UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Jackellyny Dassy do Nascimento Carvalho**

# EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES $g$-NAVIER-STOKES

Recife

2020

**Jackellyny Dassy do Nascimento Carvalho**

# EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES $g$-NAVIER-STOKES

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

**Área de Concentração**: Análise

**Orientador(a)**: Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva

Recife

2020

Catalogação na fonte
Bibliotecário Cristiano Cosme S.dos Anjos, CRB4-2290

C331e Carvalho, Jackellyny Dassy do Nascimento
Existência de soluções para as equações g-Navier-Stokes/ Jackellyny Dassy do Nascimento Carvalho. – 2020.
71f.

Orientador: Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,Matematica, Recife, 2020.
Inclui referências.

1. Equações de Navier-Stokes. 2. Perturbação. 3. Dominio Ilimitado. I. Oliveira, Silva, Pablo Gustavo Albuquerque Braz e (orientador) II. Título.

515 CDD (22. ed.) UFPE-CCEN 2021-52

**JACKELLYNY DASSY DO NASCIMENTO CARVALHO**

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES G-NAVIER-STOKES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovado em: 17/02/2020

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Pablo Gustavo de Albuquerque Braz e Silva (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela dose de força diária e pela coragem que sempre surgia nos momentos que eu mais precisava, mesmo que soe como um clichê, sem Ele nada seria possível.

Agradeço a minha família, meu grande suporte, que sempre depositou confiança em mim. Aos meus anjos aqui na Terra, Seu Jesuíno e Dona Lúcia, que sempre me fizeram acreditar que eu poderia ser o que eu quisesse e, mesmo com a distância, não me deixavam esquecer um só instante do quanto me amavam e torciam por mim, minha gratidão é infinita. Aos demais, cada membro dessas famílias maravilhosas e abençoadas das quais faço parte (Sá, Carvalho e Nascimento), estou aqui sobre os ombros de cada um de vocês.

Minha sincera gratidão aos meus professores de graduação Cícero Fagner, Daniel Silva, João Santos, Francisco Gilberto e Erik Rodarte, pilares da minha formação, obrigada pelo incentivo e pela inspiração, jamais conseguirei agradecer por cada gesto de cuidado e cada palavra de encorajamento, devo parte do que sou a vocês. Agradeço em especial ao meu orientador de graduação Alex Lopes Santos, mais que um professor, um grande amigo que esteve ao meu lado e acreditou em mim até quando eu não acreditava mais.

Ao professor e orientador Pablo Braz e Silva por todo o tempo investido, pelas disciplinas ministradas e pelos ensinamentos que vão além da Matemática, deixo registradas aqui toda a minha gratidão e admiração.

Um agradecimento especial ao professor Miguel Loayza, por sempre estar presente e por ter facilitado tanto minha chegada até aqui, nunca poderei agradecer o suficiente. Também ao professor Tony Sousa, pela amizade dentro e fora da sala de aula.

Não poderia deixar de agradecer a minha família em Recife, Mirelle, Geovani, Micael, Ricardo e Julio, são tantos momentos pelos quais vale a pena ser grata que não conseguiria escrever aqui. Obrigada por cada risada e por cada momento especial, vocês são insubstituíveis.

Minha gratidão também ao Omar Guzmán e ao Cleyton Natanael, pela ajuda e pelas conversas motivadoras.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço ao Recife, pelas incontáveis emoções e possibilidades.

## RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos as equações $g$-Navier-Stokes, equações essas que podem ser vistas como uma pequena perturbação das equações de Navier-Stokes que já conhecemos. Acrescentando uma função $g$ à segunda equação, onde essa $g$ é uma função real suave. Mesmo não podendo afirmar que as equações $g$-Navier-Stokes modelam algum fluxo de fluido, é interessante estudar o caso em que essa função $g$ é particularmente pequena e, dessa forma, perturba as equações de Navier-Stokes tradicionais. Exploraremos o caso bidimensional das equações $g$-Navier-Stokes, visto que o surgimento desse problema bidimensional que envolve essas equações acontece de maneira natural quando estudamos o problema tridimensional padrão. Estudaremos a existência e unicidade de soluções em $R_n$ ($n$ = 2 ou 3) para essas equações, fazendo uso de métodos semelhantes aos utilizados para estudar o problema tradicional e levando em consideração algumas condições impostas sobre a função $g$. Analisaremos o caso linear e o caso não linear (formulação variacional do problema).



**Palavras-chave:** Equações de Navier-Stokes. Perturbação. Domínio Ilimitado.

**ABSTRACT**

In this work, we will present the g-Navier-Stokes equations, which can be seen as a small perturbation of the Navier-Stokes equations we already know. Adding a *g* function to the second equation, where that *g* is a real smooth function. Even though the *g*-Navier-Stokes equations cannot be said to model some fluid flow, it is interesting to study the case where this *g* function is particularly small and thus disrupts traditional Navier-Stokes equations. We will explore the two-dimensional case of the *g*-Navier-Stokes equations, since the appearance of this two-dimensional problem that involves these equations happens naturally when we study the standard three-dimensional problem. We will study the existence and uniqueness of solutions in $R_n$ ($n$ = 2 or 3) for these equations, using methods similar to those used to study the traditional problem and taking into account some conditions imposed on the *g* function. We will analyze the linear case and the non-linear case (variational formulation of the problem)

**Keywords:** Navier-Stokes Equations. Perturbation. Unlimited Domain.

## SUMÁRIO


| | | |
|---|---|---|
| **1** | **Introdução** | **9** |
| **2** | **Conceitos e Resultados Preliminares** | **11** |
| 2.1 | Alguns resultados e definições de Análise Funcional | 11 |
| 2.2 | Espaços $L^p$ | 12 |
| 2.3 | Desigualdades básicas no estudo dos espaços $L^p$ | 13 |
| 2.4 | Espaços de Sobolev | 14 |
| **3** | **Introdução às Equações g-Navier-Stokes** | **17** |
| 3.1 | Dedução das equações g-Navier-Stokes | 17 |
| 3.2 | Espaços de funções específicos | 20 |
| **4** | **Caso Linear da Equação g-Navier-Stokes** | **24** |
| 4.1 | Formulação fraca do problema de Stokes | 24 |
| 4.2 | Existência e unicidade de solução | 30 |
| **5** | **Estimativas Relevantes e Resultados de Compacidade** | **45** |
| 5.1 | Termos não lineares e de perturbação | 45 |
| 5.2 | Compacidade | 49 |
| **6** | **O Problema de Valor Inicial para as Equações g-Navier-Stokes** | **55** |
| 6.1 | Existência da solução para o problema variacional | 55 |
| 6.2 | Unicidade da solução do Problema 2 | 65 |
| | **Referências** | **71** |

# 1 Introdução

Na mecânica dos fluidos estuda-se o comportamento dos fluidos e suas propriedades. Fazendo uso de algumas equações podemos descrever esse comportamento como, por exemplo, as equações de Navier-Stokes que descrevem o movimento de um fluido em uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. As incógnitas nessas equações são a velocidade $\mathbf{u}(x,t) \in \mathbb{R}^n$ e a pressão $p(x,t) \in \mathbb{R}$ definidas em cada par $(x,t)$ pela posição $x \in \Omega$ e o tempo $t \geq 0$. Se restringirmos esse estudo a fluidos incompressíveis, fluidos cuja pressão não exerce influência no volume por eles ocupado, as equações de Navier-Stokes são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \tag{1.1}$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{u}) = 0, \tag{1.2}$$

onde $\mathbf{f}(x,t) = (f_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ é uma força aplicada externamente e $\nu$ é um coeficiente positivo (a viscosidade). Deduzimos a equação (1.1) por meio da segunda Lei de Newton para um elemento fluido sujeito à força externa $\mathbf{f}$.

Considere as equações de Navier-Stokes (1.1) e (1.2) em um domínio $\Omega_g := \Omega_2 \times [0,g]$, onde $\Omega_2$ é uma região limitada no plano e $g = g(x_1,x_2)$ é uma função suave definida em $\Omega_2$ com $0 < m \leq g(x_1,x_2) \leq M$, para $(x_1,x_2) \in \Omega_2$.

As equações g-Navier-Stokes bidimensionais são

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{g}(\nabla\cdot(g\mathbf{u})) = \frac{\nabla g}{g}\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{1.4}$$

em $\Omega_2$. Definimos o g-Laplaciano $\Delta_g$ por

$$-\Delta_g\mathbf{u} := -\frac{1}{g}(\nabla\cdot g\nabla\mathbf{u}) = -\Delta\mathbf{u} - \frac{1}{g}(\nabla g\cdot\nabla)\mathbf{u}$$

que é uma perturbação de $-\Delta\mathbf{u}$. Assim, a equação (1.3) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\nu}{g}(\nabla \cdot g\nabla \mathbf{u}) + \nu(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$$

ou

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta_g \mathbf{u} + \nu(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}.$$

É de interesse particular no estudo das equações g-Navier-Stokes o problema onde $\nabla g$ é pequeno e $g$ é " próximo " a 1. Nesse caso, podemos ver as equações g-Navier-Stokes (1.3)-(1.4) como uma pequena perturbação das equações de Navier-Stokes (1.1)-(1.2) e comparar a dinâmica das soluções desses dois sistemas, isso pode ser visto em [8], trabalho voltado a esse estudo. Enquanto as equações (1.3) e (1.4) formam um problema tridimensional significativo, estamos especialmente interessados aqui em um problema bidimensional. A razão para isso é que as equações g- Navier-Stokes bidimensionais surgem de maneira natural no estudo de um problema tridimensional padrão, como mostraremos a seguir na Seção 2. Entretanto, não podemos afirmar que as equações g-Navier-Stokes formam um modelo para algum fluxo de fluido. Elas podem ou não, porém, enquanto uma motivação física concreta não é confirmada, o fato de que essas equações derivam-se de um problema tridimensional padrão é a base do nosso estudo.

Provaremos a existência e a unicidade de soluções para as equações g-Navier-Stokes (1.3)-(1.4) em todo o espaço $\mathbb{R}^n, n = 2$ ou 3. Primeiramente, apresentaremos uma breve introdução às equações g-Navier-Stokes. Em seguida, definimos alguns espaços que utilizaremos, dentre eles o espaço solução para as equações. Além disso, relembraremos resultados de compacidade e finalmente provaremos nosso principal resultado de existência, bem como a unicidade.

# 2 Conceitos e Resultados Preliminares

Relembraremos aqui alguns conceitos que eventualmente serão mencionados durante esta dissertação.

## 2.1 Alguns resultados e definições de Análise Funcional

Veremos algumas noções clássicas na teoria de Análise Funcional que podem ser vistas de maneira mais aprofundada em [4].

**Definição 1.** *Seja $X$ um espaço vetorial munido de uma norma $||.||_X$. Dizemos que $(X, ||.||_X)$ é um espaço de Banach se é um espaço completo com respeito a métrica gerada por $||.||_X$.*

**Definição 2.** *Seja $H$ um espaço vetorial com produto interno $(.,.)_H$. Dizemos que $(H, (.,.)_H)$ é um espaço de Hilbert se é um espaço completo com respeito a métrica gerada por $(.,.)$.*

**Definição 3.** *Seja $X$ um espaço normado. Denotamos por $X'$ o espaço dual de $X$, que consiste de todos os funcionais lineares limitados de $X$. Mais ainda, $X'$ é um espaço vetorial normado munido da norma*

$$||f||_{X'} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|(f,x)|}{||x||_X} = \sup_{\substack{x\in X\\ ||x||=1}} |(f,x)|.$$

**Teorema 1** (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Seja $H$ um espaço de Hilbert com produto interno $(.,.)_H$. Para cada $f \in H'$, existe um único elemento $\varphi \in H$ tal que*

$$\langle f, v\rangle = (\varphi, v),\ \forall v \in H.$$

*Além disso,*

$$||f||_{H'} = ||\varphi||_H.$$

Também precisaremos de alguns conceitos de convergência fraca.

**Definição 4.** *Seja $X$ um espaço de Banach. Dizemos que um sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ converge fraco para $u \in X$, e denotamos por $u_k \rightharpoonup u$, se $\langle f, u_k\rangle \to \langle f, u\rangle$, para cada $f \in X'$ quando $k \to \infty$.*

A próxima proposição enuncia algumas propriedades de convergência fraca.

**Proposição 1.** *Sejam $X$ espaço de Banach e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$. Valem os seguintes resultados:*

*i) Se $u_k \rightharpoonup u$, então $u$ é único;*

*ii) $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, então toda subsequência $(u_{kj})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fraco para $u$;*

*iii) Se $u_k \rightharpoonup u$, então $(||u_k||)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Além disso,*

$$||u|| \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} ||u_k||;$$

*iv) Se $u_k \to u$, então $u_k \rightharpoonup u$;*

*v) Se $u_k \rightharpoonup u$ e $f_k \to f$ em $X'$, então $\langle u_k, f_k\rangle$;*

*vi) Se $X$ é um espaço de Hilbert, $u_k \rightharpoonup u$ se, e somente se valer que $(u_k, v) \to (u, v)$, para cada $v \in X$.*

**Proposição 2** (Compacidade fraca)**.** *Seja $X$ um espaço de Banach reflexivo. Se a sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é limitada, então existe uma subsequência $(u_{kj})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e um elemento $u \in X$ tais que*

$$u_{kj} \to u.$$

**Definição 5.** *Seja $X$ um espaço de Banach e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X'$. Dizemos que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fraco-estrela para $f \in X'$ se $\langle f_k, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, para cada $x \in X$ quando $k \to \infty$. Escrevemos*

$$f_k \rightharpoonup^* f.$$

## 2.2 Espaços $L^p$

**Definição 6.** *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$; denotamos*

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ |f|^p \text{ é integrável em } \Omega \}$$

*com a norma*

$$|f|_{L^p(\Omega)} = \Big[ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \Big]^{\frac{1}{p}}.$$

**Observação 1.** *Se $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e podemos definir o produto escalar em $L^2(\Omega)$ dado por*

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv\, dx.$$

**Definição 7.** *Denotamos*

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é integrável e existe uma constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega \Big\}$$

*com a norma*

$$|f|_{L^\infty} = ||f||_\infty = inf\{C;\ |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

**Definição 8.** *Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções que são localmente p-integráveis, ou seja,*

$$u \in L^p_{loc}(\Omega) \text{ se } u \in L^p(K) \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

**Notação.** Seja $1 \leq p \leq \infty$; denotamos por $q$ o expoente conjugado,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

## 2.3 Desigualdades básicas no estudo dos espaços $L^p$

Todos esses resultados podem ser vistos detalhadamente em [4, cap. 4]

1. **Desigualdade de Young.** Sejam $1 < p,\ q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dados $a, b \geq 0$, temos
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2. **Desigualdade de Young com $\varepsilon$.** Sejam $1 < p,\ q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dados $a, b \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, temos
$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q,$$
onde $C_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{-1}{p-1}}$.

3. **Desigualdade de Hölder.** Sejam $1 \leq p,\ q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, temos
$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq |u|_{L^p(\Omega)} |v|_{L^q(\Omega)}.$$

4. **Desigualdade de Hölder Generalizada.** Sejam $1 \leq p_1, ..., p_m \leq \infty$, com $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_m} = 1$ e suponha que $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para $k = 1, ..., m$. Então,

$$\int_\Omega |u_1 ... u_m|\, dx \leq \prod_{k=1}^{m} |u_k|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

## 2.4 Espaços de Sobolev

**Definição 9.** *Seja $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. O suporte de $\phi$ é definido como o fecho em $\mathbb{R}^n$ do conjunto no qual $\phi$ não se anula, ou seja,*

$$supp\ \phi = \overline{\{x \in \Omega;\ \phi(x) \neq 0\}}.$$

**Definição 10.** *Representa-se por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções definidas em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto, possuindo em $\mathbb{R}^n$ derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ são denominados funções teste em $\mathbb{R}^n$. Diz-se que uma sucessão $(\varphi_v)$ de funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

*i) Os suportes de todas as funções $\varphi_v$, da sucessão dada, estão contidos num compacto fixo $K$;*

*ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sucessão $(D^\alpha \varphi_v)$ converge uniformemente para zero em $K$.*

*O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com essa noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e denominado* ***espaço das funções teste*** *em $\mathbb{R}^n$.*

**Definição 11.** *i) Definimos $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por*

$$\rho(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & se\ |x| < 1, \\ \\ 0, & se\ |x| \geq 1, \end{cases}$$

*onde a constante $C > 0$ é escolhida de modo que se tenha $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho\, dx = 1$.*

*ii) Para cada $\epsilon > 0$, tomamos*

$$\rho_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \rho\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big).$$

*A sucessão $(\rho_\epsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é chamada* ***sucessão regularizante*** *e satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon\, dx = 1,\ supp\ \rho \subset B(0, \epsilon).$$

**Definição 12.** *Um funcional linear $T$ sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma **distribuição** sobre $\Omega$ se para toda $\phi_m \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, tivermos $T(\phi_m) \longrightarrow 0$ quando $m \longrightarrow \infty$. Definimos o espaço das distribuições em $\Omega$ como $\mathcal{D}'(\Omega)$(dual de $\mathcal{D}(\Omega)$) e esse espaço tem as seguintes propriedades*

*i)* $\langle S+T,\phi\rangle = \langle S,\phi\rangle + \langle T,\phi\rangle,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

*ii)* $\langle cT,\phi\rangle = c\langle T,\phi\rangle,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

*iii) Dizemos que $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se $\langle T_n,\phi\rangle \longrightarrow \langle T,\phi\rangle$ em $\mathbb{R}$ quando $n \longrightarrow \infty$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

**Definição 13.** *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos a $\alpha$-ésima derivada no sentido das distribuições de $T$ por*

$$\langle D^\alpha T,\phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^{|\alpha|}\phi\rangle,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

*onde $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ é um multi-índice com $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}$.*

**Lema 1** (De Rham)**.** *Seja $\Omega$ aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f = \{f_1,...,f_n\}$, $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1,...,n$. Uma condição necessária e suficiente para que*

$$f = \nabla p$$

*para algum $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, é que*

$$\langle f, v\rangle = 0,\ \forall v \in \mathcal{V}.$$

*($\mathcal{V}$ será definido mais adiante no capítulo 2).*

**Definição 14.** *Sejam $m$ inteiro não negativo e $1 \le p \le \infty$. Definimos o espaço de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para cada } |\alpha| \le m\Big\}$$

*com a norma*

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} := \begin{cases} \Big(\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}},\ (1 \le p < \infty) \\ \\ \sum_{|\alpha|\le m} ess\sup_\Omega |D^\alpha u|\ (p=\infty). \end{cases}$$

*Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. Além disso, $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar*

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m}(D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v)\,dx.$$

*Denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)(H_0^m(\Omega))$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ $(H^m(\Omega))$.*

**Observação 2.** *Doravante denotaremos também por* $\mathbf{L}^p(\Omega) := \big(L^p(\Omega)\big)^n$ *o espaço das funções vetoriais* $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *tais que* $u_i \in L^p(\Omega)$*, para cada* $i = 1, ..., n$*, com a norma*

$$||\mathbf{u}||_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\sum_{i=1}^n |u_i|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}, \ se \ 1 \leq p < \infty, \\ \\ \sum_{i=1}^n ||u_i||_\infty, \ se \ p = \infty. \end{cases}$$

*De forma análoga, denotaremos*

$$\mathcal{D}(\Omega) := \big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^n, \ \mathbf{H}^m(\Omega) := \big(H^m(\Omega)\big)^n \ e \ \mathbf{H}^m_0(\Omega) := \big(H^m_0(\Omega)\big)^n.$$

*Nesse caso, o produto escalar e a norma em* $\mathbf{H}^m(\Omega)$ *são dados por*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{H^m(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u_i, D^\alpha v_i)_{L^2(\Omega)},$$

$$||\mathbf{u}||_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \Big(\sum_{i=1}^n ||u_i||^2_{H^m(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u_i|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

*Além disso, o espaço* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert com o produto escalar*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_i v_i \, dx.$$

**Teorema 2** (Rellich-Kondrachov)**.** *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aberto limitado de classe* $C^1$*. Supondo* $1 \leq p < n$*,*

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ 1 \leq q < p^*$$

*Demonstração.* Encontra-se em [5][p. 272-274]. □

Uma definição adicional útil para o nosso estudo é dada a seguir.

**Definição 15.** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach,* $T > 0$ *e* $1 \leq p \leq \infty$*. Denotamos por* $L^p(0, T; X)$ *o espaço de todas as funções vetoriais* $\mathbf{u} : [0, T] \to X$ *tais que* $||\mathbf{u}(t)||_X \in L^p(0, T)$ *com a norma dada por*

$$|\mathbf{u}|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_0^T ||\mathbf{u}(t)||^p_X \, dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty, \\ \\ \sup\limits_{[0,T]} ess \ ||\mathbf{u}(t)||_X, \ p = \infty. \end{cases}$$

*Definimos também o espaço* $C(0, T; X)$*, espaço das funções vetoriais contínuas* $\mathbf{u} : [0, T] \to X$*, com a norma*

$$||\mathbf{u}||_{C(0,T;X)} = \sup_{[0,T]} ||\mathbf{u}(t)||_X.$$

# 3 Introdução às Equações g-Navier-Stokes

Nesta seção, apresentaremos as equações g-Navier-Stokes bidimensionais, deduzidas a partir das equações Navier-Stokes tridimensionais, em domínios específicos. Mostraremos também um importante resultado que apresenta uma certa equivalência entre as equações de continuidade dos dois sistemas. Também serão definidos os espaços de funções utilizados ao longo deste trabalho e a estrutura desses espaços. Por fim, elencaremos algumas observações essenciais para a compreensão do que será feito.

## 3.1 Dedução das equações g-Navier-Stokes

Sejam $\Omega_3 = \Omega_2 \times [0,1]$, onde $\Omega_2$ é uma região limitada no plano, e $\Omega_g = \Omega_2 \times [0,g]$, onde $g = g(x_1,x_2)$ é uma função suave definida em $\Omega_2$ com $0 < m \leq g(x_1,x_2) \leq M$ para $(x_1,x_2) \in \Omega_2$. Considere a função $\mathbf{U}$ de $y = (y_1,y_2,y_3) \in \Omega_g$, onde $(y_1,y_2) \in \Omega_2$ e $0 \leq y_3 \leq g(y_1,y_2)$. A mudança de variáveis

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 g(x_1,x_2) \tag{3.1}$$

mapeia $\Omega_3$ em $\Omega_g$. As equações de Navier-Stokes tridimensionais são

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} + \nabla\Phi = \mathbf{F},$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{U}) = 0$$

em $\Omega_g$, onde $\mathbf{U}$ e $\Phi$ são incógnitas e $\mathbf{F}$ é dada. Considere $\mathbf{U}$ uma solução do sistema acima satisfazendo

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ em } \partial_{top}\Omega_g \cup \partial_{bottom}\Omega_g, \tag{3.2}$$

onde

$$\partial_{top}\Omega_g = \{(y_1,y_2,y_3)\in\Omega_g : y_3 = g(y_1,y_2)\},$$

$$\partial_{bottom}\Omega_g = \{(y_1,y_2,y_3)\in\Omega_g : y_3 = 0\}.$$

Considere também $\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3) = \mathbf{U}(y_1,y_2,y_3)$ com $x = (x_1,x_2,x_3)\in\Omega_3$ e $y = (y_1,y_2,y_3)\in\Omega_g$ de forma que $(x_1,x_2,x_3)$ e $(y_1,y_2,y_3)$ satisfaçam a mudança de variáveis (3.1). Defina $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ como

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(x_1,x_2) = \int_0^1 \mathbf{u}_i(x_1,x_2,x_3)\,dx_3 = \frac{1}{g(y_1,y_2)}\int_0^{g(y_1,y_2)} \mathbf{U}_i(y_1,y_2,y_3)\,dy_3, \quad i = 1,2.$$

Sob essas condições, vale o seguinte resultado.

**Proposição 3.** *Suponha que* $\nabla\cdot\boldsymbol{U} = 0$ *em* $\Omega_g$ *e que as condições de fronteira* (3.2) *são satisfeitas. Então*

$$\nabla_2\cdot(g\mathbf{v}) = \frac{\partial(g\mathbf{v}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(g\mathbf{v}_2)}{\partial x_2} = \nabla g\cdot\mathbf{v} + g(\nabla_2\cdot\mathbf{v}) = 0\ ,$$

*onde* $\nabla_2 = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)$ *e* $\nabla g = \Big(\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_2}\Big)$.

*Demonstração.* Primeiramente faremos algumas observações. Tínhamos definido

$$\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3) = \mathbf{U}(y_1,y_2,y_3) \text{ e } x_1 = y_1, x_2 = y_2, y_3 = x_3 g(x_1,x_2).$$

Assim,

$$x_3 = \frac{y_3}{g(x_1,x_2)} = \frac{y_3}{g(y_1,y_2)}.$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial x_3}{\partial y_1} = -\frac{y_3}{g^2(y_1,y_2)}\frac{\partial g}{\partial y_1} = -\frac{x_3}{g}\frac{\partial g}{\partial y_1},$$
$$\frac{\partial x_3}{\partial y_2} = -\frac{y_3}{g^2(y_1,y_2)}\frac{\partial g}{\partial y_2} = -\frac{x_3}{g}\frac{\partial g}{\partial y_2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_1} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial y_1} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}\Big(\frac{x_3}{g}\frac{\partial g}{\partial y_1}\Big)\\
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_2} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial y_2} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}\Big(\frac{x_3}{g}\frac{\partial g}{\partial y_2}\Big)\\
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_3} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial y_3} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}\frac{1}{g}.
\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y_3} &= \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_3}\Big(\frac{x_3}{g}\frac{\partial g}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_3}\Big(\frac{x_3}{g}\frac{\partial g}{\partial x_2}\Big) + \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial x_3}\frac{1}{g}\\
&= \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial x_3}\frac{1}{g} - \frac{x_3}{g}\Big(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_2}\Big).
\end{aligned}$$

Por hipótese, $\nabla\cdot\mathbf{U} = 0$ em $\Omega_g$. Então,

$$0 = \int_0^{g(y_1,y_2)} \nabla\cdot\mathbf{U}\,dy_3 = \int_0^1 (\nabla\cdot\mathbf{U})g\,dx_3. \tag{3.3}$$

Agora, vamos à demonstração. Da equação (3.3), temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 (\nabla\cdot\mathbf{U})g\,dx_3\\
&= \int_0^1 g\Big[\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial x_3}\frac{1}{g} - \frac{x_3}{g}\Big(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_2}\Big)\Big]\,dx_3\\
&= \int_0^1 g\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1}\,dx_3 + \int_0^1 g\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_2}\,dx_3 + \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial x_3}\,dx_3 - \int_0^1 x_3\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_3}\,dx_3 - \int_0^1 x_3\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_3}\,dx_3\\
&= g\Big(\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x_2}\Big) + \mathbf{v}_1\frac{\partial g}{\partial x_1} + \mathbf{v}_2\frac{\partial g}{\partial x_2} + BC,
\end{aligned}$$

onde $BC$ são as condições de fronteira em $\Omega_g$, isto é,

$$BC = \mathbf{u}_3(x_1,x_2,1) - \mathbf{u}_3(x_1,x_2,0) - \frac{\partial g}{\partial x_1}\mathbf{u}_1(x_1,x_2,1) - \frac{\partial g}{\partial x_2}\mathbf{u}_2(x_1,x_2,1).$$

O vetor unitário normal a $\partial_{bottom}\Omega_g$ é $\mathbf{n} = (0,0,-1)$. Então,

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{U}_3|_{y_3=x_3=0} = -\mathbf{U}_3(y_1,y_2,0) = -\mathbf{u}_3(x_1,x_2,0) = 0.$$

Já o vetor normal a $\partial_{top}\Omega_g$ é $\mathbf{n} = \alpha\Big(-\dfrac{\partial g}{\partial y_1}, -\dfrac{\partial g}{\partial y_2}, 1\Big)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é escolhido de tal forma que $||\mathbf{n}|| = 1$. Então,

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}|_{top} &= \Big(-\frac{\partial g}{\partial y_1}\mathbf{U}_1 - \frac{\partial g}{\partial y_2}\mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_3\Big)\Big|_{top} \\
&= -\frac{\partial g}{\partial x_1}\mathbf{u}_1(x_1,x_2,1) - \frac{\partial g}{\partial x_2}\mathbf{u}_2(x_1,x_2,1) + \mathbf{u}_3(x_1,x_2,1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $BC = 0$ e o resultado segue. $\square$

A seguinte hipótese dará sentido a algumas estimativas que faremos no decorrer do trabalho.

**Hipótese 1.** *A função $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $0 < m \le g(x) \le M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $m = m(g)$ e $M = M(g)$. Além disso,*

$$||\nabla g||_\infty = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n} |\nabla g(x,y)| < +\infty.$$

## 3.2 Espaços de funções específicos

Consideraremos aqui o domínio $\Omega = \mathbb{R}^n$, para $n = 2, 3$.

**Definição 16.** *Denotaremos por $L^2(\Omega, g)$ o espaço $L^2(\Omega)$ munido do produto escalar e da norma*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g = \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) g\, dx, \quad |\mathbf{u}|_g^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_g.$$

Mais informações sobre esse espaço são dadas em [9].

**Definição 17.** *Denotaremos por $H^1(\Omega, g)$ o espaço $H^1(\Omega)$ munido da norma e do produto escalar*

$$||\mathbf{u}||_{H^1(\Omega,g)} = \Big[\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_g + \sum_{i=1}^n \langle \partial_i \mathbf{u}, \partial_i \mathbf{u}\rangle_g\Big]^{\frac{1}{2}}, \quad ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{H^1(\Omega,g)} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g + \sum_{i=1}^n \langle \partial_i \mathbf{u}, \partial_i \mathbf{v}\rangle_g,$$

*onde $\partial_i \mathbf{u} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$.*

**Observação 3.**

**Lema 2.** *Se $0 < m \le g(x) \le M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $g$ for suave, então a norma $|\mathbf{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é equivalente a norma $|\mathbf{u}|_g$, como também a norma $||\mathbf{u}||_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ é equivalente a norma $||\mathbf{u}||_{H^1(\mathbb{R}^n,g)}$.*

*Demonstração.* De fato,

$$|\mathbf{u}|_g = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{u}|^2 g\ dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq M^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{u}|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} = M^{\frac{1}{2}}|\mathbf{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto

$$|\mathbf{u}|_g \leq c_1 |\mathbf{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Por outro lado,

$$|\mathbf{u}|_g = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{u}|^2 g\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \geq m^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{u}|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}}|\mathbf{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

implicando em

$$|\mathbf{u}|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 |\mathbf{u}|_g.$$

Temos também

$$||\mathbf{u}||_{H^1(\mathbb{R}^n,g)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{u}|^2 g\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \mathbf{u}|^2 g\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq M^{\frac{1}{2}}||\mathbf{u}||_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Então

$$||\mathbf{u}||_{H^1(\mathbb{R}^n,g)} \leq c_3 ||\mathbf{u}||_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Analogamente

$$||\mathbf{u}||_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq c_4 ||\mathbf{u}||_{H^1(\mathbb{R}^n,g)}.$$

□

Definimos os seguintes espaços

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \nabla \cdot (g\mathbf{u}) = 0\}$$

$$H_g = \text{O fecho de } \mathcal{V} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n, g)$$

$$V_g = \text{O fecho de } \mathcal{V} \text{ em } H_0^1(\mathbb{R}^n, g),$$

onde $H_g$ é dotado do produto escalar e da norma em $L^2(\mathbb{R}^n, g)$, enquanto $V_g$ é dotado do produto escalar e da norma em $H^1(\mathbb{R}^n, g)$. É claro que $V_g \subset H_g$ com $V_g$ denso em $H_g$ e essa imersão é contínua.

**Observação 4.** *Sejam $H_g'$ e $V_g'$ os espaços duais de $H_g$ e $V_g$, respectivamente, e seja*

$$i : V_g \longrightarrow H_g$$

*a identidade. O operador adjunto*

$$i' : H_g' \longrightarrow V_g',$$

*que leva um funcional $f \in H_g'$ em $i'(f) = f \circ i \in V_g'$, é uma aplicação linear e contínua. Note que, como $i$ é a identidade, $i(V_g) = V_g$ e, pela densidade de $V_g$ em $H_g$, temos que $i'$ é injetiva. Por outro lado, como $i$ é injetiva, temos que $i'(H_g)$ é denso em $V_g'$. Dessa forma, $H_g'$ pode ser identificado como um subespaço denso de $V_g'$. Além disso, pelo Teorema da Representação de Riesz, podemos identificar $H_g$ e $H_g'$ e conseguimos as inclusões*

$$V_g \subset H_g \simeq H_g' \subset V_g',$$

*onde cada espaço é denso no seguinte e as imersões são contínuas.*

De acordo com a observação acima, o produto escalar em $H_g$ de $\mathbf{f} \in H_g$ e $\mathbf{u} \in V_g$ é o mesmo que o produto escalar de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{u}$ na dualidade entre $V_g'$ e $V_g$, ou seja,

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_g = (\mathbf{f}, \mathbf{u}), \tag{3.4}$$

para todo $\mathbf{f} \in H_g$ e para todo $\mathbf{u} \in V_g$. Temos que, para cada $\mathbf{u} \in V_g$ fixo, o funcional $\mathbf{v} \mapsto ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g \in \mathbb{R}$, onde

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g = \sum_{i=1}^{n} \langle \partial_i \mathbf{u}, \partial_i \mathbf{v} \rangle_g$$

para todo $\mathbf{v} \in V_g$, é linear e contínuo em $V_g$; assim sendo, existe um único elemento em $V_g'$, que denotamos por $A\mathbf{u}$, tal que

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_g = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g \tag{3.5}$$

para todo $\mathbf{v} \in V_g$. Também denotamos

$$||\mathbf{u}||^2 = ((\mathbf{u}, \mathbf{u}))_g = \sum_{i=1}^{n} \langle \partial_i \mathbf{u}, \partial_i \mathbf{u} \rangle_g.$$

Podemos garantir a continuidade do funcional $A\mathbf{u}$, pois

$$|(A\mathbf{u}, \mathbf{v})| = |((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g| \leq ||\mathbf{u}||_{V_g} \; ||\mathbf{v}||_{V_g}$$

e

$$\begin{aligned} ||A\mathbf{u}||_{V_g'} &= \sup_{\substack{\mathbf{v}\in V_g \\ ||\mathbf{v}||_{V_g}\leq 1}} |(A\mathbf{u},\mathbf{v})| \\ &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v}\in V_g \\ ||\mathbf{v}||_{V_g}\leq 1}} ||\mathbf{u}||_{V_g}\ ||\mathbf{v}||_{V_g} \\ &\leq ||\mathbf{u}||_{V_g}. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$||\mathbf{u}||_{V_g}^2 = |\mathbf{u}|_g^2 + ||\mathbf{u}||^2,$$

onde $||\mathbf{u}||_{H_g} = |\mathbf{u}|_g = |\mathbf{u}|$.

# 4 Caso Linear da Equação g-Navier-Stokes

Aqui exploraremos um pouco as equações g-Navier-Stokes linearizadas, a fim de estabelecer uma formulação fraca do problema. Além disso, buscaremos uma solução apropriada para tal problema e, posteriormente, mostraremos sua unicidade.

## 4.1 Formulação fraca do problema de Stokes

Sejam $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $T > 0$ fixado. Denotaremos $Q = \Omega \times (0, T)$. As equações g-Navier-Stokes linearizadas são as equações de evolução que correspondem ao problema de Stokes: encontrar

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n \quad e \quad p : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$$

tais que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta_g \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ em } Q, \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{g} \nabla \cdot (g\mathbf{u}) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{4.3}$$

onde as funções $\mathbf{f} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ são dadas. Suponha que $\mathbf{u}$ e $p$ são soluções clássicas do sistema (4.1) - (4.3). Seja $\mathbf{v}$ um elemento em $\mathcal{V}$ e tome o produto escalar de $\mathbf{v}$ com a equação (4.1)

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right\rangle_g - \nu \langle \Delta_g \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_g + \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_g = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_g.$$

Analisando o termo $\langle -\Delta_g \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_g$, temos

$$\langle -\Delta_g \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_g \;=\; \left\langle -\frac{1}{g}(\nabla \cdot g\nabla \mathbf{u}), \mathbf{v} \right\rangle_g = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{1}{g}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot g\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big), v_i \right\rangle_g$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot g\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\cdot v_i g\,dx = -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot g\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\cdot v_i\,dx\\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_i}g\,dx = \sum_{i=1}^{n}\Big\langle\frac{\partial u_i}{\partial x_i},\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big\rangle_g = \langle\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v}\rangle_g\\
&= ((\mathbf{u},\mathbf{v}))_g,
\end{aligned}
$$

O termo $\langle\nabla p,\mathbf{v}\rangle_g$ se anula. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla p,\mathbf{v}\rangle_g &= \sum_{i=1}^{n}\Big\langle\frac{\partial p}{\partial x_i}(t),v_i\Big\rangle_g = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial p}{\partial x_i}(t)\cdot v_i g\,dx\\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega p(t)\cdot\frac{\partial(v_i g)}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega p(t)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(v_i g)}{\partial x_i}\,dx\\
&= -\int_\Omega p(t)\cdot\operatorname{div}(\mathbf{v}g)\,dx = 0.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\Big\langle\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t},\mathbf{v}\Big\rangle_g + \nu((\mathbf{u},\mathbf{v}))_g = \langle f,\mathbf{v}\rangle_g. \tag{4.4}
$$

Note que a identidade (4.4) vale também para cada $\mathbf{v}\in V_g$. Observe que para cada $\phi\in\mathcal{D}(0,T)$ temos

$$
\begin{aligned}
\Big\langle\Big\langle\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t),\mathbf{v}\Big\rangle_g,\phi\Big\rangle &= \int_0^T\Big\langle\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t),\mathbf{v}\Big\rangle_g\phi(t)\,dt = \int_0^T\Big\langle\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t)\phi(t),\mathbf{v}\Big\rangle_g dt\\
&= \Big\langle\int_0^T\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t)\phi(t)\,dt,\mathbf{v}\Big\rangle_g = \Big\langle-\int_0^T\mathbf{u}(t)\phi'(t)\,dt,\mathbf{v}\Big\rangle_g\\
&= -\int_0^T\langle\mathbf{u}(t)\phi'(t),\mathbf{v}\rangle_g\,dt = -\int_0^T\langle\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle_g\phi'(t)\,dt\\
&= -\Big\langle\langle\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle_g,\phi'(t)\Big\rangle = \Big\langle\frac{d}{dt}\langle\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\rangle_g,\phi(t)\Big\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\Big\langle\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t},\mathbf{v}\Big\rangle_g = \frac{d}{dt}\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_g.
$$

Isso nos leva à seguinte formulação fraca do problema (4.1) - (4.3): para $\mathbf{f}$ e $\mathbf{u}_0$ dados, tais que

$$
\mathbf{f}\in L^2(0,T;V_g') \tag{4.5}
$$

e

$$
\mathbf{u}_0\in H_g, \tag{4.6}
$$

encontrar $\mathbf{u}$ satisfazendo

$$
\mathbf{u}\in L^2(0,T;V_g) \tag{4.7}
$$

e

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_g, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \tag{4.9}$$

Pelas identidades (3.4) e (3.5), temos que

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}).$$

Assim, podemos escrever a equação (4.8) como

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f} - \nu A\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{4.10}$$

para todo $\mathbf{v} \in V_g$. Se $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V_g)$, a condição (4.9) não faz muito sentido em geral, porém o seguinte lema dará significado a essa condição.

**Lema 3.** *Seja $X$ um espaço de Banach com dual $X'$ e sejam $\mathbf{u}$ e $g$ duas funções pertencendo a $L^1(a, b; X)$. São equivalentes:*

*i) $\mathbf{u}$ é quase sempre igual a uma primitiva de $g$, isto é,*

$$\mathbf{u}(t) = \xi + \int_0^t g(s)\, ds, \tag{4.11}$$

*para algum $\xi \in X$, para quase todo $t \in [a, b]$;*

*ii) Para toda fução teste $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$,*

$$\int_a^b \mathbf{u}(t)\phi'(t)\, dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)\, dt; \tag{4.12}$$

*iii) Para todo $\eta \in X'$,*

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}, \eta\rangle = \langle g, \eta\rangle \tag{4.13}$$

*no sentido das distribuições em (a,b).*

*Se (i)-(iii) são satisfeitas, então a função $\mathbf{u}$ é quase sempre igual a uma função contínua de [a,b] em $X$.*

*Demonstração.* Supomos, por simplicidade, que o intervalo $[a,b]$ é $[0,T]$. Uma integração por partes simples mostra que a afirmação i) implica em ii) e iii) (pois $\mathbf{u}'(t)=g(t)$); nos resta mostrar que a propriedade iii) implica na propriedade ii) e que ii) implica em i).

Primeiramente mostraremos que a propriedade iii) implica na propriedade ii). Se vale iii) e $\phi\in\mathcal{D}((0,T))$, então, por definição,

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}(t),\eta\rangle\phi'(t)\,dt = -\int_0^T \frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}(t),\eta\rangle\phi(t)\,dt = -\int_0^T \langle g(t),\eta\rangle\phi(t)\,dt,$$

isto é,

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}(t)\phi'(t)+g(t)\phi(t),\eta\rangle\,dt = 0,\quad \forall\eta\in X'.$$

Logo,

$$\Big\langle \int_0^T \mathbf{u}(t)\phi'(t)\,dt + \int_0^T g(t)\phi(t)\,dt,\eta\Big\rangle = 0,\quad \forall\eta\in X'.$$

Segue que

$$\int_0^T \mathbf{u}(t)\phi'(t)\,dt = -\int_0^T g(t)\phi(t)\,dt.$$

A afirmação ii) está demonstrada. Para mostrar que a propriedade ii) implica em i), podemos considerar, sem perda de generalidade, o caso $g=0$. De fato, tome $\mathbf{v}=\mathbf{u}-u_0$ com

$$u_0(t)=\int_0^t g(s)\,ds.$$

Nesse caso, $u_0$ é absolutamente contínua e $u_0'=g$. Logo, $u_0$ satisfaz a condição $i$) e, consequentemente, satisfaz a condição $ii$). Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathbf{v}(t)\phi'(t)\,dt = \int_0^T (\mathbf{u}(t)-u_0(t))\phi'(t)\,dt &= \int_0^T \mathbf{u}(t)\phi'(t)\,dt - \int_0^T u_0(t)\phi'(t)\,dt\\ &= -\int_0^T g(t)\phi(t)\,dt + \int_0^T g(t)\phi(t)\,dt\\ &= 0,\end{aligned} \tag{4.14}$$

para toda $\phi\in\mathcal{D}((0,T))$. A prova de i) será obtida se mostrarmos que (4.14) implica que $\mathbf{v}$ é constante em X. Seja $\phi_0$ uma função em $\mathcal{D}((0,T))$ tal que

$$\int_0^T \phi_0(t)\,dt = 1.$$

Qualquer função $\phi$ em $\mathcal{D}((0,T))$ pode ser escrita como

$$\phi=\lambda\phi_0+\psi', \tag{4.15}$$

onde $\lambda = \int_0^T \phi(t)\,dt$ e $\psi \in \mathcal{D}((0,T))$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\int_0^T \phi(t) - \lambda\phi_0(t)\,dt &= \int_0^T \phi(t)\,dt - \lambda\int_0^T \phi_0(t)\,dt\\ &= 0.\end{aligned}$$

Escrevendo

$$\psi(t) = \int_0^t \phi(s) - \lambda\phi_0(s)\,ds,$$

temos que $\psi \in \mathcal{D}((0,T))$, além disso,

$$\psi' = \phi - \lambda\phi_0.$$

De acordo com as identidades (4.14) e (4.15),

$$\int_0^T (\mathbf{v} - \xi)\phi(t)\,dt = 0$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$, onde

$$\xi = \int_0^T \mathbf{v}(s)\phi_0(s)\,ds.$$

De fato, como $\psi \in \mathcal{D}((0,T))$, vale a identidade (4.14), então

$$\begin{aligned}0 \overset{(4.14)}{=} \int_0^T \mathbf{v}(t)\psi'(t)\,dt \overset{(4.15)}{=} \int_0^T \mathbf{v}(t)(\phi - \lambda\phi_0)\,dt &= \int_0^T \mathbf{v}(t)\phi(t)\,dt - \int_0^T \mathbf{v}(t)\lambda\phi_0(t)\,dt\\ &= \int_0^T \mathbf{v}(t)\phi(t)\,dt - \left[\lambda\xi - \int_0^T \xi(\phi(T) - \phi(0))\,dt\right]\\ &= \int_0^T \mathbf{v}(t)\phi(t)\,dt - \int_0^T \xi\phi(t)\,dt\\ &= \int_0^T (\mathbf{v}(t) - \xi)\phi(t)\,dt,\end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$. Nos resta mostrar que a afirmação acima implica que

$$\mathbf{v} = \xi \text{ q.s.},$$

isto é, queremos mostrar que se $\int_0^T (\mathbf{v}(t) - \xi)\phi(t)\,dt = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$, então $\mathbf{v} - \xi = 0$ quase sempre. Com efeito, considerando uma função $\mathbf{w} \in L^1(X)$ tal que

$$\int_0^T \mathbf{w}(t)\phi(t)\,dt = 0$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$. Seja

$$\widetilde{\mathbf{w}}(t) = \begin{cases} \mathbf{w}(t), \ t \in [0,T], \\ \\ 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus [0,T]. \end{cases}$$

Se $\rho_\varepsilon$ é uma função regularizante para $\varepsilon$ suficientemente pequeno, então $\rho_\varepsilon * \phi \in \mathcal{D}((0,T))$ para toda $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$ e

$$\int_0^T \mathbf{w}(t)(\rho_\varepsilon * \phi)(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathbf{w}}(t)(\rho_\varepsilon * \phi)(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_\varepsilon * \widetilde{\mathbf{w}})(t)\phi(t)\, dt = 0.$$

Consequentemente, para qualquer $\eta > 0$ fixado, temos que

$$(\rho_\varepsilon * \widetilde{\mathbf{w}}) = 0 \text{ em } [\eta, T-\eta]$$

para $\varepsilon$ suficientemente pequeno. Porém, quando $\varepsilon \to 0$, $(\rho_\varepsilon * \widetilde{\mathbf{w}}) \to \widetilde{\mathbf{w}}$ em $L^1(-\infty,\infty;X)$. Portanto, $\mathbf{w} = 0$ em $[\eta, T-\eta]$. Como $\eta > 0$ é arbitrário, temos $\mathbf{w} = 0$ em [0,T]. $\square$

Como A é linear e contínua de $V_g$ em $V_g'$ e $\mathbf{u} \in L^2(V_g)$, a função $A\mathbf{u}$ pertence a $L^2(V_g')$. Consequentemente, $\mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} \in L^2(V_g')$. Pela identidade (4.10), $\mathbf{u}$ satisfaz a propriedade $iii)$ do Lema 3, portanto,

$$\mathbf{u}' \in L^2(0,T;V_g') \tag{4.16}$$

e $\mathbf{u}$ é quase sempre igual a uma função absolutamente contínua de $[0,T]$ em $V_g'$. Em vista disso, qualquer função satisfazendo a condição (4.7) e a equação (4.8), satisfaz também a identidade (4.10) e depois de uma possível modificação em um conjunto de medida nula se torna uma função contínua de $[0,T]$ em $V_g'$. Portanto, a condição inicial (4.9) faz sentido.

Supondo novamente que $\mathbf{f} \in L^2(V_g')$, se $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V_g)$ e satisfaz a equação (4.8), $\mathbf{u}$ satisfaz também a identidade (4.10) e, consequentemente, a condição (4.16). Ademais, de acordo com o Lema 3, $\mathbf{u}$ satisfaz

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{4.17}$$

Dessa forma, conseguimos a seguinte formulação alternativa do problema fraco. Sejam $\mathbf{f}$ e $\mathbf{u}_0$ dadas nas mesmas condições de (4.5) e (4.6), encontrar $\mathbf{u}$ satisfazendo

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;V_g), \quad \mathbf{u}' \in L^2(0,T;V_g'), \tag{4.18}$$

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{4.19}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x). \tag{4.20}$$

## 4.2 Existência e unicidade de solução

**Problema 1.** *Sejam* $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V_g')$ *e* $\mathbf{u_0} \in H_g$ *dadas, encontrar* $\mathbf{u}$ *satisfazendo*

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;V_g), \;\; \mathbf{u}' \in L^2(0,T;V_g'),$$

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} = \mathbf{f} \;\; em \; (0,T)$$

*e*

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x).$$

**Teorema 3.** *O Problema 1 tem uma única solução* $\mathbf{u}$ *e, além disso,*

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}([0,T];H_g). \tag{4.21}$$

*Demonstração.* Para mostrar a existência, usaremos o método de Faedo-Galerkin para construir uma solução aproximada. Como $V_g$ é separável, existe uma sequência de elementos linearmente independentes $\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_m,...$ que é densa em $V_g$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por $V_{g,m} := < \mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_m >$ o subespaço de $V_g$ gerado por $\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_m$. Consideraremos, em $V_{g,m}$, o problema aproximado de (4.8): encontrar uma função $\mathbf{u}_m : \Omega \times [0,T] \longrightarrow V_{g,m}$ definida como

$$\mathbf{u}_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{im}(t)\mathbf{w}_i(x) \tag{4.22}$$

tal que, para cada $j = 1,...,m$, temos

$$\langle \mathbf{u'}_m, \mathbf{w}_j \rangle_g + \nu((\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j))_g = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j), \tag{4.23}$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m}, \tag{4.24}$$

onde $\mathbf{u}_{0m}$ é a projeção ortogonal em $H_g$ de $\mathbf{u}_0$ no espaço gerado por $\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_m$, isto é,

$$\mathbf{u}_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_j \rangle_g \mathbf{w}_j$$

e

$$\mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0 \text{ na norma de } H_g$$

quando $m \to \infty$. Por simplicidade, denotaremos $\mathbf{u}_m(x,t) = \mathbf{u}_m(t)$ e escreveremos $\mathbf{u}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{im}(t)\mathbf{w}_i$. As funções $\varphi_{im}$, $1 \leq i \leq m$, são funções escalares definidas em $[0,T]$ e (4.23) é um sistema diferencial linear dessas funções; de fato, temos

$$\sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle_g \varphi_{im}'(t) + \nu \sum_{i=1}^{m} ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j))_g \varphi_{im}(t) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j), \qquad j = 1,2,...,m. \tag{4.25}$$

A condição (4.24) nos diz que

$$\sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i \rangle_g \mathbf{w}_i = \mathbf{u}_{0m} = \mathbf{u}_m(0) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{im}(0) \mathbf{w}_i,$$

ou seja,

$$\varphi_{im}(0) = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i \rangle_g \tag{4.26}$$

($\varphi_{im}(0)$ é igual a i-ésima componente de $\mathbf{u}_{0m}$). O sistema (4.25) - (4.26) é um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} A_m X_m'(t) + \nu B_m X_m(t) &= F_m(t), \\ X_m(0) &= X_{0m}, \end{aligned}$$

onde

$$A_m = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle_g & ... & \langle \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_1 \rangle_g \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_m \rangle_g & ... & \langle \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_m \rangle_g \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} ((\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1))_g & ... & ((\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_1))_g \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_m))_g & ... & ((\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_m))_g \end{bmatrix},$$

$$F_m(t) = \begin{bmatrix} (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_m) \end{bmatrix}, X_m(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{1m}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{mm}(t) \end{bmatrix} \text{ e } X_{0m} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_1 \rangle_g \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_m \rangle_g \end{bmatrix}.$$

Como os elementos $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$ são linearmente independentes, a matriz com os elementos $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle_g$ $(1 \leq i, j \leq m)$ é não singular; consequentemente, invertendo essa matriz, reduzimos o sistema (4.25) ao sistema linear com coeficientes constantes

$$\varphi_{im}'(t) + \nu \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \varphi_{im}(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j), \qquad 1 \leq i \leq m \tag{4.27}$$

onde $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$. O sistema linear diferencial (4.27) junto com a condição inicial (4.26) podem ser reinterpretados como

$$\begin{aligned} X_m'(t) + \nu C_m X_m(t) &= D_m F_m(t), \\ X_m(0) &= X_{0m}. \end{aligned}$$

O sistema acima tem uma solução maximal única $X_m \in \mathcal{C}([0, t_m))^m$, para algum $[0, t_m) \subseteq [0, T]$ (mostraremos a seguir que $t_m = T$). Isso define unicamente a $\varphi_{im}$ em todo o intervalo $[0, T]$. Portanto, existe uma única solução aproximada $\mathbf{u}_m$ definida de $[0, T]$ em $V_{g,m}$. Como as funções escalares $t \mapsto (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j)$ são quadrado integráveis, as funções $\varphi_{im}, \varphi'_{im}$ também o são e, assim sendo, para cada $m$

$$\mathbf{u}_m \in L^2(0,T;V_g), \quad \mathbf{u'}_m \in L^2(0,T;V_g). \tag{4.28}$$

Iremos obter estimativas a priori independentes de $m$ para as funções $\mathbf{u}_m$ e então passaremos ao limite.

**Estimativas a priori**

Multiplicamos a equação (4.23) por $\varphi_{im}(t)$

$$\langle \mathbf{u'}_m(t), \varphi_{im}(t)\mathbf{w}_j\rangle_g + \nu((\mathbf{u}_m(t), \varphi_{im}(t)\mathbf{w}_j))_g = (\mathbf{f}(t), \varphi_{im}(t)\mathbf{w}_j), \quad j = 1, ..., m.$$

Somando essas equações para $j = 1, ..., m$, obtemos

$$\langle \mathbf{u'}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_g + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)).$$

Pela condição (4.28),

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_g = 2\langle \mathbf{u'}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_g.$$

Dessa forma,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 = 2(\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)). \tag{4.29}$$

O membro direito da equação (4.29) pode ser majorado por

$$2(\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t)) \leq 2||\mathbf{f}(t)||_{V'_g}||\mathbf{u}_m(t)||_{V_g} \leq \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2_{V_g} + \frac{1}{\nu}||\mathbf{f}(t)||^2_{V'_g},$$

usando a desigualdade de Young. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 &\leq \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2_{V_g} + \frac{1}{\nu}||\mathbf{f}(t)||^2_{V'_g} \\ &= \nu|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 + \frac{1}{\nu}||\mathbf{f}(t)||^2_{V'_g}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq \nu|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \frac{1}{\nu}||\mathbf{f}(t)||^2_{V'_g}.$$

Usando a desigualdade de Gronwall,

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq e^{\nu t}\Big(|\mathbf{u}_m(0)|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t ||\mathbf{f}(s)||^2_{V'_g}\, ds\Big) < \infty.$$

Note que o membro direito da desigualdade acima é limitado para todo $s \in [0, T]$. Consequentemente,

$$\sup_{s\in[0,T]} |\mathbf{u}_m(s)|^2 \leq e^{\nu T}\Big(|\mathbf{u}_m(0)|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\mathbf{f}(s)||^2_{V_g'}\, ds\Big) < \infty.$$

Portanto,

$$\mathbf{u}_m \text{ permanece em um subconjunto limitado de } L^\infty(0, T; H_g). \tag{4.30}$$

Por outro lado, tínhamos que

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 \leq \nu|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \frac{1}{\nu}||\mathbf{f}(t)||^2_{V_g'}.$$

Pela limitação de $|\mathbf{u}_m(t)|^2$,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 \leq \nu c + \frac{1}{\nu}||\mathbf{f}(t)||^2_{V_g'}.$$

Integrando de 0 a T, consegue-se

$$|\mathbf{u}_m(T)|^2 + \nu\int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||^2 dt \leq \nu c T + |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||\mathbf{f}(t)||^2_{V_g'}\, dt < \infty.$$

Pela limitação de $|\mathbf{u}_m(t)|^2$ e de $||\mathbf{u}_m(t)||^2$, temos que $||\mathbf{u}_m(t)||^2_{V_g}$ é limitada. Portanto,

$$\mathbf{u}_m \text{ permanece em um subconjunto limitado de } L^2(0, T; V_g). \tag{4.31}$$

**Passagem ao limite**

A estimativa a priori (4.30) mostra que existe um elemento $\mathbf{u}$ em $L^\infty(0, T; H_g)$ e uma subsequência $\mathbf{u}_{m'}$ tal que

$$\mathbf{u}_{m'} \to \mathbf{u} \text{ na topologia fraca estrela de } L^\infty(0, T; H_g), \tag{4.32}$$

quando $m' \to \infty$. A convergência (4.32) significa que para cada $\mathbf{v} \in L^1(0, T; H_g)$,

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v}\rangle_g\, dt \to \int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g\, dt, \text{ quando } m' \to \infty.$$

Portanto,

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)\rangle_g\, dt \to 0, \text{ quando } m' \to \infty. \tag{4.33}$$

Pela estimativa (4.31), a subsequência $\mathbf{u}_{m'}$ pertence a um conjunto limitado de $L^2(0, T; V_g)$; então, garantimos a existência de $\mathbf{u}_\star$ em $L^2(0, T; V_g)$ e uma subsequência (ainda denotada por $\mathbf{u}_{m'}$) tais que

$$\mathbf{u}_{m'} \to \mathbf{u}_\star \text{ na topologia fraca de } L^2(0, T; V_g). \tag{4.34}$$

A convergência (4.34) significa que para todo $\mathbf{v} \in L^2(0,T;V_g')$ temos

$$\int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v})\, dt \to \int_0^T (\mathbf{u}_\star(t), \mathbf{v})\, dt, \text{ quando } m' \to \infty,$$

o que implica

$$\int_0^T (\mathbf{u}_{m'}(t) - \mathbf{u}_\star(t), \mathbf{v}(t))\, dt \to 0, \text{ quando } m' \to \infty.$$

Em particular, pela igualdade (3.4),

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v}(t)\rangle_g\, dt \to \int_0^T \langle \mathbf{u}_\star(t), \mathbf{v}(t)\rangle_g\, dt \tag{4.35}$$

para cada $\mathbf{v} \in L^2(0,T;H_g)$. Comparando com o limite em (4.33), vemos que

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\star(t), \mathbf{v}(t)\rangle_g\, dt = 0 \tag{4.36}$$

para cada $\mathbf{v} \in L^2(0,T;H_g)$. Consequentemente,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\star \in L^2(0,T;V_g) \cap L^\infty(0,T;H_g). \tag{4.37}$$

Em resumo, obtemos que

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_{m'}(t), \mathbf{v}\rangle_g\, dt \longrightarrow \int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g\, dt, \text{ quando } m' \longrightarrow \infty, \tag{4.38}$$

para cada $\mathbf{v} \in H_g$. Para passar ao limite nas equações (4.23) e (4.24), vamos considerar funções escalares $\psi$ continuamente diferenciáveis em $[0,T]$ tais que

$$\psi(T) = 0. \tag{4.39}$$

Para uma tal função $\psi$, multiplicamos a equação (4.23) por $\psi(t)$ e integramos com respeito a t em $[0,T]$

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_g \psi(t)\, dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j))_g \psi(t)\, dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\, dt.$$

Integrando por partes o primeiro termo

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \mathbf{u}'_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_g \psi(t)\, dt &= \psi(t)\langle \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_g\Big|_0^T - \int_0^T \langle \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_g \psi'(t)\, dt \\ &= -\psi(0)\langle \mathbf{u}_m(0), \mathbf{w}_j\rangle_g - \int_0^T \langle \mathbf{u}_m(t)\psi'(t), \mathbf{w}_j\rangle_g\, dt,\end{aligned}$$

encontramos

$$-\int_0^T \langle \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_g \psi'(t)\, dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j))_g \psi(t)\, dt = \langle \mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j\rangle_g \psi(0) + \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\, dt$$

ou

$$-\int_0^T \langle \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_g \psi'(t)\,dt + \nu\int_0^T \langle A\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_g \psi(t)\,dt = \langle \mathbf{u}_{0m}, \mathbf{w}_j\rangle_g \psi(0) + \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\,dt. \tag{4.40}$$

Pelas convergências (4.32), (4.34) e pela conclusão feita em (4.38) para os termos do lado esquerdo da equação (4.40), podemos tomar o limite quando $m = m' \to \infty$. Observamos também que

$$\mathbf{u}_{0m} \to \mathbf{u}_0 \text{ fortemente em } H_g. \tag{4.41}$$

Consequentemente, depois do limite, teremos

$$-\int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j\rangle_g \psi'(t)\,dt + \nu\int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{w}_j))_g \psi(t)\,dt = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_j\rangle_g \psi(0) + \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\,dt. \tag{4.42}$$

A igualdade (4.42), que vale para cada $j = 1, 2, ..., m$, nos permite escrever, por um argumento de linearidade,

$$-\int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \psi'(t)\,dt + \nu\int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_g \psi(t)\,dt = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}\rangle_g \psi(0) + \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt \tag{4.43}$$

para cada $\mathbf{v}$ que é uma combinação linear finita dos $\mathbf{w}_j's$. Como cada termo da identidade (4.43) depende linearmente e continuamente de $\mathbf{v}$, a igualdade (4.43) ainda é válida para cada $\mathbf{v} \in V_g$.

Agora, escrevendo a identidade (4.43), em particular, com $\psi = \phi \in \mathcal{D}((0,T))$, encontramos a seguinte igualdade que é válida no sentido das distribuições em $(0, T)$

$$-\int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \phi'(t)\,dt + \nu\int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_g \phi(t)\,dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})\phi(t)\,dt.$$

Logo,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \phi(t)\,dt + \nu\int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_g \phi(t)\,dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})\phi(t)\,dt.$$

Dessa forma, conclui-se que

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_g, \tag{4.44}$$

que é exatamente a equação (4.8). Portanto, a equação (4.44), o resultado (4.37) e o Lema 3 implicam que $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V_g')$ e

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{4.45}$$

Finalmente, nos resta verificar que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. Para isso, multiplicamos a equação (4.44) por $\psi(t)$ (a mesma de antes) e integramos com respeito a t

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \psi(t)\, dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_g \psi(t)\, dt = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})\psi(t)\, dt.$$

Integrando por partes o primeiro termo

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \psi(t)\, dt &= \psi(t)\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \Big|_0^T - \int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \psi'(t)\, dt \\ &= -\psi(0)\langle \mathbf{u}(0), \mathbf{v}\rangle_g - \int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \psi'(t)\, dt, \end{aligned}$$

resulta em

$$-\int_0^T \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \psi'(t)\, dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_g \psi(t)\, dt = \psi(0)\langle \mathbf{u}(0), \mathbf{v}\rangle_g + \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})\psi(t)\, dt. \tag{4.46}$$

Por comparação com a identidade (4.43), vemos que

$$\langle \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0), \mathbf{v}\rangle_g \psi(0) = 0$$

para cada $\mathbf{v} \in V_g$ e para cada função $\psi$ do tipo considerado. Podemos escolher $\psi$ tal que $\psi(0) \neq 0$. Assim,

$$\langle \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0), \mathbf{v}\rangle_g = 0$$

para todo $\mathbf{v} \in V_g$. Portanto,

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Isso conclui a prova da existência.

**Continuidade e unicidade**

Essa prova é baseada no seguinte lema que é um caso particular de um Teorema de interpolação de Lions - Magenes.

**Lema 4.** *Sejam $V_g$, $H_g$ e $V_g'$ (onde $V_g'$ é o dual de $V_g$) três espaços de Hilbert, cada espaço incluído no seguinte. Se $\mathbf{u}$ é uma função tal que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V_g)$ e sua derivada $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; V_g')$, então $\mathbf{u}$ é quase sempre igual a uma função contínua de [0,T] em $H_g$. Além disso,*

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2 = 2(\mathbf{u}', \mathbf{u}) \tag{4.47}$$

*vale no sentido das distribuições em $(0, T)$.*

Se assumirmos, por enquanto, o Lema 4 como verdadeiro, temos imediatamente a afirmação (4.21) e nos resta mostrar a unicidade. Para mostrar a unicidade, iremos supor que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são duas soluções do problema fraco (4.18) - (4.20) e seja $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Então, $\mathbf{w}$ pertence aos mesmo espaços que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e satisfaz

$$\mathbf{w}' + \nu A\mathbf{w} = 0, \tag{4.48}$$

$$\mathbf{w}(0) = 0.$$

Tomando o produto escalar da equação (4.48) com $\mathbf{w}(t)$, encontramos

$$\langle \mathbf{w}'(t), \mathbf{w}(t) \rangle_g + \nu \langle A\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t) \rangle_g = 0.$$

Pela identidade (3.5),

$$\langle \mathbf{w}'(t), \mathbf{w}(t) \rangle_g + \nu ((\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)))_g = 0.$$

Usando a igualdade (4.47), temos

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{w}(t)|^2 + 2\nu ||\mathbf{w}(t)||^2 = 0.$$

Integrando a equação acima

$$|\mathbf{w}(t)|^2 - |\mathbf{w}(0)|^2 \leq 0,$$

ou seja,

$$|\mathbf{w}(t)|^2 \leq |\mathbf{w}(0)|^2 = 0.$$

Logo,

$$\mathbf{w}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

concluindo que

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$$

para todo $t \in [0, T]$.

**Lema 5.** *Sob as hipóteses do Lema 4, a igualdade* (4.47) *é satisfeita.*

Definimos a função $\widetilde{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \to V_g$, onde

$$\widetilde{\mathbf{u}}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t), \ t \in [0, T], \\ \\ 0, \ t \in \mathbb{R} \setminus [0, T]. \end{cases}$$

Seja $\mathbf{u}_m = \widetilde{\mathbf{u}} * \rho_{\frac{1}{m}}$, onde $(\rho_{\frac{1}{m}})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de funções regularizantes. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos $\mathbf{u}_m : [0,T] \to V_g$ tal que

$$\mathbf{u}_m \text{ é infinitamente diferenciável de } [0,T] \text{ em } V_g \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{4.49}$$

Além disso, quando $m \to \infty$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m &\to \mathbf{u} \text{ em } L^2_{loc}((0,T);V_g), \\ \mathbf{u'}_m &\to \mathbf{u'} \text{ em } L^2_{loc}((0,T);V'_g). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Pela afirmação (4.49), $\mathbf{u}_m$ é diferenciável para todo $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_g = 2\langle \mathbf{u'}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\rangle_g \overset{(3.4)}{=} 2(\mathbf{u'}_m(t), \mathbf{u}_m(t)), \tag{4.51}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, a identidade (4.47) vale para $\mathbf{u}_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. A medida que $m \to \infty$, se valem as convergências (4.50), valem também

$$|\mathbf{u}_m|^2 \to |\mathbf{u}|^2 \text{ em } L^1_{loc}((0,T)),$$

$$\langle \mathbf{u'}_m, \mathbf{u}_m\rangle_g \to \langle \mathbf{u'}, \mathbf{u}\rangle_g \text{ em } L^1_{loc}((0,T)).$$

Essas convergências são válidas no sentido das distribuições. Portanto, podemos passar ao limite na equação (4.51) no sentido das distribuições

$$\left\langle \frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2, \phi \right\rangle = 2\langle (\mathbf{u'}_m(t), \mathbf{u}_m(t)), \phi\rangle,$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$. Assim,

$$\left\langle \frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2, \phi \right\rangle = 2\langle (\mathbf{u'}(t), \mathbf{u}(t)), \phi\rangle,$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$. Logo, a igualdade (4.47) é válida no sentido das distribuições. Como a função $t \mapsto (\mathbf{u'}(t), \mathbf{u}(t))$ é integrável em $[0,T]$, a igualdade (4.47) nos mostra que a função $\mathbf{u}$ do Lema 5 satisfaz

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H_g). \tag{4.52}$$

De acordo com o Lema 3, a função $\mathbf{u}$ é contínua de $[0,T]$ em $V'_g$. Usando essa afirmação de continuidade e a condição (4.52), o Lema 6, que será enunciado a seguir, nos mostrará que $\mathbf{u}$ é fracamente contínua de $[0,T]$ em $H_g$, isto é,

$$t \mapsto \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g \text{ é contínua para todo } \mathbf{v} \in H_g. \tag{4.53}$$

Admitindo temporariamente esse fato, conseguimos a prova do Lema 4. De fato, queremos mostrar que a função $\mathbf{u}$ é contínua de $[0,T]$ em $H_g$, ou seja, mostrar que para cada $t_0 \in [0,T]$,

$$|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)|^2 \to 0, \text{ quando } t \to t_0. \tag{4.54}$$

Expandindo esse termo, encontramos

$$|\mathbf{u}(t)|^2 - 2\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t_0)\rangle_g + |\mathbf{u}(t_0)|^2.$$

Note que, integrando de $t_0$ a $t$ a igualdade (4.47), temos

$$|\mathbf{u}(t)|^2 = |\mathbf{u}(t_0)|^2 + 2\int_{t_0}^{t} (\mathbf{u}'(s), \mathbf{u}(s))\, ds.$$

Logo, quando $t \to t_0$,

$$|\mathbf{u}(t)|^2 \to |\mathbf{u}(t_0)|^2.$$

Pela hipótese (4.53),

$$\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t_0)\rangle_g \to |\mathbf{u}(t_0)|^2, \text{ quando } t \to t_0,$$

o que mostra que o limite (4.54) é válido.

Portanto, a prova do Lema 4 será consequência da demonstração do próximo lema, que garantirá que $\mathbf{u}$ é fracamente contínua de $[0,T]$ em $H_g$. Este enunciaremos de uma forma um pouco mais geral.

**Lema 6.** *Sejam $X$ e $Y$ dois espaços de Banach, tais que*

$$X \subset Y \tag{4.55}$$

*com uma imersão contínua. Se uma função $\phi \in L^\infty(0,T;X)$ é fracamente contínua com valores em $Y$, então $\phi$ é fracamente contínua com valores em $X$.*

Se substituirmos Y pelo fecho de X em Y, podemos supor que X é denso em Y. Consequentemente, a imersão contínua densa de X em Y nos dá, pela dualidade, uma imersão contínua densa de $Y'$ (dual de Y) em $X'$ (dual de X),

$$Y' \subset X'. \tag{4.56}$$

Por hipótese, $\phi$ é fracamente contínua com valores em $Y'$, então para cada $\eta \in Y'$, quando $t \to t_0$ temos

$$(\phi(t), \eta) \to (\phi(t_0), \eta), \tag{4.57}$$

para todo $t_0 \in [0,T]$. Devemos mostrar que a convergência (4.57) vale para todo $\eta \in X'$. Primeiramente, provaremos que $\phi(t) \in X$ para cada t e que

$$||\phi(t)||_X \leq ||\phi||_{L^\infty(0,T;X)} \tag{4.58}$$

para todo $t \in [0,T]$. De fato, definimos a função

$$\widetilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), \ t \in [0,T], \\ \\ 0, \ t \in \mathbb{R} \setminus [0,T]. \end{cases}$$

Consideremos $\phi_m = \rho_{\frac{1}{m}} * \widetilde{\phi}$, onde $(\rho_{\frac{1}{m}})_{m\in\mathbb{N}}$ é uma família de funções regularizantes. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que $\phi_m : [0,T] \to X$, $\phi_m \longrightarrow \phi$ e

$$||\phi_m(t)||_X \leq ||\phi||_{L^\infty(X)}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0,T]$. Além disso,

$$(\phi_m(t), \eta) \to (\phi(t), \eta),$$

para todo $\eta \in Y'$. Temos que

$$\begin{aligned} |(\phi_m(t), \eta)| &\leq ||\phi_m(t)||_X |\eta|_X \\ &\leq ||\phi||_{L^\infty(X)} \sup_{\substack{x\in X \\ ||x||\leq 1}} |\eta(x)| \\ &= ||\phi||_{L^\infty(X)} ||\eta||_{X'} \end{aligned} \tag{4.59}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0,T]$. Fazendo $m \to \infty$,

$$|(\phi(t), \eta)| \leq ||\phi||_{L^\infty(X)} ||\eta||_{X'},$$

para todo $t \in [0,T]$ e para todo $\eta \in Y'$. Esta desigualdade mostra que $\phi(t) \in X$ e que vale a estimativa (4.58), pois

$$||\phi(t)||_X = \sup_{\substack{\eta\in X' \\ ||\eta||\leq 1}} |(\phi(t), \eta)|.$$

Pela desigualdade (4.59),

$$||\phi(t)||_X \leq ||\phi||_{L^\infty(0,T;X)}.$$

Finalmente provaremos a convergência (4.57) para $\eta \in X'$. Como $Y'$ é denso em $X'$, existe, para cada $\varepsilon > 0$, algum $\eta_\varepsilon \in Y'$ tal que

$$||\eta - \eta_\varepsilon|| \leq \varepsilon.$$

Podemos escrever

$$(\phi(t) - \phi(t_0), \eta) = (\phi(t) - \phi(t_0), \eta - \eta_\varepsilon) + (\phi(t) - \phi(t_0), \eta_\varepsilon).$$

Daí,

$$\begin{aligned} |(\phi(t) - \phi(t_0), \eta)| &\leq |(\phi(t) - \phi(t_0), \eta - \eta_\varepsilon)| + |(\phi(t) - \phi(t_0), \eta_\varepsilon)| \\ &\leq |\phi(t) - \phi(t_0)|||\eta - \eta_\varepsilon|| + |(\phi(t) - \phi(t_0), \eta_\varepsilon)| \\ &\leq 2||\phi||_{L^\infty(X)}\varepsilon + |(\phi(t) - \phi(t_0), \eta_\varepsilon)|. \end{aligned}$$

Fazendo $t \to t_0$, como $\eta_\varepsilon \in Y'$, vale a convergência (4.57), ou seja, $(\phi(t) - \phi(t_0), \eta_\varepsilon) \to 0$. Portanto,

$$\lim_{t \to t_0} |(\phi(t) - \phi(t_0), \eta)| \leq 2\varepsilon ||\phi||_{L^\infty(X)}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno, o limite acima é zero e a convergência (4.57) vale para todo $\eta \in X'$. $\square$

**Pressão**

**Proposição 4.** *Sob as hipóteses do Teorema 3, existe uma distribuição $p$ em $Q = \Omega \times (0, T)$ tal que a função $\mathbf{u}$ definida pelo Teorema 3 e $p$ satisfazem a equação* (4.1) *no sentido das distribuições em $Q$.*

*Demonstração.* Para obter a pressão, definiremos

$$\mathbf{U}(t) = \int_0^t \mathbf{u}(s)\, ds, \quad \mathbf{F}(t) = \int_0^t \mathbf{f}(s)\, ds. \tag{4.60}$$

É claro que

$$\mathbf{U} \in \mathcal{C}([0, T]; V_g), \quad \mathbf{F} \in \mathcal{C}([0, T]; V_g').$$

Integrando a equação (4.8), temos

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_g \, ds + \nu \int_0^t ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g \, ds = \int_0^t (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, ds$$

que implica em

$$\langle \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}\rangle_g + \nu((\mathbf{U}(t), \mathbf{v}))_g = \langle \mathbf{F}(t), \mathbf{v}\rangle_g \tag{4.61}$$

para todo $t \in [0, T]$ e para todo $\mathbf{v} \in V_g$, ou

$$\langle \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0 - \nu\Delta_g \mathbf{U}(t) - \mathbf{F}(t), \mathbf{v}\rangle_g = 0,$$

para todo $t \in [0, T]$ e para todo $\mathbf{v} \in V_g$. Usando o Lema de De Rham, garantimos a existência de alguma distribuição $P$ em $\Omega$ tal que

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0 - \nu\Delta_g \mathbf{U}(t) + \nabla P(t) = \mathbf{F}(t). \tag{4.62}$$

Observando que

$$\nabla P = \mathbf{F} + \nu\Delta_g \mathbf{U} - \mathbf{u} + \mathbf{u}_0, \tag{4.63}$$

concluímos que o $\nabla P$ pertence a $\mathcal{C}([0, T]; H^{-1}(\Omega))$, assim como o lado direito da equação (4.63). Então,

$$P \in \mathcal{C}([0, T]; L^2_{loc}(\Omega)).$$

Isso nos permite derivar a equação (4.62) na variável $t$, no sentido das distribuições em $Q$. Denotando

$$p = \frac{\partial P}{\partial t},$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) - \nu\Delta_g \mathbf{u}(t) + \nabla p = \mathbf{f}(t),$$

que é exatamente a equação (4.1). □

**Observação 5.** *Assumindo que* $\mathbf{f}$ *e* $\mathbf{u}_0$ *são suficientemente suaves, podemos obter tanta regularidade quanto desejada para* $\mathbf{u}$ *e* $p$*. Para* $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H_g)$ *e* $\mathbf{u}_0 \in V_g$ *dadas, obtemos*

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)), \tag{4.64}$$

$$\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H_g), \tag{4.65}$$

$$p \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \tag{4.66}$$

*Primeiramente, queremos obter* (4.65)*. Isto será provado usando outra estimativa a priori para a solução aproximada* $\mathbf{u}_m$ *construída pelo método de Galerkin que satisfaz*

$$\langle \mathbf{u}_m', \mathbf{w}_j\rangle_g + \nu((\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_j))_g = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j), \quad j = 1, ..., m.$$

*Multiplicando a identidade acima por* $\varphi'_{jm}(t)$ *e somando essas igualdades para* $j = 1, ..., m$, *temos*

$$|\mathbf{u}'_m(t)|^2 + \nu((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}'_m(t)))_g = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t))$$

*ou*

$$2|\mathbf{u}'_m(t)|^2 + \nu\frac{d}{dt}||\mathbf{u}_m(t)||^2 = 2(\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t)). \tag{4.67}$$

*Integrando a igualdade* (4.67) *de* 0 *a* $T$ *e usando a desigualdade de Schwarz, obtemos*

$$\begin{aligned} 2\int_0^T |\mathbf{u}'_m(t)|^2\,dt + \nu||\mathbf{u}_m(T)||^2 &= \nu||\mathbf{u}_{0m}||^2 + 2\int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t))\,dt \\ &\leq \nu||\mathbf{u}_{0m}||^2 + \int_0^T |\mathbf{f}(t)|^2\,dt + \int_0^T |\mathbf{u}'_m(t)|^2\,dt. \end{aligned}$$

*Daí,*

$$\int_0^T |\mathbf{u}'_m(t)|^2\,dt \leq \nu||\mathbf{u}_{0m}||^2 + \int_0^T |\mathbf{f}(t)|^2\,dt. \tag{4.68}$$

*Os elementos* $\mathbf{w}_j$ *usados no método de Galerkin podem ser escolhidos tais que* $\mathbf{w}_j \in V_g$ *para cada* $j$ *e podemos tomar*

$$\mathbf{u}_{0m} = \text{ a projeção em } V_g \text{ de } \mathbf{u}_0 \text{ no espaço gerado por } \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m.$$

*Dessa forma,*

$$\mathbf{u}_{0m} \longrightarrow \mathbf{u}_0 \text{ em } V_g \text{ fortemente quando } m \longrightarrow \infty \tag{4.69}$$

*e* $||\mathbf{u}_{0m}||_{V_g} \leq ||\mathbf{u}_0||_{V_g}$. *Com essas escolhas de* $\mathbf{w}_j$*'s e de* $\mathbf{u}_{0m}$, *a desigualdade* (4.68) *mostra que*

$$\mathbf{u}'_m \text{ permanece em um subconjunto limitado de } L^2(0, T; H_g), \tag{4.70}$$

*então, depois de passarmos a uma subsequência de* $\mathbf{u}'_m$ *que converge para* $\mathbf{u}'$ *fracamente, vale a condição* (4.65). *Voltamos agora às igualdades* (4.1) *e* (4.2) *e aplicamos o Teorema de regularidade do caso estacionário: para quase todo* $t \in [0, T]$,

$$-\nu\Delta_g\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - \mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\nabla \cdot (g\mathbf{u}) = 0 \text{ em } \Omega$$

*de modo que* $\mathbf{u}(t) \in H^2(\Omega)$ *e* $p(t) \in H^1(\Omega)$. *Além disso, como a aplicação* $\mathbf{f}(t) - \mathbf{u}'(t) \mapsto \{\mathbf{u}(t), p(t)\}$ *é linear e contínua de* $L^2(\Omega)$ *em* $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *e como* $\mathbf{f} - \mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, *valem as condições* (4.64) *e* (4.66).

Para o nosso problema, devemos recordar que

$$-\Delta_g \mathbf{u} = -\frac{1}{g}(\nabla \cdot g\nabla)\mathbf{u} = -\Delta \mathbf{u} - \left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla\right)\mathbf{u}.$$

Assim sendo, obtemos

$$\langle -\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g - \left\langle \left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla\right)\mathbf{u}, \mathbf{v}\right\rangle_g = \langle -\Delta_g \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_g$. Segue que

$$\langle -\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_g + \left\langle \left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla\right)\mathbf{u}, \mathbf{v}\right\rangle_g = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g + \left\langle \left(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla\right)\mathbf{u}, \mathbf{v}\right\rangle_g,$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_g$.

# 5 Estimativas Relevantes e Resultados de Compacidade

Nesta seção, traremos algumas estimativas para os termos não lineares e de perturbação do nosso sistema. Além disso, alguns resultados de compacidade que nos serão úteis.

## 5.1 Termos não lineares e de perturbação

Considere a forma trilinear

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_i(D_i v_j) w_j g \; dx,$$

onde $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n, g)$ e $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Como $\nabla \cdot g\mathbf{u} = \sum_i D_i(gu_i) = 0$, para $\mathbf{u} \in H_g$, obtemos

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_i(D_i v_j) w_j g \, dx \quad &= \quad -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} D_i(u_i g) v_j w_j \, dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_i g v_j D_i(w_j) \, dx \\ &= \quad -\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_i v_j D_i(w_j) g \, dx \\ &= \quad -b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}), \end{aligned}$$

para $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in H_g$. Assim sendo,

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -b(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})$$

para quaisquer $\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v} \in H_g$. Logo,

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = -b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v})$$

e assim

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$$

para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_g$. Para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_g$, denotaremos por $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ o elemento de $V_g'$ definido por

$$\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_g = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in V_g.$$

Além disso, denotaremos

$$B(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in V_g', \quad \forall \mathbf{u} \in V_g.$$

Antes de estimarmos o termo não linear $B(\mathbf{u})$ vamos provar algumas desigualdades que nos serão úteis.

**Lema 7.** *Se $n = 2$,*

$$||\mathbf{u}||_{L^4(\mathbb{R}^2, g)} \leq c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{2}} ||\mathbf{u}||^{\frac{1}{2}}, \tag{5.1}$$

*para todo $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^2, g)$. Se $n = 3$,*

$$||\mathbf{u}||_{L^4(\mathbb{R}^3, g)} \leq c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{4}} ||\mathbf{u}||^{\frac{3}{4}}, \tag{5.2}$$

*para todo $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^3, g)$.*

*Demonstração.* Para mostrar a desigualdade (5.1), observemos que

$$\mathbf{u}^2(x_1, x_2) = 2 \int_{-\infty}^{x_k} \mathbf{u}\mathbf{u}_{x_k}\, dx_k, \qquad k = 1, 2.$$

De fato,

$$\int_{-\infty}^{x_k} \mathbf{u}\mathbf{u}_{x_k}\, dx_k = \mathbf{u}\mathbf{u}\Big|_{-\infty}^{x_k} - \int_{-\infty}^{x_k} \mathbf{u}\mathbf{u}_{x_k}\, dx_k.$$

Então,

$$\max_{x_k} \mathbf{u}^2(x_1, x_2) \leq \int_{-\infty}^{x_k} |\mathbf{u}\mathbf{u}_{x_k}|\, dx_k.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}^4\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}^2\mathbf{u}^2\, dx \quad &\leq \quad \Big( \max_{x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^2\, dx_1 \Big) \Big( \max_{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^2\, dx_2 \Big) \\
&\leq \quad \Big( \int_{-\infty}^{\infty} \max_{x_2} \mathbf{u}^2\, dx_1 \Big) \Big( \int_{-\infty}^{\infty} \max_{x_1} \mathbf{u}^2\, dx_2 \Big) \\
&\leq \quad \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}\mathbf{u}_{x_2}|^2\, dx \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}\mathbf{u}_{x_1}|^2\, dx \\
&\leq \quad \Big( \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}|^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}_{x_2}|^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}|^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}_{x_1}|^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \quad \Big( \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int_{\mathbb{R}^2} |D\mathbf{u}|^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{u}|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int_{\mathbb{R}^2} |D\mathbf{u}|^2\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leq \ |\mathbf{u}|^2|D\mathbf{u}|^2.$$

Portanto,

$$||\mathbf{u}||^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq c|\mathbf{u}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}||\mathbf{u}||^2. \tag{5.3}$$

Pelo Lema 2, concluímos que

$$||\mathbf{u}||^4_{L^4(\mathbb{R}^2,g)} \leq c|\mathbf{u}|^2||\mathbf{u}||^2$$

e assim

$$||\mathbf{u}||_{L^4(\mathbb{R}^2,g)} \leq c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{2}}||\mathbf{u}||^{\frac{1}{2}}.$$

Para mostrar a desigualdade (5.2), usaremos o resultado anterior (5.3)

$$||\mathbf{u}||^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq c|\mathbf{u}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}||\mathbf{u}||^2.$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}^4\, dx_1\, dx_2 \ &\leq \ c\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}^2\, dx_1 dx_2\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{u}_{x_1} + \mathbf{u}_{x_2})^2\, dx_1\, dx_2\Big)\\
&\leq \ c\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}^2\, dx_1\, dx_2\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{u}^2_{x_1} + \mathbf{u}^2_{x_2})\, dx_1\, dx_2\Big).
\end{aligned}$$

Integrando com respeito a $x_3$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}^4\, dx \ &\leq \ c\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}^2\, dx_1\, dx_2\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{u}^2_{x_1} + \mathbf{u}^2_{x_2})\, dx_1\, dx_2\Big)\, dx_3\\
&\leq \ c\max_{x_3}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u}^2\, dx_1\, dx_2\Big)\int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u}^2_{x_1} + \mathbf{u}^2_{x_2} + \mathbf{u}^2_{x_3})\, dx\\
&\leq \ c\int_{\mathbb{R}^2} \max_{x_3} \mathbf{u}^2\, dx_1\, dx_2 \int_{\mathbb{R}^3} |D\mathbf{u}|^2\, dx\\
&\leq \ c\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}\mathbf{u}_{x_3}|\, dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |D\mathbf{u}|^2\, dx\Big)\\
&\leq \ c\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_{x_3}|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |D\mathbf{u}|^2\, dx\Big)\\
&\leq \ c\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |D\mathbf{u}|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |D\mathbf{u}|^2\, dx\Big).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$||\mathbf{u}||^4_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq c|\mathbf{u}|_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\mathbf{u}||^3.$$

Pelo Lema 2, temos

$$||\mathbf{u}||^4_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} \leq c|\mathbf{u}|||\mathbf{u}||^3,$$

isto é,

$$||\mathbf{u}||_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} \leq |\mathbf{u}|^{\frac{1}{4}}||\mathbf{u}||^{\frac{3}{4}}.$$

$\square$

**Lema 8.** *Se* $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V_g)$*, a função* $B\mathbf{u}$*, definida por*

$$\langle B\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g = b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_g \text{ e q.s. em } [0,T],$$

*pertence a* $L^1(0,T;V_g')$*. Além disso, a função* $D\mathbf{u}$*, definida por*

$$\langle D\mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle_g = \Big\langle \Big(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla\Big)\mathbf{u}, \mathbf{v}\Big\rangle_g = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{D_i g}{g}(D_i u_j) v_j g\, dx = b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\Big)$$

*para todo* $\mathbf{v} \in V_g$*, pertence a* $L^2(0,T;H_g)$ *e, consequentemente, pertence a* $L^2(0,T;V_g')$*.*

*Demonstração.* Pode ser facilmente verificado pelo lema anterior que, para quase todo t, $B\mathbf{u}(t) \in V_g'$. De fato, para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_g$, tem-se

$$\begin{aligned}
|\langle B\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g| &= |b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^{n} u_i (D_i u_j) v_j g\, dx \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^{n} u_i (D_i v_j) u_j g\, dx \Big| \\
&\leq c||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}||^2_{L^4(\mathbb{R}^n,g)} \\
&\leq c||\mathbf{v}||_{V_g} ||\mathbf{u}||^2_{L^4(\mathbb{R}^n,g)}
\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Hölder. Se $n = 2$, pela desigualdade (5.1),

$$||B\mathbf{u}||_{V_g'} \leq c||\mathbf{u}||^2_{L^4(\mathbb{R}^2,g)} \leq c|\mathbf{u}|\ ||\mathbf{u}||.$$

Se $n = 3$, pela desigualdade (5.2),

$$||B\mathbf{u}||_{V_g'} \leq c||\mathbf{u}||^2_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} \leq c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{2}} ||\mathbf{u}||^{\frac{3}{2}}.$$

Consequentemente, para $n = 2, 3$, temos

$$||B\mathbf{u}||_{V_g'} \leq c||\mathbf{u}||^2_{V_g} \tag{5.4}$$

para todo $\mathbf{u} \in V_g$ e para alguma constante $c$. Assim sendo, obtemos

$$\int_0^T ||B(\mathbf{u})||_{V_g'} dt \leq c \int_0^T ||\mathbf{u}(t)||^2_{V_g} dt < \infty$$

e portanto,

$$B\mathbf{u} \in L^1(0,T;V_g).$$

Para a estimativa de $D\mathbf{u}$, temos

$$\begin{aligned} |\langle D\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g| &= \Big| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{D_i g}{g} (D_i u_j) v_j g \, dx \Big| \\ &\leq c||\nabla g||_\infty ||\mathbf{u}|| |\mathbf{v}|. \end{aligned}$$

Isto é,

$$|D\mathbf{u}(t)| \leq c||\nabla g||_\infty ||\mathbf{u}||. \tag{5.5}$$

Logo,

$$\int_0^T |D\mathbf{u}(t)|^2 \, dt \leq c||\nabla g||_\infty^2 \int_0^T ||\mathbf{u}||^2 \, dt \leq c||\nabla g||_\infty^2 \int_0^T ||\mathbf{u}||_{V_g}^2 \, dt < \infty.$$

Segue que

$$D\mathbf{u}(t) \in L^2(0, T; H_g).$$

□

## 5.2 Compacidade

**Definição 18.** *Sejam $X$ e $Y$ dois espaços de Banach, $X \subset Y$. Dizemos que a imersão de $X$ em $Y$ é compacta e escrevemos*

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$$

*se*

*i) $||x||_Y \leq c||x||_X$, $x \in X$, para alguma constante $c$;*

*ii) Toda sequência limitada em $X$ possui subsequência que converge fortemente em $Y$.*

**Proposição 5.** *Sejam $X_0$, $X$ e $X_1$ três espaços de Banach tais que*

$$X_0 \subset X \subset X_1, \tag{5.6}$$

*com a imersão de $X$ em $X_1$ contínua e a imersão de $X_0$ em $X$ compacta. Então, para todo $\eta > 0$, existe alguma constante $c_\eta$ dependendo de $\eta$ (e dos espaços $X_0, X, X_1$) tal que*

$$||\mathbf{v}||_X \leq \eta||\mathbf{v}||_{X_0} + c_\eta||\mathbf{v}||_{X_1} \tag{5.7}$$

*para todo $\mathbf{v} \in X_0$.*

*Demonstração.* A demonstração será feita por contradição. Assumir que a desigualdade (5.7) não vale é dizer que existe algum $\eta > 0$ tal que, para todo $c \in \mathbb{R}$,

$$||\mathbf{v}||_X \geq \eta||\mathbf{v}||_{X_0} + c||\mathbf{v}||_{X_1}$$

para pelo menos um $\mathbf{v} \in X_0$. Tomando $c = m \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência de elementos $\mathbf{v}_m$ satisfazendo

$$||\mathbf{v}_m||_X \geq \eta||\mathbf{v}_m||_{X_0} + m||\mathbf{v}_m||_{X_1},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Consideremos a sequência normalizada

$$\mathbf{w}_m = \frac{\mathbf{v}_m}{||\mathbf{v}_m||_{X_0}}.$$

Note que

$$||\mathbf{w}_m||_X = \frac{||\mathbf{v}_m||_X}{||\mathbf{v}_m||_{X_0}} \geq \eta + m\frac{||\mathbf{v}_m||_{X_1}}{||\mathbf{v}_m||_{X_0}}.$$

Então, essa sequência satisfaz

$$||\mathbf{w}_m||_X \geq \eta + m||\mathbf{w}_m||_{X_1} \tag{5.8}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $||\mathbf{w}_m||_{X_0} = 1$, a sequência $\mathbf{w}_m$ é limitada em X ($X_0 \hookrightarrow X$). Assim sendo, podemos fazer $m \to \infty$ em

$$||\mathbf{w}_m||_{X_1} \leq \frac{1}{m}\eta + \frac{1}{m}||\mathbf{w}_m||_X,$$

o que implica

$$||\mathbf{w}_m||_{X_1} \longrightarrow 0. \tag{5.9}$$

Mais ainda, pela hipótese da imersão compacta, a sequência $\mathbf{w}_m$ é relativamente compacta em X; consequentemente, podemos extrair de $\mathbf{w}_m$ uma subsequência $\mathbf{w}_\mu$ convergente em X. Da convergência (5.9), o limite de $\mathbf{w}_\mu$ deveria ser 0, mas isso contradiz a desigualdade (5.8), pois

$$||\mathbf{w}_\mu||_X \geq \eta > 0$$

para todo $\mu \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. □

Agora, assumimos que $X_0$, $X$ e $X_1$ são espaços de Hilbert tais que

$$X_0 \subset X \subset X_1, \tag{5.10}$$

com as imersões sendo contínuas e a imersão de $X_0$ em $X$ compacta. Se $\mathbf{v} \in L^1(\mathbb{R}; X_1)$, denotamos por $\widehat{\mathbf{v}}$ sua tranformada de Fourier, dada por

$$\widehat{\mathbf{v}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi t\tau}\mathbf{v}(t)\,dt. \tag{5.11}$$

**Observação 6.** *A derivada com respeito a $t$ de ordem $\gamma > 0$ de $\mathbf{v}$ é dada pela transformada de Fourier inversa de $(2i\pi\tau)^\gamma\widehat{\mathbf{v}}$, ou ainda,*

$$\widehat{D_t^\gamma \mathbf{v}(\tau)} = (2i\pi\tau)^\gamma \widehat{\mathbf{v}}(\tau). \tag{5.12}$$

*De fato,*

$$\widehat{D_t^\gamma \mathbf{v}(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\tau t} D_t^\gamma \mathbf{v}(t)\,dt,$$

*integrando por partes repetidamente conseguimos exatamente a identidade* (5.12)*.*

Para $\gamma > 0$ dado, defina o espaço

$$\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \{\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}; X_0), D_t^\gamma \mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}; X_1)\}, \tag{5.13}$$

que é um espaço de Hilbert com a norma

$$||\mathbf{v}||_{\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};X_0,X_1)} = \{||\mathbf{v}||^2_{L^2(\mathbb{R};X_0)} + ||\ |\tau|^\gamma \widehat{\mathbf{v}}\ ||^2_{L^2(\mathbb{R};X_1)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Também definimos o subespaço $\mathcal{H}_K^\gamma$ de $\mathcal{H}^\gamma$, para qualquer conjunto limitado $K \subset \mathbb{R}$, como

$$\mathcal{H}_K^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1);\ \mathit{supp}\ \mathbf{u} \subset K\}$$

**Proposição 6.** *Assumindo que $X_0, X$ e $X_1$ são espaços de Hilbert que satisfazem $X_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X \hookrightarrow X_1$. Então, para qualquer conjunto limitado $K \subseteq \mathbb{R}$ e qualquer $\gamma > 0$,*

$$\mathcal{H}_K^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}; X).$$

*Demonstração.* Sejam $\gamma$ e K fixos e seja $\mathbf{u}_m$ uma sequência limitada em $\mathcal{H}_K^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1)$. Devemos mostrar que $\mathbf{u}_m$ contém uma subsequência fortemente convergente em $L^2(\mathbb{R}; X)$. Como $\mathcal{H}_K^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1)$ é um espaço de Hilbert, a sequência $\mathbf{u}_m$ contém uma subsequência $\mathbf{u}_\mu$ fracamente convergente neste espaço para algum elemento $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_K^\gamma$. Assim sendo, defina

$$\mathbf{v}_\mu = \mathbf{u}_\mu - \mathbf{u}.$$

A sequência $\mathbf{v}_\mu$ é uma sequência limitada de $\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R}; X_0, X_1)$ que converge fracamente para zero em $\mathcal{H}^\gamma$. Isto significa que

$$\mathbf{v}_\mu \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}; X_0) \text{ fracamente;} \tag{5.14}$$

$$|\tau|^\gamma \widehat{\mathbf{v}}_\mu \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}; X_1) \text{ fracamente.} \tag{5.15}$$

O resultado que queremos é obtido se mostrarmos que $\mathbf{u}_\mu$ converge fortemente para $\mathbf{u}$ em $L^2(\mathbb{R}; X)$, que é o mesmo que mostrar que

$$\mathbf{v}_\mu \longrightarrow 0 \;\; em \;\; L^2(\mathbb{R}; X) \text{ fortemente.} \tag{5.16}$$

Primeiramente, mostraremos que se

$$\mathbf{v}_\mu \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}; X_1) \text{ fortemente,} \tag{5.17}$$

vale a convergência (5.16). Com efeito, pela Proposição 5, temos

$$||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X)} \leq \eta ||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X_0)} + c_\eta ||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X_1)}. \tag{5.18}$$

Como $\mathbf{v}_\mu$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}; X_0)$,

$$||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X)} \leq \eta c + c_\eta ||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X_1)}. \tag{5.19}$$

Se assumirmos a convergência (5.17) como verdade, fazendo $\mu \longrightarrow \infty$ na desigualdade (5.19) obtemos

$$\lim_{\mu\to\infty} ||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X)} \leq \eta c.$$

Como $\eta$ é arbitrariamente pequeno na Proposição 5, o limite acima é zero e vale a convergência (5.16). Portanto, será suficiente mostrar a convergência (5.17).

Finalmente provaremos a convergência (5.17). De acordo com o Teorema de Parseval,

$$I_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} ||\mathbf{v}_\mu(t)||^2_{X_1}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} ||\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)||^2_{X_1}\, d\tau, \tag{5.20}$$

onde $\widehat{\mathbf{v}}_\mu$ denota a transformada de Fourier de $\mathbf{v}_\mu$. Devemos mostrar que

$$I_\mu \longrightarrow 0, \text{ quando } \mu \longrightarrow \infty. \tag{5.21}$$

Para isto, escrevemos

$$I_\mu \;\; = \;\; \int_{|\tau|\leq M} ||\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)||^2_{X_1}\, d\tau + \int_{|\tau|>M} (1+|\tau|^{2\gamma}) ||\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)||^2_{X_1} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{2\gamma})}$$

$$\leq \quad \frac{c}{1+M^{2\gamma}} + \int_{|\tau|\leq M} ||\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)||^2_{X_1}\, d\tau,$$

pois $|\tau|^\gamma \widehat{\mathbf{v}}_\mu$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}; X_1)$. Para um $\varepsilon > 0$ dado, escolhemos M tal que

$$\frac{c}{1+M^{2\gamma}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consequentemente,

$$I_\mu \leq \int_{|\tau|\leq M} ||\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)||^2_{X_1}\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Denotemos

$$J_\mu = \int_{|\tau|\leq M} ||\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)||^2_{X_1}\, d\tau.$$

Portanto, se mostrarmos, para o mesmo M fixo, que

$$J_\mu = \int_{|\tau|\leq M} ||\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)||^2_{X_1}\, d\tau \longrightarrow 0, \text{ quando } \mu \longrightarrow \infty, \tag{5.22}$$

a convergência (5.21) é provada. Para isso, usaremos o Teorema da convergência dominada de Lebesgue. Se $\chi$ denota a função característica de K, então $\mathbf{v}_\mu \chi = \mathbf{v}_\mu$ e

$$\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi t\tau} \chi(t) \mathbf{v}_\mu(t)\, dt.$$

Então,

$$\begin{aligned} ||\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)||_{X_1} &\leq ||\mathbf{v}_\mu||_{L^2(\mathbb{R};X_1)} ||e^{-2i\pi t\tau}\chi||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \text{ constante}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

pela convergência (5.14) e pela hipótese (5.10). Por outro lado, para cada $\sigma$ em $X_0$ e cada $\tau$ fixo, temos

$$((\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau), \sigma))_{X_0} = \int_{-\infty}^{\infty} ((\mathbf{v}_\mu(t), e^{-2i\pi t\tau}\chi(t)\sigma))_{X_0}\, dt. \tag{5.24}$$

Note que a identidade (5.24) converge para zero quando $\mu \longrightarrow \infty$, pela convergência (5.14). Portanto, a sequência $\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)$ converge fracamente para zero em $X_0$. Então, pela hipótese de imersão, $\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)$ converge fortemente para zero em $X$ e em $X_1$. Como $\widehat{\mathbf{v}}_\mu(\tau)$ é limitada, pela desigualdade (5.23), e converge fortemente para zero em $X_1$, usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue conseguimos a convergência (5.22). □

**Observação 7.** *Os espaços que utilizamos foram*

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n); \nabla \cdot (g\mathbf{u}) = 0\};$$

$$H_g = \text{ O fecho de } \mathcal{V} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n, g);$$

$$V_g = \text{ O fecho de } \mathcal{V} \text{ em } H_0^1(\mathbb{R}^n, g),$$

*onde $H_g$ é dotado do produto escalar e da norma em $L^2(\mathbb{R}^n, g)$, e $V_g$ é dotado do produto escalar e da norma em $H^1(\mathbb{R}^n, g)$. O espaço $V_g$ está contido em $H_g$, é denso em $H_g$ e a imersão é contínua. Mas a imersão não é compacta, então não podemos usar os resultados anteriores de compacidade. Consequentemente, para usar esses resultados, consideremos uma bola limitada $\mathcal{Q}$ em $\mathbb{R}^n$ em vez de $\mathbb{R}^n$ e reformularemos nossa definição:*

$$\mathcal{V}(\mathcal{Q}) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}); \nabla \cdot (g\mathbf{u}) = 0\};$$

$$H_g(\mathcal{Q}) = \text{ O fecho de } \mathcal{V}(\mathcal{Q}) \text{ em } L^2(\mathcal{Q}, g);$$

$$V_g(\mathcal{Q}) = \text{ O fecho de } \mathcal{V}(\mathcal{Q}) \text{ em } H_0^1(\mathcal{Q}, g).$$

*Então, o espaço $V_g(\mathcal{Q})$ está contido em $H_g(\mathcal{Q})$, é denso em $H_g(\mathcal{Q})$ e $V_g(\mathcal{Q}) \overset{c}{\hookrightarrow} H_g(\mathcal{Q})$, pelo Teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov (encontra-se em [5, p. 272]) ($H_0^1(\mathcal{Q}) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\mathcal{Q})$). Dessa forma, podemos usar as proposições anteriores e o lema a seguir.*

**Lema 9.** *Se $\mathbf{u}_k$ converge fracamente para $\mathbf{u}$ em $L^2(0,T;V_g(\mathcal{Q}))$ e fortemente em $L^2(0,T;H_g(\mathcal{Q}))$, então para qualquer função vetorial $\mathbf{w}$ com componentes em $C_0^1(\mathcal{Q})$,*

$$\int_0^T b(\mathbf{u}_k(t), \mathbf{u}_k(t), \mathbf{w}(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t))\, dt.$$

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned} \int_0^T b(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w})\, dt &= -\int_0^T b(\mathbf{u}_k, \mathbf{w}, \mathbf{u}_k)\, dt \\ &= -\sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{u}_k)_i (D_i \mathbf{w})(\mathbf{u}_k)_i \; g\, dx\, dt. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{u}_k$ converge fracamente para $\mathbf{u}$ em $L^2(0,T;V_g(\mathcal{Q}))$ e $\mathbf{u}_k$ converge fortemente para $\mathbf{u}$ em $L^2(0,T;H_g(\mathcal{Q}))$ as integrais acima convergem para

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{u}_i (D_i \mathbf{w}_j) \mathbf{u}_j g\, dx\, dt = -\int_0^T b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{u})\, dt = \int_0^T b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w})\, dt,$$

pelo item $v$) da Proposição 1.

□

# 6 O Problema de Valor Inicial para as Equações g-Navier-Stokes

Esta seção é destinada ao estudo do problema de valor inicial para equações g-Navier-Stokes que é, basicamente, encontrar uma função vetorial $\mathbf{u}$ adequada e uma função escalar $p$ tais que

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n, \quad p : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$$

satisfaçam

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{g}(\nabla \cdot (g\mathbf{u})) = \nabla \cdot \mathbf{u} + (\frac{\nabla g}{g} \cdot \mathbf{u}) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{6.2}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) \text{ em } \Omega.$$

Continuaremos considerando aqui $\Omega = \mathbb{R}^n$ e nossa demonstração será feita em duas etapas: primeiro mostraremos a existência e, em seguida, a unicidade da solução para $n = 2, 3$.

## 6.1 Existência da solução para o problema variacional

**Problema 2.** *Dados* $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V_g')$ *e* $\mathbf{u}_0 \in H_g$*, encontrar* $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V_g)$ *satisfazendo*

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_g + \nu((\mathbf{u},\mathbf{v}))_g + b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_g - \left\langle \Big(\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla\Big)\mathbf{u}, \mathbf{v} \right\rangle_g, \quad \forall \mathbf{v} \in V_g, \tag{6.3}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x). \tag{6.4}$$

Se $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V_g)$ satisfaz a equação (6.3), então pelas identidades (3.4), (3.5) e Lema 8, podemos escrever a equação (6.3) como

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B\mathbf{u} - D\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{v} \in V_g$. Note que, como $A\mathbf{u} \in L^2(0,T;V_g')$, $B\mathbf{u} \in L^1(0,T;V_g')$ e $D\mathbf{u} \in L^2(0,T;V_g')$, a função $\mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B\mathbf{u} - D\mathbf{u} \in L^1(0,T;V_g')$. Assim sendo, usando o Lema 3, vemos que $\mathbf{u}$ é contínua de $[0,T]$ em $V_g'$.

**Teorema 4.** *Assuma que* $\mathbf{f} \in L^2(0,T;V_g')$ *e* $\mathbf{u}_0 \in H_g$. *Então, existe pelo menos uma solução* $\mathbf{u}$ *do Problema 2. Além disso,*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H_g) \tag{6.5}$$

*e* $\mathbf{u}$ *é fracamente contínua de [0,T] em* $H_g$.

*Demonstração.* Aplicaremos o método de Galerkin para construir uma solução aproximada. Como $V_g$ é separável e $\mathcal{V}$ é denso em $V_g$, existe uma sequência $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m, ...$ de elementos de $\mathcal{V}$ que é linearmente independente e densa em $V_g$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denote por $V_{g,m} := < \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m >$ o subespaço de $V_g$ gerado por $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$. Consideraremos, em $V_{g,m}$, o problema aproximado de (6.3): encontrar uma função $\mathbf{u}_m : [0,T] \longrightarrow V_{g,m}$ definida como

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \phi_{im}(t)\mathbf{w}_i$$

tal que, para cada $j = 1, ..., m$, temos

$$\langle \mathbf{u'}_m(t), \mathbf{w}_j\rangle_g + \nu((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j))_g + b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\Big) + b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle_g \tag{6.6}$$

para $t \in [0,T]$, $j = 1, 2, ..., m$ e

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m},$$

onde $\mathbf{u}_{0m}$ é a projeção ortogonal em $H_g$ de $\mathbf{u}_0$ no espaço gerado por $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$. Então, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\rangle_g \phi'_{im}(t) + \nu \sum_{i=1}^{m} ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j))_g \phi_{im}(t) + \sum_{i=1}^{m} b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\Big)\phi_{im}(t)$$

$$+ \sum_{i,l=1}^{m} b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j)\phi_{im}(t)\phi_{lm}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle_g, \quad j = 1, ..., m.$$

Invertendo a matriz não singular com elementos $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\rangle_g$, $1 \le i,j \le m$, podemos escrever as equações diferenciais na forma usual

$$\phi'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\phi_{im}(t) + \sum_{i,l=1}^{m} \alpha_{ilj}\phi_{im}(t)\phi_{lm}(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle_g, \tag{6.7}$$

onde $\alpha_{ij}, \alpha_{ilj}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$. Seja

$$\sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i \rangle_g \mathbf{w}_i = \mathbf{u}_{0m} = \mathbf{u}_m(0) = \sum_{i=1}^{m} \phi_{im}(0)\mathbf{w}_i,$$

temos

$$\phi_{im}(0) = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i \rangle_g. \tag{6.8}$$

Como $t \mapsto \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j \rangle_g$ é quadrado integrável, as funções $\phi_{im}, \phi'_{im}$ também o são e assim sendo, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{u}_m \in L^2(0,T;V_g), \quad \mathbf{u'}_m \in L^2(0,T;V_g).$$

O sistema diferencial ordinário não linear (6.7) com a condição inicial (6.8) tem uma solução maximal definida em algum intervalo $[0, t_m]$. Se $t_m < T$, então $|\mathbf{u}_m(t)|$ deve tender a infinito quando $t$ tende a $t_m$. As estimativas que faremos a seguir mostram que isso não acontece e assim, $t_m = T$.

Passo 1. Multiplicamos a equação (6.6) por $\phi_{jm}(t)$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u'}_m(t), \phi_{jm}(t)\mathbf{w}_j \rangle_g &+ \nu((\mathbf{u}_m(t), \phi_{jm}(t)\mathbf{w}_j))_g + b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}_m(t), \phi_{jm}(t)\mathbf{w}_j\Big) \\ &+ b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \phi_{jm}(t)\mathbf{w}_j) = \langle \mathbf{f}(t), \phi_{jm}(t)\mathbf{w}_j \rangle_g \end{aligned}$$

e somamos essas equações para $j = 1, ..., m$ para obter

$$(\mathbf{u'}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle_g - b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\Big).$$

Note que o termo $b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t))$ se anula. Podemos escrever

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) = 2(\mathbf{u'}_m(t), \mathbf{u}_m(t)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 &= 2\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m(t) \rangle_g + 2b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\Big) \qquad (6.9) \\ &\leq 2||\mathbf{f}(t)||_{V'_g}||\mathbf{u}_m(t)||_{V_g} + \frac{2}{m}||\nabla g||_\infty |\mathbf{u}_m(t)|||\mathbf{u}_m(t)|| \\ &\leq \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2_{V_g} + \frac{c}{\nu}||\mathbf{f}(t)||^2_{V'_g} + \frac{c}{\nu m^2}||\nabla g||^2_\infty |\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 \\ &= 2\nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 + \frac{c}{\nu}||\mathbf{f}(t)||^2_{V'_g} + \Big(\nu + \frac{c}{\nu m^2}||\nabla g||^2_\infty\Big)|\mathbf{u}_m(t)|^2 \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Young e a definição da norma em $V_g$. Então,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq \frac{c}{\nu}||\mathbf{f}(t)||^2_{V'_g} + \alpha|\mathbf{u}_m(t)|^2, \tag{6.10}$$

onde $\alpha = \nu + \frac{c}{\nu m^2}||\nabla g||_\infty^2$. Pela desigualdade de Gronwall,

$$|\mathbf{u}_m(t)|^2 \leq e^{\alpha t}\Big(|\mathbf{u}_m(0)|^2 + \frac{c}{\nu}\int_0^t ||\mathbf{f}(s)||_{V_g'}^2\, ds\Big).$$

Pela hipótese, o lado direito da desigualdade acima é uniformemente limitado para todo $s \in [0, T]$. Consequentemente,

$$\sup_{s\in[0,T]} |\mathbf{u}_m(s)|^2 \leq e^{\alpha T}\Big(|\mathbf{u}_m(0)|^2 + \frac{c}{\nu}\int_0^T ||\mathbf{f}(s)||_{V_g'}^2\, ds\Big)$$

o que implica que

$$\mathbf{u}_m \text{ permanece em um subconjunto limitado de } L^\infty(0, T; H_g). \tag{6.11}$$

Passo 2. Por conveniência, definiremos

$$K(T) = e^{\alpha T}\Big(|\mathbf{u}_m(0)|^2 + \frac{c}{\nu}\int_0^T ||\mathbf{f}(s)||_{V_g'}^2\, ds\Big).$$

Estimando novamente a equação (6.9) e fazendo uso de um $\varepsilon$ apropriado na desigualdade de Young ($\varepsilon = \frac{\nu}{2}$), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 &\leq 2||\mathbf{f}(t)||_{V_g'}||\mathbf{u}_m(t)||_{V_g} + \frac{c}{\nu m^2}||\nabla g||_\infty^2|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2\\ &\leq \frac{\nu}{2}||\mathbf{u}_m(t)||_{V_g}^2 + \frac{2c}{\nu}||\mathbf{f}(t)||_{V_g'}^2 + \frac{c}{\nu m^2}||\nabla g||_\infty^2|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}_m(t)||^2 \leq \frac{\nu}{2}||\mathbf{u}_m(t)|| + \frac{\nu}{2}|\mathbf{u}_m(t)| + \frac{2c}{\nu}||\mathbf{f}(t)||_{V_g'}^2 + \frac{c}{\nu m^2}||\nabla g||_\infty^2|\mathbf{u}_m(t)|^2.$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \frac{\nu}{2}||\mathbf{u}_m(t)||^2 \leq \alpha_0|\mathbf{u}_m(t)|^2 + \frac{2c}{\nu}||\mathbf{f}(t)||_{V_g'}^2,$$

onde $\alpha_0 = \frac{\nu}{2} + \frac{c}{\nu m^2}||\nabla g||_\infty^2$. Integrando de 0 a T,

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}_m(T)|^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||^2\, dt &\leq |\mathbf{u}_{0m}|^2 + \frac{2c}{\nu}\int_0^T ||f(t)||_{V_g'}^2\, dt + \alpha_0\int_0^T |\mathbf{u}_m(t)|^2\, dt\\ &\leq |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{2c}{\nu}\int_0^T ||f(t)||_{V_g'}^2\, dt + \alpha_0 K(T)T.\end{aligned}$$

Portanto, como

$$\int_0^T |\mathbf{u}_m(t)|^2\, dt < \infty \quad \text{e} \quad \int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||^2\, dt < \infty,$$

concluímos que

$$\int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||_{V_g}^2 \, dt < \infty.$$

Assim sendo,

$$\mathbf{u}_m \text{ permanece em um subconjunto limitado de } L^2(0,T;V_g). \tag{6.12}$$

Passo 3. Seja $\widetilde{\mathbf{u}}_m : \mathbb{R} \to V_g$ definida por

$$\widetilde{\mathbf{u}}_m(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_m(t), \ t \in [0,T], \\ \\ 0, \ t \in \mathbb{R} \setminus [0,T]. \end{cases}$$

A Transformada de Fourier de $\widetilde{\mathbf{u}}_m$ é denotada por $\widehat{\mathbf{u}}_m$. Queremos mostrar que existe uma constante positiva $c$ e $\gamma$ tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \, d\tau \leq c. \tag{6.13}$$

Então, caso valha a desigualdade (6.13),

$$\widetilde{\mathbf{u}}_m \text{ permanece em um subconjunto limitado de } \mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};V_g,H_g), \tag{6.14}$$

já que $\mathbf{u}_m$ permanece em um subconjunto limitado de $L^2(0,T;V_g)$. A distribuição "derivada de $\widetilde{\mathbf{u}}_m$" é dada por

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\mathbf{u}}_m = \widetilde{\phi}_m + \mathbf{u}_m(0)\delta_0 - \mathbf{u}_m(T)\delta_T,$$

onde $\delta_0$ e $\delta_T$ são as distribuições de Dirac concentradas em 0 e $T$ respectivamente e $\phi_m = \mathbf{u'}_m$ é a derivada de $\mathbf{u}_m$ em $[0,T]$. De fato, se $\varphi$ é algum elemento em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}\widetilde{\mathbf{u}}_m(t), \varphi(t) \right\rangle &= -\langle \widetilde{\mathbf{u}}_m(t), \varphi'(t) \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\mathbf{u}}_m(t)\varphi'(t) \, dt \\ &= -\int_0^T \mathbf{u}_m(t)\varphi'(t) \, dt \\ &= -\mathbf{u}_m(T)\varphi(T) + \mathbf{u}_m(0)\varphi(0) + \int_0^T \mathbf{u'}_m(t)\varphi(t) \, dt \\ &= \langle -\mathbf{u}_m(T)\delta_T + \mathbf{u}_m(0)\delta_0 + \mathbf{u'}_m(t), \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\frac{d}{dt}\langle\widetilde{\mathbf{u}}_m,\mathbf{w}_j\rangle_g=\langle\widetilde{\phi}_m,\mathbf{w}_j\rangle_g+\langle\mathbf{u}_m(0),\mathbf{w}_j\rangle_g\delta_0-\langle\mathbf{u}_m(T),\mathbf{w}_j\rangle_g\delta_T.$$

Usando a identidade (6.6),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\widetilde{\mathbf{u}}_m,\mathbf{w}_j\rangle_g = & -\ \nu((\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_j))_g-b\Big(\frac{\nabla g}{g},\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_j\Big)-b(\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_j)\\ & +\ \langle\mathbf{u}_{0m},\mathbf{w}_j\rangle_g\delta_0-\langle\mathbf{u}_m(T),\mathbf{w}_j\rangle_g\delta_T+\langle\mathbf{f}(t),\mathbf{w}_j\rangle_g.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\langle\widetilde{\mathbf{u}}_m,\mathbf{w}_j\rangle_g=\langle\widetilde{\mathbf{f}}_m,\mathbf{w}_j\rangle_g+\langle\mathbf{u}_{0m},\mathbf{w}_j\rangle_g\delta_0-\langle\mathbf{u}_m(T),\mathbf{w}_j\rangle_g\delta_T \tag{6.15}$$

para $j=1,...,m$, onde $\delta_0,\delta_T$ são deltas de Dirac concentrados em 0 e $T$ respectivamente. Definimos $\mathbf{f}_m=\mathbf{f}-\nu A\mathbf{u}_m-B\mathbf{u}_m-D\mathbf{u}_m$ e

$$\widetilde{\mathbf{f}}_m(t)=\begin{cases}\mathbf{f}_m(t),\ \ t\in[0,T],\\ \\ 0,\ \ t\in\mathbb{R}\setminus[0,T].\end{cases}$$

Usando as propriedades da transformada de Fourier de funções ($\widehat{d\mathbf{u}/dt}=2i\pi\tau\widehat{\mathbf{u}}$) e de distribuições ($\widehat{\delta_0}=e^{-2i\pi\tau 0}$ e $\widehat{\delta_T}=e^{-2i\pi\tau T}$), a equação (6.15) nos dá

$$2i\pi\tau\langle\widehat{\mathbf{u}}_m,\mathbf{w}_j\rangle_g=\langle\widehat{\mathbf{f}}_m,\mathbf{w}_j\rangle_g+\langle\mathbf{u}_{0m},\mathbf{w}_j\rangle_g e^{-2i\pi\tau 0}-\langle\mathbf{u}_m(T),\mathbf{w}_j\rangle_g e^{-2i\pi\tau T}.$$

Logo,

$$2i\pi\tau\langle\widehat{\mathbf{u}}_m,\mathbf{w}_j\rangle_g=\langle\widehat{\mathbf{f}}_m,\mathbf{w}_j\rangle_g+\langle\mathbf{u}_{0m},\mathbf{w}_j\rangle_g-\langle\mathbf{u}_m(T),\mathbf{w}_j\rangle_g e^{-2i\pi\tau T}, \tag{6.16}$$

com $\widehat{\mathbf{u}}_m$ e $\widehat{\mathbf{f}}_m$ denotando a transformada de Fourier de $\widetilde{\mathbf{u}}_m$ e $\widetilde{\mathbf{f}}_m$ respectivamente. Multiplicamos a identidade (6.16) por $\widehat{\phi}_{jm}(\tau)$ (transformada de Fourier de $\widetilde{\phi}_{jm}$) e somamos as equações resultantes para $j=1,...,m$ para obter

$$2i\pi\tau|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2=\langle\widehat{\mathbf{f}}_m(\tau),\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)\rangle_g+\langle\mathbf{u}_{0m},\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)\rangle_g-\langle\mathbf{u}_m(T),\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)\rangle_g e^{-2i\pi\tau T}.$$

Pela definição de $\mathbf{f}_m$, pela identidade (3.5) e pelas desigualdades (5.4) e (5.5), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T||\mathbf{f}_m(t)||_{V_g'}dt\ &\leq\ \int_0^T||\mathbf{f}(t)-\nu A\mathbf{u}_m(t)-B\mathbf{u}_m(t)-D\mathbf{u}_m(t)||_{V_g'}\,dt\\ &\leq\ \int_0^T||\mathbf{f}(t)||_{V_g'}+\nu||A\mathbf{u}_m(t)||_{V_g'}+||B\mathbf{u}_m(t)||_{V_g'}+||D\mathbf{u}_m(t)||_{V_g'}\,dt\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^T ||\mathbf{f}(t)||_{V_g'} + \nu||\mathbf{u}_m(t)||_{V_g} + c||\mathbf{u}_m(t)||_{V_g}^2 + c||\nabla g||_\infty ||\mathbf{u}_m(t)||\, dt$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Assim sendo, $\mathbf{f}_m(t)$ pertence a um conjunto limitado no espaço $L^1(0,T;V_g')$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} ||\widehat{\mathbf{f}}_m(\tau)||_{V_g'} &= \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \Big|\Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\tau t}\widetilde{\mathbf{f}}_m(t)\, dt \Big|\Big|_{V_g'} \\ &\leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} ||\widetilde{\mathbf{f}}_m(t)||_{V_g'}\, dt \\ &= \int_0^T ||\mathbf{f}_m(t)||_{V_g'}\, dt \leq C, \ \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Então, usando que

$$|\mathbf{u}_m(0)| \leq K(T), \ \ |\mathbf{u}_m(T)| \leq K(T)$$

e as identidades (6.16) e (6.17), temos

$$\begin{aligned} |\tau|\,|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 &\leq \frac{1}{2i\pi}\Big(|\langle \widehat{\mathbf{f}}_m, \widehat{\mathbf{u}}_m\rangle_g| + |\langle \mathbf{u}_m(0), \widehat{\mathbf{u}}_m\rangle_g| + |\langle \mathbf{u}_m(T), e^{-2i\pi\tau T}\widehat{\mathbf{u}}_m\rangle_g|\Big) \\ &\leq \frac{1}{2i\pi}\Big(||\widehat{\mathbf{f}}_m(\tau)||_{V_g'}||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g} + |\mathbf{u}_m(0)|\ ||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g} + |\mathbf{u}_m(T)|\ ||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g}\Big) \\ &\leq \frac{1}{2i\pi}\Big(C||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g} + K(T)||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g} + K(T)||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g}\Big) \\ &= C_1||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|\tau|\,|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \leq C_1||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g}. \tag{6.18}$$

Agora, afirmamos que para $\gamma$ fixado com $0 < \gamma < \frac{1}{4}$, existe $C_2(\gamma) > 0$ tal que

$$|\tau|^{2\gamma} \leq C_2(\gamma)\frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}$$

para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Com efeito, seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = |x|^{2\gamma}\frac{(1+|x|^{1-2\gamma})}{1+|x|}.$$

$g$ é contínua em $\mathbb{R}$ e, além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow\infty} g(x) &= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{|x|^{2\gamma}(1+|x|^{1-2\gamma})}{1+|x|} \\ &= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{|x|^{2\gamma}+|x|}{1+|x|} \\ &= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{|x|^{2\gamma-1}+1}{\frac{1}{|x|}+1}. \end{aligned}$$

Como $\gamma < \frac{1}{4}$, $2\gamma - 1 < 0$ e assim

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} g(x) = 1.$$

Dessa forma, $g$ é limitada em $\mathbb{R}$. Pela desigualdade (6.18), temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \, d\tau &\leq C_2(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} |\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 \, d\tau \\
&\leq C_2(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \, d\tau + C_2(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \, d\tau \\
&\leq C_3 \int_{-\infty}^{\infty} ||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g}^2 \, d\tau + C_4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g}}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \, d\tau.
\end{aligned}$$

Para conseguir nossa estimativa, precisamos limitar o membro direito da desigualdade acima. Como $\mathbf{u}_m \in L^2(0, T; V_g)$, pela identidade de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} ||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g}^2 \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} ||\widetilde{\mathbf{u}}_m(t)||_{V_g}^2 \, d\tau = \int_0^T ||\mathbf{u}_m(t)||_{V_g}^2 \, dt \leq \text{ constante.}$$

Além disso, pela desigualdade de Schwarz e a identidade de Parseval, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{||\widehat{\mathbf{u}}_m(\tau)||_{V_g}}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \, d\tau \leq \Big( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2} \, d\tau \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int_{-\infty}^{\infty} ||\widetilde{\mathbf{u}}_m(t)||_{V_g}^2 \, d\tau \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2} \, d\tau$$

é finito, pois a função definida por $h(\tau) = 1/(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2$ é par, logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2} \, d\tau = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + \tau^{1-2\gamma})^2} \, d\tau.$$

Se $0 < \tau < 1$, então $\tau^{1-2\gamma} = \frac{\tau}{\tau^{2\gamma}} > \tau$. Daí,

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 + \tau^{1-2\gamma})^2} \, d\tau \leq \int_0^1 \frac{1}{(1 + \tau)^2} \, d\tau = \frac{1}{2}.$$

Se $\tau > 1$, temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1 + \tau^{1-2\gamma})^2} \, d\tau = \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + 2\tau^{1-2\gamma} + \tau^{2-4\gamma}} \, d\tau < \int_1^{\infty} \frac{1}{\tau^{2-4\gamma}} \, d\tau.$$

Calculando essa integral,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{(1 + \tau^{1-2\gamma})^2} \, d\tau &= \lim_{M \longrightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{(1 + \tau^{1-2\gamma})^2} \, d\tau \\
&< \lim_{M \longrightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{\tau^{2-4\gamma}} \, d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{M\longrightarrow\infty} \frac{\tau^{4\gamma-1}}{4\gamma-1}\Big|_1^M \\
&= \Big[\frac{M^{4\gamma-1}}{4\gamma-1} - \frac{1}{4\gamma-1}\Big] \\
&= -\frac{1}{4\gamma-1},
\end{aligned}
$$

pois $\gamma < \frac{1}{4}$. Então, conseguimos provar a desigualdade (6.13) e concluímos que vale a afirmação (6.14).

Até agora, obtivemos que $\mathbf{u}_m$ permanece em um conjunto limitado de $L^\infty(0,T;H_g)$, $L^2(0,T;V_g)$ e $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};V_g,H_g)$. As estimativas (6.11) e (6.12) garantem a existência de um elemento $\mathbf{u} \in L^2(0,T;V_g) \cap L^\infty(0,T;H_g)$ e uma subsequência $\mathbf{u}_{m'}$ tais que

$$\mathbf{u}_{m'} \longrightarrow \mathbf{u} \text{ em } L^2(0,T;V_g) \text{ fracamente} \tag{6.19}$$

e

$$\mathbf{u}_{m'} \longrightarrow \mathbf{u} \text{ em } L^\infty(0,T;H_g) \text{ fraca-estrela} \tag{6.20}$$

quando $m' \longrightarrow \infty$.

Para qualquer bola $\mathcal{Q}$ contida em $\mathbb{R}^n$, a imersão de $H_0^1(\mathcal{Q})$ em $L^2(\mathcal{Q})$ é compacta. Portanto, a imersão de $V_g(\mathcal{Q})$ em $H_g(\mathcal{Q})$ é compacta e a afirmação (6.14) nos diz que $\mathbf{u}_m\Big|_{\mathcal{Q}}$ pertence a um conjunto limitado de $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};V_g(\mathcal{Q}),H_g(\mathcal{Q}))$. Considerando $[0,T] = K$, a Proposição 6 implica que a imersão de $\mathcal{H}_K^\gamma(\mathbb{R};V_g(\mathcal{Q}),H_g(\mathcal{Q}))$ em $L^2(0,T;H_g(\mathcal{Q}))$ é compacta. Logo,

$$\mathbf{u}_{m'}\Big|_{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathbf{u}\Big|_{\mathcal{Q}} \text{ em } L^2(0,T;H_g(\mathcal{Q})) \text{ fortemente, para todo } \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n.$$

Similarmente, para qualquer suporte $\mathcal{Q}_j$ de $\mathbf{w}_j$, temos

$$\mathbf{u}_{m'}\Big|_{\mathcal{Q}_j} \longrightarrow \mathbf{u}\Big|_{\mathcal{Q}_j} \text{ em } L^2(0,T;H_g(\mathcal{Q}_j)) \text{ fortemente,} \tag{6.21}$$

lembrando que $\mathbf{u}_m = \displaystyle\sum_{j=1}^m \phi_{jm}\mathbf{w}_j$.

Seja $\psi$ uma função continuamente diferenciável em $[0,T]$, com $\psi(T) = 0$. Multiplicamos a identidade (6.6) por $\psi(t)$ e então integramos,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T (\mathbf{u'}_m(t),\mathbf{w}_j)\psi(t)\,dt \;&+\; \nu\int_0^T ((\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j))_g\psi(t)\,dt + \int_0^T b\Big(\frac{\nabla g}{g},\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j\Big)\psi(t)\,dt \\
&+ \int_0^T b(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t),\mathbf{w}_j)\psi(t)\,dt = \int_0^T \langle \mathbf{f}(t),\mathbf{w}_j\rangle_g\psi(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes o primeiro termo,

$$\begin{aligned}\int_0^T (\mathbf{u'}_m(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\,dt &= \psi(t)(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\Big|_0^T - \int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\psi'(t)\,dt \\ &= -\psi(0)(\mathbf{u}_m(0), \mathbf{w}_j) - \int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\psi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Assim sendo, segue que

$$\begin{aligned}&- \int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\psi'(t)\,dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j))_g \psi(t)\,dt + \int_0^T b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j\Big)\psi(t)\,dt \\ &+ \int_0^T b(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j)\psi(t)\,dt = (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{w}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{w}_j\rangle_g \psi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Devemos notar que cada termo tem o mesmo valor quando substituímos $\mathbf{u}_m$ por $\mathbf{u}_m\Big|_{\mathcal{Q}_j}$, pois $\mathbf{w}_j$ se anula fora de $\mathcal{Q}_j$. Para os termos lineares, podemos tomar o limite quando $m' \longrightarrow \infty$, pelas convergências (6.19) e (6.20). E para o termo não linear nos é permitido passar ao limite fazendo $m' \longrightarrow \infty$ pela convergência (6.21) e pelo Lema 9. Obtemos

$$\begin{aligned}&- \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v})\psi'(t)dt + \nu \int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_g \psi(t)\,dt + \int_0^T b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\Big)\psi(t)\,dt \\ &+ \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}\rangle_g \psi(t)\,dt. \end{aligned} \tag{6.22}$$

A identidade (6.22) vale para $\mathbf{v}$ igual a uma combinação linear finita de $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ...$, e vale também para qualquer $\mathbf{v} \in V_g$ pela densidade do subconjunto $(\mathbf{w}_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Escrevendo, em particular, a equação (6.22) com $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})\phi(t)\,dt &+ \nu \int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_g \phi(t)\,dt + \int_0^T b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\Big)\phi(t)\,dt \\ &+ \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})\phi(t)\,dt = \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}\rangle_g \phi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{u}$ satisfaz a equação (6.3) no sentido das distribuições. Logo,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_g + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\Big) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}\rangle_g.$$

Finalmente, nos resta mostrar que $\mathbf{u}$ satisfaz a condição inicial (6.4). Para isto, multiplicamos a equação (6.3) por $\psi$ e integramos. Integrando o primeiro termo por partes, como fizemos anteriormente, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T (\mathbf{u}'(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt &+ \nu \int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))_g \psi(t)\,dt + \int_0^T b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})\psi(t)\,dt \\ &+ \int_0^T b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\Big)\psi(t)\,dt = \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}\rangle_g \psi(t)\,dt,\end{aligned}$$

implicando em

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi'(t)\,dt + \nu\int_0^T ((\mathbf{u}(t),\mathbf{v}))_g\psi(t)\,dt + \int_0^T b\Big(\frac{\nabla g}{g},\mathbf{u}(t),\mathbf{v}\Big)\psi(t)\,dt\\
&+ \int_0^T b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})\psi(t)\,dt = (\mathbf{u}(0),\mathbf{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t),\mathbf{v}\rangle_g\psi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Comparando com a equação (6.22), temos

$$(\mathbf{u}(0)-\mathbf{u}_0,\mathbf{v})\psi(0) = 0.$$

Escolhendo $\psi$ de tal forma que $\psi(0)=1$,

$$(\mathbf{u}(0)-\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) = 0,$$

para todo $\mathbf{v}\in V_g$. E então conclui-se que

$$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0.$$

Para mostrar que $\mathbf{u}$ é fracamente contínua de $[0,T]$ em $H_g$ devemos recordar o Lema 3 que diz que $\mathbf{u}$ é contínua de $[0,T]$ em $V_g'$. Lembrando também que a afirmação (6.11) garante que $\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;H_g)$. Dessa forma, a solução $\mathbf{u}$ satisfaz as hipóteses do Lema 6 que nos diz que $\mathbf{u}$ é fracamente contínua de $[0,T]$ em $H_g$. □

## 6.2 Unicidade da solução do Problema 2

Começamos essa seção com estimativas que serão usadas na demonstração da unicidade.

**Lema 10.** *Se $n=2$,*

$$|b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})| \le c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{2}}||\mathbf{u}||^{\frac{1}{2}}||\mathbf{v}||\ |\mathbf{w}|^{\frac{1}{2}}||\mathbf{w}||^{\frac{1}{2}}, \tag{6.23}$$

*para todo $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in H^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se $\mathbf{u}\in L^2(0,T;V_g)\cap L^\infty(0,T;H_g)$, então $B\mathbf{u}\in L^2(0,T;V_g')$ e*

$$||B\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V_g')} \le c^{\frac{1}{2}}|\mathbf{u}|_{L^\infty(0,T;H_g)}||\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V_g)}. \tag{6.24}$$

*Se $n=3$,*

$$|b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| \le c|\mathbf{u}|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)}||\mathbf{u}||\ |\mathbf{v}|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)}, \tag{6.25}$$

$$|b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| \le c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{4}}||\mathbf{u}||^{\frac{7}{4}}|\mathbf{v}|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)}. \tag{6.26}$$

*Demonstração.* Para mostrar a desigualdade (6.23), estimaremos $b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade (5.1) do Lema 7,

$$\begin{aligned}|b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})| &= \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} u_i(D_i v_j)w_j g\ dx\Big| \\ &\leq c|\mathbf{u}|_{L^4(\mathbb{R}^2,g)}||\mathbf{v}||\ |\mathbf{w}|_{L^4(\mathbb{R}^2,g)} \\ &\leq c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{2}}||\mathbf{u}||^{\frac{1}{2}}||\mathbf{v}||\ |\mathbf{w}|^{\frac{1}{2}}||\mathbf{w}||^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Para demonstrar a desigualdade (6.24) note que, pelo Lema 8,

$$||B\mathbf{u}||^2_{V_g'} \leq c|\mathbf{u}|^2||\mathbf{u}||^2 \leq c\sup_{t\in[0,T]}|\mathbf{u}(t)|^2||\mathbf{u}||^2.$$

Integrando,

$$\int_0^T ||B\mathbf{u}||^2_{V_g'}dt \leq c|\mathbf{u}|^2_{L^\infty(0,T;H_g)}\int_0^T ||\mathbf{u}||^2 dt = c|\mathbf{u}|^2_{L^\infty(0,T;H_g)}||\mathbf{u}||^2_{L^2(0,T;V_g)}.$$

Portanto,

$$||B\mathbf{u}||^2_{L^2(0,T;V_g')} \leq c|\mathbf{u}|^2_{L^\infty(0,T;H_g)}||\mathbf{u}||^2_{L^2(0,T;V_g)},$$

ou seja,

$$||B\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V_g')} \leq c^{\frac{1}{2}}|\mathbf{u}|_{L^\infty(0,T;H_g)}||\mathbf{u}||_{L^2(0,T;V_g)}.$$

A prova da desigualdade (6.25) é obtida usando a desigualdade de Hölder,

$$|b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq c|\mathbf{u}|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)}||\mathbf{u}||\ |\mathbf{v}|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)}.$$

Usando o resultado acima e a desigualdade (5.2) do Lema 7 mostramos (6.26). Com efeito,

$$\begin{aligned}|b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v})| &\leq c|\mathbf{u}|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)}||\mathbf{u}||\ |\mathbf{v}|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} \\ &\leq c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{4}}||\mathbf{u}||^{\frac{3}{4}}||\mathbf{u}||\ |\mathbf{v}|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} \\ &= c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{4}}||\mathbf{u}||^{\frac{7}{4}}|\mathbf{v}|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)}.\end{aligned}$$

□

**Teorema 5.** *Se $n = 2$, a solução do Problema 2, dada pelo Teorema 4, é única.*

*Demonstração.* Supondo que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são duas soluções do Problema 2 e considerando $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, temos

$$\mathbf{u'}_1 + \nu A\mathbf{u}_1 + D\mathbf{u}_1 + B\mathbf{u}_1 = \mathbf{f},$$

$$\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_0$$

e

$$\mathbf{u'}_2 + \nu A\mathbf{u}_2 + D\mathbf{u}_2 + B\mathbf{u}_2 = \mathbf{f},$$

$$\mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} + D\mathbf{u} &= B\mathbf{u}_2 - B\mathbf{u}_1, \\ \mathbf{u}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Tomamos o produto escalar da primeira equação de (6.27) com $\mathbf{u}(t)$ na dualidade entre $V_g$ e $V_g'$. Obtemos

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}(t)||^2 + 2b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)\Big) = 2b(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t)) - 2b(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)).$$

Observando que

$$\begin{aligned} 2b(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) - 2b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}) &= 2b(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) - 2b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) + 2b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) - 2b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}) \\ &= 2b(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) + 2b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1, \mathbf{u}) \\ &= -2b(\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) - 2b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &= -2b(\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}(t)||^2 + 2b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)\Big) = -2b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t)). \tag{6.28}$$

Pela desigualdade (6.23) e pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} |2b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t))| &\leq c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{2}}||\mathbf{u}||^{\frac{1}{2}}||\mathbf{u}_2||\ |\mathbf{u}|^{\frac{1}{2}}||\mathbf{u}||^{\frac{1}{2}} \\ &= c|\mathbf{u}|\ ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{u}_2|| \\ &\leq \nu||\mathbf{u}(t)||^2 + \frac{c^2}{\nu}|\mathbf{u}|^2||\mathbf{u}_2||^2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\left|2b\Big(\frac{\nabla g}{g},\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\Big)\right| &\leq c||\nabla g||_\infty||\mathbf{u}||\ |\mathbf{u}| \\ &\leq \nu||\mathbf{u}(t)||^2+\frac{c^2}{\nu}||\nabla g||_\infty^2|\mathbf{u}(t)|^2, \end{aligned} \tag{6.29}$$

também pela desigualdade de Young e pela desigualdade (5.5). Assim sendo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2+2\nu||\mathbf{u}(t)||^2 &= -2b\Big(\frac{\nabla g}{g},\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\Big)-2b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t)) \\ &\leq \nu||\mathbf{u}(t)||^2+\frac{c^2}{\nu}||\nabla g||_\infty^2|\mathbf{u}(t)|^2+\nu||\mathbf{u}(t)||^2+\frac{c^2}{\nu}|\mathbf{u}(\mathbf{t})|^2||\mathbf{u}_2(t)||^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2\leq\Big(\frac{c^2}{\nu}||\mathbf{u}_2(t)||^2+\frac{c^2}{\nu}||\nabla g||_\infty^2\Big)|\mathbf{u}(t)|^2.$$

Usando o Lema de Gronwall,

$$|\mathbf{u}(t)|^2\leq\exp\Big[\Big(\frac{c^2}{\nu}||\mathbf{u}_2(t)||^2+\frac{c^2}{\nu}||\nabla g||_\infty^2\Big)t\Big]|\mathbf{u}(0)|^2.$$

Como $\mathbf{u}(0)=0$, obtemos

$$|\mathbf{u}(t)|^2\leq 0$$

para todo $t\in[0,T]$, e assim,

$$\mathbf{u}(t)=0\ \ \forall t\in[0,T].$$

Logo, $\mathbf{u}_1(t)=\mathbf{u}_2(t)$ para todo $t\in[0,T]$. □

**Teorema 6.** *Se $n=3$, existe no máximo uma solução do Problema 2 tal que*

$$\mathbf{u}\in L^2(0,T;V_g)\cap L^\infty(0,T;H_g) \tag{6.30}$$

*e*

$$\mathbf{u}\in L^8(0,T;L^4(\mathbb{R}^3,g)). \tag{6.31}$$

*Demonstração.* Assumiremos que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são duas soluções do Problema 2 que satisfazem as condições (6.30) e (6.31) e seja $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$. Então, pela equação (6.28),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2+2\nu||\mathbf{u}(t)||^2+2b\Big(\frac{\nabla g}{g},\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\Big) &= -2b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_2(t),\mathbf{u}(t)) \\ &= 2b(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{u}_2(t)).\end{aligned} \tag{6.32}$$

Da desigualdade (6.26) e da desigualdade de Young com $p = \frac{8}{7}$, $q = 8$ e $\varepsilon = \nu$, temos

$$\begin{aligned} |2b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}_2(t))| &\leq c|\mathbf{u}|^{\frac{1}{4}}||\mathbf{u}||^{\frac{7}{4}}|\mathbf{u}_2|_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} \\ &\leq \nu(||\mathbf{u}||^{\frac{7}{4}})^{\frac{8}{7}} + \frac{c^8}{\nu^7}(|\mathbf{u}|^{\frac{1}{4}})^8|\mathbf{u}_2|^8_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} \\ &= \nu||\mathbf{u}||^2 + \frac{c^8}{\nu^7}|\mathbf{u}|^2|\mathbf{u}_2|^8_{L^4(\mathbb{R}^3,g)}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Então, pelas desigualdades (6.29), (6.33) e pela equação (6.32), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 + 2\nu||\mathbf{u}(t)||^2 &= -2b\Big(\frac{\nabla g}{g}, \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)\Big) - 2b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t)) \\ &\leq \nu||\mathbf{u}(t)||^2 + \frac{c^8}{\nu^7}|\mathbf{u}(t)|^2|\mathbf{u}_2(t)|^8_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} + \frac{c^2}{\nu}||\nabla g||^2_\infty|\mathbf{u}(t)|^2 + \nu||\mathbf{u}(t)||^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|^2 \leq \Big(\frac{c^8}{\nu^7}|\mathbf{u}_2(t)|^8_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} + \frac{c^2}{\nu}||\nabla g||^2_\infty\Big)|\mathbf{u}(t)|^2.$$

Pelo Lema de Gronwall,

$$|\mathbf{u}(t)|^2 \leq \exp\Big[\Big(\frac{c^8}{\nu^7}|\mathbf{u}_2(t)|^8_{L^4(\mathbb{R}^3,g)} + \frac{c^2}{\nu}||\nabla g||^2_\infty\Big)t\Big]|\mathbf{u}(0)|^2.$$

Daí,

$$|\mathbf{u}(t)|^2 \leq 0$$

para todo $t \in [0, T]$, implicando em

$$\mathbf{u}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Portanto,

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

□

**Pressão**

Para obter a pressão, definiremos

$$\mathbf{U}(t) = \int_0^t \mathbf{u}(s)\, ds, \quad \beta(s) = \int_0^t B\mathbf{u}(s)\, ds \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(t) = \int_0^t \mathbf{f}(s)\, ds.$$

Se $\mathbf{u}$ é uma solução do sistema (6.3)-(6.4), então

$$\mathbf{U}, \beta \text{ e } \mathbf{F} \in \mathcal{C}([0, T]; V_g').$$

Integrando a equação (6.1) e fazendo o produto interno com algum $\mathbf{v} \in V_g$, vemos que

$$\nu((\mathbf{U}(t), \mathbf{v})) = \langle \mathbf{F}(t) - \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0 - \beta(t), \mathbf{v} \rangle_g, \tag{6.34}$$

para todo $\mathbf{v} \in V_g$ e para todo $t \in [0, T]$. Denotando

$$g(t) = \mathbf{F}(t) - \beta(t) - \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0,$$

temos que $g \in \mathcal{C}([0, T]; V_g')$ e

$$\nu((\mathbf{U}(t), \mathbf{v})) = \langle g(t), \mathbf{v} \rangle_g.$$

Usando o Lema de De Rham garantimos, para cada $t \in [0, T]$, a existência de alguma distribuição $P(t)$ em $\Omega$ tal que

$$-\nu \Delta \mathbf{U}(t) + \nabla P(t) = g(t)$$

ou

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0 - \nu \Delta \mathbf{U}(t) + \beta(t) + \nabla P(t) = \mathbf{F}(t). \tag{6.35}$$

Observando que

$$\nabla P = g + \nu \Delta \mathbf{U},$$

concluímos que $\nabla P \in \mathcal{C}([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ e portanto,

$$P \in \mathcal{C}([0, T]; L^2_{loc}(\Omega)).$$

Podemos então derivar (6.35), na variável $t$, no sentido das distribuições em $Q$. Tomando

$$p = \frac{\partial P}{\partial t},$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) - \nu \Delta \mathbf{u}(t) + B\mathbf{u}(t) + \nabla p = \mathbf{f}(t).$$

# Referências


[1] BAE, H. and ROH, J. Existence of solutions of the g-Navier-Stokes equations. *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 8, p. 85-102, 2004.

[2] ROH, J. g-Navier-Stokes Equations. Thesis, University of Minnesota, 2001.

[3] TEMAM, R. **Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis**. Amsterdam: North-Holland, 1979.

[4] BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Universitext (Berlin. Print), Springer, 2010.

[5] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Society, 1998.

[6] LUKASZEWICZ, G. **Micropolar Fluids: Theory and Applications**. Birkhäuser Boston, 1999.

[7] MEDEIROS, L. A. and MIRANDA M. M. **Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos**. UFRJ: IM, 2000.

[8] ROH, J. Dynamics of the g-Navier-Stokes equations. *Journal of Differential Equations*, vol. 211, p. 452-484, 2005.

[9] ROH, J. Geometry of $L^2(\Omega, g)$. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, vol 19, p. 283-289, 2006.