porque tem um traço a menos e o azul é mais grande e tem um traço maior.</i>	Observação visual
28	Certa	<i>Eu descobri porque eu usei muito a cabeça e pensei muito ou tá errada.</i>	Observação visual

ANEXO P: LE VANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 9

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Certa	Eu descobri olhando e achei.	Observação visual
2	Errada	É o vermelho porque é m úto perto.	Observação visual
3	Errada	Eu vou te explicar foi assim eu m edi o jeito da folha e eu pensei bem que eu soube a resposta que é o vermelho m ais curto.	Observação visual
4	Certa	É usei a borracha m ais curvas e lápis m ais retas.	Utilizou artifício (borracha/lápis)
5	Errada	Porque eu achava o azul m as eu olhei m úto aí m udei de opinião.	Observação visual
6	Certa	Porque eu achei m ais m alinho.	Observação visual
7	Certa	O azul ta cinco porque queru o azul ta cinco porque azul ta assim	Observação visual
8	Errada	Porque está em cinco partes.	Observação visual
9	Errada	O vermelho é m ais curto porque eu usei a borracha clipe e o lápis.	Artifício (borracha/clipelápis)
10	Certa	O azul tem m em os curvas.	Observação visual
11	Errada	Eu descobri pensando.	Observação visual
12	Errada	Eu m edi no lápis.	Utilização de artifício (lápis)
13	Errada	O vermelho é o m ais curto do que o azul, o azul é m alinho que o vermelho só passando de um pedaço m aior do que o azul porque o azul ta menor do que o vermelho, só passando um pedaço.	Observação visual
14	Errada	Eu usei a memória.	Observação visual
15	Errada	Observando m úto m edindo com o lápis tive um a idéia de m edir com o dedo e fazendo estas coisas eu cheguei a descobrir que era o vermelho.	Utilização de artifício (lápis)
16	Certa	Eu descobri que o vermelho tem m úitas curvas.	Observação visual
17	Certa	Eu descobri que o azul era m enor porque ele está na forma de um éesse.	Observação visual
18	Certa	Porque o azul está m ais pequeno e o vermelho está m ais grande.	Observação visual
19	Certa	Olhando para os dois cam inhos e respondi.	Observação visual
20	Certa	O azul é m ais pequeno de que o vermelho.	Utilização de artifício (dedos)
21	Errada	Eu achei o vermelho m ais curtinho que o azul.	Observação visual
22	Certa	Eu achei raciocinando com o meu pensamento e achei o azul o cam inho curto.	Observação visual
23	Errada	Eu descobri transferindo essa atividade para um papel e foi aí que descobri que o cam inho m ais curto é o cam inho da linha vermelho.	Utilização de artifício (reproduziu no papel)
24	Errada	Na m inha explicação que o vermelho é m ais curto que o azul porque eu m edi com o clipe.	Utilização de artifício (clipe)
25	Certa	Incompreensível	Observação visual
26	Certa	Porque o azul é m ais curto porque se parece com esse.	Observação visual
27	Errada	Porque o vermelho tem traços m enores e o azul tem curvas e ele fica m ais grande.	Observação visual
28	Errada	Eu respondi porque eu tava pensando acho que ta certo.	Observação visual

ANEXO Q: LEVANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 10

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Errada	Descobri observando e achei encontrei.	Observação visual
2	Errada	Porque o azul é mais perto de que o vermelho.	Observação visual
3	Errada	Porque são enroladinhos e eu soube logo qual foi eu pensei na mente e o azul todinhos eu pensei e soube e disse na ponta da língua.	Observação visual
4	Errada	Quando eu vi o azul deu para vê o mais curto porque o vermelho tem linha grande e azul tem mais curva e mais curto.	Observação visual
5	Errada	Porque o azul está enrolado.	Observação visual
6	Certa	Eu achei o vermelho eu achei mais baixinho.	Observação visual
7	Certa	O vermelho porque tá assim quer tá sabe.	Observação visual
8	Errada	Porque está parecendo um m.	Observação visual
9	Certa	Eu achei que o vermelho é mais curto porque eu peguei a linha. (espécie de fio)	Utilização de Artificio (fio)
10	Errada	O azul tem menos curvas mais se toma perto.	Observação visual
11	Certa	Porque o vermelho toma mais espaço que o azul por isso que o azul é o mais comprido.	Observação visual
12	Errada	Eu olhei e cheguei num conclusão que o azul é o menor.	Observação visual
13	Errada	O azul é menor do que o vermelho porque o azul tá com o fosso, logo o vermelho é maior do que o azul.	Observação visual
14	Errada	Eu usei a memória.	Observação visual
15	Errada	Eu descobri que era o azul porque eu pensei muito.	Observação visual
16	Certa	Porque se o azul está visse esticado o maior seria ele.	Observação visual
17	Errada	Eu descobri que o azul é o menor do que o vermelho porque o azul está na forma de em e está menor do que o vermelho.	Observação visual
18	Errada	O azul está mostrando que é mais pequeno e o vermelho está mostrando que é mais azul.	Observação visual
19	Errada	Olhando para os dois.	Observação visual
20	Certa	O vermelho é mais pequeno do que o azul.	Observação visual
21	Errada	Porque o azul é mais curto e o espaço é pequeno.	Observação visual
22	Certa	Eu pensei raciocinei e descobri que era o vermelho o caminho curto que tinha.	Observação visual
23	Certa	Eu descobri um fio de cabelo para marcar a figura e deu certo e conseguiu resposta.	Utilizou artificio (fio de cabelo)
24	Errada	Eu outra vez também m edi com o clipe do m eu jeito.	Utilização de artificio (clipe)
25	Certa	Incompreensível	Observação visual
26	Errada	Porque o azul é mais curto do que o vermelho e o azul é mais curto e também é mais pélo consigo.	Observação visual
27	Errada	Porque o vermelho é reto e grande e o azul é de curvas e mais menor.	Observação visual
28	Errada	Eu descobri porque eu acho que é assim m assim.	Observação visual

ANEXO R: LE VANTAMENTO DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS – ATIVIDADE 11

Aluno	Resposta	Estratégia	Procedimento
1	Certa	<i>Eu descobri observando o caminho e eu achei.</i>	Observação visual
2	Certa	<i>É o vermelho porque ele é muito perto mesmo.</i>	Observação visual
3	Certa	<i>Vermelho porque é mais pequeno e o azul é enroladinho por isso eu sei.</i>	Observação visual
4	Certa	<i>Porque o azul tem mais curva e vermelho não tem muita curva.</i>	Observação visual
5	Certa	<i>Porque está um pouquinho enrolado.</i>	Observação visual
6	Certa	<i>Eu achei o vermelho mais maiorzinho.</i>	Observação visual
7	Certa	<i>O vermelho tava deitado porque é assim queria saber azul tá assim.</i>	Observação visual
8	Errada	<i>Porque está em forma diferente.</i>	Observação visual
9	Errada	<i>Eu usei o mesmo da anterior (pegou a linha). (espécie de flapo)</i>	Utilização de Artificio (flapo)
10	Certa	<i>O vermelho tem menos voltas.</i>	Observação visual
11	Certa	<i>O vermelho é o mais curto porque não está dando muitas voltas.</i>	Observação visual
12	Certa	<i>Eu medi com o lápis.</i>	Utilização de Artificio (lápis)
13	Errada	<i>Porque o azul é mais curto do que o vermelho porque o azul é menor do que o vermelho.</i>	Observação visual
14	Errada	<i>Eu usei a memória.</i>	Observação visual
15	Certa	<i>Eu não tenho certeza se é o vermelho mas eu tenho que se eu medi mas não sei se está certo.</i>	Observação visual
16	Errada	<i>Porque o vermelho está deitado e já mostra que ele é maior.</i>	Observação visual
17	Certa	<i>Eu descobri usando o lápis para medir. E aí eu descobri que o vermelho era menor do que o azul.</i>	Utilização de Artificio (lápis)
18	Certa	<i>Porque o vermelho está mais pequeno e o azul está mais grande.</i>	Observação visual
19	Certa	<i>Tamém utilizando os olhos olhando para os dois caminhos.</i>	Observação visual
20	Errada	<i>O azul é mais grande do que o vermelho.</i>	Observação visual
21	Errada	<i>Porque o espaço do azul é mais curto que o vermelho.</i>	Observação visual
22	Errada	<i>Eu descobri porque eu peguei o lápis virei do lado e descobri que o caminho mais curto era o azul.</i>	Utilização de Artificio (lápis)
23	Errada	<i>Eu descobri com a minha mente que a linha azul é o caminho mais curto.</i>	Observação visual
24	Certa	<i>Porque na minha conclusão era o vermelho antes de botar o outro bastante calcula e no fim botei o vermelho que o caminho mais curto era o azul.</i>	Utilização de artificio (marcas de grafite nas figuras)
25	Errada	<i>Incompreensível</i>	Observação visual
26	Certa	<i>Porque o vermelho é mais curto de que o azul e o azul é mais longo e o vermelho é mais curto de que o azul e por isso é o vermelho mais curto de que o azul.</i>	Observação visual
27	Certa	<i>Porque tem curvas menores e o azul tem curvas mais compridas.</i>	Observação visual
28	Certa	<i>Eu acho que tá certo porque eu pensei muito mesmo e usei a cabeça.</i>	Observação visual

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, I. A. C. **A Geometria do Origami: Um Estudo da Geometria das Dobraduras (Origami) com Foco no Relacionamento entre “Formas” e “Fórmulas” Matemáticas.** 1999. 161 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFRPE, Recife, 1999.

ARTIGUE, M. Épistémologie et Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n.º 23, p. 241-286, 1990.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento.** Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d’aire de surfaces planes: une etude de l’acquisition des relations entre les longueurs et les aires au college.** 1996 Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARBOSA, P. R.; BRITO, A. F. Algumas reflexões sobre duas pesquisas relacionadas à grandeza comprimento. VIII ENEM – VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais...Recife,2004(CD-ROM).**

BARBOSA, P. R. **Efeitos de uma seqüência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no Ensino Fundamental**. 2002. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife, 2002.

BARROS, J. S. de. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório**. 2002. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife, 2002.

BELLEMAIN, P. M. B. Estudo de situações problema relativas ao conceito de área. In: ENDIPE – ENCONTRO DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 10, 2000, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro, 2000. CD-ROM.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um Estudo da Noção de Grandeza e Implicações no Ensino Fundamental e Médio**. Natal: SBHMAT, 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRITO, A. F. de. **Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2.º ciclo do Ensino Fundamental**. 2003. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife, 2003.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Efeitos de uma seqüência didática para a construção do conceito de perímetro no 3.º ciclo do ensino fundamental. In: EPEN – ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORTE E NORDESTE, 4, 1999, Salvador. **Anais...** Bahia: NEHP, 1999. p. 1-13.

CATTO, G. **Registros de Representação e o número racional**: Uma abordagem em livros didáticos. 2000. 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2000.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica**: Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Aique, 1991.

CROWLEY, M. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. (tradução de Hygino H. Domingues). São Paulo: Atual, 1994.

CROWE, Donald W.; THOMPSON, Thomas M. Alguns usos modernos da geometria. In: LINDQUIST, Mary M.; SHUETE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1996. (tradução de Hygino H. Domingues)

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

DEL GRANDE, J. J. Percepção espacial e geometria primária. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. (tradução de Hygino H. Domingues). São Paulo: Atual, 1994.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d' apprentissage du concept d' aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

DUARTE, J. H. **Um estudo diagnóstico sobre noções e procedimentos, invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) na resolução de situações didáticas para construção do conceito de área, como grandeza, no 3.º ciclo do Ensino Fundamental.** 2002. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife. 2002.

DUHALDE, M. H.; CUBERES, M. T. G. **Encontro Iniciais com a Matemática:** contribuições à educação infantil. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages.** Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

ENGELMANN, A. A Psicologia da Gestalt e a Ciência Empírica Contemporânea. **Psicologia,** Brasília, n. 1, p. 001-016, jan-abr 2002.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula – Geometria.** (Tradução de Hygino H. Domingos). São Paulo: 1992.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática:** Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FLORES, C. R. A história da perspectiva e a visualização no ensino de matemática: laços entre técnica, arte e olhar. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2004, Recife. **Anais...** Recife, 2004. CD-ROM.

_____. **Olhar, saber, representar: ensaios sobre a representação em perspectiva.** 2003. 188 f. Tese (Doutorado em Educação), UFSC, Florianópolis, 2003.

_____. Algumas considerações acerca da visualização no ensino de matemática. **Boletim de Educação Matemática**, Florianópolis, n.º 12, julho de 2001.

FLORES BOLDA, C. R. **Geometria e Visualização:** Desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração. 1997. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFSC, Florianópolis, 1997.

FRANCÉS, R. A Percepção das Formas e dos Objetos. In: PIAGET, J.; FRAISSE, P. (Org.). **Tratado de Psicologia Experimental.** São Paulo: Forense, 1969.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GARDNER, H. **Inteligências Múltiplas:** A Teoria na Prática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

GERDES, P. **Sobre o despertador do pensamento geométrico.** Curitiba: UFPR, 1992.

GORDO, M. De F. **A visualização espacial e a aprendizagem da matemática** : Um estudo no 1.º ciclo do ensino básico. Lisboa : Associação de Professores de Matemática, 1993.

GUTIERREZ, A. **Procesos y habilidades en visualizacion espacial**. In: CONGRESSO INTERNACIONAL SOBRE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMATICA, 3, 1991, Valencia. **Anais...** Valencia, 1991.

HENRY, M. Erros e Obstáculos. In: HENRY, M. **Didactique de Mathématiques**: Une présentation de la didactique em vue de la formation dès enseignants. Tradução de Marcelo Câmara dos santos e Izabella Alencar. Bersaçon: IREM, 1991.

HERSHKOWITZ, R. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, p. 3-31, 1994.

IGLIORI, S. B. C. A noção de “obstáculo epistemológico” e a Educação Matemática. In: MACHADO, S. D. A., et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

KALEFF, A. M.; REI, D. M. Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais. **Educação e Matemática**, Lisboa, n.º38, p. 6-11, 1996.

KOFFKA, K. **Princípios de Psicologia da Gestalt**. São Paulo: Cultrix, 1973.

LÉVY, P. **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34, 1999.

LIMA, P. F. Considerações sobre o ensino do conceito de área. In: I Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática, 1995, Recife. **Anais...** Recife, 1995.

LOVELL, K. **O Desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança.** (tradução de Auripebo B. Simões). Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

MAGINA, S.; et al. Repensando **Adição e Subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais.** São Paulo: PROEM, 2001.

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papyrus, 2003.

MATOS, J. M. Acomodando a teoria de Van-Hiele a modelos cognitivos idealizados, **Revista Quadrante I**, n.º 1, Lisboa, p. 14, 1992.

MATOS, J. M.; GORDO, M. de F. Visualização espacial: algumas actividades. **Educação e Matemática**, Lisboa, n.º 26, p. 13-17, 1993.

NASSER, Lílian. A construção do pensamento geométrico. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 6. **Anais** do VI ENEM. São Leopoldo/RS: [s.n.], 1998. p. 71-74.

OLIVEIRA, G. R. F. de. **Construção do conceito de volume no Ensino Fundamental:** um estudo de caso. 2002. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife, 2002.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PENNA, A. G. **Introdução à História de Psicologia Contemporânea**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

PERRIN-GLORIAN, M. J. Utilização da noção de obstáculo na Didática da Matemática. In: **Seminários de Didática da Matemática**, s/n, 1995, São Paulo.

PERROT, G. et al. Módulos para o ensino-aprendizagem em geometria: relatório da primeira experimentação do primeiro módulo em Pernambuco. In: SEMINÁRIO DO PRÓ-MATEMÁTICA, 5, 1998, Recife. **Projeto...** Brasília: MEC/SEF, 1998.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas: problema central do desenvolvimento**. 3.^a ed. Rio de Janeiro: ZAHAR EDITORES, 1976. (tradução de Marion Merlone dos Santos Penna).

_____. O desenvolvimento das percepções em função da idade. In: PIAGET, J.; FRAISSE, P. (Org.). **Tratado de Psicologia Experimental**. São Paulo: Forense, 1969.

_____. **Psicologia e Epistemologia**: por uma teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Forense, 1978.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Lisboa: Dom Quixote, 1983.

PIAGET, J. INHELDER, B. **A Psicologia da Criança**. São Paulo: Difel, 1974.

PIAGET, J. INHELDER, B. **A Representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PIRES, C. M. C. Pequeno estudo sobre as representações de professores de diferentes estados brasileiros a respeito da formação para ensinar matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 1998, São Leopoldo. **Anais...** São Leopoldo/RS: [s.n.], 1998. p. 292-294.

RATHS, L. E. (Org). **Ensinar a Pensar: Teoria e Aplicação**. (Tradução de Dante Moreira Leite). São Paulo: EPU, 1977.

SILVA, B. A. da. Contrato Didático. In: MACHADO, S. D. A., et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

SILVA, M. F. F. da. **Frações e grandezas geométricas: um estudo exploratório da abordagem em livros didáticos**. 2004. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife, 2004.

SMOLE, K. C. S. **A Matemática na Educação Infantil: A teoria das Inteligências Múltiplas na prática escolar**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SOUZA, J. C. A. de. **Análise de estratégias de resolução de problemas de grandezas geométricas em avaliações institucionais em larga escala de redes públicas do estado de Pernambuco.** 2004. 137f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFRPE, Recife, 2004.

TEIXEIRA, S. G. **Concepções de alunos de Pedagogia sobre os conceitos de comprimento e perímetro.** 2004. 220f. Dissertação (Mestrado em Educação), UFPE, Recife, 2004.

VURPILLOT, E. A Percepção do Espaço. In: PIAGET, J.; FRAISSE, P. (Org.). **Tratado de Psicologia Experimental.** São Paulo: Forense, 1969.