



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
EDUMATEC
UFPE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA
CURSO DE MESTRADO

FRANKLIN FERNANDO FERREIRA PACHÊCO

***O APPRENTI GÉOMÈTRE 2 COMO UMA FERRAMENTA TECNOLÓGICA PARA
A ABORDAGEM DA GRANDEZA ÁREA: um estudo com licenciandos em matemática
sob a ótica da gênese instrumental***

Recife

2020

FRANKLIN FERNANDO FERREIRA PACHÊCO

**O APPRENTI GÉOMÈTRE 2 COMO UMA FERRAMENTA TECNOLÓGICA PARA
A ABORDAGEM DA GRANDEZA ÁREA: um estudo com licenciandos em matemática
sob a ótica da gênese instrumental**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Centro de Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Educação Matemática e Tecnológica

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Paula Moreira Baltar Bellemain

Recife

2020

Catálogo na fonte
Bibliotecário Danilo Leão, CRB-4/2213

- P116a Pachêco, Franklin Fernando Ferreira.
O apprenti géomètre 2 como uma ferramenta tecnológica para a abordagem da grandeza área: um estudo com licenciandos em matemática sob a ótica da gênese instrumental. / Franklin Fernando Ferreira Pachêco. – Recife, 2020.
204 f.
- Orientador: Paula Moreira Baltar Bellemain.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE.
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, 2020.
1. Matemática – estudo e ensino. 2. Geometria – estudo e ensino. 3. Matemática - aprendizagem. I. Bellemain, Paula Moreira Baltar. (Orientador). II. Título.
- 510.7 (23. ed.) UFPE (CE2020-014)

FRANKLIN FERNANDO FERREIRA PACHÊCO

**O APPRENTI GÉOMÈTRE 2 COMO UMA FERRAMENTA TECNOLÓGICA PARA
A ABORDAGEM DA GRANDEZA ÁREA: um estudo com licenciandos em matemática
sob a ótica da gênese instrumental**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Centro de Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 28/02/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Paula Moreira Baltar Bellemain (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^º. Dr. Franck Gilbert René Bellemain (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^º. Dr. Victor Augusto Giraldo (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof^º. Dr. Anderson Douglas Pereira Rodrigues da Silva (Examinador Externo)
Faculdade de Ciências e Tecnologia Professor Dirson Maciel de Barros

Dedico este texto a você, caro leitor, que busca aperfeiçoar seus conhecimentos no campo das Grandezas e medidas, em especial, na abordagem da grandeza área. Gratidão e boa leitura!

AGRADECIMENTOS

A Deus por todas as bênçãos que proporcionou em minha vida. Concluir o curso de mestrado foi, sem dúvidas, um grande sonho alcançado. Só tenho a agradecer!

À minha mãe, Mauricélia Ferreira, por sempre ter acreditado em mim. Estou finalizando mais um ciclo acadêmico e essa vitória também é sua. Obrigado por tudo!

A todos os meus familiares pela compreensão dos momentos ausentes durante o curso de mestrado. Gratidão!

À minha orientadora, Paula Bellemain, pelas orientações, por ter confiado em mim e no potencial desse estudo. Ao seu lado, durante dois semestres, no Estágio Docência aprendi a ser um melhor profissional e compreendi que devemos enxergar nas mais diversas ocasiões do cotidiano o lado bom da vida. Todas as vivências que realizei ao lado dessa grande profissional, sem dúvidas, me fizeram acreditar no meu potencial. Sou eternamente agradecido pelas valiosas contribuições na minha formação acadêmica, profissional e pessoal.

Ao professor Franck Bellemain por participar do processo de exame de qualificação e ter aceitado o convite para compor a banca de defesa dessa dissertação. Suas contribuições foram essenciais para o desenvolvimento e conclusão deste estudo. Só tenho a agradecer!

Ao professor Victor Giraldo, grande profissional, que aceitou o desafio de contribuir para este trabalho no processo de exame de qualificação. O agradeço, ainda, por aceitar o convite de participar como um dos membros da banca de defesa. Foi um prazer conhecê-lo e uma honra em tê-lo como examinador externo nesse momento da minha vida. Sou seu fã! Gratidão!

A Andreza Santana, grande amiga, que sempre esteve me apoiando nas diversas situações (alegrias, tristezas, correrias diárias, estresses, etc.) ocorridas ao longo do curso de mestrado. A agradeço, ainda, imensamente pelas parcerias em escrever artigos, em aceitar o desafio de ministrarmos oficinas e minicursos. Sem dúvidas foram momentos únicos. Gratidão!

A Anderson Douglas por me incentivar durante o curso de especialização a investigar conteúdos direcionados às Grandezas e medidas. Pesquisar o conteúdo de área foi de grande relevância para minha vida profissional e acadêmica. Obrigado por aceitar participar como um dos membros da banca de defesa. Gratidão!

Às minhas amigas Elizabeth e Gabrielly pelas valiosas contribuições nas disciplinas de Seminários (1, 2, 3, e 4) que me fizeram refletir sobre elementos a serem aperfeiçoados na

presente dissertação. Que honra ter cursado diversas disciplinas com vocês. Meus agradecimentos!

Aos professores do PPGEdumatec (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica), em especial aos que integram a linha de pesquisa da Didática da Matemática (Paulo Figueiredo, Marilene Rosa, Rosinalda Teles, Paula Bellemain, Iranete Lima, Marcelo Câmara e Jadilson Almeida). Obrigado pelas contribuições nas disciplinas de Seminários.

A Jailson Cavalcante que sempre esteve presente me ajudando e sugerindo leituras para compreender, com mais ênfase, a noção da área enquanto grandeza. O agradeço, ainda, por responder, quando solicitado, minhas dúvidas.

A Leonardo Morais, amigo do grupo de pesquisa Pró-grandezas, que sempre esteve disponível para me ajudar.

A Valéria Santos e Katy Wellen, companheiras de turma e da linha de pesquisa da Didática da Matemática.

Aos licenciandos em matemática, participantes voluntários, que contribuíram com seus conhecimentos para a investigação deste estudo. Vocês foram fundamentais, meus sinceros agradecimentos!

Aos amigos do grupo LEMATEC (Laboratório de Ensino da Matemática e Tecnologia) pelas discussões valiosas nas aulas de Seminários. Participar desse grupo me fez perceber o quanto é relevante o trabalho com tecnologias na atualidade. Suas contribuições foram essenciais para o desenvolvimento dessa pesquisa. Gratidão!

Aos meus amigos funcionários da Escola Municipal Pio Guerra com os quais tive o prazer de trabalhar. Para realizar o curso de mestrado me ausentei, no período de dois anos, por meio de uma licença sem vencimentos, e sei o quanto vocês sempre torceram para meu sucesso. Faltariam linhas para descrever o sentimento que possuo por cada um de vocês, por isso resolvi não elencar nomes porque são diversos e se me esquecesse de alguém estaria sendo injusto. Gratidão!

À FACEPE (Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco), por ter acreditado no potencial do meu projeto de pesquisa e o escolhido para integrá-lo aos trabalhos financiados. Sem dúvidas, esses vinte e quatro meses foram os mais produtivos e ricos em conhecimentos da minha vida. Só tenho gratidão!

A Clara, Fábio e Mário, funcionários da secretaria do EDUMATEC, pela atenção, esclarecimentos e apoio no decorrer da realização do curso de Mestrado.

À Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) por me proporcionar o grau de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

RESUMO

A presente pesquisa objetivou analisar o processo de apropriação do *Apprenti Géomètre 2* por licenciandos em Matemática na realização de atividades sobre a grandeza área. A fundamentação teórica apoiou-se na Teoria da Instrumentação desenvolvida por Pierre Rabardel e na abordagem da área como uma grandeza autônoma proposta por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian. Utilizou-se, ainda, o estudo das situações que dão sentido à área construído por Paula Baltar e ampliado por Lúcia Durão Ferreira, o que levou a considerar quatro classes de situações (comparação de áreas, medida de área, produção de superfície e mudança de unidade de área). Em termos metodológicos, essa pesquisa foi desenvolvida em duas etapas presenciais designadas por Estudo Preliminar e Estudo Experimental. No Estudo Preliminar, dois estudantes de um curso de licenciatura plena em matemática resolveram quatro atividades sobre área no *Apprenti Géomètre 2*. Os resultados desse primeiro Estudo subsidiaram a elaboração do Estudo Experimental, no qual cinco licenciandos em matemática (distintos daqueles do Estudo Preliminar) que desejavam aprender a explorar o *Apprenti Géomètre 2*, apropriando-se de suas ferramentas, resolveram seis atividades relacionadas à grandeza área. Os participantes interagiram pela primeira vez com o *software* durante o Estudo, porque almejou-se analisar como licenciandos em matemática (Sujeitos) resolviam atividades sobre a grandeza área (objeto matemático) por meio do *Apprenti Géomètre 2* (Instrumento). Os resultados da pesquisa mostram que os participantes à medida que exploravam as ferramentas do *software* e identificavam os limites e possibilidades de suas funcionalidades mobilizavam esquemas e exerciam ações de uso no ambiente do *Apprenti Géomètre 2* na tentativa de resolver as atividades. Em relação às estratégias de resolução, usaram em alguns momentos procedimentos geométricos (decomposição, recomposição, sobreposição e inclusão), entretanto no decorrer da vivência, os aspectos numéricos (ladrilhamento e fórmulas) foram privilegiados para responder ao conjunto de atividades. A instrumentalização e a instrumentação ocorreram de maneira cíclica, independente dos procedimentos resolutivos (geométricos ou numéricos) adotados. Por fim, apesar do tempo curto, foram observados indícios do processo de transformação do *Apprenti Géomètre 2* do *status* de artefato para o de instrumento por parte dos licenciandos em matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria Dinâmica. Grandezas e Medidas.

ABSTRACT

The research aimed to analyze the Apprenti Géomètre 2 appropriation process by Mathematics undergraduates to perform activities on the greatness of the area. The theoretical foundation was based on the Instrumentation Theory developed by Pierre Rabardel and on the approach of the area as an autonomous greatness proposed by Régine Douady and Marie-Jeanne Perrin-Glorian. It was also used the study of situations that give meaning to the area built by Paula Baltar and expanded by Lúcia Durão Ferreira, which led to consider four classes of situations (comparison of areas, area measurement, surface production and change of area unit). In methodological terms, this research was developed in two face-to-face stages called Preliminary Study and Experimental Study. In the Preliminary Study, two undergraduates in mathematics solved four activities in the area in Apprenti Géomètre 2. The results of this first Study supported the elaboration of the Experimental Study, in which five undergraduates in mathematics (different from those of the Preliminary Study) who wished to learn to explore Apprenti Géomètre 2, using their tools, solved six activities related to the greatness of the area. The participants interacted with the software for the first time during the Study, because it aimed to analyze how undergraduates in mathematics (Subjects) solved activities on area greatness (mathematical object) through Apprenti Géomètre 2 (Instrument). The results of the research show that the participants, as they explored the software tools and identified the limits and possibilities of their functionalities, mobilized schemes and exercised actions of use in the Apprenti Géomètre 2 environment in an attempt to solve the activities. Regarding the resolution strategies, they sometimes used geometric procedures (decomposition, recomposition, overlap and inclusion), however during the experience, the numerical aspects (tiling and formulas) were privileged to respond to the set of activities. The instrumentalization and instrumentation occurred in a cyclical manner, regardless of the resolving procedures (geometric or numerical) adopted. Finally, despite the short time, there were signs of the process of transforming Apprenti Géomètre 2 from artifact to instrument status on the part of undergraduates in mathematics.

Key-words: Mathematical Education. Dynamic Geometry. Greatness and Measures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Superfície poligonal e de borda curvilínea.....	26
Figura 2 –	Exemplo de uma possível concepção geométrica.....	28
Figura 3 –	Exemplificando uma possibilidade de concepção numérica.....	29
Figura 4 –	Esquemática das articulações entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas.....	31
Figura 5 –	Situações que dão sentido ao conceito de área como uma grandeza.....	32
Figura 6 –	Exemplo sobre os procedimentos de inclusão e sobreposição.....	33
Figura 7 –	Figuras sobrepostas com mesma área	34
Figura 8 –	Exemplo de decomposição e decomposição.....	34
Figura 9 –	Exemplo de uma situação dinâmica de comparação de áreas.....	35
Figura 10 –	Ladrilhamento efetivo da superfície P.....	36
Figura 11 –	Mudança de unidade.....	38
Figura 12 –	Produção de superfície por meio de aspectos numéricos.....	39
Figura 13 –	Produção de superfície de mesma área que a dada por meio de aspectos geométricos.....	39
Figura 14 –	Produção de superfícies de área menor e maior que a dada por meio de procedimentos numéricos.....	40
Figura 15 –	Figura 1- Produção de superfície de área menor no interior da dada	41
Figura 16 –	Produção de superfície de área maior que a de uma superfície dada.....	41
Figura 17 –	Tela de reprodução do <i>Apprenti Géomètre 2.5</i>	45
Figura 18 –	Ambiente do <i>Apprenti Géomètre 2</i>	47
Figura 19 –	Figuras Padrão.....	48
Figura 20 –	Figuras a mão livre.....	49
Figura 21 –	Ferramentas de movimentos.....	50
Figura 22 –	Esquemática do processo de Gênese Instrumental.....	55

Figura 23 –	Modelo SAI.....	56
Figura 24 –	Esquemática dos procedimentos metodológicos.....	58
Figura 25 –	Esquemática adotada do modelo SAI.....	59
Figura 26 –	Questionamentos sobre a relação do conteúdo de área com os participantes.....	60
Figura 27 –	Respostas de Fred em relação aos questionamentos solicitados por e-mail.....	61
Figura 28 –	Respostas de Roger em relação aos questionamentos solicitados por e-mail.....	61
Figura 29 –	Resultado da atividade 01 do Estudo Preliminar.....	65
Figura 30 –	Respostas dos licenciandos referente a atividade 1.....	65
Figura 31 –	Explicação da resolução da atividade 2.....	67
Figura 32 –	Ladrilhamento da Figura X.....	68
Figura 33 –	Ladrilhamento parcial das figuras.....	71
Figura 34 –	Respostas dos licenciandos em matemática referente à atividade 3.....	71
Figura 35 –	Produção de superfície de maior e menor área que R.....	74
Figura 36 –	Produção da superfície K.....	75
Figura 37 –	Respostas dos licenciandos sobre a atividade 4.....	75
Figura 38 –	Aplicação da malha quadriculada no Menu AB.....	77
Figura 39 –	Menus A, B, C, AB e AC.....	82
Figura 40 –	Possível resposta na situação de medição.....	98
Figura 41 –	Produção de superfície por procedimentos geométricos.....	102
Figura 42 –	Tentativa de comparação de áreas de suas superfícies.....	111
Figura 43 –	Possíveis esquemas para o preenchimento da superfície R.....	116
Figura 44 –	Superfície produzida incluída na dada.....	120
Figura 45 –	Respostas dos licenciandos em relação à atividade 1.....	123
Figura 46 –	Procedimentos no Menu AB que apoiaram na identificação da maior e menor área.....	125
Figura 47 –	Processo de instrumentalização de algumas ferramentas.....	126
Figura 48 –	Ativação da Malha quadriculada para verificação das repartições e contagem dos ladrilhos.....	127
Figura 49 –	Ativação e uso da Malha isométrica.....	129

Figura 50 –	Estratégia numérica para obtenção da medida das superfícies.....	129
Figura 51 –	Produção de superfície unitária para o ladrilhamento de K.....	135
Figura 52 –	Mudança de posição na superfície unitária.....	136
Figura 53 –	Explicação de Hughes para a resposta da atividade 2.....	136
Figura 54 –	Preenchimento parcial da superfície K.....	137
Figura 55 –	Explicação dos licenciandos sobre a resolução da atividade 2.....	138
Figura 56 –	Processo de produção da superfície por Hughes.....	142
Figura 57 –	Interação com a ferramenta Triângulo do conjunto de Figuras a mão livre.....	143
Figura 58 –	Superfície F produzida por Ana e Magali.....	144
Figura 59 –	Ativação da Malha quadriculada e integração de segmentos na superfície J.....	146
Figura 60 –	Superfície F produzida por Iza e Michael.....	147
Figura 61 –	Procedimentos adotados para verificação que as superfícies A e B possuem a mesma área.....	151
Figura 62 –	Tentativa de sobreposição de superfícies.....	151
Figura 63 –	Inclusão das partes decomposta da superfície B incluídas na superfície A.....	152
Figura 64 –	Explicação de Hughes para resolver a atividade.....	152
Figura 65 –	Tentativa de ladrilhamento para comparar as áreas das superfícies A e B.....	153
Figura 66 –	Decomposição da superfície B em três partes.....	154
Figura 67 –	Inclusão das partes da superfície B totalmente integradas em A.	155
Figura 68 –	Resolução de Ana e Magali da atividade 5.....	155
Figura 69 –	Ladrilhamento da superfície R (Ana e Magali).....	160
Figura 70 –	Ladrilhamento efetivo com 54W.....	161
Figura 71 –	Resolução de Ana e Magali no Item C.....	162
Figura 72 –	Explicação dos procedimentos resolutivos de Ana e Magali.....	162
Figura 73 –	Respostas de Hughes no Menu AB.....	163
Figura 74 –	Explicação de Iza e Michael da atividade 5.....	164
Figura 75 –	Superfície de menor área e não inclusa em O.....	168
Figura 76 –	Explicação de Hughes para conseguir a resposta da atividade.....	169
Figura 77 –	Superfície menor e não inclusa em O.....	170

Figura 78 –	Procedimentos de Iza e Michael para obtenção da resposta na atividade 6.....	170
Figura 79 –	Tentativa de resolução da atividade 6 de Ana e Magali.....	171
Figura 80 –	Explicação dos procedimentos adotados no <i>Apprenti Géomètre</i> 2 por Ana e Magali.....	172
Figura 81 –	Comportamento da instrumentalização e instrumentação ao longo do conjunto de atividade.....	176
Figura 82 –	Esquematização da vivência pelos participantes para resolver as atividades.....	180

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Ferramentas dispostas nos Menus do <i>Apprenti Géomètre 2</i>	46
Quadro 2 –	Família das Figuras Padrão.....	48
Quadro 3 –	Família das Figuras a mão livre.....	49
Quadro 4 –	Barra de Menu superior do <i>Apprenti Géomètre 2</i>	50
Quadro 5 –	Funções exercidas das ferramentas pelos participantes para resolver as atividades sobre área.....	78
Quadro 6 –	Justificativa da escolha do uso das ferramentas do Menu AB.....	84
Quadro 7 –	Exemplo de comparação das superfícies L e Y.....	89
Quadro 8 –	Comparação de áreas por meio de aspectos geométricos.....	90
Quadro 9 –	Comparação de áreas de um conjunto de superfícies por meio do aspecto numérico.....	91
Quadro 10 –	Obtendo a área por meio da repartição das superfícies.....	92
Quadro 11 –	Sequência de passos na tentativa do ladrilhar as superfícies ao adotar a unidade de área quadrado.....	94
Quadro 12 –	Situação de medição de área.....	97
Quadro 13 –	Procedimentos geométricos para produção de superfícies.....	101
Quadro 14 –	Produção de superfícies por meio de procedimentos numéricos..	103
Quadro 15 –	Esquemas que podem induzir ao erro nas produções de superfícies.....	104
Quadro 16 –	Sequência de passos para resolver comparação de áreas com aspectos geométricos.....	107
Quadro 17 –	Comparação de áreas por meio do procedimento da decomposição e inclusão.....	108
Quadro 18 –	Tentativa de comparar as áreas das superfícies A e B pelo ladrilhamento.....	109
Quadro 19 –	Tentativa de comparação de áreas por meio do ladrilhamento efetivo.....	110
Quadro 20 –	Sequência de passos com o uso das ferramentas para ladrilhar a superfície R.....	113
Quadro 21 –	Sequência de passos para obter 54W.....	114
Quadro 22 –	Sequência de passos com ênfase nos aspectos numéricos para	

	ladrihar a superfície R.....	115
Quadro 23 –	Procedimentos para obtenção da figura de área menor e não inclusa na superfície O.....	118
Quadro 24 –	Produção de superfície de área menor e não inclusa em uma superfície dada.....	119
Quadro 25 –	Quadro síntese sobre o conjunto de atividades.....	121
Quadro 26 –	Quadro comparativo da atividade 1 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos.....	130
Quadro 27 –	Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 1.....	132
Quadro 28 –	Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 1.....	133
Quadro 29 –	Quadro comparativo da atividade 2 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos.....	138
Quadro 30 –	Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 2.....	140
Quadro 31 –	Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 2.....	141
Quadro 32 –	Explicação da resposta dos licenciandos em matemática sobre à atividade 3.....	142
Quadro 33 –	Manipulação das ferramentas do <i>Apprenti Géomètre 2</i> para colorir o fundo das figuras.....	145
Quadro 34 –	Quadro comparativo da atividade 3 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos.....	148
Quadro 35 –	Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 3.....	149
Quadro 36 –	Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 3.....	150
Quadro 37 –	Quadro comparativo da atividade 4 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos.....	156
Quadro 38 –	Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 4.....	158
Quadro 39 –	Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos	

	na atividade 4.....	159
Quadro 40 –	Quadro comparativo da atividade 5 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos.....	165
Quadro 41 –	Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 5.....	166
Quadro 42 –	Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 5.....	167
Quadro 43 –	Quadro comparativo da atividade 6 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos.....	173
Quadro 44 –	Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 6.....	174
Quadro 45 –	Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 6.....	175
Quadro 46 –	Quadro síntese dos procedimentos e ferramentas adotadas pelos licenciandos.....	178
Quadro 47 –	Limitações do <i>Apprenti Géomètre 2</i>	182
Quadro 48 –	Ferramentas manipuladas e apropriadas pelos participantes da pesquisa.....	183

LISTA DE SIGLAS

CREM	CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
EAI	ESQUEMAS DE AÇÃO INSTRUMENTAL
EACI	ESQUEMAS DE ATIVIDADE COLETIVA INSTRUMENTAL
EU	ESQUEMAS DE USO
EUT	ESQUEMAS DE UTILIZAÇÃO
GD	GEOMETRIA DINÂMICA
IES	INSTITUIÇÃO DE ENSINO SUPERIOR
MD	MATEMÁTICA DINÂMICA
PIBID	PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA
SAI	MODELO DE SITUAÇÕES DE ATIVIDADES INSTRUMENTAIS
TCC	TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS
TI	TEORIA DA INSTRUMENTAÇÃO
TSD	TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
2	CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA DA PESQUISA.....	25
2.1	A abordagem do conteúdo de área nas pesquisas da Educação Matemática.....	25
2.2	A área enquanto grandeza geométrica: o que dizem as pesquisas?.....	28
2.3	As situações que dão sentido ao conceito de área enquanto uma grandeza.....	31
2.3.1	Situações de comparação.....	33
2.3.1.1	<i>Situações Estáticas.....</i>	33
2.3.1.2	<i>Situações Dinâmicas.....</i>	35
2.3.2	Situações de Medidas.....	36
2.3.3	Situações de Mudanças de Unidades.....	37
2.3.4	Situação de Produção de Superfícies.....	38
2.4	Os recursos tecnológicos como auxílio para o processo do ensino e da aprendizagem na matemática.....	42
2.4.1	O <i>Apprenti Géomètre 2</i> : uma discussão de seus elementos.....	44
2.4.1.1	<i>Conhecendo os menus e ferramentas do Apprenti Géomètre 2.....</i>	45
2.5	A gênese instrumental: do artefato a sua transformação em instrumento	51
2.6	Objetivos.....	57
2.6.1	Objetivo Geral.....	57
2.6.2	Objetivos Específicos.....	57
3	PERCURSO METODOLÓGICO.....	58
3.1	Sistematização da pesquisa.....	58
3.1.1	Estudo Preliminar: Descrição e categorização dos resultados.....	60
3.1.1.1	<i>Limitações e possibilidades do Estudo Preliminar.....</i>	76
3.2	Estudo Experimental: sistematização do objeto investigativo.....	79

3.2.1	Caracterização e análise a priori das atividades do Estudo Experimental.....	84
4	ANÁLISES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	121
4.1	Identificação, categorização e análises das estratégias resolutivas: um olhar sob as mobilizações dos licenciandos com o <i>Apprenti Géomètre 2</i>.....	121
4.1.1	Atividade 1.....	123
4.1.2	Atividade 2.....	133
4.1.3	Atividade 3.....	141
4.1.4	Atividade 4.....	150
4.1.5	Atividade 5.....	159
4.1.6	Atividade 6.....	167
4.2	Participantes, <i>Apprenti Géomètre 2</i> e objeto matemático: uma análise da vivência.....	175
4.3	O <i>Apprenti Géomètre 2</i>: limitações e potencialidades para a abordagem de área.....	181
4.4	Os resultados da pesquisa alcançaram a proposta da investigação?.....	183
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	185
	REFERÊNCIAS.....	189
	APÊNDICE A- ATIVIDADES DO ESTUDO PRELIMINAR.....	193
	APÊNDICE B- ATIVIDADES DO ESTUDO EXPERIMENTAL.....	198

1 INTRODUÇÃO

A intervenção do homem em seu meio social, na busca de suprir suas necessidades e tornar mais ágeis as realizações de atividades cotidianas, leva à produção de tecnologias. Como afirma Kenski (2012), entendemos que a tecnologia “(...) diz respeito a muitas outras coisas além de máquinas. O conceito tecnologia engloba a totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas aplicações” (p.22-23).

Em tempos remotos, por exemplo, em busca de sobrevivência no seu habitat os seres humanos criaram métodos para produzir o fogo com algumas finalidades, dentre as quais de se aquecerem. Essa estratégia no mundo atual foi aperfeiçoada e sua obtenção não se dá mais a partir do atrito com duas pedras.

Desde a Antiguidade aos dias atuais, a sociedade se modificou sendo inevitável a evolução das tecnologias, e com isso o homem sentiu a necessidade de aperfeiçoar suas técnicas, ampliar seus conhecimentos e produzir novos artefatos (manipuláveis, tecnológicos e simbólicos). Com o surgimento da informática, variados tipos de artefatos tecnológicos (*software*, celular, computador, etc.) se tornaram mais presentes nos diversos sistemas sociais (educacional, econômico, industrial, financeiro, cultural e entretenimento) possibilitando maior acesso às informações, praticidade e uma perspectiva mais inovadora na efetivação de atividades.

Nosso interesse se volta ao sistema educacional, em especial à escola, espaço que, no nosso entendimento, deve propiciar uma formação crítica e reflexiva, propagar conhecimentos, estimular o convívio humano pautado no respeito mútuo e na solidariedade, o que deve contribuir para o exercício pleno da cidadania. Frente aos avanços das tecnologias buscamos participar dos estudos que visam tornar os artefatos tecnológicos aliados nos processos de ensino e de aprendizagem, no ambiente escolar.

Apesar do trabalho com as tecnologias digitais possibilitar a diversificação dos métodos de ensino mais usuais com papel e lápis, quadro e marcadores, nenhum recurso didático atua sozinho. Na sala de aula, a utilização de tecnologias por parte do professor deve ser concebida com finalidades pedagógicas servindo de aporte para planejar e desenvolver aulas, visando como produto educacional a aprendizagem dos alunos, e não apenas como um fator de dinamização e entretenimento sem interligação com o conteúdo.

A articulação entre o uso de tecnologias mediada pela metodologia adotada pelo professor para abordar algum conteúdo em sala de aula pode ser explorada, discutida e

analisada sob a ótica da distinção entre integração e inserção (BITTAR, 2011). Nesta perspectiva, ocorre inserção quando uma tecnologia é levada para o ambiente escolar, sem haver uma exploração consistente como uma ferramenta com intenção didática enquanto a integração acontece quando o artefato tecnológico em uso se torna um meio para promover a aprendizagem.

Essa diferenciação potencializa a importância do papel do professor na escolha do artefato tecnológico, no planejamento e na execução de suas intervenções didáticas para a construção do conhecimento de seus alunos. Outro fator se refere à formação profissional, uma vez que, o professor exercendo um papel central no processo de ensino, deve conhecer as funcionalidades das tecnologias previamente para atrelá-las ao conteúdo trabalhado.

Por vezes, professores de matemática na busca de manter a atenção dos alunos utilizam tecnologias digitais apenas para dinamizar as aulas, não integrando-as aos conteúdos que são vivenciados. A tentativa de proporcionar uma diversificação de estratégias para o processo de ensino e de aprendizagem que inclui apenas a manipulação do recurso¹ tecnológico sem objetivos didáticos e pedagógicos claros não atinge plenamente o potencial que a integração de tecnologias proporciona.

Partindo da importância do papel do professor na integração de tecnologias, nosso interesse se volta para o processo de apropriação de *software*, por universitários do curso de licenciatura em matemática, para resoluções de atividades. A opção por esses participantes, que estão em formação inicial, se justifica por considerarmos que as tecnologias são aportes relevantes para o trabalho docente e que antes de atribuir-lhe funções no ambiente da sala de aula é necessário além de ter propósito pedagógico, conhecer os artefatos tecnológicos e suas ferramentas, bem como ser capaz de utilizá-los para resolver problemas matemáticos.

Nessa perspectiva, o interesse dessa pesquisa se volta para o processo de apropriação de um artefato tecnológico para resolver problemas matemáticos, por estudantes de licenciatura em matemática. Pensamos que vivências acadêmicas desse tipo proporcionam a esses futuros profissionais a experiência de estudar matemática em um ambiente distinto do mais usual (papel e lápis), o que pode propiciar um enriquecimento e diversificação dos recursos passíveis de serem utilizados mais tarde no ensino de conteúdos matemáticos e fomentar reflexões sobre os usos que se pode fazer de tecnologias digitais na sala de aula. Acreditamos que uma apropriação satisfatória do uso de um *software* para resolver problemas matemáticos deve auxiliar sua inserção e integração no ensino de matemática na educação

¹Nesse trabalho não vamos nos aprofundar na discussão sobre a noção de recurso. Esse termo será usado aqui no sentido do senso comum.

básica, embora evidentemente, não seja suficiente. Cabe, então explicitar que, embora os participantes da pesquisa sejam estudantes de licenciatura, nosso objeto de estudo não é o uso didático-pedagógico de um *software* nem a formação de professores, temáticas que exigiriam outros fundamentos teóricos e outros aspectos a serem investigados.

O conceito matemático em foco nessa pesquisa é a área de figuras planas. Propor que licenciandos em matemática resolvam atividades sobre área por meio de um ambiente tecnológico é também estimulá-los a compreender que há distintas maneiras de se trabalhar esse e outros conceitos.

No que concerne a investigações sobre área em ambientes distintos do papel e lápis, em pesquisas anteriores à nossa foram utilizados *software* como o Cabri-Géomètre II (BALDINI, 2004), GeoGebra (NUNES, 2011; BALEJO, 2015) e o *Apprenti Géomètre 2* (SILVA, 2016), os quais se mostraram potencialmente úteis para a construção do conceito de área.

Entre os programas de Geometria Dinâmica (GD) que permitem explorar atividades em torno da área de figuras planas, escolhemos o *Apprenti Géomètre 2*. Ele se diferencia de outros *software* (Cabri-Géomètre e GeoGebra, por exemplo) por conceber ferramentas como a malha pontilhada quadriculada, malha pontilhada isométrica, ladrilhos predefinidos, fundir e decompor, os quais se adaptam bem à abordagem da grandeza área adotada nessa pesquisa como veremos a seguir.

O *Apprenti Géomètre 2* possibilita trabalhar o conceito da área enquanto grandeza ao propiciar a construção de diversas figuras geométricas e o uso de ações como decompor, recompor, rotacionar, entre outras funcionalidades que não alteram as propriedades iniciais das figuras manipuladas (CREM², 2003, 2007; SILVA, 2016).

Utilizado como um³ dos ambientes no estudo de Silva (2016), o *Apprenti Géomètre 2* favoreceu uma melhor compreensão do conteúdo de área por parte dos alunos do 6º ano do ensino fundamental ao permitir “diferentes tipos de estratégias para resolver tarefas sobre área” (p.17).

Considerando a potencialidade desse programa para o trabalho com o conteúdo de área, como mostram algumas pesquisas (CREM, 2003; 2007; SILVA, 2016), optamos pelo seu uso a fim de propor situações desafiadoras, que estimulassem os licenciandos em

²O Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) é um grupo belga de estudos e pesquisas direcionadas ao ensino da matemática que desenvolveu as versões 1 e 2 do *Apprenti Géomètre 2*.

³A dissertação de Silva (2016) contemplou três ambientes (papel e lápis, *Apprenti Géomètre 2* e materiais manipulativos).

matemática a refletirem sobre como resolvê-las sem exclusividade do uso de fórmulas tendo como aporte as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*.

Pesquisas anteriores sobre a aprendizagem e o ensino da grandeza área (FERREIRA, 2010; SILVA, 2016) mostram que frequentemente os aspectos numéricos são enfatizados. Características importantes da conceituação, como evidenciar que superfícies distintas podem ter a mesma área são pouco exploradas o que traz consequências negativas sobre a construção de conhecimentos acerca desse objeto matemático.

Para a abordagem do conceito de área enquanto grandeza foi adotado como aporte teórico o estudo de Douady e Perrin-Glorian (1989). Essas autoras propõem que para a construção desse conceito é essencial a diferenciação e articulação entre os quadros⁴ geométrico, numérico e das grandezas como uma maneira de superar equívocos que podem emergir ao se apropriar do conteúdo, entre eles, que a área está relacionada à forma da superfície ou apenas ao número.

Ao trabalhar com a grandeza área, utilizamos também o estudo das situações que dão sentido à área construído por Baltar (1996), como um prolongamento das pesquisas de Douady e Perrin-Glorian (1989). Nesse estudo, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (TCC), são propostas três classes de situações (comparação de áreas, medida de área e produção de superfície), associando-as aos quadros geométrico, numérico e das grandezas. Ambos os estudos foram desenvolvidas na França e serviram como um aporte para pesquisas brasileiras (FERREIRA, 2010; SILVA, 2016 e outros) que adotaram a abordagem da área como grandeza e as situações que dão sentido à área, sob a ótica da TCC.

Na busca de conhecer como licenciandos em matemática se apropriariam das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* e as integrariam em suas práticas para realização de atividades sobre a grandeza área, essa pesquisa se apoiou na Teoria da Instrumentação (TI) de Rabardel (1995). Sob essa perspectiva teórica, investigamos a ação do sujeito (licenciando em matemática) sobre o artefato tecnológico *Apprenti Géomètre 2* para resolver atividades sobre a grandeza área (objeto matemático).

Com base no exposto, os seguintes questionamentos nortearam esta investigação: De que maneira os licenciandos em matemática se apropriaram das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* para resolver atividades sobre a grandeza área? Quais conhecimentos matemáticos foram mobilizados para efetivação das resoluções das atividades referentes à

⁴Para Douady e Perrin-Glorian (1989) um quadro pode ser formado por objetos de um campo da matemática, de suas relações, e imagens mentais criadas pelo sujeito no momento que faz a associação desses objetos e suas distintas relações.

grandeza área? Há indícios de transformação do *Apprenti Géomètre 2* da condição de artefato à de instrumento, por parte dos licenciandos?

Na busca de responder tais questionamentos o objetivo geral dessa pesquisa foi: analisar o processo de apropriação do *Apprenti Géomètre 2* por licenciandos em Matemática na realização de atividades sobre a grandeza área.

O texto se encontra estruturado em 4 capítulos, o capítulo 1 trata-se dessa introdução.

O capítulo 2 é dedicado à construção da problemática da pesquisa. Inicialmente, trazemos algumas pesquisas brasileiras e internacionais que investigaram questões relativas ao ensino e/ou à aprendizagem da área de figuras planas e discutimos os estudos (BALTAR, 1996; FERREIRA, 2010) das situações que dão sentido à grandeza área, sob a ótica da TCC. Apresentamos pesquisas que foram desenvolvidas por meio do auxílio de recursos tecnológicos para o ensino da Matemática e expomos as características das ferramentas que integram o *Apprenti Géomètre 2*. Finalmente, fazemos uma discussão sobre a TI elaborada por Rabardel (1995), referencial adotado para fundamentação da presente pesquisa.

No capítulo 3 são descritos e justificados os procedimentos metodológicos propostos na investigação. Caracterizamos os participantes da pesquisa, local de realização, o método para análise, discussão e categorização e produção dos dados.

Por meio do capítulo 4 abordamos as análises e discussões dos resultados sob a ótica da TI (RABARDEL, 1995). Subsidiados pelo modelo SAI direcionamos nosso olhar para as interligações entre os polos **Sujeito** (Licenciandos em matemática) - **Objeto** (Grandeza área) - **Instrumento** (*Apprenti Géomètre 2*) e apresentamos os resultados categorizados em três momentos: 1º- analisamos as atividades individualmente; 2º- analisamos toda a vivência (as ações dos participantes sobre o *software* para resolver o conjunto de atividades); e 3º- elencamos possíveis lacunas e possibilidades do programa no decorrer do estudo.

Evidenciam-se, por fim, as considerações finais abordando os resultados dessa pesquisa, elencando suas limitações e possibilidades. Em seguida, são expostas as referências que foram essenciais para essa pesquisa, assim como, os apêndices que ilustram o conjunto de atividades aplicadas no Estudo Preliminar e no Estudo Experimental.

2 CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Este capítulo apresenta uma abordagem de área enquanto grandeza geométrica a partir dos estudos das pesquisadoras Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989). Discutimos as situações que dão sentido ao conceito da área na perspectiva de Baltar (1996) e Ferreira (2010). Ainda, nessa seção, fazemos um breve estudo sobre o trabalho com tecnologias digitais no ambiente da sala de aula. Em seguida, elencamos algumas ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*. Por fim, são expostos alguns elementos que constituem a Teoria da Instrumentação (TI) proposta por Rabardel (1995).

2.1 A abordagem do conteúdo de área nas pesquisas da Educação Matemática

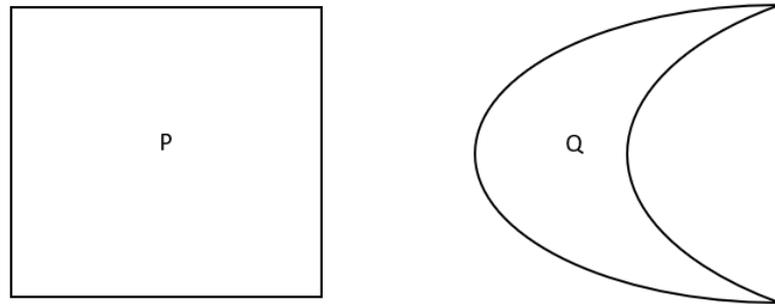
A matemática é uma disciplina de caráter obrigatório que integra o currículo da educação básica do sistema brasileiro. Essa ciência, no contexto educacional, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é sistematizada em alguns campos de conhecimentos (álgebra, probabilidade e estatística, números, geometria, grandezas e medidas) para o favorecimento do processo de ensino e da aprendizagem (BRASIL, 2018).

Para a construção do saber matemático na educação básica é essencial que todos os cinco campos sejam estudados, como também, que haja interligações com outras áreas de conhecimentos, como, por exemplo, geografia, biologia, física, etc. Dentre os diversos campos da matemática, o interesse da presente pesquisa se volta para as grandezas e medidas, pois “as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade” (BRASIL, 2018, p.273).

Dentre as grandezas discutidas no contexto educacional e que se situam no cotidiano estão o comprimento, a massa, a duração de intervalos de tempo, a capacidade, a temperatura, a área, entre outras. Nosso foco é a grandeza área, pois algumas pesquisas (FERREIRA, 2010; MIRANDA, 2018) indicam uma forte persistência de dificuldades conceituais de aprendizagem mesmo sendo um conteúdo que deve ser vivenciado desde o 3º ano do ensino fundamental até o 2º ano do ensino médio (BRASIL, 2018).

Entendemos que área é uma propriedade das superfícies, as quais por sua vez podem ser poligonais ou ter bordo curvilíneo, como mostra a figura 1.

Figura 1- Superfície poligonal e de borda curvilínea



Fonte: Elaborado pelo autor

Tendo sido escolhida uma superfície unitária, às vezes é possível ladrilhar efetivamente certa superfície com uma quantidade finita de exemplares da superfície unitária e às vezes isso não é possível. No primeiro caso, é mais fácil expressar a área da superfície por meio de um par (número, unidade de medida). Mas também no segundo caso, utilizando procedimentos mais complexos pode-se encontrar o valor teórico exato da área ou obter um valor aproximado, utilizando técnicas de medição prática aproximada ou de enquadramento. Uma das dificuldades no estudo da grandeza área se trata de conceber que superfícies distintas podem ter áreas iguais ou ainda que é possível que superfícies com perímetros diferentes tenham a mesma área.

Essa temática é bastante investigada no âmbito da Educação Matemática (PAULA, 2011; PAULO, 2012; SANTOS, 2014; KOTALAWALA; MELANCIA, 2016). Um dos fatores que levam estudiosos (SANTOS, 2011; QUEVEDO, 2016) a olhar para esse conteúdo se trata das lacunas e dificuldades que alguns alunos manifestam na dissociação entre área e perímetro.

Paula (2011) avaliou a potencialidade do ensino de área de figuras planas a partir de atividades com o auxílio de malhas quadriculadas. O autor, subsidiado pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau desenvolveu seu estudo a partir de um teste diagnóstico, seguido pela aplicação de uma sequência didática e por fim um pós-teste. Mediante essa vivência com os participantes, o pesquisador ressaltou que a sequência didática aplicada contribuiu para a construção do conhecimento dos alunos do 9º ano do ensino fundamental sobre áreas de figuras planas. De modo geral, os alunos resolviam as atividades sobre área priorizando os procedimentos com cálculos e uso das fórmulas.

Na busca de investigar possíveis problemas que ocorriam no processo de ensino e de aprendizagem relacionados aos conceitos de área e perímetro, Santos (2011) realizou seu

estudo com alunos do 7º ano do ensino fundamental e professores de matemática. De acordo com a autora, por meio de um teste aplicado aos alunos se verificou que os participantes apresentavam dificuldades no que concerne a utilização e diferenciação dos conceitos de área e perímetro. Quanto aos professores, o estudo mostra que eles se sentem desconfortáveis sobre a abordagem dos conteúdos e em alguns casos mencionam que suas formações foram deficientes e que por isso ao lecionarem o conteúdo de área se baseiam em um método tradicional tecnicista mediado por repetições de atividades, memorização e atividades poucos reflexivas.

Ao analisar os processos de ensino e aprendizagem da área do círculo e do perímetro da circunferência com alunos do 9º ano do ensino fundamental, Paulo (2012) se apoiou na engenharia didática juntamente com a TSD. Os resultados dessa investigação ressaltaram que houve um avanço quanto aos significados de área enquanto grandeza, assim como na distinção entre círculo e circunferência e entre perímetro e área.

O estudo de Santos (2014) analisou a aprendizagem de alunos de duas turmas do 5º ano do ensino fundamental sobre a área enquanto grandeza autônoma com o auxílio da história da matemática. Os resultados evidenciaram que durante a realização das atividades houve um progresso dos alunos no que concerne a apropriação do conceito de área, resultado semelhante ao da pesquisa de Paulo (2012).

Quevedo (2016) analisou como alunos de uma turma do 9º ano do ensino fundamental compreendiam os conceitos de área e perímetro. Para atingir seu objetivo se apoiou em uma sequência de atividades, com duração de nove horas aulas, tendo como aporte teórico a TCC de Gérard Vergnaud. Por meio da vivência aplicada, após os alunos resolverem as atividades, o pesquisador as discutia na sala de aula para que os alunos compreendessem o porquê de terem respondido corretamente ou incorretamente as situações propostas. Esse pesquisador evidenciou que os alunos cometeram erros durante a resolução das atividades sendo ligados a uma má compreensão dos conceitos, algo que ocorreu também no estudo de Silva (2011). A fim de responder as situações, os alunos tentavam aplicar fórmulas e suas definições quando o seu contexto não se remetia a suas aplicações. Por fim, o autor menciona que é possível propiciar a construção dos conceitos de área e perímetro a partir de sequências de atividades, contanto que elas proporcionem reflexão e um empoderamento desse saber.

Com base nas discussões apresentadas das diversas pesquisas o próximo tópico é voltado à abordagem da área enquanto grandeza geométrica.

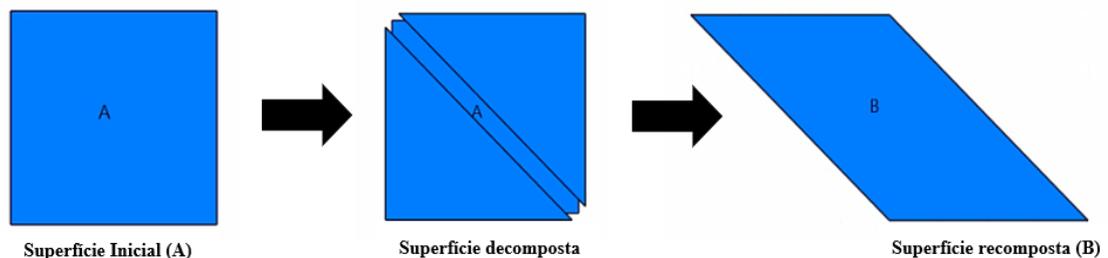
2.2 A área enquanto grandeza geométrica: o que dizem as pesquisas?

Essa pesquisa ao abordar o conceito de área como grandeza geométrica se apoia nas ideias de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989). Essas pesquisadoras, por meio de uma engenharia didática, desenvolveram um estudo com alunos franceses e constataram que esses participantes nas resoluções das atividades de área apresentavam dois tipos de concepções: a geométrica e a numérica.

A concepção geométrica refere-se às situações em que os alunos não distinguem a superfície e sua área, ou seja, consideram que se o formato da superfície muda, necessariamente sua área também se altera.

A figura 2, a seguir, traz o exemplo de aplicação de um procedimento de decomposição de uma superfície inicial A em dois pedaços, seguido pela recomposição desses dois pedaços, sem perda nem sobreposição, formando uma superfície B, distinta da inicial. Sabe-se que embora tenham formas distintas e perímetros distintos, as superfícies A e B têm áreas iguais. Discutiremos em seguida a interpretação dessa situação sob a ótica de uma concepção geométrica.

Figura 2- Exemplo de uma possível concepção geométrica



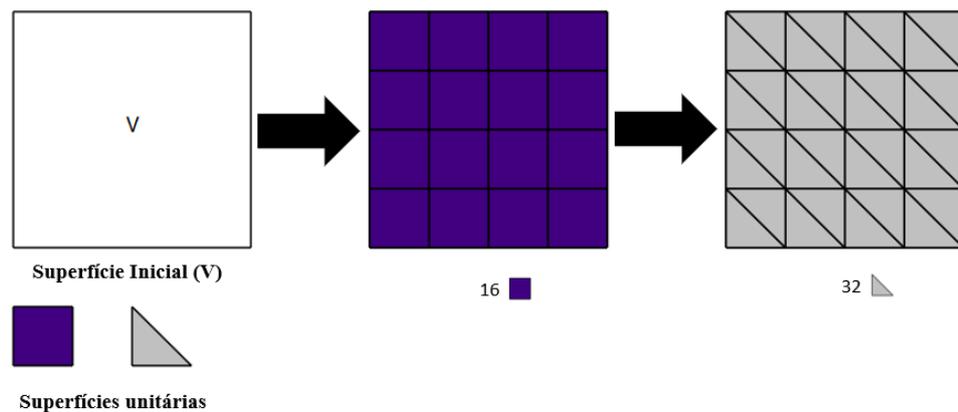
Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Um sujeito que mobiliza uma concepção geométrica da área, seja na resolução de problemas no *Apprenti Géomètre 2* ou em outro ambiente de estudo, pode considerar (erradamente) que ao alterar a forma da superfície inicial A, por meio da decomposição e recomposição que leva à superfície recomposta B, como ilustrado na figura 2, a área da superfície será alterada. Ou seja, ao mobilizar uma concepção desse tipo, a pessoa parece vincular a área à forma da superfície, o que leva a concluir que a área de A e a área de B são diferentes.

Como se sabe, as transformações de decomposição e recomposição (sem perda nem sobreposição) podem alterar outras propriedades da superfície (como o perímetro, por exemplo), mas não alteram a área da superfície inicial e, portanto, as superfícies A e B possuem a mesma área. Entretanto, do ponto de vista de um sujeito que mobiliza uma concepção geométrica, as áreas dessas figuras são diferentes, porque as figuras são diferentes ou porque do ponto de vista da percepção uma é mais “espalhada” que a outra, dando uma sensação de “ocupar mais espaço”.

Já a mobilização de uma concepção numérica, se manifesta quando os alunos consideram apenas os aspectos numéricos para o cálculo de área, desprezando outros elementos da situação. Nesse caso, parecem não diferenciar a área e o número. Para exemplificar a mobilização de concepções desse tipo, apresentamos a figura 3, na qual é dada uma superfície V, seguida das ilustrações do ladrilhamento de V com superfícies unitárias de dois tipos (quadrado e triângulo retângulo isósceles).

Figura 3- Exemplificando uma possibilidade de concepção numérica



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Ao medir a área da superfície inicial V por meio do ladrilhamento efetivo, espera-se, que os alunos obtenham pares distintos para representar a mesma área, isto é, obtenham 16 quadrados ou 32 triângulos retângulos isósceles. É possível que um aluno ao mobilizar uma concepção numérica não perceba que área e números são diferentes. Verifica-se na figura 3 que a superfície não foi modificada, permanecendo a mesma a área, mas ao alterar a unidade de medida, o valor numérico obtido para medida da área é alterado. O sujeito que mobiliza uma concepção numérica pode não lidar apropriadamente com mudanças de unidade, pois foca sua atenção apenas em cálculos. Erros como os observados no uso inadequado de

fórmulas e unidades de medida muitas vezes são vinculados à mobilização de concepções numéricas da área.

Um mesmo sujeito pode ora mobilizar uma concepção geométrica ora uma concepção numérica, sem estabelecer as articulações pertinentes entre os aspectos geométricos e numéricos da área na resolução de problemas.

Conforme descrevem Douady e Perrin-Glorian (1989), erros frequentes observados entre os alunos podem ser analisados sob a ótica das concepções “geométrica” e “numérica”:

- A superfície unitária sendo uma superfície com certa forma faz com que a possibilidade de medida de uma superfície dependa de S ser efetivamente ladrilhável com elementos daquela forma. Assim, os alunos encontram dificuldade para exprimir a área de um triângulo em cm^2 (centímetros quadrados), dada a impossibilidade de cobri-lo com número finito de quadrados.
- A área é ligada à superfície e não se dissocia de outras características dessa superfície;
- Se o perímetro de uma superfície se altera sua área também (e reciprocamente).
- Se duas superfícies têm o mesmo perímetro, elas têm a mesma área.
- Estende-se o uso de certas fórmulas a situações em que elas não são válidas: por exemplo, produto de duas “dimensões” para obter a área de um paralelogramo ou o produto das três “dimensões”, no caso de um triângulo (p.394-395)⁵.

Partindo desses erros observados, Douady e Perrin- Glorian (1989) evidenciam que os participantes apresentaram lacunas de conhecimentos quanto ao conceito de área, pois é essencial a distinção de área e número, assim como, entre área e figura. Como uma forma de superação de erros como os citados acima, as autoras propõem a relevância de articular e diferenciar três quadros: o geométrico, o numérico e o das grandezas.

No quadro geométrico estão as superfícies planas (triângulos, quadriláteros, etc.); no quadro numérico estão as medidas de áreas de superfícies que são números reais não negativos \mathbb{R}^+ ($1, \frac{2}{3}, \sqrt{29}, 2.7, \text{etc.}$) e o quadro das grandezas é composto pelas classes de equivalência de superfícies que possuem mesma área. Quando duas ou mais superfícies tem mesma área, elas pertencem à mesma classe de equivalência. Antes mesmo de obter métodos para medir área, pode-se trabalhar a ideia de ter mesma área, por meio da decomposição e recomposição, sem perda nem sobreposição. Após o desenvolvimento de técnicas para

• ⁵La surface unité étant une surface avec une certaine forme, la mesure d'une surface S est tributaire de la possibilité de paver effectivement S avec cette forme. Ainsi des élèves rencontrent des difficultés pour exprimer l'aire d'un triangle en cm^2 puisqu'on ne peut pas le paver avec des carrés.

• L'aire est attachée à la surface et ne se dissocie pas d'autres caractéristiques de cette surface:
-si le périmètre d'une surface augmente, son aire aussi (et réciproquement)
-si deux surfaces ont le même périmètre, elles ont la même aire (et réciproquement).

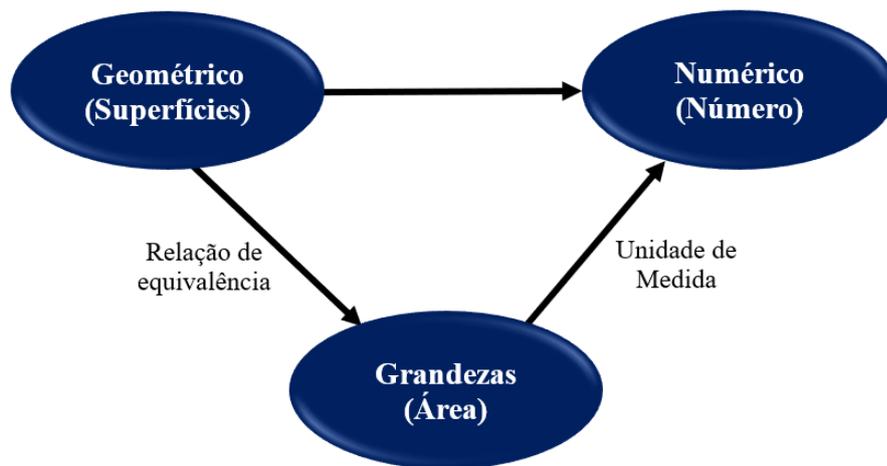
• On étend des formules à des situations où elles ne sont pas valables: par exemple produit des "dimensions" pour un parallélogramme ou des "trois dimensions" d'un triangle.

Trata-se de uma tradução livre do texto original em francês.

atribuir um valor numérico à área, podemos expressar uma área por meio de um par composto por um número e uma unidade de medida (1cm^2 , $\frac{2}{3}\text{ha}$, $\sqrt{29}\text{m}^2$, etc.) (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Para esclarecer as articulações entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas, Bellemain e Lima (2002) apresentam uma esquematização exposta na figura 4.

Figura 4- Esquematização das articulações entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas



Fonte: Bellemain e Lima (2002)

Como uma maneira de entender as interligações e diferenciações entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas, como também, a passagem de um para outro quadro, Baltar (1996) propõe um conjunto de situações que auxiliam na compreensão desse fenômeno, temática discutida no próximo tópico.

2.3 As situações que dão sentido ao conceito de área enquanto uma grandeza

A partir do estudo desenvolvido por Doaudy e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996) subsidiada pela TCC⁶ de Gérard Vergnaud realizou um prolongamento da pesquisa dessas autoras propondo um conjunto de situações que dão sentido ao conceito de área como grandeza, no qual são consideradas três classes de situações: comparação de áreas, medida de área e produção de superfície.

⁶A TCC, de caráter cognitivista, desenvolvida por Vergnaud e colaboradores a partir da década de 1980 emerge na intenção de verificar e compreender o desenvolvimento cognitivo de pessoas a partir de situações de aprendizagem. Para o desenvolvimento de um conceito nesta perspectiva teórica são necessários o estudo de outras definições, situações, representações, propriedades, e teoremas de maneiras interligadas formando o que se denomina de campo conceitual. Estudar um conceito por meio dos campos conceituais de acordo com Vergnaud (1990) é entender outros conceitos sendo confrontados por meio de distintas situações ao longo do tempo, o que possibilita ir se apropriando com o decorrer da vivência, e não reduzindo-se apenas a sua definição.

Essa tríade, de acordo com Bellemain e Lima (2002), pode ser compreendida da seguinte maneira:

As situações de comparação se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas. Quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com frequência, os quadros geométrico e numérico vão ser necessários para a resolução dos problemas de comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação à do quadro das grandezas. **Nas situações de medida**, destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade. **As situações de produção** são diferentes das anteriores do ponto de vista da tarefa cognitiva do aluno. Enquanto nas situações de comparação e medida em geral há apenas uma resposta correta para cada situação, as situações de produção, frequentemente admitem várias respostas corretas. Além disso, apesar de a resposta esperada para uma situação de produção ser uma superfície (objeto geométrico), a intervenção dos outros quadros pode ser tão importante quanto a do quadro geométrico (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p.45).

As situações de comparação, medida e produção de superfície, organizadas por Baltar (1996), possibilitam compreender quais quadros (geométrico, numérico e o das grandezas) são mobilizados durante a resolução de uma atividade, assim como, quais procedimentos é possível adotar para se obter o resultado desejado. Ancorados na proposta de Baltar (1996), pesquisadores brasileiros como Santos (2005), Ferreira (2010) e Silva (2016) adotaram essas categorizações para investigação do conteúdo de área no contexto da educação básica.

Entre esses, Ferreira (2010) inclui nas categorias propostas por Baltar (1996) a situação de mudança de unidades, centrada no quadro numérico. Essa autora organizou as situações que dão sentido ao conceito de área em quatro grupos, como se pode observar na figura 5, ao se abordar o conceito de área e relações existentes entre este conceito e o de perímetro com alunos do 6º ano do ensino fundamental.

Figura 5- Situações que dão sentido ao conceito de área como uma grandeza

S I T U A Ç Õ E S	COMPARAÇÃO	ESTÁTICAS	Sem unidade de medida		
			Com unidade de medida	Não-convencional	
				Convencional	
		DINÂMICAS	Variação da área e do perímetro por deformação ou transformação geométrica		
			Otimização da área por invariância do perímetro e vice-versa		
	MEDIDA	EXATA	Com unidade de medida não-convencional		
			Com unidade de medida convencional		
		ENQUADRAMENTO	Aproximações		
	MUDANÇA DE UNIDADE		Com unidade de medida	Não-convencional	
				Convencional	
	PRODUÇÃO		Mesma área que a de uma figura dada		
Área maior ou menor que a de uma figura dada					
Com área dada					

Fonte: Ferreira (2010, p. 29)

Com base nas informações do quadro proposto por Ferreira (2010) expostas por meio da figura 5, os próximos tópicos descrevem com mais detalhes as classes de situações (comparação, medida, mudança de unidade e produção de superfície) que dão sentido ao conceito de área.

2.3.1 Situações de comparação

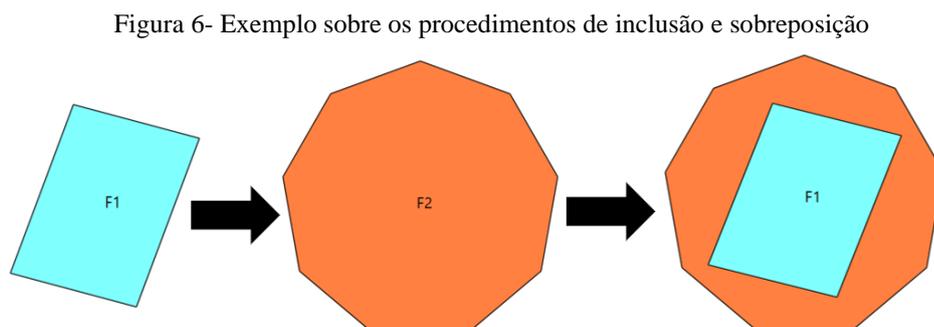
Nas situações de comparação, Baltar (1996) menciona que é importante distinguir o quantitativo de superfícies a serem comparadas, ou seja, duas ou várias (seriação). O trabalho com a seriação exige a mobilização da transitividade da relação de ordem algo que não acontece na comparação de duas superfícies.

Para essa autora, a situação de comparação pode ser subdividida em estáticas e dinâmicas. Entende-se por estáticas aquelas situações nas quais as figuras não são modificadas. Já as dinâmicas, são aquelas em que as figuras são submetidas a transformações e/ou deformações.

2.3.1.1 Situações Estáticas

No conjunto das situações de comparações de área são denominadas estáticas aquelas nas quais as superfícies “não são alteradas diante dos procedimentos utilizados” (FERREIRA, 2010, p.29). Nesse tipo de situação, é possível se obter o resultado por meio do aspecto da unidade de medida ou sem o seu uso. Dessa forma, têm-se como procedimentos para resolução de situações de comparação:

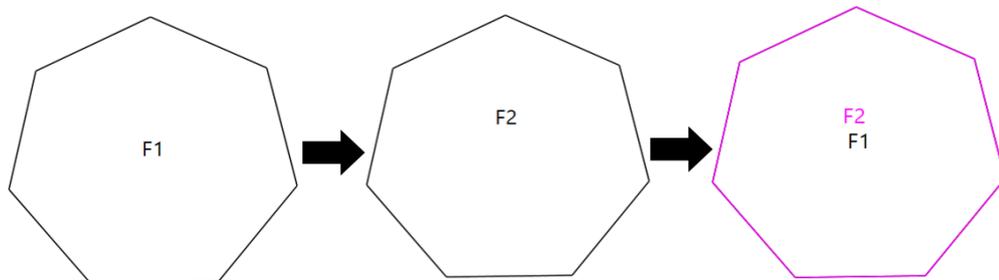
- **Inclusão e sobreposição:** Sejam duas superfícies distintas F_1 e F_2 . Ao se sobrepor F_1 em F_2 e esta superfície (F_1) permanecer inclusa totalmente em F_2 , pode-se afirmar que a área de F_1 é menor que a de F_2 , como ilustrado na figura 6.



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Ao se utilizar o mesmo procedimento e se ambas as superfícies (F_1 e F_2) coincidirem, por sobreposição, elas possuem a mesma área. Essa ideia está expressa por meio da figura 7.

Figura 7- Figuras sobrepostas com mesma área

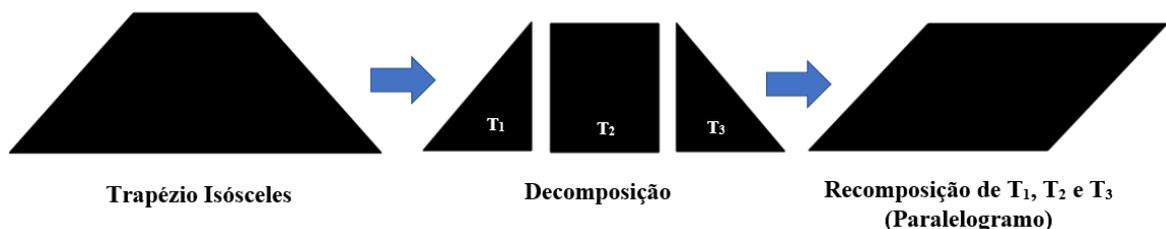


Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

De acordo com Ferreira (2010) e Santos (2015) os procedimentos de inclusão e sobreposição estão associados com mais ênfase aos aspectos geométricos, se apoiando na invariância da área, por movimentos rígidos. Essas autoras consideram que as formas das superfícies comparadas são relevantes para permitir ou não que procedimentos desse tipo levem a resolver os problemas adequadamente.

- **Equidecomposição:** É uma técnica que contempla decompor as superfícies a serem comparadas e posteriormente comparar os pedaços obtidos, dois a dois. Se as duas figuras forem decompostas em partes duas a duas congruentes então terão áreas iguais.
- **Decomposição e recomposição (corte e colagem):** Esse tipo de procedimento, (que pode ser realizado em diversos ambientes digitais ou não, no caso desta pesquisa no *Apprenti Géomètre 2*), possibilita o entendimento da área enquanto grandeza, pois é possível decompor figuras em pedaços menores e recompor esses pedaços construindo outras figuras de formatos diferentes da inicial, mas com a mesma área. A figura 8 ilustra os procedimentos descritos.

Figura 8- Exemplo de decomposição e recomposição



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

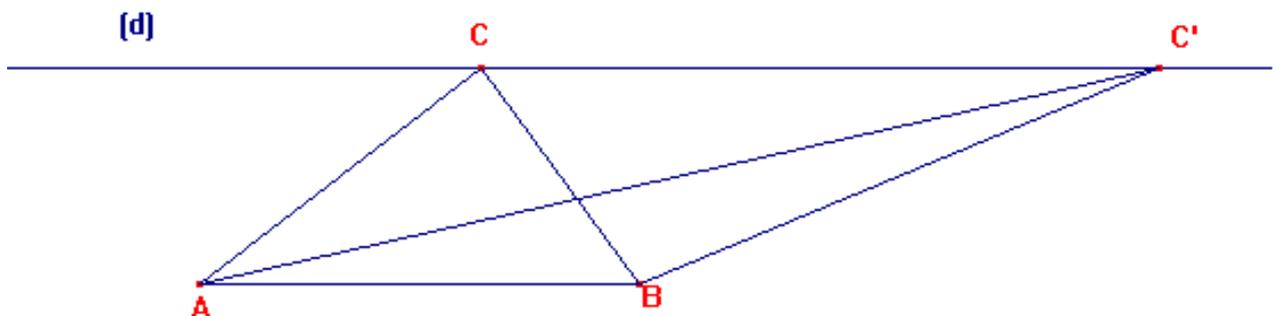
Nas condições ilustradas na figura 08, dizemos que as áreas do trapézio isósceles e do paralelogramo são iguais. Muitas vezes, em situações deste tipo destaca-se a articulação entre os quadros geométrico e das grandezas e não é necessária a intervenção do quadro numérico.

2.3.1.2 Situações Dinâmicas

As situações dinâmicas abordam o estudo das variações de área e perímetro no decorrer de deformações e transformações geométricas, assim como, a otimização da área e suas limitações (BALTAR, 1996, FERREIRA, 2010). O foco de situações desse tipo está em observar que propriedades das superfícies se conservam e quais são modificadas, sob efeito de transformações geométricas ou deformações das figuras. Por exemplo: o que acontece com a área de uma figura quando ela é submetida a um movimento rígido? O que acontece com seu perímetro? Entre todos os quadriláteros que têm áreas iguais, qual o que tem menor perímetro? O que acontece com a área de uma figura submetida a uma ampliação? O que acontece com seu perímetro?

O caso a seguir também é considerado uma situação de comparação dinâmica. A reta (d) é paralela ao segmento AB e os pontos C e C' pertencem à reta (d). Vamos considerar como se o triângulo ABC' fosse uma deformação do triângulo ABC (ou vice-versa), ou seja, como se o ponto C fosse móvel e “se deslocasse” sobre a reta (d). Ambos os pontos C e C' são instâncias de um ponto genérico sobre a reta.

Figura 9- Exemplo de uma situação dinâmica de comparação de áreas



Fonte: Elaborado pelo autor no Cabri-Géomètre

Trata-se nesse caso, de observar o que ocorre com a área do triângulo quando submetido à deformação descrita e/ou o que ocorre com seu perímetro.

2.3.2 Situações de Medidas

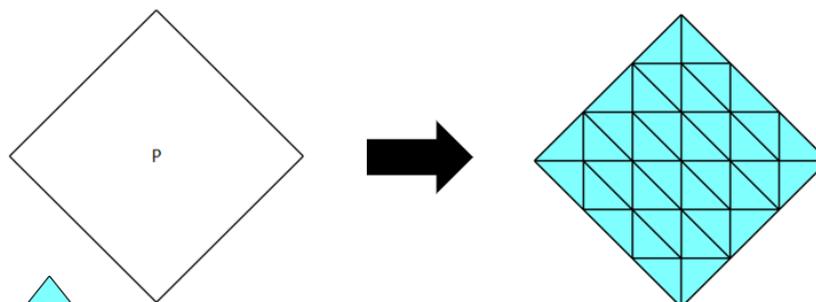
As situações de medidas possibilitam “a passagem do quadro das grandezas para o quadro numérico” (FERREIRA, 2010, p.31). Para essa autora, a medida da

área de uma superfície pode ser expressa por um número seguido de uma unidade (medida exata) ou por um intervalo (medidas aproximadas por enquadramento) com uma escolha sucessiva de unidades que permitam uma medida mais aproximada da área da superfície, o que leva a distinguir dois tipos de situações de medidas: as situações de enquadramento e as de medida exata. Nas **situações de enquadramento**, a área de uma superfície de borda irregular ou arredondada será aproximada. As **situações de medidas exatas de área** são aquelas em que, para a escolha de uma unidade, é atribuído um número à área da superfície. Para isso, adotam-se dois procedimentos que consideram a área enquanto grandeza: unidimensional e bidimensional (p.31-32).

Nessa pesquisa, o interesse se volta para os procedimentos que envolvem a área enquanto grandeza unidimensional, ou seja, ao invés de estudar a medida da área, apoiada nas relações entre a área e comprimentos (expressas por fórmulas), o foco é a medição direta, ou seja, a relação da área de uma superfície com certa unidade de área. Entre esses procedimentos, destacam-se as situações de ladrilhamento e as que envolvem adição e subtração de áreas.

- **Ladrilhamento:** O processo de ladrilhamento consiste em preencher totalmente uma superfície, sem sobreposição, com um número limitado de superfícies unitárias. Essa estratégia, por exemplo, pode ser visualizada na figura 10 na qual é dada uma superfície (P), e a superfície unitária R (Triângulo retângulo isósceles). O resultado desse procedimento pode ser expresso pelo par (número, unidade de medida). No caso a seguir a área da superfície P é de 36 R.

Figura 10- Ladrilhamento efetivo da superfície P



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Quando não é possível preencher totalmente a superfície (P) com um número finito de superfícies unitárias (R), vários caminhos podem ser tentados: utilizar outra superfície unitária (R') cuja área seja igual à de (R) e que permita um ladrilhamento efetivo (se houver); realizar uma decomposição-recomposição sem perda nem sobreposição de modo a obter uma superfície (P') de mesma área que P e que seja ladrilhável com número finito de superfícies unitárias (R), se isso for possível, ou ainda fornecer uma medida aproximada ou um enquadramento da área da superfície (P).

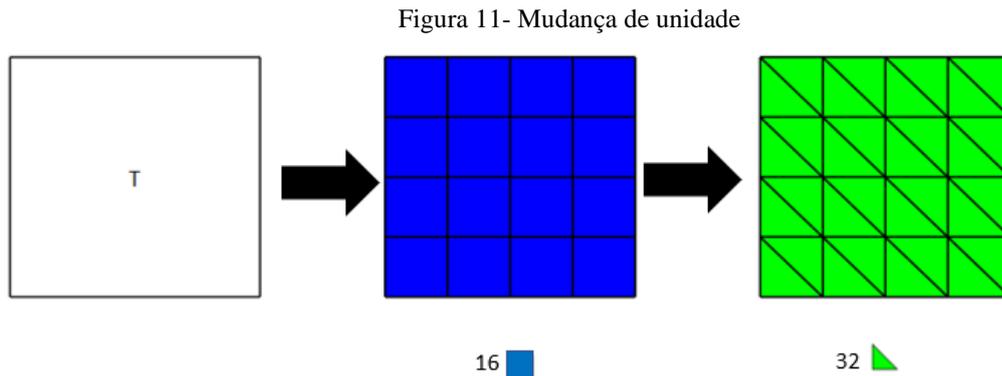
► **Adição e subtração de áreas:** É o procedimento pelo qual uma superfície S é decomposta em duas superfícies S_1 e S_2 , sendo essas, superfícies quase-disjuntas⁷, ou seja ($S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$)⁸. Nesse caso, a área da superfície S pode ser dada pela soma das áreas das superfícies que a compõem (S_1 e S_2). Uma das consequências dessa técnica é que ao decompor uma dada superfície (S) em duas ou mais partes, ao uni-las formando outra superfície, sua área permanece a mesma.

2.3.3 Situações de Mudança de Unidades

Ferreira (2010) em seu estudo contemplou a distinção entre as situações da medida de áreas e mudança de unidades de áreas. Essa autora defende a relevância da articulação entre os três quadros geométrico, numérico e das grandezas, com a presença de superfícies, anteriormente à integração das unidades de medidas não convencionais, haja visto que esse procedimento propicia a compreensão da noção da construção do par (número e unidade de medida). As situações de mudanças de unidades possibilitam a distinção entre área e número, pois mostram que uma mesma área pode ser representada por diferentes pares compostos de um número acompanhado por uma unidade de medida de área. Na figura 11, por exemplo, a superfície T pode ser ladrilhada com 16 exemplares da superfície unitária  ou com 32 exemplares da superfície unitária . Então a área dessa figura tanto pode ser representada pelo par 16  como pelo par 32 .

⁷ Superfícies quase disjuntas têm no máximo pontos de fronteira em comum.

⁸ Esse procedimento pode ser estendido à situação em que a superfície é decomposta por um conjunto finito de superfícies (S_1, S_2, \dots, S_n) duas a duas quase-disjuntas.



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Para a construção do conceito de área como grandeza, Ferreira (2010), Santos (2015) e Silva (2016) corroboram que a situação de mudança de unidade faz uma correspondência com maior ênfase entre os quadros numérico e geométrico, sendo esse segundo às vezes relegado por meio dos procedimentos adotados nas resoluções.

2.3.4 Situação de Produção de Superfícies

Diferentemente das situações supracitadas (comparação, medida e mudança de unidade) de áreas, a produção de superfície admite frequentemente que uma mesma atividade possa assumir distintas respostas corretas (BELLEMAIN; LIMA, 2002; FERREIRA, 2010; SANTOS, 2015; SILVA, 2016).

Neste tipo de situação existe a variação e articulação entre os quadros geométrico e das grandezas quando os aspectos numéricos são relegados, ou a variação e articulação entre os quadros numérico e geométrico, dependendo dos procedimentos de resoluções adotados.

As situações de produção de superfícies estão categorizadas em três subtipos aos quais correspondem procedimentos para resoluções específicos.

➤ I - Produção de superfície de mesma área que uma superfície dada

Os procedimentos que constituem a produção de superfície de mesma área que uma superfície dada podem ser compreendidos pelas técnicas de corte e colagem (composição e decomposição) e contagem das unidades de medidas de área.

A **contagem das unidades de medidas de área** se apoia nas estratégias de ladrilhamento das situações de medidas de área. Quando é escolhida uma superfície unitária, e com ela é possível ladrilhar efetivamente duas ou mais superfícies distintas, obtendo-se o

mesmo par (número, unidade de medida), pode-se ressaltar que as superfícies medidas possuem a mesma área (FERREIRA, 2010).

De modo a exemplificar esse tipo de situação temos a figura 12. Ao ladrilhar a superfície C, por meio da superfície unitária , obtemos o par 24 .

Com essas mesmas 24 superfícies unitárias podemos produzir inúmeras superfícies com área igual à de C. No exemplo a seguir construímos um retângulo.

Figura 12- Produção de superfície por meio de aspectos numéricos

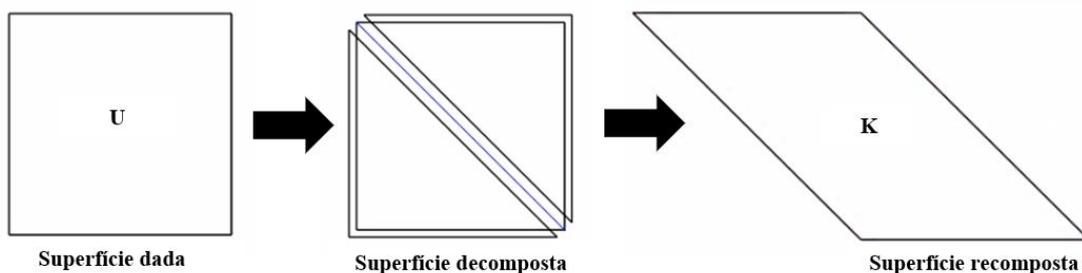


Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

De acordo com Ferreira (2010) ao se apropriar de uma “escolha de determinados valores para as variáveis de situação como a forma de superfície dada, a forma da unidade de medida, e aquela da superfície que será produzida, pode ser favorável ou bloquear a resolução do aluno” (p.33).

Já o **corte e colagem (composição e decomposição)** está atrelado aos procedimentos geométricos, sem a presença do quadro numérico. Se uma superfície (K) é produzida a partir de uma superfície (U) pelo procedimento de corte e colagem, sem perdas e sem sobreposição, elas possuem a mesma área. Essas estratégias podem ser percebidas a seguir na figura 13.

Figura 13- Produção de superfície de mesma área que a dada por meio de aspectos geométricos



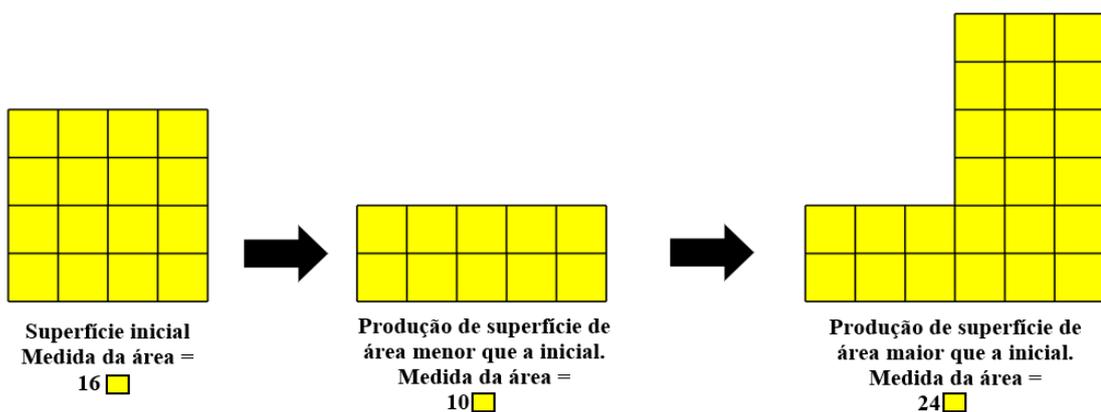
Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

É válido frisar que a superfície U poderia ter sido decomposta de outras maneiras e que K também poderia assumir outros formatos. A decomposição e recomposição, sem perda nem sobreposição não altera a área da superfície e, portanto, esse procedimento geométrico permite produzir inúmeras superfícies de mesma área que uma superfície dada. Esse tipo de situação permite contribuir para o entendimento da área enquanto grandeza porque se respalda na ênfase de que superfícies distintas podem possuir áreas iguais, ou seja, a reforçar que a figura e a área são coisas diferentes.

➤ II - Produção de superfície de área maior ou menor a uma superfície dada

A produção de superfícies que respondem a essas condições podem ser realizadas a partir de procedimentos numéricos ou geométricos. Nos procedimentos numéricos se deve considerar a medida da área de uma superfície inicial e por meio dela produzir outras superfícies, menores ou maiores, de acordo com o solicitado. A obtenção da medida da área da superfície inicial pode ser conduzida a partir de contagem de ladrilhos (ladrihamento efetivo) ou cálculos (fórmulas). Ambas as técnicas se baseiam na propriedade segundo a qual, se as áreas de duas figuras são medidas utilizando uma mesma unidade, a ordem das medidas determina a ordem das áreas (FERREIRA, 2010). A figura 14 sintetiza as estratégias numéricas, sem uso de fórmulas.

Figura 14- Produção de superfícies de área menor e maior que a dada por meio de procedimentos numéricos

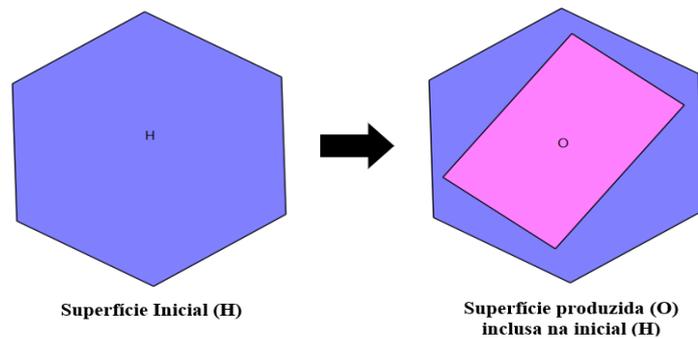


Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Quanto aos procedimentos geométricos, se tem a construção da superfície no interior ou no exterior da superfície inicial, assim como, parte de seu recorte ou acréscimo. A técnica de **construir uma superfície no interior ou exterior da inicial** pode ser compreendida pela aditividade das áreas, uma vez que a medida da área é não negativa.

Em outras palavras, é possível entender este tipo de situação da seguinte maneira: dada uma superfície H (inicial), se for possível produzir em seu interior uma superfície (O) e ela ficar inclusa em (H), se diz que a área da superfície (O) é menor que a de (H), como mostra a figura 15.

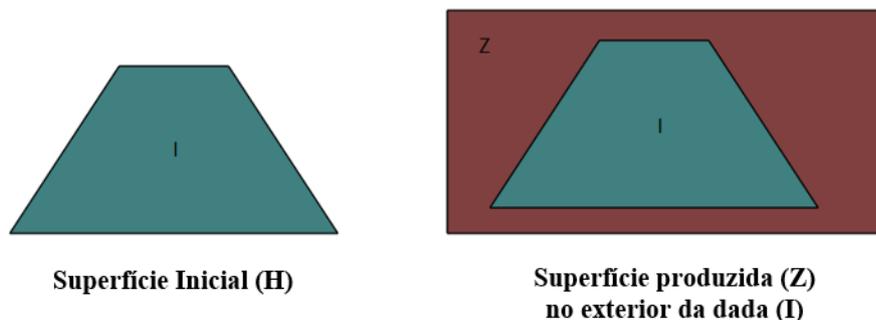
Figura 15- Produção de superfície de área menor no interior da dada



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

A figura 16 ilustra que o mesmo procedimento é válido para produção de uma superfície de área maior, ou seja, se uma superfície (Z) for produzida e ela contiver a superfície (I), então a superfície (Z) tem área maior que a de (I).

Figura 16- Produção de superfície de área maior que a de uma superfície dada



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Muitas vezes, ao adotar esse procedimento, os alunos produzem figuras semelhantes à inicial, o que provoca ou pelo menos reforça a tendência a pensar que a área e o perímetro sempre variam no mesmo sentido, o que sabemos, não é verdade. Essa constatação nos levou a exemplificar com a produção de superfícies de formas distintas daquela da superfície inicial.

Ferreira (2010) e Silva (2016) ressaltam que o procedimento de **recortar ou acrescentar uma parte da superfície** também se justificam pela aditividade das áreas. Vale enfatizar que neste tipo de situação o formato da superfície em geral é alterado.

➤ III - Produção de superfície com área dada

Nesse tipo de situação, o mais provável é utilizar procedimentos baseados na contagem de unidades ou no uso de fórmulas de área.

2.4 Os recursos tecnológicos como auxílio para o processo do ensino e da aprendizagem na matemática

No contexto educacional espera-se que as tecnologias sejam usadas com finalidades pedagógicas para favorecer um processo de ensino distinto do habitual (papel e lápis), objetivando como produto final da vivência a aprendizagem dos alunos.

No campo da educação, a matemática tem sido enriquecida com a diversidade de programas de Geometria, Geometria Dinâmica (GD) e Matemática Dinâmica (MD), originados com o avanço da informática, que auxiliam o professor no processo de ensino.

Os programas de Geometria permitem a resolução de atividades em seu ambiente por meio da manipulação com o *mouse*. Por exemplo, o Poly⁹ é um *software* de Geometria que permite ao usuário o trabalho com sólidos geométricos melhorando a visualização de seus elementos (vértice, arestas e faces).

Pesquisadores brasileiros (PACHÊCO; SILVA, 2017) discutem que o *software* Poly pode contribuir para que alunos visualizassem com maior ênfase os elementos que constituem os poliedros (arestas, faces e vértices) ao dispor de ferramentas como planificação, composição e reconstrução de sólidos.

Pachêco e Silva (2017) propuseram que alunos do 6º ano do ensino fundamental resolvessem uma atividade sobre poliedros regulares com o auxílio do Poly. Sob a ótica da Teoria da Aprendizagem Significativa, proposta por David Ausubel, o estudo evidenciou que os participantes resolveram as questões por meio do *software* e que ele se tornou um material potencialmente significativo durante o processo de resolução.

No que concerne aos programas de GD, eles recebem essa denominação em relação aos demais *software* de Geometria por serem ambientes interativos, possibilitando a manipulação de objetos matemáticos por meio do *mouse*, sem perda de suas propriedades. Surgidos na década de 1980, os pioneiros desse campo são o Cabri Géomètre e o Geometer's Sketchpad (BELLEMAIN, 2000).

⁹*Software* grátis e está disponível para download no site <http://www.peda.com/poly/>,

A versatilidade de manipulação dos *software* de GD tem contribuído para o contexto educacional da Matemática no qual possibilita que professores os utilizem em sala de aula com intenções didático-pedagógicas relacionando-os a conhecimentos matemáticos que estão sendo trabalhados, não se limitando apenas ao ensino da geometria. Por exemplo, o *software* de GD *Apprenti Géomètre 2*, permite explorar distintos conceitos da matemática e “não apenas a geometria euclidiana, mas também tópicos como grandezas, frações, medidas ou aritmética” (CREM, 2019, p.1, tradução nossa¹⁰).

No âmbito da Educação Matemática diversos pesquisadores (GRAVINA, 2001; SILVA, 2012; COSTA, 2016 e outros) ressaltam as potencialidades da GD como recursos tecnológicos para o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Silva (2012) discute que os programas de GD tem contribuído para o âmbito da Educação Matemática, pela sua flexibilidade de manipulação, especialmente no que diz respeito aos conteúdos geométricos. Embora seja um recurso tecnológico que auxilia para o processo de ensino e da aprendizagem, esse autor propõe que o professor o utilize apenas com objetivos educacionais articulado a algum conteúdo, na busca de estimular a compreensão de do objeto em estudo.

A pesquisa de Costa (2016) sobre quadriláteros com alunos do 6º ano do ensino fundamental mostrou que o uso do GeoGebra possibilitou que alguns desses participantes avançassem no que diz respeito à compreensão das propriedades dessas figuras geométricas.

Concordamos com o que se discute nas pesquisas anteriores: os programas de GD podem ser elementos relevantes para a condução do ensino pelo fato de possibilitarem visualização e operações do objeto de estudo, sem perda de suas propriedades. Mas sua inserção sem as reflexões necessárias, não é suficiente para provocar um avanço consistente de aprendizagem. A relevância da integração de *software* de GD na sala de aula deve ser feita por meio de propostas didático-pedagógicas adequadas.

Salin (2014) chama de *software* de matemática dinâmica (MD) os programas de GD que, a depender da metodologia adotada pelo professor, permitem explorar outros conteúdos além dos geométricos, como por exemplo, a álgebra.

De acordo com Salin (2014), o GeoGebra é definido por alguns professores e pesquisadores como de MD. Essa autora ressalta que por meio da exploração do conjunto de ferramentas de programas da MD é possível a construção mental de novos conhecimentos, uma característica essencial na integração do uso de *software* no ambiente da sala de aula.

¹⁰“Non seulement la géométrie euclidienne mais également des sujets tels que grandeurs, fractions, mesures ou arithmétique” (CREM, 2019, p.1).

Em seu estudo de dissertação, Salin (2014) denomina o *software* GeoGebra como MD, denominados por muitos autores como GD (MACHADO, 2011; BALLEJO, 2015; COSTA, 2016). A opção por essa nomenclatura, segundo Salin (2014), é porque o “próprio nome GeoGebra, Geo para Geometria e Gebra para álgebra, sinaliza este potencial, e assim ele pode ser considerado um interessante e rico exemplar de *software* de matemática dinâmica (p.32).

Com base nessas reflexões, é válido enfatizar que independente da terminologia adotada para o trabalho com *software* (Geometria, GD, MD) em sala de aula, o professor se aproprie de suas funcionalidades e os integre em sua prática pedagógica para torná-los aliados para o processo de ensino e de aprendizagem nas suas aulas. Ressalta-se, ainda, que os professores ao usarem recursos tecnológicos devem conceber uma análise crítica na vivência do estudo, objetivando a construção do conhecimento por seus alunos e não os introduzirem sem finalidades educacionais.

Alguns questionamentos que poderiam servir de suporte para o professor refletir sobre o processo de integração de *software* na sala de aula seriam: As ferramentas desse programa poderiam me auxiliar no processo de ensino de algum conteúdo de matemática? De que maneira explorar o conteúdo com *software* na sala de aula? Meu planejamento didático é suficiente para abarcar o uso de programas com o conteúdo? De que maneira posso conduzir uma aula com o uso de um *software*? Qual a minha finalidade ao usar o *software* como aporte para o ensino do conteúdo na matemática? O *software* vai propiciar aos estudantes reflexões e aprendizagem sobre o conteúdo explorado?

Com base nas discussões sobre a relevância do uso de recursos tecnológicos em pesquisas da educação matemática e sobre o processo de integração de *software* na sala de aula, nessa pesquisa usamos o *Apprenti Géomètre 2* e no próximo tópico discutimos as suas ferramentas.

2.4.1 O *Apprenti Géomètre 2*: uma discussão de seus elementos

O *Apprenti Géomètre 2* é um *software* criado pelo CREM no qual podem ser trabalhados conteúdos matemáticos (figuras planas, medições, frações, área, perímetro ou aritmética) como uma maneira complementar ao ambiente papel e lápis (CREM, 2019).

O CREM, a princípio, com uma primeira versão do *software* propôs que crianças de escola primária pertencentes à comunidade francófona na Bélgica realizassem com o auxílio do *Apprenti Géomètre 2* atividades não acessíveis a seu contexto escolar cotidiano. Após ser submetido a uma investigação na escola primária, observou-se a necessidade de

aprimoramento das funcionalidades desse recurso tecnológico, tornando-o mais amplo para realizações de situações problemas. De 2005 até 2007, o CREM inicia uma segunda atualização do *software* com as mesmas características da primeira versão, sendo analisadas as influências e conseqüências que o *Apprenti Géomètre 2* possibilitava no processo de ensino e aprendizagem nas escolas de níveis primário e secundário (CREM, 2007).

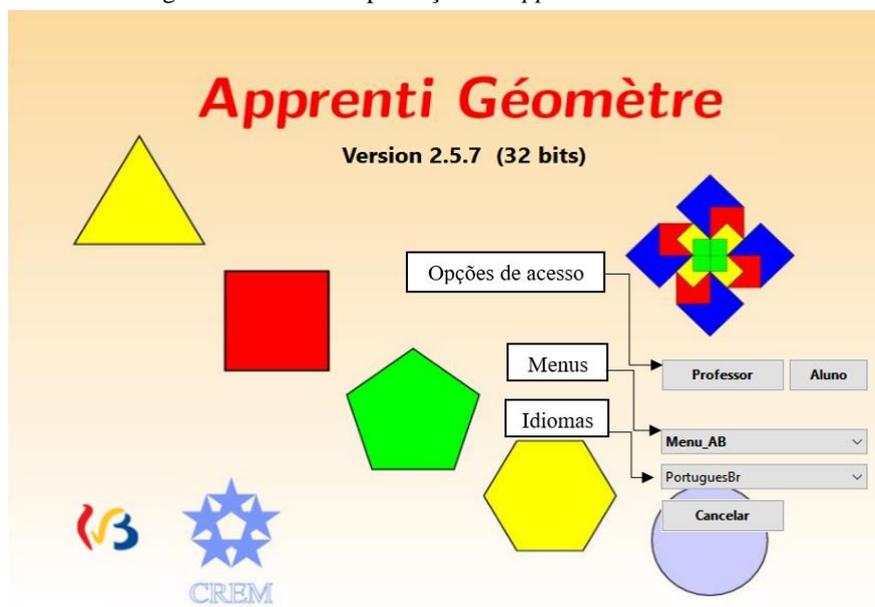
Ao investigar as duas etapas de escolaridade (primária e secundária), o CREM adotou como conteúdo a área de figuras planas (conceito, comparação, medição e situações de resolução) por estar presentes em ambos os níveis da educação. Como resultado dessa investigação obteve-se o *Apprenti Géomètre 2* possibilitando uma maior pluralidade de recursos e uma amplitude de dinamismo nas ferramentas para resolução das atividades (CREM, 2009).

2.4.1.1 Conhecendo os menus e ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*

O *Apprenti Géomètre 2* disponibiliza para o usuário ferramentas de movimentos, construção de figuras geométricas por meio de acesso predefinido e não predefinidos, transformações matemáticas (semelhanças, simetrias, etc.) entre outras funcionalidades.

Para acesso, esse *software* traz algumas opções de seleções obrigatórias: “Usuário”, “Idiomas” e “Menus”, conforme se ilustra a figura 17.

Figura 17- Tela de reprodução do *Apprenti Géomètre 2.5*



Fonte: *Apprenti Géomètre 2*

O usuário pode optar por fazer o login como professor ou aluno. A distinção se refere ao fato de que ao selecionar **Professor** não é necessário registrar o nome de usuário para ter acesso ao ambiente, entretanto na opção **Aluno** o *software* solicita o registro (nome do usuário) obrigatório para poder manipular o seu ambiente.

Nesta versão do *Apprenti Géomètre 2* são ofertados para o usuário três idiomas: o Inglês, o Francês e o português do Brasil (Português/Br). O *software* se reproduz com apenas um idioma selecionado por vez, ou seja, não é possível optar pelo francês e inglês, simultaneamente.

O *Apprenti Géomètre 2* possui cinco Menus designados pelas letras A, B, C, AB e AC. O *software* ao dispor de diferentes Menus para o usuário manipular, seja ele aluno ou professor, propõe a ausência de algumas ferramentas entre os ambientes A, B e C. Os dois últimos ambientes AB e AC são constituídos pela composição das funcionalidades dos Menus anteriores, ou seja, o ambiente AB possui todas as ferramentas que estão em A e/ou em B, e o Menu AC contemplam todas as funcionalidades presentes em A e/ou em C.

O quadro 1 expõe as ferramentas que constam nos ambientes do *software*.

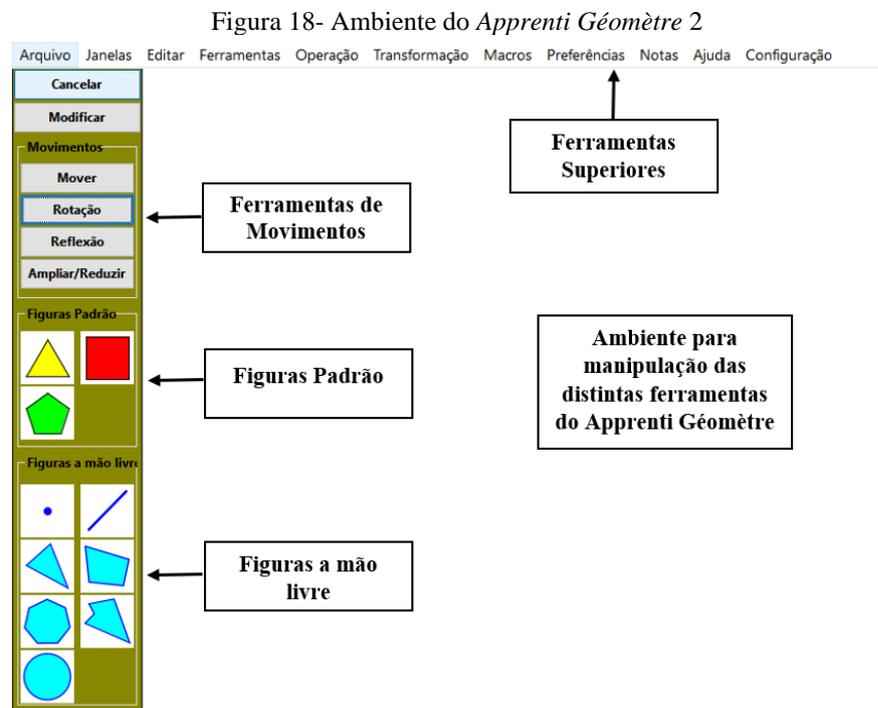
Quadro 1- Ferramentas dispostas nos Menus do *Apprenti Géomètre 2*

Conjuntos de Ferramentas do <i>Apprenti Géomètre 2</i>	Funcionalidades	Menus				
		A	B	C	AB	AC
Figuras Padrão	Figuras com formato configuradas no ambiente do <i>Apprenti Géomètre 2</i> .	X	-	-	X	X
Figuras a mão livre	Figuras que são criadas pelo usuário ao manipular o ambiente do <i>Apprenti Géomètre 2</i> por meio do <i>mouse</i> .	-	X	X	X	X
Ferramentas de Movimentos	Neste conjunto de ferramentas é possível Mover, Ampliar/Reduzir, Rotacionar e fazer a Reflexão dos objetos matemáticos no ambiente do <i>Apprenti Géomètre 2</i> .	X	X	X	X	X
Ferramentas de menus superiores	Este menu possui diversas ferramentas, entre eles, colorir, remover, criar macros e entre outros.	X	X	X	X	X
Cancelar	Refaz a última operação realizada no ambiente do <i>Apprenti Géomètre 2</i> .	X	X	X	X	X
Modificar	Altera a partir do comando do usuário com o <i>mouse</i> as figuras geométricas no ambiente do <i>Apprenti Géomètre 2</i> .	-	X	X	X	X

Fonte: Elaborado pelo autor a partir das ferramentas dispostas pelo *Apprenti Géomètre 2*

Por meio do quadro 1 é possível observar que o Menu A contempla as ferramentas de Figuras Padrão, mas não possui as ferramentas de Figuras a mão livre e o Modificar no qual estão presentes nos ambientes B e C. Vale salientar que os Menus B e C se diferenciam¹¹ pelo fato do Menu B não conceber no conjunto de Figuras a mão livre as ferramentas DSect e HalfDsk (**Segmentos**) e Direita, Linha Paralela, Linha Perpendicular, Raio, Tira e Setor (**Arcos**) (CREM, 2019).

De forma a sintetizar as informações dispostas no quadro 01 sobre os conjuntos de ferramentas que integram os Menus do *Apprenti Géomètre 2* expomos a figura 18. Para isso adotamos o ambiente do Menu AB.

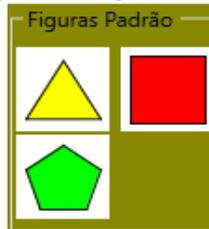


Fonte: Adaptado pelo autor do ambiente *Apprenti Géomètre 2*

A figura 18 mostra que o ambiente do *Apprenti Géomètre 2* pode conter até quatro blocos de “ferramentas” (Figuras Padrão, Figuras a mão livre, Ferramentas de movimentos e Ferramentas superiores). As Figuras Padrão são compostas por figuras geométricas com formatos predefinidos que ao serem selecionadas são reproduzidas em seu ambiente. As figuras construídas por meio dessas funcionalidades podem ser decompostas, divididas, rotacionadas, reflexionadas, alteradas de coloração (fundo e borda).

¹¹Essa distinção também é válida para os Menus AB e AC.

Figura 19- Figuras Padrão



Fonte: *Apprenti Géomètre 2*

O conjunto de Figuras Padrão é apresentado para o usuário por meio do triângulo equilátero, quadrado e pentágono. Entretanto, além de suas formas bases (figura 19) cada uma dessas figuras gera uma família, podendo assumir outros formatos, conforme as informações do quadro 2.

Quadro 2- Família das Figuras Padrão

Família das Figuras Padrão		
<ul style="list-style-type: none"> Triângulo equilátero Pequeno triângulo isósceles Triângulo retângulo Losango Trapézio retângulo Trapézio isósceles Hexágono regular Grande triângulo isósceles Pequeno losango Dodecágono regular Pequeno círculo Grande círculo 	<ul style="list-style-type: none"> Quadrado Triângulo isósceles Pequeno Triângulo retângulo isósceles Triângulo retângulo isósceles PTriangRect Paralelogramo Pequeno losango Octógono regular Círculo 	<ul style="list-style-type: none"> Pentágono regular Pequeno triângulo isósceles Grande triângulo isósceles Triângulo obtusângulo Pequeno losango Dodecágono regular Círculo

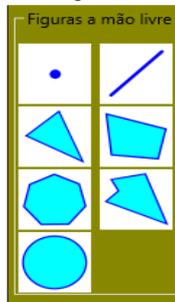
Fonte: Elaborado pelo autor a partir do *Apprenti Géomètre 2*

Outra sugestão para o usuário é transformar as formas bases das Figuras Padrão em peças de tangram, poliminós e outros por meio da opção **Preferências** na barra de Menu superior.

As ferramentas caracterizadas como Figuras a mão livre, diferentemente das Figuras Padrão que são predefinidas, permitem aos usuários (alunos ou professores) produzir manualmente, com o auxílio do *mouse*, distintos polígonos, retas e outros objetos matemáticos. Por exemplo, ao construir um quadrilátero a “mão livre” (sem ferramentas predefinidas) ele será moldado por meio dos movimentos do usuário sobre o *mouse*. Portanto, a forma que o quadrilátero assumirá, os seus comprimentos de lados, medidas das aberturas

dos ângulos internos e outras propriedades da figura construída dependerá dos comandos exercidos pelo usuário.

Figura 20- Figuras a mão livre



Fonte: *Apprenti Géomètre 2*

Composto por sete elementos (ponto, segmento, malha isométrica, quadrilátero, polígonos regulares, polígonos quaisquer e arcos), o conjunto de Figuras a mão livre dispõe para o usuário uma classe de família, como consta no quadro 3. É interessante ressaltar que dentre as diversas funcionalidades, o **ponto** é a única que não possui uma família associada a ele.

Quadro 3- Família das Figuras a mão livre

Família das Figuras a mão livre		
Segmento Segmento paralelo Segmento perpendicular	Triângulo Triângulo_isósceles Triângulo_equilátero Triângulo_retângulo Triângulo_retângulo_isósceles	Quadrilátero Trapézio Trapézio_retângulo Trapézio_isósceles Paralelogramo Retângulo Losango Quadrado
Triângulo_equilátero Quadrado Pentágono_regular Hexágono_regular Heptágono_regular Octógono_regular Eneágono_regular Dodecágono_regular	Triângulo Quadrilátero Pentágono Hexágono Heptágono Octógono Eneágono Decágono Undecágono Dodecágono	Circunferência Arco

Fonte: Elaborado pelo autor a partir do *Apprenti Géomètre 2*

Outras funcionalidades disponibilizadas pelo *software* são as ferramentas de movimentos, expostas na figura 21. Fazendo-se presentes nos cinco Menus, elas permitem ao usuário as opções de Mover (arrastar e sobrepor objetos no ambiente do *Apprenti Géomètre 2*), Rotação (girar o objeto matemático), Reflexão (realizar a reflexão de algum objeto) e Ampliar/Reduzir (tornar maior ou menor o objeto matemático, por meio de uma relação de semelhança).

Figura 21- Ferramentas de movimentos



Fonte: *Apprenti Géomètre 2*

É interessante ressaltar as “ferramentas de menus superiores” estão disponibilizadas para todos os Menus (A, B, C, AB e AC) do *Apprenti Géomètre 2*. Entretanto, em algumas interfaces existem algumas funções ausentes, por exemplo, a **configuração** constando apenas nos Menus C, AB e AC, como expõe o quadro 4.

Quadro 4- Barra de Menu superior do *Apprenti Géomètre 2*

Elementos do Menu superior	Funcionalidades	Interfaces				
		A	B	C	AB	AC
Arquivo	Permite ao usuário abrir um novo documento, salvar, imprimir e outros	X	X	X	X	X
Janelas	Disponibiliza ao usuário navegar em abas distintas quando são construídas figuras simultâneas.	X	X	X	X	X
Editar	Nesta opção o usuário é permitido a copiar, colar, refazer, fazer e outros.	X	X	X	X	X
Ferramentas	Aqui podemos colorir, mostrar/ esconder figuras.	X	X	X	X	X
Operações	Dividir, decompor, fundir, duplicar e outros	X	X	X	X	X
Transformação	Definir, aplicar, fixar ponto.	-	X	X	X	X
Macros	Carregar e criar macros	-	X	X	X	X
Preferências	Ajustes automáticos, figuras padrão	X	X	X	X	X
Notas	Abre uma janela para adicionarmos notas referentes a figura construída.	X	X	X	X	X
Ajuda	Exibe ajuda, guia do usuário, opções de tirar dúvidas sobre o <i>Apprenti Géomètre 2</i>	X	X	X	X	X
Configuração	Personalizar	-	-	X	X	X

Fonte: Elaborado pelo autor a partir das ferramentas dispostas no *Apprenti Géomètre 2*

Do mesmo modo que a barra de ferramentas do menu superior integra todos os Menus do *software*, se têm as funções **Cancelar** e **Modificar**. A opção cancelar permite ao usuário desfazer a operação realizada anteriormente, enquanto a modificar possibilita fazer alterações nos objetos matemáticos que estão contidos no ambiente, com exceção dos produzidos por meio das Figuras Padrão.

2.5 A gênese instrumental: do artefato a sua transformação em instrumento

A TI foi criada pelo francês Pierre Rabardel (1995), professor dos cursos de ergonomia¹² e psicologia da Universidade de Paris 8, potencializando o estudo do papel do homem nas articulações com as tecnologias nos campos sociais e científicos.

Com fortes influências da ergonomia e psicologia, como também da obra *Pensamento e Linguagem* de Lev Vygotsky (1930) acerca dos instrumentos psicológicos materiais/físicos, Rabardel (1995) ressalta as abordagens antropocêntrica (quando o homem assume o lugar privilegiado em relação às tecnologias) e tecnocêntrica (quando as tecnologias se sobressaem em relação às condições usuais dos homens).

Nenhuma dessas abordagens é inteiramente suficiente analisada de maneira isolada. Isso porque, enquanto a abordagem tecnocêntrica reduz a potencialidade das ações humanas, a antropocêntrica não propicia reflexões o suficiente para se pensar em sistemas técnicos e suas particularidades (RABARDEL, 1995). Com isso, ao invés de analisar de forma unilateral é relevante refletir sobre as interligações entre homens com os objetos, e o seu entendimento sobre as funções e propriedades dos objetos, sendo compreendido na TI de abordagem antropotécnica.

Na TI, “Rabardel coloca o homem no centro do processo, porém sem deixar de considerar a máquina. É o que ele chama de abordagem antropotécnica, em oposição – e em referência – às abordagens tecnocêntrica e antropocêntrica” (BITTAR, 2015, p.11). Nesse sentido, entendemos que a abordagem antropotécnica (onde as máquinas, tecnologias ou sistemas estão interligadas com o uso adequado com o ser humano, ou seja quando a capacidade do homem é compreendida para o entendimento de limites e possibilidades dos instrumentos), surge com o intuito de articulação e diferenciação entre as características do homem, máquina e situações de uso.

Nessa relação de situações de uso, Rabardel (1995) distingue o artefato de instrumento. O artefato é qualquer objeto (caneta, lápis, computador, esquadro, entre outros)

¹²Estuda a relação do homem com seu trabalho e tecnologias.

ou material simbólico (ângulos, quadrado, gráficos, mapas e outros) que possui características próprias. Entretanto, quando são atribuídas funcionalidades ao artefato e por meio destas surgem diferentes estratégias de resoluções práticas, pelas quais ao manusear o artefato é possível obter o resultado da atividade, emerge o instrumento. Nesse sentido, um instrumento é o artefato acrescido das situações de uso que favoreçam a resolução de distintas atividades, sendo, portanto, uma construção pessoal de caráter psicológico.

Quando o sujeito se apropria do artefato e o utiliza a partir de estratégias e conhecimentos prévios já existentes na busca de obter o resultado de alguma atividade é possível destacar que o artefato foi transformado em instrumento. Como exemplo de transformação de artefato em instrumento estão dispostas as situações 1, 2 e 3.

Situação 1: Uma moeda, por exemplo, é um objeto material, e sua maior utilidade se destina ao comércio para a realização de compras e troco de dinheiro. Ao se usar a moeda para produzir bolinhas ou outros desenhos, este artefato inicial passou por transformações conduzidas pelo sujeito para realizar outra atividade (elaborar figuras), portanto, sendo útil e transformando-se em instrumento.

A partir dessa situação 1 o artefato inicial (moeda) foi retirado de sua funcionalidade original - efetuar compras e troco de dinheiro - mas a ação do sujeito permitiu construir novos instrumentos.

Situação 2: Uma borracha, por exemplo, se trata de um artefato material e, serve para apagar rasuras, desenhos a lápis, etc. Em uma aula de informática que não se utiliza lápis, caneta ou borracha esse artefato é compreendido sem utilidade, pois nada há para apagar. A partir do momento que se esteja na aula de matemática e se pretende apagar um cálculo incorreto no caderno, o sujeito usa o artefato (borracha) e o transforma em instrumento, sendo capaz de realizar a atividade.

A situação 2 expõe o fato de que o sujeito sabe as funcionalidades do artefato, mas no determinado momento não há condições de manuseá-lo. Quando há oportunidade, o mesmo o utiliza (apagando), ou seja, o artefato nesse caso transforma-se em instrumento para realizar a atividade (apagar a rasura).

Situação 3: Uma régua, por exemplo, sendo um objeto material, pode ser usado para medir e construir figuras planas. Um estudante ao usar uma régua na aula de matemática para produzir distintos polígonos (trapézio, quadrado, triângulos e pentágonos) a transformou em instrumento, no qual sua função já era determinada.

Na situação 3, o artefato inicial (régua) foi transformado em instrumento, por um estudante, para produção de figuras planas. É possível que outro estudante, na mesma aula,

tenha usado a régua apenas para marcar o capítulo do livro, a usando com funcionalidade distinta daquela inicialmente prevista.

A partir das situações 1, 2 e 3 expostas, menciona-se que um mesmo artefato pode ser transformado em instrumentos distintos, a depender da maneira que o usuário o manipule desenvolvendo esquemas para a efetivação de atividades, para alcançar seu objetivo. Por exemplo, se duas ou mais pessoas usam o mesmo artefato e produzem esquemas diferentes, mas obtenham a mesma resposta na atividade, isso quer dizer que houve a transformação do artefato para instrumento por meio de práticas e distintas manipulações.

A noção de esquema foi introduzida no campo da psicologia por Jean Piaget e estudada posteriormente por Gérard Vergnaud. Baseado nas concepções de Vergnaud, Rabardel (1995) assinala que os esquemas são originados por meio da maneira que o sujeito se apropria do artefato para resolver atividades, seja usando conhecimentos já existentes (conhecimentos prévios ou situações similares vivenciadas) ou construídos à medida que tentam buscar estratégias para alcançar um resultado. Em outras palavras, esquemas podem ser compreendidos como os percursos traçados pelo sujeito para atingir o objetivo da atividade.

As estratégias resolutivas ao serem mediadas pelo uso de algum recurso podem ser compreendidas por meio dos Esquemas de Utilização (EUT) que auxiliam na transformação do artefato ao instrumento. Para Rabardel (1995) os EUT são formados a partir dos fatores psicológicos que permitem ao sujeito realizar distintas situações para a resolução de atividades. Os EUT podem ser compreendidos a partir de duas dimensões associadas às atividades:

- As atividades primárias, onde o artefato é compreendido como o meio para a realização das atividades. Por exemplo, ao se propor atividades sobre a grandeza área as ferramentas que integram o *Apprenti Géomètre 2* devem ser o aporte para a obtenção do resultado.
- As atividades relacionadas às atividades secundárias¹³ contemplam o uso das características e propriedades particulares do artefato. Os EUT, nesse momento, compreendem por serem elementares, ou seja, a manipulação do *mouse*, apertar uma tecla do computador, aumentar o brilho da interface manipulada e outros. Por exemplo, dada uma atividade sobre comparação de áreas no *Apprenti Géomètre 2*, sem a presença do aspecto numérico, o sujeito pode optar pela função Colorir Fundo, utilidade específica

¹³Quando a atividade é realizada com instrumentos, as tarefas secundárias estão direcionadas para o funcionamento, manipulação e uso do artefato para aquisição do resultado.

para pintar objetos matemáticos. Nota-se que o seu uso não irá interferir de maneira central na resolução da atividade.

Por meio dessas duas dimensões, Rabardel (1995) destaca dois níveis de EUT: os Esquemas de Uso (EU) que contemplam as atividades secundárias e estão relacionados às características e funcionalidades específicas do artefato (funcionamento e manipulação) e os Esquemas de Ação Instrumental (EAI), relacionados às atividades primárias. Os EAI são formados pelos EU e estão direcionados às ações e transformações sobre o objeto próprio da atividade. Ainda, sobre essa discussão, é essencial “observar que o caráter do esquema (de uso ou de ação instrumentada) não se refere a uma propriedade do esquema em si, mas sim ao estatuto deste na atividade finalizada” (PADILHA; BITTAR, 2013, p.7).

De acordo com Rabardel (1995), um mesmo esquema pode assumir as características de um EU ou EAI. Esse autor discute que nesses tipos de esquemas é possível se originar os Esquemas de Atividade Coletiva Instrumental (EACI). Considera-se que em um contexto coletivo há presenças de EU, os quais apresentam elementos de ações individuais, mas que objetivam alcançar resultados em comum. Portanto, o trabalho de maneira coletiva é mediado por um instrumento ou classe de instrumentos.

Esse conjunto de tipos de esquemas apresentados (EU; EAI e EACI) integram a classe de EUT, na qual, embora distintos apresentam uma relação de mútua dependência. Ao se usar o EU e EAI é possível de se originar, reconstruir e generalizar o EACI.

Já os EACI podem ser a base para que os EU e EAI se desenvolvam e se recomponham. Portanto, pode-se enfatizar que os EACI, por meio de seu padrão de uso, podem ter uma dimensão privada (é algo individual) e uma social (há demanda de sujeitos e eles não permanecem isolados) (RABARDEL, 1995).

Esse autor elucida que os EUT planejados pelo sujeito na busca de obtenção da resposta correta de uma atividade sobre certo objeto de estudo é um dos elementos que compõem o processo de transformação do artefato em instrumento. Nessa perspectiva, a TI analisa as ações e a apropriação do sujeito sobre o artefato para transformá-lo em instrumento, características que compõem o processo da Gênese Instrumental.

A Gênese Instrumental pode ser compreendida a partir de dois processos elementares, a instrumentalização orientada para o artefato e a instrumentação direcionada para o sujeito, isto é, a

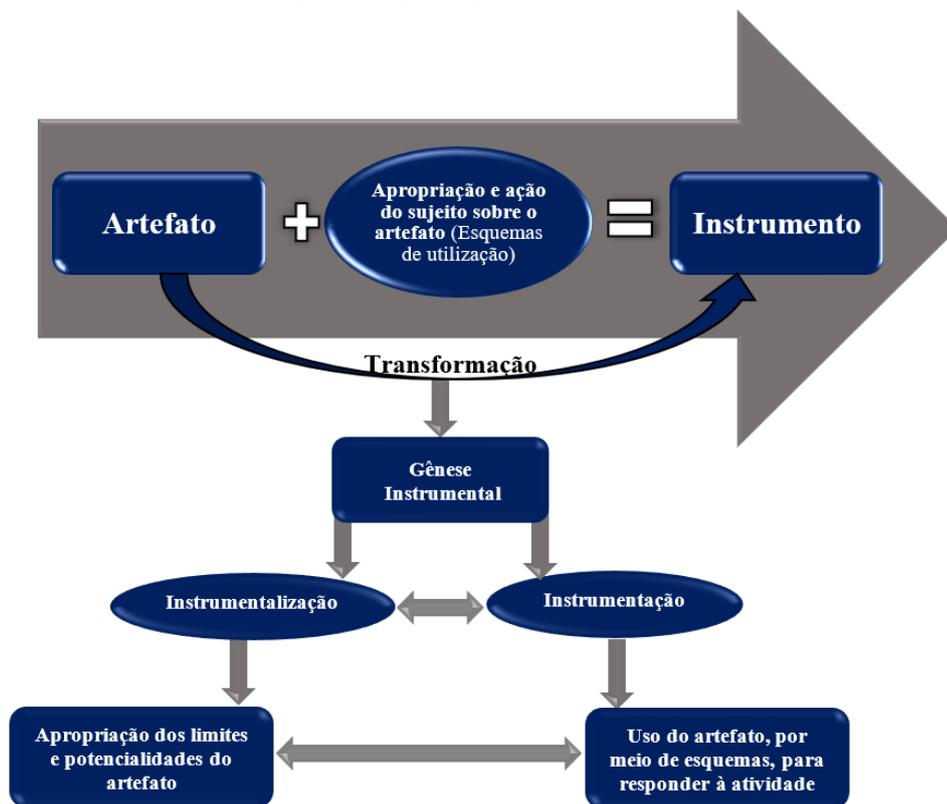
[...] instrumentalização se refere ao surgimento e à evolução do componente artefato do instrumento: selecionando, agrupando, produzindo e definindo funções, transformando o artefato (estrutura, funcionamento etc.) prolongando e criando as propriedades do artefato cujos limites são difíceis de determinar;

[...] instrumentação relativo ao surgimento e evolução dos esquemas de utilização e da ação instrumental: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por acomodação, coordenação e combinação, inclusão e assimilação recíproca, a assimilação de novos artefatos aos esquemas preexistentes (RABARDEL, 1995, p.111, tradução nossa¹⁴).

Cabe salientar que tanto a instrumentalização quanto a instrumentação são processos que auxiliam para o surgimento e desenvolvimento do instrumento, apesar de que, dependendo da situação, algum deles pode ser predominante ou até o único usado.

A Gênese Instrumental se trata de um processo complexo e requer tempo para que o sujeito se aproprie das características elementares e avançadas do artefato para transformá-lo em instrumento. De maneira sintetizada, pode-se compreender esse procedimento por meio da esquematização exposta na figura 22.

Figura 22- Esquematização do processo de Gênese Instrumental



Fonte: Elaborado pelo autor, inspirado em Rabardel (1995)

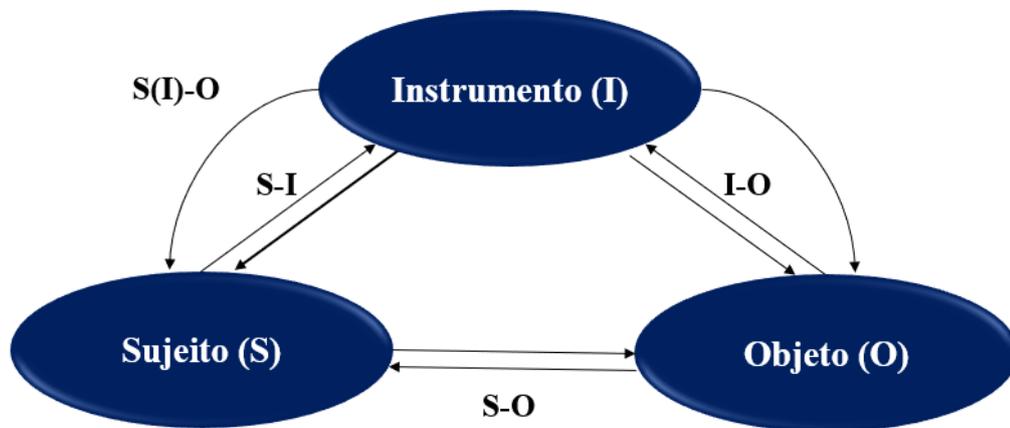
¹⁴•(...) **Instrumentalisation** concernant l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument: sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, transformation de l'artefact (structure, fonctionnement etc.) qui prolongent les créations et réalisations d'artefacts dont les limites sont de ce fait difficiles à déterminer;

•(..) **Instrumentation** sont relatifs à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée: leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution par accommodation, coordination combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués etc.

Na tentativa de analisar a Gênese Instrumental, Rabardel (1995) propõe o modelo de Situações de Atividades Instrumentais (SAI), conforme expressa a figura 23.

O modelo SAI possibilita articular e diferenciar as relações entre os polos Sujeito (S), Objeto (O) e instrumento (I). Pode-se denominar de “sujeito (usuário, operador, trabalhador, agente, entre outros...); o instrumento (a ferramenta, a máquina, o sistema, o utensílio, o produto, e outros...); o objeto para o qual a ação usando o instrumento é dirigida (material, real, objeto atividade, trabalho, outro assunto...)” (RABARDEL, 1995, p.52, tradução nossa¹⁵).

Figura 23- Modelo SAI



Fonte: Rabardel (1995)

Para a verificação das diversas ações do sujeito sobre o instrumento e o objeto, Rabardel (1995) apresenta as interligações que se constroem mediante a interação das atividades instrumentais: Sujeito-Objeto [S-O], Sujeito-Instrumento [S-I], Instrumento-Objeto [I-O] e Sujeito-Objeto conduzido por meio do Instrumento [S(i)-O]. É perceptível que essas articulações são construídas em um ambiente composto por meio de um conjunto de situações que induzem o sujeito a considerar a realização de atividades.

Fazendo-se um paralelo, sob o olhar teórico da TI, o modelo SAI analisa o processo de Gênese Instrumental a partir de duas dimensões, isto é, a instrumentalização e a instrumentação. A instrumentalização ocorre pela correspondência entre Sujeito e Objeto conduzida pelo instrumento [S(i)-O], como também, no Instrumento-Objeto [I-O] e Sujeito-Objeto [S-O]. Já a instrumentação acontece pela ocorrência da articulação entre Sujeito-Instrumento [S-I].

¹⁵“le sujet (utilisateur, opérateur, travailleur, agent...); l'instrument (l'outil, la machine, le système, l'ustensile, le produit...); l'objet vers lequel l'action à l'aide de l'instrument est dirigée (matière, réel, objet de l'activité, du travail, autre sujet...)”.

Nessa pesquisa analisamos por meio do modelo SAI como licenciandos em matemática (sujeitos) resolveram por meio do *Apprenti Géomètre 2* (instrumento) atividades sobre a grandeza área (objeto matemático).

2.6 Objetivos

2.6.1 Objetivo Geral

- Analisar o processo de apropriação do *Apprenti Géomètre 2* por licenciandos em Matemática na realização de atividades sobre a grandeza área.

2.6.2 Objetivo Específicos

- Identificar indícios do processo de instrumentalização dos licenciandos ao manipularem o *Apprenti Géomètre 2* na resolução de situações que envolvam a grandeza área;
- Identificar indícios do processo de instrumentação dos licenciandos ao manipularem o *Apprenti Géomètre 2* em situações que envolvam a grandeza área;
- Modelizar os esquemas de utilização desenvolvidos pelos licenciandos em matemática na realização de atividades sobre a grandeza área.
- Identificar possibilidades e limitações das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* para abordagem do conteúdo de área.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Esse capítulo expõe os procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento da pesquisa. São apresentados o campo de realização de investigação, o público participante, o instrumento para produção e análise dos dados, e os métodos para categorização e discussão dos resultados.

3.1 Sistematização da pesquisa

Essa pesquisa está apoiada em dois momentos, que denominamos: Estudo Preliminar e Estudo Experimental. O Estudo Preliminar serviu como um aporte para analisar possibilidades (limitações e perspectivas) que poderiam ocorrer durante o momento que os licenciandos em matemática manipulavam o *Apprenti Géomètre 2* para resolver atividades sobre área. Os resultados desse estudo tornaram-se um marco reflexivo para o aprimoramento do método investigativo (atividades¹⁶, quantitativo de participantes da pesquisa, duração de aplicação do estudo), para buscar alternativas, evitar possíveis erros, e otimizar as condições para alcançar o objetivo da pesquisa a partir do Estudo Experimental.

De modo geral, o Estudo Experimental foi estruturado com base nas situações que dão sentido ao conceito à área de Baltar (1996) e Ferreira (2010).

Uma esquematização que pode ser associada ao percurso metodológico adotado pela pesquisa pode ser compreendida a partir da figura 24.

Figura 24- Esquematização dos procedimentos metodológicos



Fonte: Elaborado pelo autor

¹⁶As atividades apresentadas no decorrer dessa pesquisa foram produzidas pelo pesquisador e orientadora.

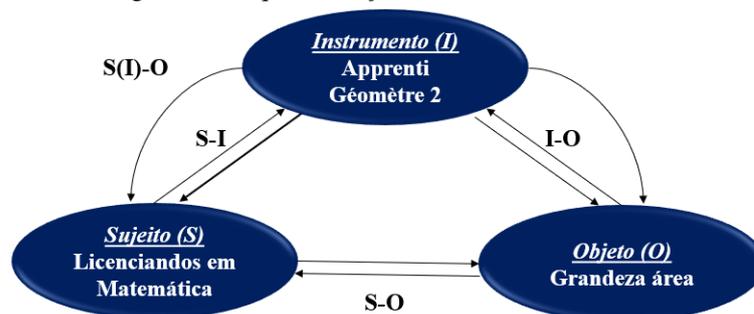
Nos dois momentos da pesquisa, os participantes eram licenciandos em matemática, voluntários, que almejassem aprender a trabalhar o conteúdo da grandeza área com o *Apprenti Géomètre 2*.

A escolha por licenciandos em matemática, profissionais que futuramente conduzirão a construção de conhecimento da matemática no ambiente sala de aula para alunos na educação básica ou em outras etapas de escolaridade, relaciona-se pelo fato dos mesmos estarem em formação inicial e a interação com ambientes diferentes do habitual (papel e lápis) estimular uma nova percepção sobre a diversidade de recursos e modos de abordar conteúdos matemáticos em seu exercício profissional.

Pretendemos que esse trabalho proporcione aos participantes uma reflexão sobre a sua metodologia de ensino, influenciando a sua prática profissional, especificamente que possam vislumbrar possibilidades de lecionar o conteúdo em foco por meio de tecnologias digitais (no nosso caso, *software* de geometria dinâmica). Embora não seja o foco de interesse da pesquisa, espera-se que a oportunidade de participar desse estudo traga contribuições para a formação inicial dos professores de matemática e para o aprimoramento de seu trabalho com o conteúdo de área. Essa perspectiva é convergente com as ideias defendidas em Brasil (2015), em que se destaca a importância da “articulação entre graduação e pós-graduação e entre pesquisa e extensão como princípio pedagógico essencial ao exercício e aprimoramento do profissional do magistério e da prática educativa” (p.2).

Nos dois momentos dessa pesquisa, o *Apprenti Géomètre 2* é o meio para a resolução da atividade. Assim sendo, os procedimentos de manipulação e apropriação das ferramentas do *software* pelos licenciandos em matemática foram analisados mediante o modelo SAI, disposto na figura 25. Em outras palavras, investigamos a ação do sujeito (licenciandos em matemática) sobre o artefato (*Apprenti Géomètre 2*) enquanto eles resolviam situações de comparação de área, medida de área, mudança de unidade de área e produção de superfícies (objeto Matemático).

Figura 25- Esquematização adotada do modelo SAI



Fonte: Elaborado pelo autor baseado na TI de Rabardel (1995)

Os procedimentos resolutivos traçados pelos licenciandos em matemática para resolver o conjunto de atividades auxiliados pelo *Apprenti Géomètre 2* foram registrados pelo programa aTube Cather que possibilita a gravação de vídeos e áudios por meio da captura de tela do computador. Os materiais coletados a partir dessas vivências foram analisados sob o modelo SAI, verificando os seguintes elementos: 1º- Indícios dos processos de instrumentalização e instrumentação; 2º- Indícios da transformação de artefato em instrumento; e, 3º- Conhecimentos do conteúdo de área que mobilizados pelos licenciandos na resolução do conjunto de atividades propostas.

3.1.1 Estudo Preliminar: Descrição e categorização dos resultados

O Estudo Preliminar foi realizado apenas em uma sessão presencial com dois licenciandos em matemática, no decorrer de quatro horas, em uma escola pública situada em uma cidade do interior no estado de Pernambuco. A escolha desse local se configurou pelo fato de os participantes se disponibilizarem durante o mês de janeiro de 2019 para a realização dessa vivência. A decisão que levamos em consideração para optarmos por esses dois licenciandos em matemática se trata deles, quando foram solicitados, **responderem aos questionamentos**, expostos na figura 26, por meio do endereço eletrônico (e-mail), e enfatizarem que no ensino superior estudaram apenas o conteúdo de área nas disciplinas de cálculo diferencial e integral, e relatarem não conhecer o *Apprenti Géomètre 2*.

Para prezar a identidade dos participantes e poder analisar suas manipulações nas ferramentas do *software*, esquemas mobilizados e os resultados das atividades, adotamos os pseudônimos de Fred e Roger. No momento da aplicação dessa vivência, designada como Estudo Preliminar, Fred se encontrava matriculado no 8º período, enquanto Roger no 6º período, ambos cursando licenciatura em matemática.

Figura 26- Questionamentos sobre a relação do conteúdo de área com os participantes

- 1- No ensino superior você estudou o conteúdo de área?
 Não
 Sim. Em qual (is) disciplina (s)? O que você estudou?
- 2- Você já vivenciou o conteúdo de área com auxílio de softwares?
 Não
 Sim. Qual (is)?

Fonte: Elaborado pelo autor

Em resposta ao questionário, Fred destacou que até o momento da pesquisa não havia estudado o conteúdo de área interligado com algum *software*. Entretanto, ressalta que estudou áreas por meio da disciplina de cálculo diferencial e integral II, no ambiente papel e lápis. Essas informações podem ser notadas por meio da figura 27.

Figura 27- Respostas de Fred em relação aos questionamentos solicitados por e-mail

1º Sim. Quando cursei a disciplina de Cálculo 2 estudei o conteúdo de área por meio de Integral. Nenhuma eletiva que cursei focou no devido conteúdo.

2º Não.

Fonte: Protocolo de Fred

Em contrapartida, Roger ao responder aos dois questionamentos destaca que já vivenciou no ensino superior o conteúdo de área por meio do GeoGebra. Além disso, ainda, enfatiza que vivenciou o conteúdo nas disciplinas de cálculo diferencial e integral II, III e IV.

Figura 28- Respostas de Roger em relação aos questionamentos solicitados por e-mail

Respondendo ao questionário:

1) Sim, estudei em disciplinas de cálculo (tanto no 2, 3 e 4) áreas por meio de integrais.

2) Sim. O software geogebra.

Fonte: Protocolo de Roger

Mediante as respostas expostas pelos participantes, observamos certa distância entre os perfis acadêmicos dos dois participantes desse estudo em relação à interação com o conteúdo e ao trabalho com *software*. Enquanto Fred não tinha vivenciado um estudo associando o conteúdo de área com algum *software*, Roger já concebia um estudo de área com o GeoGebra. Dessa forma, percebemos que o trabalho em dupla poderia contribuir para ambos os participantes no que tange às reflexões sobre as estratégias resolutivas a serem aplicadas no *software* para a obtenção do resultado nas atividades. Portanto, solicitamos que auxiliados pelo uso do *Apprenti Géomètre 2*, Fred e Roger respondessem um conjunto de quatro atividades que abarcavam os tipos de situações que dão sentido ao conceito de área (BALTAR, 1996; FERREIRA, 2010).

A sistematização desse conjunto de atividades se deu por: 1ª- Comparação de áreas; 2ª- Medida de áreas; 3ª- Mudança de unidade de áreas e 4ª- Produção de superfícies. Para analisarmos os resultados dessas atividades adotamos os seguintes critérios:

- **Critérios para análise dos resultados do Estudo Preliminar:** Optamos por elaborar os critérios para as análises dos resultados apoiados pelos objetivos específicos, com isso prezamos por:

- 1º- Identificar as estratégias matemáticas usadas pelos licenciandos para obter as respostas corretas do conjunto de atividades;
- 2º- Comparar se as ações e respostas expressas na resolução das tarefas pelos licenciandos foram as descritas na caracterização das atividades;
- 3º- Analisar as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* manipuladas e apropriadas pelos licenciandos ao resolverem o conjunto de atividade (Consideramos como ferramentas apropriadas aquelas em que os participantes, mediante a manipulação, identificaram limitações e possibilidades e sobre elas desenvolveram esquemas e ações respondendo as atividades);
- 4º- Identificar indícios do surgimento da transformação de artefato em instrumento do *Apprenti Géomètre 2* pelos licenciandos (Analisamos as interligações entre os polos S-I-O observando os esquemas e ações sobre o *software*, e identificando se o mesmo foi útil para resolver as atividades).

Esses quatro critérios serviram de suporte para analisarmos as resoluções dos licenciandos para as atividades. A seguir, apresentamos uma caracterização das atividades elencando em cada uma delas o objetivo, os resultados esperados, possíveis esquemas e ferramentas que poderiam ser mobilizados pelos licenciandos em matemática ao tentar resolvê-las. Por fim, realizamos uma análise comparativa entre as descrições do pesquisador e os resultados expressos pelos participantes.

1ª Atividade - Comparação de áreas

A primeira atividade contemplou uma situação de comparação de áreas de figuras planas (BALTAR, 1996). Ao propô-la objetivamos que os licenciandos em matemática mobilizassem, para resolvê-la, a articulação de conhecimentos referentes ao quadro geométrico e ao das grandezas, sem intervenção do quadro numérico. Para isso, optamos por um conjunto de superfícies que estimulassem a obtenção do resultado por meio do uso de estratégias geométricas (decomposição, recomposição, sobreposição e inclusão).

Esta atividade é constituída por cinco superfícies (A, B, C, D, E) contemplando figuras bastantes exploradas na educação básica como um retângulo (A), um trapézio (B) e em posição não prototípica o quadrado (E), e duas figuras pouco frequentes - um dodecágono (C) e um octógono (D).

Quanto aos resultados, esperávamos que a dupla de licenciandos mencionasse que apenas as superfícies D e E possuem a mesma área que A. Para se obter esses resultados,

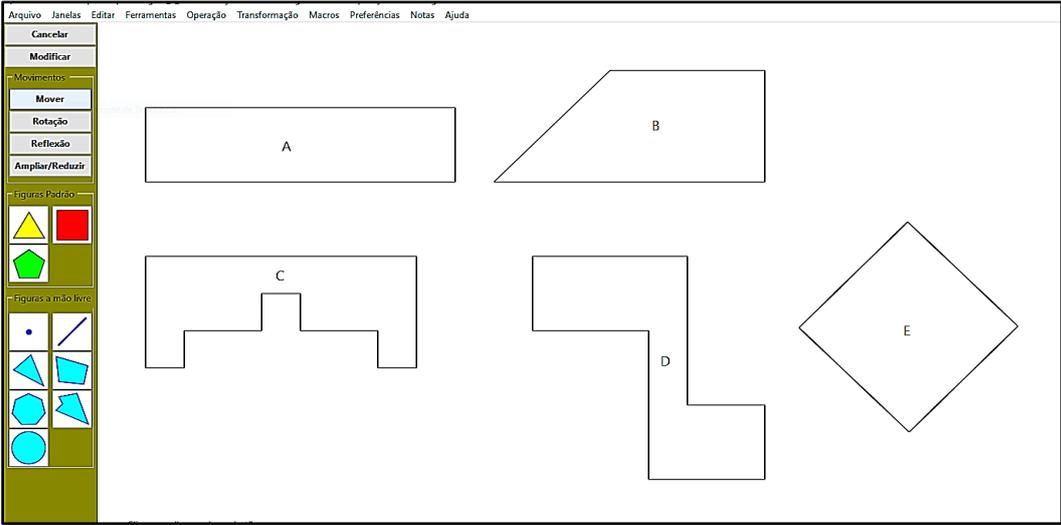
elencamos que os possíveis esquemas a serem mobilizados pelos participantes remetem aos procedimentos de decomposição, recomposição, sobreposição e inclusão das superfícies.

No que se refere o uso do *Apprenti Géomètre 2*, acreditamos que os participantes se apoiariam no uso das ferramentas **Dividir** (selecionar o total de partes a ser dividida), **Decompor** (separar as partes das superfícies), **Fundir** (Unir as partes das superfícies) e **Mover** (sobrepôr e/ou incluir as superfícies a serem comparadas). As funções **Rotação** e **Reflexão** auxiliariam os usuários a alterarem a posição das superfícies dispostas no ambiente do *Apprenti Géomètre 2*.

Esperávamos que os participantes não sentissem dificuldades na resolução dessa atividade, e que os EAI possibilitassem obter de maneira correta a resposta.

ATIVIDADE 1

1 - Identifiquem quais superfícies tem a mesma área que o retângulo A:



Indiquem sua (s) resposta (s)

Expliquem quais procedimentos matemáticos, Menu (s) e ferramenta (s) do *Apprenti Géomètre 2* foram usados:

As estratégias adotadas pelos participantes para a comparação das áreas das superfícies (A, B, C, D e E) foram apoiadas pelos aspectos numéricos, por meio do ladrilhamento, ao

invés dos procedimentos geométricos da inclusão, sobreposição, decomposição e recomposição, visados na atividade. Essas descrições são sintetizadas por meio do seguinte diálogo:

Fred: (...) a partir da unidade de medida a gente vai poder contar a medida das áreas das superfícies. Então, a gente vai poder identificar se elas têm ou não a mesma unidade de medida e assim poder identificar se elas têm mesma área que A.

Roger: Exemplo, eu poderia utilizar essa unidade de medida para saber qual é a área [Aponta para superfície A].

Fred: Sim;

Roger: E posteriormente para saber essa [Direciona o mouse sobre a superfície C], em seguida na [superfície D].

Fred: Sim.

Definidos os primeiros procedimentos para a comparação de áreas, a **Malha quadriculada** foi ativada, seguida pela escolha da superfície unitária, por meio da funcionalidade **Quadrado (Figuras Padrão)**, para ladrilhar as superfícies (A, B, C, D e E). O processo de preencher as superfícies consistiu em **Duplicar** a superfície unitária **Quadrado** adotada e com a função **Mover** ir arrastando-as, sem perda ou sobreposição de espaços, até ladrilhar todas as superfícies.

Os licenciandos notaram a impossibilidade de ladrilhar efetivamente a superfície B com a superfície unitária (Quadrado). Diante deste impasse, os participantes adotaram outro tipo de superfície unitária (triângulo isósceles), proveniente da decomposição da superfície unitária anterior (Quadrado), com o uso da ferramenta **Decompôr**. Apesar da superfície B ter sido preenchida não houve um ladrilhamento efetivo¹⁷ porque o procedimento ocorreu com dois tipos de superfícies unitárias (Quadrado e triângulo isósceles).

Quanto à superfície E, os licenciandos perceberam que não se tratava de um losango não-quadrado, e sim de um quadrado em posição não prototípica. Notamos que mediante a exploração no *software*, os participantes se instrumentalizaram com a ferramenta **Rotacionar** que permitiu alterar a posição da superfície E. Para obter a medida da área da superfície E, os licenciandos ladrilharam uma coluna e linha tomando como superfície unitária o quadrado e se respaldaram no uso da fórmula da área de um quadrado. Esses procedimentos podem ser compreendidos no diálogo a seguir, e visualizados na figura 29.

Fred: Será que isso mesmo é um losango?

Roger: Estou achando meio [silêncio entre a dupla].

¹⁷Procedimento consiste em ladrilhar uma dada superfície com apenas um tipo de superfície unitária para se obter o par (número, unidade de medida).

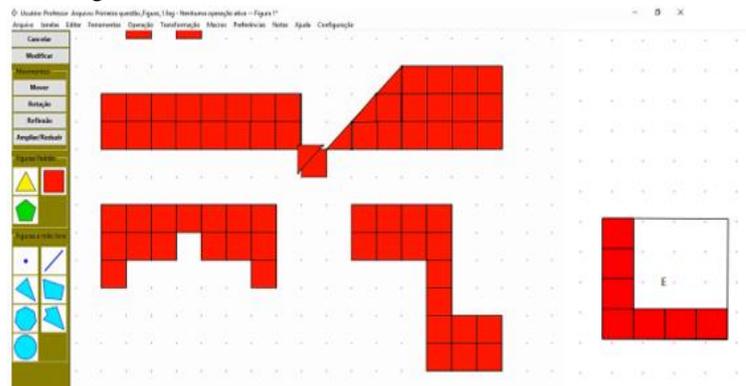
Roger: As medidas deles estão certas? Aí tem pegadinha, viu? [Continuam manipulando o software].

Roger: Selecciona a opção rotacionar e faz a mudança de posição na superfície E. [Com base nesse procedimento, os licenciandos em matemática percebem que o “losango” na verdade é um quadrado].

Roger: Aqui fica mais fácil.

Fred: Tem 16 quadrados [Enfatizando que a superfície E rotacionada no formato de quadrado fica mais fácil de se obter resultado. Esse procedimento pode ser verificado na figura 29].

Figura 29- Resultado da atividade 01 do Estudo Preliminar



Fonte: Dados da Pesquisa

Nesse momento da resolução, os participantes destacaram que dentre o conjunto das superfícies (A, B, C, D e E) apenas a superfície D e E possuem a mesma área que a superfície A. No que se refere ao uso das ferramentas, não prevíamos que os participantes usariam a Malha quadriculada visto que tínhamos a intenção de favorecer a mobilização de procedimentos geométricos, e não numéricos para a obtenção do resultado. Na figura 30 podemos observar que apesar da malha quadriculada ter sido utilizada, não há sua menção no protocolo. Entretanto, a captura de tela em vídeo disposta pelo aTube Catcher nos mostrou que esse recurso foi usual durante todo o processo resolutivo.

Figura 30- Respostas dos licenciandos referente á atividade 1

Indique sua (s) resposta (s): Figuras D e E.

Explique quais procedimentos matemáticos, menu (s) e ferramenta (s) do Aprenti Géomètre 2 foi usado para obtenção do resultado:

Utilizando a unidade de medida como procedimento chave. Ao usar as ferramentas do menu principal, mas especifico o quadrado para se basear como unidade de medida, mesmo que algumas reticulas se deparando com impossibilidades de contínuas, o que possibilitou usar essas ferramentas, como rotação, reflexão e decomposição.

Fonte: Dados da Pesquisa

Como descrito no momento de caracterização da atividade, os licenciandos acertaram quais superfícies possuíam a mesma área que A. Contrariamente ao que esperávamos, a situação de comparação de áreas foi resolvida por meio de procedimentos numéricos e não mediante procedimentos geométricos. Com isso, observamos que os aspectos sobre a medida aparecem fortemente mesmo quando não é o único caminho que pode ser trilhado para a obtenção das respostas.

2ª Atividade - Medida de áreas

A segunda atividade se tratava de uma situação de medição (BALTAR, 1996), e teve por intuito fazer os licenciandos em matemática representarem a medida da área da superfície X por meio do par (número, unidade de medida). Esse tipo de atividade se adequa ao quadro numérico de acordo com a perspectiva da abordagem de área enquanto grandeza autônoma proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989).

Para essa atividade, o esperado era que a partir do ladrilhamento efetivo da superfície X, por meio da superfície unitária (quadrado), o resultado expresso pelos licenciandos em matemática fosse 20 quadradinhos.

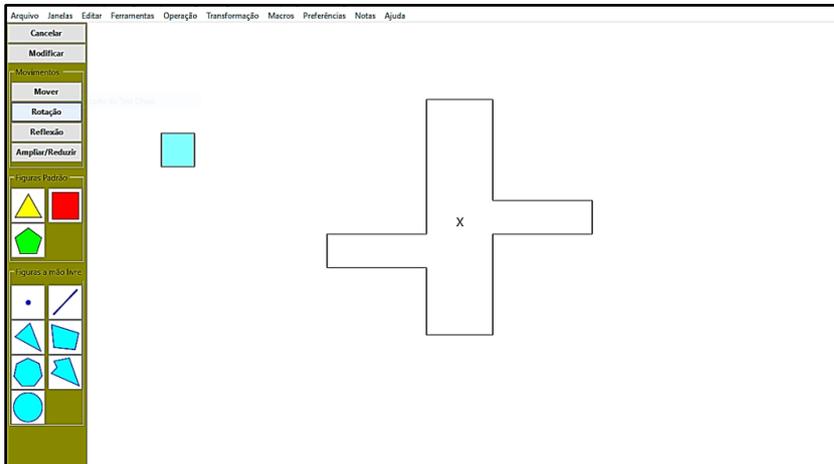
Quanto ao formato da superfície X, optamos por um dodecágono não regular a fim de estimular os participantes a refletirem sobre a possibilidade de expressar a medida da área de superfícies não muito exploradas na sala de aula na educação básica.

Acreditamos que um dos esquemas que seriam mobilizados pelos participantes, ou até o único, seria o do ladrilhamento efetivo. Como possíveis ferramentas a serem utilizadas, destacamos o uso do **Duplicar**, que permitiria aos participantes possuir um maior número de exemplares da superfície unitária e por meio do comando **Mover** arrastá-las, sem sobreposição, preenchendo totalmente a superfície X.

Esperávamos que os participantes não sentissem dificuldades para resolver a essa atividade porque é um tipo de situação muito explorado pelos livros didáticos na educação básica quando é introduzido o conceito de área. Além disso, pesquisas (FERREIRA, 2010; SILVA, 2016) desenvolvidas sobre a temática mostram estudantes privilegiam os aspectos numéricos para resolver atividades sobre área.

ATIVIDADE 2

2. Analise a superfície X:



Para resolver à atividade considerem ■ o como superfície unitária.

Qual a área da superfície X ao se adotar o quadrado como superfície unitária? _____

Qual (is) Menu (s) e ferramenta (s) do *Apprenti Géomètre 2* foi necessário para o procedimento de obtenção da resposta? _____

Para responder essa atividade, os participantes utilizaram a técnica do ladrilhamento já desenvolvida e familiarizada no ambiente do *Apprenti Géomètre 2* na atividade 1. Assim sendo, ela foi apenas adaptada para o contexto da situação de medida de áreas.

Figura 31- Explicação da resolução da atividade 2

Para resolver a questão considere o ■ como unidade de medida.

Qual a área da figura X ao se adotar o quadrado como unidade de medida? 20

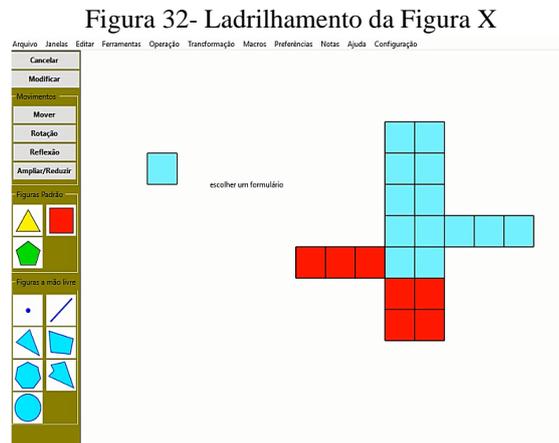
Qual (is) Menu (s) e ferramenta (s) do *Apprenti Géomètre 2* foi necessário para o procedimento de obtenção da resposta?

Neste caso foi utilizado tanto o quadrado no menu principal, quanto a ferramenta duplicar.

Fonte: Dados da pesquisa

Os participantes destacaram que a medição da superfície X, mediada pela técnica do ladrilhamento, resultou em 20 quadrados.

Quanto as ferramentas usadas para ladrilhar a superfície X, os licenciandos usaram **Duplicar** e **Mover** já manipuladas na atividade 1. Além delas, a variação da cor azul para a vermelha dos ladrilhos corresponde ao fato de que os licenciandos se apropriaram da ferramenta **Colorir fundo**.



Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos, ainda, que os participantes ao explorarem o *software* destacaram que as ferramentas de **Figuras a mão livres** não produzem figuras automáticas, como acontecem na seleção das **Figuras Padrão**. Essa percepção da dupla pode ser notada por meio do seguinte diálogo:

Roger: Ah, tá. É independente, né? [Enfatizando que as funcionalidades das **Figuras Padrão** e **Figuras a mão livre** são distintas].

Fred: É. Aí você vai criar. [Se refere a criar um quadrado como unidade de medida usando as **Figuras a mão livre**].

Roger: Vou criar meu próprio. Poderia criar, assim... [Manipula a ferramenta quadrilátero das **Figuras mãos livres** e produz um retângulo no interior da superfície X. Após esses procedimentos, opta pela ferramenta **Remove** e exclui o retângulo].

Os participantes ao notarem que as funcionalidades das ferramentas são distintas demarcam que estão em processo de instrumentalização com o *software* em uso (RABARDEL, 1995).

Quanto aos conhecimentos mobilizados pelos participantes houve o respaldo apenas no uso da técnica do ladrilhamento, sem dificuldades, convergindo com o que Ferreira (2010) destaca, ou seja a integração do quadro numérico (DOUADY; PERRIN- GLORIAN, 1989).

3ª Atividade - Mudança de unidade de áreas

A terceira atividade se caracteriza como uma situação de mudança de unidade (FERREIRA, 2010). Seu objetivo foi fazer com que os licenciandos em matemática representassem a área da superfície F com diferentes pares (número, unidade de medida). Se a área a ser medida não sofre variação, sendo possível ladrilhá-la efetivamente com mais de um tipo de superfícies unitárias por vez, destacamos que essa região medida pode ser representada por distintos pares (número, unidade de medida).

Esse tipo de atividade propicia a distinção entre área e número, estando em jogo a presença do quadro das grandezas e sua passagem para o quadro numérico.

Para essa atividade, propomos uma superfície F , em formato retangular, muito usado no estudo das figuras geométricas ao longo do ensino fundamental, e dois tipos de superfícies unitárias (quadrado e triângulo isósceles). Solicitamos que F fosse ladrilhada efetivamente, e individualmente por um único tipo de superfícies unitárias a cada vez, obtendo que a área medida fosse expressa pelos pares 12 quadrados e 24 triângulos isósceles.

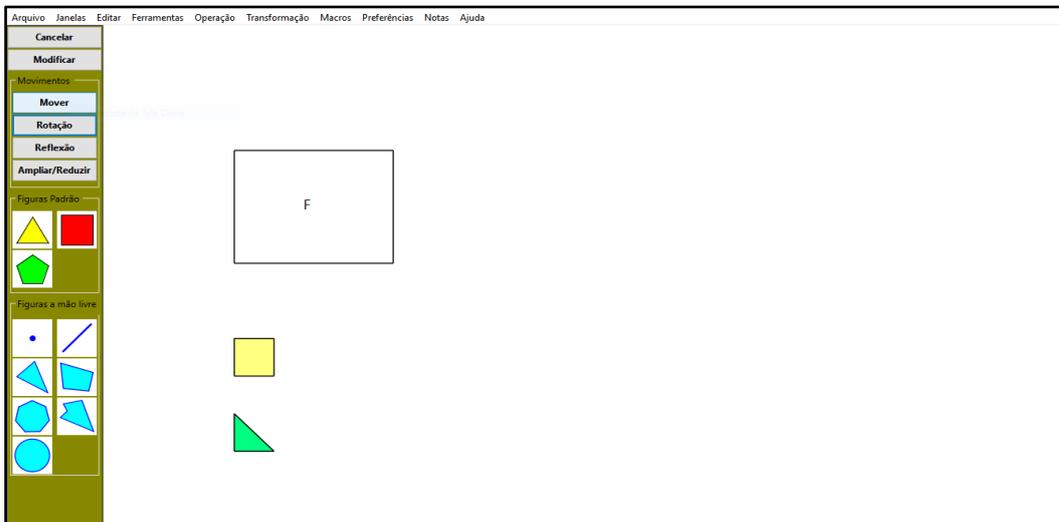
Acreditamos que os esquemas mobilizados pelos participantes na resolução desta atividade se assemelhariam aos da atividade 2, que aborda uma situação de medição, e se respaldou no ladrilhamento efetivo. Apesar de ambas as atividades adotarem a técnica do ladrilhamento efetivo e obter o par como resultado da medição da superfície, nessa situação de mudança de unidade a mesma área foi representada por distintos pares (número, unidade de medida). Essa variação da representação do par é algo que não acontece em atividades apenas que se exigem a medição, como visto na atividade 2.

Quanto ao uso das ferramentas, os participantes poderiam se apoiar na opção **Duplicar**, para conceber uma maior quantidade de exemplares da superfície unitária para ladrilhar a superfície F , a **Mover** para arrastá-las e ladrilhar a superfície F , e a **Rotação** para alterar a posição das superfícies unitárias  e ladrilharem efetivamente a superfície F .

Acreditamos que os licenciandos apresentariam facilidade na resolução da atividade, e expressariam que uma área, se a superfície não for alterada, e se puder ser medida por distintos tipos de superfícies unitárias pode ser representada por diferentes pares (número, unidade de medida).

ATIVIDADE 3

3. Observe a superfície F:



Considere o  e o  como unidades de medidas.

Qual a área da superfície F adotando-se o  como unidade de medida? _____

Qual a área da superfície F adotando  como unidade de medida? _____

É possível que uma mesma superfície adote unidades de medidas distintas? _____

Se a figura F adota diferentes unidades de medidas  e o  ela, ainda, possui a mesma área?

Explique sua resposta: _____

Qual (is) menu (s) e ferramenta (s) do *Apprenti Géomètre 2* foi usado no procedimento para resolver a questão _____

Para a resolução dessa atividade, os licenciandos em matemática se apoiaram na ideia de ladrilhar apenas uma linha e uma coluna, seguida do uso implícito de uma fórmula para obter a medida da área da superfície F. Esse esquema já havia sido usado pelos próprios participantes na atividade 1 (superfície E) no qual multiplicaram o total de superfícies unitárias que integravam uma linha pela quantidade de linhas que compunham as colunas.

A atividade por propor dois tipos de superfícies unitárias (triângulo isósceles e quadrado), os licenciandos preferiram duplicar a superfície F para ladrilhar cada uma com um tipo de superfície unitária, assim obtendo o par. Esses procedimentos constam no diálogo.

Fred: Uma dica, você vai utilizar duas unidades de medidas. Seria interessante você duplicar a superfície F, diz a Roger. **[Roger duplica o retângulo F, e usuários fazem o ladrilhamento de uma coluna e uma linha].**

Roger: Eu poderia tipo, completar [Enfatizando que poderia ladrilhar as duas superfícies por completo].

Roger: Mas se tipo, a gente sabe a fórmula, a gente pode poupar tempo. Aqui, Fred, a gente já sabe a medida da altura e da base, então já se sabe a área. Nesse caso poderia ser até ao contrário, figuras distintas possuem a mesma área. Daqui eu posso concluir, né?

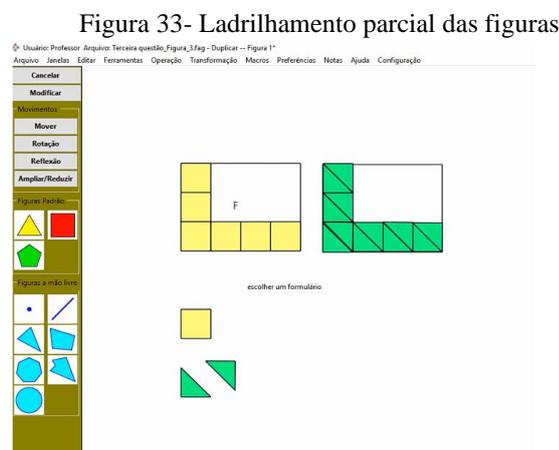
Fred: Sim

Roger: Fazendo base pela altura se tem que 4 vezes 3 é 12. [Analisando a primeira superfície ladrilhada por quadrado]. E aqui vai ter 24. [Direciona o mouse sobre a superfície duplicada]

Fred: Você observa que nas tuas resoluções são por fórmulas?

Roger: É. [Eles riem um pouco].

Roger: É o costume. [Os licenciandos conversam entre si. E afirmam que concluíram à atividade. O resultado está evidenciado na figura 33].



Fonte: Dados da pesquisa

Destacamos que os participantes expressaram que a área da superfície F, por não ter sofrido alteração, pode ser expressa utilizando qualquer um dos dois tipos de superfícies unitárias proposta pela atividade. Em outras palavras, a superfície F pôde ser representada pelos pares 12 quadrinhos e 24 triângulos isósceles, ideia que permite a distinção entre área e número (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Figura 34- Respostas dos licenciandos em matemática referente à atividade 3

Considere o  e o  como unidades de medidas.

Qual a área da figura F adotando-se o  como unidade de medida? 12

Qual a área da figura F adotando  como unidade de medida? 24

É possível que uma mesma superfície adote unidades de medidas distintas? Sim

Se a figura F adota diferentes unidades de medidas ( e o ) ela, ainda, possui a mesma área?
Explique sua resposta: Sim

Por que não vai mudar a unidade de medida se se medir a área fixa.

Qual (is) menu (s) e ferramenta (s) do Aprenti Géomètre 2 foi usado no procedimento para resolver a questão?
Duplicação, rotação e reflexão

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que não houve dificuldade de conhecimentos em relação ao conteúdo por parte dos licenciandos, favorecendo uma maior agilidade e dinamicidade na efetivação da resolução dessa atividade. Como previsto, os participantes acertaram, sem lacunas em relação ao conteúdo, à atividade.

4ª Atividade - Produção de superfícies

A quarta atividade integra a classe das situações de produção de superfícies (BALTAR,1996). Solicitamos que os licenciandos tomando como referência a superfície R produzissem uma superfície de área maior que a de R, outra de área menor que a de R e uma de mesma área que R. Inferimos que os licenciandos em matemática para resolver esse tipo de situação poderiam mobilizar conhecimentos articulados aos quadros geométrico e das grandezas, ou ainda utilizariam o quadro numérico, por meio do ladrilhamento.

Os resultados nas situações de produções de superfícies admitem mais de uma resposta correta para uma mesma atividade, diferentemente do que geralmente ocorre nas situações de outros tipos (comparação, medida e mudança de unidade de área). Como possíveis esquemas, os participantes poderiam usar procedimentos geométricos (decomposição, recomposição e inclusão) ou numéricos (ladrilhamento) para produzir as superfícies solicitadas na atividade.

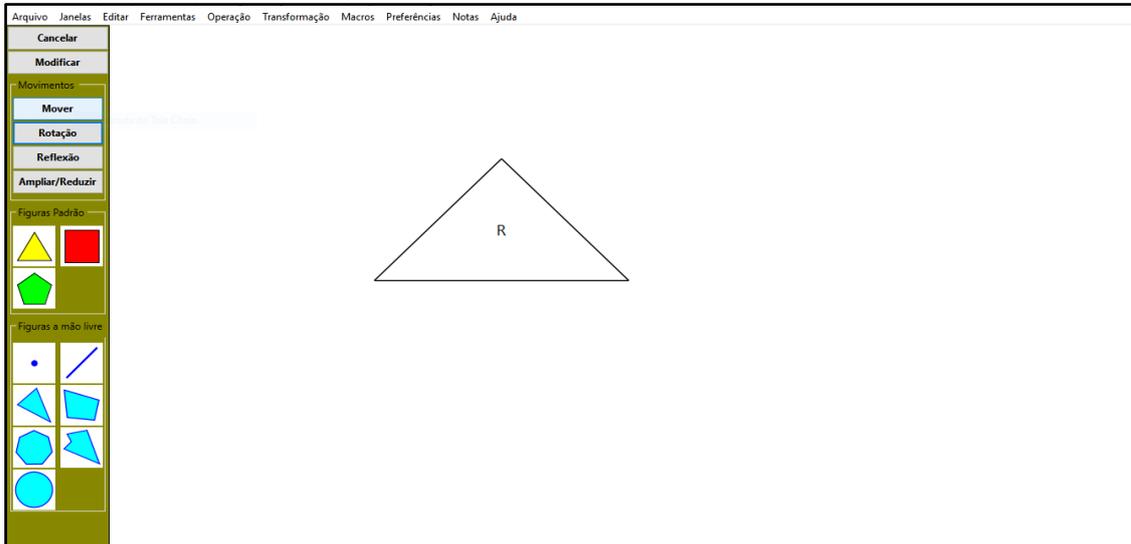
Quanto ao uso das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* pelos participantes teríamos para as estratégias geométricas o **Polígonos (Figuras a mão livre)** que possibilitaria a produção das superfícies de área menor, maior e igual à da superfície R, e o **Nomear** para caracterizá-las atribuindo às superfícies uma letra do alfabeto. Ainda, nas estratégias geométricas destacamos o uso da decomposição mediada pelas ferramentas do programa **Decompôr e Dividir**, e a recomposição com o **Fundir**, para alcançar o resultado da atividade.

Para as estratégias numéricas, os licenciandos poderiam usar a **Malha quadriculada** e realizar a medição da área da superfície R, tomando o quadrado elementar da malha como superfície unitária. Com a mesma superfície unitária, os participantes produziram as superfícies solicitadas pela atividade. Nesse contexto, uma superfície produzida com a mesma quantidade de ladrilhos que a superfície R teria área igual à de R, uma superfície com quantidade de ladrilhos menor que R, possuiria área menor que a de R; e se a superfície produzida tivesse mais ladrilhos do que R teria área maior que a de R.

Nossa expectativa era que os procedimentos geométricos deveriam predominar em relação aos numéricos.

ATIVIDADE 4

4. A partir da superfície R, responda o que se pede:



A – Produza uma superfície E que conceba área maior que a superfície R;

B - Produza uma superfície C que conceba área menor que a superfície R;

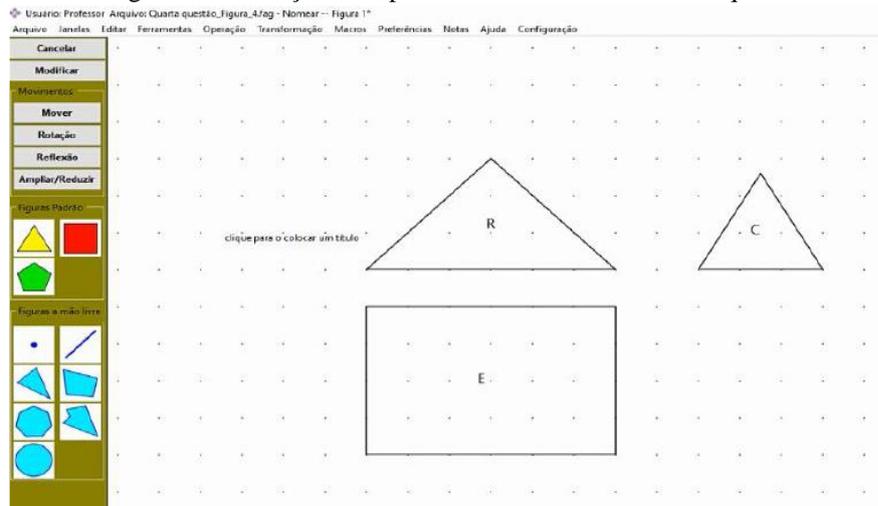
C - Produza uma superfície K que conceba área igual a superfície R.

Qual (is) Menu (s) e ferramentas foram utilizadas para a realização da questão?

Destacamos que contrariamente ao que pensávamos, as estratégias numéricas (ladrilhamento) foram privilegiadas pelos licenciandos para produzir as superfícies de área maior, menor e igual à da superfície R. Entretanto, existem indícios do uso de técnicas geométricas (decomposição e recomposição).

A superfície de maior e menor área que R foram construídas pelos participantes a partir da ativação da **Malha quadriculada**, ver figura 35. Essa ferramenta possibilitou aos licenciandos considerarem o espaçamento elementar como uma possível unidade de medida, por meio dessa ideia produziram as superfícies E (de área maior) e C (área menor), nomeando-as (uso da função **Nomear**). Essas estratégias de resoluções foram descritas na caracterização da atividade por procedimentos numéricos.

Figura 35- Produção de superfície de maior e menor área que R



Fonte: Dados da pesquisa

Para dar suporte aos procedimentos, ferramentas como **Polígonos (Figuras a mão livre)** e **Nomear** foram manipuladas pelos usuários no *software*. É válido destacar que os participantes na tentativa de produzirem uma superfície de mesma área que R, a recobrem com superfícies unitárias de dois tipos, obtendo 6 triângulos isósceles e 6 quadrados.

A partir do quantitativo de ladrilhos utilizados para preencher a superfície R, os participantes consideraram que a área de dois triângulos isósceles é igual à de um quadrado, e concluíram que a medida da área da superfície R tomando por superfície unitária o quadradinho da malha é 9, como é possível compreender pelo diálogo.

Roger: Usando essa unidade de medida podemos dizer que o triângulo possui 9 unidades de medidas. [Posiciona o mouse sobre o quadrado vermelho]

Fred: Então devemos fazer uma figura com esse total de unidades de medidas. [Os licenciandos em matemática começam a produzir uma figura (retângulo) com 9 quadrados tomados como unidades de medida]

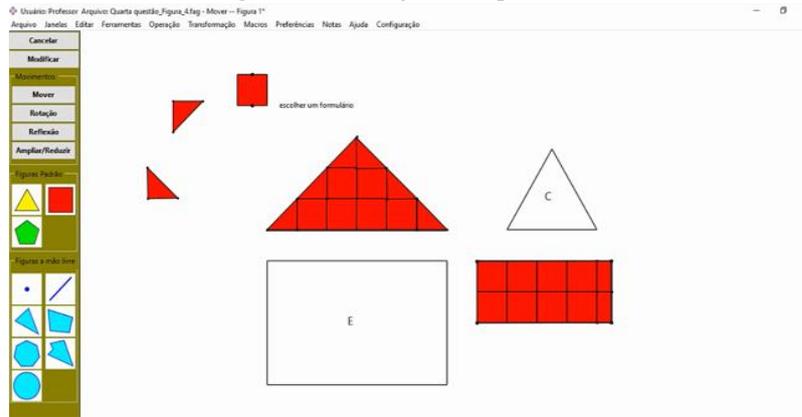
Roger: Pode cortar aqui no meio? [Questionando se pode dividir a unidade de medida em dois retângulos].

Fred: Acho que sim. Dá um clique na figura dentro, Roger.

Roger: Já completamos o total de medida de área.

É válido destacar que os licenciandos tentaram produzir uma superfície retangular com a medida equivalente a 9 quadrados. Dessa forma, optaram por decompor uma superfície unitária (quadrado) em dois retângulos para garantir que a superfície K, tivesse um formato retangular.

Figura 36- Produção da superfície K



Fonte: Dados da pesquisa

Para os participantes, as duas superfícies ladrilhadas no Menu AB contém a mesma medida de área (9 quadrados), independente de seus formatos. O protocolo a seguir apresenta a explicação dos procedimentos e ferramentas adotados para produzir as superfícies solicitadas na atividade.

Figura 37- Respostas dos licenciandos sobre a atividade 4

- A – Produza uma figura E que conceba área maior que a Figura R;
 B - Produza uma figura C que conceba área menor que a Figura R;
 C - Produza uma figura K que conceba área igual a Figura R.

Qual (is) Menu (s) e ferramentas foram utilizadas para a realização da questão?

utilizei ferramentas como duplicar, as ferramentas de mão livre onde fiz figuras mais e menos que a figura R, com o auxílio da malha. Na questão da produção da questão C foi utilizada uma figura como unidade de medida para se construir e fazer a atividade, com auxílio de ferramentas já utilizadas nas questões anteriores.

Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos que os participantes não sentiram dificuldades para resolver a atividade, embora os procedimentos geométricos fossem mais econômicos, eles empregaram procedimentos numéricos para produzir figuras de área maior, menor ou igual à de R. Além disso, dentre todas as atividades foi nessa que houve maior diversidade de ferramentas (**Mover**, **Rotacionar**, **Reflexão**, **Decompor**, **Polígonos (Figuras a mão livre)**, **Triângulo isósceles** e **quadrado (Figuras Padrão)** e **Malha quadriculada**) utilizadas no *software*.

Nesse tipo de situação, verificamos que houve a presença dos três quadros (geométrico, numérico e das grandezas) propostos por Douady e Perrin Glorian (1989), mas prevaleceu e articulação e passagem do quadro das grandezas para o numérico.

3.1.1.1 Limitações e possibilidades do Estudo Preliminar

Os resultados do Estudo Preliminar mostraram que o trabalho em dupla com os licenciandos em matemática foi essencial para resolver as diversas atividades em maior agilidade e riqueza de dados, permitindo o surgimento dos EUT (EU, EAI, EAIC).

Os EU, que correspondem às atividades secundárias, emergiram durante o processo resolutivo das quatro atividades quando os licenciandos exploraram funcionalidades específicas do *software* (**Malha quadriculada, Mover, Rotacionar, Colorir fundo, Nomear, Reflexão e Duplicar**).

Com base nos conjuntos de estratégias e práticas adotadas pelos participantes alguns EAI foram delineados, por exemplo, ladrilhamento, decomposição, sobreposição, recomposição das diversas superfícies, etc. Eles emergiram a partir do processo da instrumentalização dos participantes ao manipularem as ferramentas **Malha quadriculada, Mover, Rotação**, etc. Os EAI que se enquadram à atividade do tipo primária, são compostos pelos EU, e se desenvolvem quando o *software* funciona como um meio para a obtenção dos resultados da atividade a partir da ação do sujeito (RABARDEL, 1995).

Os EAIC, oriundos por meio do uso coletivo a partir do uso de um ou uma classe de artefatos para a realização de uma mesma atividade, se fizeram presentes em diversos momentos do Estudo Preliminar. Dentre eles, quando os participantes interagem e sistematizam um mesmo esquema para usá-lo com as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* para a resolução das atividades. Para exemplificar essa situação temos a ativação da **Malha quadriculada** para encontrar a medida das superfícies.

Roger: clica na opção malha. [Os licenciandos em matemática conversam].

Fred: Essas aqui são as opções de malhas (isométrica e quadriculada). [Os licenciandos conversam entre si e ativam a Malha quadriculada para resolver a atividade. Ver figura 38].

Roger: A gente pode fazer pela malha quadriculada, como medida.

Roger: No caso eu utilizaria aqui, né, para calcular a área desse retângulo? [Sinalizando a superfície A]

Fred: Sim;

Roger: Seria a base vezes altura [Mencionando a fórmula para calcular a área do retângulo].

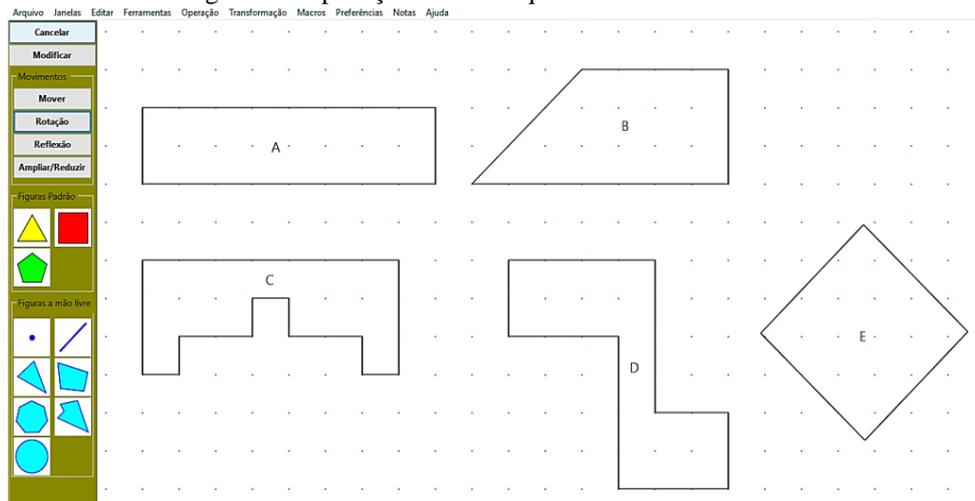
Roger: Vou fazer a medida aqui como se fosse um, cada quadradinho desse.

Fred: Sim, você pode utilizar como unidade de medida. [Apontando para o quadradinho vermelho].

Roger: Aí no caso seria... [E olha para Fred] ... altura 2, aqui a base 8, área seria 16.

Fred: Sim.

Figura 38- Aplicação da malha quadriculada no Menu AB



Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que ao manipularem as ferramentas do *software*, os participantes se instrumentalizavam e se respaldavam nos EUT para efetivar as atividades, tornando-se instrumentados. Destaca-se, ainda, que a instrumentalização e instrumentação ocorreram de maneira síncrona ao longo da resolução, isso porque os licenciandos da pesquisa não tinham familiaridade com o *Apprenti Géomètre 2*, anteriormente ao estudo, permitindo com mais ênfase ao Estudo Preliminar verificar sob a ótica da Gênese Instrumental (RABARDEL, 1995) como sujeitos ao manipularem um *software* apropriavam-se de suas funcionalidades para ao resolver um conjunto de atividades sobre área.

Ao analisar as interligações entre os polos licenciandos (S) - *Apprenti Géomètre 2* (I) - atividades de áreas (O), verificamos que as ferramentas manipuladas e usadas pelos participantes para resolver as atividades foram instrumentalizadas, e com a resolução das atividades tornaram-se instrumentadas.

Quanto ao uso das ferramentas que contribuiram para os licenciandos em matemática responderem ao conjunto de atividades, o quadro 5 elenca e categoriza as relações entre o uso do instrumento pelo sujeito.

Quadro 5- Funções exercidas das ferramentas pelos participantes para resolver as atividades sobre área

Atividades	Ferramentas pensadas a priori a serem usadas nas resoluções das atividades	Ferramentas manipuladas e usadas pelos licenciandos nas resoluções das atividades	Ferramentas manipuladas e apropriadas nas resoluções das atividades
1ª Atividade	Dividir; Decompor Mover; Rotação, Reflexão; Fundir	Malha quadriculada; Mover; Decompor; Quadrado (Figuras padrão); Duplicar; Rotação;	Malha quadriculada; Duplicar; Mover; Dividir; Colorir Fundo; Decompor; Nomear; Reflexão; Quadrado e triângulo isósceles (Figuras Padrão); Remover; Polígonos (Figuras a mãos livres)
2ª Atividade	Duplicar; Mover	Colorir Fundo; Mover; Duplicar	
3ª Atividade	Duplicar; Mover; Rotação	Duplicar; Mover; Rotação	
4ª Atividade	Polígonos (Figuras a mão livre); Malha quadriculada; Mover; Nomear	Nomear; Duplicar; Decompor; Malha quadriculada; Mover; Quadrado e triângulo isósceles (Figuras Padrão); Polígonos (Figuras a mão livre); Reflexão.	

Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com o quadro 5 podemos observar que algumas ferramentas utilizadas pelos licenciandos foram distintas daquelas que esperávamos que fossem usadas.

Com relação aos conhecimentos matemáticos, os participantes mostraram um desempenho satisfatório para o desenvolvimento do conjunto de atividades. Observamos, nesse sentido, que o fato da dupla investigada não ter dificuldades sobre o conteúdo explorado favoreceu para o processo de instrumentalização e instrumentação das ferramentas do *software*.

Ao propormos um conjunto de quatro situações distintas, observamos que os esquemas mobilizados com mais ênfase pelos participantes foi o de ladrilhamento. Apesar dessa técnica estar presente em todas as atividades observamos que foram usados com fins resolutivos distintos, ou seja, ocorrendo adaptação de esquemas.

Destacamos, ainda, que tanto o processo de instrumentalização e instrumentação se destacaram, e nenhum se sobressaiu em relação ao outro. A partir das ações dos licenciandos sobre o *Apprenti Géomètre 2* nas resoluções das atividades, inferimos que houve indícios de transformação do artefato em instrumento das ferramentas manipuladas e apropriadas do Menu AB.

Com base nos resultados do Estudo Preliminar elencamos como limitações e possibilidades para refletimos sobre a estruturação do Estudo Experimental:

➤ **Limitações:**

- Os participantes no decorrer das quatro atividades usaram apenas o Menu AB do *Apprenti Géomètre 2*;
- Poucas ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* foram manipuladas pelos participantes para resolver as atividades. Por exemplo, na atividade 2, que contemplava a situação de medição, os licenciandos apenas utilizaram das funções Duplicar, Mover e Colorir Fundo;
- As atividades não permitiram os licenciandos desenvolverem muitas reflexões para resolvê-las;
- O curto tempo que os licenciandos tiveram para se apropriar das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*.

➤ **Possibilidades:**

- O trabalho em dupla favoreceu o surgimento de EUT no decorrer das resoluções das distintas atividades sobre área;
- Os participantes não terem familiaridade com o *software* propiciou uma maior riqueza de detalhes no processo de verificação de indícios dos processos de instrumentalização e instrumentação. Assim sendo, verificamos que os processos de instrumentalização e instrumentação, ocorreram de maneira síncrona, sem que, nenhum se sobressaísse em relação ao outro.

No próximo tópico apresentamos e discutimos algumas escolhas feitas no Estudo Experimental da pesquisa.

3.2 Estudo Experimental: sistematização do objeto investigativo

A partir dos resultados do Estudo Preliminar, essa etapa da pesquisa, que denominamos Estudo Experimental, objetivou analisar o processo de apropriação das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* por licenciandos em matemática ao resolverem atividades sobre comparação de áreas, medida de área, mudança de unidade de área e produção de superfícies. Buscamos elaborar atividades cuja solução no ambiente papel e lápis fosse complexa ou trabalhosa e para as quais o uso das funcionalidades do *software Apprenti Géomètre 2* simplificasse essa resolução.

O Estudo Experimental foi realizado com estudantes de licenciatura em matemática de uma universidade pública situada na cidade do Recife, capital do estado de Pernambuco. A escolha da instituição foi motivada pela receptividade à participação na investigação, pelas condições favoráveis de acesso ao laboratório de informática para o desenvolvimento do estudo, por dispor de máquinas em quantidade suficiente e pelo bom estado de conservação dos computadores, o que permitiria que os participantes da pesquisa manipulassem e se apropriassem das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* com um risco baixo de problemas técnicos significativos no decorrer do Estudo Experimental.

Os participantes estavam na primeira metade do curso, eram vinculados ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e tinham sido acompanhados pelo pesquisador durante um ano em disciplinas nas quais havia realizado estágio de docência. Vários licenciandos em matemática da instituição de ensino superior (IES) escolhida foram convidados e a participação foi voluntária. Explicamos que seria uma sessão de resolução de atividades relacionadas à grandeza área, com o uso do *Apprenti Géomètre 2* e que ao resolver as atividades eles poderiam conhecer e apropriar-se de ferramentas desse *software*. Todos informaram que nunca haviam realizado atividades com o *Apprenti Géomètre 2*, anteriormente. O fato de não conhecer previamente o *software* era um critério de escolha dos participantes, uma vez que nosso interesse estava voltado para o processo de gênese instrumental. Seis licenciandos em matemática manifestaram interesse, mas um deles não pôde estar presentes no dia da vivência.

Foi realizada uma sessão presencial, com duração de 5 horas, na própria IES à qual os sujeitos da pesquisa eram vinculados. A participação de todos foi presencial apesar de residirem em localidades¹⁸ distintas do estado de Pernambuco, o que exigiu deles um esforço pessoal.

Como uma maneira de preservar a identidade dos participantes, solicitamos que cada um adotasse um pseudônimo, a sua própria escolha e criatividade, para ser usado no decorrer da pesquisa. Os pseudônimos registrados pelos cinco participantes foram: **Ana, Hughes, Iza, Magali e Michael.**

Considerando o total de participantes e a relevância do trabalho em dupla observada no Estudo Preliminar, pedimos que formassem duas duplas e um deles ao invés de compor um trio preferiu trabalhar individualmente. A opção pelo(a) parceiro(a) de trabalho ocorreu por livre escolha dos licenciandos, e como resultado obtivemos a **Dupla 1** (Iza e Michael), a

¹⁸Três dos participantes residem em cidades do interior de Pernambuco, e dois na Região Metropolitana do Recife.

Dupla 2 (Ana e Magali), e Hughes trabalhou **individualmente**. O fato de não termos o total de três duplas não impossibilitou a categorização e análise de resultados, mas exigiu certa adaptação.

Tanto no caso das duplas como do estudante que trabalhou individualmente, tivemos acesso ao registro das ações no *software*. Além disso, no caso das duplas foram audiogravados os diálogos entre os dois participantes, o que forneceu mais indícios explícitos para modelar os EUT. A análise dos dados relativos ao estudante que resolveu as atividades individualmente exigiu do pesquisador que fizesse inferências sobre os EUT desenvolvidos para resolver ao conjunto de atividades.

Na busca de atingir o objetivo geral, em termos metodológicos, adotamos como instrumento para produção dos dados um conjunto de seis atividades sobre a grandeza área, concebidas considerando as limitações e possibilidades observadas no Estudo Preliminar. Todas as atividades foram realizadas no *Apprenti Géomètre 2*.

As atividades estavam dispostas em uma pasta no *Desktop* do computador. Na interface de entrada do *Apprenti Géomètre 2*, os participantes foram orientados a optar pelo perfil de aluno e registrar seus pseudônimos, selecionar o Menu AB, o idioma Português/BR e clicar em Ok. A partir daí poderiam resolver as atividades no *software*. Como uma forma de propiciar aos licenciandos os procedimentos de acesso ao programa disponibilizamos as atividades impressas com essas informações na parte superior, e solicitamos que explicassem por escrito como chegaram às respostas. Por fim, recolhemos os registros escritos.

Os procedimentos mobilizados pelos participantes no ambiente do *software* foram analisados à luz da Gênese Instrumental de Rabardel (1995), por isso consideramos:

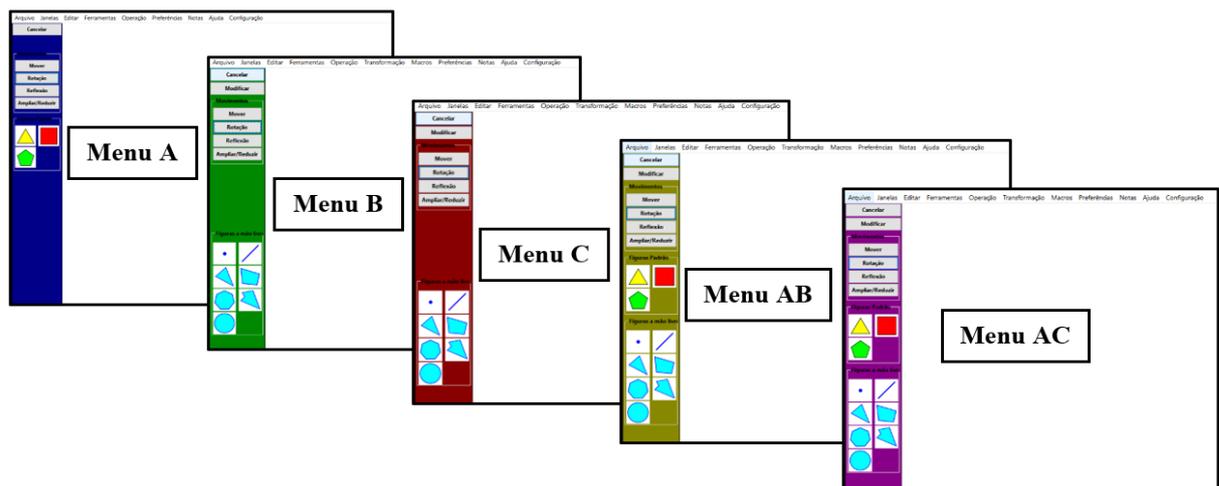
- Identificar e analisar o uso das ferramentas e os esquemas que surgiram pelos participantes ao responderem atividades sobre as situações de área (comparação, medida, mudança de unidade e produção de superfícies);
- A criação de distintas atividades que estimulassem a resolução por meio da articulação ora entre os quadros geométricos e das grandezas, ora dos quadros numéricos e das grandezas, e ora dos quadros numéricos e geométricos. Essa ideia emergiu na tentativa de diversificar os esquemas a serem mobilizados pelos licenciandos em matemática;
- Organizar as atividades de modo que a passagem de uma a outra levasse a mobilizar esquemas distintos, e não repetidos ou similares. Por exemplo, caso a primeira atividade explorasse a situação de comparação de áreas (BALTAR, 1996), a segunda contemplasse a situação de mudança de unidade (FERREIRA, 2010);

- Utilizar apenas o Menu AB do *Apprenti Géomètre 2*. A seguir, exploramos o porquê de adotarmos o uso do Menu AB dentro dos distintos ambientes (A, B, C, AB e AC).

➤ **Por que utilizar apenas o Menu AB do *Apprenti Géomètre 2*? Justificativa dessa escolha metodológica.** Iniciamos nossa justificativa destacando que as ferramentas que integram os Menus (A, B, C, AB e AC) do *software* são relevantes para explorar algum conceito/ conteúdo de matemática, por exemplo, ponto, reta, plano, perímetro, área, entre outros objetos matemáticos, mesmo que não sejam úteis diretamente para as atividades propostas nessa pesquisa.

Como mostra a figura 39, no *Apprenti Géomètre 2* em cada opção de Menu é disponibilizado um suporte vertical de cores distintas que aborda as ferramentas “Cancelar”, “Modificar”, o conjunto de (“Movimentos”, “Figuras Padrão” e “Figuras e mão livre”).

Figura 39- Menus A, B, C, AB e AC



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das interfaces do *Apprenti Géomètre 2*

Como descrito no tópico “2.4.1.1 Conhecendo os menus e ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*”, e retomando de maneira breve, os Menus A, B e C possuem funções próprias, enquanto os Menus AB e AC são formados pela composição das ferramentas das interfaces anteriores do *software*, ou seja, o Menu AB tem todas as ferramentas do Menu A e todas as do Menu B e o Menu AC agrega as ferramentas do Menu A e do Menu C.

Poderíamos ter deixado a escolha do menu em aberto, a cargo do aluno, mas isso traria perturbações que se afastam do objeto da pesquisa, considerando o tempo relativamente curto para realização das atividades do Estudo Experimental. Assim, preferimos restringir o estudo considerando apenas uma interface para verificar o processo de apropriação das ferramentas pelos licenciandos e portanto, determinamos qual menu seria utilizado pelos participantes.

Vamos justificar a escolha do Menu AB, comparando-o com os demais em relação às características das atividades que serão detalhadas adiante.

Não optamos pelo Menu A porque ele não disponibiliza para o usuário a ferramenta “Modificar” e as “Figuras a mão livre”. Os participantes, sem essas funcionalidades, por exemplo, não poderiam produzir figuras diretamente com o auxílio do *mouse* no ambiente do *software* ou modificar o formato das figuras. Sem essas funcionalidades os procedimentos numéricos seriam ainda mais favorecidos do que o habitual: os licenciandos teriam que fazer a contagem do total de ladrilhos e produzir as superfícies a partir do par (número, unidade de medida), e os procedimentos geométricos seriam dificilmente mobilizáveis para realização das atividades.

Quanto aos Menus B e C, decidimos não utilizá-los pela ausência do conjunto de Figuras Padrão, que disponibiliza ao usuário figuras predefinidas (úteis para os procedimentos que exigem o ladrilhamento efetivo das superfícies, por exemplo). Como será discutido mais em detalhes adiante, em várias atividades o ladrilhamento das figuras pode ser realizado e embora com as funcionalidades das “Figuras a mão livre” seja possível produzir superfícies unitárias (distintos polígonos de qualquer tamanho), o uso de “Figuras Padrão” é frequentemente mais adequado.

Assim, as limitações dos Menus A, B e C justificam termos descartado essas opções. Sendo a primeira interação dos licenciandos com o programa e considerando os procedimentos possíveis de resolução das atividades, entendemos que seria pertinente disponibilizar simultaneamente os conjuntos de ferramentas “Figuras Padrão” e “Figuras a mão livre”.

Contrariamente aos Menus A, B e C, ambos os Menus AB e AC possuem as funcionalidades necessárias para a realização do presente estudo. No quadro 6, a seguir, podemos observar as diferenças entre esses dois menus, no conjunto de ferramentas “Figuras a mão livre” nas classes de família “Arcs” e “Segments”.

Quadro 6- Justificativa da escolha do uso das ferramentas do Menu AB

Classe da família das ferramentas Arcs e Segments	Menu AB	Menu AC
Arcs	Circunferência Arco	Circunferência Arco DSect HalfDsk
Segments	Segmento Segmento paralelo Segmento perpendicular	Segmento Segmento paralelo Segmento perpendicular Direita Linha paralela Linha perpendicular Raio Tira Setor

Fonte: Elaborado pelo autor a partir das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*

Como se pode perceber, todas as ferramentas do Menu AB nos itens segmentos e arcos, também estão disponíveis no Menu AC. Apesar do Menu AC conter mais recursos para o usuário manipular no *software*, em comparação com o Menu AB, essas ferramentas não são necessários para a resolução das atividades dessa pesquisa.

Assim, por considerar que se tratava da primeira vivência dos licenciandos com o *Apprenti Géomètre 2* optamos pelo Menu AB que entre os que possuem todas as ferramentas a priori úteis para a resolução das atividades do estudo é o mais simples.

Definido o ambiente do *software*, no próximo tópico, apresentamos o conjunto de atividades que compõem o Estudo Experimental. Nele, ainda, expomos as categorizações e análise a priori de cada atividade.

3.2.1 Caracterização e análise a priori das atividades do Estudo Experimental

Neste tópico apresentamos as atividades do Estudo Experimental, suas características, o porquê de suas escolhas, critérios adotados para analisar os resultados e discussões dos procedimentos resolutivos que os licenciandos em matemática poderiam adotar ao utilizar o *Apprenti Géomètre 2* para respondê-las.

As atividades foram estruturadas com base nos estudos de Douady e Perrin - Glorian (1989), Baltar (1996) e Ferreira (2010), com respeito às situações que dão sentido à área de figuras planas. Portanto consideramos alguns elementos para sua construção, como:

- Situações que propiciassem a mobilização de estratégias geométricas (decomposição, recomposição, inclusão e sobreposição) e/ou numéricas (ladrilhamento, uso de fórmula, etc.);
- Situações que favorecessem a passagem entre os quadros geométrico, das grandezas e numérico; e
- Situações nas quais não é possível ladrilhar efetivamente a superfície com uma superfície unitária dada.

Com base nesses critérios, elaboramos um conjunto de seis atividades abordando às situações de comparação de áreas, medição de área e produção de superfície (BALTAR, 1996), e mudança de unidade de área (FERREIRA, 2010).

A primeira atividade se enquadra como uma situação de comparação de áreas (BALTAR, 1996). Propomos um conjunto de superfícies (L, T, V, Y, W e Z) e solicitamos que os licenciandos identificassem qual possuía a maior e menor área. Destacamos que procedimentos geométricos (decomposição, recomposição, inclusão, sobreposição) ou numéricos (ladrilhamento ou até do cálculo com o apoio das fórmulas) são úteis para obtenção do resultado.

A segunda atividade se apoia exclusivamente na ideia de medição, aspecto direcionado ao quadro numérico (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989). Sugerimos que os licenciandos a partir de uma dada superfície unitária ladrilhassem uma superfície K. Nessa atividade, estratégias numéricas seriam privilegiadas, em especial, o ladrilhamento.

A terceira atividade contempla uma situação de produção de superfície de mesma área que a dada (BALTAR, 1996). Solicitamos que os participantes produzissem uma superfície F, de mesma área que a superfície dada (J). Destacamos que nessa atividade o resultado pode ser obtido mediante procedimentos numéricos ou geométricos.

A quarta atividade classifica-se como uma situação de comparação de áreas de figuras planas (BALTAR, 1996). Propomos que duas superfícies com formatos distintos fossem comparadas e que os participantes identificassem se elas possuem a mesma área ou não. Para isso, enfatizamos que procedimentos geométricos (decomposição e recomposição) serão privilegiados.

A quinta atividade se adequa a situação de mudança de unidade de áreas (FERREIRA, 2010). Propomos que uma superfície R fosse ladrilhada por tipos distintos de superfícies

unitárias. A ênfase nessa atividade são procedimentos numéricos, mas seu foco é destacar que uma mesma área pode ser representada por distintos pares (número, unidade de medida).

A sexta atividade aborda uma situação de produção de superfície de área menor que a dada (superfície O) (BALTAR,1996). Para a obtenção do resultado dessa atividade são priorizados procedimentos geométricos, como a decomposição, recomposição, inclusão e sobreposição.

Para cada atividade, elaboramos alguns critérios de análise, discutimos os procedimentos de resolução e respostas (corretas e incorretas) possíveis, e destacamos apropriação¹⁹ das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* pelos licenciandos em matemática.

➤ **Critérios para análise dos resultados do Estudo Experimental:** Essa etapa da pesquisa foi realizada em dois momentos, descritos a seguir, sendo eles:

Primeiro: comparamos as descrições da análise a priori com as mobilizações que os licenciandos em matemática usaram para resolver as atividades. Com isso, **1º-** Descrevemos as estratégias dos participantes para resolver as atividades; **2º-** Identificamos as ferramentas do Menu AB utilizadas pelos licenciandos em matemática na resolução das atividades.

Segundo: analisamos os esquemas e procedimentos resolutivos usados pelos licenciandos em matemática. Para isso,

1º- Identificamos os esquemas emergidos mediante a interação entre os participantes com as ferramentas do *software* para resolver o conjunto de atividades;

2º- Analisamos, sob a ótica do modelo SAI, se houve indícios do processo de instrumentalização a partir da exploração das ferramentas do artefato (*Apprenti Géomètre 2*) pelos licenciandos, identificando suas potencialidades, atribuindo-lhes funcionalidades para produzir esquemas e obter a resposta das atividades;

3º- Analisamos se houve indícios do processo de instrumentação quando os licenciandos ao manipularem as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, apoiados pelos esquemas, conseguiram resolver as atividades.

4º- Modelizamos os esquemas de utilização desenvolvidos pelos licenciandos em matemática quando esses realizaram atividades sobre a grandeza área.

Quanto aos tipos de situações que integrariam cada atividade, elaboramos uma análise a priori elencando as características (o objetivo e a escolha do formato das superfícies) de cada atividade. Descrevemos os possíveis esquemas corretos e incorretos que poderiam surgir no decorrer das tentativas resolutivas de cada atividade pelos licenciandos em matemática.

¹⁹Consideramos ferramentas apropriadas pelos licenciandos aquelas que mediante a exploração de suas funções serviram de aporte para o desenvolvimento dos esquemas e subsidiaram a resolução da atividade.

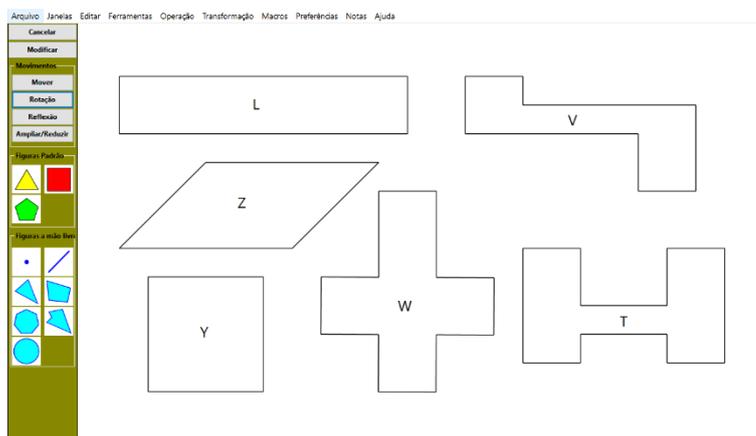
Citamos, ainda, as ferramentas que serviriam de suporte para os participantes responderem às atividades, e chegarem à resposta correta. A partir dessas descrições, a seguir, apresentamos detalhadamente uma análise a priori e características de cada atividade.

3.3.1.2.1 Atividade 1

ATIVIDADE 1

Selecione e abra o arquivo “Atividade 1.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

1 - Entre as superfícies abaixo, identifiquem:



- A) Qual delas tem a maior área?
B) Qual delas tem a menor área?

➤ Expliquem como chegaram às respostas.

De acordo com a tipologia de situações que dão sentido à área proposta por Baltar (1996), essa é uma situação de comparação de áreas, na qual os licenciandos em matemática devem identificar qual das seis superfícies dadas (L, T, V, Y, W e Z) possui a maior área e qual tem a menor área . .

Todas as figuras são polígonos, sendo que três são muito explorados na sala de aula da educação básica (o retângulo L, o paralelogramo Z e o quadrado Y), e os outros três são menos frequentes (um octógono e dois dodecágonos não convexos). Por meio dessa atividade, objetivamos identificar quais conhecimentos matemáticos (dos quadros geométrico, numérico

e das grandezas) os licenciandos mobilizam e em que ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* se apoiam, para comparar as áreas das superfícies e poder concluir quais possuem maior e menor área. A resposta correta esperada é que a superfície de maior área é W, e a de menor área V.

➤ **Possíveis respostas e acertos**

Nessa atividade, os esquemas mobilizados pelos licenciandos em matemática podem incluir conhecimentos geométricos (decomposição, recomposição e sobreposição) ou numéricos (ladrilhamento e uso de fórmula).

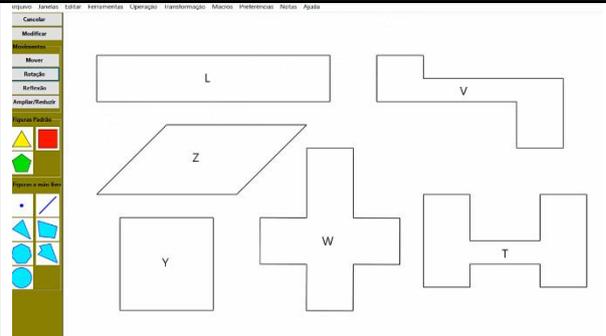
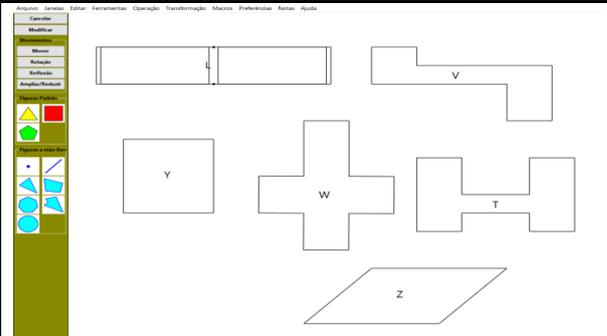
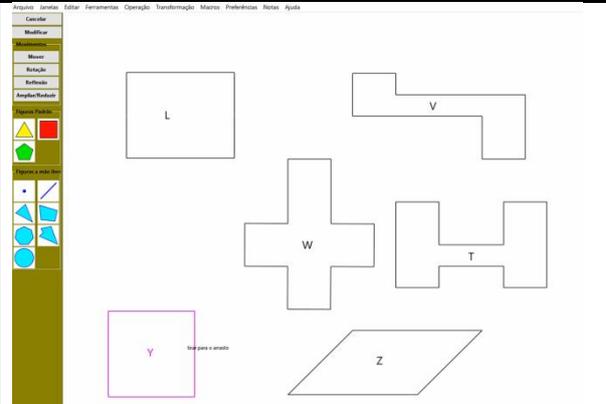
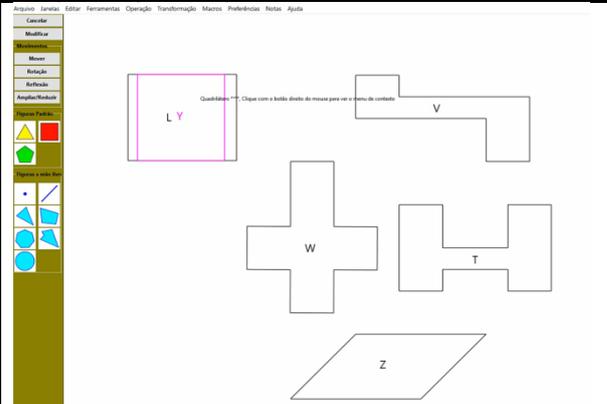
Elencamos, a princípio, as possíveis estratégias resolutivas de ênfase geométrica. Para comparar as áreas das diversas superfícies (L, T, V, Y, W, Z), e verificar quais possuem a maior e menor área, com o auxílio das ferramentas do *software*, destacamos o uso dos procedimentos da decomposição, recomposição e sobreposição.

Com o uso das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, os participantes poderiam:

- 1º) Decompor as superfícies adotando as ferramentas **Dividir** e **Decompor** que possibilitam ao usuário escolher a quantidade de pedaços em que deseja dividir a superfície, e separá-las, respectivamente;
- 2º) Recompor as partes das superfícies unindo-as por meio do **Fundir**. É válido destacar que se o usuário almeja recompor as partes da superfície, mas com formato distinto, pode adotar anteriormente ao uso do **Fundir** as funcionalidades **Rotacionar** ou **Reflexão** permitindo alterar suas posições;
- 3º) Sobrepor as superfícies, arrastando-as, por meio do deslocamento, com a função **Mover**. Auxiliados por essas funcionalidades do programa, e estratégias matemáticas, os participantes poderiam comparar as áreas duas a duas identificando qual possui a maior e menor área.

No quadro 7, a seguir, apresentamos uma possível comparação que pode ocorrer entre as superfícies L e Y, resultando que a área de L é maior que a de Y.

Quadro 7- Exemplo de comparação das superfícies L e Y

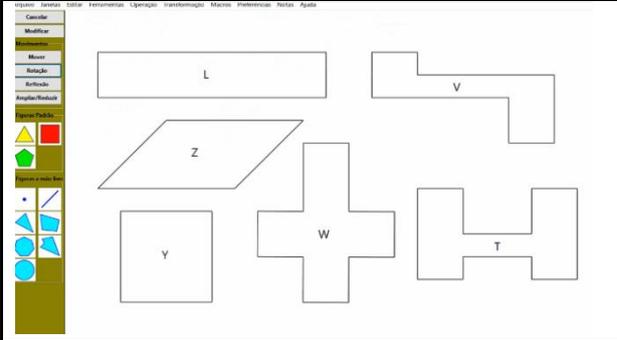
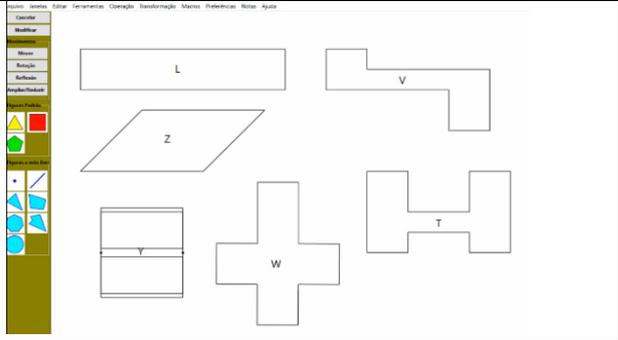
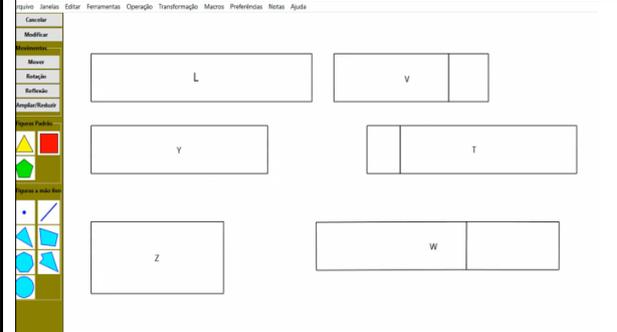
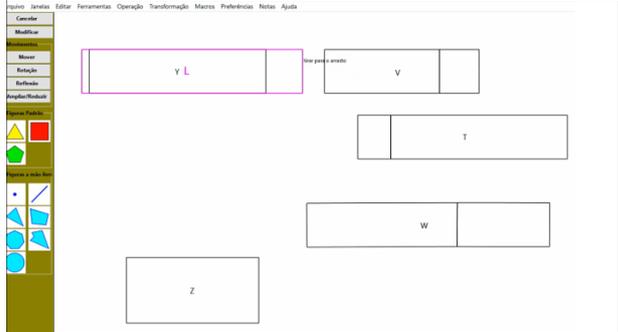
Sequência de passos	
1	<p>Conjunto de superfícies</p> 
2	<p>Decomposição das superfícies L</p> 
3	<p>Recomposição das partes da superfície L com formato distinto da superfície inicial</p> 
4	<p>Comparação das áreas das superfícies L e Y por meio da sobreposição</p> 

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Com as mesmas ferramentas do *software*, outra estratégia resolutiva que poderia emergir consiste em decompor as superfícies e recompor suas partes produzindo superfícies retângulos que por sua vez seriam comparados por sobreposição.

Com base nessa perspectiva, o quadro 8 mostra de maneira sintetizada a sequência de passos para a comparação de áreas a partir desses aspectos geométricos.

Quadro 8- Comparação de áreas por meio de aspectos geométricos

Sequência de passos	
1	<p>Conjunto de superfícies</p> 
2	<p>Decomposição das superfícies</p> 
3	<p>Recomposição das superfícies em formatos retangulares</p> 
4	<p>Comparando as áreas das superfícies por meio da sobreposição</p> 

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Supomos que as estratégias resolutivas, expostas no quadro 8, seja a mais usual, ou até a única usada pelos participantes para obtenção das comparações de áreas por meio dos procedimentos geométricos. Isto porque é a primeira vivência dos licenciandos com o programa, e os mesmos estarão em processo de exploração de suas ferramentas para resolver a atividade.

Esperamos que os licenciandos obtenham como resultados que a superfície V tem a menor área; enquanto a superfície W possui maior área dentre o conjunto de superfícies.

Ainda, nessa perspectiva, outra funcionalidade que poderia ser usada no decorrer do processo resolutivo pelos licenciandos se trata da **Nomear** para definir a superfície, uma vez que sendo decomposta, suas partes não ficam nomeadas.

Ao adotar procedimentos numéricos, os participantes poderiam utilizar a técnica do ladrilhamento efetivo ou até abordar o cálculo da área por meio do uso de fórmulas, possibilitando a obtenção do par (número, unidade de medida).

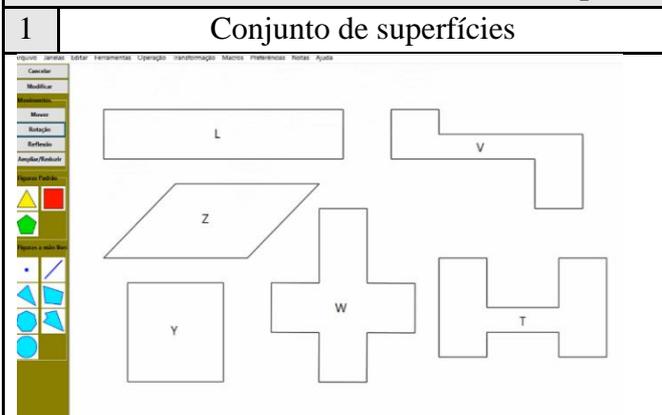
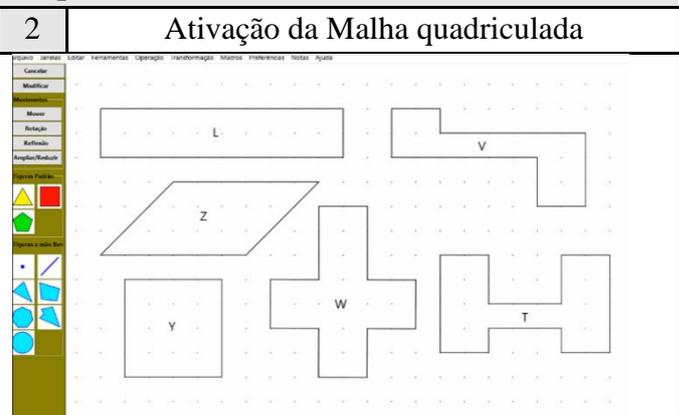
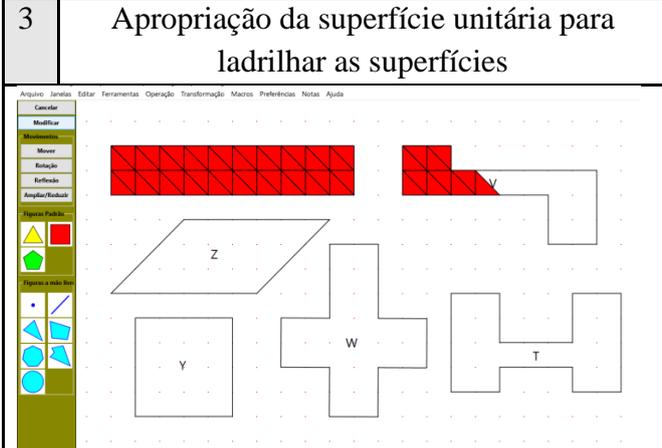
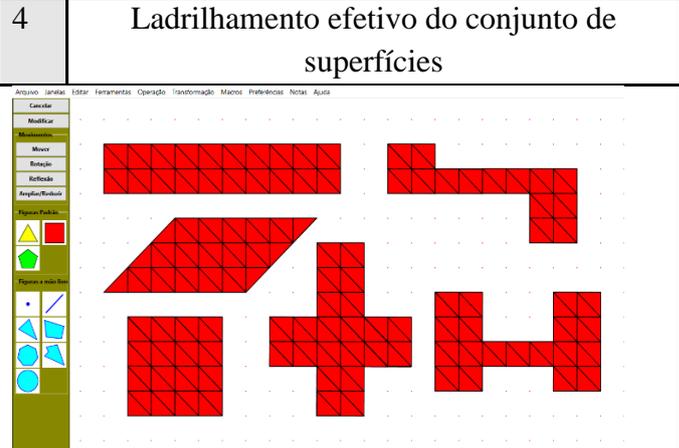
Com a técnica do ladrilhamento efetivo, iriam recobrir totalmente sem sobrar espaço, com exemplares de uma superfície unitária cada figura dada e comparar as quantidades de superfícies unitárias necessárias. As ferramentas que auxiliariam os licenciandos na obtenção

dos resultados são **Malha quadriculada**, **Triângulo isósceles (Figuras Padrão)**/ ou **Triângulo isósceles (Figuras a mão livre)**, **Duplicar**, **Reflexão** e **Mover**.

A partir da ativação da **Malha quadriculada**, os licenciandos poderiam sobrepor, por meio do **Mover**, todas as superfícies adequando-as aos pontos desse recurso. Além disso, possibilitaria aos usuários adotar uma superfície unitária adequada para preencher todas as superfícies reproduzidas no *software*.

Para ladrilhar efetivamente todas as superfícies a opção da superfície unitária mais adequada seria um **Triângulo isósceles (Figuras Padrão)** predefinido no *Apprenti Géomètre 2* ou o **Triângulo isósceles (Figuras a mão livre)**, que permite ao usuário produzir a a superfície unitária a partir da manipulação com o *mouse*. Tendo sido definida a superfície unitária, os participantes com a funcionalidade **Duplicar** poderiam obter uma maior quantidade de superfícies unitárias, e com o **Mover** preencher, sem sobrar espaço ou faltar, as superfícies L, T, V, Y, W e Z. Para alterar a posição da superfície unitária, caso necessitassem, os licenciandos se apoiariam nas funcionalidades **Rotação** ou **Reflexão**. Essa estratégia está exposta a partir do quadro 9.

Quadro 9- Comparação de áreas de um conjunto de superfícies por meio do aspecto numérico

Sequência de passos			
1	Conjunto de superfícies	2	Ativação da Malha quadriculada
			
3	Apropriação da superfície unitária para ladrilhar as superfícies	4	Ladrilhamento efetivo do conjunto de superfícies
			

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

O ladrilhamento nas superfícies mostra que as áreas de cada uma delas, dada a superfície unitária  são:

- Área da superfície L= 40 ;
- Área da superfície V = 28 ;
- Área da superfície Z= 36 ;
- Área da superfície Y= 32 ;
- Área da superfície W= 44 ;
- Área da superfície T = 38 .

Esse procedimento permite concluir que a superfície W tem a maior área e V tem a menor área. Outra resposta correta de ênfase numérica que poderia ocorrer se trata de que os participantes poderiam se apoiar na **Malha quadriculada**, por meio de seus espaçamentos, tentar usar fórmulas sobre as superfícies para obter o resultado da atividade. As ferramentas que dariam suporte aos licenciandos para essa estratégia resolutiva ser efetivada se trata de utilizar a **Malha quadriculada** e **Segmentos (Figuras a mão livre)** que auxiliariam decompor as superfícies, em figuras menores, para aplicar o uso das fórmulas ou realizar o cálculo mental. Essa ideia pode ser compreendida a partir do quadro 10.

Quadro 10- Obtendo a área por meio da repartição das superfícies

Sequência de passos	
1	Conjunto de superfícies
2	Ativação da Malha quadriculada
3	Repartição das superfícies com segmentos
4	Cálculo mental/ contagem de espaçamentos a partir das repartições das superfícies. Verificação da maior (W) e menor (V) área

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Essa estratégia possibilitaria aos participantes usarem fórmulas de maneira implícita. Por exemplo, pode-se, ao adotar o uso da **Malha quadriculada** e tomar o comprimento do lado do quadrado como unidade e o quadradinho elementar da malha como superfície unitária, pressupor que a distância entre dois pontos consecutivos da malha representa 1 cm e a área do quadradinho representa 1 cm². Nesse caso, poderia considerar que a superfície Y, é um quadrado cujos lados medem 4 cm e portanto sua área seria de 16 cm², utilizando implicitamente a fórmula da área de um quadrado.

Analogamente poderiam calcular a área do retângulo e do paralelogramo. No caso das outras superfícies, poderiam decompor em figuras, calcular as áreas de cada pedaço utilizando as respectivas fórmulas e adicionar.

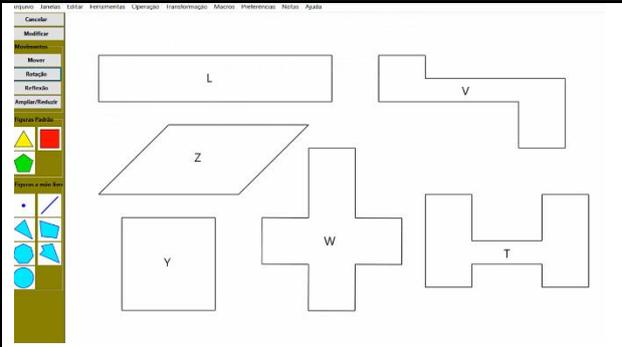
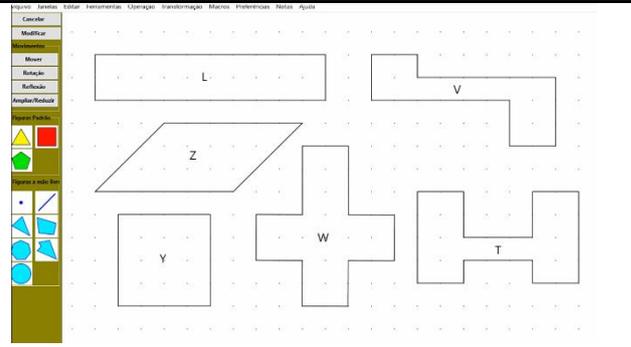
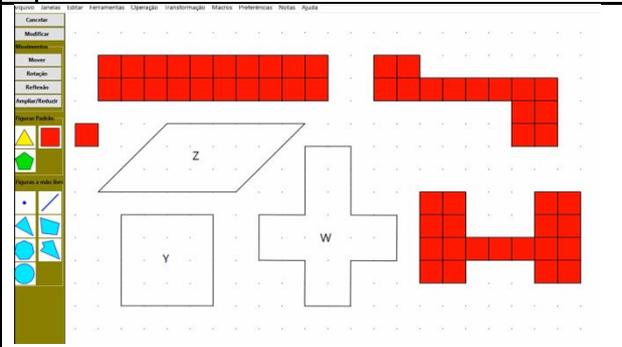
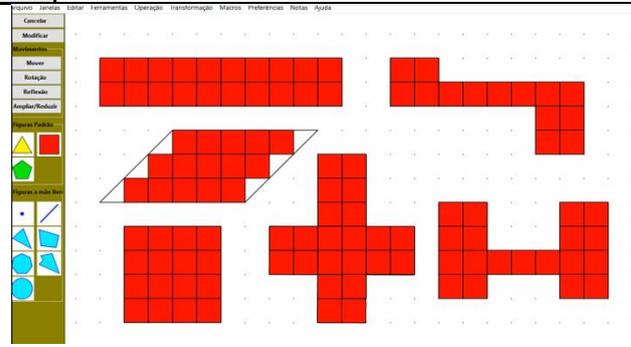
➤ Possíveis erros

Um procedimento incorreto que poderia ser delineado pelos licenciandos se trata de adotar a técnica do ladrilhamento e tomar o  como a única superfície unitária possível para ladrilhar as superfícies (L, T, V, Y, W e Z).

Frente a essa realidade, não seria possível preencher a superfície Z. Sendo assim, um outro esquema emergiria que se trata dos participantes adotarem o  como outra tipologia de superfície unitária para cobrir totalmente a superfície Z. Apesar da superfície Z ficar totalmente preenchida, sem ladrilhos sobrepostos, o uso de dois tipos de superfícies unitárias poderia dificultar representação numérica da medida da área de Z e conseqüentemente a comparação entre essa medida e as medidas das outras figuras.

Nesse contexto, uma possível representação associada a esse tipo de resposta a ser expressa pelos participantes se trata de ser 15  e 6 . Ao representar a medida da área nessa perspectiva, elenca-se que a ideia do ladrilhamento efetivo não está organizada o suficiente, evidenciando lacunas de conhecimentos quanto à abordagem do conteúdo.

Quadro 11- Sequência de passos na tentativa do ladrilhar as superfícies ao adotar a unidade de área quadrado

Sequência de passos	
1	<p>Conjunto de superfícies da atividade</p> 
2	<p>Ativação da Malha quadriculada</p> 
3	<p>Tentativa de ladrilhamento efetivo adotando a unidade de área (quadrado)</p> 
4	<p>Impossibilidade do ladrilhamento efetivo na superfície Z</p> 

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

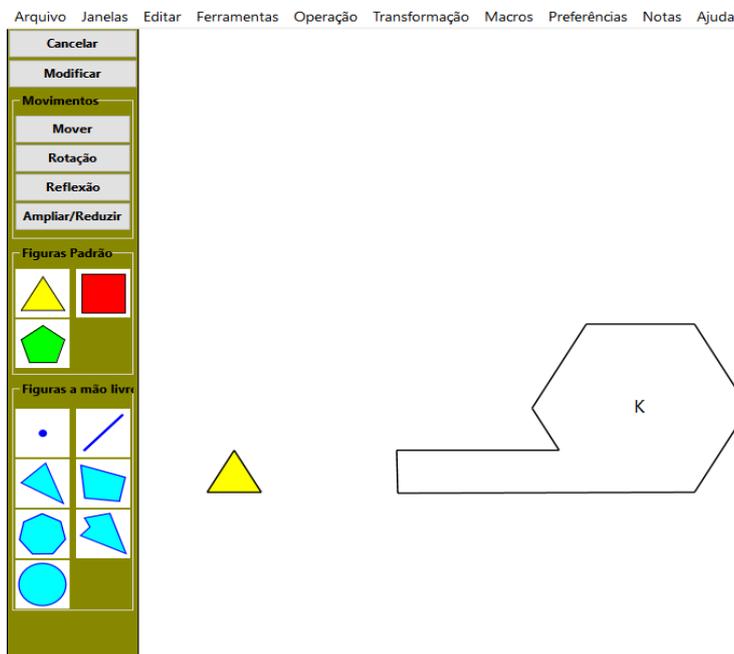
Quanto ao uso das ferramentas para resolução da atividade seriam a **Malha quadriculada**, **Triângulo isósceles (Figuras Padrão)**/ ou **Triângulo isósceles (Figuras a mão livre)**, **Duplicar**, **Rotação**, **Reflexão** e **Mover**.

3.3.1.2.2 Atividade 2

ATIVIDADE 2

Selecione e abra o arquivo “Atividade 2.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

2 - Qual a medida de área da superfície K, considerando a unidade definida pelo triângulo  ?



➤ Expliquem como chegaram à resposta.

Essa atividade corresponde na classificação de Baltar (1996) a uma situação de medição e o resultado esperado é representado por um par (número, unidade de medida) (BELLEMAIN; LIMA, 2002).

Adotamos um octógono, não convexo, de formato pouco frequente nos livros didáticos a fim de estimular os licenciandos a refletirem que sobre a possibilidade de medir a área de figuras pouco usuais. A área da superfície K é de $30,5$ . Escolhemos que a medida seria um número decimal a fim de destacar que medida da área de uma superfície não precisa ser inteira.

➤ **Possíveis respostas e acertos**

Uma estratégia que os licenciandos poderiam usar seria considerar a superfície unitária (▲) dada e por meio dela tentar o ladrilhamento, a fim de expressar a área da superfície K pelo par (número, unidade de medida) (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

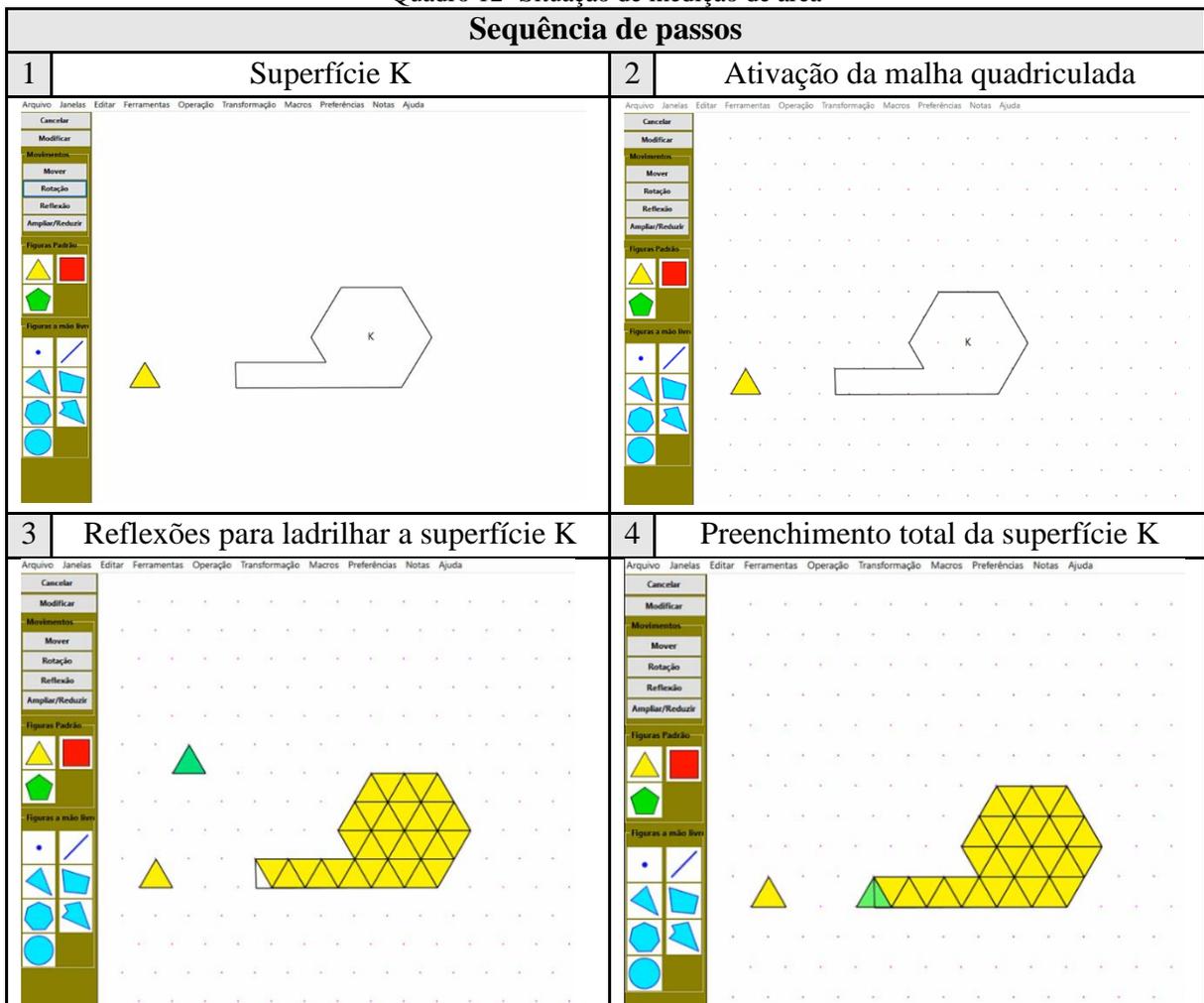
As ferramentas do *software* que auxiliariam os participantes na resolução dessa atividade seriam a **Malha isométrica**, **Duplicar**, **Reflexão** e **Mover**. Os licenciandos poderiam com o uso da função **Duplicar** obter um maior quantitativo de ladrilhos no ambiente do *software* e assim preencher o octógono K. Para isso, algumas superfícies unitárias deveriam ser transformadas por **Reflexão** ou **Rotação**, e em seguida deslocadas, pelo **Mover**, sem perda ou sobreposição de ladrilhos. A **Malha isométrica** auxiliaria na organização do preenchimento da superfície K de modo aos ladrilhos não ficarem sobrepostos.

Destacamos que a passagem de uma atividade à outra permite que os licenciandos mobilizem esquemas distintos ou dependendo do procedimento empregado na situação anterior, que utilizem esquemas similares. Assim sendo, se os participantes se apoiaram na técnica do ladrilhamento efetivo na atividade 1, essa estratégia ao ser empregada na presente atividade sofre adaptações. Por exemplo, nas duas situações os estudantes podem mobilizar um esquema em que ativam uma malha, reproduzem a superfície unitária e preenchem a figura com exemplares da superfície unitária.

Entretanto na atividade 1, a malha era quadriculada (a superfície unitária era um quadrado) e na atividade 2, a malha é isométrica (a superfície unitária era um triângulo equilátero); em algumas figuras basta mover a superfície unitária, em outras (como o octógono da atividade 2) é preciso utilizar a reflexão e a rotação da superfície unitária para poder realizar o ladrilhamento efetivo.

O quadro 12 apresenta uma sequência de passos possíveis de resolução que os discentes do ensino superior podem adotar para obter o resultado.

Quadro 12- Situação de medição de área



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

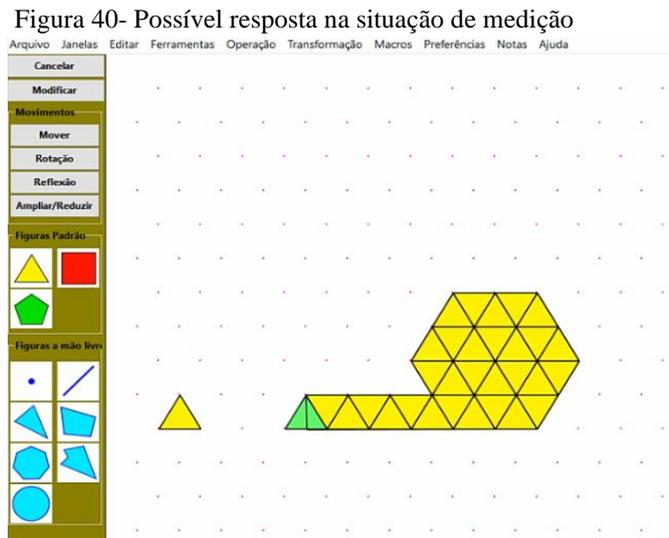
Após esses procedimentos, a contagem do total de ladrilhos utilizados para recobrir a superfície K permitiria aos licenciandos concluir que a área de K é $(30,5 \triangle)$.

Uma ferramenta possível para os participantes utilizarem é o **Segmentos** para repartir a superfície unitária (triângulo equilátero) ou para produzir superfícies unitárias de mesmo formato.

➤ Possíveis respostas incorretas

Uma resposta que pode emergir pelos licenciandos de maneira equivocada se trata de considerar que a área não pode ser representada por números decimais, fracionários, etc. Nessa atividade, esse esquema pode surgir e os licenciandos considerarem que ao invés da medida da superfície K ser expressa por $30,5 \triangle$, resposta esperada e correta, seja $30 \triangle$ ou $31 \triangle$.

Ao realizar alguns desses esquemas, consideramos que a superfície unitária na cor verde pode ser ou não considerada na contagem. Caso a mesma tenha sido contada completamente, a superfície K assume a medida de 31 triângulos equiláteros, e se for desconsiderada, são 30 triângulos equiláteros.



Fonte: Elaborado pelo autor

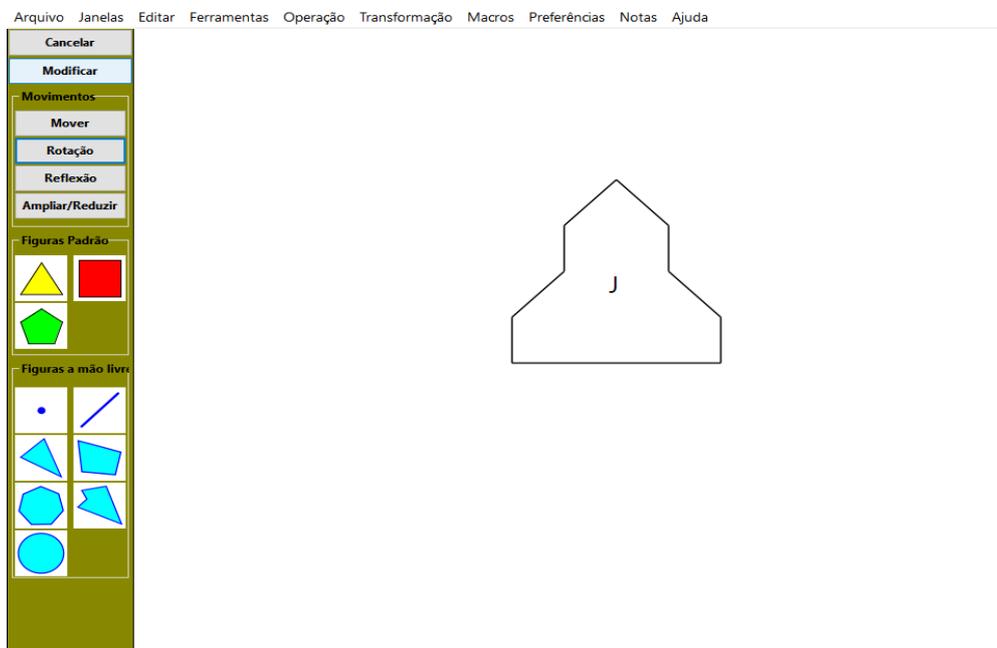
O uso das ferramentas do *software* que integrariam esses EAI seria auxiliados pela “Malha isométrica”, “Duplicar”, “Reflexão” e “Mover”. Destacamos que essas estratégias são as mesmas que conduzem os participantes ao acerto, entretanto o que induziria ao erro nessa atividade se trata da fragilidade referentes ao conhecimento da medição de área, em especial a técnica do ladrilhamento.

3.3.1.2.3 Atividade 3

ATIVIDADE 3

Selecione e abra o arquivo “Atividade 3.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

3 - Produzam uma superfície F, que não seja idêntica à superfície J, mas tenha área igual à de J:



➤ Expliquem como chegaram à resposta.

Essa é uma situação de produção de superfície (BALTAR, 1996). Propomos que os participantes produzissem uma superfície F com a mesma área que o eneágono dado (superfície J). Pesquisas anteriores (BALTAR, 1996; FERREIRA, 2010; SILVA, 2016) destacam que atividades desse tipo podem admitir diversas respostas corretas, obtidas por meio de resoluções de ênfase geométrica ou numérica. Assim, mostram que é possível representar uma mesma área por meio de distintos objetos geométricos (superfícies).

A noção de que superfícies diferentes podem ter a mesma área contribui para o entendimento da área enquanto grandeza geométrica, por meio da noção da igualdade de área. Ainda, permite a compreensão que a área não está associada ao formato da superfície.

Essa atividade pretendeu investigar os procedimentos matemáticos e as ferramentas do *software* mobilizadas pelos licenciandos para produzir uma superfície F, com a mesma área da superfície J.

➤ **Possíveis respostas e acertos**

Expressamos no quadro 13 uma possível resolução correta, dentre várias, que podem ser adotadas pelos licenciandos em matemática ao se apoiarem em procedimentos geométricos: duplicar J e aplicar sobre essa superfície a decomposição, seguida pela recomposição de suas partes em posições distintas, assim produzindo uma superfície diferente, mas com a mesma área que J. Para isso, as ferramentas que possibilitariam aos participantes obter respostas corretas seriam **Dividir**, **Decompor**, **Reflexão** ou **Rotação**, **Fundir**, **Mover**, **Colorir Fundo**²⁰ e **Nomear**.

Por meio da função **Dividir**, os participantes optariam pelo total de partes em que desejariam fragmentar o objeto geométrico, e com o **Decompor** as dissociavam. A alteração das posições das partes da superfície seria mediada pelo uso da **Rotação** ou **Reflexão** a partir de um ponto ou eixo possibilita essa variação.

Com a função **Mover** as superfícies seriam deslocadas no ambiente do programa, e com o uso do **Fundir** tentariam uni-las caso os lados a serem recompostos coincidissem. Por fim, a intitulação se dá a partir do **Nomear**. Essas sequências de passos estão expostas no quadro 13.

²⁰Para diferenciar a superfície produzida

Quadro 13- Procedimentos geométricos para produção de superfícies

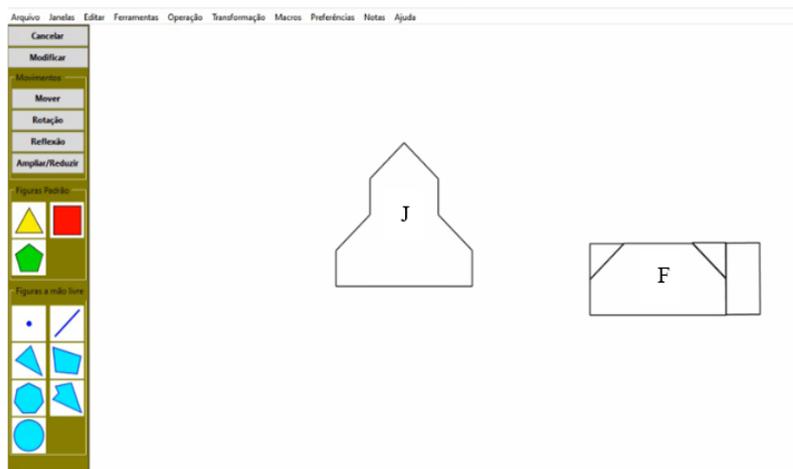
Sequência de passos	
1	Superfície J
2	Duplicação e decomposição da superfície J
3	Reflexão em uma das partes da superfície
4	Recomposição das partes da superfície inicial, e produção da superfície F. Superfícies J e F com mesma área

Fonte: Elaborado pelo autor

As informações expostas no quadro 13 destacam um EAI possível para a produção da superfície F, de mesma área que J. Entendemos que a superfície F poderia ter outros formatos, dependendo a da quantidade de partes em que J fosse decomposta ou da posição das partes a serem fundidas para criar a nova superfície.

Considerando as sequências de passos descritos no quadro 13, expomos, ainda, outro formato que a superfície F poderia adotar ao se decompor a superfície J, em quatro partes, como podemos verificar na figura 41.

Figura 41- Produção de superfície por procedimentos geométricos



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Além dos procedimentos geométricos para as produções de superfícies, temos a abordagem numérica. Dentre os procedimentos numéricos destacamos a técnica do ladrilhamento, para a qual a princípio, é necessário a medição da superfície dada com o intuito de obter o par (número, unidade de medida), e em seguida produzir com essas mesmas superfícies unitárias uma nova superfície.

Para responder essa atividade os participantes deveriam ativar a **Malha quadriculada**, tomar o **Triângulo isósceles retângulo (Figuras Padrão ou Figuras a mão livre)** como superfície unitária para ladrilhar o objeto geométrico (superfície J). Ao realizar esses procedimentos, as ferramentas que dariam suporte aos participantes seriam **Duplicar**, que disponibilizaria uma maior quantidade de ladrilhos para preencher a superfície J, a **Malha quadriculada** que influenciaria na escolha da superfície unitária e não permitiria sobreposições de ladrilhos, **Mover** que possibilitaria o deslocamento dos ladrilhos na janela do programa, e **Reflexão** ou **Rotação** para alterar a posição dos ladrilhos.

Esperamos, nesse contexto, que o par (número, unidade de medida) obtido pelos participantes, após o ladrilhamento da superfície J, seja 20 triângulos isósceles. Apoiados por essas informações, inferimos que os participantes produziram superfícies com formatos diferentes da inicial, com o mesmo total de ladrilhos idênticos (triângulo isósceles e retângulo).

O quadro 14 apresenta uma possível resposta correta que pode surgir com ênfase na perspectiva numérica.

Quadro 14- Produção de superfícies por meio de procedimentos numéricos

Sequência de passos	
1	Superfície J
2	Ativação da Malha quadriculada e escolha da superfície unitária
3	Ladrilhamento da superfície J e obtenção do par (20 )
4	Produção da superfície F, com a mesma medida de J, mas com formato distinto

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

No passo 3, observamos que a área da superfície J é de 20 . Assim sendo, as superfícies a serem produzidas pelos licenciandos devem ter mesmo par, 20 . Independente do formato, as superfícies produzidas com 20 superfícies unitárias terão a mesma área que a superfície J. A superfície produzida no passo 4 do quadro 14 é apenas um exemplo, pois a superfície procurada poderia assumir outros formatos.

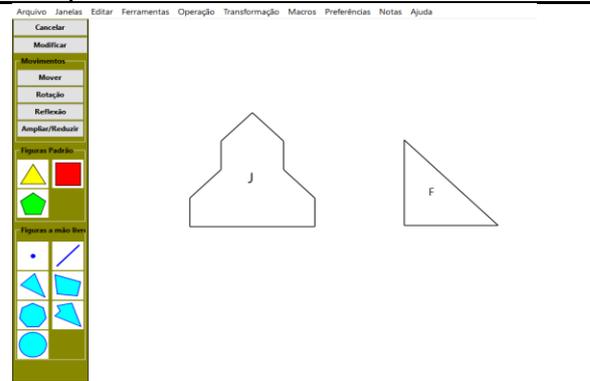
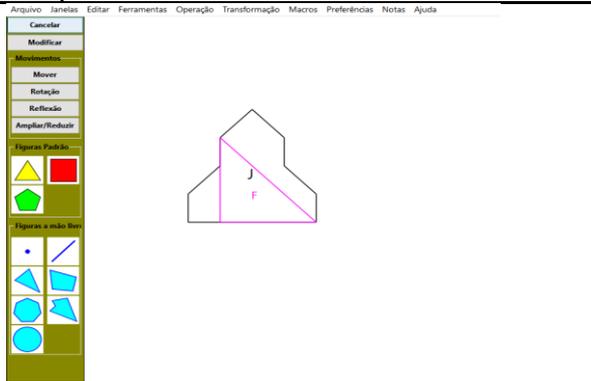
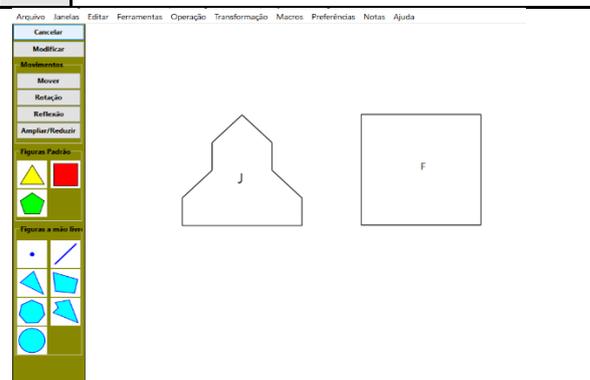
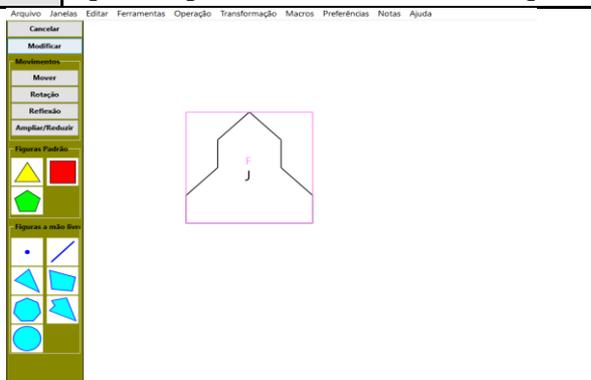
Outra estratégia para responder corretamente com a ênfase numérica seria ativar a malha quadriculada e integrar segmentos de retas para contar o total de superfícies unitárias necessárias para recobrir a superfície J. Apoiado pela medição da área da superfície J, produziria a superfície F com a mesma medida.

➤ Possíveis erros

Na tentativa de resolver essa atividade, como possíveis erros temos a produção de superfícies de área menor ou maior que J.

Ao adotar essas estratégias geométricas, os participantes poderiam se respaldar a produzir a superfície F por meio da opção **Polígonos quaisquer (Figuras a mão livre)**, intitulado-as a partir da função **Nomear**. Se optasse por arrastar, sobrepor ou incluir superfícies utilizariam a ferramenta **Mover** do *software*. Essas ideias estão expressas por meio do quadro 15.

Quadro 15- Esquemas que podem induzir ao erro nas produções de superfícies

Sequência de passos			
1	Superfície F com área menor que J	1.1	Validação, por meio da sobreposição, que a superfície F tem área menor que J
			
2.	Superfície F com área maior que J	2.1	Validação, por meio da sobreposição, que a superfície F tem área maior que J
			

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Nas atividades sobre produção de superfícies outras ideias que podem induzir os participantes ao erro se trata de não distinguir a noção de área e superfície, concebendo aspectos de concepção geométrica, ou considerar o perímetro para produzir a superfície F.

Quanto às respostas incorretas baseadas em aspectos numéricos temos que os participantes podem produzir as superfícies não considerando o par (número, unidade de medida) da superfície J, usando, por exemplo, unidades diferentes e levando em consideração apenas a medida (valor numérico).

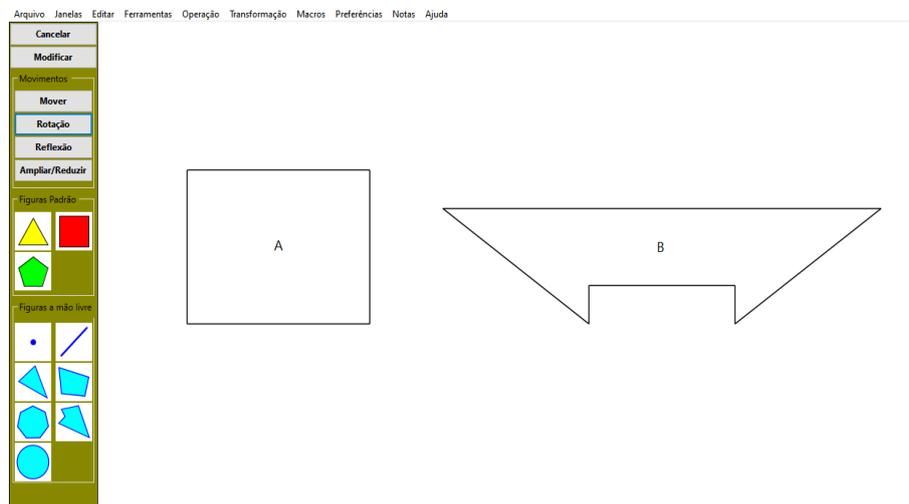
3.3.1.2.4 Atividade 4

ATIVIDADE 4

Selecione e abra o arquivo “Atividade 4.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

4 - Verifiquem se as superfícies A e B possuem áreas iguais ou diferentes.

Caso tenham áreas diferentes, qual delas tem maior área?



➤ Expliquem como chegaram a essa conclusão.

Esta atividade se enquadra como uma situação de comparação de áreas de figuras planas. Seu intuito é o de privilegiar as estratégias baseadas em conhecimentos geométricos que possibilitam a comparação de áreas. Douady e Perrin-Glorian (1989) ressaltam que a noção de “ter mesma área” baseada na decomposição e recomposição de figuras deve anteceder a medição das áreas, por meio da qual, atribuímos um número à medida da área de uma superfície em uma unidade de área dada. Essa noção de “ter mesma área” é importante para dar sentido à grandeza área.

Optamos por propor duas superfícies (A e B), com formatos diferentes, que possuem a mesma área. Escolhemos uma superfície A (retângulo) com formato muito usual nos livros didáticos, e uma superfície B (um hexágono não convexo) praticamente ausente nesses recursos. O formato da superfície B foi escolhido de modo que o ladrilhamento efetivo tanto com superfícies unitárias quadradas como com outras possibilidades de superfícies unitárias disponíveis no *software* fosse impossível.

A seguir, elencam-se maneiras corretas de verificar a igualdade das áreas e alguns erros que podem emergir no decorrer do processo resolutivo.

➤ **Procedimentos corretos de resolução**

Na busca de verificar se as superfícies A e B possuem ou não mesma área, uma estratégia possível se trataria de conservar o formato de A, e aplicar procedimentos geométricos (decomposição e recomposição) na superfície B seguida da sobreposição.

Para realizar essa decomposição, os licenciandos deveriam utilizar a ferramenta **Dividir**, que possibilitaria ao usuário selecionar o quantitativo de partes em que deseja repartir a superfície B, e a ferramenta **Decompor** que separa as partes. Quanto à recomposição seria necessário alterar as posições das partes da superfície B usando a **Reflexão** ou **Rotação**, e com a função **Fundir**, uni-las com o mesmo formato da superfície A. Para deslocar as superfícies e/ou suas partes no ambiente do *software* os estudantes teriam que utilizar a ferramenta **Mover**.

A superfície B foi elaborada de modo a instigar os licenciandos a realizarem diversas ferramentas para verificar se as superfícies comparadas tem a mesma área.

Destacamos que a comparação direta por sobreposição das superfícies A e B, visualmente, não é favorecida. Além de decompor a figura, uso da reflexão é essencial. Esses EAI para efetivação da atividade estão sintetizados no quadro 16.

Quadro 16- Sequência de passos para resolver comparação de áreas com aspectos geométricos

Sequência de passos	
1	Superfícies A e B
2	Decomposição da superfície B
3	Reflexão e recomposição das partes da superfície B
4	Comparação das áreas das superfícies A e B por meio da sobreposição

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Além dessa resolução expressa no quadro 16, outra resolução de maneira correta que os licenciandos poderiam realizar se tratava de decompor a superfície B, em partes menores, e incluí-las na superfície A. Com isso iriam considerar que:

- Se as partes decompostas da superfície B ficarem inclusas totalmente em A, sem sobreposição ou sobra, as superfícies A e B tem a mesma área;
- Se as partes da superfície B não preencherem totalmente a superfície A, a área da superfície A é maior que B; e
- Se as partes da superfície B excederem a superfície A, deve considerar que superfície B é maior que A.

Dentre essas opções desejamos que os licenciandos obtenham que as superfícies A e B possuem a mesma área, e que os EAI constituídos para a resolução da atividade sejam conduzidos pelo uso das ferramentas **Dividir**, **Decompor**, **Reflexão** e **Mover**.

De modo distinto ao da resolução anterior, nessa estratégia, os licenciandos mobilizariam uma adaptação de esquema. Primeiro se realizaria a decomposição, seguida pela recomposição, e posteriormente pela inclusão das partes da superfície B em A, ao invés da sobreposição. Essa ideia é exposta no quadro 17.

Quadro 17- Comparação de áreas por meio do procedimento da decomposição e inclusão

Sequência de passos	
1	Superfícies A e B
2	Decomposição em partes menores da superfície B
3	Alteração de posição das partes decompostas da superfície B
4	Inclusão das partes da superfície B na superfície A. Comparação das áreas das superfícies A e B

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Desejamos que os licenciandos não contemplem estratégias numéricas, e sim mobilizem conhecimentos referentes aos quadros geométricos e sua passagem para as grandezas.

Por meio dos procedimentos geométricos esperamos que os participantes verifiquem que as superfícies A e B, apesar de terem formatos distintos, possuem a mesma área. Essa atividade pode fortalecer a diferenciação entre área e superfície destacando que a área é um atributo da superfície.

➤ Possíveis erros

Os licenciandos em matemática poderiam cometer alguns erros ao tentarem resolver essa atividade por meio de estratégias numéricas. A superfície B foi pensada de modo que não pudesse ser ladrilhada efetivamente com quantidade finita das superfícies unitárias disponíveis no *software*, dificultando assim a obtenção do par (número, unidade de medida).

Elencamos a seguir algumas estratégias que podem conduzir os participantes ao erro ao usar a **Malha (isométrica ou quadriculada)**.

1- Uso da Malha isométrica

Ao se apoiar no uso da **Malha isométrica** tomando como superfície unitária o triângulo equilátero, os licenciandos poderiam se confrontar com a impossibilidade de ladrilhar efetivamente as superfícies A e B. Entretanto, na busca de preencher duas superfícies com as superfícies unitárias, poderiam atribuir um valor aproximado para as áreas de A e B, como ilustrado no quadro 18.

Quadro 18- Tentativa de comparar as áreas das superfícies A e B pelo ladrilhamento

Sequência de passos	
1	Superfícies A e B
2	Ativação da malha isométrica
3	Preenchimento por falta das superfícies
4	Preenchimento por excesso das superfícies

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Para o preenchimento por falta são necessários 36 ladrilhos no caso da superfície A e 34 para a superfície B. E no caso do preenchimento por excesso, são utilizados 55 triângulos equiláteros para ladrilhar a superfície A e 61 triângulos equiláteros para recobrir totalmente a superfície B.

Para realizar essa atividade, os participantes poderiam se apoiar na **Malha isométrica**, triângulo equilátero (**Figuras padrão** ou **Figuras a mão livre**), **Duplicar** e **Mover**. Ao

escolher a superfície unitária, os participantes deveriam multiplicá-las com o uso da função **Duplicar**, e arrastar os exemplares da superfície unitária, por meio do **Mover** para preencher as superfícies A e B. A **Malha isométrica** possibilitaria uma maior visualização para os participantes preencherem as superfícies, sem sobreposição de ladrilhos.

Como se pode observar, esses EAI provavelmente levariam os estudantes a concluir erradamente que as áreas dessas figuras são diferentes.

Um esquema similar a esse pode surgir caso os licenciandos adotassem o uso da **Malha quadriculada**, e do **Quadrado** como superfície unitária.

2- Uso da Malha quadriculada

Apoiados pelas ferramentas **Malha quadriculada**, **Quadrado (Figuras padrão)**, **Duplicar** e **Mover**, os participantes conseguiriam ladrilhar efetivamente a superfície A. Quanto à superfície B, o seu preenchimento com exemplares da superfície unitária seria por falta ou por excesso, como mostra o quadro 19.

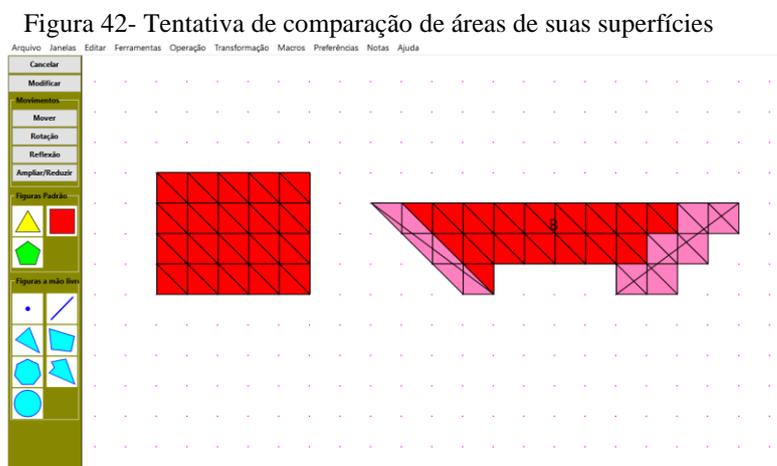
Quadro 19- Tentativa de comparação de áreas por meio do ladrilhamento efetivo

Sequência de passos	
1	Superfícies A e B
2	Ativação da Malha quadriculada
3	Ladrilhamento efetivo da superfície A e preenchimento por falta da superfície B
4	Ladrilhamento efetivo da superfície A e preenchimento por excesso da superfície B

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Como se pode observar, a área do retângulo A, tomando o quadradinho da malha como superfície unitária é de 20 quadradinhos. No ladrilhamento de B por falta, foram usados 14 exemplares do quadradinho unitário e com 26 ladrilhos foi realizado o ladrilhamento por excesso. Assim, esse EAI poderia levar os estudantes a pensar que as áreas das superfícies A e B são diferentes.

Apoiados pelas ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, outro EAI que os licenciandos poderiam mobilizar seria considerar como superfície unitária o **Triângulo retângulo isósceles (Figuras padrão)** que corresponde à metade do quadradinho da malha e se respaldar na técnica do ladrilhamento. Com isso, obteriam como resultado a figura 42.



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Nesse caso, a área do retângulo A seria de 40 superfícies unitárias. No preenchimento por falta da superfície B são usadas 31 superfícies unitárias e no preenchimento por excesso 49.

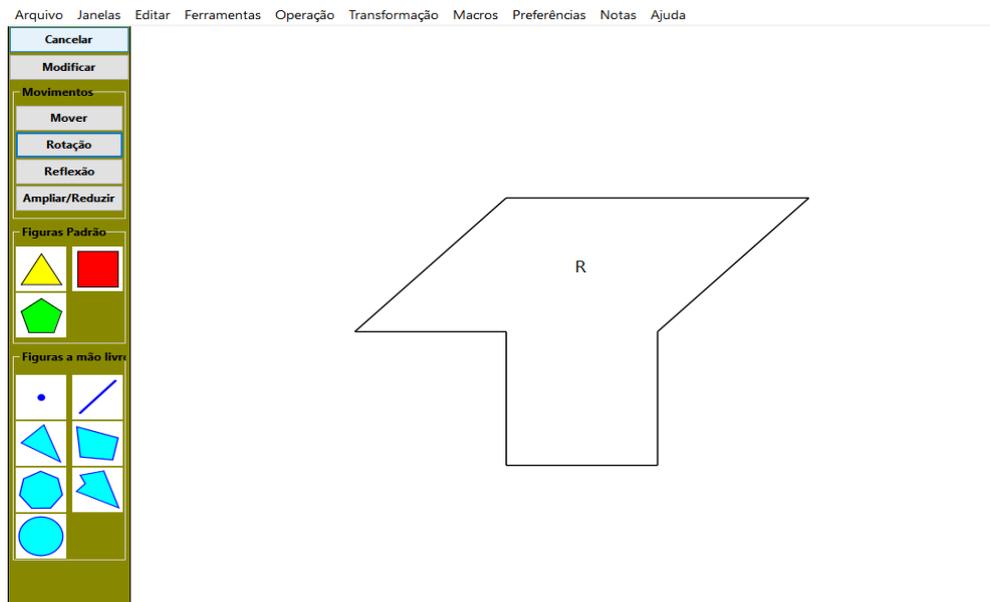
Nessa atividade, os procedimentos que se respaldam em aspectos numéricos dificultam a compreensão de que as superfícies A e B tem áreas iguais, o que se justifica por nossa intenção, aos escolher a forma da superfície B, de bloquear os procedimentos numéricos e enfatizar procedimentos geométricos de comparação de áreas.

3.3.1.2.5 Atividade 5

ATIVIDADE 5

Selecione e abra o arquivo “Atividade 5.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

5 - Observem a superfície R.



Respondam:

- A) Encontrem uma unidade de área U , de modo que a área de R seja $6U$.
- B) Encontrem uma unidade de área W , de modo que a área de R seja $54W$.
- C) Encontrem uma unidade de área V , de modo que a área de R seja $27V$.

➤ Expliquem como chegaram às respostas.

Nessa atividade está em jogo a mudança de unidade (FERREIRA, 2010). A superfície R é um heptágono não convexo, com formato pouco usual nas aulas de matemática. Além disso, o comando da atividade também rompe com o que é feito habitualmente, ou seja, ao invés de fornecer a unidade e solicitar a medida da área utilizando essa unidade, solicita que os participantes da pesquisa encontrem unidades de área U , W e V de modo que a área da

figura possa ser representada pelos pares (número, unidade de medida) como $6U$, $54W$ e $27V$, respectivamente.

Esse tipo de situação, no qual uma superfície pode ser representada por distintos pares, favorece a ideia de área enquanto grandeza porque propicia a dissociação entre área e número.

➤ Possíveis respostas e acertos

Essa atividade é composta de três itens nos quais solicitamos que os participantes encontrassem uma unidade de área U , de modo que a área de R seja $6U$; uma unidade de área W , de modo que a área de R seja $54W$; e uma unidade de área V , de modo que a área de R seja $27V$.

Item A: Esperamos que na resolução desse item os licenciandos realizem o ladrilhamento efetivo. No quadro 20 é exposta a sequência de passos, até a resolução desse item.

Quadro 20- Sequência de passos com o uso das ferramentas para ladrilhar a superfície R

Sequência de passos	
1	Ativação da Malha quadriculada para o ladrilhamento
2	Escolha da superfície unitária (U) para ladrilhar a superfície R
3	Reflexão da superfície unitária (U)
4	Ladrilhamento da superfície R com 6 exemplares da superfície unitária U

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

As ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* que dariam suporte à realização desse procedimento e obtenção do resultado correto seriam a **Malha quadriculada**, **Polígonos (Figuras a mão livre)**, **Duplicar**, **Reflexão** e **Mover**.

A partir da ativação da **Malha quadriculada**, os participantes refletiriam sobre o formato da superfície unitária para ladrilhar a superfície R, produzindo-as por meio do conjunto de **Figuras a mão livre**, e podendo alterar sua posição com a função **Reflexão**. Escolhida a superfície unitária, para a realização do ladrilhamento efetivo, os estudantes poderiam utilizar a ferramenta **Duplicar** para obter o quantitativo de ladrilhos necessários e **Mover**, sem sobreposição, para ladrilhar efetivamente a superfície R. A superfície unitária buscada é um **Triângulo retângulo isósceles** no qual o comprimento de seus catetos é de 3 cm (considerando que a distância entre dois pontos consecutivos da malha quadriculada é de 1 cm), produzido com ferramenta do conjunto de **Figuras a mão livre**.

Uma adaptação do EAI desenvolvido no item A serviria de suporte para a realização do **item B**, respaldada no uso do ladrilhamento efetivo. Nesse caso, os participantes poderiam adotar como superfície unitária o triângulo retângulo isósceles com catetos de 1 cm de comprimento disponível no conjunto de **Figuras Padrão**, conforme mostra o quadro 21.

Quadro 21- Sequência de passos para obter 54W

Sequência de passos	
1	Uso da malha quadriculada
2	Escolha da unidade de área
3	Reflexão da superfície unitária (W)
4	Ladrilhamento da superfície R com 54 W

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Quanto ao **item C**, mais uma vez, é possível que haja uma adaptação dos EAI mobilizados pelos participantes. Podemos esperar também que os estudantes percebam que 27 é a metade de 54 e portanto procurem uma superfície unitária V, cuja área é o dobro da de W.

Nos dois casos, boa parte das ferramentas do *software* utilizadas coincidiria com as usadas no Item B, mas nesse caso, a superfície unitária provavelmente seria o quadradinho elementar da malha Quadrado (**Figuras Padrão**) com 1 cm^2 de área. O quadro 22 sintetiza esses procedimentos.

Quadro 22- Sequência de passos com ênfase nos aspectos numéricos para ladrilhar a superfície R

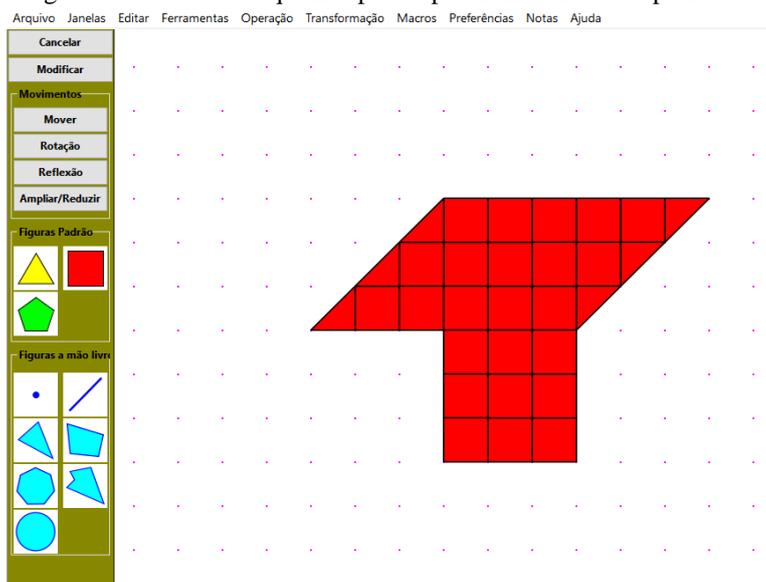
Sequência de passos	
1	Superfície R
2	Ativação da Malha quadriculada
3	Impossibilidade de ladrilhamento efetivo com a superfície unitária
4	Utilização da técnica de medição

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Como resultado, esperamos que os licenciandos percebam que embora não seja possível ladrilhar a superfície R efetivamente com o quadradinho elementar da malha, a área da superfície R, considerando V como a unidade definida por esse quadradinho é expressa pelo par (número, unidade) 27V.

A figura 43 ilustra o preenchimento de R com 24 quadradinhos e seis metades de quadradinhos.

Figura 43- Possíveis esquemas para o preenchimento da superfície R



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Com isso, podemos visualizar que é possível expressar a área da figura tomando por unidade V aquela definida pelo quadradinho da malha como $27V$. As ferramentas que dariam suporte a realização desses EAI seriam a **Malha quadriculada**, **Triângulo isósceles** e **Quadrado (Figuras Padrão)**, **Duplicar**, **Reflexão** e **Mover**.

➤ Possíveis erros

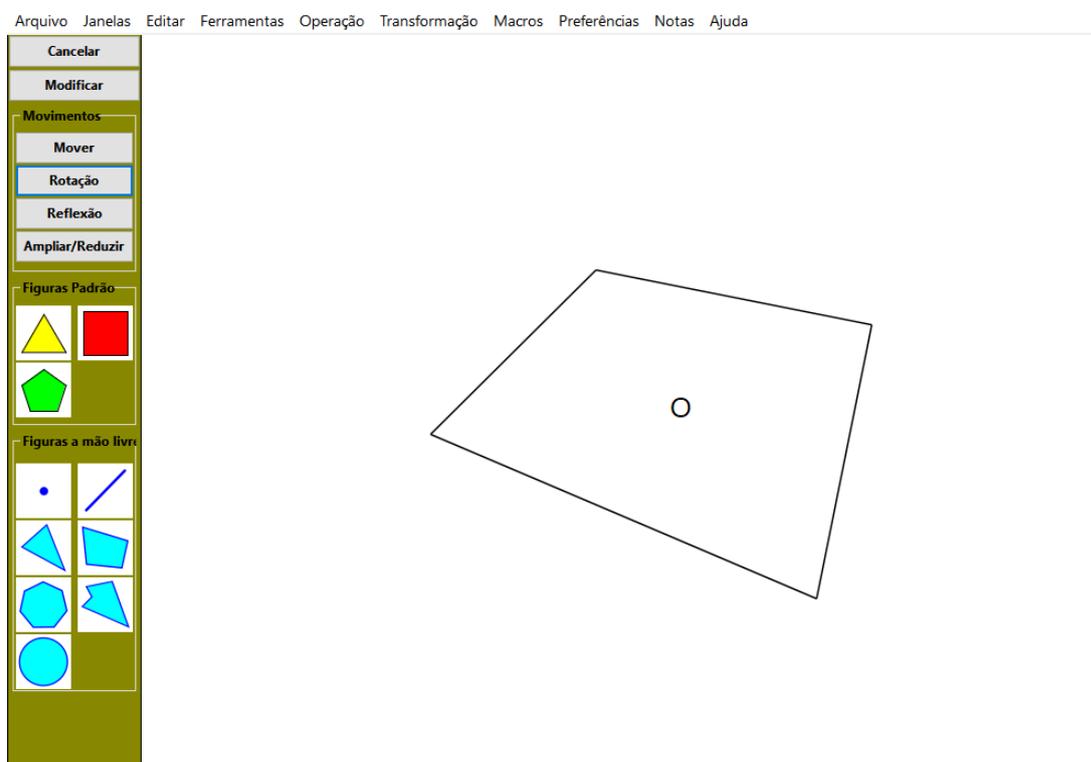
Baseados no ladrilhamento ilustrado na figura 43, os estudantes poderiam considerar que não é possível encontrar uma unidade V adequada à medição da área de R de modo que a área de R fosse $27V$, por não conseguirem ladrilhar efetivamente a figura com quantidade finita de superfícies unitárias, sem decompor a superfície unitária. Erros desse tipo foram observados na pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989).

3.3.1.2.6 Atividade 6

ATIVIDADE 6

Selecione e abra o arquivo “Atividade 6.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

6 - Produzam uma superfície S cuja área seja menor que a de O , mas não seja possível posicionar S de modo que fique totalmente contida no interior de O .



➤ Expliquem como chegaram à resposta.

Esta atividade integra a classe das situações de produção de superfície (BALTAR, 1996).

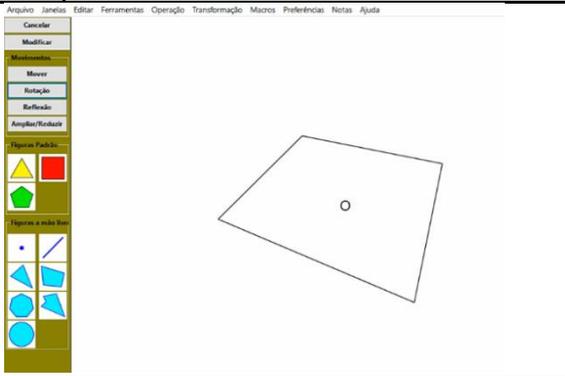
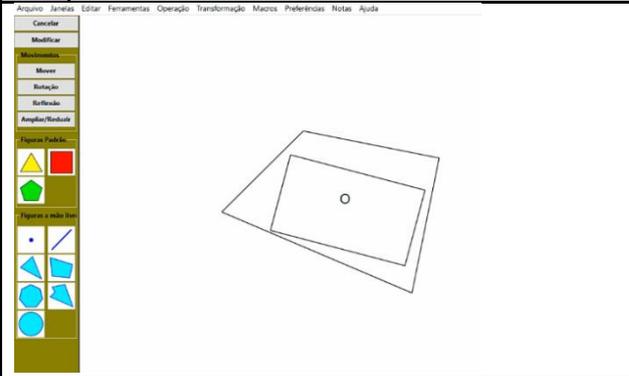
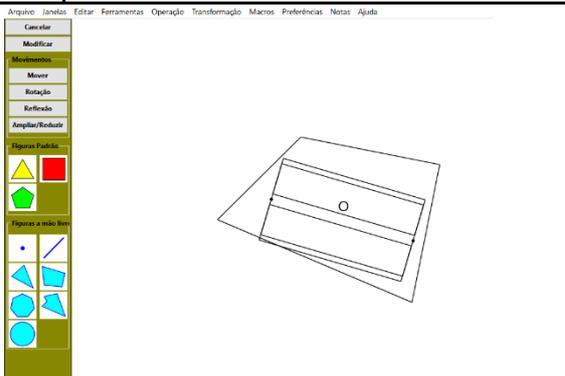
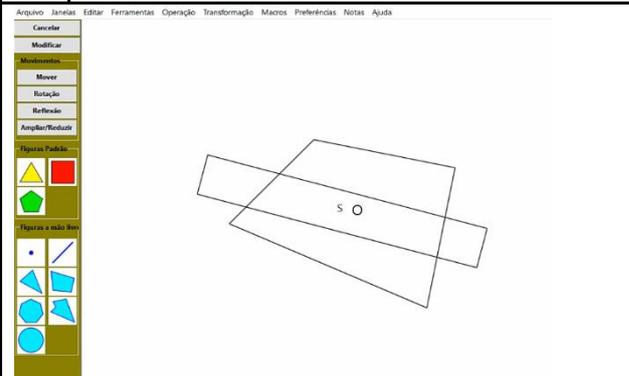
Dado um quadrilátero, figura bastante explorada no ambiente da sala de aula de matemática na educação básica, solicitamos que seja produzida uma superfície S de área menor que a de O , mas que não pudesse ser totalmente inclusa no quadrilátero inicial.

Para a resolução dessa atividade de maneira correta destacamos as estratégias de ênfase geométrica (decomposição, recomposição, inclusão e sobreposição) e bloqueamos os aspectos numéricos.

➤ **Possíveis respostas e acertos**

Para atender aos critérios propostos pela atividade, os participantes deveriam selecionar o conjunto de **Figuras a mão livre** e produzir uma figura plana no interior da superfície O. Ao estar inclusa na superfície O, os licenciandos poderiam usar a função **Dividir**, e selecionar a quantidade de partes em que desejariam reparti-la, e separá-las usando o **Decompôr**. Para alterar as posições das partes incluídas na superfície O, os participantes a posicionariam, a seu desejo, com as funções **Rotação** ou **Reflexão**, e ainda usariam a ferramenta **Fundir**, unindo-as caso os comprimentos dos lados fossem congruentes. Por fim, para identificar e distinguir as superfícies, usariam a função **Nomear**. A sequência de passos exposta no quadro 23 ilustra esse EAI.

Quadro 23- Procedimentos para obtenção da figura de área menor e não incluída na superfície O

Sequência de passos	
1	Superfície O
	
2	Produção da superfície S no interior da superfície O
	
3	Decomposição da superfície incluída S
	
4	Recomposição das partes da superfície S.
	

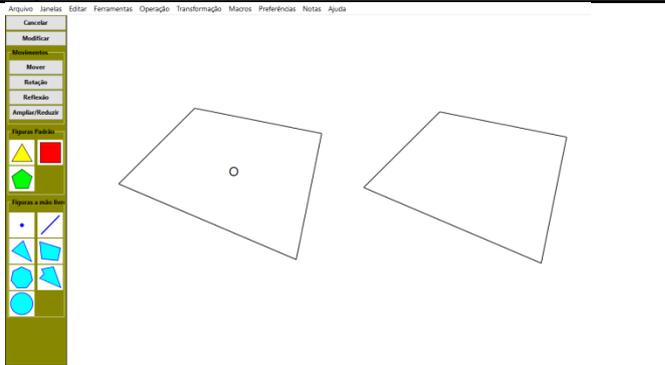
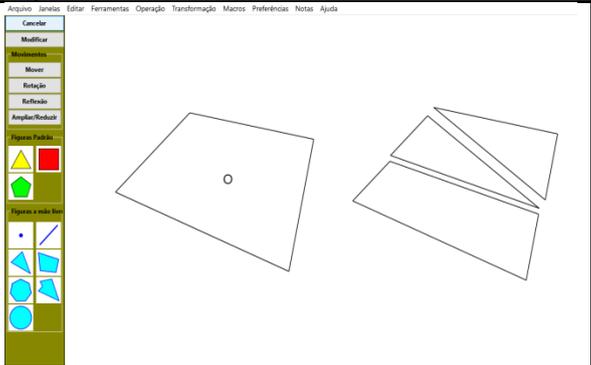
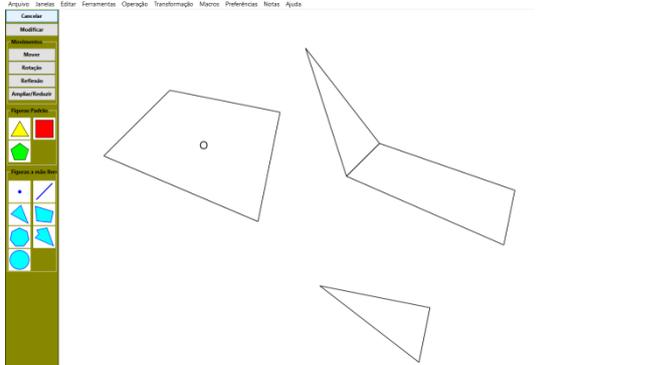
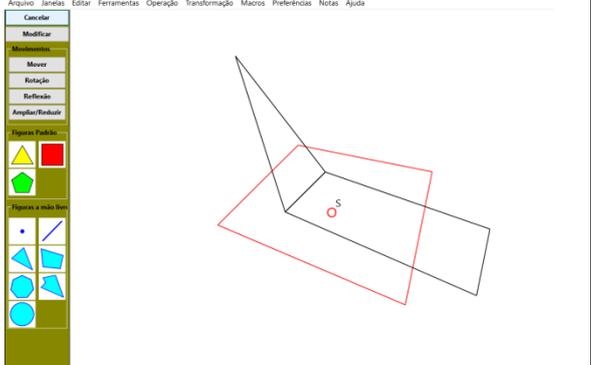
Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Destacamos que superfícies de outros formatos poderiam ser produzidas no interior do quadrilátero, assim como a decomposição poderia ser diferente. Para exemplificar uma resposta correta, escolhemos um retângulo por ser uma figura muito explorada nas aulas de matemática no ensino fundamental.

Respaldados pelas ferramentas descritas, e pela sequência de passos expostos no quadro 23, outra estratégia resolutiva correta que poderia ser mobilizada pelos licenciandos se trata de **Duplicar** a superfície O, decompô-la em três ou mais partes, e recompô-las desconsiderando alguma de suas partes. Sendo assim, a superfície S produzida pelas partes consideradas atenderia aos critérios solicitados.

Para verificar se a área da superfície S é menor que a da superfície O, os licenciandos poderiam sobrepor S em O deslocando-a por meio da função **Mover**. Essas ações estão no quadro 24.

Quadro 24- Produção de superfície de área menor e não incluída em uma superfície dada

Sequência de passos	
1	Duplicação da Superfície O
	
2	Decomposição da superfície duplicada
	
3	Produção de superfície com apenas duas partes, relegando uma da decomposição de O
	
4	Recomposição de duas partes da superfície S.
	

Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

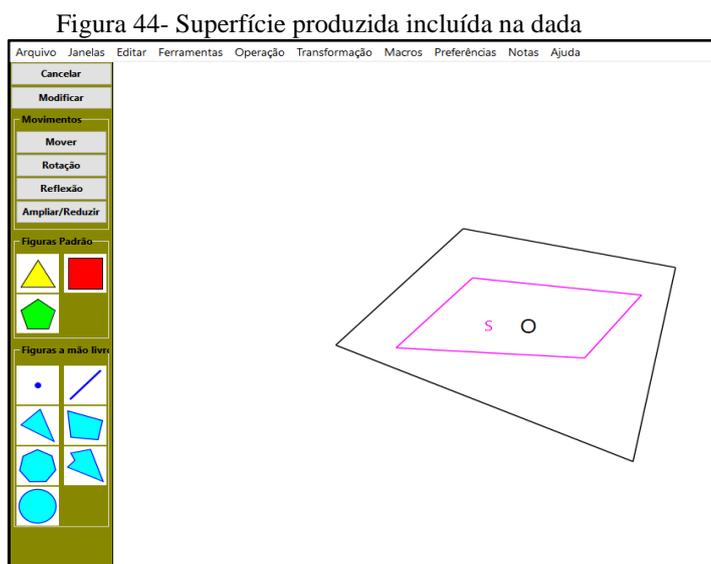
É válido ressaltar que como no procedimento anterior, a superfície S poderia ter formatos distintos.

➤ **Possíveis erros**

Para essa atividade destacamos como resoluções incorretas as superfícies produzidas de menor área que sejam inclusas na superfície O, não respeitando totalmente o critério exigido pela atividade (não inclusão).

No que concerne à utilização das ferramentas do *software*, os participantes mobilizariam a opção **Polígonos quaisquer** do conjunto de Figuras a mão livre para produzir a superfície S, no interior da superfície o, e para intitulá-la usariam o **Nomear**.

A figura 44 exemplifica essa estratégia, enfatizando como uma possível resolução incorreta pelos licenciandos.



Fonte: Elaborado pelo autor no *Apprenti Géomètre 2*

Esse tipo de resolução pode indicar a mobilização de uma concepção geométrica da área.

4 ANÁLISES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nessa seção apresentamos os resultados do Estudo Experimental discutindo-os em quatro etapas. Na primeira etapa realizamos as análises individualmente por atividade, comparando as resoluções dos participantes mediadas pelo *Apprenti Géomètre 2* com o que foi discutido na análise a priori e buscando identificar, a partir da interação dos licenciandos com o *Apprenti Géomètre 2*, indícios do processo de instrumentalização e instrumentação. Na segunda etapa à luz da TI (RABARDEL, 1995) analisamos a vivência de modo geral fazendo uma síntese das ferramentas usadas pelos participantes e da modelação de esquemas para resolver o conjunto de atividades. Na terceira etapa, analisamos as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* e elencamos limitações e possibilidades do *software* observadas no decorrer do estudo com a grandeza área. Por fim, na quarta etapa, e última, retomamos aos questionamentos da pesquisa.

4.1 Identificação, categorização e análises das estratégias resolutivas: um olhar sob as mobilizações dos licenciandos com o *Apprenti Géomètre 2*

O quadro 25, a seguir, sintetiza a descrição das atividades propostas no Estudo Experimental.

Quadro 25- Quadro síntese sobre o conjunto de atividades

Atividade	Tipo de situação	Características
1 ^a	Comparação de áreas	Identificar entre seis superfícies poligonais (um retângulo, um paralelogramo um quadrado, um octógono não convexo e dois dodecágonos não convexos) qual delas tem maior área e qual tem menor área
2 ^a	Medida de área	Determinar a medida da área de um octógono não convexo, utilizando por superfície unitária um triângulo equilátero de lados 1 cm (triângulo elementar da malha isométrica do <i>Apprenti Géomètre 2</i>).
3 ^a	Produção de superfície	Dado um eneágono não convexo, produzir uma superfície não congruente a ele, mas que tenha mesma área
4 ^a	Comparação de áreas	Dados um retângulo e um hexágono não convexo, verificar se eles têm áreas iguais ou se uma das superfícies tem área maior que a outra
5 ^a	Mudança de unidade	Encontrar unidades de área U, V e W de modo que a área de um heptágono não convexo dado possa ser expressa em função de cada uma delas
6 ^a	Produção de superfície	Produzir uma superfície de área menor que um quadrilátero não notável e que não seja inclusa nele

Fonte: Dados da pesquisa

Iniciamos pela análise individual de cada atividade, por ser a primeira interação dos participantes do Estudo com o *Apprenti Géomètre 2*. Esse primeiro olhar sobre os dados permitiu modelar esquemas em cada atividade proposta quando os licenciandos se apoiavam nas ferramentas do programa e identificar indícios dos processos de instrumentalização e instrumentação.

A depender do usuário e dos procedimentos mobilizados e executados no ambiente do *software* procuramos observar se os processos da gênese instrumental (instrumentalização e instrumentação) estavam presentes, se um deles se sobressaía em relação ao outro ou se instrumentalização e instrumentação ocorriam de maneira cíclica durante a realização das atividades.

Na resolução de uma atividade, por exemplo, se o participante já estivesse familiarizado com as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* e com as estratégias a serem adotadas, e não quisesse adaptá-las, o processo de instrumentação se sobressairia em relação à instrumentalização.

Assim, na análise dos resultados:

- Descrevemos, em diálogo com a análise a priori correspondente, as estratégias dos participantes para resolver as atividades;
- Identificamos as ferramentas do Menu AB que subsidiaram a resolução pelos licenciandos em matemática do conjunto de atividades. Para isso, analisamos como os participantes se confrontaram com os limites e possibilidades das ferramentas do *software*, que esquemas desenvolviam para realizar as atividades;
- Modelamos os esquemas a partir dos indícios da interação dos participantes com as ferramentas do *software* para resolver o conjunto de atividades;
- Analisamos, sob a ótica do modelo SAI, se houve indícios do processo de instrumentalização a partir da exploração das ferramentas do artefato (*Apprenti Géomètre 2*) pelos licenciandos, identificando suas potencialidades, atribuindo-lhes funcionalidades para produzir esquemas e obter a resposta das atividades;
- Procuramos evidenciar indícios do processo de instrumentação quando os licenciandos ao manipularem as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, apoiados pelos esquemas, conseguem resolver às atividades. Para isso, consideramos todo o processo vivenciado de manipulação no *software* realizado(s) pelo(s) licenciando(s) e descrevemos o objetivo a ser alcançado por meio das ações.

Essas análises visavam dar suporte para caracterizar a interação entre os polos, propostos pelo modelo SAI, **sujeito** (licenciandos em matemática) - **artefato** (*Apprenti Géomètre 2*) - **objeto** (área).

A seguir apresentamos nossos resultados.

4.1.1 Atividade 1

Todos os participantes acertaram essa atividade. A figura 45 mostra que as duas duplas e o estudante que realizou as atividades individualmente identificaram corretamente que entre os seis polígonos dados (L, V, Z, Y, W e T), a superfície de maior área é W e a de menor área menor é V.

Os participantes não sentiram dificuldades para resolver a atividade e os procedimentos privilegiados foram centradas na abordagem do aspecto numérico ora por meio da ideia do ladrilhamento, ora pelo uso de fórmulas, como discutido na análise a priori.

Figura 45- Respostas dos licenciandos em relação à atividade 1

Iza e Michael	Ana e Magali	Hughes
<p>Após supor um valor para a, dividimos o quadrado em 2 partes, cada uma chamada de a. Comparamos as outras figuras ao quadrado e calculamos suas áreas.</p> <p>$A_{\Delta} = 18 \text{ cm}^2$ $A_{\square} = 24 \text{ cm}^2 \rightarrow$ Menor Área $A_{\square} = 22 \text{ cm}^2 \rightarrow$ Maior Área $A_{\square} = 19 \text{ cm}^2$</p>	<p>A) A figura W terá a maior área. B) A figura V terá a menor área.</p> <p>Desenhamos quadrados dentro de cada superfície p/describê-las.</p> <p><i>de mesma área</i></p>	<p>Expliquem como chegaram às respostas.</p> <p>coloquei uma malha quadriculada e sobrepos as figuras em seus pontos daí pude ter uma ideia das dimensões e estimar sua área</p> <p>A) Qual delas tem a maior área? W B) Qual delas tem a menor área? V</p>

Fonte: Protocolos dos licenciandos em matemática

Para obter as respostas corretas, diversas estratégias foram testadas nessa atividade pelos licenciandos. Iza e Michael, por exemplo, exploraram algumas das ferramentas (**Malha isométrica**, **Mover**, **Rotacionar**, **Reflexão** e **Cancelar**) dispostas no *Apprenti Géomètre 2* para poder usá-las, e optaram pela **Malha isométrica**. Entretanto, após algumas manipulações e tentativas de sobrepor as superfícies e fazer coincidir alguns de seus pontos, os licenciandos perceberam a impossibilidade, alterando-a para a **Malha quadriculada**. Destacamos que esses momentos de interação entre os participantes com relação aos limites da **Malha**

isométrica para realizar a medição das áreas das superfícies dadas na atividade são características do processo de instrumentalização.

Apoiados pela **Malha quadriculada**, outras estratégias são destacadas pela dupla, como, por exemplo, sobrepor, decompor e recompor as partes das superfícies para verificar qual possui a maior e menor área dentro do conjunto de superfícies. Na busca de realizar esses procedimentos geométricos, ferramentas como **Decompor, Dividir, Mover, Segmentos (Figuras a mão livre), Rotação e Reflexão** foram manipuladas, e discutidas em relação ao contexto da atividade e o porquê de usá-las.

Apesar de estratégias geométricas serem refletidas pela dupla, e até usadas para sobrepor a superfície L em Y, ver figura 46, o aspecto numérico é prevalente para identificar as superfícies de maior e menor área. A seguir, os diálogos sobre os quais se apoiam nossas interpretações.

[...] **Iza:** Mas se a gente olhar dá para saber as medidas das áreas, é só contar pela malha quantos quadradinhos tem em cada figura

Michael: Bota que equivale a 1 cm [A distância entre dois pontos consecutivos da malha é de 1 cm]

Iza: Essa atividade só quer saber quem é a maior e a menor. Vamos fazer a contagem. O retângulo tem 20 cm² [Superfície L] e o quadrado tem 16 [Superfície Y]. [...].

Após encontrar a medida das áreas das superfícies L e Y, considerando que o quadradinho elementar da **Malha quadriculada** correspondia a 1 cm², os participantes adotaram outra estratégia numérica na qual utilizaram a decomposição das figuras, fórmulas e a aditividade das áreas.

Iza: Para calcular a área da figura Z, a gente faz um segmento para dividir em três partes, então temos 2 triângulos e um quadrado [Com o segmento conseguem destacar a superfície Z em 3 partes, sendo 2 triângulos e um quadrado.]

Iza: A área de dentro é 9 [Ao considerar o comprimento do lado medindo 3 cm realizam mentalmente o cálculo da área do quadrado]

Iza: Vamos calcular um dos lados do triângulo, base 3 vezes 3 de altura dá 9, dividido por dois 4,5.

Michael: Como temos dois triângulos com 4,5 somando teremos 9 mais 9 a área da figura Z é 18 cm² [Após encontrar a medida da área de Z, a dupla começa a pensar na estratégia para obter a medida da área da superfície V]

Iza: Vamos dividir V em três retângulos e aplicamos a fórmula. [Eles repartem a Superfície V em três retângulos para medir sua área]

Iza: O primeiro tem base 8, altura 1, então temos 8 cm². A área desse aqui é 2 cm², porque será 1 cm vezes 2 cm. [Aponta para o menor retângulo da repartição].

Iza: E esse aqui será 4

Michael: Isso!

Iza: Então temos $4 + 8 + 2 = 14$ cm².

Para encontrar as áreas das superfícies T e W, os participantes retornam para a estratégia usada anteriormente em Y e L. Em outras palavras, a dupla se apoia exclusivamente

na **Malha quadriculada** e faz a contagem do total de quadradinhos em cada superfície, considerando como unidade de medida que cada quadradinho correspondia a 1cm^2 .

Iza: Esse aqui a gente divide também. [**Repartem com segmentos a superfície W**]

Iza: Vamos lá! $4 + 4 + 14$

Michael: $14 + 8 = 22$

Iza: 22 cm^2

Iza: Esse aqui agora [**Referindo-se a superfície T e aplicam a ideia dos segmentos para contar quantos quadradinhos há nos retângulos**]

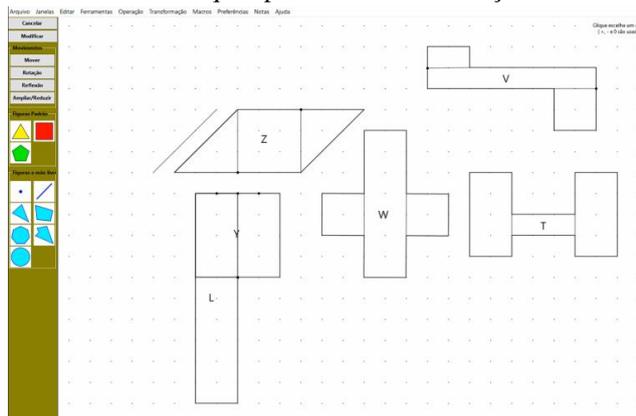
Iza: A gente demorou um ano para aprender a resolver isso. Vamos fazer igual nas outras, repartir em retângulos. [**Estratégia adotada para encontrar a medida da área de T**]

Michael: Então todos terão valor exato. Nesse temos $3 + 8 + 8 = 19$

Iza: Isso, 19 cm^2 . Então a figura de maior área é W e a menor V.

As estratégias utilizadas pelos participantes ao longo do processo resolutivo da atividade 1 no Menu AB estão sintetizadas na figura 46.

Figura 46- Procedimentos no Menu AB que apoiaram na identificação da maior e menor área



Fonte: Protocolo de Iza e Michel

Essa tela evidencia o último registro dos participantes anteriormente ao encerramento da manipulação com as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* sobre a atividade 1. Com a conclusão da atividade as ferramentas apropriadas pelos participantes ao longo do processo resolutivo foram a **Malha quadriculada**, **Mover** e **Segmentos (Figuras a mão livre)**.

De modo semelhante a Iza e Michael, a dupla 2 (Ana e Magali) após realizar o login realizou algumas manipulações nas ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*. Nesse momento, identificamos que as participantes exploraram a **barra de menu superior**, o conjunto de **Figuras Padrão** e **Figuras a mão livre**. É interessante destacar que no decorrer da exploração outras funcionalidades do *software* foram manipuladas, conforme o diálogo dos participantes.

Magali: Clico em Distância de magnetismo? [E continuam a exploração no programa]

Magali: Definir, dividir, decompor, fundir, duplicar, estender e construir um ponto no centro. [Lê os nomes de algumas ferramentas]

Ana: Tu vai decompor o que? [E continuam a exploração de *software*]

Magali: Acho que a gente deve usar essas Figuras a mão livre [E aponta para o conjunto de ferramentas]

Ana: Tem que calcular ou não precisa?

Magali: Eu acho que a gente poderia pegar as figuras que estão aqui e ir colocando-as dentro das outras e ir comparando o tamanho. O triângulo é menor que o quadrado, porque a gente pode colocá-lo dentro do quadrado.

Ana: Será? A gente também pode colocar um quadrado dentro de um triângulo.

Ana: Eu não estou sabendo mexer não no *software*.

Magali: Hum [Os licenciandos continuam a rir]

Magali: Vou aplicar a rotação. [Ao usar a função rotação a superfície muda de posição e não fica totalmente contida no ambiente do *software*, ver figura 47].

Ana: Magali, não estraga o negócio.

[Nesse momento aplica-se a reflexão sobre a superfície Z ficando sobreposta a L]

Magali: Não meu fi, não volte não. Ah!

Magali: Quero ver se ele não vem para cá. [Se referindo a voltar para seu local de origem, proposta pelos pesquisadores].

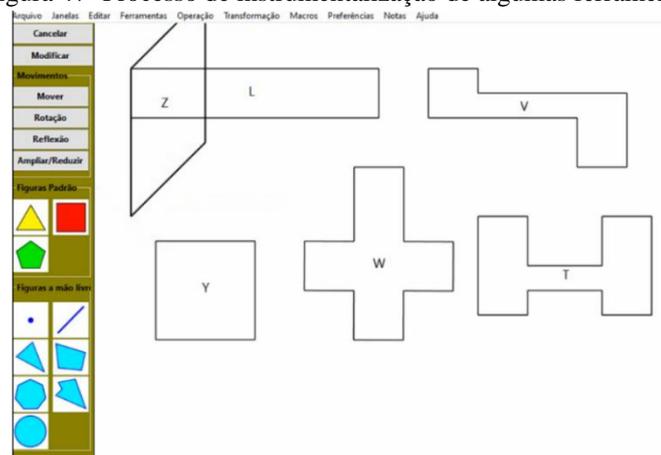
Magali: Agora ele não vem mais

Ana: Pera, Ana. Ele vai voltar.

É possível verificar, por meio do diálogo, que estratégias numéricas (o uso do cálculo) e geométricas (inclusão) são destacadas, mas não discutidas com profundidade, o que também ocorre sobre as funcionalidades das ferramentas presentes no Menu AB. Na busca de conhecê-las, os licenciandos ainda continuam a explorar outras ferramentas (**Distância de magnetismo, Definir, Fundir, Quarto de volta à esquerda e Reflexão, Quadrado e triângulo isósceles das Figuras Padrão**) do *software* para produzir estratégias e resolver a atividade.

Após manipular diversas ferramentas, a dupla opta por aplicar a **Rotação** sobre a superfície Z, deixando-a sobreposta à superfície L, como ilustra a figura 47.

Figura 47- Processo de instrumentalização de algumas ferramentas



Fonte: Protocolo de Ana e Magali

Nesse momento, em que os participantes alteram a posição da superfície Z, verificamos um processo de instrumentalização com a função **Rotacionar** que disponibiliza para o usuário a possibilidade de girar o objeto selecionado. Com diversas tentativas, as alunas conseguem reposicionar a superfície Z no Menu AB, e iniciam uma discussão abordando aspectos numéricos para resolver a atividade.

Magali: A gente tem que estipular valores. Tipo aqui tem quatro lados iguais [**E posiciona o mouse sobre a superfície Y**]

Magali: Então a gente teria que ver, por exemplo, todos esses que tem quatro lados e teriam o mesmo valor

Ana: Tu nem sabe o que estás falando

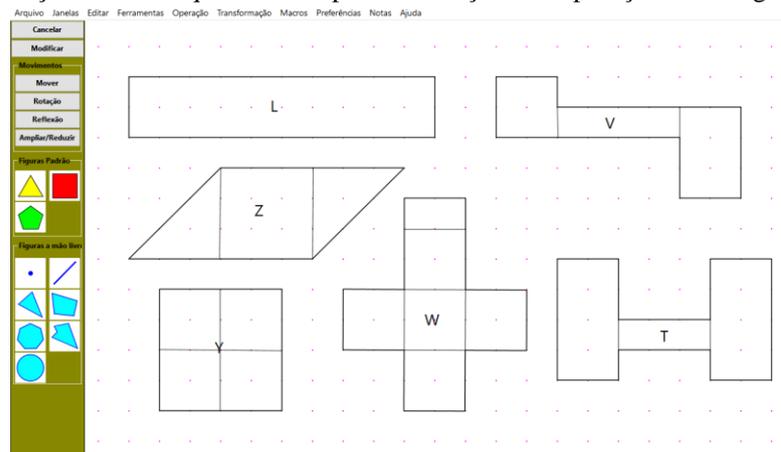
Magali: Num é não, Ana?

Ana: Eu já pensei, e é assim.

[**Momento de silêncio**]

Na busca de identificar qual das superfícies possui a maior área e qual tem a menor área, a dupla utiliza o mesmo EAI desenvolvido por Iza e Michael no qual repartem as superfícies com segmentos para posteriormente medir a área de cada parte, e somar todas, totalizando o valor da área da superfície. Apesar das estratégias serem similares, Ana e Magali só utilizaram a **Malha quadriculada** como aporte para verificar se as repartições das superfícies estavam corretas e para contar o total de ladrilhos em cada superfície. Essas estratégias estão expostas na figura 48.

Figura 48- Ativação da Malha quadriculada para verificação das repartições e contagem dos ladrilhos



Fonte: Protocolo de Ana e Magali

Ao tomar como apoio a **Malha quadriculada**, e adotar o quadradinho elementar da malha como superfície unitária, a dupla procura determinar quantos quadradinhos cabem em cada superfície, contando ou usando fórmulas, como ilustra o extrato a seguir do diálogo entre Magali e Ana:

[...] **Magali:** Está vendo, cabem quatro em cada espaço desses Ana. Então temos quatro vezes quatro dezesseis. **[Definindo que Y contém 16 quadrados]** [...]

Ana: Em cada quadrado formado que integra a superfície W irão caber quatro.

Magali: Será?

Ana: Sim. É o mesmo quadrado. **[Referindo-se que a parte a ser medida corresponde a um quadrado parte da superfície Y, já medida]**

Magali: Nesse caso, temos quatro multiplicado por cinco que é igual a vinte, mais dois. Temos vinte e dois. **[Após definirem a área de Y e W, iniciam à medida da área de T apoiados pela superfície unitária no formato de quadrado]**

Ana: Essa figura vai ter 19.

Magali: 19?

Ana: É. **[Iniciam o procedimento da medida na superfície V]**

Magali: 1, 2, 3...

Ana: Vai dar 14. **[Iniciam o procedimento da medida na superfície L]**

Magali: 1, 2, 3, 4...

Ana: Vai dar 10. **[A contagem de uma linha completa]**

Ana: Então dá 20. **[Configura-se que essa licencianda considerou o total de ladrilhos de uma linha e multiplicou por 2]**

Ana: Nesse vai sobrar **[Enfatizando que o formato da superfície Z não permitiria fazer a contagem pela superfície unitária adotada]** [...]

Magali: Se juntar essa parte com essa dá outra. Vai dar um, dois, quatro quadrados. **[Destacando os espaços vazios que não foram preenchidos por ladrilhos]**

Magali: Então vai dá 17 ou 16

[...] **Ana:** Vamos considerar o quadrado para fazer a contagem

Magali: Ok. Qual é o maior?

Ana: Vinte e dois

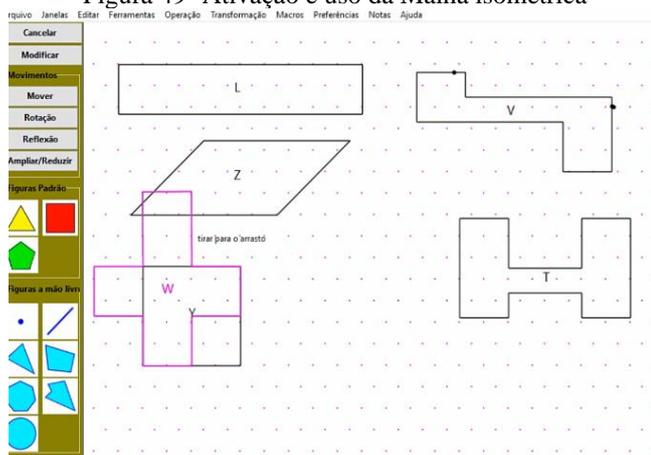
Magali: E a menor?

Ana: Vê só, Y tem 16, W tem 22, T tem 19, V tem 14, L tem 20 e se considerarmos quadrados, Z tem 18.

Apesar de Ana e Magali terem manipulado diversas ferramentas no *software*, as que possibilitaram os desenvolvimentos e aplicações dos EAI, e conseqüentemente à resolução da atividade, foram a **Malha quadriculada** e os **Segmentos (Figuras a mão livre)**. Os esquemas desenvolvidos por elas para resolver essa atividade, de modo geral, se respaldaram nas limitações e possibilidades no uso dessas duas ferramentas, portanto, ao final das ações no Menu AB houve um processo de apropriação de ambas.

Hughes, assim como os outros participantes, explora as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*. No período de familiarização com o programa verificamos que variadas ferramentas foram manipuladas, por exemplo, **Menu Superior**, **Quadrado** e **triângulos isósceles (Figuras Padrão)**, **Figuras a mão livre**, **Movimentos**, **Malha isométrica** e **Malha quadriculada**. Dentre esse conjunto, faz a opção pela **Malha isométrica** e a utiliza juntamente com o processo de sobreposição no qual sobrepõe as superfícies uma nas outras.

Figura 49- Ativação e uso da Malha isométrica

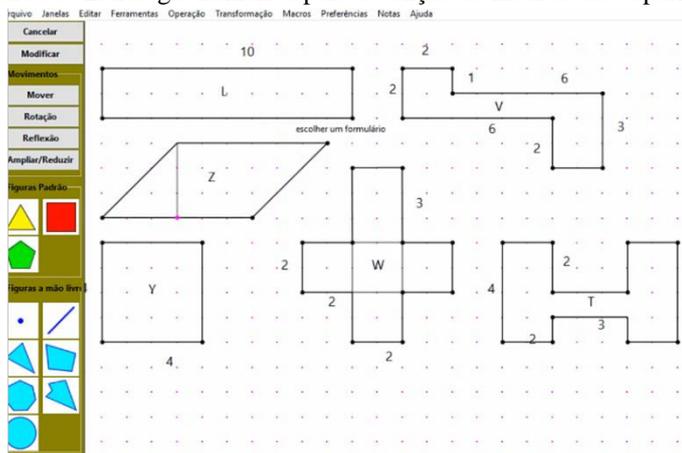


Fonte: Protocolo de Hughes

O fato das superfícies não ficarem coincidentes com os pontos da **Malha isométrica** faz o licenciando desistir da malha isométrica e ativar a **Malha quadriculada**. É válido ressaltar que essa mudança referente à **Malha (isométrica para quadriculada)** foi também usada por Iza e Michael.

Esse licenciando, diferentemente das duplas, com a ferramenta **Nomear** atribuiu valores aos comprimentos dos lados das superfícies L, V, Y, W e T para obter a medida das áreas das superfícies, auxiliados pelos dados, com o uso da fórmula. As atribuições de valores sobre as superfícies emergiram após Hughes considerar que a distância entre dois pontos consecutivos da **Malha quadriculada** correspondia a 1cm e o quadradinho elementar correspondia a 1cm^2 . Ainda podemos observar que algumas repartições sobre as superfícies, com segmentos, são realizadas para deixá-las visualmente compostas por figuras menores para assim poder aplicar sobre elas (figuras menores) o uso das fórmulas e totalizar seus somatórios para obter a área da superfície.

Figura 50- Estratégia numérica para obtenção da medida das superfícies



Fonte: Protocolo de Hughes

Ao realizar a medição das superfícies L, V, Y, W e T, com o uso das fórmulas, Hughes na tentativa de comparar as áreas das superfícies medidas com a superfície Z adota a estratégia de repartir Z, em três partes, com segmentos de retas, constituindo um quadrado e dois triângulos isósceles, e subsidiado pelo total de ladrilhos realiza a medição de sua área.

Por meio desses procedimentos, a figura 45 mostra como resultado que Hughes considerou a superfície de maior área W, e a de menor área V. Quanto às ferramentas apropriadas por Hughes destacamos o uso da **Malha quadriculada, Nomear, Mover e Segmentos (Figuras a mão livre)**.

Ao analisar todos os procedimentos utilizados pelos participantes (Ana, Hughes, Iza, Magali e Michael) para resolver à atividade 1, notamos o predomínio de procedimentos numéricos, o que converge com pesquisas anteriores (FERREIRA, 2010; PAULA, 2011; SANTOS, 2011) sobre a temática da investigação. Observamos que existiram aspectos geométricos, como, por exemplo, a sobreposição e a rotação, mas ao longo do percurso foram descartados pelos licenciandos, que priorizaram o uso da fórmula e a técnica do ladrilhamento. Essas informações podem ser compreendidas por meio do quadro 26.

Quadro 26- Quadro comparativo da atividade 1 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos

Licenciandos	Esquemas		Ferramentas		
	Adotados na resolução	Análise a priori		Suporte para responder corretamente	Análise a priori
		Aspecto geométrico	Aspecto numérico		
Ana e Magali	Aspecto numérico (2)	Decompor as superfícies, recompô-las e sobrepô-las comparando suas áreas	(1) Considerar a superfície unitária (Triângulo isósceles) para ladrilhar todas as superfícies, obter seu par, e comparar suas medidas (2) Ativar a malha quadriculada e “repartir” as superfícies integrando segmentos de retas, para o uso do cálculo mental	Malha quadriculada; Segmentos	Malha quadriculada; Mover; Duplicar; Reflexão;
Iza e Michael				Malha quadriculada; Segmentos; Mover	Figuras padrão (Triângulo isósceles); Figuras a mão livre (Triângulo isósceles; Segmentos);
Hughes				Malha quadriculada, Segmentos Nomear	Nomear; Dividir; Fundir; Decompor; Rotacionar.

Fonte: Dados da pesquisa

O quadro 26 mostra que entre os esquemas modelados na análise a priori, apenas um foi observado plenamente nas resoluções dos licenciandos: a ativação da malha quadriculada, adoção do quadradinho elementar da malha como superfície unitária, decomposição das superfícies, cálculo das áreas das partes de cada superfície e adição das áreas seguida da comparação dos valores numéricos obtidos.

Quanto ao uso do *software*, todos os participantes se apoiaram nas ferramentas (**Malha quadriculada** e **Segmentos/Figuras a mão livre**) que abarcavam uma das resoluções corretas propostas e descritas pelo pesquisador na análise a priori. Além disso, Iza e Michael utilizaram a ferramenta **Mover** e Hugues usou o **Nomear**.

Destacamos, ainda, que muitas das funcionalidades do *Apprenti Géomètre 2* apontadas na análise a priori como podendo ser utilizadas, não foram mobilizadas nos procedimentos observados.

Enfatizamos que essa associação entre “o que ser feito” interligado as “quais ferramentas usar” ao longo do processo de resolução pelos licenciandos em matemática traz indicações de que os processos de instrumentalização e instrumentação ocorreram, nessa atividade, de maneira síncrona, sem um ter prevalência sobre o outro.

Essa interligação entre sujeitos com o *software* no decorrer da resolução da atividade 1 permitiu sob o olhar do modelo SAI identificar indícios dos processos de instrumentalização e instrumentação, como destaca-se no quadro 27.

Quadro 27- Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 1

Processos da Gênese Instrumental		Participantes	Características
Instrumentalização	[S-O]	Ana e Magali	A dupla considerou apenas a ênfase numérica para resolver a atividade. A estratégia matemática predominante foi a contagem da quantidade de ladrilhos que integravam cada superfície
		Iza e Michael	Os estudantes respaldaram-se em aspectos numéricos para resolução da atividade. Para obter as respostas corretas, verificamos o uso de duas técnicas. A primeira foi conduzida pelo uso do cálculo para a obtenção das medidas das áreas. A segunda foi realizada pela contagem do total de espaçamentos (ladrilhos) que integrava cada superfície
		Hughes	
	[I-O]	Ana e Magali	Identificaram os limites e possibilidades das funcionalidades das ferramentas do <i>Apprenti Géomètre 2</i> buscando realizar corretamente a atividade. Nesse momento, as duplas apoiaram-se no uso da Malha quadriculada e Segmentos/ Figuras a mão livre
		Iza e Michael	
		Hughes	Analisa a relevância e lacunas das funções das ferramentas do programa e por meio delas busca alcançar a resolução correta. Verificamos que além das ferramentas Malha quadriculada, Segmentos (Figuras a mão livre) , a Nomear foi usada para atribuir valores a comprimentos nas superfícies.
	[S(i)-O]	Ana e Magali	Apoiados pelos procedimentos matemáticos adotados, os licenciandos exploraram ferramentas do <i>software</i> , identificando potencialidades e limites, que os auxiliassem na condução e efetivação da resolução de maneira correta.
		Iza e Michael	
		Hughes	
Instrumentação	[S-I]	Ana e Magali	Auxiliados pelas ferramentas do <i>software</i> , e procedimentos matemáticos, os licenciandos obtiveram as respostas corretas: a superfície W tem a maior área e a superfície V tem a menor área.
		Iza e Michael	
		Hughes	

Fonte: Dados da Pesquisa

Cabe destacar que essa é a primeira interação dos licenciandos com o *Apprenti Géomètre 2*, então à medida que eles manipulavam as ferramentas as associavam a esquemas e as utilizavam sobre a atividade. Observamos que a ferramenta **Malha quadriculada** se fez presente simultaneamente nas estratégias resolutivas de todos os participantes. Embora esse recurso do *software* tenha sido muito usual verificamos que as estratégias sobre ele, a depender do usuário, foram diferentes.

Por meio das informações expostas, consideramos que os esquemas e as ações produzidas pelos licenciandos em matemática sobre a atividade 1 podem ser compreendidas pelas modelizações expressas no quadro 28.

Quadro 28- Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 1

Atividade 1	
Ana e Magali	Ativar a Malha quadriculada para integrar segmentos de retas nas superfícies, destacando-as em figuras menores, para obter a medida da área de cada superfície pela contagem do total de ladrilhos.
Iza e Michael	Calcular a área de cada superfície, integrando segmentos de retas, repartindo-as em partes menores, apoiado com o uso da Malha quadriculada , para usar fórmulas sobre as menores partes e somar todos os valores obtendo a área de cada superfície.
Hughes	Ativar a Malha quadriculada para sobrepor as diversas superfícies sobre seus pontos e estimar a medida da área de cada superfície, identificando quais possuem a maior e a menor área.

Fonte: Dados da pesquisa

É perceptível que as modelizações referentes a atividade 1 se assemelham por causa das estratégias resolutivas adotadas pelos licenciandos. A **Malha quadriculada**, por exemplo, é o recurso existente no decorrer de todas as estratégias apoiadas dos participantes da pesquisa.

4.1.2 Atividade 2

Como foi exposto na análise a priori, dada a superfície unitária (\triangle), os participantes poderiam recobrir a superfície K , com exemplares da superfície unitária e concluir que a sua área seria $30,5 \triangle$. A expectativa de mobilização de um procedimento numérico apoiado

no ladrilhamento, com procedimentos geométricos (decomposição, recomposição, etc.) incorporados nos esquemas foi confirmada nas resoluções dos alunos.

A dupla (Ana e Magali) e Hughes responderam corretamente o que foi solicitado, enquanto a outra dupla (Iza e Michael) deu uma resposta incorreta.

A mobilização do ladrilhamento fica explícita no trecho do diálogo entre Ana e Magali:

Ana: Qual a medida de área da superfície K, considerando a unidade definida pelo triângulo ? [**Lê o que solicita à atividade 2**]
Magali: Então a gente vai considerar esse triângulo e sair contando?
Ana: É [...]
Magali: A gente vai sair colocando o triângulo dentro, né?
Ana: Hurum

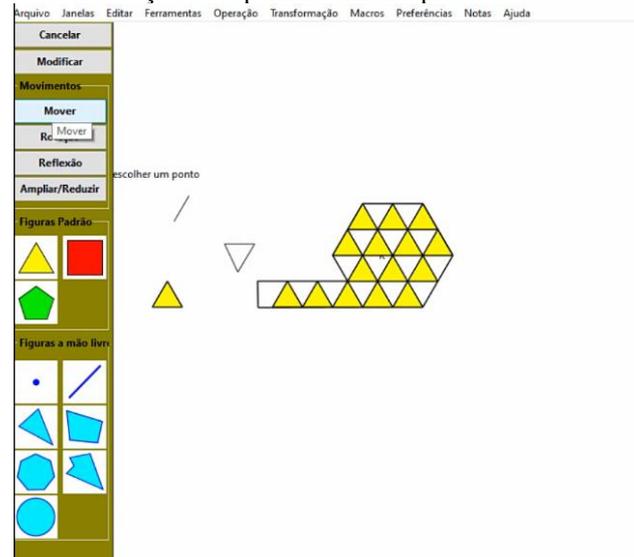
Para realizar o ladrilhamento, as participantes exploraram o Menu AB em busca das ferramentas adequadas e adotaram **Duplicar**, **Segmentos** e **Mover**.

Com a ferramenta **Duplicar** reproduziram a superfície unitária () e iniciaram a técnica do ladrilhamento. Entretanto, para preencher totalmente a superfície K era necessário alterar a posição da superfície unitária. Sobre isso, dialogam.

Ana: Tem como virar? [**Referindo-se à superfície unitária (triângulo equilátero)**]
Magali: A gente só pode usar esse triângulo que ele deu.
Ana: Eu só quero saber como modifica isso aqui. O resto eu faço [**Referindo-se à posição do triângulo**].
Magali: Como é que vai modificar isso aqui?
Ana: É isso que eu quero saber
Magali: Modificar, lá em cima você já tentou?
Ana: Já
Magali: Não muda não, Ana.

Na tentativa de alterar a posição da superfície unitária (Triângulo equilátero) a ferramenta **Modificar** foi manipulada, mas as estudantes não conseguiram se instrumentalizar com suas funcionalidades. A partir disso, buscaram outra estratégia para produzir no Menu AB um triângulo equilátero congruente à superfície unitária () , mas posicionado de outro modo () , para preencher a superfície K. Esse percurso pode ser compreendido na figura 51.

Figura 51- Produção de superfície unitária para o ladrilhamento de K



Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

A dupla, apoiada pela superfície produzida, ladrilha a superfície K e destaca que sua medida é $30,5 \triangle$. O diálogo, a seguir, apresenta a estratégia realizada pelos participantes.

Ana: Quantos triângulos tem?

Ana: 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, e sobra um pouquinho.

Magali: Então arredondamos e colocamos 30,5.

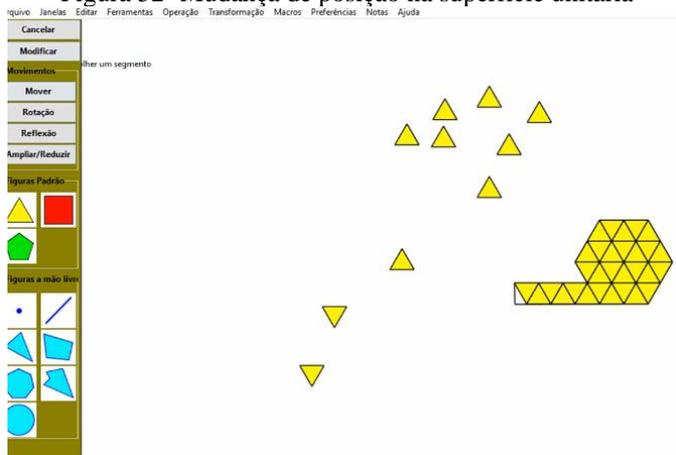
Ana: Qual a medida de área da superfície K, considerando a unidade definida pelo triângulo \triangle ? São $30,5 \triangle$.

Como esperado, os participantes expressaram a medida da área da superfície K por números decimais. Quanto ao uso das ferramentas, as licenciandas utilizaram as funcionalidades de **Duplicar**, **Segmentos** e **Mover** para a resolução da atividade. A produção da superfície ocorreu a partir da opção **Segmentos (Figuras a mão livre)**.

Assim como essa dupla, Hughes iniciou a resolução da atividade no Menu AB pela manipulação em algumas ferramentas. Um dos primeiros procedimentos adotados por ele foi o de **Duplicar** a superfície unitária e arrastá-las, por meio do **Mover**, integrando-as na superfície K.

Hughes verifica a necessidade de alterar a posição da superfície unitária, e com isso aplica a **Reflexão**. A partir da mudança de posição multiplica-se o total de ladrilhos com o **Duplicar** e tenta preencher todos os espaços triangulares que faltavam na superfície K. Os devidos procedimentos estão contidos na figura 52.

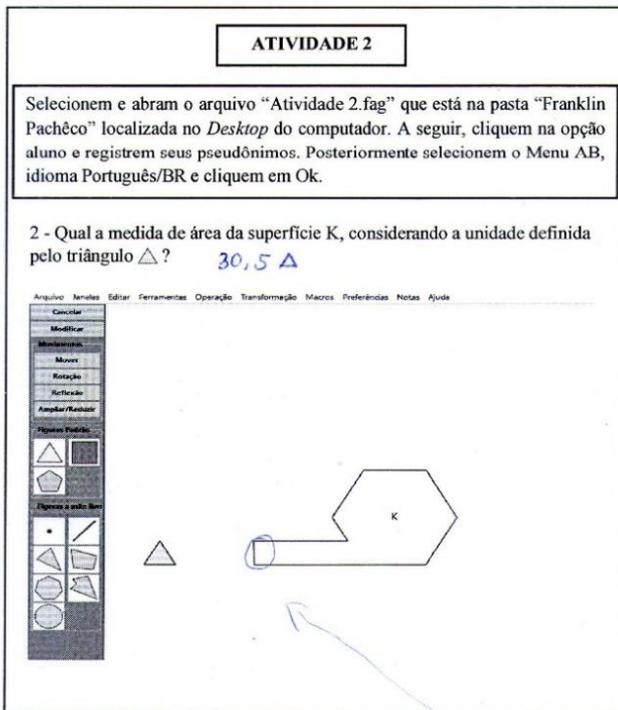
Figura 52- Mudança de posição na superfície unitária



Fonte: Protocolo de resolução de Hughes

Como esperado, Hughes não preenche totalmente a superfície K com os exemplares da superfície unitária. Ele conta a quantidade de ladrilhos (triângulos equiláteros) obtendo 30 e considera que a parte da superfície K, sem estar preenchida, corresponde à metade de uma unidade de área, como mostra sua explicação na figura 53.

Figura 53- Explicação de Hughes para a resposta da atividade 2



Expliquem como chegaram à resposta.

Duplicatei os triângulos e montei sobre a figura.

tive problema com a extremidade nos supus que valia metade de um triângulo

Fonte: Protocolo de Hughes

A estratégia usada pela dupla Iza e Michael também foi respaldada na ideia do ladrilhamento como mostra a seguinte interação verbal.

Iza: Qual a medida de área da superfície K, considerando a unidade definida pelo triângulo  ?

Iza: Entendes?

Michael: Espera aí. Acredito que preenchendo conseguimos a resposta. [**Começam a ladrilhar a superfície K, com a dada superfície unitária**]

Iza: Foi dado um triângulo e é para a gente saber a área desse K através da unidade de triângulo.

Michael: Começa de baixo.

Iza: Mas vai ficar faltando aqui, oh. [**E aponta para uma parte da superfície**]

Iza: Eu fiz isso, mas sobra.

Michael: Essa parte que sobra é metade do triângulo.

Iza: Hum

Michael: Se o triângulo tem um, aqui cabe a metade dele

Iza: Então vamos ver como a gente preenche K [**Exploram o software, e adotam a ferramenta Duplicar**]

Iza: Eu já escolhi e não vai [**A participante não consegue duplicar o triângulo**]

Michael: Mantém pressionado o botão [**Conseguem duplicar**]

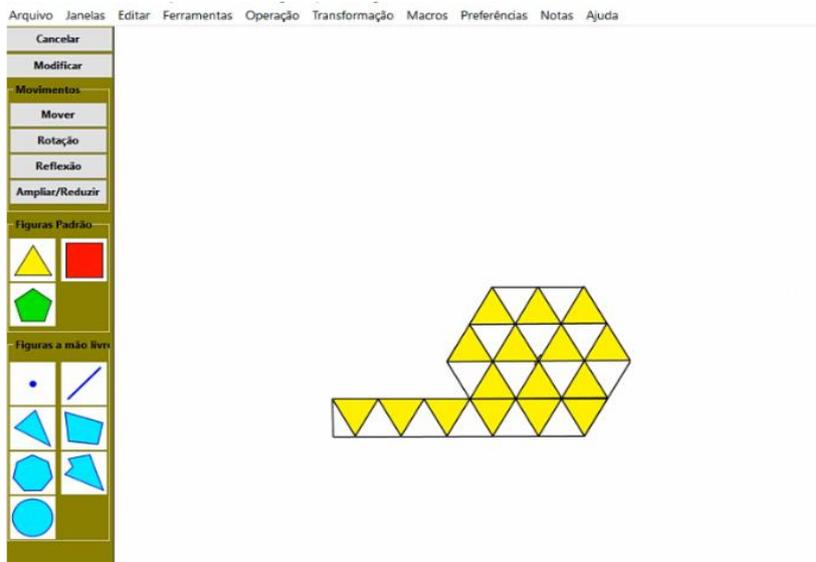
Michael: Dá para botar um entre eles, oh. Pronto, agora vai duplicando enchendo K todinho. [**Estratégia de ladrilhamento**]

Iza: Para mudar a posição? Vamos de rotacionar. [**Ao aplicar rotacionar, a posição da unidade de área é alterada. Os participantes a duplicam e integram em K**]

Michael: Está perfeito!

Iza e Michael utilizaram apenas as ferramentas **Duplicar** e **Rotacionar** do *software*, apropriando-se de ambas ao longo do processo resolutivo. Para alcançar o resultado, a dupla não realiza totalmente o preenchimento da superfície K, ver figura 54.

Figura 54- Preenchimento parcial da superfície K



Fonte: Protocolo de resolução de Iza e Michael

Como resultado dessa atividade, Iza e Michael respondem que a medida da área da superfície K é de 29,5▲. A figura 55 mostra explicação dos licenciandos em relação ao resultado da atividade 2.

Figura 55- Explicação dos licenciandos sobre a resolução da atividade 2

Empilhando os triângulos equilateros um sobre o outro, identificamos 29,5 triângulos sobre a superfície K.

Fonte: Protocolo de resolução de Iza e Michael

Analisando todos os procedimentos dos participantes, apesar do erro de contagem cometido por Iza e Michael, apesar da superfície unitária triangular ser menos frequente que a quadrada e do formato da superfície a ser medida também não ser usual, os participantes resolveram adequadamente a atividade de medida de área por meio do ladrilhamento, utilizando as ferramentas esperadas como discutido na análise a priori

O quadro 29 a seguir sintetiza as estratégias e ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* que os participantes mobilizaram para responder a atividade 2.

Quadro 29- Quadro comparativo da atividade 2 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos

Licenciandos	Esquemas			Ferramentas	
	Adotados na resolução	Análise a priori		Suporte para responder corretamente	Análise a priori
		Aspecto geométrico	Aspecto numérico		
Ana e Magali	Aspecto numérico (1)	Por ser uma atividade de natureza numérica o foco principal não é geométrico	(1)Ladrilhar a superfície K para obter a medida de sua	Mover; Duplicar; Segmentos; Reflexão;	Malha isométrica; Duplicar; Reflexão; Mover; Segmentos; Rotacionar
Iza e Michael	Aspecto numérico (1)			Duplicar; Rotacionar	
Hughes	Aspecto numérico (1)			Duplicar; Mover; Reflexão;	

Fonte: Dados da pesquisa

Pode-se observar que o uso da malha isométrica, previsto na análise a priori, não foi observado nas ações de nenhum dos participantes.

Ao verificarmos as ações dos participantes sobre o artefato (*Apprenti Géomètre 2*), ao longo do processo resolutivo nessa situação de medida de área, sob a ótica do modelo SAI, identificamos interligações entre os polos S-O-I. Os resultados que estão expressos no quadro 30 destacam que houve um processo de instrumentalização e instrumentação pelos participantes da pesquisa.

As identificações das interligações entre os polos sujeito (S) – instrumento (I)– objeto matemático (O), que integram o processo da Gênese Instrumental, no decorrer da atividade ocorreram de maneira síncrona.

Quadro 30- Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 2

Processos da Gênese Instrumental		Participantes	Características
Instrumentalização	[S-O]	Ana e Magali	Os licenciandos em matemática abordaram a técnica do ladrilhamento, respaldando-se na contagem do total de ladrilhos que integravam a superfície K. Os participantes obtiveram que a área da superfície K pode ser representada pelo par 30,5 triângulos.
		Hughes	
		Iza e Michael	
	[I-O]	Ana e Magali	As ferramentas Mover e Reflexão propiciaram aos licenciandos alcançarem a resolução correta, sendo, portanto, recursos úteis à resolução da atividade.
		Iza e Michael	
		Hughes	
	[S(i)-O]	Ana e Magali	Os esquemas mobilizados pelos licenciandos apoiados por meio das ferramentas do <i>Apprenti Géomètre 2</i> propiciaram a resolução da atividade de maneira correta.
		Iza e Michael	
		Hughes	
Instrumentação	[S-I]	Ana e Magali	Os licenciandos realizaram os procedimentos matemáticos que almejavam por meio das ferramentas no ambiente do <i>software</i> . O <i>Apprenti Géomètre 2</i> mostrou-se útil para resolver a proposta da atividade.
		Iza e Michael	
		Hughes	

Fonte: Dados da pesquisa

Com base nas ações dos participantes (uso das ferramentas do *software*, diálogos entre colegas da dupla, resposta da atividade) modelizamos os esquemas desenvolvidos no Menu AB, como consta no quadro 31.

Quadro 31- Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 2

Atividade 2	
Ana e Magali	Considerar o formato da superfície unitária (Triângulo equilátero) para medir a superfície K e obter o par (número, unidade de medida)
Iza e Michael	Tentar preencher a superfície K com um número finito de superfícies unitárias  e considerar os espaços vazios, de mesmo formato e posições distintas, como ladrilhos.
Hughes	Preencher a superfície K com exemplares da superfície unitária () para expressar a área pelo par (número, unidade de medida)

Fonte: Dados da pesquisa

As modelizações expressas no quadro 31 ressaltam sob o olhar do pesquisador quais estratégias foram adotadas pelos participantes no decorrer de todo o processo resolutivo, independente se o resultado da atividade foi correto ou incorreto.

4.1.3 Atividade 3

Os resultados dessa atividade mostram que todos os licenciandos responderam corretamente à atividade. Para produzir uma superfície F, de mesma área e formato distinto à da superfície J, Iza e Michael (dupla 1) e Ana e Magali (dupla 2) se apoiaram na ênfase numérica, enquanto Hughes adotou ambos procedimentos (geométrico e numérico).

O quadro 32 apresenta a explicação dos participantes para a condução da produção da superfície F.

Quadro 32- Explicação da resposta dos licenciandos em matemática sobre a atividade 3

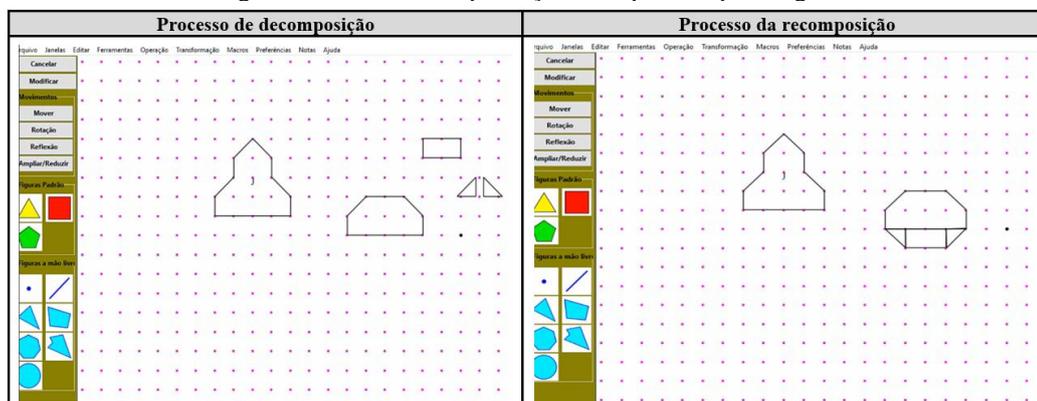
Ana e Magali	
* usamos 8 \square , 4 \triangle retângulos isósceles, isso na superfície de J. Assim, desenhamos a nossa superfície.	
Iza e Michael	Hughes
<p>Depois de discutir com minha parceira IZA utilizando a mesma unidade a calculamos se era que é igual 10cm^2 e construímos um retângulo de área 10cm^2</p>	<p>usei a malha para me ajudar e usei a operação "decompor".</p> <p>Após algumas decomposições cheguei ao octaedro</p>

Fonte: Protocolos dos participantes

Dentre todos os participantes, Hughes foi o único a se respaldar simultaneamente em técnicas geométricas e numéricas para produzir uma superfície F. Uma primeira estratégia matemática adotada foi ativar a **Malha quadriculada**, recurso com o qual o participante já estava familiarizado, para fazer a medição da área da superfície J.

Em seguida, Hughes a **duplica** e sobre ela aplica a decomposição²¹ obtendo como resultado quatro partes (pedaços). Verificamos que as duas menores partes, perpassam pelo processo da **Reflexão**, no qual suas posições são alteradas. Com a ferramenta **Mover** arrasta todas as partes e produz a superfície F. Esses procedimentos estão sintetizados na figura 56.

Figura 56- Processo de produção da superfície por Hughes



Fonte: Protocolo do processo resolutivo de Hughes

²¹Usou-se as ferramentas **Dividir** e posteriormente **Decompor**

Com a finalização dessa atividade, observamos que as ferramentas **Malha quadriculada**, **Reflexão** e **Mover** já haviam sido manipuladas por Hughes em atividades anteriores, e que a funcionalidade **Decompôr**, que possibilita separar as partes da superfície, foi apropriada quando a usaram na condução da produção da superfície F.

Ana e Magali adotaram exclusivamente procedimentos numéricos. Para produzir a superfície F, preencheram a superfície J dada com um número finito de ladrilhos de três tipos e com o mesmo quantitativo de peças, sem alterá-las, construíram a superfície F.

Nesse procedimento, a ferramenta **Triângulo (Figuras a mão livre)** foi manipulada e utilizada pelos participantes destacando um processo de instrumentalização. A interação verbal, a seguir, evidencia que os participantes exploraram as funcionalidades da ferramenta **Triângulo (Figuras a mão livre)**, que permite ao usuário produzir a partir do *mouse* figuras no ambiente do *software*, se instrumentalizaram e as distinguíram das funcionalidades das **Figuras Padrão**.

Ana: Meu Deus, Magali! Meu Deus! Não sabia que podia fazer isso. [**Referindo-se à funcionalidade do triângulo do conjunto de Figuras a mão livre**].

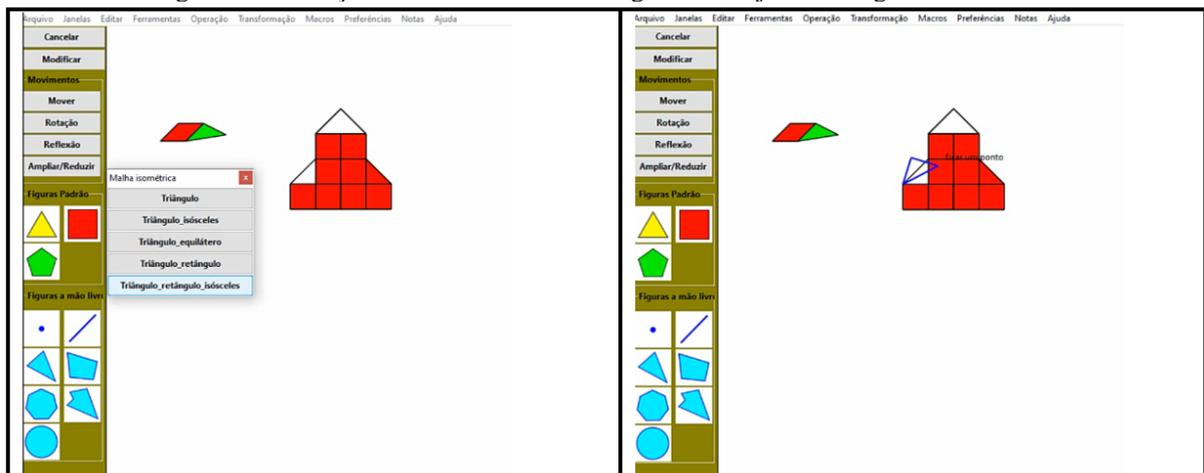
[...]

Ana: A gente vai ter que fazer outra figura, né?

Magali: Sim! [**Nesse momento, os participantes optam pelo conjunto de Figuras a mão livre, em especial nas figuras triangulares e produzem superfícies unitárias para preencher J. Esse procedimento está exposto na figura 57**]

Ana: É diferente das Figuras Padrão. Aqui a gente quem faz.

Figura 57- Interação com a ferramenta Triângulo do conjunto de Figuras a mão livre



Fonte: Protocolo de manipulação no *software* de Ana e Magali

A fala de Ana, ainda nos leva a entender que os participantes distinguíram as funcionalidades das **Figuras Padrão**, que permitem ao usuário figuras predefinidas e já usadas pelos participantes nas atividades anteriores, e das **Figuras a mão livre** no qual é o usuário quem produz a figura no ambiente do *Apprenti Géomètre 2*.

Após a finalização dos dois triângulos na superfície J, auxiliados pela **Figuras a mão livre**, as participantes utilizaram o **Mover** e arrastaram os ladrilhos que preenchiam a superfície J para outra parte do ambiente do Menu AB para produzir com formato distinto, e o mesmo total de ladrilhos, a superfície F. Com isso, emerge o seguinte diálogo.

Magali: Então temos três triângulos isósceles e oito quadrados

Ana: O que é isso, heim? [**Questiona-se Ana sobre a superfície F que Magali estava tentando produzir**]

Ana: Tem que ser um desenho, assim não pode. [**Destacando que não bastavam apenas deslocar os ladrilhos, e sim produzir uma superfície F, com o total de ladrilhos**]

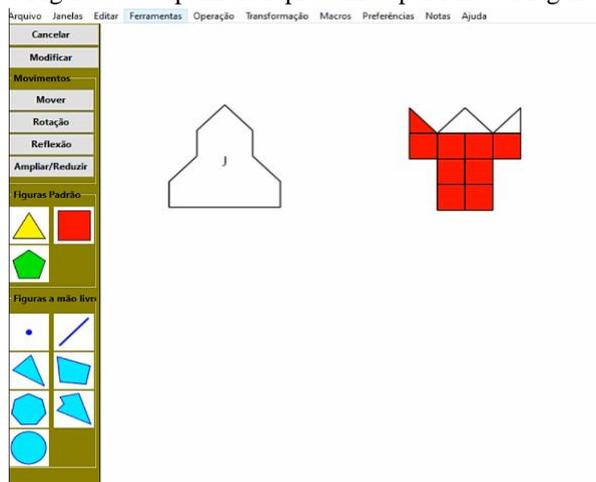
[**Iniciam o processo de produção da superfície F**]

Magali: Um desenho trigonométrico

Magali: Isso é um foguete [**Destacando que o formato da superfície J se assemelha ao de um foguete**]

Magali: E isso aqui é uma torre e um castelo [**Mostrando que a superfície produzida assemelha-se a uma torre/ castelo, exposta na figura 58**]

Figura 58- Superfície F produzida por Ana e Magali



Fonte: Protocolo de resolução de Iza e Michael

Ao agrupar os diversos ladrilhos, os licenciandos dialogam sobre o formato da superfície F. O fato de ter a mesma quantidade de superfícies unitárias faz com que os participantes destaquem a igualdade das áreas em ambas superfícies J e F. Essa ideia pode ser notada pela interação verbal entre Magali e Ana.

[...] **Magali:** Tá ruim assim?

Ana: Pode deixar assim? Pode não, né? Elas têm a mesma área?

Magali: Tem a mesma área

Quanto à possibilidade de colorir na cor vermelha os dois triângulos, Ana e Magali exploram as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, e dialogam.

Magali: Aonde tem colorir? [**Manipula**]

Magali: Temos que preencher o fundo, e não a borda.

[Exploram as ferramentas]

Magali: O que importa é a gente pegar a medida e produzir uma nova figura.

Ana: A gente preenche com a cor. Eu quero vermelho!

[...]

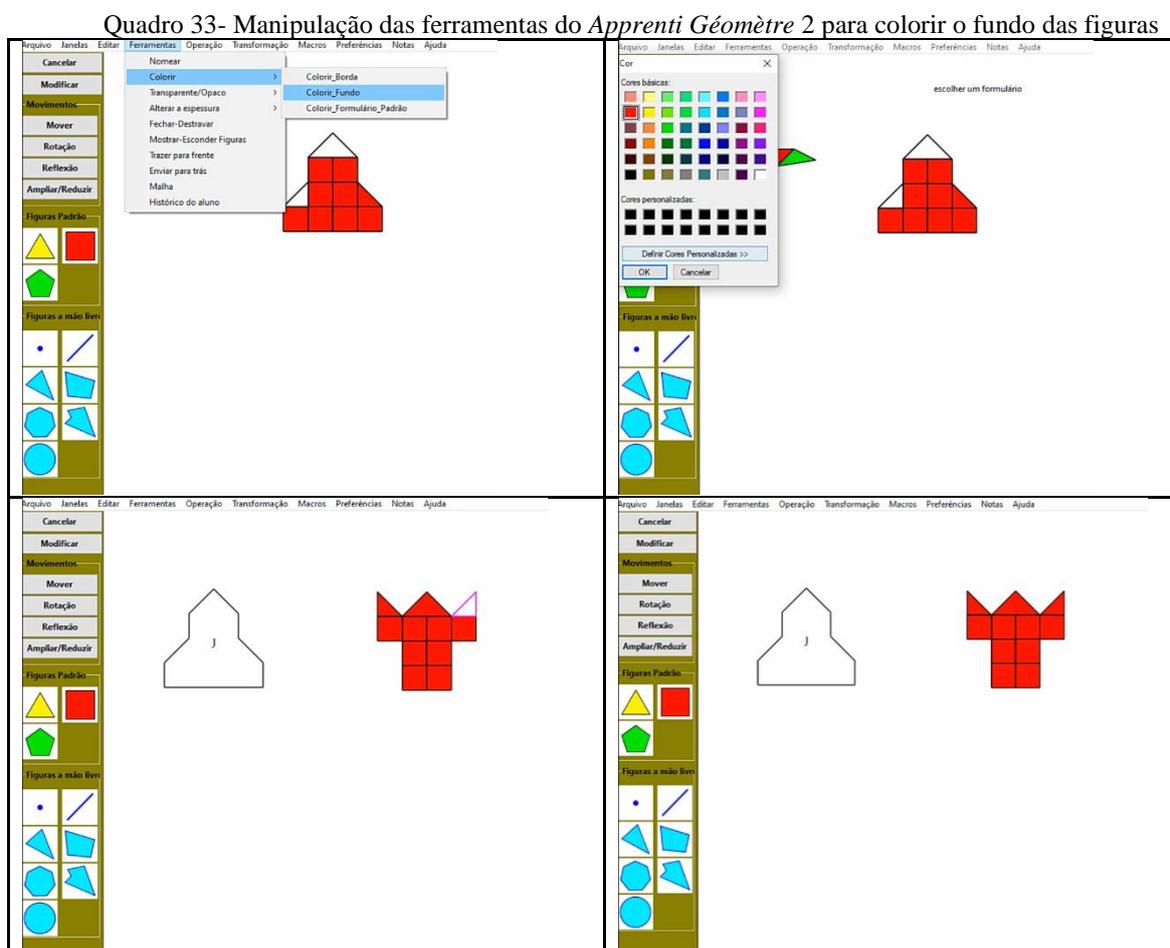
Ana: Então vamos colorir as duas últimas peças

Magali: Não tem como não, eu já tentei em ferramentas, colori fundo, mas não vai.

[Destacam a impossibilidade de colorir o fundo da superfície mesmo com as funcionalidades ativada]

Magali: Eu tentei e não foi não.

Ana: Essa ferramenta está de mal comigo. [Manipulam as ferramentas na busca de colorir o fundo. Depois de várias tentativas conseguem como pode ser visto no quadro 33]



Fonte: Protocolo de manipulação no software de Ana e Magali

Verificamos por meio do diálogo e das telas do *Apprenti Géomètre 2* que as funcionalidades das ferramentas **Colorir Fundo** e **Colorir Borda** após algumas tentativas são compreendidas pelas licenciandas..

Destacamos que as ferramentas **Triângulo (Figuras a mão livre)**, **Colorir Fundo** e **Colorir Borda** foram apropriadas nessa atividade pelos participantes, enquanto a **Mover**, já mobilizada na resolução da atividade 2, foi reutilizada pela dupla.

Assim como Ana e Magali, as estratégias adotadas por Iza e Michael foram apoiadas na ênfase numérica. O primeiro procedimento realizado pela dupla foi de conduzir a medição da superfície J. Para isso, ativaram a **Malha quadriculada** integrando na superfície J **Segmentos de retas**, destacando-a em quatro partes, para medi-la com maior precisão. Essa condução de ações encontra-se na interação a seguir e consta na figura 59.

[...] **Iza:** Agora eu vou botar a malha, certo?

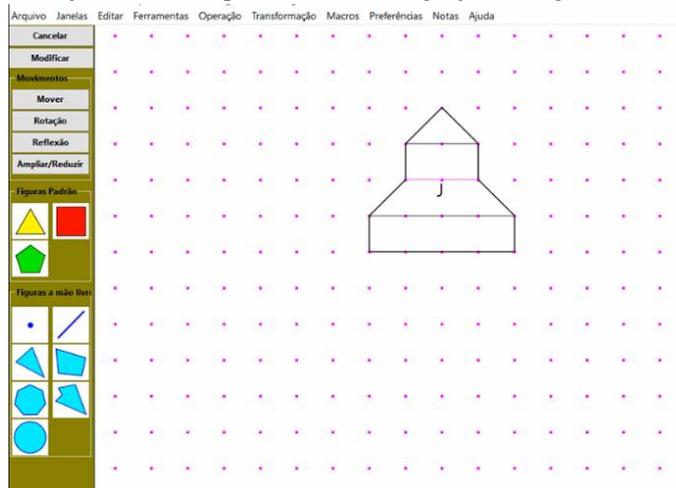
Michael: Malha quadriculada?

Iza: Sim. Coloca ponto 4 para a gente ver maior. [**Destacando que os pontos da Malha quadriculada em 4 dá para melhor visualizá-los**]

Michael: Ok, apesar deles não influenciarem nos resultados

Michael: Aqui tem triângulos, então na contagem podemos considerar como sendo a metade de um quadrado [**Referindo-se aos tipos de ladrilhos que poderiam preencher a superfície J. Ver figura 59**].

Figura 59- Ativação da Malha quadriculada e integração de segmentos na superfície J



Fonte: Protocolo de resolução de Iza e Michael

Ao integrarem segmentos na superfície J, os participantes discutem procedimentos para produzir a superfície F. Uma estratégia foi considerar os espaços da **Malha quadriculada**, medindo-a, e a partir desse valor construir F. Essa ideia está sintetizada, a seguir, no diálogo entre Iza e Michael.

Iza: Vamos fazer a contagem. De cima para baixo temos $4 + 3 + 2 + 1 =$ equivalente a 10 quadrados [**Consideram que dois triângulos isósceles possuem a área de um quadradinho**]

Iza: Não pode unir coisas porque a atividade pede para se produzir figuras inteiras

Michael: E como a gente vai decompor a figura, Iza?

Iza: A gente não vai decompor, vamos criar a partir da medida

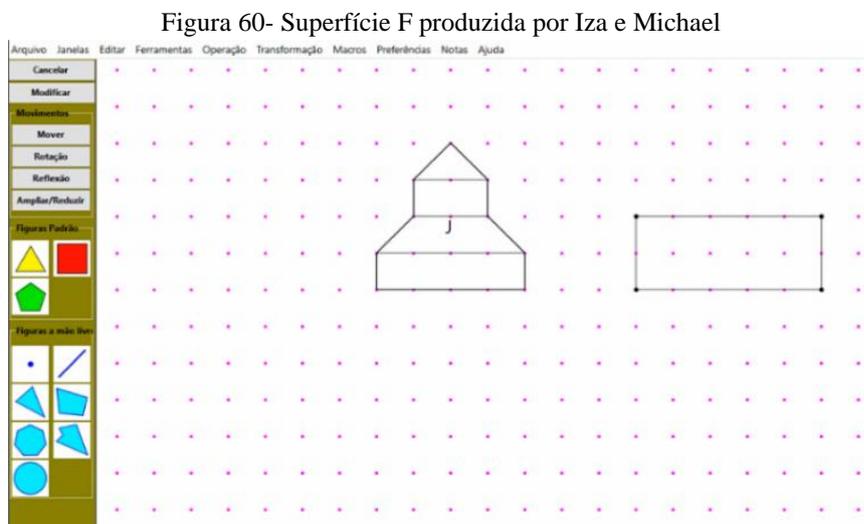
Michael: Eu acho que não

Iza: É!

Michael: E a gente vai criar o que?

Iza: Se são 10 quadrados, vamos criar um retângulo de base 5 e altura 2. [**E produzem a superfície F como mostra a figura 60**].

Com base nas discussões, a dupla opta pelo **Polígonos (Figuras a mão livre)** e apoiados na **Malha quadriculada** produzem um retângulo com a mesma área que a superfície J.



Fonte: Protocolo de resolução de Iza e Michael

Ao longo da resolução, Iza e Michael se apropriaram da funcionalidade do **Polígonos (Figuras a mão livre)** e utilizaram ferramentas já manipuladas, por exemplo, **Malha quadriculada** e **Segmentos (Figuras a mão livre)**.

Quanto ao uso do *Apprenti Géomètre 2* destacamos que as ferramentas que deram suporte aos licenciandos para a resolução da atividade foram destacadas na análise a priori. Verificamos que Iza e Michael, assim como Hughes, Ana e Magali não utilizaram a função **Nomear**. Nessa atividade, de produção de superfície de mesma área que a dada, destacamos na análise a priori que a funcionalidade **Nomear** seria usada e apropriada pelos participantes para indicar a superfície produzida.

O quadro 34 expõe que as estratégias e ferramentas adotadas pelos participantes que propiciaram a resolução da atividade foram discutidas na análise a priori.

Quadro 34- Quadro comparativo da atividade 3 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos

Licenciandos	Esquemas		Ferramentas		
	Adotados na resolução	Análise a priori		Suporte para responder corretamente	Análise a priori
		Aspecto geométrico	Aspecto numérico		

Ana e Magali	Aspecto numérico (1)	(1)Decompor a superfície, em partes menores, e recompô-las com distinto formato sem perda ou sobreposição	(1)Ladrilhar a superfície J e com o mesmo total de superfícies unitárias produzir a superfície F, com formato distinto a J.	Triângulo (figuras a mão livre); Mover; Colorir fundo; Quadrado (Figuras padrão)	Dividir; Decompor; Reflexão; Rotação; Fundir; Nomear; Malha quadriculada; Triângulo isósceles e Quadrado (Figuras Padrão e Figuras a mão livre; Mover; Duplicar; Segmentos; Colorir fundo
Iza e Michael	Aspecto numérico (1)			Segmentos; Malha quadriculada; Polígonos (figuras a mão livre)	
Hughes	Aspecto geométrico (1) Aspecto numérico (1)			Malha quadriculada; Decompor; Duplicar; Reflexão; Mover	

Fonte: Dados da pesquisa

De modo geral, tanto os esquemas quanto as ferramentas do *software* foram convergentes com os discutidos da análise a priori. Com base nas informações do quadro 34 ratificamos que o uso da ferramenta **Nomear** nas estratégias geométricas seria relevante para distinguir ambas superfícies (dada e a produzida). Ainda notamos que Hughes adotou procedimentos geométricos e numéricos, associando-os. Isto é, esse participante se apoiou na malha quadriculada e faz a contagem do total de espaços que formam a superfície J, por meio dessas informações a decompõe e recompõe suas partes produzindo a superfície F.

Ana e Magali, por exemplo, não se apoiaram no uso da Malha quadriculada para produzir a superfície F mesmo se respaldando no uso de técnicas numéricas, no qual ladrilham primeiramente a superfície J e com a mesma quantidade de ladrilhos produzem F, sem perda ou sobreposição de ladrilhos. Sobre as estratégias de Ana e Magali, apesar de produzirem corretamente a superfície F, não esperávamos que os participantes usassem dois tipos de superfícies unitárias (triângulo equilátero e Quadrado).

O quadro 35 expõe as interligações entre os polos **sujeito** (licenciandos em matemática) - **Instrumento** (*Apprenti Géomètre 2*) - **Objeto matemático** (Produção de superfície) destacando se houve ou não o processo de instrumentalização e instrumentação.

Quadro 35- Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 3

Processos da Gênese Instrumental		Participantes	Características
Instrumentalização	[S-O]	Ana e Magali	Os procedimentos matemáticos foram de ênfase numérica. Os participantes respaldaram-se em ladrilhar a superfície J e com o mesmo total de ladrilhos produziram a superfície F.
		Iza e Michael	
		Hughes	O licenciando utilizou técnicas numéricas e geométricas, associando-as. Primeiro contemplou o uso da Malha quadriculada , realizando a medição mentalmente da superfície J e depois aplicou a decomposição e em seguida recompôs as partes em formatos distintos produzindo uma superfície F.
	[I-O]	Ana e Magali	O instrumento (<i>Apprenti Géomètre 2</i>) propiciou que os participantes produzissem uma superfície F, de mesma área e com formato distinto a J, atendendo aos critérios solicitados pela atividade. Em outras palavras, o <i>Apprenti Géomètre 2</i> alcançou o objetivo solicitado da atividade.
		Iza e Michael	
		Hughes	
	[S(i)-O]	Ana e Magali	Os participantes subsidiados pelas limitações e possibilidades das ferramentas do <i>software</i> usaram suas funcionalidades para resolver corretamente a atividade.
		Iza e Michael	
		Hughes	
Instrumentação	[S-I]	Ana e Magali	A partir dos esquemas desenvolvidos, os licenciandos se apoiaram nas ferramentas do programa e produziram a superfície F, de mesma área e com formato distinto a J, alcançando o propósito da atividade. Portanto, o <i>Apprenti Géomètre 2</i> mostrou-se útil a partir das intervenções dos licenciandos sobre as ferramentas para a produção de superfícies.
		Iza e Michael	
		Hughes	

Fonte: Dados da pesquisa

O quadro 36 apresenta a modelização dos esquemas desenvolvidos e aplicados para resolver essa atividade de produção de superfície.

Quadro 36- Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 3

Atividade 3	
Ana e Magali	Preencher a superfície J com um número finito de tipos distintos de superfícies unitárias e por meio do quantitativo de ladrilhos integrados em J produzir a superfície F
Iza e Michael	Medir a superfície J e subsidiado pelo valor da medição produzir a superfície F
Hughes	Utilizar a malha quadriculada como um suporte para produzir uma superfície F, com mesma área e formato distinto de J, por meio do processo de decomposição e recomposição

Fonte: Dados da pesquisa

Destacamos por meio dessas modelizações que é possível articular as técnicas geométricas e numéricas. Como exemplo, temos associação de técnicas geométricas e numéricas adotadas por Hughes. Além disso, notamos que os EAI estão sendo aprimorados em relação às duas atividades anteriores, e acreditamos que isso se respaldou pela mediação da interação entre os participantes e o *software*.

4.1.4 Atividade 4

Todos os participantes concluíram que as superfícies A e B possuem a mesma área. Essa atividade sobre comparação de áreas foi organizada de modo a propiciar que os participantes privilegiassem procedimentos geométricos (decomposição, recomposição e inclusão) e procurou bloquear os aspectos numéricos na resolução da atividade.

Ao contrário do que havíamos discutido na análise a priori, que os procedimentos resolutivos dos licenciandos seriam apoiados inteiramente em aspectos geométricos, Iza e Michael se respaldaram em estratégia numérica, como mostra a interação verbal entre eles:

Michael: Verifiquem se as superfícies A e B possuem áreas iguais ou diferentes. Caso tenham áreas diferentes, qual delas tem maior área?

Iza: Vamos resolver pela malha quadriculada

Michael: A figura A tem 20 quadrados. Olha, base 5 e altura 4 que é igual a 20.

Iza: Então para resolver a figura B, a gente divide em segmentos e fazemos o cálculo pela fórmula

Michael: Isso!

Iza: Dividimos em três partes, 2 triângulos e um retângulo.

Michael: O retângulo mede 8 (base quatro vezes altura dois, igual a oito). Para os triângulos, temos base três altura quatro, dividido por dois, igual a seis. Por termos dois triângulos teremos $12 + 8 = 20 \text{ cm}^2$.

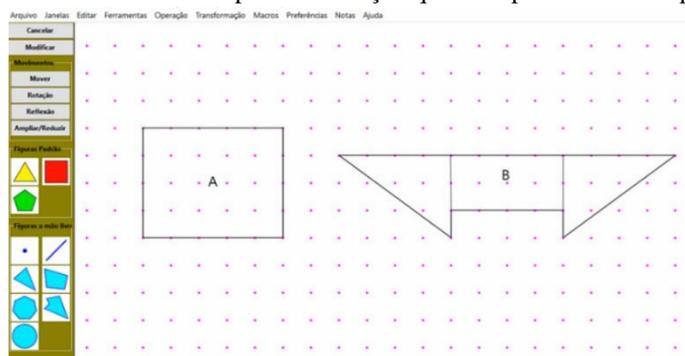
Iza: Eles têm a mesma área.

Michael: Isso.

Apoiados pela **Malha quadriculada**, os participantes consideraram o uso da fórmula da área do retângulo e a aplicaram sobre a superfície A, obtendo 20 quadradinhos.

Na busca de comparar as áreas das superfícies A e B, a dupla decompôs a superfície B em um retângulo e dois triângulos retângulos traçando dois segmentos no interior da figura. Calcularam as áreas de cada pedaço, utilizando fórmulas e somaram os valores obtendo 20 cm^2 , o que levou a concluir que as superfícies A e B tem a mesma área. Essa ideia está sintetizada por meio da figura 61.

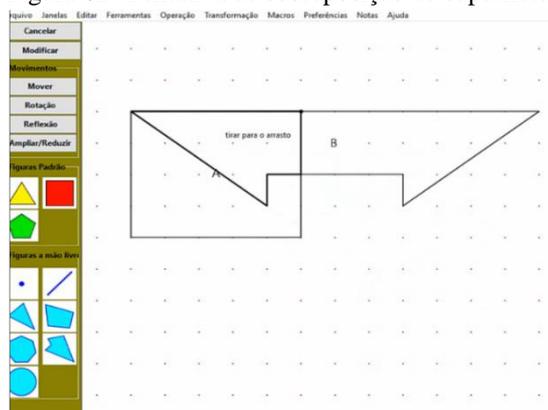
Figura 61- Procedimentos adotados para verificação que as superfícies A e B possuem a mesma área



Fonte: Protocolo de resolução de Iza e Michael

Hughes, Ana e Magali privilegiaram aspectos geométricos em suas resoluções. Hughes ativou a **Malha quadriculada** e tentou sobrepor as duas superfícies (ver figura 62) para comparar suas áreas, mas esse procedimento não lhe pareceu suficiente para decidir se as áreas das duas superfícies eram iguais ou diferentes.

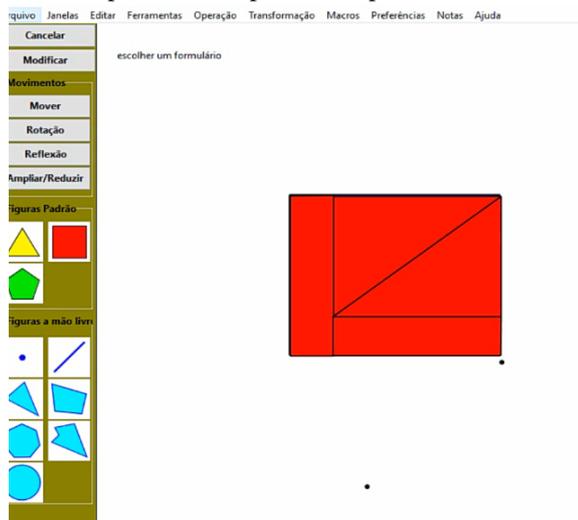
Figura 62- Tentativa de sobreposição de superfícies



Fonte: Protocolo de resolução de Hughes

O participante verifica que a técnica da sobreposição não seria econômica e/ou eficiente. Então realiza a pintura da superfície B na cor vermelha e a decompõe em quatro partes, alterando suas posições, e incluindo-as na superfície A. Esses procedimentos, como expõe a figura 63, permitiu ao licenciando verificar que as superfícies A e B possuem a mesma área.

Figura 63- Inclusão das partes decomposta da superfície B incluídas na superfície A



Fonte: Protocolo de resolução de Hughes

Quanto ao uso das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* para resolver essa atividade, Hughes utilizou o **Dividir**, **Decompôr**, **Mover** e **Reflexão**, funcionalidades já conhecidas, e se apropriou de **Colorir Borda** e **Colorir Fundo**. A explicação de como Hughes obteve a resposta consta na figura 64.

Figura 64- Explicação de Hughes para resolver a atividade

têm a mesma área.
 Decompus a superfície
 B e consegui
 encaixar em A

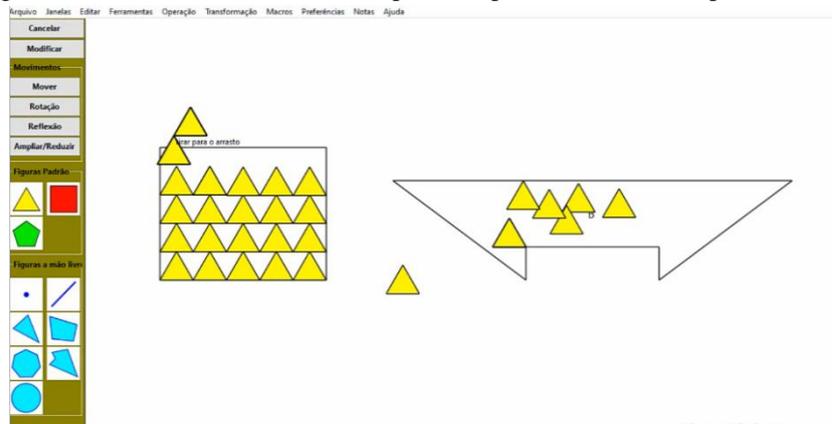
Fonte: Protocolo de Hughes

A estratégia para comparar as áreas usada por Hughes (decompor a superfície B, em partes menores, e incluí-las na superfície A) foi descrita na análise a priori. Também apoiados

por esses procedimentos geométricos, Ana e Magali resolveram corretamente a presente atividade.

É interessante destacar que anteriormente ao uso de técnicas geométricas, Ana e Magali tentaram a técnica do ladrilhamento, mas no decorrer do processo resolutivo essa estratégia foi descartada porque os participantes não conseguiram preencher totalmente nenhuma das superfícies (A e B), tomando como superfície unitária (Triângulo equilátero), dispostas no Menu AB. A figura 65 mostra essa tentativa.

Figura 65- Tentativa de ladrilhamento para comparar as áreas das superfícies A e B



Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

A discussão, mostrada a seguir, destaca que as participantes desistiram do ladrilhamento pela impossibilidade de preencher completamente as superfícies A e B.

Ana: A gente tem que saber a mesma quantidade que usa nas duas figuras [Destacando que comparar as áreas seria necessário fazer a contagem do total de ladrilhos nas duas superfícies]

Magali: Como é que se faz para mover, esqueci. [A dupla começa a rir]

Ana: Clica em Mover [E começa a manipulação no programa]

Ana: Tem que começar de baixo, Magali.

Magali: Eu sei! Eu estou tirando para fazer

Ana: Mesmo assim vai dar errado. [A dupla começa a rir]

Ana: Vamos fechar sem salvar? [Manipulam o programa. Começa a técnica do ladrilhamento. Os licenciandos notam que não é possível ladrilhar as superfícies A e B por meio da superfície unitária adotada (triângulo equilátero)]

Ana: Não dá, esquece! Pensei que usando essas figuras dava para preencher [Referindo-se à superfície unitária (Triângulo equilátero)]

Magali: Então não é.

Notamos a partir da interação dos participantes um momento interessante, e que vale a pena destacar, é o de que Magali demonstra um esquecimento quanto ao uso da ferramenta **Mover**. Com base na TI interpretamos que ferramenta **Mover** tinha sido apropriada de

maneira momentânea, e não a longo prazo por Magali, uma vez que essa funcionalidade foi executada no decorrer do processo resolutivo das atividades 2 e 3.

Diante da impossibilidade do ladrilhamento, na busca de resolver a atividade, surgem procedimentos de ênfase geométrica (decompor e recompor a superfície).

Ana e Magali exploram as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* para decompor a superfície B. Sobre isso, é válido ressaltar que, nesse momento, ferramentas como **Dividir** e **Decompor** foram manipuladas pela primeira vez por Ana e Magali, e apropriadas.

Ana: Como a gente pode escolher uma forma de dividir?

Magali: Clica lá na opção dividir [Selecione a funcionalidade dividir e não conseguem separar as figuras]

Magali: Não quer ir não! A gente quer separar esses negócios [Desejam separar as figuras inclusas na superfície B]

Ana: Eu entendi! Primeiro a gente seleciona dividir e depois decompor.

Magali: Vamos tentar

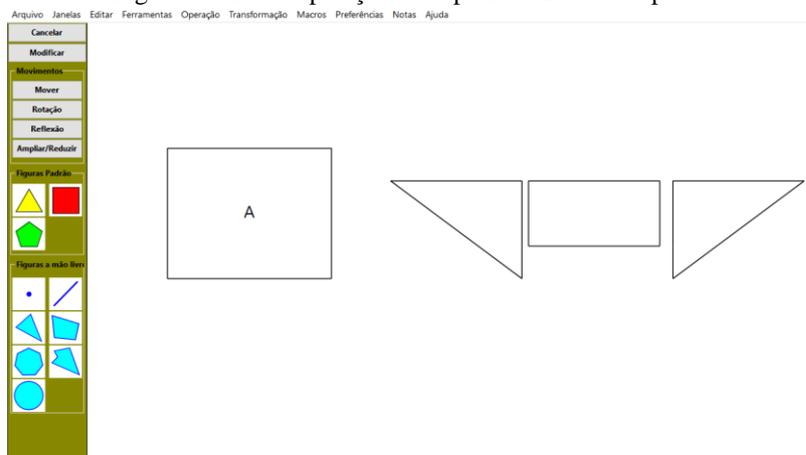
[Manipulação de ferramentas]

Magali: Agora! [Ficam alegres porque conseguiram selecionar a superfície B para realizar a decomposição]

Ana: Aprendemos! [Conseguem realizar a decomposição da superfície B em três partes, dois triângulos retângulos e um retângulo, conforme a figura 66].

Magali: Hum! Que legal.

Figura 66- Decomposição da superfície B em três partes



Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

Os licenciandos ao decompor a superfície B, em três partes, sinalizam que não é possível incluí-las totalmente na superfície A. Com isso, realizam outra decomposição sobre o retângulo, dividindo-o em dois, e incluem as quatro partes na superfície A, sem sobreposição ou perda de área. Esse percurso pode ser sintetizado pela interação dos participantes, e visualizados na figura 67.

Ana: Você ainda acha que dá? Essas partes da figura não vão caber em A

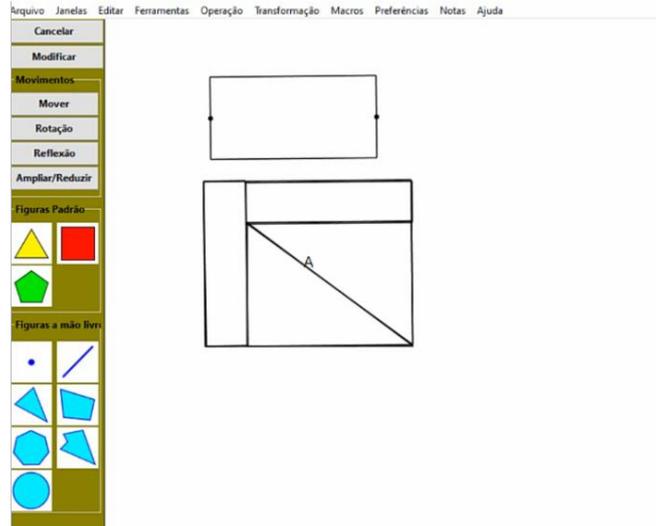
Ana: Olhando direitinho, se a gente dividir esse retângulo em dois vai dar. Divide aí, Magali.

Magali: Ok! Dividido, aonde a gente coloca? [A superfície B fica decomposta em quatro partes]

Ana: Um sobre o triângulo já incluso em A, e as outras partes tem que virar.

Magali: Isso! [Os participantes manipulam o software. Ao aplicar a reflexão e o rotacionar as partes das figuras, e inclui-las na superfície A, notam que ambas as superfícies (A e B) possuem a mesma área, conforme a figura 67].

Figura 67- Inclusão das partes da superfície B totalmente integradas em A



Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

Os participantes ao realizarem os procedimentos no Menu AB destacam que ambas superfícies (A e B) possuem a mesma área, e explicam na impressão (figura 68) quais percursos e estratégias foram tomadas para a obtenção da resposta.

Figura 68- Resolução de Ana e Magali da atividade 5

ATIVIDADE 4

Selecione e abram o arquivo "Atividade 4.fag" que está na pasta "Franklin Pachêco" localizada no Desktop do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

4 - Verifiquem se as superfícies A e B possuem áreas iguais ou diferentes. Caso tenham áreas diferentes, qual delas tem maior área?

Expliquem como chegaram a essa conclusão.

As áreas são iguais
Dividimos a superfície B em 3 partes (2 triângulos e 1 retângulo) e decopamos. O retângulo foi dividido em 2 partes iguais. Após colocamos as imagens na superfície A. E achamos que a área é a mesma.

Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

Ao analisar as respostas de todos licenciandos destacamos que mobilizaram conhecimentos matemáticos adequados para resolver a atividade..

Em relação ao uso, as funcionalidades do *Apprenti Géomètre 2* se mostraram úteis para a resolução da atividade. Os esquemas mobilizados pelos participantes foram descritos na análise a priori, como apresentadas no quadro 37.

Quadro 37- Quadro comparativo da atividade 4 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos

Licenciandos	Esquemas			Ferramentas	
	Adotados na resolução	Análise a priori		Suporte para responder corretamente	Análise a priori
		Aspecto geométrico	Aspecto numérico		
Ana e Magali	Aspecto geométrico (1)	(1)Decompor a superfície B, em partes menores, e sobre elas aplicar a reflexão e incluí-las na superfície A	Tentamos bloquear os aspectos numéricos	Dividir; Decompor; Mover; Reflexão	Dividir; Decompor; Mover; Reflexão; Rotação; Fundir
Iza e Michael	Aspecto numérico			Malha quadriculada	
Hughes	Aspecto geométrico (1)	(2)Decompor a superfície B, em partes menores, racioná-las para produzir uma superfície com o mesmo formato que A		Dividir; Decompor; Mover; Reflexão; Colorir Borda e Colorir Fundo.	

Fonte: Dados da pesquisa

Como já descrito, Iza e Michael se respaldaram no uso de estratégias numéricas para verificar que as superfícies A e B possuíam a mesma área. Não esperávamos que ocorresse esse tipo de estratégia uma vez que ao produzirmos a atividade tentamos bloquear o aspecto numérico de resolução propondo uma superfície (B), com formato pouco frequente no ensino de áreas de figuras planas em sala de aula.

Com exceção de Iza e Michael, os esquemas produzidos por Ana, Magali e Hughes foram similares àqueles descritos na análise a priori.

Em relação ao uso das ferramentas do *software* destacamos que as funções Colorir Borda e Colorir Fundo não foram pensadas na análise a priori. Além delas, frisamos o uso da Malha quadriculada para os procedimentos geométricos sua funcionalidade seria relevante, mas dispensável.

A interação entre os polos **sujeitos** (Licenciandos), **objeto** (comparação de áreas) e **instrumento** (*Apprenti Géomètre 2*) permitiram observar indícios dos processos de instrumentalização e instrumentação. Para melhor compreensão desses processos da Gênese instrumental as categorizações estão expressas no quadro 38, sob o olhar do modelo SAI.

Quadro 38- Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 4

Processos da Gênese Instrumental		Participantes	Características
Instrumentalização	[S-O]	Iza e Michael	A ênfase abarcada pela dupla foi numérica. A estratégia matemática consistiu em utilizar a malha quadriculada e a partir dela usar fórmulas para o cálculo da área.
		Ana e Magali	Os licenciandos em matemática traçaram estratégias geométricas (decomposição, recomposição e inclusão) para resolução da atividade.
		Hughes	
	[I-O]	Ana e Magali	Os participantes refletiram sobre a proposta da atividade, e a partir das funções das ferramentas dispostas pelo <i>software</i> desenvolveram esquemas matemáticos que propiciassem a resolução correta da atividade
		Iza e Michael	
		Hughes	
	[S(i)-O]	Ana e Magali	Os esquemas desenvolvidos pelos participantes foram mediados pelas funcionalidades do <i>Apprenti Géomètre 2</i> para auxiliar na efetivação correta da atividade.
		Iza e Michael	
		Hughes	
Instrumentação	[S-I]	Ana e Magali	As ferramentas do <i>software</i> ao serem associadas aos procedimentos matemáticos pelos licenciandos propiciaram a condução correta da atividade. O <i>Apprenti Géomètre 2</i> tornou-se fundamental para a resolução dessa situação de comparação de áreas
		Iza e Michael	
		Hughes	

Fonte: Dados da pesquisa

As informações expostas no quadro 38 sintetizam as ações das diversas interligações entre os polos (S)-(O)-(I) sobre o resolver da atividade.

O quadro 39 exhibe os esquemas modelizados pelo pesquisador, a partir da interpretação dos dados (diálogos, rastros das ações no *software* e respostas registradas na folha da atividade) destacando o objetivo principal das ações dos sujeitos sobre o artefato para responder à atividade.

Quadro 39- Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 4

Atividade 4	
Ana e Magali	Decompor a superfície B, em quatro partes, e incluí-las, sem perda ou sobreposição, na superfície A, considerando que se todas as partes ficarem totalmente integradas em A, ambas possuem a mesma área
Iza e Michael	Ativar a malha quadriculada e integrar segmentos de retas na superfície B para reparti-las em figuras menores (2 triângulos retângulos e um retângulo) e realizar o cálculo de área dessas 3 figuras, por meio de fórmulas, e somá-las para obter a medida da área da superfície B. Finalmente comparar esse valor com a área da superfície A, previamente calculada.
Hughes	Aplicar sobre a superfície B procedimentos de decomposição considerando que se as partes ficarem totalmente inclusas, sem perda ou sobreposição, na superfície A, ambas têm a mesma área

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos perceber que os esquemas desenvolvidos por Hughes, Ana e Magali são similares, apoiados na decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição. Já o esquema de Iza e Michael é de natureza essencialmente numérica, respaldados pelo uso de fórmulas.

4.1.5 Atividade 5

Em relação ao item A, Ana e Magali utilizaram apenas a ferramenta **Triângulo (Figuras a mão livre)** e produziram no interior de R seis superfícies unitárias, em formato de triângulo retângulo isósceles, e a ladrilharam efetivamente obtendo a expressão da área de R

pelo par 6U. O diálogo, a seguir, evidencia o percurso da dupla para escolher uma superfície unitária.

Ana: Essa unidade pode ser qualquer desenho?

Magali: Acho que sim

[Os participantes começam a manipular o programa. E o diálogo continua]

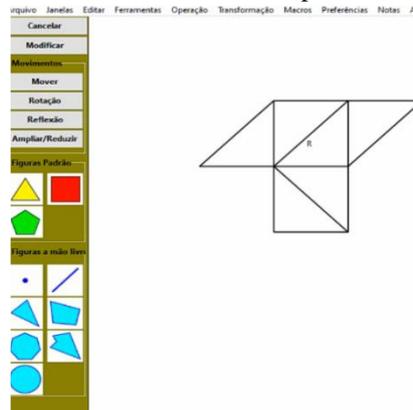
Magali: Temos que ficar ligadas na quantidade de unidades que foi pedido.

Ana: Sim [Usando as ferramentas das Figuras a mão livre, os participantes começam a preencher a superfície R usando a opção Triângulo retângulo isósceles]

Ana: Vai dar seis com essa figura eu já tinha feito os cálculos

Como mostra a figura 69, a dupla realiza um ladrilhamento efetivo da superfície R com seis exemplares da superfície unitária (um triângulo isósceles e retângulo) U.

Figura 69- Ladrilhamento da superfície R (Ana e Magali)



Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

Ao concluir o ladrilhamento da superfície R, no item A, os participantes dialogam sobre estratégias resolutivas para o item B.

Magali: Qual o quantitativo que temos que encontrar?

Ana: Cinquenta e quatro. Vamos tentar por triângulos?

Magali: O que se pede no item B?

Ana: Encontrem uma unidade de área W, de modo que a área de R seja $54W$.

Magali: Seja 54. Então vamos tentar por quadrados, mas já vejo que não vai dar por causa da borda. Ela é inclinada.

[...]

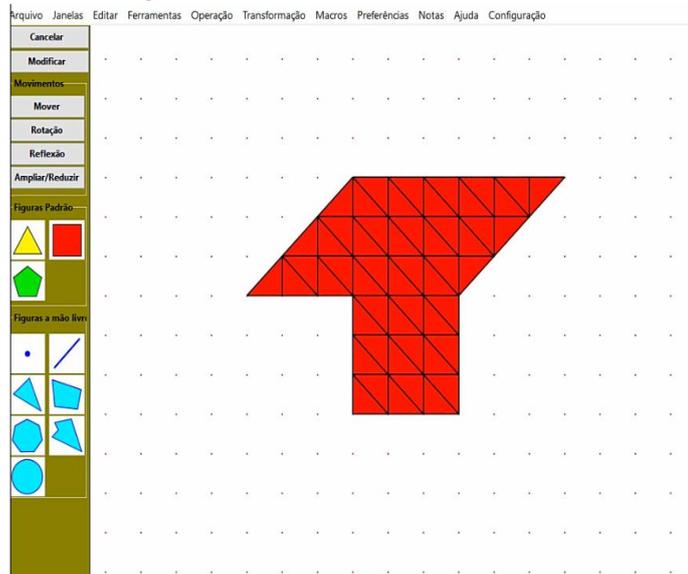
Magali: Se a gente adotar tudo em triângulos isósceles?

Ana: Se considerarmos que são triângulos isósceles, nesse caso teremos 48 mais 6 que será 54 triângulos isósceles. [Ladrilham a superfície R como mostra a figura 70]

Magali: Já finalizamos?

Ana: Já! Encontramos $54W$.

Figura 70- Ladrilhamento efetivo com 54W



Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

As ferramentas que deram suporte aos licenciandos em matemática para ladrilhar efetivamente R e obter 54W foram o **Triângulo isósceles (Figura Padrão)**, **Mover**, **Reflexão** e **Malha quadriculada**.

O diálogo a seguir entre Ana e Magali sobre a resolução do item c, ilustra o conflito sobre o que é ladrilhar efetivamente uma superfície e a relação entre esse procedimento e a medida da área.

Ana: Vamos iniciar fazendo pelo triângulo equilátero [Ferramenta disposta no conjunto de Figuras Padrão]

Ana: Esse não der a gente vai para o quadrado]

Magali: A gente poderia usar os dois. Quadrado embaixo e triângulos em cima.

Ana: Não pode, tem que ser a mesma coisa.

Magali: Dá a mesma coisa, Ana.

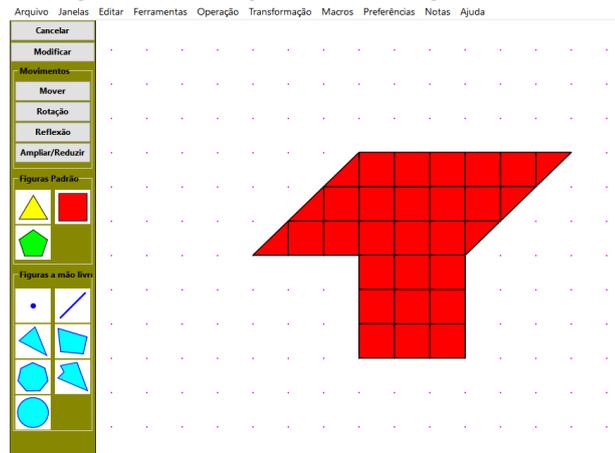
Ana: Não! Tem que ser só de um formato. [A dupla volta a manipular o programa, o conjunto de ferramentas das Figuras a mão livre, na busca de adotar uma superfície unitária compatível para preencher a superfície R totalmente com 27 unidades]

[...]

Magali: Eu ainda acho que poderíamos usar quadrado embaixo e triângulos em cima [Após algumas tentativas adotam o quadrado e o triângulo isósceles como tipos de superfícies unitárias e começam a preencher a superfície R].

Ana e Magali ladrilham parcialmente a figura com quadrados e completam o preenchimento com triângulos retângulos e isósceles (cuja área é metade da do quadrado), como mostra a figura 71.

Figura 71- Resolução de Ana e Magali no Item C



Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

As ferramentas que deram suporte para a obtenção dessa resolução foram a **Reflexão**, **Mover**, **Malha quadriculada**, **Quadrado** e **Triângulos isósceles (Figuras a mão livre)**. A explicação desses procedimentos encontram-se na figura 72.

Figura 72- Explicação dos procedimentos resolutivos de Ana e Magali

A) 6 triângulos retângulos isósceles. (Desenhando dentro da superfície)

B) 54 triângulos isósceles.

C) 24 quadrados e 6 triângulos retângulos que ao juntar 2 deles forma um quadrado.

Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

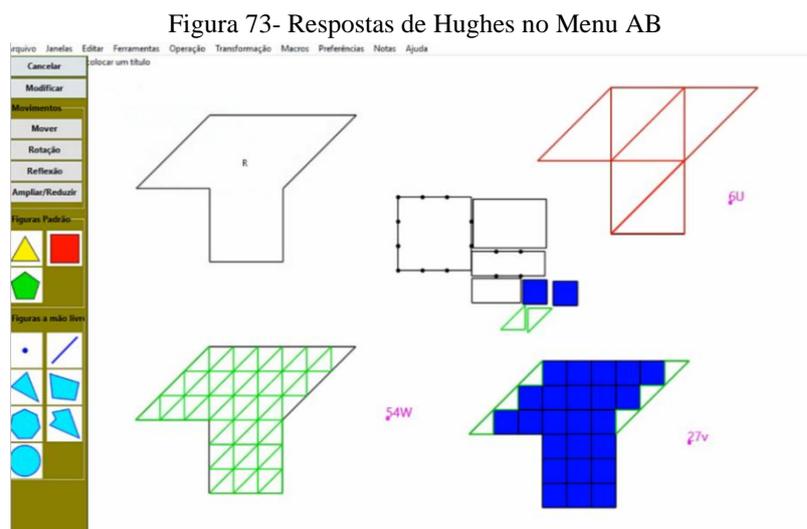
Da mesma maneira que a resolução de Ana e Magali, no item A, Hughes se apoiou na ferramenta **Triângulo (Figuras a mão livre)** para encontrar uma superfície unitária para ladrilhar a superfície R e obter o par (6U).

Usando a mesma estratégia matemática e ferramenta **Triângulo (Figuras a mão livre)**, no item B, Hughes ladrilha efetivamente a superfície R por meio de 54 W, sendo W um triângulo retângulo e isósceles.

No item C, esse participante ladrilhou parcialmente a superfície R com quadradinhos e complementou o preenchimento utilizando triângulos retângulos e isósceles. Concluiu que

tomando a área do quadradinho como unidade, a medida da área da figura R seria 27, pois dois triângulos isósceles equivalem a um quadrado.

Duas distinções entre as respostas de Hughes comparando com as de Ana e Magali podemos observar por meio da figura 73. A primeira é que o licenciando ao adotar o uso da ferramenta **Colorir Borda** as destacaram com cores distintas, e a segunda aborda o uso da função **Nomear**, caracterizando os ladrilhamentos ao lado de cada superfície.



Fonte: Protocolo de resolução de Hughes

Quanto às respostas da dupla Iza e Michael, inferimos que não houve uma compreensão do que era solicitado na atividade.

Inicialmente a dupla observa que a área da superfície R é de 27 cm^2 . Eles partem dessa constatação para solucionar os itens da atividade, como se pode ver nos extratos a seguir do diálogo entre Iza e Michael.

[Item A]

Iza: Encontrem uma unidade de área U, de modo que a área de R seja 6U. Ok, né! Essa é difícil. [...]

Iza: 27 dividido por 6? Não dá! Eu acho que isso está errado.

Iza: Eu acho que esse jeito que a gente está fazendo, tá errado. Vê só, a atividade pede que a gente “Encontre uma unidade de área U, de modo que a área de R seja 6U”.

Iza: 27 dividido por 6 dá 4,5. Então a gente pode dizer que a área é $4,5 \text{ cm}^2$, entendeu?

Michael: Hum! Sim. [...]

Iza: A letra A pede que R seja 6U. Então R será 27 dividido por 6 que dará $4,5 \text{ cm}^2$.

[Item B]

Iza: Já a B pede que “Encontrem uma unidade de área W, de modo que a área de R seja $54W$ ”. A gente sabe que R é 27, então teremos que W é igual a 27%. Esse negócio está muito bugado, não estou entendendo.

Iza: 27 dividido por 5 é igual a $5,4 \text{ cm}^2$.

Iza: Olha, W é 54. Então 27 dividido por 54 é $0,5 \text{ cm}^2$.

[Item C]

Iza: Encontrem uma unidade de área V , de modo que a área de R seja $27V$. **[Lê o que se solicita no item C]**

Iza: Se R é 27, então quando dividirmos por 27 teremos que C vai ser 1 cm^2 .

Iza: É isso!

Por meio desses procedimentos, destacamos uma certa fragilidade nos conhecimentos mobilizados por esses participantes em situações de mudança de unidade. Quanto ao uso do *Apprenti Géomètre 2* apenas a **Malha quadriculada** foi ativada, e mesmo assim não foi usada. As informações presentes na figura 74 reafirmam os esquemas destacados mediante a interação da dupla referentes a alternativas dos percursos resolutivos.

Figura 74- Explicação de Iza e Michael da atividade 5

ATIVIDADE 5

Selecione e abra o arquivo "Atividade 5.fig" que está na pasta "Franklin Pacheco" localizada no Desktop do computador. A seguir, clique na opção aluno e registre seus pseudônimos. Posteriormente selecione o Menu AB, idioma Português/BR e clique em Ok.

5 - Observem a superfície R.

Respondam:

A) Encontrem uma unidade de área U , de modo que a área de R seja $6U$.
 B) Encontrem uma unidade de área W , de modo que a área de R seja $54W$.
 C) Encontrem uma unidade de área V , de modo que a área de R seja $27V$.

Explicação de Iza e Michael:

Depois de descobrir as notas correspondente as unidades U, W, V construir figuras com a mesma área.

$AR = 27 \text{ cm}^2$

a) U $R = 6U$
 $27 = 6U$
 $U = \frac{27}{6}$
 $U = 4,5 \text{ cm}^2$

c) $R = 27V$
 $27 = 27V$
 $V = 1 \text{ cm}^2$

b) $R = 54W$
 $27 = 54W$
 $W = \frac{27}{54} = 0,5 \text{ cm}^2$

Fonte: Protocolo de resolução de Iza e Michael

De modo geral, não considerávamos que esquemas apenas no ambiente papel e lápis surgiriam no ato resolutivo da atividade. Com base nos resultados apresentados por Iza e Michael, entendemos que esses participantes não compreenderam a proposta da atividade.

O quadro 40 faz uma análise comparativa entre os esquemas e ferramentas descritos na análise a priori com suas ações e escolhas no ambiente do *Apprenti Géomètre 2*.

Quadro 40- Quadro comparativo da atividade 5 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos

Licenciandos	Esquemas		Ferramentas		
	Adotados na resolução	Análise a priori		Suporte para responder corretamente	Análise a priori
		Aspecto geométrico	Aspecto numérico		
Ana e Magali	Aspecto numérico (1)	A ênfase resolutiva é de numérica	(1) Realizar a mudança de unidade (superfícies unitárias) ladrilhando a superfície R com 6U, 54W e 27V, sendo que no caso de V, o ladrilhamento efetivo com quadradinhos não era possível	Reflexão, Mover, Malha quadriculada, Quadrado e Triângulos isósceles (Figuras a mão livre).	Malha quadriculada; Figuras a mão livre (triângulo isósceles); Figuras padrão (Quadrado); Duplicar; Reflexão e Mover
Iza e Michael	Aspecto numérico sem uso de ferramentas			Não se apoiaram em ferramentas do <i>software</i>	
Hughes	Aspecto geométrico (1)			Triângulo (Figuras a mão livre); Mover; Quadrado (Figuras padrão); Nomear; Colorir Borda; Duplicar	

Fonte: Dados da pesquisa

Quanto ao uso das ferramentas destacamos que Hughes usou a ferramenta **Nomear e Colorir Bordas** que não haviam sido discutidas na análise a priori. As demais funcionalidades do *software* foram destacadas na análise a priori.

Apoiados nos procedimentos dos participantes (Hughes; Ana e Magali; Iza e Michael), o quadro 41 expõe a relação entre os polos (S)-(O)-(I) caracterizando suas ações para a efetivação do resultado da atividade. Em outras palavras, apresentamos os processos da Gênese Instrumental (instrumentalização e instrumentação) mediante as interligações entre os polos (S)-(O)-(I).

Quadro 41- Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 5

Processos da Gênese Instrumental		Participantes	Características
Instrumentalização	[S-O]	Ana e Magali	A dupla demonstrou autonomia para resolver a alteração da unidade de medida (superfície unitária) com ladrilhamento efetivo nos itens A e B e sem ladrilhamento efetivo no item C.
		Iza e Michael	Os participantes realizaram cálculos baseados no uso de unidade convencional (cm ²) mas não conseguiram identificar unidades de área que respeitassem as condições solicitadas.
		Hughes	Realizou a mudança de unidade (superfície unitária) alcançando o resultado dos itens A e B da atividade. Quanto ao item C encontrou uma unidade adequada, mesmo diante da impossibilidade do ladrilhamento.
	[I-O]	Ana e Magali	Nessa etapa da pesquisa as ferramentas (Malha quadriculada; Quadrado e Triângulo isósceles (Figuras Padrão); Triângulos (Figuras a mão livre)) já estavam apropriadas pelos participantes. Sendo assim, desenvolveram os esquemas relativos às funções dessas ferramentas.
		Iza e Michael	
		Hughes	
	[S(i)-O]	Ana e Magali	Os esquemas traçados pelos licenciandos para resolver a atividade foram desenvolvidos a partir das funcionalidades das ferramentas do programa mostrando-se úteis para responder corretamente essa situação de mudanças de unidades.
		Iza e Michael	
		Hughes	
Instrumentação	[S-I]	Ana e Magali	Os esquemas mobilizados pelos participantes respaldaram-se no uso das ferramentas do <i>Apprenti Géomètre 2</i> já apropriadas de atividades anteriores.
		Iza e Michael	
		Hughes	

Fonte: Dados da pesquisa

O quadro 42 expõe os esquemas modelizados pelo pesquisador a partir da interpretação das ações dos participantes, com uso do software, dos diálogos e das respostas registradas.

Quadro 42- Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 5

Atividade 5	
Ana e Magali	A - Produzir um triângulo isósceles para ser incluída 6 vezes na superfície R
	B - Ladrilhar a superfície R com o triângulo isósceles
	C - Preencher a superfície R com dois tipos de superfícies unitárias (Quadrado e Triângulo isósceles)
Iza e Michael	A – Dividir 27V por 6U para obter 4,5cm ²
	B - Dividir 27V por 54W para obter 0,5cm ²
	C - Dividir 27V por 27V para obter 1cm ²
Hughes	A - Produzir um tipo de superfície unitária (triângulos isósceles) U de modo a ladrilhar a superfície R com 6U.
	B - Produzir um tipo de superfície unitária W (triângulos isósceles) de modo a ladrilhar a superfície R com 54W
	C - Ladrilhar a superfície R com dois tipos de superfícies unitárias (Quadrado e Triângulo isósceles)

Fonte: Dados da pesquisa

A modelização dos esquemas de Hughes, Ana e Magali tem similaridades, enquanto que no caso de Iza e Michael, o apego às unidades convencionais parece ter bloqueado a possibilidade de resolver adequadamente a atividade.

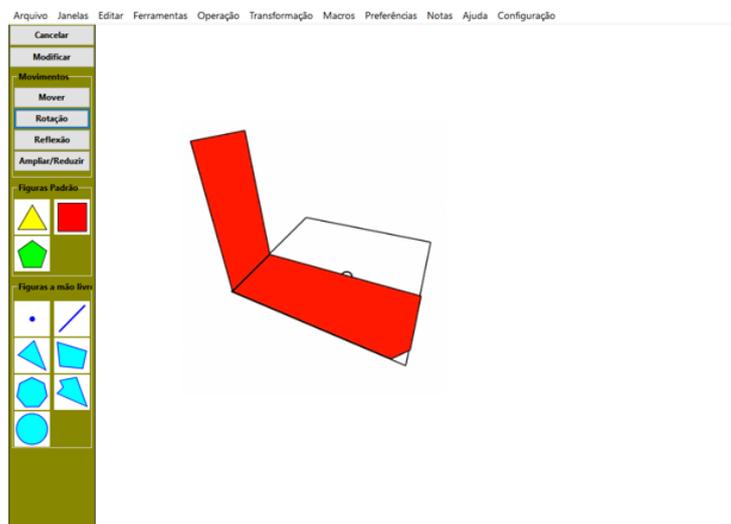
4.1.6 Atividade 6

Essa atividade, diferente das demais exploradas, exigiu uma maior reflexão por parte dos licenciandos para resolvê-la, pois foi pensada de modo a bloquear as resoluções de ênfase numérica e exigir a mobilização de conhecimentos geométricos, para produzir uma superfície S de área menor que a de uma superfície dada (O), mas que não ficasse inclusa em O..

Ao adotar procedimentos de ênfase geométrica, Hughes, Iza e Michael apresentaram resoluções corretas, enquanto que Ana e Magali que se respaldaram na técnica do ladrilhamento e expressaram de modo incorreto a resposta da atividade.

Hughes opta por **Duplicar** a superfície O, e sobre ela realiza o processo de decomposição, auxiliados pelas ferramentas **Dividir** e **Decompor**, repartindo-a em três partes. Para produzir a superfície S, Hughes adota aos seguintes procedimentos: 1º- por meio da ferramenta **Mover** arrasta apenas duas partes da superfície no Menu AB; 2º- altera a cor das duas partes para vermelho; 3º- realiza a mudança de posição por meio da **Reflexão** de apenas uma parte; 4º- com o **Fundir** une as duas partes produzindo a da superfície S. Como uma maneira de constatar se sua resolução estava correta realiza a sobreposição da superfície S em O e verifica que a mesma contempla os critérios solicitados pela atividade.

Figura 75- Superfície de menor área e não inclusa em O



Fonte: Protocolo de resolução de Hughes

As ferramentas **Decompor**, **Dividir**, **Colorir Fundo**, **Mover** e **Reflexão** já haviam sido apropriadas por Hughes em atividades anteriores, com isso as ações realizadas no Menu AB nessa atividade de produção de superfície foram mobilizadas a partir de suas funcionalidades já instrumentalizadas. De forma a explicar os percursos resolutivos Hughes na figura 76 destaca o processo da decomposição, recomposição e produção da superfície S.

Figura 76- Explicação de Hughes para conseguir a resposta da atividade

Expliquem como chegaram à resposta.

tirei um pedacinho de O
 e peguei a parte
 restante (e maior).
 Dai, peguei o ponto
 médio dos segmentos
 opostos e separei
 em duas
 figuras.
 Uni as partes correspon-
 dentes após refletir uma
 delas e obtive
 a figura.

Fonte: Protocolo de resolução de Hughes

É interessante destacar que a ferramenta **Nomear** já apropriada pelo licenciando na atividade 5 não foi usada para definir a superfície produzida como S.

As estratégias usadas por Iza e Michael assemelham-se às de Hughes. Com isso destacamos a duplicação da superfície O e sua decomposição em três partes. Após isso, os licenciandos dialogam.

[Decompõe a superfície duplicada em três partes]

Michael: Vamos tentar unir apenas duas partes?

Iza: Sim

Iza: Acho que elas só pegam se estiverem unidas ponto a ponto. **[Os participantes tentam fundir, mas não conseguem. Para isso selecionam a opção segmento e sobrepõe sobre duas partes da superfície decomposta unindo-as]**

Michael: Conseguimos! Ela é menor e não cabe.

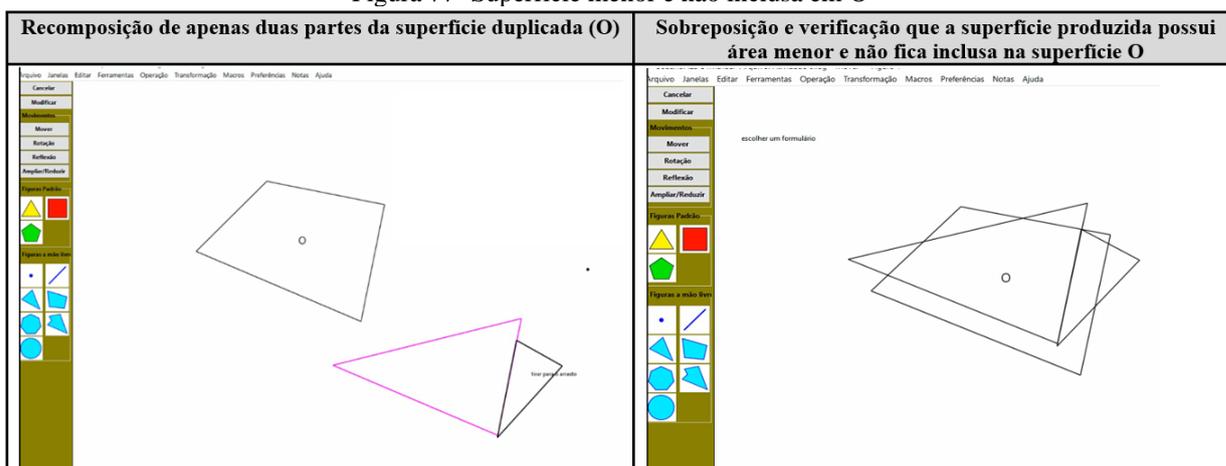
Iza: Graças a Deus!

Iza: Ela obedeceu aos dois critérios.

Michael: Sim.

Ao realizar essas ações, Iza e Michael produzem a superfície solicitada pela atividade, de maneira correta, obedecendo aos critérios, conforme apresenta a figura 77.

Figura 77- Superfície menor e não inclusa em O

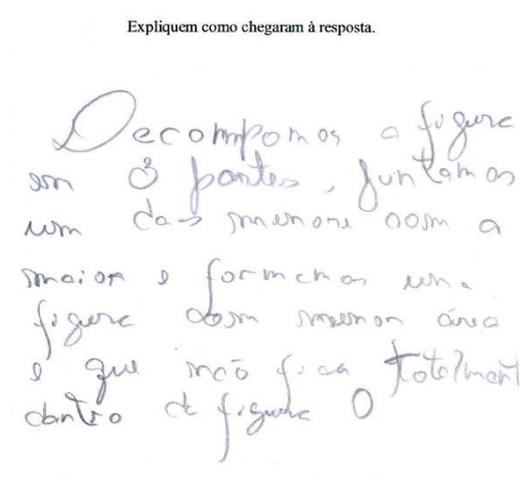


Fonte: Protocolo de resolução de Iza e Michael

Iza e Michael para resolver à atividade se apoiaram nas funcionalidades das ferramentas **Dividir**, **Decompor**, **Mover** e **Segmentos (Figuras a mão livre)**, e assim como Hughes, não utilizaram a **Nomear** para distinguir e caracterizar a superfície S. As funcionalidades das ferramentas utilizadas por Iza e Michael, nessa atividade, já estavam apropriadas de atividades anteriores.

Em relação aos percursos resolutivos que nortearam a produção da superfície S, de maneira correta, a figura 78 expõe a explicação de Iza e Michael.

Figura 78- Procedimentos de Iza e Michael para obtenção da resposta na atividade 6



Fonte: Protocolo de resolução de Iza e Michael

Os procedimentos de resolução adotados por Hughes, Iza e Michael foram referenciados na análise a priori. Acreditamos que apesar da complexidade da atividade a familiarização com algumas ferramentas os ajudaram em sua construção.

Ana e Magali não tiveram êxito na resolução dessa atividade. Inferimos que essa dupla não compreendeu o que era solicitado, e como consequência não desenvolveu esquemas adequados para responder corretamente à atividade. Essa ideia pode ser compreendida por meio do diálogo.

Magali: Produzam uma superfície S cuja área seja menor que a de O , mas não seja possível posicionar S de modo que fique totalmente contida no interior de O . [Lê o enunciado da atividade 6]

Magali: Eu acho que devemos adicionar várias figuras dentro dessa figura O , e encontramos o resultado. Vamos tentar?

Ana: Qual figura?

Magali: Esse de 5 lados [Destacando o pentágono]

Ana: Eita! Lendo novamente o enunciado entendi que não adianta a gente apenas colocar as superfícies dentro de O . É necessário criar uma superfície.

Magali: Mas primeiro a gente faz assim, adiciona várias figuras dessas e depois produz a superfície até porque ela deve ser menor. Ela não pode ficar totalmente contida. Essas figuras são pentágonos regulares

Ana: Vai ultrapassar, não vai dá!

Magali: Vamos tentar com o losango.

Ana: Vamos! [Alteram a tipologia de superfície unitária]

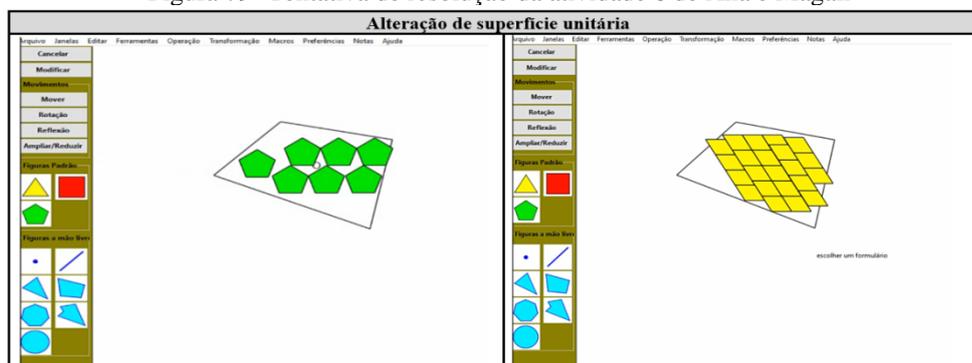
Magali: A gente pode organizar as superfícies unitárias dentro de O para depois produzirmos sobre elas uma figura, que será menor e não ficará inclusa em O .

Ana: Com certeza isso está errado. Nem sei bem como justificar no papel. [Riem]

Magali: Vamos deixar assim, sem produzir uma superfície F .

Observamos, por meio da interação verbal, que a primeira estratégia destacada pelos participantes foi a do ladrilhamento, tomando o pentágono regular como superfície unitária. Sem sucesso, a dupla altera o tipo de superfície unitária, como expresso na figura 79, na busca de criar uma superfície de área menor e não inclusa em O , por meio de aspectos numéricos.

Figura 79- Tentativa de resolução da atividade 6 de Ana e Magali



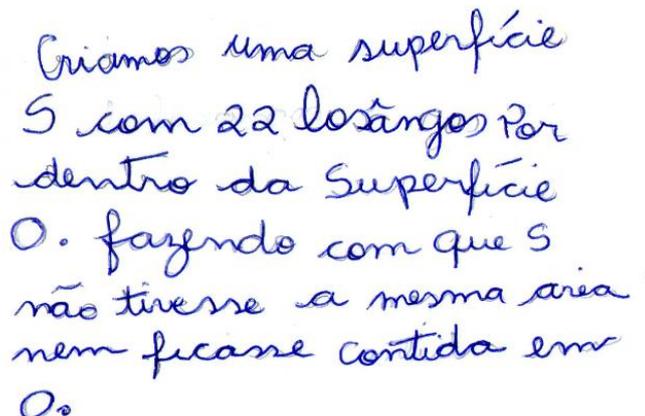
Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

Visualmente é possível perceber que a área da superfície composta pela justaposição dos losangos amarelos é menor que a de O e na posição em que se encontra, a nova superfície não está contida na superfície O . Entretanto, não temos evidências de que ao alterar sua

posição não seria possível que ficasse totalmente incluída na superfície inicial. Essa questão não foi refletida pela dupla.

Na figura 80, consta a explicação dos procedimentos adotados por Ana e Magali

Figura 80- Explicação dos procedimentos adotados no *Apprenti Géomètre 2* por Ana e Magali



criamos uma superfície
S com 22 losângos por
dentro da Superfície
O. fazendo com que S
não tivesse a mesma área,
nem ficasse contida em
O.

Fonte: Protocolo de resolução de Ana e Magali

Não fica claro nessa explicação em que se baseia a conclusão da dupla sobre o fato da área da nova superfície formada com 22 losângos (superfície unitária) ser menor que a da superfície O.

Destacamos que as ferramentas **Pentágono** e **losango (Figuras Padrão)** foram apropriadas por Ana e Magali durante o ato de resolução dessa atividade. Essa ação se distancia das escolhas resolutivas de Hughes, Iza e Michael que optaram por usar ferramentas já manipuladas e usadas de atividades anteriores.

Os esquemas desenvolvidos por Hughes, Iza e Michael para resolver essa atividade correspondem ao que descrevemos na análise a priori. Em oposição, Ana e Magali utilizaram procedimentos não esperados.

O quadro 43 sintetiza a comparação entre as estratégias e ferramentas discutidas na análise a priori e as resoluções dos participantes no ambiente do *software*.

Quadro 43- Quadro comparativo da atividade 6 das análises a priori com as mobilizações dos licenciandos

Licenciandos	Esquemas		Ferramentas		
	Adotados na resolução	Análise a priori		Suporte para responder corretamente	Análise a priori
		Aspecto geométrico	Aspecto numérico		
Ana e Magali	Aspecto numérico	(1) Duplicar a superfície O, decompô-la em três partes e recompor apenas duas para produzir uma superfície de menor área e não inclusa	Tentamos bloquear o aspecto numérico	Pentágono e losango (Figuras Padrão)	Figuras a mão livre (Polígonos); Dividir; Decompor; Fundir; Reflexão; Rotação; Nomear; Mover
Iza e Michael	Aspecto geométrico (1)			Duplicar; Dividir; Decompor; Mover; segmentos	
Hughes	Aspecto geométrico (1)			Duplicar; Dividir; Decompor; Mover; Fundir; Reflexão; Colorir fundo;	

Fonte: Dados da pesquisa

Os procedimentos matemáticos adotados por Ana e Magali para produzir a superfície S, de menor área e não inclusa na superfície O, por meio do aspecto numérico não são plenamente justificados, uma vez que o argumento se baseia na medida da área da nova superfície, tomando a unidade definida por losangos, mas não faz nenhuma alusão à medida da área da superfície O, usando essa mesma unidade. A intenção de bloquear procedimentos numéricos fez com que na análise a priori fossem privilegiados os procedimentos geométricos.

Destacamos no quadro 44 indícios dos processos de instrumentalização e instrumentação mediante as interligações entre os polos Sujeito-Instrumento-Objeto.

Quadro 44- Análise dos processos de instrumentalização e instrumentação sob a ótica do modelo SAI na atividade 6

Processos da Gênese Instrumental		Participantes	Características
Instrumentalização	[S-O]	Ana e Magali	A dupla aderiu a ideia do ladrilhamento, mas não obteve sucesso na condução da produção da superfície S.
		Iza e Michael	Os licenciandos para produzir a superfície S, de área menor e não inclusa em na superfície O, adotaram técnicas geométricas (decomposição e recomposição) durante a resolução da atividade.
		Hughes	
	[I-O]	Ana e Magali	Apesar das ferramentas terem sido úteis, as estratégias matemáticas associadas e aplicadas sobre elas conduziram os licenciandos a uma resposta incorreta.
		Iza e Michael	Os participantes mobilizaram esquemas resolutivos no qual as ferramentas do <i>Apprenti Géomètre 2</i> fossem eficazes para obtenção do resultado correto da atividade.
		Hughes	
	[S(i)-O]	Ana e Magali	Os participantes desenvolveram esquemas com base nas funcionalidades das ferramentas do programa na tentativa de conseguir a resposta correta da atividade.
		Iza e Michael	
		Hughes	
Instrumentação	[S-I]	Ana e Magali	O uso das ferramentas do <i>Apprenti Géomètre 2</i> durante a resolução da atividade atendeu aos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos.
		Iza e Michael	
		Hughes	

Fonte: Dados da pesquisa

O quadro 44 expõe os elementos dos dois processos da Gênese Instrumental que estiveram presentes no decorrer da resolução dessa atividade sobre produção de superfície.

Apoiados por essas informações, modelizamos os esquemas desenvolvidos pelos participantes que deram suporte para produção da superfície solicitada na atividade. Os resultados dessa categorização estão descritos no quadro 45.

Quadro 45- Modelização dos esquemas desenvolvidos pelos licenciandos na atividade 6

Atividade 6	
Ana e Magali	Produzir uma superfície S auxiliados pelo aspecto da medição
Iza e Michael	Produzir uma superfície S, de área menor e não inclusa na superfície O, por meio da duplicação e decomposição da superfície O (em três partes) e recomposição (de apenas duas partes) confrontadas pela reflexão de modo a assumir uma posição distinta da inicial
Hughes	

Fonte: Dados da pesquisa

As modelizações destacam que os esquemas de Hughes, Iza e Michael se assemelharam ao adotarem aspectos geométricos, e em contrapartida temos as ideias de Ana e Magali que adotam o uso da produção da superfície por meio da medição da área.

Os esquemas desenvolvidos por Ana e Magali não foram discutidos na análise a priori, uma vez que, ao propormos a presente atividade tentamos bloquear o aspecto numérico.

O próximo tópico visa discutir a interação dos licenciandos em matemática com o *software*, sob a ótica da TI de Rabardel (1995) e destacando os processos de instrumentalização e instrumentação, não mais atividade por atividade e sim considerando toda a vivência ao realizarem o conjunto de atividades sobre área proposto.

4.2 Participantes, Apprenti Géomètre 2 e objeto matemático: uma análise da vivência

Nesse tópico, discutimos os principais aspectos acerca da interação entre os polos **sujeito** (licenciandos em matemática) - **artefato** (*Apprenti Géomètre 2*) - **objeto matemático** (área).

Analisando toda a interação dos licenciandos com o *software* para resolver o conjunto de atividades, de acordo com a TI de Rabardel (1995), identificamos características dos três tipos de Esquemas de Utilização (EUT) – esquemas de uso (EU), esquemas de atividade instrumentada (EAI) e esquemas de atividade coletiva instrumentada (EACI). Os EAI que

estão associadas às atividades primárias foram as ações exercidas pelos participantes sobre as ferramentas no ambiente do *Apprenti Géomètre 2* para a efetivação das atividades sobre área. Os EU, relacionados às atividades secundárias, emergiram mediante as manipulações das funcionalidades próprias do *Apprenti Géomètre 2* pelos licenciandos contribuindo para responder a atividade (RABARDEL, 1995).

No decorrer dessa pesquisa estiveram também presentes os EACI. Por meio dos diálogos entre os participantes observamos o surgimento de esquemas, as reflexões sobre quais ferramentas usariam a fim de alcançar a resolução, e outras características que norteiam os EACI. De modo específico, a interação dos participantes propiciava ações coletivas com o mesmo propósito (resolver corretamente as atividades). Vale destacar que Hughes não se enquadra nessa categoria porque realizou o estudo individualmente.

Além dos tipos de EUT que emergiram ao longo do estudo verificamos a partir das respostas dos participantes que houve um processo cíclico em relação a instrumentalização e instrumentação. Não observamos predominância de um dos processos que integram a Gênese instrumental. Uma esquematização que sintetiza esse comportamento está na figura 81.

Figura 81- Comportamento da instrumentalização e instrumentação ao longo do conjunto de atividade



Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos resultados da pesquisa

Nossa interpretação é que a diversidade dos tipos de situação permitiu o uso de esquemas distintos para obtenção de sua resposta, exigindo estratégias resolutivas similares, mas diferentes.

A organização das atividades foi pensada de modo a favorecer que os licenciandos explorassem uma maior variedade de ferramentas identificando suas limitações e

possibilidades para o trabalho com a grandeza área. Por exemplo, as atividades 3 e 6 abarcaram situações de produção de superfícies, entretanto propiciavam a mobilização de esquemas para elaborar uma resposta. Enquanto a atividade 3 solicitava a produção de uma superfície F com a mesma área que a dada (J), na atividade 6 foi pedido que os participantes produzissem uma superfície S, de área menor e não inclusa na superfície O.

Em relação à interação dos licenciandos com as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, a seguir, expomos o quadro 46 sintetizando o processo de manipulação e apropriação pelos participantes ao longo da vivência resolutiva no conjunto de atividade.

Quadro 46- Quadro síntese dos procedimentos e ferramentas adotadas pelos licenciandos

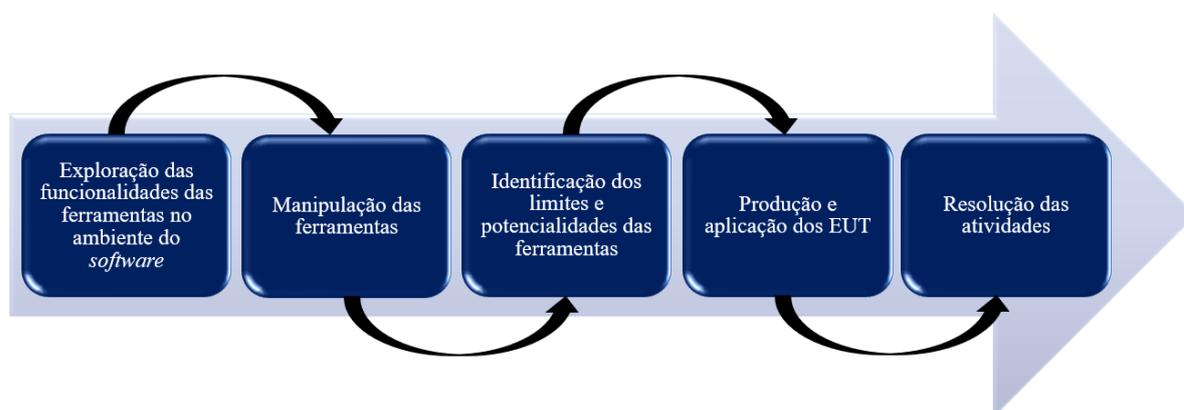
Atividades	Ferramentas descritas pelo pesquisador nas análises a priori		Participantes/ Procedimentos resolutivos	Ferramentas manipuladas e Apropriadas ao longo das atividades
	Aspectos geométricos (AG)	Aspectos numéricos (AN)		
Atividade 1	Dividir; Decompor; Fundir; Rotacionar; Reflexão; Mover; Nomear	Malha quadriculada; Mover; Duplicar; Rotação; Reflexão; Figuras padrão (Triângulo isósceles); Figuras a mão livre (Triângulo isósceles; Segmentos)	Ana e Magali (AN)	Ana e Magali; Iza e Michael; Hughes: Mover; Dividir; Duplicar; Decompor; Reflexão; Malha quadriculada
			Iza e Michael (AN)	
			Hughes (AN)	
Atividade 2	Não eram visadas resoluções geométricas	Malha isométrica; Segmentos; Duplicar; Reflexão; Mover	Ana e Magali (AN)	Figuras Padrão (Quadrado e triângulo isósceles); Figuras a mão livre (Polígonos; Segmentos);
			Iza e Michael (AN)	
			Hughes (AN)	
Atividade 3	Dividir; Decompor; Reflexão; Rotação; Fundir; Mover; Colorir Fundo; Nomear	Malha quadriculada; Figuras padrão (Triângulo isósceles); Segmentos; Figuras a mão livre (Triângulo isósceles); Duplicar; Mover	Ana e Magali (AN)	Ana e Magali; Hughes: Colorir borda e Colorir fundo
			Iza e Michael (AN)	
			Hughes (AG; AN)	
Atividade 4	Dividir; Decompor; Mover; Reflexão; Rotação; Fundir	Não eram visadas resoluções numéricas	Ana e Magali (AG)	Ana e Magali; Iza e Michael: Rotacionar
			Iza e Michael (AN)	
			Hughes (AG)	
Atividade 5	Não eram visadas resoluções geométricas	Malha quadriculada; Figuras a mão livre (triângulo isósceles); figuras padrão; duplicar; reflexão e mover	Ana e Magali (AN)	Iza e Michael; Hughes: Malha isométrica
			Iza e Michael (AN)	
			Hughes (AN)	
Atividade 6	Figuras a mão livre (Polígonos); Duplicar; Dividir; Decompor; Fundir; Reflexão; Rotação; Nomear; Mover	Não eram visadas resoluções numéricas	Ana e Magali (AN)	Hughes: Nomear
			Iza e Michael (AG)	
			Hughes (AG)	

Fonte: Dados da pesquisa

Destacamos, com base no quadro 46, que os participantes utilizaram conhecimentos matemáticos direcionados a estratégias geométricas (decomposição, recomposição, sobreposição e inclusão) no decorrer da vivência. Entretanto houve predominância de estratégias que enfatizavam os aspectos numéricos (em especial o uso do ladrilhamento e de fórmulas) para responder o conjunto de atividades.

Quanto ao uso do *Apprenti Géomètre 2*, apesar do curto tempo que os licenciandos tiveram para se familiarizar com as funcionalidades das ferramentas, o processo de apropriação ocorreu à medida que as ações²² exercidas no ambiente do *software* conduziam a resolver as atividades. Uma esquematização associada a essa vivência que sintetiza o percurso da apropriação das ferramentas pelos participantes consta na figura 82.

Figura 82- Esquematização da vivência pelos participantes para resolver às atividades



Fonte: Elaborado pelo autor

As ferramentas que serviram de aporte para a resolução correta das atividades foram consideradas apropriadas quando os participantes exploraram no ambiente do *Apprenti Géomètre 2* suas funcionalidades, identificaram suas limitações e potencialidades de uso e por meio delas produziram esquemas sobre suas funcionalidades articulando-as com o objetivo de alcançar a resposta. Esse percurso mostra indícios dos processos de instrumentalização e instrumentação pode ser compreendida por meio da figura 82.

A resolução de uma atividade mediada por recursos não impossibilita os participantes de explorarem outras ferramentas do *software* e destacarem que existiriam outros procedimentos e funcionalidades que conduziriam corretamente à resposta. Essa ideia converge com a ênfase da TI (RABARDEL, 1995) que destaca que um mesmo artefato pode

²²Exploração, manipulação e uso das ferramentas mediada por esquemas.

ser transformado em distintos instrumentos a depender das ações do usuário exercidas sobre a ferramenta em uso.

Ao analisarmos o conjunto de ações dos participantes, com base na figura 82, sob a ótica do modelo SAI, que integra a TI (RABARDEL, 1995), verificamos que os conhecimentos dos licenciandos em matemática em relação ao conteúdo de área os auxiliaram na escolha das ferramentas e procedimentos para resolução do conjunto de atividades. Essa correspondência nos permitiu identificar os polos Sujeito e Objeto [S-O], sendo possível destacar que os conhecimentos matemáticos que os participantes investigados possuem sobre área de figuras planas foi suficiente para resolver as atividades propostas. Mais do que acertos e erros, nosso foco foi analisar o processo da apropriação pelos licenciandos ao produzirem esquemas auxiliados a partir das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* para obter as resoluções das atividades.

Quanto à associação entre os polos Instrumento - Objeto [I-O] concernente à exploração pelos licenciandos das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2*, permitindo conhecer seus limites e possibilidades, os participantes iniciaram a elaboração e o desenvolvimento dos esquemas apoiados pelas ferramentas do programa para resolver ao conjunto de atividades.

O outro aspecto sobre a instrumentalização, associada à relação entre Sujeito e Objeto conduzida pelo instrumento [S(i)-O] observamos que permitiu aos participantes associarem seus conhecimentos matemáticos e interligá-los às ferramentas do *software* para resolver corretamente as situações propostas sobre área. Ainda foi possível verificar que os participantes da pesquisa não manifestaram dificuldades em relação ao conteúdo trabalhado favorecendo uma maior agilidade na resolução das atividades.

Quanto à instrumentação, processo direcionado pela articulação entre Sujeito-Instrumento [S- I], observamos que os licenciandos se apoiaram nos esquemas desenvolvidos mediante a exploração dos limites e possibilidades das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* utilizando-os para resolver o conjunto de atividades.

É válido destacar que houve indícios do processo de transformação de artefato a instrumento por parte dos participantes. O fato de os licenciandos não terem familiaridade com o programa nos permitiu destacar que ao serem confrontados a um conjunto de atividades sobre a grandeza área foi necessário simultaneamente produzir esquemas e aplicá-los para resolver as atividades.

4.3 O *Apprenti Géomètre 2*: limitações e potencialidades para a abordagem de área

Nessa pesquisa, o *Apprenti Géomètre 2* foi o artefato no qual os participantes se apoiaram para resolver o conjunto de atividades. Portanto, ao verificar as ações dos **sujeitos** (licenciandos em matemática) sobre o **instrumento** (*Apprenti Géomètre 2*) a fim de obter as respostas às situações sobre o **objeto Matemático** (atividades de área) consideramos que esse recurso tecnológico foi útil para o propósito dessa vivência.

➤ **Potencialidades do *Apprenti Géomètre 2* para abordar conhecimentos matemáticos:**

- Disponibilizar para os usuários ferramentas que podem produzir figuras auxiliados pelo *mouse* no ambiente do *Apprenti Géomètre 2* (Figuras a mão livre);
- Disponibilizar para o usuário figuras com formatos predefinidas (Figuras Padrão);
- Conceber cinco Menus (A, B, C, AB e AC);
- Possuir três idiomas (Inglês, Francês e Português/Br) para acesso ao ambiente do *software*;
- Possuir tangram, poliminós, cubos e outros para explorar conteúdos da matemática;
- Possibilitar abrir diversas janelas de manipulação do *software*;
- Propiciar ferramentas fáceis para manipulação;
- Permitir ao usuário realizar o login como Professor ou aluno;
- Não ter uma interface sobrecarregada de informações;
- Ser um *software* gratuito e disponível para distintos sistemas operacionais.

As potencialidades descritas permitem aos usuários trabalhar com distintos conteúdos matemáticos e de outras áreas de conhecimentos no ambiente do *Apprenti Géomètre 2*.

➤ **Limitações das ferramentas do Menu AB do *Apprenti Géomètre 2* para a abordagem de área**

Nessa seção, elencamos as limitações das ferramentas do *software* que surgiram quando os licenciandos as manipulavam para responder o conjunto de atividades sobre área de figuras planas. Elas são discutidas a partir das ações dos participantes sobre as funcionalidades das ferramentas no ambiente do *Apprenti Géomètre 2*. Sendo assim, o quadro 47 expõe as ferramentas e suas limitações no presente estudo.

Quadro 47- Limitações do *Apprenti Géomètre 2*

Ferramentas	Características das limitações
Fundir	Somente recompõe figuras se os lados a serem unidos forem coincidentes
Decompor	Dissocia as partes da figura se for de diagonal a diagonal ou de diagonal a um ponto quando esse for marcado a partir da função Dividir
Dividir	Reparte o objeto matemático caso a ferramenta “Figuras Pontagudas” esteja ativada
Modificar	Caso algum tipo de malha esteja ativado a figura que está sendo modificada se direciona automaticamente a algum ponto
Mover	Caso algum tipo de malha esteja ativada e uma figura seja deslocada no ambiente do <i>software</i> , ela se moverá para coincidir sobre alguns pontos da malha. Ao produzir figuras no interior de outras e se algum de seus lados coincidirem não é possível movê-la.
Remover	Ao remover o objeto matemático original, independente se posteriormente ele foi duplicado, decomposto, nomeado, etc, todos os outros serão excluídos do ambiente do <i>software</i>

Fonte: Dados da pesquisa

As limitações discutidas das funções do *Apprenti Géomètre 2* foram provenientes da interação entre os **sujeitos** (S) e o *software* (I). Como sugestão para aprimoramento, nessa perspectiva, destacamos que o programa apenas disponibiliza dois tipos de malhas para o trabalho com áreas de figuras planas, não dispõe para o usuário ferramentas como lápis, borrachas, régua, compasso, ferramentas diretas para o cálculo de áreas de figuras planas, e uma própria funcionalidade para gravar em vídeo todas as manipulações realizadas em seus Menus (A, B, C, AB e AC).

➤ **Ferramentas manipuladas e apropriadas pelos licenciandos em matemática no estudo sobre área**

Nessa pesquisa consideramos que a apropriação das funcionalidades das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* emergiam quando os participantes por meio da manipulação identificavam seus limites e potencialidades de uso e por meio disso produziam esquemas e

os executavam no ambiente do *Apprenti Géomètre 2* obtendo corretamente a resposta de cada atividade. Sobre isso, temos o quadro 48.

Quadro 48- Ferramentas manipuladas e apropriadas pelos participantes da pesquisa

Licenciandos	Ferramentas manipuladas e apropriadas no estudo
Ana e Magali	Mover; Dividir; Duplicar; Decompor; Reflexão; Malha quadriculada; Colorir borda; Colorir fundo e Rotacionar
Iza e Michael	Mover; Dividir; Duplicar; Decompor; Reflexão; Malha quadriculada; Rotacionar e Malha isométrica
Hughes	Mover; Dividir; Duplicar; Decompor; Reflexão; Malha quadriculada; Colorir borda; Colorir fundo; Malha isométrica e Nomear

Fonte: Dados da pesquisa

Como podemos observar por meio do quadro 48 as ferramentas apropriadas pelos participantes foram quase em sua totalidade semelhantes, apesar das variedades de esquemas originados na resolução das atividades.

Destacamos que as ferramentas apenas manipuladas no estudo, como, por exemplo, Distância de magnetismo, estender e construir um ponto no centro, no qual os participantes não produziram esquemas a partir de suas limitações ou potencialidades para usá-las e que não serviram de aporte para resolução do conjunto de atividades não se classificaram como apropriadas.

4.4 Os resultados da pesquisa alcançaram a proposta investigativa?

Nessa seção discutimos de maneira breve se os questionamentos que nortearam a presente investigação foram respondidos a partir da interação dos licenciandos com o *Apprenti Géomètre 2* para responder às atividades. Essa pesquisa contemplou três indagações, sendo elas:

1ª- De que maneira os licenciandos em matemática se apropriaram das ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* para resolver atividades sobre a grandeza área?

Essa foi a primeira vivência dos participantes com o *software*. Com isso, ao serem confrontados com um conjunto de seis atividades sobre área, contemplando situações distintas

verificamos que primeiramente os participantes exploravam as ferramentas do Menu AB, desenvolviam esquemas por meio de seus limites e possibilidades, e exerciam ações com as ferramentas no *Apprenti Géomètre 2*.

2ª- Quais conhecimentos matemáticos foram mobilizados para efetivação das resoluções das atividades referentes à grandeza área?

Os resultados da pesquisa evidenciaram que os participantes mobilizaram conhecimentos de ênfase numérica (ladrilhamento e fórmulas) e geométrica (decomposição, recomposição, sobreposição e inclusão) para resolver ao conjunto de atividade, mas predominou o uso pelos participantes de estratégias numéricas. Esse resultado confirma o que havia sido observado em pesquisas anteriores (FERREIRA, 2010; PAULA, 2011; SANTOS, 2011; QUEVEDO, 2016; SILVA, 2016).

3ª- Há indícios de transformação do *Apprenti Géomètre 2* da condição de artefato à de instrumento, por parte dos licenciandos?

Sim! Por ser a primeira interação dos participantes com o *software* notamos que tanto o processo de instrumentalização quanto instrumentação ocorreram, e de maneira cíclica, como mostram as discussões nos tópicos anteriores desse capítulo.

Cabe destacar que a evolução de artefato para instrumento do *Apprenti Géomètre 2* emergiu na busca dos participantes para resolver o conjunto de atividades no qual eram instigados a manipularem suas ferramentas e sobre elas desenvolverem esquemas, apropriando-se de suas funcionalidades para alcançar a resolução correta.

Ao analisarmos as interligações entre os polos sujeito (licenciandos em matemática) - instrumento (*Apprenti Géomètre 2*) – objeto (Grandeza área) obtivemos elementos de resposta para os questionamentos dessa pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa está inserida no grupo de investigações que discutem a relevância do uso de tecnologias digitais como aliadas para o processo de ensino e da aprendizagem no âmbito da educação matemática. De modo mais preciso, nosso olhar se voltou para analisarmos como licenciandos em matemática (Sujeitos) exploraram as ferramentas do *Apprenti Géomètre 2* (Instrumento) para realizar atividades sobre área (Objeto matemático).

Adotamos a abordagem do conceito de área proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989) que discutem a relevância da construção desse objeto matemático por meio da articulação e diferenciação entre os polos geométrico, numérico e das grandezas propiciando uma reflexão sobre a distinção entre área e superfície, assim como área e número. Para essa exploração, no *Apprenti Géomètre 2*, tomamos como aporte as situações que dão sentido ao conceito de área (BALTAR, 1996; FERREIRA, 2010).

Por nos respaldamos em analisamos as diversas interações entre os polos **Sujeitos (S)** - **Instrumento (I)** - **Objeto (O)** adotamos como marco teórico a TI de Rabardel (1995). Sob a ótica do modelo SAI identificamos os processos (Instrumentalização e Instrumentação) que integram a Gênese Instrumental.

Em relação à revisão da literatura, às pesquisas sobre área destacam uma predominância sobre os aspectos numéricos para exploração de situações que envolvam esse objeto matemático (FERREIRA, 2010; PAULA, 2011; SANTOS, 2011; QUEVEDO, 2016; SILVA, 2016).

Quanto ao uso de *software* como contribuintes para o processo de ensino e de aprendizagem em matemática, pesquisas (GRAVINA, 2001; SILVA, 2012; SALIN, 2014; BALLEJO, 2015; COSTA, 2016) destacam que as tecnologias devem ser integradas pelo professor no ambiente da sala de aula com propósitos educacionais a fim de estimular a compreensão dos conteúdos trabalhados para os alunos. As ideias desses autores corroboram com o pensamento de Bittar (2011) que destaca a distinção entre integração e inserção de tecnologias na sala de aula e dá ênfase a integração por visar a partir de sua manipulação a compreensão e aprendizagem sobre algum conteúdo.

Quanto aos trabalhos que abordaram o conteúdo de área por meio de programas - Cabri-Géomètre II (BALDINI, 2004), GeoGebra (NUNES, 2011; BALEJO, 2015) e o *Apprenti Géomètre 2* (SILVA, 2016) - os resultados mostram que recursos tecnológicos são ferramentas úteis para explorar e propiciar a construção e a aprendizagem do conceito de área.

Diante da discussão sobre o uso de recursos tecnológicos e de que os aspectos numéricos são mais presentes nas resoluções de situações sobre área, nos detemos em realizar uma pesquisa que propiciasse os licenciandos a refletirem sobre quais estratégias resolutivas e ferramentas do *software* seriam necessárias para responder atividades de áreas. Com isso, essa pesquisa objetivou analisar o processo de apropriação do *Apprenti Géomètre 2* por licenciandos em Matemática na realização de atividades sobre a grandeza área.

Para apoiar a ideia central da pesquisa propomos quatro objetivos específicos, sendo eles: o primeiro objetivo específico se deteve em identificar indícios do processo de instrumentalização dos licenciandos ao manipularem o *Apprenti Géomètre 2* na resolução de situações que envolvam a grandeza área. Os resultados da pesquisa mostram que os participantes à medida que exploravam as ferramentas do Menu AB, e identificavam os limites e possibilidades de suas funcionalidades, mobilizavam esquemas para resolver a atividade. Essa ocorrência foi predominante em cada atividade do Estudo Experimental ao qual disponibilizava situações que estimulavam os licenciandos a usarem esquemas adaptados ou distintos, mas nunca iguais.

O segundo objetivo específico se propôs a identificar indícios do processo de instrumentação dos licenciandos ao manipularem o *Apprenti Géomètre 2* em situações que envolvam a grandeza área. Verificamos que após atribuir funções às ferramentas, os participantes as manipulavam no ambiente do *Apprenti Géomètre 2* na busca de responder as atividades. Esse momento ocorria posteriormente aos desenvolvimentos dos esquemas.

Sobre isso, podemos destacar que a instrumentalização e instrumentação ocorreram de maneira cíclica, independente dos procedimentos (geométricos ou numéricos) adotados pelos participantes da pesquisa.

Quanto ao terceiro objetivo específico modelizamos os esquemas de utilização desenvolvidos pelos licenciandos em matemática na realização de atividades sobre a grandeza área. Para isso, consideramos a estratégia predominante que favoreceu a resolução da atividade. Sendo assim, independente se os procedimentos estavam corretos ou incorretos as modelizamos destacando a finalidade das ações dos participantes sobre a atividade. Os resultados nessa etapa da pesquisa, novamente, ratificam a predominância dos aspectos numéricos no ato resolutivo dos participantes.

O quarto objetivo específico tratou-se de identificar possibilidades e limitações do *Apprenti Géomètre 2* para abordagem do conteúdo de área. Nesse momento da pesquisa apresentamos algumas ferramentas do Menu AB que disponibilizaram restrições e potencialidades nas ações dos licenciandos. Ainda é válido frisar que propomos algumas

ferramentas que o *Apprenti Géomètre 2* não possui e que seriam relevantes para proporcionar ao usuário uma maior dinamicidade na interação com conteúdos em seu ambiente, por exemplo, lápis, borrachas, régua, compasso, ferramentas diretas para o cálculo de áreas de figuras planas, e uma funcionalidade para gravar em vídeo todas as manipulações realizadas nos Menus (A, B, C, AB e AC).

Nessa perspectiva, ressaltamos que o *Apprenti Géomètre 2* é um recurso tecnológico acessível para explorar a abordagem do conceito de área. Algumas de suas ferramentas poderiam facilitar a resolução das atividades, como é o caso do **Fundir** que une apenas figuras com lados congruentes, mas entendemos apesar das limitações o *software* trouxe contribuições significativas para a resolução das atividades do Estudo Experimental, sobre área.

As opções teórico-metodológicas nos permitiram produzir o instrumento para análise e discussões dos resultados atendendo as finalidades (questionamentos e objetivos) que a presente pesquisa se propôs alcançar. Os resultados mostraram que os participantes privilegiaram aspectos numéricos (ladrilhamento e uso de fórmulas) para resolver ao conjunto de atividade. Com isso algumas reflexões emergiram, entre elas:

- Por que licenciandos em matemática ao resolverem atividades sobre área, em um ambiente distinto do papel e lápis, privilegiaram os aspectos numéricos (ladrilhamento e uso de fórmulas)?
- De que maneira se dá a abordagem do conteúdo de área no ensino superior?
- Será que a predominância da ênfase resolutiva dos aspectos numéricos, como apontam as pesquisas, é um reflexo da aprendizagem na educação básica?
- Por que os procedimentos numéricos são mais utilizados como estratégias de resoluções em situações de áreas?
- Como o ensino de área está sendo lecionado na educação básica?

Com esta pesquisa, desejamos contribuir para o conjunto de investigações que voltam seu olhar para o âmbito das Grandezas e medidas, e as que discutem sobre a relevância do uso de recursos tecnológico no ambiente da sala de aula de matemática.

Ansiamos, ainda, que essa investigação possa estimular pesquisadores da educação matemática a discutir e refletir um pouco mais sobre a grandeza área, em qualquer etapa de escolaridade, e/ou com qualquer público, sendo eles estudantes ou professores. Nessa perspectiva, sugerimos que futuros trabalhos possam:

- Realizar uma análise comparativa das ferramentas de distintos programas de GD identificando seus limites e potencialidades para o estudo de área;
- Utilizar o *Apprenti Géomètre 2* em pesquisas sobre os conteúdos de frações, perímetro e figuras geométricas;
- Verificar, sob a ótica da Orquestração Instrumental, (TROUCHE, 2004), como professores planejam e lecionam o conceito de áreas de figuras planas na educação básica;
- Desenvolver programas para trabalhar conteúdos de matemática considerando as possibilidades e as limitações do *Apprenti Géomètre 2*;
- Investigar quais esquemas de ação coletivas instrumentais são produzidos por licenciandos em matemática quando eles são confrontados com distintos recursos para resolver atividades de áreas;
- Investigar o artefato simbólico (grandeza área) com professores de matemática no ambiente papel e lápis, tecnológico e manipulativo.

Almejamos que as discussões da presente pesquisa possam ser relevantes para a sociedade que discutem sobre o uso de tecnologias digitais com conhecimentos matemáticos.

Desejamos que os resultados apresentados nessa pesquisa possam se mostrar úteis para que pesquisadores reflitam maneiras de propor a professores e estudantes, das mais variadas etapas de escolaridade, que os aspectos numéricos (ladrilhamento e uso de fórmulas) são essenciais para abordar o conteúdo de área, no qual permite representar a medida da área da superfície pelo par (número, unidade de medida), mas não são os únicos. Com isso, destacamos a relevância dos aspectos geométricos (decomposição, recomposição, sobreposição e inclusão) para o trabalho com as áreas de figuras planas. A partir dessa realidade observamos a necessidade de disseminar ainda mais os estudos acerca da área enquanto grandeza autônoma sob a ótica de Douady e Perrin-Glorian (1989) na tentativa de diminuir as dificuldades relacionadas sobre esse objeto matemático.

Como uma limitação dessa pesquisa temos o não aprofundamento a respeito dos debates da atualidade sobre o eixo de formação de professores. Entendemos que ao trabalharmos com licenciandos em matemática, professores em formação inicial, nos limitamos em considerar que apenas a interação entre os sujeitos com os experimentos, sem um aprofundamento, fosse um aporte para sua formação profissional.

REFERÊNCIAS

- BALDINI, L. A. F. **Construção do Conceito de Área e Perímetro**: Uma sequência didática com auxílio de software de Geometria Dinâmica. 2004. 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Física e Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/dissertacao_loreni.pdf>. Acesso em: 13 de novembro de 2018.
- BALLEJO, C. C. **Aprendizagem de conceitos de área e perímetro com o Geogebra no 6º ano do ensino fundamental**. 2015. 143 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <<http://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/6207/2/471730%20-%20Texto%20Completo.pdf>> . Acesso em: 19 de outubro de 2018.
- BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1996.
- BELLEMAIN, F. A transposição informática na engenharia de softwares educativos. **Anais...** 1 Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Serra Negra, 2000. Disponível em: <http://www.academia.edu/3217975/A_transposi%C3%A7%C3%A3o_inform%C3%A1tica_na_engenharia_de_softwares_educativos>. Acesso em: 12 de abril de 2018.
- BELLEMAIN, P.; LIMA, P. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Ed. Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat, 2002.
- BITTAR, A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 157-171, 2011. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/11.pdf>>. Acesso em: 10 de março de 2019.
- BITTAR, M. Uma proposta para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica de professores de Matemática. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, V.6, Nº 3, p. 1-20, 2015. Disponível em: <<https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/viewFile/2252/1820>>. Pdf. Acesso em: 20/12/2019.
- BRASIL, S. E. F. **Base Nacional Curricular Comum - BNCC**. Brasília, 2017, p.471.
- BRASIL, S. E. F. **Base Nacional Curricular Comum - BNCC**. Brasília, 2018, p.600.
- BRASIL, C. N. E. Conselho Pleno. **Resolução nº 2/2015**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília, DF: CNE, 2015.
- COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental**: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 243 f. Dissertação (Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Recife, 2016. Disponível em:

<https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/17129/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o_Andr%C3%A9Pereira.pdf>. Acesso em: 20 de junho de 2018.

CREM, A. G. **Grandeurs, Fractions et Mesures**. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, 2003.

CREM, Apprenti Géomètre. **Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages**. Tome 2. Nivelles, Bélgica, Ministère de la Communauté Française, 2007.

CREM, A. G. **Apprenti Géomètre, Un Instrument Pour L'apprentissage De La Geometrie Et De La Mesure Des Grandeurs**, p. 895- 906, 2009.

CREM. **Guide utilisateur du logiciel**. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Juillet, 2019.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane**. Educational Studies in Mathematics.v.20, n.4, p. 387-424, 1989.

FERREIRA, L. de F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação). Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/3972/1/arquivo206_1.pdf>. Acesso em 09 de maio de 2018.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 186 p. Tese de doutorado (informática em educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/2545/000321616.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 13 de março de 2018.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: Um novo ritmo da informação**. 9. ed. Campinas: Papirus, 2012.

KOTALAWALA, N.; MELANCIA, G. **Comment jouer sur les variables didactiques pour adapter les exercices d'aire des moyens d'enseignement COROME de la 8PH pour les élèves présentant des difficultés en mathématiques?**. Maîtrise: Univ. Genève, 2016

MACHADO, J. P. de A. **A significação dos conceitos de perímetro e área, na ótica do pensamento reflexivo, trabalhando em ambientes de geometria dinâmica**. 177 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em: <https://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacoes_2011/Diss_Jose_Paulo_Asevedo.pdf>. Acesso em: 01 de maio de 2019.

MIRANDA, S. M. C. **Perímetro e área: análise de pesquisas sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica**. 2018. 129 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2018.

Disponível em:
http://tede.unioeste.br/bitstream/tede/3815/5/Steffani_Maiara_Colaco_Miranda_2018.pdf.
 Acesso em 27 de abril de 2019.

NUNES, J. M. V. **A prática da argumentação como método de ensino: o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas.** 2011. 220 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10891>. Acesso em 28 de outubro de 2018.

PACHÊCO, F. F. F.; SILVA, A. D. P. R. EXPLORANDO POLIEDROS PLATÔNICOS POR MEIO DO POLY: Um Estudo à Luz da Teoria da Aprendizagem Significativa. **Anais...** XV congresso Internacional de Tecnologia na Educação. Olinda, 2017. Disponível em: <http://demo.cubo9.com.br/senac/pdf/poster/049.pdf>. Acesso em 27 de janeiro de 2019.

PADILHA, L. C. S.; BITTAR, M. A. Apropriação da Tecnologia por Professores de Matemática para Fins Pedagógicos: uma abordagem instrumental. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática - XI ENEM, 2013, Curitiba. **Anais...** do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013. p. 1-15.

PAULA, A. P. M de. **Ensino de área de figuras planas por atividades.** 2011. p.233. Dissertação (Educação). Universidade do Estado do Pará. Belém, 2011. Disponível em : https://paginas.uepa.br/mestradoeducacao/index.php?option=com_rokdownloads&view=file&task=download&id=315:dissertao-andrey-patrick-monteiro-de-paula. Acesso em 21 de março de 2019.

PAULO, G. P. **Uma proposta para o Ensino e Aprendizagem dos Conceitos de Área de Círculo de Perímetro de Circunferência.** 2012. p. 148. Mestrado profissional em Ensino de Matemática. São Paulo, 2012. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10916/1/Gilberto%20Pereira%20Paulo.pdf>. Acesso em 21 de março de 2019.

QUEVEDO, G. A. **Compreensão dos conceitos de Área e Perímetro: um estudo de caso.** 2016. p. 135. Mestrado Profissionalizante em Ensino da Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2016. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/149219/001005232.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 21 de março de 2019.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.** Paris: Armand Colin, 1995. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document>. Acesso em 12 de maio de 2018.

SANTOS, E.S.C. dos. **A construção do conceito de área e procedimentos para sua medida no quinto ano do ensino fundamental: atividades fundamentadas na história da matemática.** 2014. p. 317. Tese (Educação). Universidade de Brasília. Brasília, DF. 2014. Disponível em: http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/22223/1/2014_EdileneSimoesCostadosSantos.pdf. Acesso em 21 de fevereiro de 2019.

SALIN, E. B. **Matemática Dinâmica: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas.** 2014. 206 p. Dissertação (ensino de matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2014. Disponível em:

<<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/108425/000948600.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 24 de março de 2018.

SANTOS, J. A. S. dos. **Problemas de ensino e de aprendizagem em perímetro e área: um estudo de caso com professores de matemática e alunos de 7ª série do ensino fundamental.** 2011. p. 117. Dissertação (Educação). Universidade Metodista de Piracicaba. Piracicaba/SP, 2011. Disponível em: <https://www.unimep.br/phpg/bibdig/pdfs/docs/26092011_144051_jamile.pdf>. Acesso em: 19 de fevereiro de 2019.

SANTOS, M. R. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas.** Dissertação (Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2005. Disponível em: <<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/bitstream/tede2/5929/2/Marilene%20Rosa%20dos%20Santos.pdf>>. Acesso em 12 de outubro de 2018.

SANTOS, M. R. **A Transposição Didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.** 2015. 281 f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015. Disponível em: <<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede/bitstream/tede2/5375/2/Marilene%20Rosa%20dos%20Santos.pdf>>. Acesso em: 07 de abril de 2018.

SILVA, G. H. G. Ambientes de Geometria Dinâmica: Potencialidades e Imprevistos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia.** V, 5, nº 1, 2012. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/900/2084>>. Acesso em: 12 de outubro de 2018.

SILVA, A. D. P. R. **Ensino e Aprendizagem de Área Como Grandeza Geométrica: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no *Apprenti Géomètre* 2 no 6º ano do ensino fundamental.** 2016. 317 f. Dissertação (Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação. Recife, 2016. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/17427>>. Acesso em 12 de maio de 2018.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, pp. 133 a 170, 1990.

APÊNDICE A: ATIVIDADES DO ESTUDO PRELIMINAR

Algumas considerações sobre o estudo:

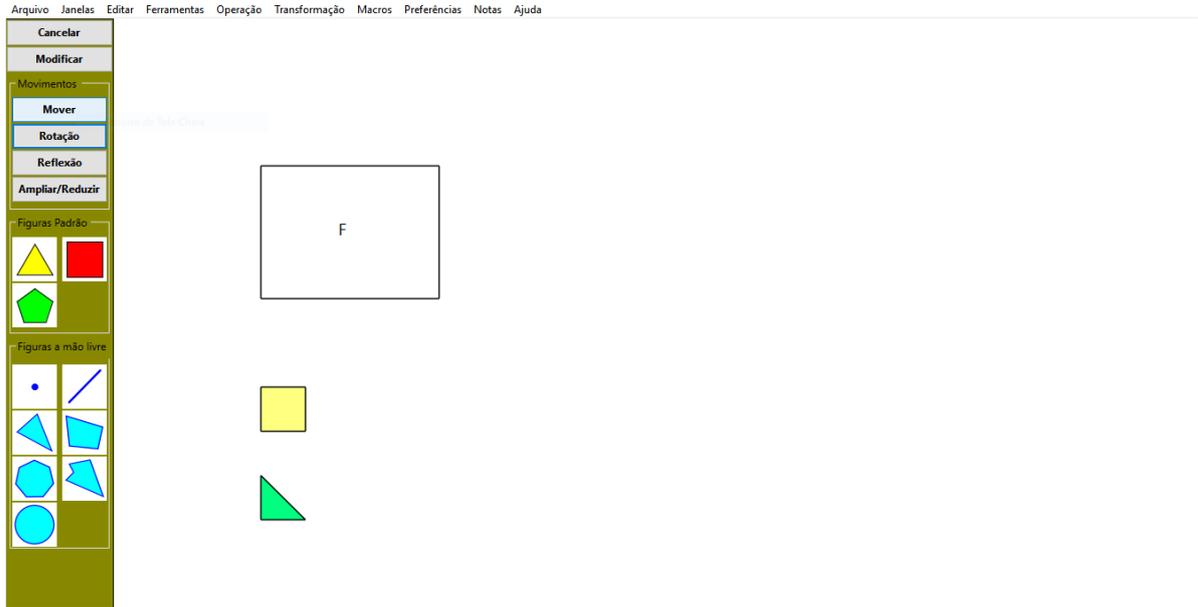
- ✓ Os participantes devem ser licenciandos em matemática;
- ✓ O conteúdo abordado é o da grandeza área;
- ✓ O trabalho com o conteúdo contempla as situações (comparação, medida, mudança de unidade e produção) de áreas;
- ✓ Para o presente estudo será aplicado uma atividade no qual concebe quatro questões. Cada questão corresponde a uma situação que dá sentido ao conceito de área enquanto grandeza geométrica;
- ✓ As questões devem ser resolvidas com o auxílio do Aprentti Géomètre 2;
- ✓ Para identificar quais ferramentas do Aprentti Géomètre 2 os licenciandos usaram para resolver as quatro questões que compõem a atividade será realizada a captura de tela do notebook por meio do software aTubeCatcher;
- ✓ A devida impressão serve como apoio para auxiliar os licenciandos a compreenderem o que cada questão objetiva para resolvê-la.

Observações práticas para resolução da atividade:

- ✓ 1º Vá na área de trabalho do notebook e clique no ícone do programa (Aprentti Géomètre 2). Após o software realizar sua reprodução para a tela inicial, clique na opção “aluno” e digite Licenciandos, selecione o idioma e menu com o qual deseja trabalhar;
- ✓ 2º Após a escolha do Menu, idioma e adicionar o nome “licenciandos”, clique em OK.
- ✓ 3º Com o menu aberto, clique em “arquivo” selecione a opção “abrir”. Feito isso, o Aprentti Géomètre 2 irá direcionar os licenciandos a área de trabalho do notebook. Nesse sentido, selecione a pasta nomeada de “Atividades do Estudo Preliminar”;
- ✓ 4º É válido mencionar que esse procedimento deve ser realizado para as quatro questões. Pois cada questão será resolvida individualmente (uma por vez)
- ✓ Os licenciandos estão disponíveis para alterar o menu, caso desejem. Posteriormente a aos procedimentos supracitados, os licenciandos podem manipular o Aprentti Géomètre 2;
- ✓ Quando finalizar de responder cada questão, os licenciandos devem selecionar a opção “arquivo” e em seguida selecione “salvar” para registrar o produto (resolução final) do estudo. Também realizar esse procedimento para cada questão;
- ✓ As questões estão nomeadas, como: “primeira questão”, “segunda questão”, “terceira questão” e “quarta questão”.

Boa resolução!

3. Observe a figura F:



Considere o  e o  como unidades de medidas.

Qual a área da figura F adotando-se o  como unidade de medida? _____

Qual a área da figura F adotando  como unidade de medida? _____

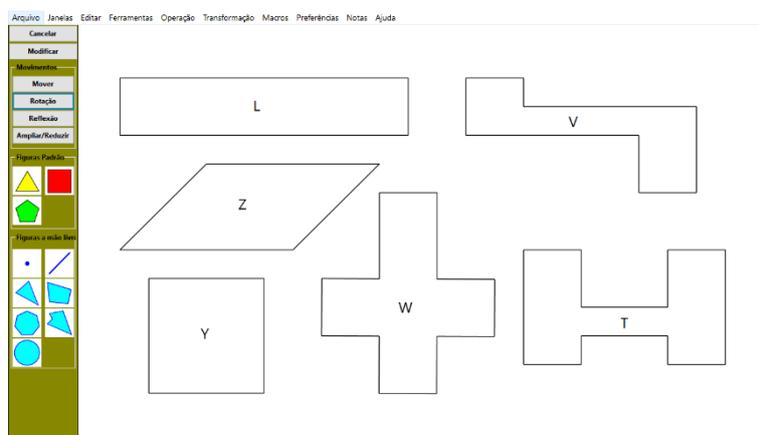
É possível que uma mesma superfície adote unidades de medidas distintas? _____

Se a figura F adota diferentes unidades de medidas ( e o ) ela, ainda, possui a mesma área?
Explique sua resposta: _____

Qual (is) menu (s) e ferramenta (s) do Aprenti Géomètre 2 foi usado no procedimento para resolver a questão?

APÊNDICE B: ATIVIDADES DO ESTUDO EXPERIMENTAL**ATIVIDADE 1**

Selecione e abram o arquivo “Atividade 1.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.



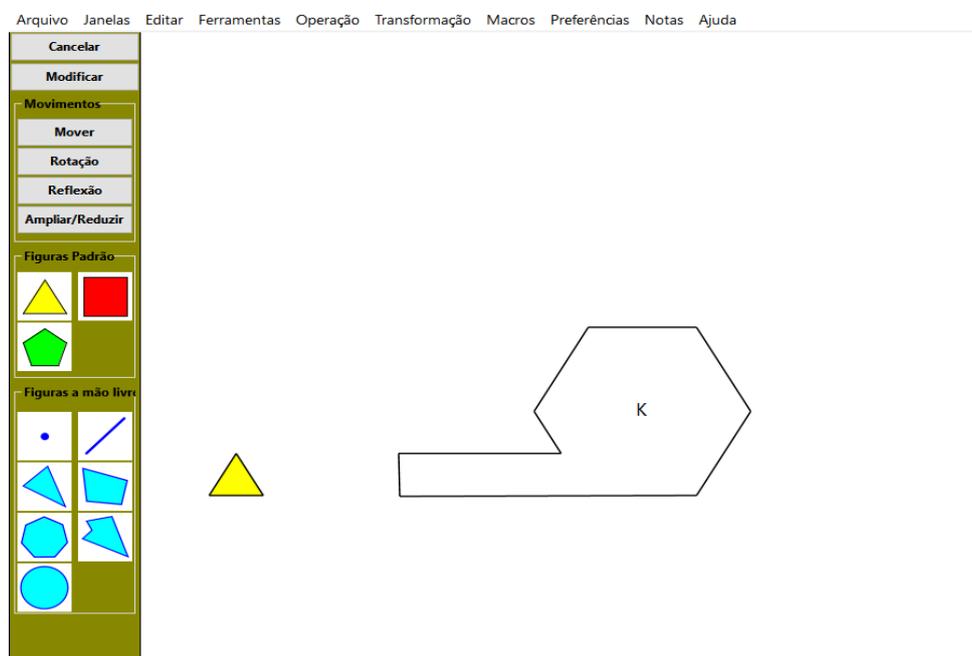
- A) Qual delas tem a maior área?
B) Qual delas tem a menor área?

Expliquem como chegaram às respostas.

ATIVIDADE 2

Selecione e abra o arquivo “Atividade 2.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

2 - Qual a medida de área da superfície K, considerando a unidade definida pelo triângulo  ?

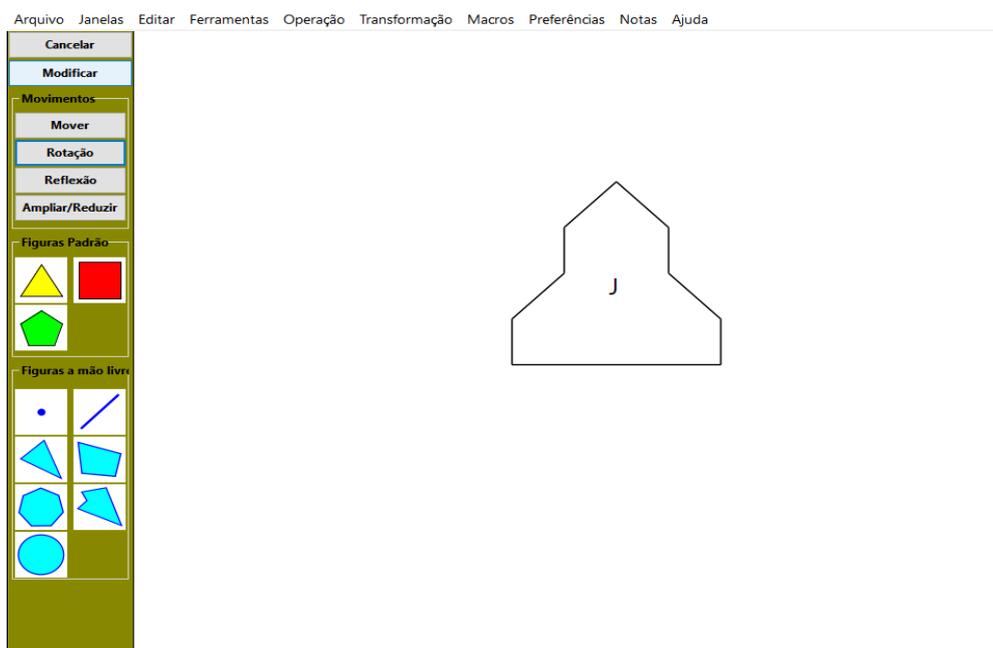


Expliquem como chegaram à resposta.

ATIVIDADE 3

Selecione e abram o arquivo “Atividade 3.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

3 - Produzam uma superfície F, que não seja idêntica à superfície J, mas tenha área igual à de J:

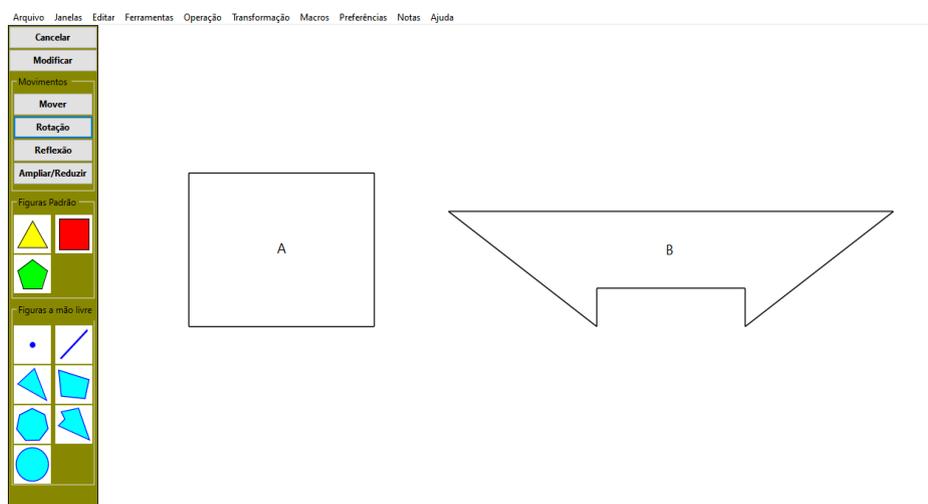


Expliquem como chegaram à resposta.

ATIVIDADE 4

Selecione e abra o arquivo “Atividade 4.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

4 - Verifiquem se as superfícies A e B possuem áreas iguais ou diferentes. Caso tenham áreas diferentes, qual delas tem maior área?

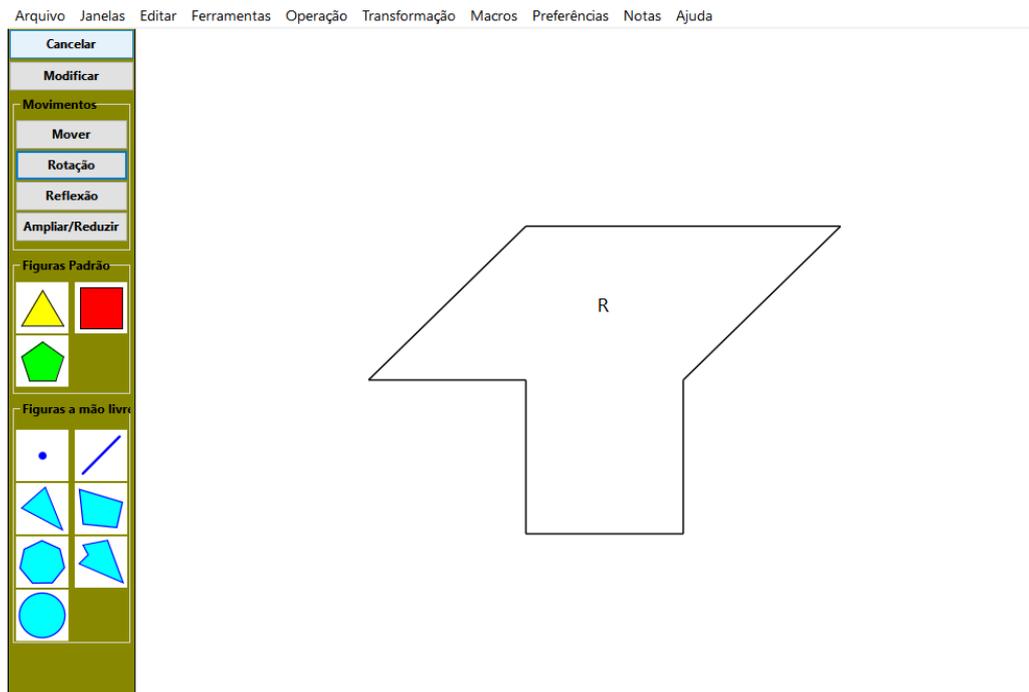


Expliquem como chegaram a essa conclusão.

ATIVIDADE 5

Selecione e abra o arquivo “Atividade 5.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

5 - Observem a superfície R.



Respondam:

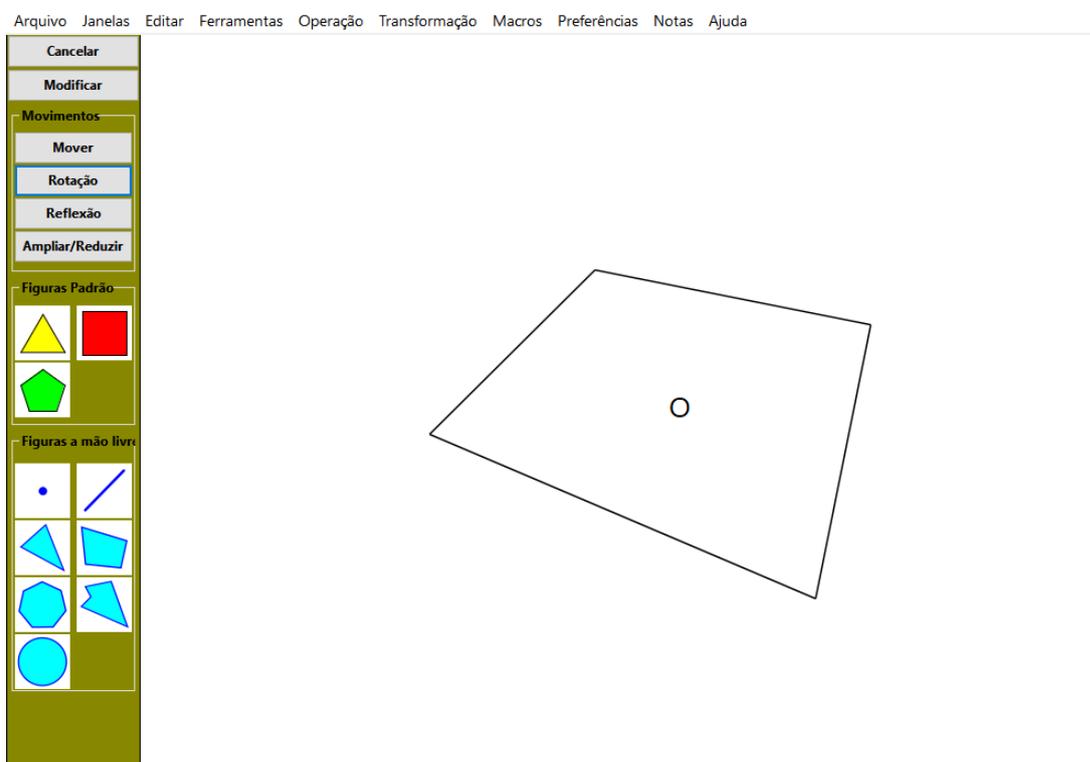
- A) Encontrem uma unidade de área U , de modo que a área de R seja $6U$.
- B) Encontrem uma unidade de área W , de modo que a área de R seja $54W$.
- C) Encontrem uma unidade de área V , de modo que a área de R seja $27V$.

Expliquem como chegaram às respostas.

ATIVIDADE 6

Selecione e abra o arquivo “Atividade 6.fag” que está na pasta “Franklin Pachêco” localizada no *Desktop* do computador. A seguir, cliquem na opção aluno e registrem seus pseudônimos. Posteriormente selecionem o Menu AB, idioma Português/BR e cliquem em Ok.

6 - Produzam uma superfície S cuja área seja menor que a de O , mas não seja possível posicionar S de modo que fique totalmente contida no interior de O .



Expliquem como chegaram à resposta.