Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

Centro de Educação
Campus Universitário
Cidade Universitária
Recife-PE/BR CEP: 50.670-901
Fone/Fax: (81) 2126-8952
E. Mail: edumatec@ufpe.br
www.ufpe.br/ppgedumatec

JOÃO PAULO CARNEIRO BARBOSA

INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA REFERENTE À BASE ALGÉBRICA DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO: O TRABALHO DE PIERRE LAURENT WANTZEL

RECIFE

2011

JOÃO PAULO CARNEIRO BARBOSA

INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA REFERENTE À BASE ALGÉBRICA DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO: O TRABALHO DE PIERRE LAURENT WANTZEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Raul de Assis Neto

RECIFE

2011

Barbosa, João Paulo Carneiro

Investigação histórica referente à base algébrica das construções geométricas com régua e compasso: o trabalho de Pierre Laurent Wantzel / João Paulo Carneiro Barbosa. – Recife: O Autor, 2011.
73 f.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Raul de Assis Neto

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2011.

Inclui Referências.

1. Matemática - História 2. Geometria - História I. Assis Neto, Fernando Raul de (Orientador) II. Título.

CDD 510.9 UFPE (CE 2012-004)

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ALUNO

JOÃO PAULO CARNEIRO BARBOSA

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

"INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA REFERENTE À BASE ALGÉBRICA DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO: O TRABALHO DE PIERRE LAURENT WANTZEL."

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientador
Prof. Dr. Fernando Raul de Assis Neto

Examinador Externo
Prof. Dr. Severino Barros de Melo

Examinadora Interna
Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Recife, 19 de dezembro de 2011.

À Francisco Francismar e Maria Carneiro, meus pais, pelo exemplo de perseverança e dedicação. Minha fonte inesgotável de amor e inspiração.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo saboroso dom da vida.

Aos meus pais Francismar e Nina e irmãos Paulo Henrique, Ana Paula e Paula Valéria, pelo amor e apoio que não poderia vir de outro lugar senão do seio familiar.

À minha amada Raíssa, pela confiança, força, inspiração e pelo amor que me foi indispensável nessa etapa que agora se encerra. Valeu a pena à distância. Agora estaremos juntos para sempre.

À minha segunda família Gerson, Solange, Jéssica, Wallace e Levi, pelos momentos de apoio, pelas alegrias e pela confiança.

Ao senhor José Bezerra Sampaio, amigo inesperadamente encontrado. Tenha certeza que sem seu auxílio nada disso seria possível.

Ao meu ora orientador, ora pai e amigo Professor Fernando Raul Neto a quem devo enorme admiração pelos ensinamentos acadêmicos e pessoais. Não poderia deixar de dizer que as exigências valeram a pena.

Aos destacados amigos Ricardo Berardo, Fabiana Faria e Cristiane de Arimatéia pelos momentos de apoio, discussão, brincadeiras e estudos. Nada nesse curso foi tão valioso quanto poder contar com a amizade de vocês.

Ao professor Frank Bellemain pelo apoio nas minhas visitas ao Recife. Momentos fundamentais para minha jornada no mestrado.

Ao professor Jesper Lützen pela inestimável colaboração para este trabalho.

Aos amigos da turma 2010 do EDUMATEC pelos momentos de aprendizado e alegria em sala de aula.

Aos professores do EDUMATEC pela oportunidade de crescimento mediante as discussões, sugestões e cobranças.

À secretaria do EDUMATEC, em especial a Marlene, Conceição e Clara, pela paciência e pela eterna disposição em ajudar e informar.

Aos professores Frank Bellemain e Severino Barros por se fazerem presentes em minha banca de qualificação tendo contribuído para a realização deste trabalho.

À professora Rute Borba e ao professor Severino Barros por se fazerem presentes em minha banca de defesa da dissertação e com suas contribuições enriquecerem este trabalho e a mim enquanto pesquisador.

À Universidade Federal de Pernambuco juntamente com o apoio financeiro de dois anos de bolsa CAPES.

EPÍGRAFE

A primeira lei da História é de não ousar mentir; a segunda, de não temer exprimir toda a verdade.
(Papa Leão XIII)

RESUMO

Os problemas de duplicar o cubo e a trissectar o ângulo com a utilização exclusiva da régua e do compasso motivou os matemáticos desde a antiguidade até meados do século XIX. Somente resolvidos por completo em 1837 pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel, tais problemas foram abordados de diferentes modos ao longo da História da Matemática, os quais edificaram o desenvolvimento de boa parte da Matemática, especialmente da Álgebra. Nesta dissertação propomos uma reconstrução histórica de uma parte desse desenvolvimento; mais precisamente de três períodos: a origem dos problemas e da restrição a régua e ao compasso na civilização grega, as contribuições de Descartes no século XVII e a solução dos problemas no século XIX. Em nossa reconstrução destacamos as relações entre os problemas geométricos da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo e suas respectivas soluções algébricas.

Palavras-Chave: História da Matemática; Construções Geométricas; Régua; Compasso; Álgebra; Pierre Laurent Wantzel.

ABSTRACT

The problems of doubling the cube and the trissectar the angle with the exclusive use of ruler and compass motivated mathematicians since antiquity until the mid-19th century. Only solved in 1837 by the French mathematician Pierre Wantzel, such problems have been addressed in different ways throughout the history of mathematics, which they built the development of much of mathematics, especially algebra. In this thesis we propose a historical reconstruction of a portion of this development; more precisely three periods: the source of problems and the ruler and the restriction on the compass, Greek civilization contributions of Descartes in the 17th century and the solution of the problems in the 19th century. In our reconstruction we highlight the relationships between geometric problems of doubling the cube and trisection of angle and their respective algebraic solutions.

Keywords: History of mathematics; Geometric Constructions; Ruler; Compass; Algebra; Pierre Laurent Wantzel.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por que é possível efetuar algumas construções geométricas com o uso exclusivo da régua e do compasso, enquanto, outras se mostram impossíveis? Que relações esse tipo de construção estabelece com a Álgebra? É possível, pela história da impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo com o uso exclusivo da régua e do compasso, estabelecer relações entre Álgebra e Geometria? Por que a comprovação dada para a impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo, publicada por Pierre Laurent Wantzel em 1837, foi praticamente esquecida por mais de cem anos?

As duas primeiras questões mencionadas são de ordem Matemática e já estão plenamente solucionadas desde os meados do século XIX. A partir do desenvolvimento do que se conhece hoje como Teoria das Equações Algébricas os matemáticos conseguiram apresentar que tipo de construções, que poderiam ser efetuadas com a régua e o compasso através das relações que esses tipos de construções estabelecem com a Álgebra.

As indagações seguintes - são de natureza histórica e se apresentam como problemas de pesquisa deste texto dissertativo. Sendo assim, são dois os principais objetivos desta dissertação: apresentar do ponto de vista histórico, como a prova da impossibilidade de duplicar o cubo e trissectar o ângulo, utilizando somente a régua e o compasso, que pode estabelecer relações entre Álgebra e Geometria; verificar por que a prova de Wantzel foi negligenciada, especialmente nos cem primeiros anos após sua publicação.

Considerando-se a sua abrangência e o caráter histórico atribuído, queremos verificar através da história, a origem das construções geométricas com a régua e o compasso (especialmente os problemas da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo), analisar pelos estudos de Pierre Laurent Wantzel, por que algumas construções geométricas são possíveis com a régua e o compasso, enquanto, outras não? Investigar as causas do ostracismo da prova de Wantzel e reconstruir os resultados de Wantzel publicados em seu artigo intitulado *Recherches sur le moyens de reconnaıtre si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle* *et le compas (Pesquisa sobre os meios de reconhecer se um problema de Geometria pode ser resolvido com régua e compasso).*

Porém, o primeiro capítulo apresenta um relato sobre a régua e o compasso na tradição grega desde o início dessa civilização, examina o surgimento dos problemas (duplicação do cubo e trissecção do ângulo), analisa algumas soluções gregas para os problemas já exposto e apresenta algumas possíveis respostas para a restrição a régua e ao compasso.

Em seguida, no segundo capítulo centramos nossos esforços na busca das relações entre Álgebra e Geometria através dos estudos iniciados pelo matemático René Descartes. Ainda no segundo capítulo, apresentamos uma interpretação algébrica para a impossibilidade da duplicação do cubo e a trissecção do ângulo com o uso exclusivo com a régua e o compasso.

No terceiro capítulo expomos uma breve biografia do matemático Pierre Laurent Wantzel e uma descrição dos seus resultados sobre a impossibilidade de duplicar o cubo e trissectar o ângulo utilizando somente a régua e o compasso. No terceiro capítulo, demonstra também, uma repercussão dos resultados de Wantzel e algumas suposições para a negligência aos resultados encontrados e publicados.

O texto contido no segundo e terceiro capítulos é uma exposição de fontes primárias e secundárias, que mostra uma das maneiras de se relacionar Álgebra e Geometria, tendo como ponto de partida, as investigações de Descartes e os resultados de Wantzel.

Embora, a dissertação não tenha como tema principal o uso didático da História da Matemática, ele se faz presente na escrita do tema e na ênfase que demos na articulação entre as disciplinas da Aritmética, Álgebra e Geometria para a solução dos clássicos problemas.

Isso porque tanto, ao tema como a articulação mencionada são alvos positivamente privilegiados nos enfoque sobre a História da Matemática como recurso didático.

Queremos defender a importância da História da Matemática como recurso pedagógico para a atividade do professor (ou futuro professor), procuramos apresentar em todo o texto, mas especialmente no segundo e terceiro capítulos, uma abordagem do conteúdo, construções geométricas com a régua e o compasso, que evidência o uso da história do conteúdo e a flexibilização da linguagem matemática desenvolvida atualmente no ensino superior (Licenciatura e Bacharelado).

Nossa preocupação foi definir uma maneira de utilizar textos históricos e textos que tratem de assuntos históricos, para introduzir os conceitos matemáticos no ensino superior estabelecendo relações entre as diversas áreas da Matemática e das demais ciências.

> A evolução de um determinado conceito, a partir de seu problema gerador, até a organização axiomática de uma dada teoria matemática, pode ser encarada, em nossa opinião, como um modelo a ser seguido para abordagem em sala de aula. Observamos que a organização axiomática a que nos referimos, somente é posta em prática após tal conceito estar completamente desenvolvido e após todo o significado intuitivo deste conceito ter sido explorado. E esse processo (histórico) pode ser reconstruído. O que propomos então, é o resgate das ideias iniciais como meta para alcançar o próximo degrau da estrutura desse processo, aplicados em sala de aula. (MARTINS, 2006, p.3)

Para que a reconstrução apontada por Martins (2006) possa ser realizada é necessário que tenhamos informações suficientes sobre o conceito a ser reconstruído. O próprio Martins (2006) afirma, que quanto maior o volume de informação à nossa disposição sobre o tema em questão, melhor poderá ser esta reconstrução.

Em outras palavras, para viabilizar o uso da História da Matemática em sala de aula, é necessário não somente conhecer o conteúdo matemático a ser desenvolvido, ou saber utilizar a história desse conceito como um recurso metodológico, mas também, conhecer a história desse conteúdo.

Nobre e Baroni (1999) corroboram com essa reflexão:

> A História da Matemática, assim como a Análise, a Álgebra, a Topologia etc., é uma área do conhecimento matemático, um campo de investigação científica, por isso é ingênuo considerá-la como um simples instrumento metodológico. Dessa forma, é plausível dizer que tanto, quanto ao conteúdo

> matemático há a necessidade de o professor de Matemática conhecer sua história, ou seja: A História do Conteúdo Matemático. (p.130)

Independente da abordagem empregada, a História da Matemática, no âmbito da Educação Matemática, possibilita aos educandos a percepção da Matemática como resultado de uma elaboração mental do homem e oportuniza investigações que favorecem a compreensão dos processos de formalização dos conhecimentos matemáticos.

1. RÉGUA E COMPASSO NA TRADIÇÃO GREGA

1.1 A Matemática grega de Tales a Euclides

Os livros de História da Matemática (BOYER, 2000; EVES, 2004) e História da Filosofia (BURNET, 1994; MARCONDES, 1998) entre outros, afirmam que o pensamento filosófico-científico, do qual somos herdeiros, surge na Grécia por volta do século VI a.C.

Esse pensamento tem seu início justamente na mesma época (aproximadamente século VI a.C) em que a comunicação grega com os países do Oriente, Egito e Babilônia em especial, estavam mais fáceis e frequente devido ao advento do comércio na região do mediterrâneo oriental. Foi essa comunicação, associada às outras características não menos relevantes, que influenciou e fez emergir o pensamento filosófico-científico grego.

Marcondes (1998) reforça essa ideia:

> É significativo, portanto, que o pensamento filosófico grego tenha surgido *nas colônias gregas do Mediterrâneo oriental*, no mar Jônico [...] Essas colônias, dentre as quais se destacaram Mileto e Éfeso, foram importantes portos e entrepostos comerciais, ponto de encontro das caravanas provenientes do Oriente – Mesopotâmia, Pérsia, talvez mesmo Índia e China – [...] (p. 22 – grifos nossos)

No que diz respeito à Matemática, a mudança iniciada pelos gregos está associada ao caráter demonstrativo e universal do pensar e fazer matemático. Knorr (1993) afirma que não há indícios documenteis para supor que os povos orientais estivessem preocupados com as demonstrações teóricas das propriedades matemáticas que eles utilizavam bem como com a generalidade das mesmas.

Para citar apenas um exemplo, basta lembrar que o *Papiro de Rhind*[1], um texto matemático egípcio na forma de manual prático supostamente copiado, em aproximadamente 1650 a.C., pelo escriba Ahmes (porém, esse texto também é

[1] Dois fragmentos desse trabalho foram encontrados no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind ainda no século XIX. No entanto, essa descoberta só foi publicada em 1927. Quatro anos mais tarde, outro egiptólogo, Edwin Smith, comprou no Egito o que pensou que fosse um papiro médico. Mas, na verdade, especialistas da Sociedade de História de Nova York descobriram sobre uma camada fraudulenta a parte que faltava do Papiro de Rhind. Hoje, o papiro completo está exposto no Museu Britânico.

conhecido como *Papiro de Ahmes*) de um trabalho mais antigo, apresentam soluções para oitenta e cinco problemas de Aritmética, Geometria, Trigonometria, entre outros, sem expor nenhuma demonstração teórica dos teoremas que ali estavam sendo utilizados.

Heródoto[2], historiador grego que viveu por volta do século V a.C., relata em sua *História* o caráter empírico da geometria oriental e afirma que a geometria grega descende dos trabalhos egípcios.

> Disseram-me ainda os sacerdotes que Sesóstris realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos certo tributo. Se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado iria procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da Geometria, que teria passado desse país para a Grécia. (HERÓDOTO, 1970, p.116)

Já Proclus, um comentador matemático neoplatônico que viveu em Alexandria e floresceu por volta do ano 450 d.C., tendo escrito um comentário[3] sobre o livro I dos *Elementos* de Euclides em que ele também apresenta uma breve história da matemática grega, descreve rapidamente a origem da Geometria e apresenta argumentos para a transição de pensamento inaugurada pelos gregos.

> Visto que, seja conhecido por muitos a Geometria ter sido descoberta entre os egípcios primeiramente, tendo tomado a origem da ação de medir com cuidado as áreas. Pois esta era necessária para aqueles pela ação de se elevar do Nilo, fazendo desaparecer os limites concernentes a cada um. E nada é surpreendente começar a descoberta tanto dessa quanto das outras ciências pela necessidade, porque tudo o que é produzido na geração avança do imperfeito ao perfeito. Possa, justamente, a mudança vir a acontecer, de fato, da sensação para o cálculo e desse para o pensamento. (PROCLUS apud BICUDO, 2009, p. 37)

---

[2] Heródoto é conhecido como o "Pai da História" pelo fato de ter sido ele o primeiro a escrever um relato histórico que chegou até os dias de hoje. A "História" de Heródoto data de aproximadamente 447 a.C. e é uma espécie de História Universal orientada pelos conflitos entre Gregos e Persas.

[3] O texto de Proclus que aqui estamos fazendo referência é o *Sumário de Eudemo* também conhecido como o *Catálogo dos Geômetras*. É provável que Proclus tenha retirado esse texto de uma obra conhecida como *História da Geometria*, escrita por Eudemo, um discípulo de Aristóteles que viveu na época do seu mestre. Daí o nome *Sumário de Eudemo*.

Além de reconhecer que a origem da Geometria está ligada a ação empírica dos egípcios, Proclus também procura descrever a evolução entre essa Geometria e aquela praticada por outra civilização (os gregos).

Mas, quem são os responsáveis por essa evolução descrita por Heródoto e Proclus? A História da Matemática apresenta três nomes como sendo os principais personagens na transição entre a Matemática oriental e a Matemática grega.

1.1.1 Tales

A introdução da geometria oriental na Grécia é atribuída, desde a antiguidade, a Tales de Mileto. Proclus, também no seu comentário sobre o livro I dos *Elementos* de Euclides, informa que Tales

> First went to Egypt and thence introduced this study (geometry) into Greece. He discovered many propositions himself, and instructed his successors in the principles underlying many others, his method of attack being in some cases more general (i.e. more theoretical or scientific), in others more empirical. (PROCLUS apud HEATH, 1981, p.128)

Tales, segundo nos conta Burnet (1994), possuía ascendência Milésia e foi fundador de uma escola que levava esse nome. É provável que ele tenha florescido por volta do ano 585 a.C.[4] e que nessa mesma época tenha visitado o Egito devido a uma suposta teoria das inundações do Nilo que ele possuía.

Tanto quanto se sabe, Tales nada escreveu. Não há nenhum registro de que gregos anteriores a Aristóteles saibam alguma coisa sobre ele como homem de Ciência e Filosofia. A tradição mais antiga apresenta apenas como engenheiro, comerciante e inventor.

Somente a partir da *Historia da Geometria* escrita por Eudemo, aluno de Aristóteles, e recuperada por Proclus no seu comentário sobre o livro I dos *Elementos* de Euclides, Tales ganha o status de precursor da geometria grega.

Bunt, Jones e Bedient (1976) afirmam que “the first steps on the road to our modern science is Thales of Miletus, known as one of the seven wise men” (p. 69). Já Heath (1981) aponta algumas das possíveis contribuições de Tales para a

---

[4] Período em que houve um eclipse do sol, provavelmente visível na Ásia Menor, predito por Tales. Daí surge a indicação da época em que ele viveu.

Matemática. Vale ressaltar que o próprio Heath, assim como outros historiadores da matemática grega, chama a atenção para o caráter hipotético dessas contribuições.

> The following are the general theorems in elementary geometry attributed to Tales.
> (1) He is said to have been the first to demonstrate that a circle is bisected by its diameter.
> (2) Tradition credited him with the first statement of the theorem (Eucl. I. 5) that the angles at the base of any isosceles triangle are equal, although he used the more archaic term "similar" instead of "equal".
> (3) The proposition (Eucl. I. 15) that, if two straight lines CUT one another, the vertical and opposite angles are equal was discovered, though not scientifically proved, by Thales. Eudemus is quoted as the authority for this.
> (4) Eudemus in his History of Geometry referred to Thales the teorem of Eucl. I 26 that, if two triangles hate two angles and one side respectively equal, the triangles are equal in all respects.
> (5) 'Pamphile says that Thales, who learnt geometry form the Egyptians, was first to describe on a circle a triangle (which shall be) right-angled, and that he sacrificed an ox (on the strength of the discovery). Others however, including Appollodorus the calculator, say that it was Pythagoras.' (p.130)

Alguns resultados, que tratam de medição também são atribuídos a Tales. A distância entre navios no mar e a altura das pirâmides são dois deles. Todavia, apesar desses resultados serem aplicações de algumas regras empíricas apresentadas, mas não provadas, no papiro de Rhind, Burnet (1994) nos conta que "o que a tradição realmente sugere é que Tales aplicou essas regras empíricas a problemas práticos que os egípcios jamais tinham enfrentado, e que ele, assim, foi o iniciador dos métodos gerais" (p.50).

Apesar deste ambiente de incertezas, Tales continua sendo reconhecido como o primeiro grego a interpretar os problemas da Geometria de maneira mais racional e universal. Isso possibilitou com que outros gregos avançassem no estudo dessa ciência no mesmo sentido que Tales acabará de iniciar.

1.1.2 Pitágoras

Pouco mais de meio século depois de Tales, outro nome se destacou na tentativa de tornar a Matemática grega uma ciência teórica, Pitágoras. Esse grego, que viveu por volta do ano 550 a.C., é envolto numa névoa tal de misticismo por seus seguidores que pouco se sabe sobre ele com algum grau de certeza.

Burnet (1994) apresenta algumas das poucas informações concretas que se tem sobre Pitágoras

> Podemos dar como certo que Pitágoras passou o começo de sua maturidade em Samos e que era filho de Mnesarco, 'florescendo', pelo que ficamos sabendo, no reinado de Polícrates (532 a.C.). É improvável que esta data esteja muito errada, pois Heráclito já fala dele no pretérito. (p.81)

Pitágoras deixou Samos a fim de escapar à tirania de Polícrates. Foi em Crotona, cidade localizada na magna Grécia (hoje sul da Itália), que por muito tempo estivera em relações amistosas com Samos e que era bastante conhecida por seus atletas e médicos, que ele fundou sua sociedade. Lá ele também deu os primeiros passos em direção à Teoria dos Números continuando o trabalho de fazer da Matemática uma ciência racional, ou seja, teórica.

Ele se tornou o principal expoente da ciência grega nos primeiros anos do século V a.C.. Heráclito, um filósofo pré-socrático que viveu por volta do ano 500 a.C. e que foi, ao lado de Parmênides, o protagonista de um dos primeiros embates filosófico de que se tem notícia[5], afirma que Pitágoras se dedicou a pesquisa científica mais do que outros homens (HERÁCLITO apud BRUNET, 1994). Já Heródoto (1970) diz que esse grego foi "um dos mais célebres filósofos da Grécia" (p.211).

Tão incerto quanto fazer afirmações sobre a vida de Pitágoras, porém, fazer afirmações sobre as suas contribuições para a matemática grega. Heath apresenta o que se sabe sobre as contribuições Pitágoras com certo grau de exatidão:

> After these (Thales and Ameristus or Mamercus) Pythagoras transformed the study of geometry into a liberal education, examining the principles of the sciences from the beginning and probing the theorems in an immaterial and intellectual manner: he it was who discovered the theory of irrationals (or proportions) and the constructions of the comic figures. (HEATH, 1981, p.141)

Como não existe nenhum registro documental que seja de autoria do próprio Pitágoras, não se tem meios seguros para distinguir as suas próprias contribuições e de seus seguidores. Tudo o que se pode dizer é que quanto mais primitiva pareça

[5] Heráclito procura explicar o mundo pelo desenvolvimento de uma natureza comum a todas as coisas e em eterno movimento. Para ele, tudo está em constante modificação. Daí sua frase: não nos banhamos duas vezes no mesmo rio, já que nem o rio nem quem nele se banha são os mesmos em dois momentos diferentes. Parmênides, ao contrário, diz que o ser é unidade e imobilidade e que a mutação não passa de aparência. Para Parmênides, o ser é ainda completo, eterno e perfeito.

ser o registro atribuído a Pitágoras, maior a probabilidade de ser autoria dele próprio.

Pitágoras foi o primeiro grego a estudar a Aritmética para além das necessidades comerciais, como faziam os povos orientais. Gow (1968) afirma que:

> The history of Arithmetica, or the scientific study of numbers in the abstract, begins in Greece with Pitágoras, whose example determined for many centuries its symbolism, its nomenclature and the limits of its subject-matter. (p.66)

Os textos da época que chegaram nos mostram, que naquele momento começava a emergir um grande interesse pelo estudo dos números, modificando, de maneira lenta, a visão notadamente empirista e fatual da aritmética para algo mais teórico e generalista, característica principal do pensamento matemático grego.

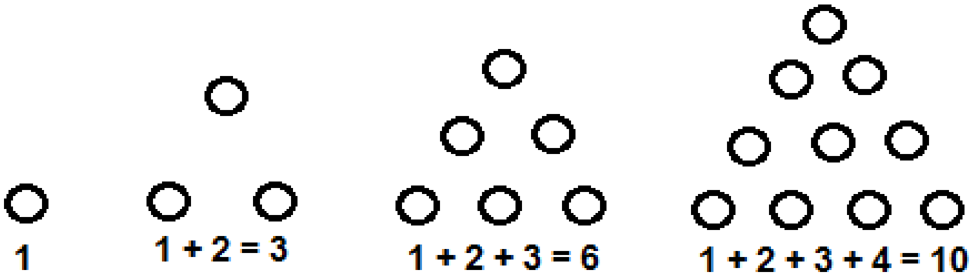
Um exemplo dos estudos aritméticos de Pitágoras são os chamados números figurados, ou seja, os números que expressam os pontos de certas configurações geométricas (triângulos, quadrados, etc.).

É provável que os números triangulares, ou seja, os números obtidos pela soma de números naturais[6] sucessivos tenham sido os primeiros a serem descobertos[7]. Heath (1981), assim como Gow (1968) e Burnet (1994), sugerem, devido à origem primitiva do termo *números triangulares*, que o próprio Pitágoras seja o responsável pela descoberta deles.

---

[6] Para os gregos, número era sinônimo de *número natural* e a compreensão intuitiva da adição e da multiplicação como adição repetida bastava. As operações com os números racionais (como razão entre números, eles não tinham o mesmo status ontológico de número) também eram intuitivamente claras.

[7] A soma da série de sucessivos números ímpares é chamada de número quadrado, ou seja, números que configuram uma região quadrada (Ex: Os números 1 + 3 = 4 e 1 + 3 + 5 = 9 podem ser dispostos na forma de um quadrado). Já a soma de sucessivos números pares é chamada de número ablongo ou retangular (Ex: Os números 2 + 4 = 6 e 2 + 4 + 6 = 12 podem ser dispostos na forma de um retângulo).



Número Triangulares

O último dos números mostrados acima também é conhecido como *tetraktys*[8] e é uma representação numérica pelo qual os Pitagóricos costumavam jurar devido à essência da filosofia pitagórica estar apoiada na ideia do *tudo é número* e ao caráter harmônico que esse número possuía.

A *tetraktys,* assim como os outros *números triangulares*, pode ser estendida indefinidamente a fim de exibir as somas da série de sucessivos naturais em uma configuração geométrica.

Esta maneira de representar os números inspirou problemas de natureza geométrica. É provável que um desses problemas tenha gerado o mais famoso teorema atribuído a Pitágoras, a saber: em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados.

A partir do Teorema de Pitágoras se deduz, imediatamente, que o quadrado da diagonal de um quadrado é o dobro do quadrado de seu lado e isso, para os Pitagóricos, seguramente deveria ser suscetível de expressão aritmética.

Na verdade, contudo, não há número quadrado que possa ser dividido em dois números quadrados iguais, e desse modo o problema não pode ser resolvido. Ai está à possível origem da incomensurabilidade da diagonal e do lado de um quadrado, e, nesse sentido, pode ser verdade que Pitágoras tenha feito tal descoberta.

---

[8] Em fases posteriores a Pitágoras houve muitas espécies de *tetraktys,* mas a original era a *tetraktys dekad.* Não é possível dizer até que ponto o misticismo atribuído a *tetraktys dekad* remonta ao próprio Pitágoras, mas, de acordo com a tradição, se tem razão em atribuir a ele a conclusão de que esse número está *em conformidade com a natureza* que todos os helenos e bárbaros contem até dez e depois comecem novamente (BURNET, 1994, p.92).

A observação de que a razão entre o lado e a diagonal de um quadrado qualquer não se deixa representar por uma razão de números foi problemática não apenas pela constatação de que nem *tudo é número*, mas, sobretudo, porque minava o caráter dedutivo da Matemática grega.

O Teorema de Tales, por exemplo, que afirma que um feixe de três paralelas divide duas transversais quaisquer em partes proporcionais, tem a sua conhecida demonstração invalidada para a situação na qual os dois segmentos de uma mesma transversal são incomensuráveis.

Os Pitagóricos iniciaram o desenvolvimento de outros elementos matemáticos. Heath (1981) informa que:

> The Pythagoreans, before the next century was out (i. e. before, say, 450 B.C), had practically completed the subject-matter of books I – II, IV, VI (and perhaps III) of Euclid's Elements, including all the essentials of the 'geometrical algebra' which remained fundamental in Greek geometry. (p.2)

Outros gregos como Hipócrates, Eudoxo, Teodoro, Teeteto e muitos outros se esforçaram na tentativa de tornar a matemática grega cada vez mais teórica e universal. Pelas mãos desses gregos surgiram as noções de infinitésimo e infinito (bem diferente da que conhecemos hoje), o método da exaustão, a geometria superior (geometria de curvas que não fossem retas ou circunferências e superfícies que não fossem planas ou esféricas), e todo o início da axiomática, que evoluiu lentamente até ser profundamente estudada no final do século XIX.

No entanto, por volta do ano 300 a.C., uma obra matemática tomou uma dimensão que só pode ser comparada a Ética de Platão e a Lógica de Aristóteles, ofuscando, de alguma maneira, os trabalhos matemáticos que a precederam. Essa obra é os *Elementos* de Euclides.

1.1.3 Euclides e os *Elementos*

Os *Elementos*, antes de tudo, é uma obra de síntese composta por treze livros. Uma organização da produção matemática dos gregos anteriores a Euclides. O livro I, para citar apenas um exemplo, possui além das definições, postulados e axiomas, proposições que tratam do Teorema de Pitágoras e das propriedades do triângulo, material desenvolvido pelos Pitagóricos antigos.

O termo *Elementos*, segundo nos conta Burnet (1994), tem sua origem no argumento filosófico de Empédocles sobre a origem de todas as coisas: “todas as coisas tem quatro raízes – Fogo, Ar, Terra e Água”. Da mesma maneira acontece na Matemática. Todos os objetos matemáticos possuem raízes que foram chamadas de *Elementos*. Não só pelo fato de ser a origem do conhecimento matemático, mas sobretudo, para indicar que aqueles eram os conhecimentos elementares para o entendimento da Matemática.

Diferentemente da impressão difundida, os *Elementos* de Euclides não se resume a Geometria. Ele também apresenta uma organização da Teoria dos Números iniciada por Pitágoras e uma Álgebra Geométrica Elementar, além, é claro, de textos de Geometria Plana e Espacial. Como exemplos é possível citar os Livros VII, VIII e IX que se ocupam da Teoria Elementar dos Números e o Livro X que focaliza os Irracionais.

Euclides, também diferentemente da impressão difundida, não foi o primeiro a organizar um *Elementos*. Basta verificar o Sumário de Proclus, para se constatar que Euclides não foi o primeiro a idealizar esse tipo obra.

> [...] Depois dos quais, Hipócrates de Quios, o que descobriu a quadratura da lúnula, e Teodoro de Cirene tornaram-se ilustres com relação à Geometria. *Pois Hipócrates também compôs Elementos*, o primeiro dos que são mencionados [...] E Neocleides, mais jovem do que Leodamas, e o discípulo desse, Léon, os quais resolveram muitas coisas em adição às dos antes deles, *de modo a Léon compor também os Elementos* de maneira mais cuidada tanto pela quantidade quanto pela utilidade das coisas demonstradas [...] *E Theudius de Magnésia* pareceu ser o que excede tanto nas matemáticas quanto em relação à outra filosofia. Pois *também arranjou convenientemente os Elementos* e fez mais gerais muitas coisas particulares [...] (PROCLUS apud BICUDO, 2009, p. 38 – grifos nosso)

Entretanto, mais adiante Proclus parece justificar o porquê do texto de Euclides ter se sobressaído em relação aos demais, e consequentemente, tiver gerado a impressão de que não houve nenhum *Elemento* antes daquele.

> E não muito mais jovem do que esses é Euclides, o que reuniu os *Elementos,* tendo também, por um lado, arranjado muitas das coisas de Eudoxo e tendo, por outro lado, aperfeiçoado muitas das coisas de Teeteto, e ainda, tendo conduzido as coisas demonstradas frouxamente pelos predecessores a demonstrações irrefutáveis. (PROCLUS apud BICUDO, 2009, p. 41 – grifos do autor)

Apesar da notável importância do conteúdo dos *Elementos*, talvez, pelas palavras de Proclus ditas acima, mais importante ainda seja a maneira formal e generalista como esse conteúdo foi apresentado. De fato, os *Elementos* de Euclides tronaram-se o protótipo da forma matemática moderna ao aperfeiçoar a forma generalista, postulacional e axiomática da Matemática.

Euclides não se tornou famoso pela descoberta de teoremas, que ele certamente fez, mas pela organização lógica com que ele apresentou de forma rigorosa e concatenada, ao menos para a época, todo o texto da obra, preenchendo as lacunas deixadas por seus antecessores.

Os *Elementos* e todo o percurso da matemática grega foram influenciados pela resolução de problemas das mais variadas naturezas. Fato é que algumas histórias da matemática como Heath (1956) e Gow (1968) supõe que Euclides tinha alguns objetivos ao escrever sua obra. Um desses objetivos seria o de construir os chamados sólidos de Platão[9].

Vários problemas foram conjecturados e resolvidos pelos próprios gregos, mas três problemas geométricos ficaram particularmente famosos e reuniram questões para matemáticos durante, pelo menos, 20 séculos.

1.2 Os três famosos problemas da antiguidade

Três problemas ocuparam os matemáticos gregos por um bom período da história da matemática grega: duplicar um cubo, trissectar um ângulo e quadrar um círculo utilizando, para tal, apenas a régua e o compasso. Gow (1968) afirma que:

> It was mainly through a thousand attempts to solve these problems that new propositions and new processes were discovered and Geometry made daily progress" (p.161).

Os problemas propostos devem ser entendidos no sentido essencial do legado filosófico-científico grego: a generalidade. Não se trata, por exemplo, de trissectar este ou aquele ângulo (o ângulo de 90º, por exemplo, pode ser trissectado), mas de trissectar um ângulo qualquer dado.

[9] Os sólidos de Platão são os seguintes: tetraedro, cubo ou hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Os cinco sólidos platónicos são conhecidos desde a antiguidade clássica e a prova que são os únicos poliedros regulares pode ser encontrada nos Elementos de Euclides

Esses problemas fizeram história e são os *Três famosos problemas da antiguidade*.

Os gregos apresentaram algumas soluções para os problemas citados. No entanto, tais soluções foram consideradas, pelos próprios gregos, como *mais elementares*. Essa conclusão se tira das palavras Pappus[10] ao afirmar, em sua *Coleção Matemática*, que sempre será uma construção factível com a régua e o compasso não se devem utilizar outros instrumentos que venham a facilitar essa construção. (PAPPUS apud van der WAERDEN, 1975).

Essa afirmação deixa claro como os gregos lidavam com a restrição à régua e ao compasso: a utilização de outros instrumentos era, sem dúvida, uma prática dos matemáticos, mas esses instrumentos só eram utilizados caso a construção se mostrasse resistente a limitação aos instrumentos básicos.

1.2.1 A quadratura do círculo

Por cerca de dois mil anos provavelmente nenhum outro problema exerceu tanto fascínio como o de construir um quadrado de área igual à de um dado círculo, ou seja, a quadratura do círculo.

É provável, que o problema da quadratura do círculo não tenha sua origem na civilização grega. De acordo com Knorr (1993):

> Indeed, there appears to be a certain sense of the problem of circle quadrature in remnants fo the Egyptian and Mesopotamia traditions as far back as the middle 2nd millennium b.C. and earlier. Specifically, the scribe of the Rhind Papyrus works out the area of a given circle first by subtracting 1/9 of its diameter and then squaring result. Thus, in effect, the circle is equated with the square whose side equals 8/9 the diameter of the circle. (p.25)

Em geral, as histórias da matemática apontam Anaxágoras, um matemático grego que viveu em meados do século V a.C., como sendo o primeiro homem de

---

[10] Pappus (290 – 350 d.C.) foi o que se chama hoje em dia de "comentarista". Embora fosse o principal matemático grego da sua época, a Matemática original que ele criou foi pequena tanto em estatura quanto em quantidade, em especial quando comparada com matemáticos clássicos como Eudoxo, Arquimedes e Apolônio. A fama de Pappus reside em sua obra denominada *"Coleção Matemática"*. Essa obra contém oito livros, ou capítulos, cada um existindo como um único tema. Alguns dos tópicos abordados por Pappus são: cônicas, geometria plana, mecânica e linhas retas tangentes a certas curvas.

que cujo nome está diretamente ligado ao problema da quadratura do círculo. Afirmação confirmada pelas palavras de Heath (1981): “The first name connected with the problem is Anaxagoras, Who is said to have occupied himself with it when in prison” (p.220).

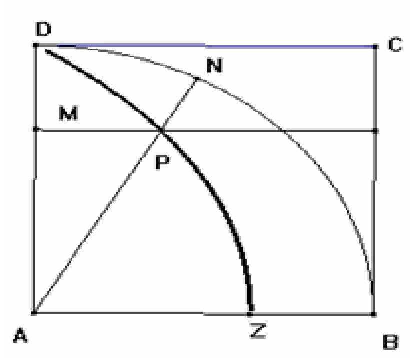
No entanto, o trabalho de Anaxágoras não chegou até os dias de hoje e tudo o que se sabe é devido a comentadores gregos pósteros a ele.

Outros gregos que tiveram seus nomes ligados ao problema foram Hipócrates de Quio (viveu em aproximadamente 430 a.C.), Hípias de Elis (viveu em aproximadamente 425 a.C) e Dinostrato (viveu em aproximadamente 350 a.C.).

Em relação a Hipócrates, o que se sabe ao certo é que ele trabalhou com a quadratura de lunas, ou seja, quadratura de figuras em forma de lua limitadas por dois arcos de circunferência. Não se tem conhecimento de nenhum documento atribuído a ele que trate diretamente da quadratura do círculo. No entanto, como esse problema exercia forte influência na época, é possível que Hipócrates tenha feito uso dos seus estudos sobre a quadratura das lunas para tentar quadrar o círculo.

Já Hípias, tem seu nome ligado ao problema da quadratura do círculo devido a uma curva conhecida como quadratriz. Assim como, acontece com Anaxágoras e Hipócrates, também não se conhece a solução de Hípias. No entanto, como a descoberta (ou invenção) da quadratriz é atribuída a esse matemático e como ela resolve o problema da quadratura, acredita-se que Hípias também investigou essa questão.

A quadratriz é uma curva gerada da seguinte maneira: suponhamos que no quadrado *ABCD* o lado *AD* gira com movimento circular uniforme em torno de *A* até que coincide com o lado *AB*. Ao mesmo tempo, o lado *DC* desce com velocidade constante até coincidir com *AB*. Os dois movimentos estão sincronizados de maneira que ambos os lados, *DC* e *AD* coincidam com *AB* no mesmo instante.



Quadratriz de Hípias

A quadratriz é o lugar geométrico gerado pelas intersecções destes dois lados móveis. É a curva *DPZ* da Figura.

Anaxágoras, Hipócrates e Hípias possuem seus nomes ligados ao problema da quadratura do círculo, mas, como já foi dito, não se conhece, efetivamente as supostas soluções apresentadas por esses matemáticos para esse problema.

A relação deles com a solução da quadratura do círculo se dão, apenas, devido ao fato de que eles, especialmente Hipócrates e Hípias, desenvolveram alguns elementos que posteriormente foram utilizados nas inúmeras soluções para esse clássico problema e à forte influência, que a quadratura do círculo exercia na época.

É de Dinostrato a primeira solução da quadratura do círculo da qual se tem conhecimento[11]. Esse grego solucionou o clássico problema fazendo uso da quadratriz de Hípias. Depois dele muitos outros matemáticos, Arquimedes, por exemplo, tentaram solucionar esse problema.

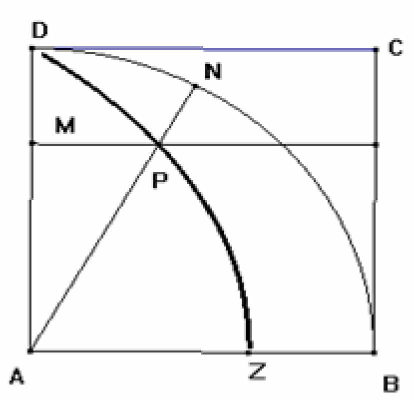
Solução grega para a quadratura do círculo

Dinostrato

Foi através da Geometria Plana junto com a utilização da quadratriz de Hípias que Dinostrato, um geômetra grego da Academia de Platão nascido em Alopeconnesus, Ásia Menor, hoje Turquia, discípulo de Eudóxio e irmão de Menaecmo, apresentaram sua solução para o problema da quadratura do círculo.

[11] Mais adiante iremos expor a solução de Dinostrato.

O procedimento, exposto em linguagem analítica para facilitar a leitura, foi o seguinte:



Quadratriz de Hípias

Afirma-se que $AZ = \frac{2a}{\pi}$, sendo *a* o comprimento do lado do quadrado. Seja θ o ângulo $PAZ, x = MP, y = AM$ e $AB = BC = CD = DA = a$. Então, devido à proporcionalidade dos movimentos temos que $\frac{y}{\theta} = k$, com k sendo uma constante de proporcionalidade.

Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ temos que

$$\frac{a}{\frac{\pi}{2}} = k$$

de maneira que

$$k = \frac{2a}{\pi}$$

e pode-se concluir que

$$\theta = \frac{\pi y}{2a} \rightarrow y = \frac{2a\theta}{\pi}$$

e assim

$$y = \frac{2a\theta}{\pi}$$

Para achar a equação polar da quadratriz temos:

$$\frac{y}{\rho} = sen\theta \Rightarrow \rho = \frac{y}{sen\theta} = \frac{2a\theta}{\pi \, sen\theta}$$

Quando $\theta \rightarrow 0$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{sen\theta} = 1$$

E tem-se que

$$AZ = \rho \, \frac{2a}{\pi}$$

Tendo construído um segmento de comprimento $\frac{2a}{\pi}$ deve-se construir π para efetuar a quadratura do círculo. Como se sabe, π não pode ser construído com a régua e o compasso. Logo, o resultado final apresentado por Dinostrato se trata de uma aproximação em que o lado do quadrado de área igual ao do círculo dado é igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado.

1.2.2 A trissecção do ângulo

A trissecção do ângulo, ou seja, dividir um ângulo em três partes iguais, diferentemente da quadratura do círculo, é um problema que surgiu através das investigações matemáticas gregas.

Os gregos, interessados na construção de ângulos de diversas medidas, lançaram mão dos métodos que eles conheciam para efetuar essas construções: somar, subtrair e bissectar ângulos eram alguns desses métodos. Mas, para a construção de alguns polígonos regulares, esses métodos não eram suficientes.

No caso do polígono de nove lados, para citar apenas um exemplo, era necessário dividir em três partes iguais um ângulo de sessenta graus. Dessa maneira, é provável que o problema da trissecção do ângulo tenha surgido daí.

As primeiras tentativas de solucionar a trissecção do ângulo são antigas e fazem uso, primeiramente, de geometria plana, ou seja, usam apenas retas e círculos. Heath (1981) reforça esse comentário:

> We are told that the ancients attempted, and failed, to solve the problem by 'plane" methods, i.e. by means of the straight line and circle; they failed because the problem is not "plane" but "solid". (p.235)

Posteriormente, com o avanço da Matemática e a descoberta das secções cônicas, o problema da trissecção do ângulo foi reduzido ao que se conhece hoje como *construção neusis* (do grego *neuein* que significa *incline para*) ou *construção por aproximação*.

> They succeeded in trisecting an angle by means of conic sections, a method to which they were led by the reduction of the problem to another, of the kinds known as νεύσεις (inclinations, or verging). (HEATH, 1981, p.235)

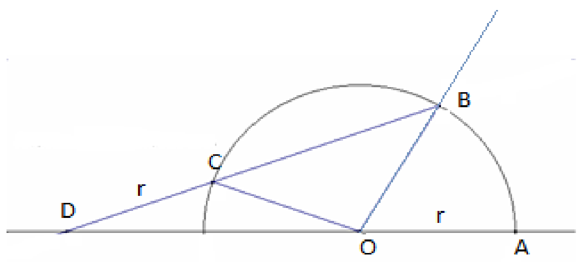
Uma construção *neusis* é, segundo nos conta Fowler (1987),

> A line drawn "verging" or "inclining" (neuein) towards – that is, passing through – a given point and intercepting tow given curves or straight lines in a given line segment. In vulgar terms, one might imagine putting a nail at the given point, marking off the given segments on a ruler, and then rotating the ruler against the nail until the intercept between the tow given curves in this marked segment. (p.350)

Todas as soluções gregas, de que se tem conhecimento, dadas para o problema da trissecção do ângulo fazem uso do método exposto por Fowler.

Soluções gregas para a trissecção do ângulo

Arquimedes



Trissecção de Arquimedes

Seja AOB o ângulo a ser trissectado. Pelo ponto O, como centro, trace um círculo de raio r qualquer. Prolongue o raio AO e trace DB de tal forma que $DC = r$. O ângulo ADB mede um terço do ângulo dado e soluciona o problema.

Prova-se este fato da seguinte maneira:

Seja C o ponto de intersecção de DB com a circunferência. Trace CO e observe que

$DC = CO = OB = r$.

Logo os triângulos DCO e COB são isósceles e possuem os ângulos da base iguais. Deste fato e do teorema do ângulo externo seguem:

$AOB = ODB + OBC$

$= ODB + OCB$

$= ODB + ODC + DOC$

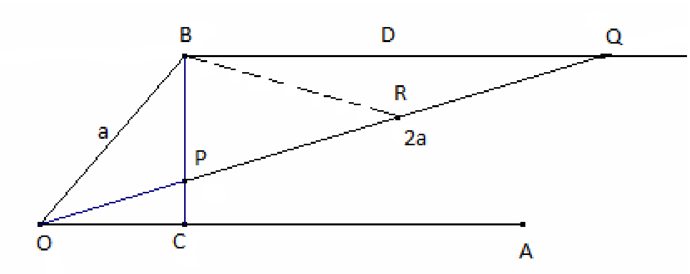
Mas

$ODB = ODC = DOC = ADB$

Logo $ADB = \frac{1}{3} AOB.$

Observa-se que esta solução da trissecção do ângulo não usa apenas a régua e o compasso. É uma solução por ajustamento. Marcam-se em uma reta os pontos D e C de tal modo que $DC = $ r; procura-se então ajustar a reta na figura de tal forma que D e C estejam na reta AO e no círculo, respectivamente, e de tal modo que ela passe por B.

Nicomedes



A trissecção de Nicomedes

Seja AOB o ângulo a ser trissectado. Seja $OB = a$ e trace BC perpendicular a AO, e BD paralela AO. Trace agora OQ de tal modo que $PQ = 2OB = 2a$. O ângulo AOQ soluciona o problema.

$AOQ = \frac{1}{3} AOB$

Prova-se este fato da seguinte maneira:

Trace a mediana BR do triângulo PBQ. Temos:

$BR = PR = RQ = a.$

Logo o triângulo OBR é isósceles e temos:

$ROB = ORB$

Portanto:

$2ROB + RBO = 180°$

e como BQ é paralela a AO temos:

$AOB + QBO = 180°$

Logo:

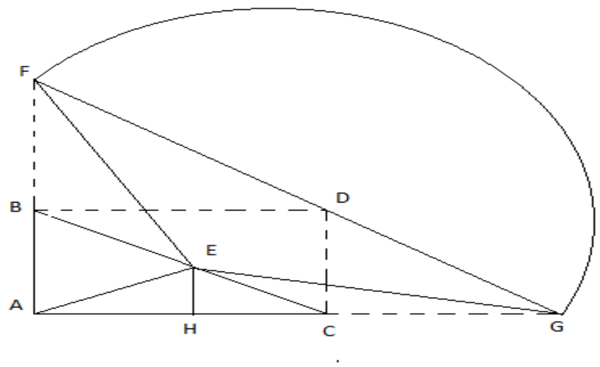
$2(AOB - AOQ) + (180° - AOB - AOQ) = 180°$

$AOQ = \frac{1}{3} AOB$

A solução de Nicomedes também não se restringe à régua e ao compasso. Para traçar a reta OQ de modo a que se tenha PQ = 2a precisa-se marcar em uma reta o comprimento PQ = 2a e ajustá-la no desenho de modo que, P permanecendo em BC e Q em BQ, se consiga que a reta passe por O.

Apolônio, Heron e Phílon

A solução que será apresentada a seguir é atribuída por Eutócio, nos seus comentários sobre a "Esfera e o Cilíndro" de Arquimedes, a Apolônio, Heron e Phílon.



A trissecção de Apolônio, Heron e Phílon

Desenhem em ângulo reto os dois segmentos AB e AC, entre os quais se deseja encontrar duas médias proporcionais. Logo em seguida, complete o paralelogramo $ABDC$ e trace o segmento BC para obter seu ponto médio E.

Com centro em E descreva o semicírculo FG de modo a cortar os prolongamentos de AB e AC em F e G, respectivamente, e de tal forma que F, D, G fiquem alinhados. Posteriormente trace EH perpendicular a AC (H é o ponto médio de AC).

Temos, então:

$$AG\,.\,GC + HC^2 = HG^2$$

$$AG\,.\,GC + HC^2 + EH^2 = HG^2 + EH^2$$

$$AG\,.\,GC + EC^2 = EG^2 \qquad (1)$$

Analogamente temos:

$$AF\,.\,FB + EB^2 = EF^2 \qquad (2)$$

Como $EF = EG \; e \; EB = EC$, então de (1) e (2) concluímos que:

$$AG\,.\,GC = AF\,.\,FB$$

ou

$$\frac{AG}{AF} = \frac{FB}{GC} \qquad (3)$$

Por semelhança de triângulos obtemos:

$$\frac{AG}{GF} = \frac{CG}{CD} = \frac{BD}{BF} \qquad (4)$$

Logo

$$\frac{BD}{BF} = \frac{BF}{CG} = \frac{CG}{CD}.$$

A solução de Apolônio, Heron e Phílon, assim como as apresentadas anteriormente, também não se restringe à régua e ao compasso. Para efetuar o procedimento, com centro em E descreva o semicírculo FG de modo a cortar os prolongamentos de AB e AC em F e G, respectivamente, e de tal forma que F, D, G fiquem alinhados, é necessário ajustar os seguimentos para que os pontos dados estejam de fato alinhados.

1.2.3 A duplicação do cubo

A duplicação do cubo, ou seja, encontrar a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do cubo dado, parece ser o problema cuja origem é a mais duvidosa. Conta-se que essa construção pode ter se originado através da ira do mítico rei Minos[12] por conta do tamanho do túmulo construído para seu filho, chamado Glauco.

Minos exigiu que o tamanho túmulo de seu filho fosse dobrado, mas por não ser versado em Matemática, solicitou que um de seus servos, talvez Eurípedes (um poeta da época), efetuasse os cálculos para que a duplicação fosse efetuada. Como Eurípedes também não dominava a Matemática ele cometeu um erro ao afirmar - que para se duplicar o tamanho do túmulo de Glauco bastava duplicar cada uma de suas arestas (nesse caso o cubo é aumentado em oito vezes).

Acredita-se, que essa história tenha perdurado e que os geômetras gregos tomaram conhecimento dela abraçando o problema de como duplicar o cubo.

Outra possível origem para o problema da duplicação do cubo é a de que os Delianos, para se livrar de uma peste que estava a contagiar todo seu povo, resolveram duplicar o altar cúbico de Apolo. Theon apud Heath (1981) coloca que:

> Eratosthenes on his work entitled Platonicus relates that, when the god proclaimed to the Delian by the oracle that, if they would get rid of a plague, they should construct an altar double of the existing one, their craftsmen fell into great perplexity in their efforts to discover how a solid could be made double of a (similar) solid; they therefore went to ask Plato about it and he replied that the oracle meant, not that the god wanted am altar of double the size, but that he wished, in setting them the task, to shame the Greeks for their neglect of mathematics and their contempt for geometry. (p.246)

É por conta dessa história que o problema da duplicação do cubo também ficou conhecido entre os gregos como *problema deliano*.

---

[12] Na mitologia grega, Minos foi um rei da ilha de Creta nascido em aproximadamente 1445 a.C.

Os registros matemáticos gregos não apontam nenhuma evolução na solução do problema até a *redução da duplicação* dada por Hipócrates. Tal redução é apresentada a seguir:

Da proporção $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ segue $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$.

Logo $x^4 = 2a^3x$ e $x^3 = 2a^3$.

Portanto, o problema da duplicação do cubo é reduzido a encontrar duas médias proporcionais *x* e *y* entre um segmento de reta *a* e outro comprimento duplicado *2a.*

Vale observar que a generalização é natural:

1. Duplicação de um segmento de reta:

   a $\qquad\qquad$ $2a$

2. Duplicação de um quadrado:

   $\frac{a}{x} = \frac{x}{2a}$ $\qquad\qquad$ $x^2 = 2a^2$

3. Duplicação de um cubo:

   $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ $\qquad\qquad$ $x^3 = 2a^3$

Depois de Hipócrates ter descoberto que a duplicação do cubo foi equivalente a encontrar duas médias proporcionais na proporção contínua entre duas linhas retas dadas o problema foi vastamente investigado nesse sentido.

Soluções gregas para a duplicação do cubo

Hipócrates

Hipócrates primeiramente ficou conhecido por ser o autor do primeiro texto de Geometria, embora não se tenha hoje, detalhes dessa sua obra. Quase tudo o que se sabe sobre seus *Elementos de Geometria* é contado por Proclus em sua *História da Geometria*. Sabe-se, no entanto, que muito material dos primeiros quatro livros de Euclides foi tirado da obra de Hipócrates de Quios.

Sua tentativa de duplicar o cubo se constitui em uma base inicial para outras tentativas posteriores.

Da proporção $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ segue $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$.

Logo $x^4 = 2a^3x$ e $x^3 = 2a^3$.

Portanto o problema da duplicação do cubo é reduzido a encontrar duas médias proporcionais x e y entre um segmento de reta a e outro comprimento duplicado $2a$.

Vale observar que a generalização é natural:

1. Duplicação de um segmento de reta:

   a $\qquad\qquad$ $2a$

2. Duplicação de um quadrado:

   $\frac{a}{x} = \frac{x}{2a}$ $\qquad\qquad$ $x^2 = 2a^2$

3. Duplicação de um cubo:

   $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ $\qquad\qquad$ $x^3 = 2a^3$

Platão

Eutócio (480 d.C. – 540 d.C.), um matemático grego que dentre outros trabalhos escreveu comentários sobre a obra de Arquimedes e sobre as Cônicas de Apolônio, foi o primeiro a atribuir a Platão a solução que será apresentada a seguir.

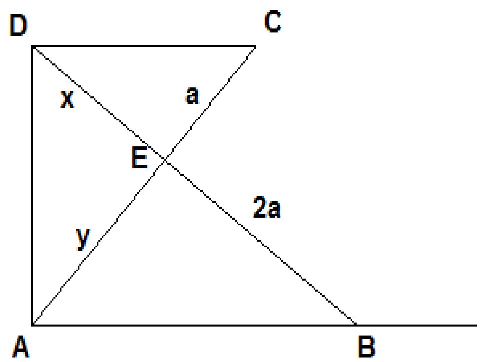
No entanto, histórias da matemática como a de Heath (1981) e a Gow (1968) indicam que é pouco provável que essa solução, cujo raciocínio segue a linha iniciada por Hipócrates, seja de autoria de Platão. Dentre outros motivos Heath (1981) destaca que:

> No one but Eutócio mentions it, and there is no reference to it in Eratosthenes's epigram, whereas, if a solution by Plato had then been known, it could hardly fail to have been mentioned along with those of Archytas, Menaecmo, and Eudoxo. Again, Plutarch says that Plato told the Delians that the problem of the two mean proportional's was no easy one, but that Eudoxo or Helicon of Cyzicus would solve it for them; he did not apparently propose to attack it himself. (p.255)

A solução é apresentada da seguinte maneira: Sejam a e $2a$ os dois segmentos de reta dados e x e y as médias proporcionais. Logo,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \qquad (1)$$

Na figura abaixo os triângulos BAD e ADC são retângulos e suas hipotenusas se interceptam em ângulo reto. Supondo $EC = a, EB = 2a, ED = x$ e $EA = y$ prova-se que a proporção acima se verifica bastando observar que $DEC \approx AED \approx BEA$.



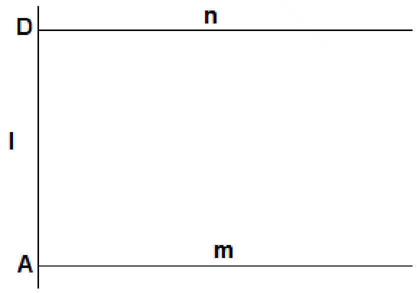
A Máquina de Platão

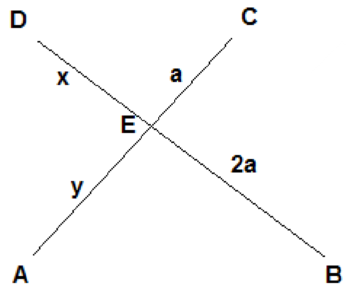
É curioso que este instrumento leve o nome de *A Máquina de Platão* uma vez que, como já foi dito antes, é possível que o próprio Platão seja o responsável por dar início à restrição a régua e ao compasso e que o mesmo, de certa forma, repudiava construções mecânicas. Heath (1981) reforça esse argument:

> And, lastly, the solution attributed to him is mechanical, whereas we are twice told that Plato objected to mechanical solutions on principle, he wished to show how easy it was to discover such solutions and put forward that attributed to him as an illustration of the fact. I prefer to treat the silence of Eratosthenes as conclusive on the point, and to suppose that the solution was invented in the Academy by some one contemporary with or later than Menaecmo. (p.255)

As duas figuras abaixo esquematizam o instrumento mecânico para efetuar a duplicação do cubo. As retas m, n e l, com m e n perpendiculares a l, representam barras. A barra m é fixada à barra l, e n pode deslizar mantendo-se, porém, perpendicular a l.

As duas barras perpendiculares da direita devem ser ajustadas de modo que $EC = a$ e $EB = 2a$. Trazendo as duas barras para o instrumento mecânico, e deslizando convenientemente a barra n, podemos ajustar o sistema de modo a se conformar com a figura acima. $ED = x$ é a aresta do cubo duplicado.





Heath (1981) sugere que essa solução é, na verdade, uma adaptação de uma das duas soluções dadas por Menaecmo para o problema da duplicação do cubo. Tanto quanto se sabe, Menaecmo fez uso das secções cônicas (sendo pioneiro nesse estudo) para solucionar o problema. Heath (1981) afirma que:

> If we look at the figure of Menaechmus's second solution, we shall see that the given straight lines and the two means between them are shown in cyclic order as straight lines radiating from O and separated by right angles. This is exactly the arrangement of the lines in Plato solution. Hence it seems probable that some one who had Menaechmus's second solution before him wished to show how the same representation of the four straight lines cold be got by a mechanical construction as an alternative to the use of conics. (HEATH, 1981, p.256)

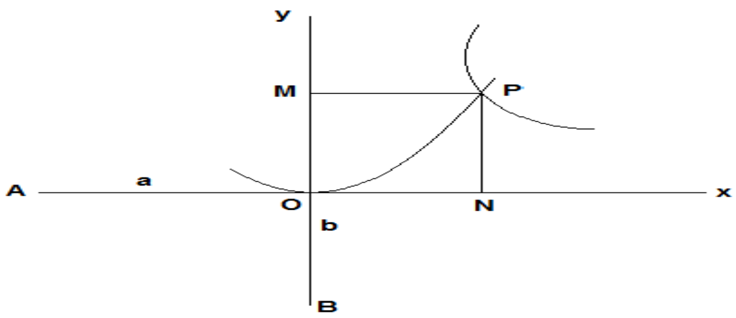
Menaecmo

Eutócio também é o responsável por atribuir a Menaecmo duas soluções para a duplicação do cubo. Menaecmo foi um aluno de Eudoxo e floresceu em meados do século IV a.C. Além da descoberta das secções cônicas, pouco se sabe sobre seus trabalhos.

Assim como Hipócrates e, supostamente, Platão, Menaecmo também tratou o problema da duplicação do cubo como sendo o de encontrar duas médias proporcionais. No entanto, ele associou a esse método o uso das secções cônicas que ele acabara de descobrir.

Seu argumento foi o seguinte: se x e y são duas médias proporcionais entre os segmentos retas a e b, ou seja, se $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, então claramente $x^2 = ay$, $y^2 = bx$ e $xy = ab$. Menaecmo observou, que essas são as equações de duas parábolas e uma hipérbole, respectivamente.

Na primeira solução Menaecmo usou a segunda e a terceira equação que correspondem, respectivamente, a uma parábola e uma hipérbole.



1ª Duplicação de Menaecmo

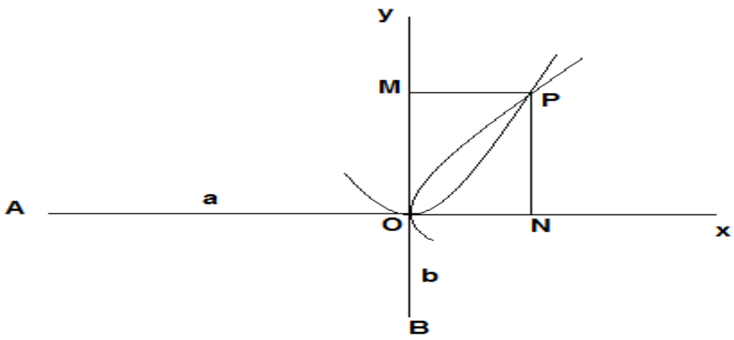
Ele supôs que AO e OB são dois segmentos de reta, que $AO > OB$ e que eles formam um ângulo reto em O. Em seguida, supondo o problema resolvido, o próximo passo foi traçar a média proporcional OM ao longo de BO e a média proporcional ON ao longo de AO. Logo após ele completou o retângulo $OMPN$.

Então, como $\frac{AO}{OM} = \frac{OM}{ON} = \frac{ON}{OB}$, temos: **(1)** $OB\,.OM = ON^2 = PM^2$, de modo que P está sobre uma parábola que tem O como vértice, OM como eixo e OB como corda focal de menor comprimento (latus rectum); **(2)** $AO\,.OB = OM\,.ON = PN\,.PM$, de modo que P está sobre uma hipérbole com O como centro e OM e ON como assíntotas.

Assim, para encontrar o ponto P, temos que construir: **(1)** Uma parábola com vértice em O, OM como eixo e *latus rectum* igual à OB; **(2)** Uma hipérbole com assíntotas OM e ON de modo que o retângulo compreendido pelos segmentos de retas PM e PN, construído a partir do ponto P, seja igual ao retângulo $AO\,.OB$.

A interseção da parábola com a hipérbole gera o ponto P que resolve o problema, pois $\frac{AO}{PN} = \frac{PN}{PM} = \frac{PM}{OB}$.

Na segunda solução Menaecmo usou a primeira e a segunda equação que correspondem, respectivamente, a duas parábolas.



2ª Duplicação de Menaecmo

Assim como na primeira solução, Menaecmo supôs o problema resolvido, tendo a partir de $\frac{AO}{OM} = \frac{OM}{ON} = \frac{ON}{OB}$, **(1)** A relação $OB\,.OM\ = ON^2\ = PM^2$, de modo que P está sobre uma parábola que tem O como vértice, OM como eixo e OB como *latus rectm*[13]; **(2)** A relação similar $AO\,.ON\ = OM^2\ = PN^{2,}$ de modo que P está sobre uma parábola que tem O como vértice, ON como eixo e OA como *latus rectum*.

Portanto, para encontrar P, Menaecmo só precisou construir as duas parábolas com OM e ON como vértice e OB e OA como *latera recta*, respectivamente.

A intersecção das duas parábolas gera o ponto P que soluciona o problema da duplicação, pois:

$\frac{AO}{PN} = \frac{PN}{PM} = \frac{PM}{OB}$.

A literatura sugere que essa segunda solução para a duplicação do cubo dada por Menaecmo foi reconstruída e posteriormente atribuída por Eutócio a Platão. No entanto, não existem documentos suficientes para comprovar se Eutócio foi o responsável por essa reconstrução ou se ele a tirou de algum outro texto antigo que não se tem conhecimento.

---

[13] O *Latus Rectum* de uma cônica é definido como sendo a corda focal (segmento de reta que passa por um do(s) foco(s) da cônica de extremidade pertencente à mesma) cujo comprimento é mínimo. Pode-se demonstrar que, em coordenadas cartesianas, dentro da convenção usual de representação canônica para elipses e hipérboles o comprimento do *latus rectum* é dado por 2b²/a. Na parábola, o valor do comprimento do *latus rectum* é dado por: *LR* = 4*p*

Outras interpretações para as soluções da duplicação do cubo de Hipócrates, Platão e Menaecmo podem ser encontras em Gow (1968), Bunt, Jones e Bedient (1976) e Fowler (1987).

Os problemas apresentados acima fizeram história e são os *Três famosos problemas da antiguidade*. Mas a fama, justa com certeza, se deve a um pequeno e importante detalhe: os gregos e os pósteros não conseguiram resolver os problemas com uma restrição imposta, a de usar exclusivamente a régua e o compasso.

1.3 A restrição à régua e ao compasso

As três construções, rapidamente apresentadas no item anterior, foram resolvidas pelos gregos antigos, mas suas soluções exigiram a utilização de outros instrumentos além da régua e do compasso. Surge, naturalmente, uma questão: qual o problema em utilizar instrumentos que não fossem a régua e o compasso?

Uma resposta definitiva não existe ainda, não há provas documentais conclusivas para nenhuma resposta, por mais plausível que ela possa parecer para os historiadores contemporâneos.

É possível, por exemplo, creditar a restrição aos Pitagóricos que sabiam que a duplicação do quadrado era factível com a régua e o compasso, não obstante terem descoberto que a diagonal e o lado de um quadrado qualquer eram grandezas incomensuráveis e virem como consequência a ruína de seu norte filosófico de que tudo seria número.

Outra razão plausível para tal restrição pode ser o fato de que alguns matemáticos gregos, Platão em particular, entendiam a reta e o círculo como sendo as curvas perfeitas e, por isso, deveriam ser suficientes para realizar quaisquer construções geométricas. Como retas e círculos podem ser construídas com a régua e o compasso, apenas é possível que, esta seja a origem da limitação a esses instrumentos.

No entanto, de maneira geral, se atribui a Euclides tal restrição. Não que ele tenha sido o primeiro a expor diretamente a limitação, isto ele certamente não fez, mas, possivelmente, por se encontrar nos *Elementos* a garantia através de postulados, da existência desses instrumentos.

Logo no primeiro dos treze livros que compõe os *Elementos*, Euclides expõe cinco postulados, dos quais três estão listados abaixo:

> (I) Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> (II) Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> (III) E, com todo centro e distância, descrever um círculo. (EUCLIDES, 2009, p.98)

Os dois primeiros postulados dizem o que pode ser feito com uma régua e o terceiro o que pode ser traçado com um compasso.

O primeiro postulado diz que é possível traçar um segmento de reta que se encontra entre os pontos A e B. O segundo permite ampliar esse segmento para além de A e B, ou seja, prolongar o segmento de reta AB indefinidamente. Juntos, esses dois primeiros postulados possibilitam traçar um segmento de reta determinado por dois pontos quaisquer e prolongá-lo infinitamente. Já o terceiro postulado de Euclides aponta que, tendo centro e distância (raio) dados, é possível descrever qualquer círculo.

É interessante observar que todas as construções realizadas nos seis primeiros livros dos *Elementos* são feitas somente a partir destas três operações.

Essas construções, quando realizadas fisicamente através dos instrumentos, certamente não são precisas. Um segmento de reta, para citar apenas um exemplo, traçado por meio de uma régua física jamais será uma linha sem largura (definição 2 do livro I dos *Elementos*). No entanto, os postulados garantem (no mundo ideal platônico da matemática) a perfeita construção deste segmento e de outras linhas que possam ser geradas pelo uso exclusivo da régua e do compasso.

Para Hudson (1969):

> The three postulates then amount to granting the use of ruler and compasses, in order to draw a straight line through two given points, and to describe a circle with a given centre to pass through a given point; and these two operations carry us through all the plane constructions of the Elements. The term Euclidean constructions is used of any construction, whether contained in his works or not, which can be carried out with Euclid’s two operations repeated any finite number of times. (p.1)

A associação da restrição à régua e ao compasso com esses três postulados de Euclides é relevante do ponto de vista da matemática dedutiva que os próprios *Elementos* instauraram como padrão definitivo do fazer matemático.

É bom ressaltar que a régua utilizada por Euclides, diferente da que se conhece hoje, não era marcada, pois ele não a utilizava para transpor distâncias entre dois pontos e sim para desenhar linhas retas e reproduzi-las. Mesmo motivo pelo qual se diz que o compasso não era fixo, já que ele também não o usava para transpor distâncias de uma posição para outra, mas apenas para construir círculos e semicírculos.

Embora, não haja prova textual dessas afirmações, ela se tira pelo exame da Proposição II do primeiro livro dos *Elementos* que solicita "Pôr, no ponto dado, uma reta igual à reta dada." Isto é, a proposição pede para, por um ponto qualquer, traçar um segmento de reta congruente a outro dado. Ora, caso a régua de Euclides fosse marcada ou o compasso fosse fixo a construção apresentada na proposição II poderia ser efetuada diretamente.

Os gregos como já foi dito, não solucionaram os *Três famosos problemas da antiguidade* atendendo a restrição de apenas utilizar a régua e o compasso. No entanto, eles não hesitaram em construir novos instrumentos e desenvolver novos métodos para resolverem os problemas. Isso se confirma pela quantidade de soluções deixadas pelos gregos que não obedeceram à limitação posta.

Somente com a algebrização da Geometria, iniciada por Descartes com a sua Geometria Analítica, e com o advento da Álgebra e da Teoria das Equações Algébricas é que se pôde comprovar a insolubilidade da quadratura do círculo, da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo.

A quadratura do círculo foi demonstrada impossível como consequência de um teorema provado em 1882 por Ferdinand Lindemann. Ele provou que π é um número transcendente, isto é, que não existe um polinômio com coeficientes inteiros ou racionais não todos nulos dos quais π seja uma raiz. Mas o que dizer da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo? Quem provou a impossibilidade desses problemas?

Se formos julgar pelo que os livros de Álgebra contam, não haveria dúvida sobre quem é o autor dessas demonstrações, Evariste Galois. Isto porque ao exporem a *Teoria de Galois*, isto é, a *Teoria de extensão de corpos*, chega-se como consequência trivial de alguns teoremas básicos da disciplina à impossibilidade de se construir com a régua e o compasso tanto a trissecção do ângulo quanto a duplicação do cubo.

No entanto, as coisas não se passaram efetivamente dessa maneira. A História da Matemática apresenta Pierre Laurent Wantzel como o responsável pela demonstração de que é impossível duplicar o cubo e trissectar um ângulo qualquer utilizando somente a régua e o compasso. Wantzel fez uso do método inaugurado por Descartes, ou seja, fez apelo a Álgebra para solucionar problemas de Geometria e assim apresenta uma importante relação entre essas áreas da Matemática.

2. A BASE ALGÉBRICA DAS CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO

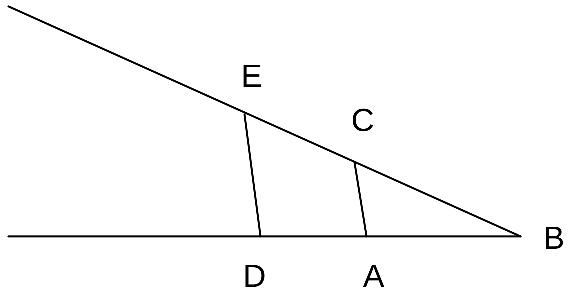
2.1 Descartes e a algebrização da geometria

Descartes, ao que tudo indica, foi o primeiro a utilizar a tradução de problemas geométricos para a linguagem algébrica. Logo na primeira parte do seu livro, *La Géométrie*, Descartes demonstra, como as operações aritméticas se relacionam com as operações geométricas.

> Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire. Et comme toute l'arithmètique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou enôter; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible. (DESCARTES, 1954, p.3)

Para os geômetras, dos gregos até Viète (1540–1603), a variável representava um comprimento, o produto de duas variáveis a área, o produto de três variáveis o volume. Já o produto de quatro ou mais variáveis não tinha significado específico. Em sua geometria Descartes introduz o segmento unitário tornando possível e dando significado a muitos problemas que eram intransponíveis para os gregos.

Descartes constrói todas as operações elementares (soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada) usando a régua e o compasso. Para fazer o produto de *a* por *b*, para citar apenas um exemplo, ele toma duas semi retas com mesma origem B e marca em uma delas o segmento unitário AB. Em seguida, marca nessa mesma semi reta um segmento *BD* de medida *a* e na outra semi reta marcamos o segmento *BC* de medida *b*. Traça um segmento de A até C e, em seguida, partindo de D, traça outro segmento paralelo a AC que encontra a outra semi reta em E determinando o segmento DE. Usando semelhança de triângulos concluímos que BE vale *a x b*.



Descartes estabelece um método que, segundo ele, resolve todos os problemas em Geometria. O método pode ser resumidamente dividido em três etapas: nomear, equacionar, construir.

- Nomear: consiste em assumir que o problema já está resolvido e, a partir daí, nomear todos os segmentos conhecidos e desconhecidos necessários para a resolução do problema.
- Equacionar: estabelecer uma ou várias equações envolvendo essas variáveis.
- Construir: construir as soluções geometricamente, fazendo uso de régua e compasso.

De acordo com Descartes (1954), para resolver um problema geométrico deve-se primeiro, atribuir letras aos segmentos conhecidos e desconhecidos a fim de estabelecer relações geométricas entre eles. Em seguida, se faz necessário reorganizar e reduzir as equações até que uma delas se apresente com apenas uma das incógnitas.

Para Descartes, essas equações poderiam ser dos seguintes tipos:

- Equação quadrática: o segmento de linha desconhecido pode ser construído por régua e compasso. Se a equação é de um grau superior a dois, ele afirma que é impossível resolver o problema por retas e circunferências (régua e compasso).

- Equação do terceiro ou quarto grau: a incógnita pode ser construída pela interseção das seções cônicas, mais precisamente pela interseção de um círculo e uma parábola.

- Equação do quinto ou sexto grau: a incógnita pode ser encontrada pela intersecção de um círculo com uma curva de grau três.

- Equação de grau maior que seis: as curvas conhecidas não são suficientes para resolver o problema. E sem entrar em detalhes, ele afirmou que o processo pode continuar desta forma indefinidamente.

Este é o método que levou Descartes (e posteriormente Wantzel) para as equações de segundo e terceiro grau quando se trata de construções com régua e compasso.

Quando Descartes apresentou seu método para construção (solução) de problemas geométricos (DESCARTES, 1954), ele salientou que a equação final deve ser a mais simples possível:

> C’et pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu’em demeflant ces equations on ne manque point a fe feruir de toutes les diuifions, qui feront poffibles, on aura infalliblement les plus simples termes, aufquels la equation piufe etre reduite (p. 12)

Assim, após traduzir o problema para a linguagem algébrica, é necessário reduzir a equação tanto quanto possível. Descartes explica essas novas reduções no início do terceiro livro de *La Géométrie*, que é, em geral, dedicada às transformações algébricas de equações polinomiais.

Por exemplo, ele descreveu como uma substituição linear da variável na forma y = x + a permitirá encontrar todas as raízes reais positivas ou eliminar o segundo maior termo de polinômio qualquer (DESCARTES, 1954, p.166-169). Além disso, ele explicou como uma substituição da forma y = ax pode transformar uma equação com raízes fracionadas para uma equação com raízes (DESCARTES, 1954, p. 173). Essas transformações não alteram o grau da equação.

Especialmente nos interessa aqui a maneira como ele lidou com as construções com a régua e o compasso.

> Et que fi elle peut etre resolue par la geometrie ordinaire, c'et a dire, en ne e seruant que lignes droites & circulaires tracées our vn e superfície plate lorque la derniere equations aura eté entierement démelée, il ny retera tout au plus qu'vn quarréinconnu, egal a CE qui e produit de l'addition, ou soutration de a racine multipliée par quelque quantiré connue, & de quelque autre quantité auy connue. Et lors cere racine, ou ligne innnue e trouue ayement. Car i'ay par exemple $z^2 = az + bb$... (DESCARTES, 1954, p.12)

Descartes constrói a solução da equação z mencionando o uso da régua e do compasso, seguido por uma construção de outros casos possíveis de equações quadráticas ($y^2 = - ay + b^2$ e $z^2 = az – b^2$).

Mais adiante ele mostra que os problemas da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo levam a equações cúbicas. Assim, ele possuía os dois elementos da prova da impossibilidade: uma vez que todos os problemas construtíveis por régua e compasso levam a equações quadráticas e os dois problemas clássicos levam a equações cúbicas, eles não podem ser construídos por régua e compasso.

Como vimos, Descartes apresentou seu método para resolver problemas geométricos com a seguinte forma: deve-se primeiro traduzir o problema geométrico para um problema de linguagem algébrica e assim poder resolvê-lo através de equações polinomiais. Estas equações devem ser reduzidas tanto quanto possível para que ele possa ser construída geometricamente por uma intersecção de duas curvas (círculo, linha reta, parábola círculo, etc.).

Esta forma de construção difere dos métodos clássicos de construção euclidiana que consistem, de maneira geral, em uma série de intersecções sucessivas de linhas e círculos. Em particular, é visível que as reduções de Descartes para a equação do problema são apresentadas de maneira quase que exclusivamente algébrica e que a última construção consiste em apenas uma intersecção entre as curvas dessas equações.

2.2 Interpretação algébrica de uma construção geométrica com régua e compasso

De maneira geral, com régua e compasso é possível traçar linhas retas, círculos (circunferências) e pontos de intersecções entre essas curvas (intersecção entre duas retas, intersecção entre uma reta e um círculo e intersecção entre dois círculos).

A régua pode ser usada para traçar linhas retas entre dois pontos A e B quaisquer. Ela também pode ser usada para prolongar, infinitamente, essas linhas retas.

Já o compasso pode ser usado para traçar um círculo quando se tem um ponto e uma distância, a partir desse ponto, dados. O ponto será o centro do círculo e a distância é o raio do mesmo.

Uma construção geométrica é um conjunto de etapas em que circunferências e retas são traçadas e pontos são encontrados através de intersecções daquelas linhas. Tais intersecções podem ser de três tipos: retas com retas, retas com circunferências e circunferências com circunferências.

Analiticamente, a intersecção entre duas retas corresponde à solução de um par de equações do primeiro grau em x e y:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema mostrará x e y como o quociente entre duas expressões contendo, ambas, produtos, somas e subtrações de termos em que aparecem os parâmetros A, B, C, A', B' e C', características daquelas retas.

A intersecção entre uma reta e uma circunferência corresponde à solução de um sistema formado por uma equação do primeiro grau (reta) e uma do segundo grau (circunferência).

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema mostrará x e y como o quociente entre duas expressões, contendo, ambas as somas, produtos, subtrações, divisões e extração de raízes quadradas de termos em que aparecem os parâmetros A, B, C, A', B' e C', característicos daquela reta e daquela circunferência.

A intersecção entre duas circunferências corresponde à solução de um sistema formado por duas equações do segundo grau (circunferência).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema mostrará x e y como o quociente entre duas expressões, contendo, ambas as somas, produtos, subtrações, divisões e extração de raízes quadradas de termos em que aparecem os parâmetros A, B, C, A', B' e C', característicos daquelas circunferências.

Isto é o mesmo que dizer que, se um elemento de uma figura é construtível com régua e compasso, os números que o definem derivam dos dados do problema através de uma quantidade finita de operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas.

A recíproca também é verdadeira: se os números que definem um elemento de uma figura derivam dos dados do problema através de uma quantidade finita daquelas operações, o elemento é construtível com régua e compasso porque com tais instrumentos é possível somar, subtrair, multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas.

Vejamos como é possível somar, subtrair, multiplicar, dividir e extrair raiz quadrada utilizando somente régua e compasso.

Soma:

Para construir $a + b$ traçamos uma reta e sobre ela assinalamos com o compasso as distâncias $OA = a$ e $AB = b$. Então $OB = a + b$

Subtração:

Para construir $a - b$ traçamos uma reta e sobre ela assinalamos com o compasso as distâncias $OA = a$ e $AB = b$, porém com AB na direção oposta a OA. Assim, $OB = a - b$.

Multiplicação:

Para construir pa, com p sendo qualquer número inteiro, basta repetir o processo feito na soma p vezes. Por exemplo: se $p = 3$, então $pa = 3a = a + a + a$.

Divisão:

Construímos $\frac{a}{q}$, com q sendo qualquer número inteiro, por meio do seguinte artifício: marcamos $OA = a$ sobre uma reta e traçamos uma segunda reta qualquer passando por O. Sobre esta reta marcamos um segmento arbitrário $OC = c$ e construímos $OD = qc$. Ligamos A e D e traçamos uma reta passando por C e paralela a AD, cortando OA em B. Os triângulos OBC e OAD são semelhantes. Portanto, $\frac{OB}{a} = \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{q}$ e $OB = \frac{a}{q}$. Por exemplo: se $q = 3$, então $OD = 3c$. Logo $\frac{OB}{a} = \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{3}$ e $OB = \frac{a}{q}$.

Extração de Raiz Quadrada:

Em uma reta marcamos $OA = a$ e $AB = 1$ (1 corresponde a um segmento de reta unitário). Desenhamos um círculo com o segmento OB como o seu diâmetro e construímos a perpendicular a OB passando por A e que encontra o círculo em C. O triângulo OBC tem um ângulo reto em C, pelo teorema da geometria elementar que afirma que um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto. Portanto, os ângulos OAC e ABC são retos, logo eles são iguais. Sendo assim os triângulos retângulos OAC e CBA são semelhantes e temos $x = AC$,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1}, \qquad x^2 = a, \qquad x = \sqrt{a}$$

2.2.1 Corpos construtíveis com régua e compasso

Suponha que se tenha um segmento de reta de comprimento unitário, ao qual corresponde o número 1. Com ele, através das quatro operações fundamentais (também chamadas de operações racionais – soma, subtração, multiplicação e divisão), podemos construir com a régua e o compasso todos os segmentos que correspondem aos números racionais.

Este primeiro conjunto de números construtíveis tem uma importante propriedade; aplicadas as quatro operações sobre dois quaisquer de seus elementos (excluída a divisão por zero), os resultados serão sempre elementos do próprio conjunto. O conjunto dos racionais é, portanto, fechado em relação àquelas operações. Em uma nomenclatura moderna pode-se dizer, que ele é um corpo relativamente às operações. Chamemos de F_0 a esse primeiro conjunto de números construtíveis.

A extração de raízes quadradas permite que se saia de F_0 e se chegue a outro conjunto de números construtíveis, do qual F_0 é um subconjunto. Seja k_0 um número qualquer de F_0, tomemos sua raiz quadrada e formemos todos os números do tipo $a + b\sqrt{k_0}$, em que a e b são racionais. Se $\sqrt{k_0}$ pertencer a F_0 não teremos saído do corpo dos racionais, mas se não pertencer (como assumiremos a partir daqui) estaremos diante de outro tipo de números construtíveis.

O conjunto desses novos números é fechado em relação às operações fundamentais. Tomados dois quaisquer deles, $(a + b\sqrt{k_0})$ e $(c + d\sqrt{k_0})$, sua soma e sua diferença serão números do mesmo tipo; seu produto será $(ac + bdk_0)$ + $(ad + bc)\sqrt{k_0}$ também do mesmo tipo; seu quociente será $\frac{a+b\sqrt{k_0}}{c+d\sqrt{k_0}} = \frac{(a+b\sqrt{k_0})}{(c+d\sqrt{k_0})}\frac{(c-d\sqrt{k_0})}{c-d\sqrt{k_0})} = \frac{ac-k_0bd}{c^2-k_0d^2} + \frac{bc-ad}{c^2k_0d^2}\sqrt{k_0}$, igualmente do mesmo tipo. Logo, esses novos números também formam um corpo, a que chamaremos de F_1, do qual F_0 é subconjunto (quando $b = 0$). Note-se que $c^2 - k_0d^2$ somente pode ser zero quando $c = d = 0$ (e neste caso inexiste a divisão), já que $k_0 \neq \frac{c^2}{d^2}$, pois a igualdade iria contra a hipótese de que $\sqrt{k_0}$ não pertence a F_0.

O procedimento descrito pode, agora, ser repetido indefinidamente: partindo de F_1 e tomando-se nele um número fixo k_1 tal que $\sqrt{k_1}$ não esteja em F_1, constrói-se um corpo F_2 de números construtíveis do tipo $(a_1 + b_1\sqrt{k_1})$, com a_1 e b_1 pertencentes a F_1. Evidentemente, F_0 e F_1 estão contidos em F_2. De uma maneira geral, um corpo F_n de números construtíveis é criado a partir de um corpo F_{n-1}, e formando todos os números do tipo $(a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{k_{n-1}})$ com a_{n-1} e b_{n-1}

pertencentes a F_{n-1}. Todos os corpos F_i pelos quais se passou até chegar-se a F_n estão contidos em F_n.

Todos os números de F_0, ..., F_n são construtíveis porque foram obtidos a partir do elemento unitário por meio de um número finito de operações racionais e extrações de raízes quadradas. Reciprocamente, qualquer número construtível pode ser encontrado em algum dos corpos F_i porque já mostraram que somente são possíveis as construções cujos números correspondentes aos elementos desejados possam ser obtidos a partir dos dados do problema por meio de um número finito de operações racionais e extrações de raízes quadradas.

Uma consequência importante do que foi demonstrado até agora é que todos os números construtíveis são algébricos, ou seja, são raízes de alguma equação algébrica de coeficientes racionais[14].

2.3 Interpretação algébrica da impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo

2.3.1 A impossibilidade da duplicação do cubo

Suponhamos que a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c pertencentes a F_0, tenha uma ou mais raízes construtíveis. Tais raízes, então, deveriam pertencer a algum corpo F_i, com $i > 0$, já que por hipótese, elas não são racionais.

Podemos, então, supor que m seja o menor número inteiro para o qual alguma das raízes pertence a um F_m. Assim, tal raiz é do tipo $r_1 = p + q\sqrt{w}$, com p, q e w pertencentes a F_{m-1}, mas $\sqrt{w}$ não. Entrando com este valor de r_1 naquela equação do terceiro grau e desenvolvendo-se os produtos tem-se:

$$(p^3 + ap^2 + 3pq^2w + aq^2w + bp + c) + \sqrt{w}(3p^2q + q^3w + 2apq + bq) = 0.$$

Fazendo $(p^3 + ap^2 + 3pq^2w + aq^2w + bp + c) = s$ e $(3p^2q + q^3w + 2apq + bq) = t$ temos $s + t\sqrt{w} = 0$.

[14] Ver Courant e Robbins (2000, p.158)

Se fosse possível $t \neq 0$, então $\sqrt{w} = \frac{-s}{t}$ e, como s e t são números que estão em F_{m-1} (porque a, b, e c são racionais e p e q estão naquele corpo), $\sqrt{w}$ também estaria, o que contradiz a hipótese. Logo, $t = 0$, e isso implica $s = 0$.

Se $r_1 = p + q\sqrt{w}$ é raiz da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, então $r_2 = p - q\sqrt{w}$ também será. Logo, substituindo r_2 na mesma equação e desenvolvendo-se os produtos, tem-se $s - t\sqrt{w} = 0$.

Se fosse possível $t \neq 0$, então $\sqrt{w} = \frac{s}{t}$ e, como s e t são números que estão em F_{m-1} (porque a, b, e c são racionais e p e q estão naquele corpo), $\sqrt{w}$ também estaria, o que contradiz a hipótese. Logo, $t = 0$, e isso implica $s = 0$.

Como a soma das três raízes de uma equação do terceiro grau é $-a$, concluímos que $r_3 = -a - \left(p + q\sqrt{w}\right) - \left(p - q\sqrt{w}\right) = -(a + p + q)$. Como p e q estão em F_{m-1} e a é racional, conclui-se que r_3 está em F_{m-1}, o que é um absurdo, pois contraria nossa hipótese de que m e o menor inteiro para o qual uma das raízes construtíveis daquela equação do terceiro grau está em F_m.

Portanto, uma equação do terceiro grau com coeficientes racionais só tem raízes construtíveis se ao menos uma delas for racional.

Como a duplicação do cubo depende da solução da equação $x^3 - 2 = 0$, é impossível realizá-la uma vez que as raízes desta equação não são racionais.

2.3.2 A impossibilidade da trissecção do ângulo

A possibilidade da construção do ângulo θ implica a possibilidade da construção de seu cosseno e reciprocamente. Sabemos da Trigonometria que:

$$\cos 3\theta = \cos\theta\,(4\cos^2\theta - 3)$$

Por exemplo, se $\cos 3\theta = 60°$ temos:

$$\frac{1}{2} = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad 8\cos^3\theta - 6\cos\theta - 1 = 0$$

Chamando $2\cos\theta$ de x, esta equação se torna $x^3 - 3x - 1 = 0$. Pelo teorema demonstrado, as raízes desta equação somente serão construtíveis se pelo menos uma delas for racional.

Suponhamos que o racional $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros sem fatores em comum, seja uma raiz. Então:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \qquad ou \qquad a^3 - 3ab^2 - b^3 = 0 \qquad ou$$

$$a(a^2 - 3b^2) = b^3 \qquad ou \qquad \frac{b^3}{a} = (a^2 - 3b^2).$$

Significa que a divide b, já que divide seu cubo. Mas como a e b não têm fatores em comum, as únicas alternativas para a são $+1$ e -1. A equação em a e b pode ser reescrita como $a^3 = b^2(b + 3ab)$, o que significa que o quadrado de b divide o cubo de a, ou seja, divide a. Como a e b não têm fatores em comum, as únicas alternativas para b são $+1$ e -1.

A conclusão de tudo isso é que as únicas possibilidades para eventuais raízes racionais da equação em x são os números $+1$ e -1. Uma simples inspeção mostra que $+1$ e -1 não são raízes, logo:

1. Não é possível construir o cosseno do ângulo de $20°$;
2. Portanto, não é possível construir o ângulo de $20°$;
3. Logo, não é possível trissectar o ângulo de $60°$;
4. Apresentado um ângulo para o qual a trissecção é impossível, fica demonstrada a inexistência de um método geral para se efetuar a trissecção de um ângulo qualquer com régua e compasso.

A prova para a impossibilidade da duplicação do cubo apresentada acima é apenas uma reconstrução dos resultados publicados pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel. Mas que foi Wantzel, como ele chegou aos resultados outrora apresentados e como se deu a recepção a seu trabalho?

3. O TRABALHO DE PIERRE LAURENT WANTZEL

3.1 Pierre Laurent Wantzel

Pierre Laurent Wantzel não é um nome muito comum em livros ou artigos que tratam de Matemática ou História da Matemática. Cajori (1918) é um dos primeiros a perceber essa ausência:

> “Every one knows that one of the noted proofs of the impossibility of an algebraic solution of the general quintic equation is due to Wantzel. Nevertheless histories of mathematics and biographical dictionaries are silent regarding his life. The eleven papers listed in Poggendorff's Handwörterbuch as due to "Pierre Laurent Wantzell" do not include the proof in question, and a query is raised in a footnote regarding another "Wantzell"; but nowhere does Poggendorfï refer to a "Wantzel." Text-books on algebra and the theory of equations do not give Wantzel’s full name. The reader is thus left without positive information as to the author of "Wantzel’s proof." Born in 1814, Wantzel died prematurely in 1848. He is the "Pierre Laurent Wantzell" of Poggendorff but in his published articles his name is always spelled "Wantzel."” (p.339)

Apesar de o nome sugerir uma nacionalidade alemã, Wantzel foi um matemático francês e trilhou toda a sua curta vida acadêmica na *École des Ponts et Chaussées* e na *École Polytechnique*, ambas em Paris.

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant[15], professor e amigo de Wantzel na École des Ponts et Chaussées, foi ao que tudo indica, o primeiro a escrever sobre a vida desse matemático.

> Pierre-Laurent Wantzel, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur et examinateur d’admission à l’École Polytechnique, member de la Société Philomatique et nquit à Paris le 5 juin 1814. (SAINT-VENANT, 1848, p.321)

O pai de Wantzel, M. Frederick Wantzel, era militar (serviu o exército francês durante sete anos), mas após seu nascimento tornou-se professor de Matemática

[15]Saint-Venant (1797 - 1886) era francês e foi engenheiro e professor de Matemática. Aos dezesseis anos de idade, em 1813, ele ingressou na *École Polytechnique*, mas, logo no ano seguinte, foi expulso de lá por ter se recusado a participar da defesa de Paris. Em 1816 se formou em Engenharia Civil pela *École des Ponts et Chaussées*. Trabalhou como engenheiro para o *Service des Poudres et Salpêtres* e para o *Service de Ponts et Chaussées*. Entre 1839 e 1840 freqüentou o *Collège de France* onde estudou com Joseph Liouville. Ele também trabalhou como professor de Matemática da *École des Ponts et Chaussées*. Suas principais contribuições acadêmicas foram trabalhos fundamentais na teoria da elasticidade, sendo seu nome associado ao Princípio de Saint-Venant, ou Teorema de Saint-Venant, e o desenvolvimento de equações unidimensionais, as equações de Saint-Venant, usadas na hidráulica moderna.

Aplicada na École Speciale du Commerce. Sua mãe, Marie Aldon Beaulieu, sempre fora dona de casa.

Saint-Venant (1848) também nos dá algumas informações sobre a família de Pierre Wantzel.

> Wantzel était le fils de M. Frédréric Wantzel, encore existant, et de Marie Aldon-Beaulieu, qui a precede son fil de six mois dans la tombe. Son père, d'une famille de banquires de Francfort-sur-le-Mein, que les guerres de 1798 avaient oblige de venir chercher l'existence à Paris, s'était arme, trois mois avant la naissance de son fils, pour défendre, dans les rangs de la vieille garde impériale, le territoire envahi de as patrie adoptive. Rentré sept and après dans la vie civile, ou il occupe depuis cette époque la place de professeur de mathématiques appliquées á l'École spéciale du comerce, M. Wantzel père avait retrouvé as femme et sés enfants à Écouen près Paris, ou son beau-père possédait une propriété. (p.321)

Ainda na educação básica, Wantzel já demonstrava certa aptidão para a Matemática e para outras ciências. Em 1826, aos doze anos de idade, após se transferir para Paris, Wantzel foi admitido na *École des Arts et Métiers de Châlons* onde permaneceu por pouco mais de um ano. Já em 1828, com quatorze anos, ele foi admitido para o *Collége Charlemagne*.

A. de Lapparrent, professor de Matemática da *École Polytechnique* e relator do capítulo de Matemática do *École Polytechnique: Livre du Centenaire, 1794-1894*, descreveu as primeiras conquistas de Wantzel.

> In 1829, Reynaud appreciated him enough to not only allow him to correct proofs of the new edition of his *Arithmetic* but to also introduce in that volume a demonstration concerning the square root which was suggested by the young editor. In 1831, the first prize of French dissertation from the Collége Charlemagne was awarded to him, and better yet, first prize in Latin dissertation, acquired in an open contest, attested with splendour to the universality of Wantzel's aptitude. (LAPPRRENT, 1895, p.133)

Assim como na educação básica, Wantzel continuou frequentando as melhores instituições de ensino superior francês da época. Em 1832 Wantzel foi admitido, em primeiro lugar, tanto na *École Polytechnique*, como para a seção de ciências da *École Normale Supérieure*.[16] Ele escolheu a *École Polytechnique*.

Em 1834, Wantzel transferiu-se para a *École des Ponts et Chaussées*, mas 1837 ele decidiu se dedicar à Matemática ao invés da Engenharia, pois

[16] Esse fato é interessante uma vez que Wantzel foi o primeiro a ser aprovado em primeiro lugar nas duas principais instituições de ensino superior francês da época.

parafraseando Saint-Venant (1848), Wantzel disse alegremente aos seus amigos, que ele seria apenas um engenheiro medíocre.

Sendo assim, a fim de continuar sua carreira em Matemática, ele pediu licença da *École des Ponts et Chaussées*. Entretanto, atendendo a um pedido do diretor da escola, Wantzel continuou seus estudos em Engenharia e graduou-se em 1840.

Mesmo ainda, sendo aluno da *École des Ponts et Chaussées* em 1838, Wantzel já havia sido nomeado *répétiteur* do curso de análise da *École Polytechnique*. Em 1843, ele foi promovido a examinador da avaliação de entrada na *École Polytechnique* e em 1844, tornou-se assistente no curso de Mecânica Aplicada da *École des Ponts et Chaussées*.

Foi a partir de 1837, que Wantzel publicou seus trabalhos. Sua lista de publicações, segundo nos conta Saint-Venant (1848), contém vinte e um trabalhos.

Journal de l'École Polytechnique:

1) (Cahier XXV, 1837, p. 151-157) Note sur les nombres incommensurables.
2) (Cahier XXVII, 1839, p. 85-122) Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, determine par des différences de pression considérables. (Co-autoria de Saint-Venant)
3) (Tome II, 1837, p. 366-372) Recherches sur les moyens de reconnaitre si um problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas.
4) (Tome IV, p. 185-188, 1839) Lettre à M. Liouville sur la détermination de la figure d'équilibre d'une masse fluide em rotation et soumisc à des forces attractives.

Comptes rendus de l'Académie:

1) (2° sem., 1842, p. 732) Remarques à l'occasion d'um mémoire de M. Maurice sur l'invariabilité des grands axés.
2) (2° sem., 1843, p. 1140) Nouvelles expériences sur l'ecoulement de l'air determine par des différences de pression considérables. (Co-autoria de Saint-Venant)
3) (2° sem., 1843, p. 1191) Mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires ou moyen des integrals définies.

4) (1° sem., 1844, p. 1197) Note sur l'intégration des équations de la courbe élastique à Double courbure.
5) (2° sem., 1845, p. 366) Note sur l'écoulement de l'air.
6) (1° sem., 1847, p. 430) Note sur la théorie des nombres complexes à l'occasion Du mémoire de M. Lamé sur Le théorème de Fermat.
7) (1° sem., 1848, p. 600) Mémoire sur la thérie des diamètres rectilignes des courbes quelconques.

Société Philomathique (nouveau Bulletin)

1) (14 janvier 1843) Note sur les incommensurables d'origine algébrique.
2) (11 février 1843) Sur la surface don't l'aire est un minimum.
3) (27 mai 1843) État d'équilibre des temperatures dans un cylindre de forme quelconque, obtenu dans chaque cãs au moyen de divers systèmes de surfaces isothermes.
4) (11 janvier 1845) Sur la résolution des équations algébriques par des radicaux.
5) (6 décember 1845) Démonstration purement algébrique de l'impossibilité d'exprimer les raciness d'une equation algébrique par des fonctions transcendantes.
6) (6 février 1847) Remarques sur la forme par laquelle M. Cauchy développe une fonction suivant la puissance de la variable.
7) (20 novembre 1847) Recherches sur les diamètres rectilignes des courbes.

Nouvelles Annales de Mathématiques

1) (Tome II, p. 117-127, 1843) Classification des nombres incommensurables d'origine algébrique.
2) (Tome III, p. 325-329, 1844) Note sur les racines complexes des équations et sur les facteurs des polynomes algébriques.
3) (Tome IV, p. 57-65, 1845) De l'impossibilité de résoudre toutes les équations algebriques avec des radicaux. (SAINT-VENANT, 1848, p.328)

Como é possível observar, muitos dos trabalhos não passam de uma página. Saint-Venant (1848), afirma que esses textos mais curtos ou são breves comentários sobre resultados obtidos por outros matemáticos ou são trabalhos incompletos do próprio Wantzel. Todo esse material ou trata de Matemática ou de Física.

Um desses trabalhos nos interessa: *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géometrie peut se résoudre avec lá règle et la compass* (Pesquisas sobre os meios de reconhecer se um problema pode ser resolvido por meio de régua e compasso) publicado no *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* em 1837.

Nesse trabalho, Wantzel fez uso das ideias iniciadas por Descartes (traduzir problemas geométricos para a linguagem da álgebra), e colocou um ponto final nas discussões sobre dois dos três problemas clássicos: a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo.

3.2 O trabalho e os resultados de Wantzel

O artigo de Wantzel tem a seguinte estrutura: primeiro ele traduz o problema geométrico para uma linguagem algébrica; depois ele demonstra como essa tradução sempre reduz o problema geométrico a uma equação de grau 2^n $(n \in N)$; em seguida, ele pressupõe que esta equação é irredutível sob determinados aspectos (seu teorema principal); e conclui afirmando que a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo levam a equações cúbicas irredutíveis, logo não podem ser construídas com a régua e o compasso.

A tradução do problema geométrico para uma linguagem algébrica se dá logo no primeiro parágrafo do artigo. Primeiramente, Wantzel supôs que um problema geométrico pode ser resolvido por meio da intersecção de retas e circunferências. Logo em seguida ele afirmou - que a incógnita principal dessas intersecções, pode ser obtida pela resolução de uma série de equações quadráticas cujos coeficientes são funções racionais dos dados do problema e das raízes das equações anteriores. Por fim, Wantzel também afirmou - que se um problema pode ser resolvido com a régua e o compasso então ele deve obedecer à afirmação anterior.

> Supposons qu'um problème de Géométrie puisse être résolu par des intersections de lignes droites et de circonférences de cercle: si l'on joint les points ainsi obtenus avec les centres des cercles et avec les points qui déterminent les droites on formera un enchaînement de triangles rectilignes dont les élements pourront être calculés par les formules de la Trigonométrie; d'ailleurs ces formules sont des équations algébriques qui ne renferment les côtes et les lignes trigonométriques des angles qu'au premier et au second degré; ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des

> équations précédentes. D'après cela, pour reconnaître si la construction d'un problème de Géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré composées comme on vient de l'indiquer. (WANTZEL, 1837, p.366)

Lützen (2009) nos chama a atenção para uma questão fundamental que surge logo nessa primeira parte do trabalho de Wantzel: "Wantzel's proof is brief and, contrary to modern proofs, it appeals to trigonometry." (p.378)

Como Lützen (2009) salienta, a prova de Wantzel é curta (possui apenas sete páginas) e ao contrário das provas modernas, que fazem uso da teoria da extensão de corpos, ela apela à Trigonometria. Nesse sentido Wantzel parece ser pioneiro, ou seja, ele parece ser o primeiro a fazer uso da Trigonometria para tratar dos clássicos problemas.

Dando continuidade ao seu trabalho Wantzel, então, provou que se um número algébrico[17] é uma solução de um sistema de equações quadráticas, então ele é a raiz de um polinômio de grau 2^n $(n \in N)$. Para este fim ele assumiu que a principal incógnita do problema geométrico x_n^0, ou seja, o ponto de intersecção entre duas retas, ou uma reta e uma circunferência, ou ainda duas circunferências, é a raiz da última de uma série de equações tais como:

$$x_1^2 + Ax_1 + B = 0 \quad (1)$$
$$x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0 \quad (2)$$
$$\dots$$
$$x_m^2 + A_{m-1}x_m + B_{m-1} = 0 \quad (3)$$
$$x_{m+1}^2 + A_mx_{m+1} + B_m = 0 \quad (4)$$
$$\dots$$
$$x_{n-1}^2 + A_{n-2}x_{n-1} + B_{n-2} = 0 \quad (5)$$
$$x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0 \quad (6)$$

De modo que A e B são funções racionais de dadas quantidades $p, q, r, \dots$, ou na terminologia moderna $A, B \in Q\,(p, q, r, \dots)$; A_1; B_1 são funções racionais de dadas

[17] Número real ou complexo que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros.

quantidades e uma raiz x_1^0 da primeira equação, isto é, $A_1;\ B_1 \in Q\ (p;\ q;\ r; \ldots ;\ x_1^0)$; e em geral $A_m;\ B_m \in Q\ (p;\ q;\ r;\ \ldots;\ x_1^0;\ x_2^0; \ldots ;\ x_{m-1}^0;\ x_m^0)$.

Wantzel também argumentou que é possível eliminar todas as potências de x_m^0, maiores do que a primeira, usando a equação $x_m^2 + A_{m-1}x_m + B_{m-1} = 0$ (equação “3” na lista acima) e que a função racional de $p;\ q;\ r;\ \ldots;\ x_1^0;\ x_2^0; \ldots ;$ $x_{m-1}^0;$ x_m^0 poderia ser escrita na forma $\frac{C_{m-1}x_m^0 + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m^0 + F_{m-1}}$, com $C_{m-1}, D_{m-1}, E_{m-1}\ e\ F_{m-1} \in Q\ (p;\ q;\ r;\ \ldots;\ x_1^0;\ x_2^0; \ldots ;\ x_{m-1}^0)$.

A continuidade dos argumentos de Wantzel resulta em um polinômio $P(x)$ de grau 2^n com coeficientes em $Q\ (p, q, r, \ldots)$. Esta última equação tem x_n^0 como raiz, o que conclui o argumento inicial do autor.

Antes de Wantzel já se sabia que qualquer número algébrico é raiz de um polinômio de grau dois. Portanto, nesse sentido, as palavras ditas acima não dão nenhuma informação nova, nem mesmo na época em que foram publicadas. Mas Wantzel, dando continuidade a sua prova, disse que, reduzindo-se o número de equações em $(1) - (n)$ a um mínimo, então o polinômio $P(x)$ final, resultante do procedimento acima, seria irredutível sobre $Q\ (p, q, r, \ldots)$.

Chega-se, dessa maneira, ao teorema principal da prova de Wantzel, a saber: O polinômio irredutível, (com coeficientes racionais conhecidos) possuindo um segmento de reta construtível x_n^0 como raiz, tem de possuir como grau uma potência de 2.

A demonstração do teorema principal da prova de Wantzel é longa e possui muitas lacunas. Ela é bem apresentada no texto de Lützen (2009). O autor aponta as falhas e faz correções e comentários sem mudar o argumento original do artigo de Wantzel. Segue uma passagem de Lützen (2009) em que ele aponta uma das falhas.

> Of course any algebraic number is the root a polynomial of degree a power of 2 so the above argument does not give any new information as stated. But Wantzel argued that if one reduce the number of equation in (1) – (n) to a minimum, then the final polynomial P(x) resulting from the above procedure is irreducible over Q (p, q, r, …). This is the main theorem of Wantzel’s paper that I formulated above. Until this point Wantzel’s argument has been rather easy to follow, but his proof of the main theorem is harder. My “filling in” really begins here. In fact the following considerations until Theorem 3 are not found in Wantzel’s paper. I shall for brevity leave out the

> known quantities p. q, r, …, assuming that they are themselves rational numbers. This changes nothing in the argument. Let us first consider the roots of the polynomial P(x). they can be characterized by a particular choice $x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n'$ of roots of the equations (1)-(n). First one chooses a root x_1' of Eq (1). This root is substituted for x_1^0 in the expression of the coefficients A_1 and B_1 of Eq (2). Then on chooses a root $x_2^{'}$ of the resulting Eq (2) and so on. The choice $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ leads to the principal unknown of the geometric problem; other choices lead to the other 2^n roots of P (x). With this in mind we can formulate a lemma that is used repeatedly by Wantzel, but not formulated explicity in his paper: **Lemma 1.** Let $x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}, \ldots, x_n^{'}$ be a choice of roots of the system (1)-(n) leading to a root $x_n^{'}$ of P(x) and let f(x_1, x_2, x_3, …, x_m) be a rational function of m variables (m ≤ n). As explained above, this function applied to $x_1', x_2', x_3', \ldots, x_m'$ can be written in the standart form $f(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_m') =$
> $A_{m-1}^{'}\,(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_{m-1}')x_m^1 + B_{m-1}^{'}\,(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_{m-1}')$. (p.379)

Após demonstrar o teorema principal, Wantzel voltou aos problemas clássicos. Ele afirmou que a equação $x^3 - 2a^3 = 0$, correspondente à duplicação do cubo e conhecida desde os gregos, é sempre irredutível.

Wantzel abordou o problema da duplicação da mesma maneira que Heráclito já havia feito a mais de dois mil anos atrás. Ele buscou encontrar duas médias proporcionais entre a e b, ou seja, encontra x e y de modo que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Este procedimento leva à equação $x^3 - a^2b = 0$ que, segundo o próprio Wantzel, é irredutível a menos que $\frac{a}{b}$ seja um cubo.

A conclusão é imediata: como essa equação tem um grau que não é uma potência de 2, o problema da duplicação do cubo é impossível de ser solucionado com o uso exclusivo de régua e compasso.

Para provar que a trissecção do ângulo também é impossível de ser efetuada com a restrição à régua e ao compasso, Wantzel procedeu da mesma maneira. Primeiro ele afirmou que a trissecção do ângulo depende da equação $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0$.

Em seguida, ele salientou que essa equação é irredutível quando ela não possui uma raiz que seja função racional de a. E concluiu dizendo, que esse é o caso sempre que *a* é algébrico. Essa última afirmação é falsa uma vez que a equação $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0$ não é irredutível para todos os valores algébricos de a.

Entretanto, é verdade que a equação é irredutível para alguns valores de "a", por exemplo, o valor correspondente à trissecção do ângulo construtível de 120°. Dessa maneira, a trissecção não pode ser em geral, construída por régua e compasso. Como Wantzel colocou:

> "Il nous semble qu'il n'avait pás encore été démontré rigoureusement que ces problèmes, si célèbres chez les anciens, ne fussent pas susceptibles d'une solution par les constructions géométriques auxquelles ils s'attachaient particulièrement." (WANTZEL, 1837, p.369)

Na última parte do artigo, Wantzel tentou investigar como se pode decidir se uma raiz de uma equação irredutível de grau 2^n pode ser construída pela régua e o compasso. Ele descreveu alguns procedimentos para decidir a questão, mas admitiu na conclusão do parágrafo que "Ces procédes sont d'une application pénible en général" (WANTZEL, 1837, p.372).

3.3 A repercussão dos resultados de Wantzel

A primeira referência feita a Wantzel como autor da prova da impossibilidade de trissectar o ângulo e duplicar o cubo datada de 1848 e foi escrita, como citado anteriormente, por Saint-Venant (obituário). Após esse texto o artigo *Rapport sur les progès de la Géométrie*, escrito em 1870 por M. Chasles, parece ser o primeiro documento que atribui a Wantzel a prova da insolubilidade da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo. Chasles (1870) escreveu o seguinte:

> Wantzel, eleve des plus distingués de l'École Polytechnique, enleve, em 1848, à l'âge de trente-quatre ans, aux sciences mathématiques, qu'il cultivait avec seccès, s'est surtout occupé d'Algèbre et de la théorie des nombres. Nous pouvons cependant citer de lui plusieurs recherches importantes concernant la Géométrie. Em premier lieu, um travil qu'il publia étant encore eleve ingénieur des ponts et chaussées, est intitule: Recherches sur les moyens de reconnaitre si um problème de Géometrie peut se résoudre avec la règle et le compas. Après avoir traité la question d'une manière générale et complete, Le jeune auteur applique as méthode aux problèmes celèbres de la duplication du cube, des deux moyennes proportionnelles et de la trissection de l'angle. Il démontre, pour la première fois d'une manière entièrement rigoureuse, l'impossibilité de résoudre ces problèmes par la règle et le compass. (p.149)

Em 1871, Petersen (matemático dinamarquês), publicou em sua tese de doutorado que Wantzel era o responsável pelos resultados de impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo (LÜTZEN, 2009). Ainda no século XIX,

A. de Lapparent, ao escrever em 1895, para o livro do primeiro centenário da *École Polytechnique*, também atribui a Wantzel o desfecho para as discussões sobre a possibilidade de trissectar o ângulo e duplicar o cubo com a régua e o compasso.

> Later there appeared, in 1837, research on problems of Geometry. He proved, for the first time the impossibility (already affirmed, but not demonstrated, by Gauss) of obtaining, with rule and compass, the duplication of a cube or the trisection of an angle. (LAPPARENT, 1895, p.133).

Essas parecem ser as únicas referências a prova dada por Wantzel para os problemas da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo. No entanto, os textos de Saint-Venant (1848), M. Chasles (1870) e A. de Lapparent (1895) se caracterizam apenas como biografias desse matemático. Elas não apresentam nenhuma análise matemática ou histórica, do trabalho de Wantzel.

Já o texto de Petersen (1871) cita Wantzel em suas conclusões. De acordo com Lützen (2009),

> In the 19th-century literature dealing with the classical problems, I have only found one reference to Wantzel's impossibility proof. This was published in the concluding paragraph of Petersen's doctoral thesis of 1871 [Petersen, 1871, 44], in which he presented his own proof for the first time. (p.376)

Além da análise de Petersen ter sido curta, o próprio Lützen supõe que a referência a Wantzel não foi difundida porque a tese de Petersen foi escrita em dinamarquês.

Algumas histórias da matemática do século XIX, tais como as de Cajori (1893) e Ball (1893), apesar de discutirem historicamente os três famosos problemas da antiguidade, não mencionam a prova da insolubilidade dada por Wantzel para dois dos problemas. Cajori sequer afirma que os problemas são impossíveis e Ball se refere apenas à prova da quadratura do círculo dada por Lindemann em 1882.

Já no início do século XX Smith (1923) e Sanford (1930), também não fazem qualquer referência ao trabalho de Wantzel. Assim como Cajori, Smith discute historicamente os três famosos problemas da antiguidade sem mencionar que esses problemas são impossíveis de serem solucionados com a régua e o compasso. Já Sanford (1930), refere-se apenas à prova da transcendência de π e da resultante impossibilidade da quadratura do círculo. Sandford não só deixa de lado a história da impossibilidade da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo, como atribui, mesmo que indiretamente, esse resultado a Gauss (1801).

Também no século XX, se encontra um último e extremo exemplo deste tipo de tratamento. Coolidge (1940) atribuiu à prova da impossibilidade dos três famosos problemas da antiguidade à Lindemann, ignorando completamente a prova de Wantzel.

Entretanto, na época em que os trabalhos de Smith (1923), Sandford (1930), Coolidge (1940) e Cajori (1918)[18], em um novo texto, atribuiu a Wantzel a prova da impossibilidade de trissectar o ângulo e duplicar o cubo com a régua e o compasso. Em sua biografia sobre Wantzel, Cajori (1918), não só afirma que Wantzel foi o responsável por essa prova (como fizeram Saint-Venant, Chasles e Lapparrent), como faz uma análise histórica e matemática desse e de outro trabalho do matemático em questão.

> Quite forgotten are the proofs given by Wantzel of three other theorems of note, viz., the impossibility of trisecting angles, of duplicating cubes, and of avoiding the "irreducible case" in the algebraic solution of irreducible cubics. For these theorems Wantzel appears to have been the first to advance rigorous proofs. (CAJORI, 1918, p.345)

Após a biografia de Cajori, quase cem anos depois da prova da insolubilidade ter sido publicada, é que Wantzel começou a encontrar algum espaço em tratados gerais de História da Matemática. A partir desse momento, foi se tornando cada vez mais comum atribuir a esse matemático a demonstração de que a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo eram impossíveis com a régua e o compasso.

Bell (1940), para citar apenas um exemplo - atribuiu às provas da impossibilidade dos problemas clássicos à Wantzel (trissecção do ângulo e duplicação do cubo) e Lindemann (quadratura do círculo).

Obviamente, a pesquisa na literatura não está completa. Mas, a partir desse levantamento inicial é possível perceber que, com exceção de três biografias do século XIX e uma do século XX, a prova de Wantzel foi praticamente esquecida pelos tratados de Matemática e História da Matemática por quase cem anos. Dessa

[18] O mesmo que 25 anos depois se referiu à Wantzel em sua História da Matemática.

maneira uma questão surge naturalmente: Por que a prova de Wantzel foi esquecida por tanto tempo?

3.4 Por que a prova de Wantzel foi negligenciada?

Antes de tudo é preciso deixar claro que a negligência de um resultado matemático em si não representa um problema histórico que precisa de uma explicação. Afinal, a maioria dos resultados publicados em revistas e livros de Matemática é mais ou menos esquecida e nunca aparecem em tratados de História da Matemática.

No entanto, no caso da prova de Wantzel, há boas razões para que seu trabalho tivesse sido notado por seus contemporâneos e sucessores. A longevidade dos problemas e a influencia dessas construções na evolução da Matemática, especialmente a Matemática grega, são duas delas. Yates (1871) complementa esse argumento:

> Estes três problemas, solidamente inexpugnáveis malgrado todas as tentativas usando geometria plana, o método matemático dos antigos gregos, fizeram com que os matemáticos ficassem fascinados e construíssem novas técnicas e teoremas para sua solução. Por meio deste estímulo surgiu grande parte das estruturas atuais da álgebra e geometria. A procura constante de soluções para os três problemas durante tanto tempo forneceu descobertas espantosamente frutíferas, às vezes achadas por sorte pura e que lançaram luz sobre tópicos bem distantes. (YATES, 1971, p.5)

Para Lützen (2009), os clássicos problemas de construção eram certamente bem conhecidos pela comunidade matemática do início do século XIX. Fato é que Descartes, Lagrange e Gauss, sem dúvida influentes matemáticos dos séculos XVII, XVIII e XIX respectivamente, dedicaram parte das suas investigações para as clássicas construções com a régua e o compasso. Dessa maneira, não é possível supor que a prova de Wantzel não tenha sido prestigiada devido à falta de conhecimento dos problemas solucionados.

Entretanto, os problemas solucionados por Wantzel, apesar de serem conhecidos, não estavam no centro das pesquisas da matemática na época. As investigações estavam centradas em questões relacionadas à Análise, a Teoria dos Números, a Teoria das Equações Algébricas, entre outras. Esse fato, apesar de não justificar a negligência, pode ter contribuído para que ela acontecesse.

Como já foi exposta, a produção bibliográfica de Wantzel é composta por vinte e um trabalhos. Apenas uma publicação tem mais de dez páginas[19] e muitas delas não passam de uma página. Exceto por um artigo publicado em 1845[20] no *Nouvelles de Annales de Mathématiques*, em que Wantzel expôs, segundo ele - uma prova mais rigorosa e menos complicada do Teorema de Abel para a impossibilidade de resolver equações algébricas do quinto grau por meio de radicais, os trabalhos desse matemático não causaram nenhum impacto.

De acordo com Lützen (2009), esse fato associado ao que Saint-Venant (1848) chamou de maus hábitos de trabalho e incapacidade para continuar com uma longa demonstração, que divide sua grande facilidade com a Matemática podendo ter contribuído para a negligência da prova de Wantzel. Mas não justifica o total esquecimento do seu trabalho pela comunidade da época.

Como a maioria dos trabalhos de Wantzel não causou nenhum impacto na comunidade matemática, mesmo os artigos mais completos como *Classification des Nombres d'Origine Algébrique* (Classificação dos Números de Origem Algébrica) e *Démonstration Purement Algébrique de l'Impossibilité d'Exprimer les Racines d'une Équation Algébrique par des Fonctions Transcendentes* (Demonstração Puramente Algébrica da Impossibilidade de Expor as Raízes de uma Equação Algébrica por Meio de Funções Transcendentes), é possível supor que isso aconteceu devido ao fato de Wantzel ter publicado sua prova em uma revista sem nenhum prestígio.

No entanto, esse não foi o caso do seu trabalho sobre a insolubilidade da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo. A prova de Wantzel foi publicada em Paris no segundo volume do *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, que junto com *Crelle's Journal* foi o jornal de Matemática líder da época (na verdade, a única outra revista matemática especializada era a *The Cambridge Mathematical Journal*, fundado no ano da publicação do trabalho de Wantzel, 1837).

Nesse período Paris ainda era considerada a capital da matemática no mundo e o *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* continha documentos da

---

[19] Um trabalho de física experimental sobre o fluxo de ar publicado em 1848, que foi escrito em parceira com Barré de Saint-Venant.

[20] Démonstration de l'impossibilité de résoudre toutes les équations algébriques avec des radicaux.

maioria dos principais matemáticos franceses e de muitos estrangeiros também. Assim, o trabalho de Wantzel foi à verdade, publicado em um lugar com um impacto muito grande para a época.

Ainda de acordo com Lützen (2009), a História da Matemática é cheia de contribuições que foram mais tarde reconhecidas por sua importância, mas foram ignoradas na época de sua publicação. Em muitos casos esses resultados foram esquecidos porque eles eram controversos na época da publicação. Essas razões são muitas vezes mencionadas, quando se fala da negligência inicial dada ao trabalho de Nikolai Ivanovich Lobachevsky e János Bolyai sobre Geometria não-Euclidiana (Geometria Hiperbólica) ou à prova de Bernhard Bolzano do Teorema do Valor Intermediário.

No entanto, no caso da prova de Wantzel, essas razões não podem explicar o descaso. O resultado de Wantzel estava longe de ser controverso. Na verdade, pelo menos desde trabalho de Pappus, a grande maioria dos matemáticos acreditava que a trissecção de um ângulo arbitrário e a duplicação de um cubo não podia ser construída por régua e compasso.

Dessa maneira é possível supor que a prova de Wantzel não foi prestigiada por seus contemporâneos pelo fato de que no início do século XIX, a construção dos dois problemas clássicos já era considerada impossível.

Descartes, havia sinalizado que essas construções eram impossíveis com a utilização exclusiva de régua e compasso, e Gauss, mesmo que indiretamente, mostrou, através dos seus estudos sobre a construção dos polígonos regulares, que a trissecção do ângulo com a régua e o compasso era impossível.

Entretanto, apesar desses e outros trabalhos terem afirmado, de forma direta ou indireta, que os problemas da trissecção e da duplicação eram insolúveis, eles não apresentaram uma demonstração para tal fato. Wantzel foi de fato, o primeiro a fazer isso de maneira mais explicita e mais rigorosa. Sendo assim, esta suposição também não justifica a quase total negligência ao trabalho de Wantzel.

De acordo com Suzuki (2008) e Lützen (2009), a prova de Wantzel possui algumas falhas e vários lapsos de clareza. Os dois historiadores são unânimes em afirmar, que a maioria dessas deficiências poderiam ter sido percebida na época da publicação do artigo. Logo, também é possível supor que a insolubilidade demonstrada por Wantzel foi negligenciada devido a essas questões.

No entanto, não existem evidências documentais suficientes para afirmar que os problemas da prova de Wantzel foram descobertos. Na verdade, o que se sabe ao certo é que o trabalho de Wantzel foi negligenciado ao invés de ser criticado. Caso tivesse sido criticado, certamente teriam sido publicados outros trabalhos que mostrassem essas falhas e apontassem correções. Então, apesar da certeza de que havia problemas no trabalho de Wantzel, eles não são os responsáveis pelo esquecimento de sua contribuição.

Lützen (2009), também aponta - que a possível causa para o esquecimento da prova de Wantzel, especialmente por seus contemporâneos, é o fato de que resultado de impossibilidade no início do século XIX, não eram bem vistos pela comunidade matemática da época. De acordo com o próprio Lützen (2009), o paradigma matemático da época era baseado em provas de possibilidades, ou seja, mostrar o que é possível construir com os elementos matemáticos desenvolvidos até então.

O argumento de Lützen (2009) parece ser o que mais se aproxima de uma possível explicação para a negligência aos resultados obtidos por Wantzel. No entanto, essa justificativa não se sustenta pelo fato de que outros resultados de impossibilidade, também publicados no início do século XIX, foram bem recebidos e estudados pelos matemáticos da época. Basta lembrar a prova de Abel que afirma que é impossível encontrar métodos gerais (fórmulas) para solucionar equações de grau cinco e superiores.

Todos os argumentos acima, não parecem ser suficientes para justificar a quase total negligência aos resultados obtidos por Wantzel na sua prova da impossibilidade de solucionar dois dos três famosos problemas da antiguidade. Contudo, todo o retrospecto feito aponta caminhos para investigações mais pontuais sobre a negligência aos resultados de Wantzel.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As áreas da Matemática, dentre elas Geometria e Álgebra, estão fundamentadas em um processo de construção, modificação e relação de conceitos, do que na simples acumulação de definições, teoremas e símbolos.

Nesta dissertação, compilamos um material que exemplifica parte desse processo. Procuramos pela história da impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo, apresentar e analisar como esses problemas se constituiu, quanto às modificações que sofreram ao longo da história (modificação do ponto de vista das tentativas de resolução, ou seja, novas interpretações) e como, através deles, as relações entre Geometria e Álgebra foram se estabelecendo.

Em outras palavras, reconstruímos com a nossa visão, uma pequena parte do processo histórico em que podemos observar como a Geometria e a Álgebra podem se relacionar, uma vez que, foram expostos dois problemas de origem geométrica que só puderam ser solucionados a partir da interpretação algébrica dos mesmos.

As descobertas de outros métodos para solucionar a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo, e a procura infrutífera por uma solução utilizando somente a régua e o compasso motivaram o início de um tratamento completamente diferente para os problemas geométricos. Esse novo tratamento foi inaugurado por Descartes e depois amplamente utilizado e estudado por matemáticos posteriores a ele. Tal tratamento consiste exatamente em uma forma de interpretar, os problemas geométricos através da linguagem algébrica.

Porém, entre outros motivos, o tratamento dado por Descartes que possibilitou a Wantzel encontrar os resultados de impossibilidade para a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo.

Mais do que o resultado em si, a prova de Wantzel se apresenta como um texto matemático em que há uma possível visualização de maneira clara como as áreas de conhecimento da Matemática, que se relacionam entre si.

Além do que já foi exposto, o fato de o artigo de Wantzel ter sido, por muito tempo negligenciado, se apresentou como algo que merecia um tratamento especial em nosso texto. Os resultados de Wantzel estariam equivocados, já seriam conhecidos, eram muito controversos, e não foram publicados em um local de prestígio, etc? Como dois problemas que influenciaram quase todo o percurso da matemática grega e das civilizações posteriores, a serem solucionados, não receberam nenhuma atenção, ou quase nenhuma atenção?

De fato não temos uma resposta definitiva, portanto, as suposições levantadas no presente texto foram todas rebatidas como insuficientes para justificar tal esquecimento.

Wantzel não foi um grande matemático, isso é fato. No entanto, os resultados por ele considerado, são de grande valia não só para a Matemática, a fim de que, para aqueles que buscam na própria Matemática um sentido e uma relação para o desenvolvimento de determinados conceitos, teoremas e conteúdos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALL, W. W. R. **A Short Account of the History of Mathematics.** London: Macmillan, 1893.

BELL, E.T. **The Development of Mathematics.** New York: McGraw-Hill, 1940.

BICUDO, I. **Introdução dos Elementos de Euclides.** São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2000.

BUNT, L. N. H.; JONES, P. S.; BEDIENT, J, D. **The historical roots of elementary mathematics.** New York: Dover Publications, 1976.

BURNET, J. **O despertar da filosofia grega.** / Tradução de Mauro Gama. São Paulo: Siciliano, 1994.

CAJORI, F. **A History of Mathematics.** Macmillan, London: Macmillan, 1893.

CAJORI, F. **Pierre Laurent Wantzel.** *Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 24, p. 339–347.* Washington: 1918.

CHASLES, M. **Rapport sur les progrès de la géométrie.** Paris: A L'imprimeire Nationale, 1870.

COOLIDGE, J. L. **A History of Geometrical Methods.** Oxford: Clarendon Press, 1940.

COURANT, R; ROBBINS, H. **O que é matemática.**/ Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

DESCARTES, R. **La Géométrie:** Discours de la méthode./ Translation David Smith and Marcia Latham. New York: Dover Publications, 1954.

EUCLIDES. **Os Elementos.** / Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FOWLER, D. H. **The mathematics of Plato's academy:** a new reconstruction. New York: Oxford University Press, 1987.

GOW, J. **A short history of greek mathematics.** New York: Chelsea Publishing Company, 1968.

HARTSHORNE, R. **On the impossibility of classical construction problems.** *Talk given at a meeting in Luminy,* Marseille: 2007.

HEATH, S. T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements.** Volume I: Books I and II. New York: Dover Publications: 1956.

HEATH, S. T. L. **A history of Greek mathematics.** Volume I: From Thales to Euclid. New York: Dover Publications, 1981.

HERÓDOTO. **História.**/ Tradução de J. Brito Broca. Rio de Janeiro: Editora Tecnoprint, 1970.

HODSON, E. W. **Squaring the circle and other monographs.** New York: Chelsea Publishing Company, 1969.

KNORR, W. R. **The ancient tradition of geometric problems.** New York: Dover Publications, 1993.

LAPARRENT, A. **Wantzel.** *École Polytechnique: Livre du Centenaire*, 1794-1894, vol. 1, p.133-135. Paris 1895.

LÜTZEN, J. **Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result.** *História Mathematica, vol. 36, p. 374-394.* Amsterdam: 2009.

MARCONDES, D.. **Iniciação à História da Filosofia***.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

MARTINS, C. R. P. **Resolução de equações algébricas por radicais.** UNESP, Rio Claro, São Paulo, junho/2006. Dissertação de Mestrado.

NOBRE, S. R; BARONI, R. L. S. **A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática.** *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*, cap. 7, p. 129-136. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

SAINT-VENANT, B. **Wantzel.** *Nouvelles Annales de Mathématiques, vol. 7, p. 321–331.* Paris: 1848.

SANFORD, V. **A Short History of Mathematics.** Boston: Houghton Mifflin, 1930.

SMITH, D. E. **History of Mathematics.** Boston: Ginn and Company, 1923.

SUZUKI, J. **A Brief History of Impossibility.** *Mathematics Magazine, vol. 81, p. 27-38.* New York: 2008.

van der WAERDEN, B. L. **Science Awakening I. /** Translated by Arnold Dresden. Gronigen: Wolters Noordhoff, 1975.

WANTZEL, P. L. **Recherches sur le moyens de reconnaıtre si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas.** *Journal de Mathématiques pures et appliquées, vol. 2, p. 366–372.* Paris: 1837.

YATES, R. C.**The trisection problem.** *The National Council of Teachers of Mathematics. Classics in mathematics education, vol 4.* Virginia: 1971.