



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

JODAVID DE ARAÚJO FERREIRA

**ENTROPIAS E SOMAS COMPOSTAS PARA MATRIZES ESTOCÁSTICAS
APLICADAS A SISTEMAS POLSAR**

Recife

2021

JODAVID DE ARAÚJO FERREIRA

**ENTROPIAS E SOMAS COMPOSTAS PARA MATRIZES ESTOCÁSTICAS
APLICADAS A SISTEMAS POLSAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Estatística.

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Orientador (a): Abraão David Costa do Nascimento

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

F383e Ferreira, Jodavid de Araújo
Entropias e somas compostas para matrizes estocásticas aplicadas a sistemas polsar / Jodavid de Araújo Ferreira. – 2021.
136 f.: il., fig., tab.

Orientador: Abraão David Costa do Nascimento.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2021.
Inclui referências e apêndices.

1. Estatística aplicada. 2. Segmentação. I. Nascimento, Abraão David Costa do (orientador). II. Título.

310 CDD (23. ed.)

UFPE - CCEN 2021 – 38

JODAVID DE ARAÚJO FERREIRA

**ENTROPIAS E SOMAS
COMPOSTAS PARA MATRIZES ESTOCÁSTICAS APLICADAS A SISTEMAS
POLSAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovada em: 26 de fevereiro de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Abraão David Costa do Nascimento
UFPE

Prof. Alejandro C. Frery
UFAL

Prof. Renato J. Cintra
UFPE

Prof. Ronei Marcos de Moraes
UFPB

Prof.^a Wênia Valdevino Felix de Lima
UFCG

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida e por me abençoar todos os dias.

Agradeço ao professor Abraão D. C. Nascimento, primeiramente por toda sua orientação, paciência e ensinamentos na elaboração dessa tese. Obrigado por ser exemplo de professor, profissional, amigo e humano. Meu respeito e minha gratidão serão eternas, mais uma vez obrigado por ter sido meu mentor nessa passagem pela Pós-Graduação em Estatística na UFPE, orientando minha dissertação de mestrado e nessa tese de doutorado.

Ao professor Ronei M. Moraes, por ter aberto as portas das pesquisas científicas na graduação em Estatística, cedendo um pouco de suas experiências e conhecimentos, que também foram fundamentais nessa caminhada até o presente momento.

Agradeço a minha esposa Natália Santos, por seu amor, companheirismo, renúncias, palavras de encorajamento, enfim, por estar sempre ao meu lado a todo o tempo, obrigado.

À minha família, meus pais José Targino Ferreira e Maria José de Araújo Ferreira, que sempre acreditaram, apoiaram e incentivaram meus estudos. Ao meu irmão Jobson de Araújo Ferreira e sua esposa Andréa Freitas. À Maria de Lourdes, Antônio Batista, Natyara e Joabson por toda preocupação e incentivo.

Agradeço aos meus amigos Pedro Monteiro, Victor Viana e Bruna Palm por toda amizade, apoio, momentos compartilhados, obrigado pelos incentivos.

Aos meus amigos de doutorado Saul Azevedo, Adenice Ferreira, Jonas Weverson, Anny Kerollayny, César Diogo, Alisson Santos, aos colegas de turma e os demais que de alguma forma contribuíram diretamente e indiretamente na minha caminhada até este momento.

A todos os professores do DE-UFPE, pelos ensinamentos que contribuíram para minha formação acadêmica e científica a nível de mestrado e doutorado em especial aos professores Cribari Neto, Getúlio Amorim, Alex Dias, Abraão Nascimento, Audrey Helen, Klaus Vasconcellos, Gauss Cordeiro, Patrícia Espinheira e Raydonal Ospina, no quais foram os que compartilharam seus conhecimentos nas disciplinas cursadas nesse programa de Pós-Graduação.

À Valéria e Michelle, secretárias do programa de Pós-Graduação em Estatística, por sempre orientarem em burocracias acadêmicas.

Aos membros da banca examinadora por aceitar contribuir com suas valiosas sugestões.

À Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia de Pernambuco-FACEPE, pelo apoio financeiro.

“Nos campos da observação, o acaso só favorece a mente preparada.” (PASTEUR; VALLERY-RADOT et al., 1922, p. 4).

RESUMO

O Radar de Abertura Sintética (*SAR*) e sua versão polarimétrica (*PolSAR*) têm sido usados com sucesso como ferramentas de sensoriamento remoto. Entre suas vantagens, tais sistemas podem fornecer imagens com alta resolução espacial, operar em várias condições climáticas e fornecer informações sobre uma cena geográfica a partir de múltiplas perspectivas. Entretanto, as imagens *SAR/PolSAR* são contaminadas por um padrão de interferência denominado ruído *speckle* e precisam receber um tratamento especializado (em particular, nos contextos de segmentação e modelagem). No sentido de modelagem, as distribuições \mathcal{G}_I^0 e \mathcal{G}_m^0 têm sido sugeridas para descrever os retornos *SAR* e *PolSAR* devido as suas flexibilidades para entender cenários heterogêneos. Recentemente, a aplicação de medidas da teoria da informação (como entropia) para quantificar o contraste tem encontrado uma posição de destaque no processamento de imagens *SAR/PolSAR*. Nesta tese, primeiramente são propostas expressões de forma fechada da entropia de Shannon para as distribuições \mathcal{G}_I^0 e \mathcal{G}_m^0 e, como consequência, novos procedimentos de segmentação e detecção de mudanças baseados nas entropias são fornecidos. Aplicações em imagens reais *SAR* e *PolSAR* ilustram e confirmam a importância das propostas, comparativamente a outras propostas bem definidas na literatura. Em segundo lugar, dois novos modelos matriciais deduzidos a partir do uso de soma estocástica para dados *PolSAR* são propostos, denominados por distribuições composta Poisson truncada Wishart complexa ($\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$) e composta geométrica Wishart complexa ($\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$). Algumas de suas propriedades matemáticas são derivadas e discutidas: função característica e cumulantes do tipo Mellin. Além disso, são fornecidos procedimentos de estimação por máxima verossimilhança (MV) via algoritmo *Expectation-Maximization* para os parâmetros das distribuições $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ e $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$ bem como ferramentas gráficas de bondade de ajuste com base na transformada de Mellin. Resultados de experimentos Monte Carlo indicam que as estimativas de MV podem se comportar como o que é assintoticamente esperado (pequeno viés e erro quadrático médio), mesmo para tamanhos de amostra pequenos. Por fim, realizamos aplicações a imagens *PolSAR*, as quais evidenciam que os modelos propostos podem superar outras distribuições bem conhecidas, tais como $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$, \mathcal{G}_m^0 e \mathcal{K}_m .

Palavras-chaves: SAR. Segmentação. Teoria da Informação. Wishart. Modelo Matricial.

ABSTRACT

Synthetic aperture radar (*SAR*) and polarimetric synthetic aperture radar (*PoISAR*) have been successfully used as remote sensing tools. Among their advantages such systems can provide images with high spatial resolution, operate in several weather conditions and provide information on one geographical scene from multiple perspectives.. However, *SAR/PoISAR* images are contaminated by an interference pattern called speckle noise and they need to receive a specialized treatment (in particular, in the segmentation and modeling contexts). In modeling sense, the \mathcal{G}_I^0 and \mathcal{G}_m^0 distributions have been suggested for describing *SAR* and *PoISAR* returns because their ability at understanding heterogeneous clutters. Recently, applying information theory measures (such like entropy measures) to quantify contrast has achieved a prominent position in *SAR/PoISAR* image processing. In this thesis, first closed-form expressions of the Shannon entropy for the \mathcal{G}_I^0 and \mathcal{G}_m^0 distributions and, as a consequence, new entropy-based segmentation and change detection procedures are also proposed. Applications to real *SAR* and *PoISAR* illustrate and confirm the importance of proposals, comparatively to others well-defined in the literature. Second, two new matrix models which arise from the stochastic summation framework for *PoISAR* data are furnished called compound truncated Poisson complex Wishart ($\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$) and compound geometric complex Wishart ($\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$) distributions. Some of their mathematical properties are derived and discussed: characteristic function and Mellin-kind cumulants. Beyond, maximum likelihood (ML) estimation procedures via Expectation-Maximization algorithm for $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ and $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$ parameters are furnished as well as Mellin-based goodness-of-fit graphical tools. Monte Carlo experiment results indicate ML estimates may achieve what is asymptotically expected (small bias and mean square error) even for small sample sizes. Finally, we explore some real experiments with *PoISAR* images and they present evidence that proposed models may outperform other well-known distributions, such like $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$, \mathcal{G}_m^0 and \mathcal{K}_m .

Keywords: SAR. Segmentation. Information Theory. Wishart. Matrix model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Captura de uma imagem de RADAR.	19
Figura 2 – Efeito <i>speckle</i> em uma imagem SAR.	21
Figura 3 – Matriz de espalhamento (dados <i>singlelook</i>).	21
Figura 4 – Imagem <i>PolSAR</i> de São Francisco com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).	27
Figura 5 – Imagem <i>PolSAR</i> de Foulum com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).	28
Figura 6 – Imagem <i>PolSAR</i> de Munique com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).	28
Figura 7 – Imagem <i>PolSAR</i> de Flevoland com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).	29
Figura 8 – Imagem <i>PolSAR</i> de DEMMIN-Görmin com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).	29
Figura 9 – Imagens <i>PolSAR</i> de Los Angeles, EUA com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf) em dois períodos diferentes, ano de 2009 e 2015.	30
Figura 10 – Imagem <i>PolSAR</i> da Califórnia, EUA com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf) em dois períodos diferentes, ano de 2009 e 2015.	30
Figura 11 – Imagem da aeronave que possui o sensor AIRSAR.	31
Figura 12 – Imagem aeronave que possui o sensor EMISAR.	31
Figura 13 – Imagem aeronave que possui o sensor E-SAR.	32
Figura 14 – Imagem aeronave que possui o sensor AgriSAR.	33
Figura 15 – Imagem aeronave que possui o sensor UAVSAR.	33
Figura 16 – Ilustração de alvos associados a diferentes valores do parâmetro de rugosidade da \mathcal{G}_m^0, α	39
Figura 17 – Esquema para detecção de mudança entre imagens SAR.	51
Figura 18 – Desempenho de segmentação sobre uma cena da imagem EMISAR de Foulum, Dinamarca.	55

Figura 19 – Desempenho de segmentação sobre uma cena da imagem E-SAR de Munique, Alemanha com os modelos Γ^* e \mathcal{G}_I^0	56
Figura 20 – Desempenho de segmentação sobre uma cena da imagem AIRSAR de Flevoland, Holanda.	57
Figura 21 – Resultados da detecção de mudança usando ESs com as distribuições Γ^* , $G\Gamma^*$ e \mathcal{G}_I^0 para região de Los Angeles (EUA).	63
Figura 22 – Resultados da detecção de mudança usando ESs com as distribuições Γ^* , $G\Gamma^*$ e \mathcal{G}_I^0 para a região de Califórnia (EUA).	64
Figura 23 – Elementos MIO para o modelo \mathcal{G}_m^0	69
Figura 24 – Estudo de segmentação sobre uma cena da imagem AIRSAR de São Francisco, EUA com os modelos $s\mathcal{W}_m^C$ e \mathcal{G}_m^0	76
Figura 25 – Estudo de segmentação sobre uma cena da imagem E-SAR de Munique, Alemanha com os modelos $s\mathcal{W}_m^C$ e \mathcal{G}_m^0	77
Figura 26 – Estudo de segmentação sobre uma cena da imagem AgriSAR de DEMMIN-Görmin, Alemanha.	77
Figura 27 – Resultados da detecção de mudança usando ESs com as distribuições $s\mathcal{W}_m^C$ e \mathcal{G}_m^0	81
Figura 28 – Diagrama das relações entre distribuições <i>PolSAR</i> . Aqui, o vetor de parâmetros $(\alpha, \beta, \lambda, p)$ representa a forma, Σ denota um tipo de locação ou uma matriz de dispersão e L é o NEL.	85
Figura 29 – Densidades marginais das distribuições $CPT\mathcal{W}_m^C$ e $CG\mathcal{W}_m^C$	88
Figura 30 – Área selecionada da imagem Foulum (canal HH) para determinar a matriz média como valores reais na simulação de dados.	94
Figura 31 – Imagem de São Francisco (canal HH).	94
Figura 32 – Mapas dos parâmetros estimados das distribuições $CPT\mathcal{W}_m^C$ (acima) e $CG\mathcal{W}_m^C$ (em baixo) para a imagem São Francisco.	97
Figura 33 – Mapas dos parâmetros estimados das distribuições $CPT\mathcal{W}_m^C$ (acima) e $CG\mathcal{W}_m^C$ (em baixo) para a imagem Foulum.	98
Figura 34 – Mapas dos parâmetros estimados das distribuições $CPT\mathcal{W}_m^C$ (acima) e $CG\mathcal{W}_m^C$ (em baixo) para a imagem DEMMIN-Görmin.	98
Figura 35 – Diagrama de Mellin com amostra de MLCs calculados a partir das amostras de São Francisco.	100

Figura 36 – Diagrama de Mellin com amostra de MLCs calculados a partir das amostras de Foulum.	100
Figura 37 – Diagrama de Mellin com amostra de MLCs calculados a partir das amostras de DEMMIN-Görmin.	101
Figura 38 – Faixas do comprimento de onda e da frequência para um espectro eletromagnético.	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – (h, ϕ) entropias e funções relacionadas.	35
Tabela 2 – Matriz de classificação	40
Tabela 3 – Nomenclatura, estrutura das covariâncias e quantidades de parâmetros das decomposições da matriz de covariância.	49
Tabela 4 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de Foulum	58
Tabela 5 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de Munique	59
Tabela 6 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de Fle- voland	60
Tabela 7 – Desempenho dos detectores - Cena 1 - Los Angeles (EUA)	62
Tabela 8 – Desempenho dos detectores - Cena 2 - Califórnia (EUA)	63
Tabela 9 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de São Francisco	78
Tabela 10 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de Munique	78
Tabela 11 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de DEMMIN- Görmin	79
Tabela 12 – Detecção de Performance - Cena 1 - Los Angeles (EUA)	80
Tabela 13 – Detecção de Performance - Cena 2 - Califórnia (EUA)	81
Tabela 14 – Resumo das distribuições MCA.	83
Tabela 15 – Performance dos EMVs para dados $CPT\mathcal{W}_m^C$	95
Tabela 16 – Performance dos EMVs para dados $CG\mathcal{W}_m^C$	96
Tabela 17 – EMVs para as distribuições $CPT\mathcal{W}_m^C(\lambda, L, \Sigma)$, $CG\mathcal{W}_m^C(p, L, \Sigma)$ e $s\mathcal{W}_m^C(L, \Sigma)$ com $L = 4$	97
Tabela 18 – Resultados de ajuste em intensidades de dados <i>PolSAR</i> da imagem de Foulum com L fixo	103
Tabela 19 – Resultados de ajuste em intensidades de dados <i>PolSAR</i> da imagem de São Francisco com L fixo	104
Tabela 20 – Resultados de ajuste em intensidades de dados <i>PolSAR</i> da imagem de DEMMIN-Görmin com L fixo	105

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Método de segmentação proposto para imagens <i>SAR</i>	50
Algoritmo 2 – Método de detecção de mudança proposto para imagens <i>SAR</i> . Esta discussão é voltada para o uso de duas imagens obtidas em tempos distintos.	51
Algoritmo 3 – Método de segmentação proposto para imagens <i>PolSAR</i>	73
Algoritmo 4 – Método de detecção de mudança proposto para imagens <i>PolSAR</i>	74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>PoISAR</i>	Polarimetric Synthetic Aperture Radar (Radar de Abertura Sintética Polarimétrica)
<i>SAR</i>	Synthetic Aperture Radar (Radar de Abertura Sintética)
<i>AgriSAR</i>	Airborne SAR and Optic Campaigns
<i>AIRSAR</i>	Radar de Abertura Sintética Airborne
<i>CCG</i>	Gaussiana circular multivariada complexa
CGW_m^C	Composta geométrica Wishart complexa
$CPTW_m^C$	Composta Poisson truncada Wishart complexa
<i>EM</i>	<i>Expectation-Maximization</i>
<i>EMISAR</i>	Electromagnetics Institute SAR
<i>EMV</i>	Estimadores máxima verossimilhança
<i>EQM</i>	Erro quadrático médio
<i>ES</i>	Entropia de Shannon
<i>fc</i>	Função característica
<i>GaMM</i>	Gamma mixture model
<i>GoF</i>	Bondade de ajuste
<i>MCA</i>	Matrizes de covariâncias amostrais
<i>MCGF</i>	<i>Mellin-kind cumulant-generating function</i>
<i>MIF</i>	Matriz de informação de Fisher
<i>MIO</i>	Matriz de informação observada
<i>MKS</i>	<i>Mellin-kind statistic</i>
<i>MLC</i>	Log-cumulantes de Mellin
<i>MM</i>	Modelagem multiplicativa
<i>MV</i>	Máxima verossimilhança
<i>NEL</i>	Número equivalente de <i>looks</i>

RADAR	Radio Detection and Ranging
SEM	<i>Stochastic Expectation-Maximization</i>
TI	Teoria da Informação
TIF	Transformação inversa de Fourier
UAVSAR	Uninhabited Aerial Vehicle Synthetic Aperture Radar

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	Números Naturais ou Inteiros positivos
\mathbb{R}	Números Reais
\mathbb{R}_+	Números Reais positivos
\mathbb{C}	Números Complexos
Ω_+	Conjunto de matrizes hermitianas positivas definida
$\Gamma(\alpha, \beta)$	Distribuição gama com parâmetros α e β
$\Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$	Distribuição gama inversa com com parâmetros α e β
\mathcal{G}_I^0	Distribuição \mathcal{G}_I^0 para intensidade
$\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	Distribuição Wishart complexa para retorno matricial hermitiano
$s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	Distribuição Wishart complexa escalonada para retorno matricial hermitiano
\mathcal{G}_m^0	Distribuição \mathcal{G}_m^0 complexa para retorno matricial hermitiano
$\psi(X)$	Função digama
$\psi^{(\nu)}(X)$	Função poligama de ordem ν
$\varphi_X(s)$	Função característica
$\phi_X(s)$	Transformação de Mellin de uma função densidade de probabilidade
$H_S(X)$	Entropia de Shannon
$vec(\cdot)$	Operador de vetorização

SUMÁRIO

1	PRELIMINAR	19
1.1	INTRODUÇÃO	19
1.2	CONTRIBUIÇÕES	22
1.3	SUORTE COMPUTACIONAL	23
1.4	PESQUISAS REALIZADAS DA TESE	24
1.5	LISTA DE NOTAÇÕES	24
2	DADOS SAR POLARIMÉTRICOS <i>MULTILOOK</i>	26
2.1	IMAGENS E SISTEMAS DE RADAR	27
3	TEORIA DA INFORMAÇÃO E UTILIZAÇÃO EM DADOS SAR E <i>POLSAR MULTILOOK</i>	34
3.1	A CLASSE (H, ϕ) DE ENTROPIAS	34
3.2	MODELAGEM ESTATÍSTICA PARA DADOS SAR E <i>POLSAR MULTILOOK</i>	36
3.2.1	Distribuições de variáveis aleatórias	36
3.2.1.1	<i>Distribuição para o speckle unidimensional</i>	36
3.2.1.2	<i>Distribuição para o retroespalhamento</i>	37
3.2.1.3	<i>Distribuição para intensidade SAR por MM</i>	37
3.2.1.4	<i>Distribuição para intensidade SAR por abordagem empírica</i>	38
3.2.2	Distribuições de matrizes aleatórias	38
3.2.2.1	<i>Distribuição para o speckle multidimensional</i>	38
3.2.2.2	<i>Distribuição para retornos PolSAR por MM</i>	39
3.3	ALGUNS CRITÉRIOS DE COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DE CLAS- SIFICAÇÃO	40
3.3.1	Acurácia Geral	40
3.3.2	Coeficiente Kappa (κ)	40
4	ENTROPIA DE SHANNON PARA A DISTRIBUIÇÃO \mathcal{G}_I^0: NO- VAS ABORDAGENS PARA SEGMENTAÇÃO E DETECÇÃO DE MUDANÇA EM IMAGENS SAR	42
4.1	ENTROPIA DE SHANNON PARA \mathcal{G}_I^0 E SUA DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓ- TICA	44

4.2	UM NOVO ALGORITMO DE SEGMENTAÇÃO BASEADO EM ENTROPIA	47
4.2.1	Modelo de segmentação	47
4.2.2	Estimação do modelo paramétrico baseado no algoritmo EM	48
4.2.3	Um critério de parada	49
4.3	UM NOVO ALGORITMO PARA DETECÇÃO DE MUDANÇA	50
4.4	RESULTADOS	52
4.4.1	Segmentação	52
4.4.2	Detecção de mudança	61
5	ENTROPIA DE SHANNON PARA A DISTRIBUIÇÃO \mathcal{G}_m^0: EN- SAIOS SOBRE SEGMENTAÇÃO NÃO SUPERVISIONADA E DE- TECÇÃO DE MUDANÇA	65
5.1	<i>BACKGROUND</i> PARA INFERÊNCIA ESTATÍSTICA BASEADA NA EN- TROPIA DE SHANNON	67
5.2	UM NOVO ALGORITMO DE SEGMENTAÇÃO BASEADO EM ENTROPIA	70
5.2.1	Modelo de agrupamento	70
5.2.2	Estimativa dos parâmetros do modelo pelo algoritmo <i>Expectation-</i> <i>Maximization</i> Estocástico	71
5.2.3	Um critério de parada	72
5.3	UM NOVO ALGORITMO DE DETECÇÃO DE MUDANÇA PARA IMA- GENS <i>POLSAR</i>	73
5.4	RESULTADOS NUMÉRICOS	74
5.4.1	Segmentação	74
5.4.2	Detecção de mudança	80
6	SOMAS COMPOSTAS PARA MATRIZES ESTOCÁSTICAS APLI- CADAS A SISTEMAS <i>POLSAR</i>	82
6.1	MODELOS <i>POLSAR</i> E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES	83
6.1.1	Modelos da literatura e formulação física das novas propostas	83
6.1.2	Novos modelos	86
6.1.3	Propriedades Matemáticas	88
6.2	ESTIMAÇÃO POR MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA E PROCEDIMENTOS DE INFERÊNCIA BASEADOS EM MELLIN	89
6.2.1	Estimação por máxima verossimilhança via EM	89

6.2.2	Diagrama de Mellin	91
6.3	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	93
6.3.1	Análise com dados artificiais	93
6.3.2	Análise de dados reais	94
7	CONCLUSÃO	106
8	PESQUISAS FUTURAS	108
	REFERÊNCIAS	109
	APÊNDICE A – FAIXAS DE COMPRIMENTO E FREQUÊNCIA DE SISTEMAS DE RADAR	117
	APÊNDICE B – ENTROPIA DE SHANNON PARA \mathcal{G}_I^0	118
	APÊNDICE C – ENTROPIA DE SHANNON PARA A Γ	119
	APÊNDICE D – INFERÊNCIA ESTATÍSTICA PARA A \mathcal{G}_m^0	120
	APÊNDICE E – FUNÇÃO CARACTERÍSTICA PARA $CPT\mathcal{W}_m^C$	123
	APÊNDICE F – FUNÇÃO CARACTERÍSTICA PARA $CG\mathcal{W}_m^C$	125
	APÊNDICE G – ALGORITMO EM PARA $CPT\mathcal{W}_m^C$	126
	APÊNDICE H – ALGORITMO EM PARA $CG\mathcal{W}_m^C$	129
	APÊNDICE I – ESTATÍSTICA DE TIPO MELLIN PARA $CPT\mathcal{W}_m^C$	131
	APÊNDICE J – ESTATÍSTICA DE TIPO MELLIN PARA $CG\mathcal{W}_m^C$	134

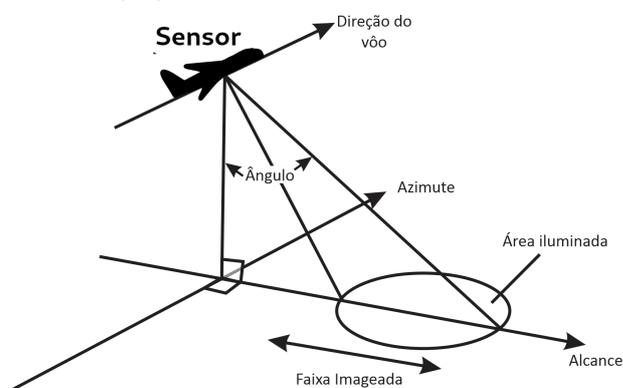
1 PRELIMINAR

1.1 INTRODUÇÃO

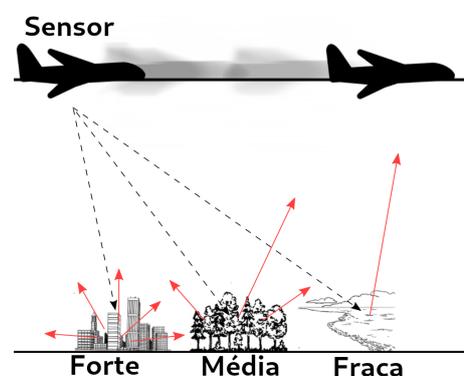
O termo *RADAR* é um acrônimo de *Radio Detection and Ranging* (ZYL, 2011), o qual baseia-se nos princípios da propagação eletromagnética, em que uma onda eletromagnética é emitida por uma fonte e é retrodifundida (reflexão da onda na direção da qual eles vieram) pelos alvos. De acordo com Zyl (2011), uma imagem de radar é o resultado entre uma interação da energia emitida pelo radar com o objeto em estudo e a aparência da imagem é influenciada pela forma e textura do alvo. Wiley (1985) observou que dois alvos em diferentes posições ao longo do caminho estarão em ângulos diferentes em relação ao vetor de velocidade da aeronave, resultando assim em diferentes frequências *Doppler*, então, para melhorar a resolução das imagens, ele descreveu a utilização da análise de frequência *Doppler* nos sinais de um radar coerente em movimento. Essa técnica tornou-se conhecida como radar de abertura sintética (*Synthetic Aperture Radar - SAR*). Os sistemas *SAR* estão geralmente em plataformas de aviões ou satélites e possuem um sensor que ao longo da rota destinada transmite microondas em direção a uma cena geográfica. A depender da região estudada, parte da energia transmitida é retornada para o sensor representando o(s) tipo(s) de textura(s) daquela área (NASCIMENTO, 2012). As Figuras 1a e 1b ilustram a geometria e os níveis de textura em uma captura de uma imagem de radar de possíveis regiões.

Figura 1 – Captura de uma imagem de RADAR.

(a) Geometria de uma imagem de RADAR.
Fonte: próprio autor.



(b) Níveis de textura identificadas pelo sensor de acordo com o sinal retornado.
Fonte: próprio autor.



Fonte: próprio autor.

Os sistemas de RADAR são conhecidos como instrumentos ativos de sensoriamento remoto,

uma vez que eles produzem sua própria fonte de iluminação. Assim, uma das vantagens desses sistemas é que os sinais podem penetrar nuvens, chuvas e coberturas vegetais; ou seja, eles podem operar em quase todas as condições climáticas. Por esses motivos, tais sensores são frequentemente referidos como instrumentos para qualquer tempo climático, podendo também produzir imagens de alta resolução (grande largura de banda ¹) das superfícies estudadas (ZYL, 2011).

O sistema *SAR* opera enviando e capturando pulsos em direção a um cenário real; estes podem ter polarizações circulares (AKBAR; SS; KUZE, 2010) e/ou polarizações lineares (WOELDER; GRANHOLM, 1997). Quando é utilizado apenas um par de direções (sinal enviado, sinal recebido), as imagens geradas são chamadas de *SAR* monopolarizadas (NASCIMENTO, 2012). Contudo, estudos (LEE; POTTIER, 2009; HENRI, 2008) indicam que trabalhar com dados *SAR* em múltiplas direções - chamada processamento *PolSAR* (*Polarimetric SAR - PolSAR*) - produz melhores resultados nas análises das imagens. O *PolSAR* registra como medidas a amplitude e a fase dos sinais retroespalhados para as possíveis combinações de polarizações lineares de recepção e transmissão denominadas como HH (Horizontal - Horizontal) e VV (Vertical - Vertical), ou polarizações cruzadas, HV e VH (nessas notações, a primeira e a segunda letra referem-se às polarizações da radiação transmitida e a recebida pela antena, respectivamente). Apesar das vantagens discutidas previamente, os sistemas *SAR/PolSAR* utilizam o processamento de iluminação coerente² na formação da imagem e, dessa forma, estas são afetadas por um ruído chamado *speckle* (GOODMAN, 1975). Este ruído gera uma aparência granular nas imagens, criando uma dificuldade na interpretação e análise. O efeito *speckle* é mostrado na Figura 2. A fim de lidar com o *speckle*, a literatura costuma propor um procedimento denominado de processo *multilook* que consiste em obter informações de uma mesma cena várias vezes no mesmo instante de tempo. Quando esta cena é obtida apenas uma vez, o processo é denominado *singlelook*. A Figura 3 mostra o processo de formação de uma imagem polarimétrica *singlelook*.

O *speckle* impõe aos dados *SAR/PolSAR* uma natureza multiplicativa tal que as intensidades *SAR* ou as intensidades multidimensionais de um dado *PolSAR* não se comportem como a lei normal ou Gaussiana. Para lidar probabilisticamente com dados *speckle* de modo a

¹ As bandas de um sistema de RADAR definem em qual frequência e comprimento o radar está sendo utilizado. Para mais detalhes ver a imagem 38.

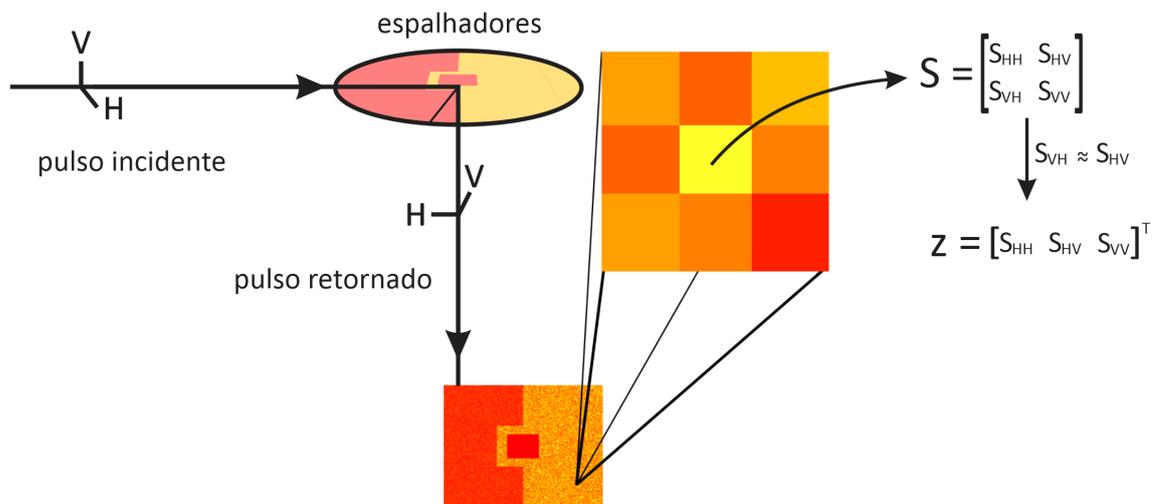
² A formação de uma imagem *SAR/PolSAR* requer o processamento coerente do sinal de retorno recebido após a emissão dos pulsos. O sinal recebido (complexo) de cada pulso emitido é demodulado em fase (*I*) e quadratura (*Q*), amostrado (dada uma função de referência) e convertido para o formato digital (para formar uma sequência de dados) (FREITAS et al., 2003).

Figura 2 – Efeito *speckle* em uma imagem SAR.



Fonte: NASCIMENTO (2012).

Figura 3 – Matriz de espalhamento (dados *singlelook*).



Fonte: próprio autor.

incorporar sua influência no espaço paramétrico, as distribuições \mathcal{G}_l^0 proposta por Frery et al. (1997) para descrever intensidades *SAR multilook* e \mathcal{G}_m^0 introduzida por Freitas, Frery e Correia (2005) para descrever retornos *PoISAR multilook* têm se mostrado como excelentes leis para descrever cenários de diferentes tipos de relevos. Métodos considerando a ação do *speckle* têm sido propostos em diversas áreas: (i) classificação (FRERY; CORREIA; FREITAS, 2007), (ii) segmentação (BEAULIEU; TOUZI, 2004), (iii) detecção de borda (SCHOU et al., 2003), (iv) detecção de mudança (NASCIMENTO; FRERY; CINTRA, 2018). Esta tese proporciona avanços quanto aos itens (ii) e (iv).

Vários trabalhos nos contextos para dados *SAR* (CHAN; GAMBINI; FRERY, 2020; FRERY, 2019; WANG et al., 2018; LIU; CAO; YANG, 2016; SHAN et al., 2010) e *PoISAR* (YU; YUE, 2020;

FERREIRA; COÊLHO; NASCIMENTO, 2021; BOUHLEL; MERIC, 2020; NASCIMENTO; FRERY; CINTRA, 2018; WANG et al., 2017) têm apontado que a relação entre medidas de teoria da informação e modelos para dados *speckle* é promissora. Essa tese considera explorar algumas das possíveis implicações do uso da entropia estocástica de Shannon (numa perspectiva próxima do trabalho de Frery, Cintra e Nascimento (2013)) das distribuições \mathcal{G}_I^0 e \mathcal{G}_m^0 para solução de problemas de segmentação e detecção de mudança em imagens *SAR* e *PoISAR*.

Na literatura *PoISAR*, existem vários modelos de probabilidade para o caso *multilook* e suas funções densidades são geralmente derivadas da modelagem multiplicativa (MM) ou da transformada inversa de Fourier (TIF) (BIAN; MERCER, 2014). Apesar desses modelos possuírem uma explicação física e descreverem bem vários tipos de solo puro (que possuem mesma característica), eles frequentemente requerem uma abordagem de mistura para trabalhar com terrenos que apresentem dados multimodais. Em geral, uma imagem *PoISAR* é não homogênea e a definição de uma janela automática na imagem (sobre a qual frequentemente se quer extrair atributos locais) pode apresentar dados multimodais. Nesse caso, a distribuição dos dados pode ser aproximada por um modelo de mistura (EL-ZAART; ZIOU, 2007; EVERITT, 2014), entretanto essa abordagem traz uma série de dificuldades no processo de estimação e de intratabilidade na obtenção de funções tipo momento associadas.

Nesta tese, avança-se na proposta de dois novos modelos para dados *PoISAR multilook*. Esses modelos além de apresentarem propriedades analíticas simples (como uma expressão em forma fechada independente de função especial para função característica que implicará em medidas tipo momento simples) também fornecem distribuições marginais com comportamento multimodais mesmo contendo apenas um parâmetro adicional com relação a Wishart complexa escalonada, distribuição padrão para dados *PoISAR multilook*. No que segue, as contribuições desta tese são detalhadas por capítulo.

1.2 CONTRIBUIÇÕES

As principais contribuições dessa tese são:

- As duas primeiras propostas consistem de métodos de segmentação e de detecção de mudanças para imagens *SAR*. Para tal, são assumidas as distribuições Γ e \mathcal{G}_I^0 e suas versões estocásticas para entropia de Shannon (ES). Neste capítulo, uma forma fechada para expressão da entropia de Shannon com base na distribuição \mathcal{G}_I^0 (um modelo flexível

para intensidades *SAR*) é derivada. Adicionalmente, várias de suas propriedades são derivadas. Resultados apontam que os novos segmentadores e detectores de mudança podem superar as versões envolvendo a distribuição Γ .

- As contribuições no contexto *PolSAR multilook* envolvem as distribuições Wishart complexa escalonada ($s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$) e \mathcal{G}_m^0 para descrever retornos *PolSAR*. Inicialmente uma expressão em forma fechada para a entropia de Shannon da \mathcal{G}_m^0 é derivada bem como várias quantidades matemáticas associadas, tais que como funções gradiente sobre a nova entropia e a matriz informação observada. Com base em seu comportamento assintótico, novos algoritmos de segmentação não supervisionado e detecção de mudança são propostos. Resultados aplicados sugerem que as propostas podem superar as ferramentas baseadas na $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ em regiões com texturas muito misturadas.
- Novas distribuições para dados *PolSAR multilook* usando a abordagem de soma estocástica são introduzidas para descrever dados multimodais. Elas são denominadas como composta Poisson truncada Wishart complexa ($\text{CPT}\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$) e composta geométrica Wishart complexa ($\text{CG}\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$). Algumas propriedades matemáticas das distribuições são derivadas, tais como as funções características e cumulantes de Mellin. Novos processos de estimação por máxima verossimilhança via algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) são derivados e avaliados por experimentos Monte Carlo. Resultados apresentam evidências de que os modelos propostos podem oferecer melhores ajustes do que outras distribuições bem conhecidas, tais como $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$, \mathcal{G}_m^0 e \mathcal{K}_m proposta por Lee et al. (1994).

1.3 SUPORTE COMPUTACIONAL

A utilização de ferramentas estatísticas para análise de dados é imprescindível. Essa tese utilizou o R, que é uma linguagem de programação e ambiente para computação estatística e gráficos (R Development Core Team, 2015). Essa linguagem de programação orientada a objetos é de domínio público e está disponível como Software Livre sob os termos da *GNU General Public License* da *Free Software Foundation*. Em 1996, Ross Ihaka e Robert Gentleman desenvolveram o R a partir da linguagem S desenvolvida no laboratório Bell (anteriormente AT&T, agora Lucent Technologies) por John Chambers e colegas. Em constante crescimento, com atualizações de novas versões de seu código *base*, o R tem abertura para publicação de funções em forma de pacotes fundamentados por novas metodologias estatísticas. Além disso,

é amplamente utilizado na pesquisa acadêmica, educação e indústria possuindo um grande número de colaboradores das mais diversas áreas do conhecimento. Diante de todos os benefícios já citados anteriormente, pretende-se desenvolver um pacote para publicar as funções desenvolvidas nessa tese como colaboração aos usuários da área de processamento de imagens. Para obtenção dos dados reais explorados nesta tese, foi utilizado a ferramenta *PoISARpro* (*Polarimetric SAR data Processing and Education*), desenvolvida pela *IETR* (*Institute of Electronics and Telecommunications of Rennes - UMR CNRS 6164*) da *University of Rennes 1* sob contrato da *ESA* (*European Space Agency*) desde 2003. O *PoISARpro* é um *software* que contém uma coleção de algoritmos relacionados a exploração de técnicas polarimétricas para desenvolvimentos científicos e estimulação do desenvolvimento de pesquisas e aplicações usando dados *PoISAR*.

1.4 PESQUISAS REALIZADAS DA TESE

- ✓ Ferreira, J. A.; Nascimento, A. D. C.; Almeida-Junior, P. M. Classificação em Intensidades SAR Multidimensionais de Terrenos via Processos VARMA. 18^a Escola de Séries Temporais e Econometria, 2019.
- ✓ Ferreira, J. A.; Nascimento, A. D. C. Shannon Entropy for the \mathcal{G}_I^0 Model: A New Segmentation Approach. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, v. 13, p. 2547-2553, 2020.
- ✓ Rodriguez, W. D. A.; Amaral, G. J. A. ; Nascimento, A. D. C. ; Ferreira, J. A. Information Criteria in Classification: New Divergence-based Classifiers. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. online, p. 1-18, 2020.
- ✓ Ferreira, J. A. ; Coêlho, H. F. C. ; Nascimento, A. D. C. A Family of Divergence-based Classifiers for Polarimetric Synthetic Aperture Radar (PoISAR) Imagery Vector and Matrix Features. *International Journal of Remote Sensing (Online)*, v. 42, p. 1201-1229, 2020.

1.5 LISTA DE NOTAÇÕES

Para fazer separação entre escalares, vetores e matrizes aleatórias de suas respectivas realizações, utilizar-se-ão as notações **negrito** maiúsculo (para matrizes aleatórias), **negrito**

maiúsculo com ponto acima (para realizações de matrizes aleatórias), negrito minúsculo (para vetores aleatórios), negrito minúsculo com ponto acima (para realizações de vetores aleatórios), maiúsculo (para escalares aleatórios), minúsculo (para realizações de escalares aleatórios).

Segue uma exemplificação:

- Z : Variável aleatória;
- z : Realização de uma variável aleatória;
- \mathbf{z} : Vetor aleatório;
- \mathbf{z} : Realização de um vetor aleatório;
- \mathbf{Z} : Matriz aleatória;
- \mathbf{Z} : Realização de uma matriz aleatória.

2 DADOS SAR POLARIMÉTRICOS *MULTILOOK*

Diante do que foi mencionado no capítulo anterior, cada elemento de uma imagem *PolSAR* está associada a uma matriz

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix},$$

em que $S_{ij} \in \mathbb{C}$ com $i, j = \{H, V\}$. Na prática, satisfazendo as condições do teorema da reciprocidade, as polarizações $HV \approx VH$ (ULABY; ELACHI, 1990) e, assim, a matriz \mathbf{S} pode ser representada como $\mathbf{z} = [S_{HH} \ S_{HV} \ S_{VV}]^T \in \mathbb{C}^3$, o sobrescrito T indica a operação de transposição. O vetor \mathbf{z} é conhecido como dado polarimétrico *singlelook* (FREITAS; FRERY; CORREIA, 2005) e frequentemente assume a distribuição Gaussiana circular multivariada complexa (CCG) com média zero. Entretanto, a literatura costuma propor um procedimento denominado de processo *multilook* com intuito de levar em consideração explicitamente o efeito do ruído *speckle* sobre as imagens *PolSAR*.

O processo *multilook* consiste em compactar informações de uma mesma cena extraída várias vezes no mesmo instante. Seja $\mathbf{z}_j = [S_{HH}^{(j)} \ S_{HV}^{(j)} \ S_{VV}^{(j)}]^T \in \mathbb{C}^3$ o j -ésimo vetor de informação extraída de uma cena associado aos 3 canais de polarização, então, de uma amostra de L informações extraídas, temos

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbf{z}_j \mathbf{z}_j^* = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \begin{bmatrix} \|Z_{HH}^{(j)}\|^2 & Z_{HH-HV}^{(j)} & Z_{HH-VV}^{(j)} \\ Z_{HH-HV}^{(j)*} & \|Z_{HV}^{(j)}\|^2 & Z_{HV-VV}^{(j)} \\ Z_{HH-VV}^{(j)*} & Z_{HV-VV}^{(j)*} & \|Z_{VV}^{(j)}\|^2 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

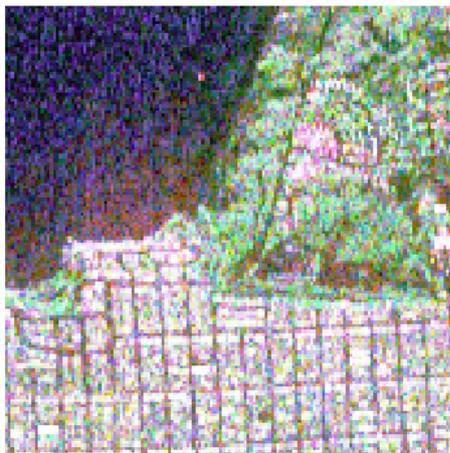
em que $\{\|Z_{HH}\|^2, \|Z_{HV}\|^2, \|Z_{VV}\|^2\}$ representa o conjunto de intensidades dos valores dos canais de polarização Z_{HH} , Z_{HV} e Z_{VV} (elementos aleatórios complexos) e $\{Z_{HH-HV}, Z_{HH-VV}, Z_{HV-VV}\}$ indica o conjunto de possíveis produtos internos entre dois canais de polarização diferentes, de modo que $Z_{A-B} = \langle Z_A, Z_B \rangle = Z_A Z_B^*$, para $A, B \in \{HH, HV, VV\}$ com $*$ denotando o conjugado de um número complexo.

2.1 IMAGENS E SISTEMAS DE RADAR

Nos próximos capítulos, são introduzidos novos métodos estatísticos para processamentos de imagens *SAR* e *Po/SAR*. Com o intuito de avaliá-los, dados de cenas reais obtidos por sistemas de RADAR são utilizados. As imagens utilizadas nesta tese são de São Francisco (EUA), Foulum (Dinamarca), Munique (Alemanha), Flevoland (Holanda) e DEMMIN-Görmin (Alemanha). A seguir essas imagens são brevemente discutidas bem como os sistemas utilizados para obtê-las:

- A região de **SÃO FRANCISCO (EUA)** é exibida na Figura 4 e foi obtida pelo sensor AIRSAR. Sua captura foi feita sob um Número equivalente de *looks* (NEL) quatro e esta região possui três áreas distintas: uma região urbana, uma de floresta e uma de oceano.

Figura 4 – Imagem *Po/SAR* de São Francisco com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).



Fonte: próprio autor.

- Na Figura 5, é exibida uma imagem da região de **FOULUM (Dinamarca)** obtida pelo sensor EMISAR. Sua captura foi feita em banda L e *quad-pol* sob NEL oito. Esta região representa cinco áreas de agricultura sendo elas trigo, colza, aveia, centeio e coníferas.

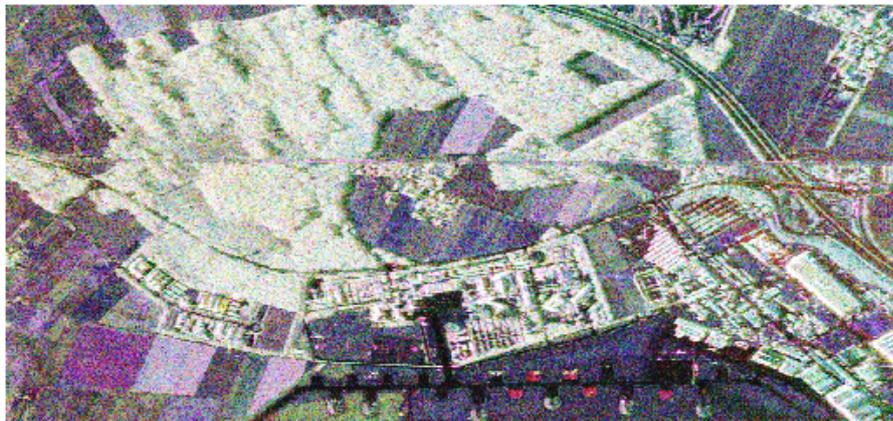
Figura 5 – Imagem *PoISAR* de Foulum com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).



Fonte: próprio autor.

- A Figura 6 representa uma área dos arredores de **MUNIQUE (Alemanha)**. Esta imagem foi obtida pelo sensor *E-SAR* com NEL três. Esta cena é composta por três regiões, sendo bosque, áreas construídas e outra de áreas abertas.

Figura 6 – Imagem *PoISAR* de Munique com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).



Fonte: próprio autor.

- **FLEVOLAND**, região da Holanda, foi obtida pelo sensor *AIRSAR* em agosto de 1989 com NEL quatro. Esta imagem possui onze áreas: feijão, floresta, batata, beterraba, colza, águas, alfafa, trigo, terra, ervilha e pastagem.
- A região de **DEMMIN-Görmin** é localizada no Nordeste da Alemanha e foi obtida durante a campanha *AgriSAR* no ano de 2006 usando dados *SAR* aerotransportados de Banda L totalmente polarimétricos com NELdez.

Figura 7 – Imagem *PoISAR* de Flevoland com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).



Fonte: próprio autor.

Figura 8 – Imagem *PoISAR* de DEMMIN-Görmin com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf).



Fonte: próprio autor.

- A Figura 9 representa duas imagens da mesma área urbana de **Los Angeles (EUA)**. Estas imagens foram obtidas pelo sensor JPL's UAVSAR com NEL quatro e em dois períodos distintos de tempo, sendo eles 23 de abril de 2009 e 3 de maio de 2015.

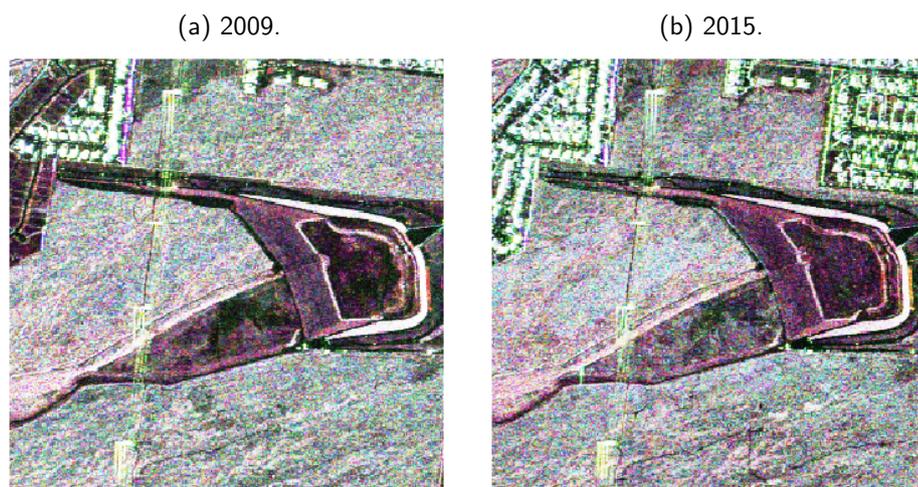
Figura 9 – Imagens *Po/SAR* de Los Angeles, EUA com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf) em dois períodos diferentes, ano de 2009 e 2015.



Fonte: próprio autor.

- As imagens da Figura 10 representam a mesma área urbana da **Califórnia (EUA)** e foram obtidas no mesmo período das imagens anteriores de Los Angeles (Figs. 9a e 9b). Estas imagens foram obtidas pelo sensor JPL's UAVSAR com NEL quatro e nos períodos distintos sendo 23 de abril de 2009 e em 3 de maio de 2015.

Figura 10 – Imagem *Po/SAR* da Califórnia, EUA com as intensidades normalizadas via função de distribuição empírica (ecdf) em dois períodos diferentes, ano de 2009 e 2015.



Fonte: próprio autor.

As imagens descritas anteriormente foram obtidas pelos sensores AIRSAR, EMISAR, E-SAR, AgriSAR e UAVSAR, respectivamente. No que segue, são apresentadas breves discussões

sobre os sensores com imagens das aeronaves no qual eles foram acoplados.

- **AIRSAR (Radar de Abertura Sintética Airborne):** Este sistema foi projetado e

Figura 11 – Imagem da aeronave que possui o sensor AIRSAR.



Fonte: AIRSAR (2020).

construído pelo Laboratório de propulsão (*Jet Propulsion Laboratory*- NASA-JPL). Sua imagem é apresentada na Figura 11 (Fonte: AIRSAR (2020)). O AIRSAR é uma ferramenta de geoprocessamento atuante em vários estados atmosféricos e capaz de penetrar através das nuvens e recolher dados durante a noite. Ele serviu como um teste da NASA para demonstrar a nova tecnologia de radar e aquisição de dados em várias aplicações. Como parte da *NASA Earth Science Enterprise*, o AIRSAR voou pela primeira vez em 1988 e sua última missão foi em 2004.

- **EMISAR (*Electromagnetics Institute SAR*):**

Figura 12 – Imagem aeronave que possui o sensor EMISAR.



Fonte: EMISAR (2020).

Desenvolvido pelo Instituto de Eletromagnética da Universidade Técnica da Dinamarca (Lyngby), o EMISAR é um radar com dupla frequência (L- e C-bandas) totalmente polarimétrico (4 canais complexos por frequência) para sistema *SAR*. Criado para aplicações de sensoriamento remoto, tal sistema foi recentemente utilizado para coletar dados *SAR* de alta qualidade para programas científicos internacionais e para pesquisas em sen-

soriamiento remoto no Centro Dinamarquês para Sensoriamento Remoto. O sistema é apresentado na Figura 12 (Fonte: EMISAR (2020)).

- **E-SAR:** Foi desenvolvido pelo *Microwaves and Radar Institute* e obteve suas primeiras

Figura 13 – Imagem aeronave que possui o sensor E-SAR.



Fonte: E-SAR (2020).

imagens em 1988; com atualizações, o sistema continua funcionando na observação aérea da Terra com aplicações em todo o mundo. O *E-SAR* opera em 4 bandas de frequência, X, C, L e P e, portanto, cobre uma faixa de comprimentos de onda de 3 a 85 cm. A polarização do sinal de radar é selecionável, tanto horizontal quanto verticalmente. No modo polarimétrico, a polarização é trocada de pulso para pulso na sequência (HH-HV-VV-VH). A imagem do sistema se encontra na Figura 13 (Fonte: E-SAR (2020)).

- **AgriSAR (Airborne SAR and Optic Campaigns):** A campanha AgriSAR 2006 foi realizada entre 18 de abril e 2 de agosto de 2006. Ela foi estabelecida para avaliar o impacto dos sensores Sentinel-1 e Sentinel-2 e assim melhorar os métodos de interpretação de dados ópticos e de radar para gerar informações de dados aéreos e terrestres que podem ser usados para simular os próximos dados do Sentinel. As missões Sentinel-1 e Sentinel-2 são administradas pela Comunidade Europeia e a ESA, para observação da Terra, realizando coleta de dados sobre a vegetação, solos e humidade, rios e áreas costeiras, além de dados para correção atmosférica (absorção e distorção) em alta resolução. Assim, os dados obtidos na campanha AgriSAR foram utilizados com o propósito de simular antecipadamente os dados que se espera receber rotineiramente da missão Sentinel-2 (TIMMERMANS et al., 2007). A imagem do sistema pode ser visualizada na Figura 14 (Fonte: AgriSAR (2020)).

Figura 14 – Imagem aeronave que possui o sensor AgriSAR.



Fonte: AgriSAR (2020).

- **UAVSAR (*Uninhabited Aerial Vehicle Synthetic Aperture Radar*)**: é um instrumento polarimétrico compacto montado em cápsula SAR de banda L da NASA (abertura sintética) para observações interferométricas de repetição de trilha que está sendo desenvolvido no JPL e na NASA/DFRC (Dryden Flight Research Center) em Edwards, Califórnia, EUA. Quando atuando sobre a mesma área várias vezes, pode determinar como as características do terreno foram alteradas. Com início em 2008, até o presente momento, ele já foi colocado para estudar a mudança climática no Ártico e examinar a deformação da Terra após grandes terremotos e vulcões. O projeto UAVSAR servirá como uma base de teste de tecnologias, sendo um instrumento modular para testar as novas tecnologias em aplicações aerotransportadas e espaciais. A Figura 15 mostra uma foto do sistema (Fonte: UAVSAR (2020)).

Figura 15 – Imagem aeronave que possui o sensor UAVSAR.



Fonte: UAVSAR (2020).

3 TEORIA DA INFORMAÇÃO E UTILIZAÇÃO EM DADOS SAR E POLSAR MULTILOOK

A Teoria da Informação (TI) trabalha com ferramentas importantes em diversas áreas, sendo duas delas Inferência Estatística (AKAIKE, 1992) e Processamento de Imagens (MORIO et al., 2008). Dois conceitos importantes são “Informação” e “Entropia” que foram inicialmente definidos no contexto de teoria da comunicação por Shannon (1948).

Através do teorema H de Boltzmann (BOLTZMANN, 1970), Shannon definiu a entropia de uma variável aleatória contínua Z como:

$$H(Z) = E[-\log(f_Z(Z))] = - \int f_Z(z) \log f(z) dz, \quad (3.1)$$

em que $E(\cdot)$ é o operador valor esperado.

Com a definição da entropia, a proposição e aplicação dessa medida se tornou regra em várias áreas. A entropia tem recebido diversas interpretações, sendo duas delas: (i) desordem em Mecânica Estatística (KULLBACK, 1997) e (ii) diversidade em Economia e Biologia (PARDO, 2005). Em 1994, Salicrú et al. (1994) propuseram a classe (h, ϕ) de entropia – que generaliza o conceito original de entropia – e suas distribuições assintóticas. Na Subseção 3.1, alguns conceitos dessa classe são discutidos.

3.1 A CLASSE (h, ϕ) DE ENTROPIAS

Seja $f_Z(z; \theta)$ a função densidade de Z com vetor de parâmetros $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$. A classe (h, ϕ) de entropia de Z é definida por

$$H_\phi^h(\theta) = h\left(\int_{\mathcal{A}} \phi(f_Z(z; \theta)) dz\right), \quad (3.2)$$

em que $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente, ou ϕ é convexa h é decrescente. Em particular, a ES é obtida quando $h(x) = x$ e $\phi(x) = -x \log(x)$. A fim de ilustrar a generalidade da classe, a Tabela 1 mostra a especificação de três entropias: Shannon, Rényi e Tsallis restrito.

O resultado a seguir foi proposto por Pardo et al. (1997) e aborda o uso de entropia em métodos de inferência estatística.

Tabela 1 – (h, ϕ) entropias e funções relacionadas.

(h, ϕ) entropias	$h(y)$	$\phi(x)$
Shannon (SALICRU et al., 1993)	y	$-x \log x$
Tsallis restrito (ordem $\beta \in \mathbb{R}_+ : \beta \neq 1$) (HAVRDA; CHARVÁT, 1967)	y	$\frac{x^\beta - x}{1 - \beta}$
Rényi (ordem $\beta \in \mathbb{R}_+ : \beta \neq 1$) (RÉNYI, 1961)	$\frac{\log y}{1 - \beta}$	x^β

Fonte: próprio autor.

Lema 1 Seja $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p]^\top$ o estimador de máxima verossimilhança (EMV) para $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]^\top$ baseado na amostra aleatória (amostra independente e identicamente distribuída) Z_1, \dots, Z_N , de Z com densidade $f(z; \boldsymbol{\theta})$. Então

$$\sqrt{N} [H_h^\phi(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - H_h^\phi(\boldsymbol{\theta})] \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2(\boldsymbol{\theta})), \quad (3.3)$$

em que $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ é a distribuição Normal com média μ e variância σ^2 , “ $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ ” denota convergência em distribuição,

$$\sigma_\phi^2(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\theta})^{-1} \boldsymbol{\delta}, \quad (3.4)$$

$\boldsymbol{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\theta}) = E\{-\partial^2 \log f_Z(Z; \boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top\}$ é a matriz de informação de Fisher (MIF) e $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \dots, \delta_p]^\top$ tal que $\delta_i = \partial H_h^\phi(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_i$ para $i = 1, 2, \dots, p$.

De acordo com Nascimento, Frey e Cintra (2018), a metodologia para testes de hipóteses e intervalos de confiança baseada na entropia de Shannon é dada como segue: Considere que estamos interessados em testar

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : H_S(\boldsymbol{\theta}_1) = H_S(\boldsymbol{\theta}_2) = \dots = H_S(\boldsymbol{\theta}_q) = \nu, \\ \mathcal{H}_1 : \exists i, j, \text{ tal que, } H_S(\boldsymbol{\theta}_i) \neq H_S(\boldsymbol{\theta}_j). \end{cases} \quad (3.5)$$

Há alguma evidência estatística para rejeitar a suposição de que duas amostras SAR/*PolSAR* vêm do mesmo modelo? A fim de dar resposta à questão, do Lema 1, temos que

$$\sum_{i=1}^q \frac{N_i (H_S(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) - \bar{\nu})^2}{\sigma_S^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)} \xrightarrow[N_i \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \chi_{q-1}^2, \quad (3.6)$$

em que

$$\bar{\nu} = \left[\sum_{i=1}^q \frac{N_i}{\sigma_S^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)} \right]^{-1} \sum_{i=1}^q \frac{N_i H_S(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)}{\sigma_S^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)}. \quad (3.7)$$

Uma resposta à questão pode ser dada pela seguinte estatística de teste:

$$S_S(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = \sum_{i=1}^q \frac{N_i (H_S(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i) - \bar{\nu})^2}{\sigma_S^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)}. \quad (3.8)$$

A partir dos resultados obtidos, pode-se mostrar então a proposição abaixo.

Proposição 1 *Sejam $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ para $i = 1, \dots, q$ EMVs baseados em amostras aleatórias de tamanho N_i independentes entre si e suficientemente grandes. Sendo $S_S(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_q) = s$, o valor- $p = P(\chi_{q-1}^2 > s)$. Assim, se o valor- $p \leq \alpha$ (nível nominal), a hipótese nula \mathcal{H}_0 é rejeitada.*

No caso de comparar duas amostras do mesmo tamanho ($N_1 = N_2 = N$), a Equação (3.8) reduz a

$$S_S(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2) = N \frac{[H_S(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - H_S(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2)]^2}{\sigma_S^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) + \sigma_S^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2)}. \quad (3.9)$$

No caso multivariado, seja $f_Z(\dot{\mathbf{Z}}; \boldsymbol{\theta})$ uma função densidade com vetor paramétrico $\boldsymbol{\theta}$ que caracteriza a distribuição matricial \mathbf{Z} . A classe (h, ϕ) de entropia relativa a \mathbf{Z} é definida por

$$H_\phi^h(\boldsymbol{\theta}) = h \left(\int_{\mathcal{A}} \phi(f_Z(\dot{\mathbf{Z}}; \boldsymbol{\theta})) d\dot{\mathbf{Z}} \right).$$

O elemento diferencial $d\dot{\mathbf{Z}}$ (no caso da distribuição Wishart complexa escalonada) é dado por

$$d\dot{\mathbf{Z}} = \prod_{i=1}^m dZ_{ii} \prod_{\substack{i, j = 1 \\ i < j}}^m d\Re\{Z_{ij}\} d\Im\{Z_{ij}\},$$

em que Z_{ij} é a (i, j) -ésima entrada da matriz \mathbf{Z} e \Re e \Im denota a parte real e imaginária, respectivamente (GOODMAN, 1963).

3.2 MODELAGEM ESTATÍSTICA PARA DADOS SAR E POLSAR MULTILOOK

3.2.1 Distribuições de variáveis aleatórias

3.2.1.1 Distribuição para o speckle unidimensional

O *speckle* – natural na captura de imagens SAR – não possui nem comportamento gaussiano e nem aditivo (FRERY et al., 1997). O *speckle* é exponencialmente distribuído com média

unitária nas imagens de intensidades *singlelook* (FRERY et al., 1997). Como uma maneira para estender a suposição anterior, o procedimento *multilook* (média da amostra) sobre L observações independentes fornece uma variável de intensidade ruidosa descrita pela distribuição gama, $Y \sim \Gamma(L, L)$, com densidade

$$f_Y(y; L, L) = \frac{L^L}{\Gamma(L)} y^{L-1} e^{-Ly} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(y), \quad (3.10)$$

em que $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ é a função gama e $L > 0$.

3.2.1.2 Distribuição para o retroespalhamento

O retroespalhamento (*backscatter*) carrega todas as informações relevantes da área mapeada. Em particular, ele envolve o comportamento físico do alvo; por exemplo, umidade e relevo. Neste estudo, a distribuição *gama inversa* é utilizada para o retroespalhamento (FRERY et al., 1997), denotada como $X \sim \Gamma^{-1}(-\alpha, \gamma)$ e com densidade

$$f(x; \alpha, \gamma) = \frac{\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{x}} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad (3.11)$$

em que $\alpha < 0$ é o parâmetro de forma e $\gamma > 0$ é parâmetro de escala.

3.2.1.3 Distribuição para intensidade SAR por MM

O modelo multiplicativo (MM) que é uma abordagem bem-sucedida para descrever retornos SAR (FRERY et al., 1997) quando estes não possui comportamento gaussiano e nem aditivo será descrito a seguir. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias escalares positivas e independentes tal que, X está associado ao terreno "*backscatter*", enquanto Y descreve o *speckle*. Então, o MM assume que cada "intensidade" (norma quadrada de um canal de polarização complexo) oriunda de um *pixel* de imagem SAR é o resultado de uma variável aleatória Z que é o produto de X e Y ; isto é, $Z = Y \times X$.

Sejam $X \sim \Gamma(L, L)$ e $Y \sim \Gamma^{-1}(-\alpha, \gamma)$, pode-se mostrar que Z tem densidade (FRERY et al., 1997)

$$f_Z(z; \alpha, \gamma, L) = \frac{L^L \Gamma(L - \alpha)}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(L)} \frac{z^{L-1}}{[\gamma + Lz]^{L-\alpha}} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(z),$$

em que $\alpha < 0$ é o parâmetro de rugosidade, $\gamma > 0$ é a escala e $L > 0$ é NEL. Este caso é denotado por $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$.

3.2.1.4 Distribuição para intensidade SAR por abordagem empírica

Segundo Li et al. (2011), um modelo alternativo à abordagem de MM, conhecido como abordagem empírica, é a lei gama generalizada (GF). Essa distribuição foi introduzida por Stacy et al. (1962) e sua vantagem na modelagem de dados SAR é a sua simplicidade e flexibilidade (LI et al., 2011). Essa variável aleatória é denotada por $Z \sim GF(\alpha, \phi, \mu)$ e sua densidade é

$$f(z; \alpha, \phi, \mu) = \frac{\alpha}{\Gamma(\phi)} \mu^{\alpha\phi} z^{\alpha\phi-1} e^{-(\mu z)^\alpha} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(z), \quad (3.12)$$

em que α é parâmetro de forma e, ϕ e μ são parâmetros de escala.

3.2.2 Distribuições de matrizes aleatórias

3.2.2.1 Distribuição para o speckle multidimensional

Em uma imagem *PoISAR* cada entrada é associada a uma matriz (como mostrado no Capítulo 2) e, a fim de melhorar a relação sinal ruído, é comum adotar a abordagem *multilook*. Usando (i) z_i como uma normal complexa com vetor de médias nulo e matriz de covariância hermitiana Σ na Equação (2.1) e (ii) assumindo que z_1, \dots, z_L são independentes, então o retorno matricial complexo segue uma distribuição Wishart complexa escalonada, denotada por $\mathbf{Y} \sim s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}(\Sigma, L)$ e com densidade

$$f_{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{Y}}; \Sigma, L) = \frac{L^m |\dot{\mathbf{Y}}|^{L-m}}{|\Sigma|^L \Gamma_m(L)} \exp[-L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \dot{\mathbf{Y}})] \mathbb{I}_{\Omega_+}(\dot{\mathbf{Y}}), \quad (3.13)$$

em que $\dot{\mathbf{Y}} \in \Omega_+ := \{\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m : \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^*\}$ é uma saída de \mathbf{Y} , $|\cdot|$ é o determinante da matriz, $\Gamma_m(L) = \pi^{m(m-1)/2} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i)$ é a função gama multivariada $L \geq m$ é NEL e $\operatorname{tr}(\cdot)$ é o operador traço. Esta distribuição satisfaz $E(\mathbf{Y}) = \Sigma$, que é uma matriz Hermitiana positiva definida (ANFINSSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2009).

A distribuição Wishart complexa escalonada é considerada a distribuição básica para os dados *PoISAR*. Embora este modelo tenha uma densidade com forma analítica tratável, ele não incorpora o efeito de rugosidade de relevo.

3.2.2.2 Distribuição para retornos PolSAR por MM

Seja \mathbf{Y} uma matriz aleatória seguindo a distribuição $s\mathcal{W}_m^C$ e X uma variável aleatória escalar positiva e independente de \mathbf{Y} . O MM para imagens *PolSAR multilook* assume que cada *pixel* segue a identidade $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \times X$. Nesse caso, enquanto a variável aleatória X modela o retroespalhamento do terreno, \mathbf{Y} descreve o ruído *speckle* multidimensional *multilook*.

O retroespalhamento carrega todas as informações relevantes da área mapeada; que depende das propriedades físicas do alvo como, por exemplo, umidade e relevo. Neste caso, foi adotado para o comportamento do retroespalhamento a distribuição gama inversa mostrada na Subseção 3.2.1.2.

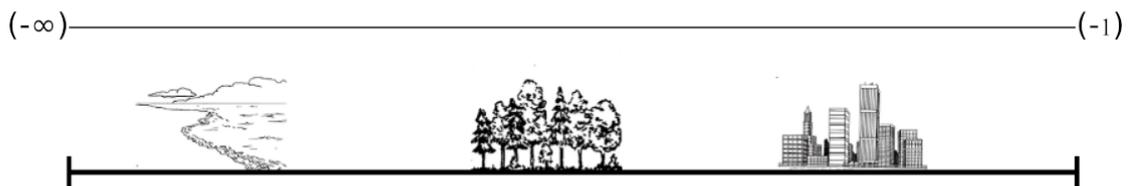
Suponha agora que se deseja derivar a função densidade da variável de retorno *multilook* \mathbf{Z} . Freitas, Frery e Correia (2005) propuseram

$$f_{\mathbf{Z}}(\dot{\mathbf{Z}}; \alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L) = \int_0^\infty x^{-m^2} f_{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{Z}}/x; \boldsymbol{\Sigma}, L) f_X(x; \alpha, \mu = 1) dx$$

$$= \frac{L^{Lm} \Gamma(Lm - \alpha)}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma_m(L)} \times |\dot{\mathbf{Z}}|^{L-m} [(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}})]^{\alpha-Lm} \mathbb{I}_{\Omega_+}(\dot{\mathbf{Z}}),$$

em que o parâmetro α está associado à rugosidade do relevo e alguns de seus tipos de alvo são ilustrados na Figura 16. O caso particular dessa densidade mostrado em (3.13) é obtido quando $\alpha \rightarrow \infty$.

Figura 16 – Ilustração de alvos associados a diferentes valores do parâmetro de rugosidade da \mathcal{G}_m^0, α .



Fonte: próprio autor.

3.3 ALGUNS CRITÉRIOS DE COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DE CLASSIFICAÇÃO

3.3.1 Acurácia Geral

A acurácia geral (A) é uma medida que depende da matriz de classificação ilustrada na Tabela 2 e é definida da seguinte forma

$$A = \frac{\sum_{i=1}^g n_{i,i}}{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g n_{i,j}}, \quad (3.14)$$

em que $\sum_{i=1}^g n_{i,i}$ é a soma dos termos da diagonal principal da matriz de classificação, $\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g n_{i,j}$ é a soma de todas as entradas e g representa a classe predefinida.

Tabela 2 – Matriz de classificação

		Classes obtidas (\hat{c})			
		1	2	...	g
Classes reais (c)	1	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$...	$n_{1,g}$
	2	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$...	$n_{2,g}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	$n_{3,g}$
	g	$n_{g,1}$	$n_{g,2}$	$n_{g,3}$	$n_{g,g}$

Fonte: próprio autor.

3.3.2 Coeficiente Kappa (κ)

Outra medida de avaliação é o coeficiente Kappa (κ) proposto por (COHEN, 1960). O coeficiente Kappa também é definido sobre a matriz de classificação e é dado da seguinte forma

$$\kappa = \frac{N^{-1} \sum_{i=1}^g n_{i,i} - N^{-2} \sum_{i=1}^g n_{i,+} n_{+,i}}{1 - N^{-2} \sum_{i=1}^g n_{i,+} n_{+,i}}, \quad (3.15)$$

em que $n_{i,i}$ é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz de classificação, $n_{i,+}$ é a soma dos elementos da i -ésima linha, $n_{+,i}$ é a soma dos elementos da i -ésima coluna e N representa o número total de decisões da matriz de classificação. A variância do Kappa (σ_{κ}^2) é dada por

$$\begin{aligned}
\sigma_{\kappa}^2 = & \frac{N^{-1} \sum_{i=1}^g n_{i,i} (1 - N^{-1} \sum_{i=1}^g n_{i,i})}{N (1 - N^{-2} \sum_{i=1}^g n_{i,+} n_{+,i})^2} \\
& + \frac{2 (1 - N^{-1} \sum_{i=1}^g n_{i,i}) + 2 N^{-1} \sum_{i=1}^g n_{i,i} N^{-2} \sum_{i=1}^g n_{i,+} n_{+,i} - \gamma_1}{N (1 - N^{-2} \sum_{i=1}^g n_{i,+} n_{+,i})^3} \\
& + \frac{(1 - N^{-1} \sum_{i=1}^g n_{i,i}) + \gamma_2 - 4(N^{-2} \sum_{i=1}^g n_{i,+} n_{+,i})^2}{N (1 - N^{-2} \sum_{i=1}^g n_{i,+} n_{+,i})^4},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

em que $\gamma_1 = N^{-2} \sum_{i=1}^g n_{ii} (n_{i,+} n_{+,i})$ e $\gamma_2 = N^{-3} \sum_{i=1}^g n_{ii} (n_{i,+} n_{+,i})^2$. Este coeficiente é amplamente utilizado na literatura relacionado a reconhecimento de padrões (DUDA; HART; STORK, 2012).

4 ENTROPIA DE SHANNON PARA A DISTRIBUIÇÃO \mathcal{G}_I^0 : NOVAS ABORDAGENS PARA SEGMENTAÇÃO E DETECÇÃO DE MUDANÇA EM IMAGENS SAR

Assumir modelos probabilísticos para descrever características de imagens SAR – tomando em conta o *speckle* – se tornou uma tendência no processamento de imagens SAR. Em particular, o modelo \mathcal{G}_I^0 proposto por Frery et al. (1997) tem sido amplamente utilizado por sua capacidade em descrever cenários heterogêneos; por exemplo, áreas construídas.

Na etapa de pré-processamento, além da escolha do modelo, o tipo de abordagem inferencial utilizada também é algo muito importante. Trabalhos têm evidenciado em favor da utilização do uso de medidas da TI combinadas com modelos que abarquem a física de formação de imagens (em seus espaços paramétricos) para o entendimento de imagens SAR. Chan, Gambini e Frery (2020) utilizaram TI, mais especificamente as entropias de Shannon e Rényi para filtrar imagens SAR. Cintra, Frery e Nascimento (2013) propuseram medidas de divergências da distribuição \mathcal{G}^0 e uma abordagem não paramétrica baseada na distância de Kolmogorov–Smirnov. Nascimento, Cintra e Frery (2010) derivaram distâncias estocásticas e compararam através de testes de hipóteses estimando os parâmetros por máxima verossimilhança nas aplicações. Wang et al. (2018) propuseram um algoritmo de detecção de alvo de navio baseado na teoria da informação para imagens SAR. Quanto à esse casamento entre TI e modelos SAR, duas questões em aberto (ao melhor do nosso conhecimento) são: (i) o que dizer da expressão em forma fechada para a entropia de Shannon utilizando a distribuição \mathcal{G}_I^0 ? e (ii) como aplicar essas quantidades e suas possíveis distribuições no processamento (particularmente na análise de agrupamento e detecção de mudança) de retornos SAR?

Apesar do processamento *multilook* impor um tipo de controle no efeito *speckle*, ainda assim, é difícil identificar *clusters* eficientemente na segmentação das imagens SAR (SHANG et al., 2016). Para tentar contornar esse problema, trabalhos têm sido propostos com o intuito dos segmentadores se adaptarem aos dados: Zaart et al. (2002) derivaram um método de segmentação para imagens SAR baseado em histogramas e tais histogramas exibem uma combinação de distribuição I' . Samanta e Sanyal (2012) desenvolveram uma nova metodologia para segmentar imagens SAR usando a entropia de Shannon como pré-processamento e o *fuzzy c-means* como a ferramenta para segmentação. D'Elia et al. (2014) propuseram um segmentador para imagens SAR usando TI e um algoritmo baseado em campos aleatórios de Markov estruturados em árvore (*tree structured Markov random fields - TS-MRFs*). Zhao, Li

e Li (2017) propuseram um algoritmo de segmentação de imagens *SAR multilook* usando o modelo de mistura em distribuições gama (*Gamma mixture model* - GaMM) considerando o número de regiões desconhecido. Um método de reconhecimento automático de alvo (ATR) para imagens *SAR* baseado em representação desacoplada de informação foi proposto por Chang e You (2018). Neto et al. (2019) apresentaram um algoritmo baseado em conjuntos de níveis (*level-set*) que incorpora as estatísticas de dados sem assumir qualquer modelo a priori. Mais recentemente, Zhao et al. (2020) propuseram um algoritmo de agrupamento *fuzzy* baseado na distribuição gama para segmentação de imagens *SAR*.

Nesse capítulo, a entropia de Shannon (ES) é derivada para a distribuição \mathcal{G}_I^0 bem como algumas de suas propriedades matemáticas. Um novo paradigma de segmentação e métodos de detecção de mudança ambos baseados em entropias são propostos para imagens *SAR*, discutindo como casos especiais para a ES das leis Γ e \mathcal{G}_I^0 nas perspectivas tanto de independência quanto assumindo alguma estrutura de dependência (para o caso de segmentação). Essas abordagens são formuladas a partir da distribuição da entropia estocástica. Finalmente, nossas propostas de segmentação são aplicadas a imagens *SAR* multidimensionais *multilook* das regiões de Foulum (Dinamarca), Flevoland (Holanda) e Munique (Alemanha). Resultados têm evidenciado que os novos métodos de segmentação podem apresentar melhores desempenhos em relação a outros segmentadores já bem definidos, tal como um baseado no modelo de misturas de gama.

Métodos de detecção de mudança, visam identificar diferenças entre duas ou mais imagens de uma mesma cena capturadas em instantes distintos de tempo. A mudança nas características da superfície da Terra sendo essas detectadas, fornecem informações para uma melhor compreensão entre os fenômenos humanos e naturais, e com isso, é possível melhorar o gerenciamento e utilização de recursos (LU et al., 2004). Os sistemas *SAR* podem ter uma contribuição significativa, pois conseguem obter dados em diversas condições climáticas (MARINO; CLOUDE; LOPEZ-SANCHEZ, 2012). Diversos autores têm se destacado em propostas de detectores de mudança, Rignot e Zyl (1993) utilizaram várias técnicas para detectar mudanças temporais em imagens *SAR* baseados na diferença da magnitude dos sinais de intensidades entre as duas imagens. Shan et al. (2010) apresentaram um algoritmo de detecção de mudança para imagens *SAR* utilizando a distribuição \mathcal{G}^0 e a divergência de Kullback-Leibler. Bazi, Bruzzone e Melgani (2005) apresentaram uma nova abordagem de detecção de mudança automática e não supervisionada especificamente orientada para a análise de imagens *SAR*, a abordagem é composta de três etapas, que visa reduzir o *speckle*, filtrar as imagens e produzir um mapa de

detecção de mudança de acordo com o critério de Kittler-Illingworth (KI). Cha et al. (2015) propuseram um detector de mudança com a utilização do estimador de coerência Berger com o intuito de detectar mudanças sutis. Eles mostraram experimentalmente que o método proposto produziram imagens com maior contraste, o que mostrou a eficácia e robustez do algoritmo proposto. Coca, Anghel e Datcu (2018) desenvolveram um método de detecção de mudança de imagem SAR baseado em distância de compressão normalizada (*Normalized Compression Distance - NCD*). Uma abordagem de detecção de mudança não supervisionada para imagens SAR foi proposta por Jia, Huo e Zhang (2019) baseado em agrupamento com diferentes escalas fazendo o uso de análise estatística e campos aleatórios de Markov (*Markov Random Fields - MRF*). Jiang et al. (2020) utilizaram transformação homogênea denominado fusão de características homogêneas profundas (deep homogeneous feature fusion - DHFF) com base na transferência de estilo de imagem (image style transfer - IST) para propor um novo método de detecção de mudança, e utilizaram como critérios de avaliação de desempenho a acurácia e o coeficiente Kappa.

Neste capítulo foi utilizado a ES das distribuições Γ , GI e \mathcal{G}_I^0 para construir os detectores de mudança. Estes detectores são aplicados a imagens de Los Angeles (EUA) e Califórnia (EUA) a fim de estudar o efeito da urbanização. Os detectores de mudança baseados na distribuição \mathcal{G}_I^0 mostram ser as melhores estratégias para estudar urbanização.

Este capítulo é organizado como segue. Na Seção 4.1, expressões para ESs são apresentadas para as distribuições \mathcal{G}_I^0 e Γ . Um novo paradigma de segmentação baseado em entropia é discutido na Seção 4.2. Na Seção 4.3 é mostrado um algoritmo para detecção de mudança. A Seção 4.4 mostra um estudo comparativo de métodos de segmentação aplicados a dados reais e os resultados da detecção de mudança aplicados a imagens SAR.

4.1 ENTROPIA DE SHANNON PARA \mathcal{G}_I^0 E SUA DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA

Utilizando os resultados do Capítulo 3, algumas propriedades da ES são derivadas para o modelo \mathcal{G}_I^0 , necessárias para a construção do novo mecanismo de segmentação. Neste seção, procuramos (i) obter uma expressão de forma fechada para ES da distribuição \mathcal{G}_I^0 e (ii) aplicar a distribuição assintótica para sua versão estocástica em processamento de intensidades SAR. É importante ressaltar que Nobre et al. (2016) trabalhou com a entropia de Rényi da \mathcal{G}_A^0 (utilizada para modelar amplitude, em contrapartida da \mathcal{G}_I^0 que modela intensidade), mas sem utilizar expressões de forma fechada para a entropia nem distribuições para entropia.

Eles obtiveram bons resultados de segmentação, mas afirmam que a utilização de integração numérica para a entropia impõe problemas de convergência ao uso do método. A seguir uma solução para a questão anterior é fornecida.

Teorema 1 *Seja $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$, então a ES de Z é dada por*

$$\begin{aligned} H_S(\mathcal{G}_I^0) &= H_S([\alpha, \gamma, L]) = E[-\log f_Z(Z; \alpha, \gamma, L)] \\ &= -\log \frac{L^L \Gamma(L - \alpha)}{\Gamma(-\alpha) \gamma^\alpha \Gamma(L)} \\ &\quad + (1 - L) \left\{ \psi^{(0)}(L) - \log L + \log \gamma - \psi^{(0)}(-\alpha) \right\} \\ &\quad + (L - \alpha) [\psi^{(0)}(L - \alpha) + \log \gamma - \psi^{(0)}(-\alpha)], \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que $\psi^{(0)}(\cdot)$ é a função digama.

A prova do Teorema 1 é mostrado no Apêndice B.

Nesse estudo, é assumido o termo “entropia estocástica” como a expressão da entropia após a substituição dos parâmetros por seus estimadores consistentes (como pelos EMVs). Os resultados a seguir são importantes para estudar a distribuição assintótica da ES estocástica da lei \mathcal{G}_I^0 , diga-se $\widehat{H}_S(\mathcal{G}_I^0)$. A seguir, são apresentadas quantidades teóricas para definir a variância de $\widehat{H}_S(\mathcal{G}_I^0)$.

Proposição 2 *Sejam Z_1, \dots, Z_N uma amostra aleatória (independente identicamente distribuída (i.i.d.)) tal que, $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$, então*

$$\delta_{\mathcal{G}_I^0}^\top = \left(\delta_\alpha^{\mathcal{G}_I^0}, \delta_\gamma^{\mathcal{G}_I^0}, \delta_L^{\mathcal{G}_I^0} \right) := \left(\frac{\partial H(\mathcal{G}_I^0)}{\partial \alpha}, \frac{\partial H(\mathcal{G}_I^0)}{\partial \gamma}, \frac{\partial H(\mathcal{G}_I^0)}{\partial L} \right) \text{ em (3.4),}$$

em que

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^{\mathcal{G}_I^0} &= (1 - \alpha)\psi^{(1)}(-\alpha) - (L - \alpha)\psi^{(1)}(L - \alpha), & \delta_\gamma^{\mathcal{G}_I^0} &= \frac{1}{\gamma} \\ \text{e } \delta_L^{\mathcal{G}_I^0} &= (L - \alpha)\psi^{(1)}(L - \alpha) - (L - 1)\psi^{(1)}(L) - \frac{1}{L} \text{ e} \end{aligned}$$

$\psi^{(1)}(\cdot)$ é a função poligama de ordem 1. As expressões análogas para o *speckle* com média não unitária são fornecidas como segue.

Lema 2 *Seja $Z \sim \Gamma^*(L, \mu) := \Gamma(L, L/\mu)$, a ES de Z é dada por*

$$H_S(\Gamma^*) = H_S([L, \mu]) = L (\log L - \log \mu) + \log \Gamma(L) + (1 - L)\psi^{(0)}(L). \quad (4.2)$$

Proposição 3 Seja Y_1, \dots, Y_N , uma amostra aleatória i.i.d., com $Y \sim \Gamma^*(L, \mu)$,

$$\delta_{\Gamma^*}^\top = (\delta_L^{\Gamma^*}, \delta_\mu^{\Gamma^*}) := \left(\frac{\partial H(\Gamma^*)}{\partial L}, \frac{\partial H(\Gamma^*)}{\partial \mu} \right) \text{ em (3.4),}$$

em que $\delta_L^{\Gamma^*} = \frac{(L-1)}{L} + (1-L)\psi^{(1)}(L)$ e $\delta_\mu^{\Gamma^*} = \mu^{-1}$.

As expressões nas Proposições 2 e 3 são importantes porque as ESs para Γ^* (4.2) e para \mathcal{G}_I^0 (4.1) assim como suas distribuições são usadas como ferramentas centrais para construir novos procedimentos de segmentação e os detectores de mudança. Para determinar a variância de $\widehat{H}(\Gamma^*)$ e $\widehat{H}(\mathcal{G}_I^0)$, necessitam-se também determinar as matrizes de informação de Fisher (MIFs) com respeito a Γ^* e \mathcal{G}_I^0 , respectivamente.

Para a MIF da distribuição \mathcal{G}_I^0 , algumas derivadas de primeira e segunda ordem são equivalentes às apresentadas em Vasconcellos, Frery e Silva (2005). A MIF da \mathcal{G}_I^0 é dada por: Para $\ell([\alpha, \gamma, L]) := \ell([\alpha, \gamma, L]; Z_1, \dots, Z_N)$ como log-verossimilhança obtida a partir da amostra aleatória Z_1, \dots, Z_N de $Z \sim \mathcal{G}_I^0$,

$$\mathcal{K}([\alpha, L, \gamma]) = E \left(-\frac{\partial^2 \ell([\alpha, \gamma, L])}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{\alpha\alpha}^{\mathcal{G}_I^0} & \mathcal{K}_{L\alpha}^{\mathcal{G}_I^0} & \mathcal{K}_{\gamma\alpha}^{\mathcal{G}_I^0} \\ \mathcal{K}_{\alpha L}^{\mathcal{G}_I^0} & \mathcal{K}_{LL}^{\mathcal{G}_I^0} & \mathcal{K}_{\gamma L}^{\mathcal{G}_I^0} \\ \mathcal{K}_{\alpha\gamma}^{\mathcal{G}_I^0} & \mathcal{K}_{L\gamma}^{\mathcal{G}_I^0} & \mathcal{K}_{\gamma\gamma}^{\mathcal{G}_I^0} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

em que $\mathcal{K}_{\alpha\alpha}^{\mathcal{G}_I^0} = N[\psi^{(1)}(-\alpha) - \psi^{(1)}(L - \alpha)]$, $\mathcal{K}_{\gamma\gamma}^{\mathcal{G}_I^0} = N \left[-\frac{\alpha}{\gamma^2} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{(L-\alpha+1)\gamma^2} \right]$, $\mathcal{K}_{LL}^{\mathcal{G}_I^0} = N \left[\psi^{(1)}(L) - \frac{1}{L} - \psi^{(1)}(L - \alpha) + \frac{2}{(L-\alpha)} - \left(\frac{L+1}{L} \right) \frac{1}{(L-\alpha+1)} \right]$, $\mathcal{K}_{\alpha L}^{\mathcal{G}_I^0} = \mathcal{K}_{L\alpha}^{\mathcal{G}_I^0} = N \left[\psi^{(1)}(L - \alpha) - (L - \alpha)^{(-1)} \right]$, $\mathcal{K}_{\alpha\gamma}^{\mathcal{G}_I^0} = \mathcal{K}_{\gamma\alpha}^{\mathcal{G}_I^0} = N \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha}{\gamma(\alpha - L)} \right]$ e $\mathcal{K}_{\gamma L}^{\mathcal{G}_I^0} = \mathcal{K}_{L\gamma}^{\mathcal{G}_I^0} = N \left[\frac{\alpha}{\gamma(\alpha - L)} + \frac{\alpha}{\gamma(L - \alpha + 1)} \right]$.

Para a MIF da distribuição Γ^* , temos: Para $\ell([L, \mu]) := \ell([L, \mu]; Y_1, \dots, Y_N)$ como log-verossimilhança obtida a partir da amostra aleatória Y_1, \dots, Y_N de $Y \sim \Gamma^*$,

$$\mathcal{K}([L, \mu]) = E \left(-\frac{\partial^2 \ell([L, \mu])}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{LL}^{\Gamma^*} & \mathcal{K}_{\mu L}^{\Gamma^*} \\ \mathcal{K}_{L\mu}^{\Gamma^*} & \mathcal{K}_{\mu\mu}^{\Gamma^*} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

em que $\mathcal{K}_{LL}^{\Gamma^*} = N \left[-L^{-1} + \psi^{(1)}(L) \right]$, $\mathcal{K}_{\mu\mu}^{\Gamma^*} = \frac{NL}{\mu^2}$ e $\mathcal{K}_{L\mu}^{\Gamma^*} = \mathcal{K}_{\mu L}^{\Gamma^*} = 0$.

4.2 UM NOVO ALGORITMO DE SEGMENTAÇÃO BASEADO EM ENTROPIA

No que segue, um novo paradigma de segmentação para imagens SAR multidimensional é desenvolvido, levando em consideração ES estocástica para Γ^* e \mathcal{G}_I^0 .

4.2.1 Modelo de segmentação

Seja $\mathbf{I}(i) = [I_1(i), I_2(i), I_3(i)]^\top \in \mathbb{R}_+^3$ para $i = 1, \dots, T$ um vetor de intensidades dos canais HH, HV e VV da i -ésima entrada de uma imagem *PolSAR multilook* sendo T o total de *pixels* da imagem. Assuma $\mathbf{H}_S(i) = [H_1(i), H_2(i), H_3(i)]^\top$ como vetor de entropias da i -ésima entrada associada a $\mathbf{I}(i)$. Suponha também que as entropias nas entradas de uma imagem (para um canal especificado) são independentes.

Considere que uma imagem sob estudo é estratificada (por sua natureza) em c regiões e existe uma matriz de pertinência $\mathbf{U} = [U_{ig}]_{T \times c}$ tal que $U_{ig} \in \{0, 1\}$ é o índice que indica se o i -ésimo *pixel* pertence ao g -ésimo grupo ($U_{ig} = 1$) ou não ($U_{ig} = 0$) sendo $\sum_{g=1}^c U_{ig} = 1$. Na prática de segmentação de nossa proposta, uma estimativa para $\mathbf{H}_S = [\mathbf{H}_S(i) | \dots | \mathbf{H}_S(T)]^\top$, diga-se $\dot{\mathbf{H}}_S$, é uma base de dados observável e \mathbf{U} é uma matriz não observável. Assim, $\{\dot{\mathbf{H}}_S, \mathbf{U}\}$ é o conjunto de dados completos. Um segmentador pode ser entendido como um algoritmo para estimar a matriz não observável \mathbf{U} dado $\dot{\mathbf{H}}_S$. No que segue, essas quantidades são discutidas com mais detalhes.

Entropias amostrais são obtidas substituindo as estimativas de MV calculadas na vizinhança de $\mathbf{I}(i)$ utilizando (4.1) e (4.2). Quando o resultado (3.3) for mantido, a variável $\widehat{\mathbf{H}}_S(i)$ condicionada a g -ésima região segue uma distribuição normal multivariada com densidade

$$p(\dot{\mathbf{H}}_S(i) | U_{ig} = 1; \boldsymbol{\theta}_g) = f_{\mathcal{N}}(\dot{\mathbf{H}}_S(i); \boldsymbol{\theta}_g) = |2\pi \boldsymbol{\Sigma}_g|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{H}}_S(i) - \boldsymbol{\mu}_g]^\top \boldsymbol{\Sigma}_g^{-1} [\dot{\mathbf{H}}_S(i) - \boldsymbol{\mu}_g] \right\}, \quad (4.5)$$

em que $\dot{\mathbf{H}}_S(i) = [\dot{H}_1(i), \dot{H}_2(i), \dot{H}_3(i)]^\top$ é um resultado de $\widehat{\mathbf{H}}_S(i)$, com média da g -ésima região sendo $\boldsymbol{\mu}_g = [\mu_{g:1}, \mu_{g:2}, \mu_{g:3}]^\top = E[\widehat{\mathbf{H}}_S(i) | U_{ig} = 1]$ e matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}_g = \{\sigma_{g:l_1, l_2}\}_{l_1, l_2=1,2,3} = \text{Cov}[\widehat{\mathbf{H}}_S(i) | U_{ig} = 1]$, $\boldsymbol{\theta}_g = [\boldsymbol{\mu}_g^\top, \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_g)^\top]^\top$ é a configuração paramétrica da g -ésima região e $\text{vec}(\cdot)$ é a operação vetorização.

De acordo com a teoria Bayesiana (NIKOU; LIKAS; GALATSANOS, 2010), a densidade conjunta de $\widehat{\mathbf{H}}_S(i)$ e U_{ig} é

$$p(\dot{\mathbf{H}}_S(i), U_{ig}; \boldsymbol{\theta}_g) = p(U_{ig} = 1) p(\dot{\mathbf{H}}_S(i) | U_{ig} = 1; \boldsymbol{\theta}_g), \quad (4.6)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\theta}_c^\top]^\top$. Assumindo que (i) $\widehat{\mathbf{H}}_S(i)$ e $\widehat{\mathbf{H}}_S(j)$ são independentes e (ii) adotando a probabilidade a priori de que o i -ésimo *pixel* pertence ao g -ésimo grupo como $p(U_{ig} = 1) = \pi_g \in [0, 1]$ tal que $\sum_{g=1}^c \pi_g = 1$, então a densidade conjunta da imagem, $\widehat{\mathbf{H}}_S$, é

$$p(\dot{\mathbf{H}}_S; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^T \left\{ \sum_{g=1}^c \pi_g \left[f_{\mathcal{N}}(\dot{\mathbf{H}}_S(i); \boldsymbol{\theta}_g) \right] \right\}, \quad (4.7)$$

que é o modelo de segmentação.

4.2.2 Estimação do modelo paramétrico baseado no algoritmo EM

Baseando-se na Equação (4.7), a probabilidade condicional da entropia no i -ésimo *pixel* pertencer a g -ésima região na k -ésima iteração dado uma imagem é (MCLACHLAN, 2000):

$$\begin{aligned} p(U_{ig} = 1 | \dot{\mathbf{H}}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) &= \hat{\pi}_g(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} | \dot{\mathbf{H}}_S(i)) \\ &= \frac{\hat{\pi}_g^{(k)}(i) \left[f_{\mathcal{N}}(\dot{\mathbf{H}}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^{(k)}) \right]}{\sum_{g=1}^c \hat{\pi}_g^{(k)}(i) \left[f_{\mathcal{N}}(\dot{\mathbf{H}}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^{(k)}) \right]}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para cada iteração, o $\hat{\pi}_g$ é atualizado da seguinte maneira:

$$\hat{\pi}_g^{(k+1)}(i) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \hat{\pi}_g(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} | \dot{\mathbf{H}}_S(i)). \quad (4.9)$$

As atualizações para as equações $\hat{\boldsymbol{\mu}}_g^{(k+1)} = [\hat{\mu}_{g:1}^{(k+1)}, \hat{\mu}_{g:2}^{(k+1)}, \hat{\mu}_{g:3}^{(k+1)}]^\top$ e $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_g^{(k+1)} = \{\hat{\sigma}_{g:l_1, l_2}^{(k+1)}\}_{l_1, l_2=1, 2, 3}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_g^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{T_g} \left[\hat{\pi}_g^{(k)}(i) f_{\mathcal{N}}(\dot{\mathbf{H}}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^{(k)}) \right] \dot{\mathbf{H}}_S(i)}{\sum_{i=1}^{T_g} \left[\hat{\pi}_g^{(k)}(i) f_{\mathcal{N}}(\dot{\mathbf{H}}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^{(k)}) \right]} \quad (4.10)$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_g^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{T_g} \left[\hat{\pi}_g^{(k)}(i) f_{\mathcal{N}}(\dot{\mathbf{H}}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^{(k)}) \right] \boldsymbol{\Delta}_g^{(i)}}{\sum_{i=1}^{T_g} \left[\hat{\pi}_g^{(k)}(i) f_{\mathcal{N}}(\dot{\mathbf{H}}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^{(k)}) \right]}, \quad (4.11)$$

em que $\boldsymbol{\Delta}_g^{(i)} = (\dot{\mathbf{H}}_S(i) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_g^{(k+1)}) (\dot{\mathbf{H}}_S(i) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_g^{(k+1)})^\top$ e T_g é o número de *pixels* na g -ésima região da imagem em estudo. Uma vez que existem $m(m+1)/2$ parâmetros para serem

estimados na Equação (4.11), é comum impor estruturas mais parcimoniosas em modelos de mistura gaussiana.

Celex e Govaert (1995) introduziram quatorze meios diferentes de autodecomposições da matriz de covariância. Os nomes dos modelos estão associados ao volume, forma e orientação e cada modelo pode ser visualizadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Nomenclatura, estrutura das covariâncias e quantidades de parâmetros das decomposições da matriz de covariância.

Modelo	Volume	Forma	Orientação	Σ_g	quantidades de parâmetros
EII	Igual	Esférico	–	$\lambda \mathbf{I}$	1
VII	Variável	Esférico	–	$\lambda_g \mathbf{I}$	c
EEl	Igual	Igual	Eixo-Alinhado	$\lambda \mathbf{A}$	m
VEI	Variável	Igual	Eixo-Alinhado	$\lambda_g \mathbf{A}$	$m + c - 1$
EVI	Igual	Variável	Eixo-Alinhado	$\lambda \mathbf{A}_g$	$mc - c + 1$
VVI	Variável	Variável	Eixo-Alinhado	$\lambda_g \mathbf{A}_g$	mc
EEE	Igual	Igual	Igual	$\lambda \mathbf{DAD}^\top$	$m(m + 1)/2$
EEV	Igual	Igual	Variável	$\lambda \mathbf{D}_g \mathbf{AD}_g^\top$	$cm(m + 1)/2 - (c - 1)m$
VEV	Variável	Igual	Variável	$\lambda_g \mathbf{D}_g \mathbf{AD}_g^\top$	$cm(m + 1)/2 - (c - 1)(m - 1)$
VVV	Variável	Variável	Variável	$\lambda_g \mathbf{D}_g \mathbf{A}_g \mathbf{D}_g^\top$	$cm(m + 1)/2$
EVE	Igual	Variável	Igual	$\lambda \mathbf{DA}_g \mathbf{D}^\top$	$m(m + 1)/2 - (c - 1)(m - 1)$
VVE	Variável	Variável	Igual	$\lambda_g \mathbf{DA}_g \mathbf{D}^\top$	$m(m + 1)/2 - (c - 1)m$
VEE	Variável	Igual	Igual	$\lambda_g \mathbf{DAD}^\top$	$m(m + 1)/2 - (c - 1)$
EVV	Igual	Variável	Variável	$\lambda \mathbf{D}_g \mathbf{A}_g \mathbf{D}_g^\top$	$cm(m + 1)/2 - (c - 1)$

Fonte: próprio autor.

Diante do apresentado na Tabela 3, \mathbf{D} é a matriz de autovetores de Σ_g , \mathbf{A} é a matriz diagonal com entradas proporcionais para os autovalores de Σ_g , λ é uma constante de proporcionalidade (BROWNE; McNICHOLAS, 2014). O modelo que usamos neste estudo é denominado VVV, que mostrou os melhores resultados para imagens SAR de acordo com a metodologia proposta.

4.2.3 Um critério de parada

A cada iteração é necessário verificar a convergência do algoritmo. Existem várias maneiras de averiguar a convergência de um algoritmo. Um dos critérios usa o erro absoluto entre os passos. Neste caso, as estatísticas baseadas em entropia com as c regiões são utilizadas para

calcular o erro absoluto (PARDO, 2005):

$$S^{(k)} = \sum_{l=1}^3 S_l^{(k)} \equiv \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{g=1}^c \frac{T_g \left(\hat{\mu}_{g:l}^{(k+1)} - \overline{D}_l^{(k+1)} \right)^2}{\hat{\sigma}_{g:l,l}^{(k+1)}} \right], \quad (4.12)$$

em que

$$\overline{D}_l^{(k+1)} = \frac{1}{\sum_{g=1}^c \frac{T_g}{\hat{\sigma}_{g:l,l}^{(k+1)}}} \sum_{g=1}^c \frac{T_g}{\hat{\sigma}_{g:l,l}^{(k+1)}} \hat{\mu}_{g:l}^{(k+1)}.$$

Se o erro absoluto entre os passos (k) e $(k+1)$ é menor do que um certo limite especificado (i.e., $|S^{(k+1)} - S^{(k)}| < \epsilon$), então o algoritmo converge. Neste estudo foi usado um limite de $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$. Um pseudocódigo da proposta do método de segmentação é apresentado no Algoritmo 1. A estatística S apresentada na Equação (4.12) foi proposta para testar a igualdade de entropias de populações independentes, o que justifica sua utilização nesse estudo (PARDO, 2005).

Algoritmo 1: Método de segmentação proposto para imagens SAR.

- 1: Primeiro, determine aleatoriamente cada *pixel* para um dos c grupos.
 - 2: Inicie os pesos $\hat{\pi}_g(i)$ como $\hat{\pi}_g^{(0)}(i) = \frac{T_g}{T}$ tal que $\sum_{g=1}^c \hat{\pi}_g^{(0)}(i) = 1$;
 - 3: Estime $\hat{H}_{g:l}^{(k+1)}$ e $\hat{\sigma}_{g:l,l}^{(k+1)}$ pelas Equações (4.10) e (4.11).
 - 4: A probabilidade condicional da observação $\dot{H}_S(i)$ pertencer ao g -ésimo grupo é calculada por $\hat{\tau}_g(\hat{\theta} | \dot{H}_S(i))$ na Equação (4.8).
 - 5: As observações $\dot{H}_S(i)$ são realocadas nos grupos de acordo com $\hat{c} = \arg \max_{g \in c} \hat{\tau}_g(i)$;
 - 6: Calcule $S^{(k)}$ na Equação (4.12) e, pelo erro absoluto, verifique a convergência.
 - 7: Se houver convergência, pare o processo; caso contrário, calcule os pesos pela Equação (4.9) e retorne ao terceiro passo.
-

4.3 UM NOVO ALGORITMO PARA DETECÇÃO DE MUDANÇA

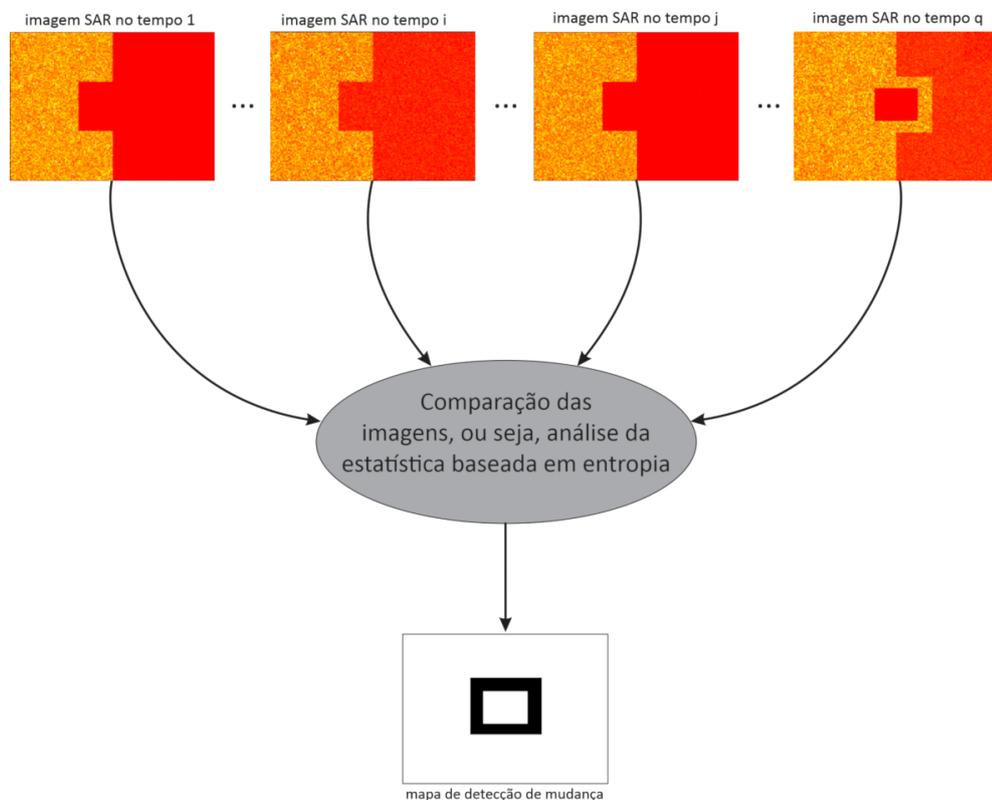
Nesta seção, são apresentados um esquema e um algoritmo para um novo detector de mudança. Para a realização da detecção de mudança, são necessárias no mínimo duas imagens da mesma região em dois períodos distintos de tempo. Na Figura 17 é mostrado um esquema da detecção de mudança, em que as imagens são comparadas *pixel a pixel*, para identificar onde existem mudanças e, por fim, é obtida uma imagem dos *pixels* considerados significativamente diferentes entre si.

Um pseudocódigo da proposta é mostrado no Algoritmo 2 que, em resumo, são retiradas amostras das imagens com janelamento 3×3 ao redor do *pixel* em estudo e estimado os parâmetros para aplicação do teste de hipóteses descrito no Capítulo 3. O nível de significância adotado nesse estudo foi de $\alpha = 1 \times 10^{-4}$.

Algoritmo 2: Método de detecção de mudança proposto para imagens SAR. Esta discussão é voltada para o uso de duas imagens obtidas em tempos distintos.

- 1: Sejam I_1 e I_2 duas imagens SAR da mesma região observadas em tempo distintos;
 - 2: Obtenha uma amostra de tamanho N considerando um janelamento ao redor do i -ésimo *pixel* em cada imagem, $I_1(i)$ e $I_2(i)$;
 - 3: Estime $\theta_1(i)$ e $\theta_2(i)$ através dos EMVs, $\hat{\theta}_1(i)$ e $\hat{\theta}_2(i)$, em que $\theta_1(i)$ e $\theta_2(i)$ representam as configurações paramétricas para as distribuições de $I_1(i)$ e $I_2(i)$;
 - 4: Encontre o valor de s através da equação (3.9);
 - 5: Determine um nível α e calcule $P(\chi_1^2 > s)$;
 - 6: Se $P(\chi_1^2 > s) \leq \alpha$, então existe diferença entre os *pixels* nos dois períodos de tempo diferentes; caso contrário, não existe diferença significativa entre os *pixels*.
-

Figura 17 – Esquema para detecção de mudança entre imagens SAR.



Fonte: próprio autor.

4.4 RESULTADOS

4.4.1 Segmentação

Esta seção aborda três experimentos de segmentação com dados reais em intensidades multidimensionais de imagens *PolSAR multilook*. É avaliado o desempenho de oito segmentadores – resultantes do método discutido na Subseção 4.2.1 – nessas imagens:

- (i) segmentador baseado na entropia de Shannon no caso independente para Γ^* com L conhecido (IEL_{Γ^*});
- (ii) segmentador baseado na entropia de Shannon no caso independente para Γ^* com L estimado ($IELE_{\Gamma^*}$);
- (iii) segmentador baseado na entropia de Shannon no caso independente para \mathcal{G}_I^0 com L conhecido ($IEL_{\mathcal{G}_I^0}$);
- (iv) segmentador baseado na entropia de Shannon no caso independente para \mathcal{G}_I^0 com L estimado ($IELE_{\mathcal{G}_I^0}$);
- (v) segmentador baseado na entropia de Shannon no caso dependente para Γ^* com L conhecido (DEL_{Γ^*});
- (vi) segmentador baseado na entropia de Shannon no caso dependente para Γ^* com L estimado ($DELE_{\Gamma^*}$);
- (vii) segmentador baseado na entropia de Shannon no caso dependente para \mathcal{G}_I^0 com L conhecido ($DEL_{\mathcal{G}_I^0}$);
- (viii) segmentador baseado na entropia de Shannon no caso dependente para \mathcal{G}_I^0 com L estimado ($DELE_{\mathcal{G}_I^0}$).

Os métodos propostos são comparados com outros três segmentadores bem definidos na literatura: k -means e modelos de mistura de distribuições gama com L conhecido (GaMM-L) e com L estimado (GaMM-LE). Esses dois últimos métodos podem ser entendidos como casos particulares do segmentador baseado na distribuição Wishart escalonada em (HORTA; MASCARENHAS; FRERY, 2007) ou resultante de Zhao, Li e Li (2017). Para comparar os métodos

anteriores, usamos duas figuras de mérito: acurácia geral (A) e coeficiente Kappa (κ), definidos em 3.3.1 e 3.3.2, respectivamente.

O primeiro experimento é feito utilizando a imagem de Foulum (Dinamarca). Ela foi obtida em banda L e *quad-pol* sob um número de *looks* oito. Esta região representa cinco áreas agrícolas que podem ser identificadas de acordo com o mapa de referência nas Figuras 18a e 18b: trigo (em branco), colza (em cinza intermediário mais forte), aveia (em cinza claro), centeio (em cinza), coníferas (em cinza intermediário inferior) e uma área não definida – *background* – (em preto). Adicionalmente, a Figura 18c destaca as áreas puras, nas quais são quantificado os critérios de avaliação.

As Figuras 18e–18o apresentam os resultados de segmentação para imagem de Foulum. Por inspeção visual, é notável que os piores resultados são fornecidos pelos segmentadores o *k*-means (Figura 18e) e GaMM-LE (Figura 18g). Com relação aos métodos que assumem independência entre as entropias estocásticas, IEL \bullet e IELE \bullet (Figuras 18h–18k), os procedimentos que possuem números de *looks* conhecidos e entropia com base na \mathcal{G}_I^0 produziram os melhores resultados. Entretanto, todos os métodos anteriores falharam em reconhecer e dividir as áreas de trigo e colza. O último problema foi superado por procedimentos que adotam a hipótese de dependência entre entropias estocásticas, DEL \bullet e DELE \bullet (Figuras 18l–18o). Para esses métodos, quanto menos estimadores são usados, melhores resultados serão obtidos. A Tabela 4 mostra os valores dos critérios de avaliação. A acurácia é utilizada para mensurar de forma geral e por região, enquanto o coeficiente Kappa é empregado para quantificar apenas de forma geral. Os resultados em negrito representam os melhores desempenhos.

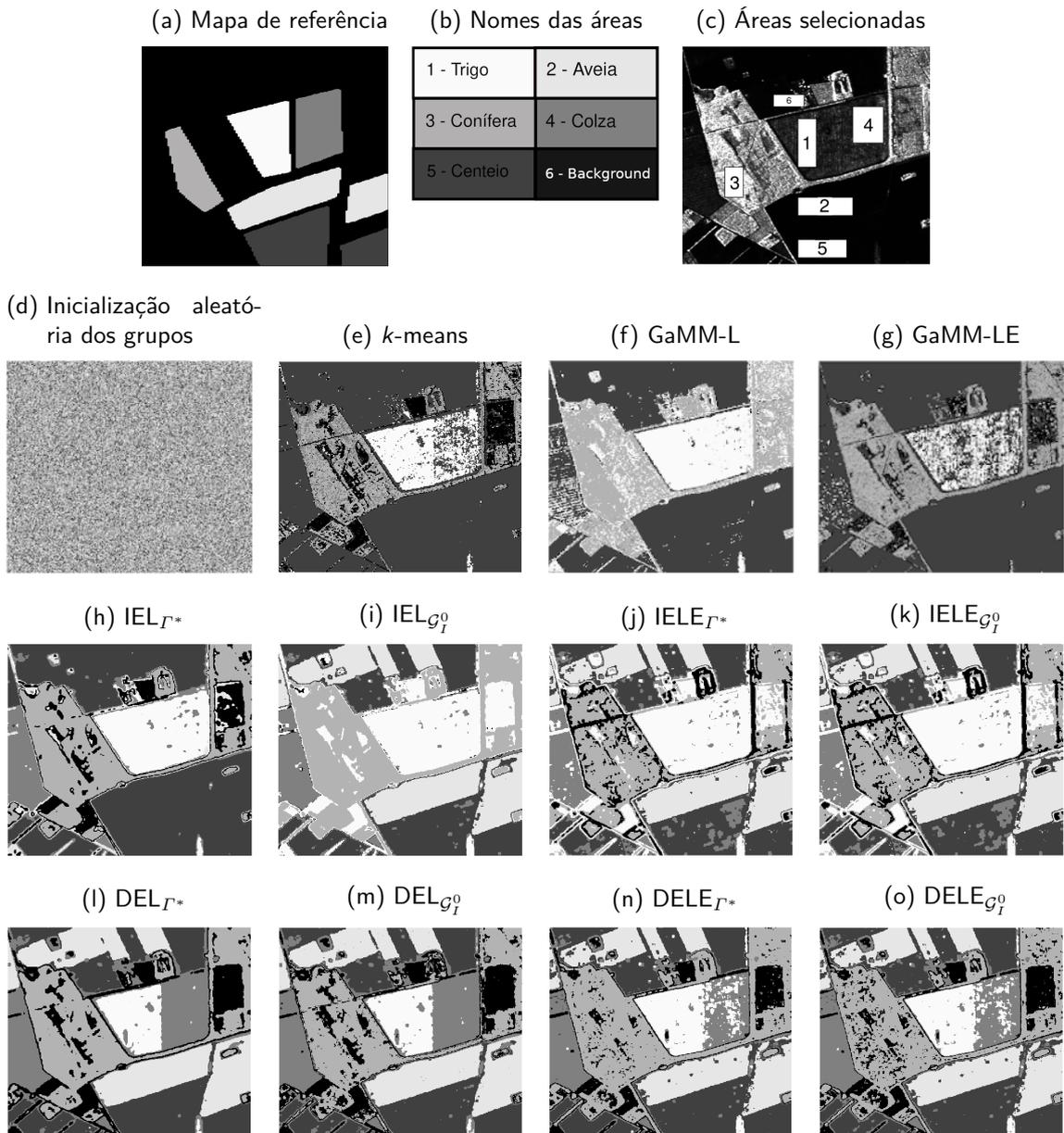
Quando analisado por região, os melhores resultados são obtidos por diferentes métodos, mostrando que os métodos variam o desempenho dependendo do tipo da região. Para a região de trigo, o melhor método é IEL Γ^* que conseguiu agrupar corretamente todas as observações dessa região. Na região de aveia, o DEL \mathcal{G}_I^0 agrupou corretamente 98.3% dos dados. O método IELE Γ^* é o mais indicado para agrupar a região de conífera. Para região de colza, os métodos DEL Γ^* e DEL \mathcal{G}_I^0 fornecem o mesmo desempenho, agrupando todos os dados corretamente. Na região de centeio, todos os métodos obtiveram resultados semelhantes com acurácia máxima, com exceção do DELE \mathcal{G}_I^0 que acertou 99.9% dos dados. Neste estudo também é considerada uma área não definida. O melhor método para essa região é DEL Γ^* com um total de 28.3% dos dados agrupados corretamente. Ao analisar de forma geral, o DEL Γ^* tem a melhor performance, porém DEL \mathcal{G}_I^0 provê resultados semelhantes podendo ser considerados como tendo desempenhos equivalentes.

A segunda aplicação trata-se uma cena de Munique, Alemanha. De acordo com o mapa de referência na Figura 19a, a imagem estudada possui três regiões: bosque, áreas construídas e áreas abertas. Considere uma discussão qualitativa das Figuras 19c–19o. O k -means apresenta o pior resultado. Em geral, como no experimento anterior, o grupo de procedimentos $\{\text{DEL}_\bullet, \text{DELE}_\bullet\}$ tende a superar o desempenho de $\{\text{IEL}_\bullet, \text{IELE}_\bullet\}$. A Tabela 5 exibe valores dos critérios de desempenho usados neste experimento, confirmando a análise anterior. Para a área de Bosque, o melhor método é DEL_{Γ^*} com 94.3% de acerto no agrupamento dos dados. Na região de áreas construídas, o IEL_{Γ^*} fornece o melhor com 64.4% dos dados agrupados corretamente. Para a região de áreas abertas, três métodos agruparam corretamente todos os dados, o k -means, IEL_{Γ^*} e $\text{IELE}_{\mathcal{G}_I^0}$. Entretanto, as melhores segmentações são obtidas ao usar o ES para \mathcal{G}_I^0 com L conhecido; ou seja, $\text{IEL}_{\mathcal{G}_I^0}$ e $\text{DEL}_{\mathcal{G}_I^0}$.

O terceiro experimento é feito para imagem de Flevoland, na Holanda. Pelas Figuras 20a e 20b, essa imagem se constitui de onze áreas: feijão, floresta, batata, alfafa, trigo, terra, beterraba, colza, águas, ervilha e pastagem. Primeiramente, de uma análise qualitativa das Figuras 20e–20o, o GaMM-L apresenta a pior segmentação, seguido pelo k -means e GaMM-LE. Em geral, o uso de um padrão de dependência em $\widehat{H}_S(i)$ melhora os resultados da segmentação. A Tabela 6 exibe os valores das medidas de desempenho adotadas. A melhor segmentação geral é feita por DEL_{Γ^*} . Este método também obtém as melhores segmentações em 5 áreas: alfafa, terra, beterraba, colza e ervilha, sendo 100% de acerto nas quatro primeiras e 98.9% de acerto em ervilha. Na área de feijão, a melhor segmentação é obtida pelo segmentador GaMM-L com 2.7% de acerto dos dados. Para a área de floresta, com 99.5% de acurácia, o melhor método é $\text{IELE}_{\mathcal{G}_I^0}$. Na região de batata o IELE_{Γ^*} exibe o melhor desempenho com um acerto de 90.2%. Em trigo e pastagem, as melhores segmentações são realizadas pelos métodos $\text{DELE}_{\mathcal{G}_I^0}$ e GaMM-LE com 98.6% e 55.5% de acerto, respectivamente.

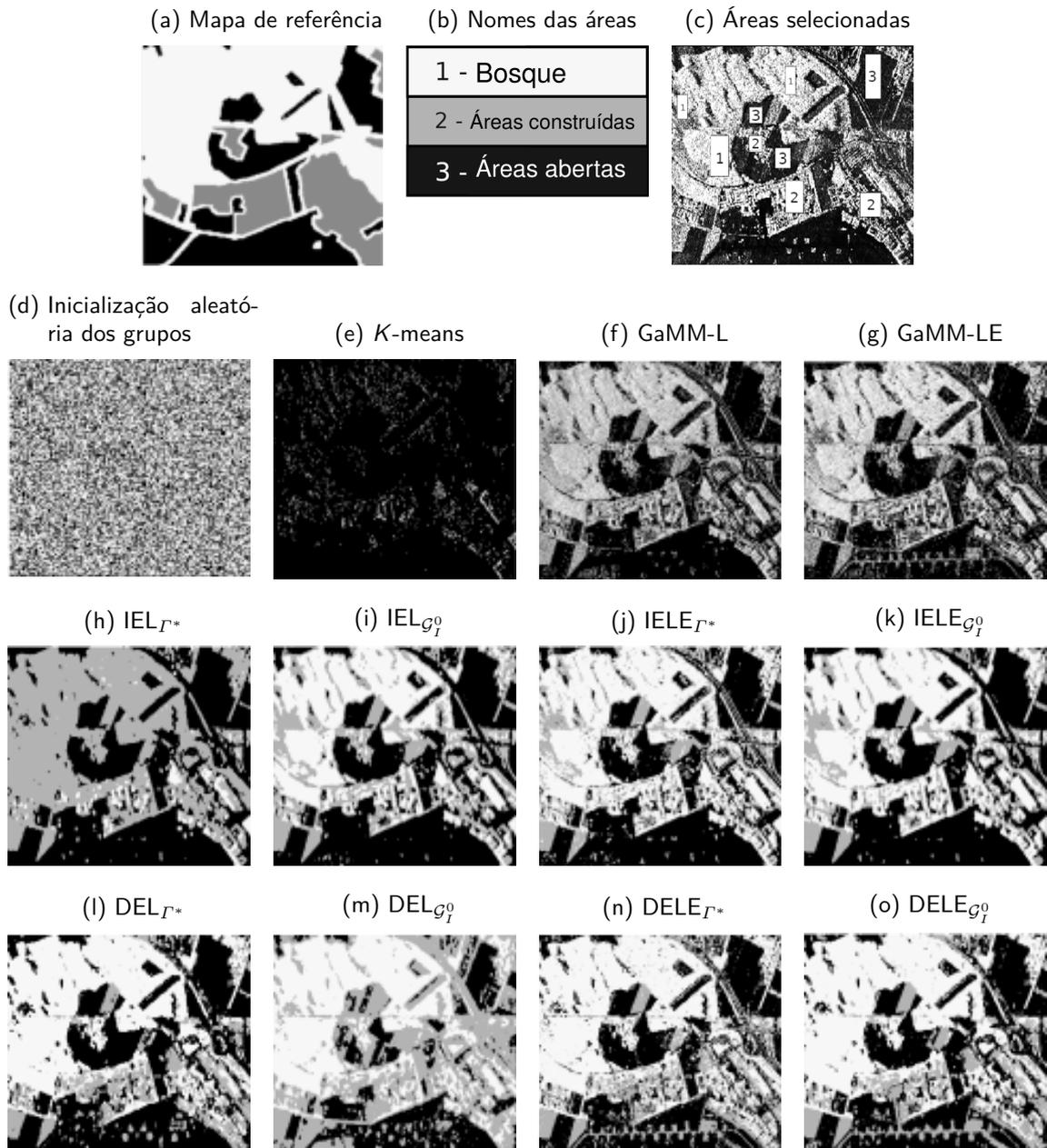
Em termos de dependência, os segmentadores propostos com base na Γ^* apresentam melhores resultados do que os construídos sobre independência. Os equipados com a lei \mathcal{G}_I^0 obtém melhor desempenho obedecendo a seguinte regra: em regiões homogêneas, a condição de dependência é mais recomendada; enquanto o pressuposto de independência é requerido em cenários heterogêneos. Isso parece ser motivado pelo fato de que (i) a distribuição Γ é usada para retornos de intensidade suaves (e, portanto, o uso da estrutura de dependência produz mais flexibilidade de segmentação) e (ii) a lei \mathcal{G}_I^0 assume frequentemente altos valores de retorno em cenários heterogêneos (como em Munique) e baixos valores de intensidade para cenários homogêneos (como em Foulum e Flevoland).

Figura 18 – Desempenho de segmentação sobre uma cena da imagem EMISAR de Foulum, Dinamarca.



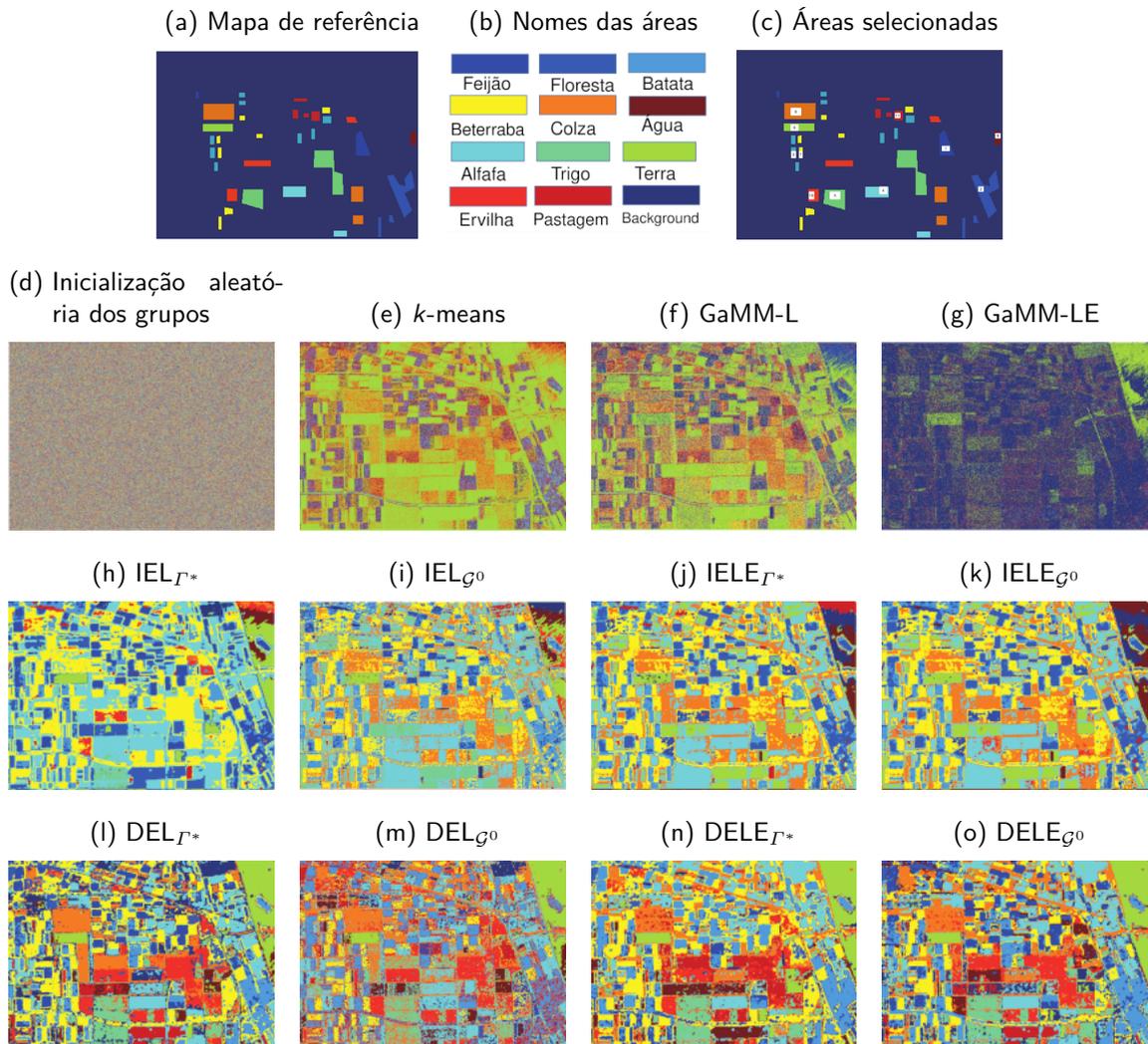
Fonte: próprio autor.

Figura 19 – Desempenho de segmentação sobre uma cena da imagem E-SAR de Munique, Alemanha com os modelos Γ^* e \mathcal{G}_I^0 .



Fonte: próprio autor.

Figura 20 – Desempenho de segmentação sobre uma cena da imagem AIRSAR de Flevoland, Holanda.



Fonte: próprio autor.

Tabela 4 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de Foulum

Métodos		Regiões						
		Trigo	Aveia	Conífera	Colza	Centeio	Área não def.	
<i>k</i> -means	acurácia	por área	0.969	0	0.271	0	1	0.079
		Geral	0.391					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.250 (3.1×10^{-5})					
GaMM - L	acurácia	por área	0.999	0	0.975	0.004	0.999	0.019
		Geral	0.484					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.374 (2.5×10^{-5})					
GaMM - LE	acurácia	por área	0.532	0	0.751	0	1	0.056
		Geral	0.374					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.238 (3.9×10^{-5})					
IEL $_{\Gamma^*}$	acurácia	por área	1	0.964	0.999	0.021	1	0.033
		Geral	0.692					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.624 (2.1×10^{-5})					
IELE $_{\Gamma^*}$	acurácia	por área	0.797	0.926	1	0.981	0.999	0.081
		Geral	0.869					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.839 (1.2×10^{-5})					
IEL $_{G_I^0}$	acurácia	por área	0.998	0.978	0.991	0.028	1	0.045
		Geral	0.696					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.691 (2.1×10^{-5})					
IELE $_{G_I^0}$	acurácia	por área	0.999	0.931	0.997	0.003	0.953	0.064
		Geral	0.674					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.603 (2.2×10^{-5})					
DEL $_{\Gamma^*}$	acurácia	por área	0.898	0.962	0.999	1	1	0.283
		Geral	0.916					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.897 (8.3×10^{-6})					
DELE $_{\Gamma^*}$	acurácia	por área	0.936	0.919	0.808	0.551	0.995	0.106
		Geral	0.775					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.724 (1.8×10^{-5})					
DEL $_{G_I^0}$	acurácia	por área	0.929	0.983	0.993	1	1	0.132
		Geral	0.914					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.893 (8.5×10^{-6})					
DELE $_{G_I^0}$	acurácia	por área	0.896	0.924	0.845	0.971	0.999	0.084
		Geral	0.845					
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.809 (1.4×10^{-5})					

Fonte: próprio autor.

Tabela 5 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de Munique

Métodos		Regiões			
			Bosque	Áreas construídas	Áreas abertas
<i>k</i> -means	acurácia	por área	0	0.035	1
		Geral	0.345		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.248 (1.1×10^{-5})		
GaMM - L	acurácia	por área	0.228	0.372	0.981
		Geral	0.527		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.291 (1.5×10^{-5})		
GaMM - LE	acurácia	por área	0.453	0.242	0.988
		Geral	0.561		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.342 (1.5×10^{-5})		
IEL $_{\Gamma^*}$	acurácia	por área	0	0.644	1
		Geral	0.548		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.322 (1.4×10^{-5})		
IELE $_{\Gamma^*}$	acurácia	por área	0.800	0.341	0.992
		Geral	0.711		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.567 (1.1×10^{-5})		
IEL $_{\mathcal{G}_I^0}$	acurácia	por área	0.773	0.520	0.999
		Geral	0.764		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.647 (1.0×10^{-5})		
IELE $_{\mathcal{G}_I^0}$	acurácia	por área	0.805	0.395	1
		Geral	0.733		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.601 (1.1×10^{-5})		
DEL $_{\Gamma^*}$	acurácia	por área	0.943	0.289	0.998
		Geral	0.743		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.615 (1.0×10^{-5})		
DELE $_{\Gamma^*}$	acurácia	por área	0.925	0.259	0.988
		Geral	0.724		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.587 (1.1×10^{-5})		
DEL $_{\mathcal{G}_I^0}$	acurácia	por área	0.921	0.618	0.741
		Geral	0.760		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.640 (1.1×10^{-5})		
DELE $_{\mathcal{G}_I^0}$	acurácia	por área	0.941	0.266	0.991
		Geral	0.732		
		$\kappa (\sigma_{\kappa}^2)$	0.599 (1.0×10^{-5})		

Fonte: próprio autor.

Tabela 6 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de Flevoland

Métodos	Regiões										
	Feijão	Floresta	Batata	Alfafa	Trigo	Terra	Beterraba	Colza	Água	Ervilha	Pastagem
acurácia	por área	0	0	0.453	0	0	0.981	0	0.481	0	0
	Geral	0.215									
k -means	κ (σ_k^2)	0.107 (5.2×10^{-5})									
	por área	0.027	0.243	0.125	0.086	0	0.77	0.137	0.321	0	0.007
GaMM - L	Geral	0.177									
	κ (σ_k^2)	0.084 (2.8×10^{-5})									
acurácia	por área	0	0	0	0.009	0	0.998	0	0.234	0	0.555
	Geral	0.288									
GaMM - LE	κ (σ_k^2)	0.141 (1.7×10^{-4})									
	por área	0	0	0.532	1	0.026	1	1	0	0	0.399
acurácia	Geral	0.349									
	κ (σ_k^2)	0.285 (3.2×10^{-5})									
acurácia	por área	0.015	0.993	0.902	1	0	0.868	0.751	0.619	0.923	0
	Geral	0.514									
IELE $_{I^*}$	κ (σ_k^2)	0.461 (3.7×10^{-5})									
	por área	0.003	0	0.96	0.999	0	0.963	0.724	0.701	0	0
acurácia	Geral	0.436									
	κ (σ_k^2)	0.373 (3.3×10^{-5})									
acurácia	por área	0.026	0.995	0.875	1	0	0.988	0.788	0.575	0.882	0
	Geral	0.523									
IELE $_{G^0}$	κ (σ_k^2)	0.474 (3.5×10^{-4})									
	por área	0	0	0.702	1	0.901	1	1	1	0	0.989
acurácia	Geral	0.714									
	κ (σ_k^2)	0.677 (3.0×10^{-5})									
acurácia	por área	0	0	0.857	0.994	0.961	1	1	0.821	0	0.988
	Geral	0.703									
DELE $_{I^*}$	κ (σ_k^2)	0.667 (3.1×10^{-5})									
	por área	0	0	0.891	0.933	0.838	0.984	0.724	0.902	0.322	0.982
acurácia	Geral	0.695									
	κ (σ_k^2)	0.658 (3.2×10^{-5})									
acurácia	por área	0	0	0.869	1	0.986	1	1	0.84	0	0.035
	Geral	0.632									
DELE $_{G^0}$	κ (σ_k^2)	0.587 (3.3×10^{-5})									

Fonte: próprio autor.

4.4.2 Detecção de mudança

Quantos aos experimentos sobre detecção de mudança, duas imagens são utilizadas. Primeiramente, duas imagens do sensor UAVSAR de Los Angeles (EUA) são obtidas em 23 Abril de 2009 e 3 de Maio de 2015. A segunda aplicação de uma região da Califórnia capturadas nos mesmos períodos da cena anterior. As Figuras 21a, 21b, 22a e 22b revelam as imagens ópticas das regiões sobre estudo. A questão aqui é o entendimento do efeito da urbanização.

Como detectores de mudança, três métodos são utilizados:

- (i) $D-H_S(\Gamma^*)$, detector de mudança baseado na ES no caso independente para Γ^* com L conhecido;
- (ii) $D-H_S(G\Gamma^*)$, detector de mudança baseado na ES no caso independente para Γ^* generalizada com L conhecido;
- (iii) $D-H_S(\mathcal{G}_I^0)$, detector de mudança baseado na ES no caso independente para \mathcal{G}_I^0 com L conhecido.

Para avaliação dos métodos estudados, são utilizados alguns critérios baseados no resultado dos *pixels* classificados pelo detector com os *pixels* de um mapa de referência. Estes mapas de referência são preparados por especialistas utilizando Bing e imagens do Google Earth (RATHA et al., 2017). E os critérios de avaliação utilizados são:

1. *Falso Positivo (FP)*: Número de *pixels* indicado como mudança pelo mapa de referência (MR), mas classificado como não mudança pelo detector.
2. *Falso Negativo (FN)*: Número de *pixels* indicado que não mudaram pelo MR, mas classificados como mudança pelo detector.
3. *Taxa de Alarme Falso (TAF)*: $(FP + FN)/T$, em que T é o número de *pixels* que não mudaram de acordo com o detector.
4. *Taxa de Detecção (TD)*: TP/CG , em que TP é a quantidade de *pixels* indicado como mudança por ambos, MR e detector, e CG é o número de *pixels* indicado como mudança de acordo com o detector.
5. *Coeficiente Kappa (κ)*.

Para a primeira aplicação (Cena 1 - Los Angeles (EUA)), os mapas são encontrados nas Figuras 21a até 21l. A Figura 21a representa a região de Los Angeles em 2009, a Figura 21b é a Los Angeles em 2015, o mapa de referência pode ser observado na Figura 21c e, a partir da Figura 21d os resultados dos detectores são mostrados para essa região. Ao analisar os mapas referentes à cena 1, o mapa produzido pelo detector $D-H_S(\mathcal{G}_I^0)$ na Figura 21k é o que produz o resultado mais próximo ao mapa de referência. Na Tabela 7, são apresentados os valores dos critérios de avaliação. Pelo coeficiente Kappa, o melhor detector de mudança é o mesmo identificado na análise visual, sendo o $D-H_S(\mathcal{G}_I^0)$ para o canal HV com um acerto de 66.95%. Comparando o FP em conjunto com FN, percebe-se que ele possui valores mais baixos nos dois em comparação com os demais métodos. O detector $D-H_S(\mathcal{G}_I^0)$ no canal VV obtém desempenho semelhante ao $D-H_S(\mathcal{G}_I^0)$ no canal HV, com um Kappa de 64.09% de acurácia.

Tabela 7 – Desempenho dos detectores - Cena 1 - Los Angeles (EUA)

Detectores	Canal	FP (%)	FN (%)	TAF (%)	TD (%)	κ (%)
$D-H_S(\Gamma^*)$	HH	2.519	14.189	22.877	47.387	50.882
	HV	1.641	18.041	28.816	43.084	47.229
	VV	1.473	18.473	29.462	42.803	47.110
$D-H_S(G\Gamma^*)$	HH	10.725	5.116	17.541	47.198	29.236
	HV	4.609	12.701	22.595	45.699	45.102
	VV	4.216	13.851	24.068	44.446	44.583
$D-H_S(\mathcal{G}_I^0)$	HH	8.724	1.407	11.01	82.368	51.379
	HV	5.052	3.055	9.351	77.031	66.951
	VV	5.871	2.627	9.662	78.207	64.091

Fonte: próprio autor.

Para a aplicação 2 referente à região de Califórnia (EUA), os mapas estão representados das Figuras 22a até 22l. É possível perceber pelo mapa de referência (Figura 22c) que a maioria das mudanças entre as figuras estão localizadas do topo até o centro da imagem. Na parte de baixo da imagem, a mudança está apenas em alguns *pixels*. Dessa forma, é possível identificar que as detecções de mudanças obtidas com o detector baseado na Gama generalizada aponta muitos *pixels* erroneamente, em todos os canais (Figuras 22g, 22h, 22i). Os detectores de mudanças baseados nas distribuições Γ^* e \mathcal{G}_I^0 têm desempenhos visualmente semelhantes. Os resultados dos métodos de avaliação são encontrados na Tabela 8.

Pelo coeficiente Kappa, a maior acurácia é obtida pelo $D-H_S(\mathcal{G}_I^0)$ no canal HV com acerto

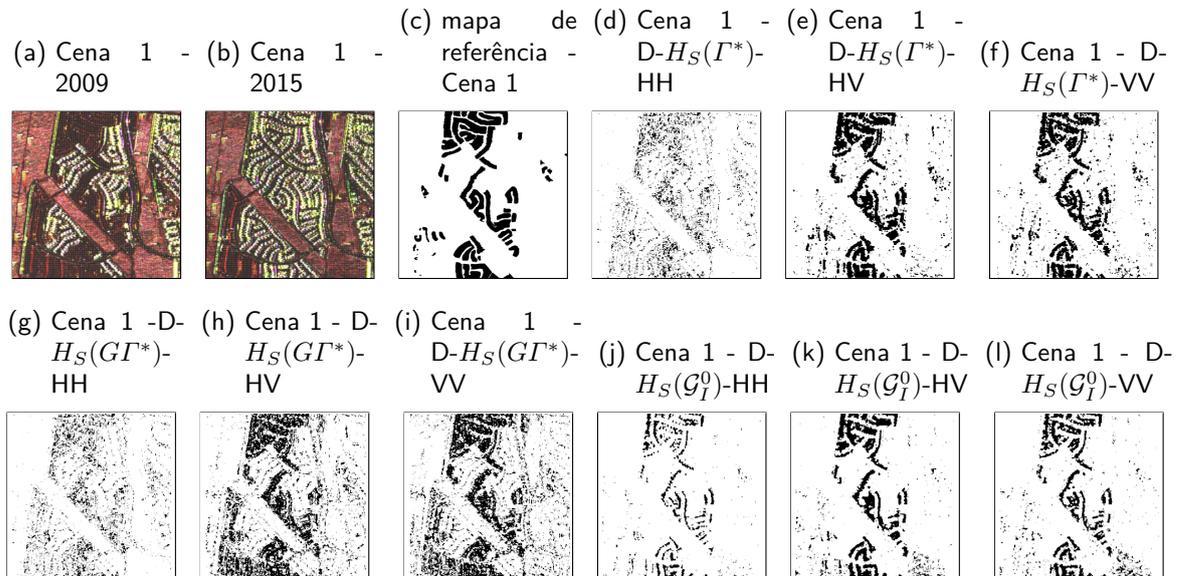
de 45.07%. Observando a Figura 22k que é referente a esse detector, é possível verificar que ele detectou mudança em vários *pixels* no meio da imagem que no mapa de referência não mudaram no tempo. A mudança localizada na parte superior direita é uma área que todos os detectores apresentam dificuldades de classificar como mudança.

Tabela 8 – Desempenho dos detectores - Cena 2 - Califórnia (EUA)

Detectores	Canal	FP (%)	FN (%)	TAF (%)	TD (%)	κ (%)
$D-H_S(\Gamma^*)$	HH	5.185	8.099	15.386	40.689	38.106
	HV	3.544	13.196	21.029	35.293	37.429
	VV	4.631	12.233	20.652	33.311	32.931
$D-H_S(G\Gamma^*)$	HH	9.592	2.973	13.105	27.891	10.117
	HV	7.342	13.997	25.832	19.542	12.548
	VV	6.924	16.419	29.265	18.866	12.347
$D-H_S(\mathcal{G}_I^0)$	HH	8.461	0.589	9.318	79.462	30.352
	HV	6.839	1.311	8.597	74.868	45.068
	VV	7.519	1.428	9.383	69.293	37.841

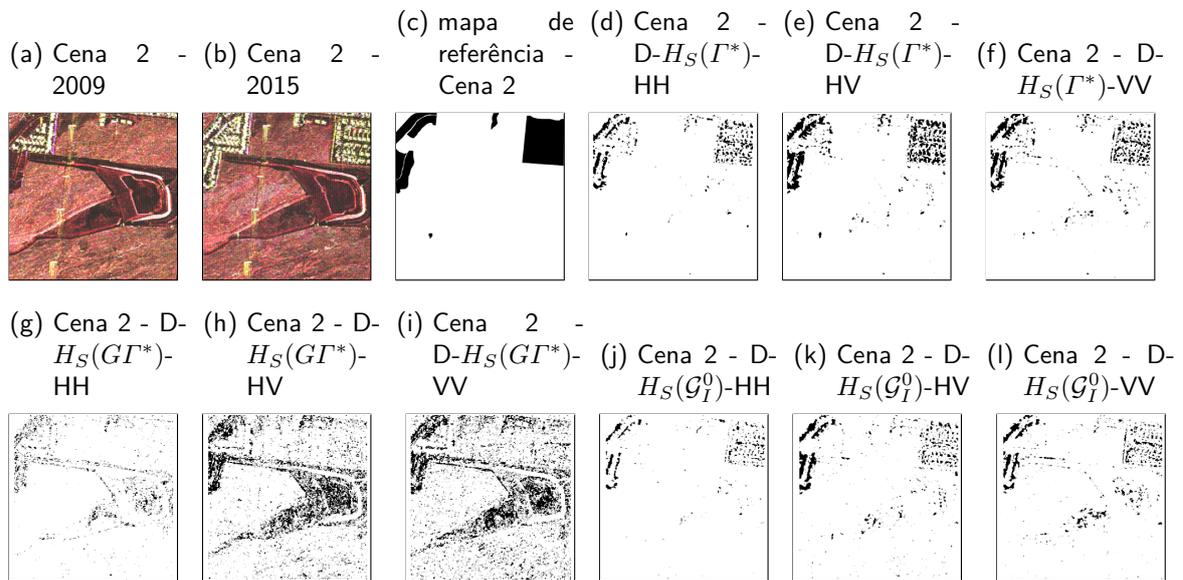
Fonte: próprio autor.

Figura 21 – Resultados da detecção de mudança usando ESs com as distribuições Γ^* , $G\Gamma^*$ e \mathcal{G}_I^0 para região de Los Angeles (EUA).



Fonte: próprio autor.

Figura 22 – Resultados da detecção de mudança usando ESs com as distribuições Γ^* , $G\Gamma^*$ e \mathcal{G}_I^0 para a região de Califórnia (EUA).



Fonte: próprio autor.

5 ENTROPIA DE SHANNON PARA A DISTRIBUIÇÃO \mathcal{G}_m^0 : ENSAIOS SOBRE SEGMENTAÇÃO NÃO SUPERVISIONADA E DETECÇÃO DE MUDANÇA

Este capítulo consiste na extensão do Capítulo 4 para as distribuições polarimétricas \mathcal{G}_m e $s\mathcal{W}_m^C$. Ou seja, novas estratégias de segmentação e detecção de mudança são endereçadas. No que segue, apresentam duas revisões da literatura.

O uso de medidas de Teoria da Informação para lidar com imagens *PolSAR* é adotado por muitos trabalhos. Goudail e Réfrégier (2004) aplicaram medidas derivadas da distribuição CCG para caracterizar o desempenho da detecção de alvos *PolSAR*. Erten et al. (2012) derivaram uma medida de similaridade entre as imagens *PolSAR* em termos de informação mútua. Morio et al. (2008) aplicaram a entropia de Shannon para caracterizar imagens *SAR* interferométricas e polarimétricas decompondo-as na soma de três termos com significados físico. Essa discussão não envolveu as propriedades estatísticas das medidas de entropia. Entretanto, Frery, Cintra e Nascimento (2013) estudaram a distribuição de medidas de contraste baseadas em entropias com a distribuição Wishart complexa escalonada na classe (h, ϕ) .

Um dos desafios no processamento de imagens, neste caso mais especificamente segmentação de imagens *PolSAR* é o *speckle* Horta (2009) aplicou modelos de mistura de distribuições na segmentação de imagens *PolSAR* utilizando as distribuições Wishart, \mathcal{K}_m e \mathcal{G}_m^0 , concluindo que a distribuição Wishart é robusta à segmentação de imagens contendo *outliers*, mas não é flexível à variabilidade das regiões heterogêneas, em que a distribuição \mathcal{G}_m^0 predominou nesse cenário. Bombrun et al. (2010) utilizaram a distribuição KummerU para descrever os dados *PolSAR* e implementaram um algoritmo de segmentação baseado na máxima verossimilhança hierárquica. Akbarizadeh e Rahmani (2017) utilizaram um novo método de agrupamento espectral para combinar recursos de textura e cores para a segmentação de imagens *PolSAR* e estimaram simultaneamente os parâmetros da textura e do *speckle* através do algoritmo *expectation-maximization/maximization* das marginais posteriores (EM/MPM). Luo et al. (2019) propuseram um método de segmentação multirregional não supervisionado para imagens *PolSAR* com base no modelo de contorno ativo *fuzzy* (*fuzzy active contour*). Bouhlel e Méric (2019) propuseram um novo método de segmentação de imagem não supervisionado para dados *PolSAR* utilizando um modelo de mistura finita de distribuições compostas não gaussianas, sendo estas distribuições \mathcal{K}_m , \mathcal{G}_m^0 e \mathcal{G}_m .

Neste capítulo é proposto uma expressão de forma fechada para ES da distribuição \mathcal{G}_m^0 – que estende os modelos marginais de intensidades $s\mathcal{W}_m^C$ e \mathcal{G}_I^0 – proposta por Freitas, Frery e

Correia (2005). Importantes propriedades matemáticas para o estudo da distribuição assintótica da ES da \mathcal{G}_m^0 são derivadas e, como uma consequência, novos métodos de segmentação baseado em entropia para imagens *PoISAR* são desenvolvidos e três aplicações são realizadas com os segmentadores nas regiões de São Francisco (EUA), Munique e DEMMIN-Görmin (Alemanha).

Na literatura é possível encontrar trabalhos que utilizem detecção de mudança em imagens *PoISAR*, tais como: Conradsen et al. (2003) propuseram uma metodologia baseada no teste da razão de verossimilhança definida por duas amostras aleatórias da distribuição Wishart complexa; Akbari et al. (2013) que propuseram uma nova estatística de teste para detecção de mudança em imagens *PoISAR* usando o traço de Hotelling-Lawley (HL) complexo para medir a similaridade de duas matrizes de covariância e em 2016, estendeu o resultado, mostrando que o traço Hotelling-Lawley assintoticamente segue uma distribuição Fisher-Snedecor (AKBARI et al., 2016); Yang et al. (2016) propuseram um método de detecção de mudança usando a divergência de Cauchy-Schwarz com a distribuição Wishart; Pirrone, Bovolo e Bruzzone (2016) propuseram uma nova abordagem que considera uma análise sequencial de duas etapas da magnitude e as informações de direção das imagens *PoISAR* para detectar os *pixels* considerados diferentes; Bouhlel, Akbari e Méric (2020) apresentaram uma estatística de teste de razão determinante (*determinant ratio test - DRT*) como detector de mudança para imagens *PoISAR* medindo a similaridade de duas matrizes de covariância. Bouhlel e Méric (2020) propuseram um algoritmo de detecção de mudança heterogêneo e eficiente baseado na medida de distância estocástica entre duas distribuições \mathcal{G}_m^0 .

Utilizando o resultado obtido da ES da distribuição \mathcal{G}_m^0 , é desenvolvido detector de mudança, que avança na direção do trabalho de (NASCIMENTO; FRERY; CINTRA, 2018). Eles propuseram detectores de mudança para imagens *PoISAR* usando distribuição Wishart complexa escalonada junto com ferramentas de teoria da informação. Duas aplicações são realizadas utilizando as regiões de Los Angeles e Califórnia (EUA).

Este estudo é organizado como segue. Na Subseção 5.1, expressões para ESs são apresentadas para as distribuições \mathcal{G}_m^0 e $s\mathcal{W}_m^C$. Algoritmos de segmentação baseados em entropias são endereçados na Seção 5.2. Na Seção 5.3 é mostrado um algoritmo para detecção de mudança. A Seção 5.4 apresenta um estudo comparativo de métodos de segmentação e detectores de mudança aplicados a dados reais.

5.1 BACKGROUND PARA INFERÊNCIA ESTATÍSTICA BASEADA NA ENTROPIA DE SHANNON

Frery, Cintra e Nascimento (2013) derivaram as entropias de Shannon e Rényi para o modelo polarimétrico $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$. Esta seção se propõe a derivar a ES para a distribuição \mathcal{G}_m^0 . O seguinte teorema apresenta este resultado.

Teorema 2 *Seja $\mathbf{Z} \sim \mathcal{G}_m^0(\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L)$, então a entropia de Shannon para \mathbf{Z} é dada por*

$$\begin{aligned} H_S(\mathcal{G}_m^0) &= H_S([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L]) \\ &= (m - L) \left\{ \log |\boldsymbol{\Sigma}| + \psi^{(0)}(L) - m \log L + m \log(-\alpha - 1) - m \psi^{(0)}(-\alpha) \right\} \\ &\quad + (mL - \alpha) [\psi^{(0)}(mL - \alpha) + \log(-\alpha - 1) - \psi^{(0)}(-\alpha)] \\ &\quad - \log \frac{L^{mL} \Gamma(mL - \alpha)}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha) (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L)}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Como um caso particular, temos $H_S(\mathcal{G}_m^0) \rightarrow H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}})$ quando $\alpha \rightarrow \infty$, em que (FRERY; CINTRA; NASCIMENTO, 2013),

$$\begin{aligned} H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}) &= H_S([\boldsymbol{\Sigma}, L]) \\ &= \frac{m(m-1)}{2} \log \pi - m^2 \log L + m \log |\boldsymbol{\Sigma}| + mL + (m-L)\psi_m^{(0)}(L) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} \log \Gamma(L - k). \end{aligned} \quad (5.2)$$

A fim de estudar a distribuição assintótica da ES com \mathcal{G}_m^0 , diga-se $\hat{H}_S(\mathcal{G}_m^0)$, o próximo resultado fornece quantidades teóricas para definir a variância de $\hat{H}_S(\mathcal{G}_m^0)$.

Proposição 4 *Seja $\mathbf{Z} \sim \mathcal{G}_m^0(\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L)$. Da equação (3.4), temos que*

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathcal{G}_m^0}^\top = \left(\delta_\alpha^{\mathcal{G}}, \delta_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathcal{G}}, \delta_L^{\mathcal{G}} \right) := \left(\frac{\partial H(\mathcal{G}_m^0)}{\partial \alpha}, \frac{\partial H(\mathcal{G}_m^0)}{\partial \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma})^\top}, \frac{\partial H(\mathcal{G}_m^0)}{\partial L} \right),$$

em que

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^{\mathcal{G}_m^0} &= m^2 \psi^{(1)}(-\alpha) - m^2 (-\alpha - 1)^{-1} - mL \psi^{(1)}(mL - \alpha) + \alpha \psi^{(1)}(mL - \alpha) - \log(-\alpha - 1), \\ \delta_{\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathcal{G}_m^0} &= m \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{-T}), \\ \delta_L^{\mathcal{G}_m^0} &= m \log L - L \psi^{(1)}(L) + \log |\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{m^2}{L} + m(mL - \alpha)^2 \psi^{(1)} - \log |\boldsymbol{\Sigma}| + m \psi^{(1)}(L). \end{aligned}$$

A prova da proposição acima é dado no Apêndice D. As expressões análogas para $\mathbf{Y} \sim s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ são encontradas em Frery, Cintra e Nascimento (2013).

Para determinar a variância de $\hat{H}_S(\mathcal{G}_m^0)$, é usada a matriz de informação observada (MIO) de \mathcal{G}_m^0 como um estimador para MIF, já que este último é analiticamente intratável. Dessa forma a Equação (3.4) é atualizada da seguinte maneira:

$$\sigma_\phi^2(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\delta}^\top J(\boldsymbol{\theta})^{-1} \boldsymbol{\delta}, \quad (5.3)$$

em que $J(\boldsymbol{\theta}) = -\partial^2 \log f_Z(Z; \boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top$ é a MIO.

Teorema 3 *Seja $\mathbf{Z} \sim \mathcal{G}_m^0(\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L)$, então a matriz $J(\boldsymbol{\theta})$ é determinada da seguinte maneira:*

$$J([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L]) = \begin{bmatrix} J_{\alpha\alpha}^{\mathcal{G}_m^0} & J_{L\alpha}^{\mathcal{G}_m^0} & J_{\boldsymbol{\Sigma}\alpha}^{\mathcal{G}_m^0} \\ J_{\alpha L}^{\mathcal{G}_m^0} & J_{LL}^{\mathcal{G}_m^0} & J_{\boldsymbol{\Sigma}L}^{\mathcal{G}_m^0} \\ J_{\alpha\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathcal{G}_m^0} & J_{L\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathcal{G}_m^0} & J_{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathcal{G}_m^0} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

Figura 23 – Elementos MIO para o modelo \mathcal{G}_m^0 .

$$\begin{aligned}
 -J_{\alpha\alpha} &= \psi^{(1)}(mL - \alpha) + (-\alpha - 1)^{-1} + \left(\frac{(-\alpha - 1) + \alpha}{(-\alpha - 1)^2} \right) - \psi^{(1)}(-\alpha) - 2 [(-\alpha - 1) \\
 &\quad + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{Z}})]^{-1} - (\alpha - mL) [(-\alpha - 1) + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{Z}})]^{-2}, \\
 -J_{\boldsymbol{\Sigma}\Sigma_{kh}} &= L \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\bullet k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\bullet}^{-1} \right)^\top + L(\alpha - mL) \frac{\left\{ \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\bullet k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\bullet}^{-1} \right)^\top \dot{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-\top} + \boldsymbol{\Sigma}^{-\top} \dot{\mathbf{Z}} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\bullet k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\bullet}^{-1} \right)^\top \right\}}{(-\alpha - 1) + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-\top} \dot{\mathbf{Z}})} \\
 &\quad - \frac{L^2(\alpha - mL) \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\bullet k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h\bullet}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \right)}{\left[(-\alpha - 1) + L\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \right) \right]^2}, \\
 -J_{LL} &= \frac{m}{L} + m^2 \psi^{(1)}(mL - \alpha) - \psi_m^{(1)}(L) - 2m \frac{\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \right)}{(-\alpha - 1) + L\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \right)} \\
 &\quad + (\alpha - mL) \frac{- \left[\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \right) \right]^2}{\left[(-\alpha - 1) + L\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \right) \right]^2}, \\
 -J_{\alpha\boldsymbol{\Sigma}} &= -L \frac{\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top}{(-\alpha - 1) + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}})} - (\alpha - mL) \frac{L \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top}{\left[(-\alpha - 1) + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) \right]^2}, \\
 -J_{\alpha L} &= -m \psi^{(1)}(mL - \alpha) + \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) + m}{(-\alpha - 1) + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}})} + (\alpha - mL) \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}})}{\left[(-\alpha - 1) + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) \right]^2}, \\
 -J_{\boldsymbol{\Sigma}L} &= -\boldsymbol{\Sigma}^{-\top} - m \frac{-L \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top}{(-\alpha - 1) + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}})} \\
 &\quad + (\alpha - mL) \frac{- \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top \left[(-\alpha - 1) + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) \right] - L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top}{\left[(-\alpha - 1) + L\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) \right]^2}.
 \end{aligned}$$

Fonte: próprio autor.

No que segue é introduzida uma metodologia para segmentação de dados *PolSAR*. Ela estende a proposta da Seção 4.2

5.2 UM NOVO ALGORITMO DE SEGMENTAÇÃO BASEADO EM ENTROPIA

Novos mecanismos de segmentação para imagens *PolSAR*, levando em conta as ESs das distribuições $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ e \mathcal{G}_m^0 são propostos com o intuito de encontrar regiões disjuntas.

5.2.1 Modelo de agrupamento

Como descrito no Capítulo 2, cada entrada de uma imagem *PolSAR multilook* é representada por uma matriz Hermitiana positiva definida 3×3 , como definida na Equação (2.1). Dessa forma, seja $\mathbf{Z}(i)$ a i -ésima entrada de uma imagem *PolSAR multilook* e assuma que ela é estratificada em c regiões. Assuma também que as entropias nas entradas da imagem *PolSAR* são independentes. A entropia da i -ésima entrada da imagem é denotada por $H_S(i) : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Computacionalmente, o vetor $\mathbf{H}_S = [H_S(i) | \dots | H_S(T)]^\top$ é obtido avaliando EMVs com base na vizinhança de $\mathbf{Z}(i)$ na expressão da entropia teórica para um determinado modelo de radar, satisfazendo (3.3).

Similarmente ao discutido no Capítulo 4, considere que existe c regiões imagem sob estudo e uma matriz de pertinências $\mathbf{U} = [U_{ig}]_{T \times c}$ tal que $U_{ig} \in \{0, 1\}$ é um índice que indica se o i -ésimo *pixel* pertence ao g -ésimo grupo ($U_{ig} = 1$) ou não ($U_{ig} = 0$) tal que $\sum_{g=1}^c U_{ig} = 1$. Na prática de segmentação, uma estimativa para \mathbf{H}_S , diga-se $\dot{\mathbf{H}}_S$, é um banco de dados observável, \mathbf{U} é uma base não observável e $\{\dot{\mathbf{H}}_S, \mathbf{U}\}$ é o conjunto de dados completo. Um segmentador pode ser entendido como um algoritmo para estimação de uma matriz não observável \mathbf{U} dado $\dot{\mathbf{H}}_S$. No que segue, serão detalhadas essas quantidades.

Quando o resultado (3.3) é satisfeito, a variável $\widehat{H}_S(i)$ condicionada à g -ésima região segue a distribuição normal univariada com densidade

$$p(\dot{H}_S(i) | U_{ig} = 1; \boldsymbol{\theta}_g) = f_{\mathcal{N}}(\dot{H}_S(i); \boldsymbol{\theta}_g) = (2\pi\sigma_{S_g}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\dot{H}_S(i) - H_{S_g})^2}{\sigma_{S_g}^2}}, \quad (5.5)$$

em que $\dot{H}_S(i)$ é uma resultado de $\widehat{H}_S(i)$ na i -ésima entrada com média $H_{S_g} = E[\widehat{H}_S(i) | U_{ig} = 1]$ e variância $\sigma_{S_g}^2 = \text{Var}[\widehat{H}_S(i) | U_{ig} = 1]$ e $\boldsymbol{\theta}_g = [H_{S_g}, \sigma_{S_g}^2]^\top$ é a configuração paramétrica na g -ésima região.

De acordo com a teoria Bayesiana (NIKOU; LIKAS; GALATSANOS, 2010), a densidade conjunta de $\widehat{H}_S(i)$ e U_{ig} é

$$p(\dot{H}_S(i), U_{ig}; \boldsymbol{\theta}_g) = p(U_{ig} = 1) p(\dot{H}_S(i) | U_{ig} = 1; \boldsymbol{\theta}_g), \quad (5.6)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\theta}_c^\top]^\top$. Adotando a probabilidade a priori do i -ésimo *pixel* pertencer ao g -ésimo grupo como $p(U_{ig} = 1) = \pi_g \in [0, 1]$ tal que $\sum_{g=1}^c \pi_g = 1$, então a densidade conjunta para $\widehat{\mathbf{H}}_S$ é dada por

$$p(\dot{H}_S; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^T \left\{ \sum_{g=1}^c \pi_g \left[f_{\mathcal{N}}(\dot{H}_S(i); \boldsymbol{\theta}_g) \right] \right\}, \quad (5.7)$$

que denominamos como modelo de segmentação.

5.2.2 Estimativa dos parâmetros do modelo pelo algoritmo *Expectation-Maximization* Estocástico

O algoritmo *expectation-maximization* estocástico (*Stochastic Expectation-Maximization* - SEM) é uma versão estocástica do EM (MCLACHLAN; KRISHNAN, 2007). Algumas vantagens do algoritmo SEM são: o baixo custo computacional em relação ao EM e a convergência para o máximo local quando o modelo ajustado é analiticamente intratável. Para o método SEM, não há necessidade de determinar a esperança condicional na forma fechada como é exigido no EM e também é possível substituir os EMVs por outros estimadores, desde que suas propriedades de convergência sejam satisfeitas.

A seguir são apresentadas as três etapas do algoritmo SEM levando em consideração que $\boldsymbol{\theta}_g^{(k)}$ a configuração paramétrica para a g -ésima região na k -ésima iteração (CELEUX; DIEBOLT, 1985):

- **Passo E:** Para cada observação $\dot{H}_S(i)$, é calculada a probabilidade $p(U_{ig} = 1 | \dot{H}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = \hat{\tau}_g(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} | \dot{H}_S(i))$ definida por

$$\hat{\tau}_g(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} | \dot{H}_S(i)) = \frac{\hat{\pi}_g^{(k)}(i) \left[f_{\mathcal{N}}(\dot{H}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^{(k)}) \right]}{\sum_{g=1}^c \hat{\pi}_g^{(k)}(i) \left[f_{\mathcal{N}}(\dot{H}_S(i); \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^{(k)}) \right]}. \quad (5.8)$$

- **Passo S:** Para cada observação $\dot{H}_S(i)$, uma amostra $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$ é obtida de $\mathbf{R} \in \{1, \dots, c\} \sim \mathcal{M}(1, \hat{\boldsymbol{\tau}}_i^{(k)})$ em que $\hat{\boldsymbol{\tau}}_i^{(k)} = [\hat{\tau}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} | \dot{H}_S(i)), \dots, \hat{\tau}_c(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} | \dot{H}_S(i))]^\top$. O g -ésimo elemento de \mathbf{R}_i , diga-se r_{gi} , é 1 ($r_{gi} = 1$) se a observação $\dot{H}_S(i)$ pertence ao g -ésimo grupo e $r_{li} = 0$ para todo $l \neq g$ e $\mathcal{M}(1, \hat{\boldsymbol{\tau}}_i^{(k)})$ representa a distribuição multinomial com função de probabilidade

$$f(r_{1i}, \dots, r_{c,i} | \hat{\boldsymbol{\tau}}_i^{(k)}) = \frac{1!}{\prod_{g=1}^c r_{gi}!} \prod_{g=1}^c \hat{\tau}_{gi}^{r_{gi}}.$$

No mapeamento obtido no processo de amostragem, apenas um rótulo r_{gi} é associado com cada $\dot{H}_S(i)$, resultando em uma partição na qual o conjunto observado é dividido em c conjuntos $T_1^{(k)}, \dots, T_c^{(k)}$, onde as partições são definidas por $\dot{H}_S(i) \in T_g^{(k)} \Leftrightarrow r_{gi} = 1$.

- **Passo M:** Atualização dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}_g^{(k+1)}$ como segue:

$$\hat{H}_{S_g}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{T_g^{(k)}} \dot{H}_S(i)}{T_g^{(k)}}, \quad (5.9)$$

e

$$\hat{\sigma}_{S_g}^{(k+1)} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{T_g^{(k)}} (\dot{H}_S(i) - \hat{H}_{S_g}^{(k+1)})^2}{T_g^{(k)}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.10)$$

em que $T_g^{(k)}$ é o número de *pixels* da imagem na g -ésima região no passo (k) .

As proporções $\hat{\pi}_g^{(k+1)}$ não dependem dos parâmetros, ou seja,

$$\hat{\pi}_g^{(k+1)} = \frac{T_g^{(k)}}{T}, \text{ for } g = 1, \dots, c,$$

em que T é o número de *pixels* da imagem.

5.2.3 Um critério de parada

Os passos do algoritmo SEM são repetidos alternadamente até a sua convergência. Para cada iteração, é necessário verificar a convergência do algoritmo. Diversas formas podem ser usadas para medir a convergência do algoritmo SEM. Neste estudo, utiliza-se o erro absoluto relativo das verossimilhanças entre as etapas:

$$\left| \frac{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) - L(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)})}{L(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)})} \right| < \epsilon, \quad (5.11)$$

em que $L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \prod_{i=1}^T f_{\mathcal{N}}(\dot{H}_S(i) | \hat{\boldsymbol{\theta}})$ é a função de verossimilhança da distribuição normal. Se o erro absoluto relativo é menor que um certo *threshold* (ϵ), então o algoritmo converge. Neste

estudo foi usado $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$. Horta (2009) utilizou o critério do erro absoluto relativo em seu estudo de segmentação que também envolvia a estimação dos parâmetros via algoritmo *Expectation-Maximization* Estocástico, diante disso, esse critério foi escolhido para ser utilizado nessa tese. Um pseudo-código do segmentador proposto é apresentado no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Método de segmentação proposto para imagens *PolSAR*.

- 1: Primeiro, determine aleatoriamente cada *pixel* para um dos c grupos.
- 2: Inicie os pesos $\hat{\pi}_g(i)$ como $\hat{\pi}_g^{(0)}(i) = \frac{T_g}{T}$, tal que $\sum_{g=1}^c \hat{\pi}_g^{(0)}(i) = 1$;
- 3: Estime $\hat{H}_{S_g}^{(k+1)}$ e $\hat{\sigma}_{S_g}^{(k)}$ através das Equações (5.9) e (5.10), respectivamente.
- 4: A probabilidade condicional da observação $\hat{H}_S(i)$ pertencer ao g -ésimo grupo é calculado por $\hat{\tau}_g(\hat{\theta}|\hat{H}_S(i))$ na Equação (5.8).
- 5: As observações $\hat{H}_S(i)$ são realocadas nos grupos de acordo com o passo estocástico

$$\hat{c} = \arg \max_{g=1, \dots, c} \hat{R}_g;$$

- 6: Compute $L(\hat{\theta})$ e, pelo erro absoluto relativo, verifique a convergência.
 - 7: Se houver convergência, pare o processo; caso contrário, volte para a segunda etapa.
-

5.3 UM NOVO ALGORITMO DE DETECÇÃO DE MUDANÇA PARA IMAGENS *POL SAR*

A ideia da detecção de mudança ilustrada na Figura 17 é também utilizada nesta seção. Pares de amostras de um janelamento 3×3 sobre um mesmo ponto geográfico de duas imagens obtidas em instantes distintos são selecionados. Para cada par de amostras, são executados os testes para duas amostras com base nas ESs das distribuições \mathcal{G}_m^0 e $s\mathcal{W}_m^C$. O nível de significância adotado em todos os casos é $\alpha = 1 \times 10^{-4}$. Um pseudocódigo para imagens *PolSAR* é indicado no Algoritmo 4.

Algoritmo 4: Método de detecção de mudança proposto para imagens *PolSAR*.

- 1: Sejam I_1 e I_2 duas imagens *PolSAR* da mesma região, observadas em tempo distintos;
 - 2: Extraia uma amostra de tamanho N nas vizinhanças dos i -ésimos *pixels* das imagens, $I_1(i)$ e $I_2(i)$;
 - 3: Estime $\theta_1(i)$ e $\theta_2(i)$ através dos EMVs $\hat{\theta}_1(i)$ e $\hat{\theta}_2(i)$, em que $\theta_1(i)$ e $\theta_2(i)$ representam as configurações paramétricas para os retornos $Z_1(i)$ e $Z_2(i)$ de $I_1(i)$ e $I_2(i)$, respectivamente;
 - 4: Encontre o valor de s através da equação (3.9);
 - 5: Determine um nível α e calcule $P(\chi_1^2 > s)$;
 - 6: Se $P(\chi_1^2 > s) \leq \alpha$, então existe diferença entre os *pixels* nos dois períodos de tempo diferentes, caso contrário, não existe diferença significativa entre os *pixels*.
-

5.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

5.4.1 Segmentação

Esta seção aborda três experimentos com dados reais, onde são utilizados nossos quatro segmentadores propostos. As propostas são comparadas no contexto de análise de agrupamento. Os métodos de segmentação utilizados são:

- (i) $S-H_S(s\mathcal{W}_m^C)$: Segmentador baseado no $H_S(s\mathcal{W}_m^C)$ para NEL fixo e conhecido;
- (ii) $S-H_S(s\mathcal{W}_m^C)|\hat{L}$: Segmentador baseado no $H_S(s\mathcal{W}_m^C)$ para NEL estimado;
- (iii) $S-H_S(\mathcal{G}_m^0)$: Segmentador baseado no $H_S(\mathcal{G}_m^0)$ para NEL fixo e conhecido;
- (iv) $S-H_S(\mathcal{G}_m^0)|\hat{L}$: Segmentador baseado no $H_S(\mathcal{G}_m^0)$ para NEL estimado.

Para estimação dos parâmetros foi utilizado um janelamento de 9×9 em relação a cada *pixel* da imagem. Como medidas de comparação, são utilizados a acurácia geral e coeficiente Kappa. Para todos eles, os melhores resultados estão associados aos maiores valores desses critérios, e destacados nas tabelas.

Nesta primeira aplicação, é utilizada uma imagem referente a região de São Francisco, EUA. As imagens referentes a esta aplicação são encontradas na Figura 24. A região de São Francisco possui três áreas que estão destacadas de acordo com o mapa de referência nas Figuras 24a e 24c: urbano (na cor branca), floresta (em cinza) e oceano (em preto). A Figura 24b indica as áreas puras nas quais os critérios de avaliação são quantificados. A

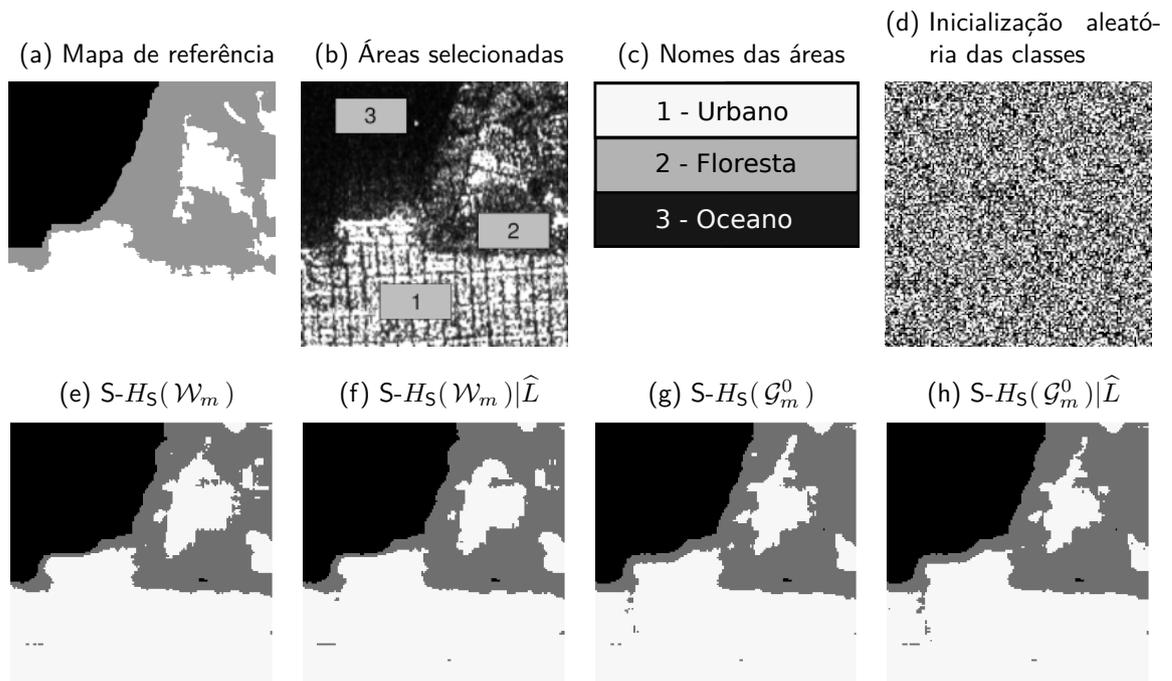
Figura 24d representa a inicialização aleatória dos *pixels* para as regiões como entradas os segmentadores utilizados. Os resultados de segmentação são encontrados nas Figuras 24e–24h. Por inspeção visual, os mapas de segmentação funcionam bem quase indistintamente, sendo a área de floresta a mais difícil de ser segmentada em todos os casos. Quantitativamente, os resultados podem ser observados na Tabela 9. Todas as medidas de avaliações (acurácia geral e Kappa) apresentam valores superiores a 0.94, sendo a melhor segmentação feita por $H_S(s\mathcal{W}_m^C)$ assumindo NEL conhecido em toda a imagem. Se a análise for realizada por região, o segmentador citado anteriormente obteve a melhor segmentação para a região de urbano, com um acerto de 99.3%. Nas regiões de floresta e oceano, todos os segmentadores obtêm os mesmos acertos, sendo 97.8% e 100% , respectivamente.

Para a segunda aplicação, é utilizado uma cena de Munique, Alemanha. De acordo com o mapa de referência (Figura 25a), a imagem em estudo possui três regiões: bosque (na cor cinza claro), áreas construídas (em cinza) e áreas abertas (em preto). Neste caso, diferentemente da primeira imagem, as áreas são mais misturadas, indicando a superação de problemas como a sobreposição dos dados entre as áreas diferentes. A partir de uma análise qualitativa das Figuras 25e–25h, comparando-se o resultado com o mapa de referência, pode-se observar que todos os métodos funcionam bem na segmentação da região de Munique. A Tabela 10 exhibe valores de critérios das figuras de mérito utilizadas neste experimento, confirmando a análise anterior. Quando analisado por região, percebe-se que todos os segmentadores obtêm comportamentos semelhantes na segmentação das regiões, fornecendo boas segmentações nas áreas de bosque e abertas, e segmentações ruins na área construída. De acordo com a acurácia geral e Kappa, a melhor segmentação é baseada na entropia estocástica com o modelo \mathcal{G}_m^0 estimando todos os parâmetros envolvidos, ou seja, o segmentador $S - H_S(\mathcal{G}_m^0)|\hat{L}$.

Uma terceira aplicação é encontrada na Figura 26 que representa uma cena de DEMMIN-Görmin, Alemanha. Esta imagem possui cinco regiões definidas: cevada de inverno (cor branca), trigo de inverno (cinza claro), colza de inverno (cinza), beterraba-sacarina (cinza escuro), milho (cinza muito escuro) e existe também uma área de *background* (black) representando regiões não definidas. As áreas podem ser visualizadas no mapa de referência (Figura 26a). As imagens segmentadas estão nas Figuras 26e - 26h. De acordo com os mapas de segmentação, comparando-os com o mapa de referência, os resultados parecem trabalhar semelhantemente. Entretanto, pela Tabela 11 o método $S-H_S(\mathcal{W}_m)$ fornece o melhor resultado na segmentação desta imagem. De uma análise por região, o segmentador $S-H_S(\mathcal{G}_m^0)|\hat{L}$ obtém as melhores segmentações nas regiões de cevada de inverno e trigo de inverno. Para a região colza de

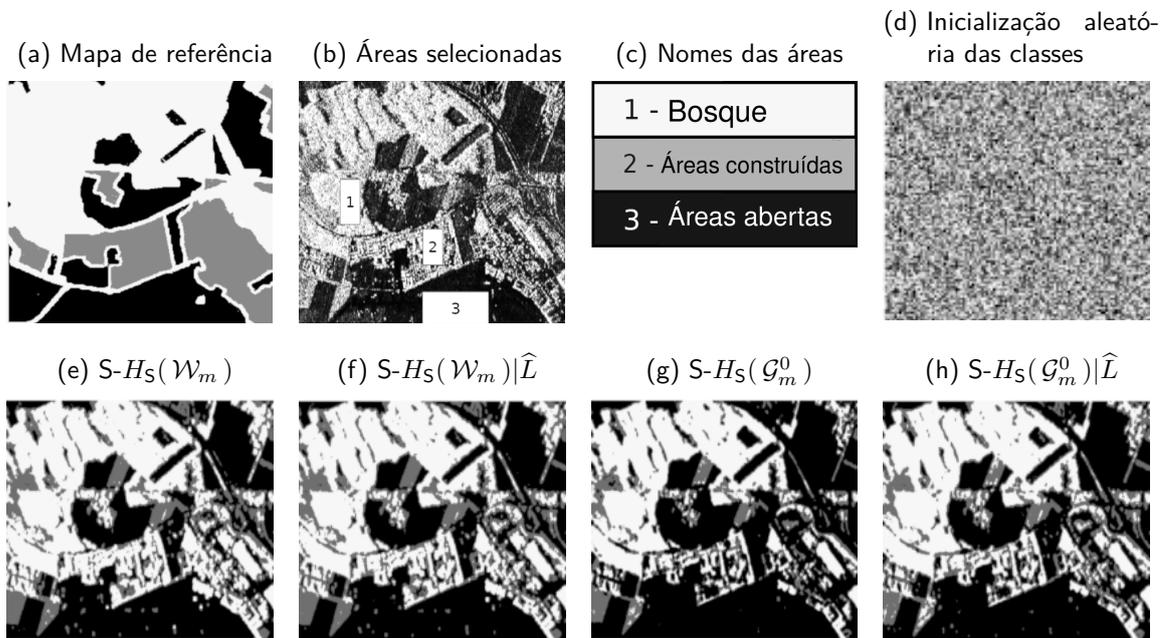
inverno, o melhor segmentador é $S-H_S(\mathcal{W}_m)$. O $S-H_S(\mathcal{W}_m)|\hat{L}$ é o melhor para a região de beterraba-sacarina. Para segmentação de milho, o melhor segmentador é $S-H_S(\mathcal{G}_m^0)$. Na área não definida, todos os segmentadores obtêm bons resultados.

Figura 24 – Estudo de segmentação sobre uma cena da imagem AIRSAR de São Francisco, EUA com os modelos $s\mathcal{W}_m^C$ e \mathcal{G}_m^0 .



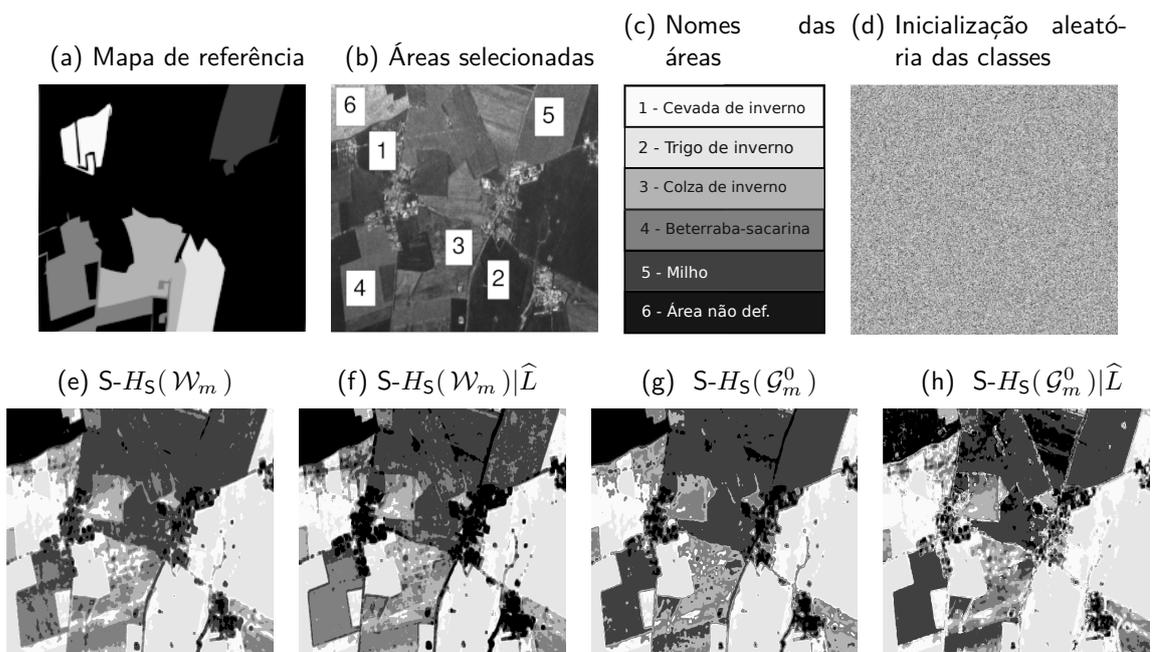
Fonte: próprio autor.

Figura 25 – Estudo de segmentação sobre uma cena da imagem E-SAR de Munique, Alemanha com os modelos $s\mathcal{W}_m^C$ e \mathcal{G}_m^0 .



Fonte: próprio autor.

Figura 26 – Estudo de segmentação sobre uma cena da imagem AgriSAR de DEMMIN-Görmin, Alemanha.



Fonte: próprio autor.

Tabela 9 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de São Francisco

Métodos		Regiões			
		Urbano	Floresta	Oceano	
$S-H_S(\mathcal{W}_m)$	acurácia	por área	0.993	0.978	1
		Geral	0.991		
		$\kappa (\sigma_\kappa^2)$	0.986 (1.43 × 10⁻⁵)		
$S-H_S(\mathcal{W}_m) \hat{L}$	acurácia	por área	0.991	0.978	1
		Geral	0.990		
		$\kappa (\sigma_\kappa^2)$	0.985(1.54 × 10 ⁻⁵)		
$S-H_S(\mathcal{G}_m^0)$	acurácia	por área	0.967	0.978	1
		Geral	0.980		
		$\kappa (\sigma_\kappa^2)$	0.969 (3.28 × 10 ⁻⁵)		
$S-H_S(\mathcal{G}_m^0) \hat{L}$	acurácia	por área	0.938	0.978	1
		Geral	0.967		
		$\kappa (\sigma_\kappa^2)$	0.949 (5.28 × 10 ⁻⁵)		

Fonte: próprio autor.

Tabela 10 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de Munique

Métodos		Regiões			
		Bosque	Áreas construídas	Áreas abertas	
$S-H_S(\mathcal{W}_m)$	acurácia	por área	0.884	0.311	0.971
		Geral	0.820		
		$\kappa (\sigma_\kappa^2)$	0.689 (1.21 × 10 ⁻⁵)		
$S-H_S(\mathcal{W}_m) \hat{L}$	acurácia	por área	0.866	0.347	0.979
		Geral	0.827		
		$\kappa (\sigma_\kappa^2)$	0.701(1.20 × 10 ⁻⁵)		
$S-H_S(\mathcal{G}_m^0)$	acurácia	por área	0.851	0.282	0.998
		Geral	0.822		
		$\kappa (\sigma_\kappa^2)$	0.678 (1.36 × 10 ⁻⁵)		
$S-H_S(\mathcal{G}_m^0) \hat{L}$	acurácia	por área	0.872	0.368	0.993
		Geral	0.840		
		$\kappa (\sigma_\kappa^2)$	0.718 (1.21 × 10⁻⁵)		

Fonte: próprio autor.

Tabela 11 – Valores de medidas de desempenho para segmentação da imagem de DEMMIN-Görmin

Métodos	Regiões						
	Cevada de inverno	Trigo de inverno	Colza de inverno	Beterraba-sacarina	Milho	Área não def.	
$S-H_s(\mathcal{W}_m)$	por área	0.283	0.982	0.551	0.822	0.984	1
	Geral	0.774					
	$\kappa(\sigma_\kappa^2)$	0.728 (3.36 × 10⁻⁶)					
$S-H_s(\mathcal{W}_m) \hat{L}$	por área	0.120	0.951	0.539	0.994	0.906	1
	Geral	0.755					
	$\kappa(\sigma_\kappa^2)$	0.705 (3.46 × 10 ⁻⁶)					
$S-H_s(\mathcal{G}_m^0)$	por área	0.208	0.982	0.396	0	1	1
	Geral	0.601					
	$\kappa(\sigma_\kappa^2)$	0.519 (4.49 × 10 ⁻⁶)					
$S-H_s(\mathcal{G}_m^0) \hat{L}$	por área	0.315	0.989	0.353	0.001	0.993	0.899
	Geral	0.594					
	$\kappa(\sigma_\kappa^2)$	0.512 (4.54 × 10 ⁻⁶)					

Fonte: próprio autor.

5.4.2 Detecção de mudança

Neste caso, são utilizados detectores de mudança baseados nas distribuições $s\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}}$ (o caso considerando NEL fixo e conhecido foi proposto por Nascimento, Frery e Cintra (2018)) e \mathcal{G}_m^0 . Os detectores são denominados como:

- (i) $D-H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}})$: Detector baseado no $H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}})$ para NEL fixo e conhecido;
- (ii) $D-H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}})|\hat{L}$: Detector baseado no $H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}})$ para NEL estimado;
- (iii) $D-H_S(\mathcal{G}_m^0)$: Detector baseado no $H_S(\mathcal{G}_m^0)$ para NEL fixo e conhecido;
- (iv) $D-H_S(\mathcal{G}_m^0)|\hat{L}$: Detector baseado no $H_S(\mathcal{G}_m^0)$ para NEL estimado.

Os resultados são analisados de forma qualitativa e quantitativa. Como figuras de mérito, são utilizadas cinco medidas: *Falso Positivo (FP)*, *Falso Negativo (FN)*, *Taxa de Alarme Falso (TAF)*, *Taxa de Detecção (TD)* e *Coeficiente Kappa (κ)*, discutidas na Subseção 4.4.2.

Na Tabela 12, encontram-se os resultados para a primeira cena estudada, referente a região de Los Angeles nos EUA. A melhor detecção de mudança é obtida por $D-H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}})|\hat{L}$ com um acerto de 71% na detecção segundo o coeficiente Kappa. Observando a Figura 27e, é possível verificar que este é de fato o melhor resultado comparado com o mapa de referência, Figura 27c. Para a segunda cena, todos os detectores possuem baixos valores do coeficiente Kappa (Tabela 13), sendo todos abaixo de 50% de acerto na detecção. O melhor resultado é do detector $D-H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}})|\hat{L}$ com detecção observada na Figura 27l.

Tabela 12 – Detecção de Performance - Cena 1 - Los Angeles (EUA)

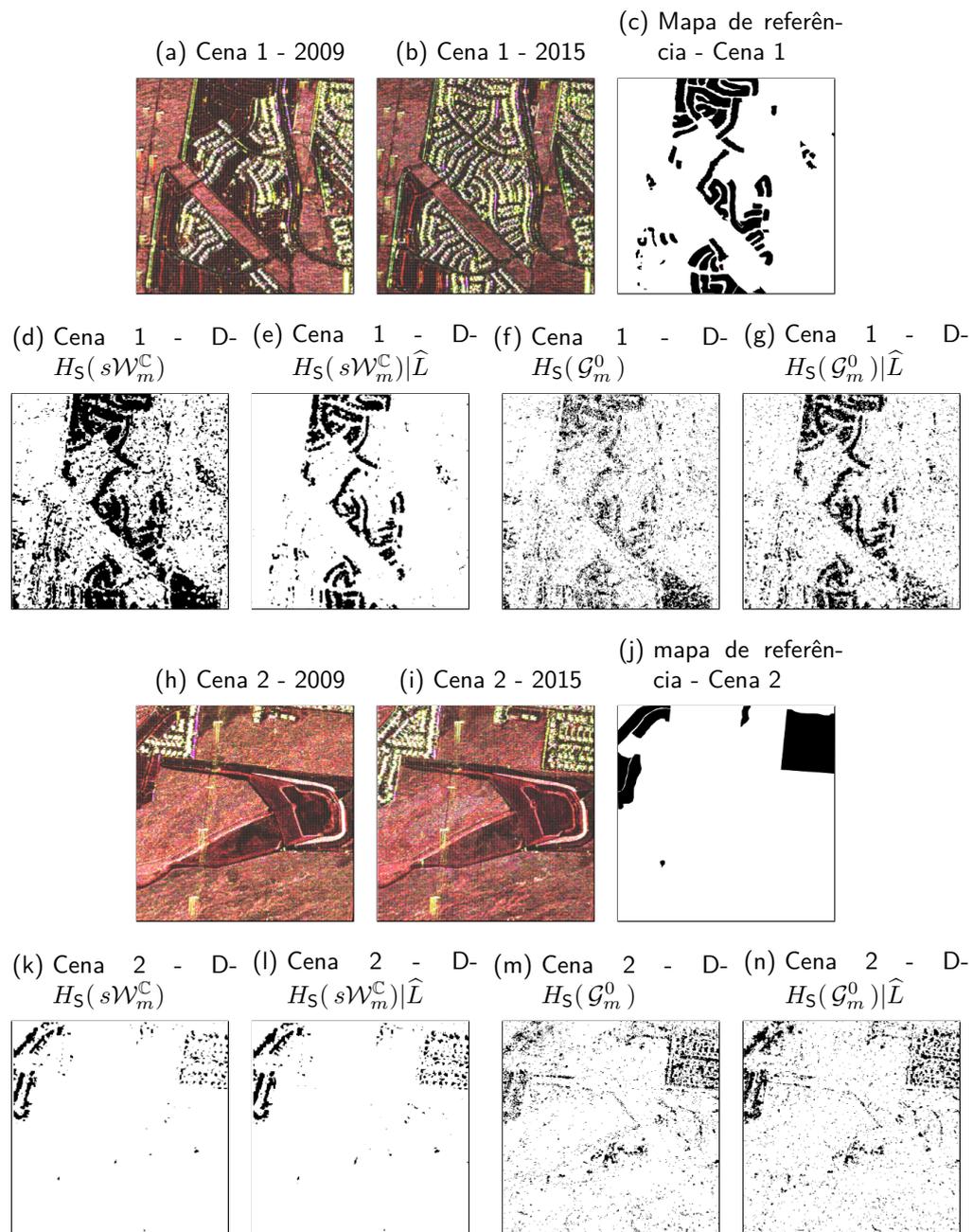
Detector	FP (%)	FN (%)	TAF (%)	TD (%)	κ (%)
$D-H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}})$	5.141	2.022	8.155	83.398	69.845
$D-H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}}) \hat{L}$	4.821	2.225	8.071	82.483	70.784
$D-H_S(\mathcal{G}_m^0)$	7.917	11.864	24.495	38.352	30.967
$D-H_S(\mathcal{G}_m^0) \hat{L}$	4.355	11.067	19.755	49.552	49.408

Fonte: próprio autor.

Tabela 13 – Detecção de Performance - Cena 2 - Califórnia (EUA)

Detector	FP (%)	FN (%)	TAF (%)	TD (%)	κ (%)
$D-H_S(s\mathcal{W}_m^C)$	7.582	0.368	8.241	89.581	41.167
$D-H_S(s\mathcal{W}_m^C) \hat{L}$	7.101	0.465	7.891	88.681	45.819
$D-H_S(\mathcal{G}_m^0)$	6.216	6.185	13.889	42.251	35.244
$D-H_S(\mathcal{G}_m^0) \hat{L}$	5.582	6.176	13.253	45.259	39.882

Fonte: próprio autor.

Figura 27 – Resultados da detecção de mudança usando ESs com as distribuições $s\mathcal{W}_m^C$ e \mathcal{G}_m^0 .

Fonte: próprio autor.

6 SOMAS COMPOSTAS PARA MATRIZES ESTOCÁSTICAS APLICADAS A SISTEMAS *PoISAR*

Este capítulo é focado na proposta de distribuições para dados *PoISAR multilook* cujo suporte é o conjunto de matrizes hermitianas positivas definidas, diga-se Ω_+ , também conhecido como o conjunto das Matrizes de covariâncias amostrais (MCA) (BIAN; MERCER, 2014). Existem vários modelos *PoISAR multilook* na literatura. Eles são frequentemente derivados ou da modelagem multiplicativa (FREITAS; FRERY; CORREIA, 2005) ou da transformada inversa de Fourier (YUEH et al., 1989).

O objetivo deste capítulo da tese é triplo. Em primeiro lugar, pretende-se derivar analiticamente dois novos modelos probabilísticos com três parâmetros denominados como distribuições Composta Poisson truncada Wishart complexa (CPT $\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$) e Composta geométrica Wishart complexa (CG $\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$) bem como suas leis de intensidade marginais. Os novos modelos marginais são aptos para descrever dados multimodais. A relação dos modelos CPT $\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ e CG $\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ com a formação física das imagens *PoISAR multilook* é elaborada. Duas de suas propriedades são derivadas e discutidas: função característica (fc) e Log-cumulantes de Mellin (MLCs). Em segundo lugar, fornecemos estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) via o algoritmo *Expectation-Maximization* (EM) para os parâmetros de CPT $\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ e CG $\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$. Adicionalmente, ferramentas gráficas de bondade de ajuste (GoF) para CPT $\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ e CG $\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ são propostas. Um estudo Monte Carlo é feito para quantificar o desempenho dos EMVs em termos de algumas figuras de mérito. Em terceiro lugar, três aplicações para dados *PoISAR* reais são realizadas. As novas propostas são comparadas com três distribuições *PoISAR* bem conhecidas: $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$, \mathcal{G}_m^0 e \mathcal{K}_m . Os resultados ilustram a importância dos modelos introduzidos ao analisar imagens *PoISAR*.

Este capítulo é organizado da seguinte forma. Na seção 6.1, uma discussão sobre o paradigma de modelagem *PoISAR* é apresentada bem como são introduzidas duas novas distribuições e algumas de suas propriedades. Métodos de estimativa e ferramentas GoF para ambas as distribuições são fornecidos na seção 6.2. Na seção 6.3, resultados numéricos referentes a este capítulo são exibidos.

6.1 MODELOS *POLSAR* E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES

6.1.1 Modelos da literatura e formulação física das novas propostas

Tomando o MM como mecanismo gerador de distribuições *PolSAR*, cada retorno associado a uma entrada da imagem é o produto de duas variáveis aleatórias independentes, que descrevem a configuração do terreno e o efeito do *speckle*. Por exemplo, assumindo a distribuição Wishart complexa escalonada m -dimensional (diga-se $\mathbf{Y} \sim s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$) discutido em (NASCIMENTO; FRERY; CINTRA, 2014) para descrever o *speckle* multidimensional *multilook* para m canais de polarização com densidade $f_{\mathbf{Y}}$ e $X \in \mathbb{R}_+$ como uma variável aleatória para o terreno com densidade f_X , o modelo do retorno $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}X$ é dado por maneira (ANFINSEN; ELTOFT, 2011)

$$f_{\mathbf{Z}}(\dot{\mathbf{Z}}) = \int_0^\infty x^{-m^2} \underbrace{f_{\mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{Z}}/x)}_{\text{Speckle}} \underbrace{f_X(x)}_{\text{Backscatter}} dx,$$

em que $\dot{\mathbf{Z}} \in \Omega_+ := \{\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m : \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*\}$ é uma possível realização de \mathbf{Z} e $(\cdot)^*$ é o operador transposto conjugado. A estrutura subsequente menciona os modelos MCA, quando X segue as distribuições \mathcal{G}^0 , \mathcal{N}^{-1} (Normal inversa), Γ^{-1} (Gama inversa), Γ (Gama), beta, beta⁻¹ (Beta inversa), e δ (Dirac).

Tabela 14 – Resumo das distribuições MCA.

MCA (\mathbf{Z})	Terreno (X) \times <i>Speckle</i> (\mathbf{Y})	Referência
modelos com quatro parâmetros		
U_m	$\mathcal{G}^0 \times s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	(BOMBRUN; BEAULIEU, 2008)
\mathcal{G}_m	$\mathcal{N}^{-1} \times s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	(FREITAS; FRERY; CORREIA, 2005)
modelos com três parâmetros		
\mathcal{G}_m^0	$\Gamma^{-1} \times s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	(FREITAS; FRERY; CORREIA, 2005)
\mathcal{K}_m	$\Gamma \times s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	(LEE et al., 1994)
W_m	beta \times $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	(DENG et al., 2017)
M_m	beta ⁻¹ \times $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	(DENG et al., 2017)
modelos (baseline) com dois parâmetros		
$s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	$\delta \times s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$	(ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2009)

Fonte: próprio autor.

Além disso, a expansão de Laguerre foi usada para estender o modelo Γ resultando na forma generalizada de \mathcal{K}_m (BIAN; MERCER, 2014). Na prática, as leis $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$, \mathcal{K}_m e \mathcal{G}_m^0 são

comumente usadas para descrições de regiões do tipo oceano, floresta e áreas urbanas, respectivamente. A Figura 28 mostra as conexões entre as distribuições *PoISAR* mais usadas. As duas distribuições que são propostas nesta tese (e exploradas nas seções subsequentes) também foram adicionadas na figura para mostrar a ligação delas com as distribuições bem definidas na literatura. A pesquisa de Deng et al. (2017) discute esses e outros modelos MCA. Além disso, Yue et al. (2020) apresentaram recentemente uma pesquisa sobre como diferentes suposições para o número de espalhadores podem gerar os modelos de retorno *SAR* conhecidos e novos descritores para texturas de *SAR* correlacionadas.

Este capítulo aborda duas novas distribuições de três parâmetros MCA com base em uma extensão da referência (Yue et al., 2020) para retornos *PoISAR*, em que as leis marginais de suas diagonais principais são capazes de descrever eventos uni e multimodais. A Figura 28 ilustra como nossa proposta se relaciona com outras distribuições, em particular para a lei $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$. A Tabela 14 resume essas distribuições, indicando importantes referências.

No que segue, a MM é desenvolvida com mais detalhes do que a descrição feita no Capítulo 3 a fim de motivar a proposta dos novos modelos (Yue et al., 2020). Tomando apenas um canal de polarização, sabe-se que se o número de espalhadores, diga-se n , em uma célula de resolução for grande o suficiente e aproximadamente constante entre diversos *pixels*, então o sinal eletromagnético retornado

$$F = \sum_{k=1}^n F_k \quad (6.1)$$

segue a lei Gaussiana complexa (DELIGNON; PIECZYNSKI, 2002), em que F_k é a quantidade de valor complexo que representa o espalhador individual. Como consequência, a amplitude ou norma $\|F\| = \sqrt{F^*F}$, e a intensidade $I = \|F\|^2$ desse sinal seguem uma distribuição Rayleigh e exponencial, respectivamente.

Como o número de retroespalhadores mudam entre as células de resolução, ele deve ser descrito como uma variável aleatória, diga-se N . De acordo com Delignon e Pieczynski (2002), se

1. o número aleatório de espalhadores N em cada célula de resolução segue uma distribuição de Poisson,
2. seu valor esperado $E(N) = \lambda_0$ é assumido como uma variável aleatória, diga-se Λ , com densidade $f(\lambda_0)$,

e

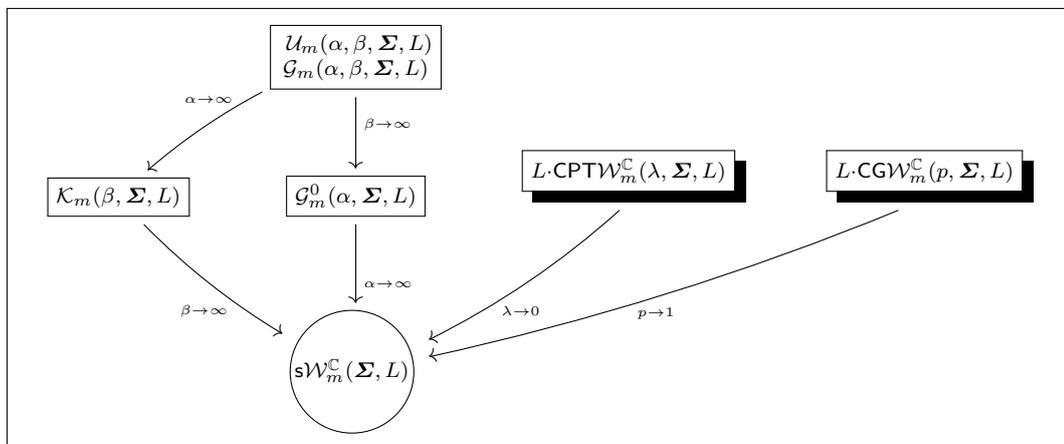
3. a densidade da intensidade I é $g(x)$, então, adaptando o resultado *singlelook* como descrito em Delignon e Pieczynski (2002) para o caso *multilook* com NEL L ,
4. para λ_0 grande o suficiente, o modelo condicional $[I | A = \lambda_0]$ seguem um modelo Γ com forma L e escala $(\lambda_0\sigma^2)^{-1}L$ tal que σ^2 é a variância comum da amplitude do espalhador individual e, entretanto,
5. a densidade da intensidade não condicional I é

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^\infty f_{[I|A=\lambda_0]}(x) f(\lambda_0) d\lambda_0 \\
 &= \int_0^\infty \frac{[L/(\lambda_0\sigma^2)]^L x^{L-1}}{\Gamma(L)} \exp\left\{-\frac{Lx}{\lambda_0\sigma^2}\right\} f(\lambda_0) d\lambda_0, \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_0} \underbrace{f_{\Gamma(L, L/\sigma^2)}(x/\lambda_0)}_{\text{unidimensional speckle retroespalhador}} \underbrace{f_X(\lambda_0)}_{\text{retroespalhador}} d\lambda_0,
 \end{aligned}$$

que é um modelo marginal para a diagonal principal das distribuições de MCA.

Na prática, a hipótese (3) que é consequência da hipótese (2), se mostra muito forte. Sensores SAR de alta resolução requerem poucos retroespalhadores por célula de resolução. Yue et al. (2020) apresentaram uma discussão sobre as implicações físicas de assumir o número de espalhadores como uma variável aleatória, e eles derivaram um novo modelo para texturas SAR correlacionadas.

Figura 28 – Diagrama das relações entre distribuições *PolSAR*. Aqui, o vetor de parâmetros $(\alpha, \beta, \lambda, p)$ representa a forma, Σ denota um tipo de locação ou uma matriz de dispersão e L é o NEL.



Fonte: próprio autor.

Neste capítulo, adaptamos o modelo de soma (6.1) para descrever retorno *PolSAR multilook*.

Os sistemas *PolSAR* registram amplitude e fase de sinais retroespalhados de diferentes polarizações categorizadas nas direções lineares de recepção e transmissão, resultando em quatro canais de polarização: F_{HH} , F_{HV} , F_{VH} e F_{VV} (H para direção (de envio ou captura) horizontal e V para vertical). Se as condições do teorema da reciprocidade forem satisfeitas (ULABY; ELACHI, 1990), então $F_{HV} \approx F_{VH}$. Assim, os retornos *PolSAR multilook* têm a forma:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \begin{bmatrix} F_{HH,i}^{(\ell)} \\ F_{HV,i}^{(\ell)} \\ F_{VV,i}^{(\ell)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{HH,i}^{*(\ell)} & F_{HV,i}^{*(\ell)} & F_{VV,i}^{*(\ell)} \end{bmatrix} \right\},$$

em que $F_{A,i}^{(\ell)} \in \mathbb{C}$ é o espalhamento no canal A referente ao i -ésimo espalhador individual e ℓ -ésimo look. Além disso, com base nos resultados nas referências (GOODMAN, 1963; HAGEDORN et al., 2006), temos evidências de que a distribuição Wishart complexa pode representar significativamente o retorno *PolSAR* de cenários homogêneos. Além disso, as distribuições Poisson truncada e geométrica são sugeridas como leis adequadas para modelar a quantidade de sinais retornados em uma célula de resolução. Portanto, combinando essas duas evidências, propomos a soma aleatória da distribuição Wishart complexa com o número de termos seguindo as leis Poisson truncada e geométrica como dois descritores para o retorno da matriz \mathbf{F} . A seguir, detalhamos nossas contribuições.

6.1.2 Novos modelos

Assuma a quantidade de retroespalhadores como aleatória, diga-se $N \in \mathbb{Z}_+$, seguindo uma dentre duas distribuições: Poisson truncada no zero (MOORE, 1952; PLACKETT, 1953), denotada como $N \sim \text{TPo}(\lambda)$ com função de probabilidade $P(N = k) = \lambda^k / [k! (e^\lambda - 1)]$, para $k = 1, 2, 3, \dots$ e $\lambda > 0$, e Geométrica (BEST; RAYNER, 2003; DALLAS, 1974), denotada por $N \sim \text{Geo}(p)$ com função de probabilidade $P(N = k) = p(1 - p)^{k-1}$, para $k = 1, 2, 3, \dots$ e $p \in (0, 1)$. Nesses casos, $\lambda > 0$ representa o número médio de espalhadores, enquanto $p \in (0, 1)$ é a probabilidade de encontrar um espalhador individual. Quando $p \uparrow 1$ ou $\lambda \downarrow 0$ esses modelos representam a existência de um espalhador por célula com probabilidade 1.

Primeiramente, sejam $N \sim \text{TPo}(\lambda)$ e $\mathbf{Z}_i \sim \mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ para $i = 1, \dots, N$ com função densidade de probabilidade

$$f(\dot{\mathbf{Z}}_i) = \frac{|\dot{\mathbf{Z}}_i|^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)} \exp \left\{ -\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}_i \right) \right\}, \mathbb{I}_{\Omega_+}(\dot{\mathbf{Z}}_i),$$

em que $\Gamma_m(L)$ é a função gama multivariada. Então, $\mathbf{S}_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{Z}_i \sim \mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, kL)$ (MAIWALD; KRAUS, 2000) e a matriz de coerência por célula segue a soma composta $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i$ e tem densidade (FINE, 2006)

$$\begin{aligned} f(\dot{\mathbf{S}}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) f_{\mathbf{S}_k}(\dot{\mathbf{S}}) \mathbb{I}_{\Omega_+}(\dot{\mathbf{S}}) \\ &= \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} f_{\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, kL)}(\dot{\mathbf{S}}) \\ &= \left(\frac{e^{-\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{S}})}}{|\dot{\mathbf{S}}|^m (e^\lambda - 1)} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{S}}|^L)^k}{k! \Gamma_m(kL)}, \end{aligned}$$

em que $\dot{\mathbf{S}} = \{s_{i,j}\}$ é uma possível realização de $\mathbf{S} = \{S_{i,j}\}$. Esta situação é denotada por $\mathbf{S} \sim \text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}(\lambda, \boldsymbol{\Sigma}, L)$. De acordo com Hagedorn et al. (2006), a i -ésima intensidade marginal de \mathbf{S}_k (entrada (i,i) desta matriz) segue o modelo $\Gamma(kL, (2\sigma_i^2)^{-1})$ e, portanto, a distribuição da i -ésima intensidade marginal de $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$, diga-se $S_{i,i}$, tem densidade

$$\begin{aligned} f(s_{i,i}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) f_{\Gamma(kL, 2^{-1}\sigma_i^{-2})}(s_{i,i}) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(s_{i,i}) \\ &= \left[\frac{e^{-\frac{s_{i,i}}{2\sigma_i^2}}}{s_{i,i}(e^\lambda - 1)} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\lambda(2^{-1}\sigma_i^{-2}s_{i,i})^L]^k}{k! \Gamma(kL)} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(s_{i,i}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

em que σ_i^2 é a (i,i) -ésima entrada de $\boldsymbol{\Sigma}$.

Agora assuma que $N \sim \text{Geo}(p)$ e $\mathbf{Z}_i \sim \mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ para $i = 1, \dots, N$, a matriz de coerência por célula segue a soma composta $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i$ com densidade

$$\begin{aligned} f(\dot{\mathbf{S}}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) f_{\mathbf{S}_k}(\dot{\mathbf{S}}) \mathbb{I}_{\Omega_+}(\dot{\mathbf{S}}) \\ &= \left(\frac{pe^{-\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{S}})}}{(1-p)|\dot{\mathbf{S}}|^m} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((1-p)|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\dot{\mathbf{S}}|^L)^k}{\Gamma_m(kL)} \mathbb{I}_{\Omega_+}(\dot{\mathbf{S}}). \end{aligned}$$

Essa situação é denotada como $\mathbf{S} \sim \text{CGW}_m^{\mathbb{C}}(p, \boldsymbol{\Sigma}, L)$. O modelo marginal para intensidade do i -ésimo canal é

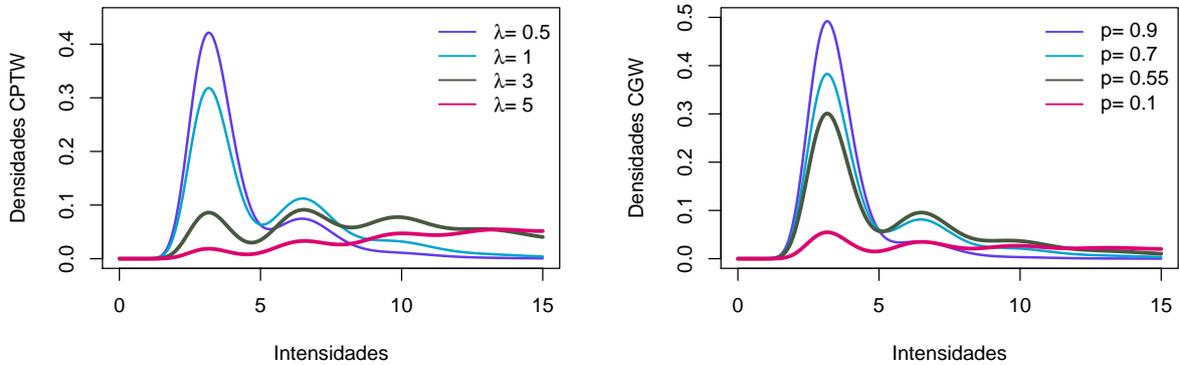
$$\begin{aligned} f(s_{i,i}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) f_{\Gamma(kL, 2^{-1}\sigma_i^{-2})}(s_{i,i}) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(s_{i,i}) \\ &= \left[\frac{pe^{-\frac{s_{i,i}}{2\sigma_i^2}}}{(1-p)s_{i,i}} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(1-p)(2^{-1}\sigma_i^{-2}s_{i,i})^L]^k}{\Gamma(kL)} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(s_{i,i}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

A Figura 29 mostra as densidades marginais de $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ e $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$. É perceptível que elas podem assumir formas multimodais mesmo tendo poucos parâmetros.

Figura 29 – Densidades marginais das distribuições $CPTW_m^C$ e CGW_m^C .

(a) densidades $CPTW_m^C$.

(b) densidades CGW_m^C .



Fonte: próprio autor.

6.1.3 Propriedades Matemáticas

Esta seção endereça a derivação da função característica (fc) das distribuições $CPTW_m^C$ e CGW_m^C . Para este fim, considere o seguinte Lema (FINE, 2006; NASCIMENTO; RÊGO; NASCIMENTO, 2019).

Lema 3 Seja $S = \sum_{i=1}^N Z_i$ tal que Z_1, \dots, Z_N é uma amostra aleatória retirada de Z com fc $\varphi_Z(\cdot)$ e N é uma variável aleatória inteira positiva com fc $\varphi_N(\cdot)$. A fc de S quando N e Z_i são independentes, é dado por

$$\varphi_S(\mathbf{T}) = E(e^{i\mathbf{T}S}) = \varphi_N(-i \log \varphi_Z(\mathbf{T})), \text{ em que } i = \sqrt{-1}.$$

As próximas proposições são resultantes do Lema 3.

Proposição 5 Seja $Z_k \sim \mathcal{W}_m^C(L, \Sigma)$ com fc $\varphi_{Z_k}(\mathbf{T}) = E(e^{i\text{tr}(\Sigma Z_k)}) = |\Sigma|^{-L} |\Sigma^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L}$ e $N \sim TPO(\lambda)$ com $\varphi_N(t) = \frac{e^{\lambda e^{it}} - 1}{e^{\lambda} - 1}$. Assim, o fc de $S = \sum_{i=1}^N Z_i \sim CPTW_m^C$ é

$$\varphi_S(\mathbf{T}) = \frac{e^{\lambda e^{i[-\log(|\Sigma|^{-L} |\Sigma^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L})]}} - 1}{e^{\lambda} - 1} = \frac{e^{\lambda |\Sigma|^{-L} |\Sigma^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L}} - 1}{e^{\lambda} - 1}.$$

Proposição 6 Seja $Z_i \sim \mathcal{W}_m^C(L, \Sigma)$ e $N \sim Geo(p)$ com fc $\varphi_N(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} = \frac{p}{e^{-it} - q}$. Assim, o fc de $S = \sum_{i=1}^N Z_i \sim CGW_m^C$ é expressada por

$$\varphi_S(\mathbf{T}) = \frac{p}{\left[e^{-\log(|\Sigma|^{-L} |\Sigma^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L})} \right]^{-1} - q} = \frac{p}{(|\Sigma|^L |\Sigma^{-1} - i\mathbf{T}|^L)^{-1} - q}.$$

Detalhes sobre a prova destas proposições bem como aqueles devido aos resultados restantes deste capítulo podem ser encontrados nos Apêndices E e F. As proposições 5 e 6 são importantes por sua tratabilidade analítica. Várias propriedades de tipo de momento podem ser derivadas; por exemplo, variância e cumulantes.

6.2 ESTIMAÇÃO POR MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA E PROCEDIMENTOS DE INFÊRÊNCIA BASEADOS EM MELLIN

Esta seção tem um objetivo duplo: fornecer um procedimento de estimativa para os modelos propostos e desenvolver ferramentas GoF para quantificar sua aderência aos dados *PolSAR*. O primeiro objetivo é feito por maximizar log-verossimilhança pelo algoritmo EM, enquanto o segundo usa a transformada de Mellin.

6.2.1 Estimação por máxima verossimilhança via EM

Nesta seção, é desenvolvido um procedimento para obtenção dos EMVs para os parâmetros de $CPTW_m^C$ e CGW_m^C por meio do algoritmo EM (DEMPSTER; LAIRD; RUBIN, 1977). Seja $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i$ tal que $N \sim \{TPo(\lambda), Geo(p)\}$ e $\mathbf{Z}_i \sim \mathcal{W}_m^C(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ para $i = 1, \dots, N$ e ambos os pares $(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j)$ e (N, \mathbf{Z}_i) são independentes $\forall i \neq j$. Considere $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_T$ uma amostra aleatória de tamanho T retirada de $\mathbf{S} \sim \{CPTW_m^C, CGW_m^C\}$. Note que $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_T)$ é observável, mas $\mathbf{n} = (N_1, \dots, N_T)$ representa um vetor não observável. Seja (\mathbf{S}, \mathbf{n}) o conjunto completo de observações com densidade conjunta (para $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma})^\top)^\top$ ou $(p, \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma})^\top)^\top$)

$$\begin{aligned} L^c(\boldsymbol{\theta} | \dot{\mathbf{N}}, \dot{\mathbf{S}}) &= f_{\mathbf{S}, N}(\dot{\mathbf{S}}, \dot{\mathbf{N}} | \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^T f_{\mathbf{S}_i, N_i}(\dot{\mathbf{S}}_i, n_i | \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i=1}^T f_{\mathbf{S}_i | N_i = n_i}(\dot{\mathbf{S}}_i | n_i, \boldsymbol{\theta}) P(N_i = n_i), \end{aligned}$$

em que $\dot{\mathbf{S}} = (\dot{\mathbf{S}}_1, \dots, \dot{\mathbf{S}}_T)$ e $\dot{\mathbf{n}} = (n_1, \dots, n_T)$ são possíveis realizações de \mathbf{S} e \mathbf{n} . Assim, os EMVs via EM são determinados da seguinte maneira:

- Passo E: Derive

$$Q(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}_0, \dot{\mathbf{S}}) := E_{\boldsymbol{\theta}_0}[\log L^c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{N}, \dot{\mathbf{S}})],$$

em que $E_{\boldsymbol{\theta}_0}$ é o valor esperado com respeito a $[N | \boldsymbol{\theta}_0, \dot{\mathbf{S}}]$ com função de probabilidade $f(N | \boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{S}})$.

- **Passo M:** Na $(t + 1)$ -ésima iteração, encontre $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(t+1)}$ que maximiza $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \dot{\mathbf{S}})$,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(t+1)} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \dot{\mathbf{S}}),$$

em que Θ representa o espaço paramétrico em estudo.

Essas etapas devem ser repetidas até a convergência ser alcançada. Para verificação da convergência é necessário adotar um critério de parada, neste caso foi usado $\|\boldsymbol{\theta}^{(t+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(t)}\| < \epsilon$, em que $\|\cdot\|$ é a função norma euclidiana e ϵ é o nível de precisão especificada definido como $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$. O próximo Teorema determina as expressões dos EMVs.

Teorema 4 Para a distribuição $CPTW_m^C$, o EMV para $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma})^\top)^\top$ é $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\lambda}, \text{vec}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}})^\top)^\top$ em que $\hat{\lambda}$ é definido como a raiz da equação não-linear

$$\frac{\hat{\lambda}^{(t+1)}}{(1 - e^{-\hat{\lambda}^{(t+1)}})} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T E(N|\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}}_i) \quad (6.4)$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(t+1)} = \frac{T\bar{\mathbf{S}}}{L \sum_{i=1}^T E(N|\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}}_i)}, \quad (6.5)$$

em que $\bar{\mathbf{S}} = T^{-1} \sum_{i=1}^T \dot{\mathbf{S}}_i$ e

$$\begin{aligned} E(N|\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}}_i) &= \sum_{k_i=1}^{\infty} k_i P(N = k_i|\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}}_i) = \sum_{k_i=1}^{\infty} k_i \frac{f_{S_{k_i}}(\dot{\mathbf{S}}_i|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \cdot P(N = k_i|\boldsymbol{\theta}^{(t)})}{f_S(\dot{\mathbf{S}}_i|\boldsymbol{\theta}^{(t)})} \\ &= \frac{\sum_{k_i=1}^{\infty} k_i \left[\left(\frac{\lambda^{(t)\frac{1}{L}} |\dot{\mathbf{S}}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}^{(t)}|} \right)^{L k_i} \frac{1}{\Gamma_m(k_i L)} \right]}{\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda^{(t)\frac{1}{L}} |\dot{\mathbf{S}}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}^{(t)}|} \right)^{L j} \frac{1}{\Gamma_m(j L)} \right]}. \end{aligned}$$

Para a distribuição CGW_m^C , o EMV para $\boldsymbol{\theta} = (p, \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma})^\top)^\top$ é $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{p}, \text{vec}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}})^\top)^\top$, em que \hat{p} representa a raiz da equação não-linear

$$\hat{p}^{(t+1)} = \frac{T}{\sum_{i=1}^T E(N|\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}}_i)} \quad (6.6)$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(t+1)} = \frac{T\bar{\mathbf{S}}}{L \sum_{i=1}^T E(N|\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}}_i)}, \quad (6.7)$$

em que

$$\begin{aligned}
 E(N|\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}}_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} k_i P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \frac{f_{S_{k_i}}(\dot{\mathbf{S}}_i | \boldsymbol{\theta}^{(t)}) \cdot P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}^{(t)})}{f_{\mathbf{S}}(\dot{\mathbf{S}}_i | \boldsymbol{\theta}^{(t)})} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} k_i \left[\left(\frac{q^{\frac{1}{L}} |\dot{\mathbf{S}}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}^{(t)}|} \right)^L \right]^{k_i} \frac{1}{\Gamma_m(k_i L)}}{\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{q^{\frac{1}{L}} |\dot{\mathbf{S}}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}^{(t)}|} \right)^L \right]^j \frac{1}{\Gamma_m(jL)}}
 \end{aligned}$$

e $q = 1 - p_0$.

As provas são encontrados nos Apêndices G e H.

6.2.2 Diagrama de Mellin

A transformada de Mellin aplicada a matrizes aleatórias hermitianas é definida em $\boldsymbol{\Omega}_+$ (ANFINSEN; DOULGERIS; ELTOFT, 2009) e, portanto, pode ser aplicada aos modelos $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ e $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$. Anfinsen e Eltoft (2011) mostraram que essa transformada pode ser usada como um novo mecanismo de inferência estatística, no qual se define a estatística do tipo Mellin (*Mellin-kind statistic* - MKS). As MKSs foram derivadas para as distribuições $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ (GOODMAN, 1963), \mathcal{K}_m (LEE et al., 1994), \mathcal{G}_m^0 (FREITAS; FRERY; CORREIA, 2005) e \mathcal{U}_m (BOMBRUN; BEAULIEU, 2008) e ferramentas GoF foram determinadas com base nelas. Este Capítulo aborda a derivação das MKSs para $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ e $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$ a fim de avaliar a qualidade do ajuste dos modelos propostos.

Seja $\mathbf{C} \in \boldsymbol{\Omega}_+$, a transformada de Mellin para o mapeamento $g(\mathbf{C}) : \boldsymbol{\Omega}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como (ANFINSEN; ELTOFT, 2011):

$$\phi_{\mathbf{C}}(s) = \mathcal{M}\{g(\mathbf{C})\}(s) = \int_{\boldsymbol{\Omega}_+} |\mathbf{C}|^{s-m} g(\mathbf{C}) d\mathbf{C}$$

com $s \in \mathbb{C}$, sempre que a integral existe. Seja $g(\mathbf{C}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) f_{S_k}(\mathbf{C})$ tal que

$$f_{S_k}(\mathbf{C}) = \frac{|\mathbf{C}|^{(kL)-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{(kL)} \Gamma_m(kL)} \exp\{-\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{C})\}.$$

Então,

$$\phi_{\mathbf{C}}(s) = \mathcal{M}\{g(\mathbf{C})\}(s) = \int_{\Omega_+} \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \frac{|\mathbf{C}|^{(kL)+s-2m}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{(kL)} \Gamma_m(kL)} e^{-\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{C})} d\mathbf{C}.$$

Depois de algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{C}}(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^{(kL+s-m)} \Gamma_m(kL + s - m)}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{(kL)} \Gamma_m(kL)} \int_{\Omega_+} \frac{|\mathbf{C}|^{(kL)+s-2m} e^{-\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{C})}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{(kL+s-m)} \Gamma_m(kL + s - m)} d\mathbf{C} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) |\boldsymbol{\Sigma}|^{(s-m)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

A função geradora de cumulantes do tipo Mellin (*Mellin-kind cumulant-generating function* - MCGF) é definida como

$$\varphi_{\mathbf{C}}(s) = \log \phi_{\mathbf{C}}(s),$$

e a matriz de log-cumulante (MLC) de ν -ésima ordem é definida como

$$\kappa_{\nu} \mathbf{C} = \left. \frac{d^{\nu}}{ds^{\nu}} \varphi_{\mathbf{C}}(s) \right|_{s=m}.$$

Assim, para $N \sim \text{TPo}(\lambda)$ em (6.8), MCGF é dada por

$$\varphi_{\mathbf{C}}(s) = -\log(e^{\lambda} - 1) + (s - m) \log |\boldsymbol{\Sigma}| + \log \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k \Gamma_m(kL + s - m)}{k! \Gamma_m(kL)} \right].$$

Para $N \sim \text{Geo}(p)$ em (6.8), MCGF tem a forma

$$\varphi_{\mathbf{C}}(s) = -\log p + (s - m) \log |\boldsymbol{\Sigma}| + \log \left[\sum_{k=1}^{\infty} p^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right].$$

Os MLCs até a terceira ordem para as leis $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ e $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$ são dados no próximo teorema.

Teorema 5 *Os primeiros, segundos e terceiros MLCs para os modelos $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ e $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$ são expressados por, respectivamente,*

$$\kappa_1 = \log |\boldsymbol{\Sigma}| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \psi_m^{(0)}(kL) \right),$$

$$\kappa_2 = - \left[\sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \psi_m^{(0)}(kL) \right]^2 + \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \left[\left(\psi_m^{(0)}(kL) \right)^2 + \psi_m^{(1)}(kL) \right]$$

e

$$\begin{aligned} \kappa_3 = & 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \psi_m^{(0)}(kL) \right)^3 \\ & - 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \psi_m^{(0)}(kL) \right) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \left[\left(\psi_m^{(0)}(kL) \right)^2 + \psi_m^{(1)}(kL) \right] \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} P(N = k) \left[\left(\psi_m^{(0)}(kL) \right)^3 + 3\psi_m^{(0)}(kL)\psi_m^{(1)}(kL) + \psi_m^{(2)}(kL) \right]. \end{aligned}$$

Com base nesses resultados, podemos construir ferramentas de GoF para avaliar as nossas propostas na prática.

Para desenvolver o diagrama de Mellin, devem-se primeiro estimar os parâmetros e determinar uma cota para somas dos modelos propostos. Em seguida, necessitam-se determinar os cumulantes paramétricos κ_2 e κ_3 e uma curva para cada distribuição. Portanto, dos cumulantes amostrais com base em dados *PoISAR*, é possível verificar a aderência do modelo proposto aos dados.

6.3 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

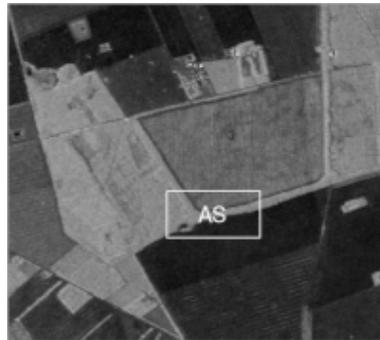
6.3.1 Análise com dados artificiais

Um experimento de Monte Carlo é realizado para quantificar o comportamento assintótico dos EMVs para os parâmetros $[\lambda, \Sigma]$ e $[p, \Sigma]$. Para este fim, amostras das distribuições $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ e $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$ são geradas com tamanhos $T = 10, 30, 100$ e 1000 e mil replicas Monte Carlo são utilizadas. Como configuração paramétrica da simulação, adotamos NEL igual a quatro ($L = 4$) e uma matriz comum

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.07582 + 0i & 0.00364 + 0.00388i & 0.01604 + 0.01125i \\ & 0.03737 + 0i & 0.00151 + 0.00202i \\ & & 0.06308 + 0i \end{bmatrix},$$

com $|\Sigma| = 0.00016$ e $\text{tr}(\Sigma) = 0.17626$. Esta matriz foi determinada pelo valor médio dos retornos da área AS visualizada na Figura 30. Para os modelos $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ e $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$, os valores de $\lambda = 0.1, 0.5$ e 1.0 e $p = 0.99, 0.7$ e 0.4 são escolhidos para representar matrizes retorno de cenas homogêneas até as heterogêneas, respectivamente. Usamos o erro quadrático médio (EQM) e o viés como figuras de mérito para avaliar o desempenho das estimativas.

Figura 30 – Área selecionada da imagem Foulum (canal HH) para determinar a matriz média como valores reais na simulação de dados.



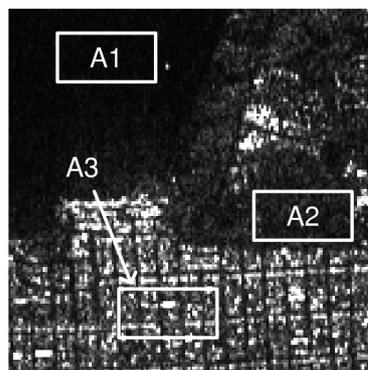
Fonte: próprio autor.

As Tabelas 15 e 16 mostram as estimativas dos parâmetros para $CPTW_m^C$ e CGW_m^C , respectivamente. Em geral, os menores valores para viés e EQM são obtidos nos maiores tamanhos de amostra, conforme esperado. Retornos mais heterogêneos (como para $\lambda = 1$ e $p = 0.4$) requerem tamanhos de amostra maiores para alcançar medidas de melhor qualidade do que as homogêneas.

6.3.2 Análise de dados reais

Primeiramente, é estudada uma imagem de uma região da baía de São Francisco (EUA). Esta imagem foi capturada com NEL quatro. Na segunda aplicação, as propostas são aplicadas na imagem de Foulum (DK), capturada sob o NEL oito. A terceira aplicação consiste na análise de uma imagem das áreas agrícolas de DEMMIN-Görmin (nordeste da Alemanha), obtida durante a campanha de voo do AGRISAR adotando NEL dez.

Figura 31 – Imagem de São Francisco (canal HH).



Fonte: próprio autor.

Tabela 15 – Performance dos EMVs para dados $CPTW_m^C$

n	$\hat{\lambda}$	$\text{tr}(\hat{\Sigma})$	$ \hat{\Sigma} $
	$(EQM_{\hat{\lambda}})$	$(EQM_{\text{tr}(\hat{\Sigma})})$	$(EQM_{ \hat{\Sigma} })$
$\lambda=0.10$			
10	0.1288 (0.04166)	0.17321 (4.00×10^{-4})	0.00014 (2.49×10^{-9})
30	0.1087 (0.01073)	0.17544 (1.20×10^{-4})	0.00015 (8.25×10^{-10})
100	0.1011 (0.00298)	0.17608 (3.78×10^{-5})	0.00016 (2.54×10^{-10})
1000	0.0999 (0.00029)	0.17627 (3.54×10^{-6})	0.00016 (2.41×10^{-11})
$\lambda=0.50$			
10	0.5644 (0.14842)	0.17140 (5.30×10^{-4})	0.00014 (3.52×10^{-9})
30	0.5197 (0.03998)	0.17553 (1.40×10^{-4})	0.00015 (1.01×10^{-9})
100	0.5017 (0.01160)	0.17589 (4.06×10^{-5})	0.00016 (2.89×10^{-10})
1000	0.49931 (0.00112)	0.1763 (3.95×10^{-6})	0.00016 (2.87×10^{-11})
$\lambda=1.00$			
10	1.0745 (0.26535)	0.17088 (6.70×10^{-4})	0.00015 (4.95×10^{-9})
30	1.0115 (0.06560)	0.17549 (1.80×10^{-4})	0.00016 (1.36×10^{-9})
100	0.9923 (0.02004)	0.17710 (5.19×10^{-5})	0.00016 (3.94×10^{-10})
1000	0.9834 (0.00228)	0.17751 (7.09×10^{-6})	0.00016 (5.42×10^{-11})

Fonte: próprio autor.

Para ilustrar o efeito do tipo de textura sobre os valores de EMVs, a Figura. 31 exibe a imagem de São Francisco e três áreas destacadas na perspectiva do canal HH. As áreas A1, A2 e A3 representam o oceano (caso menos rugoso), floresta (rugosidade média), e cenários urbanos (fortemente rugoso), respectivamente. A Tabela 17 apresenta EMVs para os parâmetros de sW_m^C , $CPTW_m^C$ e CGW_m^C nas regiões A1, A2, A3 e para a imagem completa. Para EMVs de Σ , o modelo $CPTW_m^C$ apresenta um desempenho mais próximo do sW_m^C que CGW_m^C , principalmente em cenários oceânicos (para os quais a literatura (FREITAS; FRERY; CORREIA, 2005; ANFINSEN; ELTOFT, 2011) sugere usar sW_m^C). Com relação aos parâmetros adicionais λ e p , altos valores de $\hat{\lambda}$ ou baixos valores de \hat{p} indicam regiões mais rugosas; enquanto $(\lambda, p) \rightarrow (0, 1)$ indicam que novos modelos tendem a se aproximar de sW_m^C .

Após a realização das estimativas dos parâmetros das distribuições em partes de uma das imagens, é realizada a estimação para imagem completa *pixel-a-pixel*. Para este fim, são

Tabela 16 – Performance dos EMVs para dados CGW_m^C

n	\hat{p} ($EQM_{\hat{p}}$)	$\text{tr}(\hat{\Sigma})$ ($EQM_{\text{tr}(\hat{\Sigma})}$)	$ \hat{\Sigma} $ ($EQM_{ \hat{\Sigma} }$)
$p=0.40$			
10	0.4903 (0.02018)	0.21160 (0.00506)	0.00035 (2.47×10^{-7})
30	0.5215 (0.02096)	0.22931 (0.00483)	0.00040 (1.16×10^{-7})
100	0.5256 (0.01760)	0.23184 (0.00366)	0.00038 (6.19×10^{-8})
1000	0.5310 (0.01733)	0.23397 (0.00338)	0.00038 (4.89×10^{-8})
$p=0.70$			
10	0.7183 (0.02056)	0.17387 (0.00054)	0.00015 (4.23×10^{-9})
30	0.7056 (0.00616)	0.17607 (0.00018)	0.00016 (1.41×10^{-9})
100	0.7095 (0.00176)	0.17756 (7.00×10^{-5})	0.00017 (5.53×10^{-10})
1000	0.7070 (0.00022)	0.17800 (8.75×10^{-6})	0.00017 (6.62×10^{-11})
$p=0.99$			
10	0.9828 (0.00235)	0.17450 (0.00033)	0.00015 (2.17×10^{-9})
30	0.9878 (0.00057)	0.17646 (0.00011)	0.00016 (7.55×10^{-10})
100	0.9900 (0.00017)	0.17570 (3.32×10^{-5})	0.00016 (2.09×10^{-10})
1000	0.9909 (2.22×10^{-5})	0.17640 (3.29×10^{-6})	0.00016 (2.27×10^{-11})

Fonte: próprio autor.

utilizados janelamentos de tamanho 7×7 que representam um total de 49 *pixels* em torno de cada entrada de imagem. As Figuras 32–34 mostram mapas das estimativas para as imagens de São Francisco, Foulum e DEMMIN-Görmin, respectivamente.

As EMVs nos parâmetros $CPTW_m^C$ para λ , $\text{tr}(\Sigma)$ e $|\Sigma|$ são exibidas nas Figuras 32a, 32b, e 32c, respectivamente. Por outro lado, as Figuras 32d, 32e, e 32f mostram os mapas para as EMVs nos parâmetros de CGW_m^C para p , $\text{tr}(\Sigma)$ e $|\Sigma|$, respectivamente. Os pares de Figuras [32b, 32e] e [32c, 32f] obtêm resultados próximos, detectando três regiões em São Francisco: terrenos urbanos determinados pela cor verde, Floresta por laranja e Oceano por vermelho. Nas Figuras 32a e 32d, as EMVs para λ e p assumem valores entre $(0, 1)$ e $(0.5, 1)$, respectivamente. É perceptível que os subespaços paramétricos $[p < 0.6]$ e $[\lambda > 0.3]$ indicam cenários urbanos admitindo retornos AIRSAR que seguem modelos $CPTW_m^C$ e CGW_m^C .

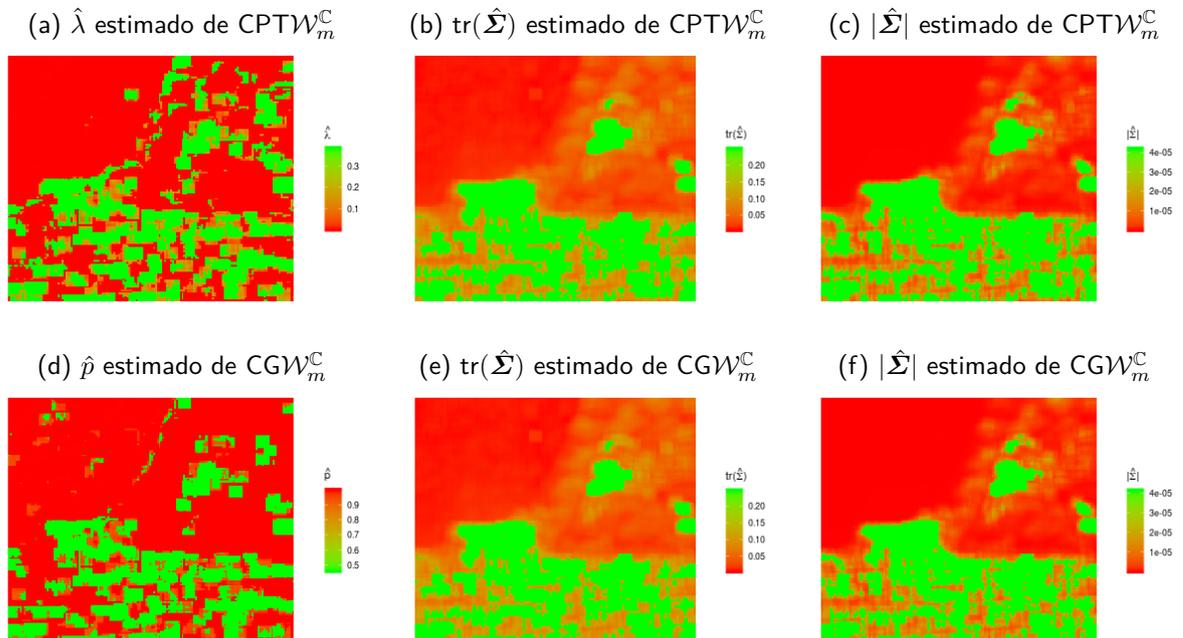
Os mapas na Figura 33 mostram os valores para EMVs para a imagem de Foulum. Os

Tabela 17 – EMVs para as distribuições $CPTW_m^C(\lambda, L, \Sigma)$, $CGW_m^C(p, L, \Sigma)$ e $sW_m^C(L, \Sigma)$ com $L = 4$

	modelo	$ \hat{\Sigma} $	$\hat{\lambda}$	\hat{p}	k
A1	sW_m^C	1.70×10^{-9}	•	•	•
	$CPTW_m^C$	1.70×10^{-9}	1.00×10^{-5}	•	4
	CGW_m^C	1.31×10^{-9}	•	0.92	5
A2	sW_m^C	7.88×10^{-7}	•	•	•
	$CPTW_m^C$	7.89×10^{-7}	1.95×10^{-5}	•	3
	CGW_m^C	6.08×10^{-7}	•	0.91	4
A3	sW_m^C	4.88×10^{-5}	•	•	•
	$CPTW_m^C$	3.88×10^{-5}	0.15	•	5
	CGW_m^C	3.60×10^{-5}	•	0.90	6
imagem completa	sW_m^C	1.18×10^{-5}	•	•	•
	$CPTW_m^C$	8.00×10^{-6}	0.26	•	6
	CGW_m^C	7.29×10^{-6}	•	0.85	6

Fonte: próprio autor.

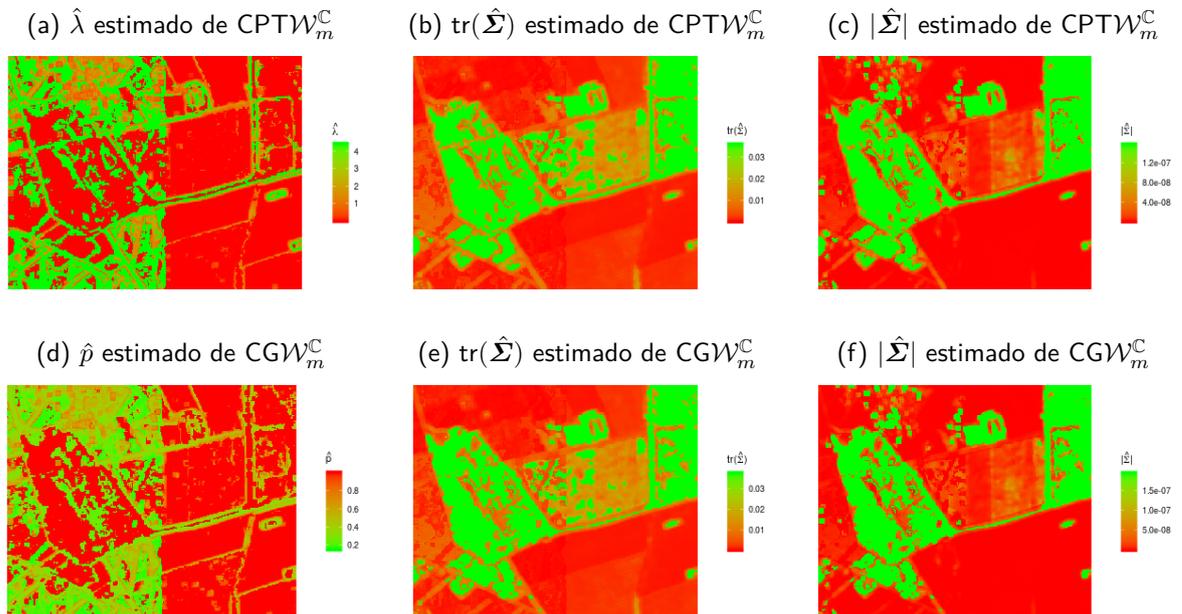
Figura 32 – Mapas dos parâmetros estimados das distribuições $CPTW_m^C$ (acima) e CGW_m^C (em baixo) para a imagem São Francisco.



Fonte: próprio autor.

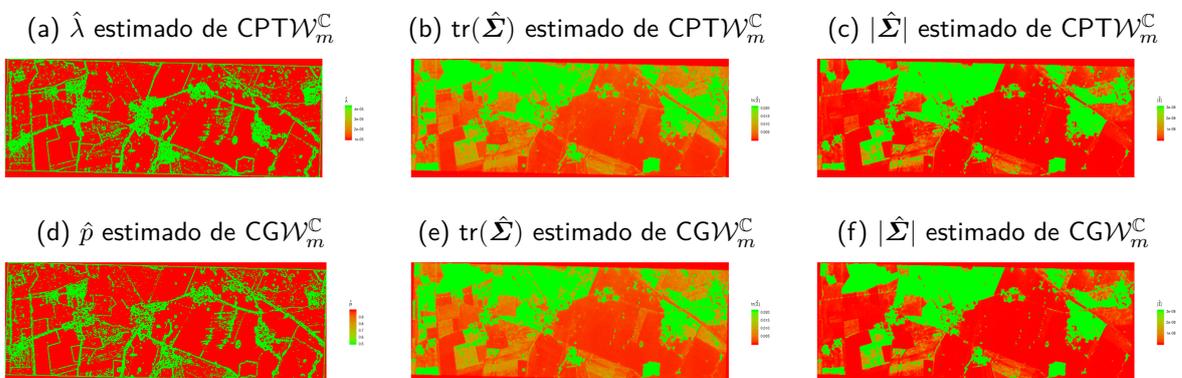
mapas para $\hat{\lambda}$ e \hat{p} são as Figuras 33a e 33d. Bordas e *background* da imagem são destacados. As Figuras 33b e 33e apresentam os valores para $\text{tr}(\hat{\Sigma})$ e $|\hat{\Sigma}|$. Estimativas mais altas têm endereçado as áreas de Conífera, Trigo e Colza, enquanto estimativas menores são associados

Figura 33 – Mapas dos parâmetros estimados das distribuições $CPTW_m^C$ (acima) e CGW_m^C (em baixo) para a imagem Foulum.



Fonte: próprio autor.

Figura 34 – Mapas dos parâmetros estimados das distribuições $CPTW_m^C$ (acima) e CGW_m^C (em baixo) para a imagem DEMMIN-Görmin.



Fonte: próprio autor.

com outras áreas.

Os mapas de EMVs para a imagem de DEMMIN-Görmin são apresentados na Figura 34. Das Figuras. 34a e 34d e do relatório AgriSAR de captura de imagens ¹, altos valores para $\hat{\lambda}$ ou baixos para \hat{p} apontam áreas de alta rugosidade, separando áreas não agrícolas das cultivadas (WHELEN; SIQUEIRA, 2017). As Figuras 34c–34f mostram valores para duas medidas de variabilidade. É possível identificar cinco tipos de culturas: colza de inverno (amarelo), trigo

¹ <https://earth.esa.int/c/document_library/get_file?folderId=21020&name=DLFE-397.pdf>

de inverno (vermelho), milho (verde), cevada de inverno (vermelho claro) e beterraba sacarina (verde claro).

Agora, estamos em posição de descrever cenários reais de *PoISAR* por meio das distribuições $CPTW_m^C$ e CGW_m^C , e compará-los a três modelos bem definidos: sW_m^C , \mathcal{K}_m e \mathcal{G}_m^0 . Cenas de São Francisco, Foulum e DEMMIN-Görmin com as áreas destacadas são exibidas nas Figuras 35a, 36a e 37a, respectivamente. Neste caso é considerado uma janela de $16 \times 16 = 256$ *pixels* como amostra para representar cada região da imagem. Em cada janela, são extraídas a média em 100 reamostragens aleatórias com reposição de comprimento de 128 *pixels* (ANFINSEN; ELTOFT, 2011). As Figuras 35b, 36b e 37b exibem o diagrama MLC com (i) as curvas de projeção devidas aos cinco modelos matriciais considerados e (ii) pares de MLCs amostrais (κ_2, κ_3) das regiões destacadas nas Figuras 35a, 36a e 37a. Os MLCs amostrais de cada região das imagens são plotados sobre as curvas de MLC das distribuições sW_m^C , \mathcal{K}_m , \mathcal{G}_m^0 , $CPTW_m^C$ e CGW_m^C .

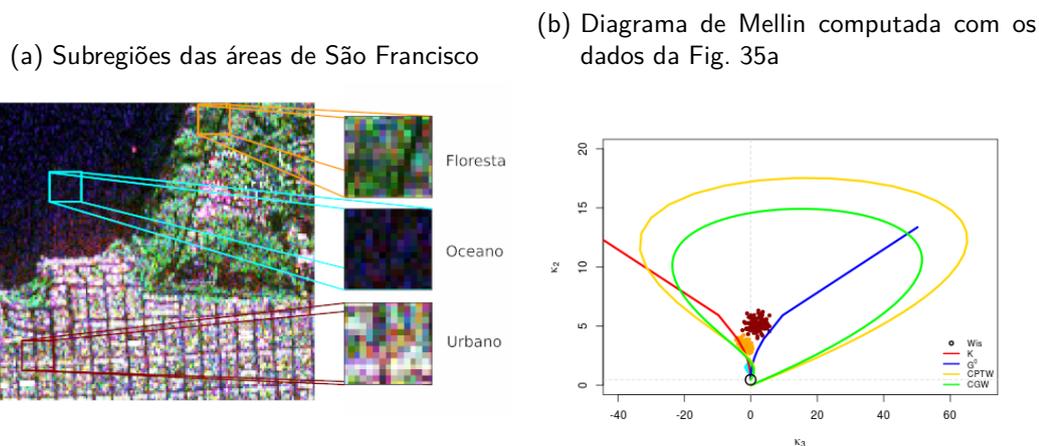
Na Figura 35a, extraímos amostras de oceano (quadrado ciano), floresta (quadrado dourado) e urbano (quadrado vermelho escuro). De acordo com os mapas do MLC, a amostra do oceano tem o melhor ajuste pela distribuição sW_m^C , a de floresta está sobreposta à curva \mathcal{K}_m e a amostra urbana assume o melhor ajuste em três curvas: \mathcal{G}_m^0 , $CPTW_m^C$ (com maior número de pontos) e CGW_m^C .

Na Figura 36a, extraímos amostras de *background* (quadrado verde, representando área desconhecida), colza (quadrado rosa), trigo (quadrado ciano), aveia (quadrado laranja), centeio (quadrado cinza) e coníferas (quadrado verde-azulado). As amostras de coníferas, centeio e trigo ficam sobrepostas na curva sW_m^C . A amostra de colza é melhor ajustada pela curva da distribuição \mathcal{G}_m^0 , a amostra de *background* tem pontos entre as leis \mathcal{G}_m^0 e CGW_m^C , e a amostra de aveia obtém o melhor ajuste na curva $CPTW_m^C$.

A Figura 37a destaca cinco cenas extraídas: cevada de inverno (roxa), beterraba sacarina (cinza), trigo de inverno (verde escuro), colza de inverno (marrom) e milho (azul claro). A distribuição sW_m^C apresenta o melhor ajuste para três últimas cenas. Os dois modelos propostos fornecem a melhor descrição para a cevada de inverno.

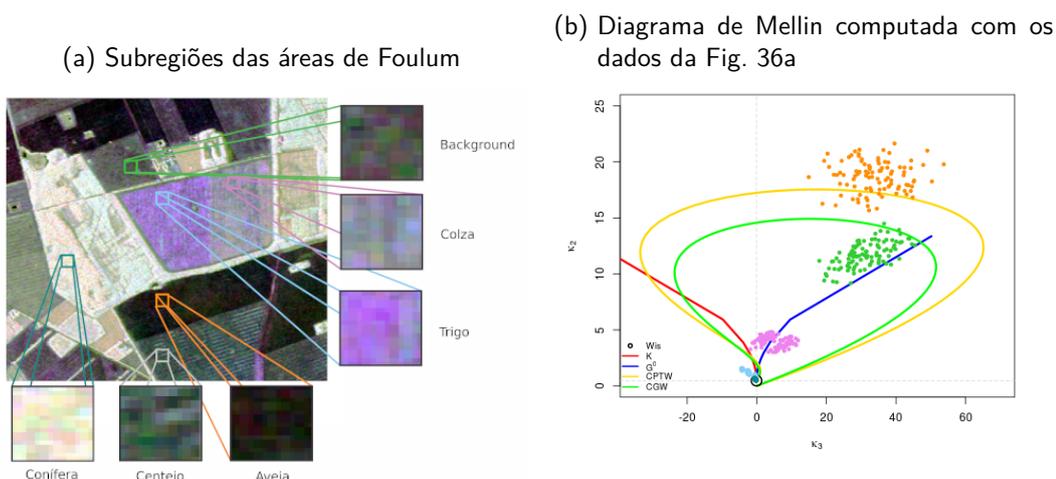
Finalmente, para complementar o estudo de adequação das distribuições polarimétricas, comparamos os ajustes de seus modelos marginais. As densidades marginais das distribuições $CPTW_m^C$ e CGW_m^C são dadas nas equações (6.2) e (6.3), enquanto aquelas devido a sW_m^C e \mathcal{K}_m , \mathcal{G}_m^0 são as leis Γ (HAGEDORN et al., 2006), \mathcal{K} (ABRAHAM; LYONS, 2010) e \mathcal{G}^0 (FRERY et al., 1997). Essas leis são empregadas para descrever as intensidades relacionadas aos canais

Figura 35 – Diagrama de Mellin com amostra de MLCs calculados a partir das amostras de São Francisco.



Fonte: próprio autor.

Figura 36 – Diagrama de Mellin com amostra de MLCs calculados a partir das amostras de Foulum.

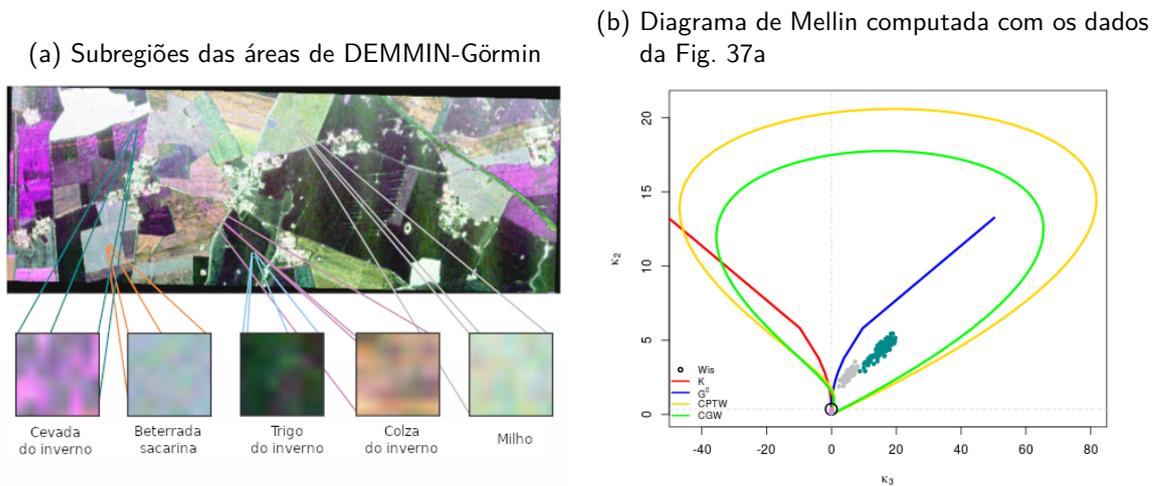


Fonte: próprio autor.

HH, HV e VV das imagens utilizadas, considerando NEL fixo. As distribuições da literatura são ajustadas por máxima verossimilhança, enquanto as marginais propostas são estimadas pelo método dos momentos, discutido brevemente a seguir.

Da identidade entre as versões teórica e empírica dos dois primeiros momentos das distribuições com densidades (6.2) e (6.3), depois de algumas manipulações algébricas, os seguintes procedimentos de estimação são deduzidos: Sejam z_1, \dots, z_N retornos de intensidades observadas em um canal de polarização, então $\bar{Z} = N^{-1} \sum_{i=1}^N z_i$ e $\overline{Z^2} = N^{-1} \sum_{i=1}^N z_i^2$. Dessa forma,

Figura 37 – Diagrama de Mellin com amostra de MLCs calculados a partir das amostras de DEMMIN-Görmin.



Fonte: próprio autor.

- Os estimadores de métodos dos momentos para (λ, σ^2) na Equação (6.2), $(\hat{\lambda}, \hat{\sigma}^2)$, são dados por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \frac{\bar{Z} (e^{\hat{\lambda}} - 1)}{L \hat{\lambda} e^{\hat{\lambda}}}$$

e $\hat{\lambda}$ é a solução da equação não linear:

$$\bar{Z}^2 = \frac{\bar{Z}^2 (e^{\hat{\lambda}} - 1)}{L \hat{\lambda} e^{\hat{\lambda}}} [(L + 1) + \hat{\lambda} L].$$

- Os estimadores de métodos dos momentos para (p, σ^2) na Equação (6.3), $(\hat{p}, \hat{\sigma}^2)$, são dados por:

$$\hat{p} = \frac{2 \hat{\sigma}^2}{\bar{Z}} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\bar{Z}^2 - \frac{1}{2} \bar{Z}^2}{\bar{Z} (L - 1)},$$

submetido à restrição $\bar{Z}^{-2} \bar{Z}^2 < 2$ (condição que foi verificada para todos os dados usados).

As Tabelas 18, 19 e 20 mostram os valores de S_{KS} que representam as estatísticas de Kolmogorov-Smirnov (e o p-valor associado) e o critério de informação de Akaike corrigido (AIC_c) para as imagens consideradas. A primeira medida de comparação avalia o ajuste à função de distribuição acumulada empírica, enquanto a segunda define um critério de comparação em termos de densidades empíricas.

Da Tabela 19, as marginais \mathcal{K} e CGW mostram os melhores resultados para regiões de oceano. A distribuição \mathcal{G}^0 produz os melhores ajustes para regiões florestais; com exceção do

canal HV que recebe a melhor representação da distribuição CGW . As melhores caracterizações para cenários urbanos são feitas pelas distribuições \mathcal{G}^0 e $CPTW$.

Pela Tabela 18, as marginais \mathcal{G}^0 , $CPTW$ e CGW obtêm os melhores resultados para regiões de *background*, colza e trigo. A região de aveia recebe a melhor caracterização dos modelos propostos; com exceção do canal VV, no qual a lei I apresenta o menor AIC_c . Nossos modelos sugerem os melhores ajustes para as regiões de centeio e coníferas.

Pela Tabela 20, a marginal I mostra os melhores resultados para a região da beterraba. As distribuições I e CGW obtêm os melhores desempenhos para a região do Milho. A lei \mathcal{G}^0 e os modelos propostos alcançam os melhores ajustes para as regiões de colza e cevada. A descrição da região do trigo é mais indicada para as leis \mathcal{K} , \mathcal{G}^0 e CGW .

Tabela 18 – Resultados de ajuste em intensidades de dados *Po/SAR* da imagem de Foulum com L fixo

Região	valores de AIC _c					estatística KS (p-valor)				
	Γ	\mathcal{K}	G^0	CPTW	CGW	Γ	\mathcal{K}	G^0	CPTW	CGW
Back. HH	13644.297	-5662.811	-6727.839	37551.191	31703.135	0.7328 (0.0000)	0.3375 (0.0000)	0.2438 (0.0000)	0.2567 (0.0000)	0.2536 (0.0000)
Back. HV	15795.002	-8111.433	-9317.474	31848.566	19651.018	0.7509 (0.0000)	0.3682 (0.0000)	0.2684 (0.0000)	0.2541 (0.0000)	0.2701 (0.0000)
Back. VV	-1086.881	-6128.267	-6639.634	-3668.218	-6014.533	0.5713 (0)	0.2425 (0.0000)	0.1813 (0.0000)	0.1758 (0.0000)	0.1557 (0.0000)
Colza HH	-15538.403	-16372.233	-16398.015	-16324.445	-16311.755	0.1189 (0.0000)	0.0178 (0.2733)	0.0134 (0.6230)	0.0362 (0.0005)	0.0391 (0.0001)
Colza HV	-28160.355	-28834.923	-28383.304	-28872.724	-28849.118	0.1202 (0.0000)	0.0403 (0.0000)	0.1311 (0.0000)	0.0326 (0.0026)	0.0365 (0.0000)
Colza VV	-15421.004	-15404.677	-15462.128	-15490.977	-15493.038	0.0369 (0.0004)	0.0409 (0.0000)	0.0292 (0.0099)	0.0217 (0.1052)	0.0210 (0.1276)
Trigo HH	-13267.144	-13224.354	-13226.610	-13323.948	-13324.126	0.0299 (0.0222)	0.0390 (0.0007)	0.0475 (0.0000)	0.0152 (0.6067)	0.0153 (0.5949)
Trigo HV	-24981.209	-26733.414	-27045.345	-26693.55	-26979.18	0.1790 (0.0000)	0.1032 (0.0000)	0.1254 (0.0000)	0.0272 (0.0480)	0.0291 (0.0279)
Trigo VV	-9490.612	-9360.921	-9420.177	-9383.994	-9490.997	0.0165 (0.4944)	0.0577 (0.0000)	0.0481 (0.0000)	0.0358 (0.0031)	0.0151 (0.6164)
Aveia HH	-35266.728	-34939.282	-35116.783	-35324.396	-35154.303	0.1344 (0.0000)	0.1584 (0.0000)	0.1441 (0.0000)	0.1201 (0.0000)	0.1621 (0.0000)
Aveia HV	-43082.474	-42739.723	-42570.853	-42910.284	-43067.083	0.1138 (0.0000)	0.1493 (0.0000)	0.1873 (0.0000)	0.1048 (0.0000)	0.1209 (0.0000)
Aveia VV	-32614.112	-32726.2166	-32807.781	-33303.94	-33335.41	0.1097 (0.0000)	0.1089 (0.0000)	0.0944 (0.0000)	0.0599 (0.0000)	0.0593 (0.0000)
Centeio HH	-28348.174	-28174.571	-27917.223	-28602.34	-28604.95	0.0871 (0)	0.1158 (0)	0.1631 (0)	0.0647 (0.0000)	0.0648 (0.0000)
Centeio HV	-32959.766	-32823.334	-32481.953	-33148.64	-33149.46	0.0717 (0.0000)	0.0961 (0.0000)	0.1505 (0.0000)	0.0469 (0.0000)	0.0468 (0.0000)
Centeio VV	-21953.243	-21918.265	-21726.364	-22325.60	-22339.67	0.0946 (0.0000)	0.0988 (0.0000)	0.1544 (0.0000)	0.0622 (0.0000)	0.0597 (0.0000)
Conifera HH	-3104.633	-2979.998	-2998.099	-3075.352	-3143.367	0.0435 (0.0049)	0.0805 (0.0000)	0.0801 (0.0000)	0.0338 (0.0535)	0.0158 (0.8235)
Conifera HV	-6112.789	-5910.137	-5966.941	-6121.835	-6206.274	0.0731 (0.0000)	0.1054 (0.0000)	0.1080 (0.0000)	0.0586 (0.0000)	0.0585 (0.0000)
Conifera VV	-6290.114	-6074.269	-5997.672	-6302.553	-6394.536	0.0809 (0.0000)	0.1133 (0.0000)	0.1411 (0.0000)	0.0692 (0.0000)	0.0654 (0.0000)

Fonte: próprio autor.

Tabela 19 – Resultados de ajuste em intensidades de dados *Po/SAR* da imagem de São Francisco com L fixo

Região	valores de AIC_c					estatística KS (p-valor)				
	Γ	\mathcal{K}	\mathcal{G}^0	CPTW	CGW	Γ	\mathcal{K}	\mathcal{G}^0	CPTW	CGW
Oceano HH	-3336.182	-3353.678	-3350.913	-3349.626	-3349.205	0.0463 (0.3352)	0.0436 (0.4064)	0.0339 (0.7228)	0.0354 (0.6736)	0.0339 (0.7257)
Oceano HV	-5370.004	-5367.173	-5370.251	-5371.358	-5371.422	0.0341 (0.7195)	0.0361 (0.6481)	0.0233 (0.9774)	0.0213 (0.9914)	0.0211 (0.9924)
Oceano VV	-2449.256	-2460.579	-2459.775	-2457.083	-2456.303	0.0623 (0.0788)	0.0447 (0.3767)	0.0468 (0.3201)	0.0499 (0.2506)	0.0505 (0.2385)
Floresta HH	-778.383	-1678.613	-1756.631	-1123.571	-1644.802	0.2953 (0.0000)	0.0842 (0.0004)	0.02656 (0.7909)	0.0924 (0.0000)	0.0791 (0.0011)
Floresta HV	-1920.739	-2657.491	-2704.299	-1987.513	-2616.529	0.2420 (0.0000)	0.0424 (0.2303)	0.0318 (0.5763)	0.0769 (0.0016)	0.0221 (0.9319)
Floresta VV	-780.561	-1702.588	-1757.682	-1135.981	-1674.072	0.2862 (0.0000)	0.0717 (0.0041)	0.0241 (0.8753)	0.0878 (0.0002)	0.0644 (0.0137)
Urbano HH	1109.161	-61.096	-150.191	-613.3867	-604.9043	0.4206 (0.0000)	0.0996 (0.0013)	0.0294 (0.9063)	0.0622 (0.2362)	0.0702 (0.1313)
Urbano HV	-396.151	-1215.056	-1257.915	-1371.682	-1369.557	0.3222 (0.0000)	0.0728 (0.0405)	0.0371 (0.6894)	0.0898 (0.0232)	0.0918 (0.0189)
Urbano VV	549.423	-178.221	-191.749	-587.054	-563.3056	0.3283 (0.000)	0.0641 (0.0976)	0.0555 (0.2057)	0.0572 (0.3256)	0.0767 (0.0775)

Fonte: próprio autor.

Tabela 20 – Resultados de ajuste em intensidades de dados *PolSAR* da imagem de DEMMIN-Görmin com L fixo

Região	valores de AIC _c				estatística KS (p-valor)					
	Γ	\mathcal{K}	\mathcal{G}^0	CGW	Γ	\mathcal{K}	\mathcal{G}^0	CGW		
Milho HH	-78397.154	-76497.874	-76358.346	-77111.508	-78295.695	0.0878 (0.0000)	0.1223 (0.0000)	0.1431 (0.0000)	0.1002 (0.0000)	0.1032 (0.0000)
Milho HV	-94634.188	-93234.909	-93275.192	-95332.257	-95387.211	0.0891 (0.0000)	0.1264 (0.0000)	0.1459 (0.0000)	0.0972 (0.0000)	0.0972 (0.0000)
Milho VV	-85862.424	-85117.185	-84061.901	-86853.034	-86969.596	0.0688 (0.0000)	0.1083 (0.0000)	0.1523 (0.0000)	0.0871 (0.0000)	0.0865 (0.0000)
Colza HH	-47307.555	-60318.864	-60769.119	-61066.01	-60758.62	0.2434 (0.0000)	0.0579 (0.0000)	0.0414 (0.0000)	0.0170 (0.0029)	0.0601 (0.0000)
Colza HV	-79878.920	-99756.999	-100348.078	-99320.55	-100274	0.2661 (0.0000)	0.0471 (0.0000)	0.0216 (0.0000)	0.0338 (0.0000)	0.0256 (0.0000)
Colza VV	-79273.791	-82175.302	-81683.624	-82827.037	-82867.0421	0.1199 (0.0000)	0.0449 (0.0000)	0.0884 (0.0000)	0.0171 (0.0027)	0.0222 (0.0000)
Trigo HH	-97953.769	-102484.074	-104142.925	-101075.289	-101922.446	0.1055 (0.0000)	0.0981 (0.0000)	0.0763 (0.0000)	0.0142 (0.0358)	0.0142 (0.0359)
Trigo HV	-106542.769	-125850.838	-129465.447	-122424.1	-124596.9	0.2177 (0.0000)	0.1262 (0.0000)	0.0938 (0.0000)	0.0370 (0.0000)	0.0367 (0.0000)
Trigo VV	-100755.443	-101241.792	-100901.263	-97871.733	-101055.643	0.0732 (0.0000)	0.0954 (0.0000)	0.1438 (0.0000)	0.0794 (0.0000)	0.0681 (0.0000)
Beterraba HH	-78449.372	-76431.501	-75912.814	-77602.605	-78078.731	0.1107 (0.0000)	0.1455 (0.0000)	0.1651 (0.0000)	0.1253 (0.0000)	0.1294 (0.0000)
Beterraba HV	-98717.807	-97296.974	-96563.392	-97709.887	-98179.681	0.1638 (0.0000)	0.1806 (0.0000)	0.2059 (0.0000)	0.1784 (0.0000)	0.1733 (0.0000)
Beterraba VV	-77030.751	-74324.474	-74858.236	-76188.637	-76452.111	0.1601 (0.0000)	0.1941 (0.0000)	0.1901 (0.0000)	0.1672 (0.0000)	0.1821 (0.0000)
Cevada HH	78156.057	-40689.082	-44221.803	-1270.399	-33982.76	0.5524 (0.0000)	0.14509 (0.0000)	0.0518 (0.0000)	0.1587 (0.0000)	0.0771 (0.0000)
Cevada HV	59700.677	-98734.402	-111375.215	12029.802	-26949.616	0.7236 (0.0000)	0.2588 (0.0000)	0.1231 (0.0000)	0.1031 (0.0000)	0.1043 (0.0000)
Cevada VV	86618.097	-37226.084	-42060.558	21926.804	-22934.483	0.5717 (0.0000)	0.1575 (0.0000)	0.0521 (0.0000)	0.1339 (0.0000)	0.1078 (0.0000)

Fonte: próprio autor.

7 CONCLUSÃO

Esta tese avançou na proposta de técnicas para dados *PolSAR* que incorporaram (à luz das teorias de MM e soma composta) a ação do ruído *speckle*. Particularmente, ao longo dos capítulos, foram propostos segmentadores, detectores de mudança e distribuições para lidar com dados *PolSAR*.

No Capítulo 4, introduzimos um novo paradigma de segmentação de imagens *SAR* que se baseou em propriedades assintóticas de expressões para entropia estocástica de Shannon em pressupostos de independência e dependência com NEL fixo e conhecido ou estimado, denominados $\{IEL_{\bullet}, IELE_{\bullet}\}$ e $\{DEL_{\bullet}, DELE_{\bullet}\}$. As raízes probabilísticas destes métodos estão nas distribuições Γ (base para entender o *speckle*) e \mathcal{G}_I^0 (para intensidades de retornos *SAR*), que são leis consolidadas na família de MM. Para segmentação, foram realizadas três aplicações em imagens reais e duas aplicações para detecção de mudança. Para segmentação das imagens EMISAR de Foulum (homogênea com cinco áreas) e para a imagem AIRSAR de Flevoland (homogênea com onze áreas), o segmentador baseado na entropia de Shannon da Γ sob dependência DEL_{Γ^*} forneceu os melhores resultados. Para a imagem E-SAR de Munique (mais heterogênea), o procedimento de segmentação baseado em entropia de Shannon da \mathcal{G}_I^0 sob independência $IEL_{\mathcal{G}^0}$ ofereceu o melhor resultado.

A distribuição \mathcal{G}_m^0 é bem conhecido por modelar com sucesso diferentes texturas, principalmente terrenos heterogêneos. No Capítulo 5 essa suposição foi assumida. Foi derivada a entropia de Shannon da distribuição \mathcal{G}_m^0 que possui como caso particular a distribuição Wishart complexa escalonada ($s\mathcal{W}_m^C$). Com base no comportamento assintótico dessas medidas equipadas com os estimadores de máxima verossimilhança, foram desenvolvidos dois métodos de segmentação não supervisionados e detectores de mudança para dados *PolSAR*. Resultados de aplicações a dados reais indicam que o segmentador baseado na entropia de Shannon da lei \mathcal{G}_m^0 foi mais recomendado para reconhecer regiões sobre imagens com mais áreas de misturas, enquanto aquele construído a partir da $s\mathcal{W}_m^C$ foi a melhor opção para imagens com regiões mais segmentadas.

Para a detecção de mudança, foram utilizados as mesmas imagens nos estudos dos Capítulos 4 e 5, que foram as regiões de Los Angeles (EUA) e Califórnia (EUA). No Capítulo 4 foram apresentados três detectores de mudança para imagens *SAR*, todos baseados na ES com NEL fixo e conhecido, denominado $D-H_S(\bullet)$. O detector que obteve os melhores resultados

pelo coeficiente Kappa foi baseado na ES no caso independente para \mathcal{G}_I^0 com L conhecido ($D-H_S(\mathcal{G}_I^0)$). No Capítulo 5, os detectores propostos foram baseados nas distribuições $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ e \mathcal{G}_m^0 com NEL fixo e conhecido e também para NEL estimado. Neste caso, para as duas regiões o melhor detector de mudança segundo o coeficiente Kappa foi o $D-H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}})|_{\hat{L}}$, que é o detector baseado no $H_S(s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}})$ para NEL estimado. Comparando os resultados dos detectores propostos para dados *SAR* com o propostos para dados *PolSAR*, as melhores detecções de mudança foram obtidas utilizando as imagens *PolSAR*.

No Capítulo 6, foram propostas duas novas distribuições *PolSAR* denominadas composta Poisson truncada Wishart complexa ($CPT\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$) e composta geométrica Wishart complexa ($CG\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$). Elas foram conectadas com a formação física do sistema *PolSAR* pelo método de soma de matrizes compostas. Algumas de suas propriedades foram derivadas: função característica e log-cumulante do tipo Mellin (MLC). Para ajustar os modelos *PolSAR* na prática, foram derivados estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) equipados com o algoritmo *Expectation-Maximization*. Expressões em forma fechada para EMVs foram encontradas (evitando erros de flutuações numéricas) e os resultados numéricos indicaram que tais estimativas apresentaram valores baixos de viés e erros quadráticos médios para tamanhos de amostra que são realistas com a prática de processamento de dados *PolSAR*. Três experimentos reais com imagens *PolSAR* foram feitos. Adotando os diagramas dos MLCs como critério de comparação, os resultados apontaram que os modelos $CPT\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ e $CG\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$ podem fornecer melhores descrições de alguns cenários *PolSAR* do que outras leis bem conhecidas; tais como, $s\mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}$, \mathcal{K}_m e \mathcal{G}_m^0 .

8 PESQUISAS FUTURAS

- ✓ Propor Testes de Hipóteses baseados nos log-cumulante do tipo Mellin (MLC) para as distribuições propostas no capítulo de “Somadas compostas para matrizes estocásticas aplicadas a sistemas PolSAR”;
- ✓ Fazer detecção de mudanças em imagens SAR utilizando a entropia de Shannon com a distribuição \mathcal{G}_I^0 considerando NEL desconhecido;
- ✓ Fazer detecção de mudanças em imagens SAR utilizando a entropia de Shannon com a distribuição \mathcal{G}_I^0 para todos os canais de intensidade simultaneamente considerando NEL conhecido e desconhecido;

REFERÊNCIAS

- ABRAHAM, D. A.; LYONS, A. P. Reliable methods for estimating the K -distribution shape parameter. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 35, n. 2, p. 288–302, 2010. ISSN 0364-9059.
- AgriSAR. 2020. <https://earth.esa.int/eogateway/documents/20142/1358213/AGRISAR2016_1.JPG>. Acessado: 10-12-2020.
- AIRSAR. 2020. <https://www.nasa.gov/centers/dryden/images/content/105879main_123104_DC-8_EC04-0047-011.jpg>. Acessado: 10-12-2020.
- AKAIKE, H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In: *Springer Series in Statistics*. [S.l.]: Springer New York, 1992. p. 610–624.
- AKBAR, P. R.; SS, J. T.; KUZE, H. A novel circularly polarized synthetic aperture radar (CP-SAR) system onboard a spaceborne platform. *International Journal of Remote Sensing*, Taylor & Francis, v. 31, p. 1053–1060, 2010.
- AKBARI, V.; ANFINSEN, S. N.; DOULGERIS, A. P.; ELTOFT, T. The Hotelling-Lawley trace statistic for change detection in polarimetric SAR data under the complex Wishart distribution. In: IEEE. *2013 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium-IGARSS*. [S.l.], 2013. p. 4162–4165.
- AKBARI, V.; ANFINSEN, S. N.; DOULGERIS, A. P.; ELTOFT, T.; MOSER, G.; SERPICO, S. B. Polarimetric SAR change detection with the complex Hotelling–Lawley trace statistic. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 54, n. 7, p. 3953–3966, 2016.
- AKBARIZADEH, G.; RAHMANI, M. Efficient combination of texture and color features in a new spectral clustering method for PolSAR image segmentation. *National Academy Science Letters*, Springer, v. 40, n. 2, p. 117–120, 2017.
- ANFINSEN, S. N.; DOULGERIS, A. P.; ELTOFT, T. Estimation of the equivalent number of looks in polarimetric synthetic aperture radar imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 47, p. 3795–3809, 2009.
- ANFINSEN, S. N.; ELTOFT, T. Application of the matrix-variate Mellin transform to analysis of polarimetric radar images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 49, p. 2281–2295, 2011.
- BAZI, Y.; BRUZZONE, L.; MELGANI, F. An unsupervised approach based on the generalized Gaussian model to automatic change detection in multitemporal SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 43, n. 4, p. 874–887, 2005.
- BEAULIEU, J. M.; TOUZI, R. Segmentation of textured polarimetric SAR scenes by likelihood approximation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 42, p. 2063–2072, 2004.
- BEST, D.; RAYNER, J. Tests of fit for the geometric distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Taylor & Francis, v. 32, p. 1065–1078, 2003.

- BIAN, Y.; MERCER, B. Multilook polarimetric SAR data probability density function estimation using a generalized form of multivariate K-distribution. *Remote Sensing Letters*, Taylor & Francis, v. 5, p. 682–691, 2014.
- BOLTZMANN, L. Weitere studien über das wärmeleichgewicht unter gasmolekülen. In: *Kinetische Theorie II*. [S.l.]: Springer, 1970. p. 115–225.
- BOMBRUN, L.; BEAULIEU, J.-M. Fisher distribution for texture modeling of polarimetric SAR data. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, IEEE, v. 5, p. 512–516, 2008.
- BOMBRUN, L.; VASILE, G.; GAY, M.; TOTIR, F. Hierarchical segmentation of polarimetric SAR images using heterogeneous clutter models. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 49, n. 2, p. 726–737, 2010.
- BORDA, M. *Fundamentals in information theory and coding*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- BOUHLEL, N.; AKBARI, V.; MÉRIC, S. Change detection in multilook polarimetric SAR imagery with determinant ratio test statistic. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, 2020.
- BOUHLEL, N.; MÉRIC, S. Unsupervised segmentation of multilook polarimetric synthetic aperture radar images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, 2019.
- BOUHLEL, N.; MERIC, S. Multilook polarimetric SAR change detection using stochastic distances between matrix-variate \mathcal{G}_d^0 distributions. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 58, n. 10, p. 6823–6843, 2020.
- BROWNE, R. P.; McNICHOLAS, P. D. Estimating common principal components in high dimensions. *Advances in Data Analysis and Classification*, Springer, v. 8, p. 217–226, 2014.
- CARTER, T. An introduction to information theory and entropy. *Complex systems summer school, Santa Fe*, Citeseer, 2007.
- CELEUX, G.; DIEBOLT, J. The SEM algorithm: a probabilistic teacher algorithm derived from the EM algorithm for the mixture problem. *Computational Statistics Quarterly*, v. 2, p. 73–82, 1985.
- CELEUX, G.; GOVAERT, G. Gaussian parsimonious clustering models. *Pattern Recognition*, Elsevier, v. 28, p. 781–793, 1995.
- CHA, M.; PHILLIPS, R. D.; WOLFE, P. J.; RICHMOND, C. D. Two-stage change detection for synthetic aperture radar. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote sensing*, IEEE, v. 53, n. 12, p. 6547–6560, 2015.
- CHAN, D.; GAMBINI, J.; FRERY, A. C. Speckle noise reduction in SAR images using information theory. In: IEEE. *2020 IEEE Latin American GRSS & ISPRS Remote Sensing Conference (LAGIRS)*. [S.l.], 2020. p. 456–461.
- CHANG, M.; YOU, X. Target recognition in SAR images based on information-decoupled representation. *Remote Sensing*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 10, n. 1, p. 138, 2018.

- CINTRA, R. J.; FRERY, A. C.; NASCIMENTO, A. D. Parametric and nonparametric tests for speckled imagery. *Pattern Analysis and Applications*, Springer, v. 16, n. 2, p. 141–161, 2013.
- COCA, M.; ANGHEL, A.; DATCU, M. Normalized compression distance for SAR image change detection. In: IEEE. *IGARSS 2018-2018 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. [S.l.], 2018. p. 5784–5787.
- COHEN, J. A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and psychological measurement*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 20, n. 1, p. 37–46, 1960.
- CONRADSEN, K.; NIELSEN, A. A.; SCHOU, J.; SKRIVER, H. A test statistic in the complex Wishart distribution and its application to change detection in polarimetric SAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 41, p. 4–19, 2003.
- DALLAS, A. A characterization of the geometric distribution. *Journal of Applied Probability*, Cambridge University Press, v. 11, p. 609–611, 1974.
- DELIGNON, Y.; PIECZYNSKI, W. Modeling non-Rayleigh speckle distribution in SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 40, p. 1430–1435, 2002.
- DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, Wiley Online Library, v. 39, p. 1–22, 1977.
- DENG, X.; LÓPEZ-MARTÍNEZ, C.; CHEN, J.; HAN, P. Statistical modeling of polarimetric SAR data: A survey and challenges. *Remote Sensing*, v. 9, p. 348, 2017.
- DUDA, R. O.; HART, P. E.; STORK, D. G. *Pattern classification*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- D'ELIA, C.; RUSCINO, S.; ABBATE, M.; AIAZZI, B.; BARONTI, S.; ALPARONE, L. SAR image classification through information-theoretic textural features, MRF segmentation, and object-oriented learning vector quantization. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, IEEE, v. 7, n. 4, p. 1116–1126, 2014.
- E-SAR. 2020. <https://www.dlr.de/hr/en/Portaldata/32/Resources/images/institut/sar-technologie/Clipboard01_200.jpg>. Acessado: 10-12-2020.
- EL-ZAART, A.; ZIOU, D. Statistical modelling of multimodal SAR images. *International Journal of Remote Sensing*, Taylor & Francis, v. 28, n. 10, p. 2277–2294, 2007.
- EMISAR. 2020. <https://sites.google.com/site/bancodedadospolar/_/rsrc/1468876762375/missoes/EMISAR.png>. Acessado: 10-12-2020.
- ERTEN, E.; REIGBER, A.; FERRO-FAMIL, L.; HELLWICH, O. A new coherent similarity measure for temporal multichannel scene characterization. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 50, p. 2839–2851, 2012.
- EVERITT, B. S. Finite mixture distributions. *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*, Wiley Online Library, 2014.

- FERREIRA, J. A.; COELHO, H.; NASCIMENTO, A. D. A family of divergence-based classifiers for polarimetric synthetic aperture radar (PolSAR) imagery vector and matrix features. *International Journal of Remote Sensing*, Taylor & Francis, v. 42, n. 4, p. 1201–1229, 2021.
- FINE, T. L. *Probability and Probabilistic Reasoning for Electrical Engineering*. [S.l.]: Prentice Hall, 2006.
- FREITAS, C. C.; FRERY, A. C.; CORREIA, A. H. The polarimetric \mathcal{G} distribution for SAR data analysis. *Environmetrics: the Official Journal of the International Environmetrics Society*, Wiley Online Library, v. 16, p. 13–31, 2005.
- FREITAS, C. C.; SANT'ANNA, S. J. S.; RENNO, C. D.; CORREIA, A. H. Utilização de imagens de radar de abertura sintética na classificação do uso e ocupação do solo. *EMBRAPA. Geomática: Técnicas e Aplicações Avançadas*, 2003.
- FRERY, A. C. Statistical information theory and geometry for SAR image analysis. In: IEEE. *2019 IEEE Recent Advances in Geoscience and Remote Sensing: Technologies, Standards and Applications (TENGARSS)*. [S.l.], 2019. p. 1–4.
- FRERY, A. C.; CINTRA, R. J.; NASCIMENTO, A. D. Entropy-based statistical analysis of PolSAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 51, p. 3733–3743, 2013.
- FRERY, A. C.; CORREIA, A. H.; FREITAS, C. d. C. Classifying multifrequency fully polarimetric imagery with multiple sources of statistical evidence and contextual information. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 45, p. 3098–3109, 2007.
- FRERY, A. C.; MULLER, H.-J.; YANASSE, C. d. C. F.; SANT'ANNA, S. J. S. A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 35, p. 648–659, 1997.
- GOODMAN, J. W. Statistical properties of laser speckle patterns. In: *Laser Speckle and Related Phenomena*. [S.l.]: Springer, 1975. p. 9–75.
- GOODMAN, N. R. Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (an introduction). *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, v. 34, p. 152–177, 1963.
- GOUDAIL, F.; RÉFRÉGIER, P. Contrast definition for optical coherent polarimetric images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, IEEE, v. 26, p. 947–951, 2004.
- HAGEDORN, M.; SMITH, P.; BONES, P.; MILLANE, R.; PAIRMAN, D. A trivariate chi-squared distribution derived from the complex Wishart distribution. *Journal of Multivariate analysis*, Elsevier, v. 97, n. 3, p. 655–674, 2006.
- HAVRDA, J.; CHARVÁT, F. Quantification method of classification processes. Concept of structural α -entropy. *Kybernetika*, Institute of Information Theory and Automation AS CR, v. 3, p. 30–35, 1967.
- HENRI, M. Processing of synthetic aperture radar images. *Wiley–2008*, 2008.

- HORTA, M. M. *Modelos de mistura de distribuições na segmentação de imagens SAR polarimétricas multilook*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2009.
- HORTA, M. M.; MASCARENHAS, N. D.; FRERY, A. C. Analyzing polarimetric imagery with G0p mixture models and SEM algorithm. In: *Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2007. v. 20.
- JIA, M.; HUO, L.; ZHANG, R. An unsupervised change detection based on automatic relationship analysis. In: IEEE. *2019 14th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*. [S.l.], 2019. p. 127–132.
- JIANG, X.; LI, G.; LIU, Y.; ZHANG, X.-P.; HE, Y. Change detection in heterogeneous optical and sar remote sensing images via deep homogeneous feature fusion. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, IEEE, v. 13, p. 1551–1566, 2020.
- KULLBACK, S. *Information Theory and Statistics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1997.
- LEE, J.; SCHULER, D.; LANG, R.; RANSON, K. K-distribution for multilook processed polarimetric SAR imagery. In: IEEE. *Proceedings of IGARSS'94-1994 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. [S.l.], 1994. v. 4, p. 2179–2181.
- LEE, J.-S.; POTTIER, E. *Polarimetric radar imaging: from basics to applications*. [S.l.]: CRC press, 2009.
- LI, H.-C.; HONG, W.; WU, Y.-R.; FAN, P.-Z. On the empirical-statistical modeling of SAR images with generalized gamma distribution. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, IEEE, v. 5, n. 3, p. 386–397, 2011.
- LIU, S.; CAO, Z.; YANG, H. Information theory-based target detection for high-resolution SAR image. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, IEEE, v. 13, n. 3, p. 404–408, 2016.
- LOAN, C. F. V. The ubiquitous kronecker product. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 123, n. 1-2, p. 85–100, 2000.
- LU, D.; MAUSEL, P.; BRONDIZIO, E.; MORAN, E. Change detection techniques. *International journal of remote sensing*, Taylor & Francis, v. 25, n. 12, p. 2365–2401, 2004.
- LUO, S.; SARABANDI, K.; TONG, L.; GUO, S. Unsupervised multiregion partitioning of fully polarimetric SAR images with advanced fuzzy active contours. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 58, n. 2, p. 1475–1486, 2019.
- MAIWALD, D.; KRAUS, D. Calculation of moments of complex Wishart and complex inverse Wishart distributed matrices. *IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation*, IET, v. 147, p. 162–168, 2000.
- MARINO, A.; CLOUDE, S. R.; LOPEZ-SANCHEZ, J. M. A new polarimetric change detector in radar imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 51, n. 5, p. 2986–3000, 2012.
- MCLACHLAN, D. P. G. *Finite Mixture Models*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2000.
- MCLACHLAN, G.; KRISHNAN, T. *The EM algorithm and extensions*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. v. 382.

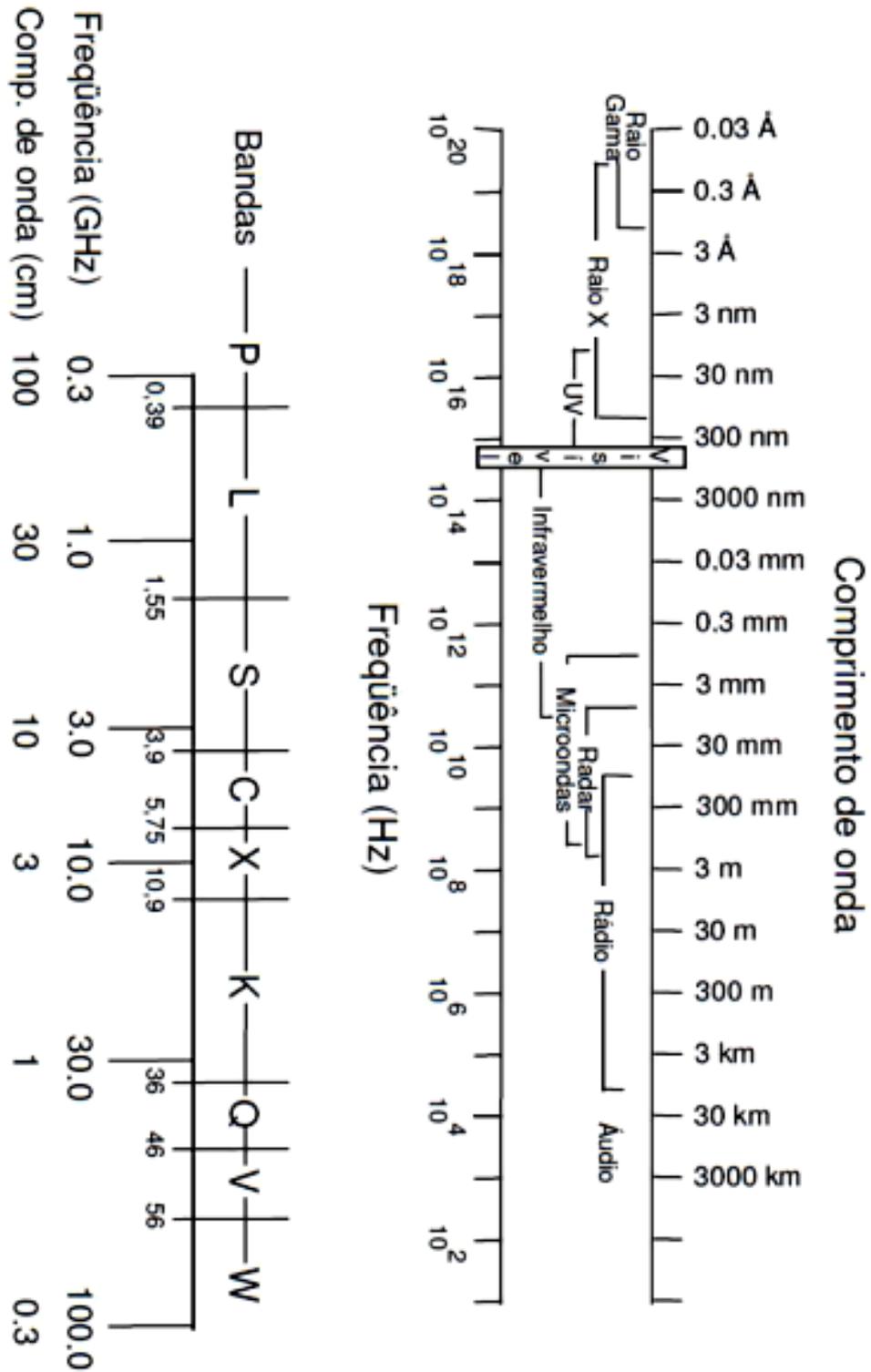
- MOORE, P. The estimation of the Poisson parameter from a truncated distribution. *Biometrika*, JSTOR, v. 39, p. 247–251, 1952.
- MORIO, J.; RÉFRÉGIER, P.; GOUDAIL, F.; DUBOIS-FERNANDEZ, P. C.; DUPUIS, X. Information theory-based approach for contrast analysis in polarimetric and/or interferometric SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 46, p. 2185–2196, 2008.
- NASCIMENTO, A. D.; CINTRA, R. J.; FRERY, A. C. Hypothesis testing in speckled data with stochastic distances. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 48, p. 373–385, 2010.
- NASCIMENTO, A. D.; FRERY, A. C.; CINTRA, R. J. Detecting changes in fully polarimetric SAR imagery with statistical information theory. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 57, n. 3, p. 1380–1392, 2018.
- NASCIMENTO, A. D.; RÊGO, L. C.; NASCIMENTO, R. L. Compound truncated Poisson Normal distribution: Mathematical properties and Moment estimation. *Inverse Problems & Imaging*, v. 13, 2019.
- NASCIMENTO, A. D. C. Teoria estatística da informação para dados de radar de abertura sintética univariados e polarimétricos. Universidade Federal de Pernambuco, 2012.
- NASCIMENTO, A. D. C.; FRERY, A. C.; CINTRA, R. J. Bias correction and modified profile likelihood under the Wishart complex distribution. *IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing*, v. 52, p. 4932–4941, 2014.
- NETO, J. F. R.; BRAGA, A. M.; MARQUES, R. C.; MEDEIROS, F. N. de. Level-set formulation based on an infinite series of sample moments for SAR image segmentation. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, IEEE, v. 17, n. 5, p. 908–911, 2019.
- NIKOU, C.; LIKAS, A. C.; GALATSANOS, N. P. A bayesian framework for image segmentation with spatially varying mixtures. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 19, p. 2278–2289, 2010.
- NOBRE, R. H.; RODRIGUES, F. A. A.; MARQUES, R. C. P.; NOBRE, J. S.; NETO, J. F. S. R.; MEDEIROS, F. N. S. SAR image segmentation with Rényi's entropy. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 23, p. 1551–1555, 2016.
- PARDO, L. *Statistical Inference Based on Divergence Measures*. [S.l.]: CRC Press, 2005.
- PARDO, L.; MORALES, D.; SALICRÚ, M.; MENÉNDEZ, M. Large sample behavior of entropy measures when parameters are estimated. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 26, p. 483–501, 1997.
- PASTEUR, L.; VALLERY-RADOT, P. et al. Oeuvres de pasteur. Masson et cie, 1922.
- PIRRONE, D.; BOVOLO, F.; BRUZZONE, L. A novel framework for change detection in bi-temporal polarimetric sar images. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. *Image and Signal Processing for Remote Sensing XXII*. [S.l.], 2016. v. 10004, p. 100040Z.
- PLACKETT, R. The truncated Poisson distribution. *Biometrics*, JSTOR, v. 9, p. 485–488, 1953.

- R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2015.
- RATHA, D.; DE, S.; CELIK, T.; BHATTACHARYA, A. Change detection in polarimetric SAR images using a geodesic distance between scattering mechanisms. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, IEEE, v. 14, n. 7, p. 1066–1070, 2017.
- RÉNYI, A. *On measures of entropy and information*. [S.l.], 1961.
- RIGNOT, E. J.; ZYL, J. J. V. Change detection techniques for ERS-1 SAR data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 31, n. 4, p. 896–906, 1993.
- SALICRU, M.; MENENDEZ, M.; MORALES, D.; PARDO, L. Asymptotic distribution of (h, φ) -entropies. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 22, n. 7, p. 2015–2031, 1993.
- SALICRÚ, M.; MORALES, D.; MENÉNDEZ, M.; PARDO, L. On the applications of divergence type measures in testing statistical hypotheses. *Journal of Multivariate Analysis*, Elsevier, v. 51, p. 372–391, 1994.
- SAMANTA, D.; SANYAL, G. Novel shannon's entropy based segmentation technique for SAR images. In: SPRINGER. *International Conference on Information Processing*. [S.l.], 2012. p. 193–199.
- SCHOU, J.; SKRIVER, H.; NIELSEN, A. A.; CONRADSEN, K. CFAR edge detector for polarimetric SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 41, p. 20–32, 2003.
- SHAN, Z.; WANG, C.; ZHANG, H.; WU, F. Change detection in urban areas with high resolution sar images using second kind statistics based g0 distribution. In: IEEE. *2010 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. [S.l.], 2010. p. 4600–4603.
- SHANG, R.; TIAN, P.; JIAO, L.; STOLKIN, R.; FENG, J.; HOU, B.; ZHANG, X. A spatial fuzzy clustering algorithm with kernel metric based on immune clone for SAR image segmentation. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, IEEE, v. 9, n. 4, p. 1640–1652, 2016.
- SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, Wiley Online Library, v. 27, p. 379–423, 1948.
- STACY, E. W. et al. A generalization of the gamma distribution. *The Annals of mathematical statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 33, n. 3, p. 1187–1192, 1962.
- TIMMERMANS, J.; VERHOEF, W.; WELIGEPOLAGE, K.; TOL, C. van der; SU, Z. Simulation of sentinel 2 using ahs data. In: *Proc. on AGRISAR and EAGLE Campaigns Final Workshop, AGRISAR and EAGLE Campaigns Final Workshop, ESA/ESTEC, Noordwijk, The Netherlands*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 10–15.
- UAVSAR. 2020. <<https://uavsar.jpl.nasa.gov/images/what-is-uavsar/Slide01.jpg>>. Acessado: 10-12-2020.
- ULABY, F. T.; ELACHI, C. Radar polarimetry for geoscience applications. *Norwood, MA, Artech House, Inc., 1990, 376 p.*, 1990.

- VASCONCELLOS, K. L. P.; FRERY, A. C.; SILVA, L. B. Improving estimation in speckled imagery. *Computational Statistics*, v. 20, p. 503–519, 2005.
- WANG, H.; RAN, Y.; LIU, S.; DENG, Y.; SU, D. Ship target detection in high-resolution SAR images based on information theory and harris corner detection. In: SPRINGER. *International Conference in Communications, Signal Processing, and Systems*. [S.l.], 2018. p. 685–694.
- WANG, W.; XIANG, D.; BAN, Y.; ZHANG, J.; WAN, J. Superpixel segmentation of polarimetric SAR images based on integrated distance measure and entropy rate method. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, IEEE, v. 10, n. 9, p. 4045–4058, 2017.
- WHELEN, T.; SIQUEIRA, P. Time series analysis of I-band SAR for agricultural landcover classification. In: *2017 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 5342–5345.
- WILEY, C. A. Synthetic aperture radars. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, IEEE, n. 3, p. 440–443, 1985.
- WOELDER, K.; GRANHOLM, J. Cross-polarization and sidelobe suppression in dual linear polarization antenna arrays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 45, p. 1727–1740, 1997.
- YANG, W.; YANG, X.; YAN, T.; SONG, H.; XIA, G.-S. Region-based change detection for polarimetric SAR images using Wishart mixture models. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 54, n. 11, p. 6746–6756, 2016.
- YU, X.; YUE, X. Similarity matrix entropy for multitemporal polarimetric SAR change detection. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, IEEE, 2020.
- Yue, D.; Xu, F.; Frery, A. C.; Jin, Y. A generalized Gaussian coherent scatterer model for correlated SAR texture. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 58, p. 2947–2964, 2020.
- YUEH, S.; KONG, J.; JAO, J.; SHIN, R.; NOVAK, L. K-distribution and polarimetric terrain radar clutter. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Taylor & Francis, v. 3, p. 747–768, 1989.
- ZAART, A. E.; ZIOU, D.; WANG, S.; JIANG, Q. Segmentation of SAR images. *Pattern Recognition*, Elsevier, v. 35, n. 3, p. 713–724, 2002.
- ZHAO, Q.; LI, X.; LI, Y. Multilook SAR image segmentation with an unknown number of clusters using a gamma mixture model and hierarchical clustering. *Sensors*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 17, n. 5, p. 1114, 2017.
- ZHAO, X.; WANG, H.; WU, J.; PENG, Z.; LI, X. A gamma distribution-based fuzzy clustering approach for large area SAR image segmentation. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, IEEE, 2020.
- ZYL, J. J. van. *Synthetic aperture radar polarimetry*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 2.

APÊNDICE A – FAIXAS DE COMPRIMENTO E FREQUÊNCIA DE SISTEMAS DE RADAR

Figura 38 – Faixas do comprimento de onda e da frequência para um espectro eletromagnético.



Fonte: FREITAS et al. (2003), p. 2.

APÊNDICE B – ENTROPIA DE SHANNON PARA \mathcal{G}_I^0

Demonstração do Teorema 1: Seja $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, L)$, tal que sua densidade é dada por

$$f_Z(z; \alpha, \gamma, L) = \frac{L^L \Gamma(L - \alpha)}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(L)} \frac{z^{L-1}}{[\gamma + Lz]^{L-\alpha}} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(z),$$

em que $\alpha < 0$ é o parâmetro de rugosidade, γ é a escala e L é NEL. Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} E \log Z &= \psi^{(0)}(L) - \psi^{(0)}(-\alpha) + \log \frac{\gamma}{L} \quad \text{e} \\ E \log(\gamma + LZ) &= \psi^{(0)}(L - \alpha) + \log \gamma - \psi^{(0)}(-\alpha). \end{aligned}$$

A partir desses resultados, a entropia de Shannon para Z é dado por

$$\begin{aligned} H_S(Z) &= E \left\{ -\ell([\alpha, \gamma, L]; z) \right\} = E \left\{ -\log f_Z(z; \alpha, \gamma, L) \right\} \\ &= -L \log L + \alpha \log \gamma - \left\{ \log \Gamma(L - \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \log \Gamma(L) - \log \Gamma(-\alpha) \right\} - (L - 1) E \log Z \\ &\quad + (L - \alpha) E \log(\gamma + LZ) \\ &= -\log \frac{L^L \Gamma(L - \alpha)}{\Gamma(-\alpha) \gamma^\alpha \Gamma(L)} \\ &\quad + (1 - L) \left\{ \psi^{(0)}(L) - \log L + \log \gamma - \psi^{(0)}(-\alpha) \right\} \\ &\quad + (L - \alpha) [\psi^{(0)}(L - \alpha) + \log \gamma - \psi^{(0)}(-\alpha)]. \end{aligned}$$

APÊNDICE C – ENTROPIA DE SHANNON PARA A Γ

Demonstração do Lema 2: Seja $Y \sim \Gamma^*(L, \mu) := \Gamma(L, L/\mu)$, tal que sua densidade é dada por

$$f_Y(y; L, L/\mu) = \frac{\left(\frac{L}{\mu}\right)^L}{\Gamma(L)} y^{L-1} e^{-\frac{Ly}{\mu}} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(y),$$

em que $L, \mu > 0$. Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} EY &= \mu \quad \text{e} \\ E \log(Y) &= -\log(L/\mu) + \psi^{(0)}(L). \end{aligned}$$

A partir desses resultados, então a entropia de Shannon para Y é dada por

$$\begin{aligned} H_S(Y) &= H_S([L, \mu]) \\ &= E \left\{ -\log f_Y(y; L, L/\mu) \right\} \\ &= -L \log(L/\mu) + \log(\Gamma(L)) + (1-L)E \log(Y) + (L/\mu)E(Y) \\ &= -L \log(L/\mu) + \log(\Gamma(L)) + (1-L) \left(-\log(L/\mu) + \psi^{(0)}(L) \right) + (L/\mu)\mu \\ &= L \left(\log L - \log \mu \right) + \log \Gamma(L) + (1-L)\psi^{(0)}(L). \end{aligned}$$

APÊNDICE D – INFERÊNCIA ESTATÍSTICA PARA A \mathcal{G}_m^0

Demonstração da Proposição 4: Seja $\mathbf{Z} \sim \mathcal{G}_m^0(\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L)$, tal que sua densidade é dada por

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}}(\dot{\mathbf{Z}}; \alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L) &= \int_0^\infty x^{-m^2} f_Y(\dot{\mathbf{Z}}/x; \boldsymbol{\Sigma}, L) f_X(x; \alpha, \mu = 1) dx \\ &= \frac{L^{Lm} \Gamma(Lm - \alpha)}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma_m(L)} \times |\dot{\mathbf{Z}}|^{L-m} [(-\alpha - 1) + L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}})]^{\alpha-Lm} \mathbb{I}_{\Omega_+}(\dot{\mathbf{Z}}). \end{aligned}$$

Então, da equação (3.4), temos que

$$\sigma_H^2(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{G}_m^0}^\top \mathcal{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1} \boldsymbol{\delta}_{\mathcal{G}_m^0},$$

a quantidade $\boldsymbol{\delta}_{\mathcal{G}_m^0}^\top$ é obtida da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathcal{G}_m^0}^\top = \left(\delta_\alpha^\mathcal{G}, \delta_\boldsymbol{\Sigma}^\mathcal{G}, \delta_L^\mathcal{G} \right) := \left(\frac{\partial H(\mathcal{G}_m^0)}{\partial \alpha}, \frac{\partial H(\mathcal{G}_m^0)}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}, \frac{\partial H(\mathcal{G}_m^0)}{\partial L} \right),$$

tal que

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^{\mathcal{G}_m^0} &= (m - L) \left[-\frac{m}{(-\alpha - 1)} + m\psi^{(1)}(-\alpha) \right] \\ &\quad - \left\{ \left(\frac{L^{Lm} \Gamma(Lm - \alpha)}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha) (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L)} \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left[\frac{-L^{mL} \Gamma(Lm - \alpha) \psi^{(0)}(Lm - \alpha) \left(|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha) (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L) \right)}{\left(|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha) (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L) \right)^2} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_m(L) \left(-\Gamma(-\alpha) \psi^{(0)}(-\alpha) (-\alpha - 1)^{-\alpha} - \alpha (-\alpha - 1)^{\alpha-1} \Gamma(-\alpha) \right) L^{mL} \Gamma(Lm - \alpha)}{\left(|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha) (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L) \right)^2} \right] \right\} \\ &\quad + (mL - \alpha) \left[-\psi^{(1)}(mL - \alpha) - (-\alpha - 1)^{-1} + \psi^{(1)}(-\alpha) \right] \\ &\quad - \left[\psi^{(0)}(mL - \alpha) + \log(-\alpha - 1) - \psi^{(0)}(-\alpha) \right] \\ &= m^2 \psi^{(1)}(-\alpha) - m^2 (-\alpha - 1)^{-1} - mL \psi^{(1)}(mL - \alpha) + \alpha \psi^{(1)}(mL - \alpha) - \log(-\alpha - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_\boldsymbol{\Sigma}^{\mathcal{G}_m^0} &= (m - L) |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}| \boldsymbol{\Sigma}^{-\top} \\ &\quad - \left(\frac{L^{mL} \Gamma(Lm - \alpha)}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha) (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L)} \right)^{-1} \\ &\quad \left(-\frac{L |\boldsymbol{\Sigma}|^L \boldsymbol{\Sigma}^{-\top} \Gamma(-\alpha) (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L) L^{mL} \Gamma(Lm - \alpha)}{\left(|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha) (-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L) \right)^2} \right) \\ &= (m - L) \boldsymbol{\Sigma}^{-\top} + L \boldsymbol{\Sigma}^{-\top} \\ &= m \boldsymbol{\Sigma}^{-\top} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta_L^{\mathcal{G}_m^0} &= - \left(\log |\boldsymbol{\Sigma}| + \psi^{(0)}(L) - m \log L + m \log(-\alpha - 1) - m\psi^{(0)}(-\alpha) \right) + (m - L)\psi^{(1)}(L) \\
&\quad - (m - L) \frac{m}{L} - \left(\frac{L^{mL} \Gamma(Lm - \alpha)}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha)(-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L)} \right)^{-1} \\
&\quad \left[\frac{\left(LmL^{Lm-1} \Gamma(Lm - \alpha) + m\Gamma(Lm - \alpha)\psi^{(0)}(Lm - \alpha)L^{Lm} |\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha)(-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L) \right)}{\left(|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha)(-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_m(L) \right)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma(-\alpha)(-\alpha - 1)^\alpha \left(|\boldsymbol{\Sigma}|^L \log(|\boldsymbol{\Sigma}|) \Gamma_m(L) \psi_m^{(0)}(L) + \Gamma_m(L) \psi_p^{(0)}(|\boldsymbol{\Sigma}|^L) L^{mL} \Gamma(Lm - \alpha) \right)}{\left(|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha)(-\alpha - 1)^\alpha \Gamma_p(L) \right)^2} \right] \\
&\quad m \left(\psi^{(0)}(mL - \alpha) + \log(-\alpha - 1) - \psi^{(0)}(-\alpha) \right) + (mL - \alpha)m\psi^{(1)}(mL - \alpha) \\
&= m \log L - L\psi^{(1)}(L) + \log |\boldsymbol{\Sigma}| + (mL - \alpha)^2 m\psi^{(1)} - \log |\boldsymbol{\Sigma}| + m\psi^{(1)}(L) - \frac{m^2}{L}.
\end{aligned}$$

Função de Verossimilhança

A função de log-verossimilhança de uma matriz aleatória $\mathbf{Z} \sim \mathcal{G}_m^0(\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L)$, é dada por

$$\begin{aligned}
\ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L]) &= mL \log L + \log \Gamma(mL - \alpha) - L \log |\boldsymbol{\Sigma}| - \alpha \log(-\alpha - 1) - \log \Gamma(-\alpha) \\
&\quad - \log \Gamma_m(L) + (L - m) \log |\dot{\mathbf{Z}}| + (\alpha - mL) \log \left[(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) \right],
\end{aligned}$$

e as funções Escore obtidas a partir da log-verossimilhança são mostrados a seguir.

Funções Escore:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial \alpha} &= -\psi^{(0)}(mL - \alpha) - \left[\log(-\alpha - 1) - \frac{\alpha}{(-\alpha - 1)} \right] + \psi^{(0)}(-\alpha) \\
&\quad + \log \left[(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) \right] - (\alpha - mL) \left[(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) \right]^{-1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = -L\boldsymbol{\Sigma}^{-\top} - (\alpha - mL) \frac{L(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^\top}{(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}})}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial L} &= m(\log L + 1) + p\psi^{(0)}(mL - \alpha) - \log |\boldsymbol{\Sigma}| - \psi_m^{(0)}(L) + \log |\dot{\mathbf{Z}}| \\
&\quad - m \log \left[(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}}) \right] + \frac{(\alpha - mL) \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}})}{(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\mathbf{Z}})}
\end{aligned}$$

Funções Hessianas:

A seguir são mostrados as Funções Hessianas obtidas para a distribuição em estudo, ou seja, dado que $\mathbf{Z} \sim \mathcal{G}_m^0(\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L)$, então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial \alpha^2} &= \psi^{(1)}(mL - \alpha) + (-\alpha - 1)^{-1} + \left(\frac{(-\alpha - 1) + \alpha}{(-\alpha - 1)^2} \right) - \psi^{(1)}(-\alpha) - 2 [(-\alpha - 1) \\ &\quad + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}})]^{-1} - (\alpha - mL) [(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}})]^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial \Sigma_{kh}} \left[\frac{\partial \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \right] &= L \left(\boldsymbol{\Sigma}_{+k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h+}^{-1} \right)^\top \\ &\quad + L(\alpha - mL) \frac{\left\{ \left(\boldsymbol{\Sigma}_{+k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h+}^{-1} \right)^\top \dot{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-\top} + \boldsymbol{\Sigma}^{-\top} \dot{\boldsymbol{Z}} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{+k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h+}^{-1} \right)^\top \right\}}{(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-\top} \dot{\boldsymbol{Z}})} \\ &\quad - \frac{L^2(\alpha - mL) \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{+k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{h+}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \right)}{\left[(-\alpha - 1) + L \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \right) \right]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial \alpha^2} &= \frac{m}{L} + m^2 \psi^{(1)}(mL - \alpha) - \psi_m^{(1)}(L) - 2m \frac{\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \right)}{(-\alpha - 1) + L \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \right)} \\ &\quad + (\alpha - mL) \frac{- \left[\text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \right) \right]^2}{\left[(-\alpha - 1) + L \text{tr} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \right) \right]^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial \alpha \boldsymbol{\Sigma}} = -L \frac{\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top}{(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}})} - (\alpha - mL) \frac{L \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top}{\left[(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}}) \right]^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial \alpha L} &= -m \psi^{(1)}(mL - \alpha) + \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}}) + m}{(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}})} \\ &\quad + (\alpha - mL) \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}})}{\left[(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}}) \right]^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell([\alpha, \boldsymbol{\Sigma}, L])}{\partial \boldsymbol{\Sigma} L} &= -\boldsymbol{\Sigma}^{-\top} - m \frac{-L \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top}{(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}})} \\ &\quad + (\alpha - mL) \frac{- \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top \left[(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}}) \right]}{\left[(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}}) \right]^2} \\ &\quad + (\alpha - mL) \frac{-L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}}) \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top}{\left[(-\alpha - 1) + L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \dot{\boldsymbol{Z}}) \right]^2} \end{aligned}$$

APÊNDICE E – FUNÇÃO CARACTERÍSTICA PARA $\text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$

Demonstração da Proposição 5: Seja $\mathbf{Z}_k \sim \mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}(L, \boldsymbol{\Sigma})$ com função característica (fc) $\varphi_{\mathbf{Z}_k}(\mathbf{T}) = E(e^{i\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Z}_k)}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L}$
 $|\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L}$ e $N \sim \text{TPo}(\lambda)$ com $\varphi_N(t) = \frac{e^{\lambda e^{it}} - 1}{e^{\lambda} - 1}$. Assim, a fc de $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i \sim \text{CPTW}_m^{\mathbb{C}}$ tem forma

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{S}}(\mathbf{T}) &= \frac{e^{\lambda e^{i[-i \log(|\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L})]} - 1}}{e^{\lambda} - 1} \\ &= \frac{e^{\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L}} - 1}{e^{\lambda} - 1}. \end{aligned}$$

O primeiro momento é dado por

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{S}}^{(1)}(\mathbf{T}) &= \left(\frac{1}{e^{\lambda} - 1} \right) e^{\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L}} \left\{ \lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} \left[-L |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T})^{-1} (-i) \right] \right\} \\ &= \left(\frac{1}{e^{\lambda} - 1} \right) e^{\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L}} \left\{ iL\lambda (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L} \right\}, \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{S}) &= \frac{\phi_{\mathbf{S}}^{(1)}(\mathbf{0})}{i} \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{1}{e^{\lambda} - 1} \right) e^{\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L}} \left\{ iL\lambda (\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} \right\} \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{1}{e^{\lambda} - 1} \right) e^{\lambda} iL\lambda \boldsymbol{\Sigma} \\ &= \left(\frac{\lambda L e^{\lambda}}{e^{\lambda} - 1} \right) \boldsymbol{\Sigma}, \end{aligned}$$

e o segundo momento é dado por

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{S}}^{(2)}(\mathbf{T}) &= \left(\frac{1}{e^{\lambda} - 1} \right) \left\{ e^{\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L}} \left[iL\lambda (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L} \right] \right. \\ &\quad \times \left[iL\lambda (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L} \right] \\ &\quad \left. + \left[iL\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} \left\{ i(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T})^{-\top} \otimes (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L} \right\} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T})^{-1} \otimes (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L} \left. \right\} e^{\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L}} \left. \right\},$$

tomando $\mathbf{T} = \mathbf{0}$, é obtido:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{S}}^{(2)}(\mathbf{0}) &= \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \left\{ e^{\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L}} \left[iL\lambda (\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} \right] \right. \\ &\quad \times \left[iL\lambda (\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} \right] \\ &\quad + \left[iL\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} \left\{ i(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-\top} \otimes (\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + iL(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} \otimes (\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^{-1} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} \right\} \right] e^{\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L}} \left. \right\} \\ &= \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \left\{ e^\lambda \left[iL\lambda \boldsymbol{\Sigma} \right] \left[iL\lambda \boldsymbol{\Sigma} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[iL\lambda |\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} \left\{ i\boldsymbol{\Sigma}^\top \otimes \boldsymbol{\Sigma} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} + iL\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} \right\} \right] e^\lambda \right\} \\ &= \left(\frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} \right) i^2 L^2 \lambda^2 \left(\overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\Sigma} \right) + \left(\frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} \right) \left[i^2 L (\boldsymbol{\Sigma}^\top \otimes \boldsymbol{\Sigma}) + i^2 L^2 \lambda \left(\overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\Sigma} \right) \right] \\ &= \left(\frac{e^\lambda (\lambda^2 + \lambda)}{e^\lambda - 1} \right) i^2 L^2 \left(\overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\Sigma} \right) + \left(\frac{\lambda e^\lambda}{e^\lambda - 1} \right) i^2 L (\boldsymbol{\Sigma}^\top \otimes \boldsymbol{\Sigma}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$E \left(\overset{2}{\otimes} \mathbf{S} \right) = \frac{\phi_{\mathbf{S}}^{(2)}(\mathbf{0})}{i^2} = \left(\frac{e^\lambda (\lambda^2 + \lambda)}{e^\lambda - 1} \right) L^2 \left(\overset{2}{\otimes} \boldsymbol{\Sigma} \right) + \left(\frac{\lambda e^\lambda}{e^\lambda - 1} \right) L (\boldsymbol{\Sigma}^\top \otimes \boldsymbol{\Sigma}),$$

em que $\overset{2}{\otimes} \mathbf{S} = \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}$ e \otimes é a multiplicação de Kronecker (mais detalhes ver (LOAN, 2000)).

APÊNDICE F – FUNÇÃO CARACTERÍSTICA PARA $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$

Demonstração da Proposição 6: Seja $\mathbf{Z}_i \sim \mathcal{W}_m^{\mathbb{C}}(L, \boldsymbol{\Sigma})$ e $N \sim \text{Geo}(p)$ com fc $\varphi_N(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} = \frac{p}{e^{-it} - q}$. Assim, a fc de $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i \sim \text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$ é expressada por

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{S}}(\mathbf{T}) &= \frac{p}{\left[e^{-\log(|\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L})} \right]^{-1} - q} \\ &= \frac{p}{(|\boldsymbol{\Sigma}|^L |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^L)^{-1} - q}.\end{aligned}$$

O primeiro momento para $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$ é dado por

$$\phi_{\mathbf{S}}^{(1)}(\mathbf{T}) = \frac{-\left\{ -\left(|\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L} \right)^{-2} \left[|\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} \left(-L |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L} (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T})^{-1} (-i) \right) \right] \right\} p}{\left[\left(|\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - i\mathbf{T}|^{-L} \right)^{-1} - (1-p) \right]^2},$$

assim,

$$\begin{aligned}E(\mathbf{S}) &= \frac{\phi_{\mathbf{S}}^{(1)}(\mathbf{0})}{i} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\left(|\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} \right)^{-2} \left[|\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} \left(-L |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} \boldsymbol{\Sigma} \right) \right] p(-i)}{\left[\left(|\boldsymbol{\Sigma}|^{-L} |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{-L} \right)^{-1} - (1-p) \right]^2} \\ &= \frac{pL\boldsymbol{\Sigma}}{[1 - (1-p)]^2} \\ &= \left(\frac{L}{p} \right) \boldsymbol{\Sigma}.\end{aligned}$$

O segundo momento para $\text{CGW}_m^{\mathbb{C}}$ é dado por

$$E\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \otimes \end{smallmatrix} \mathbf{S} \right) = \frac{\phi_{\mathbf{S}}^{(2)}(\mathbf{0})}{i^2} = \left(\frac{1+q}{p^2} \right) L^2 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \otimes \end{smallmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \right) + \frac{1}{p} L \left(\boldsymbol{\Sigma}^{\top} \otimes \boldsymbol{\Sigma} \right).$$

APÊNDICE G – ALGORITMO EM PARA CPT \mathcal{W}_m^C

Demonstração do Teorema 4: Considerando o passo E, seja $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}))^\top$,

$$Q \triangleq Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S}) = \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\log f_{S_{k_i}}(\mathbf{X}_i|\boldsymbol{\theta}) + \log P(N = k_i|\boldsymbol{\theta}) \right] \right\} \prod_{j=1}^n P(N = k_j|\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_j),$$

em que $E_{\boldsymbol{\theta}_0}$ é o valor esperado com respeito para $N|\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S}$. Sua função de distribuição é dada por

$$\begin{aligned} P(N = k_i|\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) &= \frac{f_{S_{k_i}}(\mathbf{X}_i|\boldsymbol{\theta}_0) \cdot P(N = k_i|\boldsymbol{\theta}_0)}{f_{\mathbf{S}}(\mathbf{X}_i|\boldsymbol{\theta}_0)} \\ &= \frac{\left[\left(\frac{\lambda_0^{\frac{1}{L}} |\mathbf{X}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \right)^L \right]^{k_i} \frac{1}{\Gamma_m(k_i L)}}{\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda_0^{\frac{1}{L}} |\mathbf{X}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \right)^L \right]^j \frac{1}{\Gamma_m(j L)}}, \end{aligned}$$

$$f_{S_{k_i}}(\mathbf{X}_i|\boldsymbol{\theta}) = \frac{|\mathbf{X}_i|^{(k_i L) - m}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{(k_i L)} \Gamma_m(k_i L)} \exp \{-\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i)\} \text{ e } P(N = k_i|\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!}. \text{ Assim,}$$

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[(-m) \log |\mathbf{X}_i| + (k_i L) \log \frac{|\mathbf{X}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}|} - \log \Gamma_m(k_i L) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i) + k_i \log \lambda - \log(e^\lambda - 1) - \log k_i! \right] \right\} \prod_{j=1}^n P(N = k_j|\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_j). \end{aligned}$$

Como uma segunda etapa do algoritmo, deseja-se obter uma estimativa $\boldsymbol{\theta}$ tal que maximize $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma})$; isto é,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}}{\text{argmax}} Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\Sigma}),$$

em que $\boldsymbol{\Theta}$ é o espaço paramétrico.

1. Seja $Q_\lambda = \frac{\partial Q}{\partial \lambda}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \lambda} &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{k_i}{\lambda} - \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)} \right) \right\} \prod_{j=1}^n P(N = k_j | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_j) \\
&= -\frac{ne^\lambda}{(e^\lambda - 1)} + \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 P(N = k_1 | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_1) + \cdots + \sum_{k_n=1}^{\infty} k_n P(N = k_n | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_n) \right] \\
&= -\frac{ne^\lambda}{(e^\lambda - 1)} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \sum_{k_i=1}^{\infty} k_i P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
&= -\frac{ne^\lambda}{(e^\lambda - 1)} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i),
\end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned}
E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} k_i \frac{f_{S_{k_i}}(x_i | \boldsymbol{\theta}) \cdot P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}_0)}{f_s(x_i | \boldsymbol{\theta}_0)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} k_i P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} k_i \left[\left(\frac{\lambda_0^{\frac{1}{L}} |\mathbf{X}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \right)^{L k_i} \frac{1}{\Gamma_m(k_i L)} \right]}{\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda_0^{\frac{1}{L}} |\mathbf{X}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \right)^{L j} \frac{1}{\Gamma_m(j L)} \right]}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Q_\lambda \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \therefore \frac{ne^{\hat{\lambda}}}{(e^{\hat{\lambda}} - 1)} &= \frac{1}{\hat{\lambda}} \sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
\frac{\hat{\lambda}}{(1 - e^{-\hat{\lambda}})} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i)
\end{aligned}$$

2. Seja $Q_\Sigma = \frac{\partial Q}{\partial \Sigma}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \Sigma} &= \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(-(k_i L) \frac{1}{|\Sigma|} |\Sigma| \Sigma^{-1} + (\Sigma^{-1} \mathbf{X}_i \Sigma^{-1})^\top \right) \right\} \\
&\quad \prod_{j=1}^n P(N = k_j | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_j) \\
&= n \left(\Sigma^{-1} \bar{\mathbf{X}} \Sigma^{-1} \right)^\top - L \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} k_i \prod_{j=1}^n P(N = k_j | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{X}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top - L \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{k_i=1}^{\infty} k_i P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
&= n \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{X}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right)^\top - L \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
Q_{\boldsymbol{\Sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}} = \mathbf{0} \therefore n \left(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \bar{\mathbf{X}} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \right)^\top &= L \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
\bar{\mathbf{X}} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} &= \frac{L}{n} E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
\hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{n \bar{\mathbf{X}}}{L E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i)}.
\end{aligned}$$

APÊNDICE H – ALGORITMO EM PARA \mathcal{CW}_m^C

Continuando a demonstração do Teorema 4: Neste caso, para o passo E, seja $\boldsymbol{\theta} = (p, \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}))^\top$. Aqui,

$$P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) = \frac{\left[\left(\frac{(1-p_0)^{\frac{1}{L}} |\mathbf{X}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \right)^L \right]^{k_i} \frac{1}{\Gamma_m(k_i L)}}{\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{(1-p_0)^{\frac{1}{L}} |\mathbf{X}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \right)^L \right]^j \frac{1}{\Gamma_m(j L)}}$$

e

$$Q = \sum_{k_n=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n [(k_i L - m) \log |\mathbf{X}_i| - (k_i L) \log |\boldsymbol{\Sigma}| - \log \Gamma_m(k_i L) - \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i) + \log(p) + (k_i - 1) \log(1-p)] \right\} \prod_{j=1}^n P(N = k_j | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_j).$$

Agora, queremos obter

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}{\text{argmax}} Q(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S}),$$

em que Θ é o espaço paramétrico. Para este fim,

$$\begin{aligned} \blacksquare Q_p &= \frac{\partial Q}{\partial p} \\ &= \frac{n}{p} + \frac{n}{1-p} - \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^n \sum_{k_i=1}^{\infty} k_i P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\ &= \frac{n}{p(1-p)} - \frac{1}{(1-p)} \sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \end{aligned}$$

e

$$Q_p \Big|_{p=\hat{p}} = 0 \therefore \frac{n}{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{1}{(1-\hat{p})} \sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i)$$

$$\hat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i)}$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad Q_{\Sigma} &= \frac{\partial Q}{\partial \Sigma} \\
&= n \left(\Sigma^{-1} \bar{\mathbf{X}} \Sigma^{-1} \right)^{\top} - L \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{k_i=1}^{\infty} k_i P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
&= n \left(\Sigma^{-1} \bar{\mathbf{X}} \Sigma^{-1} \right)^{\top} - L \Sigma^{-1} \sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Q_{\Sigma} \Big|_{\Sigma = \hat{\Sigma}} = \mathbf{0} &\therefore n \left(\hat{\Sigma}^{-1} \bar{\mathbf{X}} \hat{\Sigma}^{-1} \right)^{\top} = L \hat{\Sigma}^{-1} \sum_{i=1}^n E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
\bar{\mathbf{X}} \hat{\Sigma}^{-1} &= \frac{L}{n} E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
\hat{\Sigma} &= \frac{n \bar{\mathbf{X}}}{L E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i)},
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
E(N | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} k_i P(N = k_i | \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{S} = \mathbf{X}_i) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} k_i \left[\left(\frac{(1-p_0)^{\frac{1}{L}} |\mathbf{X}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \right)^L \right]^{k_i} \frac{1}{\Gamma_m(k_i L)}}{\sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{(1-p_0)^{\frac{1}{L}} |\mathbf{X}_i|}{|\boldsymbol{\Sigma}_0|} \right)^L \right]^j \frac{1}{\Gamma_m(jL)}}.
\end{aligned}$$

APÊNDICE I – ESTATÍSTICA DE TIPO MELLIN PARA $CPT\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}}$

Demonstração do Teorema 5: Da definição,

$$\phi_{\mathcal{C}}(s) = \left(\frac{1}{e^\lambda - 1} \right) |\boldsymbol{\Sigma}|^{(s-m)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)}$$

e função geradora de cumulantes do tipo Mellin

$$\varphi_{\mathcal{C}}(s) = \log \phi_{\mathcal{C}}(s) = -\log(e^\lambda - 1) + (s - m) \log |\boldsymbol{\Sigma}| + \log \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right],$$

vamos encontrar os log-cumulantes para $CPT\mathcal{W}_m^{\mathcal{C}}$.

Primeiro Cumulante

O primeiro cumulante é obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \varphi_{\mathcal{C}}(s) &= \log |\boldsymbol{\Sigma}| \\ &+ \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_1(\mathcal{C}) &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \varphi_{\mathcal{C}}(s) \right|_{s=m} = \log |\boldsymbol{\Sigma}| + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right]^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL - i) \right) \\ \kappa_1(\mathcal{C}) &= \log |\boldsymbol{\Sigma}| + (e^\lambda - 1)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \psi_m^{(0)}(kL) \right). \end{aligned}$$

Segundo Cumulante

O segundo cumulante é obtido a partir do primeiro, e é obtido como segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \varphi_{\mathcal{C}}(s) &= - \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right)^2 \\ &+ \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \Gamma_m(kL)} \left[\Gamma_m(kL + s - m) \left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \right)^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL + s - m - i) \Big] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-1} \\
\kappa_2(\mathbf{C}) &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \varphi_{\mathbf{C}}(s) \Big|_{s=m} = - (e^\lambda - 1)^{-2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL - i) \right)^2 \\
& \quad + (e^\lambda - 1)^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL - i) \right)^2 + \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL - i) \right] \right\} \\
\kappa_2(\mathbf{C}) &= - (e^\lambda - 1)^{-2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \psi_m^{(0)}(kL) \right)^2 + (e^\lambda - 1)^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\left(\psi_m^{(0)}(kL) \right)^2 + \psi_m^{(1)}(kL) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Terceiro Cumulante

Dos resultados anteriores é possível obter o terceiro cumulante, isto é, o resultado a seguir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial s^3} \varphi_{\mathbf{C}}(s) &= 2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right)^3 \\
& - 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right) \left(\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \Gamma_m(kL)} \right. \right. \\
& \left. \left[\Gamma_m(kL + s - m) \left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL + s - m - i) \right] \right\} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-2} \\
& - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \Gamma_m(kL)} \right. \\
& \left. \left[\Gamma_m(kL + s - m) \left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL + s - m - i) \right] \right\} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-2} \\
& + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \Gamma_m(kL)} \left[\Gamma_m(kL + s - m) \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \right)^3 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$+ 3 \Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL + s - m - i) + \left. \Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(2)}(kL + s - m - i) \right\}$$

$$\begin{aligned} \kappa_3(\mathbf{C}) = \frac{\partial^3}{\partial s^3} \varphi_{\mathbf{C}}(s) \Big|_{s=m} &= 2(e^\lambda - 1)^{-3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL - i) \right)^3 - 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL - i) \right) \\ &\quad \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL - i) \right)^2 + \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL - i) \right] \right\} (e^\lambda - 1)^{-2} \\ &\quad + (e^\lambda - 1)^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL - i) \right)^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3 \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL - i) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL - i) + \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(2)}(kL - i) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_3(\mathbf{C}) &= 2(e^\lambda - 1)^{-3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \psi_m^{(0)}(kL) \right)^3 - 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \psi_m^{(0)}(kL) \right) \\ &\quad \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\left(\psi_m^{(0)}(kL) \right)^2 + \psi_m^{(1)}(kL) \right] \right\} (e^\lambda - 1)^{-2} \\ &\quad + (e^\lambda - 1)^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\left(\psi_m^{(0)}(kL) \right)^3 + 3 \psi_m^{(0)}(kL) \psi_m^{(1)}(kL) + \psi_m^{(2)}(kL) \right] \right\} \end{aligned}$$

APÊNDICE J – ESTATÍSTICA DE TIPO MELLIN PARA CGW_m^C

Continuando a demonstração do Teorema 5: Da seguinte definição

$$\phi_C(s) = p |\Sigma|^{(s-m)} \sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)}$$

e

$$\varphi_C(s) = \log \phi_C(s) = -\log p + (s - m) \log |\Sigma| + \log \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right],$$

serão obtidos os cumulantes.

Primeiro Cumulante

O primeiro cumulante é obtido da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \varphi_C(s) &= \log |\Sigma| \\ &+ \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right) \end{aligned}$$

$$\kappa_1(C) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \varphi_C(s) \right|_{s=m} = \log |\Sigma| + (1 - q) \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \psi_m^{(0)}(kL) \right).$$

Segundo Cumulante

Com a derivada do primeiro cumulante, encontramos o segundo, que é derivado no resultado a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \varphi_C(s) &= - \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right)^2 \\ &+ \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k-1)}}{\Gamma_m(kL)} \left[\Gamma_m(kL + s - m) \left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \right)^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL + s - m - i) \left. \right\} \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-1}$$

$$\kappa_2(\mathcal{C}) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \varphi_{\mathcal{C}}(s) \Big|_{s=m}$$

$$= - \left(-\frac{1}{q-1} \right)^{-2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \psi_m^{(0)}(kL) \right)^2 + (1-q) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \left[\left(\psi_m^{(0)}(kL) \right)^2 + \psi_m^{(1)}(kL) \right] \right\}$$

Terceiro Cumulante

O terceiro cumulante foi derivado da forma que segue,

$$\frac{\partial^3}{\partial s^3} \varphi_{\mathcal{C}}(s) = 2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right)^3$$

$$- 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k-1)}}{\Gamma_m(kL)} \right.$$

$$\left[\Gamma_m(kL + s - m) \left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left. \Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL + s - m - i) \right] \right\} \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-2}$$

$$- \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i)}{\Gamma_m(kL)} \right) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k-1)}}{\Gamma_m(kL)} \right.$$

$$\left[\Gamma_m(kL + s - m) \left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left. \Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL + s - m - i) \right] \right\} \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-2}$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \frac{\Gamma_m(kL + s - m)}{\Gamma_m(kL)} \right]^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k-1)}}{\Gamma_m(kL)} \left[\Gamma_m(kL + s - m) \right. \right.$$

$$\left. \left. \left(\sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \right)^3 \right. \right.$$

$$+ 3 \Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(0)}(kL + s - m - i) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(1)}(kL + s - m - i) +$$

$$\left. \left. \Gamma_m(kL + s - m) \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{(2)}(kL + s - m - i) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_3(\mathbf{C}) &= \left. \frac{\partial^3}{\partial s^3} \varphi_{\mathbf{C}}(s) \right|_{s=m} \\
&= 2 \left(-\frac{1}{q-1} \right)^{-3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \psi_m^{(0)}(kL) \right)^3 - 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \psi_m^{(0)}(kL) \right) \\
&\quad \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \left[\left(\psi_m^{(0)}(kL) \right)^2 + \text{psi}_m^{(1)}(kL) \right] \right\} \left(-\frac{1}{q-1} \right)^{-2} \\
&\quad + (1-q) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} q^{(k-1)} \left[\left(\psi_m^{(0)}(kL) \right)^3 + 3 \psi_m^{(0)}(kL) \psi_m^{(1)}(kL) + \psi_m^{(2)}(kL) \right] \right\}.
\end{aligned}$$