



Centro de Educação  
Campus Universitário  
Cidade Universitária  
Recife-PE/BR CEP: 50.670-901  
Fone/Fax: (81)2126-8952  
Email:edumatec@ufpe.br

**JULIANA PEREIRA GONÇALVES DE ANDRADE**

**VETORES: INTERAÇÕES A DISTÂNCIA PARA A APRENDIZAGEM DE  
ÁLGEBRA LINEAR**

**Recife  
2010**

**Juliana Pereira Gonçalves de Andrade**

**VETORES: INTERAÇÕES A DISTÂNCIA PARA A APRENDIZAGEM DE  
ÁLGEBRA LINEAR**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre.

Orientadora: **Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira**

Co-orientador: **Prof. Dr. Franck Bellemain**

**Recife**

**2010**

**Andrade, Juliana Pereira Gonçalves de**  
**Vetores : interações à distância para aprendizagem**  
**de Álgebra Linear. / Juliana Pereira Gonçalves de**  
**Andrade. – Recife : O Autor, 2010.**  
**125 f. : il. ; 31 cm.**

**Orientador: Prof.ª Dr.ª Verônica Gitirana G. Ferreira**  
**Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de**  
**Pernambuco, CE, Pós-Graduação em Educação**  
**Matemática e Tecnológica, 2010.**

**1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Álgebra Linear**  
**– Vetores. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. II.**  
**Universidade Federal de Pernambuco III. Título.**

**37**  
**372.7**

**CDU (2.ed.)**  
**CDD (22.ed.)**

**UFPE**  
**CE2010-70**



ALUNA

JULIANA PEREIRA GONÇALVES DE ANDRADE

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO

“Vetores: Interações à distância para a aprendizagem de álgebra linear.”

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientador  
Profª. Drª. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Co-orientador  
Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellemain

Examinador Externo  
Profª. Drª. Monica Karrer

Examinador Interno  
Profª Drª Paula Moreira Baltar Bellemain

Recife, 29 de julho de 2010.

Aos meus pais, Luciene e Jansen,  
e ao Prof. Dr. Almir Alves,  
por seus exemplos de vida e  
importantes valores éticos ensinados.

## AGRADECIMENTOS

---

À Professora Dra. Verônica Gitirana, orientadora do estudo, e ao Professor Dr. Franck Bellemain, co-orientador, pela orientação realizada com absoluta competência, dedicação e humanidade, proporcionando-me momentos de reflexões e de construção de conhecimento fundamentais a minha formação. Dedico a ambos, profunda gratidão pela confiança depositada em nosso trabalho.

A toda equipe docente e funcionários do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE e, de maneira especial, aos admiráveis professores Dr. Sérgio Abranches, Dra. Auxiliadora Padilha e Patrícia Smith, pertencentes à Linha de Pesquisa de Tecnologias Educacionais do Edumatec, pelas importantes e respeitadas contribuições oferecidas durante a construção gradativa do estudo em apressado.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirantes (UNIBAN), em especial à Professora Dra. Lulu Healy, e ao Professor Dr. Luís Gonzaga, pela atenção dedicada aos esclarecimentos e contribuições solicitadas.

Às Professoras Dra. Mônica Karrer e Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain por aceitarem participar como membros da banca examinadora da defesa e pelas importantes contribuições prestadas ao trabalho.

Agradeço à equipe de funcionários, tutores, alunos do Polo UAB Surubim-PE e, em especial, a Coordenadora Hercília Campos, pela compreensão e pela importante colaboração para a realização de importantes etapas do estudo, cedendo os espaços necessários e flexibilizando horários de forma a viabilizá-lo.

E, por fim, mas de maneira não menos importante, agradeço aos meus irmãos, Daniel e Luana Andrade e a Rodrigo Araripe, pela infinita compreensão, lealdade, amizade e dedicação, me incentivando em importantes momentos da vida e do mestrado, com muito amor, respeito e dedicação. A eles, re/atribuo meu crescimento pessoal e profissional.

“Não há maior inimigo da produção de pensamento do que o medo”  
Cristóvan Buarque

## RESUMO

---

O objetivo do estudo em apressio é o de analisar os requisitos necessários ao desenvolvimento de softwares educativos que amparem a aprendizagem à distância de objetos de dependência linear, pertencentes à Álgebra Linear. Amparados pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e pela Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador (CSCL) e alicerçado pela Engenharia de Softwares Educativos, elaboramos um estudo seccionado em quatro etapas, responsáveis pelo levantamento das dificuldades de aprendizagem dos objetos no referido contexto, pela especificação dos requisitos, pelo desenvolvimento do protótipo e, por fim, pela sua validação. A partir da investigação das dificuldades de aprendizagem dos referidos objetos por alunos advindos do ensino não presencial, foram identificadas a necessidade de implementação de requisitos associados à geometria dinâmica, à conversão entre registros de naturezas distintas, e a conversão simultânea entre tais registros, em respeito aos aspectos relacionados à especificidade do objeto. No que remete ao contexto, identificamos a necessidade de comunicação simultânea e uso de registros de representação semióticos para essa comunicação, associados à construção colaborativa do objeto. Tais requisitos nortearam o desenvolvimento do protótipo *Vetores*, que viabilizou a validação do estudo metodologicamente estruturada a partir do *Design Experiments*. Tais atividades foram realizadas em duas sessões, desenvolvidas em perspectivas de cooperação e colaboração e que permitiram o desenvolvimento da noção informal dos objetos de dependência linear, apesar das dificuldades de interação entre os pares evidenciadas, sobretudo, a partir dos entraves à argumentação necessárias à negociação. Dessa maneira, foi-nos possível compreender que apesar de os requisitos apreendidos serem importantes, não são suficientes, sendo fundamental a consideração às dificuldades de conversão entre os registros semióticos oferecidos e à língua materna.

**Palavras-chave:** Dependência linear. Aprendizagem de objetos matemáticos à distância. Registros de representação semióticos. CSCL. Engenharia de softwares educativos.

## ABSTRACT

---

This study aims to analyze the conditions required for the development of software to support distance learning of linear dependence, an object belonging to Linear Algebra. On the base of the Theory of Semiotics Register Representation (TRRS) and Computer Supported Collaborative Learning (CSCL) and by the Software Engineering Education a study was built in four stages, . It was responsible for raising difficulties of learning objects in that context, requirements specification, the development of a prototype software and, finally, for validation. From the investigation of learning difficulties of the objects by distant education students, we identified some requirements associated to dynamic geometry, to the conversion between registers of different natures, and to simultaneous conversion between these registers, in respect to aspects of object specificity. As regards to the context, we identified the need for simultaneous communication and use of semiotic representation registers for communication associated with collaborative construction of the object. These requirements guided the development of the prototype denominated by *vectors*, which enabled the validation of the study methodologically structured from Design Experiments. These activities were conducted in two sessions, developed in cooperation and collaboration that enabled development of informal notion of the objects of linear dependence, despite difficulties of interaction between pairs of students evidenced mainly from barriers to argumentation needed to negotiate. Thus, we were able to understand that although the identified requirements were important, they were not sufficient. It was fundamental to consider the difficulties of conversion between the registers and mather language.

**Keywords:** Linear dependence. e-Learning of mathematical objects. Semiotic representation registers. CSCL. Engineering educational software.

## LISTA DE QUADROS

---

|                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Quadro 1. Tipos e funções de representações (DUVAL, 2003). .....                                                      | 25 |
| Quadro 2. Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (DUVAL, 2003, p. 14). ..... | 28 |

## LISTA DE GRÁFICOS

---

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| Gráfico 1. Recursos utilizados à distância.....                             | 54 |
| Gráfico 2. Dificuldades de resolução do teste. ....                         | 54 |
| Gráfico 3.Considerações dos sujeitos sobre a importância dos recursos ..... | 57 |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1a.Representação geométrica de vetores LD no $R^2$ .....                                 | 21 |
| Figura 1b. Representação geométrica de vetores LI no $R^3$ .....                                | 21 |
| Figura 2. Ferramentas de inserção e adição de vetores .....                                     | 40 |
| Figura 3. Interface do Geogebra e multiplicação por escalar. ....                               | 41 |
| Figura 4.Interface do Tabulae. ....                                                             | 42 |
| Figura 5.Multiplicação de vetores por escalar. ....                                             | 43 |
| Figura 6. Fluxo do Processo de Criação de um Software educativo (GOMES e WANDERLEY, 2003) ..... | 47 |
| Figura 7. Estrutura metodológica. ....                                                          | 49 |
| Figura 8. Resposta dos sujeitos A e E para a atividade 1. ....                                  | 58 |
| Figura 9. Reposta do Sujeito H para a atividade 1. ....                                         | 59 |
| Figura 10. Resposta do Sujeito F para a atividade 1.....                                        | 59 |
| Figura 11.Resposta do sujeito B para a atividade 1. ....                                        | 59 |
| Figura 12. Resposta dos sujeito A para a atividade 2. ....                                      | 61 |
| Figura 13. Resposta dos sujeitos B, C e D para a atividade 2. ....                              | 61 |
| Figura 14.Resposta do sujeito E para a atividade 2. ....                                        | 62 |
| Figura 15.Resposta do sujeito F para a atividade 2. ....                                        | 62 |
| Figura 16.Resposta do sujeito G para a atividade 2.....                                         | 62 |
| Figura 17. Resposta do sujeito H para a atividade 2.....                                        | 62 |
| Figura 18. Resposta do sujeito I para a atividade 2. ....                                       | 63 |
| Figura 19. Resposta de SA .....                                                                 | 65 |
| Figura 20.Resposta de SC .....                                                                  | 65 |
| Figura 21.Resposta de SE .....                                                                  | 65 |
| Figura 22.Resposta de SF .....                                                                  | 65 |
| Figura 23. Funcionalidades a serem implementadas no protótipo. ....                             | 70 |
| Figura 24. Interface do <i>Vetores</i> . ....                                                   | 79 |
| Figura 25. Sistema de gerenciamento de grupos.....                                              | 81 |
| Figura 26. Modelo de apresentação dos resultados.....                                           | 90 |
| Figura 27. Inserção de vetores por S1. ....                                                     | 92 |
| Figura 28. Dificuldades de uso do chat por S1.....                                              | 92 |
| Figura 29. Modificação dos vetores da base por S3. ....                                         | 94 |
| Figura 30.Uso da ferramenta multiplicação por escalar pelo sujeito S3.....                      | 95 |

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| Figura 31. Construção colaborativa dos sujeitos S1 e S3. ....   | 97 |
| Figura 32. Início do processo de negociação entre S1 e S3. .... | 97 |
| Figura 33. Argumentação com registro algébrico. ....            | 98 |
| Figura 34. Negociação entre S1 e S3. ....                       | 98 |
| Figura 35. Construção privada de S1. ....                       | 98 |
| Figura 36. Dificuldades de argumentação de S1. ....             | 99 |

## SUMÁRIO

|                                                                                                                                    |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                                                                                            | <b>15</b> |
| <b>1 A ÁLGEBRA LINEAR E OS OBJETOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR: TECENDO CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO APRENDIZAGEM ..</b> | <b>19</b> |
| 1.1 A ÁLGEBRA LINEAR DA ORIGEM AO CONTEXTO DO SABER UNIVERSITÁRIO .....                                                            | 19        |
| 1.2 O CONCEITO DE DEPENDÊNCIA E DE INDEPENDÊNCIA LINEAR .....                                                                      | 20        |
| 1.3 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR: SOBREVÃO SOBRE ESTUDOS REALIZADOS .....                          | 21        |
| <b>2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UMA INTRODUÇÃO AO APORTE TEÓRICO DO ESTUDO .....</b>                       | <b>24</b> |
| 2.1 REPRESENTAÇÕES E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA.....                                                                               | 24        |
| 2.2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA .....                                                                        | 26        |
| 2.3 A APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE (IN)DEPENDÊNCIA LINEAR E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICOS.....                         | 30        |
| <b>3 GEOMETRIA DINÂMICA E APRENDIZAGEM COLABORATIVA SUPORTADA POR COMPUTADOR: CONTRIBUIÇÕES DA TECNOLOGIA .....</b>                | <b>32</b> |
| 3.1 CONTRIBUIÇÕES DA GEOMETRIA DINÂMICA PARA A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR .....                                                | 32        |
| 3.2 APRENDIZAGEM COLABORATIVA SUPORTADA POR COMPUTADOR.....                                                                        | 34        |
| <b>3.2.1 A aprendizagem colaborativa de matemática suportada por computador</b>                                                    | <b>37</b> |
| 3.3 DISCUSSÃO SOBRE ALGUMAS SOLUÇÕES EDUCATIVAS: ENTRE O CABRI, O GEOGEBRA E O TABULAE COLABORATIVO .....                          | 39        |
| <b>3.3.1 O Cabri Geomètre II.....</b>                                                                                              | <b>39</b> |
| <b>3.3.2 O Geogebra.....</b>                                                                                                       | <b>40</b> |
| <b>3.3.3 O TabulæColaborativo .....</b>                                                                                            | <b>42</b> |
| <b>4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....</b>                                                                                          | <b>45</b> |

|                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS DO ESTUDO .....                                             | 45 |
| 4.1.1 Introdução a Engenharia de Softwares Educativos .....                                | 45 |
| 4.1.2 Breve ensaio sobre o Design Experiments.....                                         | 47 |
| 4.1.3 Contribuições dos pressupostos e descrição da estrutura metodológica do estudo. .... | 48 |
| <br>5 ETAPA I: LEVANTAMENTO DAS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM .....                         | 50 |
| 5.1 SUJEITOS.....                                                                          | 50 |
| 5.2 DESCRIÇÃO DOS INSTRUMENTOS DE COLETA .....                                             | 51 |
| 5.2.1 Os questionários .....                                                               | 51 |
| 5.2.2 Os testes .....                                                                      | 51 |
| 5.3 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS E ANÁLISE .....                                            | 53 |
| 5.3.1 Apresentação dos resultados e análise dos questionários .....                        | 54 |
| 5.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA FASE I.....                                                  | 67 |
| 5.4.1 Problemas com a diversificação de registros .....                                    | 67 |
| 5.4.2 Problemas com a comunicação a partir das representações .....                        | 69 |
| <br>6 ETAPA II: ESPECIFICAÇÃO DOS REQUISITOS DO PROTÓTIPO .....                            | 70 |
| 6.1 FUNCIONALIDADES A SEREM ESTABELECIDAS.....                                             | 70 |
| 6.2 ESPECIFICAÇÃO DE REQUISITOS PARA A ELABORAÇÃO DO SOFTWARE .....                        | 71 |
| 6.2.1 Requisitos funcionais .....                                                          | 72 |
| 6.2.2 Requisitos não funcionais.....                                                       | 74 |
| <br>7 ETAPA III: DESENVOLVIMENTO DO PROTÓTIPO.....                                         | 76 |
| 7.1 DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO DESENVOLVIDO .....                                              | 76 |
| 7.2 INTERAÇÃO E INTERFACE.....                                                             | 77 |
| 7.2.1 Ferramentas e funções .....                                                          | 79 |
| 7.2.2 Telas de produção individual e coletiva.....                                         | 80 |
| 7.2.3 Chat matemático .....                                                                | 81 |
| 7.2.4 Box permanente para enunciados e resumo de atividades .....                          | 81 |
| <br>8 ETAPA IV: VALIDAÇÃO DO PROTÓTIPO VETORES.....                                        | 82 |
| 8.1 OS SUJEITOS.....                                                                       | 82 |

|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.2 DESCRIÇÃO DO CENÁRIO PRELIMINAR DE REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO .....                     | 83         |
| 8.3 O PILOTO .....                                                                         | 84         |
| 8.4 DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO.....                                                          | 86         |
| <b>8.4.1 A sessão de adaptação.....</b>                                                    | <b>87</b>  |
| <b>8.4.2 A sessão de cooperação .....</b>                                                  | <b>87</b>  |
| <b>8.4.3 A sessão de colaboração .....</b>                                                 | <b>88</b>  |
| 8.6 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS.....                                                       | 89         |
| <b>8.6.1 Resultados longitudinais das sessões.....</b>                                     | <b>90</b>  |
| <b>8.6.2 Resultados longitudinais da sessão de colaboração .....</b>                       | <b>96</b>  |
| 8.7 RESULTADOS EXPANSIVOS .....                                                            | 99         |
| <b>8.7.1 Aspectos relacionados aos objetos .....</b>                                       | <b>99</b>  |
| <b>8.7.2 Aspectos relacionados ao contexto .....</b>                                       | <b>101</b> |
| 8.8 ANÁLISE RETROSPECTIVA.....                                                             | 103        |
| <b>8.8.1 Geometria dinâmica .....</b>                                                      | <b>103</b> |
| <b>8.8.2 Manipulação do registro numérico e conversão simultânea entre registros .....</b> | <b>105</b> |
| <b>8.8.3 Construção colaborativa do objeto .....</b>                                       | <b>107</b> |
| <b>8.8.5 Comunicação síncrona.....</b>                                                     | <b>108</b> |
| <br>CONSIDERAÇÕES.....                                                                     | <br>111    |
| <br>REFERÊNCIAS.....                                                                       | <br>115    |
| <br>ANEXOS .....                                                                           | <br>119    |

## INTRODUÇÃO

---

Os espaços vetoriais, objetos de estudo da Álgebra Linear, constituem-se em importante discurso matemático para cursos de Engenharia, Matemática, Física, Computação e suas licenciaturas por ter aplicações nas mais diversas áreas e apresentar importante papel no desenvolvimento tecnológico.

Todavia, as deficiências de aprendizagem inerentes da natureza desse conhecimento associadas às estratégias de ensino utilizadas, levam a uma operacionalização de seus símbolos, apesar da não compreensão da definição de seus objetos mais elementares, como combinação linear, base e dependência linear.

Objetos como os de dependência e independência linear, situados entre os mais nucleares devido a sua relação com a definição de espaço vetorial, são, na maioria das vezes, definidos a partir de suas representações algébricas e por posterior tratamento de representações no interior desses registros, reduzindo a compreensão desse a um procedimento.

As preocupações em respeito às dificuldades de aprendizagem desses e de outros objetos de Álgebra Linear tem sido discutidas em estudos realizados em países como França, Canadá e Brasil e evidenciam diferentes causas como formalismo, nível de abstração, variedade de linguagens e encapsulamento entre registro de representação e objeto, demandando, assim, estratégias de ensino que visem às suas superações.

Assim, é possível afirmar que as dificuldades de aprendizagem de Matemática estão amplamente condicionadas à natureza do seu conhecimento e, desta maneira, abordagens cognitivas adequadas devem sinalizar as deficiências inerentes às representações de seus objetos bem como a compreensão sobre elas.

Nesse sentido, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003; 2004) constitui-se em importante embasamento para estudos direcionados de maneira bastante específica para a aprendizagem de matemática. Diferente das demais teorias, ela enfatiza a necessidade do reconhecimento das diversas formas de registros de representação de um mesmo objeto e da necessidade de conversão entre esses registros.

Contudo, Grande (2006), em um estudo que analisa os mais frequentes tipos de registros de representação semiótica relacionados aos objetos de dependência e

independência linear e apresentados nos livros didáticos utilizados em cursos de Álgebra Linear de Instituições Federais de Ensino Superior brasileiras, afirma que a maioria dos livros prioriza o tratamento de um mesmo registro e subutilizam atividades de conversão entre eles.

Considerando que nesses cursos, as aulas, as atividades e as avaliações são fortemente baseadas, estruturadas e apoiadas nos livros didáticos, o autor adiciona que é possível perceber esta como uma causa para a confusão entre os seus objetos e os procedimentos operacionais relacionados a eles.

Diante de tal situação, para que haja uma melhor compreensão dos objetos de dependência e independência linear, o autor sugere a abordagem inicial a partir das representações geométricas de um vetor e a utilização de atividades que mobilizem os registros gráficos cartesianos, com o intuito de promover maior compreensão acerca de tais objetos. Sugere-se, então, o uso de ambientes computacionais de geometria dinâmica como ferramenta de apoio a tal tipo de abordagem.

De acordo com Bellemain (2003), o computador tem uma contribuição significativa, pois ele permite criar novos sistemas de objetos e relações, através de softwares de geometria dinâmica, fornecendo um sistema axiomático que oferece novas formas de resolver problemas. Tais softwares são capazes de oferecer registros de representação semiótica diferentes dos encontrados em livros didáticos, permitindo a visualização de diferentes perspectivas do mesmo objeto a partir de sua manipulação. Pretendemos discutir mais profundamente sobre esse aspecto ao longo do trabalho.

Contudo, a maioria dos estudos realizados acerca das dificuldades de aprendizagem dos referidos objetos da Álgebra Linear e do uso de softwares dessa natureza advêm dos contextos do ensino presencial. Em virtude da alta demanda de cursos em modalidade EAD, suscita-se a necessidade de elaboração de estratégias de ensino que favoreçam a aprendizagem dos objetos matemáticos à distância.

Em cursos realizados à distância nos contextos da atualidade, a utilização de ambientes virtuais de ensino aprendizagem (AVEA) é condição fundamental. Elaborados a partir dos princípios da aprendizagem colaborativa, de comunicação e negociação, tais ambientes tem as suas propostas ancoradas em perspectivas CSCL (*Collaborative System Computer Learning*) e, dessa maneira, consideram a importância da interação dada através da comunicação como importante elemento aos processos de construção de conhecimento.

Entretanto, a maioria dos ambientes virtuais não oportuniza o uso de símbolos matemáticos, figuras geométricas e representantes algébricos em seus discursos, dificultando a comunicação a partir de suas representações e limitando as comunicações em respeito à aprendizagem de Matemática em contextos de modalidade não presencial. Seria possível, então, elaborar um ambiente colaborativo que contribuísse para a comunicação nos processos de aprendizagem de Matemática à distância?

Seguindo a essa proposta, foi desenvolvido o Tabulae Colaborativo (TC), (GUIMARÃES et al, 2008), um ambiente colaborativo de geometria dinâmica que permite a comunicação e a construção coletiva de objetos geométricos e vetoriais. Contudo, seria um ambiente computacional colaborativo de geometria dinâmica capaz de suportar a aprendizagem à distância dos objetos de dependência e independência linear como os demais de Álgebra Linear?

De acordo com Hillel et al (1999), o uso de ambientes de geometria dinâmica não contribui favoravelmente para a aprendizagem formal de objetos de Álgebra Linear, como os de transformação linear. Em seus estudos, os autores evidenciaram que a possibilidade de manipulação do objeto proporciona sentido de concreto aos objetos abstratos, fazendo com que os alunos não atinjam níveis satisfatórios de abstração e formalismo, úteis aos conhecimentos de Álgebra Linear.

Todavia, corroboramos com Grande (2006) quando este afirma sobre as contribuições de abordagens geométricas para a aprendizagem dos objetos de dependência e independência linear e, cientes da incapacidade dos AVEAs de acolher as representações matemáticas, modelamos o problema de nosso estudo: Quais os requisitos necessários a elaboração de softwares que visem à aprendizagem dos objetos supracitados em contextos de EAD?

Diante do exposto, supõe-se que a especificação de requisitos para o desenvolvimento de tais softwares deve atender a requisitos que considerem as especificidades do domínio, o que acreditamos estar relacionado à oferta de geometria dinâmica e conversão simultânea com outro registro e os aspectos relacionados aos contextos aos quais servem de meio para a construção desses conhecimentos, gerando a possibilidade de comunicação com esses registros.

Nesse sentido, acreditamos que ao considerar a elaboração de ferramentas computacionais de aprendizagem à distância dos objetos da Álgebra Linear, como a dependência e independência linear, devem ser considerados aspectos relacionados

à necessidade de manipulação e conversão entre registros de representação semiótica distintos, bem como, a possibilidade de comunicação e construção colaborativa a partir desses registros.

Assim, com o sentido de validar essa hipótese, pretendemos desenvolver um estudo que tem por objetivo analisar os requisitos necessários a elaboração de softwares para suporte da aprendizagem à distância dos objetos de dependência e independência linear no  $R^2$ .

Para tanto, foram eleitos requisitos a elaboração de um software respaldado a partir das condições levantadas e a sua implementação fez-se necessária como instrumento de viabilização da validação do estudo.

Inicialmente serão abordados referenciais literários acerca das dificuldades de aprendizagem de objetos de Álgebra Linear, em especial os de dependência e independência linear, e das potencialidades (e limites) dos softwares de geometria dinâmica e de ambientes computacionais desenvolvidos em perspectiva de CSCL para o amparo da aprendizagem de objetos matemáticos evidenciados nesses referenciais. Nesse espaço, especificamente no capítulo II, discutiremos o aporte teórico que nos serve de luz para a discussão dos aspectos supracitados.

Em seguida, serão descritas a arquitetura metodológica estruturada para amparar o estudo acompanhado dos pressupostos que o acompanharam, como a Engenharia de Softwares Educativos (LACERDA SANTOS, 1998; GOMES E WANDERLEY, 2003) e o Design Experiments (COBB et al, 2003). Como o estudo foi seccionado em etapas, de forma a melhor sistematizá-las e viabilizar a compreensão, os resultados e análises foram distribuídos ao longo da apresentação de cada uma delas.

## 1 A ÁLGEBRA LINEAR E OS OBJETOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR: TECENDO CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO APRENDIZAGEM

---

### 1.1 A ÁLGEBRA LINEAR DA ORIGEM AO CONTEXTO DO SABER UNIVERSITÁRIO

A origem histórica da Álgebra Linear data do século XVIII a partir da necessidade de Leibnitz de criar uma álgebra não geométrica e capaz de expressar, além de números indeterminados e magnitudes, posição, ângulo e direção de movimentos a partir de representações não geométricas. Entretanto, o sistema criado por ele era completamente dependente da Geometria. A importância de seus estudos estava, então, em perceber a necessidade de uma álgebra cuja principal característica fosse a de representar simbolicamente entidades geométricas.

Buscando legitimar os números complexos, Gauss e outros matemáticos desenvolveram um sistema de representação geométrica que os levou a perceber que as operações usuais quando aplicadas a determinados conjuntos numéricos, como os números complexos, perdiam algumas propriedades. Tal percepção, aliada aos estudos dessas operações aos vetores, levou a métodos de análise vetorial no plano e a generalização a partir tentativa de sua extensão ao espaço.

A Álgebra Linear é, portanto, a divisão da Matemática responsável por estudar os espaços vetoriais e as transformações lineares existentes entre eles. A teoria axiomática dos espaços vetoriais, segundo Dorier (1998), teve sua origem a partir do final do século XIX com a resolução dos sistemas lineares. Além de vetores e transformações lineares, a Álgebra Linear também lida com matrizes e formas quadráticas, objetos amplamente aplicados em inúmeras situações matemáticas ou fora delas.

Algumas dessas situações estão relacionadas aos jogos de estratégias, à computação gráfica, às redes elétricas e à genética dentre outras, demonstrando o largo campo de aplicação dos conceitos e objetos da Álgebra Linear e justificando, em parte, a importância da sua aprendizagem.

A Álgebra Linear está desta maneira, intimamente relacionada a outras áreas do saber, como a Álgebra Abstrata, as Equações Diferenciais e a Geometria Analítica, sendo ministrada como disciplina em cursos de ensino superior

relacionados às Ciências Exatas, como Matemática, Física, Computação, Economia, Engenharias e suas licenciaturas.

De acordo com Grande (2006), a possibilidade de unificar o pensamento matemático é outra característica marcante deste conhecimento, tornando-o indispensável para o desenvolvimento da abstração e generalização de conceitos e objetos matemáticos. Assim, como disciplina em cursos de nível superior de ensino, a Álgebra Linear constitui-se em porta de entrada ao desenvolvimento do pensamento matemático elaborado e formal.

## 1.2 O CONCEITO DE DEPENDÊNCIA E DE INDEPENDÊNCIA LINEAR

Grande (2006) afirma que os conceitos de dependência e independência linear são de relevante importância para a aprendizagem de Álgebra Linear por serem utilizados em outros objetos matemáticos como equações de um sistema linear, em vetores da geometria e até mesmo em matrizes e funções polinomiais. O autor afirma, ainda, que outro aspecto importante dos referidos conceitos seja o fato da utilização destes para a determinação de uma base de um espaço vetorial.

O conceito de dependência e independência linear aplicado aos espaços vetoriais é descrito pela relação entre esses vetores. Uma definição usualmente trazida pelos livros didáticos está disposta em Boldrini et al.(1980, p.114), que afirma que:

Sejam  $V$  espaço vetorial e  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ . Dizemos que o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é linearmente independente (LI), ou que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LI se a equação  $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$  implica que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . No caso em que exista algum  $a_i \neq 0$ , dizemos que  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é linearmente dependente (LD) ou que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LD.

Sabendo que a equação dada equivale a equação de combinação linear entre vetores, essa definição termina por associar, intrinsecamente, a definição de (in)dependência linear a de combinação linear. Como consequência, apresenta-se o teorema que se segue que pode ser encontrado em Anton e Rorres (2001)

Um conjunto  $S$  de dois ou mais vetores é:

(a) linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores de  $S$  pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de  $S$ .

(b) linearmente independente se, e somente se, nenhum vetor em  $S$  pode ser escrito como uma combinação linear de outros vetores de  $S$ . (p.170)

Outra forma de apresentação dessa definição, específica para os espaços vetoriais estabelecidos com dimensões no  $\mathbb{R}^2$  e no  $\mathbb{R}^3$ , é a partir da representação geométrica e é abordada por Anton & Rorres (2001, p.171) quanto por Boldrini (1980, p. 115). De acordo com os autores, no  $\mathbb{R}^2$ , um conjunto com dois vetores  $v_1$  e  $v_2$  é LI se, e somente se, os vetores não estão em uma mesma reta que passa pela origem, ou seja, não existe  $k$  real tal que  $v_1 = k v_2$ , conforme disposto na figura 1a a seguir.

Já no espaço tridimensional, o  $\mathbb{R}^3$ , a relação pode ser considerada de forma que um conjunto com três vetores (na figura 1b os vetores  $u$ ,  $v$  e  $w$ ) é considerado LI se, e somente se, os vetores não estiverem no mesmo plano que passa pela origem.

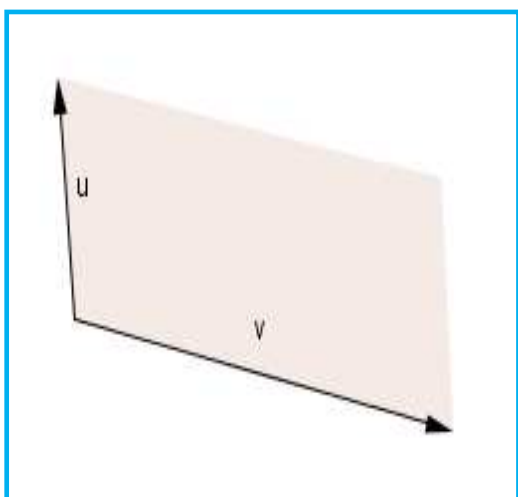


Figura 1a. Representação geométrica de vetores LD no  $\mathbb{R}^2$

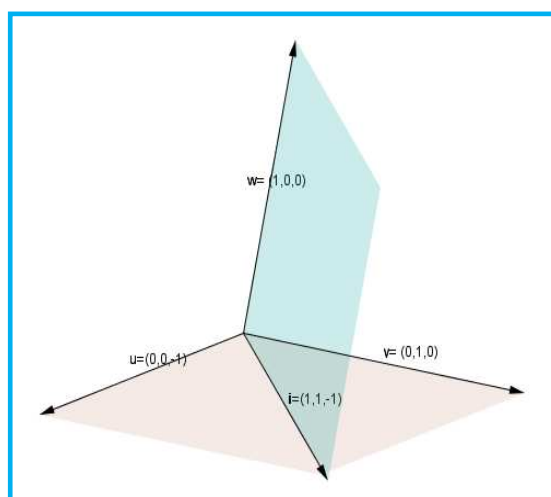


Figura 1b. Representação geométrica de vetores LI no  $\mathbb{R}^3$

Nota-se que o objeto de dependência e independência linear como relação é mais evidente a partir do teorema 1 e da interpretação geométrica do que pela definição 1. Para os conjuntos vetoriais pertencentes aos subespaços de  $\mathbb{R}^2$ , a noção de independência linear pode ser associada à relação posicional entre os vetores e de proporcionalidade entre suas coordenadas. Em nossa pesquisa, abordamos essas relações obtidas a partir da interpretação geométrica de vetores no  $\mathbb{R}^2$  como ponto de partida para a elaboração do protótipo em questão.

### 1.3 DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR: SOBREVÃO SOBRE ESTUDOS REALIZADOS

É inegável o consenso existente na literatura em relação ao fato de que os alunos deixam os cursos de Álgebra Linear com serias dificuldades de compreensão de conceitos elementares como combinação linear, (in) dependência linear e base.

Tal fato é reconhecido em estudos desenvolvidos em países como França, Canadá e Brasil. Acarreta, portanto, preocupação e mobilização de grupos de pesquisa em Educação Matemática, buscando assim compreender as causas dessas dificuldades bem como elaborar estratégias de ensino capazes de construir significados durante os processos de aprendizagem.

Conforme a abordagem cognitiva ou epistemológica tomada, diferentes são os contextos sobre os quais repousam as dificuldades de aprendizagem dos conceitos da Álgebra Linear. Apresentaremos, aqui, algumas delas com o intuito de oferecer uma visão geral de estudos já realizados.

Atribui-se, em parte, a origem das dificuldades de aprendizagem de seus conteúdos a sua natureza. Tal atribuição deve-se ao fato de que os alunos conseguem manipular os algoritmos característicos do conhecimento da Álgebra Linear, mesmo sem entendê-los (DUBINSKY apud BORGOMOLNY, 2006).

Outra importante consideração é a que envolve aspectos relacionados ao formalismo com o qual os seus conhecimentos são apresentados, distanciando o aluno de seus objetos. A axiomatização- característica importante por introduzir uma abordagem abstrata dos espaços vetoriais e permitir a generalização e unificação dos conceitos, tornando a Álgebra Linear um conhecimento formal- é aspecto apontado como obstáculo para a sua aprendizagem, bem como, a origem da apatia dos alunos pela disciplina e é evidenciada como elemento relevante em grande parte dos estudos analisados (TALL,1996; DORIER et al,1999; DORIER e SIERPINSKA,2001)

Contudo considera-se que o formalismo não deve ser esquecido. De acordo com Dorier e Sierpinska (2001), “os estudantes devem ser introduzidos em certo tipo de reflexão para os usos dos elementos e competências de conhecimentos prévios na relação com o novo conceito formal” (p.258). Deve-se, portanto, desenvolver estratégias que possibilitem a compreensão dos conceitos da Álgebra Linear e abordagem formal gradativa.

É importante salientar que os estudos analisados identificam dois tipos de dificuldades de aprendizagem, que apesar de distintos, são por vezes inseparáveis no real processo de ensino aprendizagem. São elas as dificuldades conceituais, relativas à natureza formal do conhecimento da Álgebra Linear em si e que abordamos anteriormente, e as cognitivas, referentes ao tipo de pensamento

requerido para sua compreensão (DORIER e SIERPINSKA, 2001). Trataremos a partir de então as dificuldades de origem cognitivas evidenciadas.

Uma das dificuldades identificadas em alguns estudos remete ao fato de que a variedade de linguagens e símbolos presentes em seu contexto requer diferentes modos de pensamento para a sua compreensão. De acordo com esses estudos, diferentes modos de pensamento apresentam diferentes características por tomar pontos de vista distintos. Denota-se, então, a complexidade da aprendizagem dos seus conhecimentos, do ponto de vista cognitivo (HILLEL et al.,1999; FISHER, 2005; TALL;1996).

Identificam-se, nesse sentido, três diferentes linguagens (a aritmética, a algébrica e a geométrica) que são relacionadas aos seus respectivos modos de pensamento (analítico aritmético, analítico estrutural e sintético geométrico) e dessa maneira oferecem ao aprendiz diferentes perspectivas sobre um mesmo conceito, ampliando ou restringindo a profundidade da compreensão do aluno de acordo com as situações vivenciadas (ver mais sobre isso em HILLEL et al, 1999).

Também pode se considerar essa variedade de linguagens e especificidade de pensamento a partir da diversidade de representações utilizadas para o seu conhecimento. Nessa outra perspectiva cognitivista, encontramos trabalhos ancorados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e que sugerem que a dificuldade de aprendizagem dos conceitos de Álgebra Linear está relacionada a essa diversidade de registros de representação semiótica encontrados e a ausência ou subutilização de atividades de conversão entre registros, conforme pode ser constatado em Grande (2006) e Dias & Artigue (1998). Compartilhamos desse aporte teórico em nosso trabalho e discutiremos sobre o mesmo no capítulo seguinte.

## 2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UMA INTRODUÇÃO AO APORTE TEÓRICO DO ESTUDO

---

### 2.1 REPRESENTAÇÕES E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Não existe conhecimento matemático capaz de ser mobilizado sem o auxílio de uma representação. De acordo com Duval (2004), “a noção de representação é tão importante quanto à noção de comportamento para estudar os fenômenos de aquisição de conhecimento e funcionamentos que permitem o tratamento ou sua aprendizagem” (p. 32). Assim, estudar os fenômenos relativos ao conhecimento requer a constante recorrência às noções de representação.

Com o desenvolvimento dos estudos relacionados aos fenômenos da aprendizagem, apresentam-se três noções de representação, que por considerarem diferentes determinações do mesmo fenômeno, são ferramentas complementares no entendimento dos processos de comunicação e compreensão.

A primeira delas é a noção de representação mental. Oriunda da teoria piagetiana, considera que “a interiorização das ações supõe também a sua reconstrução em um novo plano” (PIAGET, 1969 apud DUVAL, 2004, p. 26), realizando a função de objetivação. As representações mentais são, contudo, mais que imagens mentais, pois permitem incorporar não só imagens, mas conceitos, noções, idéias, incluindo todas as projeções mais difusas e globais que refletem os conhecimentos do indivíduo. É considerada uma representação interna ao indivíduo e de natureza consciente.

Outra importante noção de representação é a de representação computacional, que traduz informações externas a um sistema, em uma forma que seja possível recuperá-las e combiná-las no interior do sistema, conforme afirma Damm (2003). Trata-se aqui da codificação das informações, num sentido em que a representação é um fenômeno de natureza proposicional e computacional (DUVAL, 2004). Não dependem da visualização do objeto e permite transformações algorítmicas de uma série em outra. São características desse tipo de representação ser de natureza interna ao indivíduo e não consciente.

Por fim, têm-se as representações semióticas. São sistemas de

representação externa e de natureza consciente dos sujeitos. Representações relativas a um sistema particular de signos, símbolos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos e desenhos e que podem ser convertidos em outros sistemas semióticos equivalentes, vislumbrando significações distintas de um mesmo objeto. Devido ao seu caráter intencional e de execução de funções de objetivação, realizam importante papel na significação. Assim, são mais que representações simbólicas, posto que realizem importante função cognitiva além das funções de comunicação.

O quadro 1, abaixo, apresenta um resumo dos tipos e funções das representações apresentadas anteriormente.

|                | Interna                                                                                          | Externa                                                                                                                      |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Consciente     | Mental<br><i>Função de objetivação</i>                                                           | Semiótica<br><i>Função de objetivação</i><br><i>Função de expressão</i><br><i>Função de tratamento</i><br><i>intencional</i> |
| Não consciente | Computacional<br><i>Função de tratamento</i><br><i>automático ou quase</i><br><i>instantâneo</i> |                                                                                                                              |

Quadro 1. Tipos e funções de representações (DUVAL, 2003).

Para que um sistema de representação seja considerado como semiótico é necessário que se permita a cumprir três atividades cognitivas inerentes a toda a representação, conforme é explícito em Damm (2003):

- a) A formação de uma representação identificável. Tais sistemas devem permitir o reconhecimento de suas representações de acordo com as regras próprias do sistema. “Em geral, são regras de conformidade que já estão estabelecidas na sociedade, não cabendo aos sujeitos criá-las, mas sim usá-las para reconhecer as representações” (p.179).
- b) O tratamento das representações. Os sistemas de representação devem permitir a transformação interna de seus registros, mantendo-os em uma mesma representação. Chama-se essa transformação da representação no próprio registro em que ela foi formada de tratamento. “Existem regras próprias a cada registro, sua natureza e número variam consideravelmente de um registro a outro” (p. 179).

- c) A conversão entre as representações. Um sistema de representações semióticas deve permitir a transformação dos registros produzidos em um sistema de representação em outro de sistema distinto, conservando a totalidade ou uma parte do objeto em questão e permitindo, dessa maneira a explicitação de outras significações do mesmo objeto.

Nem todos os sistemas semióticos possibilitam a realização dessas três atividades cognitivas fundamentais. Porém as linguagens natural, simbólica e algébrica, os gráficos e figuras geométricas, características da linguagem matemática permitem. Utiliza-se então, o termo registros de representação semiótica para determinar tais sistemas.

O acesso ao objeto matemático e a sua manipulação dependem unicamente da existência de registros de representação semiótica. A existência de diferentes registros de representação para o mesmo objeto e a necessidade de realização das três atividades cognitivas fundamentais supracitadas são importantes características do seu conhecimento e é nesse sentido que se estabelece a natureza do conhecimento matemático e a sua especificidade.

De acordo com Damm (2003), em matemática, toda comunicação se estabelece com base em representações. Os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações. Portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração diferentes formas de um mesmo objeto matemático (p. 167). A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003; 2004), apresentada a seguir e utilizada como embasamento teórico desse trabalho, traça uma importante relação entre a existência dos registros de representação semióticas e a aprendizagem dos objetos matemáticos.

## 2.2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) constitui-se em importante embasamento para estudos direcionados para aprendizagem matemática posto que diferente das demais teorias, ela enfatiza a necessidade do reconhecimento das diversas formas de registros de representação de um mesmo objeto matemático e da necessidade de conversão entre esses registros para o desenvolvimento do que na teoria se define como compreensão integrativa.

De acordo com Duval (2003), a originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino. Para tal, é preciso que se atenha à identificação de que sistemas cognitivos são necessários mobilizar para ter acesso aos objetos matemáticos e da especificidade desses sistemas.

Duval (2003) afirma, ainda, que a diferença existente entre as atividades cognitivas requeridas pela Matemática e as requeridas por outros domínios do conhecimento devem ser focalizadas a partir da importância das representações semióticas (*semiosis*) para a sua apreensão (*noesis*), uma vez que esta é a única via de acesso aos seus objetos. “Não se pode supor que o conteúdo representado é separável da forma que o representa, como se a *noesis* fosse independente da *semiosis*” (DUVAL, 2004, p.29).

A atividade matemática é ancorada, portanto, a partir da mobilização entre os registros de representação semiótica. Essa mobilização é dada a partir de duas formas de transformação, já descritas na subseção anterior: os tratamentos e as conversões. Enquanto que o tratamento é a operacionalização entre representações no interior de um mesmo registro, as conversões constituem-se em transformações de representações entre registros diferentes.

São importantes e distintos tipos de registros de representação semiótica:

- a) os registros multifuncionais, que não são algoritmizáveis;
- b) os registros monofuncionais; que são principalmente algoritmos.

Ambos os registros são passíveis de representações discursivas e não discursivas, diferenciando assim, quatro tipos diferentes de tipos de registros de representação semiótica, que se encontram relacionados e exemplificados na quadro 2, a seguir:

|                                                             | Representação discursiva                                                                                                            | Representação não discursiva                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Registros Multifuncionais (tratamentos não algoritmizáveis) | Língua natural<br>Associações verbais (conceituais)<br>Formas de raciocinar:<br>✓ Argumentação a partir de observações, de crenças; | Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensões 0, 1, 2 e 3).<br>✓ Apreensão operatória e não somente perceptiva;<br>✓ Construção com |

|                                                        |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                        | ✓ Dedução válida a partir de dedução e teoremas.                                                                                                                                             | instrumentos.                                                                                                                                      |
| Registros Monofuncionais (tratamentos algoritmizáveis) | Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Numéricas (binária, decimal, fracionária,...)</li> <li>✓ Algébricas</li> <li>✓ Simbólicas (línguas formais</li> </ul> Cálculo | Gráficos cartesianos <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Mudança de sistema de coordenadas;</li> <li>✓ Interpolação, extrapolação.</li> </ul> |

Quadro 2. Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (DUVAL, 2003, p. 14)

É perceptível que os diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático, apresentados na quadro 2, trazem consigo distintas significações presentes no objeto matemático e explicitadas parcialmente em cada um dos registros. O reconhecimento da equivalência entre os diversos registros de representação de um mesmo objeto matemático durante os processos de conversão é o que caracteriza a compreensão integrativa.

O que ocorre é que “toda representação é cognitivamente parcial em relação com o que ela representa e as representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual” (DUVAL, 2004, p.62). E assim, compreende-se que há a profunda necessidade de cuidado para que não ocorra enclausuramento entre o objeto e a representação, confundindo-os.

E com isso, “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registros de representação” (DUVAL, 2003, p.14). São as atividades de conversão que, do ponto de vista cognitivo, conduzem aos mecanismos subjacentes a aprendizagem.

Duval (2004) declara que o sujeito que tenha desenvolvido suficientemente a coordenação de registros e realiza um processo mental de compreensão integrativa dispõe de representações que provém de outros registros e que é este tipo de coordenação que lhes permite estabelecer procedimentos heurísticos, finalizar com sucesso os tratamentos realizados e controlar a sua pertinência em atividades matemáticas.

Contudo, o processo de conversão entre os diferentes tipos de registros de

representação semiótica pode não ser dado de forma espontânea, visto que unidades de significação diferentes podem ser levadas em consideração em relação aos registros de partida e de chegada. Com isso, diz Duval (2003), dois aspectos permeiam a natureza cognitiva das conversões: as variações de congruência e não congruência entre os registros de partida e de chegada presentes nas atividades de conversão e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

A relação de congruência entre os registros é determinada pela equivalência de unidades de significância pertencentes a tais registros. Existem três critérios que possibilitam a identificação de tal relação e que são descritas em Duval (2004, p.53):

- a) A possibilidade de correspondência semântica dos elementos significantes: a cada unidade simples de uma das representações se podem associar uma unidade significativa elementar.
- b) A unicidade semântica terminal: a cada unidade significativa elementar de uma representação de partida corresponde apenas a um registro de representação de chegada.
- c) A ordem de disposição das unidades que compõem cada uma das representações: as organizações respectivas das unidades significantes das representações comparadas conduzem a apreender as unidades de correspondência semântica segundo a mesma ordem das representações.

Duas representações não são congruentes se não se atende a pelo menos um dos critérios estabelecidos acima e o grau de correspondência entre os seus registros em relação a esses critérios é que determina o grau de não congruência entre esses dois registros. Há um forte aumento de custo de tratamento quando as operações não são congruentes e a dificuldade de conversão entre os registros de representação depende intimamente do grau de não congruência entre eles.

O outro aspecto determinante no fenômeno de conversão entre os registros de representação remete aos sentidos de conversão. “nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os sentidos de partida e de chegada” (DUVAL, 2003, p.20). Deve-se, portanto, evitar o privilégio de um sentido de conversão em detrimento de outro.

A complexidade do pensamento matemático é notadamente diagnosticada a partir da TRRS, que a partindo da descrição do funcionamento cognitivo, justifica as dificuldades de compreensão dos objetos matemáticos. O entendimento desse

funcionamento cognitivo implica em maior atenção no desenvolvimento de atividades que privilegiem a conversão entre diferentes registros de representação em ambos os sentidos e em respeito à relação de congruência entre eles.

### 2.3 A APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS DE (IN)DEPENDÊNCIA LINEAR E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICOS

Considerada como objeto elementar para o currículo da Álgebra Linear por participar ativamente na decomposição genética de seus conteúdos, estando intimamente relacionada eles, a relação de (in)dependência linear apresenta constantemente insuficiências de compreensão de sua teoria pelos estudantes.

Devido a sua importância para o estudo dos espaços vetoriais, a dependência e a independência linear dentre outros conceitos constituem a fundação da Teoria dos Espaços Vetoriais. Diversas são as pesquisas que procuram identificar as origens das dificuldades de compreensão de tal conceito, discutindo-os em diversos âmbitos.

Conforme foi salientado anteriormente, é possível encontrar estudos que identificam a compreensão dos conceitos de (in) dependência linear como uma redução procedimental, em que conectam a noção de dependência linear à resolução de sistemas lineares homogêneos. Poucos estudantes consideram as diferentes estruturas das relações de dependência linear e terminam por alcançar um conhecimento incompleto e atomizado sobre o tema, como confirmam Borgomolny (2006) e Andreolli e Cerutti (2002).

Também é possível perceber nas diagnoses evidenciadas a intensa confusão que os alunos fazem entre o objeto e o procedimento. Esta dificuldade pode ser atribuída à escassa flexibilidade cognitiva entre as idéias do campo conceitual e os diversos e distintos registros de representação semiótica presentes em sua linguagem, conforme salienta Andreolli (2005).

Assim, um importante aspecto a ser considerado como obstáculo para a aprendizagem desses conceitos é o reconhecimento de como a compreensão da diversidade de representações utilizadas para aceder aos seus objetos influencia nas suas aprendizagens. A restrição ao uso de determinados tipos de registros de representação semiótica e a concentração em atividades de tratamento dentre essas representações de um mesmo registro pode e deve ser considerada como relevante causa de incompreensões do seu conceito.

Tal fato é investigado em Grande (2006). Em análise aos livros didáticos utilizados em cursos de Álgebra Linear de Instituições de Ensino Superior brasileiras, o autor evidencia o uso contínuo de atividades que privilegiam o tratamento entre representações dentro de um mesmo registro e que ainda, segundo ele, concentram o uso de registros de representação matriciais, algébricas e n-uplas desconsiderando, ou pouco utilizando, outros tipos de registros.

Sabendo que a compreensão integrativa é dada a partir das atividades de conversão entre no mínimo dois tipos de registros de representação semióticos distintos ou ainda a mobilização simultânea entre eles (DUVAL, 2003), é possível considerar essa como uma importante origem das dificuldades de compreensão.

Grande (2006) considera ainda a necessidade de implementação de abordagens com introdução geométrica para a apresentação inicial do conceito de (in) dependência linear. Corroboramos com ele nesse aspecto quando intencionamos, em nosso trabalho, desenvolver um ambiente computacional de geometria dinâmica para suporte da aprendizagem de Álgebra Linear em contextos de Educação à Distância. Abordaremos o uso dessas tecnologias computacionais educacionais no capítulo seguinte.

### 3 GEOMETRIA DINÂMICA E APRENDIZAGEM COLABORATIVA SUPORTADA POR COMPUTADOR: CONTRIBUIÇÕES DA TECNOLOGIA

---

#### 3.1 CONTRIBUIÇÕES DA GEOMETRIA DINÂMICA PARA A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR

O uso de abordagens com registros geométricos para a aprendizagem de objetos matemáticos como os de Álgebra Linear são sugeridos por permitir a visualização de diferentes características dos objetos não perceptíveis em outros tipos de registros como os de natureza algébrica.

Em ambientes de geometria dinâmica, cuja manipulação direta permite maior interação com os objetos, essa visualização não é dada apenas como elemento de saída, como ocorre em softwares do tipo calculadoras gráficas, sendo o próprio registro geométrico um elemento de entrada, diminuindo a distância semântica existente entre a interface de entrada e a de saída, fazendo que ações e respostas se apoiem em um mesmo sistema de representação, conforme afirma Bellemain (2003).

Dessa maneira, o computador constitui-se em importante ferramenta visto que “na interação com o software, o aprendiz interage com as representações através de artefatos e deve compor com eles e com as retroações que o sistema produz para resolver os problemas e efetuar tarefas” (BALACHEFF e BELLEMAIN, 2007). Em softwares de geometria dinâmica essas representações assumem características diferentes daquelas expostas em papel e lápis, constituindo-se em novos sistemas de representação.

Um exemplo do uso da geometria dinâmica em situação de constituição de novo sistema de representação é o que está associado à identificação de vetores iguais em um sistema de coordenadas cartesianas quando a noção atribuída a esses vetores é a de deslocamento. Para perceber que o deslocamento entre dois pares de pontos equidistantes entre si em registro fixo é equivalente, o sujeito deverá utilizar as coordenadas dos pontos de extremidade e calcular a distância entre eles, garantindo que possuem o mesmo módulo. Já a noção de direção e sentido pode ainda ser concebida pelo próprio sistema cartesiano em associação entre pontos. É preciso notar que há um dispêndio operacional razoável e a conversão entre os registros não é atividade de fácil execução.

Em um ambiente de geometria dinâmica, o usuário poderia mobilizar o mesmo vetor e rapidamente perceber que este se “encaixaria” para o mesmo deslocamento solicitado anteriormente. Contudo, há que se atentar que essa é uma alternativa arriscada visto que, em atividades de natureza diferente, ao utilizar a mesma noção do objeto geométrico, o aprendiz pode também flexioná-lo em respeito ao sentido e direção distintos dos iniciais e acreditar que também se trata do mesmo vetor.

Bittar (2008) identificou problemas dessa natureza ao realizar uma sequência para a aprendizagem de vetores em um ambiente computacional de geometria dinâmica. De acordo com a autora, devido ao não reconhecimento dos vetores enquanto classe de equivalência, os sujeitos tenderam a confundir as coordenadas vetoriais com as dos pontos de extremidade.

Hillel et al (1999) anteriormente já haviam encontrado dificuldades com o uso de abordagens geométricas para o ensino aprendizagem de outros objetos da Álgebra Linear, as transformações lineares. Em seus estudos com o uso de um micromundo de geometria dinâmica, os autores perceberam que o sentimento de “*concreticidade*” atribuído aos objetos com a sua manipulação direta termina por não levar os sujeitos a atingirem níveis satisfatórios de formalização, abstração e generalização, característicos dos objetos de Álgebra Linear.

Todavia, apesar de esses estudos apresentarem aspectos limitadores ao respeito do uso de representações de geometria dinâmica para abordagens de conteúdos de Álgebra Linear, corroboramos com Bittar (2008) quando esta afirma que se o uso de apresentações geométricas não contribui para que os sujeitos compreendam as noções de vetores (e nesse caso, generalizamos para os demais objetos da Álgebra Linear) e restringir-se às idas e voltas automáticas entre os diversos registros de representação semióticas também é ineficiente. O que se precisa é de estímulos a compreensão significativa dos processos de conversão e tratamento entre as representações.

Outra importante constatação é a de que, mesmo se tratando de uma representação em ambiente computacional, com maiores potencialidades do que aquelas oriundas de ambientes estáticos, as representações da geometria dinâmica possuem também especificidades e limites como as demais. Uma sugestão nossa é a de superar esses limites associando as potencialidades desse tipo de registro ao outro distinto, completando os sentidos não passíveis de serem apreendidos

através, apenas, do registro geométrico. Sobre esse aspecto trataremos mais tarde na especificação de requisitos.

### 3.2 APRENDIZAGEM COLABORATIVA SUPORTADA POR COMPUTADOR (CSCL)

A partir do entendimento da Teoria Sócio Histórica de Vygotsky, o papel das interações sociais no desenvolvimento cognitivo humano desperta o interesse e o reconhecimento mediante as pesquisas de psicólogos e pedagogos. De acordo com Pessoa (2002),

Começaram a surgir mudanças sobre a maneira de ver as relações professor-aluno. O aluno deixa de ser considerado mero receptor, passivo, e passa a ter um papel mais ativo, sendo concebido como um agente que pode construir seu próprio conhecimento junto com outras pessoas (professor e outros alunos, por exemplo) e outros mediadores (livros, meios tecnológicos etc.) em seu contexto social (pp.4-5)

Assim, é possível compreender que a construção do conhecimento humano não é dada apenas em uma perspectiva construtivista, mas em uma perspectiva sócioconstrutivista. Para Vygotsky (1998) apud Santarosa et al. (1999), a aprendizagem acontece inicialmente de forma interspíquica (no coletivo) para depois haver a construção intrapsíquica. E é nesse intercâmbio entre as compreensões pessoais e as compreensões coletivas que o indivíduo refina o seu entendimento e influencia na reelaboração da compreensão do outro, como sujeitos ativos e passivos em um processo colaborativo.

Diante de tal perspectiva, compreende-se a impossibilidade de separação entre os fenômenos pessoais e sociais nos processos de aprendizagem, bem como, das contribuições das interações sociais para tais processos. Estudos sobre aprendizagem colaborativa explicam como a aprendizagem individual é complementada a partir do compartilhamento social em um grupo atendendo às expectativas pessoais e grupais mediadas por artefatos.

Com o contexto tecnológico e a adequação dos formatos da web às perspectivas colaborativas (web 2.0), a possibilidade de emissão e recepção de informações na web viabiliza a comunicação a partir desse meio além de oportunizar a construção de conhecimento em interações não presenciais.

A CSCL (*Computer-Supported Collaborative Learning*) é o termo que define a aprendizagem colaborativa quando o artefato de mediação das interações é o computador, oferecendo maneiras de estimular a exploração intelectual e a

interação social em contextos de EAD (STAHL, 2006).

De acordo com Stahl (2006), a aprendizagem colaborativa suportada por computador é dada em um modelo que incorpora diferentes fases que constituem os ciclos pessoais e sociais da construção do conhecimento e que estão representados no diagrama 1.

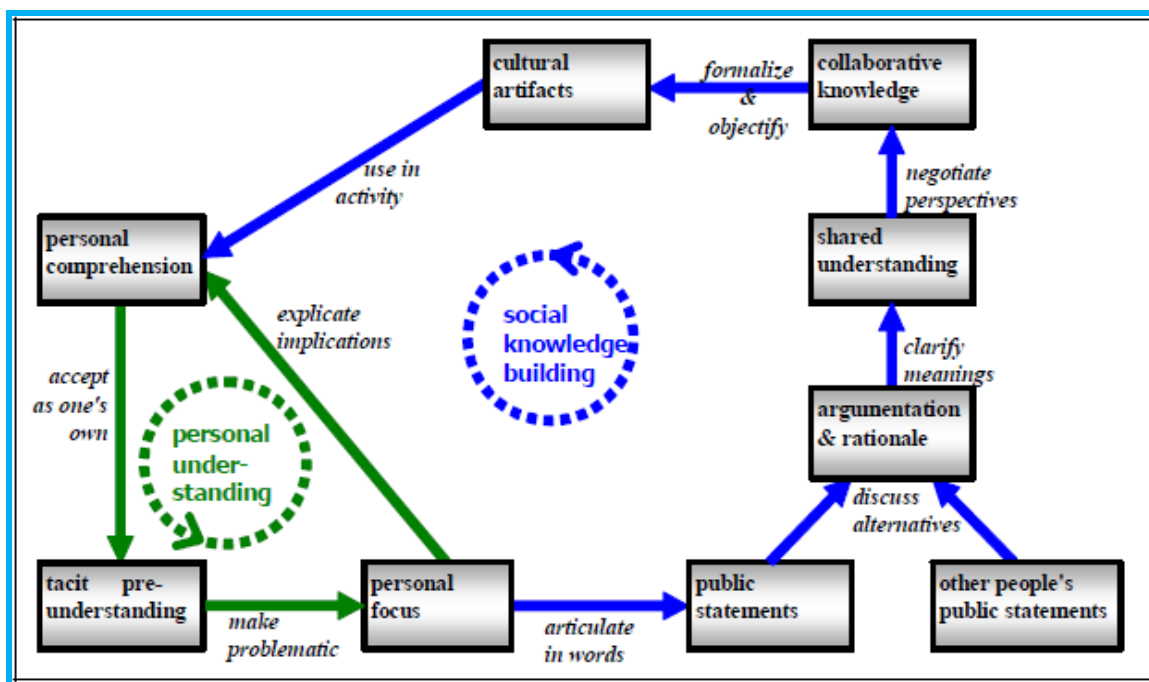


Diagrama 1. Processo de construção do conhecimento (LAVE & WENGER, 1991)

No diagrama que representa o processo de construção do conhecimento em uma perspectiva colaborativa, Lave & Wenger (1991) destacam como as crenças pessoais são articuladas com a compreensão de outras pessoas a partir da linguagem em um complexo ciclo de interação social com a nossa cultura compartilhada.

Esse complexo ciclo é, então, seccionado em dois menores e complementares, os ciclos de conhecimento pessoal, descrito em cor verde, e o ciclo de conhecimento grupal, descrito em cor azul.

Em relação ao ciclo de compreensão pessoal, Coelho (2007) afirma o seguinte:

A rede de significados na qual é feito todo o senso de mundo de um indivíduo é muitas vezes falha e, para tanto, torna-se constante e necessário o reparo do entendimento através de reinterpretações ou de construção de novas estruturas, resolvendo conflitos e sanando deficiências criando assim novas compreensões (p.14).

O reparo do entendimento ao qual o autor se refere nem sempre é possível de ser solucionado em um nível pessoal e, desta forma, está diretamente relacionado ao ciclo de conhecimento grupal, em que com o passar do tempo, a compreensão pessoal vai sendo refinada devido às discussões oportunizadas nas interações sociais, conflitando diferentes pontos de vista. De acordo com Stahl (2006) a transformação das crenças pessoais em conhecimento acontece mediante o conflito entre esses diferentes pontos de vista oportunizados pela interação social, comunicação, discussão, esclarecimento e negociação e, dessa maneira, o conhecimento é um produto mediado socialmente.

Nesse sentido, comunicação e negociação desempenham importantes papéis nos processos de interação para a construção do conhecimento humano. É a partir da comunicação que o indivíduo explicita as suas crenças e com o advento da internet, as formas de comunicação foram ampliadas em diferentes modelos.

Estes modelos de comunicação podem ser caracterizados em modelos assíncronos - com disparidade temporal entre emissor e receptor e de longo tempo de resposta- como emails e fóruns e em modelos síncronos - com tempo de resposta imediata e necessidade de correspondência temporal entre emissor e receptor - como os chats.

Entretanto não basta oportunizar a comunicação para que haja a influência das interações sociais na construção do conhecimento e efetiva aprendizagem colaborativa. É preciso que ocorram as negociações, “processos pelos quais determinados grupos de pessoas trabalhando em conjunto chegam a um consenso” (COELHO, 2007). Através da argumentação, discussão e análise do intercâmbio conversacional, os participantes do grupo negociam a compreensão social e modificam a dimensão pessoal de seus entendimentos. A negociação é o processo central da aprendizagem colaborativa.

Em Educação à Distância (EAD), esses processos de comunicação e negociação, imprescindíveis para a aprendizagem colaborativa, acontecem em um ambiente virtual. A necessidade de explorar o uso educacional de artefatos tecnológicos de maneira colaborativa para este fim originou os estudos em CSCL.

De acordo com Stahl (2006), o software deve ser desenvolvido para dar suporte e não para substituir os processos de colaboração existentes entre professores e alunos, bem como, o feedback que deve existir entre eles. Todavia, a maioria dos softwares educacionais é construída sem dar suporte à comunicação.

Assim, a elaboração de ferramentas CSCL deve levar em consideração o fato de não existir a comunicação face a face, sendo necessário um mecanismo que disponibilize um suporte para que os indivíduos envolvidos saibam o que os outros membros estão fazendo e quais aspectos estão sendo levados em consideração no momento da interação (COELHO, 2007).

Adicionalmente, para Stahl (2002), a elaboração de ambientes computacionais pautados em uma ótica CSCL deve atender a quatro importantes aspectos:

- a) Construção de conhecimento colaborativo. É necessário que o significado dado à aprendizagem seja de fato de construção coletiva, fugindo da ênfase individualista dada a algumas interpretações;
- b) Perspectivas pessoais e grupais. É necessário que as ações não fiquem presas a regras e pensamentos individualistas contribuindo para a formação do entendimento social a partir do individual;
- c) Mediação por artefatos. Faz-se necessário que se forneça um meio sobre o qual será possível o expressar das idéias;
- d) Análise das interações. É necessário que o sistema desenvolvido permita que se tenha a visibilidade dos processos de construção de conhecimento como um todo.

Esses quatro aspectos condizem com o olhar bidimensional da aprendizagem colaborativa tanto em respeito às compreensões pessoais e sociais quanto em respeito aos processos de comunicação e negociação necessários a ela. Para tanto, a construção de tais ferramentas constitui-se em complexa tarefa, sobretudo para a aprendizagem matemática em que é necessário atender também à especificidade de seus objetos.

### **3.2.1 A aprendizagem colaborativa de matemática suportada por computador**

A aprendizagem de Matemática é geralmente associada à resolução individual de atividades isoladas apesar do conhecimento dos benefícios associados à aprendizagem colaborativa. De acordo com Bairral e Powell (2008), é através da interação social que os alunos envolvidos com a Matemática procuram o significado, a busca por padrões, relações e dinâmicas ligando os objetos matemáticos aos eventos de suas experiências de mundo.

Entretanto, em contextos colaborativos de aprendizagem de Matemática à distância, os processos de interação social das construções encontra embargo nas limitações impostas à comunicação dos símbolos matemáticos, como expressões algébricas e construções geométricas dentre outros.

Segundo Guimarães et al. (2008), a maioria dos relatos sobre as dificuldades com a comunicação matemática diz respeito às limitações com as representações em diversos aplicativos CSCL, tanto no que diz respeito à representação quanto à comunicação em aplicações síncronas. Também podem ser consideradas como obstáculo ao uso do CSCL em Matemática as particularidades de procedimentos de raciocínio matemático e de difícil representação.

O fato é que, além de o discurso matemático ser fortemente representado por meio de registros de representação semiótica - símbolos que atendem às três características apresentadas no capítulo 2 - há ainda que se considerar a existência de diferentes representações para o mesmo objeto, “formas que aparentar assumir às funções de descobrir, investigar ou comunicar idéias” (BAIRRAL e POWELL, 2008).

Não obstante, Moraes et al. (2007) enunciam outras dificuldades inerentes ao uso de estratégias do tipo CSCL para a aprendizagem de Matemática:

- a) Verificação de aprendizado em atividades de grupo;
- b) Necessidade de incentivos de suporte às atividades colaborativas visto que, não é hábito dos alunos colaborarem naturalmente para a aprendizagem de Matemática;
- c) Ausência física dos participantes, considerando que representações gestuais e até mesmo a própria oralidade são por vezes importantes suportes didáticos para um melhor entendimento.

Contudo, é preciso salientar que a existência de obstáculos à comunicação de representações matemáticas em ambientes CSCL não deve impossibilitar o seu uso para a construção desse conhecimento. São a partir de tais limitações que devem ser suscitados estudos de desenvolvimento de ambientes computacionais de aprendizagem colaborativa que amparem a representação de conceitos matemáticos abstratos a partir de seus símbolos, possibilitando a comunicação e a negociação a partir deles.

### 3.3 DISCUSSÃO SOBRE ALGUMAS SOLUÇÕES EDUCATIVAS: ENTRE O CABRI, O GEOGEBRA E O TABULAE COLABORATIVO

Com o avançar do desenvolvimento de tecnologias educacionais, é possível encontrar diferentes ferramentas de amparo a aprendizagem de objetos matemáticos que se utilizam dos recursos da geometria dinâmica como ponto de partida. Contudo, devido aos diferentes pressupostos que foram considerados em seu desenvolvimento, como tipos de abordagem, interface e de registros a serem manipulados.

Para essa etapa da discussão, faremos uma breve descrição em alusão a alguns aspectos característicos dos softwares Geogebra, Cabri II e Tabulae Colaborativo, tendo em vista oferecer um panorama a cerca dos softwares já existentes no mercado.

#### 3.3.1 O Cabri Geomètre II

O Cabri Geomètre II (BELLEMAIN e LABORDE,1992) é um micromundo dinâmico que simula a utilização de régua e compasso para a realização de construções geométricas e que mantêm constantes suas propriedades quando manipuladas. De acordo com Laborde e Caponi (1994), “o deslocamento por manipulação direta é um dos componentes importantes do Cabri-Géomètre II oferecendo uma retroação às ações do aluno” (p.56).

Ainda segundo os autores, O uso do deslocamento implica por si só na utilização de conhecimentos; a vantagem é que essas retroações partem de um dispositivo externo ao sujeito e independente do professor: desta forma, elas são suscetíveis de fazer o sujeito evoluir.

Entre os pioneiros em ordem de oferecimento dessa manipulação e deslocamento dos objetos geométricos respeitando as suas propriedades, o Cabri Geomètre II foi constituído também com o intuito de oferecer condições de distinção entre o visual e o geométrico, possibilitando a realização de construções livres de propriedades ou a partir de primitivas geométricas, como paralelas e perpendiculares, por exemplo.

A partir de botões e menus, o Cabri Geomètre II permite a construção de elementos como pontos e retas, bem como polígonos regulares, como quadriláteros, triângulos e cônicas. Também são importantes características suas a disponibilização de coordenadas cartesianas e polares, a criação de macros para construções que se repetem com frequência, e a disponibilização de animações.

Em suas mais atuais versões (Cabri II Plus), apresentam interfaces mais amigáveis e que o tornam mais intuitivo e acessível, a partir da possibilidade de uso de etiquetas, de definição de objetos geométricos com mais de uma variável, retas inteligentes (que são a apresentação de apenas a parte útil da reta) e desenhar e manipular rápida e facilmente o gráfico de uma ou mais funções, explorando-a a partir de seus parâmetros.

Oferece ferramentas de manipulação geométrica a partir de entrada por manipulação direta ou por gráficos de função introduzidos por calculadora. Para o caso de operações vetoriais, são oferecidas ferramentas de inserção vetorial e de soma entre vetores, conforme pode ser visto na figura 2 dada abaixo.

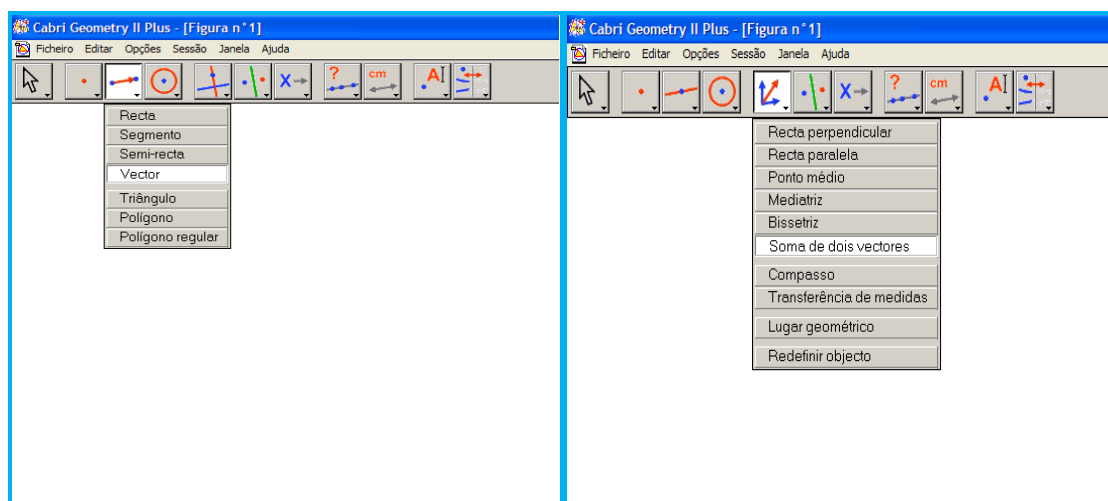


Figura 2. Ferramentas de inserção e adição de vetores

### 3.3.2 O Geogebra

O GeoGebra (disponível em <http://www.geogebra.org/cms/>) é um software de matemática dinâmica para utilizar em ambiente de sala de aula, que reúne geometria, álgebra e cálculo. De acordo com Homerwarker (2006), a investigação sobre pacotes de geometria dinâmica sugerem que softwares de geometria dinâmica podem ser efetivamente integrados ao ensino de Matemática e tem potencial para promover aprendizagens ativas e centradas nos alunos.

Nesse sentido, o Geogebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica, como pontos, retas e seções cônicas além do fato de que equações e coordenadas podem ser inseridos diretamente, possibilitando assim, a manipulação de duas representações dos objetos que interagem entre si, a representação geométrica e a algébrica. A figura 3 mostra a interface disponível.

É possível realizar construções com pontos, linhas, vetores e ainda, funções e mudá-las dinamicamente, conforme também ocorre no Cabri Geomètre, contudo, o Geogebra permite ainda que se incorpore e manipule equações e coordenadas.

É um software livre e pode ser baixado gratuitamente da internet, estando assim disponível, sem restrições, em casa ou na escola. De acordo com Lu (2008) esse é um importante benefício a ser considerado, visto que “um dos problemas enfrentados pelo uso de softwares educacionais é que a maioria dos softwares matemáticos em uso corrente é comercial, o que significa que a disponibilidade do software está sujeita às finanças da escola e dos alunos.

Outro fator a ser considerado é que o referido software tem uma interface bastante intuitiva, visto que “ao tentar seguir o princípio “KISS” (mantê-lo curti e simples), os desenvolvedores salientaram que os usuários devem ser capazes de usar o software intuitivamente sem ter conhecimentos de informática avançada. Em relação às ferramentas de manipulação vetorial, foco de nosso estudo, o Geogebra oferece em seus menus a possibilidade de inserir vetores e multiplicá-los, dinamicamente, por um escalar, conforme disposto na figura 3.

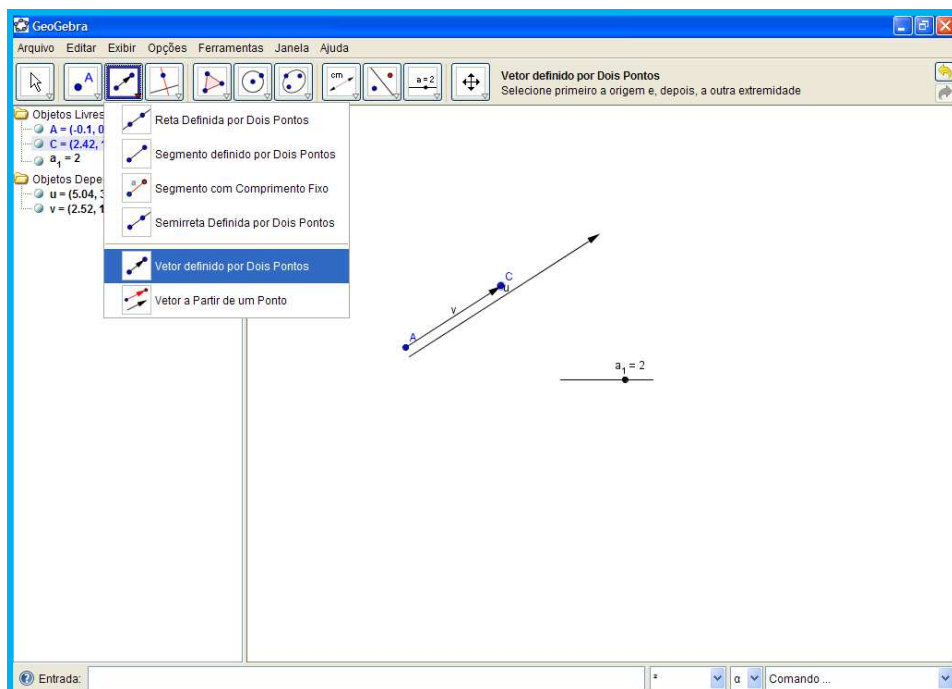


Figura 3. Interface do Geogebra e multiplicação por escalar.

O Geogebra possibilita a coordenação simultânea entre os dois registros desejados, o numérico e o geométrico, viabilizando a realização das atividades a serem propostas e oferecendo as ferramentas de inserção de vetores, escalar

dinâmico e visualização de suas coordenadas. Contudo, a ausência de um sistema de colaboração nesse software nos leva a não considerá-lo como adequado para o nosso estudo, visto o nosso interesse na colaboração a partir dos registros geométricos e numéricos.

### 3.3.3 O TabulaeColaborativo

O Tabulae Colaborativo (disponível em [http://pt.docs.tabulae.net/Tabulae\\_Colaborativo](http://pt.docs.tabulae.net/Tabulae_Colaborativo)) é um aplicativo de Geometria Dinâmica desenvolvido para viabilizar a aprendizagem colaborativa de objetos matemáticos em contextos de ensino à distância. Concebido para suportar a CSCL, esse aplicativo conta com o uso de funcionalidades como o chat e as telas de construção geométrica, uma para a construção privada e outra para a pública, como elementos facilitadores desse processo. De acordo com Mattos et al (2009), no ambiente do *Tabulae Colaborativo*, múltiplos usuários participam de sessões eletrônicas manipulando construções geométricas e se comunicando através de texto, no uso da interface disposta na figura 4.

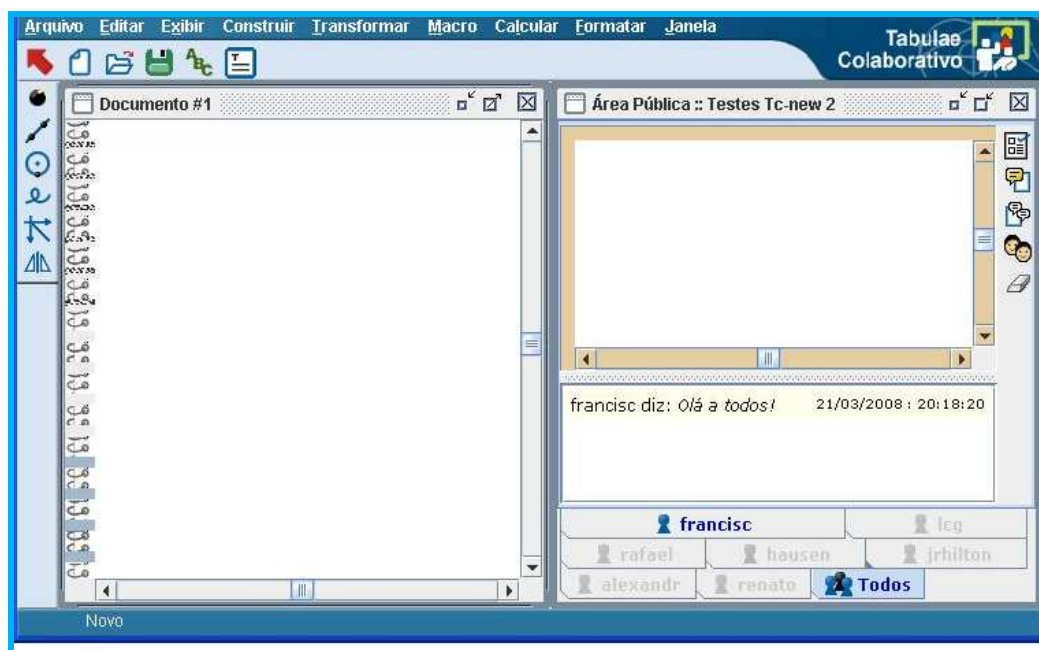


Figura 4.Interface do Tabulae.

Em seu sistema de comunicação, permite a inserção de caracteres típicos da linguagem matemática, superando uma das dificuldades presentes na aprendizagem de seus objetos em contextos de EAD. Dispõe também de um sistema revisor passo

a passo, o que viabiliza a avaliação da aprendizagem dos alunos participantes das sessões.

Outro importante aspecto oferecido por esse software é a possibilidade de transferência das construções geométricas entre as telas privada e pública, possibilitando ao usuário a realização dos ciclos de construção de conhecimento pessoal e grupal.

Com respeito às ferramentas de manipulação e operacionalização de vetores, diretamente relacionadas com o nosso trabalho, esse software oferece a possibilidade de inserção, soma e multiplicação do vetor por um escalar, além de outras, como ângulo entre esses vetores. Entretanto, um entrave encontrado por nós para a realização de atividades que manipulem simultaneamente os dois registros de interesse, o numérico e o geométrico, está relacionado à multiplicação por escalar oferecida por esse sistema, conforme figura 5.

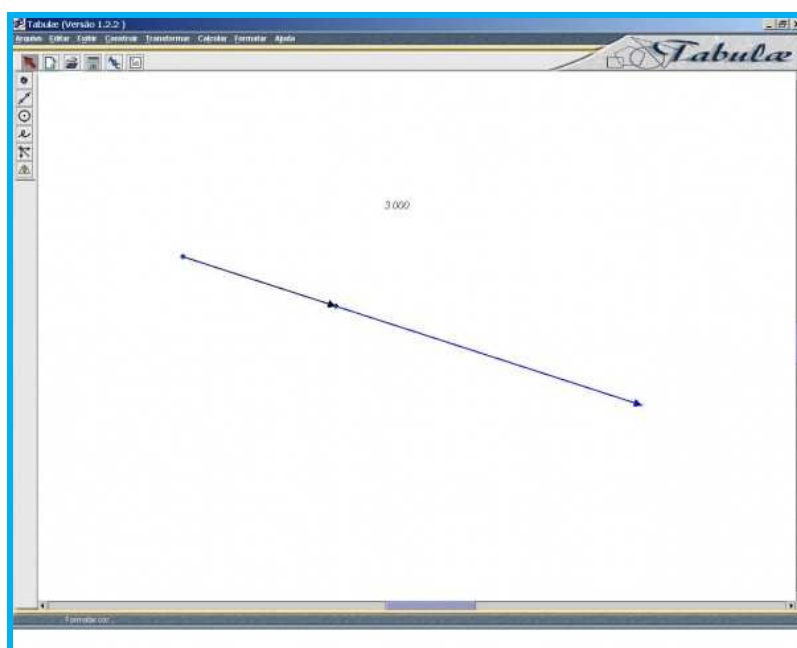


Figura 5. Multiplicação de vetores por escalar.

Diferente do que ocorre com o Geogebra, esse software não disponibiliza para o usuário a possibilidade de manipular a multiplicação do vetor a partir de seu escalar dinamicamente tornando a estrutura fixa, como mostra a figura 5. Outro aspecto que consideramos como entrave para o nosso uso remete a dificuldade de formar grupos independentes e gerenciar as atividades, levando-nos a implementar um sistema que atendesse às especificidades inerentes aos objetos matemáticos que pretendemos abordar, os de dependência e independência linear e às

especificidades do contexto de aprendizagem a tomar como referência, o da Educação a Distância, conforme apresentaremos nos capítulos que se seguem.

## 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

---

### 4.1 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS DO ESTUDO

Com o intuito de analisar os requisitos necessários à elaboração de um software colaborativo de geometria dinâmica para apoiar a aprendizagem dos objetos de dependência e independência linear à distância, desenvolvemos uma ferramenta prototípica amparada nas dificuldades de aprendizagem relativas aos objetos supracitados e cujo desenvolvimento foi orientado a partir da Engenharia de Softwares Educativos.

Para atender a tal objetivo, foram elicitados outros quatro, específicos e subordinados a esse, de forma a facilitar a delimitação do trabalho a ser desenvolvido. São eles:

- a) Levantar as dificuldades de aprendizagem dos objetos de dependência e independência linear;
- b) Levantar as dificuldades de aprendizagem de Matemática nos contextos da EAD;
- c) Elicitar requisitos para a elaboração do protótipo colaborativo de geometria dinâmica;
- d) Desenvolver e validar uma ferramenta prototípica colaborativa de geometria dinâmica para apoiar a aprendizagem dos objetos de dependência e independência linear no R<sup>2</sup>.

Tendo em vista fato de o processo de especificação de requisitos de softwares educativos ser de importância estratégica para o desenvolvimento do nosso estudo e a necessidade de desenvolver e validar uma solução prototípica de software educativo, através de um experimento de ensino, para atender a tais objetivos, ancoramos os nossos pressupostos metodológicos na Engenharia de Softwares Educativos e no Design Experiments, que se encontram descritos nas seções 4.1.1 e 4.1.2 a seguir.

#### 4.1.1 Introdução a Engenharia de Softwares Educativos

A Engenharia de Softwares Educativos tem por objetivo a compreensão e o controle da complexidade inerente a esse processo de desenvolvimento de softwares, conforme afirma Lacerda Santos (1998). Para o autor, tal complexidade é

decorrente das significativas diferenças de representações que os diferentes membros de desenvolvimento possuem em virtude das dificuldades que estes encontram em compartilhar conceitos em diferentes áreas.

Diante do exposto, o desenvolvimento de soluções tecnológicas de amparo educacional requer o trabalho colaborativo de uma equipe multidisciplinar com o objetivo de proporcionar maior aproximação entre as expectativas que anseiam por uma intersecção entre os aspectos advindos de âmbitos pedagógicos e tecnológicos.

Ao contrário de sistemas fechados em que usuários e proprietários interagem entre si através de procedimentos pré-estabelecidos, previsíveis e completamente traduzíveis em operações automáticas e informatizáveis, em sistemas educacionais, os engenheiros de softwares educativos:

têm de lidar com um conjunto de aspectos subjetivos que caracterizam o fenômeno educativo e que vão desde a consideração da natureza dos conhecimentos a serem veiculados e das estratégias mais adequadas para fazê-lo, até à compreensão do próprio processo de ensino e das interações entre um indivíduo em processo de aprendizagem e um saber de referência, por meio de um mediador informatizado (LACERDA SANTOS,1998, p.24)

Nesse sentido, Ballachef e Bellemain (2007) afirmam que ambientes tecnológicos educacionais têm o objetivo de permitir ao usuário aprender algum conhecimento com o resultado de sua interação com o artefato digital. Para eles, o centro de atenção do design desse tipo de ferramenta deve estar não na aprendizagem apenas, mas na aprendizagem de alguma coisa, tendo em vista a importância de se considerar para o desenvolvimento desses ambientes, a natureza do conhecimento, a forma como essa natureza vai ser abordada no design e na implementação, bem como a representação desse conhecimento.

Gomes e Wanderley (2003), sobre esse aspecto, evidenciam a necessidade de considerar duas diferentes dimensões nesse processo: as características inerentes ao objeto de ensino e ao contexto de aprendizagem, conforme pode ser observado no fluxo de elaboração de software educativo criado por eles e disposto na figura 6 a seguir.

O esquema disposto nessa figura constituiu-se para nós em importante norteador do processo de concepção e desenvolvimento do protótipo em questão, sobretudo, no que concerne a importância dada à consideração dos aspectos relativos às especificidades presentes no domínio visado, que são os dos objetos de dependência e independência linear no  $R^2$ , bem como do contexto de aprendizagem tomado, o da Educação a Distância.

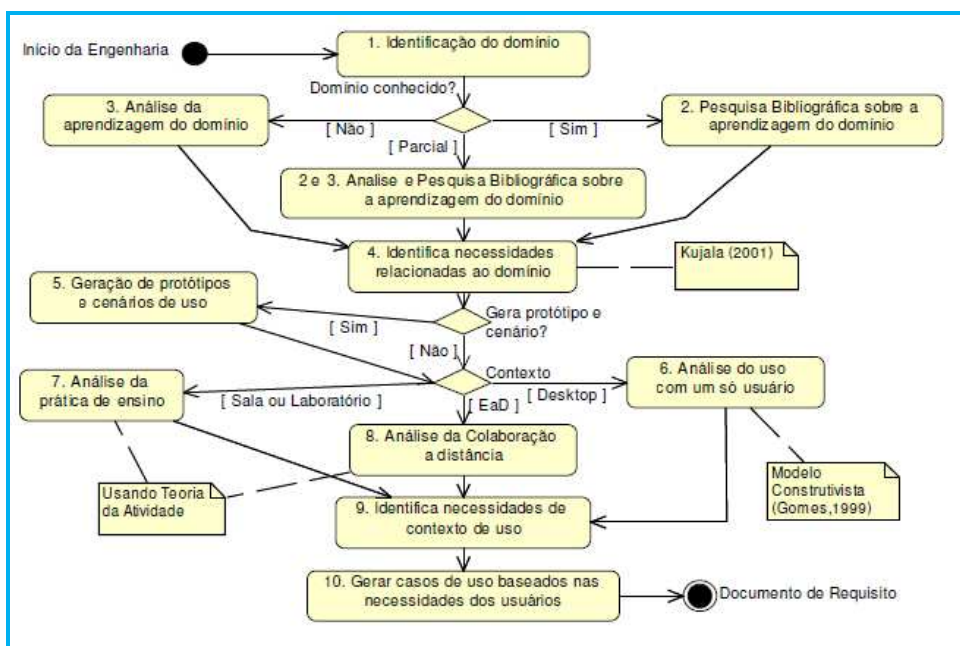


Figura 6. Fluxo do Processo de Criação de um Software educativo (GOMES e WANDERLEY, 2003)

#### 4.1.2 Breve ensaio sobre o Design Experiments

O *Design Experiments* (COBB et al, 2003), método de investigação e análise de fenômenos complexos de aprendizagem, tem o objetivo de analisar os processos de aprendizagem de domínios específicos, tendo em vista a possibilidade de reprodução de uma ecologia de aprendizagem.

De acordo com Karrer (2006), ao representar um sistema complexo e iterativo que envolve os múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis e que interferem nos fenômenos de aprendizagem, o Design Experiments promove a quebra consciente entre as dimensões dos papéis entre professor e pesquisador. A autora complementa que, por sua natureza intervencionista, esse método tem a intenção de representar as bases iniciais para futuras inovações, tendo a intenção de investigar possibilidades de novas formas de aprendizagem.

O *Design Experiments* apresenta dois aspectos fundamentais e que remetem a importância do planejamento do desenho da aprendizagem hipotetizado e da constante reflexão sobre essas conjecturas, a serem realizadas em diferentes níveis da análise retrospectiva dos dados longitudinais e extensivos gerados durante o experimento. Sobre esse aspecto, Cobb et al (2003) afirmam que

Prototipicamente, o *Design Experiments* acarreta tanto o planejamento de formas particulares de aprendizagem quanto ao estudo sistemático dessas formas de aprendizagem junto ao contexto definido pelos meios que a suportam. Este contexto é desenhado para testar e revisar as sucessivas iterações que resultam em representar uma função similar para a variação sistemática de um experimento (p.9)

De acordo com os autores, uma teoria deste tipo especifica sucessivos padrões de raciocínio dos alunos, junto aos meios que os apóiam e que justificam o aparecimento desses padrões. Nesse sentido, “o objetivo desse método não é de apenas investigar os processos que acarretam novas formas de aprendizagem, mas também de estudar os aspectos e meios que suportam essa aprendizagem vislumbrada” (COBB et al, 2003,p. 10).

Assim, acreditamos que o *Design Experiments* constitui-se em importante ferramenta metodológica para o processo de validação do protótipo a ser desenvolvido por oferecer subsídios para a concepção e análise do experimento a ser realizado para esse fim.

#### **4.1.3 Contribuições dos pressupostos e descrição da estrutura metodológica do estudo.**

De forma a viabilizar o cumprimento dos objetivos específicos dispostos anteriormente, desenhamos um estudo delimitado por quatro etapas, como as dispostas na figura 7.

É possível perceber a presença das contribuições da Engenharia de Softwares Educativos, sobretudo do modelo disposto na figura 7, em aspectos que perpassam por todas as etapas do presente estudo, conforme pode ser observado na figura 6, nos orientando desde o processo de levantamento das dificuldades de aprendizagem, a especificação de requisitos, até a análise dos resultados obtidos

com a experimentação do protótipo para a sua validação, etapas que estarão descritas nas próximas seções.

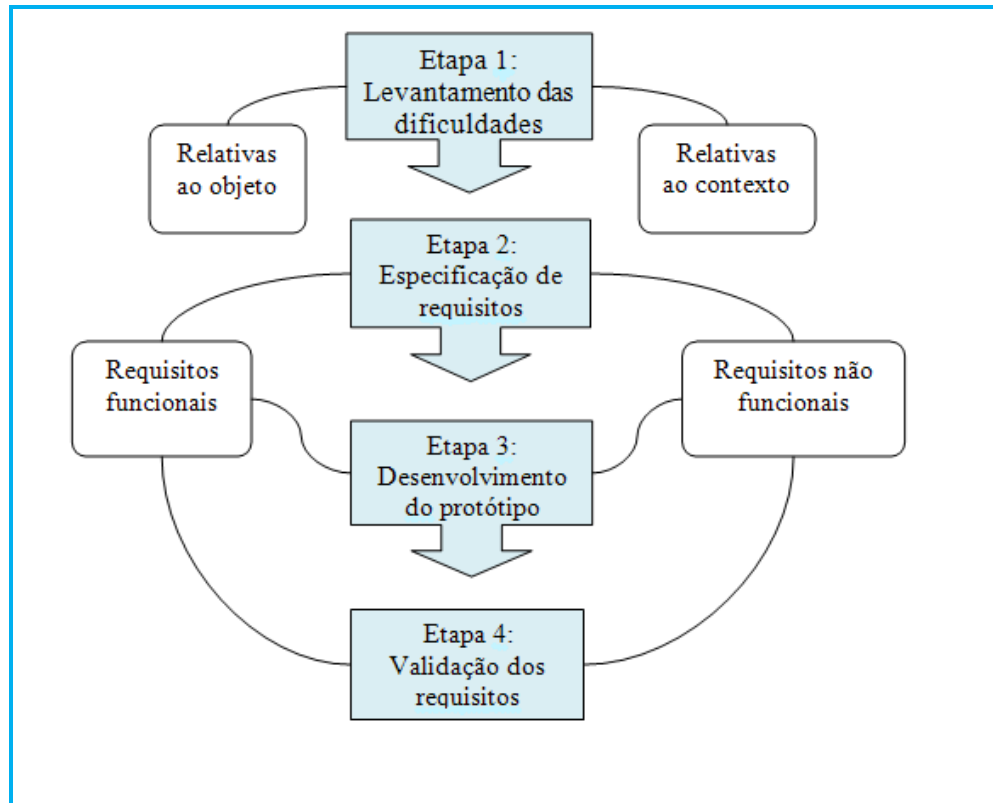


Figura 7. Estrutura metodológica.

Em contrapartida, apesar de não estarem evidentes no modelo descrito acima, as contribuições do *Design Experiments* encontram-se fortemente distribuídas no último capítulo desse estudo, referente à última etapa do estudo, sobretudo nos aspectos que remeteram ao desenho do experimento reiterado a partir da apresentação do piloto e na apresentação das análises, que respeitaram a necessidade de olhar longitudinal e expansivo sobre o desenvolvimento dos sujeitos.

## 5 ETAPA I: LEVANTAMENTO DAS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM

A escassez de estudos que evidenciem as dificuldades de aprendizagem à distância dos objetos de Álgebra Linear faz-nos compreender a importância de levantar fatores causais relacionados tanto aos sentidos dos objetos em si, quanto às dificuldades de aprendizagem de matemática à distância, contexto de aprendizagem com o qual se deseja colaborar.

Dessa maneira, o objetivo dessa etapa é o de esclarecer quais os eixos norteadores para a realização da etapa seguinte, que é a de especificação de requisitos. Em outras palavras, foi durante essa etapa que consideramos quais os aspectos das dificuldades de aprendizagem que foram contemplados na elicitação de requisitos.

O levantamento dessas dificuldades foi orientado a partir da inerência a dois importantes eixos a serem considerados: aqueles referentes às dificuldades dos objetos em si e os referentes ao contexto em que aprendizagem é dada.

Foi a partir dessa etapa que foram eleitas as categorias de requisitos dispostas na etapa seguinte.

### 5.1 SUJEITOS

Foram convidados a contribuir com essa fase do estudo 21 estudantes, concluintes de um Curso de Licenciatura em Matemática à Distância de uma Instituição Federal de Ensino Superior e que foram selecionados para essa etapa do estudo por constituírem-se na única turma de Licenciatura em Matemática à Distância da região que já houvesse cursado as disciplinas de Álgebra Linear e Geometria Analítica no momento. Entretanto, apenas 15 apresentaram resposta positiva ao convite e responderam ao questionário de caracterização das amostras, possibilitando-nos evidenciar alguns aspectos referentes ao universo de estudo.

Acreditamos que essa foi uma prerrogativa importante tendo em vista a possibilidade de os considerarmos como detentores de noções preliminares dos objetos de dependência e independência linear.

Assim, foi identificado que todos os sujeitos escolhidos eram, no momento, concluintes do Curso de Licenciatura à Distância que funcionou por meio dos recursos de internet e que haviam sido aprovados nas disciplinas de Geometria

Analítica e de Álgebra Linear, sendo, portanto, passíveis de responder aos questionários e aos testes.

## 5.2 DESCRIÇÃO DOS INSTRUMENTOS DE COLETA

Para essa etapa do estudo foram elaborados dois instrumentos de coleta: um questionário - com o intuito de caracterizar os sujeitos da pesquisa e cuja abordagem de análise terá aspecto quantitativo - e um teste – com enfoque no levantamento das dificuldades de aprendizagem do objeto e cuja análise será caráter qualiquantitativo.

### 5.2.1 Os questionários

Para a elaboração dos questionários consideramos ser importante levantar aspectos relacionados aos dados pessoais dos alunos, como idade, histórico educacional e profissional, bem como os dados referentes à instituição, como período e situação de regularidade em respeito às disciplinas e que nos serviu para o processo de caracterização dos sujeitos. Abordamos, ainda, questões referentes ao desempenho nas disciplinas de Álgebra Linear em respeito ao uso e ao grau de importância dos recursos didáticos oferecidos a eles. O questionário foi então composto de dois campos, um referente às identificações do aluno e outro referente ao contexto de aprendizagem de Álgebra Linear à distância. Esse instrumento encontra-se disponível no anexo do estudo.

### 5.2.2 Os testes

Este instrumento de coleta da pesquisa teve o intuito de levantar as dificuldades de aprendizagem acerca dos objetos de dependência e independência linear e a sua elaboração foi orientada para investigar as apreensões dos alunos sobre os objetos de dependência e independência linear, em respeito ao tipo de compreensão desses sobre os objetos, aos registros de representação que utilizam para a sua definição e verificação e ao reconhecimento da relação posicional e proporcional agregada a eles. Essa parte do instrumento de coleta foi composta por três questões dispostas como apresentamos a seguir.

**Questão 1:** Represente, de acordo com o seu entendimento e da maneira que preferir, uma definição para dependência e independência linear.

Nessa atividade tínhamos o objetivo de investigar as definições sobre os objetos de independência e dependência linear apreendidas pelos alunos a partir dos registros escolhidos por eles. Foi esperado que as respostas estivessem associadas a quatro situações:

- a) Relacionando à definição de combinação linear e associando ao procedimento da resolução da equação  $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$ ;
- b) Associando às soluções de sistemas lineares;
- c) Apresentando a partir de relação posicional visualizada através de vetores geométricos estabelecidos;
- d) Associando à geração de um subespaço vetorial qualquer.

Para atender a tais situações, esperou-se a utilização de registros de representação semióticas do tipo numérico, algébrico ou geométrico, de acordo com a natureza da definição escolhida, quer seja como procedimento, quer seja como relação entre vetores. Também foi esperada a utilização de registro em língua natural para a descrição da definição.

**Questão 2:** Verifique, quando possível, a existência de dependência e independência linear nos conjuntos apresentados. Justifique as suas respostas e não se esqueça de explicitar os procedimentos.

- |                                            |                                                         |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| a) $u=(2,4)$ e $v=(4,8)$ em $\mathbb{R}^2$ | c) $u=(1,0)$ e $v=(0,1)$ em $\mathbb{R}^2$              |
| b) $u=(7,2)$ e $v=(5,3)$ em $\mathbb{R}^2$ | d) $u=(1,0)$ , $v=(0,1)$ e $s=(-5,2)$ em $\mathbb{R}^2$ |

Essa atividade foi desenvolvida para apreender as concepções dos sujeitos em respeito ao objeto quando o registro oferecido é o registro numérico. Nela foram oferecidos quatro conjuntos de vetores, representados pelo referido registro e dos quais eram esperados alguns dos seguintes comportamentos:

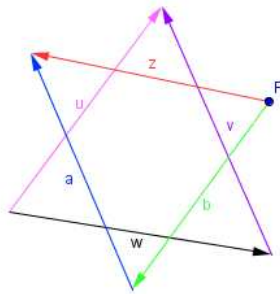
- a) Resolver a equação dada anteriormente e verificar, através das soluções obtidas, a existência ou não de dependência linear;
- b) Representar geometricamente os vetores e observar a relação posicional existente entre eles;
- c) Observar a existência de relações proporcionais entre essas coordenadas dadas.
- d) Utilizar a eliminação gaussiana para a resolução

No caso dos dois últimos conjuntos de vetores (os referentes aos itens “c” e “d”), além das perspectivas sugeridas acima, também seria possível observar que o

conjunto  $\{(1,0); (0,1)\}$  trata-se da base canônica e, por assim o ser, é linearmente independente. Outro fato é que o conjunto determinado por  $\{(1,0); (0,1); (-5,2)\}$  é linearmente dependente, visto que o número de vetores pertencentes a ele é maior do que a dimensão do espaço a que ele pertence.

A questão seguinte teve o objetivo de apreender as concepções dos sujeitos sobre os objetos dependência e independência linear quando oferecidos como referência vetores representados por registros geométricos. Nesse sentido, poder-se-á verificar quais as suas concepções e ainda compreender os procedimentos inerentes a elas.

**Questão 3:** De acordo com a figura abaixo, determine quando possível o que se pede e justifique:



- a) Dois vetores linearmente dependentes
- b) Dois vetores linearmente independentes
- c) Três vetores linearmente dependentes
- d) Três vetores linearmente independentes

Assim, a questão 3, evidencia seis vetores de mesma medida dispostos em formato de estrela de seis pontas e em diferentes posições relacionais entre si. Daí, então, é solicitado do sujeito que este identifique pares de vetores que obedeçam as condições de dependência e independência linear. Para este caso é esperado que os sujeitos visualizem a (in) dependência entre os vetores em respeito às posições destes entre si. Um caso especial é o trazido pelo item “d” que solicita uma situação inexistente e semelhante à evidenciada no item d da questão 2, o número de vetores é maior que a dimensão do espaço.

### 5.3 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS E ANÁLISE

### 5.3.1 Apresentação dos resultados e análise dos questionários

A partir de tais questionários foi possível perceber que o universo selecionado como amostra para o estudo é composto por sujeitos com idade média de 31 anos, de forma em que 55% deles já atuam como professores há, em média, 6 anos. Apenas um deles tem formação em nível superior anterior, sendo esta em Administração de Empresas. Todos se encontram regularmente matriculados no sétimo período dos seus cursos e foram aprovados nas disciplinas de Álgebra Linear.

Foram também evidenciadas considerações dos alunos em respeito às dificuldades de realização do teste proposto e da aprendizagem de Álgebra Linear à distância, em referência ao uso de recursos didáticos e da importância atribuída a eles.



Gráfico 1. Recursos utilizados à distância

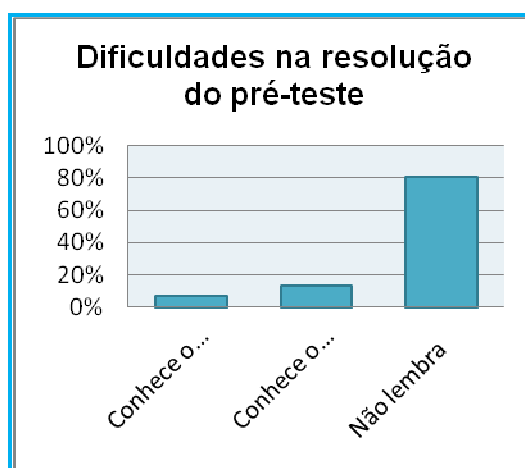


Gráfico 2. Dificuldades de resolução do teste.

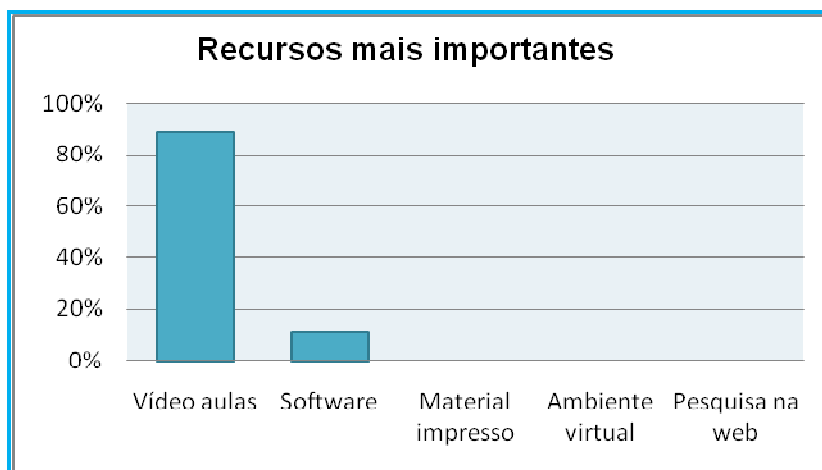


Gráfico 3.Considerações dos sujeitos sobre a importância dos recursos

Nesse sentido, é possível perceber que, apesar de todos os sujeitos terem sido aprovados em Álgebra Linear, 80% deles alegaram ter dificuldades de expor impressões sobre as questões presentes no pré-teste por não lembrarem os conceitos estudados nem os procedimentos necessários a sua verificação, conforme exposto no gráfico 2. Não houve sujeito que exprimisse segurança tanto em respeito ao conhecimento dos objetos quanto aos procedimentos relativos a eles.

Quando questionados em respeito aos recursos utilizados para a aprendizagem de Álgebra Linear à distância, o material impresso foi citado por aproximadamente metade dos sujeitos, como mostra o gráfico 1. Tal fato associado ao diminuído uso do ambiente virtual como recurso e a importância dada as vídeo aulas conforme pode ser visualizados nos gráficos 1 e 3, em inferência nossa, é relacionado aos limites oferecidos pelos ambientes virtuais em relação ao uso e manipulação de representações matemáticas. Também é necessário considerar as dificuldades de manuseio de tecnologias desse tipo, conforme ficou evidenciado posteriormente, na realização do experimento.

Daí, concluímos que devido as vídeo aulas possibilitarem aos alunos uma perspectiva diferente das obtidas pelo material impresso e pelo ambiente virtual, estas parecem fazê-los acreditar em grandes contribuições associadas, visto que 89% deles as trazem como recurso mais importante para a aprendizagem dos objetos de Álgebra Linear à distância.

Acreditamos que esse anseio seja decorrente da necessidade de visualização dos objetos matemáticos que não é disponibilizada nos fóruns discursivos, e que pode vir a ser contemplada em recursos como as vídeo-aulas, entretanto, apesar de

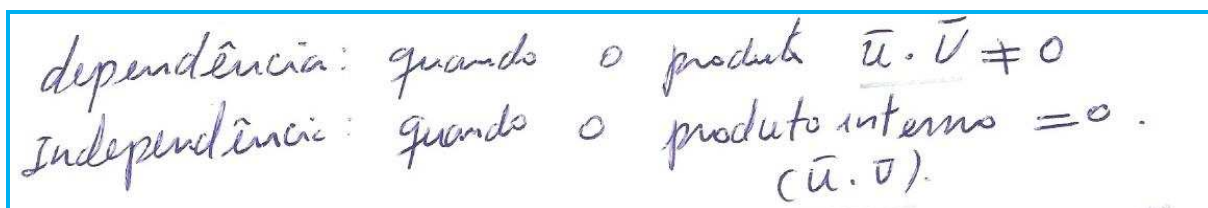
não ser o nosso foco de estudo, esse dado nos remeteu a formulação de questionamentos sobre a necessidade de investigação dos aspectos presentes nos vídeos e que favorecem a satisfação dos alunos em utilizá-los. Seria apenas devido à sensação de presencialidade proporcionada ou a possibilidade de visualização das representações gestuais dos professores é um importante um aspecto a ser considerado?

Quando solicitados a informarem sobre a forma como utilizam esses ambientes virtuais, os sujeitos descreveram, em unanimidade, ações desenvolvidas em fóruns de discussão. Deste modo, pode-se afirmar que apesar de os ambientes virtuais não serem suficientes para a aprendizagem à distância, este é necessário para aprendizagens em contexto online. Acreditamos, assim, que a importância do uso de ferramentas como os fóruns nesses contextos de aprendizagem remete à possibilidade de colaboração oferecida por esses ambientes.

Foram oferecidos aos 15 sujeitos da pesquisa os testes de investigação das dificuldades de aprendizagem relativas aos objetos e que foram aplicados separadamente e livres de qualquer interferência do pesquisador. Contudo, apenas os testes de 9 sujeitos foram aproveitados para a análise, visto que os demais não apresentaram respostas passíveis de serem analisadas. Referiremo-nos a esses sujeitos a partir dos códigos A, B, C, D, E, F, G, H e I.

#### 5.3.2.1 Questão 1:

Quando expostos a situação de definição do objeto sem o uso de registro de representação de referência, apenas 5 dos 9 sujeitos expressaram uma definição para os objetos apesar de todos terem realizado as atividades de investigação presentes na questão 2 desse mesmo instrumento. Suas apreensões sobre esse aspecto foram dispostas nas figuras 8, 9, 10 e 11, abaixo.

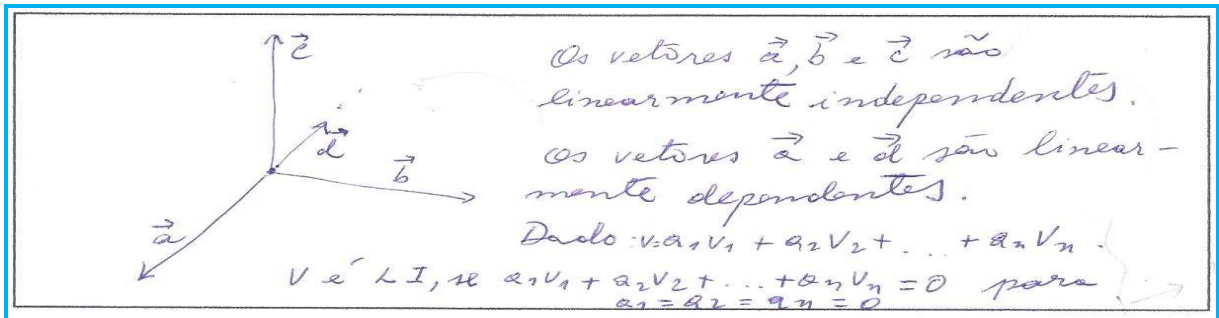


dependência: quando o produto  $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$   
 Independência: quando o produto interno  $= 0$ .  
 $(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Figura 8. Resposta dos sujeitos A e E para a atividade 1.

Dependências quando satisfazem as propriedades da soma e do produto.

Figura 9. Resposta do Sujeito H para a atividade 1.



Os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são linearmente independentes.  
 Os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são linearmente dependentes.  
 Dado:  $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$   
 $V \in LI$ , se  $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$  para  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

Figura 10. Resposta do Sujeito F para a atividade 1.

DIZ QUE SEJA CONJUNTO EM  $V$  (SCV) É LINEARMENTE INDEPENDENTE, SE E SOMENTE P/ TODO SUBCONJUNTO FINITO  $\{x_1, \dots, x_m\} \subset S$ , COM  $x_i \neq x_j$   $(i \neq j)$ .

$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$

Figura 11. Resposta do sujeito B para a atividade 1.

Em análise a esse quesito, notamos que quando definem os objetos de dependência e independência linear, os sujeitos tendem a considerá-los como procedimento e não como relação (apenas um deles apresenta a definição associada a uma relação entre vetores, o sujeito F). Contudo, um fato importante a ser observado é que, além da não compreensão acerca desse objeto, dois dos sujeitos o associa a procedimentos não adequados para tal, como produto interno e verificação de espaço.

Acreditamos que o uso desse procedimento esteve relacionado ao fato de os sujeitos estarem, no mesmo período da coleta, utilizando os procedimentos de verificação de ortogonalidade a partir do produto interno em uma outra disciplina, conforme pôde ser verificado em conversa informal com um dos tutores, posteriormente. Infere-se, contudo, que a abordagem procedimental dada aos objetos de dependência e independência linear, termina por confundi-los com as dos demais objetos de Álgebra Linear, como ortogonalidade e espaço, visto que os alunos terminam por não compreender as propriedades inerentes a esses objetos.

Outra importante consideração a respeito do aspecto de definição dos objetos

através de liberdade de registro de referência é a que remete ao fato de que há predominância do uso de registros de representação algébricos e de língua natural em detrimento dos demais. Um caso interessante é o do sujeito F. É notável, a partir da definição dissertada por esse sujeito, que apesar de esse referir-se a dependência linear como uma relação posicional entre vetores, o mesmo traz ainda a tentativa de definição formal acompanhada do procedimento de resolução da equação de combinação linear.

Percebe-se, portanto, que mesmo compreendendo, ainda que preliminarmente, a concepção do objeto enquanto relação geométrica entre os vetores, o uso de procedimentos parece consolidar a definição dada, atribuindo o aspecto formal característico das definições dos objetos da Álgebra Linear. A mesma tentativa de formalização das respostas pode ser notada pela definição atribuída pelo sujeito B.

Na definição formal dada tanto pelo sujeito B quanto pelo sujeito F percebem-se alguns equívocos. Um deles é quando o sujeito F considera  $v$  como um vetor que pode ser escrito como combinação linear dos demais, o que dá ao conjunto característica de dependência linear. Outro fato é que a notação dada ao vetor  $v$  não deixa claro que ele o considera com um vetor mesmo ou se como um subespaço, visto que a ele o atribui a noção de dependência e independência linear, que para ser identificada necessita de outro vetor como referência. Já o sujeito B ao utilizar as notações formais, mesmo cometendo equívocos, as deixa mais claro, parecendo ter uma noção mais condizente do objeto, o que não se confirma com a análise das demais atividades.

### 5.3.2.2 Questão 2

Quando foi oferecido aos sujeitos o registro de representação numérico para que estes verificassem a existência de dependência linear entre os vetores dados, nenhum deles realizou a conversão para o registro geométrico, detendo-se a redução procedimental já evidenciada na atividade anterior.

Em continuidade à consideração obtida para as apreensões livres de registros de referência, percebemos que há também nos procedimentos de verificação equívocos, alguns condizentes com as definições dadas, sobretudo no que diz respeito ao uso do produto escalar (produto interno) para a verificação de tal relação de dependência, conforme utilizaram os sujeitos A,B,C,D e I.

Essa consideração é, sobretudo, evidenciada na análise das respostas apresentadas pelos sujeitos SA e SE, que apresentaram coerência entre a definição apresentada na questão 1 e os procedimentos de verificação apresentados na questão 2, ambos relacionados aos produto interno. As respostas apresentadas pelos sujeitos para a questão 2 estão dispostas abaixo:

a) Sujeito A:

Apesar de não ter realizado nenhum procedimento necessário a verificação, esse sujeito deixou como resposta o comentário disposto na figura12.

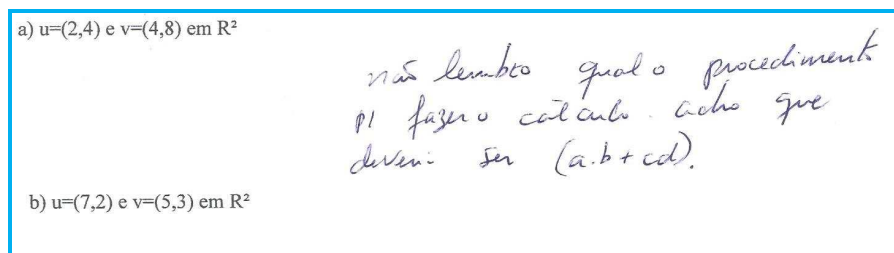


Figura 12. Resposta dos sujeito A para a atividade 2.

b) Sujeitos B, C e D:

Em contrapartida, os sujeito B, C e D explicitaram todos os procedimentos utilizados, conforme a figura 13.

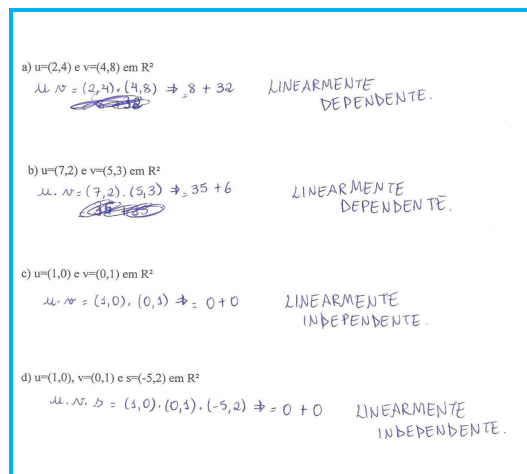


Figura 13. Resposta dos sujeitos B, C e D para a atividade 2.

c) Sujeito E:

Apesar de esse sujeito não ter realizado procedimentos de verificação para todos os itens, ele, a exemplo do sujeito A, também tentou exprimir um comentário em respeito, como disposto na figura14.

Dependência linear, pode ser definido como o produto de  $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$  procedimento  
 Independência linear, pode ser definido como o produto, onde  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Figura 14. Resposta do sujeito E para a atividade 2.

d) Sujeito F

O sujeito F parece ter tomado um procedimento diferente dos demais e que está disposto na figura 15.

a)  $u=(2,4)$  e  $v=(4,8)$  em  $\mathbb{R}^2$   $u$  e  $v$  são L.I.  

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a + 4b = 0 \\ 4a + 8b = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} a + 2b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{array} \right.$$

b)  $u=(7,2)$  e  $v=(5,3)$  em  $\mathbb{R}^2$   
 $u$  e  $v$  são L.D.

c)  $u=(1,0)$  e  $v=(0,1)$  em  $\mathbb{R}^2$   
 $u$  e  $v$  são L.I.

d)  $u=(1,0)$ ,  $v=(0,1)$  e  $s=(-5,2)$  em  $\mathbb{R}^2$   
 $u, v$  e  $s$  são L.D.

Figura 15. Resposta do sujeito F para a atividade 2.

e) Sujeito G

Apesar de não ter apresentado uma solução, o sujeito G esboçou um raciocínio conforme disposto a seguir, na figura 16.

a)  $u=(1,2)$  e  $v=(3,6)$  em  $\mathbb{R}^2$   
 $D = a \cdot b + b \cdot a = 0$

b)  $u=(5,7)$  e  $v=(2,8)$  em  $\mathbb{R}^2$   
 $I = a \cdot v + v \cdot b \neq 0$

Figura 16. Resposta do sujeito G para a atividade 2.

f) Sujeito H

O sujeito H parece ter tentado elaborar um procedimento de resolução para responder os itens, conforme figura 17

Dependências quando satisfazem as propriedades da soma e do produto. procedimento.

Figura 17. Resposta do sujeito H para a atividade 2.

## g) Sujeito I

O sujeito I também parece ter apresentado dificuldades de resolução, exprimindo um comentário em respeito, conforme figura 18.

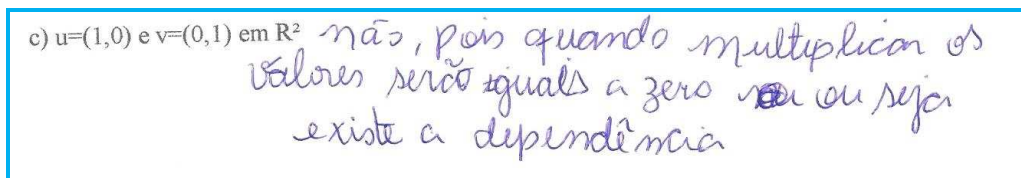


Figura 18. Resposta do sujeito I para a atividade 2.

Estes aspectos levam-nos a inferir sobre a possibilidade de confusão entre os procedimentos de multiplicação de um vetor por um escalar (número real), inerente à definição de combinação linear, com o procedimento de produto interno, inerente a verificação de ortogonalidade.

Outro relevante aspecto remete aos registros de representação utilizados nas verificações quando os registros de referências são numéricos. Nesse sentido, evidenciamos que aproximadamente 67% dos sujeitos mantiveram o registro numérico realizando o tratamento desses registros como estratégia de verificação da (in) dependência. Isso era esperado, visto que a conversão entre registros é uma atividade que apresenta dificuldades para sujeitos, segundo Duval (2003).

Apenas um sujeito realizou a atividade de conversão entre registros, o sujeito F, convertendo para o registro algébrico e este é o único a utilizar o procedimento adequado para tal verificação, apesar de parecer não saber interpretá-lo corretamente. Esse sujeito é o mesmo que ao definir o objeto de (in) dependência linear, associou-o a uma relação posicional entre vetores e ao procedimento de combinação linear.

Amparados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003; 2004), podemos afirmar que a compreensão de diferentes perspectivas em relação ao mesmo objeto, auxilia o sujeito a compreender o seu procedimento de verificação. Contudo, o fato de o sujeito ter recorrido à conversão para os registros algébricos e não para o geométrico, em virtude do custo operacional, faz-nos inferir em dizer que esse sujeito possui resquícios de uma visão procedimental sobre os objetos. Também é relevante salientar que nenhum dos sujeitos recorreu ao registro geométrico para a verificação a partir de registros numéricos.

Também nos foi permitido perceber que não houve sujeito que reconhecesse

a relação proporcional existente entre as coordenadas vetoriais oferecidas, quando estas são representantes de vetores dependentes linearmente, o que pode ser visto no item a, sem a necessidade de procedimento operacional de verificação. O item b, que remete justamente a idéia contrária, também não foi contemplado com esse tipo de percepção.

Percebemos, ainda, que os sujeitos não detém conhecimentos a respeito de fundamentos elementares aos espaços vetoriais, como base canônica (presente no item c, e que não foi mencionado) e aos vetores gerados por essa base, presente no item d.

Três possibilidades de inferência em respeito ao não uso de registros geométricos como elemento facilitador da verificação foram levantadas:

- a) Seria o fato de a conversão entre os registros numéricos e geométricos ser não congruente o elemento limitador da utilização desse registro na atividade de verificação solicitada?
- b) Ou, seria o fato da não compreensão dos aspectos relacionais geométricos a serem considerados para esse fim?
- c) Ou, ainda, seria o fato de atividade de conversão não ser explorada suficientemente, sobretudo, no que remete aos registros gráficos, um elemento importante a ser considerado?

A análise das respostas obtidas na questão 3 do pré-teste nos ajudaram a compreender esse fato.

#### 5.3.2.3 Questão 3

Nessa questão os sujeitos foram submetidos a situações de verificação em que os registros de referência oferecidos eram registros geométricos, a fim de perceber a existência de compreensão da relação posicional associada a (in) dependência linear e de compreender a possível não utilização do registro geométrico como estratégia de verificação, visto que esse apresenta um custo operacional menor que o registro geométrico.

Apenas 4 dos sujeitos responderam os campos de verificação apresentando as suas justificativas, permitindo a análise. Os demais deixaram o campo em branco, levando-nos a inferir que estes apresentam dificuldades de reconhecimento da noção de (in) dependência linear a partir de registros geométricos. Assim, as respostas analisadas foram as dos sujeitos A, C, E e F e, cujas respostas estão

explícitas nas figuras 19, 20, 21 e 22.

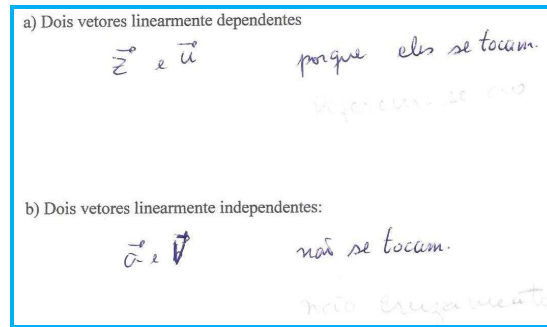


Figura 19. Resposta de SA

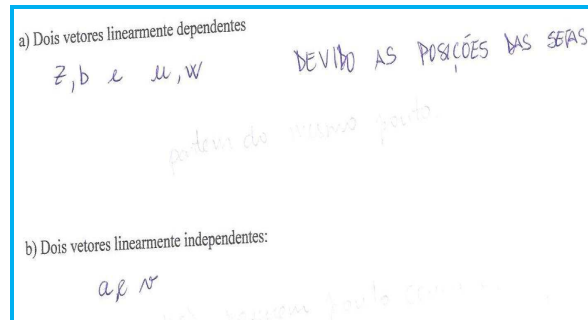


Figura 20. Resposta de SC

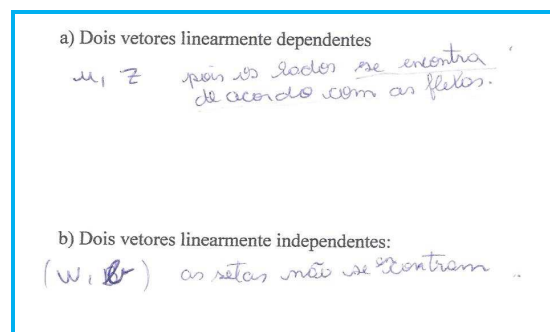


Figura 21. Resposta de SE

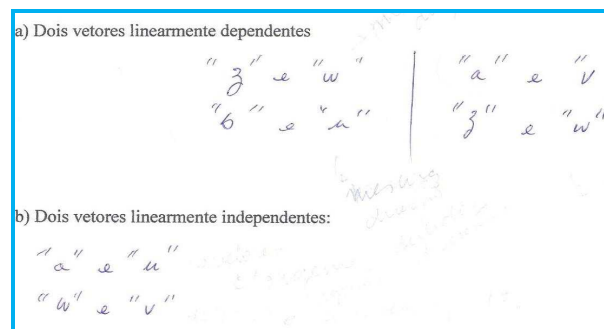


Figura 22. Resposta de SF

Percebemos que enquanto os sujeitos A, C, e E apresentaram suas justificativas a partir da observação de pontos de encontro entre os vetores, de acordo com o que está disposto nas figuras 19, 20 e 21, o sujeito F parece ter

percebido uma relação de alinhamento, ou relativa a direcionamento entre os vetores, como está descrito na figura 22.

Nesse sentido, percebemos nas respostas apuradas que os sujeitos atribuem aos registros geométricos sentidos, de “paralelismo”, “cruzamento” ou “pontos comuns” às condições de determinação de dependência ou independência linear enquanto relação posicional entre vetores. Compreendemos, ainda, que os sujeitos não apresentam uma uniformidade a essa associação entre os referidos objetos e as posições relacionais apresentadas por eles. Enquanto os sujeitos A, C e E associam a dependência linear ao não paralelismo entre os vetores, o sujeito F o faz de maneira contrária.

Contudo, associar a relação de dependência linear à relação de “paralelismo” entre os vetores acarreta em alguns equívocos conceituais. Em princípio, salientamos que esse fato leva os alunos a levarem em consideração duas situações distintas como se fossem uma: vetores com mesma direção e sentido e vetores com direções iguais e sentidos diferentes. Entretanto, faz-se necessário justificar que isso não interfere diretamente na compreensão da noção de dependência.

Dois outros importantes fatores foram identificados na análise dos itens c e d, quando dos sujeitos foram solicitados que identificassem três vetores em situação de (in) dependência linear. O fato é que, assim como nos itens c e d da questão anterior, os sujeitos não identificam a importância da dimensão do espaço como fator para a determinação dos conjuntos referidos e tentam manter a lógica estabelecida para os pares de vetores, reafirmando a mesma lógica evidenciada nos itens c e d da questão 2, em que os sujeitos também não demonstram perceber a importância da relação entre a dimensão do espaço e número de vetores no conjunto para que seja gerador.

Assim, em decorrência dos equívocos identificados para os itens a e b, em que os sujeitos associam os objetos às noções de paralelismo ou de cruzamento entre vetores, tentando encontrar padrões que atendam a esses sentidos, não correspondendo assim, aos fundamentos conceituais estabelecidos nos referenciais, como teoremas e definições, percebemos que a compreensão da noção de relação posicional entre os vetores geométricos não é percebida entre as respostas apresentadas.

Essa não percepção nos permite relacionar a não utilização do registro

geométrico nas estratégias de verificação incitadas na questão 2 a não compreensão dessa relação, visto que os sujeitos não parecem apresentar um entendimento que associe as perspectivas compreendidas a partir do registro algébrico/numérico com o geométrico. Um exemplo, contrário a essa situação e que nos ajudou a inferir sobre isso, é o que demonstra o sujeito F.

Observa-se que esse sujeito apresenta, preliminarmente, na resposta da questão 1, a definição de dependência linear associada a relação posicional entre vetores e a relação algébrica disposta na combinação linear. Acreditamos que esse fato indique o indício de flexibilidade entre esses registros, apesar de esse sujeito não utilizar essa estratégia de verificação na questão 2, mesmo considerando o menor custo operacional para isso nas situações propostas. Essa inferência se ratifica quando ele a reconhece, mesmo que de maneira superficial em relação a sua totalidade conceitual, nos registros de representação geométrico apresentados na questão 3.

#### 5.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA FASE I

Após a análise longitudinal dos resultados obtidos a partir dos questionários e dos testes, foram evidenciadas algumas dificuldades de aprendizagem que remetem a duas classes de dificuldades: as relativas aos objetos a serem aprendidos e aquelas relativas ao contexto de aprendizagem e que podem ser sintetizadas em duas categorias, a saber: uso restrito de registros e problemas com a comunicação a partir das representações matemáticas.

Demonstra-se, portanto, certa conformidade com as dificuldades de aprendizagem já diagnosticadas em aplicações restritas a aprendizagem à distância de objetos matemáticos, conforme afirmam Moraes (2007) e Guimarães et al (2008), bem como aqueles que evidenciam ausência de atividades de conversão entre representações (GRANDE, 2006; PAVLOUPOLOU, 1994).

##### 5.4.1 Problemas com a diversificação de registros

Diante da análise anteriormente realizada, foi-nos possível a identificação de três importantes pontos a serem considerados como dificuldades de aprendizagem. O primeiro deles é o que remete a confusão entre procedimento e objeto. O excesso de formalismo e abstração inerentes aos objetos de Álgebra Linear termina por não permitir a compreensão dos objetos propriamente ditos, e assim, como os seus

símbolos podem ser manipulados independentes da compreensão obtida, o que fica é o tratamento operacional dado a eles para a sua verificação, confundindo objeto com procedimento, conforme foi identificado por Dorier et al(1999), Dorier & Sierpiska (2001), Sierpiska & Hillel (1999) & Grande (2006).

Outra importante consideração a esse respeito é que corrobora com os aspectos evidenciados por Pavloupoulou (1994) em seu estudo, vem de uma inferência obtida a partir da análise das respostas apreendidas pelo sujeito F. Como este foi o único a definir os objetos de dependência e independência linear a partir de uma relação posicional entre vetores geométricos e a utilizar os procedimentos adequados de verificação na questão 2, acreditamos que a flexibilidade entre os registros, mesmo que limitada (uma vez que esse mesmo indivíduo confunde dependência linear com paralelismo), parece contribuir para uma maior significação do objeto e conseqüente compreensão do objeto enquanto relação.

A segunda dificuldade de aprendizagem a ser evidenciada é que se relaciona ao uso de procedimentos não adequados aos objetos, conforme também diagnosticou Borgomolny (2006) em seu trabalho. Na análise dos testes isso é salientado a partir do constante uso do produto interno para a verificação da existência de dependência linear, em uma confusão entre essa noção e a noção de ortogonalidade.

Acreditamos que essa confusão advém da axiomatização característica da Álgebra Linear e da abundância de símbolos para a representação de suas linguagens, o que, provavelmente, leva os sujeitos a confundirem produto por escalar ( $k \cdot \vec{v}$ ) e produto escalar ( $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ), que tem sentidos completamente diferentes, mas que, encapsulados ao procedimento, os sujeitos costumam confundir. O impedimento de comunicação online por meio desses símbolos também pode ser fator importante para essa confusão.

Por fim, elicitamos a dificuldade que remete a confusão entre objetos, propriamente ditos, como ocorre nos casos em que, na análise, foi identificada confusão entre o “paralelismo” entre vetores e (in) dependência linear e entre espaço vetorial e (in) dependência linear. Acreditamos que, além da infinidade de teoremas e definições presentes nos conteúdos de Álgebra Linear que acarreta suas estratégias de resolução a uma operacionalização entre símbolos, o uso monopolizado de registros simbólico-algébricos em situações de tratamento também

deve ser considerado como forte elemento a essa constatação, visto que os registros geométricos permitem a visualização de perspectivas inerentes aos objetos não identificadas nos registros utilizados.

#### **5.4.2 Problemas com a comunicação a partir das representações**

A insatisfação com os recursos didáticos utilizados e a necessidade de colaboração, ainda que de uma forma mais passiva que ativa, parecem ser reflexos de que o modo como o curso está sendo desenvolvido não atende às demandas dos sujeitos e desta maneira não é suficiente para a aprendizagem.

Tal insatisfação pôde ser verificada quando boa parte dos sujeitos (cerca de 80%) assume que as vídeoaulas são recursos fundamentais para a aprendizagem em cursos de modalidade EAD. Acreditamos que essa consideração é oriunda das dificuldades de aprendizagem inerentes da escassez de atividades de conversão entre registros de representação, presentes nos materiais didáticos impressos, e da impossibilidade de comunicação a partir de objetos matemáticos em ambientes virtuais, o que terminam por associar às deficiências de aprendizagem à modalidade à distância e a consequente relação das vídeoaulas a presencialidade.

Assim, percebe-se que as dificuldades de aprendizagem dos objetos de (in) dependência linear em modalidade online, caracterizam-se a partir de aspectos remetidos a necessidade de comunicação à distância com o uso de representações dos objetos matemáticos possibilitando, a partir da colaboração em atividades síncronas, o desenvolvimento de um sentimento de presencialidade e motivação.

O uso de estratégias colaborativas em contextos de aprendizagem à distância é condição fundamental. Contudo, para a aprendizagem de objetos matemáticos como os de dependência e independência linear entre outros, faz-se necessário aceder aos ambientes colaborativos que além de possibilitar a comunicação com o uso de registros algébricos, atendam a outras especificidades inerentes a natureza dos seus conhecimentos tanto em caráter dos registros de representação semióticas como de colaboração da aprendizagem.

## 6 ETAPA II: ESPECIFICAÇÃO DOS REQUISITOS DO PROTÓTIPO

A etapa 2, tem importância nuclear para o desenvolvimento do estudo. Foi a partir dela que pudemos evidenciar os requisitos a serem considerados para a elaboração de um software colaborativo de geometria dinâmica que apóie a aprendizagem à distância dos objetos em questão e que foram sugeridos como hipótese do nosso estudo. Tal etapa encontrou-se inteiramente relacionada à anterior e a posterior, como visto na figura 6, determinando o caráter seqüencial desta e das demais.

Fez-se uma proposição dos requisitos amparados nas relações evidenciadas a partir das dificuldades estabelecidas durante a etapa I e as potencialidades das tecnologias e do embasamento na TRRS (DUVAL, 2003; 2004), apresentadas nos primeiros capítulos desse trabalho. Essas proposições foram realizadas a partir do levantamento das funcionalidades, conforme disposto a seguir.

### 6.1 FUNCIONALIDADES A SEREM ESTABELECIDAS

A partir dos dois eixos de dificuldades de aprendizagem dos objetos de dependência e independência linear, o uso restrito de representações e os problemas com as comunicações a partir delas, relativas ao objeto e ao contexto de aprendizagem, organizamos em um quadro a relação entre as dificuldades de aprendizagem evidenciadas e os aspectos a serem implementados no protótipo com o sentido de contribuir para a superação delas e, desta maneira, possibilitando a validação da nossa hipótese.

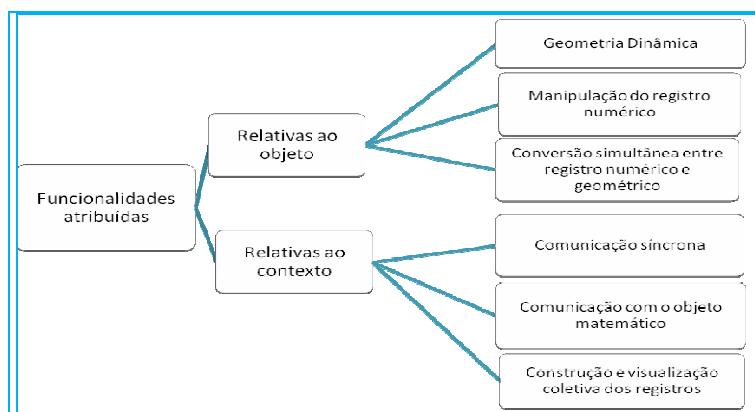


Figura 23. Funcionalidades a serem implementadas no protótipo.

Foram atribuídas três funcionalidades inerentes a natureza dos objetos. A primeira delas, a geometria dinâmica, acrescenta ao software potencialidades como as que foram descritas, anteriormente, no capítulo 3 desse trabalho. Especificamente para os objetos de dependência e independência linear, acreditamos que requisitos associados a tal funcionalidade possibilitam a visualização e manipulação do registro geométrico e, assim, permitindo a percepção da natureza geométrica dos objetos, viabilizam melhor compreensão entre os sentidos de diferentes procedimentos como produto por escalar e produto escalar.

A manipulação do registro numérico deve ser implementada para esse fim com o intuito de promover a maior flexibilidade na transição inerente aos processos de conversão entre esses registros e os registro geométricos. Essa funcionalidade pode oferecer aos sujeitos condições de identificar as diferentes perspectivas dos objetos e dessa maneira, permitindo-os reconhecê-los enquanto relação e não associando-os a relações não adequadas como as de “paralelismo” entre vetores.

Ainda na figura 23 são dispostas as funcionalidades relacionadas às dificuldades de aprendizagem inerentes ao contexto da modalidade à distância. Dentro dessa perspectiva, atribuímos ao software funcionalidades de colaboração e comunicação simultânea e com o objeto matemático, a fim de motivar os sujeitos a aprendizagem à distância, visto que, também é no processo de interação social que o indivíduo pode descobrir diferentes perspectivas de um mesmo objeto e dessa maneira, conjecturar em conjunto, e por meio da comunicação produz conhecimento.

É necessário entender que a perspectiva colaborativa é de grande importância para a aprendizagem, sobretudo, em contextos de modalidade online em que a construção dos conhecimentos é dada através desse efeito. Assim, para contribuir para a aprendizagem à distância dos objetos de dependência linear acreditamos ser fundamental atribuir ao protótipo a ser desenvolvido, as características de dinamismo entre os registros numéricos e geométricos e a conversão entre esses registros, bem como, a comunicação e a construção colaborativa a partir deles. São essas as características que orientarão a especificação de requisitos que será apresentada na seção adiante.

## 6.2 ESPECIFICAÇÃO DE REQUISITOS PARA A ELABORAÇÃO DO SOFTWARE

A especificação de requisitos é uma importante etapa da Engenharia de Softwares Educativos. É nessa etapa que se define os requisitos necessários a implementação dos sistemas a serem desenvolvidos. No caso dos softwares educativos, esse levantamento é geralmente realizado por engenheiros, o que termina por atribuir aos softwares características pouco didáticas. Nesse sentido, atualmente, procura-se envolver cada vez mais os usuários nesses processos a fim de que os sistemas de fato se aproximem das necessidades educacionais.

De acordo com Gomes e Wanderley (2003),

O conjunto de requisitos deve observar não só aspectos do processo de aprendizagem dos alunos, mas também aspectos do processo de mediação a ser promovida pelo professor, o qual pode beneficiar-se de funcionalidades específicas do sistema, como o registro de passos ou a prévia organização de sequência de problemas. (pp.2-3)

Ainda de acordo com os autores, em processos de implementação de softwares de domínios específicos, há uma grande quantidade de requisitos a serem identificados, relacionados ao domínio (conceitos a serem aprendidos) e aos contextos de uso (atividade) atendendo, assim, às necessidades de seus usuários que são professores e alunos.

Há, portanto, dois tipos de requisitos a abordar, os funcionais, que descrevem o funcionamento do sistema, a idealização das funcionalidades a serem disponibilizadas para os usuários quando implementados, e os não funcionais, que são restrições ou funcionalidades que estão relacionadas às propriedades dos sistemas, como tempo de resposta, espaço em disco e linguagem de programação.

Em nossa identificação de requisitos abordaremos os primeiros em função de três importantes aspectos que são os requisitos relacionados às necessidades dos usuários (professores e alunos), os requisitos relacionados ao domínio de aprendizagem e os requisitos necessários aos contextos de aprendizagem que é o de educação em modalidade não presencial.

### **6.2.1 Requisitos funcionais**

Para a especificação dos requisitos funcionais do protótipo, foram elicitados requisitos relacionados às necessidades dos usuários e às necessidades e características do domínio visado.

#### **6.2.1.1 Relativos às necessidades dos usuários**

Os requisitos especificados para atender às necessidades dos usuários foram elicitados com o sentido de descrever quais as funcionalidades disponibilizadas para os diferentes tipos de usuários do sistema, que são alunos e professores, conforme é apresentado a seguir.

#### *6.2.1.1.1 Relativos às necessidades dos alunos*

- a) Deve visualizar os comandos de atividades;
- b) Deve ser capaz de manipular diretamente os objetos inseridos nas telas de manipulação geométrica;
- c) Deve ser capaz de utilizar as ferramentas disponíveis;
- d) Deve ser capaz de inserir, visualizar, manipular e socializar as construções;
- e) Deve poder alterar as construções do grupo a partir da sua própria janela de visualização;
- f) Deve ser capaz de visualizar as alterações realizadas por outros usuários;
- g) Deve ser capaz de utilizar as ferramentas disponíveis na área de trabalho de sua interface;
- h) Deve ser capaz de enviar e visualizar as mensagens de texto de todos.

#### *6.2.1.1.2 Relativos às necessidades dos professores:*

- a) Deve ser capaz de alterar configurações de ferramentas e de cadastros de alunos;
- b) Deve alterar os comandos das atividades;
- c) Deve ser capaz de interferir nas construções;
- d) Deve ser capaz de encerrar e iniciar as atividades e estipular o tempo de duração entre elas;
- e) Deve ser capaz de gerenciar grupos de realização de atividades, restringindo o acesso dos usuários por atividades;
- f) Deve ser capaz de cadastrar, preencher e editar os cadastros;
- g) Deve ser capaz de visualizar e gerenciar os arquivos de históricos de construções e diálogos de chats.

#### *6.2.1.2 Relativos às necessidades e características do domínio visado*

A especificação de requisitos relacionados aos objetos dependência e independência linear refere-se às possibilidades do sistema quando da utilização

deste pelo usuário.

- a) Deve inserir pontos e vetores;
- b) Deve inserir vetores a partir de um ponto;
- c) Deve manipular diretamente o vetor quanto a sua posição;
- d) Deve disponibilizar visualização e manipulação das coordenadas numéricas dos vetores inseridos;
- e) Deve oferecer a coordenação entre os registros numéricos e geométricos.
- f) Deve somar vetores unidos ou não pela origem e apresentar o vetor soma;
- g) Deve multiplicar vetores por um número real (escalar) e apresentar o vetor produto preservando o vetor inicial;
- h) Deve variar os escalares dinamicamente;
- i) Deve decompor os vetores em projeções em respeito a uma base pré-determinada (i, j) ou em uma base determinada pelo usuário.

#### 6.2.1.3 Relativos às necessidades do contexto de aprendizagem

A especificação de requisitos relacionados ao contexto de uso do software teve a finalidade de atender aos aspectos características das atividades a serem implementadas nos contextos da EAD. São eles:

- a) O sistema deve ter característica de software tutelado
- b) Deve guardar registro das interações em ferramenta de comunicação síncrona;
- c) Deve guardar registro de construções geométricas realizadas por atividades e por usuários;
- d) Deve colaborar as construções geométricas e representações numéricas para todos os usuários inscritos na atividade;
- e) Deve ser capaz de utilizar os registros simbólicos matemáticos em comunicação simultânea.

#### 6.2.2 Requisitos não funcionais

O sistema dever ser implementado a partir dos seguintes requisitos não funcionais:

- a) Deverá ser implementado em linguagem Java de forma a viabilizar a portabilidade para diferentes plataformas operacionais;

- b) Programação orientada ao objeto para viabilizar a implementação de novas ferramentas;
- c) Deverá primar pela simplicidade e os comandos de suas ferramentas devem ser facilmente identificados e compreendidos;
- d) A interface deve ser objetiva, intuitiva e de manipulação direta com recursos de design instrucional.

## 7 ETAPA III: DESENVOLVIMENTO DO PROTÓTIPO

Para o contexto do estudo, a referida etapa, de desenvolvimento prototípico do ambiente computacional colaborativo de geometria dinâmica, tornou-se imprescindível devido à necessidade de validação dos requisitos evidenciados. Apesar de esta não ser etapa central de nosso estudo, constituiu-se em importante elemento, visto a necessidade de correspondência entre os requisitos sugeridos na etapa 2 e implementados nessa para o sucesso da validação, constituinte da etapa seguinte.

Diante da proposta de desenvolvimento de softwares educativos, para atender aos anseios de tal correspondência, entende-se a necessidade de trabalho colaborativo entre pesquisador e engenheiro de software a fim de que haja minimização dos limites de implementação dos requisitos. Nesse sentido, contamos com a contribuição do Prof. Dr. Franck Bellemain, co-orientador desse estudo, para o desenvolvimento do protótipo, que a partir de então, denominaremos, *Vetores*.

Assim, nessa etapa trataremos da descrição do software em seus aspectos de concepção, interface, tipos de interação, ferramentas e funcionalidades atribuídas, enfatizando os seus aspectos educacionais em detrimento dos computacionais.

### 7.1 DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO DESENVOLVIDO

Conforme afirma Bellemain (2003), os softwares educativos distinguem-se entre si por sua forma de abordar o conteúdo, a partir de uma combinação de elementos como a aplicação de certo modelo de aprendizagem, concretização de um projeto didático do professor e escolha do tipo de situação em que o software deve intervir. Seguindo a essas perspectivas, o autor atribui aos softwares tipologias que podem ser associadas ao behaviorismo, ao instrucionismo e ao construtivismo.

Classificamos o *Vetores* como do tipo construtivista, tendo em vista que “os softwares seguindo o modelo construtivista criam no âmbito computacional condições e ferramentas para expressão e resoluções de problemas. Nessa categoria colocamos os micromundos e simulações” (BELLEMAIN, 2003, p.2).

Sendo esse, o *Vetores*, um ambiente computacional de geometria dinâmica, acreditamos poder associá-lo a tipologia de micromundo colaborativo, posto que

sejam características de sua proposta o desenvolvimento conceitual e a resolução de problemas através de interação social e manipulação de registros.

Por se tratar de um campo de experimentação e conseqüente construção de conhecimentos podemos associar a esse sistema características de tutelado e de descoberta guiada, visto que o aprendiz é sujeito ativo na construção do seu conhecimento e o que o protótipo oferecerá é apenas uma modelização das representações geométricas e numéricas de vetores bidimensionais que o sujeito insere, operacionaliza a partir das ferramentas disponíveis e que serão descritas adiante e manipula através de uma interação direta com a tela do computador.

Vimos na restrição da dimensão do espaço ao  $R^2$  imposta ao *Vetores* uma limitação, porém não uma impossibilidade a realização de algumas atividades, pois foram oferecidas a manipulação e a transformação simultânea entre os registros algébricos e numéricos em representação bidimensional, conforme as perspectivas citadas anteriormente e atendendo aos propósitos da fundamentação teórica desse estudo. Contudo, acreditamos que as contribuições oferecidas à aprendizagem dos objetos centros dessa pesquisa sejam aquelas que já evidenciamos na descrição de suas funcionalidades e que também estão fortemente relacionadas à manipulação das representações a partir das ferramentas disponíveis.

## 7.2 INTERAÇÃO E INTERFACE

O tipo de interação é importante característica das interfaces de softwares educativos e importante decisão para o seu desenvolvimento, sobretudo no que se diz respeito às modelagens comportamentais e epistemológicas que se deseja assumir. Entretanto, segundo Ballachef e Bellemain (2002),

um estudo crítico do problema de design de TEL convida a ir além nosso foco habitual sobre a representação do saber, e mesmo além da interação, para chegar ao ponto onde os dois convergem para suportar e legitimar aprendizagens: controle e validação (p.21).

Os autores acrescentam, ainda, que tal situação remete para a capacidade de suportar a possibilidade de o próprio sujeito validar as respostas de suas atividades e que dessa maneira, a questão da validação sobrepõe-se a questão do design.

Nessa trajetória, pensamos no *Vetores* como um sistema prototípico que oportuniza a manipulação das suas representações a partir de suas propriedades,

mas que deixa a cargo do aluno inferir, através da dedução ou do raciocínio lógico as suas considerações e a cargo do professor a tarefa de avaliar as atividades desenvolvidas. Assim, em interação direta com o computador, o sujeito conjectura, infere, deduz e produz conhecimento a partir dessa interação.

Além da interação com a representação do objeto, o *Vetores* também considera outro tipo de interação: a interação entre indivíduos. Entendendo que a produção de conhecimento é dada a partir da interação (com os artefatos e com os indivíduos), estabelecemos que a interação nesse ambiente a ser construído devesse acontecer em dois níveis complementares: a interação com o objeto mediada pelo computador e a interação com os demais sujeitos.

Na interação com o objeto o sujeito é ativo e passivo nas transformações sofridas por esse durante as interações do sujeito com o artefato. A figura 5 demonstra o modo como esses dois níveis de interação são previstos a ocorrerem no funcionamento do protótipo, em dois ciclos de construção de conhecimento: o pessoal e o grupal.

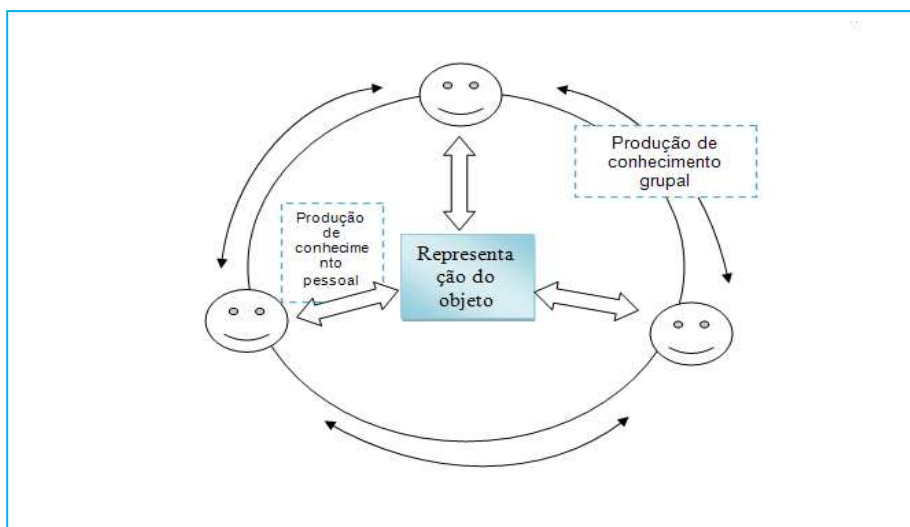


Diagrama 2. Interações entre sujeito e objeto e entre sujeitos.

Nesse sentido, consideramos que o sujeito é ativo de sua aprendizagem, pois durante os processos de manipulação dos registros de representação dos objetos ele modifica suas apreensões em respeito a esse, construindo o conhecimento pessoal. Adicionalmente, a partir dessa manipulação, os demais sujeitos podem visualizar as modificações nos registros e transformar, passivamente, às suas apreensões sobre o mesmo objeto, em um ciclo de produção de conhecimento grupal. Esse movimento de produção de conhecimento (pessoal e grupal) é cíclico, e as relações entre sujeito e objeto e entre sujeitos são dialéticas.

Deste jeito, para que essas interações (expostas na figura 5) ocorram de uma maneira satisfatória, o trabalho a ser relacionado com a interface é de caráter providencial. Nesse sentido, a abordagem com design para interfaces educativas é imprescindível para o desenvolvimento de ferramentas computacionais que atentem para esse fim.

Segundo Ballachef e Bellemain (2002),

se os conhecimentos construídos nessas atividades dependem do sistema formal implementado, as interfaces de manipulação dos operadores como as representações concretas dos objetos e relações desse sistema têm também um papel central nessa construção de conhecimentos do sujeito (p.22).

Tal fato é decorrente de ser a interface o meio em que as interações são dadas. Nesse sentido, no desenho da interface do *Vetores*, disposta na figura 24, a seguir, foram estabelecidas características que estão apresentadas a seguir.

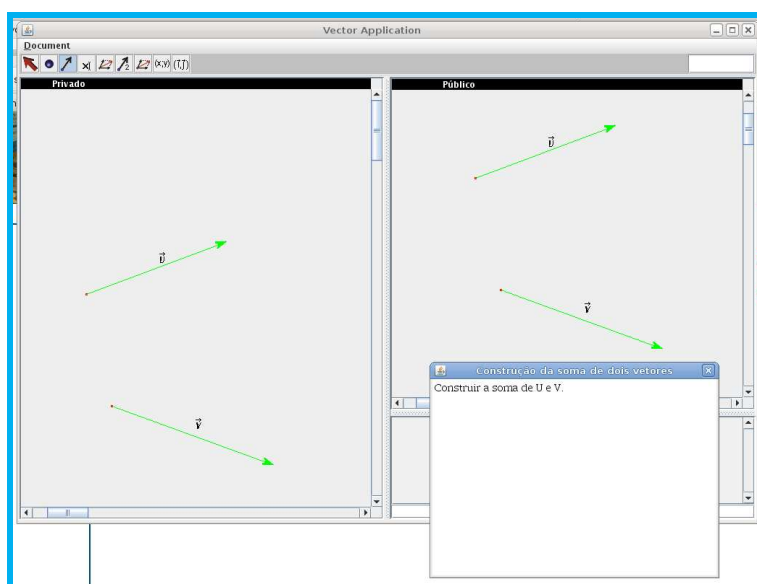


Figura 24. Interface do *Vetores*.

### 7.2.1 Ferramentas e funções

Por se tratar de uma ferramenta para a aprendizagem de objetos de domínios bastante específicos, como os de dependência e independência linear, o *Vetores* possui atalhos (botões) para o uso de algoritmos específicos a essas atividades conforme podem ser visualizados na figura 24, responsáveis pela manipulação direta desses objetos.

Constaram do desenvolvimento prototípico do *Vetores* as ferramentas dispostas a seguir:

- a) Inserir/Excluir: ferramenta responsável pela inclusão de objetos geométricos

no campo de manipulação e exclusão dos objetos selecionados. Pode relacionar-se a inclusão de pontos ou vetores.

- b) Adição entre vetores: operacionaliza a adição entre vetores mostrando o vetor resultante dessa soma e a sua representação numérica. A visualização do novo vetor vai depender do novo ponto de origem que o sujeito indicar.
- c) Decomposição de vetores: decompõe os vetores em outros dois dependendo de uma base que pode ser a convencional (representativa das direções horizontais e verticais) ou outra determinada pelo sujeito.
- d) Multiplicação por escalar: multiplica o vetor selecionado por um escalar (número real) e apresenta o novo vetor resultante dessa multiplicação e dependente do vetor selecionado. Essa multiplicação é associada à outra ferramenta que é a de escalar dinâmico.
- e) Escalar dinâmico: permite a mobilização/manipulação do escalar responsável pela multiplicação do vetor selecionado e altera simultaneamente o vetor resultante do produto e consequentemente as suas coordenadas numéricas.

## **7.2.2 Telas de produção individual e coletiva**

A interface apresentada pelo *Vetores* oferece, inspirada por aquela oferecida pelo *Tabulae Colaborativo* (GUIMARÃES, 2008), uma área de produção privada, de forma a favorecer o ciclo de produção de conhecimento individual e outra responsável pela produção pública e que possibilita a construção do ciclo de construção de conhecimento grupal. Na figura 24, acima, é possível identificar essas áreas de produção.

A escolha por esse tipo de interface foi orientada a partir da necessidade de inserir condições de comunicação com o registro matemático no sistema, tendo em vista os requisitos suscitados. Acreditamos que, com esse tipo de distribuição, a solução prototípica oferece importantes condições de propiciar a comunicação e a negociação, importantes elementos a serem considerados no processo de construção de conhecimento pessoal e grupal (STAHL, 2006).

Desta maneira, seguimos com a proposta de interface oferecida pelo *Tabulae Colaborativo*, avançando em aspectos como o gerenciamento de grupos de alunos e de atividades, explicitados nos requisitos e demonstrado na figura 25 a seguir.

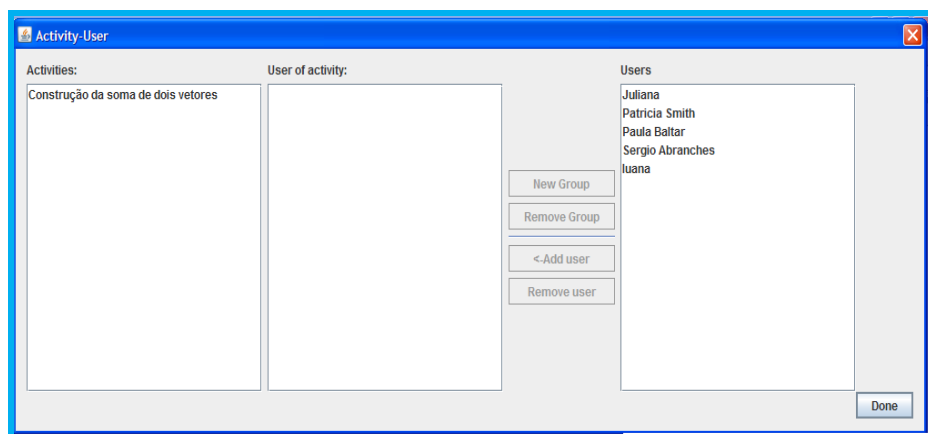


Figura 25. Sistema de gerenciamento de grupos.

### 7.2.3 Chat matemático

Durante o levantamento das dificuldades de aprendizagem de objetos matemáticos em contexto de Educação Online, verificou-se que as dificuldades de comunicação com símbolos matemáticos em ambientes colaborativos são um importante entrave a colaboração. Nesse sentido, como contrapartida a permissão para a comunicação a partir de registros geométricos, a inclusão de símbolos matemáticos nos discursos disponíveis em chats foi uma alternativa de superação bastante positiva, viabilizando assim, as discussões em conteúdos matemáticos.

Contudo, apesar de compreendermos que não atingimos o nível idealizado de flexibilidade para a comunicação com os símbolos matemáticos no chat, acreditamos ter conseguido realizar isso de forma mais flexível do que a disponível no WIRIS (<http://www.mathsformore.com>), por exemplo.

### 7.2.4 Box permanente para enunciados e resumo de atividades

Outra característica adicionada a partir do levantamento de requisitos foi o acréscimo de um box de diálogo permanente, do tipo pop-up, que permite a exposição do enunciado da atividade para aqueles que comparecerem depois do início da seção. Este Box também deve disponibilizar o resumo da atividade. A imagem desse item está disponível na figura 25.

## 8 ETAPA IV: VALIDAÇÃO DO PROTÓTIPO VETORES

Para que houvesse a validação da hipótese de que os requisitos necessários aos ambientes computacionais de aprendizagem à distância dos objetos de dependência e independência linear estão relacionados à geometria dinâmica e a CSCL, por permitir a comunicação e a manipulação a partir do objeto vetorial geométrico, consideramos a necessidade de realização de um experimento de ensino.

Nesse sentido, o objetivo dessa etapa é o de avaliar se os requisitos levantados para a elaboração do protótipo são responsáveis pela compreensão dos objetos supracitados tanto em referência a compreensão dos objetos enquanto relação posicional e quanto à relação proporcional condicionada a eles. Dessa maneira, o experimento foi composto de sessões de atividades que contribuíram para a verificação desses aspectos e que foram posteriormente analisadas.

Para essa etapa do estudo, utilizamos a abordagem metodológica oferecida pelo *Design Experiments* (COBB et al, 2003), por compreendermos que esta nos oferece maior flexibilidade na representação de possíveis formas de aprendizagem, conforme descrito na abordagem exposta no Capítulo 4 desse estudo.

### 8.1 OS SUJEITOS

Foram selecionados para contribuir com essa etapa do estudo, quatro sujeitos pertencentes à amostra utilizada na primeira fase de investigação. Tendo em vista o fato de nenhum dos sujeitos haver apresentado o reconhecimento das relações em respeito à proporcionalidade entre as coordenadas nem a relação posicional existente entre vetores linearmente dependentes, selecionamos aqueles que apresentaram em suas respostas o mesmo grau de dificuldades, com a ausência de reconhecimento das relações posicionais e proporcionais existentes entre dois vetores bidimensionais e LD.

Acreditamos que dessa maneira pudemos evitar o equacionamento entre os sujeitos no que remete ao conhecimento obtido anteriormente a realização da sessão. Os sujeitos selecionados foram os sujeitos B, C, D e E, que, a partir desse momento serão identificados como os sujeitos S1, S2, S3 e S4, o que acreditamos não interferir nas análises, visto que devido ao fato de todos haverem apresentando a mesma compreensão equivocada de dependência linear.

## 8.2 DESCRIÇÃO DO CENÁRIO PRELIMINAR DE REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO

Os ensaios desenvolvidos para a validação do modelo computacional foram realizados no laboratório de informática do Polo de Apoio Presencial em que os cursistas recebem o atendimento. Participaram do experimento o pesquisador e os quatro sujeitos previamente estabelecidos.

As sessões de utilização do software tiveram duração de, aproximadamente, duas horas cada e inicialmente havia sido previsto o mínimo possível de participação do pesquisador, o que teve de ser repensado após a realização do estudo piloto, conforme disposto na sessão seguinte. As atividades foram distribuídas ao longo de três sessões.

A primeira delas foi denominada sessão de adaptação dos sujeitos e o seu objetivo é o de possibilitar aos sujeitos a adaptação necessária ao reconhecimento das ferramentas e funcionalidades do *Vetores*. Sua realização foi dada a partir da formação de duplas na resolução da atividade proposta a seguir.

Esboce os vetores dados abaixo, sabendo que  $u = (1,1)$  e  $v = (-1,1)$

- a)  $2u$
- b)  $3v$
- c)  $2u+3v$

Com a formulação dessa atividade, a nossa intenção era a de que o sujeito pudesse, a partir da experimentação, utilizar algumas das ferramentas disponíveis no *Vetores*, compreendendo o seu funcionamento. Não há pretensão de análises para os dados obtidos nessa sessão de adaptação.

A segunda sessão, denominada sessão de cooperação, foi elaborada com o objetivo de oferecer condições de verificação da comunicação e negociação entre os sujeitos, bem como do uso dos registros oferecidos. Também objetiva suscitar a colaboração a estar presente na próxima sessão, e dessa maneira, oferece uma visão unilateral do objeto para cada uma das duplas envolvidas. Assim, enquanto uma dupla desenvolve a compreensão da relação posicional existente entre vetores linearmente dependentes, a outra observa a relação proporcional existente entre as suas coordenadas. As atividades aplicadas foram as seguintes:

#### Dupla 1: relação posicional

Os vetores  $u=(1,2)$  e  $v=(3,4)$  são linearmente independentes. Sabendo que o vetor  $u$  é do tipo  $u=(a,b)$  e o vetor  $v$ ,  $v=(ma,nb)$ , com  $m$  e  $n$  escalares quaisquer, sob quais condições os vetores  $u$  e  $v$  podem ser considerados linearmente dependentes? Conjecture relações posicionais entre os vetores geométricos que representem a (in)dependência linear entre eles.

#### Dupla 2: relação proporcional

Os vetores  $u=(1,2)$  e  $v=(3,4)$  são linearmente independentes. Sabendo que o vetor  $u$  é do tipo  $u=(a,b)$  e o vetor  $v$ ,  $v=(ma,nb)$ , com  $m$  e  $n$  escalares quaisquer, sob quais condições os vetores  $u$  e  $v$  podem ser considerados linearmente dependentes? Conjecture relações numéricas entre as coordenadas dos vetores que representem a (in)dependência linear entre eles.

Na terceira e última sessão, denominada de sessão colaborativa, em que o objetivo foi o de promover a negociações entre os pares e a conversão entre os registros numéricos e geométricos, a organização dos sujeitos foi redistribuída, de forma a promover a troca entre as compreensões desenvolvidas na sessão anterior.

A atividade proposta para essa sessão foi a seguinte.

É verdade que um conjunto de três vetores bidimensionais é sempre linearmente dependente? Justifique isso a partir do argumento geométrico. É possível observar isso a partir da relação entre os registros numéricos? Por quê?

As configurações pressupostas nesse cenário preliminar de realização do estudo não foram mantidas integralmente, visto as necessidades de alterações que foram salientadas após a realização do estudo piloto, conforme disposto a seguir.

### 8.3 O PILOTO

Inicialmente aplicamos um estudo piloto com o intuito de observar a existência de possíveis ineficiências a serem encontradas na estrutura de organização das atividades ou, ainda, na formulação das mesmas, tendo em vista a importância da antecipação para a aplicação do *Design Experiments*, tendo em vista a possibilidade de novos efeitos serem identificados durante o processo, ressignificando o modelo

proposto e acarretando transformações, como prevê Cobb et al (2003).

Assim, foram iniciadas as sessões com a colaboração de quatro sujeitos, distintos daqueles que foram candidatos ao estudo final, mas que atendiam aos mesmos requisitos. As sessões foram aplicadas conforme o diagrama 3, apresentado a seguir.

Já a partir da realização da sessão de adaptação, foram percebidas necessidades de alterações dos textos das atividades, visto que a maneira como foi descrito atrapalhou a compreensão dos usuários acerca do que deveria ser realizado com o *Vetores*. Optamos, então, pela elaboração de textos menos formais e mais objetivos, conforme dispusemos na sessão seguinte.

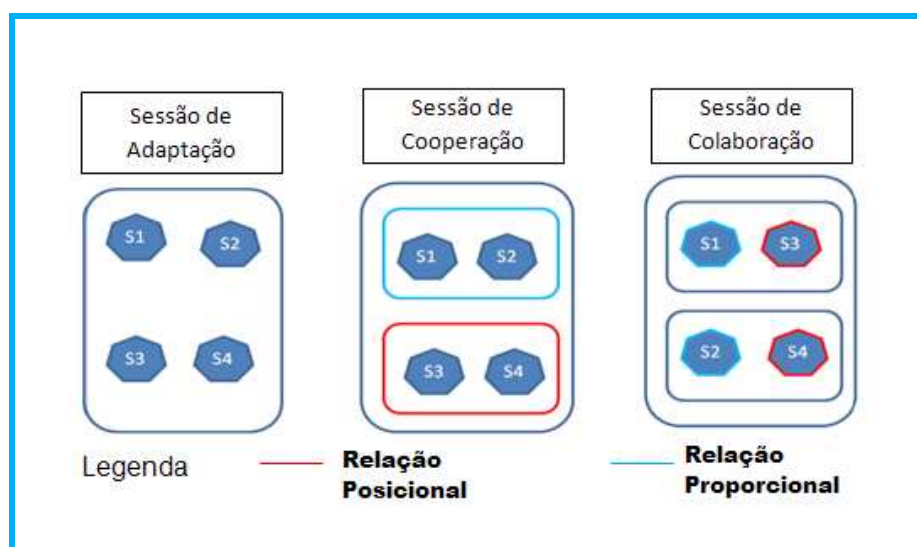


Diagrama 3. Estruturação preliminar das sessões.

Outro aspecto considerado diz respeito à relação existente entre as habilidades dos sujeitos com o uso de softwares e de sistemas de mensagens instantâneas e a configuração das sessões disposta no diagrama 3. Com a realização do piloto percebemos a possibilidade de não conclusão do experimento em virtude percepção das dificuldades apresentadas por um dos sujeitos em não ter habilidade em manusear o mouse e até mesmo agilidade em descrever as suas formas de pensar em um teclado de computador, prejudicando o seu desempenho na atividade.

Assim, optamos por realizar mudanças nos pares, agrupando-os por afinidades com a tecnologia, visto que os diferentes ritmos poderiam interferir no sucesso da atividade. No entanto, percebemos que essa alteração não foi bem

sucedida. A dupla com menor agilidade em tecnologia não avançou em suas atividades e percebemos que o domínio de habilidades em manuseio de aportes como os oferecidos pelo *Vetores* influenciou nos resultados a serem obtidos.

Acreditamos, contudo, que esse fato constitui-se em importante elemento de análise e a homogeneização da amostra com sujeitos que detivessem tal habilidade poderia deturpar considerações a serem realizadas com respeito à diversidade do público presente na EAD. Outro aspecto a ser considerado é que tal homogeneização prejudicaria a reprodução da complexidade presente em uma ecologia de aprendizagem, elemento necessário a realização de um *Design Experiments*, conforme afirma Karrer (2006).

Desta maneira, transformações na configuração da realização das sessões no que remete a introdução de um mediador para a realização das atividades com cada sujeito foram uma solução encontrada por nós para esse entrave. A nova configuração das sessões e demais alterações serão descritos na sessão seguinte.

#### 8.4 DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

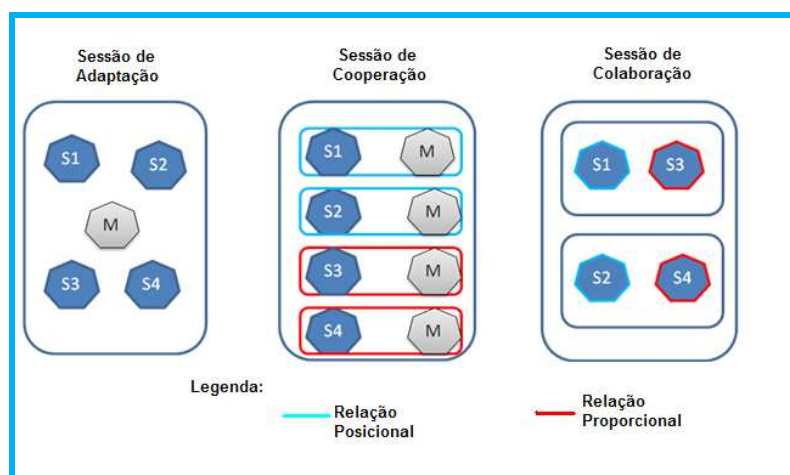


Diagrama 4. Estruturação definitiva das sessões.

A configuração das sessões do experimento e que foi definida após a realização do estudo piloto é a que se encontra descrita no diagrama 4. Nele percebe-se que houve alteração estrutural, mas que os caracteres de cooperação e colaboração foram mantidos tendo em vista favorecer as contribuições inerentes à Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador (STAHL, 2006). Embora os textos das atividades tenham sofrido alterações, os seus objetivos e critérios de

análise foram mantidos como aqueles premeditados na versão preliminar das sessões.

#### 8.4.1 A sessão de adaptação

A sessão de adaptação aconteceu em caráter presencial no laboratório de informática do Polo de Apoio Presencial e participaram dessa etapa os quatro sujeitos e o pesquisador, que durante essa e a segunda sessão atuou como mediador, importante elemento introduzido após o estudo piloto. Teve a duração de aproximadamente 90 minutos e transcorreu a partir da realização da atividade seguinte. Conforme dito anteriormente essa sessão não teve o intuito de ser analisada e, dessa maneira, seus dados não constarão nas análises.

Sabendo que  $u = (1,1)$  e  $v = (-1,1)$ , esbocem o vetor resultante da operação  $2u + 3v$ .

#### 8.4.2 A sessão de cooperação

Na sessão seguinte, a de cooperação, os sujeitos foram levados a realização das atividades dispostas a seguir.

Sujeitos S1 e S2: relação posicional  
Observe os pares de vetores  $u = (1,2)$  e  $v = (3,4)$ . Sabendo que eles são linearmente independentes, estabeleçam relações geométricas que afirmem isso. E o que dizer sobre os vetores  $u = (1,2)$  e  $t = (2,4)$ ?

Sujeitos S3 e S4: relação proporcional  
Observe os pares de vetores  $u = (1,2)$  e  $v = (2,4)$ ?. Sabendo que eles são linearmente dependentes, estabeleçam relações em suas coordenadas que afirmem isso. E o que dizer sobre os vetores  $u = (1,2)$  e  $t = (3,4)$ ?

Conforme o esquema disponível diagrama 4, diferentemente do que havia sido proposto na estrutura anterior, não mais houve a organização dos sujeitos em duplas e estes passaram a realizar suas atividades com um auxílio de um mediador de forma em que estes se encontrassem em salas diferentes. As sessões ocorreram individualmente tiveram a sua duração prevista para uma hora.

Foram previstas algumas estratégias de solução de modo a planejar as ações e retroações que deveriam acontecer durante o processo de mediação. Duas dessas

possibilidades são as que explicitamos a seguir conforme o tipo de relação a ser compreendida na atividade.

Inicialmente era esperado que os sujeitos introduzissem os vetores nas áreas de construção pública ou privada e, intuitivamente, tentassem estabelecer uma posição que correspondesse às coordenadas solicitadas, tomando como base as coordenadas ortonormais (ou retangulares) já conhecidas. Posteriormente, para validar as coordenadas obtidas, os sujeitos deveriam antecipadamente inserir vetores e tomá-los como base, procedimento já verificado na sessão de adaptação e que poderia ser considerado como opcional para aqueles que realizaram atividades atreladas à relação posicional.

Outra opção seria a de iniciar a atividade já inserindo os vetores a serem tomados como base para posteriormente inserir os vetores a serem observados, solicitando a inserção de suas coordenadas. O mais esperado é que, nesse caso, os sujeitos posicionem os vetores da base em posição ortonormal viabilizando a localização intuitiva dos vetores na posição solicitada. A partir daí, é possibilitado ao sujeito à localização do vetor em respeito à visualização da coordenada quer seja em respeito a manipulação do próprio vetor, quer seja em respeito a manipulação da base.

A participação do mediador nessa sessão é bastante incisiva e deve oferecer suporte para questões relacionadas tanto às questões operacionais do uso do protótipo como àquelas relacionadas aos demais objetos que podem estar relacionados ao desenvolvimento da noção de dependência linear, como base e subespaço, caso esses venham a ser introduzidos no diálogo. Essa participação é bastante importante tendo em vista que além de recurso para a coleta de dados, essa sessão também serve de acesso à sessão seguinte, que é a sessão de colaboração.

#### **8.4.3 A sessão de colaboração**

Na sessão de colaboração, com menor intervenção do mediador e dispostos em dupla, os sujeitos foram levados a realização da atividade seguinte. De acordo com o que está disposto no diagrama 4, as configurações expostas no piloto foram mantidas e, dessa maneira, suas prerrogativas também. Houve apenas uma alteração no enunciado da questão, mas que em nada alterou os critérios de análise estabelecidos.

É verdade que um conjunto de três vetores bidimensionais é sempre linearmente dependente? Justifique.

Nessa sessão a participação do mediador foi reduzida para que os processos relativos às negociações pudessem ser evidenciados. As sessões tiveram duração de aproximadamente 120 minutos. Algumas das estratégias de resolução são as que dispomos a seguir.

É possível que a sessão seja iniciada com os sujeitos afirmando que essa afirmação seja negativa, considerando que os três vetores podem não estar alinhados ou não apresentar uma relação proporcional entre as suas coordenadas, o que implicaria a eles serem LI. Nesse Caso, é necessário que o mediador interfira na sessão e introduza a definição de dependência linear a partir das noções de combinação linear e de subespaço, oportunizando a eles que compreendam que o terceiro vetor poderá ser escrito como combinação linear dos dois primeiros a partir da verificação. É possível que os sujeitos que participaram das sessões de cooperação que abordaram relação posicional consigam mais rapidamente associar as definições à relação posicional visto a possibilidade de visualização dessa condição na soma entre os vetores.

Também pode ser necessário que o mediador sugira aos sujeitos a construção de um modelo geométrico da combinação linear entre dois vetores para que eles, a partir disso, percebam a noção de dependência linear.

## 8.6 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos a partir da resolução das atividades com o uso do *Vetores* foram coletados a partir das capturas de tela e de áudio realizadas pelo software Free Screen Recorder e de entrevistas. A apresentação desses resultados ocorreu a partir da consideração de dois sentidos, longitudinal e extensivo, conforme apresenta a figura 26 abaixo.

Enquanto no sentido longitudinal, as apresentações serão realizadas tendo em vista cada sujeito em sua sessão, as apresentações de resultados em caráter extensivo possibilitarão a visão mais abrangente desses resultados, tomando como referência a variação entre os sujeitos.

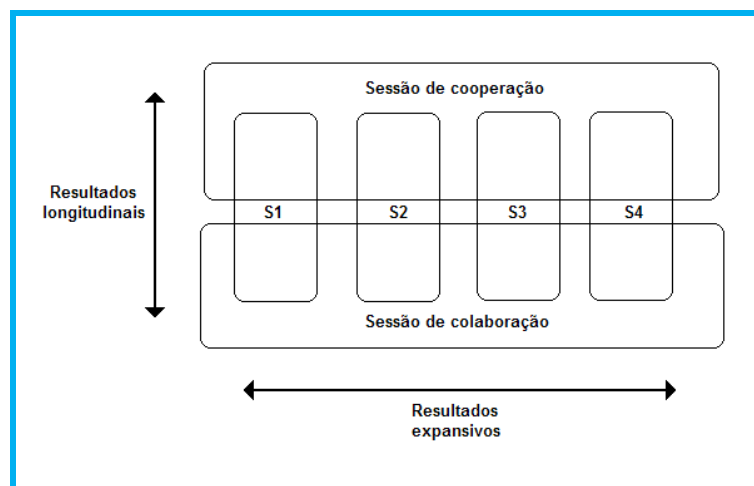


Figura 26. Modelo de apresentação dos resultados.

### 8.6.1 Resultados longitudinais das sessões

Participaram da sessão de cooperação os quatro sujeitos predeterminados e o mediador, conforme disposto no diagrama 4, e destes, apenas dois conseguiram concluir as atividades propostas. Foram eles os sujeitos S1, S2, S3 e S4.

#### 8.6.1.1 Resultados do sujeito S1

O sujeito S1, com 22 anos de idade, apresenta habilidade para o uso de sistemas de mensagens e de manipulação das ferramentas do software, parecendo ter afinidade com a utilização de artefatos computacionais. Inicia, empolgado, a atividade e faz alguns comentários sobre a necessidade de uma barra de rolagem automática no chat, para facilitar a comunicação.

Durante o desenvolvimento de sua atividade demonstrou ter dificuldades em utilizar a ferramenta inserir coordenadas visto o não reconhecimento da necessidade de inserção da base para a realização dessa operação, insistindo em solicitar as coordenadas sem elicitar uma base para isso durante 21 minutos.

O sujeito também apresenta entraves com a inserção das coordenadas, com dificuldades em localizar os vetores na coordenada adequada, demonstrando não compreender a relação existente entre os vetores e a base inserida. Durante aproximadamente 40 minutos o sujeito tenta posicionar o vetor na coordenada (1,2) e, não conseguindo, torna-se impaciente, levando o mediador interferir transformando a base em ortonormal, de forma a verificar se desta maneira o sujeito conseguiria identificar a posição adequada.

Após mais 13 minutos de tentativas, a mediador interfere presencialmente e demonstra como o procedimento deve ser realizado. A partir desse momento, o

sujeito mostrou-se bastante impaciente passou a afirmar que essa atividade estava sendo bastante estressante e afirma que se o *Vetores* possuísse uma janela de inserção das coordenadas, à semelhança do Geogebra, seria mais fácil.

Após isso, o sujeito S1 continua a dar continuidade a atividade, tentando localizar o vetor na posição do vetor  $v=(3,4)$  e consegue. E em seguida repete o mesmo procedimento para  $t=(2,4)$ . Inicialmente, ao observar os vetores o sujeito não consegue realizar nenhuma inferência sobre os vetores e o mediador interfere perguntando o que ela percebe de diferente entre os pares  $u$  e  $v$  e entre  $u$  e  $t$ ? O sujeito falou sobre o afastamento existente entre esses vetores, mas afirma não entender o que está sendo solicitado na atividade. Quando questionado sobre o que e fato ele não estava entendendo, o sujeito afirma não saber explicar.

Sobre esse sentido, consideramos aspectos relacionados à comunicação, visto que S1 parece ter também apresentado algumas dificuldades apesar de possuir habilidade para o uso de sistemas de mensagens instantâneas. Nesse sentido, o sujeito apresentou por diversas vezes necessidade de comunicação oral, o que pode ser compreendido na transcrição do arquivo de áudio quando faz afirmações como “...*não tem um microfone aqui, não...esse negócio devia ter um microfone*”.

Após isso, o sujeito levantou-se do seu computador e foi ao encontro do mediador, que se encontrava em outro ambiente, para falar o que havia entendido. O sujeito afirmou: “...*veja se entendi certo...os vetores são linearmente dependentes se estão na mesma linha, não é isso? Como posso escrever isso lá?*”.

#### 8.6.1.2 Resultados longitudinais de S2

O sujeito S2, com 43 anos de idade, não é utilizador de sistemas de mensagens instantâneas e declara possuir dificuldades no uso de artefatos computacionais.

O início da atividade foi marcado pela solicitação desse sujeito para que o mediador-pesquisador permanecesse na mesma sala em que ele, visto que este afirmou não se sentir preparado para utilizar o *Vetores* sozinho. O mediador-pesquisador informou ao sujeito que inicialmente isso não seria possível, mas que, conforme o andamento da sessão, essa possibilidade poderia ser revista, de forma a deixá-lo mais à vontade com a realização do experimento e inicia a sessão com cada um em uma ambiente físico distinto.

Entre as dificuldades que apresentou na resolução de suas atividades, encontra-se a dificuldade de utilização da ferramenta inserção de vetores. O sujeito pareceu não ter se adaptado ao sistema durante a sessão de adaptação e mostrou bastante dificuldade em inserir os vetores, aplicando vários cliques em um mesmo lugar e gerando vetores nulos que para o sujeito pareciam desconfigurados, como pode ser visto na figura 26.

O sujeito também apresentou entraves ao manipular os vetores, por não conseguir coordenar-se para realizar a sequência de clicar e segurar, arrastar e soltar. Por diversas vezes o procedimento não era realizado pois o sujeito não apresentava firmeza para tocar a região do vetor, inserindo, novamente, vários cliques.

Devido a essas dificuldades, houve a preferência do sujeito ao uso exclusivo da área privada, o que em um possível processo de negociação à distância poderia ser bastante prejudicial.

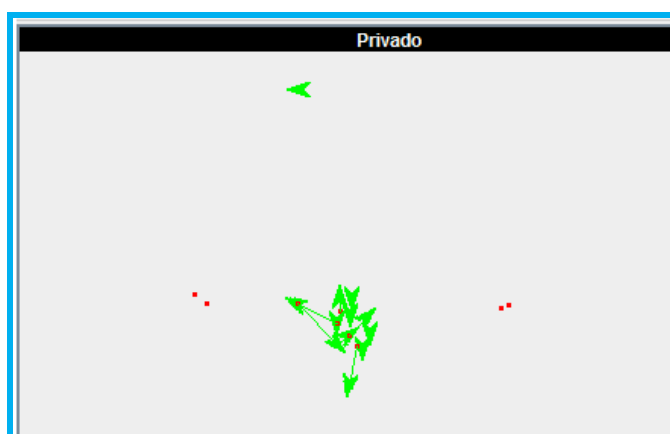


Figura 27. Inserção de vetores por S1.

Outra dificuldade reconhecida foi a de dialogar no chat durante a sessão, visto que se percebeu que o sujeito S2 também apresenta dificuldades em utilizar o chat, levando 15 minutos para digitar as mensagens dispostas na figura 27.

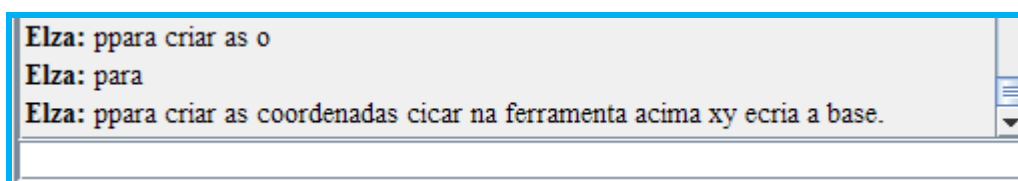


Figura 28. Dificuldades de uso do chat por S1.

No caso desse sujeito, tais dificuldades estiveram diretamente ligadas à ausência de habilidade para o uso de sistemas de mensagens instantâneas, com problemas com a agilidade em escrever e responder aos questionamentos deixados no chat ao mesmo tempo em que tentava manipular os vetores na tela. Estas dificuldades acarretaram no constrangimento para esse sujeito que afirmou perceber que não estava contribuindo para o estudo e que dessa forma preferia abandonar a sessão.

Devido a isso a comunicação com esse sujeito aconteceu por intermédio da fala e com o auxílio do mediador para a utilização do software, de forma a evidenciar os aspectos que dificultaram o seu uso.

Durante esta forma de realização da atividade, percebeu-se que por diversas vezes esse sujeito tentou gesticular, demonstrando uma representação do que queria fazer na tela do computador, mas não conseguia, chegando a afirmar que a dependência estaria relacionada aos vetores estarem “juntos”.

O sujeito afirmou ainda, que entendia a atividade, mas sempre teve problemas com uso do computador, já *“que nunca acessou o ambiente virtual sozinha e havia aprendido a mandar email a pouco tempo. Quando precisava mandar alguma coisa quem mandava era o meu filho”*.

Nesse caso, não nos foi possível inferir as dificuldades relacionadas aos registros de representação, visto que a inserção deles foi impossibilitada, todavia, as dificuldades por esse sujeito apresentadas constituíram para nós importantes inferências a serem abordadas na análise extensiva.

#### 8.6.1.3 Resultados longitudinais de S3

O sujeito S3 também apresentou habilidades em uso de sistemas de mensagens instantâneas e em demais artefatos computacionais. Com 24 anos de idade, inicialmente já se apresenta bastante à vontade para o uso da área pública de construção e com facilidade para o uso das ferramentas disponíveis, apesar de não reconhecer a princípio a necessidade de inserção de uma base para a posterior exposição das coordenadas dos vetores inseridos.

Apresentou, inicialmente, dificuldades de utilização da ferramenta inserir coordenadas, utilizando ferramentas não destinadas a isso, escalar dinâmico e tentando multiplicar um vetor pelo outro, e depois não reconhecendo a necessidade de inserção de uma base.

Outra dificuldade evidenciada foi a de localizar o vetor na coordenada adequada, confundindo, por algumas vezes o vetor da base com o a ser inserido. Diferente de S1, esse sujeito consegue reconhecer a relação existente entre os vetores da base e os demais vetores, localizando também as coordenadas desejadas a partir da mudança de base e localizando os vetores da base em posição ortonormal. Afirma “estou gostando desse software”.

Por várias vezes o sujeito tenta unir os vetores pelas suas origens, tentando arrastá-los por seu corpo e não por suas extremidades, até perceber que esse não é o procedimento adequado para essa manipulação. Após conseguir, tenta localizar as coordenadas intuitivamente até o momento em que percebe uma relação lógica entre as coordenadas desses vetores e a posição da base ortonorma, à semelhança da localização do vetor em um plano cartesiano. Por vezes percebe-se que o sujeito prefere modificar a base para encontrar as coordenadas adequadas até o momento em que ele percebe o fato de os vetores da base não modificarem suas coordenadas quando arrastadas, como disposto na figura 28.



Figura 29. Modificação dos vetores da base por S3.

O sujeito apresenta dificuldades em localizar a coordenada exata e utiliza valores aproximados para a realização de sua atividade, como pode ser visto na figura 28. Após aproximadamente 50 minutos o sujeito consegue localizar a coordenada adequada e começa inferir as suas conjecturas sobre a atividade. O mediador sugere que o sujeito inicie verificando a existência de relações entre as coordenadas de  $u$  e  $v$  e o sujeito o faz, inserindo em seguida o vetor  $t=(2,4)$ . O mediador orienta que o sujeito acrescente o par ordenado  $(2,4)$  nas relações a conjecturar.

O sujeito utiliza a ferramenta multiplicar por um escalar e realiza essa

operação com o vetor  $u=(1,2)$  como mostra a figura 29.

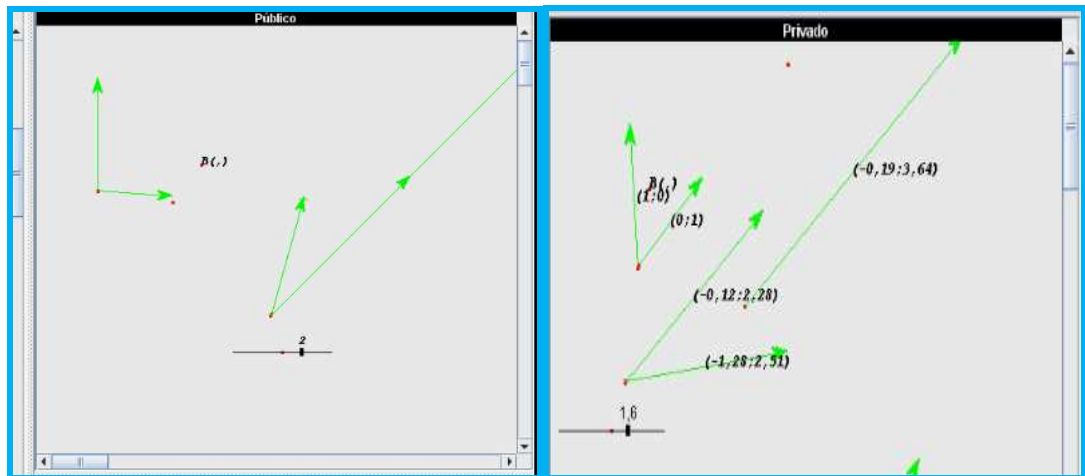


Figura 30. Uso da ferramenta multiplicação por escalar pelo sujeito S3.

Percebe-se que, apesar de o sujeito conseguir determinar uma relação entre os vetores, ele não consegue justificá-la, o que fica evidente quando o sujeito é questionado sobre qual é o vetor que se espera da multiplicação de  $(2,4)$  pelo escalar 2 e o sujeito imediatamente responde que se trata do vetor  $(4,8)$ , afirmando que  $(2,4)$  e  $(4,8)$  são LD. O fato é confirmado quando é indagado sobre as relações existentes entre os pares  $(2,4)$  e  $(8,16)$  e entre os vetores  $(3,7)$  e  $(8,10)$ .

O sujeito tenta por cinco vezes formular uma resposta até o momento que afirma que *“Os primeiros vetores são LD, pois  $(8,16) = 4 \cdot (2,4)$  enquanto que o outro par é LI, pois só seria LD se o segundo vetor fosse  $(6,14)$ ”*. O mediador percebe, então, que a relação adequada foi estabelecida pelo sujeito, apesar de este não conseguir argumentar sobre ela.

#### 8.6.1.4 Resultados e análise longitudinal do sujeito S4

O sujeito S4, com 47 anos de idade apresentou dificuldades no uso do aplicativo por não apresentar agilidade para digitar as suas inferências por escrito e reconhecendo suas dificuldades de manuseio com soluções tecnológicas. Durante, aproximadamente, uma hora de contato com o protótipo *Vetores*, esse sujeito conseguiu escrever apenas quatro frases, levando em torno de nove minutos para concluir a primeira delas.

Percebida as dificuldades de o sujeito de comunicar-se por intermédio do chat, uma comunicação oral mais efetiva foi realizada com esse sujeito, o que nos permitiu perceber que além das dificuldades de comunicação, esse sujeito

apresentava algumas dificuldades de realizar os procedimentos necessários para a utilização da ferramenta inserir coordenadas.

À semelhança do que foi realizado com o sujeito S2, o mediador precisou interferir incisivamente na sessão de forma a poder capturar as dificuldades relacionadas ao objeto presentes na resolução de sua atividade. O sujeito mostrou-se pouco a vontade em responder às perguntas direcionadas a relação existente entre essas coordenadas dos vetores, mas conseguiu deduzir sobre as relações de que *“os vetores linearmente dependentes são formados por coordenadas que são múltiplas umas das outras”*.

Quando questionada sobre qual a maior dificuldade encontrada por esse sujeito para a realização dessa atividade, ele respondeu que foi a de *ter que escrever para dar as respostas, pois sempre achou muito difícil justificar as respostas, ainda mais de Álgebra Linear, que é muito difícil*. Esse sujeito acredita que não teria tantas dificuldades em utilizar o Vetores, *porque até havia achado fácil na outra atividade [sessão de adaptação], mas hoje a atividade está mais difícil*.

De fato a informação é coerente visto que durante a entrevista esse sujeito pareceu conseguir realizar algumas operações, contudo, mesmo com a ajuda do mediador na orientação dos passos a serem realizados, ele não conseguiu encontrar as coordenadas adequadas essa parte da atividade foi realizada pelo mediador, pois demandava maior esforço motor e o sujeito estava aparentando certo cansaço, visto que já haviam passado quase quarenta minutos de sessão.

Assim como S2, esse sujeito também afirmou ter acessado pouquíssimas vezes o ambiente virtual e nunca ter participado de um chat.

### **8.6.2 Resultados longitudinais da sessão de colaboração**

Devido ao fato de apenas dois dos sujeitos haverem conseguido concluir as atividades referentes à sessão de cooperação, cujo objetivo é o de prepará-los para a participação na sessão de colaboração, possibilitando a observação do fenômeno de conversão de registros a partir do fenômeno da negociação, apenas serão descritos aqui os resultados inerentes realização da atividade pela dupla formada pelos sujeitos S1 e S3. Tentaremos descrever o desenvolvimento da dupla, priorizando a observação do ciclo de produção de conhecimento grupal, e sempre que necessário, fazendo alusão ao ciclo de produção de conhecimento pessoal de cada um dos sujeitos.



sessão anterior favoreceu simultaneamente aos processos de negociação e de conversão entre os registros, conforme pode ser visualizado nos trechos disponíveis nas figuras 32 e 33.

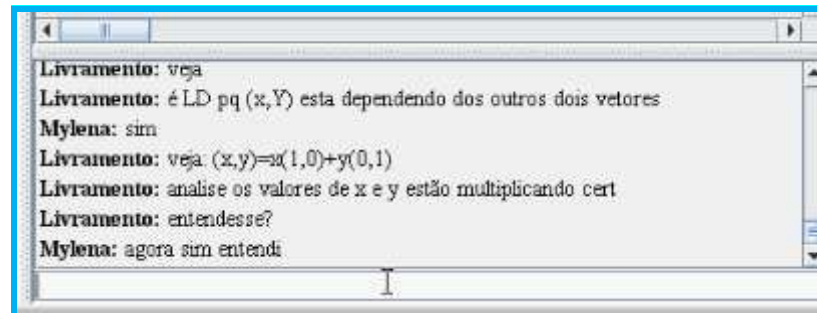


Figura 33. Argumentação com registro algébrico.

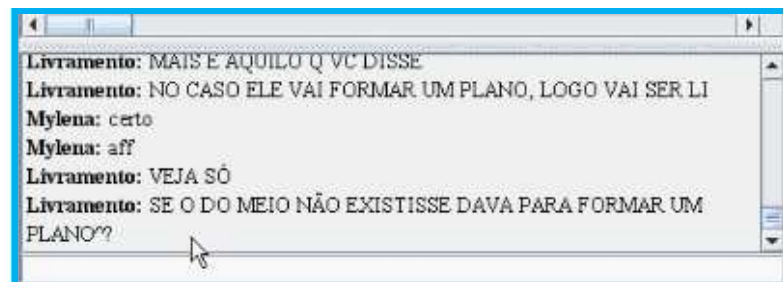


Figura 34. Negociação entre S1 e S3.

A dificuldade de comunicação, a partir da argumentação, foi outro aspecto evidenciado nessa sessão e, sobretudo, para o sujeito S1 que por diversas vezes demonstrou apresentar dificuldades em escrever suas conjecturas, precisando comunicar-se oralmente com a sua dupla ou com a pesquisadora, de forma a descrever suas conjecturas.

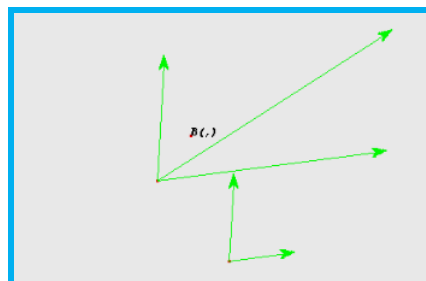


Figura 35. Construção privada de S1.

Na tentativa de justificar as suas conjecturas com o argumento geométrico, o sujeito tentou utilizar a ferramenta decomposição, como mostra a figura 34, tendo em vista a possibilidade de demonstrar o plano formado, mas possivelmente abandonou essa idéia ao ver que não conseguiria explicar, como disposto na figura



para inserção, com um clique na chegada e outro na saída, como apresentadas pelos sujeitos S1, S2 e S4. Para esses sujeitos, a necessidade de clicar e arrastar o vetor parecia mais óbvia que a proposta por nós no *Vetores*, levando-os a apresentar entraves na resolução das atividades de cooperação que apenas foram superados pelo sujeito S1.

Sobre outro aspecto, também foram identificadas inerentes ao manuseio das ferramentas de inserção de coordenadas, tendo em vista à aparente compreensão entre os sujeitos de que o sistema deveria sugerir as bases para eles e não possibilitar a inserção, causando certa confusão entre as representações geométricas a serem manipuladas e as representações geométricas referidas à base, conforme percebemos nas realizações das atividades de cooperação e de colaboração pelos sujeitos S1 e S3.

Percebemos também que essa possibilidade apresenta-se como entrave em respeito ao surgimento da necessidade de apresentação de um vetor geométrico com uma coordenada pré-determinada, como ocorreu com a atividade disposta na sessão de cooperação, em que os sujeitos devem apresentar os vetores  $u$ ,  $v$  e  $t$ , com coordenadas  $(1,2)$ ,  $(3,4)$  e  $(2,4)$ , respectivamente, demandando maior dedicação a realização dessa operação do que da atividade em si. Apenas o sujeito S3 conseguiu estabelecer uma relação entre os vetores da base e as coordenadas dos vetores a serem manipulados de forma recíproca, apesar de nenhum deles aparentar ter conhecimento sobre esse objeto. Esse resultado é condizente com as pesquisas de Dorier et al (1999) que afirmam que boa parte dos alunos dos cursos de Álgebra Linear sai deles sem a compreensão necessária acerca de seus objetos mais elementares.

Em contrapartida às dificuldades identificadas na disposição da sequência para a operacionalização da ferramenta inserção de bases e de coordenadas, é fundamental elencar como benefício que tanto o sujeito S1, como o S3, conseguiram de certa maneira compreender uma noção entre a relação existente entre os objetos geradores, base e independência linear, o que foi mais expressivo no sujeito S3.

Percebe-se também que essa maneira de disposição também beneficiou a realização das atividades de conversão simultânea entre os registros de ordem numérica e geométrica. Percebemos que, devido a isso, ambos os sujeitos participantes das atividades de cooperação e de colaboração foram capazes de realizar a conversão entre os registros com o auxílio dessa ferramenta, sendo o

sujeito S1, o que mais apresentou dificuldade para compreendê-la.

Outra contribuição foi a relacionada à percepção dos sujeitos em respeito a relação posicional e proporcional existente entre os vetores geométricos e proporcionais e que foram viabilizadas pela utilização das ferramentas multiplicação por escalar e soma entre os vetores, percebendo as relações entre esses vetores a partir da visualização da dinâmica atribuída ao movimento dessas estruturas, bem como à conversão entre os registros ocorrida na transformação síncrona entre a mudança posicional do vetor e de sua coordenada.

Em respeito à conversão entre os registros, percebemos que o sujeito S3 transitou mais facilmente que o sujeito S1 entre os diferentes registros de representação oferecidos, conseguindo inclusive avançar para as representações em caráter algébrico. Adicionalmente, percebeu-se que o sujeito S1 conseguiu compreender mais facilmente a noção relacionada à proporcionalidade entre os vetores do que a relacionada à relação posicional entre três vetores bidimensionais.

A inserção do mediador, embora não seja foco do nosso estudo constitui-se em elemento muito importante na condução da compreensão apresentada pelos sujeitos no desenvolver de cada uma das sessões de forma a superar a possibilidade de que os indivíduos encerrassem as atividades com compreensões inadequadas sobre os objetos. Um exemplo disso pode ser atribuído ao momento em que ambos os sujeitos, S1 e S3 acreditaram que três vetores bidimensionais podem ser LI, tendo em vista as limitações oferecidas pelas visões unilaterais oferecidas pelas representações oferecidas.

Ambos os sujeitos conseguiram, ao final das atividades, reconhecer as propriedades associadas às representações em registros diferentes, conforme apresentamos anteriormente, contudo essa compreensão foi atingida de maneira mais difícil pelo sujeito S1 do que pelo sujeito S3. Contudo, percebe-se que, apesar de terem compreendido as relações de alinhamento e de proporcionalidade entre os vetores bidimensionais LD, nenhum dos sujeitos conseguiu argumentar sobre tal compreensão, a demonstrando, ou por meio de um tratamento, como fez o sujeito S3, ou por meio de gesticulação, como fez S1.

### **8.7.2 Aspectos relacionados ao contexto**

Na apresentação dos resultados expansivos relativos à especificidade do contexto da EAD, consideramos os aspectos relacionados à interação entre os pares

e ao nível dessa interação, tendo em vista os seus aspectos relacionados ao êxito e às dificuldades de realização dessa interação.

Conforme já foi descrito em sessões anteriores, era esperada por nós a realização da interação entre os pares a partir de aspectos relacionados à comunicação e à negociação, sendo esta última prevista para ocorrer apenas na sessão de colaboração entre os sujeitos. Apenas os sujeitos que apresentaram condições de se comunicar por intermédio do sistema de chat do *Vetores*, conseguiram concluir a atividade, visto a impossibilidade de realizá-la integralmente sem colaboração à distância.

Nesse sentido, apenas dois dos quatro sujeitos envolvidos na última etapa do experimento conseguiram de fato atingir a comunicação via *Vetores*, o sujeito S1 e S3, pois, diferentemente dos sujeitos S2 e S4, já apresentavam habilidades de uso de sistemas de mensagens instantâneas.

É interessante salientar que, apesar de apresentar essa habilidade para o uso de sistemas de mensagens, S1 também apresentou por diversas vezes dificuldades de comunicação, levando-nos a interferir presencialmente em suas sessões. É importante ressaltar que, conforme a distribuição configurada para a realização das atividades, S1 teve como registro de representação de partida, na sessão de cooperação, o vetor geométrico. Foi nesta sessão que o sujeito apresentou maior dificuldade de se comunicar, apesar de ambos terem apresentado esta mesma dificuldade.

É preciso salientar que essa dificuldade de argumentação também foi responsável dificuldade de comunicação entre o par S1 e S3, sobretudo, no que remete a comunicação no sentido S1/S3. No caso de S3, não houve a argumentação propriamente dita, mas a inserção dos registros, o que necessitou de comunicação oral com menor intensidade.

Outro importante aspecto a considerar, e agora remetente a negociação, foi à percepção clara de que a dificuldade de argumentação apresentada pelo sujeito S1 dificultou, por vezes, a negociação a ocorrer entre o par S1 e S3. Contudo, em todos os momentos em que a negociação se estabeleceu, foi possível perceber a construção colaborativa da compreensão integrativa do objeto, como disposto nas figuras 31, 32 e 33.

Tais dificuldades de argumentação e em nosso caso, conseqüentemente, de comunicação e de negociação, também aparecem em estudos como o realizado por

Karrer (2006) que, na condução de seu *Design Experiments*, necessita também considerar como dados a analisar, os resultados obtidos através da fala dos alunos, visto a dificuldade deles de justificar as suas respostas por escrito.

A ocorrência de inferências orais já havia sido percebida por nós desde o momento da realização da sessão de adaptação, em que os sujeitos, todos localizados no laboratório de informática, tendiam a conversar mais que se comunicar através do sistema, à semelhança do que aconteceu na execução do trabalho de Moraes et al. (2007), quando também percebe que esse fato. Contudo, preliminarmente, acreditávamos que tal dificuldade ocorria tendo em vista a necessidade intuitiva de falar em detrimento da de escrever, possibilidade que foi deduzida como parcialmente verdadeira, porém insuficiente para justificar a complexidade subjacente a essa dificuldade, conforme discorreremos em breve.

As interações ocorridas nas telas de produção ocorreram na grande maioria das vezes, na tela de construção pública, sendo a construção direcionada para o ambiente privado nos momentos em que havia desconforto na comunicação, como foi evidenciado com os sujeitos S1, S2 e S4, ou ainda em momentos de desconforto na interação com o objeto, como apresentaram os sujeitos S2 e S4.

## 8.8 ANÁLISE RETROSPECTIVA

Para a realização das análises retrospectivas tomaremos como norteadores as categorias eleitas a partir das funcionalidades diretoras da elicitación de requisitos apresentada anteriormente, de forma a permitir-nos compreender as interações presentes entre os resultados apresentados e tais classes de requisitos.

Assim, apresentaremos como categorias de análises para tais resultados as questões relativas à geometria dinâmica, à manipulação do registro numérico e à manipulação simultânea entre os registros, contemplando os requisitos inerentes à especificidade dos objetos, bem como àqueles relacionados à especificidade do contexto de aprendizagem, como a comunicação síncrona, o uso de registros matemáticos para essa comunicação e a construção coletiva desses registros.

### 8.8.1 Geometria dinâmica

A inserção dessa funcionalidade foi de fundamental importância para a compreensão de uma das propriedades inerentes ao objeto, que é a da condição de alinhamento entre dois vetores bidimensionais e linearmente dependentes, como

pôde ser verificada no desenvolvimento da compreensão do sujeito S1, durante a sessão de cooperação e do sujeito 2, na sessão de colaboração.

As potencialidades oferecidas pela manipulação das representações geométricas dos vetores a partir de seus registros puderam ser verificadas nas evoluções pertencentes aos resultados longitudinais dos sujeitos S1 e S3, e sobretudo, na construção do conhecimento pessoal de S1, e posteriormente do conhecimento grupal, tendo em vista a observação das propriedades inerentes a essa forma de registro e que possibilitaram a compreensão da noção do plano como subespaço de  $R^2$ .

Conforme observado por estudos como o realizado por Grande (2006) que evidencia a ausência de atividades de conversão entre os registros nas atividades oferecidas por livros didáticos, bem como dos benefícios oferecidos por abordagens com registros de representação de natureza geométrica, tal contribuição possibilitada pela oferta de funcionalidades associadas à geometria dinâmica já nos era esperada, corroborando com estudos que sinalizam para tais benefícios.

Nesse sentido, a importância dos requisitos associados a essa funcionalidade puderam ser diretamente observadas a partir do uso das ferramentas soma entre vetores, multiplicação de vetores por um escalar e escalar dinâmico, possibilitando a identificação de propriedades como no momento em que o sujeito S1 percebe que um vetor e a sua multiplicação por um escalar são sempre LD.

Todavia, é preciso esclarecer que, a exemplo do que foi identificado nos trabalhos realizados por Hillel et al (1999), Karrer (2006), e Bittar (2008), que observaram as contribuições do uso de uma solução tecnológica para a aprendizagem de objetos específicos pertencentes à Álgebra Linear, a introdução dessa funcionalidade foi de fundamental importância para a compreensão dos objetos de dependência linear, não favorecendo, porém, ao desenvolvimento argumentativo inerente ao conhecimento formal relacionado a eles.

Contudo, acreditamos que, apesar desse fato, a introdução de abordagens como softwares de geometria dinâmica apresentou grande contribuição para a introdução ao novo conhecimento e reconhecimento de propriedades elementares inerentes a eles, obedecendo à necessidade de desenvolvimento progressivo da compreensão acerca de tais objetos, como afirmam Dorier e Sierpiska (2001).

Outro importante aspecto a ser considerado, é que, conforme afirma Bellemmain (2007), ao utilizar a manipulação direta oferecida por esse tipo de

sistema, o sujeito pôde utilizar a mesma interface como ambientes de entrada e de saída dos registros, o que acreditamos ter diminuído a distância semântica existente entre estes, constituindo-se em oferta de registro distinta daquela oferecida por papel e lápis.

Apesar dos benefícios evidenciados no desenvolvimento da compreensão dos objetos apresentados pelos sujeitos S1 e S3, percebemos a necessidade de um posterior acompanhamento do design da interface definido para a utilização das ferramentas disponíveis, sobretudo, tendo em vista as dificuldades de utilização apresentadas inicialmente pelo sujeito S1 e integralmente pelos sujeitos S2 e S4.

Apesar de acreditarmos que o fato de os sujeitos tentarem sempre clicar e arrastar os vetores até o ponto desejado, em contrapartida ao procedimento oferecido que é o de dois cliques, é favorecido pela utilização do Geogebra ocorrida durante o curso, faz-se necessária uma análise de melhores possibilidades de interação entre o usuário e a representação do objeto mantendo o sistema de manipulação direta na interface.

Também é preciso relacionar esse problema na interação entre a interface e o usuário no que remete ao procedimento dedicado ao uso da ferramenta inserção de base e de coordenadas a partir da manipulação direta e com a inserção das bases a partir de vetores desenhados na tela. No caso do *Vetores*, essa possibilidade limita o uso do sistema por aqueles usuários que apresentem conhecimentos relacionados a geradores.

### **8.8.2 Manipulação do registro numérico e conversão simultânea entre registros**

A possibilidade de manipulação do registro numérico teve grande importância para a compreensão acerca da propriedade que remete à relação proporcional existente entre dois vetores LD, contribuindo para o desenvolvimento pessoal do Sujeito S3, e posteriormente, para a construção do conhecimento grupal, na perspectiva de colaboração. Como o acesso a manipulação do registro numérico ocorreu a partir do registro geométrico, configurando atividade de conversão entre tais registros, analisaremos seus aspectos em relacionamento intrínseco, evitando a redundância ao discuti-las em categorias diferentes.

Acreditamos que a oferta do registro numérico possibilitou a conversão entre registros não congruentes (DUVAL, 2003), conforme disponível no quadro 2, e que, sobretudo, apresentam dificuldades inerentes a congruência de sentido, conforme

explicitaremos a seguir.

As contribuições dessa funcionalidade para o processo de construção do conhecimento dos sujeitos pôde ser verificada a partir do uso da ferramenta inserção de coordenadas associado ao uso da manipulação de vetores. É importante salientar que as dificuldades apresentadas para o uso dessa funcionalidade estiveram diretamente ligadas à dependência do uso dessa ferramenta para a inserção da coordenada de vetores ao sistema de inserção de bases, a partir da não compreensão acerca desse objeto e da sua relação com os vetores, o que influenciou incisivamente nisso.

Também acreditamos ser necessária a consideração sobre a verificação das coordenadas ser dependente da manipulação do vetor a partir do posicionamento, o que está relacionado a um processo de conversão intrínseco em uma manipulação que acontece no sentido da representação geométrica para a numérica e que, segundo Pavloupoulou (1994) identifica em seu estudo, apresenta maior efeito de não congruência do que a inversa, que seria do numérico para o geométrico.

Nesse sentido, de forma a viabilizar que o processo de conversão se dê de maneira satisfatória, já que, segundo Duval (2004) para que a compreensão integrativa seja dada, faz-se necessário que a conversão entre registros não congruentes aconteça nos dois sentidos, acreditamos que a possibilidade de inserção dos registros de representação de natureza numérica acontecerem também a partir de sua inserção numérica, diretamente no *Vetores*, e não apenas a partir da manipulação geométrica, favoreceria ainda mais a construção do conhecimento a partir de seu uso, diminuindo o custo operacional para a inserção das coordenada dos vetores.

Outro aspecto complicador da utilização dessa ferramenta remete a verificação das coordenadas da base, que sempre indicam a coordenada canônica bidimensional, levando-nos a perceber a necessidade de adaptação sobre tal aspecto, visto que, de acordo com Ballachef e Bellemain (2007), no processo de desenvolvimento de tecnologias educacionais, deve-se atentar para a disposição do conhecimento na interface, inserindo possibilidades de controle e validação das informações construídas.

Contudo, apesar de identificarmos a necessidade de posteriores adaptações na interface do sistema, acreditamos que mesmo com tais necessidades, as contribuições oferecidas à aprendizagem dos referidos objetos pelos sujeitos através

da observação combinada dos dois registros oferecidos foram fundamentais para a compreensão das propriedades evidenciadas e para a constituição da colaboração.

Adicionalmente, acreditamos que a disposição atual dessa ferramenta possibilitaria o desenvolvimento de um experimento para a aprendizagem de objetos como base e geradores, mas como nosso foco de estudo é nos objetos de dependência linear, as indicações de transformação atendem a necessidade de diminuição de custo operacional.

### **8.8.3 Construção colaborativa do objeto**

A construção colaborativa dos objetos teve fundamental influência dos processos de conversão e de negociação a serem dadas, sobretudo no que concerne à sessão de colaboração e à possibilidade de compreensão da relação existente entre a posição de sua coordenada e da base relacionada a eles, conforme discutido anteriormente.

Sobre esse aspecto é possível afirmar que, embora as conversões e, conseqüentemente, as colaborações estiveram diretamente relacionadas à configuração das sessões e estrutura de elaboração das atividades, tais contribuições puderam ser evidenciadas a partir da observação da figura 29, em que os sujeitos constroem um único modelo para conjecturar.

Nesse sentido, a introdução de um sistema colaborativo de construção possibilitou para que os sujeitos pudessem inicialmente, construir conjecturas pessoais e em seguida, analisá-las colaborativamente, em um processo de validação mútuo que permitiu assumir no ciclo de construção de conhecimento grupal as conjecturas validadas e anteriormente pertencentes ao ciclo de construção de conhecimento pessoal, bem como, tomar aquelas conjecturas pertencentes a um ciclo de conhecimento grupal e da mesma forma, conjecturar em conjunto, tentar validá-las individualmente.

Esse movimento, conforme descrito por Lage e Wenger (1991) é representado em nosso estudo pelo diagrama 2 , demonstrando como os processos de interação entre o sujeito e o Vetores e entre os sujeitos foram capazes de ajudá-los a construir a compreensão sobre as propriedades inerentes ao objeto de dependência linear, concebendo tais objetos como relação entre os vetores e não como procedimento, conforme identificado anteriormente no levantamento das dificuldades desses sujeitos.

Um aspecto importante e limitador da colaboração entre os sujeitos teve relação com as limitações impostas à comunicação e que serão discutidas na seção que se segue.

#### **8.8.5 Comunicação síncrona**

A inserção do chat ao protótipo *Vetores* foi de fundamental importância para o estabelecimento dos processos de comunicação e negociação durante a realização das sessões de cooperação e de colaboração que foram desenvolvidas por sujeitos que possuíam habilidades para o uso desses artefatos, ajudando-os a construir o conhecimento social inerente a relação de dependência entre vetores bidimensionais em contextos não presenciais, apesar de algumas importantes dificuldades haverem sido identificadas.

A primeira deles remete à ausência de habilidades técnicas específicas para a realização da comunicação mediada por chat, que é o tipo de sistema comunicacional oferecido pelo *Vetores*. Tal dificuldade foi constatada a partir dos sujeitos presentes nessa etapa do estudo e que não conseguiram concluir as sessões de cooperação por não possuir habilidades técnicas necessárias ao uso desse tipo de sistema, o que, ao que nos parece, estão relacionadas à agilidade de digitar e à objetividade na formulação de frases, dentre outros.

Essa dificuldade pôde ser verificada integralmente na apresentação longitudinal dos resultados dos sujeitos S2 e S4, e parcialmente nos resultados de S1, demonstrando a inviabilidade da realização tanto dos procedimentos necessários à compreensão, conforme descrito anteriormente, quanto a progressão desses sujeitos da sessão de cooperação, em que mesmo interagindo com o mediador, necessitaram de maior ênfase na comunicação oral, para a sessão de colaboração, em que as interações aconteceriam, em sua maior intensidade, entre os sujeitos, conforme ocorreu entre S1 e S3.

Sobre esse aspecto, e considerando a educação à distância como instrumento de democratização do ensino, acreditamos que esse seja um fator a causar preocupação no sentido de, ao invés de viabilizar o acesso de forma democrática, acaba por apenas flexibilizá-lo para aqueles que dominam o uso da ferramenta.

Outra dificuldade que acreditamos estar relacionada à restrição comunicacional imposta à oferta exclusiva do chat como meio de comunicação

síncrona, é que além de inibir o acesso para aqueles que não dominam as habilidades técnicas necessárias a seu uso, tal restrição limita a exploração dos benefícios oferecidos pelas representações gestuais e da oralidade, o que, segundo Moraes et al (2007) constitui-se em importantes suportes didáticos para a compreensão de objetos e por vezes não abordados na confecção de soluções tecnológicas educacionais. Foi possível perceber que tais representações foram de superior importância para a comunicação para os sujeitos S1, S2 e S3, em que os dois primeiros também apresentaram dificuldades de argumentação que por vezes foram sanadas a partir da gesticulação entre o sujeito e o mediador.

Assim, Stahl (2002), que afirma que para que a aprendizagem colaborativa mediada por computador se estabeleça deve-se fornecer um meio em que os sujeitos consigam expressar as suas idéias, fazendo com que as ações não se restrinjam às perspectivas pessoais. Nesse sentido, corroboramos com autor e acreditamos, que na maneira como foi oportunizada no *Vetores*, a efetivação dos processos de comunicação e negociação ocorrem de maneira parcialmente adequada devido a necessidade de viabilizar a comunicação para os sujeitos que não conseguem a adaptação necessária ao uso de sistema em que a comunicação ocorre por escrito ampliando tais possibilidades de comunicação para a adição de outras funcionalidades como a teleconferência.

#### 8.8.6.1 Uso de registros na comunicação síncrona

Outra importante faceta a considerar, e que ultrapassa as questões relacionadas especificamente ao contexto ou ao objeto, reside na interseção destes aspectos, considerando a especificidade dos processos de aprendizagem de objetos matemáticos à distância.

Em observação aos resultados anteriormente descritos, com destaque para a apresentação longitudinal dos sujeitos S1 e S3 nas sessões de cooperação e de colaboração, é possível perceber a existência de entraves na efetivação do processo de comunicação e negociação, tanto para sujeitos com dificuldades no manuseio desse tipo de sistema, conforme explicitamos anteriormente, quanto para aqueles que não as possuem.

Sobre estes sujeitos, consideramos que a análise do desenvolvimento das atividades de S1 e S3 nos oportunizam realizar importantes inferências sobre esse aspecto e que, dessa maneira, validam parcialmente a hipótese indicada por nós no

início do presente estudo. Tais inferências remetem às dificuldades inerentes aos processos de conversão entre os registros de representação semióticos presentes no discurso matemático envolvidos na experimentação, incluindo a língua materna.

Sabe-se que os processos de comunicação e, sobretudo os de negociação, esperados no desenvolvimento das sessões de cooperação e de colaboração dependem de discursos argumentativos escritos em língua materna para se estabelecer. Nesse sentido acreditamos que a TRRS (DUVAL, 2003; 2004; 2006) nos oferece importantes subsídios para justificar as dificuldades de argumentação entre os sujeitos quanto as suas diferentes intensidades observadas.

De acordo com Duval (2006), uma das dificuldades da aprendizagem de objetos matemáticos e da resolução de problemas reside no fato de o ensino tender a marginalizar o uso de registros multifuncionais em razão dos monofuncionais, nos quais os tratamentos podem assumir a forma de algoritmos, tendo em vista a evidente dificuldade dos alunos na realização de processos matemáticos dependentes de registros plurifuncionais, como a resolução de problemas, elaboração de conjecturas, argumentação e prova.

Em respeito a essa dificuldade de comunicação, é notório que S1 apresentou maior necessidade de expressão argumentativa via fala, e conseqüentemente, maior dificuldade de comunicação que S3. Acreditamos que as diferentes intensidades de dificuldades estejam relacionadas à possibilidade de comunicação a partir do tratamento com o registro numérico que foi oferecido a S3, devido ao fato de este, na sessão de cooperação, ter abordado a relação proporcional entre os vetores. No caso de S1, em que além de não ser possível a realização de tratamento, tendo em vista o registro abordado ser multifuncional, a comunicação deveria acontecer fortemente baseada em argumentos provenientes da conversão entre esses registros e a língua natural.

Nessa perspectiva, considerando que, segundo Duval (2003), há um forte aumento de custo operacional quando a conversão entre os registros é de natureza não congruente e a evidente distância semântica existente entre os registros oferecidos no *Vetores* e a língua natural necessária a comunicação no chat, percebemos que a oferta de chat matemático para a comunicação entre os sujeitos durante os processos de aprendizagem de objetos de dependência linear à distância não foi suficiente para o sucesso da atividade.

## CONSIDERAÇÕES

---

Elaborar instrumentos e estratégias que viabilizem a aprendizagem de objetos matemáticos em contextos não presenciais é um importante fator de contribuição para o desenvolvimento de cursos de ensino à distância. Entretanto, discutir as especificidades dos instrumentos associadas as dos conhecimentos a serem construídos neles é etapa fundamental para este desenvolvimento.

Nesse sentido, em nosso estudo percebemos que a Engenharia de Softwares Educativos pode oferecer um importante suporte ao desenvolvimento desse tipo de solução tecnológica, visto a importância de considerar para o seu desenvolvimento aspectos relacionados à complexidade do fenômeno de aprendizagem, como as variáveis da didática, da cognição e da própria epistemologia do saber de referência (BALACHEFF e BELLEMAIN, 2007), que devem dar conta tanto dos aspectos relacionados ao contexto em que se dá a aprendizagem quanto das especificidades dos objetos tratados (LACERDA SANTOS, 1998; GOMES e WANDERLEY, 2003).

Assim, considerando a especificidade do saber escolhido, para o ensino e aprendizagem de objetos como os de dependência e independência linear e outros da Álgebra Linear, atentamos para o grande número de registros de representação inerentes aos seus discursos e ao grau de abstração atribuído a esses registros, conforme afirmam Dorier e Sierpinska (2001) e Grande (2006).

Adicionalmente, outra especificidade importante a ser considerada, remete ao contexto de aprendizagem. Sabe-se que a aprendizagem de objetos matemáticos a distância requer a oferta de ambientes tecnológicos que favoreçam a colaboração e comunicação a partir dos registros matemáticos (GUIMARÃES et al, 2008), contudo, estudos que evidenciem os aspectos relacionados à aprendizagem de objetos pertencentes a Álgebra Linear e que considerem a especificidade do ensino à distância não são identificados, levando os usuários, em geral professores, a adaptar as propostas definidas para o ensino presencial.

Nesse sentido, ao analisar os requisitos necessários a elaboração de softwares que apoiem a aprendizagem de objetos de dependência linear em contextos de ensino à distância, percorremos uma trajetória que nos permitiu compreender as origens das dificuldades de aprendizagem dos objetos de dependência linear diante da especificidade do contexto.

Foram evidenciadas dificuldades relacionadas ao encapsulamento entre objeto e representação, visto a confusão identificada entre o objeto em si (a relação entre vetores) e os procedimentos operacionais de verificação da existência dessa relação. Acreditamos que tais dificuldades são suscitadas a partir do excesso de atividades de tratamento entre registros nos manuais de Álgebra Linear e a conseqüente insuficiência dos materiais impressos utilizados em cursos EAD, que são baseados nesses manuais.

Também foram identificadas dificuldades de colaboração nos ambientes virtuais a partir da sua má utilização ou da incapacidade de suportar a comunicação com o uso dos registros inerentes às atividades de conversão e tratamento dos registros utilizados nos discursos próprios da Álgebra Linear, o que nos levou a inferir sobre a necessidade de abordagens com geometria dinâmica, conversão simultânea de registros, comunicação com os registros e construção colaborativa, como importantes alternativas de superação para os entraves estabelecidos.

Assim, acreditamos que requisitos associados a cada uma dessas funcionalidades poderiam contribuir para a aprendizagem de objetos como os de (in) dependência linear, visto que as potencialidades da geometria dinâmica quando combinadas com a mobilização simultânea entre registros podem viabilizar a compreensão das propriedades relacionadas aos registros de natureza numérica e geométrica necessárias aos objetos de Álgebra Linear, e o dinamismo oferecido é útil para a diversificação de estratégias, oferecendo condições de viabilizá-las tanto em caráter exploratório como em caráter investigativo.

Os requisitos relacionados às perspectivas CSCL surgiram como fundamentais aos contextos em que se dá essa aprendizagem - que são os da EAD. Pois, limitações atreladas à comunicação e a negociação entre os sujeitos e com o uso das representações características dos discursos de Álgebra Linear são importantes entraves à aprendizagem de seus objetos em sistemas não presenciais ou bimodais.

Partindo dessas proposições, foi desenvolvido o protótipo nomeado *Vetores*, pautado em requisitos funcionais definidos a partir das dificuldades de aprendizagem dos objetos de dependência linear em contextos de ensino à distância, conforme relatados, e em requisitos não funcionais já estabelecidos na literatura para a confecção de softwares como o Cabri II, o Geogebra e o Tabulae Colaborativo.

O *Vetores* possui, então, características de software colaborativo de geometria dinâmica com ferramentas específicas para a aprendizagem dos objetos já referidos, a partir da manipulação direta de vetores e de botões para somar e multiplicar os vetores por escalares, entre outros. Outra particularidade do *Vetores* é a associação da geometria dinâmica com o registro numérico, o que acreditamos viabilizar a compreensão integrativa de tais objetos.

Também foram associadas ao protótipo funcionalidades de chat com menor restrição para a comunicação com o uso de registros matemáticos e construção geométrica colaborativa com conversão simultânea da coordenada numérica, possibilitando a realização de atividades em caráter de colaboração, como a evidenciada durante o experimento de validação.

Apesar de a elaboração do protótipo ter atentado para requisitos relacionados à especificidade do contexto e dos objetos de dependência linear, o design experiments realizado para a validação do protótipo mostrou-nos que ainda que o uso desse sistema tenha favorecido a compreensão informal dos objetos em apressa, o que consideramos de grande contribuição dados os resultados apresentados por Dorier et al (1999) e Dorier e Siepinska (2001), dentre outros analisados nesse estudo, identifica-se a presença de dificuldades relacionadas a aspectos relacionados à prática manipulativa das representações do objeto e a comunicação necessária para a aprendizagem no contexto em apressa.

Com respeito aos primeiros, acreditamos que a possibilidade de tratamento instrucional na interface poderia minimizar algumas dificuldades de adaptação, embora estas não tenham se constituído em maior fonte de entraves a utilização da ferramenta e consideremos que alguns desses entraves, como aqueles referentes à inserção das coordenadas, identificados a partir do aumentado grau de não congruência da conversão do registro numérico para o geométrico, também possam ser úteis a aprendizagem de outros objetos do mesmo campo.

Em contrapartida, acreditamos que o maior entrave estabeleceu-se a partir da zona de interseção entre as dificuldades relativas ao uso de registros necessários à compreensão desses objetos e a comunicação necessária ao contexto, verificadas durante o processo de validação do protótipo em questão e que dificultaram a realização da expressão argumentativa necessária.

Apesar da possibilidade do uso dos registros para a comunicação no chat, foi evidenciada uma dificuldade de comunicação que reside no grau de não

congruência estabelecido entre os registros numéricos e geométricos utilizados e a língua materna, em que os discursos devem ser realizados, demandando maior incidência de contato presencial através da fala.

Tal dificuldade de argumentação, já evidenciada em trabalhos como o de Karrer (2006) e Bittar (2008) em referência a aprendizagem de objetos pertencentes à Álgebra Linear em contextos presenciais, aparece em contextos de educação a distância como importante entrave aos processos de comunicação e negociação necessários à colaboração inerente desse contexto.

Desta maneira, esse fato leva-nos a inferir que para ultrapassar tais dificuldades de aprendizagem de objetos matemáticos em contextos de ensino não presencial, acreditamos que permitir a inserção de caracteres simbólicos inerentes aos chats matemáticos, bem como inserir funcionalidades como as de geometria dinâmica é fundamental, porém não é suficiente, tendo em vista que a conversão entre esses registros e a língua materna não é dada de forma espontânea e a alta velocidade das ações e retroações esperadas nos chats pode ser prejudicada pelo custo operacional exigido por esse tipo de atividade.

## REFERÊNCIAS

---

- ANDREOLLI, D.I.; CERUTTI, R.A. *Construccion de los conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en alumnos de primer año de la universidad (Primera Fase)*. Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura (UNNE). Argentina, 2002.
- ANDREOLLI, D.I. *Construccion de los conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en alumnos de primer año de la universidad (Tercera Fase)*. Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura (UNNE). Argentina, 2005.
- ANTON, H; RORRES, C. *Álgebra Linear com aplicações*. Porto Alegre, Ed: Bookman, 2001.
- BAIRRAL, M. A; POWELL, A. B. Analysing high school students interacting at distance with VMT-Chat on taxicab problem. In: *II Sipemat Simpósio Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática*, Recife : UFRPE, 2008. v. 1. p. 101-113.
- BALACHEFF, N; BELLEMAIN, F.G. *Conhecimento, a Pedra Angular do Design de Tel*. Tópicos Educacionais, v. 17, p. 31-59, 2007
- BELLEMAIN, F. G. O Paradigma micromundo. In: Luiz Mariano Carvalho; Luiz Carlos Guimarães. (Org.). *História e Tecnologia no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2003, v. 1, p. 49-60.
- BITTAR, M. . O ensino de vetores e os registros de representação semiótica. In: Silvia Dias Alcântara Machado. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. 4ª ed. São Paulo: Papirus, 2008, v. unico, p.71-94.
- BOLDRINI, J.L; COSTA, S.I.R; FIGUEIREDO, V.L & WETZLER, H.G. *Álgebra Linear*. São Paulo. Ed: Harper & Row do Brasil, 1980.
- BORGOMOLNY, M. *The role of example-generation tasks in student's understanding of Linear Algebra*. 2006.137f. Thesis (Doctor of Philosophy)-Simon Fraser University, Canadá .
- COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. *Design Experiments in education research*. Educational Research, v. 32, PP. 9-13, 2003.
- COELHO, A. *Ferramenta de autoria colaborativa para a construção de conhecimento e concepção de documentos baseados em mapas conceituais aplicados ao contexto de ensino a distância*. 2007. 112f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional do Conhecimento), UFAL, Maceió.
- DAMM, R. F. Registros de Representação. In: Machado, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo. EDUC, pp. 135-153.
- DIAS, M. A. & ARTIGUE, M. Articulação de pontos de vista em álgebra linear: Caso da representação de subespaços vetoriais. In: *VI Encontro Nacional de Educação Matemática*, 1998, Porto Alegre. v. unico. p. 718-720.

DORIER, J.-L. On the teaching of the Theory of Vector Spaces in first year of French University. *Edumath*, volume 6,06/1998. Disponível em: <http://www.fed.cuhk.edu.hk/~fllee/mathfor/edumath/9806/09dorier.html>. Acesso em 27 dez.2008.

DORIER, J.-L.; ROBERT, A.; ROBINET, J.; ROGALSKI, M. Teaching and Learning Linear Algebra in the First Year of French Science University. In SCHWANK, I. *European Research in Mathematics Educations I-Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education*, Vol I,1, 106-115. Osnabruek, 1999.

DORIER, J.-L., ROBERT, A., ROBINET, J., AND ROGALSKI, M. The obstacle of formalism in linear algebra. In Dorier, J.-L. (ed), *On the teaching of linear algebra*. 85-124. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DORIER, J.-L.; SIERPINSKA, A. Research into the teaching and learning of Linear Algebra. In: HOLTON, D. *The teaching and learning of the Mathematics at the University Level*. Vol.7. Hardcover, 2001.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, Ed. Papirus, 2003.

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali, Ed. Universidad del Valle, 2004.

FISHER, A. Mental models of the concept of vector space. In: BOSH, M. *European Research in Mathematics Educations IV- Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Vol. 1, 1830a-1830j. Espanha, 2005. Disponível em: [http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4\\_WG14.pdf](http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG14.pdf). Acesso: 12 nov. 2008.

GOMES, A. S.; WANDERLEY, E. G. . Elicitando requisitos em projetos de Software Educativo. In: *WIE 2003 Workshop Brasileiro de Informática Educativa*, 2003, Campinas. Ciência, Tecnologia e Atalhos para o futuro. Campinas : SBC, 2003. v. V. p. 227-238.

GRANDE, A.L. *O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear*. 2006. 190f. Dissertação ( Mestrado em Educação Matemática)-PUC, São Paulo.

GUIMARAES, L. C. ; MATTOS, F. R. P. ; MORAES, T. G. ; BARBASTEFANO, R. G. . Funcionalidades e Características para Compor Roteiros de Colaboração com o Tabulae Colaborativo. In: *IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática*, 2008, Rio de Janeiro.

HILLEL, J.; DREYFUS, T. & SIERPINSKA, A. Cabri based Linear Algebra: Transformations. In SCHWANK, I. *European Research in Mathematics Educations I- Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education*, v.1, pp.209-220. Osnabruek, 1999.

HOHENWARTER, M. (2006). Dynamic investigation of functions using GeoGebra. *Proceedings of Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education 2006*. Dresden, Germany: DES-TIME.

LABORDE, C; CAPPONI, B. Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no cabri-géomètre. *Revista Em Aberto*, Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun. 1994.

LACERDA SANTOS, G. Proposta de uma Estratégia Holística para a Engenharia de Softwares Educativos. In: *IV Congresso Ibero-Americano de Informática Educativa*, Brasília, 1998.

LAVE, J; WENGER, E. *Situated learning: legitimated peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1991.

LU, Y.-W. A. English and Taiwanese upper secondary teachers' approaches to the use of GeoGebra, *Acta Scientiae*, v.10, n.2, Canoas, Brasil jul./dez 2008.

KARRER, M. *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*. 2006. 435 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC. São Paulo.

MORAES, T. G. ; MATTOS, F. R. P. ; GUIMARAES, L. C. ; BARBASTEFANO, R. G. . Tabulae Colaborativo - Simulações para Estratégias Didáticas Relacionadas à Colaboração Matemática. In: *Proceedings of the International Conference on Engineering and Computer Education*, Santos, 2007.

PAVLOPOULOU, K. *Propédeutique de l'algèbre linéaire: La coordination des registres de représentation sémiotique*. Paris, 1994. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Estrasburgo 1: Universidade Louis Pasteur. Pré-publicação de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée.

PESSOA, C. A. S. . Interação social: uma análise do seu papel na superação de dificuldades de resolução de problemas aditivos. In: *25ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, 2002, Caxambu / MG, 2002.

SANTAROSA, L. M. C. ; NITZE, J.; CARNEIRO, M.; GELLER, M. Avaliando Aplicações para a Criação de Ambientes de Aprendizagem Colaborativa . In: *X Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, 1999, CURITIBA. *Colaborativa Anais do X Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, 1999. p. 303-310.

STAHL,G. Contributions to a theoretical framework for CSCL, In: *Proceedings of Computer Supported Collaborative Learning (CSCL 2002)*, Boulder, CO, pp. 62-71.Disponível em:  
<http://orgwis.gmd.de/~gerry/publications/conferences/2002/cscl2002/cscl2002.pdf>. Acesso: 20 abr.2009.

STAHL, G. *Group cognition: Computer support for building collaborative knowledge*. Cambridge, MA: MIT Press, 2006. Disponível em :  
<http://www.ischool.drexel.edu/faculty/gerry/mit/index.html>. Acesso em 13 abr. 2009

TALL, D. A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics, Plenary Presentation, *Proceedings of the 46th Conference of CIEAEM*, Toulouse, France, 1994, 1, 15– 27. Disponível em : <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996b-plenary-cieaem.pdf>. Acesso em: 25 out. 2008

**ANEXOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO**  
**PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E**  
**TECNOLÓGICA**

**Questionário de caracterização das amostras**

Com o intuito de obtenção ao título de mestrado no referido programa e de contribuir para o ensino aprendizagem de Álgebra Linear, desenvolvemos uma pesquisa que tem por principal objetivo analisar os requisitos necessários para a elaboração de softwares colaborativos de Geometria Dinâmica visando à aprendizagem dos conceitos de dependência e independência linear.

Para tanto, sua participação nessa fase inicial do processo é deveras importante. Solicitamos que responda as questões abaixo com a máxima atenção, porém com o máximo de espontaneidade possível, pois lembre que essa é uma atividade investigativa e não classificatória. Por isso, é necessário que preencha o campo de identificação com dados válidos mesmo sabendo que a sua identidade será preservada. Não deixe de relatar qualquer impressão, consideração ou justificativa de resposta, pois estas são fundamentais para nós.

Desde já, agradecemos a sua contribuição e participação.

**Campo de Identificação:**

**Dados pessoais:**

Nome: \_\_\_\_\_

Idade: \_\_\_\_\_ Sexo: \_\_\_\_\_ Estado Civil: \_\_\_\_\_

Cidade em que reside: \_\_\_\_\_ Tel: (    ) \_\_\_\_\_

Email válido: \_\_\_\_\_

**Dados profissionais:**

Profissão: \_\_\_\_\_ Tempo de atuação: \_\_\_\_\_

Área de atuação: \_\_\_\_\_

Nível de Atuação: Infantil (    ) Fundamental (    ) Médio (    )

Há formação acadêmica anterior? (    ) sim    (    ) não

Em caso positivo, qual? \_\_\_\_\_

**Dados institucionais**

Instituição: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Modalidade: \_\_\_\_\_ Período: \_\_\_\_\_ Situação: ( ) regular ( ) irregular

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E  
TECNOLÓGICA

**Atividade para a investigação de conhecimentos em respeito ao objeto de (in) dependência linear e de reconhecimento de suas múltiplas representações**

1. Represente, de acordo com o seu entendimento e da maneira que preferir, uma definição para dependência e independência linear.



2. Verifique, quando possível, a existência de dependência linear nos conjuntos apresentados. Justifique as suas respostas e não esqueça de explicitar os procedimentos.

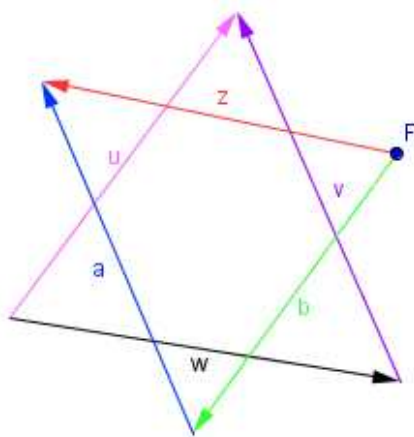
a)  $u=(2,4)$  e  $v=(4,8)$  em  $\mathbb{R}^2$

b)  $u=(7,2)$  e  $v=(5,3)$  em  $\mathbb{R}^2$

c)  $u=(1,0)$  e  $v=(0,1)$  em  $\mathbb{R}^2$

d)  $u=(1,0)$ ,  $v=(0,1)$  e  $s=(-5,2)$  em  $\mathbb{R}^2$

3. De acordo com a figura abaixo, determine o que se pede e justifique:



a) Dois vetores linearmente dependentes

b) Dois vetores linearmente independentes:

c) Três vetores linearmente dependentes

d) Três vetores linearmente independentes

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO**  
**PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E**  
**TECNOLÓGICA**

**Questionário de Observação das dificuldades contextuais**

1. Sentiu dificuldades para responder as questões solicitadas? Em caso positivo, quais? Consegue descrevê-las?

---

---

---

2. Qual(is) os recurso(s) você utiliza (utilizou) para a aprendizagem de Álgebra Linear?

---

---

3. Você utiliza (utilizou) o ambiente virtual para a aprendizagem de Álgebra Linear? De que forma?

---

---

---

4. Qual(is) o(s) recurso(s) (ou materiais didáticos) você considera mais importante(s) para a aprendizagem de Álgebra Linear à distância? Justifique.

---

---

---

**Sua participação foi muito importante para nós.**

**Muito obrigada!**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO**  
**PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E**  
**TECNOLÓGICA**

**Roteiro de entrevista com os sujeitos com dificuldades de interação com o**  
**Vetores**

1º Qual o maior incômodo em utilizar o sistema?

2º Essa dificuldade é relativa ao objeto ou ao contexto?

3º Apresentou dificuldades no uso do sistema?

4º Qual o grau de intimidade com ferramentas tecnológicas de geometria dinâmica?

5º Qual o grau de intimidade com o uso de sistemas de mensagens instantâneas?

**QUADRO DE CATALOGAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NAS SESSÕES  
DE VALIDAÇÃO DO VETORES**

|                                          |             | <b>S1</b>   | <b>S2</b>  | <b>S3</b>    | <b>S4</b>    |
|------------------------------------------|-------------|-------------|------------|--------------|--------------|
| <b>Aspectos relacionados ao objeto</b>   | Relação     | Posicional  | Posicional | Proporcional | Proporcional |
|                                          | Registro    | Geométrico  | -----      | Numérico     | -----        |
|                                          | Atividade   | Conversão   | -----      | Conversão    | -----        |
|                                          | Problemas   | Em partes   | Sim        | Em partes    | Sim          |
| <b>Aspectos relacionados ao contexto</b> | Interação   | Comunicação | -----      | Comunicação  | -----        |
|                                          | Nível       | Público     | Privado    | Público      | Privado      |
|                                          | Problemas   | Sim         | Sim        | Não          | Sim          |
|                                          | Êxito       | Sim         | Não        | Sim          | Não          |
|                                          | Satisfação  | Não         | Não        | Em partes    | Não          |
|                                          | Adaptação   | Sim         | Não        | Sim          | Não          |
|                                          | Uso de msgs | Sim         | Não        | Sim          | Não          |