



Centro de Educação  
Campus Universitário  
Cidade Universitária  
Recife-PE/BR CEP: 50.670-901  
Fone/Fax: (81) 2126-8952  
E. Mail: [edumatec@ufpe.br](mailto:edumatec@ufpe.br)  
[www.gente.eti.br/edumatec](http://www.gente.eti.br/edumatec)

MARCELO LEONARDO LEÔNCIO DA SILVA

**INVESTIGANDO ESTRATÉGIAS MOBILIZADAS PELOS  
ALUNOS NO EQUACIONAMENTO DE PROBLEMAS DE  
PRIMEIRO GRAU**

RECIFE

2011

MARCELO LEONARDO LEÔNCIO DA SILVA

**INVESTIGANDO ESTRATÉGIAS MOBILIZADAS PELOS ALUNOS NO  
EQUACIONAMENTO DE PROBLEMAS DE PRIMEIRO GRAU**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a conclusão do mestrado em Educação Matemática e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos.

RECIFE

2011

Silva, Marcelo Leonardo Leôncio da

Investigando estratégias mobilizadas pelos alunos no equacionamento de problemas de primeiro grau / Marcelo Leonardo Leôncio da Silva. – Recife: O Autor, 2011.  
86 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2011.

Inclui Referências.

1. Matemática - Estudo e Ensino 2. Ensino fundamental 3. Software CHIC I. Santos, Marcelo Câmara dos (Orientador) II. Título.

CDD 372.7

UFPE (CE 2011-079)

MARCELO LEONARDO LEÔNCIO DA SILVA

**INVESTIGANDO ESTRATÉGIAS MOBILIZADAS PELOS ALUNOS NO  
EQUACIONAMENTO DE PROBLEMAS DE PRIMEIRO GRAU**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a conclusão do mestrado em Educação Matemática e Tecnológica.

**BANCA EXAMINADORA**

Orientador: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos – PPGEDUMATEC / UFPE.

Examinador: \_\_\_\_\_

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rosinalda Aurora de Melo Teles – PPGEDUMATEC / UFPE.

Examinador: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud – PEPGEM/ PUCSP.

Recife, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2011.

Dedico este trabalho a minha família e  
a minha esposa.

## AGRADECIMENTOS

À Deus que nos presenteou com o dom da vida e por possibilitar meu crescimento. Pelos momentos mais difíceis, por sua presença sempre me guiando. Obrigado, Pai, por teres me conduzido até aqui com tuas mãos misericordiosas.

Ao meu avô e pai, Sebastião Ferreira (*in memoriam*), que nos deixou no início desse trabalho. Que muito me ensinou e, mesmo sem possuir formação acadêmica procurou sempre explicar tudo de uma forma simples. A sua convivência permitiu construir em mim todo o caráter necessário para me fazer enxergar o mundo como vejo hoje.

À minha esposa Jaqueline França, Kelly, dedico esse trabalho. Sem seu apoio, dedicação, carinho e muita paciência eu não teria conseguido.

À minha avó, Maria José Ferreira, mãezinha, que com sua dedicação, paciência e amor me fez entender o verdadeiro significado da palavra tolerância.

À minha mãe, Elisabete Ferreira, mãe Bete, que me contagiou com a palavra educação. Sempre acreditou em mim, me incentivando e propiciando as melhores condições possíveis para a realização desse trabalho.

À minha irmã Márcia Bárbara e a Robson Oliveira, que mesmo sem ter sua convivência diária, me incentivaram a continuar esse trabalho.

À Gabriela Rani e Maira Lissa, cujos sorrisos sempre me fez lembrar de que tudo aquilo que sonhamos pode e vale a pena de ser conquistado.

À minha nova família, nas pessoas de Maria José de França, Sônia e Marcos, o meu obrigado, sem o apoio de vocês esse trabalho não teria chegado aonde chegou.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos, sem o qual esse trabalho jamais poderia ser realizado. Pela sua paciência, compreensão e habilidade em tratar com muita leveza ideias e teorias tão complexas e sofisticadas. A você dedico esse trabalho, pois, sem sua brilhante atuação como orientador confesso que não seria capaz de realizá-lo. A você meu muito obrigado.

Ao meu amigo Gabriel Faustino que em nossas conversas me fazia cada vez mais amar a ideia de fazer diferente em nossa prática docente, a você meu obrigado.

À Risoleide Pinto, que sempre nos fez entender o significado das palavras companheirismo e cumplicidade nos momentos de maiores dificuldades e que soube dizer sempre que necessário “estou aqui” pra te apoiar.

Ao Prof. Dr. Alexandre Medeiros que em nossos encontros para tratarmos assuntos relacionados à Filosofia das Ciências despertou a necessidade de sempre procurar entender o seu desenvolvimento na Química, na Física e na própria Matemática.

Ao Colégio 2001, na pessoa de Samuel Cunha de Menezes e dos colegas professores, que tanto no início de minha carreira docente quanto no início desse trabalho me apoiaram. Agradeço também à Prof. Sandra Elizabeth, Josemildo, Leda, Aline Jéssica, a Lara Rodrigues e a Raul Emídio amigos que mesmo a distância sempre me apoiaram.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Ross Alves Nascimento, que sempre acreditou em mim, mesmo quando nem imaginava em aprofundar meus estudos na Pós-Graduação. Meu obrigado por me apoiar sempre que necessitei.

Agradeço também aos meus amigos médicos Fábio Malta e Daniel Lins por seu apoio, incentivo e amizade.

Quero também agradecer à Faculdade de Ciências Humanas de Igarassu, nas pessoas do Prof. Jurandir Bezerra, da Prof. Sílvia Pereira, da Prof. Lúcia

Ferreira, do Prof. José Airton, do Prof. José Severino de Barros, do Prof. Glauco Reinaldo, da Prof. Walquíria Lins e demais docentes que com grande entusiasmo sempre me apoiaram na execução desse trabalho. E aos meus amigos, em especial, Euler Giles, Dárcio Júnior e Fábio Belarmino.

Ao Prof. Ms. Jorge Henrique Duarte, que me ensinou que o professor de matemática não deve se limitar apenas em ter livros com números e, que à necessidade de leitura e de aperfeiçoamento deve sempre estar presente na vida de um professor de matemática.

Ao seu Klaúdio, que mesmo sem entender muito dessa “tal matemática” de escola, sempre me ajudou mostrando que em muitos momentos das artes plásticas podemos perceber sua existência.

Aos meus amigos da Universidade Federal de Pernambuco, Marcos B.C., Iranete, Nalda, Natália, Marcilene, Eduardo entre outros pelo incentivo.

À coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, na pessoa da Prof. Dr. Gilda Guimarães que sempre nos apoiou de modo direto e indireto, nos concedendo as melhores condições possíveis para a realização do nosso trabalho.

Aos mestres pelo ensinamento e disponibilidade. Como disse Henry Adams “Um professor sempre afeta a eternidade. Ele nunca saberá onde sua influência termina”.

À secretaria do programa na pessoa de Marlene, que sempre alegre e atenciosa nos orientou do melhor modo possível. E as pessoas que por lá também passaram como Josiane e Elisângela, o meu agradecimento, sem vocês no apoio não conseguiríamos avançar tanto.

Agradeço também os colegas da turma 2009, por permitir compartilhar momentos de estudos, discussões, alegrias e vários outros sentimentos. E, em

especial, a Gutemberg Cavalcante e Daniella Santos pela proximidade em amizade e atenção sempre presentes em nossa convivência.

Não posso esquecer de agradecer ao Prof. Dr. Sergio Abranches, que muito contribuiu com minha visão relacionada à educação e a nossa sociedade, principalmente na convergência desses dois com a tecnologia. Você não imagina o quanto me fez entender e, por isso amar ainda mais a educação no nosso contexto atual.

Agradeço também à Prof. Dr. Iranete Lima, tanto por enriquecer meu perfil profissional na disciplina de Metodologia da Pesquisa Educacional como com sua convivência durante minha formação, por me fazer perceber o quanto temos que respeitar as peculiaridades regionais no ensino da matemática, cuja imersão nesse tema só foi possível nas minhas idas e vindas ao Campus do Agreste.

À Prof. Dr. Rosinalda Aurora de Melo Teles pela atenção, apoio e diversas contribuições fornecidas no desenvolvimento dessa dissertação, que ocorreu desde o final da seleção para a entrada no programa, passando pela qualificação e agora na defesa, o meu obrigado.

Um agradecimento especial ao grupo de pesquisa fenômenos didático em sala de aula, cujas discussões tanto contribuem para o desenvolvimento das relações existentes na aprendizagem da matemática. À Prof. Dr. Lúcia Araújo que sempre buscou a convergência de idéias para nosso desenvolvimento como alunos de mestrado; ao Prof. Dr. Abrãao Juvêncio que, por meio de suas observações muitas vezes inimagináveis e humoradas nos proporcionou momentos constantes de aperfeiçoamento, buscando sempre melhorar a qualidade de nossas pesquisas.

Agradeço a todas as pessoas que me apoiaram, incentivaram e sempre estiveram ao meu lado durante toda essa jornada. Obrigado!

A diferença entre o impossível e o possível  
está na determinação de uma pessoa.

Tommy Lasorda

SILVA, M. L. L.; SANTOS, M. C. **Investigando Estratégias Mobilizadas pelos Alunos no Equacionamento de Problemas de Primeiro Grau**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

## RESUMO

A presente pesquisa investigou que fatores de congruência, no sentido de Duval (2004), interferem na conversão da linguagem natural em linguagem algébrica, na resolução de problemas envolvendo equações de primeiro grau por alunos de 8º ano do ensino fundamental. O referencial teórico adotado consistiu na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Escolhemos trabalhar com problemas que Marchand e Bednarz (1999) classificam como de partilha, em que uma quantidade deve ser dividida em partes desiguais. Adotamos os protocolos produzidos em outra pesquisa, que foi constituído de oito problemas, em que variamos a presença ou não dos fatores de não congruência. Em seguida, categorizamos os registros mobilizados pelos alunos em registros algébricos, numéricos e outros e, tratamos os dados obtidos com o software CHIC para a análise. Os resultados obtidos mostraram que, dependendo da conservação ou não de fatores de transformação de registros, existe uma maior incidência de registros não algébricos.

**Palavras-chave:** Equacionamento. Registro de Representação Semiótica. Resolução de Problemas de Partilha. Conversão. Software CHIC.

SILVA, M. L. L.; SANTOS, M. C. **Investigating Strategies Mobilized for the Pupils in the Equacionamento de Problems de first Degree.** 2011. Dissertação (Mestrado in Mathematical and Technological Education) - Federal University of Pernambuco, Recife, 2011.

#### ABSTRACT

The present research investigated that congruence factors, with the direction of Duval (2004), intervene with the conversion of the natural language in algebraic language, in the resolution of problems involving equations of first degree for pupils of 8° year of basic education. The adopted theoretical referencial consisted of the Theory of Registers of Representation Semiotics of Raymond Duval. We choose to work with problems that Marchand and Bednarz (1999) classify as of allotment, where an amount must be divided in different parts. We adopt the protocols produced in another research, that was constituted of eight problems, where we vary the presence or not of the factors of not congruence. After that, we categorize the registers mobilized for the pupils in algebraic, numerical registers and others e, we treat the data gotten with software CHIC for the analysis. The gotten results had shown that, depending on the conservation or not on factors of transformation of registers, a bigger incidence of not algebraic registers exists.

**Key Word:** Equacionamento. Register of Representation Semiotics. Resolution of Problems of Allotment. Conversion. Software CHIC.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Mudanças do registro no tratamento	30
<b>Figura 2</b> – Mudança de registro na conversão	31
<b>Figura 3</b> – Nó Significativo	42
<b>Figura 4</b> – Árvore Coersitiva 1 (AC1)	42
<b>Figura 5</b> – Árvore de Similaridade 1 (ASI 1)	62
<b>Figura 6</b> – Árvore Coersitiva 2 (AC2)	64
<b>Figura 7</b> – Árvore de Similaridade 2 (AS2)	68
<b>Figura 8</b> – Árvore Coersitiva 3 (AC3)	73

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> – Diferentes interpretações da Álgebra escolar e as diferentes funções das letras	22
<b>Quadro 2</b> – Concepções da Álgebra	23
<b>Quadro 3</b> – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático	28
<b>Quadro 4</b> – Relação 1 entre os registros e o número de signos	33
<b>Quadro 5</b> – Relação 2 entre os registros e o número de signos	34
<b>Quadro 6</b> – Variáveis adotadas	45
<b>Quadro 7</b> – Símbolo das categorias adotado por Costa	46
<b>Quadro 8</b> – Categorização inicial da pesquisa	50
<b>Quadro 9</b> – Categorização da 2ª análise	51
<b>Quadro 10</b> – Valores das variáveis	56
<b>Quadro 11</b> – Os oito problemas do instrumento	57
<b>Quadro 12</b> – Características comuns de P1 e P5	63
<b>Quadro 13</b> – Características comuns de P4, P6 e P8	64
<b>Quadro 14</b> – Características comuns de P4 e P5	71
<b>Quadro 15</b> – Características comuns de P1 e P5	71
<b>Quadro 16</b> – Características comuns de P3, P4 e P6	72
<b>Quadro 17</b> – Características comuns de P4, P5 e P6	76
<b>Quadro 18</b> – Características comuns de P3, P6 e P7	77
<b>Quadro 19</b> – Características comuns de P2 e P8	79

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> – Registros algébricos	60
<b>Tabela 2</b> – Percentuais de incidência de registros algébricos com conversão total, parcial e incompatível	67

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO DA ÁLGEBRA	20
3 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	26
4 O SOFTWARE CHIC	39
5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	44
5.1 As Características dos Problemas Aplicados	52
6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	60
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	80
REFERÊNCIAS	83

## 1 INTRODUÇÃO

O presente estudo se insere no Projeto “Investigando o ensino-aprendizagem da álgebra escolar sob a ótica dos fenômenos didáticos: o caso das equações de primeiro grau<sup>1</sup>”, do Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Este Grupo tem como um de seus objetivos a identificação de erros e dificuldades apresentadas pelos estudantes na resolução de equações e de problemas envolvendo equações de primeiro grau, acompanhados das respectivas hipóteses de suas ocorrências. Nossa escolha se baseou na análise do comportamento dos alunos em situação de resolução de atividades.

A base de dados deste trabalho foi coletada em outra pesquisa do Grupo concluída em 2010, cujo título foi: Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau, tendo como autor Wagner Rodrigues Costa. Embora tenhamos utilizado os mesmos protocolos obtidos na pesquisa já concluída, o nosso trabalho difere do anterior no que se refere à categorização realizada e na análise dos resultados.

No trabalho de Costa (2010) seu objetivo principal foi o de investigar a conversão da escrita natural para a escrita algébrica nas equações de primeiro grau. Em sua categorização, os registros foram classificados como: numéricos, algébricos com conversão total, algébricos com conversão parcial, algébricos com conversão incompatível, pictóricos e outros.

Em nosso trabalho buscamos analisar em que medida a estrutura de problemas baseados em fatores da congruência, podem conduzir os alunos a determinados registros na transformação de registros da linguagem natural em linguagem algébrica. Na categorização de nossa pesquisa, em primeiro momento, utilizamos os registros como algébricos e não algébricos, seguido do tratamento com

---

<sup>1</sup>Edital: MCT/CNPq No 014/2008 – UNIVERSAL.

o Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive (CHIC). Em seguida, classificamos os registros algébricos em registros algébricos com conversão total, com conversão parcial e com conversão incompatível.

As dificuldades dos estudantes em desenvolver o raciocínio algébrico são verificadas em muitas pesquisas (USISKIN, 1995; KIERAN, 1995; LOCKHEAD e MESTRE 1995, SCHOEN 1995 e ANDRÉ, 2007). Alguns desses entraves podem ser constatados como, por exemplo, na pesquisa de Usiskin (1995), sobre problemas na compreensão da ideia de variável, decorrentes da mudança dessa concepção ao longo do tempo. Almeida (2006) e André (2007) também relatam dificuldades no equacionamento de problemas e, ainda, na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica na resolução de problemas.

Nas escolas brasileiras, o ensino de álgebra apresenta significativa importância, haja vista que o tempo dedicado ao seu ensino é maior quando comparado, por exemplo, ao da Geometria (ARAÚJO, 2001).

Para essa investigação, utilizamos como fundamentação teórica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica<sup>2</sup> de Raymond Duval<sup>3</sup>, na qual são focadas as diversas formas de registros de representações semióticas. Essa teoria permite a verificação do funcionamento cognitivo do estudante, por meio da diversidade e mudança desses registros semióticos.

Em nosso trabalho, os alunos foram convidados a resolverem problemas de partilha, segundo a categorização de Marchand e Bednarz (1999). Os problemas propostos eram em número de 8 que combinavam a conservação ou não das condições de existência da congruência entre dois registros, a correspondência semântica das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e a ordem

---

<sup>2</sup> A Teoria constitui um modelo do funcionamento cognitivo do pensamento, que publicado em 1995, *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* (Semioses e Pensamento Humano: Registros de Representação Semiótica)

<sup>3</sup> Raymond Duval é filósofo e psicólogo de formação. Desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França, no período de 1970 a 1999. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d'Opale, França.

das unidades de significado, baseadas na teoria de registros e representação semiótica.

Inicialmente, revisamos todos os protocolos adotados na pesquisa anterior e reorganizamos os dados em primeiro momento como registros algébricos e não algébricos e, posteriormente, em registros algébricos com conversão total, conversão parcial e conversão incompatível. Em seguida, efetuamos o tratamento dos dados com o auxílio do Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive (CHIC), no intuito de promover o cruzamento das repostas categorizadas (as variáveis) e os sujeitos participantes da pesquisa.

Adotamos como problema de pesquisa investigar em que medida os fatores de congruência e não congruência, entre os registros de partida e de chegada, interferem na utilização dos registros algébricos utilizados pelos alunos na resolução de problemas de equacionamento do primeiro grau.

Para a obtenção dos resultados da pesquisa, os dados foram obtidos a partir das respostas fornecidas aos problemas do teste. Os dados foram categorizados em função dos registros realizados como algébricos e não algébricos e, em seguida, como algébricos com conversão total, parcial e incompatível, com o tratamento do software CHIC.

Desse modo, relacionamos os tipos de problemas apresentados em nossa pesquisa com os registros adotados pelos alunos na transformação do registro natural para o registro algébrico no equacionamento de problemas do primeiro grau.

Nessa pesquisa, buscamos indicar, entre os fatores que compõem a transformação de registros da linguagem natural para a linguagem algébrica, quais interfere na mudança de registro.

Com isso, pretendemos aprofundar as pesquisas realizadas por André (2007) e Costa (2010). Na primeira, foi verificada que alunos do oitavo ano apresentavam sérias dificuldades em fazer a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica em problemas com equações do primeiro grau. Ficou evidenciado que a

representação algébrica ocorria no mesmo sentido em que se efetuava a leitura do problema proposto. Como enfatiza:

... os alunos enxergam a linguagem da álgebra como sendo um procedimento pelo qual se traduzem mecanicamente as palavras de um enunciado concernente a uma situação ou problema em símbolos algébricos correspondentes. (ANDRÉ, 2007, p. 208).

No segundo estudo, foi investigado de que modo os alunos registravam a conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo o equacionamento de primeiro grau, em face da presença ou não dos fatores constituintes da congruência entre dois registros nos problemas propostos.

Desse modo, nosso trabalho buscou focar por meio da conservação ou não das condições necessárias à congruência entre dois registros, em que medida há interferência nos tipos de registros de representação mobilizados pelos alunos. Para isso, tivemos o amparo de um software que permite organizar e explicar os fenômenos associados a estes registros, o CHIC.

Na primeira parte desse trabalho fazemos uma exposição sobre a importância do ensino da álgebra na resolução de problemas.

Na segunda parte, procuramos apresentar ao leitor a teoria de registros de representação semiótica, focando nos fatores que interferem na transformação de registros de representação, e na caracterização dos problemas segundo Marchand e Bednarz (1999).

Na parte seguinte, relacionamos a resolução de problemas e a teoria de registros de representação semiótica.

No quarto capítulo, buscamos articular as características dos problemas utilizados na pesquisa com o software CHIC, que é utilizado em pesquisas de análises estatísticas de dados multidimensionais em investigações na área de Educação de modo geral e, especificamente, em Educação Matemática.

Posteriormente, apresentamos a metodologia aplicada para a análise dos problemas e dados.

Nas discussões e resultados, a aplicação do software permitiu indicar se há ou não fatores que interferem em maior ou menor grau na transformação de registros da linguagem natural para a linguagem algébrica.

## 2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO DA ÁLGEBRA

No contexto escolar podemos perceber que a álgebra parece está bem distante da realidade cotidiana o que pode ser observado em pesquisas como, por exemplo, as de Lockhead e Mestre (1995), Oliveira (2002), André (2007) e Costa (2010).

Para Lockhead e Mestre (1995, p. 153), "... os alunos... têm concepções erradas fundamentais acerca do papel e do significado das variáveis no equacionamento de alguns problemas simples com duas variáveis". Essas concepções, muitas vezes, os acompanham até o nível superior, e os autores levantam a hipótese de isso acontecer pelo fato da escola privilegiar as técnicas operatórias, não se preocupando com o papel das letras no trabalho com álgebra.

Dessa forma, podemos entender que a aprendizagem em álgebra parece se limitar à mera resolução de equações algébricas, o que pode acarretar em situações que conduzam a uma equivocada percepção do emprego da álgebra.

Para Lockhead e Mestre (1995) e Oliveira (2002), ainda faltam estudos mais aprofundados sobre o entendimento de como os alunos escrevem as equações correspondentes a problemas, no processo de passagem da linguagem natural para a linguagem simbólica.

Nessa direção, os estudos realizados por André (2007) mostraram que as dificuldades apontadas pelos alunos pesquisados são decorrentes da inadequada transformação da linguagem natural para a linguagem algébrica. Essa pesquisa mostra um alto índice de alunos que não efetuaram a conversão adequada dos registros. Já no trabalho de Costa (2010), foram adotadas estruturas de problemas para verificar em que medida os fatores que compõem a conversão podem interferir no emprego de registros algébricos nessa transformação de registro.

A álgebra escolar é vista por muitos alunos apenas como a resolução final de uma equação, ou seja, conjunto de procedimentos que garantam a manipulação

adequada de equações para a determinação de resultados numéricos correspondentes.

Essa percepção pode ser decorrente de uma compreensão equivocada por parte do aluno, a de indissociabilidade entre a álgebra e a aritmética. A primeira, em princípio, representa relações simplificadas gerais, como por exemplo, a representação de um problema por meio de equações. Já a aritmética foca a determinação de resultados numéricos.

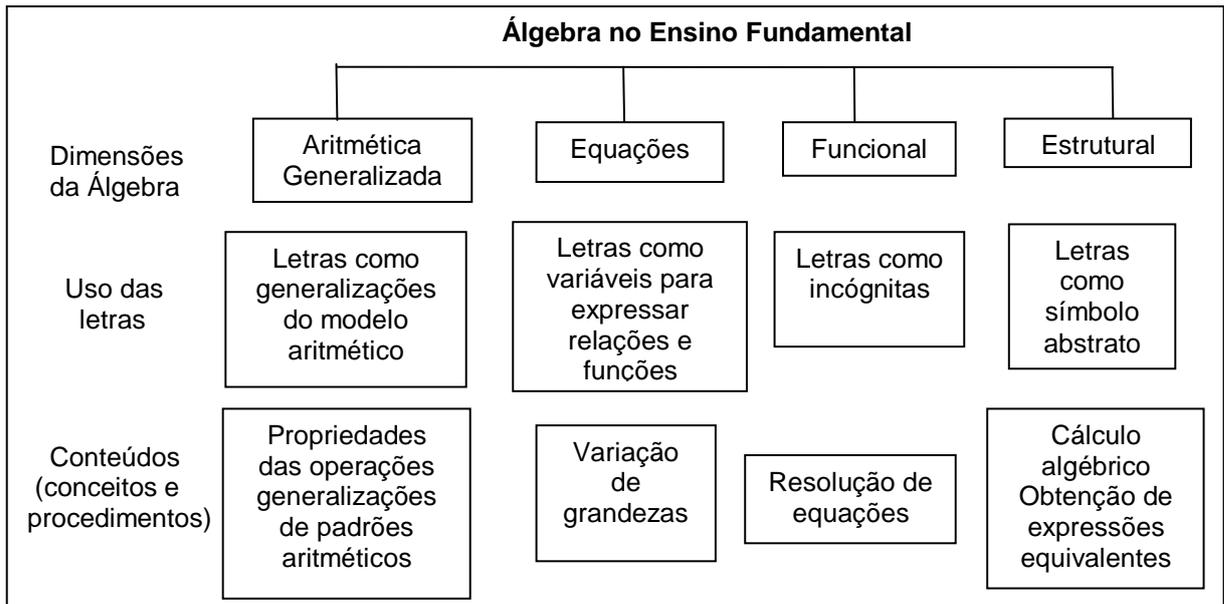
Embora as ideias que envolvam a aritmética e a álgebra não sejam as mesmas, não podemos descartar as relações entre as duas. Por exemplo, para que haja compreensão da manipulação e de generalização em álgebra o aluno necessita primeiro ter apropriação no contexto aritmético.

O insucesso na aprendizagem da álgebra não está associado especificamente a ela, mas em dificuldades no campo da aritmética que muitas vezes não são corrigidas no momento adequado.

Para Lins e Gimenez (1997), o fracasso em álgebra significa um insucesso escolar absoluto, representando o denominado “momento de seleção” na educação escolar. Ainda para os autores, a álgebra constitui um domínio exclusivo da escola, segundo o qual a generalização sobre as quantidades produz significados em termos de números e operações aritméticas.

Desse modo, a aprendizagem da álgebra passa a apontar dificuldades e ter exclusiva aplicação no ambiente escolar, promovendo, desse modo, a manipulação de expressões sem significados e não o desenvolvimento da abstração, da generalização que podem ser associadas à resolução de problemas.

Essas dificuldades podem ter origem nas diferentes concepções que envolvem a álgebra escolar. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresentam quatro grandes dimensões para a álgebra escolar, como mostra o quadro 1 seguinte.



**Quadro 1.** Diferentes interpretações da Álgebra escolar e as diferentes funções das letras (BRASIL, 1998, p.116).

Usiskin (1995) discorda em parte desse modelo e diz que, o ensino da álgebra na escola, atualmente, está diretamente associado ao manejo de técnicas de manipulação de equações, construindo a idéia de que o foco principal desse conhecimento<sup>4</sup> está na relação existente entre os objetivos da álgebra e as concepções sobre o uso de suas variáveis.

O quadro 2 busca relacionar as diferentes concepções de álgebra escolar com o papel da variável em cada uma delas, segundo Usiskin (1995).

<sup>4</sup> Conhecimento é o resultado de uma experiência pessoal, ligada às atividades do sujeito, é intransmissível e carregado de subjetividade. (CHARLOT, 2000, p. 61).

<b>Concepções da Álgebra</b>	<b>Uso das variáveis</b>
Aritmética Generalizada	Generalizadora de modelos Traduzir – Generalizar
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes Resolver – Simplificar
Estudo das Relações	Argumentos, parâmetros Relacionar – Gráficos
Estrutura	Sinais arbitrários no papel Manipular – Justificar

**Quadro 2.** Concepções da Álgebra. (USISKIN, 1995, p. 20).

Segundo o mesmo autor, essas concepções estão atreladas ao objetivo direto do emprego dessas variáveis, que constituem uma ideia de que o ensino da álgebra esteja pontuado, especificamente, no uso adequado do significado e da respectiva concepção e não nas relações que podemos estabelecer entre estas.

Para Araújo et al. (2002, p. 7), a linguagem algébrica constitui um importante elemento a ser considerado. Quando se está no campo algébrico, para a resolução de um problema, “há todo um trabalho no sentido de entender o que o problema propõe...”; ou seja, na resolução do problema, se faz necessário o emprego adequado da língua natural em sua interpretação, buscando evocar qual(is) é (são) o(s) objetivo(s) final(is) da atividade proposta.

As relações existentes entre a linguagem algébrica e a linguagem natural, constituem, na atualidade, o foco de diversas pesquisas relacionadas aos entraves encontrados na aprendizagem da álgebra, principalmente no que se refere à resolução de problemas.

Em trabalhos como os de Alves (2008), Pozo (1998), Krulik e Reys (1997), Polya (1994), Borralho (1994), Vieira (2001), Loos (2004), Sternberg (1992) e Costa (2010), a resolução de problemas têm sido alvo de vários estudos, reforçando sua importância na aprendizagem em matemática.

No contexto educativo, a resolução de problemas desempenha um papel importante, pois os alunos podem ser desafiados nas suas capacidades, percebendo diferenças entre particularidades, generalizações entre outras especificidades de problemas (POLYA, 1994). Ainda para o autor, resolver um problema é encontrar caminhos, que superem dificuldades apresentadas com o intuito de alcançar um objetivo.

Para Sternberg (1992), em um problema matemático podem ser observados dois componentes, as operações mentais e os conhecimentos prévios que o sujeito necessita possuir para resolver um dado problema. A representação e a solução do problema, por meio das operações matemáticas, constituem as etapas para a solução de um problema.

Nessa perspectiva, os PCN indicam que um problema matemático é:

... uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função dos conhecimentos de que dispõe. (BRASIL, 1998, p. 41).

A resolução de um problema não conhecido pelo aluno, ou seja, nunca “resolvido” o conduz a descobertas e proporciona que, na busca da solução, o educando formule e valide, ou não, suas hipóteses.

Segundo Duval (2005), a compreensão de enunciados na resolução de problemas de aplicação aritmética ou algébrica, há certo tempo deixou de ser apenas a “tradução” dos dados representados na linguagem natural.

Costa (2010), afirma que os alunos apresentam muitas dificuldades para proceder com a transformação do registro da linguagem natural para a linguagem

algébrica em problemas de equacionamento primeiro grau, quando suas estruturas apresentam fatores de não congruência.

Nesse contexto, a resolução de problemas aparece como eixo norteador para a atividade matemática. Há uma variedade equivocada de concepções que podem ser construídas pelo aluno. Por exemplo, a ideia de que a álgebra escolar deva ser construída com atividades em que haja uma manipulação algébrica excessiva, seja por meio do seu simples manuseio “mecanizado” ou simplesmente pela determinação de valores em equações (o cálculo algébrico).

A resolução de problemas, com o emprego de vários registros de representação semiótica, como o registro algébrico, o registro numérico, o pictórico, por parte do aluno, pode permitir uma melhor apropriação dos conceitos.

Na resolução de problemas, os registros algébricos não constituem exclusividade para a proposição de respostas. Os registros pictóricos (desenhos, figuras etc.) não são normalmente reconhecidos como registros de conversão. Porém, deveriam ser notados como fase de “transição” para a elaboração de possíveis respostas para a solução de problemas. Para Simon e Stimpson (1995), o uso de diagramas na resolução de problemas, pode constituir uma importante fase intermediária entre a linguagem natural e a simbólica, na medida em que os diagramas permitem que o aluno não seja dependente da memorização. Os autores indicam, ainda, que as atividades que valorizam o desenvolvimento do seu uso ajudam na resolução de problemas.

Diante do exposto, ainda que estudos em diversos países apontem algumas dificuldades sobre o uso da álgebra no contexto da leitura e escrita em matemática, em nosso trabalho analisamos em que medida a estrutura de problemas baseados em fatores da congruência, pode conduzir os alunos a mobilizar determinados registros na transformação de registros da linguagem natural em linguagem algébrica.

### 3 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Proposta por Raymond Duval, a teoria dos registros de representação semiótica constitui um referencial teórico amplamente aplicado em pesquisas na Didática da Matemática.

A representação semiótica é um processo de comunicação que permite exteriorizar as representações mentais, tornando-as acessíveis a outros por meio da construção de significados utilizando diversas representações.

Duval (2009) considera que semiosis é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e noesis são os atos cognitivos, como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Para ele, não há noesis sem semiosis, ou seja, as construções mentais não existem ou não podem ser consideradas de maneira independente das representações semióticas. Em outras palavras, a representação do objeto interioriza ou constrói a representação semiótica enquanto que a representação do próprio objeto está estruturada na atitude cognitiva que o conceitua como objeto. É a semióse e a noésis.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica traz, em sua abordagem cognitiva da aprendizagem da matemática, o princípio segundo o qual a mobilização de uma pluralidade de registros tem um papel fundamental nessa aprendizagem.

Para Duval (2009), a diversidade não só da articulação entre os registros de representação semiótica, mas também a sua diversificação, a diferenciação entre representante e representado e a coordenação entre os diferentes registros, são de fundamental importância e constituem três fenômenos estreitamente ligados.

Nesse contexto, a resolução de problemas, com o emprego de vários registros de representação semiótica, tais como o registro algébrico, o registro numérico e o registro pictórico, permitem uma melhor apropriação dos conceitos.

Para Duval (2009, p.13):

A aprendizagem das matemáticas constitui, em evidência, um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos. A particularidade da aprendizagem das matemáticas considera que essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações.

Já Silveira (2001, p.1) diz que:

Um problema matemático é toda situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-la, e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. O fundamental é que o resolvidor tenha de inventar estratégias e criar idéias [...].

A resolução de problemas pode ser utilizada para analisar a mudança de registros de representação da linguagem natural para a linguagem algébrica. Essa mudança é chamada de tratamento.

Esse tratamento em relação à mudança de registros de representação pode ser classificado como discursivos multifuncionais (uso da língua natural) e monofuncionais (sistemas de escritas numéricas, algébricas, entre outros). Ou, não-discursivos multifuncionais (figuras geométricas planas ou não) e as monofuncionais (uso de gráficos cartesianos), como mostra o quadro seguinte:

	<b>REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA</b>	<b>REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA</b>
<b>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS</b> <b>Os tratamentos não são algoritmizáveis.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Língua natural;</li> <li>- Associações verbais (conceituais);</li> <li>- Formas de raciocinar. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Argumentação a partir de observações, de crenças,...;</li> <li>- Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Figuras geométricas planas ou em perspectiva (dimensão 0, 1, 2 ou 3) <ul style="list-style-type: none"> <li>- Apreensão operatória e não somente perceptiva;</li> <li>- Construção com instrumentos.</li> </ul> </li> </ul>
<b>REGISTROS MONOFUNCIONAIS</b> <b>Os tratamentos são principalmente algoritmos.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sistemas de escritas; <ul style="list-style-type: none"> <li>- Numéricas (binária, decimal, fracionária,...);</li> <li>- Algébricas;</li> <li>- Simbólicas (língua formal).</li> </ul> </li> <li>- Cálculo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Gráficos Cartesianos <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mudanças de sistemas de coordenadas;</li> <li>- Interpolação, extrapolação.</li> </ul> </li> </ul>

**Quadro 3.** Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática) (DUVAL, 2005, p. 14).

Desse modo, nossa pesquisa transitou pelas representações discursivas, pois as transformações relacionaram as mudanças de registros de representação da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Um registro de representação é considerado semiótico quando neste observamos três atividades cognitivas: representação identificável, tratamento e conversão. Como diz Duval (2009, p. 36-37):

Desse ponto de vista, os sistemas semióticos devem, com efeito, permitir o cumprimento das três atividades cognitivas inerentes a toda representação. Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado.

Uma representação é identificável quando é possível reconhecer a qual objeto matemático se relaciona por meio de um sistema de signos, desde que seja

socialmente reconhecido. Por exemplo, utilizando a língua natural (signo socialmente reconhecido) é possível elaborar problemas com diversos conceitos matemáticos. (DUVAL, 2005).

Ainda para o autor, um mesmo objeto apresenta uma pluralidade de registros de representação. Essa diversidade nas representações e a articulação destas permitem uma melhor explicitação das propriedades relacionadas, o que viabiliza uma efetiva compreensão.

Duval (2005, p.14) aponta que:

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação.

Assim, não se pode garantir aprendizagem focando o ensino apenas nos tratamentos, pois o ato de promover a conversão permite ao sujeito uma ampliação da dimensão conceitual.

Para Duval (2004), o desenvolvimento do conhecimento encontrado nas aprendizagens relacionadas ao raciocínio, permite a convergência estreita de três fenômenos: a diversidade dos registros de representação semiótica, a diferenciação entre representante e representado e, a coordenação entre os diferentes registros.

Desse modo, é possível mobilizar duas funções cognitivas: o tratamento, as transformações interiores que ocorrem em um mesmo registro; ou a conversão das transformações exteriores que ocorrem com mudanças de registro. Essas transformações podem ocorrer de dois modos: o tratamento e a conversão.

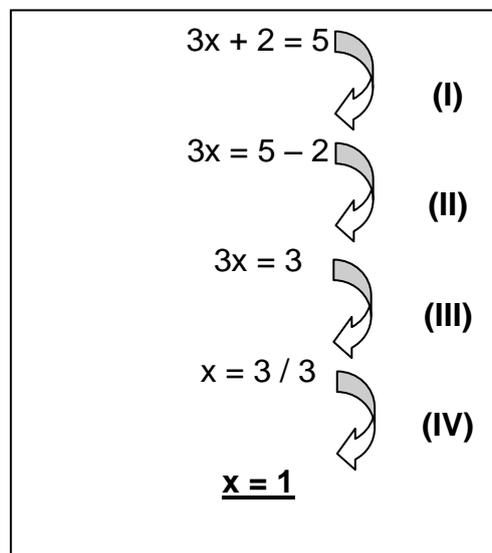
O tratamento consiste em transformar em um mesmo sistema uma representação semiótica em outra e corresponde a procedimentos de justificação, como, por exemplo, as etapas de resolução de uma equação do primeiro grau. Essa

transformação pode ser observada, por exemplo, quando o estudante busca uma representação para melhor compreensão.

Já a conversão, é a transformação de uma representação semiótica em outra, em sistemas diferentes, como por exemplo, passar da representação algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

É de extrema importância que haja a distinção entre transformações de tratamento e de conversão na análise de resoluções de problemas, por ser necessário coordenar em pelo menos dois registros distintos, pelo fato destas serem radicalmente diferentes (DUVAL, 2005, p.15).

Nos tratamentos, os registros permanecem no mesmo sistema, correspondendo a procedimentos de justificação. Como podemos notar no esquema da figura 1, as etapas relacionadas **(I)**, **(II)**, **(III)** e **(IV)** correspondem às mudanças de registro, porém em um mesmo sistema de representação (linguagem algébrica).

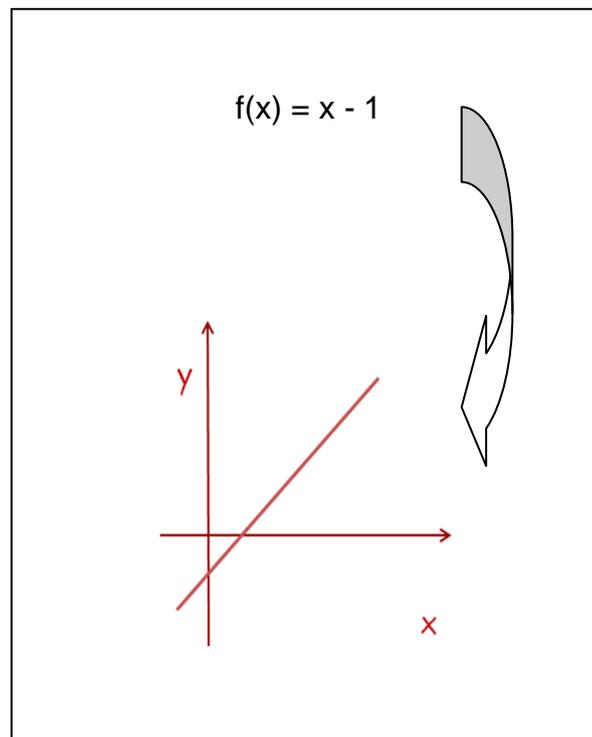


**Figura 1.** Mudanças do registro no tratamento.

Para Duval (2005), o tratamento corresponde à transformação que atrai mais a atenção do ponto de vista pedagógico, pois ele corresponde aos procedimentos de justificação. Essa transformação é considerada explicitamente pelo ensino, pois a

escolha do registro de representação pelo professor pode propiciar ao estudante uma compreensão efetiva de uma determinada ideia.

Já nas conversões, ocorrem mudanças no sistema de representação, mas os registros conservam a referência ao mesmo objeto (figura 2). Na representação  $f(x) = x - 1$ , por exemplo, podemos constatar a presença de uma representação no registro algébrico, que passa a ser representado graficamente (**V**). Em outras palavras, há a conservação do mesmo objeto, porém com um sistema representacional distinto.



**Figura 2.** Mudança de registro na conversão.

Duval (2005), coloca que a conversão entre dois registros diferentes de representação, pode enfrentar o fenômeno da não-congruência na transformação, o que pode conduzir o estudante a “verdadeiros bloqueios” caracterizado-o como um entrave relacionado ao reconhecimento de um mesmo objeto por meio de representações diferentes. Ou seja, a não conservação de pelo menos um dos três fatores constituintes da conversão (a correspondência semântica das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e a ordem das unidades de

significado), pode acarretar no insucesso de um mesmo objeto matemático ser reconhecido em duas representações distintas.

A atividade de conversão corresponde a procedimentos de objetivação, ou seja, as mudanças de registro de representação, visando uma maior eficiência na construção conceitual (aquisição de conceitos).

Um fator de grande importância na conversão é o sentido de sua ocorrência, já que as dificuldades notadas nessa transformação não são as mesmas nos dois sentidos. Por exemplo, quando um estudante efetua a transformação de uma representação gráfica para a representação algébrica (função correspondente) é diferente de quando o mesmo realiza a transformação do registro algébrico de uma função para a representação gráfica da mesma.

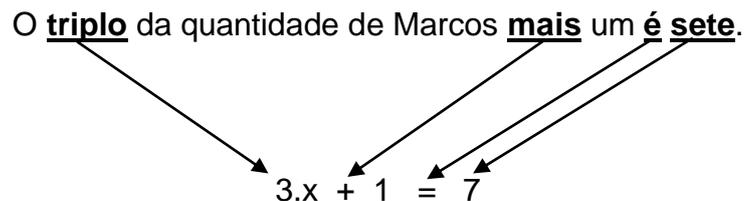
Dessa maneira, a conversão exige uma articulação das variáveis envolvidas em cada uma de suas respectivas representações, já que seus registros não correspondem a um mero tratamento. É necessário, também, compreender as propriedades relacionadas a um mesmo objeto.

Na conversão existem dois fenômenos relacionados, o da congruência e o da não-congruência associados ao registro de saída e o registro de chegada. Em nosso estudo, trata-se da passagem do registro em linguagem natural, o registro de saída, para o registro em linguagem algébrica (a simbólica), o registro de chegada (a equação).

Para que haja a congruência entre os dois registros, se faz necessária a admissão de três condições:

- ✓ A conservação da correspondência semântica das unidades de significado;
- ✓ A conservação da univocidade semântica terminal;
- ✓ A conservação da ordem das unidades de significado.

Na conservação da correspondência semântica das unidades de significado, cada unidade significativa de uma das representações pode-se associar a uma unidade significativa elementar<sup>5</sup>. (DUVAL, 2009). Ou seja, essa correspondência semântica das unidades de significado é caracterizada por uma relação biunívoca entre as representações existentes, como nos mostra o exemplo seguinte.



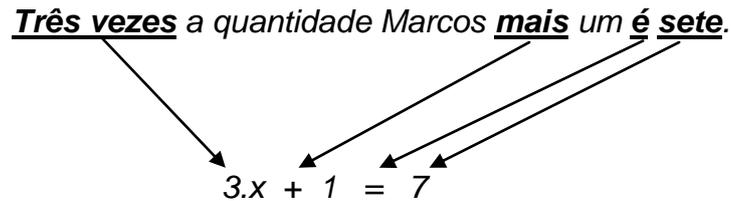
A palavra “triplo” no registro de partida é representada pela linguagem natural e está associada a apenas um signo. Já no registro de chegada (registro algébrico), podemos notar que temos o 3.x. Nesse caso, não verificamos esta conservação, pois, na expressão triplo, um signo está associado a dois signos, um que é representado pelo número 3 e, o outro que é a multiplicação. O quadro seguinte sintetiza essas relações.

Tipo de registro	Registro analisado	Número de signos
Registro de representação na linguagem natural	O <u>triplo</u> da quantidade de Marcos mais um é sete.	1
Registro de representação na linguagem algébrica	<u>3 . x</u>	2

**Quadro 4.** Relação 1 entre os registros e o número de signos.

Vamos considerar agora a seguinte proposição em linguagem natural.

<sup>5</sup> Considera-se que uma unidade significativa elementar é toda unidade que se destaca do "léxico" de um registro. (DUVAL, 2009, p. 68).



Podemos notar que, nesse caso, as unidades de significado **três** e **vezes** no registro em linguagem natural correspondem à mesma quantidade de signos, dois, que corresponde a sua representação na linguagem algébrica. Nesse caso, há correspondência semântica das unidades de significado porque o número de signos do registro de representação na linguagem natural é o mesmo para o registro de representação na linguagem algébrica, como aparece sintetizado no quadro seguinte:

<b>Tipo de registro</b>	<b>Registro analisado</b>	<b>Número de signos</b>
Registro de representação na linguagem natural	<u>Três vezes</u> a quantidade Marcos <u>mais</u> um <u>é sete</u> .	2
Registro de representação na linguagem algébrica	<b>3 . x</b>	2

**Quadro 5.** Relação 2 entre os registros e o número de signos.

No primeiro exemplo, observamos que não há conservação da correspondência semântica das unidades de significado, o que ocorre no segundo exemplo.

A correspondência da univocidade semântica terminal ocorre quando cada unidade significante (signo) elementar da representação na linguagem natural, no registro de partida, corresponde a uma só unidade significante elementar no registro de representação da linguagem algébrica, no registro de chegada. Ou seja, o registro de representação da língua natural, o signo, apresenta o mesmo significado no registro de chegada. Por exemplo:

*Exemplo 1: Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?*

Notamos no texto, *vezes quatro*, significa multiplicar por quatro, o que indica que há conservação da correspondência da univocidade semântica terminal.

Já no exemplo:

*Exemplo 2: Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?*

Percebemos que não há conservação da univocidade semântica terminal, pois o uso de palavras como ganhou, mais e multiplicar apresentam significados contrários a perdeu, menos e dividir respectivamente. Em nosso exemplo, multiplicar-dividir, *Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos*.

A conservação da ordem das unidades de significado ocorre quando comparamos a ordem das unidades significantes de duas representações e, esta nos conduz a uma correspondência semântica de mesma ordem nas duas representações. Ou seja, quando fazemos a conversão entre dois registros de representação, este se dá no mesmo sentido que fazemos a leitura do texto que constitui o registro de representação da linguagem natural e, assim, efetuamos a transformação para o registro de representação da linguagem algébrica no mesmo modo, como podemos observar no exemplo:

*Exemplo 3: José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu uma certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?*

Para o exemplo seguinte podemos perceber que não há conservação a ordem das unidades de significado, pois não representamos a equação no sentido em que efetuamos a leitura.

*Exemplo 4: A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?*

Nesse exemplo, para determinar as idades de Júlio, Abreu e Bruno, devemos encontrar as relações existentes. Para saber a idade de Abreu se deve determinar a de Júlio, do mesmo modo que para se determinar a idade de Bruno devemos encontrar a idade de Júlio. Dessa maneira, não representamos a equação no mesmo sentido que efetuamos sua leitura.

Esses três critérios permitem determinar a congruência entre duas representações diferentes e que representam, pelo menos parcialmente, o mesmo conteúdo. Essas representações são consideradas congruentes quando, simultaneamente, acontece a correspondência semântica entre suas unidades significantes, a univocidade semântica terminal e a mesma ordem dessas unidades em suas representações são verificadas.

Porém, para Duval (2009, p. 18), "... quando um desses três critérios não é verificado, as representações não são mais congruentes entre elas".

No ensino, de um modo geral, não é dada a importância devida às conversões, por enfrentar os fenômenos da não-congruência, o que dificulta o reconhecimento por parte do estudante de mais de uma representação para um mesmo objeto.

A teoria dos registros de representação semiótica procura focar o seu olhar na atividade matemática. Talvez por acreditar que, em muitos processos matemáticos, seus entendimentos sejam naturais e cognitivamente transparentes. Isso contradiz o fato de que diversos registros de representações semióticas usados em matemática possuem um caráter abstrato, dependendo diretamente da incorporação de estruturas cognitivas.

Segundo Duval (2005, p.30) "... uma das características importantes da atividade matemática é a diversidade dos registros de representação semiótica que ela mobiliza obrigatoriamente". No entanto, essa diversidade raramente é considerada no ensino.

Nessa perspectiva, a conversão constitui uma transformação de complexa atividade cognitiva, o que nos leva a adoção dessa transformação e de suas características por denotar particularidades na congruência e não-congruência.

Duval (2005) faz uma distinção clara entre a descrição da atividade matemática e o funcionamento cognitivo do sujeito que realiza a conversão. O autor mostra que:

- a) Na atividade matemática, a conversão interfere somente na escolha do registro que tende a ser mais econômico, ou seja, a conversão adota um papel menos observado, a justificção aparece como referência a um registro determinado. Nesse caso, o tratamento recebe uma atenção especial.
- b) No funcionamento cognitivo, a conversão permite que haja o acesso a mecanismos dos processos de compreensão da matemática e a natureza dessas dificuldades.

Em nossa pesquisa, a teoria dos registros de representação semiótica (Duval, 2004), foi adotada como referência na conversão dos problemas como fatores que implicam ou não na congruência dos registros em combinação com a estrutura de problemas de partilha (MARCHAND e BEDNARZ, 1999).

Na conversão dos registros de representação propostos nos problemas, ocorreu a variação com a presença ou ausência das condições a serem satisfeitas para que dois registros de representações fossem considerados ou não congruentes: a ordem das unidades, a correspondência semântica entre as unidades de significado e a univocidade semântica terminal. Já que, para haver a conversão de um registro de representação em outro, é necessário levar em consideração conhecimentos matemáticos que obrigatoriamente serão requeridos em um sentido e não em outro, como por exemplo, a representação algébrica para a representação de um gráfico não requer mesma mobilização de conhecimentos que a conversão da representação gráfica para a algébrica.

## 4 O SOFTWARE CHIC

Na análise dos dados coletados foi utilizado o software CHIC (**C**lassification **H**iérarchique **I**mplicative et **C**ohésitive), desenvolvido no início dos anos 90 por pesquisadores coordenados por Régis Gras<sup>6</sup>, no Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR) na França.

No Brasil, o CHIC tem sido utilizado em diversas pesquisas, tanto no âmbito da Educação Matemática quanto em outras áreas. Muitas dessas pesquisas foram disseminadas pelo Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud<sup>7</sup> da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), que participou do desenvolvimento do software.

Esse software permite estabelecer, por exemplo, relações entre categorias (atributos) e sujeitos, por meio de similaridades e implicações. Ou seja, o CHIC permite verificar se os sujeitos e os atributos estabelecem relações, ou não, e qual o grau de importância dessas relações.

Para analisarmos os dados por meio do CHIC, é necessário associarmos a presença ou a ausência de uma categoria com o emprego de variáveis binárias que tomam valores 0 (zero) ou 1 (um), ou seja, verdadeiro ou falso, respectivamente, de modo que possamos associá-las somente a duas respostas.

Segundo Almouloud (2008, p.306),

O software, denominado CHIC (Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva), desenvolvido por nós, em sua primeira versão, e atualizado por Raphaël Couturier, permite:

- tratar diferentes tipos de variáveis (binárias, modais, de frequências, intervalares);
- quantificar a significação dos valores atribuídos à qualidade, à consistência da regra associada, às classes ordenadas de regras, à tipicidade e à contribuição de sujeitos ou categorias de sujeitos à constituição destas regras;
- representar, por um gráfico, tendo fixado um intervalo de confiança, um caminho de regras, ou uma hierarquia de regras sobre regras;

---

<sup>6</sup>Professeur Emérite à l'Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes.

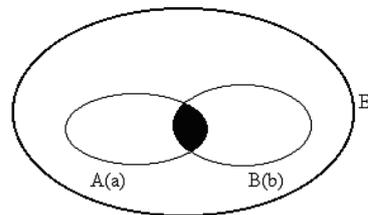
<sup>7</sup>Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC/SP.

- suprimir, acrescentar variáveis, conforme necessidade da pesquisa.

Para Almouloud (2005), a análise de similaridade permite fracionar em partes um dado conjunto de variáveis estatísticas. Este fracionamento permite interpretar se há ou não semelhanças.

O autor (2008, p.307) indica que:

O **critério de similaridade** exprime-se da seguinte maneira nos casos das variáveis binárias: presença – ausência, verdadeiro – falso, sim – não, etc.. Consideremos um conjunto  $E$ , composto pelos sujeitos da pesquisa, e duas variáveis:  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$ . Sejam  $A$  e  $B$ , subconjuntos de  $E$ , formados pelos sujeitos com as características  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$ , respectivamente. Dizemos que as variáveis  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  são muito semelhantes, quando o número de sujeitos de  $A \cap B$  é suficientemente grande, em relação aos números de elementos dos conjuntos  $E$ ,  $A$  e  $B$  e, em relação ao número de elementos  $E$  que estão em  $A \cap \overline{B}$ , ou, em  $B \cap \overline{A}$ . Mede-se essa semelhança pela probabilidade de sua inverossimilhança.



Ainda segundo o autor,

[...] procuramos constituir, em um conjunto  $V$  das variáveis, partições de  $V$  cada vez menos finas, construídas de maneira ascendente.

Essas partições encaixadas são representadas por uma árvore obtida a partir de um critério de similaridade entre variáveis. A similaridade é definida pelo cruzamento do conjunto  $V$  das variáveis com um conjunto  $E$  de sujeitos (ou de objetos). Este tipo de análise permite, ao usuário, estudar e depois interpretar, em termos de tipologia e de semelhança (e dessemelhança) decrescente, classes de variáveis, constituídas, significativamente, a certos níveis da árvore e se opondo a outros, nestes mesmos níveis. (p.307)

No tratamento dos dados para a similaridade, o CHIC, indica por meio de uma árvore (de similaridade) a probabilidade maior ou menor de ocorrências entre as

categorias. Por meio da análise da árvore e do índice de similaridade é possível indicar os grupos de categorias similares que apareçam com maior ou menor proximidade uma da outra, ou seja, saber qual categoria possui maior ou menor semelhança estatística entre as variáveis.

Assim no primeiro nível, P1 P5 (figura 3), encontramos em princípio, as duas variáveis que se apresentam com maior similaridade, ou seja, com maior probabilidade de ocorrência. No nível seguinte P6 P8 (figura 3), as outras duas variáveis na respectiva classe, e assim sucessivamente.

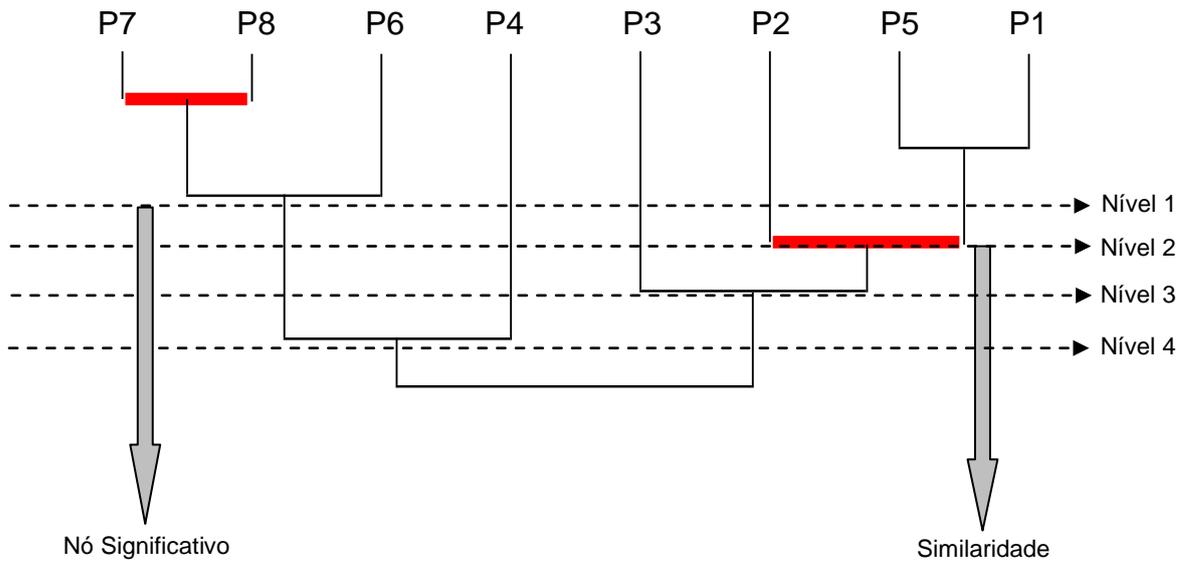
O software CHIC possui recursos que oferecem condições de categorizar, estruturar e analisar, por exemplo, os níveis de similaridade ou compatibilidade de resultados entre categorias e indivíduos, verificando em que nível há uma maior ou menor probabilidade dessa característica ser notada naquele grupo analisado.

Os níveis significativos de similaridade podem ser identificados por segmentos de reta unindo duas categorias no diagrama de árvore. Segundo Almouloud (2008, p.311),

Um critério estatístico permite saber quais são **os níveis significativos** das árvores de similaridade e da hierarquia implicativa entre todos os níveis constituídos. São os níveis em que se formam uma partição e classes que estão mais de acordo com os indícios de similaridade iniciais (ou da hierarquia implicativa). Cada nó significativo está associado à classe obtida nesse nível. A partição pode corresponder à tipologia mais consistente para o número de classes que se formaram, por exemplo, na figura 2, os níveis 1 e 4 (em vermelho) são significativos.

As noções de nível e de nós significativos, marcados por uma flecha vermelha, mostra para o usuário as classes que ele deve focar sua atenção, pelo fato de estarem em melhor conformidade com os indícios das implicações iniciais

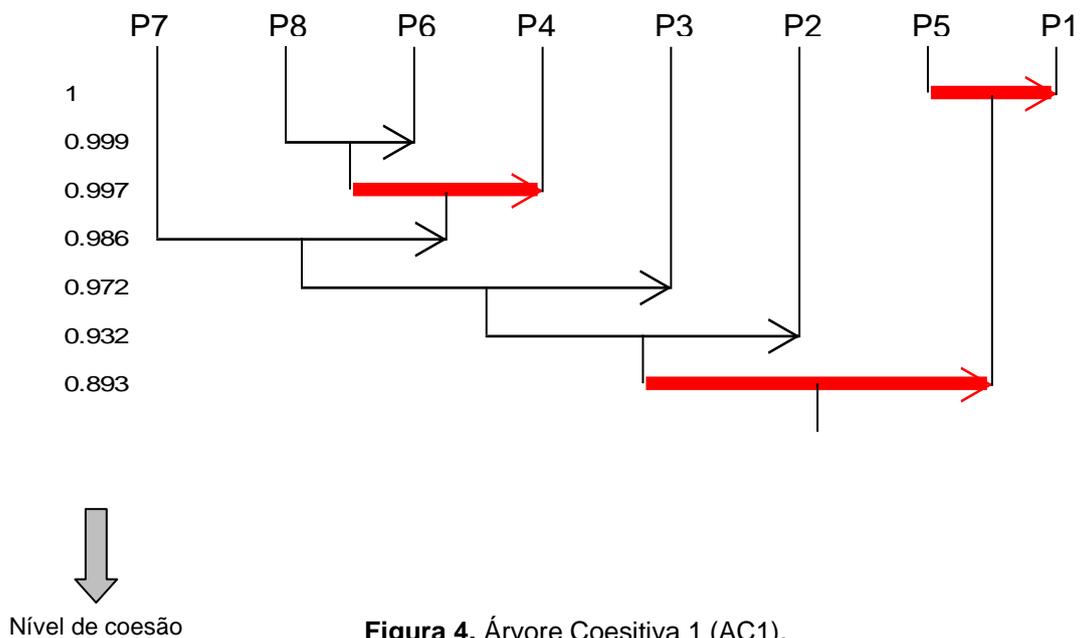
A figura 3 abaixo ilustra essas situações.



**Figura 3.** Nó Significativo.

No gráfico destacamos dois níveis significativos, sendo o nível 1 (P1 P5) o mais importante, seguido do nível 2, etc.

O CHIC permite ir além de identificar similaridades entre variáveis. Podemos também efetuar outro tratamento que mostre as implicações entre as variáveis. Vamos tomar como exemplo a árvore coesitiva 1, representada pela figura 4.



**Figura 4.** Árvore Coesitiva 1 (AC1).

Segundo Almouloud (2008, p.310),

Este método permite fazer uma análise de relações intra e inter-classes de respostas. O índice de implicação, entre duas variáveis, é estendido ao cálculo da coesão da classe, que considera a qualidade da implicação, orientada dentro de uma classe de variáveis e traduz a noção de meta-regra ou regra sobre regra.

Nela, podemos ver em que medida uma variável ou classe de variáveis implica em outra.

Ainda segundo o mesmo autor (2008, p.310),

Uma hierarquia ascendente, ou árvore coesiva, traduz graficamente o encaixamento, sucessivo, das classes constituídas, segundo o critério de coesão, que é decrescente, segundo os níveis (no sentido contrário da formação das classes de variáveis) da hierarquia. Um intervalo de confiança, de parada sobre a coesão, permite evitar a constituição de classes que não têm sentido implicativo, o que não se produz nas hierarquias clássicas. A árvore assim construída fica mais em conformidade com a semântica.

Apoiado nessa citação acima se observa na figura 4, que no primeiro nível, se forma uma classe ordenada (P5, P1), porque a implicação de P5 sobre P1 é a mais forte, entre todas as implicações possíveis entre variáveis. A ela corresponde, necessariamente, um nó significativo. No nível 3, por exemplo, uma meta-regra aparece de (P8, P6) sobre P4. Ela pode ser interpretada, por exemplo, da seguinte maneira: se (se P8 é verdadeiro então P6) então P4, geralmente, verdadeiro;  $((P8 \Rightarrow P6) \Rightarrow P4)$  é equivalente a  $(P8 \Rightarrow P6) \Rightarrow P4$ .

É importante ressaltar, entretanto, que o software CHIC apenas realiza determinados tratamentos dos dados inseridos. A análise desses dados cabe ao pesquisador, que seleciona, em função de seus objetivos, os tratamentos considerados mais adequados e, a partir das informações fornecidas pelo software, infere sobre elas, como é mostrado em Coutinho (2007).

## 5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Na realização do nosso trabalho, tomamos por base os dados coletados de outra pesquisa do Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática concluída em 2010, cujo título foi: Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau, de Wagner Rodrigues Costa.

Costa (2010) investigou em que medida as condições de não congruência podem influenciar na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica em problemas de equacionamento do primeiro grau. Com o olhar focado na correspondência semântica das unidades de significado, na unicidade semântica terminal e na conservação da ordem das unidades na conversão do registro da linguagem natural para o registro da linguagem algébrica em problemas de equacionamento do primeiro grau, o autor buscou verificar possíveis relações entre o sucesso do aluno e a variação nesses fatores.

Com o trabalho de Costa (2010) foi possível observar que, a não conservação da univocidade semântica terminal pode ser o indicativo de fator em que encontramos os menores índices de acertos na conversão do registro da linguagem natural para o registro da linguagem algébrica em problemas de equacionamento.

Já o nosso trabalho buscou investigar se há alguma relação entre os fatores que compõem a congruência e a conversão de registros da linguagem natural para a linguagem algébrica em problemas de equacionamento do primeiro grau, buscando compreender as implicações existentes a partir das variáveis adotadas. Mais particularmente, enquanto Costa (2010) buscou verificar o sucesso na conversão, em nosso trabalho o foco está na mobilização, ou não, de registros algébricos.

Os testes que forneceram os dados analisados em nossa pesquisa foram adotados também na pesquisa de Costa (2010). Esses testes foram aplicados pelos dois pesquisadores em 217 estudantes de duas escolas privadas da Região Metropolitana do Recife, matriculados no 8º ano do ensino fundamental.

Cada teste constava de oito questões e sua aplicação ocorreu em seções com tempo médio de 100 minutos, sendo permitido o uso de lápis, borracha e caneta, sem consulta a qualquer tipo de material, colega ou ao professor que procedeu à aplicação.

Em cada um dos problemas buscamos variar a ocorrência das três condições necessárias para que haja a congruência entre dois registros, a correspondência semântica, a univocidade semântica terminal e a conservação da ordem do significado, como podemos notar no quadro 6.

<b>Número do problema</b>	<b>Correspondência semântica das unidades de significado</b>	<b>Univocidade semântica terminal</b>	<b>Ordem das unidades de significado</b>
01	Conserva	Conserva	Conserva
02	Não Conserva	Não Conserva	Não Conserva
03	Conserva	Não Conserva	Conserva
04	Conserva	Conserva	Não Conserva
05	Conserva	Não Conserva	Não Conserva
06	Não Conserva	Conserva	Conserva
07	Não Conserva	Conserva	Não Conserva
08	Não Conserva	Não Conserva	Conserva

**Quadro 6.** Variáveis adotadas.

Em seu trabalho, Costa (2010), adotou as seis categorias de análise mostradas no quadro 7 abaixo:

CATEGORIA	SÍMBOLO
Registro numérico	RN
Registro algébrico conversão total	RACT
Registro algébrico conversão parcial	RACP
Registro algébrico conversão incompatível	RACI
Registro pictórico	RP
Outros	B

**Quadro 7.** Símbolo das categorias adotado por Costa (2010, p.51).

Na categoria registro numérico (RN), Costa (2010) incluiu os registros de representação numérica, aqueles cuja representação o estudante utilizou, exclusivamente, operações aritméticas para a conversão dos registros da linguagem natural para a linguagem algébrica, como podemos observar nos problemas 01 e 07 pertencentes, respectivamente, aos protocolos de números 14 e 37.

01) Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?

$$\begin{array}{l}
 140 : 7 = 20 \\
 20 \cdot 4 = 80 \\
 20 \cdot 2 = 40 \\
 20 \cdot 1 = 20
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Jorge} = 20 \\
 \text{Paulo} = 40 \\
 \text{Felipe} = 80
 \end{array}$$

**Protocolo número 14**

07) João, Ricardo e Mateus possuem juntos 126 bolas de gude. João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo, e Mateus tem o quádruplo de bolas de gude de Ricardo. Quantas bolas de gude possui cada um?

Handwritten solution for problem 07:

$$\begin{array}{r} 126 \overline{) 3} \\ \underline{12} \phantom{0} \\ 006 \\ \underline{-6} \\ 000 \end{array}$$

João - 42  
Ricardo - 21  
Mateus - 84

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84 \\ 12 \\ 21 \\ \hline 126 \end{array}$$

**Protocolo número 37**

A conversão total dos registros (RACT) da linguagem natural para a linguagem algébrica é caracterizada quando é efetuada com sucesso e com o uso, em todos os registros, de signos algébricos, além da construção da equação, como exemplificamos no problema 03 do protocolo de número 12, abaixo:

03) José, Augusto e Fábio produziram, juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?

Handwritten solution for problem 03:

$$\begin{array}{l} 1400 \\ \hline \end{array}$$

José =  $x$   
Augusto =  $2x$   
Fábio =  $4x$

$$4x + 2x + x = 7x = 1400$$

$$x = 1400 : 7$$

$$x = 200$$

José = 200  
Augusto = 400  
Fábio = 800

**Protocolo número 12**

Na conversão parcial para os registros algébricos (RACP), é considerado que o estudante consegue efetuar as relações entre as partes envolvidas no problema,

porém não consegue montar a equação. O problema 6 do protocolo de número 105 e no problema 5 do protocolo número 132 ilustram essa situação.

06) Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?

$$\text{Juca} = x \cdot 3$$

$$\text{Rita} = x$$

$$\text{Márcia} = x \cdot 4$$

120

**Protocolo número 105**

05) Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?

$$\text{Jô} = x$$

$$\text{Tiago} = 3 \cdot x$$

$$\text{Alfeu} = \frac{5}{x}$$

**Protocolo número 132**

Podemos perceber que, nesses casos, não há construção da equação, ocorrendo apenas a representação inicial dos dados.

Já o registro de conversão algébrica incompatível (RACI), foi caracterizado por aquele em que o estudante utiliza o registro algébrico para a conversão, porém não consegue expressar nenhuma relação ao problema proposto de modo satisfatório. Podemos encontrar essa categoria no problema 4 do protocolo 62.

04) A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?

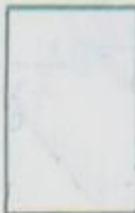
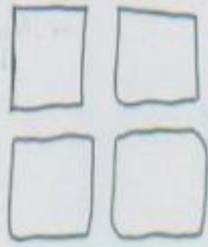
$$X \cdot 2 \cdot 5 = 90$$
$$X \cdot 10 = 90$$
$$X = 90 \div 10$$
$$X = 9$$

**Protocolo número 62**

Nesse caso, podemos notar que ocorreu uso da representação algébrica para a transformação, porém não há relação entre o registro proposto pelo estudante e os dados enunciados no problema.

Outra categorização considerada foi o registro pictórico, em que o aluno não apresenta representação numérica, nem algébrica. Eles são caracterizados pela presença de figuras, como podemos perceber no problema 1 do protocolo de número 92.

01) Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?

Jorge  Paulo  Felipe 

**PROTOCOLO NÚMERO 92**

Em nosso trabalho os registros foram, inicialmente, caracterizados em dois grupos em dois: os algébricos (com conversão total, parcial e incompatível) e não algébricos (registros numéricos e outros registros). Em outros registros incluímos os registros pictóricos e os não caracterizados, conforme pode ser observado no quadro 8.

CATEGORIA	SÍMBOLO
Registro algébrico	RA
Registro não algébrico	RNA

**Quadro 8.** Categorização inicial da pesquisa.

Após a revisão de todos os protocolos e a categorização inicial, algébricos e não algébricos, submetemos os dados ao software CHIC, com o objetivo de verificarmos se há ou não há relação entre os fatores de congruência e o uso de registros algébricos em conversões. O tratamento dos dados por meio do CHIC, ocorreu com o preenchimento de uma planilha do aplicativo excel, com extensão (.csv – separado por vírgula). Essa planilha apresenta nove colunas, onde a primeira das células (A1) precisa estar vazia, caso contrário, não é possível submeter dados

ao software. A primeira coluna representa os protocolos (indicados por i número do protocolo) e as outras oito seguintes indicam os problemas propostos (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8).

Cada uma das células associava o problema ao respectivo registro realizado pelo aluno. Para indicar essa associação empregamos as variáveis 1 (um) para o estudante que efetuou o registro algébrico e o 0 (zero) para o registro não algébrico.

Os dados tratados com o software CHIC, permitiu verificarmos se há ou não relação entre os fatores de congruência e o uso de registros algébricos em conversões. Essa relação foi analisada por meio da similaridade, com a intersecção dos dados obtidos pelas variáveis utilizadas para o emprego ou não dos registros algébricos para os problemas, verificando quantos destes apresentam comportamentos similares, ou seja, se utilizavam o mesmo registro para o problema indicado.

Uma segunda análise foi efetuada, com o intuito de investigar como os fatores de congruência interferem na conversão dos registros, focando apenas nos três tipos de registros algébricos, aquele em que o aluno acerta completamente (RACT), quando o aluno acerta parcialmente (RACP) e nos casos em que o aluno não tem sucesso na conversão (RACI). Essa etapa buscou verificar em que medida presença ou ausência das condições necessárias à congruência entre dois registros, poderiam levar ao aluno em efetuar o registro algébrico completo, parcial ou incompatível, quadro 9.

<b>CATEGORIA</b>	<b>SÍMBOLO</b>
Registro algébrico com conversão total	RACT
Registro algébrico com conversão parcial	RACP
Registro algébrico com conversão incompatível	RACI

**Quadro 9.** Categorização da 2ª análise.

Nessa etapa, as colunas da planilha foram divididas em vinte e cinco, com a conservação de nenhum registro na célula A1 e as demais com os registros algébricos com conversão total (RACT), registros algébricos com conversão parcial (RACP) e os registros algébricos com conversão incompatível (RACI) para cada um dos problemas (P1RACT, P1RACP, P1RACI, P2RACT, P2RACP, P2RACI, ... , P7RACT, P7RACP, P7RACI, P8RACT, P8RACP, P8RACI). A presença do registro foi indicada com o emprego do 1 (um) e do 0 (zero) para a ausência do registro, ou seja, para o registro não algébrico (numérico, pictórico ou outros registros) foi utilizado o zero para sua indicação.

Salientamos que os percentuais indicados em nossa pesquisa relacionam os registros existentes em cada um dos protocolos a os 217 aplicados, e não cada registro relacionado a todos os registros de mesmo tipo.

As análises efetuadas nas duas etapas mencionadas levaram em consideração os percentuais de incidência dos registros relacionados a cada um dos problemas do teste, as representações gráficas dos dados, as árvores, que nos indica se há uma maior incidência de determinados registros e seus respectivos índices por similaridades e coesão. Os percentuais, as árvores e seus índices foram obtidos a partir da compilação das planilhas pelo software, que relacionam as variáveis (categorias) com os sujeitos (estudantes).

## **5.1 As Características dos Problemas Aplicados**

Os problemas analisados em nossa pesquisa foram construídos e aplicados, também, na pesquisa desenvolvida por Costa (2010).

Além dos fatores que interferem na congruência da conversão de registros indicadas por Duval (2004), os testes foram construídos com a categorização de partilha para os problemas algébricos por Marchand e Bednarz (1999). Para as autoras os problemas algébricos podem ser ainda caracterizados como os problemas de transformação e os problemas de taxa.

Os problemas de partilha são caracterizados por apresentarem uma determinada quantidade que deve ser partilhada em outras partes desconhecidas. O exemplo 5 ilustra esse tipo de problema.

Exemplo 5: “*Maria, Antonio e João, possuem 50 bombons. Maria tem 10 bombons a mais que Antonio, e João o dobro do número de bombons de Antonio. Quantos bombons cada um têm?*”

A quantidade total é de 50, que precisa ser partilhada entre três sujeitos, *Maria, Antonio e João*, cujas quantidades são desconhecidas. Duas relações são estabelecidas, “*Maria tem 10 a mais que Antonio*” e “*João tem o dobro de Antonio*”. Podemos ver também que, nesse problema, a primeira relação é aditiva (10 a mais) e a segunda relação é multiplicativa (dobro).

Nos problemas de transformação, o valor inicial não é declarado no enunciado, explicitamente. Isto é, o valor é desconhecido. Este, por sua vez, necessita ser transformado no valor de origem construindo uma nova situação. Como podemos notar no exemplo 6.

Exemplo 6: “*Sabe-se que a idade atual de João mais 25 anos é igual ao triplo da idade que ele tinha cinco anos atrás. Qual a idade de João?*”

A idade de João é o valor inicial e desconhecido. Sobre este valor foram realizadas três transformações. Duas aditivas, representadas por *cinco anos atrás* e *mais 25 anos* e uma multiplicativa, representada pela operação (*triplo*).

Já os problemas de taxa aparecem em relações entre grandezas não-homogêneas, como por exemplo, tempo (em horas) e a velocidade média (expressa em quilômetros por hora), buscando uma relação de proporcionalidade entre as partes envolvidas, como podemos observar no exemplo 7.

Exemplo 7: “Um homem viaja de automóvel entre duas cidades A e B a uma velocidade média de 60 km/h e volta pela mesma estrada a uma velocidade de 80 km/h. Se ele conclui todo o percurso em 5 horas, qual a distância entre essas duas cidades?”

Nos problemas de partilha, onde a quantidade total passa a ser repartida em outras partes desconhecidas, podemos variar o número de relações entre as partes, a natureza dessas relações e o tipo de encadeamento entre essas relações.

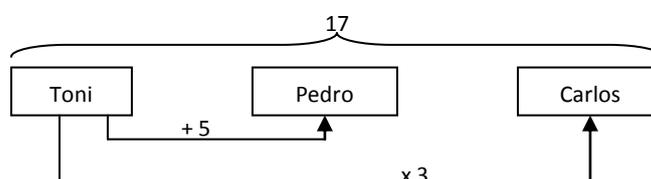
O número das relações entre as partes é consequência do número de elementos desconhecidos no problema. Por exemplo, uma quantidade a ser repartida entre João, Maria e José implica no estabelecimento de duas relações.

A natureza das relações pode ser aditiva ou multiplicativa. Por exemplo, em “João tem 5 a menos que Maria” temos estabelecida uma relação aditiva, enquanto em “Maria tem a metade de José” temos uma relação de natureza multiplicativa. Em nosso trabalho vamos considerar que, se um problema apresenta relações de naturezas diferentes (aditiva e multiplicativa) dizemos que ele tem natureza mista.

Em relação ao encadeamento das relações, Marchand e Bednarz (1999) classificam os problemas de partilha nos tipos “fonte”, “composição” e “poço”. No encadeamento tipo fonte, as relações são estabelecidas a partir de um dos elementos desconhecidos, como mostra o exemplo 8.

Exemplo 8: “Três irmãos, Pedro, Toni e Carlos possuem 17 selos. Pedro possui cinco selos a mais que Toni e, Carlos o triplo de Toni. Quantos selos possuem cada um dos irmãos?”

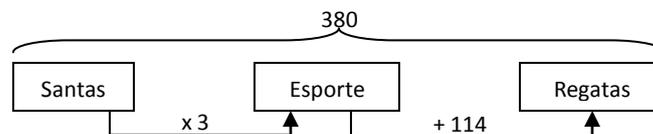
Esse problema pode ser representado pela seguinte estrutura:



Podemos encontrar duas relações, uma entre Pedro e Toni e outra entre Carlos e Toni sendo que as duas tomam como fonte a incógnita Toni, que atua como a fonte das relações. Nesse exemplo, a relação entre Pedro e Toni é aditiva e a relação entre Carlos e Toni é multiplicativa.

No encadeamento tipo composição, as relações são estabelecidas em sequência. O problema dos times de futebol exemplifica esse tipo de encadeamento, como mostra o exemplo 9.

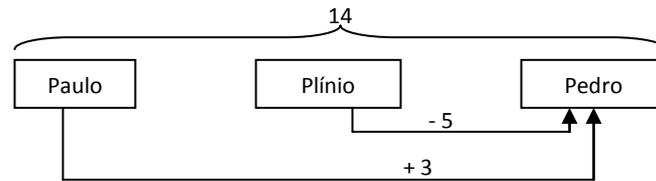
**Exemplo 9:** “Em uma escola, 380 alunos torcem por um dos três times de futebol da cidade. O número de alunos que torcem pelo Esporte é o triplo do número de alunos que torcem pelo Santas, e o número de alunos que torcem pelo Regatas é 114 a mais do que os que torcem pelo Esporte. Nessa escola, quantos torcedores torcem por cada um dos times?”



Podemos observar que, nesse caso, Esporte se relaciona com Santas e Regatas, por sua vez, se relaciona com Esporte, criando uma sequência de relações. Temos também que, a primeira relação é de natureza multiplicativa (triplo) e que a segunda relação é de natureza aditiva (a mais), ou seja, trata-se de um problema de natureza mista.

Já no encadeamento tipo poço, todas as relações convergem para um dos dados do problema, como mostra o exemplo 10.

**Exemplo 10:** “Pedro, Paulo e Plínio vão repartir 14 selos de modo que Pedro receba três selos a mais que Paulo e cinco selos a menos que Plínio. Quantos selos cada um vai receber?”



Para o nosso trabalho, fixamos o número de relações em duas, sendo ambas multiplicativas em problemas cujo encadeamento é do tipo fonte. Isso se deu em virtude de estabelecermos como variáveis somente as condições de congruência.

VARIÁVEL	VARIÁVEL FIXADA
Tipo de problema	Problemas de partilha
Tipo de encadeamento das relações	Fonte
Número de relações	Duas
Natureza das relações	Multiplicativa

**Quadro 10.** Valores das variáveis.

O teste aplicado apresentou oito problemas estruturados de modo que fosse possível verificar em qual(is) do(s) problema(s) proposto(s) as conversão(ões) das representações da linguagem natural para a linguagem algébrica pudessem interferir em maior ou menor grau.

Para isso, consideramos as três condições necessárias à congruência entre dois registros: a correspondência semântica entre suas unidades significantes, a univocidade semântica terminal e, a mesma ordem dessas unidades em suas representações. No quadro 11 temos as condições que são ou não conservadas em cada um dos problemas.

<b>Problema 01</b>	Três amigos, Jorge, Paulo e Felipe, possuem, juntos, 140 bonecos. Jorge possui uma certa quantidade de bonecos. Duas vezes a quantidade de Jorge é a quantidade de Paulo. A quantidade de bonecos de Jorge, vezes quatro, é a quantidade de bonecos de Felipe. Quantos bonecos possui cada um?		
Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado	
Conserva	Conserva	Conserva	
<b>Problema 02</b>	Geraldo, Marcos e Taís vão a um orfanato de crianças carentes entregar uma contribuição financeira, voluntária, equivalente a R\$ 1 100,00. Geraldo contribuiu quatro vezes mais que Marcos e Taís com a metade do que contribuiu Marcos. Com quantos reais contribuiu cada um?		
Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado	
Não conserva	Não conserva	Não conserva	
<b>Problema 03</b>	José, Augusto e Fábio produziram juntos, 1400 peças na fábrica em que trabalham. Augusto produziu uma certa quantidade. Duas vezes o número de peças produzidas por Augusto dá a quantidade de Fábio. A metade do número de peças produzidas por Augusto é a quantidade fabricada por José. Quantos produtos foram fabricados, individualmente, por estes três funcionários?		
Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado	
Conserva	Não conserva	Conserva	
<b>Problema 04</b>	A soma das idades de Júlio, Abreu e Bruno é de 90 anos. A idade de Abreu é três vezes a de Julio, e a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio. Qual a idade de cada um deles?		
Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado	
Conserva	Conserva	Não conserva	
<b>Problema 05</b>	Tiago, Jô e Alfeu são colecionadores de selos. Eles vão repartir 84 selos de modo que Tiago possua três vezes a quantidade de selos de Jô, e Alfeu a quinta parte de selos de Jô. Quantos selos cada um vai receber?		
Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado	

Conserva		Não conserva	Não conserva
<b>Problema 06</b>	Os irmãos Juca, Rita e Márcia possuem juntos 120 brinquedos. Rita possui uma certa quantidade. O triplo da quantidade de brinquedos de Rita é igual a quantidade de brinquedos de Juca. O quádruplo do número de brinquedos de Rita é a de Márcia. Quantos brinquedos possui cada um?		
Correspondência semântica das unidades de significado		Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
Não conserva		Conserva	Conserva
<b>Problema 07</b>	João, Ricardo e Mateus possuem juntos 126 bolas de gude. João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo, e Mateus tem o quádruplo de bolas de gude de Ricardo. Quantas bolas de gude possui cada um?		
Correspondência semântica das unidades de significado		Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
Não conserva		Conserva	Não conserva
<b>Problema 08</b>	Os amigos Maria, Roger e Caio compraram chocolates numa quantidade total de 68 chocolates. Roger comprou uma certa quantidade. O triplo da quantidade de chocolates de Roger é igual a quantidade de chocolates de Maria. A quarta parte dos chocolates de Roger é igual a de Caio. Quantos chocolates comprou cada um?		
Correspondência semântica das unidades de significado		Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
Não conserva		Não conserva	Conserva

**Quadro 11.** Os oito problemas do instrumento.

O nosso trabalho buscou identificar como a conservação ou não das condições necessárias à congruência entre dois registros (a correspondência semântica das unidades significado, a univocidade semântica terminal e a conservação da ordem dessas unidades de significado), podem interferir nos tipos de registros de representação mobilizados pelos estudantes. Com isso, buscamos o recurso de um software de Análise Implicativa, o CHIC, que permite organizar, construir e explicar os fenômenos associados aos dados.

## 6 ANÁLISE E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Em nosso trabalho investigamos em que medida a conservação ou não dos fatores de congruência interferem na conversão de registros em linguagem natural para a linguagem algébrica. Dessa forma, não levamos em consideração os acertos ou erros na resolução das mesmas questões, mas tão somente o tipo de registro utilizado pelo sujeito no trato com as questões. Essa ressalva se justifica na medida em que, algumas vezes, o sujeito resolve corretamente o problema, às vezes até mesmo se servindo de outros registros, ou seja, representa esse problema sem a utilização de registros algébricos.

A tabela 1 mostra os dados tratados com o software CHIC. Nele, temos os percentuais relacionados aos registros algébricos em função de cada problema, consideramos todo e qualquer tipo de registro algébrico, seja ele totalmente correto (RACT), parcialmente correto (RACP) ou totalmente incorreto (RACI).

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Média
<b>Registros Algébricos</b>	53%	41%	44%	46%	33%	40%	36%	35%	41%

**Tabela 1.** Registros algébricos.

De modo geral, podemos perceber que, em média, 59% dos estudantes não fizeram uso de registros algébricos, o que é indicativo de dificuldades na conversão dos registros da linguagem natural para a linguagem algébrica, confirmando pesquisas já realizadas, como as de André (2007) e Costa (2010).

Os dados ainda mostram que parece existir uma certa estabilidade na utilização de registros algébricos por parte dos alunos, havendo pouca variação em função dos fatores de congruência observados. Nos parece interessante ressaltar que, o maior percentual de utilização de registros algébricos corresponde ao primeiro problema (P1) em que todos os fatores são conservados, ou seja, trata-se de um

problema que apresenta congruência na conversão.

O problema que apresentou o segundo maior percentual para registros algébricos, 46%, foi o problema P4, em que somente a ordem das unidades de significado não é conservada entre os registros de partida e de chegada. Nesse problema, a proposição em linguagem natural, **a idade de Bruno é cinco vezes a de Julio**, é convertida para a linguagem simbólica por meio da expressão  $B = 5.J$ .

O P3, com 44%, foi o terceiro problema que mais apresentou registros algébricos, esse problema é caracterizado por não conservar a univocidade semântica terminal, ou seja, o registro de representação da língua natural não apresenta o mesmo significado no registro de chegada.

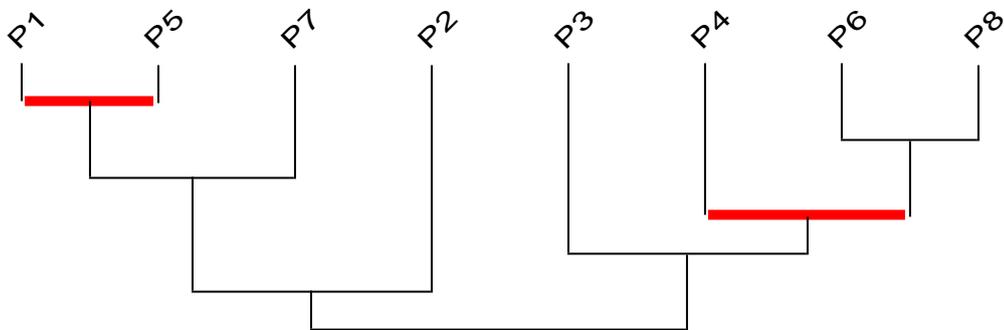
Já o problema 5 (P5) apresentou o menor percentual de registros algébricos. Trata-se de um problema em que o único fator conservado é a correspondência semântica das unidades de significado. Em outras palavras, tanto o problema P1 quanto o P5 se caracterizam por terem a mesma quantidade de signos nos registros de partida (em linguagem natural) e de chegada (em linguagem algébrica). Como podemos perceber no problema P1, a frase *a quantidade de bonecos de Jorge, **vezes quatro**, é a quantidade de bonecos de Felipe* deve ser convertida para a expressão  $4 \cdot J = F$ .

Ao mesmo tempo, observamos que o problema P1 e o problema P4, não demandam uma conversão com recurso a registros fracionários. O mesmo acontece nos problemas 6 e 7. Entretanto, nesses dois últimos problemas observamos, respectivamente, o aparecimento dos termos triplo e quádruplo. Nos parece, então, interessante, indicar a realização de outras investigações para identificar se o vocabulário utilizado no registro em linguagem natural pode influenciar o recurso a registros algébricos, na conversão.

Merece também maiores investigações, verificar em que medida a utilização de relações com frações para transformações por conversão em problemas há uma maior empregabilidade de registros algébricos. Em nosso instrumento, quatro problemas envolvem registros fracionários, P2, P3, P5 e P8. Em P2 e P3, questões

com maior utilização de registros algébricos (42,5% em média), as frações envolvidas são representadas em linguagem natural pela palavra “metade”. Já em P5 e P8, o recurso de registros algébricos cai bastante (34% em média), e os registros utilizados são “quinta parte” (1/5) e “quarta parte” (1/4), respectivamente.

A árvore de similaridade 1 (ASI 1), apresentada a seguir, é a representação gráfica do tratamento dos dados pelo software CHIC para os registros algébricos e não algébricos (tabela 1).



**Figura 5.** Árvore de Similaridade 1 (ASI 1).

A árvore ASI1 apresenta classificação ao nível:

- 1: (P1P5) com similaridade: 0.997135
- 2: (P6P8) com similaridade: 0.992038
- 3: ((P1P5)P7) com similaridade: 0.985384
- 4: (P4(P6P8)) com similaridade: 0.984139
- 5: (P3(P4(P6P8))) com similaridade: 0.955637
- 6: (((P1P5)P7)P2) com similaridade: 0.947933
- 7: (((((P1P5)P7)P2)(P3(P4(P6P8)))))) com similaridade: 0.879926

Numa análise bem abrangente, podemos observar no nível 7 a existência de duas classes, níveis 5 (P3(P4(P6P8))) e 6 (((P1P5)P7)P2), que se opõem no nível 7

e, sua reunião têm uma coesão fraca, pois estão agrupadas no último nível da classificação.

A árvore nos mostra dois nós significativos nos níveis 1 (P1,P5) e 4 (P4(P6,P8)). Desse modo, entendemos que no nível 1, os alunos que efetuarem o registro algébrico no problema 1 apresentam maior probabilidade de também repetirem o mesmo tipo de registro no problema 5. Quando verificamos as características dos dois problemas, percebemos em comum, exclusivamente, a conservação da correspondência das unidades de significado, por onde podemos notar que há chance dessa característica interferir no emprego do registro algébrico para o problema, como percebemos na no quadro 12.

<b>Número do problema</b>	<b>Correspondência semântica das unidades de significado</b>	<b>Univocidade semântica terminal</b>	<b>Ordem das unidades de significado</b>
01	Conserva	Conserva	Conserva
05	Conserva	Não Conserva	Não Conserva

**Quadro 12.** Características comuns de P1 e P5.

No nível 4 (P4(P6,P8)), notamos o encadeamento existente entre P4 com P6 e P8 do nível 2. O nó significativo está situado no nível 4, onde está o P4, pontuado como um problema em que não há a conservação da ordem das unidades de significado. Ou seja, quando efetuamos a conversão do registro da linguagem natural para a linguagem algébrica, esta não ocorre no mesmo sentido da leitura do enunciado do problema. Nesse nível há grande probabilidade em realizar o mesmo tipo de registro, o algébrico, nos problemas P6 ou P8.

Já no nível 2 (P6,P8), porém sem tanta significatividade, temos a possibilidade de realização do registro algébrico. Esses dois problemas apresentam, em comum, a conservação da ordem das unidades de significado, ou seja, a conversão dos registros ocorre no mesmo sentido de sua leitura. Outra característica

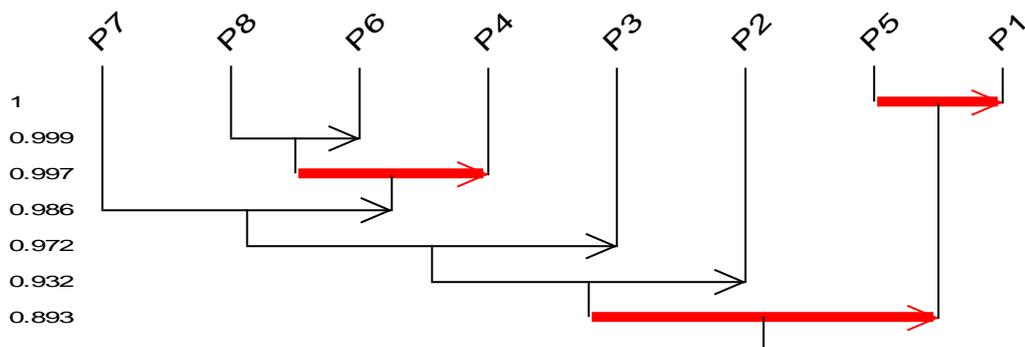
notada nos dois problemas é a não conservação da correspondência semântica das unidades de significado, ou seja, o número de signos do registro de representação na linguagem natural é o mesmo para o registro de representação na linguagem algébrica. Estas características podem ser observadas no quadro 13.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
04	Conserva	Conserva	Não Conserva
06	Não Conserva	Conserva	Conserva
08	Não Conserva	Não Conserva	Conserva

**Quadro 13.** Características comuns de P4, P6 e P8.

Desse modo, não podemos afirmar se é a conservação da ordem ou a não conservação da correspondência semântica, ou simultaneamente as duas características que podem indicar esta similaridade sem a presença de um nó significativo.

Entendemos desse modo, que, há relação entre as características mencionadas e, submetemos os mesmos dados ao CHIC para efetuarmos uma análise coesitiva, onde encontramos a árvore coesitiva 2 (AC2).



**Figura 6.** Árvore Coesitiva 2 (AC2).

A árvore AC2 apresenta classificação ao nível:

- 1: (P5 P1) com coesão: 1.
- 2: (P8 P6) com coesão: 0.999.
- 3: ((P8 P6) P4) com coesão: 0.997.
- 4: (P7 ((P8 P6) P4)) com coesão: 0.986.
- 5: ((P7 ((P8 P6) P4)) P3) com coesão: 0.972.
- 6: (((P7 ((P8 P6) P4)) P3) P2) com coesão: 0.932.
- 7: (((((P7 ((P8 P6) P4)) P3) P2) (P5 P1))) com coesão: 0.893.

A coesão significativa é encontrada nos nós dos níveis 1 (P5P1), 3 ((P8P6)P4) e 7 (((((P7((P8P6)P4))P3)P2)(P5P1))), ou seja, as setas em cor vermelha, simbolizam uma relação coesiva em nós mais significativos, indicando que há uma maior probabilidade do aluno que efetuar, por exemplo, no nível 1 o registro de representação para o problema 5 também recorrer ao mesmo tipo de registro para o problema 1.

Na análise da AC2 há o indicativo da existência de um nó significativo no nível 1, o que indica que quem mobilizar o registro algébrico para o problema 5 provavelmente também o repetirá para o o problema 1, já que, além desse nó estar no menor nível, ele ainda nos dá uma coesão elevada, 1, o que indica que há um ótimo agrupamento entre as variáveis observadas.

Como já foi mostrado anteriormente, os problemas 5 e 1 apresentam em comum a conservação da correspondência semântica das unidades de significado, ou seja, o número de signos do registro são os mesmos tanto para a representação na linguagem natural quanto para a representação na linguagem algébrica, o que pode ser o indicativo de que há influência dessa característica no que se refere ao emprego do registro algébrico na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica.

O segundo nível (P8 P6), com coesão 0.999 que é considerada elevada, garante provavelmente que o aluno que mobilizar um determinado tipo de registro para o problema 8 também repetirá o mesmo registro para o problema 6. Esses dois

problemas conservam a ordem das unidades de significado e não conserva a correspondência semântica das unidades de significado.

No terceiro nível ((P8P6)P4) temos índice de coesão 0.997 com implicação do segundo nível (P8P6) em P4, o que significa afirmar que quem efetuar o registro algébrico no nível 2 tem grande probabilidade de também fazer o mesmo no problema 4.

No nível 4 (P7((P8P6)P4)), com coesão 0.986, podemos entender que o estudante que realizou o registro algébrico no problema 7 tem probabilidade de repeti-lo no nível 3.

Observamos que o nível 5 ((P7((P8P6)P4))P3) com coesão 0.972, indica que quem mobilizar o registro algébrico no problema 7 tem probabilidade de efetuar o mesmo registro no nível 4.

Desse modo, o único fator que parece interferir no emprego do registro algébrico na conversão dos problemas propostos é a correspondência semântica das unidades de significado, ou seja, o número de signos do registro de representação na linguagem natural é o mesmo para o registro de representação na linguagem algébrica.

Passamos então a tratar os dados no software utilizando apenas os registros algébricos com conversão total (RACT), registros algébricos com conversão parcial (RACP) e os registros algébricos com conversão incompatível (RACI). Para os demais registros (os registros numéricos, pictóricos) indicamos que não ocorreu nenhum dos registros anteriores. Para a realização do tratamento pelo software, foi realizado o preenchimento da planilha com a indicação do 1 (um) para a presença de cada um desses registros e 0 (zero) para a ausência destes. Esse tratamento nos forneceu a tabela 2.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Média
RACT	21%	13%	15%	19%	12%	18%	17%	14%	16%
RACP	29%	26%	26%	23%	19%	21%	18%	19%	23%
RACI	04%	03%	03%	04%	02%	01%	01%	01%	02%

**Tabela 2.** Percentuais de incidência de registros algébricos com conversão total, parcial e incompatível.

A tabela apresentada nos mostra que ocorre, com média de 23%, uma incidência maior para os registros algébricos com conversão parcial, que são aqueles em que o estudante consegue efetuar as relações entre as partes envolvidas no problema, porém não consegue montar a equação. Em segundo lugar, 16%, temos os registros algébricos com conversão total, caracterizada pelo emprego bem sucedido de signos algébricos na construção da equação.

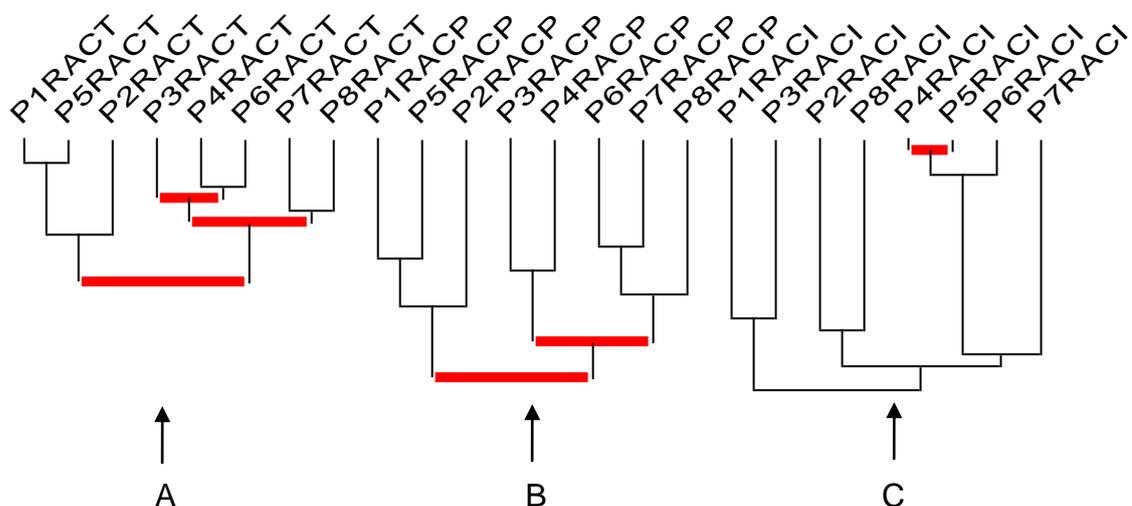
Podemos também notar que, o problema 5 apresentou o menor percentual para os registros algébricos com conversão total, 12%, e um dos menores índices de incidência para os registros algébricos com conversão parcial, 19%. Nesse problema suas características, a conservação da correspondência semântica das unidades de significado e a não conservação da univocidade semântica terminal e da ordem das unidades de significado podem conduzir o aluno a mobilizar de registros não algébricos para efetuar a conversão, índice de 33% para os registros algébricos (P5 quadro1).

Desse modo, a conservação da correspondência semântica das unidades de significado pode ser o fator que, quando conservado, leva o aluno que recorrer ao emprego do registro algébrico no problema 5 apresente probabilidade de também realizar o mesmo registro no problema 1 (AC1). Portanto, confirma que se há o mesmo número de signos no registro da representação da linguagem natural e da linguagem algébrica, o registro algébrico tende a ser o mais utilizado. No nosso caso, isso ocorre com uma incidência maior para o registro algébrico com conversão parcial, 19%.

O problema 7 apresenta uma incidência de registros algébricos de 36%, tabela 1, que equivale a mais de 60% da encontrada para o problema 1, 53%. Notamos que os registros algébricos com conversão total e conversão parcial para o mesmo problema apresentam percentuais de seus empregos com grande proximidade, 17 e 18%, respectivamente (tabela 2). Essa aproximação pode ser o indício de que a conservação da univocidade semântica terminal, único fator conservado, conduz os estudantes a fazerem uso dos registros algébricos na tentativa da realização da conversão para o problema proposto, talvez pelo fato desse fator apresentar o signo com o mesmo significado no registro de representação da língua natural para a representação algébrica, o registro de chegada.

É importante também observar que, de modo geral, o primeiro problema apresenta uma maior incidência entre os registros algébricos, 21% para os problemas algébricos com conversão total e 29% para os de conversão parcial, o que pode indicar que o problema 1, que apresenta a conservação dos três fatores, conduz a um número expressivo de alunos a fazer opção em utilizá-lo para a conversão de registro da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Esses dados tratados pelo software nos forneceu a árvore de similaridade 2 (AS2) na figura 7 abaixo:



**Figura 7.** Árvore de Similaridade 2 (AS2)

Nessa árvore, o P1RACT indica o problema 1 com registro com conversão total. Já no P1RACP, temos a indicação do problema 1 com o registro com conversão parcial e o P1RACI é a representação do problema 1 com o registro com conversão incompatível. Desse modo, todos os problemas são representados para os registros com conversão total, parcial e incompatível respectivamente.

Inicialmente, percebemos a formação de três classes, A, B e C. Podemos notar na classe A o indicativo de que, o estudante que efetuar o registro algébrico com conversão total para um dos problemas tende a repetir o mesmo registro para os demais, o mesmo ocorrendo para o registro algébrico com conversão parcial, representado na classe B e, conversão incompatível no C. Isso nos leva a entender que ocorre certa estabilidade na representação dos registros, ou seja, o indivíduo que usou um determinado tipo de registro tende a repetir o mesmo registro nos demais problemas. Dessa forma, as classes A, B e C, por não apresentarem vínculos (nós), indica que o estudante que realizar um determinado tipo de registro apresenta tendência a repetir o mesmo registro nos demais problemas, já que nesse sentido há oposição entre as classes, ou seja, não observamos ligações entre eles.

A AS2 apresenta classificação ao nível:

- 1(P4RACI,P5RACI) similaridade 1.
- 2(P1RACT,P5RACT) similaridade 1.
- 3((P4RACI,P5RACI),P6RACI) similaridade 0.999999.
- 4(P4RACT,P6RACT) similaridade 0.992203.
- 5(P3RACT,(P4RACT,P6RACT)) similaridade 0.979668.
- 6(P7RACT,P8RACT) similaridade 0.967206.
- 7((P3RACT,(P4RACT,P6RACT)),(P7RACT,P8RACT)) similaridade 0.934064.
- 8((P1RACT,P5RACT),P2RACT) similaridade 0.928539.
- 9(P6RACP,P7RACP) similaridade 0.912971.
- 10(P1RACP,P5RACP) similaridade 0.867071.
- 11(P3RACP,P4RACP) similaridade 0.856236.
- 12(((P1RACT,P5RACT),P2RACT),((P3RACT,(P4RACT,P6RACT)),(P7RACT,P8RACT))) similaridade 0.807837.
- 13((P6RACP,P7RACP),P8RACP) similaridade 0.785089.

- 14((P1RACP,P5RACP),P2RACP) similaridade 0.702113.  
 15(P1RACI,P3RACI) similaridade 0.629201.  
 16(P2RACI,P8RACI) similaridade 0.629201.  
 17((P3RACP,P4RACP),((P6RACP,P7RACP),P8RACP))similaridade  
 0.401362.  
 18(((P4RACI,P5RACI),P6RACI),P7RACI) similaridade 0.249097.  
 19((P2RACI P8RACI) (((P4RACI P5RACI) P6RACI) P7RACI)) similaridade  
 0.116846.  
 20(((P1RACP,P5RACP),P2RACP),((P3RACP,P4RACP),((P6RACP,P7RACP),  
 P8RACP))) similaridade 0.102056.  
 21((P1RACI,P3RACI),((P2RACI,P8RACI),(((P4RACI,P5RACI),P6RACI),P7RA  
 CI))) similaridade 0.039941.

Notamos que na AS2, os nós significativos estão nos níveis 1, 5, 7, 12, 17 e 20. Destes, o nó mais significativo está no nível 12, classe A, que embora esteja nesse nível apresenta similaridade de 0.807837.

Na classe C, encontramos no nível 1 (P4RACI,P5RACI) com similaridade 1. Esta classe indica que há grande probabilidade do estudante que efetuar o registro algébrico com conversão incompatível no problema 4 também repetir no problema 5, o que não nos fornece garantia de que a conservação da correspondência semântica das unidade de significado exerce interferência sobre a utilização dos registros algébricos na conversão total ou, se é a não conservação da ordem das unidades de significado que pode indicar a tendência desse tipo de registro. Outra hipótese que merece mais investigação é que a conservação do primeiro e a não conservação do segundo fator ao mesmo tempo induza ao uso deste tipo de registro. O quadro 14 nos mostra como os fatores de congruência variam nesses dois problemas.

<b>Número do problema</b>	<b>Correspondência semântica das unidades de significado</b>	<b>Univocidade semântica terminal</b>	<b>Ordem das unidades de significado</b>
04	Conserva	Conserva	Não Conserva
05	Conserva	Não Conserva	Não Conserva

**Quadro 14.** Características comuns de P4 e P5.

A classe A, no nível 2 (P1RACT,P5RACT) e de similaridade 1, aponta para a tendência em efetuar o registro de conversão total para os problemas 1 e 5. Essa tendência conduz a uma possibilidade anteriormente levantada que, a conservação da correspondência semântica das unidades de significado pode conduzir o estudante a efetuar o registro algébrico.

Podemos também perceber na classe B, o nível 10 (P1RACP,P5RACP) com similaridade 0.867071, a mesma tendência notada anteriormente, não na mesma intensidade, o que pode ser o indicativo de que realmente há esta tendência em realizar registros algébricos, seja com o emprego do registro algébrico com conversão total ou parcial, sempre quando esta característica é mantida. Como podemos notar no quadro 15.

<b>Número do problema</b>	<b>Correspondência semântica das unidades de significado</b>	<b>Univocidade semântica terminal</b>	<b>Ordem das unidades de significado</b>
01	Conserva	Conserva	Conserva
05	Conserva	Não Conserva	Não Conserva

**Quadro 15.** Características comuns de P1 e P5.

Outro nó significativo, com similaridade de 0.9796685, aparece no nível 5 (P3RACT,(P4RACT,P6RACT)), onde podemos perceber que o aluno que efetuar o

registro algébrico com conversão total para o terceiro problema apresenta grande probabilidade de também realizá-lo nos problemas 4 e 6. Nesse nível, não temos nenhuma das características ocorrendo simultaneamente nos três problemas, já que entre os problemas 3 e 4 temos apenas a conservação da correspondência semântica das unidades de significado. Porém, entre os problemas 4 e 6 temos a conservação da univocidade semântica terminal, e entre os problemas 3 e 6 a conservação da ordem das unidades de significado, o que não nos dá clareza de qual(is) dos fatores podem indicar a tendência na realização de registros algébricos com conversão total. Como podemos notar no quadro 16.

<b>Número do problema</b>	<b>Correspondência semântica das unidades de significado</b>	<b>Univocidade semântica terminal</b>	<b>Ordem das unidades de significado</b>
03	Conserva	Não Conserva	Conserva
04	Conserva	Conserva	Não Conserva
06	Não Conserva	Conserva	Conserva

**Quadro 16.** Características comuns de P3, P4 e P6.

Desse modo, entendemos que a análise da AS2 não foi suficiente para concluirmos se há ou não interferência da característica do problema sobre o modo de representação da conversão dos registros da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Em busca de uma maior clareza sobre a possível influência das características dos problemas propostos em relação à utilização conversão dos registros da linguagem natural para a algébrica, submetemos os dados que apresentavam os registros algébricos com conversão total (RACT), com conversão parcial e com conversão incompatível (RACI) ao software CHIC onde foi fornecida a árvore coesitiva 3 (AC3) seguinte:

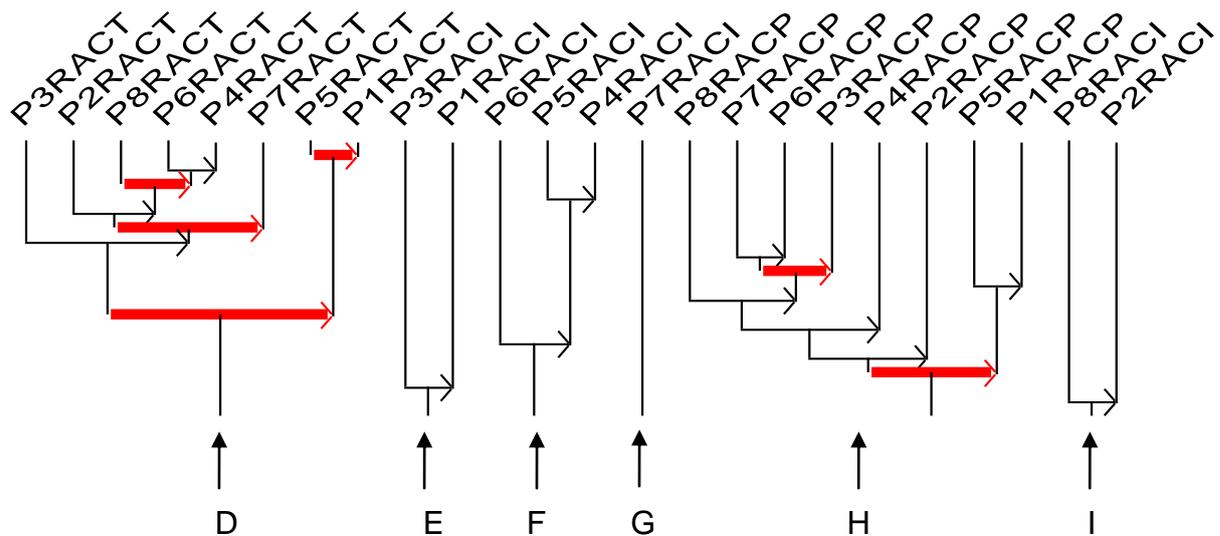


Figura 8. Árvore Coesitiva 3 (AC3).

A AC3 apresenta classificação ao nível:

- 1(P5RACT P1RACT) coesão: 1.
- 2(P6RACT P4RACT) coesão: 0.999.
- 3(P8RACT (P6RACT P4RACT)) coesão: 0.997.
- 4(P5RACI P4RACI) coesão: 0.996.
- 5(P2RACT (P8RACT (P6RACT P4RACT))) coesão: 0.981.
- 6((P2RACT (P8RACT (P6RACT P4RACT))) P7RACT) coesão: 0.975.
- 7(P3RACT ((P2RACT (P8RACT (P6RACT P4RACT))) P7RACT)) coesão: 0.962.
- 8(P7RACP P6RACP) coesão: 0.96.
- 9((P7RACP P6RACP) P3RACP) coesão: 0.927.
- 10(P5RACP P1RACP) coesão: 0.92.
- 11(P8RACP ((P7RACP P6RACP) P3RACP)) coesão: 0.903.
- 12((P3RACT ((P2RACT (P8RACT (P6RACT P4RACT))) P7RACT)) (P5RACT P1RACT)) coesão: 0.892.
- 13((P8RACP ((P7RACP P6RACP) P3RACP)) P4RACP) coesão: 0.852.
- 14(P6RACI (P5RACI P4RACI)) coesão: 0.822.
- 15(((P8RACP ((P7RACP P6RACP) P3RACP)) P4RACP) P2RACP) coesão: 0.81.
- 16((((P8RACP ((P7RACP P6RACP) P3RACP)) P4RACP) P2RACP) (P5RACP P1RACP)) coesão: 0.696.

17(P3RACI P1RACI) coesão: 0.629.

18(P8RACI P2RACI) coesão: 0.563.

Numa análise geral, podemos notar que há certa estabilidade nos tipos de registros, sendo formadas seis classes D, E, F, G, H e I que são independentes. Ou seja, não apresentam qualquer vínculo. Na classe D, notamos a concentração dos registros algébricos com conversão total (RACT).

Na classe D, encontramos a maioria dos nós significativos, nos níveis 1, 3, 6 e 12. O nó mais significativo está no nível 1 (P5RACT P1RACT) com coesão de 1, indicando que o estudante que realizar o registro algébrico com conversão total para o problema 5 apresenta grande probabilidade de realizar o mesmo tipo de registro no problema 1, mas não no sentido contrário. Isto confirma a tendência observada na análise da AS1 e da AC1, onde há uma forte relação entre os problemas 1 e 5, que conservam a correspondência semântica das unidades de significado, que ocorre quando na conversão do registro da língua natural para a linguagem algébrica, o número das unidades de significado do registro de partida é o mesmo no registro de chegada.

Já no nível 3 (P8RACT (P6RACT P4RACT)) observamos um nó significativo com coesão 0.997. Nesse caso, podemos afirmar que há grande probabilidade, não tão forte quanto no nível 1, do estudante que mobilizar o registro algébrico com conversão total para P8 também realizar o mesmo registro no P6 e no P4 e, não o sentido contrário.

O problema 8 não conserva a correspondência semântica das unidades de significado e conserva a ordem das unidades de significado, características também encontradas no P6, o que pode indicar o sentido da coesão encontrada na AC2. Já os problemas 6 e 4 possuem em comum apenas a conservação da univocidade terminal (quadro 13), esses apresentam uma relação em que não temos uma coesão significativa, o que de certo modo não implica numa forte coesão.

No nível 6 ((P2RACT (P8RACT (P6RACT P4RACT))) P7RACT) podemos notar que o estudante que realizar o registro algébrico para o P2 e no nível 3, tem probabilidade de repetir o registro para o problema 7.

No nível 12 ((P3RACT ((P2RACT (P8RACT (P6RACT P4RACT))) P7RACT)) (P5RACT P1RACT)) a coesão é igual a 0.892, o que indica que há certa estabilidade na utilização do algébrico com conversão total, ou seja, o aluno que efetuar esse registro no nível 7 (P3RACT ((P2RACT (P8RACT (P6RACT P4RACT))) P7RACT)), que contém o nível 6, apresenta tendência a também repetir o mesmo registro no nível 1, o nó mais significativo de toda AC2.

Podemos também notar nessa classe, certa estabilidade nos registros algébricos com conversão total, o que pode ser interpretado, de maneira geral, que o aluno que mobilizar esse tipo de registro ao menos uma vez, tende a repeti-lo em todos os outros.

Na classe E, encontramos os registros algébricos incompatíveis (RACI) para os problemas P3 e P1. Observamos nessa classe que, os problemas P3 e P1 apresentam como características comuns a conservação da correspondência semântica e a ordem das unidades de significado. No problema 3, a univocidade não é conservada, ou seja, uma das relações envolve uma multiplicação (duas vezes) e a outra uma divisão (metade), enquanto no problema 1 as duas relações envolvem multiplicação (duas vezes e vezes quatro). Isso nos parece indicar que, os alunos ficam desestabilizados ao precisarem representar algebricamente uma relação que contemple uma fração.

Já na classe F, podemos encontrar os registros incompatíveis para os problemas P6, P5 e P4. Na árvore podemos percebê-los no nível 14 (P6RACI, (P5RACI,P4RACI)), o que nos indica que o estudante que efetuou o registro algébrico incompatível para o problema 6 tem probabilidade de também efetuar o mesmo registro nos problemas 5 e 4, porém não podemos afirmar o contrário. Isso não garante que haja o indicativo de influência de alguma característica sobre esse tipo de registro, como podemos perceber no quadro 17 seguinte:

<b>Número do problema</b>	<b>Correspondência semântica das unidades de significado</b>	<b>Univocidade semântica terminal</b>	<b>Ordem das unidades de significado</b>
04	Conserva	Conserva	Não Conserva
05	Conserva	Não Conserva	Não Conserva
06	Não Conserva	Conserva	Conserva

**Quadro 17.** Características comuns de P4, P5 e P6.

Já no nível 4 (P5RACI P4RACI), pertencente ao nível 14, podemos entender que o indivíduo que fez o registro algébrico incompatível no problema 5 apresenta probabilidade de realizar o mesmo tipo de registro no problema 4. Nesse caso, observamos que a conservação da correspondência semântica das unidades de significado e a não conservação da ordem das unidades de significado são as características comuns aos dois problemas, o que não deixa claro se é a existência da conservação ou não conservação ou mesmo a distinção existente na univocidade semântica terminal que leva o aluno a fazer uso desse registro.

Na classe G, observamos apenas os registros algébricos incompatíveis para o problema P7, o que indica que este problema não apresenta relação alguma com qualquer outro problema.

Na classe H, temos a presença de todos os registros algébricos com conversão parcial. Dessa maneira, podemos interpretar, em linhas gerais, que o estudante que efetuar algum tipo de registro com conversão parcial, apresenta probabilidade de repetir o mesmo registro em todos os outros problemas.

Ainda na classe H, dois níveis apresentam nós significativos, o nível 9 ((P7RACP P6RACP) P3RACP) com coesão 0.927 e o nível 16 (((P8RACP ((P7RACP P6RACP) P3RACP)) P4RACP) P2RACP) (P5RACP P1RACP)) com coesão de 0.696.

No nível 9, a mobilização do registro algébrico com conversão parcial para os

problemas 7 e 6 apresenta grande probabilidade de repetir o mesmo registro no problema 3.

Numa análise global, notamos que os problemas 6 e 7 apresentam em comum a não conservação da correspondência semântica das unidades de significado e a conservação da univocidade semântica terminal, como podemos observar no quadro 18.

Número do problema	Correspondência semântica das unidades de significado	Univocidade semântica terminal	Ordem das unidades de significado
03	Conserva	Não Conserva	Conserva
06	Não Conserva	Conserva	Conserva
07	Não Conserva	Conserva	Não Conserva

**Quadro 18.** Características comuns de P3, P6 e P7.

A ausência da primeira característica aponta para o fato de que um signo na linguagem natural está relacionado a mais de um signo na linguagem algébrica, por exemplo, no problema 6, o signo triplo, expresso na língua natural está associado a dois signos, 3 . x, na linguagem algébrica.

Já a conservação da univocidade semântica terminal é assim denominada toda vez que o registro de representação da língua natural, o signo, apresenta o mesmo significado no registro de representação da linguagem algébrica, por exemplo, no problema 7, João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo, o signo tem representa igual.

Dessa forma, não deixa claro se, o que conduz o estudante a efetuar esse tipo de registro é a não conservação da correspondência semântica ou a conservação da univocidade semântica ou, ainda, se é a conservação do primeiro fator e a não conservação do segundo que pode induzir o estudante a efetuar esse

tipo de registro.

Desse modo, como o número de signos no registro de partida não é o mesmo para o registro de chegada e o registro de representação no registro língua natural apresenta o mesmo significado no registro de chegada é provável que, quando encontramos em um mesmo problema essas características, o aluno pode mobilizar o registro algébrico com conversão parcial para o problema 6, repetindo o mesmo registro no P7. Porém, existe uma grande possibilidade do mesmo aluno repetir o registro algébrico com conversão parcial no problema 3.

Por outro lado, quando observamos os percentuais de conversão parcialmente correta, notamos que eles correspondem às questões que conservam a ordem das unidades de significado, ou seja, em que a incógnita associada à fonte do problema aparece no segundo membro da expressão em linguagem simbólica. Costa (2010) mostrou em seu trabalho, que quando esse fator de conversão está presente, os alunos apresentam dificuldades em estabelecer a expressão algébrica correspondente. Eles associam, por exemplo, o registro “João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo ( $J=2R$ )” a “O dobro de bolas de gude de João é a quantidade de Ricardo ( $2J=R$ )”.

No nível 18 (P8RACI P2RACI), encontramos a classe I onde podemos perceber que temos os registros algébricos incompatíveis para os problemas P8 e P2, com probabilidade de realização desse registro neste mesmo sentido. Nesses dois problemas, só a ordem das unidades de significado é conservada no P8, os demais fatores não são conservados para os P8 e P2, (quadro 19), o que pode indicar que quando o aluno efetua o registro algébrico incompatível para o P8 tem probabilidade de também repetir o mesmo registro no P2. Essa tendência pode ser devido ao fato do estudante não possuir clareza no que se refere à interpretação de um problema que, não apresenta o número de signos no registro de partida igual ao número de signos no registro de chegada e o signo representado na língua natural não apresenta o mesmo significado no registro de chegada.

<b>Número do problema</b>	<b>Correspondência semântica das unidades de significado</b>	<b>Univocidade semântica terminal</b>	<b>Ordem das unidades de significado</b>
02	Não Conserva	Não Conserva	Não Conserva
08	Não Conserva	Não Conserva	Conserva

**Quadro 19.** Características comuns de P2 e P8.

Desse modo, como o número de signos no registro de partida não é o mesmo para o registro de chegada e o registro de representação no registro língua natural apresenta o mesmo significado no registro de chegada, é provável que quando encontramos em um mesmo problema essas características, o aluno pode mobilizar o registro algébrico com conversão parcial para o problema 6, repetir o mesmo registro no P7. Porém, existe uma grande possibilidade do mesmo aluno repetir o registro algébrico com conversão parcial no problema 3.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nosso trabalho, investigamos em que medida a conservação ou não dos fatores de congruência interferem na conversão de registros em linguagem natural para a linguagem algébrica. Buscamos dar continuidade à pesquisa de Costa (2010).

Tomamos como referencial teórico a teoria de registros das representações semiótica, desenvolvida por Raymond Duval. Nessa teoria, o autor considera que a mobilização em diversos tipos de registros é de fundamental para a aprendizagem em matemática. Dentre as duas formas de transformação de registros de representação apontadas por Duval, em nosso trabalho nos preocupamos com a conversão. Nessa transformação, é necessário efetuar a mudança de registros em sistemas de representações diferentes. Nosso trabalho, em particular, buscou estudar o fenômeno de congruência e de não congruência entre o registro de partida (linguagem natural) e o registro de chegada (linguagem algébrica).

Os testes analisados foram construídos e adotados na pesquisa de Costa (2010). A aplicação dos testes aos alunos se deu pelos dois pesquisadores. Os testes, compostos de oito problemas, variavam os três fatores de congruência de registros adotados por Duval, a conservação da correspondência semântica das unidades de significado, a conservação da univocidade semântica terminal e a conservação da ordem das unidades de significado.

No primeiro momento da análise, buscamos identificar como a mobilização de registros algébricos pelo aluno, no processo de resolução dos problemas, se relacionava com a presença ou não dos três fatores de congruência. No segundo momento, investigamos como esses fatores influenciam ou não, na mobilização de registros algébricos, numéricos ou outros tipos de registros. Finalmente, em um terceiro momento, nossa preocupação foi de analisar como os três fatores de congruência influenciam na mobilização de registros algébricos corretos, parcialmente corretos ou incorretos.

Em uma dimensão mais ampla, percebemos que nossas escolhas

metodológicas foram limitadas para que pudéssemos analisar registros não algébricos. Com isso, parece-nos importante avançar em outras pesquisas, com outros dispositivos metodológicos, para aprofundarmos os registros não algébricos.

A conservação da univocidade semântica terminal foi um dos fatores de congruência cuja conservação ou não, entre os registros de partida e de chegada parece ter influenciado na mobilização de registros algébricos pelo aluno. Entretanto, a mobilização desse tipo de registro aparece de maneira mais importante quando as duas relações presentes no problema são multiplicativas. Quando uma das relações envolve a divisão, o que em linguagem algébrica seria representado por uma fração, esse comportamento fica alterado.

É preciso ressaltar que, para não conservar a univocidade semântica, é necessário que as relações envolvam operações diferentes, como multiplicação e divisão. Muitas vezes, a segunda não parece muito clara para o estudante, já que esta é posta como representação com termos como: metade, quarta parte, quinta parte etc. Como em nossa pesquisa fixamos a natureza das relações, não foi possível identificar se as diferenças encontradas se deveram ao fator de congruência ou ao fato de ser necessário o recurso ao registro simbólico fracionário. Em um estudo futuro, seria interessante fixar a natureza das relações nas operações aditivas.

Ainda em relação à univocidade semântica terminal, foi possível observar que em problemas que conservam a univocidade e as duas relações são multiplicativas, existe maior tendência dos sujeitos em utilizar registros algébricos na resolução do problema. Apesar de nosso objeto de investigação se limitar à mobilização dos registros algébricos foi notado a ocorrência de outros tipos de registros, o que merece investigação mais apropriada para responder, por exemplo, qual a interferência desses fatores no emprego de registros como o numérico ou pictórico na conversão de registros da linguagem natural para a linguagem algébrica?

Outro resultado que nos parece importante, e que confirma os dados presentes na literatura, diz respeito a não conservação das ordens de significado, ou seja, quando, ao realizar a conversão, a representação no registro de chegada não é

feita na mesma ordem que no registro de saída. Por exemplo, os alunos associam a expressão “João tem o dobro de bolas de gude de Ricardo”, em linguagem natural à expressão “ $2J=R$ ” em linguagem algébrica.

Um estudo mais focado nessa questão, com a utilização de entrevistas, por exemplo, poderia esclarecer o que leva o aluno a essa construção simbólica.

Podemos indicar que, as análises das dificuldades na conversão de registros apresentadas pelos alunos é de extrema importância. Para minimizar essas dificuldades, se faz necessário que o professor analise situações que permitam explorar as condições que interferem na congruência existente entre dois registros de representação.

Outras questões ficaram em aberto e merece atenção, uma seria a forma como esses tipos de problemas são tratados nos livros didáticos. Por exemplo: Que variáveis são privilegiadas pelos autores ao proporem problemas que envolvam a conversão de registros? Que fatores de congruência estão presentes nos problemas propostos? Qual o número? Qual a natureza? E, qual é o encadeamento dos problemas de partilha presentes nos livros?

Por fim, destacamos que o emprego do CHIC foi de fundamental importância para o nosso trabalho, particularmente pelo número de variáveis que surgiram no desenvolvimento da investigação. Esse software nos permitiu promover o “cruzamento” dos dados analisados de modo a entender o comportamento do grupo de alunos investigados. Acreditamos que, o CHIC constitui um importante instrumento nas pesquisas em Educação Matemática.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. M. M. **Estratégias de generalização de padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus professores**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ALMOULOU, S. A. **L'Analyse Statistique de Données Multidimensionnelles: outil révélateur des conceptions d'enseignants en formation**. In: Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis. Palermo. Italy. Oct. 2005. Disponível em: <[http://math.unipa.it/~grim/asi/suppl\\_quad\\_15\\_2.htm](http://math.unipa.it/~grim/asi/suppl_quad_15_2.htm)>. Acesso em: 20 de nov 2010.

ALMOULOU S. A. Análise e mapeamento estatístico de fenômenos didáticos com CHIC. In: OKADA (Org.) **Cartografia cognitivo, mapas do conhecimento para pesquisa, aprendizagem e formação docente**. Cuiabá: KCM, 2008. p. 303-324.

ALVES, H. O. **A Resolução de Problemas Aritméticos Partindo de Práticas Adaptadas às Peças do Jogo de Dominó**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

ANDRÉ, R. C. M. **Investigando a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica: o equacionamento de enunciados de problemas à luz dos registros de representação semiótica**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

ARAÚJO, C. R. et al. **Contribuições da psicologia da educação matemática para o ensino da matemática: a introdução à álgebra no ensino fundamental**. Recife, 2002. Disponível em: <[http://www.dmat.ufpe.br/~mro/extensao/v\\_epem/anais/MR1.pdf](http://www.dmat.ufpe.br/~mro/extensao/v_epem/anais/MR1.pdf)>. Acesso em 25 set 2010.

ARAÚJO, M. R. O. P. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino**. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. 5ª a 8ª séries**. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BORRALHO, A. M. A. **Aspectos Metacognitivos na Resolução de Problemas de Matemática**: proposta de um programa de intervenção. 1994. Dissertação (Mestrado em Tecnologia da Educação) – Universidade de Évora, Portugal, 1994.

CHARLOT, B. **Da relação com o saber**: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

COSTA, W. R. **Investigando a Conversão da Escrita Natural para Registros em Escrita Algébrica em Problemas envolvendo Equações de Primeiro Grau**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

COUTINHO, C. Q. S.; MIGUEL, M. I. R. **Análise Exploratória de Dados**: um estudo diagnóstico sobre concepções de professores. Minas Gerais. 2007. Disponível em: <[www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT19-2910--Res.pdf](http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT19-2910--Res.pdf)>. Acesso em: 20 de nov 2010.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Peter Lang). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2. ed. Santiago de Cali, Colombia: 2004.

\_\_\_\_\_. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. 2. ed. Campinas: Papyrus, 2005.

\_\_\_\_\_. Semiosis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. São PAULO; Atual, 1995.

KRULIK, S.; REYS, R. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 5. ed. São Paulo: Papyrus, 1997.

LOCKHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das Palavras à Álgebra: corrigindo concepções erradas. In COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

LOOS, H. Ansiedade e Aprendizagem: um estudo com díades resolvendo problemas algébricos. **Estudos de Psicologia**, v. 9, n. 3, p. 563-573. 2004.

MARCHAND, B.; BEDNARZ, N. L'enseignement de l' algebra au secondaire: une analyse des problèms présentés aux élèves. **Bulletin AMQ**, v. XXXIX, n. 4, p. 30-42, décembre. 1999.

OLIVEIRA, A. T. C. C. Reflexões sobre a Aprendizagem da Álgebra. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, n. 12, Ano 9, p. 35-39, jun. 2002.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

POZO, J. I. **A Solução de Problemas em Matemática**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Pará: Artmed, 1998.

SCHOEN, H. L. Ensinar álgebra na escola focalizando problemas. In: COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. (Org.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

SILVEIRA, J. F. P. **O que é um Problema Matemático?** Disponível em: <[www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html](http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html)>. Versão14 mar. 2001. Acesso em: 19 nov. 2010.

SIMON, M. A.; STIMPSON, V. C. Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas In: COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. (Org.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

STERNBERG, R. J. **As Capacidades Intelectuais Humanas**: uma abordagem em processamento de informações. Pará: Artes Médicas, 1992.

USISKIN, Z. O que é Álgebra da escola média? In: Coxford, A. F; Shulte, A. P. (Org.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VIEIRA, E. Representação Mental: as dificuldades na atividade cognitiva e metacognitiva na resolução de problemas matemáticos. **Psicologia Reflexiva e**

**Crítica**, v. 14, n. 2, Pará. 2001. ISSN 0102-7972.