



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JACQUELINE CRISTINE MESSIAS DO NASCIMENTO

**OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO ROBUSTA DE PÓRTICOS PLANOS DE  
CONCRETO ARMADO COM RESTRIÇÕES BASEADAS EM CONFIABILIDADE**

Recife

2020

JACQUELINE CRISTINE MESSIAS DO NASCIMENTO

**OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO ROBUSTA DE PÓRTICOS PLANOS DE  
CONCRETO ARMADO COM RESTRIÇÕES BASEADAS EM CONFIABILIDADE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta.

Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva.

Recife

2020

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

- N244o Nascimento, Jacqueline Cristine Messias do.  
Otimização multiobjetivo robusta de pórticos planos de concreto armado com restrições baseadas em confiabilidade / Jacqueline Cristine Messias do Nascimento. – 2020.  
74 folhas, il., gráfs., tabs.
- Orientador: Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta.  
Coorientadora: Profa. Dra. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva.
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2020.  
Inclui Referências.
1. Engenharia Civil. 2. Otimização robusta. 3. Otimização multiobjetivo. 4. Pórticos de concreto armado. 5. Análise de confiabilidade. I. Motta, Renato de Siqueira (Orientador). II. Silva, Silvana Maria Bastos Afonso da (Coorientadora). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2020-67

JACQUELINE CRISTINE MESSIAS DO NASCIMENTO

**OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO ROBUSTA DE PÓRTICOS PLANOS DE  
CONCRETO ARMADO COM RESTRIÇÕES BASEADAS EM CONFIABILIDADE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovada em: 20 / 02 / 2020.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva (Coorientadora)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Tiago Ancelmo de Carvalho Pires (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Juliana Von Schmalz Torres (Examinadora Externa)  
Universidade Federal de Pernambuco

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças e saúde para enfrentar as etapas de cada dia e por toda sabedoria que me foi dada para conclusão desse mestrado. Agradeço aos meus pais Onildo e Maria da Conceição por todo suporte e apoio em todos os momentos e por terem sido minha base e inspiração para chegar até aqui.

Agradeço aos meus demais familiares e amigos que me apoiaram e motivaram para que eu continuasse e pela compreensão durante os momentos mais difíceis, dando conselhos e palavras amigáveis.

À Universidade Federal de Pernambuco que ofereceu a oportunidade de crescimento acadêmico e a todo departamento de Pós-Graduação em Engenharia Civil, incluindo a secretaria que esteve sempre empenhada a me ajudar a solucionar os problemas burocráticos e os professores que me proporcionaram uma boa formação. Em especial ao professor Renato Motta e à professora Silvana Bastos por serem bons professores e orientadores, pela paciência, direcionamento e incentivo nas minhas atividades de pesquisa.

Agradeço à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pelo suporte financeiro para essa pesquisa com o programa IBPG-0077-3 01/18.

A todos que contribuíram para que esse trabalho se tornasse possível, particularmente a Bruno Alves que disponibilizou seu código que deu o suporte inicial deste trabalho.

## RESUMO

A maioria dos projetos de estruturas de concreto armado no Brasil são baseados na NBR 6118: 2014, esta norma recomenda o uso de coeficientes de segurança, sem considerar diretamente as incertezas associadas aos projetos de estruturas de concreto. Se tratando de projetos ótimos, principalmente, o risco de que a estrutura venha a ultrapassar o limite de falha é maior, pois as soluções tendem a se localizar no contorno das restrições. Por outro lado, a RBRDO (Otimização Robusta Baseada em Confiabilidade) é caracterizada por problemas de otimização em que as incertezas do projeto são tratadas probabilisticamente, o que admite definir o nível de confiabilidade estrutural desejado. Serão utilizadas duas abordagens para verificar a confiabilidade neste trabalho, a RIA (Reliability Index Approach) que verifica através do índice de confiabilidade que será encontrado pelo FORM (Método de Confiabilidade de Primeira Ordem) e o PMA (Performance Measure Approach) que faz a verificação da restrição de confiabilidade sem necessariamente calcular o índice de confiabilidade. Problemas de otimização robustos visam obter, além de um projeto confiável, um bom desempenho e uma baixa sensibilidade às incertezas do problema, e sua formulação recai em um problema multiobjetivo envolvendo as medidas de robustez que são a média e o desvio padrão na função de interesse. Logo, existem várias soluções ótimas chamadas pontos de Pareto, onde esses pontos serão encontrados neste trabalho pelos métodos de Soma Ponderada (WS), Min-max e Interseção Contorno-Normal (NBI) para efeito de comparação. A linguagem escolhida para implementação desses métodos foi o Python, por possuir licenças gratuitas, ser de fácil uso e, além disso, contém uma biblioteca interna preexistente do Método de Elementos Finitos, que será o método empregado para a análise estrutural, bem como bibliotecas públicas para a análise de confiabilidade e otimização que serão utilizadas. A metodologia desenvolvida na linguagem Python será aplicada a dois exemplos de pórticos planos de concreto armado com duas funções objetivo, para então se comparar os resultados obtidos com os três métodos da otimização multiobjetivo, empregando as duas abordagens citadas para a verificação de confiabilidade. O que fez ser possível definir as melhores abordagens para tratar os exemplos estudados.

Palavras-chave: Otimização robusta. Otimização multiobjetivo. Pórticos de concreto armado. Análise de confiabilidade.

## ABSTRACT

In most designs of reinforced concrete structures in Brazil are based on the NBR 6118:2014, this standard recommends the use of safety coefficients, without the consideration of the uncertainties associated to concrete structures designs. In the case of optimal designs, the risk that the structure will exceed the failure limit is greater, since such solutions tend to be located around the constraints borders, on the other hand, the Reliability-Based Robust Design Optimization (RBRDO) is characterized by optimization problems where the design uncertainties are treated statistically, allowing to measure the desired level of structural reliability. Two approaches will be used for reliability analysis in this work, the RIA (Reliability Index Approach) which checks through reliability index which will be found by FORM (First Order Reliability Method) and the PMA (Performance Measure Approach) that checks the reliability constraint without necessarily calculating the reliability index. Robust optimization problems aim to obtain, in addition to a reliable design, a good performance and a low variety of problem's uncertainties and fall into a multiobjective problem involving the robust-ness measures that are mean and the standard deviation in the function of interest. Therefore, there are several optimum solutions called Pareto points, where such points will be found in this work through Weighted Sums (WS), Min-Max e Normal Boundary Intersection (NBI) methods, for comparison purposes. The language chosen for implementing these methods was Python, because it has free licenses, it is easy to use, and, in addition, it contains a pre-existing in house finite element libraries, which will be the method used for structural analysis, and reliability and optimization public libraries that will be used. The methodologies developed in the Python language will be applied to two examples of reinforced concrete frames with two objective functions, to then compare the results obtained with the three methods of multiobjective optimization, using the two approaches mentioned for the verification of reliability. What made it possible to define the best approaches to manage the studied examples.

Keywords: Robust optimization. Multiobjective optimization. Reinforced concrete frames. Reliability analysis.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fluxograma resumido da otimização multiobjetivo .....	14
Figura 2 – Elemento básico adotado .....	19
Figura 3 – Distribuição de áreas de aço na seção de um pilar .....	26
Figura 4 – Exemplo de PDF da distribuição normal.....	30
Figura 5 – Gráfico da PDF de duas variáveis $R$ , $S$ e da PDF conjunta destas.....	32
Figura 6 – Subespaço das variáveis aleatórias padronizadas .....	34
Figura 7 – Avaliação de restrição de confiabilidade via RIA e PMA.....	35
Figura 8 – Solução de Pareto para otimização multiobjetivo .....	39
Figura 9 – Região viável no espaço das funções objetivos .....	40
Figura 10 – A imagem do conjunto viável sobre o mapeamento de $f$ no espaço das funções objetivos .....	43
Figura 11 – Layout do código para encontrar a curva de Pareto .....	44
Figura 12 – Pórtico plano com um pavimento .....	46
Figura 13 – Resultados com amostra $N = 10^2$ .....	49
Figura 14 – Resultados com amostra $N = 5 \cdot 10^2$ .....	50
Figura 15 – Pontos de Pareto para o pórtico de um pavimento com a abordagem RIA.....	52
Figura 16 – Pontos de Pareto do pórtico 1 com a abordagem PMA .....	54
Figura 17 – Método da soma ponderada no pórtico 1 .....	55
Figura 18 – Método min-max no pórtico 1 .....	55
Figura 19 – Método NBI no pórtico 1 .....	56
Figura 20 – Pórtico plano com três pavimentos.....	57
Figura 21 – Pontos de Pareto para exemplo 2 com $N = 10^2$ .....	61
Figura 22 – Histogramas dos deslocamentos em três pontos .....	62
Figura 23 - Pontos de Pareto para exemplo 2 via RIA.....	63

Figura 24 – Pontos de Pareto via PMA .....	65
Figura 25 – Comparação com o método NBI no pórtico 2 .....	67
Figura 26 – Comparação com o método Min-Max no pórtico 2 .....	68
Figura 27 – Comparação com o método WS no pórtico 2 .....	68

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela para cálculo do adimensional $\chi$ .....	24
Tabela 2 – Vetor <b>B</b> .....	45
Tabela 3 – Variáveis para exemplo 1 .....	48
Tabela 4 – Resultados do exemplo 1 – RIA .....	51
Tabela 5 – Custo computacional dos métodos no exemplo 1 via RIA .....	53
Tabela 6 – Resultados do exemplo 1 via PMA.....	53
Tabela 7 – Custo computacional dos métodos com abordagem PMA.....	54
Tabela 8 – Custo computacional de execução para o pórtico com um pavimento..	56
Tabela 9 – Valores limites das variáveis de projeto para o exemplo 2 .....	58
Tabela 10 – Variáveis do exemplo 2 .....	59
Tabela 11 – Lista de esforços resistentes de projeto .....	60
Tabela 12 – Resultados do exemplo 2 via RIA.....	63
Tabela 13 – Custo computacional dos métodos no exemplo 2 via RIA .....	64
Tabela 14 – Número de iterações via RIA.....	64
Tabela 15 – Resultados do exemplo 2 via PMA.....	65
Tabela 16 – Dados computacionais dos métodos no pórtico 2 via PMA .....	66
Tabela 17 – Número de iterações via PMA .....	66
Tabela 18 – Dados computacionais com abordagens RIA e PMA no pórtico com três pavimentos.....	67

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
1.1	REVISÃO DA LITERATURA .....	14
1.2	OBJETIVOS .....	16
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	17
<b>2</b>	<b>ANÁLISE ESTRUTURAL</b> .....	<b>18</b>
2.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA ANÁLISE LINEAR .....	19
2.2	VERIFICAÇÃO DOS ESFORÇOS RESISTENTES .....	20
<b>2.2.1</b>	<b>Esforço cortante resistente</b> .....	<b>20</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Momento fletor resistente – Flexão simples</b> .....	<b>21</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Momento fletor resistente – Flexão composta normal</b> .....	<b>23</b>
<b>2.2.4</b>	<b>Momento fletor resistente – Flexão composta oblíqua</b> .....	<b>24</b>
2.3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	26
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE CONFIABILIDADE</b> .....	<b>28</b>
3.1	CONCEITOS GERAIS.....	29
<b>3.1.1</b>	<b>Variáveis estocásticas</b> .....	<b>29</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Distribuições de probabilidade</b> .....	<b>30</b>
<b>3.1.3</b>	<b>Função Estado Limite e Probabilidade de Falha</b> .....	<b>31</b>
3.2	RIA .....	32
<b>3.2.1</b>	<b>Método de Confiabilidade de Primeira Ordem</b> .....	<b>33</b>
3.3	PMA .....	34
3.4	MEDIDAS DE ROBUSTEZ VIA MONTE CARLO .....	35
<b>4</b>	<b>OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO</b> .....	<b>37</b>
4.1	OTIMIZAÇÃO ROBUSA BASEADA EM CONFIABILIDADE .....	37
4.2	METODOLOGIA SQP .....	38
4.3	CONCEITO DE PARETO .....	39
<b>4.3.1</b>	<b>Método da Soma Ponderada</b> .....	<b>40</b>

<b>4.3.2</b>	<b>Método Min-Max .....</b>	<b>41</b>
<b>4.3.3</b>	<b>Método NBI .....</b>	<b>42</b>
4.4	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	43
<b>5</b>	<b>ESTUDOS DE CASO .....</b>	<b>46</b>
5.1	PÓRTICO PLANO COM UM PAVIMENTO.....	46
<b>5.1.1</b>	<b>Resultados com abordagem RIA.....</b>	<b>48</b>
5.1.1.1	Estudo do tamanho da amostra.....	49
<b>5.1.2</b>	<b>Resultados com abordagem PMA.....</b>	<b>53</b>
<b>5.1.3</b>	<b>Comparação entre as abordagens para análise de confiabilidade ....</b>	<b>54</b>
5.2	PÓRTICO COM TRÊS PAVIMENTOS .....	57
<b>5.2.1</b>	<b>Resultados via RIA.....</b>	<b>60</b>
5.2.1.1	Tamanho da amostra para medidas de robustez.....	61
<b>5.2.2</b>	<b>Resultados via PMA .....</b>	<b>64</b>
<b>5.2.3</b>	<b>Comparação entre RIA e PMA .....</b>	<b>66</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>69</b>
6.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	70
6.2	TRABALHOS FUTUROS.....	70
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>72</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, os projetos de engenharia estrutural de concreto armado empregam modelos determinísticos com requerimentos definidos pela norma NBR 6118 (ABNT, 2014), baseados em métodos semiprobabilísticos, que utilizam coeficientes de segurança majoradores para as solicitações e minoradores para as resistências.

O seguimento determinístico da norma também é comumente utilizado quando procedimentos de otimização são empregados visando a obtenção de projeto ótimo, o que simplifica bastante os cálculos, pois é prático e objetivo, entretanto, esta abordagem passa a ser questionável, principalmente se tratando de projetos otimizados, pois pequenas perturbações podem levar a violação das restrições de projetos. Além de que não permite mensurar o grau de confiabilidade das peças e nem da estrutura como um todo.

Por sua vez, a otimização baseada em confiabilidade (RBDO) e a otimização robusta baseada em confiabilidade (RBRDO ou R<sup>2</sup>BDO) caracterizam-se por um problema de otimização onde as incertezas de projeto são tratadas estaticamente, permitindo mensurar o grau de confiabilidade estrutural. Na RBDO, alguma restrição associada à probabilidade de falha ou ao índice de confiabilidade está presente na sua formulação. Já a RBRDO, além de proporcionar um projeto com bom desempenho e confiável, possui uma baixa sensibilidade às incertezas do problema.

Para avaliar a restrição de confiabilidade em um procedimento de otimização foram utilizadas duas abordagens: uma chamada RIA (Reliability Index Approach) e outra denominada PMA (Performance Measure Approach).

Na abordagem RIA (mais tradicional) (MOTTA, 2015), em uma otimização baseada em confiabilidade, a confiabilidade estrutural é obtida através do cálculo do índice de confiabilidade ou a probabilidade de falha, que nesse trabalho foi obtido pelo método de confiabilidade de primeira ordem (FORM – First Order Reliability Method).

Já a abordagem PMA avalia as restrições de confiabilidade estrutural durante o processo de otimização, sem a necessidade do cálculo direto do índice de confiabilidade (ou probabilidade de falha), por isso é dita mais eficiente (YOUN e CHOI, 2004).

O problema de otimização robusta recai num problema de Otimização

Multliobjetivo (MO) envolvendo média e desvio padrão nas funções escolhidas, ou seja, possui mais de uma meta a ser otimizada, assim como vários problemas reais da engenharia. Por isso, a abordagem adequada para resolução de problemas de otimização multiobjetivo (POM) é constituída por uma classe de estratégias baseadas no denominado conceito de Pareto.

Os pontos de Pareto na otimização multiobjetivo foram encontrados através do NBI (Normal Boundary Intersection), um algoritmo eficiente desenvolvido por Das e Dennis (1996) e que obtém distribuições eficientes de pontos de Pareto para problemas bi-objetivos. Os resultados também serão comparados com as abordagens clássicas: Método da soma ponderada e Método min-max (ARORA et al., 2007).

O processo de análise de confiabilidade e otimização requerem múltiplas avaliações de funções, por isso são necessárias estratégias eficientes para conduzir tais análises. A linguagem de programação Python foi escolhida, pois possui bibliotecas pré-existentes e possibilita desenvolver códigos que oferecem essas estratégias essenciais, com simplicidade no uso, rapidez e eficiência no processamento de operações matriciais. Além de ser totalmente gratuita com os pacotes disponíveis de código aberto (Open Source).

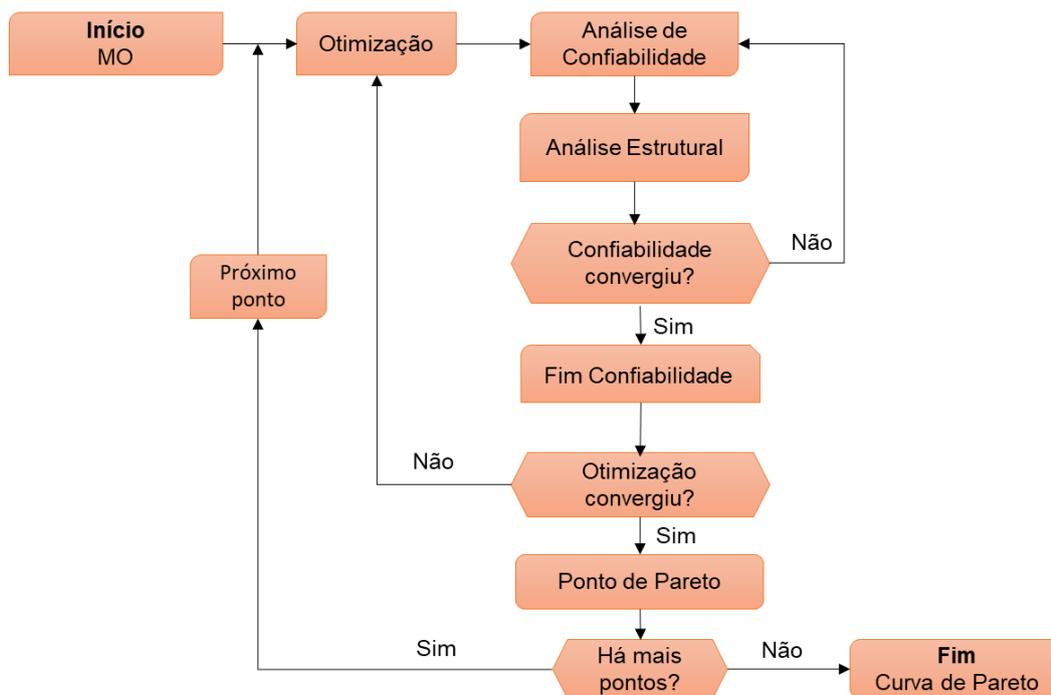
A análise estrutural foi feita pelo método de elementos (MEF) em um código interno (CaspY) implementado por Alves (2018) que em sua dissertação foi devidamente testado e validado.

Todas as abordagens para otimização multiobjetivo foram aqui implementadas. E cada otimização escalar é feita pelo método de Programação Quadrática Sequencial (SQP – Sequential Quadratic Programming) dentro da função minimize presente na biblioteca Scipy.optimize.

A biblioteca do Python utilizada para a análise de confiabilidade presente nas restrições foi a biblioteca PyRe (HACKL, 2018).

Um resumo de todo processo da otimização multiobjetivo envolvido neste trabalho pode ser observado no fluxograma da figura abaixo.

Figura 1 – Fluxograma resumido da otimização multiobjetivo



Fonte: A Autora (2020).

## 1.1 REVISÃO DA LITERATURA

Há na literatura vários autores que estudaram metodologias para aplicação da otimização baseada em confiabilidade, dentre os quais pode-se citar:

- a) Liu e Kiureghian (1991) avaliou a eficiência e robustez de cinco métodos de otimização na avaliação do FORM para análise de confiabilidade em problemas que envolvem análises por meio do método de elementos finitos. Seu objetivo era determinar quais destes métodos era o mais adequado para resolver tais problemas de confiabilidade envolvendo elementos finitos e por fim ressaltou a eficiência da utilização da programação quadrática sequencial (SQP) para este fim.
- b) Enevoldsen e Sørensen (1994) fez uma extensa análise sobre a aplicação de otimização com base em confiabilidade a sistemas estruturais. Este autor aplicou o método dos elementos finitos juntamente com a programação quadrática sequencial e da estratégia para se obter projetos ótimos com segurança à falha.
- c) Mogami et al. (2006) aplicou o processo de otimização com base na análise de confiabilidade não somente à otimização da geometria estrutural, mas também da topologia do projeto.

- d) Aoues e Chateauneuft (2008) aplicou a otimização com base em confiabilidade para dimensionar sistemas estruturais de concreto armado por meio da análise adaptativa do índice de confiabilidade estrutural dos elementos, o qual é alterado conforme se procede o processo de otimização. Este procedimento melhorou o processo de otimização por ajustar as restrições de modo a se evitar erros de convergência e/ou instabilidade numérica, entretanto, este processo levou a um aumento expressivo computacional.
- e) Ho-Huu et al. (2016) aplicou a RBDO para otimizar estruturas de treliças metálicas; e Shayanfar, Abbasnia e Khodam (2014) que aplicou a mesma metodologia, porém, com o auxílio do algoritmo genético para fazer a otimização de um pórtico plano e duas treliças, uma plana e uma espacial, ambas metálicas.

No que tange a otimização com base em confiabilidade, especificamente de estruturas de pórticos de concreto armado, temos:

- a) Nogueira (2005) na sua dissertação fez a otimização com base em confiabilidade de um pórtico plano simples, além de vigas isostáticas e hiperestáticas, todos de concreto armado, considerando a não-linearidade física e geométrica da estrutura através do emprego de um modelo substituto, o das Superfícies de Respostas.
- b) Almeida (2008) na sua tese de doutorado aplicou a otimização com análise probabilística acoplada a diversos algoritmos em estruturas de pórticos planos de concreto armado e comparou com o ótimo determinístico. O autor atesta ser o primeiro a aplicar o algoritmo SQP a otimização de pórticos planos de concreto armado considerando restrições determinísticas e não-determinísticas, além de incorporar a não linearidade física e geométrica ao problema.
- c) Andrade (2013) aplicou a otimização estocástica a estruturas planas e espaciais, seguindo as prescrições normativas da NBR 6118 (ABNT, 2014), entretanto, limitando-se à análise de um único pavimento isoladamente.
- d) Alves (2018) utilizou a otimização baseada em confiabilidade aplicada à pórticos planos e espaciais de concreto armado, com consideração da não linearidade física de forma simplificada e da não linearidade geométrica.

Por fim, dentre os autores que trabalharam com problemas de Otimização Multiobjetivo (POM), destacam-se:

- a) Bates (2003) que em sua tese desenvolveu técnicas para projetos ótimos robustos que recai em um POM na aplicação em problemas de engenharia.
- b) Afonso et al. (2009) desenvolveu ferramentas para obtenção de projetos ótimos robustos com análises que envolvem estruturas de treliças com comportamento linear.
- c) Sampaio (2011) que na sua dissertação estudou os problemas da área que trata de problemas de MO e alguns dos métodos existentes para resolvê-los, comparando tais métodos entre si. Ele aplicou a teoria e métodos de Otimização Multiobjetivo nas áreas de *Compressed Sensing* e Otimização de Portfolio, exibindo testes computacionais e fazendo uma análise dos resultados.
- d) Motta et al. (2015) e Motta e Afonso (2016) que apresentaram uma análise de treliças e pórticos planos e espaciais e placas, aplicados à otimização robusta.

Nota-se que há poucos autores que aplicaram a otimização multiobjetivo e seus métodos, em estruturas de pórticos de concreto armado, por isso, ainda existe muito a ser analisado e adaptado no que tange esse assunto.

## 1.2 OBJETIVOS

O principal objetivo da presente pesquisa é desenvolver uma ferramenta computacional para obter eficientemente projetos ótimos robustos de estruturas de concreto armado sob incertezas.

E como objetivos específicos destacam-se:

- a) Comparar os três métodos distintos para a solução de problemas multiobjetivos, o método da soma ponderada (WS), o método min-max e o método da intercessão contorno-norma (NBI);
- b) Comparar as duas abordagens para a restrição de confiabilidade devido a consideração das incertezas, RIA e PMA;
- c) Por fim, definir qual melhor combinação de métodos para duas estruturas de concreto armado, aplicando a metodologia robusta.

As estruturas escolhidas são pórticos planos, o primeiro sendo com um pavimento e carregamento uniformemente distribuído sobre sua viga e o segundo, um

pórtico plano com três pavimentos e, do mesmo modo, com carregamentos uniformemente distribuídos sobre suas vigas. Os detalhes de tais estruturas serão depois apresentados.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação possui 6 capítulos que, após este **primeiro capítulo** que apresenta uma breve introdução mostrando uma visão geral do estudo, é organizada da maneira descrita a seguir.

O **segundo capítulo** explica como é feita a análise estrutural e o método utilizado para tal (MEF – Método dos Elementos Finitos). Também é mostrado porque foi possível considerar apenas a análise linear neste trabalho, assim como a formulação matemática e implementação computacional dessa análise.

O **terceiro capítulo** contém os detalhes sobre a análise de confiabilidade, apresentando os conceitos gerais necessários para o entendimento das duas abordagens utilizadas para as verificações de confiabilidade na otimização e logo após discorre sobre essas abordagens que são a RIA e a PMA. Também expõe as medidas estatísticas necessárias para se ter uma avaliação de uma solução robusta.

O **quarto capítulo** trata da otimização multiobjetivo, sua formulação matemática e a definição do conceito de Pareto. Aborda o método SQP utilizado para cada otimização escalar e os três métodos empregados para a obtenção dos pontos de Pareto: o método da soma ponderada, min-max e NBI. Finaliza com a implementação computacional e uma síntese do código desenvolvido.

O **quinto capítulo** apresenta os estudos de casos escolhidos para aplicação dos métodos que serão comparadas, incluindo as características das estruturas e resultados.

Por último, o **sexto capítulo** faz uma recapitulação do que foi feito nesta dissertação, discute as conclusões obtidas através dos resultados e encerra com sugestões para trabalhos futuros.

A bibliografia de referência é retratada no final desta dissertação.

## 2 ANÁLISE ESTRUTURAL

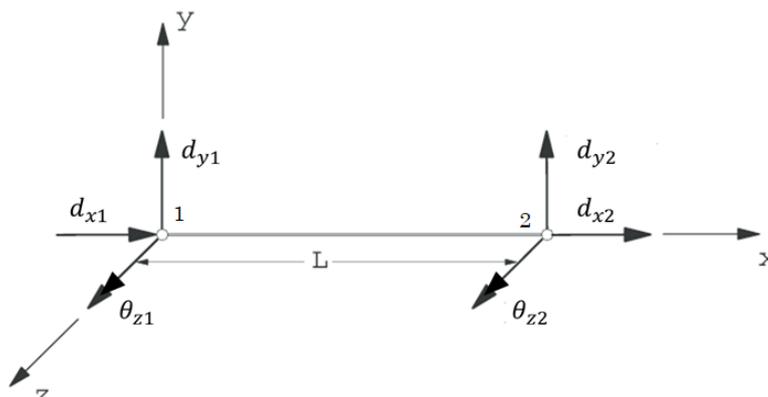
Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), o objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com a finalidade de efetuar verificações dos estados-limites últimos e de serviço. E para isso, nesse trabalho, foi empregado o Método dos Elementos Finitos (MEF).

A norma (NBR 6118/2014) aborda vários tipos de análise estrutural de acordo com a resposta dos materiais, mas, devido aos casos estudados serem pórticos 2D de pequeno porte (no máximo três pavimentos) e com apenas carregamentos uniformemente distribuídos que produzem deslocamentos relativamente pequenos, ela permite considerar apenas a análise linear onde se admite comportamento elástico-linear para os materiais.

O método dos elementos finitos é uma generalização do método dos deslocamentos e já existe uma literatura extensa no que diz respeito a essa metodologia. Em resumo, neste tipo de análise busca-se encontrar o comportamento dos elementos básicos das estruturas, o qual se caracteriza pelos deslocamentos nodais do sistema devido à ação de cargas pontuais aplicadas nestes nós. As demais cargas são simuladas através de cargas nodais equivalentes que provoquem na estrutura o mesmo efeito que a carga original. Uma vez calculados esses deslocamentos, é possível obter as reações de apoio e esforços internos nos elementos.

O elemento básico (elementos de barras lineares que representam vigas ou pilares) utilizado nesse trabalho para estruturas 2D possui 6 graus de liberdade (2 translações e 1 rotação para cada nó, vide Figura 2) e foram consideradas as premissas dos elementos de viga apresentadas pela teoria de Euler-Bernoulli que considera que as seções transversais permanecem planas após a deformação e, portanto, não considera qualquer deformação devido ao esforço cisalhante.

Figura 2 – Elemento básico adotado



Fonte: A Autora (2020).

## 2.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA ANÁLISE LINEAR

Depois de definido o tipo de elemento básico, deve-se discretizar a estrutura de modo a se garantir a precisão desejada nos resultados obtidos. A equação governante no método dos deslocamentos da análise elástica linear é escrita da forma da Equação (2.1).

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} \quad (2.1)$$

Onde:

- $\{\mathbf{F}\}$  é o vetor de forças nodais em coordenadas locais ou globais;
- $[\mathbf{K}]$  é a matriz de rigidez do sistema;
- $\{\mathbf{x}\}$  é o vetor com os deslocamentos associados a cada grau de liberdade em relação aos eixos de referência.

A partir da matriz de rigidez local de cada elemento calculada com base nas propriedades dos materiais e geométricas do elemento é possível convertê-la para as coordenadas globais, para compor a matriz de rigidez do sistema e então resolver a Equação (2.1) para encontrar os deslocamentos incógnitos. Vale salientar que as condições de contornos são adotadas idealizando os apoios com deslocamentos nulos.

## 2.2 VERIFICAÇÃO DOS ESFORÇOS RESISTENTES

Após calcular os esforços internos solicitantes nos elementos, é necessário avaliar os esforços resistentes das seções de vigas e pilares. Nesta seção serão apresentadas as formulações para se fazer as verificações dos esforços das estruturas de concreto armado.

Toda formulação foi baseada no prescrito por Araújo (2003) e também pode ser encontrada em Alves (2018).

### 2.2.1 Esforço cortante resistente

Para calcular a tensão limite de cisalhamento suportada por uma seção retangular, primeiro é verificado se a tensão de cisalhamento atuante dada pela Equação (2.2) é inferior a tensão de cisalhamento resistente do concreto dada pela Equação (2.3).

$$\tau_{wu} = 0.27\alpha_v f_{cd} \quad (2.2)$$

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d} \quad (2.3)$$

Onde:

$$\alpha_v = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (2.4)$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.5)$$

- $f_{ck}$  é a resistência do concreto;
- $\gamma_c$  é o coeficiente minorador da resistência do concreto que, no caso da análise estocástica, é unitário;
- $V_d$  é o esforço cortante solicitante de cálculo;
- $b_w$  é a largura da seção para vigas com seção retangulares;
- $d$  é a altura útil da seção.

Então, com o valor da área de aço por metro ( $A_{sw}$ ) adotada como armadura transversal, pode-se calcular a capacidade resistente desta peça através da seguinte formulação.

$$\sigma_c = \frac{A_{sw} f_{yk}}{\gamma_s b_w} \quad (2.6)$$

Onde:

- $A_{sw}$  é a área de aço por metro referente aos estribos;
- $f_{yk}$  é a resistência característica do aço da armadura passiva estribo;
- $\gamma_s$  é o coeficiente minorador da resistência do aço que é unitário no caso de análise estocástica.

A parcela de esforço cortante que pode ser resistida pelo concreto é dada em função do  $f_{ck}$  deste material. Se  $f_{ck} \leq 50MPa$ :

$$\tau_c = 0.09 f_{ck}^{2/3} \quad (2.7)$$

Caso  $f_{ck} > 50MPa$ :

$$\tau_c = 0.636 \log(1 + 0.11 f_{ck}) \quad (2.8)$$

Por fim, temos que o esforço cortante resistente é dado por:

$$V_{Rd3} = \tau_{wd} * b_w * d \quad (2.9)$$

Onde:

$$\tau_{wd} = \frac{\sigma_c}{1.11} + \tau_c \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Momento fletor resistente – Flexão simples

Para se avaliar a capacidade resistente de uma seção retangular das vigas com armadura simples submetida à flexão normal simples, primeiramente calcula-se a resistência de cálculo do aço.

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (2.11)$$

Onde  $f_{yk}$  é a resistência característica do aço e  $\gamma_s$  é o coeficiente minorador da resistência, sendo unitário para análise estocástica.

O momento resistente de cálculo depende da posição da linha neutra. Considerando a viga normalmente armada, a profundidade da linha neutra é dada pela Equação (2.12).

$$x_b = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d \quad (2.12)$$

Onde:

- $\varepsilon_u$  é a deformação máxima admitida para as fibras de concreto (0.3%);
- $d$  é a altura útil da seção;
- $\varepsilon_y$  é a deformação de escoamento do aço dada pela equação:

$$\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (2.13)$$

Onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço, normalmente tomado como 210 GPa para armadura passiva.

Já a profundidade da linha neutra para a seção de interesse é dada pela Equação (2.14).

$$x = \frac{A_s f_{yd}}{\lambda b \sigma_c} \quad (2.14)$$

Onde:

- $\lambda$  é a razão entre a posição da linha neutra considerando-se o diagrama parábola retângulo de tensões no concreto e a linha neutra considerando-se o diagrama retangular (consultar Araújo (2003) para mais informações);
- $b$  é a largura da seção retangular;
- $\sigma_c = 0.85 f_{ck} / \gamma_c$ .

Caso  $x \leq x_b$ , a seção está sub-armada e o momento resistente de cálculo pode ser calculado pela Equação (2.15), e caso  $x > x_b$ , a seção está super-armada e o momento resistente é dado pela Equação (2.16).

$$M_{rd} = \lambda b x (d - 0.5 \lambda x) \sigma_c \quad (2.15)$$

$$M_{rd} = \frac{-A_s E_s \varepsilon_u + \sqrt{A_s E_s \varepsilon_u (A_s E_s \varepsilon_u + 4 \lambda b d \sigma_c)}}{2 \lambda b \sigma_c} \quad (2.16)$$

### 2.2.3 Momento fletor resistente – Flexão composta normal

O momento fletor resistente de cálculo dos pilares será calculado pela Equação (2.17) para se avaliar a capacidade resistente de uma seção retangular com duas camadas de armadura submetida à flexo-compressão normal, quando a resistência do concreto é inferior a 50 Mpa.

$$M_{rd} = \mu b_p h_p^2 \sigma_c \quad (2.17)$$

Onde:

- $b_p$  e  $h_p$  são a base a altura do pilar, respectivamente;
- $\sigma_c$  é a resistência de cálculo do concreto dado pela Equação (2.18), onde  $f_{ck}$  é a resistência característica do concreto e  $\gamma_c$  é o coeficiente de minoração que é unitário para análise estocástica;

$$\sigma_c = \frac{0.85 f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 f_{cd} \quad (2.18)$$

- E para o cálculo do momento adimensional  $\mu$  é necessário seguir os seguintes passos:
  - a) Calculam-se os seguintes parâmetros adimensionais.

$$\nu = \frac{N_d}{b_p h_p \sigma_c} \quad (2.19)$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b_p h_p \sigma_c} \quad (2.20)$$

$$\delta = \frac{d'}{h_p} \quad (2.21)$$

Onde:

- $N_d$  é o esforço normal solicitante de cálculo;
- $d'$  é a distância da face do pilar ao centroide da armadura desta face.

b) Em seguida, calcula-se o adimensional  $\chi$  através da Tabela 1.

Tabela 1 – Tabela para cálculo do adimensional  $\chi$

$\nu$	0.0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$\geq 1.0$
$\chi$	1.00	1.00	0.93	0.88	0.88	0.90	0.93

Fonte: Araújo (2003).

c) Então pode-se calcular o momento adimensional  $\mu$  através da equação abaixo.

$$\mu = (0.5 - \delta)\chi\omega + 0.468\nu(1 - \nu) \quad \text{se } \varepsilon \leq 1.00 \quad (2.22)$$

$$\mu = (0.5 - \delta)\chi(\omega + 1 - \nu) \quad \text{se } \varepsilon > 1.00 \quad (2.23)$$

#### 2.2.4 Momento fletor resistente – Flexão composta oblíqua

A metodologia empregada para se verificar a flexo-compressão oblíqua em pilares se baseia, além da formulação dada por Araújo (2003) para verificação de pilares dada na Seção 2.2.3, no processo aproximado para dimensionamento à flexão composta oblíqua sugerido pela ABNT (2014).

Conforme a ABNT (2014), a ideia básica do processo aproximado para se tratar de flexão composta oblíqua é similar a de se avaliar duas flexões compostas normais separadamente e, para seções retangulares, pode-se escrever:

$$\left[ \frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^{1.2} + \left[ \frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}} \right]^{1.2} = 1 \quad (2.24)$$

Onde:

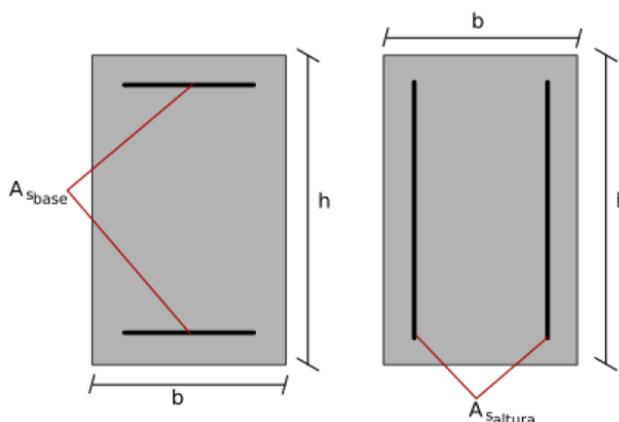
- $M_{Rd,x}$  e  $M_{Rd,y}$  são as componentes do momento resistente de cálculo em flexão composta oblíqua, segundo os eixos principais de inércia  $x$  e  $y$ , da seção bruta, para um esforço normal resistente de cálculo  $N_{Rd}$  de valor igual à normal solicitante  $N_{Sd}$ ;
- $M_{Rd,xx}$  e  $M_{Rd,yy}$  são os momentos resistentes de cálculo segundo cada um dos referidos eixos em flexão composta normal, com mesmo valor  $N_{Rd}$ . Nesses valores são calculados a partir do arranjo e da quantidade de armadura na seção.

Nos problemas desta dissertação não se tem uma configuração de número de barras e seus diâmetros definidos e, segundo Alves (2018), para estes casos, é possível calcular os esforços resistentes de uma seção submetida à flexo-compressão oblíqua com o mesmo princípio da seção anterior de flexo-compressão normal.

Alves (2018) sugere uma formulação bem conservadora do ponto de vista de que se ignora uma possível contribuição que as áreas de aço que se encontram distribuída ao longo da altura da seção (ou da base, a depender do caso analisado) possam dar a capacidade resistente da mesma. Entretanto, para seções menores, onde se tem apenas ferros nos cantos ou muito próximo destes, esta aproximação é muito mais realista seguindo as seguintes etapas.

Analisam-se, inicialmente, duas seções distintas, conforme apresentado na Figura 3 submetida ao mesmo esforço normal  $N_{Sd}$ , mas cada uma resistindo a um momento fletor.

Figura 3 – Distribuição de áreas de aço na seção de um pilar



Fonte: Alves (2018)

O problema transforma-se a princípio em dois subproblemas de flexo-compressão normal. Avalia-se a capacidade resistente de cada uma dessas seções e encontram-se os valores de  $M_{Rd,xx}$  e  $M_{Rd,yy}$ . Com esses valores dos momentos resistentes para estas duas seções e a Equação (2.24), pode-se avaliar se a seção do pilar resiste ou não aos esforços solicitantes através da equação abaixo.

$$\left[ \frac{M_{Sd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^{1.2} + \left[ \frac{M_{Sd,y}}{M_{Rd,yy}} \right]^{1.2} \leq 1 \quad (2.25)$$

Onde  $M_{Sd,x}$  e  $M_{Sd,y}$  são os esforços solicitantes de dimensionamentos decompostos na direção dos eixos principais de inércia da seção bruta.

### 2.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Para se realizar a análise estrutural neste trabalho foi adotado um código apresentado por Alves (2018) desenvolvido em Python (versão 2.7) e validado com diversos exemplos apresentados por Logan (2011) e por alguns softwares comerciais para a análise estrutural.

Optou-se por usar o código mencionado, pois, como o processo de análise de confiabilidade e otimização podem ser muito caros computacionalmente, a análise estrutural deve ser a mais rápida possível, e o procedimento para cálculo dos deslocamentos e esforços internos nesse código gerou um ganho significativo no

tempo de processamento, além de ser bastante versátil, podendo ser facilmente adaptado para resolver diferentes tipos de estruturas.

### 3 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

As prescrições normativas utilizadas atualmente para projetos de estruturas de concreto armado, como dito anteriormente, baseiam-se na análise semiprobabilística. Esta abordagem, no entanto, não considera diretamente as incertezas do problema que estão associados à carga, à resistência e até mesmo ao custo que apresentam características aleatórias. Há ainda uma maior dificuldade em garantir a eficiência e a não violação dos estados limites definidos por normas (MOTTA, 2015), por isso, a análise de confiabilidade, que permite avaliar a probabilidade de falha estrutural associada aos critérios de projeto, vem ganhando espaço.

Estado limite é o estado que uma estrutura deixa de atender qualquer um dos seus requisitos para o qual foi construída, onde normas de projetos estruturais definem dois tipos: estado limite de serviço (ELS) que está associado ao conforto para os usuários, durabilidade da estrutura, aparência e boa utilização de um modo geral; e estado limite último (ELU) que está associado ao colapso parcial ou global da estrutura, não podendo mais ser utilizada. Projetos ótimos tendem a se localizar no contorno das restrições o que acentua o problema de violação desses estados.

As incertezas no processo de otimização serão consideradas aqui tanto na função objetivo como nas restrições para obtenção de projetos robustos e confiáveis. Nas funções objetivos, as incertezas serão calculadas através das medidas de robustez com simulação de Monte Carlo (MC) e nas restrições foram utilizadas duas abordagens: uma chamada RIA (Reliability index approach) e outra denominada PMA (Performance Measure Approach), que serão detalhadas posteriormente.

Para a análise de confiabilidade é necessário definir quais são as variáveis estocásticas, também chamadas de aleatórias ou randômicas e seu tipo de distribuição, cujos conceitos serão depois apresentados.

No Brasil ainda não há estudos que analisam as distribuições de probabilidades mais adequadas para cada variável estocástica, assim como os parâmetros que a definem, entretanto, há diversos trabalhos publicados no exterior sobre esse tema. Por isso, este trabalho seguirá as premissas apresentadas por Joint Committee on Structural Safety (JCSS) (1997).

### 3.1 CONCEITOS GERAIS

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos que são necessários para o entendimento das abordagens para verificação de confiabilidade.

#### 3.1.1 Variáveis estocásticas

Uma variável estocástica, também chamada de aleatória ou randômica, trata-se de uma variável cujos valores possíveis são resultados de fatores aleatórios. Estas variáveis devem ser mensuráveis e podem tomar valores que podem ser discretos ou contínuos.

Se uma variável pode assumir infinitos valores distintos em um dado intervalo ela é denominada de variável contínua. Por outro lado, se esta variável só pode assumir uma quantidade finita de valores se denomina de variável discreta.

De modo geral, uma variável aleatória pode ser descrita por uma série de funções que simulam seu comportamento. Alguns exemplos destas funções são a Função de Densidade de Probabilidade (*Probability Density Function* ou PDF) e a Função de Distribuição Acumulada (*Comulative Density Function* ou CDF).

As PDF descrevem a distribuição de ocorrências de um valor ( $x \in \mathbb{R}$ ) associado a uma dada variável aleatória. Ela pode ser utilizada para avaliar a probabilidade que essas variáveis têm de assumir um dado valor em um determinado intervalo. Esta função é apresentada por Motta (2009) como:

$$Prob[a < X_{cont} \leq b] = \int_a^b f(x)dx \quad a \leq b \quad (3.1)$$

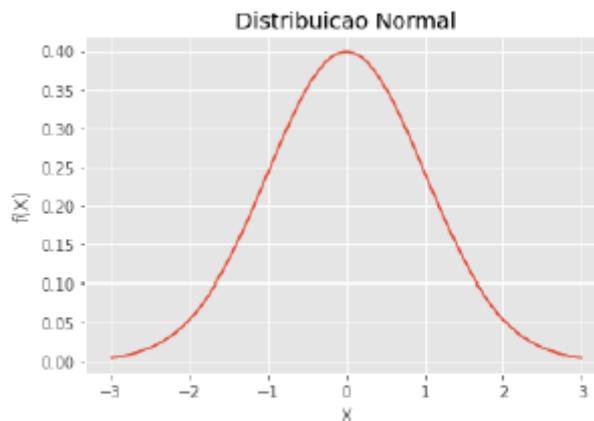
As CDF, por sua vez, são utilizadas para se descrever a probabilidade de uma variável aleatória fornecer um valor igual ou inferior a um dado valor estipulado. Estas podem ser relacionadas às PDF pela seguinte formulação:

$$F_x(a) = Prob[X \leq a] = \int_{-\infty}^a f(x)dx \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Distribuições de probabilidade

A distribuição Normal ou também chamada de Gaussiana (Figura 4) é a mais recorrente nos problemas de engenharia (MELCHERS e BECK, 2017), por isso, este trabalho se restringirá a falar apenas dela. Mais informações referentes às demais distribuições existentes e suas aplicações podem ser encontradas em JCSS (1997), Melchers e Beck (2017) e Ghali, Neville e Cheving (1986).

Figura 4 – Exemplo de PDF da distribuição normal



Fonte: Alves (2018).

A distribuição normal é uma distribuição de probabilidade absolutamente contínua parametrizada pela sua esperança matemática (número real  $\mu$ ) e desvio padrão (número real positivo  $\sigma$ ). As PDF e CDF da distribuição normal, respectivamente, são dadas pelas seguintes funções:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (3.3)$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (3.4)$$

Existe uma infinidade de distribuições normais, cada uma com sua própria média e desvio padrão, mas é muito comum que nas análises estocásticas se transforme as variáveis descritas por distribuições normais em distribuições normais padronizadas que possui média 0 e desvio padrão 1.

A escala horizontal do gráfico da distribuição normal padrão corresponde ao escore- $z$  que é uma medida de posição que indica o número de desvios padrão em que um valor se encontra a partir da média. Podemos transformar um valor  $x$  em um escore- $z$  usando a fórmula:

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \quad (3.5)$$

Então, a PDF e a CDF podem ser escritas da seguinte forma, notando que a CDF da distribuição normal padronizada é referida comumente na literatura pelo símbolo  $\Phi$ :

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x} \Phi(z) \quad (3.6)$$

$$F_x(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(z) \quad (3.7)$$

### 3.1.3 Função Estado Limite e Probabilidade de Falha

A falha em um estado significa que a estrutura atingiu condições indesejáveis, podendo ocasionar colapso total ou parcial (ELU) ou então interrupção do uso normal da estrutura (ELS).

A probabilidade de ocorrência de um evento que infrinja algum estado limite é a medida numérica da chance deste evento ocorrer. Na confiabilidade estrutural, os modos de comportamento são representados pelas funções de falha  $G$ , normalmente definidas por:

$$G(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) - S(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

Onde:

- $\mathbf{X}$  é o vetor de variáveis aleatórias;
- $R(\mathbf{x})$  representa a resistência do elemento;
- $S(\mathbf{x})$  representa a solicitação imposta ao elemento.

Considera-se que este elemento falhou quando a resistência  $R$  for menor que o esforço solicitante  $S$ . Deste modo, a probabilidade de falha para este dado elemento pode ser escrita como:

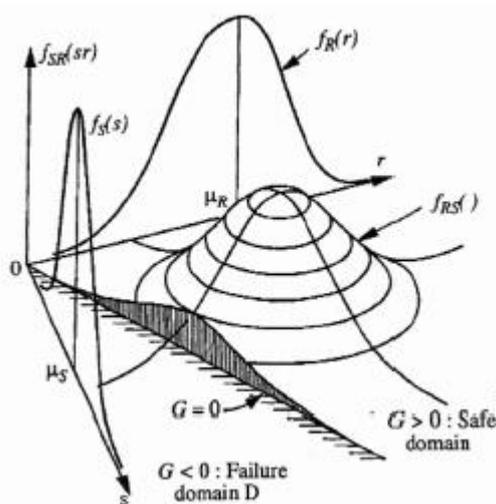
$$p_f = \text{Prob}(G(x) \leq 0) \quad (3.9)$$

Ou ainda, a probabilidade de falha, pode ser definida pela Equação (3.10), onde  $f_R$  e  $f_S$  são, respectivamente, as PDF das variáveis aleatórias  $R$  e  $S$  que foram consideradas independentes.

$$p_f = \text{Prob}(R \leq S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{r} f_R(r) f_S(s) dr ds \quad (3.10)$$

A integral da Equação (3.10) está apresentada na Figura 5 representada pelo volume da PDF conjunta  $f_{RS}$  que está na região denominada de  $D$ , além da linha  $G$  (superfície de falha).

Figura 5 – Gráfico da PDF de duas variáveis  $R$ ,  $S$  e da PDF conjunta destas



Fonte: Melchers e Beck (2017)

### 3.2 RIA

Na abordagem RIA (*Reliability Index Approach*) é necessário calcular a probabilidade de falha ou índice de confiabilidade, que pode ser obtido por diversos métodos como Integração Numérica, Teste de Aderência, método de Monte Carlo ou FORM.

Para este trabalho foi adotado o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM, do inglês *First Order Reliability Method*) que reduz o tempo computacional total e tem sido amplamente aceito devido a sua eficiência e é recomendado pela JCSS (Yang et al., 2006).

O loop interno para determinar o ponto de maior probabilidade de falha (MPP, *Most probable failure point*), ou seja, a solução ( $Z_{RIA}^*$ ), segundo Motta (2015), é dado por:

$$\begin{aligned} \min_{z} \{ \|Z\| \} \\ \text{sujeito à: } G(Z) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.2.1 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem

Cada distribuição de probabilidade tem sua Função de Densidade de Probabilidade (PDF) que, junto com um conjunto de variáveis aleatórias  $\mathbf{x}$  e uma função de falha  $G(\mathbf{x})$ , podem definir a probabilidade de falha ( $P_f$ ) como:

$$P_f = \int_F f_x(\mathbf{x}) dx \therefore F = \{\mathbf{x} : G(\mathbf{x}) < 0\} \quad (3.12)$$

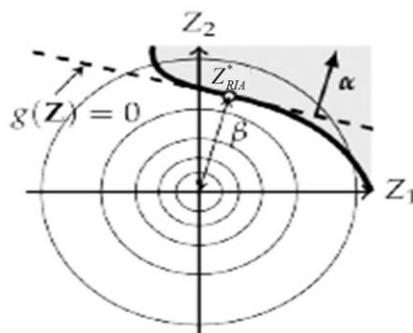
Onde  $F$  é a região de falha da estrutura ou do elemento estrutural e  $f_x$  é a PDF da função de falha, desconhecida a priori.

Para evitar o uso da integral numérica apresentada na Eq. (3.12), utilizou-se o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM), que faz o uso de técnica iterativa. Diz-se de primeira ordem, pois, o método faz uma aproximação linear da função de falha no ponto de maior probabilidade de falha.

O FORM transforma as distribuições das variáveis envolvidas em distribuições normais padronizadas, cuja média é igual a zero e o desvio padrão é unitário. Isso faz com que o problema inicial se torne um problema equivalente em um espaço reduzido padrão.

O espaço correspondente às variáveis estocásticas padronizadas tem simetria radial, como pode ser visto nos círculos concêntricos da Figura 6. O índice de confiabilidade ( $\beta$ ) é então definido neste subespaço como a menor distância entre a superfície de falha ( $G(x) = 0$ ) e a origem do sistema de coordenadas do espaço reduzido.

Figura 6 – Subespaço das variáveis aleatórias padronizadas



Fonte: Adaptado de Hackl (2018).

A probabilidade de falha é calculada através da Eq. (3.13).

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.13)$$

onde  $\Phi$  é a função acumulada de densidade de probabilidade para uma variável aleatória padrão. Detalhes do procedimento podem ser encontrados em Melchers e Beck (2017) ou Motta e Afonso (2016).

Neste trabalho foi adotada a biblioteca PyRe (Python Reliability), desenvolvida na linguagem Python 2.7, para utilização do FORM na análise de confiabilidade. Essa biblioteca foi escolhida devido a sua facilidade e versatilidade, e foi devidamente testada e validada por Alves (2018).

### 3.3 PMA

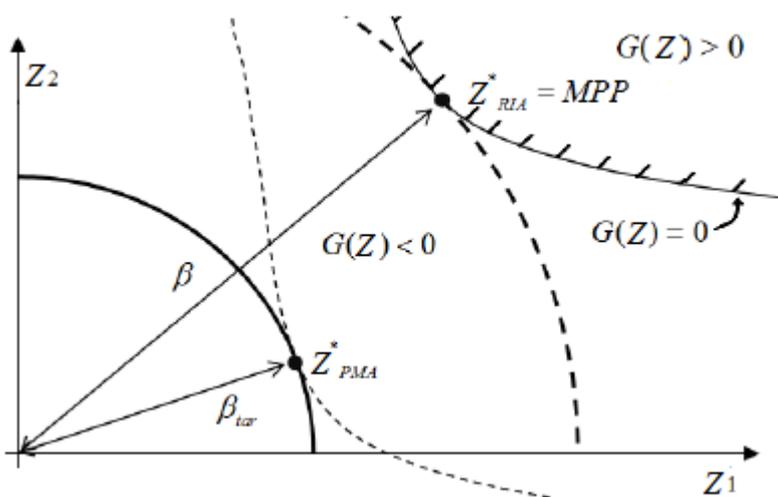
Na abordagem PMA não é necessário o cálculo do índice de confiabilidade durante o processo de otimização. O PMA avalia se o índice de confiabilidade do projeto está maior do que o valor pretendido  $\beta_{tar}$ , porém o índice de confiabilidade não é calculado diretamente. É apenas utilizado o valor máximo da função de falha, na região de probabilidade definida pelo índice de confiabilidade alvo ( $\beta_{tar}$ ). Caso esse valor máximo, seja menor que zero (não tenha falhado), o projeto atende às especificações do projeto.

O loop interno para obter o MPP (a solução  $Z_{PMA}^*$ ), segundo Motta (2015), é determinado por:

$$\begin{aligned} & \max_z \{G(Z)\} \\ & \text{sujeito à: } \|Z\| = \beta_{tar} \end{aligned} \quad (3.14)$$

A abordagem PMA é dita mais eficiente que a abordagem RIA principalmente em problemas “muito viáveis” ou “muito inviáveis”, isto é. quando  $\beta \gg \beta_{tar}$  ou  $\beta < 0$  (YOUN et al, 2003; YOUN et al, 2004; DEB et al 2009; VALDEBENITO e SCHUELLER, 2010; PAIVA et al, 2014). Pode-se ver a comparação entre os métodos na Figura 7 em um espaço reduzido ( $Z$ ) para um problema geral com duas variáveis.

Figura 7 – Avaliação de restrição de confiabilidade via RIA e PMA



Fonte: Adaptado de Motta (2015)

Para implementação computacional, foi feita uma alteração no código “form.py” retirado da biblioteca Pyre, dando a opção ao usuário de escolher a abordagem para análise de confiabilidade que é feita nas restrições.

Se caso a abordagem escolhida for RIA, retornará o valor do índice de confiabilidade, mas na abordagem PMA, o valor retornado será o da função estado limite.

### 3.4 MEDIDAS DE ROBUSTEZ VIA MONTE CARLO

Por se tratar de uma otimização robusta, são geradas amostras randômicas baseadas nas distribuições de cada variável aleatória para cálculo das *medidas de robustez* que são as médias e os desvios padrões nas funções objetivos com a metodologia Monte Carlo (MC). Após um estudo paramétrico, o tamanho da amostra

foi escolhido por fornecer bons resultados com menor esforço computacional. Em resumo, são calculados a média aritmética ( $M_a$ ) e o desvio padrão ( $SD$ ) da função de interesse, como por exemplo, o custo ou o deslocamento máximo, através das Equações (3.15) e (3.16), respectivamente.

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (3.15)$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M_a)^2}{N}} \quad (3.16)$$

Onde  $x_i$  são os valores da função de interesse avaliados para os pontos de amostra. É importante mencionar que, para o processo de otimização baseado em gradiente, o “seed” do gerador de números aleatórios deve ser fixado para obter respostas estatísticas com menos variação.

Geralmente é calculado a média e o desvio padrão de um mesmo parâmetro, mas nos estudos de casos escolhidos, as medidas de robustez serão calculadas de parâmetros diferentes, pois possuem crescimento na mesma direção, o que será provado e explicado mais à frente.

## 4 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Muitos problemas reais de engenharia possuem mais de uma meta ou objetivo a serem otimizados, além de vários critérios a serem satisfeitos, esses problemas são chamados de Otimização Multiobjetivo. A formulação matemática do problema de otimização consiste em encontrar um conjunto de  $n$  variáveis de projeto contido num vetor  $\mathbf{x}$ , tal que:

$$\begin{aligned} & \text{Mimize } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ & \text{Sujeito a } g_j^T(\mathbf{x}) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p \\ & \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \end{aligned} \tag{4.1}$$

Onde:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}), \dots, f_{nobj}(\mathbf{x})] \tag{4.2}$$

é o vetor de funções objetivo, os componentes do vetor  $\mathbf{x}$  são as variáveis de projeto,  $g_i(\mathbf{x})$  e  $h_k(\mathbf{x})$  são as funções de restrição de desigualdade e igualdade, respectivamente, e os vetores  $\mathbf{x}_L$  e  $\mathbf{x}_U$  são, respectivamente, os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto.

### 4.1 OTIMIZAÇÃO ROBUSA BASEADA EM CONFIABILIDADE

A otimização baseada em confiabilidade (RBDO, *Reliability Based Design Optimization*) trata as incertezas do problema de otimização estatisticamente, incertezas essas que são inerentes ao sistema, ao meio e aos modelos, e isso permite avaliar corretamente o nível de segurança do problema.

Para que a formulação matemática dada pela Equação (4.1) esteja com base em confiabilidade, dentro da restrição de desigualdade  $g_j^T(\mathbf{x})$  deve-se encontrar as funções restrições relacionadas à análise de confiabilidade das funções de falha (G), que normalmente dependem do índice de confiabilidade ou da probabilidade de falha.

Existem diversas abordagens para aplicação da otimização com base em

confiabilidade. Além das que foram utilizadas nesse trabalho, a Abordagem via Índice de Confiabilidade (RIA, do inglês *Reliability Index Approach*) que calcula diretamente o índice de confiabilidade e a Abordagem via Medida de Desempenho (PMA, do inglês *Performance Measure Approach*) que resolve o problema sem o cálculo direto do índice de confiabilidade (YOUN et al., 2004), pode-se citar a Aproximação Estocástica de Perturbação Simultânea (SPSA, do inglês *Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation*) (ANDRADE, 2013; HAMIDIAN e SEYEDPOOR, 2009) que adapta o método de maior declive (*Steepest descent*) para aplicação da otimização estocástica.

As restrições de confiabilidade do RBDO associadas as abordagens utilizadas têm o formato das Equações (4.3) e (4.4), sendo das abordagens via RIA e via PMA, respectivamente.

$$\beta_{tar} - \|Z_{RIA}^*\| < 0 \quad (4.3)$$

$$G(Z_{PMA}^*) \leq 0 \quad (4.4)$$

Já para que o problema se torne de otimização robusta baseada em confiabilidade (RBRDO) é necessária que cada  $f_i(\mathbf{x})$  dado na equação (4.2) seja a média ou desvio padrão da função objetivo.

## 4.2 METODOLOGIA SQP

Os métodos aqui apresentados para resolução de tais problemas, consistem na transformação do problema com vários objetivos em outros com apenas um objetivo. Para cada otimização escalar, foi utilizado o método de Programação Quadrática Sequencial (SQP) que tem se provado altamente eficaz em problemas de otimização (ANTONIOU e LU, 2007).

O SQP aproxima o problema a uma sequência de subproblemas quadráticos convexos, esta aproximação é feita repetidas vezes até que os valores das variáveis de projeto venham a convergir, isso significa que a diferença no valor da função objetivo entre duas iterações consecutivas é menor do que um valor adotado (tolerância). Vale salientar que o problema se torna de segunda ordem e, para se encontrar uma solução ótima para este, deve-se garantir que as condições de ótimo

de segunda ordem sejam atendidas.

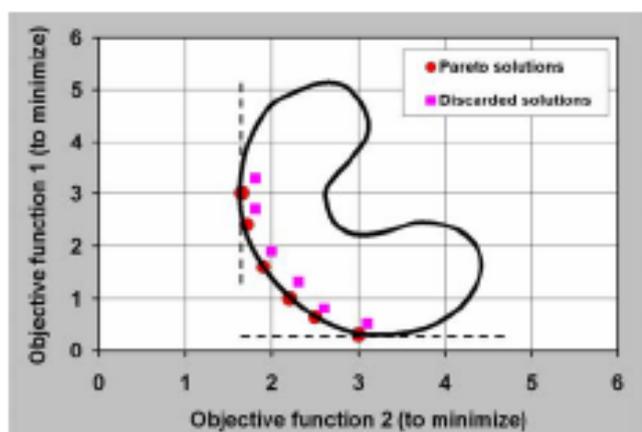
Todo este procedimento pode ser encontrado detalhadamente em Motta et al. (2015), Antoniou e Lu (2007) e Arora (2004), e neste trabalho foi utilizado a função *minimize* presente na biblioteca Scipy.optimize.

### 4.3 CONCEITO DE PARETO

Usualmente, não é possível encontrar um projeto que seja ideal para todos os objetivos, em vez disso, existem várias soluções para o problema, cada uma representando uma relação entre os objetivos. Para encontrar essas soluções pode ser empregado o conceito de Pareto. Os pontos de Pareto apresentam a propriedade de que ao se mover na direção decrescente de uma função, as outras funções têm seu valor aumentado (MOTTA et al., 2015) ou mantidos.

A parede de Pareto contém os pontos que representam um compromisso ótimo (trade-off) entre as respectivas avaliações das funções objetivos. A Figura 8, retirada da referência Bates (2003), mostra esse conceito, destacando as soluções de Pareto e as soluções inferiores descartadas.

Figura 8 – Solução de Pareto para otimização multiobjetivo



Fonte: Bates (2003).

Existem vários métodos para se obter estes pontos, neste trabalho serão estudados os seguintes: Método da Soma Ponderada (WS), Método Min-Max e o Método da Interseção Contorno-Normal (NBI), que serão descritos abaixo. Maiores detalhes também podem ser encontrados em Motta et al. (2012).

### 4.3.1 Método da Soma Ponderada

Este é o método mais empregado devido ao seu simples uso. O método da soma ponderada (“Weighted Sum method” – WS) baseia-se em minimizar a soma das funções objetivo, normalizadas e ponderadas por um vetor de coeficiente de ponderação  $B_j$ , e repetir para várias ponderações diferentes. Assim, o problema transforma-se em uma única função objetivo, representada algebricamente por:

$$F = B_j^T \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}_0} = \sum_{k=1}^{nobj} B_{j,k} \frac{f_k}{f_{0k}} \quad (4.5)$$

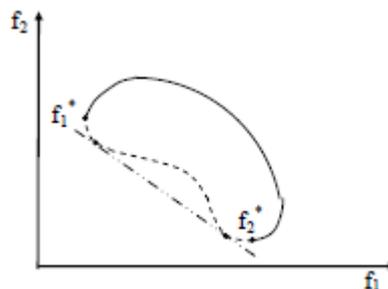
Onde os elementos de  $B_{j,k}$  são normalizados da seguinte maneira:

$$\sum_{k=1}^{nobj} B_{j,k} = 1, 0 \leq B_{j,k} \leq 1 \quad (4.6)$$

e  $f_{0k}$  é a função objetivo  $k$  no projeto inicial.

Cada  $B_j$  diferente dá um ponto de Pareto, mas poderão surgir problemas quando o contorno da região viável no espaço das funções objetivos for não-convexa, como mostra a Figura 9. Onde não é possível encontrar uma solução que esteja na região não-convexa.

Figura 9 – Região viável no espaço das funções objetivos



Fonte: Motta (2015).

Normalmente, essa metodologia não fornece pontos de Pareto uniformes para uma distribuição uniforme dos pesos  $B_j$ .

### 4.3.2 Método Min-Max

Um método baseado no método da soma ponderada, o método Min-Max foi criado para se minimizar o problema na obtenção de pontos uniformemente distribuídos, diferenciando-se na normalização das funções objetivos, encontrado em Hwang et. al. (1980).

Para normalizar as funções objetivo serão necessários mais dois parâmetros:  $\max f_k$  e  $\min f_k$ , que são obtidos através das soluções das otimizações individuais das funções objetivos isoladas. Aplica-se o conjunto de variáveis  $x_k^*$ , resultante de cada otimização  $k$  isolada, a cada função objetivo e então se encontra o valor máximo da função ( $\max f_k$ ) e o valor mínimo ( $\min f_k$ ).

As funções objetivo normalizadas serão:

$$\overline{f_k} = \frac{f_k - \min f_k}{\max f_k - \min f_k}, k = 1, \dots, nobj \quad (4.7)$$

Caso  $\max f_k = \min f_k$  para algum objetivo  $k$ , esse objetivo pode ser desconsiderado.

Então, o seguinte problema é proposto:

$$\min(\gamma) \quad (4.8)$$

onde

$$\gamma = \max(B_k \overline{f_k}), k = 1, \dots, nobj \quad (4.9)$$

e está sujeito as mesmas restrições da Equação (4.1), além das seguintes restrições adicionais:

$$B_k \overline{f_k} \leq \gamma \text{ para } k = 1, \dots, nobj \quad (4.10)$$

Resolvendo esse problema para vários conjuntos de vetores de coeficientes de ponderação  $\mathbf{B}$ , um novo subproblema de otimização é formulado, então, encontra-se um novo ponto de Pareto.

### 4.3.3 Método NBI

O método da Interseção Contorno-Normal (NBI) foi introduzido por Das e Dennis (1996) com o objetivo de encontrar pontos eficientes do contorno no espaço das funções objetivo (espaço viável), que possibilitem a construção de uma curva suave. Quando os pontos estão sobre uma parte do contorno suficientemente convexa, esses são pontos de Pareto, mas quando estão em uma parte côncava, não há garantia de que sejam pontos de Pareto, entretanto, contribuem para que a curva de fronteira de Pareto seja definida.

Detalhes da metodologia podem ser encontrados nas referências Motta et al. (2015) e Das e Dennis (1996), mas, em resumo, primeiro deve-se encontrar o vetor mínimo local das funções objetivo, representado na Eq. (4.11).

$$\mathbf{F}^* = [f_1^*, f_2^*, \dots, f_k^*, \dots, f_{nobj}^*]^T \quad (4.11)$$

onde cada  $f_i^*$  representa um mínimo local individual.

Depois, definem-se os pontos da Envoltória Convexa do Mínimo Individual (ECMI), que são definidos pelas combinações convexas de  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i^*) - \mathbf{F}^*$ , armazenados sob a forma de matriz,  $\Phi$ , denominada de *pay-off*. Assim, a ECMI será:

$$\left\{ \Phi \mathbf{B} : \mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{nobj}, \sum_{i=1}^{nobj} B_i = 1, B_i \geq 0 \right\} \quad (4.12)$$

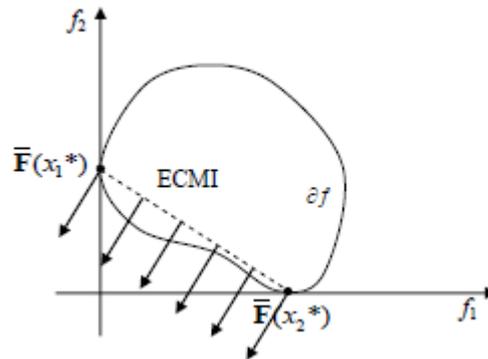
onde  $\mathbf{B}$  é o vetor de coeficientes de ponderação e

$$\Phi_{i,j} = f_i(x_j^*) - f_i^*, \quad i = 1, \dots, nobj; \quad j = 1, \dots, nobj \quad (4.13)$$

O método NBI tem o objetivo de encontrar parte do contorno  $\bar{d}f$ , como ilustrado no exemplo representado na Figura 10, que contém os pontos ótimos de Pareto, a partir da interseção da reta quase-normal à ECMI, apontada para a origem, cuja reta é definida a partir do ponto médio da ECMI como mostra a Equação (4.14).

$$n_i = \frac{1}{nobj} \sum_{j=1}^{nobj} \Phi_{i,j} \quad (4.14)$$

Figura 10 – A imagem do conjunto viável sobre o mapeamento de  $f$  no espaço das funções objetivos



Fonte: Motta (2015).

Então,  $\Phi\mathbf{B} + t\mathbf{n}$ , com  $t \in \Re$ , representa o conjunto de pontos sobre  $\mathbf{n}$ , que formam uma reta quase-normal à ECMI. E, matematicamente, para encontrar a interseção da reta quase-normal à ECMI e o contorno que define o espaço ( $\delta f$ ), deve-se resolver o seguinte problema:

$$\max_{\mathbf{x}, t} t \quad (4.15)$$

sujeito as restrições da Equação (4.1), mais a seguinte restrição:

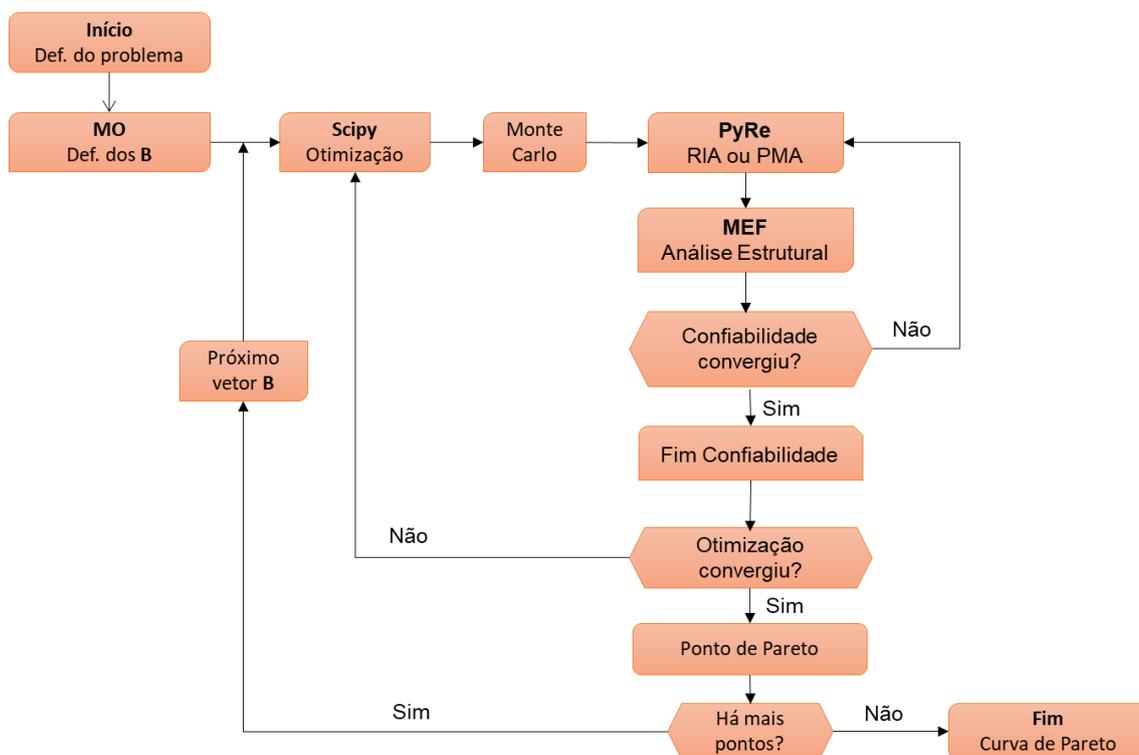
$$\Phi\mathbf{B} + t\mathbf{n} \geq \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \quad (4.16)$$

onde  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  foi substituída por  $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}^*$ , pois considerou-se que na origem esteja o ponto de utopia  $\mathbf{F}^*$  e, dessa forma, todas as funções são não-negativas.

#### 4.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Os métodos anteriormente apresentados foram implementados na linguagem Python e para encontrar a curva de Pareto é feito o processo mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Layout do código para encontrar a curva de Pareto



Fonte: A Autora (2020).

Onde pode ser observado um loop menor para a análise de confiabilidade, que pode ser feita com abordagens via RIA ou PMA, e que está dentro do loop da otimização uniobjetivo utilizando o método SQP, que por sua vez encontra-se dentro do loop da otimização multiobjetivo para definição da curva de Pareto empregando um dos métodos já mencionados, WS, min-max ou NBI.

O parâmetro que é atualizado a cada ponto é o vetor **B** que se encontra na função objetivo (métodos WS e min-max) ou na função de restrição (método NBI). Para o exemplo em que se há duas funções objetivos e deseja-se encontrar 11 pontos, o vetor **B** terá os valores mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Vetor **B**

Ponto	$B_1$	$B_2$
1	0.0	1.0
2	0.1	0.9
3	0.2	0.8
4	0.3	0.7
5	0.4	0.6
6	0.5	0.5
7	0.6	0.4
8	0.7	0.3
9	0.8	0.2
10	0.9	0.1
11	1.0	0.0

Fonte: A Autora (2020).

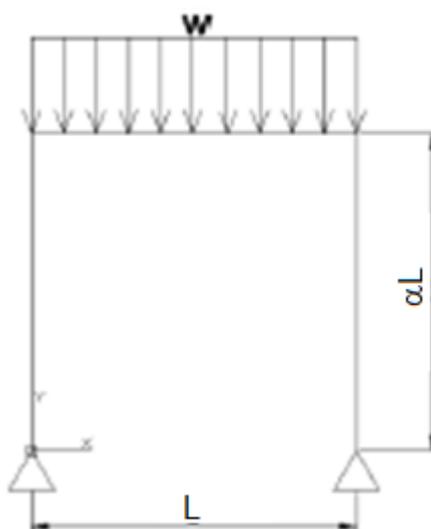
## 5 ESTUDOS DE CASO

Dois exemplos de estrutura em 2D de concreto armado serão estudados, onde os três métodos de otimização multiobjetivo mencionados foram aplicados, para obter resultados ótimos robustos e comparar os resultados obtidos por esses métodos. Para aplicar a metodologia robusta, as medidas de média e desvio padrão foram calculadas conforme mostrado na Seção 3.4, utilizando, respectivamente a Equação (3.15) e Equação (3.16).

### 5.1 PÓRTICO PLANO COM UM PAVIMENTO

Trata-se de um pórtico plano com três barras com carregamento uniformemente distribuído aplicado ao longo da sua viga, como mostra a Figura 12, e foi retirado de Coêlho (2017), que em seu trabalho apresentou a análise do pórtico por diversos métodos de otimização e com diversos valores para  $\alpha$ . Aqui será utilizada a RBRDO, como já mencionado, e apenas para  $\alpha = 1$  e  $L = 5.5$  metros.

Figura 12 – Pórtico plano com um pavimento



Fonte: Alves (2018).

- **Carregamentos:** foi adotado um único carregamento distribuído  $w = 1.5$  tf/m.
- **Módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson:** considerou-se para o concreto o valor de 25 GPa como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson de  $\nu = 0.2$ . Estes valores foram adotados apenas para se processar a

otimização com aplicação via MEF, entretanto, segundo Alves (2018), os resultados independem destes dois valores.

- **Tensão admissível:** adotou-se uma tensão admissível nas peças de  $\sigma_{adm} = 1300 \text{ tf/m}^2$ .
- **Confiabilidade:** Admitiu-se um valor para o nível de confiabilidade, recomendado por JCSS (1997) para a verificação de estado limite último da maioria das estruturas novas,  $\beta = 4.2$ .
- **Variáveis de projeto:** As dimensões dos pilares ( $x_1$ ) e da viga ( $x_2$ ) foram adotadas como as variáveis contínuas de projeto deste problema que possuem limites entre 0.01 m e 1 m. Note que as seções de ambos os elementos foram consideradas quadradas.
- **Funções objetivos:** Um dos objetivos é diminuir a média do volume total de concreto da estrutura, sendo a função definida pela Equação (5.1). O segundo objetivo é minimizar o desvio padrão da deformação máxima, que se dá no meio do vão da viga, definida pela Equação (5.2). Tal deformação é calculada pelo método de elementos finitos, através da biblioteca implementada por Alves (2018).

$$f_{obj1}(\mathbf{x}) = mean(2\alpha L\mathbf{x}_1^2 + L\mathbf{x}_2^2) \quad (5.1)$$

$$f_{obj2}(\mathbf{x}) = std(desloc_{meio}) \quad (5.2)$$

- **Variáveis aleatórias:** A lista com todas as variáveis aleatórias está apresentada na Tabela 3, que também contém o tipo de distribuição (PDF), a média e a variância ( $V = std^2(\mathbf{x})$ ) de cada variável. Esses dados estatísticos foram baseados na JCSS (1997), e vale salientar que as médias das dimensões da viga e do pilar são variáveis, pois são as variáveis de projeto  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ .

Tabela 3 – Variáveis para exemplo 1

Variável	Símbolo	PDF	Unidade	Média	V
Dimensão do pilar	$x_1$	Normal	m	Variável	0.025
Dimensão da viga	$x_2$	Normal	m	Variável	0.025
Carregamento	w	Lognormal	tf/m	1.5	1.5
Tensão resistente	$\sigma$	Lognormal	kgf/cm <sup>2</sup>	9100	0.17
Vão	L	Determinístico	m	5.5	-
Relação largura/altura do pórtico	$\alpha$	Determinístico	-	1.0	-

Fonte: Adaptado de Alves (2018).

- **Restrições:** As restrições adotadas, além das restrições necessárias para cada método de otimização multiobjetivo, possuem o formato das Equações (5.3) e (5.4) para abordagem RIA e PMA, respectivamente, e dependem da avaliação das funções de estado limite da Equação (5.5), que representam a tensão máxima no topo do pilar e as tensões máximas da viga no encontro com o pilar e no meio do vão, para obtenção dos índices de confiabilidade. As variáveis  $N_i$  e  $M_i$  da Equação (5.5) são, respectivamente, os esforços normais e momentos fletores atuantes no topo do pilar (1), no apoio da viga (2) e no meio do vão (3).

$$g_i^T(\mathbf{x}) = \beta_i - \beta_{tar}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

$$g_i^T(\mathbf{x}) = G_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

$$G_i(x) = \sigma - \left( \frac{N_i}{x_1^2} + \frac{M_i \left( \frac{x_1}{2} \right)}{\frac{x_1^4}{12}} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.5)$$

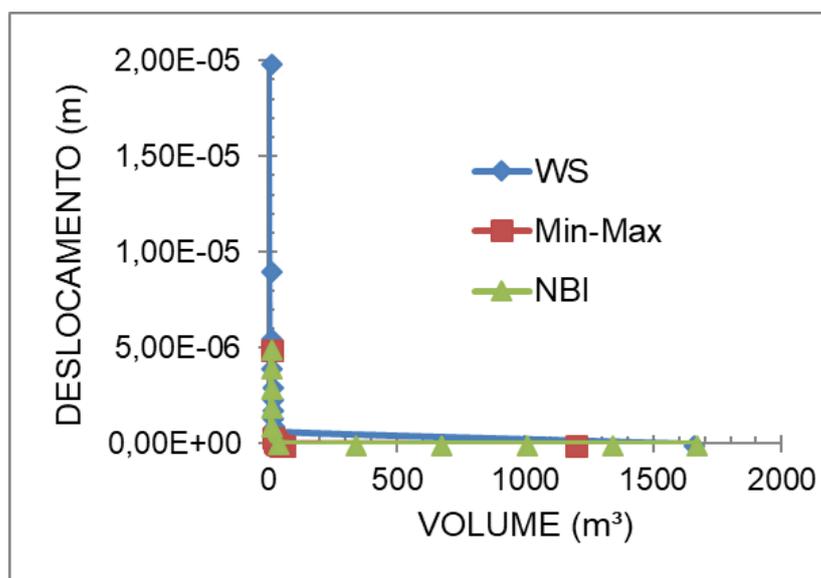
### 5.1.1 Resultados com abordagem RIA

O problema foi resolvido pelos três métodos de otimização multiobjetivo apresentados, encontrando-se 11 pontos de Pareto para cada método. Primeiro, foi feita a análise de confiabilidade utilizando a abordagem RIA.

### 5.1.1.1 Estudo do tamanho da amostra

Foram feitos testes com diferentes tamanhos de amostra para simulação de Monte Carlo no cálculo das funções objetivos para escolha do tamanho ideal que traga bons resultados com o menor custo computacional. Estão ilustrados os resultados com amostra  $N = 10^2$  e  $N = 5 \cdot 10^2$  na Figura 13 e na Figura 14, respectivamente.

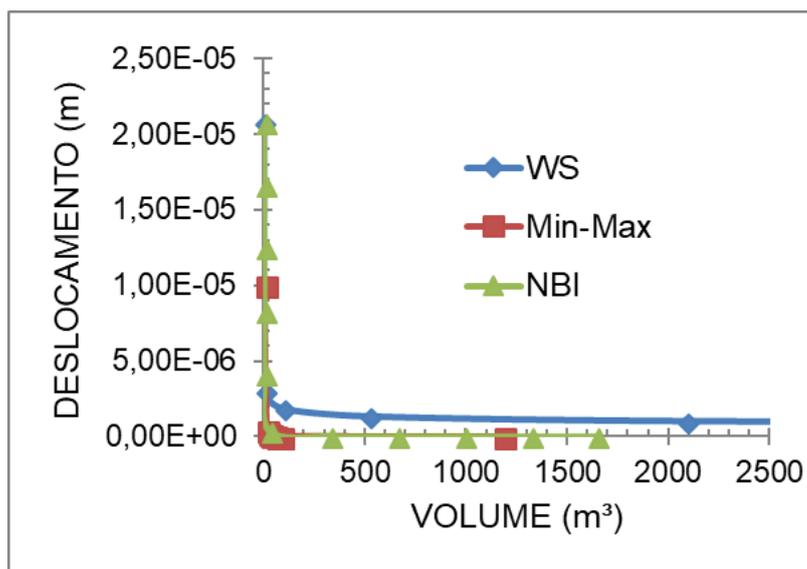
Figura 13 – Resultados com amostra  $N = 10^2$



Fonte: A Autora (2020).

Nota – Onde lê-se volume são os resultados da  $f_{obj1}(\mathbf{x}) = mean(volume)$ , assim como nos demais gráficos desta seção.

Nota – Onde lê-se deslocamento são os resultados da  $f_{obj2}(\mathbf{x}) = sdt(deslocamento)$ , assim como nos demais gráficos desta seção.

Figura 14 – Resultados com amostra  $N = 5 \cdot 10^2$ 

Fonte: A Autora (2020).

É válido que quando o deslocamento e seu desvio padrão é mínimo, o volume é máximo ( $x_1 = x_2 = 1m$ ), assim como quando se tem o máximo deslocamento, o volume é mínimo de forma que respeite as restrições de confiabilidade. Então, pode-se concluir que o NBI não obteve um bom resultado com a amostra de dimensão  $N = 10^2$ , o WS obteve pontos muito distantes da curva na amostra com dimensão  $N = 5 \cdot 10^2$  e o min-max não encontrou bons mínimos em ambas amostras, além de não obterem resultados estáveis a cada rodagem.

Logo, foi rodado uma amostra de dimensão  $N = 10^3$  e obteve-se os valores encontrados na Tabela 4, onde  $V$  se refere ao volume e  $\delta_{\max}$  ao deslocamento máximo.

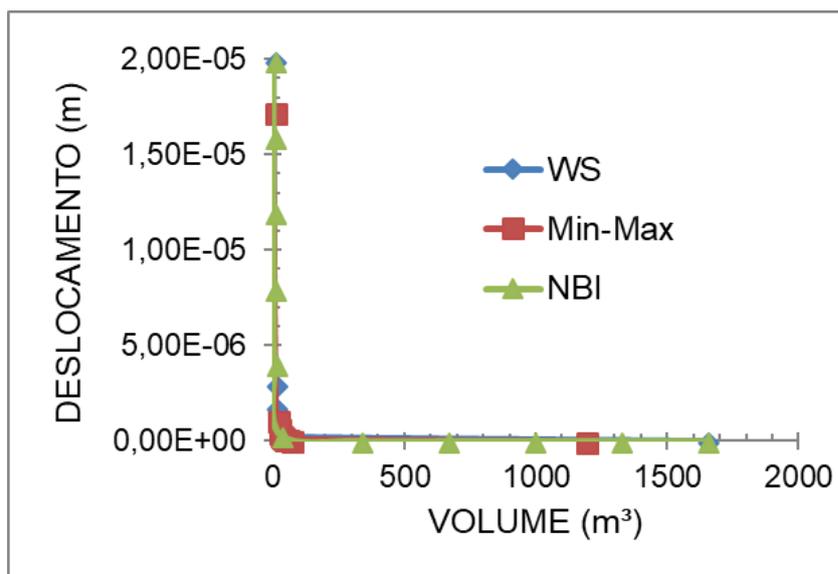
Tabela 4 – Resultados do exemplo 1 – RIA

<i>WS</i>		<i>Min-Max</i>		<i>NBI</i>	
<i>Média(V)</i> (m <sup>3</sup> )	<i>Sdt(δ<sub>max</sub>)</i> (m)	<i>Média(V)</i> (m <sup>3</sup> )	<i>Sdt(δ<sub>max</sub>)</i> (m)	<i>Média(V)</i> (m <sup>3</sup> )	<i>Sdt(δ<sub>max</sub>)</i> (m)
1650,0290	2,101E-09	1183,0065	3,084E-09	1650,0290	2,101E-09
40,3228	2,176E-07	66,0204	9,182E-08	1320,5220	2,382E-09
29,2872	3,497E-07	47,8807	1,461E-07	991,0672	3,294E-09
23,7266	4,800E-07	38,7503	1,991E-07	661,6991	5,255E-09
19,9893	6,229E-07	32,6291	2,569E-07	332,7316	1,206E-08
17,0959	7,919E-07	27,9058	3,244E-07	30,0402	3,366E-07
14,6343	1,008E-06	23,9030	4,096E-07	6,1411	4,033E-06
12,3661	1,311E-06	20,2323	5,278E-07	4,0652	7,993E-06
10,0834	1,811E-06	16,5616	7,179E-07	3,2010	1,197E-05
7,4382	2,951E-06	12,3502	1,134E-06	2,7056	1,595E-05
2,3779	1,993E-05	2,3779	1,725E-05	2,3779	1,993E-05

Fonte: A Autora (2020).

O gráfico ilustrado na Figura 15 mostra a comparação dos pontos de Pareto dos três métodos, utilizando a abordagem RIA com amostra  $N = 10^3$ .

Figura 15 – Pontos de Pareto para o pórtico de um pavimento com a abordagem RIA



Fonte: A Autora (2020).

Os pontos encontrados pelo método da soma ponderada ficaram concentrados em uma única região, pois, como foi dito, o método não fornece uma distribuição uniforme dos pontos. Assim como no método Min-Max que, nesse exemplo, também não forneceu uma distribuição adequada dos pontos. Já, pelo NBI foram obtidos pontos mais uniformemente distribuídos, este método permite uma distribuição uniforme de pontos de Pareto até mesmo para um pequeno conjunto de vetores do parâmetro **B** já mencionado, independentemente do número de funções objetivos.

Pode-se observar que os pontos de Pareto formam uma curva de aproximadamente 90 graus bem próxima aos eixos, ou seja, pequenas variações de deslocamento até uma ordem menor que  $1e-08$  provocam uma grande variação de volume. E se pode dizer que o ótimo global está localizado no ponto mais próximo a origem, na região onde se localizaram os pontos do método da soma ponderada.

A Tabela 5 mostra valores comparativos entre os métodos, onde encontra-se o número de iterações da otimização e o número de avaliações de funções. Nessa tabela, cada avaliação de função representa a avaliação das funções objetivos e a avaliação das funções de restrição, para um determinado ponto de projeto, ou seja, o cálculo estatístico (para  $10^3$  pontos aleatórios) e uma análise de confiabilidade para cada restrição. Pode-se concluir que o NBI, apesar de ser o mais custoso, obtém melhores pontos distribuídos e é o método mais completo. Por outro lado, o método

da soma ponderada possui o menor número de iterações, o menor número de avaliações de funções e, conseqüente, o menor tempo de execução.

Tabela 5 – Custo computacional dos métodos no exemplo 1 via RIA

Método	Iterações	Avaliações de funções	Tempo
WS	110	457	5min53s
Min-Max	160	787	12min17s
NBI	265	1379	15min34s

Fonte: A Autora (2020).

### 5.1.2 Resultados com abordagem PMA

Seguindo a análise de confiabilidade empregando a abordagem PMA, foi rodada com uma amostra de dimensão  $N = 10^3$ , pois foi a que obteve bons resultados com a abordagem RIA, e foram obtidos os resultados da Tabela 6, onde  $V$  se refere ao volume e  $\delta_{\max}$  ao deslocamento máximo.

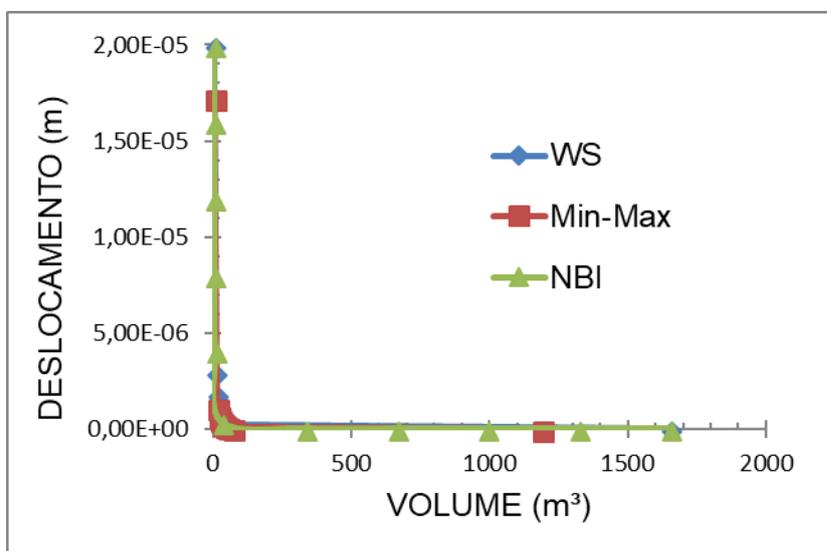
Tabela 6 – Resultados do exemplo 1 via PMA

WS		Min-Max		NBI	
Média(V) (m <sup>3</sup> )	Sdt( $\delta_{\max}$ ) (m)	Média(V) (m <sup>3</sup> )	Sdt( $\delta_{\max}$ ) (m)	Média(V) (m <sup>3</sup> )	Sdt( $\delta_{\max}$ ) (m)
1650,0290	2,101E-09	1183,0065	3,084E-09	1650,0290	2,101E-09
40,3228	2,176E-07	66,0203	9,182E-08	1320,5220	2,382E-09
29,2872	3,497E-07	47,8807	1,461E-07	991,0672	3,294E-09
23,7266	4,800E-07	38,7503	1,991E-07	661,6991	5,255E-09
19,9893	6,229E-07	32,6291	2,569E-07	332,7316	1,206E-08
17,0959	7,919E-07	27,9058	3,244E-07	30,0402	3,366E-07
14,6343	1,008E-06	23,9030	4,096E-07	6,1411	4,033E-06
12,3661	1,311E-06	20,2323	5,278E-07	4,0652	7,993E-06
10,0834	1,811E-06	16,5616	7,179E-07	3,2010	1,197E-05
7,4382	2,951E-06	12,3502	1,134E-06	2,7056	1,595E-05
2,3779	1,993E-05	2,3779	1,725E-05	2,3779	1,993E-05

Fonte: A Autora (2020).

A comparação entre os pontos de Pareto encontrados pelos três métodos para otimização multiobjetivo, utilizando a abordagem PMA, pode ser vista na Figura 16. E os valores de iteração, avaliação de função e tempo estão na Tabela 7.

Figura 16 – Pontos de Pareto do pórtico 1 com a abordagem PMA



Fonte: A Autora (2020).

Tabela 7 – Custo computacional dos métodos com abordagem PMA

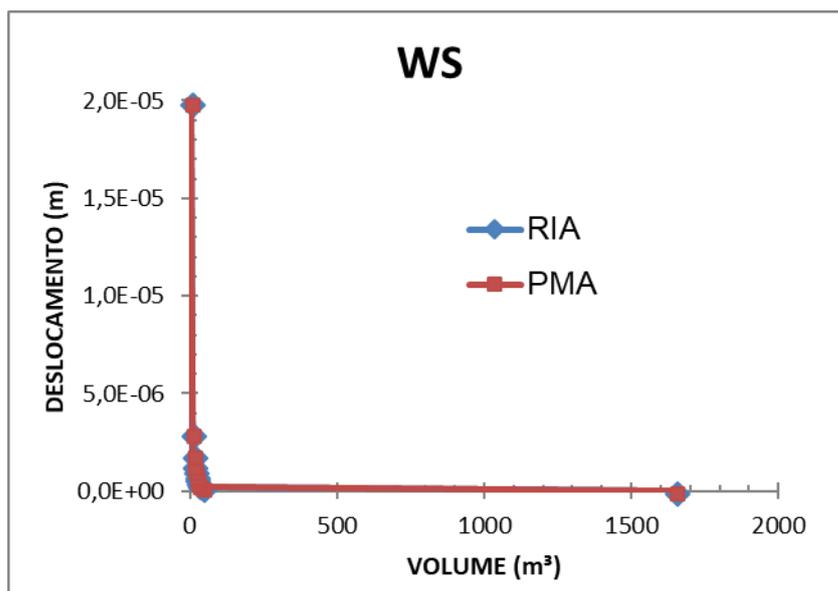
Método	Iterações	Avaliações de funções	Tempo
WS	114	472	9min00s
Min-Max	164	815	10min31s
NBI	220	1123	8min34s

Fonte: A Autora (2020).

### 5.1.3 Comparação entre as abordagens para análise de confiabilidade

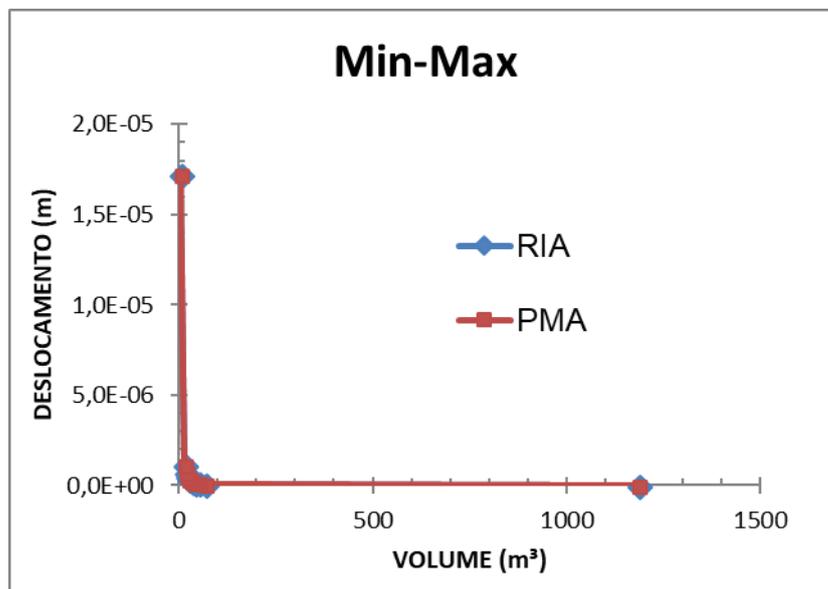
As considerações feitas em relação aos pontos encontrados com a abordagem RIA, podem ser feitas na abordagem PMA, pois foram obtidos os mesmos pontos de Pareto, como se pode observar nas figuras abaixo.

Figura 17 – Método da soma ponderada no pórtico 1



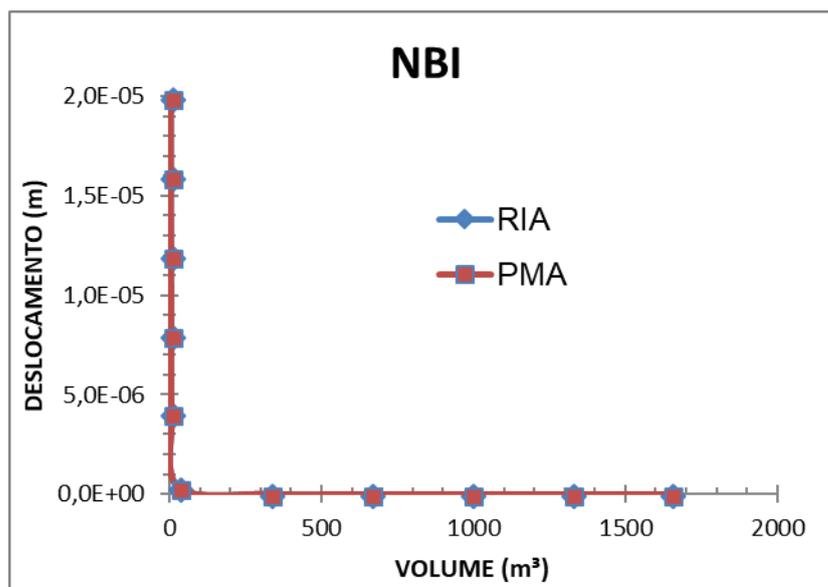
Fonte: A Autora (2020).

Figura 18 – Método min-max no pórtico 1



Fonte: A Autora (2020).

Figura 19 – Método NBI no pórtico 1



Fonte: A Autora (2020).

A maior diferença entre os resultados obtidos da abordagem RIA para PMA é o tempo computacional que pode ser percebido na Tabela 8, que quando se utiliza o PMA, nota-se um aumento no método WS, porém houve uma diminuição nos demais métodos.

Tabela 8 – Custo computacional de execução para o pórtico com um pavimento

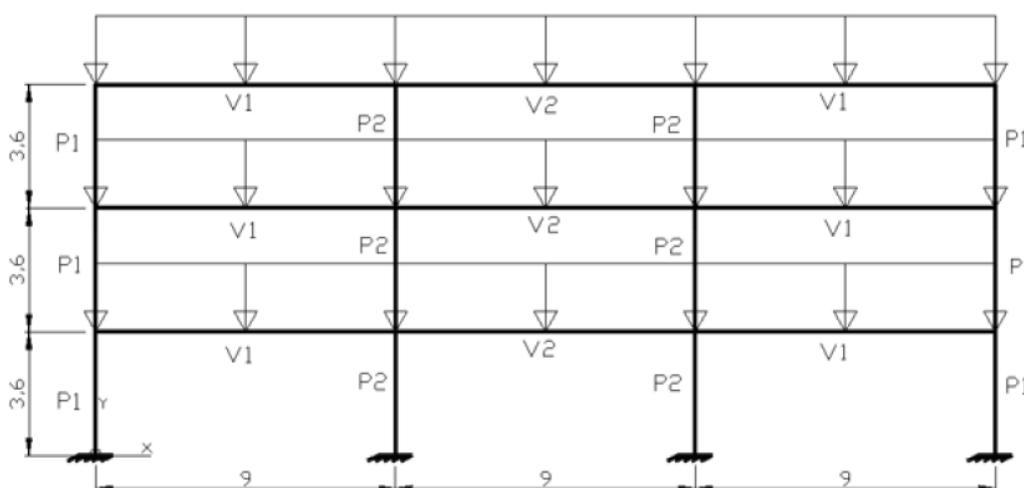
		RIA	PMA
NBI	Iterações	265	220
	Avaliação de funções	1379	1123
	Tempo (horas)	15min34s	8min34s
MIN-MAX	Iterações	160	164
	Avaliação de funções	787	815
	Tempo (horas)	12min17s	10min31s
WS	Iterações	110	114
	Avaliação de funções	457	472
	Tempo (horas)	5min53s	9min00s

Fonte: A Autora (2020).

## 5.2 PÓRTICO COM TRÊS PAVIMENTOS

Este segundo problema foi adaptado da referência Coêlho (2017) onde foi considerada a otimização determinística com variável mista. Trata-se de um pórtico plano com três pavimentos com carregamento uniformemente distribuído aplicado ao longo de suas vigas, como mostrado na Figura 20.

Figura 20 – Pórtico plano com três pavimentos



Fonte: Alves (2018).

Foram adotados dois grupos de vigas e pilares: os pilares do tipo 01 são as do canto e os do tipo 02 são os do centro; as vigas dos vãos extremos são as do tipo 01 e as do vão central do tipo 02. Para obter os esforços nas vigas foram discretizados em dois elementos de mesmo tamanho em cada vão, portanto a estrutura possui um total de 30 barras (12 pilares + 18 vigas).

- **Carregamentos:** considerou-se um carregamento permanente  $g = 16.5$  kN/m e uma sobrecarga de  $q = 7.2$  kN/m.
- **Módulo de elasticidade:** considerou-se para o concreto o valor de 28.4 GPa como módulo de elasticidade e 210 GPa para o aço no dimensionamento.
- **Coefficiente de Poisson:** adotou-se o mesmo valor previsto pela ABNT (2014): 0.2.
- **Confiabilidade:** Também se admitiu o valor para o nível de confiabilidade, recomendado por JCSS (1997) para a verificação de estado limite último,  $\beta = 4.2$ . Serão feitas otimizações verificando a confiabilidade via RIA e PMA.

- **Variáveis de projeto:** As variáveis adotadas como de projeto para o problema foram as dimensões das vigas e pilares de cada grupo ( $b_{V1}$ ,  $h_{V1}$ ,  $b_{V2}$ ,  $h_{V2}$ ,  $b_{P1}$ ,  $h_{P1}$ ,  $b_{P2}$ ,  $h_{P2}$ ) e as áreas de aço dos elementos ( $A_{SV1}^+$ ,  $A_{SV1}^-$ ,  $A_{SV2}^+$ ,  $A_{SV2}^-$ ,  $A_{SP1}$ ,  $A_{SP2}$ ), totalizando 14 variáveis de projeto. Essas variáveis foram tratadas como contínuas e possuem os limites indicados na Tabela 9.

Tabela 9 – Valores limites das variáveis de projeto para o exemplo 2

Descrição	Limite superior	Limite inferior
Base das vigas	20	50
Altura das vigas	35	90
Base dos pilares	30	60
Altura dos pilares	30	90
Área de aço das vigas	5.67	22.81
Área de aço dos pilares	11.34	88.36

Fonte: Alves (2018).

- **Funções objetivos:** O primeiro objetivo ( $f_{obj1}$ ) é minimizar a média do custo total da estrutura em USD (dólares americanos), sendo esse valor calculado como mostrado na Equação (5.6). O segundo objetivo ( $f_{obj2}$ ) é minimizar o maior valor dentre os desvios padrões das deformações nos nós, que também é calculada pelo método de elementos finitos, através da biblioteca implementada por Alves (2018).

$$f_{obj1} = mean \left( \sum_{i=1}^{n_p} (C_c \mathbf{b}_i \mathbf{h}_i + C_a W_{a_i} + 2C_f (\mathbf{b}_i + \mathbf{h}_i)) L_i + \sum_{j=1}^{n_v} (C_c \mathbf{b}_j \mathbf{h}_j + C_a W_{a_j} + 2C_f (\mathbf{b}_j + \mathbf{h}_j)) L_j \right) \quad (5.6)$$

$$f_{obj2} = \text{máximo}(std(\mathbf{d})) \quad (5.7)$$

onde:

- $n_p$  e  $n_v$  são os números de pilares e vigas, respectivamente;
- $C_c = 54$  USD/m<sup>3</sup>,  $C_a = 0.55$  USD/kg e  $C_f = 54$  USD/m<sup>2</sup> são os custos com volume de concreto, peso de aço e área de forma, respectivamente, adotados conforme trabalho de referência;

- **b** e **h** são os vetores que contém as bases e alturas dos elementos, respectivamente;
  - $L$  representa o comprimento dos elementos;
  - $W_a$  é o peso específico do aço de cada peça;
  - **d** é o vetor que contém os deslocamentos dos pontos.
- **Variáveis Aleatórias:** As variáveis aleatórias adotadas assim como as suas respectivas distribuições e parâmetros relacionados estão apresentadas na Tabela 10. Da mesma maneira que no exemplo 1, esses dados estatísticos foram retirados da JCSS (1997).

Tabela 10 – Variáveis do exemplo 2

Variáveis	Unidade	PDF	Média	V
Base das vigas	cm	Normal	Variável	0.025
Altura das vigas	cm	Normal	Variável	0.025
Base dos pilares	cm	Normal	Variável	0.025
Altura dos pilares	cm	Normal	Variável	0.025
As positive	cm <sup>2</sup>	Determinístico	Variável	-
As negative	cm <sup>2</sup>	Determinístico	Variável	-
As pilares	cm <sup>2</sup>	Determinístico	Variável	-
Resistência do concreto	MPa	Lognormal	39.38	0.10
Resistência do aço	MPa	Lognormal	491.2	0.05
Módulo de elasticidade do aço	GPa	Normal	210	0.05
Carga permanente	kN/m	Normal	16.5	0.04
Sobrecarga	kN/m	Normal	-6.84	0.10

Fonte: Alves (2018).

- **Restrições:** Além das restrições para os métodos de otimização multiobjetivo, as demais restrições possuem o formato da Equação (5.8) com abordagem RIA e o formato da Equação (5.9) com abordagem PMA, sendo associadas às funções estado limite mostradas na Equação (5.10). Foi verificado o estado limite último (ELU).

$$g_i^T(\mathbf{x}) = \beta_i - \beta_{var}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i=1,2,\dots,8 \quad (5.8)$$

$$g_i^T(\mathbf{x}) = G_i(x) \geq 0, \quad i=1,2,\dots,8 \quad (5.9)$$

$$G_i(\mathbf{x}) = 1 - \frac{S_{Sd}(\mathbf{x})}{S_{Rd}(\mathbf{x})} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,8 \quad (5.10)$$

Onde  $S_{Sd}$  refere-se aos esforços solicitantes de dimensionamento e  $S_{Rd}$  aos esforços resistentes de projeto, que são os momentos (positivo e negativo) e esforços cortantes resistentes nos 2 tipos de vigas e aos momentos fletores resistentes nos 2 tipos de pilares (vide Tabela 11).

Tabela 11 – Lista de esforços resistentes de projeto

Número	Símbolo	Descrição
1	$mp_{v1}$	Momento positivo resistente nas vigas tipo 1
2	$mp_{v2}$	Momento positivo resistente nas vigas tipo 2
3	$mn_{v1}$	Momento negativo resistente nas vigas tipo 1
4	$mn_{v2}$	Momento negativo resistente nas vigas tipo 2
5	$vd_{v1}$	Esforço cortante resistente nas vigas tipo 1
6	$vd_{v2}$	Esforço cortante resistente nas vigas tipo 2
7	$md_{p1}$	Momento fletor resistente nos pilares tipo 1
8	$md_{p2}$	Momento fletor resistente nos pilares tipo 2

Fonte: A Autora (2020).

Outras restrições previstas pela ABNT (2014), como deslocamento horizontal do pórtico e verificação do cortante  $V_{rd2}$ , podem ser negligenciadas (ALVES, 2018), pois não há carregamentos horizontais e não se está calculando a armadura transversal.

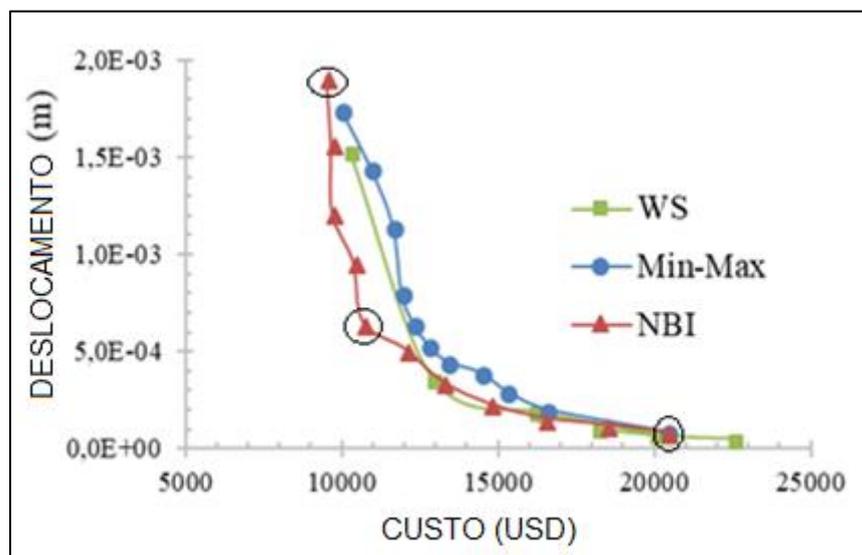
### 5.2.1 Resultados via RIA

Da mesma maneira, esse problema foi resolvido pelos três métodos de otimização multiobjetivo apresentados, encontrando-se 11 pontos de Pareto para cada método.

### 5.2.1.1 Tamanho da amostra para medidas de robustez

Foram feitos estudos para escolha do tamanho da amostra para simulação de MC nos cálculos das funções objetivos, na Figura 21 pode-se observar os resultados obtidos com uma amostra de dimensão  $N = 10^2$ .

Figura 21 – Pontos de Pareto para exemplo 2 com  $N = 10^2$



Fonte: A Autora (2020)

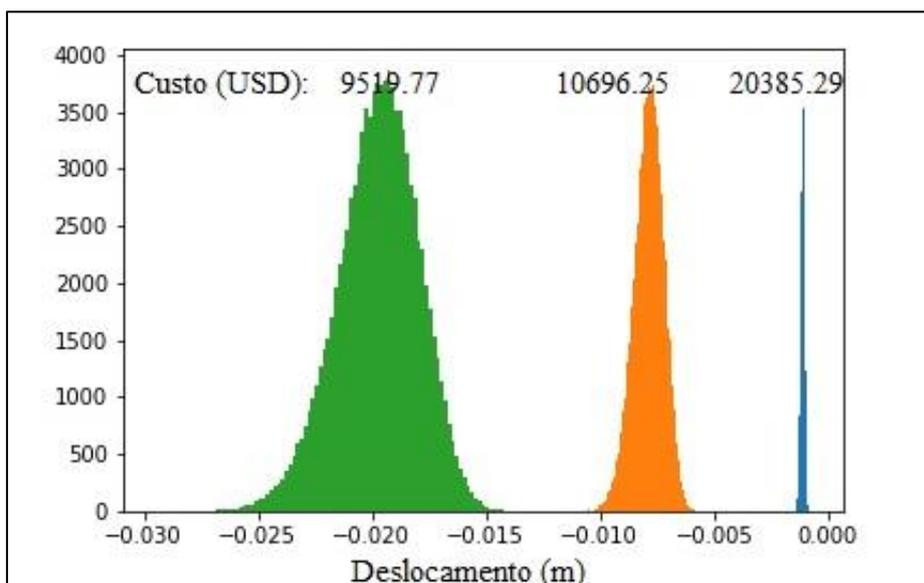
Nota – Onde lê-se custo são os resultados da  $f_{obj1}(\mathbf{x}) = mean(custo)$ , assim como nos demais gráficos desta seção.

Nota – Onde lê-se deslocamento são os resultados da  $f_{obj2}(\mathbf{x}) = sdt(deslocamento)$ , assim como nos demais gráficos desta seção.

Na figura acima, os métodos não obtiveram uma mesma curva de Pareto, o que pode ter ocorrido é que as sub-otimizações multiobjetivo tenham caído em mínimos locais ou o tamanho da amostra seja pequena e os resultados estejam variando muito.

Também foi feita a análise de três pontos encontrados pelo método NBI (indicados na Figura 21), calculando os seus histogramas de deslocamentos, mostrado na Figura 22. Os pontos são: o ponto de deslocamento mínimo, o ponto de custo mínimo e um ponto intermediário que pode ser considerado um ótimo global, que está na mudança de inclinação da curva de Pareto encontrada e tem baixos valores tanto para o custo quanto para o deslocamento.

Figura 22 – Histogramas dos deslocamentos em três pontos



Fonte: A Autora (2020).

Onde se pode observar que a média e o desvio padrão do deslocamento são proporcionais, ou seja, o ponto de desvio padrão mínimo possui a menor média do deslocamento, em módulo. Assim também acontece com o custo, o que fez com que as medidas de robustez das funções objetivos sejam de parâmetros diferentes (custo e deslocamento). Também se comprova que o ponto que minimiza o custo possui o maior deslocamento e, portanto, o maior desvio padrão.

Depois, com uma amostra de dimensão  $N = 10^3$  foram encontrados os valores da Tabela 12.

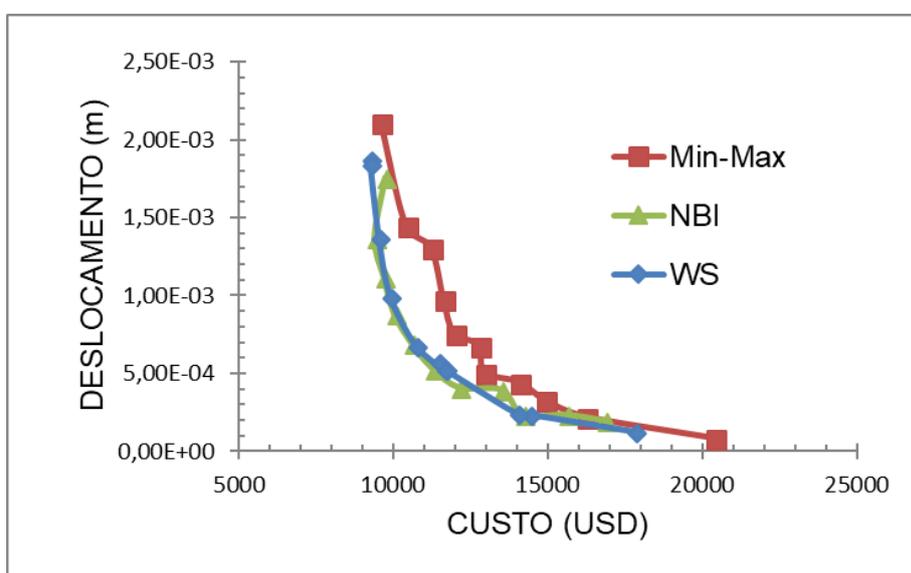
Tabela 12 – Resultados do exemplo 2 via RIA

WS		Min-Max		NBI	
Média( <i>Custo</i> ) ( <i>USD</i> )	Sdt( $\delta_{\max}$ ) ( <i>m</i> )	Média( <i>Custo</i> ) ( <i>USD</i> )	Sdt( $\delta_{\max}$ ) ( <i>m</i> )	Média( <i>Custo</i> ) ( <i>USD</i> )	Sdt( $\delta_{\max}$ ) ( <i>m</i> )
17826,9793	1,266E-04	20385,2918	8,564E-05	16863,0915	1,983E-04
14411,2946	2,372E-04	16208,2981	2,241E-04	15617,3761	2,372E-04
13997,3015	2,438E-04	14876,7568	3,345E-04	14197,8553	2,380E-04
11672,9284	5,284E-04	14057,1771	4,463E-04	13503,7451	3,979E-04
11448,2494	5,749E-04	12942,3504	5,067E-04	12142,9501	4,116E-04
11630,7427	5,294E-04	12763,0609	6,839E-04	11279,2615	5,343E-04
10723,8105	6,840E-04	11963,6421	7,567E-04	10598,2583	6,972E-04
9906,8446	9,990E-04	11617,3815	9,775E-04	10037,8263	8,865E-04
9541,8472	1,373E-03	11212,8774	1,310E-03	9697,7480	1,124E-03
9245,0271	1,879E-03	10396,0326	1,457E-03	9406,3315	1,373E-03
9238,7456	1,849E-03	9586,6492	2,118E-03	9748,1321	1,760E-03

Fonte: A Autora (2020).

A comparação entre os métodos da otimização multiobjetivo pode ser observada na Figura 23 e na Tabela 13. Novamente, cada avaliação de função inclui a avaliação das funções objetivos e as avaliações das funções de restrições, conforme explicado no exemplo anterior.

Figura 23 - Pontos de Pareto para exemplo 2 via RIA



Fonte: A Autora (2020).

Assim como no exemplo anterior, o método da Soma Ponderada apresentou pontos com distribuição pouco uniforme. Já o método Min-Max não obteve bons pontos, pois se afastou dos demais métodos. Por último, os resultados do método NBI para o exemplo 2 também obteve uma distribuição mais uniforme dos pontos.

Tabela 13 – Custo computacional dos métodos no exemplo 2 via RIA

Método	Iterações	Avaliações de funções	Tempo (hr)
WS	451	7972	30.52
Min-Max	458	8501	16.83
NBI	1023	18557	39.82

Fonte: A Autora (2020).

A Tabela 13 mostra que o método NBI é o mais custoso. Porém, esse método obteve uma curva suave e com pontos de Pareto bem distribuídos, o que não foi obtido nos demais métodos. O método min-max teve o menor custo computacional, porém encontrou uma curva de Pareto afastada em relação aos demais métodos.

Na Tabela 14 pode-se observar o número de iterações para cada ponto de Pareto em cada método, onde, geralmente, os pontos mais próximos do menor custo possuem maior número de iterações, devido às restrições de confiabilidade estarem ativas.

Tabela 14 – Número de iterações via RIA

Método	Menor desl. (P1)	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Menor custo (P11)
WS	51	20	38	21	15	23	56	68	60	72	27
Min-Max	10	8	9	9	31	15	30	29	122	54	141
NBI	6	16	63	31	64	90	131	184	122	85	231

Fonte: A Autora (2020).

### 5.2.2 Resultados via PMA

Na abordagem para consideração de restrição de confiabilidade via PMA, foram encontrados os resultados da Tabela 15, com amostra de tamanho  $N = 10^3$ , que obteve os melhores resultados para abordagem RIA.

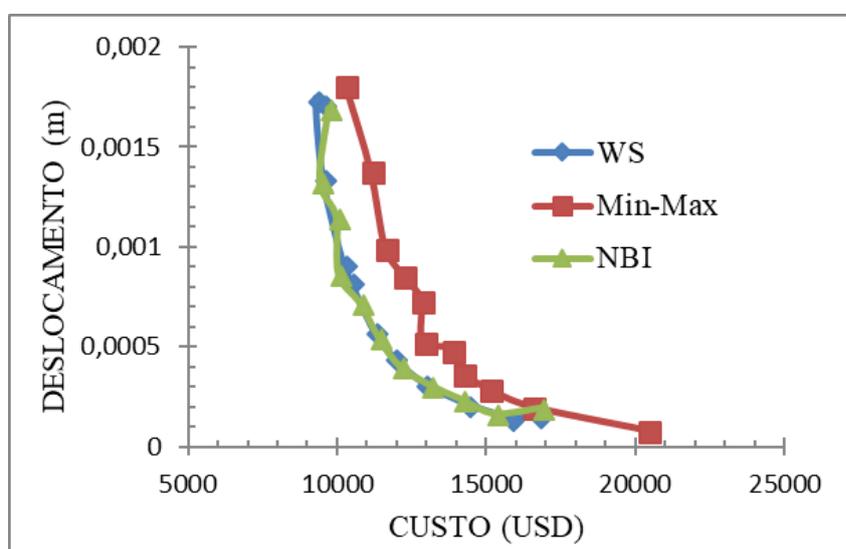
Tabela 15 – Resultados do exemplo 2 via PMA

WS		Min-Max		NBI	
Média(Custo) (USD)	Sdt( $\delta_{\max}$ ) (m)	Média(Custo) (USD)	Sdt( $\delta_{\max}$ ) (m)	Média(Custo) (USD)	Sdt( $\delta_{\max}$ ) (m)
16740,63	1,531E-04	20385,2918	8,564E-05	16863,0915	1,983E-04
15824,16	1,452E-04	16510,0844	2,043E-04	15294,6286	1,687E-04
14373,8	2,116E-04	15094,1476	2,922E-04	14197,1774	2,378E-04
12926,78	3,152E-04	14178,5470	3,728E-04	13119,7216	3,110E-04
11906,14	4,433E-04	13810,8312	4,904E-04	12127,2288	4,020E-04
11246,33	5,789E-04	12870,2270	5,322E-04	11401,9551	5,491E-04
10457,31	8,247E-04	12805,3488	7,389E-04	10787,3950	7,193E-04
10215,07	9,129E-04	12196,6494	8,593E-04	10059,9096	8,659E-04
9532,557	1,342E-03	11595,8044	1,002E-03	9986,5897	1,150E-03
9299,245	1,740E-03	11102,1435	1,388E-03	9438,2335	1,334E-03
9536,71	1,720E-03	10254,3637	1,815E-03	9727,8948	1,693E-03

Fonte: A Autora (2020).

Os valores comparativos dos métodos estão na Tabela 16 e Figura 24, onde pode-se ressaltar que o método min-max obteve, neste exemplo, um menor custo computacional, porém obteve uma curva de Pareto mais distante dos demais métodos.

Figura 24 – Pontos de Pareto via PMA



Fonte: A Autora (2020).

Tabela 16 – Dados computacionais dos métodos no pórtico 2 via PMA

Método	Iterações	Avaliações de funções	Tempo (hr)
WS	1203	25701	70.18
Min-Max	730	16175	16.50
NBI	1238	24762	43.07

Fonte: A Autora (2020).

Na Tabela 17 pode-se observar o número de iterações para cada ponto de Pareto em cada método, onde, como no primeiro exemplo, os pontos mais próximos do menor custo da estrutura possuem maior número de iterações, devido às restrições de confiabilidade estarem ativas.

Tabela 17 – Número de iterações via PMA

Método	Menor desl. (P1)	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Menor custo da estrutura (P11)
WS	29	45	77	65	289	195	219	37	28	65	154
Min- Max	10	16	27	26	8	23	13	15	219	301	72
NBI	6	74	46	302	124	99	108	196	74	123	86

Fonte: A Autora (2020).

### 5.2.3 Comparação entre RIA e PMA

Em comparação com os resultados obtidos pelas abordagens via RIA e PMA, houve uma diferença do custo computacional que pode ser observado na Tabela 18, e os pontos de Pareto ainda assim ficaram bastante próximos como pode ser observado na Figura 25, na Figura 26 e na Figura 27.

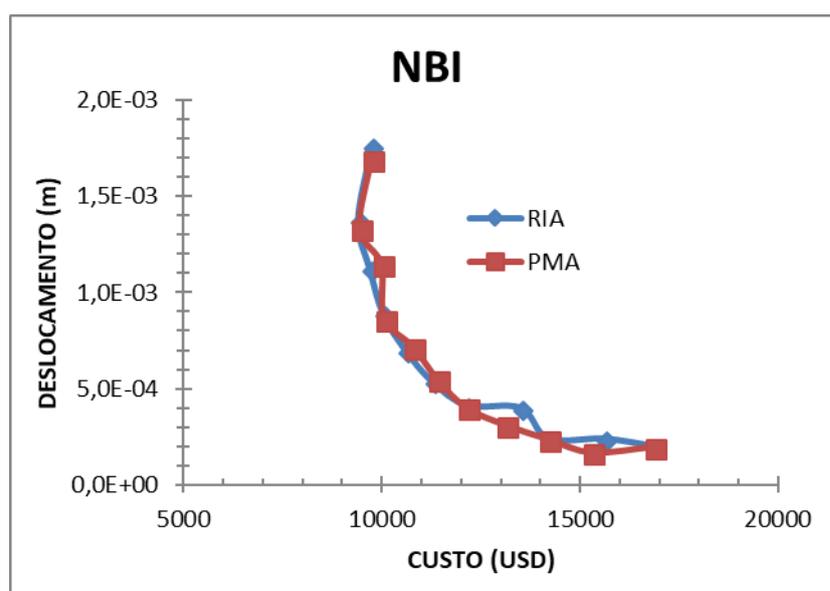
A Tabela 18 mostra que em todos casos o tempo de cada iteração na otimização via PMA é menor do que via RIA, porém a convergência se dá mais lentamente, fazendo com que o número de iterações totais seja maior, o que fez que em alguns casos o tempo total seja maior.

Tabela 18 – Dados computacionais com abordagens RIA e PMA no pórtico com três pavimentos

		RIA	PMA
NBI	Iterações	1023	1238
	Avaliação de funções	18557	24762
	Tempo (horas)	41.13	43.07
	Tempo/iteração (min)	2.41	2,09
MIN-MAX	Iterações	458	730
	Avaliação de funções	8501	16175
	Tempo (horas)	16.83	16.50
	Tempo/iteração (min)	2.20	1,36
WS	Iterações	451	1203
	Avaliação de funções	7972	25701
	Tempo (horas)	30.52	70.18
	Tempo/iteração (min)	4.06	3.50

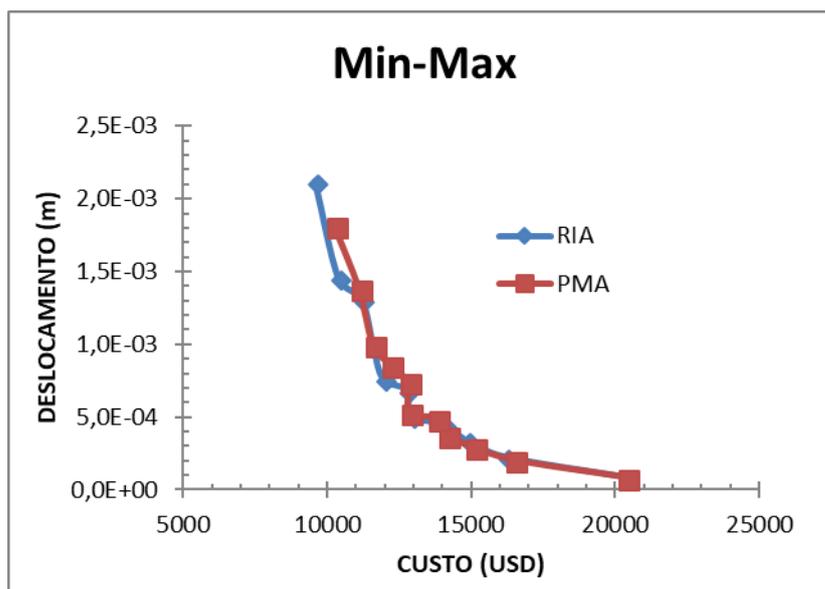
Fonte: A Autora (2020).

Figura 25 – Comparação com o método NBI no pórtico 2



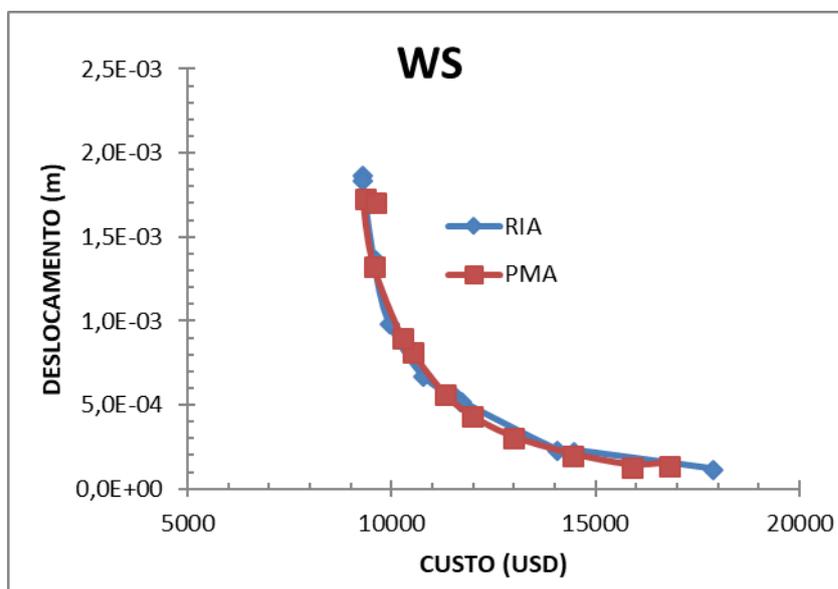
Fonte: A Autora (2020).

Figura 26 – Comparação com o método Min-Max no pórtico 2



Fonte: A Autora (2020).

Figura 27 – Comparação com o método WS no pórtico 2



Fonte: A Autora (2020).

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um código na linguagem Python para resolução de problemas de otimização em estruturas aporticadas de concreto armado com dois objetivos estatísticos e com restrições baseadas em confiabilidade. E para isso foram feitas as atividades listadas abaixo.

Foi estudada todas as análises envolvidas nesse processo, sendo a primeira a análise estrutural, onde foi escolhido a aplicação do método dos elementos finitos. Foi definido que, para as estruturas reticuladas escolhidas, seria possível a utilização da análise linear que foi realizada através do código desenvolvido por Alves (2018), cujo código mostrou ser eficiente e de baixo custo computacional, além de que já havia sido exaustivamente testado garantindo obter resultados consistentes.

Em seguida, for apresentada a análise de confiabilidade com um breve resumo de suas metodologias. O pacote coletado para fazer essa análise foi o PyRe que inicialmente fazia a análise apenas pela abordagem via RIA, utilizando o método FORM para o cálculo do índice de confiabilidade. Então, no código original foi implementada neste trabalho a opção para que fizesse também a abordagem via PMA, dando as duas opções para o usuário.

O último processo envolvido e dissertado foi o processo de otimização, em que neste trabalho trata de um problema robusto que recai num problema de otimização multiobjetivo, cujas soluções são chamadas de pontos de Pareto. Para encontrar tais pontos foram escolhidos três métodos: o método da soma ponderada, o método min-max e o método NBI. Para cada otimização escalar foi utilizado o método SQP com a função *minimize* presente no pacote Scipy e foi implementado neste trabalho um código na linguagem Python que encontrasse os pontos de Pareto para problemas de otimização com dois objetivos pelos métodos mencionados.

Por fim, foi acoplado os códigos para resolver dois problemas com estruturas aporticadas. Primeiro foi estudado no pórtico mais simples com apenas um pavimento para testes e validação dos códigos novos implementados (da abordagem via PMA e da otimização multiobjetivo) que mostrou obter resultados coerentes. Em seguida foi estudado o segundo pórtico que possui três pavimentos para todas as metodologias sugeridas.

## 6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos para obtenção da curva de Pareto, atenderam seus objetivos, encontrando curvas dentro do nível de confiabilidade aceitável pela JCSS (1997), sendo possível a escolha do projeto ótimo global, de acordo com a necessidade do projetista.

No pórtico com um pavimento, dos métodos utilizados para a otimização multiobjetivo, o NBI obteve melhores resultados por encontrar curvas suaves e pontos de Pareto mais uniformemente distribuídos. Apesar de possuir maior número de iterações e maior tempo computacional em relação aos métodos da soma ponderada e min-max, o NBI pode ser ajustado para melhoria do custo computacional, como mudando a abordagem da análise de confiabilidade, visto que a uniformidade dos pontos de Pareto é o fator de maior importância.

Já no pórtico com três pavimentos, tanto o NBI quanto o método WS obtiveram curvas suaves. O método NBI novamente teve um maior custo computacional, seguido do WS e por fim do método min-max que obteve um menor custo computacional, mas não alcançou uma boa localização dos pontos de Pareto comparado aos demais métodos.

Entre as abordagens da confiabilidade, em relação à localização dos pontos de Pareto, a RIA e PMA tiveram resultados bastante próximos, diferindo apenas em alguns pontos no caso do pórtico com três pavimentos. Porém, o tempo computacional difere em cada método multiobjetivo, assim como difere para cada exemplo de pórtico plano.

Na literatura encontra-se que a melhor combinação de metodologias para a aplicação em problemas de otimização com dois objetivos seria o método NBI com a análise de confiabilidade via PMA, o que foi obtido no exemplo com o pórtico de um pavimento. Porém, no pórtico com três pavimentos, pelos resultados encontrados neste trabalho, pode-se definir que a melhor combinação de metodologias seria o método WS com a análise de confiabilidade via RIA.

## 6.2 TRABALHOS FUTUROS

O código utilizado mostrou ser bastante eficiente, obtendo resultados coerentes, além de ser composto por bibliotecas gratuitas e com licenças públicas, e

de fácil utilização, permitindo implementação para outros métodos e objetivos, de acordo com o interesse de outros autores e futuras pesquisas, podendo citar:

- a) Reanalisar exemplo do pórtico com três pavimentos com estudo mais aprofundado;
- b) Implementar para outros tipos de estruturas, como por exemplo, pórticos 3D ou com outros materiais como o metal;
- c) Implementar para consideração da não linearidade tanto física como geométrica, podendo ser com métodos iterativos ou não;
- d) Executar problemas de otimização com mais de dois objetivos;
- e) Considerar modelos aproximados tanto na análise de confiabilidade como na análise estrutural para redução do custo computacional;
- f) Executar a otimização baseada em confiabilidade com o algoritmo genético.

## REFERÊNCIAS

- AFONSO, S. M. B.; LYRA, P. R. M.; ALBUQUERQUE, T. M.; MOTTA, R. S. Structural Analysis and Optimization in the Framework of Reduced-Basis Method. **Structural and multidisciplinary optimization**, Heidelberg: Springer Berlin, 2009.
- ALMEIDA, A. F. D. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado**. 2008. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- ALVES, B. S. **Otimização baseada em confiabilidade de pórticos de concreto armado**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.
- ANDRADE, N. F. d. A. **Análise e otimização estocásticas de concepções de estruturas de concreto armado utilizando modelos de seleção**. 2013. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.
- ANTONIOU, A.; LU, W.-S. **The Optimization problem**. Springer, 2007.
- AOUES, Y.; CHATEAUNEUF, A. Reliability-based optimization of structural systems by adaptive target safety-application to rc frames. **Structural Safety**, Elsevier, 2008.
- ARAÚJO, J. M. d. **Curso de concreto armado**. Editora Dunas, Rio Grande, 2003.
- ARORA, J. **Introduction to optimum design**. Elsevier, 2004.
- ARORA J. S.; MESSAC, A.; MULLUR, A. A. Optimization of structural and mechanical systems. *In*: ARORA J. S. **Multiobjective optimization: concepts and methods**. USSA: University of Iowa, Iowa, 2007. Chap. 4.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.
- BATES, S. J. **Development of robust simulation, design and optimization techniques for engineering applications**. 2003. PhD Thesis, University of Wales Swansea, Cardiff, 2003.
- COÊLHO, G. A. G.; Afonso, S. M. B.; Horowitz, B.; Oliveira, L. C. de. Dimensionamento ótimo de pórticos planos em concreto armado de acordo com a NBR 6118 (2014). **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia – RIPE**, 2017.
- DAS, I.; DENNIS, J. E. Normal Boundary Intersection: A new method for generating Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. **SIAM J. Optimization**, v. 8, n. 3, p. 631-657, 1996.
- DEB, K. et al. Reliability-based optimization using evolutionary algorithms, **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 13, n. 5, p. 1054-1074, 2009.
- ENEVOLDSEN, L; SØRENSEN, J. D. Reliability-based optimization in structural engineering. **Structural safety**, Elsevier, n. 15, p. 169-196, 1994.

GHALI, A.; NEVILLE, A.; CHEVING, Y. A unified classical and matrix approach. **Ankara University Printing House**, 1986.

HACKL, J. **PyRe**. GitHub, 2018. Disponível em: <https://github.com/hackl/pyre>. Acesso em: 15 mar. 2018.

HAMIDIAN, D.; SEYEDPOOR, S. Structural optimization using the simultaneous perturbation stochastic approximation algorithm. **Journal of Algorithms & Computational Technology**, London, v. 3, n. 3, p. 407-424, 2009.

HO-HUU, V.; NGUYEN-THOI, T.; LE-ANH, L.; NGUYEN-TRANG, T. An effective reliability-based improved constrained differential evolution for reliability-based design optimization of truss structures. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, 2016.

HWANG, C. L.; PAIDY, S. R.; YOON, K.; MASUD, A. S. M. Mathematical programming with multiple objectives: a tutorial. **Comput. And Ops.**, v. 7, p. 5-31, 1980.

JCSS. The JCSS probabilistic model code. **Structural Safety**, Elsevier Science, 1997.

LIU, P.-L.; KIUREGHIAN, A. D. Optimization algorithms for structural reliability. **Structural safety**, Elsevier, 1991.

LOGAN, D. L. **A first course in the finite element method**. Cengage Learning, 2011.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. John Wiley & Sons, 2017.

MOGAMI, K.; NISHIWAKI, S.; IZUI, K.; YOSHIMURA, M.; KOGISO, N. Reliability-based structural optimization of frame structures for multiple failure criteria using topology optimization techniques. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, n. 32, p. 299 – 311, 2006.

MOTTA, R. S. **Otimização sob incertezas de estruturas com comportamento não linear utilizando modelos de ordem reduzida**. 2015. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

MOTTA, R. S. **Otimização robusta de estruturas utilizando o método da base reduzida**. 2009. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

MOTTA, R. S.; AFONSO, S. M. B.; LYRA, P. R. M. A modified NBI and NC method for the solution of N-multiobjective optimization problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization (Print)**, v.1, p. 1-21, 2012.

MOTTA, R. S.; Afonso, S. M. B.; LYRA, P. R. M. Development of a computational efficient tool for robust structural optimization. **Engineering Computations**, v.32, p.258-288, 2015.

MOTTA, R. S.; AFONSO, S. M. B. An efficient procedure for structural reliability-based robust design optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization (Print)**, v. online, p. 1-20, 2016.

NOGUEIRA, C. G. **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado**. 2005. Dissertação (Mestrado), Universidade de São Paulo, São Paulo. 2005.

PAIVA, R. M.; CRAWFORD, C.; SULEMAN, A. Robust and reliability-based design optimization framework for wing design. **AIAA Journal - Special Section on Multidisciplinary Design Optimization**. vol. 52, pp. 711, 2014.

SAMPAIO, P. R. **Teoria, métodos e aplicações de otimização mutiobjetivo**. 2011. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

SHAYANFAR, M.; ABBASNIA, R.; KHODAM, A. Development of a ga-based method for reliability-based optimization of structures with discrete and continuous design variables using opensees and tcl. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, 2014.

VALDEBENITO, M. A.; SCHUELLER, G. I. A survey on approaches for reliability-based optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 42, no. 5, pp. 645, 2010.

YANG, D.; LI, G.; CHENG, G. Convergence analysis of first order reliability method using chaos theory. **Computers & Structures**, Vol. 84, No. 8, pp. 563- 571, 2006.

YOUN, B. D.; CHOI, K. K. An investigation of nonlinearity of reliability-based design optimization approaches. **Journal of Mechanical Design**, 126(3): 403-411, 2004.

YOUN, B. D.; CHOI, K. K.; PARK, Y. H. Hybrid analysis method for reliability-based design optimization. **Journal of Mechanical Design**, 125, p. 221-232, 2003.

YOUN, B. D.; CHOI, K. K.; YANG, R.-J.; GU, L. Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impact. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 26 p. 272-283, 2004.