UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA

ANDREZA SANTANA DA SILVA

# REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E FUNÇÃO QUADRÁTICA: um olhar sobre o ensino e a abordagem no livro didático

Recife
2020

ANDREZA SANTANA DA SILVA

# REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E FUNÇÃO QUADRÁTICA: um olhar sobre o ensino e a abordagem no livro didático

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

**Área de concentração:** Ensino de Ciências e Matemática

**Orientadora:** Profª. Drª. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Recife

2020

Catalogação na fonte
Bibliotecário Danilo Leão, CRB-4/2213

S586r Silva, Andreza Santana da.

Registros de representação semiótica e função quadrática: um olhar sobre o ensino e a abordagem no livro didático. / Andreza Santana da Silva. – Recife, 2020.

160 f.

Orientadora: Rosinalda Aurora de Melo Teles.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2020.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Álgebra. 3. Didática da matemática. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo. (Orientadora). II. Título.

510.7 (23. ed.) UFPE (CE2020-016)

ANDREZA SANTANA DA SILVA

**REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E FUNÇÃO QUADRÁTICA: um olhar sobre o ensino e a abordagem no livro didático**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de mestre em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 19/02/2020.

**BANCA EXAMINADORA**

Profª Drª Rosinalda Aurora de Melo Teles (Orientadora e presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª Drª Marilene Rosa dos Santos (Examinadora interna)
Universidade de Pernambuco

Profª Drª Fernanda Andréa Fernandes Silva (Examinadora externa)
Instituto Federal da Paraíba

## AGRADECIMENTOS

A Deus, autor e princípio de toda a vida, que me concedeu conquistar mais essa etapa na vida, dando-me força e fé.

À minha família, meus pais Valdeci e Sandra e meus irmãos Maria Andriely e Anderson, por cada incentivo e apoio nas decisões, pelo carinho e cuidado de sempre, por estarem comigo e por toda ajuda necessária.

À minha orientadora, professora Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles, excelente pesquisadora, que tornou-se para mim fonte de inspiração e admiração como profissional. Seus ensinamentos e considerações permitiram-me percorrer e perceber caminhos novos para a construção desse trabalho e na Educação Matemática.

Às professoras, Dra. Marilene Rosa dos Santos e Dra. Fernanda Andréa Fernandes Silva pelas importantes contribuições nas bancas de qualificação e defesa dessa dissertação.

Ao grupo de pesquisa Pró-Grandezas pelos encontros de estudos regados de muitos aprendizados, possibilitando-me aprendizados como pesquisadora.

Ao Programa em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC); aos professores que integram a linha de didática da matemática Profa. Dra. Paula Bellemain, Profa. Dra. Iranete Lima, Profa. Dra. Marilene Rosa, Prof. Dr. Marcelo Câmara, Prof. Dr. Paulo Figueiredo, Prof. Dr. Jadilson Almeida pelas contribuições nas aulas de seminários; aos funcionários nas pessoas de Mário, Clara e Fábio.

Aos colegas, mestrandos e doutorandos, que ao longo desses dois anos puderam contribuir para o meu crescimento como pesquisadora e profissional da educação matemática, em especial aos meus amigos que compõem o quarteto de estudos e parcerias nesse mestrado – Franklin Pachêco, Elizabeth Rosendo e Gabrielly Machado – também aos demais colegas – pelos aprendizados que me proporcionaram construir. A Almir Moura pelas valiosas contribuições nas aulas de seminários, no primeiro ano do curso.

Ao Prof. Dr. Anderson Douglas pelos ensinamentos e acolhimento durante todo o período de Estágio Docência.

À escola e ao professor participante da pesquisa que se mostraram disponíveis e aceitaram colaborar para o desenvolvimento desta.

Aos amigos, de maneira geral, que se fizeram presentes e torceram por mim em mais esta etapa. Um obrigado especial!

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio e concessão da bolsa de estudo durante todo o período de realização deste Mestrado.

E a você, leitor, que busca conhecimento e aperfeiçoamento para suas aulas.

## RESUMO

Este estudo tem como objetivo analisar sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), como o ensino de função quadrática é abordado num livro didático e pelo professor de matemática da 1ª Série do Ensino Médio, bem como a relação entre a prática do professor e a abordagem do livro didático. O suporte teórico foi alicerçado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2004, 2009, 2011, 2012). Os procedimentos metodológicos consistiram na análise de um livro didático, aulas de um professor de matemática e a relação entre ambos sobre o objeto matemático, função quadrática, baseado nos elementos da TRRS: representações, transformações (tratamento e conversão), procedimento de construção do gráfico, fenômeno de congruência semântica e equivalência referencial e a heterogeneidade nos dois sentidos. Os resultados apontam que existe variedade nos registros tanto no livro didático como nas aulas. Foram abordados os registros algébrico, gráfico, figural, tabular e em linguagem natural. Existe maior número de conversões do que tratamentos tanto no livro como nas aulas. A conversão que se destaca no livro são registro em linguagem natural para algébrico e registro algébrico para registro gráfico, já nas aulas, o destaque se deu nos sentidos do registro gráfico para o algébrico usando registro em linguagem natural, e o registro em linguagem natural para o algébrico. O procedimento de construção do gráfico adotado por ambos foi o ponto a ponto. O registro algébrico utilizado majoritariamente foi a forma desenvolvida. Quanto ao fenômeno de congruência semântica, os resultados apontaram que nos itens analisados no livro didático, existe mais em médio e alto grau de não congruência, enquanto nas aulas, se destacam itens com baixo e médio grau de não congruência. A heterogeneidade nos sentidos acontece apenas para os registros algébrico e gráfico. Na relação entre a abordagem do livro didático e as aulas do professor, percebe-se bastante semelhança no desenho de estudo da função quadrática, com algumas modificações realizadas pelo professor, isso se deve pelo fato do professor basear-se no livro didático para desenvolver suas aulas.



**Palavras-chave**: Função quadrática. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Prática docente. Livro Didático.

## ABSTRACT

This study aims to analyze from the perspective of the Registers of Semiotic Representation Theory (TRRS), how teaching quadratic function is approached in a textbook and by the 1st grade high school math teacher, as well as the relationship between teacher practice and the textbook approach. Theoretical support was based on Duval's Registers of Semiotic Representation Theory (2003, 2004, 2009, 2011, 2012). The methodological procedures consisted of analyzing a textbook, lessons from a math teacher and the relationship between them on the mathematical object, quadratic function, based on the elements of TRRS: representations, transformations (treatment and conversion), graph construction procedure, semantic congruence phenomenon and referential equivalence and heterogeneity in both directions. The results show that there is variety in the records both in the textbook and in the classes. Algebraic, graphic, figural, tabular and natural language registers were approached. There are more conversions than treatments both in the book and in class. The conversions that stand out in the book are natural language register for algebraic and algebraic register for graphic register, in classes, the emphasis was on the graphic register for algebraic using natural language register, and the natural language register for algebraic. The procedure for constructing the graph adopted by both was point-to-point. The algebraic register used mostly was the developed form. As for the semantic congruence phenomenon, the results showed that in the items analyzed in the textbook, there is more in medium and high degree of non-congruence, while in classes, items with low and medium degree of non-congruence stand out. The heterogeneity in the senses happens only for the algebraic and graphic registers. In the relationship between the textbook approach and the teacher's classes, there is a lot of similarity in the study design of the quadratic function, with some modifications made by the teacher, this is due to the fact that the teacher relies on the textbook to develop his classes.



**Key-words:** Quadratic function. Registers of Semiotic Representation Theory. Teaching practice. Textbook.

# LISTA DE FIGURAS

**LISTA DE QUADROS**

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE GRÁFICOS

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A Matemática como ciência traz em si um conhecimento formal e abstrato, notadamente seu ensino e aprendizagem têm inquietado professores, estudantes e pesquisadores. Dentre as inquietações, destacam-se aquelas relacionadas às dificuldades na apreensão de determinados objetos de conhecimento da área da matemática, tais como as funções.

De acordo com Sanchez (2004), as causas dessas dificuldades na aprendizagem podem ser variadas. Segundo o autor, se destacam a própria complexidade da matemática, por seu alto nível de abstração e generalização, a hierarquização de seus conceitos e sua linguagem com terminologias próprias. Além disso, têm-se outras causas, como um ensino inadequado ou insuficiente seja em virtude de sua organização ou da metodologia pouco motivacional, ou por um discurso docente mal articulado.

Corroborando com essa ideia, Peixoto (2011, p.38) em seu estudo coloca que "uma das dificuldades principais dos alunos está justamente na linguagem matemática, na qual é embasado o ensino tradicional desta disciplina". Enquanto conteúdo matemático, as funções são também permeadas por essa linguagem, Zuffi (2004, p. 2) aponta que são "várias possibilidades de notação simbólica existentes para este conceito", assim como variadas formas de representação da ideia de função "como conjuntos de pares ordenados, como tabelas, gráficos cartesianos, expressões algébricas, sequências, diagramas com flechas, ou outros".

Se a variabilidade dessas representações simbólicas não for trabalhada com os estudantes de modo consistente, especialmente no intuito de auxiliar a compreensão da linguagem matemática abstrata, possivelmente haverão lacunas na aprendizagem do conceito de função, pois a linguagem é um fator extremamente relevante nas dificuldades existentes para a assimilação desse conceito, por não ser tão simples, por exigir uma compreensão em diversos aspectos e pela função possuir uma gama de representações que expressam cada uma, conteúdos, características ou faces diferentes do mesmo objeto. Ainda, deve-se pensar nas possibilidades de construção para o conceito de função antes mesmo de apresentá-lo formalmente, e como o professor articula sua linguagem oral para mediar a propagação deste conceito.

Como supracitado, a linguagem matemática é composta por simbologias que cumprem a função de se colocar no lugar do objeto de conhecimento desta. Duval (2009), em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), nomeia essas simbologias de representações semióticas enfatizando que sua função é a mesma de um signo, mas que não se restringe a apenas isso, já que a especificidade das representações semióticas

> [...] consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidos em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza (DUVAL, 2009, p.12).

Em outras palavras, considera-se que a existência de representações semióticas pressupõem registros diferentes, isto é, sistemas semióticos diferentes, e a atividade de conversão, ou seja, de mudar se um sistema semiótico a outro.

Neste cenário, o conceito de função chama atenção, pois de acordo com Salin (2014, p.40) é "considerado um dos mais importantes e essencial às áreas relacionadas das ciências", já que as usa como forma de conjecturar hipóteses e validar seus modelos e teorias (PINHEIRO, 1996, *apud* PEIXOTO, 2011). Consideramos ainda que esse conteúdo tem forte influência por estar presente em diversas situações do cotidiano, além de estar ligado também a outros conteúdos da própria matemática.

Nessa perspectiva, o PCN+EM complementa dizendo que:

> O **estudo das funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2002, p.121).

Dentre as variadas funções (afim, quadrática, exponencial e outras) existentes na matemática, nesta pesquisa optamos por estudar o ensino da função quadrática tanto pelos aspectos já citados, como por ser uma das funções mais elementares, precedente apenas da função afim. Embora essas funções disponham de variados aspectos, levando em consideração a TRRS quando faz-se a conversão do registro gráfico para o algébrico, elas possuem organizações internas diferentes – o que já é pressuposto por Duval (2011), mas se complementam na construção e apreensão do conceito de função. No entanto, a função quadrática dispõe de três formas de escritas diferentes no registro algébrico: a forma canônica, desenvolvida e fatorada. O que destaca mais elementos a serem evidenciados com o olhar da TRRS.

Diante disso e da importância desse objeto matemático para a própria matemática e até para áreas afins, destacamos ele como nosso objeto de estudo haja vista que pesquisas como as de Maia (2007), Nascimento (2009), Santos (2012) e Salin (2014) mostraram dificuldades na aprendizagem das funções, o que podem acarretar em outras posteriores, seja nesse objeto matemático ou em outros dentro e fora da matemática.

Tomando como base que as dificuldades evidenciadas pelos alunos são em partes um reflexo do ensino, Brandt e Moretti (2014, p. 28) olhando sob o foco da Teoria dos Registros de Representação Semiótica revelam que uma prática docente em que falta a "coordenação de diferentes registros de representações semióticos pertencentes a sistemas semióticos diferentes e o fenômeno da congruência semântica são responsáveis por grande parte das dificuldades dos alunos".

Por isso, o presente estudo propõe responder aos seguintes questionamentos: como um professor que ensina matemática no primeiro ano do Ensino Médio no município de Surubim/PE realiza o ensino de função quadrática? O livro didático utilizado por ele e por seus alunos propõem variados registros de representação no ensino de função quadrática, assim como as transformações de tratamento e conversão? Como acontece a relação, sob a ótica dos elementos da TRRS, entre o LD analisado pelo professor e a sua abordagem em sala?

Portanto, objetiva-se analisar sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, como o ensino de função quadrática é abordado por um professor de matemática do 1º Ano do Ensino Médio e a sua relação com a abordagem no livro didático.

Escolheu-se a TRRS de Duval (2003, 2004, 2009, 2011 e 2012), haja vista que o pressuposto primordial é que a aprendizagem só pode acontecer se houver a coordenação entre os variados registros de representação para um mesmo objeto matemático, já que cada representação expõe parte do conteúdo desse objeto.

Por isso, salienta-se a importância das diferentes representações de um objeto para potencializar a aprendizagem, já que "o ensino da matemática lembra brutalmente aos professores que a distinção entre os objetos matemáticos e suas múltiplas representações constitui uma das principais dificuldades de compreensão na aprendizagem" (DUVAL, 2011, p. 34).

Para tanto, o texto segue a seguinte estrutura: Essa seção contempla o capítulo 1 que se dedica a introduzir o estudo. O capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica e a construção da problemática, ao qual são explicitados elementos teóricos relacionados a linguagem matemática e a linguagem natural, já que o ato de ensinar matemática requer a união de ambas, assim como alguns princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que norteiam todo esse estudo.

Ainda nesse capítulo são apresentados estudos que relacionam a TRRS ao ensino ou aprendizagem de função quadrática, assim como fundamentos históricos para o conceito de função. Além disso, traz-se uma descrição de como os documentos de orientações curriculares abordam o ensino de função quadrática e como a interligam a TRRS.

Os procedimentos metodológicos estão descritos no capítulo 3, aos quais são apresentados o campo onde será realizada a pesquisa, a caracterização dos participantes e os critérios de análise adotados para o livro didático e para as aulas referentes à função quadrática.

O capítulo 4 descreve as análises e discussão dos resultados obtidos no estudo. Por fim, é exposto as considerações parciais em que partindo dos objetivos propostos são delineados os principais resultados.

# 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA

Este capítulo traz uma discussão teórica acerca da linguagem matemática e concomitantemente a linguagem natural como propulsoras para fazer matemática na sala de aula, ou seja, o papel que ambas possuem no ato de ensinar e aprender os conhecimentos matemáticos.

Além disso, são apresentados alguns elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que fundamentam esse estudo, tais como as atividades cognitivas de tratamento e conversão, o fenômeno da variação de congruência semântica e da heterogeneidade nos dois sentidos. Ainda, faz-se a discussão de função quadrática com a TRRS, assim como, levanta-se aspectos históricos relacionados à evolução desse conceito na Matemática e como documentos de orientações curriculares brasileiros e de pernambucano evidenciam o seu ensino.

## 2.1 LINGUAGEM NATURAL E LINGUAGEM MATEMÁTICA

Quando se pensa em Matemática tem-se em mente números, operações, equações, funções e construções geométricas, por exemplo. E cada um desses compreendem símbolos próprios de funcionamento, tais como: 1, +, =, Δ, ≥, $f(x)$, que representam respectivamente, numeral indo arábico, sinal que indica adição de parcelas; igualdade, delta, maior ou igual que, símbolo que indica uma relação em função de $x$ (que também é uma das representações de função). Essas simbologias tornam conhecidos os objetos matemáticos, pois a matemática se apoia numa linguagem que é “[...] uma linguagem própria, gerada e aperfeiçoada através dos séculos, das culturas e dos progressos técnicos: a chamada linguagem simbólico-matemática” (FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 2000, *apud* ALCALÁ, 2002, p. 19).

Essa linguagem matemática foi construída em meio a necessidades, sendo uma delas a economia de pensamento, de palavras e textos, pois antes de existirem os símbolos algébricos, por exemplo, os matemáticos da época usavam muitas palavras de sua linguagem natural para escrever uma equação (GARBI, 2010). Porém essa equação só seria entendida por pessoas que utilizassem a mesma língua natural de quem a escreveu.

Até se chegar aos símbolos matemáticos que universalmente conhecemos hoje, muitas foram as abreviações utilizadas pelos matemáticos ao longo do tempo. O avanço da linguagem simbólica na matemática foi um dos propulsores do desenvolvimento desta ciência. Esta linguagem matemática formal possui único significado em qualquer nação ou sociedade do mundo, portanto ao estudar os conhecimentos dessa ciência o aprendiz precisa entender, compreender e se apropriar dela.

No entanto, a linguagem da qual a matemática dispõe não possui enunciador (língua falada), ela é puramente escrita, isto é, um sistema de simbologias. Diferente da língua natural ao qual aprendemos inicialmente na forma oral e através desta nos apoiamos para aprender a escrita. Portanto, a linguagem matemática se apoia na língua natural para ser expressa oralmente e isso se altera em cada país desse mundo, já que a linguagem natural se baseia no idioma estabelecido naquela nação. Assim, a universalidade da linguagem matemática expressa em símbolos não funciona quando ela é mediada pela linguagem natural, sendo restrita apenas às suas representações.

Contudo, não se trata apenas de ler o que está escrito em linguagem matemática, refere-se muito mais aos sentidos e significados que esta tem, pois aprender matemática está relacionado "com o desenvolvimento da capacidade de interpretar, analisar, sintetizar, significar, conceber, transcender o imediatamente sensível, extrapolar, projetar" (MACHADO, 1991, p. 96).

Não é simples entender a linguagem matemática, especialmente por ser estritamente simbólica, e muitas vezes o ensino da matemática é predominantemente técnico e dotado de regras ao invés de comportar significados aos elementos desenvolvidos (MACHADO, 1991). Além disso, o uso da linguagem natural como apoio para ajudar na compreensão da matemática possui uma ambiguidade, já que palavras, por exemplo, como ângulo, área, podem ser usadas também em outros contextos que não sejam matemáticos, tais como, "veja isso por outro ângulo", "área de conhecimento", respectivamente.

Desses exemplos, não concebe-se ângulo e área como sendo conceitos matemáticos, assim, dependendo do contexto em que as palavras em linguagem natural sejam empregadas, elas podem gerar uma confusão ou até mesmo uma incompreensão.

Com isso, existe uma dualidade no ensino da matemática, pois é imprescindível que os alunos compreendam as simbologias presentes na linguagem matemática, para que possam aprender efetivamente essa disciplina, mas do ponto de vista didático a linguagem natural é extremamente necessária.

Por isso, D'Amore (2005) expressa que é comum os professores misturarem a linguagem natural e a linguagem matemática para criar outra espécie de língua, ao qual o autor chama de "matematiquês", e a define como sendo um dialeto próprio da sala de aula.

Duval (2011) corrobora com esse pensamento ao enfatizar que é através da linguagem natural que percebemos as interações em sala de aula, ou seja, como os alunos e professores expressam seus pensamentos. Para ele, a linguagem natural pode ser concebida com duas funções: a de comunicação e a cognitiva, a primeira considera a língua como um código e a segunda como um registro.

Duval (2011, p. 72) concebe que códigos "são sistemas que permitem transmitir uma informação discretizada ou que comutam a codificação de uma informação em função do modo físico de transmissão", assim, o código tem função apenas de comunicação, de informar sobre algo ou ainda de mudar seu aspecto físico, como por exemplo, a linguagem oral para a escrita.

Tomando a língua como um código é perceptível a existência do processo de codificação e decodificação, e quem assim a interpreta tem como visão, por exemplo, que uma pessoa quando fala codifica por palavras uma ideia da mente, e o ouvinte decodifica para poder compreender; ou ainda, que um problema matemático escrito em língua materna para ser compreendido é necessário decodificar as informações codificadas no mesmo. Seria a transmissão de informação, onde o ouvinte ou o leitor só teria acesso se decodificasse a informação codificada.

Mas utilizar uma língua seria simplesmente comunicar algo ao qual outra pessoa entenderia tal como foi falado ou escrito? Quando se faz uso de uma língua, seja ela qual for, têm-se dois atos subentendidos: "dizer qualquer coisa, ou escrever, e compreender o que algum outro está prestes a dizer ou o que está escrito" (DUVAL, 2011, p.75) e isso não é simplesmente uma codificação e decodificação de informações.

Ainda complementa em dizer que "exprimir-se não é codificar um pensamento já explícito, mas objetivá-lo por si mesmo, tomar consciência, mesmo quando o endereçamos a outro" (DUVAL, 2011, p. 75), ou seja, ao exprimirmos o pensamento não estamos apenas repetindo o que já foi falado ou escrito, estamos manifestando em palavras o que foi reelaborado, construído pelo nosso pensamento por meio da interiorização das representações semióticas.

Tomemos como exemplo o ensinar matemática, embora esta possua linguagem universal, ela só poderá ser compreendida se o docente articulá-la com a linguagem natural. E cada docente terá a sua maneira, pensamentos expressos em palavras, para explicar conceitos, técnicas, simbologias e regras matemáticas.

Por outro lado, existe o ato de compreender, que para Duval (2011, p.75) "não é decodificar uma sequência de palavras ou de frases, mas discriminar as unidades de sentido em função de diferentes níveis de organização dos discursos e eventualmente reformulá-los".

No ato de aprender, o aluno vai compreender o que foi expresso pelo professor a sua maneira e ocasionalmente pode ser diferente da forma como o seu colega aprendeu e até mesmo diferente do que o professor ensinou, e cada um pode expressar de forma diferente o objeto aprendido.

Por esse motivo a língua não tem simplesmente uma atuação de comunicação, mas cumpre também seu papel nas funções cognitivas, em outras palavras, “a língua não é um código, mas um registro de representação semiótica” (DUVAL, 2011, p. 76).

Dessa forma, quando o professor ensina matemática ele faz uso da língua natural concomitantemente da linguagem matemática para torná-la compreensível aos seus alunos, ambas as linguagens são registros de representação semiótica, que precisam ser claramente utilizadas para o processo de ensinar e aprender.

Nesse sentido, passamos a discutir a seguir elementos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que contemplam, entre outras representações, as linguagem simbólica (formal) e a natural.

## 2.2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Como supracitado, o conhecimento matemático é abstrato, sendo assim, não podemos ver ou pegar como é o que acontece em outras áreas do conhecimento, a exemplo da biologia, da química ou da física. Portanto, “cada conceito matemático necessita de representações, uma vez que não existem “objetos” para serem exibidos em seu lugar ou para evocá-lo; [...]” (D’AMORE, 2005, p. 48).

Na matemática, compreender essas representações não é algo simples. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval tem o propósito de compreender o funcionamento cognitivo tanto no ensino como na aprendizagem da Matemática, isto é, entender as dificuldades existentes no domínio dessa ciência e encontrar meios de superá-las.

Para se falar em registro de representação semiótica, é necessário compreender o que são registros e o que são representações semióticas. Os registros são, para Duval (2011, p.104) “ferramentas que permitem analisar todas as produções matemáticas, e em primeiro lugar aquelas construídas com objetivo de ensino ou de aprendizagem”, é importante compreender que só são registros as representações semióticas que obedecem às três funções cognitivas: comunicação, objetivação e tratamento, que correspondem, respectivamente, a “transmissão de uma mensagem ou de uma informação entre indivíduos, ela requer a utilização de um código comum”, o segundo “é a função que permite a um sujeito de tomar consciência daquilo que até então não tinha feito. É o trabalho de exteriorização” e o último tem “a função de transformar uma representação em outra, utilizando unicamente as possibilidades de funcionamento do sistema de representação mobilizado” (FLORES, MORETTI, 2005, p.3).

Já as representações semióticas, têm a função de se colocar no lugar de algo, esse algo, na matemática, seria o objeto em estudo. Para deixar mais claro, temos um exemplo, o Código Morse, ele tem apenas a função de comunicação por mera codificação e decodificação. Por não ter a função de objetivação e tratamento, este não se trata de um registro, embora seja uma representação semiótica.

Vale salientar que essas representações semióticas têm algumas especificidades que as distinguem dos signos, já que ambos têm a mesma função. Elas possuem uma organização interna que varia de um tipo de representação a outro, por exemplo, a organização interna da escrita algébrica de uma função não é a mesma de uma representação gráfica, e, além disso, pode-se transitar de um sistema semiótico (registro) a outro, a partir de um único objeto matemático em estudo, resultando em representações similares, o que é denominado de conversão por Duval (2009).

Tal é a importância das representações semióticas, que além de terem papel fundamental de comunicação, elas são extremamente necessárias para o desenvolvimento da atividade matemática. Portanto, "a possibilidade de efetuar os tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado" (DUVAL, 2009, p.15-16), esse sistema de representação semiótico é o conjunto de representações que "comunicam" os objetos, como por exemplo, a escrita algébrica, a representação gráfica e outros.

Duval (2011) expõe uma classificação para os registros de representação, distribuindo-os em registros discursivos ou não discursivos, multifuncionais ou monofuncionais, exposto no Quadro 1. Essa classificação auxilia fortemente para analisar a distância cognitiva entre duas representações de registros distintos.

**Quadro 1-** Classificação dos tipos de registros semióticos

| | Registros DISCURSIVOS<br>*Linearidade fundamentada na sucessão*<br>para a produção, apreensão e organização das expressões. | Registros NÃO DISCURSIVOS<br><br>*Apreensão simultânea de uma organização bidimensional* |
|---|---|---|
| Registros MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos são não algoritmizáveis | AS LÍNGUAS: **três operações hierarquicamente incluídas** (designação de objetos, enunciação e raciocínio)<br><br>Duas modalidades de produção: oral/escrita | ICÔNICA: produção a mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto.<br>CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA: **três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas). |

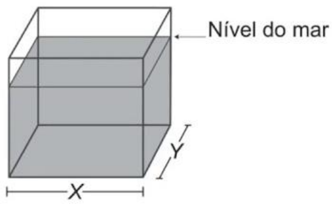
| | | |
|---|---|---|
| | Representações AUXILIARES TRANSITÓRIAS para as **operações livres ou externas** | |
| Registros<br>MONOFUNCIONAIS:<br>as transformações de expressões<br>são **algoritmizáveis** | AS ESCRITAS SIMBÓLICAS para as **operações de substituições ilimitadas** (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais)<br>Uma modalidade de produção: escrita | *Junção entre os pontos ou nós, e orientação marcada por flechas.*<br><br>GRÁFICOS CARTESIANOS: **operação de zoom, interpolação, mudança de eixos.**<br><br>ESQUEMAS |

**Fonte:** Duval (2011, p.118)

De acordo com o Quadro 1, os registros que são discursivos utilizam-se da língua natural, seja ela falada ou escrita, além das outras simbologias matemáticas, como a escrita algébrica, já os registros não discursivos são representados pelos gráficos e figuras geométricas, por exemplo. Com relação aos registros multifuncionais, os tratamentos realizados nele não são algoritmizáveis, já nos monofuncionais as transformações são algoritmizáveis, como no caso da escrita algébrica.

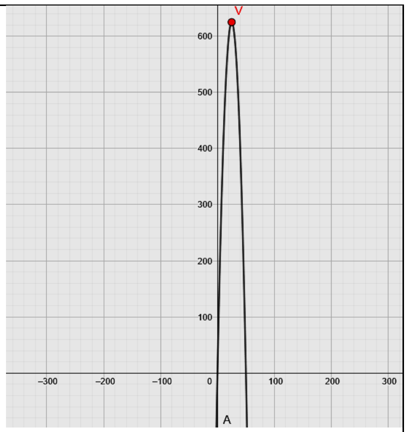
Correlacionando os tipos de registros semióticos descritos no Quadro 1 com a função quadrática que é o objeto matemático desse estudo, destaca-se o Quadro 2. Neste último consta cada um dos tipos de registros possíveis para a apreensão do conceito de função quadrática.

**Quadro 2 -** Classificação dos tipos de registros semióticos na Função Quadrática

<table>
<tr><td></td><td>Registros DISCURSIVOS</td><td>Registros NÃO DISCURSIVOS</td></tr>
<tr><td>Registros<br>MULTIFUNCIONAIS:</td><td>(ENEM – 2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais. Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>

| $x$ | $A(x)$ |
|---|---|
| **0** | **0** |
| **1** | **49** |
| **5** | **225** |
| **10** | **400** |
| **25** | **625** |

</td><td></td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| Registros MONOFUNCIONAIS: | $A(x) = -x^2 + 50x$ |  |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Diante disto, no que concerne a aprendizagem matemática, sob um olhar cognitivo, é necessário a diversificação de registros de representação – pois existem diferentes registros que se referem a um mesmo objeto matemático; a diferenciação entre representante e representado – reconhecer o que é a representação e o que é o objeto em estudo, de forma a não confundi-los; e coordenação desses diferentes registros – realizar a coordenação de ao menos dois registros de representação diferentes a um mesmo objeto matemático, fazendo a associação entre as unidades de sentido de cada representação (DUVAL, 2003).

Assim, essa aprendizagem está intimamente ligada a interação entre semiósis e noésis, onde semiósis é "a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e noésis os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência" (DUVAL, 2009, p. 15), salientando ainda que não existe noésis sem semiósis, pois não existe compreensão do conceito sem a coordenação de registros de representações semióticas que referem-se a esse conceito.

Com relação a *semiósis* Duval (2009) pontua três atividades cognitivas, que são: Formação de uma representação identificável, tratamento de uma representação e conversão de uma representação.

A formação de uma representação identificável é a atividade que permite representar determinado conhecimento por meio do signo e que precisa respeitar determinadas regras, que são próprias do sistema semiótico empregado (DUVAL, 2009). Para melhor compreensão, por exemplo, a notação $f(x)$, possui regras próprias quanto ao seu sistema semiótico que se encontra no registro algébrico, assim, ao encontrar essa representação, alguém que já tenha reconhecido, saberá que é uma das representações do objeto matemático, função.

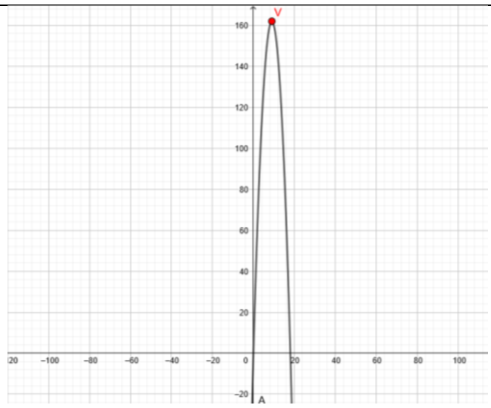
O tratamento de uma representação é uma transformação interna que acontece em um mesmo sistema de registro de representação. Pode-se observar o tratamento em uma representação algébrica de função quadrática no ato de simplificá-la ou até mesmo de resolvêla, como por exemplo: $\mathbf{y = (x+5)(x+3)}$ e $\mathbf{y = x^2 + 8x + 15}$ encontram-se no mesmo sistema que é o da escrita algébrica, e representam o mesmo objeto matemático, no qual foi realizado um tratamento no registro.

A conversão de uma representação é uma transformação que pode permanecer totalmente ou em parte as características do objeto representado, e que para Duval (2009, p. 58-59):

> Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. [...] é então uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida.

Sendo assim, a representação de chegada, encontra-se em registro diferente da representação de partida de um objeto. Dessa forma, podemos visualizar no Quadro 3, registros de representações diferentes, mas que dizem respeito ao mesmo objeto matemático em questão.

**Quadro 3 -** Exemplos de registros de representações semióticas para um mesmo objeto matemático

| | |
|---|---|
| **Registro em Linguagem Natural** | Para construir um cercado retangular para seu cachorro, Mário dispõe de 36 metros de tela. Na construção ele pretende utilizar toda a tela e aproveitar um muro que servirá como um dos comprimentos do cercado. Dê a função correspondente relacionando a área do cercado em função de x, onde x é a largura do cercado. (Adaptado do LD Vontade de Saber, SOUZA e PATARO, 2015). |
| **Registro Algébrico** | $A(x) = -2x^2 + 36x$ |
| **Registro Gráfico** |  |

Fonte: Elaborado pela autora

Nesse caso, observam-se três das representações que o conteúdo de função comporta, tem-se então pelo Quadro 3 uma conversão do registro em linguagem natural para o algébrico e sua representação no registro gráfico. A atividade de conversão não é fácil, e muitas vezes não existe preparação para tal. Nessa direção, Duval (2003, p.22) coloca que:

> Passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo

> objeto. Vemos, então, que duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo.

Corroborando com Duval, Rosa e Almeida (2009), salientam que para a transformação de conversão é preciso que se façam "articulações entre as variáveis cognitivas que podem ser específicas do funcionamento de cada um dos sistemas de registros" (p. 4), pois são elas que vão determinar as unidades de sentido que devem ser consideradas em cada registro.

Por isso existe a necessidade de dispor de ao menos dois registros de representações de um dado objeto, para que assim o discente não confunda o conteúdo da representação com o objeto representado. Além disso, Duval pontua que só a partir da coordenação de vários registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático é possível elaborar um conceito. Portanto essa é a chave que deve ser utilizada pelo docente para a compreensão dos objetos matemáticos.

Existem dois fenômenos inerentes a transformação por conversão: a congruência semântica (a) e a heterogeneidade de sentido (b), que estão descritos seguidamente.

**a) A congruência semântica**

Duval (2012, p. 99) afirma que uma atividade essencial para o pensamento matemático é "substituir uma formulação ou uma apresentação por outra, referencialmente equivalente" e isso requer algumas condições "para que haja sentido no pensamento natural: a continuidade semântica e a associatividade entre as expressões a serem substituídas". Diante disso, na atividade de conversão, por exemplo, ao converter uma expressão em linguagem natural para a representação em linguagem algébrica, faz-se necessária uma substituição por símbolos algébricos e numéricos referencialmente equivalentes e que podem ser semanticamente congruentes ou não.

Continuamente, uma das maiores dificuldades ao converter partindo do registro em linguagem natural para o registro algébrico, dá-se pela substituição seguindo a ordem em que o enunciado é escrito, e não identificando a equivalência referencial entre os termos (LOURENÇO; OLIVEIRA, 2018). Concomitantemente, Duval (2012, p.101) expõe que "um dos obstáculos encontrados por muitos alunos na aprendizagem de matemática está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica e, no entanto, o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência semântica". Por esse motivo, conversões não congruentes são muito mais complexas de serem realizadas pelos alunos.

Assim, para determinar se duas representações são congruentes ou não congruentes, Duval (2009) estabelece três critérios:

I. Correspondência semântica dos elementos significantes;
II. Univocidade semântica terminal;
III. Ordem dentro da organização das unidades.

A correspondência semântica dos elementos significantes refere-se a associação de uma unidade significante[1] de uma representação a uma única unidade significante de outra representação. Sendo assim os termos matematicamente pertinentes devem ter apenas um símbolo associado a ele quando convertido no registro algébrico, por exemplo. Vejamos o exemplo 1:

(1) *Minha idade multiplicada por 3 e subtraída por 15 será igual ao* **dobro** *da minha idade mais 6. Qual é a minha idade?*

A conversão desse exemplo no registro algébrico corresponde a seguinte equação: $x.3 - 15 = 2.x + 6$, percebe-se, no entanto, que a palavra **dobro** está ligada a dois signos: o numeral 2 e o símbolo da multiplicação ".", dessa forma, o critério (I) não é satisfeito neste exemplo.

Ainda pelo exemplo (1) verifica-se que o critério (III) é respeitado, haja vista que ao fazer a leitura do registro em linguagem natural e em linguagem algébrica, da esquerda para direita, correspondem a mesma ordem na organização das unidades significantes. Para Duval (2009, p.69) "esse critério é, sobretudo, importante quando se trata de comparar frases e fórmulas literais", assim, não é simplesmente "traduzir" as palavras, na mesma ordem em que estão, para a linguagem algébrica, pois existirão casos que tenderão ao erro se forem pensados dessa forma, como no exemplo 2:

(2) *Se subtrairmos um número ao triplo da idade de Joana, o resultado será 27. Qual a idade de Joana, sabendo que o número subtraído foi seis?*

Se os alunos pensarem em apenas "traduzir" o que está em palavras para a linguagem algébrica na mesma ordem, chegarão ao equívoco de escreverem a equação $3.x - y = 27 - 6$, por exemplo. Pensando o número qualquer ser o *y*, a idade de Joana ser o *x*, ao qual foi multiplicado por 3 entendendo-se que é o triplo, do qual o resultado seria 27 menos 6. Onde na verdade a equação algébrica que corresponde corretamente ao exemplo (2) é $3.x - 6 = 27$.

---

[1] Nesse estudo, os termos: unidade significante, unidade de sentido e elemento significante possuem o mesmo sentido.

O critério de univocidade semântica terminal (II) concerne ao significado de cada unidade significante, ou seja, as unidades significantes do registro de partida precisam corresponder ao mesmo significado do registro de chegada. Observemos o exemplo 3:

(3) *João foi a uma loja de roupas e comprou uma camiseta e uma bermuda, totalizando o valor de R$196,00. A bermuda custou mais caro que a camiseta, a* ***diferença*** *foi de R$87,00. Quanto custou cada peça que João comprou?*

Convertendo o exemplo (3) no registro algébrico obtemos a equação $x + (x + 87) = 196$, ao qual $x$ representa o valor da camiseta e $(x + 87)$ o valor da bermuda. No entanto o enunciado em linguagem natural traz a palavra **diferença** que semanticamente corresponde ao significado de subtração na matemática, mas na conversão ao registro algébrico a operação efetuada foi de adição ao invés da subtração, chegando a conclusão que não existe univocidade semântica terminal, haja vista que a unidade significante **diferença** está associada ao seu antônimo.

Para que existisse univocidade semântica terminal no enunciado (3) poderíamos realizar um tratamento:

(4) *João foi a uma loja de roupas e comprou uma camiseta e uma bermuda, totalizando o valor de R$196,00. A bermuda custou a* ***mais*** *que a camiseta R$87,00. Quanto custou cada peça que João comprou?*

Nesse caso a palavra mais está diretamente relacionada ao sinal da operação de adição (+) que está representado no registro algébrico.

Dessa forma, “duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações” (DUVAL, 2009, p.69). No entanto, pode acontecer de um, dois ou os três critérios não serem satisfeitos, então se tem uma não congruência entre duas representações, e esta pode ser em maior ou menor grau. A dificuldade na conversão de uma representação a outra varia dependendo do grau de não congruência entre elas.

Consideramos nesse estudo três graus de não congruência semântica:

- **Grau de não congruência semântica baixo:** ao qual **um** dos critérios estabelecidos por Duval (2009) não é satisfeito entre a representação de partida e a representação de chegada.

- **Grau de não congruência semântica médio: dois** dos critérios elencados por Duval (2009) não são satisfeitos entre a representação de partida e a representação de chegada.
- **Grau de não congruência semântica alto:** nesse caso, nenhum dos critérios estabelecidos por Duval (2009) são respeitados entre duas representações.

Evidenciaremos graus diferentes de não congruência semântica utilizando exemplos relacionados a função quadrática.

Como exemplo para o grau de não congruência semântica baixo, dispomos do seguinte exemplo a ser verificado na Figura 1.

**Figura 1 -** Exemplo de enunciado com grau de não congruência baixo

(SMOLE; DINIZ, 2016, p.128) De todos os $\underbrace{\text{pares de números reais de soma}}_{x+y}$ $\underbrace{\text{igual}}_{=}$ a $\underbrace{12}_{12}$, determine aquele de $\underbrace{\text{produto máximo}}_{x\,.\,y}$.

**Fonte:** Elaborado pela autora

Pela Figura 1 percebemos que a ordem dentro da organização das unidades significantes (III) é satisfeita, pois a representação algébrica segue a mesma ordem da representação em linguagem natural. Assim como o critério de univocidade semântica terminal (II) também é respeitado, pois as unidades significantes “soma” e “produto” estão representadas com o símbolo que elas significam na matemática (+) e (.), respectivamente.

Porém, a correspondência semântica dos elementos significantes (I) não acontece na conversão de uma representação a outra, já que os termos “pares de números reais de soma” possuem quatro signos – pois a preposição “de” não consideramos como unidade significante já que ela apenas completa o sentido do enunciado – enquanto que na representação algébrica possui apenas três signos $(x + y)$. O que também pode ser notado no termo “aquele de produto”, que possui dois signos contra três signos da representação algébrica $(x\,.\,y)$. Portanto, da figura 1 existem dois critérios que foram satisfeitos e um que não foi correspondido.

No que concerne ao grau de não congruência médio, observemos o exemplo disposto na Figura 2.

**Figura 2 -** Exemplo de enunciado com grau de não congruência médio

(SOUZA; PATARO, 2015, p.51) Para pintar os $\underbrace{\text{dois lados de um muro}}_{\mathbf{2}\,.}$, foram necessárias exatamente $\underbrace{\text{3 latas}}_{\mathbf{3}}$ de tinta, $\underbrace{\text{que cobrem, cada uma,}}_{\cdot}$ $\underbrace{24\ m^2}_{\mathbf{24}}$ de área. Sabendo que a $\underbrace{\text{altura do muro corresponde}}_{=}$ a $\underbrace{\frac{1}{9}\ \text{de seu comprimento}}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}.\boldsymbol{x}}$, qual a altura e o comprimento desse muro?

**Fonte:** Elaborado pela autora

Este exemplo na Figura 2 traz uma relação entre a altura e o comprimento de um muro, que de acordo com as informações, pode-se inferir que é de formato retangular. De início já constata-se que a ordem dentro da organização das unidades significantes (III) não acontece ao se converter a representação em linguagem natural para a representação algébrica que seria $72 = 2.x\,.\frac{1}{9}\,.x$, haja vista, que não segue a mesma ordem de leitura da esquerda para a direita.

Além disso, para chegar a área total do muro o estudante teria que converter o trecho “foram necessárias exatamente 3 latas de tinta, que cobrem, cada uma, 24 $m^2$ de área” para $24\,.3 = 72m^2$, por isso a correspondência semântica dos elementos significantes (I) também não acontece, já que o termo “que cobrem, cada uma” que possuem quatro signos considerados representa apenas um signo, o sinal de multiplicação (**.**), ao ser efetuada a conversão.

No entanto, a univocidade semântica terminal (II) é satisfeita, pois não existem palavras com significados antônimos, como no caso da utilização de diferença com significado de adição, disposto no exemplo (3).

Para exemplificar um enunciado cujo grau de não congruência semântica é alto, ou seja, que os três critérios estabelecidos por Duval (2009) não são correspondidos, verifiquemos o exemplo na Figura 3.

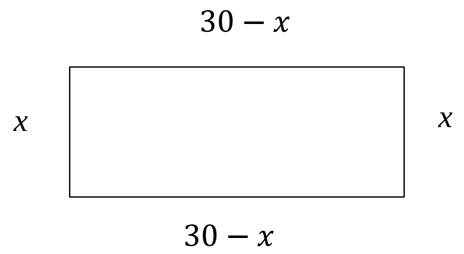
**Figura 3 -** Exemplo de enunciado com grau de não congruência alto

De todos os retângulos de $\underbrace{\textbf{perímetro}}_{P}$ $\underbrace{\text{igual}}_{=}$ a $\underbrace{60}_{60}$ cm, determine o de **área** máxima.

**Fonte:** Elaborado pela autora

Para chegarmos a uma representação de chegada a partir desse enunciado (representação de partida), temos que recorrer a uma representação intermediária ou auxiliar para conseguir evidenciar unidades significantes que não estão presentes na representação em linguagem natural. Recorreremos, portanto, a representação auxiliar que corresponde a representação de um retângulo.

**Figura 4 -** Representação auxiliar para resolução do exemplo da figura 3




Tomando um dos lados como $x$ o seu oposto também será $x$, logo,

$$\frac{60 - 2x}{2} = 30 - x$$

**Fonte:** Elaborado pela autora

Ao observamos a Figura 3 e a Figura 4 não encontraremos transparência de um registro a outro, pois em nenhum momento no registro em linguagem natural faz-se menção aos valores visuais da representação auxiliar, mas esta última, ainda não é a representação de chegada, tem apenas a função de ajudar na conversão. O registro de chegada para esse exemplo é $A(x) = x.(30 - x)$, mas para chegar a esse registro o estudante precisa saber como se calcula a área do retângulo que é dada pelo produto da base pela altura.

Assim, as unidades significantes essenciais para o registro de chegada não estavam presentes no registro de partida. Então, não houve correspondência semântica dos elementos significantes, univocidade semântica terminal e nem ordem dentro da organização das unidades significativas.

Portanto, "a variação de congruência ou de não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos" (DUVAL, 2011, p. 121), exatamente porque a mente humana segue uma congruência semântica, e na maioria dos casos os enunciados revelam uma equivalência referencial, mas não uma congruência semântica, no entanto, pode ocorrer também o contrário, existir a congruência semântica e não ter a equivalência referencial (DUVAL, 2012).

Assim como nas conversões que tem como registro de partida a linguagem natural, muitas são as dificuldades relacionadas ao fenômeno de não congruência na conversão que tem como registro de partida os bidimensionais, como os gráficos, principalmente porque as unidades significantes de um gráfico são, na verdade, diferentes variáveis visuais.

Por isso, Duval (2009) pontua existe dificuldade maior numa conversão de registro gráfico para registro algébrico do que no sentido inverso.

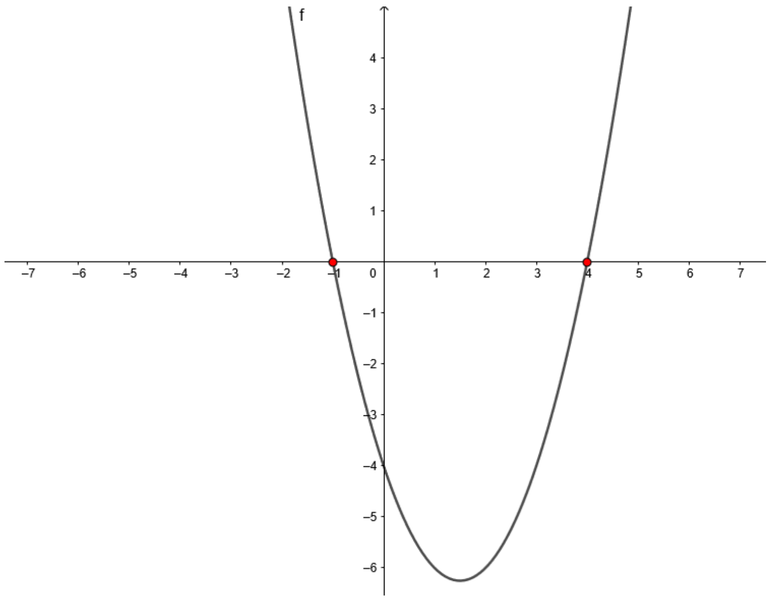
**b) Heterogeneidade de sentidos**

Este fenômeno da conversão remete a ida e volta nos sentidos da conversão. Converter de um registro de representação **x** para o registro **y** e realizar também a conversão no sentido oposto, do registro **y** para o **x**.

A conversão nos dois sentidos entre duas representações de um mesmo objeto em estudo é de extrema relevância já que cada registro comporta uma parte do conteúdo do objeto estudado, sendo assim "as regras de conversão não são as mesmas segundo o sentido no qual a mudança de registro é efetuada" (DUVAL, 2009, p.61).

Um exemplo pode esclarecer melhor essa variedade de conteúdos. Dada a representação de uma função quadrática em linguagem algébrica, $f(x) = x^2 - 3x - 4$, e sua representação gráfica (Figura 5):

**Figura 5 -** Gráfico[2] cartesiano da função quadrática $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x - 4}$




**Fonte:** Elaborado pela autora

Nesse exemplo, podemos ver conteúdos diferentes para um mesmo objeto matemático, os pontos destacados em vermelho no gráfico, são as raízes/zeros da função, elas não estão presentes na representação algébrica dessa função.

Por isso é necessário fazer a conversão em sentidos opostos, visto que cada representação explicita conteúdos diferentes para um mesmo objeto, sem falar que as regras da conversão terão olhares diferentes. Assim, ao realizar a conversão no sentido representação em linguagem algébrica para representação gráfica podem ser mobilizadas algumas regras, como

[2] Todos os gráficos apresentados nesse estudo foram construídos no software GeoGebra.

esboçar o gráfico ponto a ponto a partir da lei de formação da função dada, por exemplo, já no sentido de conversão oposta não é possível chegar a expressão algébrica da função apenas ao identificar variados pares ordenados no gráfico, é preciso ter a interpretação global dessa representação.

## 2.3 REFLEXÕES SOBRE ASPECTOS HISTÓRICOS, O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO

As discussões que serão abordadas nesse tópico versam sobre a construção histórica do conceito de função, de maneira geral. Isto é, como se construiu o conceito e as representações que conhecemos atualmente.

Além disso, busca-se observar o ensino e aprendizagem de função quadrática a partir de estudos que utilizaram a TRRS, tais como: Duval (1988b), Maia (2007), Nascimento (2009), Santos (2012) e Salin (2014), a fim de viabilizar dificuldades existentes na aprendizagem desses conceitos, já que estas pesquisas têm estudantes como participantes.

A partir disso, faz-se a articulação entre as duas representações mais enfatizadas nos estudos, a representação algébrica e gráfica, baseada na TRRS. Assim como, a coordenação entre estas usando o procedimento de interpretação global das propriedades figurais.

### 2.3.1 Aspectos históricos da evolução do conceito de Funções

O conceito de função tem extrema importância dentro da própria matemática, mas também em áreas afins da ciência. Porém, foi formalizado abstratamente há pouco tempo se comparado ao seu processo evolutivo, haja vista que os conhecimentos matemáticos não surgiram precipitadamente, de maneira rápida e imediata, mas foram passando por adaptações e transformações ao longo do tempo. Assim, nesse tópico apresenta-se uma breve descrição sobre o desenvolvimento do conceito de função.

Ponte (1990) expressa que aspectos desse conceito já estariam presentes nas mais elementares operações de contagem. No entanto, o conceito individualizado começou a surgir por volta do final do século XVII. Contudo não existe regularidade por meio dos pesquisadores no que se refere às noções elementares de função. Alguns apontam que surgiu entre os babilônicos ainda em 2000 a.C. ao serem encontrados cálculos que eles usavam tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, que enfocava um instinto de funcionalidade, ou ainda que surgiu entre os gregos quando através da interpolação linear acionavam uma relação de dependência funcional entre as tabelas que faziam conexão entre a matemática e a astronomia (ZUFFI, 2016).

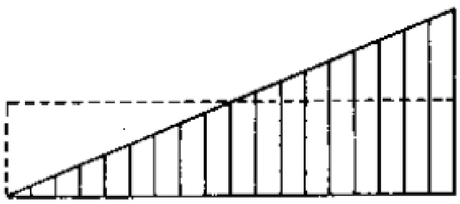
Nessa perspectiva, segundo Boyer (1974) o físico e matemático Nicole Oresme (1323-1382) refletiu acerca da quantificação das formas variáveis que já tinha um século que os filósofos escolásticos discutiam. Como exemplo de formas variáveis temos a velocidade de um objeto móvel e a variação de temperatura dispostos de ponto a ponto, sendo que esse objeto não tem temperatura uniforme.

Conhecendo bem o teorema referente do valor médio de uma forma uniformemente diforme[3], que os lógicos de Merton College conseguiram obter, Oresme pensou em traçar uma figura ou o gráfico da maneira pela qual as coisas variam, e isso antes de 1361. Daí surge a representação gráfica de funções. Para Oresme o gráfico representado tinha uma ideia de continuidade, e Boyer (1974) descreve como este estudioso traçou o gráfico:

> [...] ele traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendiculares à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade (BOYER, 1974, p. 192).

Este mesmo autor ressalta que, o que Oresme chama de longitude e latitude corresponde ao sentido que denominamos hoje de abscissa e ordenada num plano cartesiano. No entanto, o uso de coordenadas não era novo, pois outros estudiosos, inclusive Apolônio, já utilizaram o sistema de coordenadas anteriormente, a novidade é o traçado do gráfico. Além disso, a representação gráfica traçada por Oresme remete-se a como concebemos hoje a geometria analítica. Portanto, Boyer (1974, p. 193) expressa que "Oresme forneceu assim uma verificação geométrica da regra de Merton, pois a velocidade no ponto médio do intervalo de tempo é a metade da velocidade final". A Figura 6 mostra esta representação gráfica.

**Figura 6 -** Representação gráfica traçada por Oresme (Idade Média)



**Fonte:** Boyer (1974, p.193)

Boyer (1974) mostra que Oresme chegou a essa representação geométrica de um triângulo retângulo e a área desse triângulo representa a distância percorrida pelo objeto.

Por conseguinte, esta ideia proposta por Oresme foi estudada até o tempo de Galileu, cerca de dois séculos. Galileu preocupou-se em estudar a natureza baseando-se na observação de fenômenos, ao qual se estabeleceram leis para explicá-los. Por meio dessa insistência em

---

[3] É uma forma em que a taxa de variação da taxa de variação é constante (BOYER, 1974).

estudar os movimentos de forma quantitativa entre esses físicos, contribuiu-se muito para a evolução da noção de função, haja vista que lidou de forma funcional concreta, o que colaborou para a concepção de variáveis dependentes e independentes.

Com estes estudiosos evidenciou-se a noção de função, pois estabelece a relação unidirecional entre as variáveis independente e dependente, mesmo que apenas graficamente e de forma verbal.

Porém, de acordo com Ponte (1990) a noção de função confunde-se com as primeiras ideias do Cálculo Infinitesimal, e surgiu um tanto sinuoso com Newton (1642 – 1727) em seus “fluentes” e “fluxões”. Ele usou o termo “relata quantitas” e “genita” que respectivamente designavam a variável dependente, e uma quantidade adquirida por meio de outras através das quatro operações fundamentais da aritmética. Salin (2014) ainda salienta que este matemático foi o primeiro a mostrar que uma função poderia ser escrita como uma série de potências.

No entanto, a palavra função foi introduzida pela primeira vez em 1673, por Leibniz para designar a dependência de uma curva de quantidades geométricas, como também as terminologias de constante, variável e parâmetro (PONTE, 1990).

A partir do desenrolamento do estudo de curvas mediante a álgebra, necessitou-se de um termo geral que pudesse representar dependentes de outras quantidades, então a palavra função foi adaptada para fins de expressão analítica, pelo próprio Leibniz e por João Bernoulli. Nesse sentido, ela aparece na definição de Bernoulli de 1718: “Chamamos função de uma variável uma quantidade composta de qualquer maneira por uma variável e por constantes” (KLEINER, 1989, p.3), sendo essa a primeira definição para função e também o marco inicial para que o termo função fosse inserido no vocabulário matemático.

Mais tarde, em 1748, Euler publica *Introductio in Analysin Infinitorum*, que foi uma obra clássica, onde surge uma nova versão de definição para o conceito de função: “Uma função de uma grandeza variável é uma expressão analítica composta em qualquer maneira a partir dessa quantidade variável e números ou quantidades constantes” (KLEINER, 1989, p. 3). Assim, foi a partir desse ponto que o conceito de função passou a desempenhar um papel explícito e central na matemática (Kleiner, 1989).

Ainda, foi Euler que introduziu a notação de função que conhecemos hoje, o $f(x)$, e segundo Boyer (1974, p. 325-326) ele, em 1727 a 1783, empenhou-se em aumentar os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática, e em quase tudo “escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum outro indivíduo foi tão grandemente responsável pela forma da matemática de nível universitário de hoje quanto Euler, o construtor de notação mais bem sucedido de todos os tempos”.

Um momento também muito importante para a evolução do conceito de função foi o problema da cadeia da vibração[4] que gerou discussões entre matemáticos e físicos, e foi a partir desse debate que surgiu um aspecto do conceito de função que foi estendido ao conceito de Euler, como denota Kleiner (1989, p. 7):

> a) Funções definidas por partes através de expressões analíticas em diferentes intervalos. (Portanto, era agora, pela primeira vez, considerada uma função genuína).
>
> $$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$
>
> b) Funções desenhadas à mão livre e possivelmente não dadas por qualquer combinação de expressões analíticas.

A definição de Euler para função perdurou entre os séculos XVIII e XIX onde a noção de função era identificada como uma expressão analítica, apesar de ter-se percebido as limitações e incoerências desse fato desde cedo. Então, por consequência da associação entre esta noção e as noções de continuidade e de desenvolvimento em série, o conceito de função que se tinha na época teve sua natureza e significado profundamente alterado (PONTE, 1990).

O marco desse avanço surgiu a partir dos estudos de Fourier (1768-1830) com relação à propagação de calor em objetos materiais. Ele afirmou que uma função qualquer pode ser representada, num intervalo apropriado, por uma série trigonométrica. Mas Ponte (1990) deixa claro que ele não provou matematicamente essa sua conjectura.

No entanto, o problema de Fourier foi retomado por Dirichlet na tentativa de construir uma definição ampla para o conceito de função, que chegou a seguinte elaboração em 1837: "Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x" (BOYER, 1974, p. 405).

Embora essa definição se aproxime com a que estabelecemos sobre função em dias atuais, pois ela remete para a relação entre dois conjuntos, Boyer (1974) adverte que nem a noção de conjunto, nem a de número real havia sido construída. Por essa definição de Dirichlet, podemos observar que ele não padroniza representações para fazer essa relação.

Enfim, foi com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, principiada por Cantor (1845-1918), que a noção de função estendeu-se no século XX, a qual pode incluir nela tudo o que fosse correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, sejam eles numéricos ou não (PONTE, 1990).

---

[4] Problema encontrado em Kleiner (1989, p. 4): "Uma corda elástica com extremidades fixas (*0* e *l*, digamos) é deformada em alguma forma inicial e depois liberada para vibrar. O problema é determinar a função que descreve a forma da corda no tempo *t*".

Percebe-se, então, que o conceito de função passou por diversas mudanças com o tempo e a partir de necessidades, Ponte (1990, p. 5) sintetiza a passagem desses momentos remetendo-se a três elementos primordiais para a construção do conceito primitivo de função:

> (a) a notação algébrica, portadora de importantes factores como a simplicidade e o rigor, permitindo a manipulação de expressões analíticas condensando uma grande quantidade de informação;
> (b) a representação geométrica, proporcionando uma base intuitiva fundamental (de que é exemplo a associação das noções de tangente a uma curva e de derivada duma função);
> (c) a ligação com os problemas concretos do mundo físico, associada à ideia de regularidade, que forneceu a motivação e o impulso fundamental do estudo.

Percebe-se no decorrer do percurso histórico das funções que a forma como ela foi aprimorada, enquanto suas representações e também enquanto a escrita, foi revelando um rigor maior na matemática, pois a maneira como ela começou a ser abordada propõe uma linguagem universal e abstrata que é própria da linguagem matemática.

Além disso, a própria história da matemática corrobora para a articulação entre diferentes representações para a construção do conceito de função, assim como é exposto na TRRS (BRAGA, 2009).

### 2.3.2 O ensino e aprendizagem de função quadrática e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica

No ensino de função dois registros de representação são bastante enfatizados, o registro em linguagem algébrica e o gráfico. Um dos pontos cruciais desse estudo é a construção do esboço do gráfico dada uma função em sua representação algébrica.

Pesquisas como as de Duval (1988b), Maia (2007), Nascimento (2009), Santos (2012) e Salin (2014) tem evidenciado dificuldades que os estudantes têm com relação a articulação entre a representação gráfica e algébrica, e ainda salientam que a construção do gráfico se detêm ao uso de uma representação auxiliar – a tabela com valores distribuídos para **abscissa (x)** ou para **ordenada (y)**, no intuito de formarem pares ordenados a serem pontuados no plano cartesiano e depois ligados até formarem uma reta ou uma curva, por exemplo.

Duval (1988b) coloca que a grande dificuldade dos alunos em articular uma representação a outra se dá pela ênfase em ensinar a construção do gráfico a partir da associação de pontos (pares ordenados), deixando de lado a interpretação global. E essa dificuldade se destaca quando se faz necessário interpretar o gráfico para se chegar a sua representação algébrica.

O estudo de mestrado de Maia (2007) corrobora com a ideia apresentada por Duval (1988b), ao qual busca evidenciar a construção gráfica da função quadrática por meio da interpretação global das propriedades figurais através de uma sequência didática que fazia uso do software Winplot e de lápis e papel. A sequência foi aplicada com alunos da oitava série, atualmente, nono ano, de São Bernardo do Campo – SP. Ao final da aplicação, a pesquisadora constatou avanço na compreensão do conceito de função quadrática no que se refere aos valores visuais e unidades simbólicas significativas.

Nascimento (2009) também utilizou em seu estudo uma sequência didática envolvendo o software Winplot e atividades de lápis e papel como fonte de auxílio na aprendizagem de funções polinomiais de 1º e 2º grau, porém, sua sequência teve a proposta de articular a TRRS e os níveis de compreensão do conceito de função estabelecidos por Bergeron e Herscovics (1982). Realizou seu estudo com 24 alunos do Ensino Médio integrados ao técnico Os resultados apontaram para a evolução da aprendizagem dos estudantes sobre as funções trabalhadas, baseado no reconhecimento de características expressas nas representações algébrica e gráfica, articulada a linguagem natural.

Também sob a ótica da TRRS e da Teoria das Situações Didáticas (TSD), Santos (2012) realizou seu estudo com 10 alunos que cursavam o Ensino Médio e objetivava verificar a construção de esboço de gráficos das funções polinomiais do 1º e 2º grau utilizando lápis e papel e também o software GeoGebra, a partir de um roteiro produzido em forma de cartilha. Os resultados da pesquisa apontaram que é possível estudar e reconhecer as propriedades das funções afim e quadrática levando em consideração pontos específicos presentes em seus gráficos, tanto com o uso de papel e lápis como também com o computador.

Assim como nas pesquisas anteriores, Salin (2014) se respalda sobre a construção do gráfico de função afim e quadrática, porém ela utiliza apenas o GeoGebra como meio propulsor. Os participantes dessa pesquisa são alunos do 1º ano do Ensino Médio, e seu objetivo principal é ver como esse software pode ajudar na compreensão desses conteúdos usando as diversas representações de uma função. Como resultado, obteve-se que a relação entre variáveis a partir da manipulação de pontos construídos no GeoGebra propiciou a compreensão do conceito de função e gráfico, por meio do processo de conversão pontuado na TRRS.

Esses estudos tem grande foco na aprendizagem de função sob o olhar das representações algébrica e gráfica, mas essa aprendizagem não acontece por estudar essas representações soltas. Ela só acontece por meio da articulação, da coordenação entre esses registros, e Duval (1988b) em seu artigo *GRAPHIQUES ET EQUATIONS: L'Articulation de deux registres* relata os caminhos para se realizar essa coordenação, assim como cita outros caminhos que não a favorecem, mas que tem seu papel na aprendizagem desse conceito. Assim, as pesquisas citadas anteriormente tomaram como base essas ideias de Duval.

### 2.3.3 Articulação entre os registros de representação algébricos e gráficos na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Quando se realiza a transformação de uma representação algébrica para uma gráfica executa-se uma conversão, mas para que exista a compreensão de como aconteceu essa conversão "é necessário fazer articulações entre as variáveis cognitivas que podem ser específicas do funcionamento de cada um dos sistemas de registros" (ROSA e ALMEIDA, 2009, p.4), são através dessas variáveis que se podem especificar as unidades significativas no registro.

Para o registro algébrico de uma função quadrática, podemos situar três formas. Cada uma delas pode ser encontrada realizando um tratamento no mesmo sistema de registro algébrico. Assim, temos a função quadrática na forma:

- **Desenvolvida**, que é a mais conhecida pelos alunos: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Da forma desenvolvida podemos encontrar a forma **canônica** $f(x) = a(x - m)^2 + k$ da função quadrática, colocando o $a$ em evidência e, em seguida, completando quadrado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$f(x) = a(x - m)^2 + k$, em que $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

- A forma **Fatorada** $f(x) = a(x - x')\,(x - x'')$ pode ser encontrada, também, a partir da forma desenvolvida, "colocando $a$ em evidência e substituindo a soma e o produto de $x'$ e $x''$" (SIQUEIRA, 2009, p.35), pois, da fórmula de Bháskara, ao se realizar a soma e o produto de $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, chegamos respectivamente aos resultados $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

Sabendo que $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e que $x'.x'' = \frac{c}{a}$, temos:

$$f(x) = a[x^2 - (x' + x'').x + (x'.x'')]$$

$$f(x) = \underbrace{a[x^2 - x'}.\underbrace{x - x''.x + x'}.x'']$$

termos em comum

$$f(x) = a[x(x - x') - x''(x - x')]$$

$$f(x) = a(x - x').(x - x'')$$

Cada uma dessas representações algébricas da função quadrática corresponde a alguma informação diferente na representação gráfica. A forma fatorada deixa em evidência as raízes/zeros da função, a forma desenvolvida destaca em que ponto a parábola vai interceptar o eixo das ordenadas, se isso vai acontecer de maneira crescente ou decrescente e se a concavidade da parábola é para cima ou para baixo, e, a forma canônica transparece os valores de máximo e mínimo, por exemplo.

Duval (1988b) pontua três maneiras de construir um gráfico:

- **A abordagem ponto a ponto** – esse tipo de procedimento consiste em encontrar pontos por meio da substituição na representação algébrica da função, no intuito de formar pares ordenados, distribuídos em uma tabela, que são localizados em um plano cartesiano em seguida traça-se a curva ligando esses pontos.
- **A abordagem de extensão do traçado** – é o procedimento de esboçar o gráfico que leva em consideração os infinitos pontos que estejam presentes no traçado, e não apenas alguns pontos como é o caso da abordagem ponto a ponto. Porém, não levam em consideração os valores visuais presentes na representação gráfica.
- **A abordagem da interpretação global das propriedades figurais** – consiste na articulação entre as representações algébricas e gráficas, ou seja, na "associação "variável visual da representação – unidade significativa da expressão algébrica""(DUVAL, 1988, p.237).

Dos três procedimentos, Maia (2007) enfatiza que a abordagem ponto a ponto é a mais enfatizada nos livros didáticos e sendo esse um dos materiais mais utilizados pelo professor em sala de aula, possivelmente este mesmo tipo de abordagem seja priorizado no ensino.

Com relação ao ensino de função, Duval (1988b, p. 235) faz menção sobre a conversão das representações algébricas e gráficas da equação, "o ensino e mesmo certos estudos didáticos, atém-se a passagem da equação para a sua representação gráfica com a construção ponto a ponto" e salienta que isso acarreta em um obstáculo para a aprendizagem.

Para Moretti (2003, p. 149-150) o ato de esboçar uma curva "ainda é tratado quase que exclusivamente por meio da junção de pontos localizados no plano cartesiano, pontos estes obtidos por intermédio de substituições na expressão matemática correspondente". Ele salienta que esse modo de esboçar o gráfico não ajuda o aluno a perceber que as modificações na representação algébrica implicam em modificações na representação gráfica e vice-versa.

Duval (2011) explicita que essa forma de proceder ao esboçar o gráfico chega a ser uma simples técnica de codificação, porém "a visualização produzida é qualitativa, e sua compreensão requer a coordenação cognitiva do registro das escritas algébricas" (p.105).

Assim, o procedimento que enfatiza essa coordenação é o de interpretação global das propriedades figurais, em que se pode estabelecer a associação das variações visuais do gráfico, que "*devem corresponder às oposições qualitativas no reconhecimento visual* da forma do gráfico, de sua orientação e de sua posição em relação aos eixos" (DUVAL, 2011, p. 109), e, as unidades de significado na escrita algébrica, que são "os dados ou as informações matematicamente pertinentes" (Ibidem, 2011, p.103).

Com relação às oposições qualitativas de reconhecimento visual, apoiado no que Duval (2011) propõe para os gráficos lineares, assim como da organização das variáveis visuais referentes ao traçado/eixo da representação gráfica da função quadrática que Maia (2007) propôs, elencamos as seguintes oposições qualitativas para o gráfico da função quadrática, a parábola:

- A parábola tem concavidade voltada para cima ou para baixo;
- Em relação eixo de simetria da parábola, a abertura da parábola tem dimensão maior, padrão ou menor;
- O vértice da parábola passa ou não pela origem;
- Se não passa pela origem, sua posição em relação ao eixo das abscissas é acima ou abaixo;
- E em relação ao eixo das ordenadas, o vértice passa a esquerda ou à direita, se não passa pela origem.

Assim, traz-se o Quadro 4 baseado no que Duval (1988b) elencou as que referem-se a função afim, e como fez Maia (2007), que enfatiza os valores visuais dispostos nas oposições qualitativas, listadas acima, que remete as unidades simbólicas para a representação algébrica da função quadrática na forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$, e esses valores mostram os movimentos de translação para uma função quadrática.

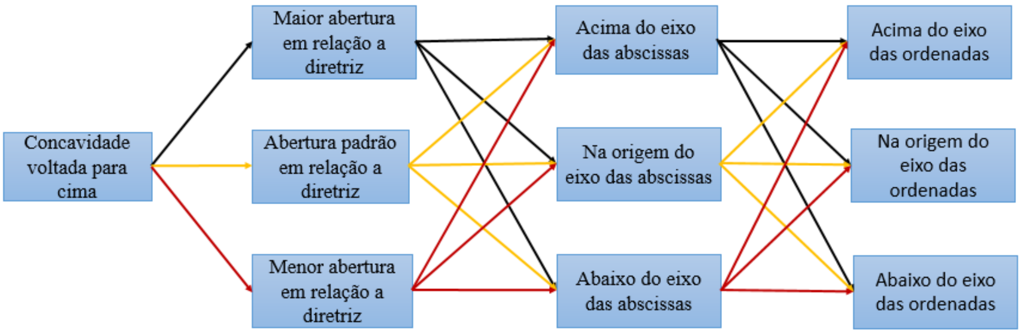
**Quadro 4 -** Unidade simbólica correspondente às variáveis visuais

| Variáveis visuais | Valores | Unidade simbólica correspondente |
|---|---|---|
| Concavidade da parábola | Voltada para cima<br><br>Voltada para baixo | Parâmetro a>0 (ausência do símbolo -)<br>Parâmetro a<0 (presença do símbolo -) |
| Abertura da parábola | Maior abertura<br><br>Abertura padrão<br><br>Menor abertura | 0 < \|a\| < 1<br><br>\|a\| = 1 (o parâmetro não está escrito)<br>\|a\| > 1 |
| Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas | Acima do eixo<br>Na origem<br>Abaixo do eixo | k>0<br>k=0<br>k<0 |
| Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas | A esquerda do eixo<br>Na origem<br>A direita do eixo | m>0<br>m=0<br>m<0 |

**Fonte:** Elaborado pela autora, adaptado de Maia (2007, p. 65).

A partir desses valores visuais encontramos cinquenta e quatro tipos de variações para o gráfico da função quadrática, como evidenciaremos por meio das árvores de possibilidades nas Figura 7 e 8.

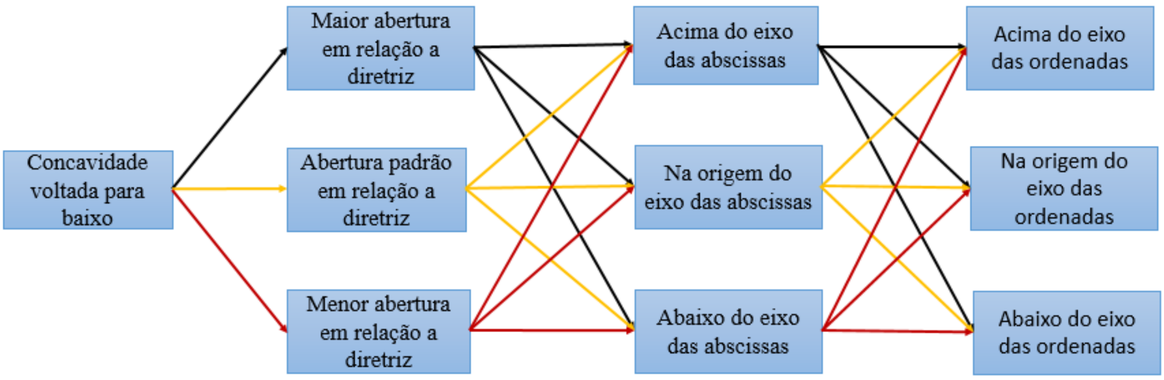
**Figura 7 -** Árvore de possibilidades das variações dos valores visuais para a > 0.




**Fonte:** Elaborado pela autora.

Como é possível perceber utilizando o princípio multiplicativo, para o gráfico da parábola com concavidade voltada para cima, temos um total de 27 diferentes variações do gráfico (Como é possível observar pela ligação das setas coloridas). Assim como acontece quando a parábola está com a concavidade voltada para baixo, resultando também em outras 27 variações do gráfico (Figura 8).

**Figura 8 -** Árvore de possibilidades das variações dos valores visuais para a < 0.




**Fonte:** Elaborado pela autora.

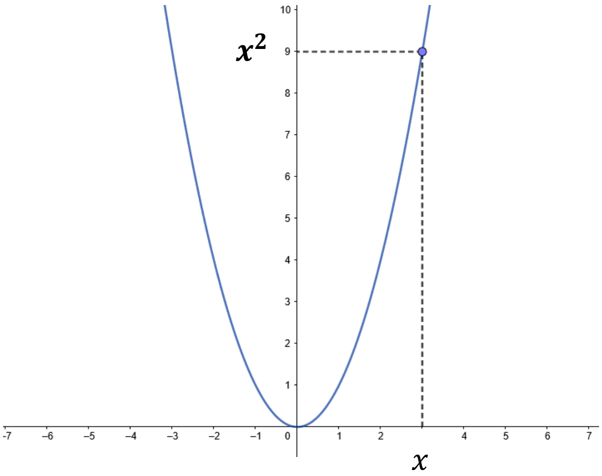
Por conseguinte, é notável que a abordagem do procedimento de interpretação global das propriedades figurais, em que se faz a articulação entre o registro gráfico e algébrico possibilita ao estudante a visão das diferentes variações do gráfico, sem que seja apresentado a ele as 54 variações, necessariamente.

### 2.3.4 A interpretação global das propriedades figurais da parábola com base nas três formas algébricas de uma função quadrática

Moretti (2003) relata que o movimento de translação pode contribuir para esboçar uma curva fazendo a correspondência entre o gráfico e a expressão algébrica. Para realizar esse movimento de translação utilizaremos a forma canônica da função quadrática enfatizando as unidades simbólicas em correspondência com os valores visuais do gráfico.

O gráfico mais simples de uma função quadrática, $f(x) = x^2$ é uma parábola que tem o vértice na origem.

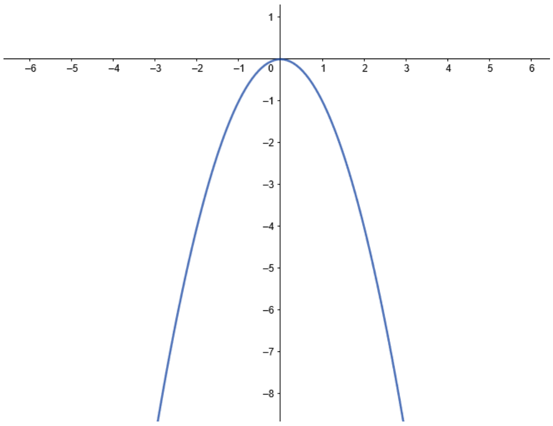
**Figura 9 -** Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^2}$




**Fonte:** Elaborado pela autora

Partindo dessa função, quando o $a < 0$, ou seja, se $f(x) = -x^2$, então a parábola terá sua concavidade voltada para baixo.

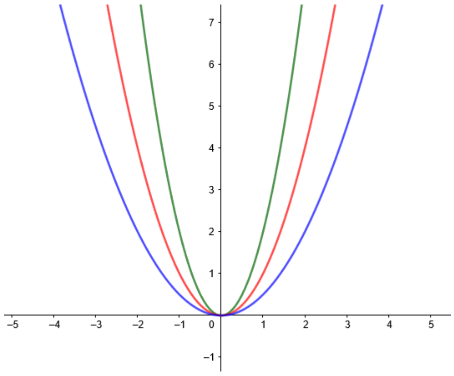
**Figura 10 -** Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = -x^2}$



**Fonte:** Elaborado pela autora

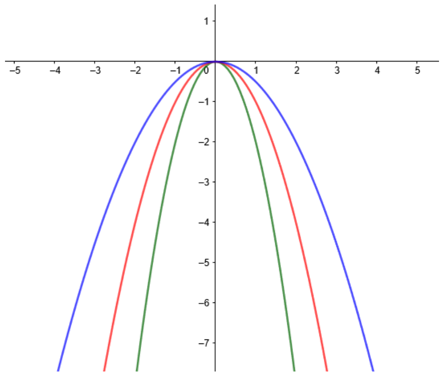
No que concerne a abertura da parábola, assim como expõe Maia (2007) no Quadro 5, ela será mais aberta ou menos aberta dependendo do valor de $a$, se $|a| > 1$ a parábola tem menor abertura (cor verde), $|a| = 1$ ele segue o parâmetro regular (cor vermelho) ou se $0 < |a| < 1$ terá uma maior abertura (cor azul), como mostram as Figuras 11 e 12.

**Figura 11 -** Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, relacionado a abertura da parábola



**Fonte:** Elaborado pela autora

**Figura 12 -** Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = -x^2}$, relacionado a abertura da parábola

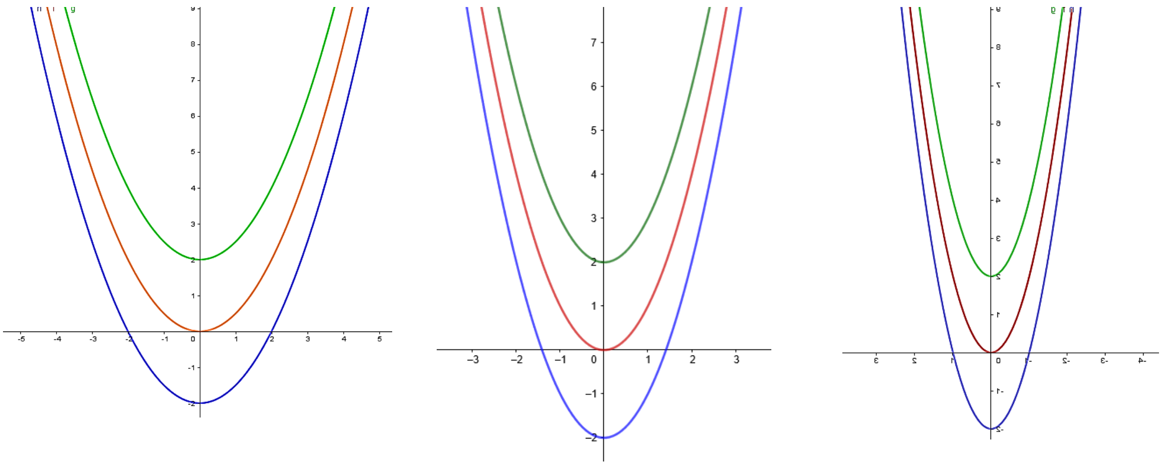


**Fonte:** Elaborado pela autora

Para a forma canônica da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$ temos três casos:

- Quando $m = 0$, temos $f(x) = ax^2 + k$, em que $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$ indicará em gráficos diferentes. O deslocamento se dará verticalmente: para cima ou para baixo, quando $k > 0$ ou $k < 0$, respectivamente, como mostra a Figura 13.

**Figura 13 -** Variação dos gráficos da função relacionados ao valor k ($\boldsymbol{f(x) = ax^2}$+k, $\boldsymbol{f(x) = ax^2}$ e $\boldsymbol{f(x) = ax^2}$-k).



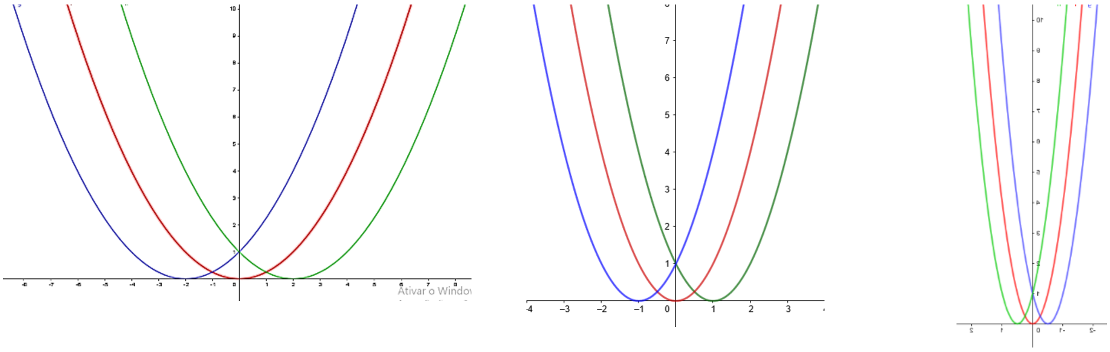
**0 < |a| < 1** | **|a| = 1** | **|a| > 1**

**Fonte:** Elaborado pela autora

Nesse caso, as funções que correspondem a cada cor são: $f(x) = x^2 + 2$ (verde), $f(x) = x^2$ (vermelho) e $f(x) = x^2 - 2$ (azul). Para os demais gráficos, variou-se o valor de $a$, ora para 0,5 (0 < |a| < 1), ora para 2 (|a| > 1), usando a mesma lei de formação da função quadrática que foi utilizada para |a| = 1.

- Quando $k = 0$, temos $f(x) = a(x - m)^2$ em que $m < 0$, $m = 0$ e $m > 0$ implicarão em gráficos diferentes, que se deslocará $m$ unidades na horizontal, para esquerda ou para direita quando $m < 0$ ou $m > 0$, respectivamente.

**Figura 14 -** Variação dos gráficos da função relacionados ao valor *m* ($\boldsymbol{f(x) = a(x - m)^2}$, $\boldsymbol{f(x) = ax^2}$ e $\boldsymbol{f(x) = a(x + m)^2}$)



**0 < |a| < 1** **|a| = 1** **|a| > 1**

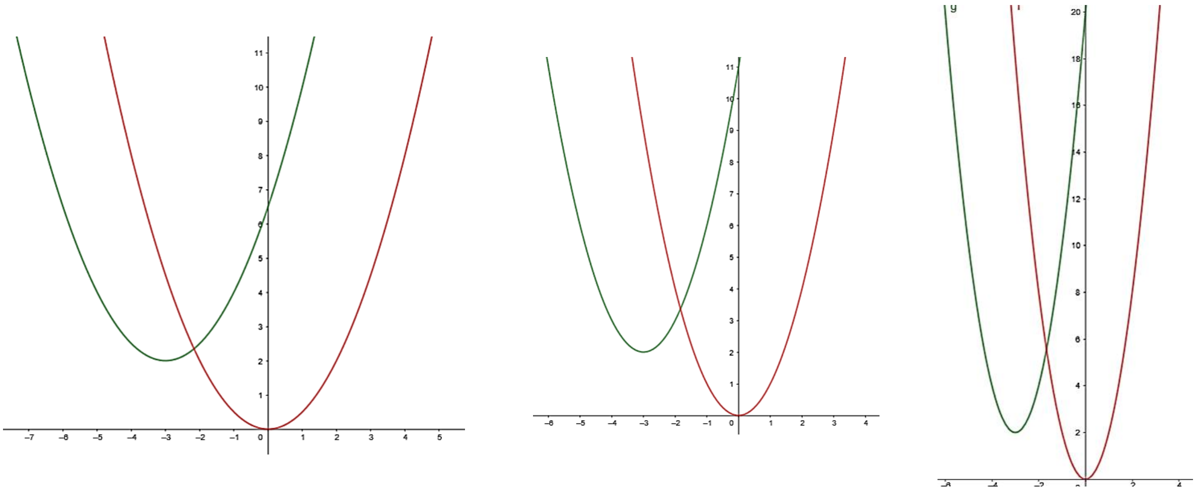
**Fonte:** Elaborado pela autora

As funções que correspondem a cada cor são: $f(x) = (x - 1)^2$ (verde), $f(x) = x^2$ (vermelho) e $f(x) = (x + 1)^2$ (azul). Para os demais gráficos, variou-se o valor de $a$, ora para 0,5 (0 < |a| < 1), ora para 2 (|a| > 1), usando a mesma lei de formação da função quadrática que foi utilizada para |a| = 1.

- Quando a função quadrática possui todas as unidades de sentido presentes na forma canônica da sua representação algébrica ($f(x) = a(x - m)^2 + k$), isto é, quando $m \neq 0$ e $k \neq 0$ e ambos pertencentes ao conjunto dos números reais, o gráfico se deslocará na horizontal, para esquerda ou direita, e, na vertical, para cima e para baixo. Na Figura 15 temos um exemplo de um gráfico da função quadrática com a forma canônica completa comparada a $f(x) = x^2$.

**Figura 15 -** Variação dos gráficos da função $\boldsymbol{g(x) = a(x+m)^2 + k}$ comparado a $\boldsymbol{f(x) = ax^2}$.

| **0 < \|a\| < 1** | **\|a\| = 1** | **\|a\| > 1** |
|---|---|---|



| | | |
|---|---|---|
| $g(x) = 0{,}5(x+3)^2 + 2$ ou $g(x) = 0{,}5x^2 + 3x + 6{,}5$ | $g(x) = 1(x+3)^2 + 2$ ou $g(x) = x^2 + 6x + 11$ | $f(x) = 2(x+3)^2 + 2$ ou $g(x) = 2x^2 + 12x + 20$ |

**Fonte:** Elaborado pela autora

As representações gráficas na cor verde de acordo com as funções desenvolvidas correspondentes, com base em sua representação algébrica na forma canônica, variam a abertura da parábola, e embora os valores de b e c sejam diferentes, não olhamos para essas unidades significantes da forma desenvolvida. Assim, temos como unidade significativas no registro algébrico, o que corresponde ao vértice da parábola, onde o $x_v = -3$ e o $y_v = 2$, que são, respectivamente, os parâmetros $m$ e $k$ na forma canônica da função $f(x) = (x+3)^2 + 2$, isso explica o fato de o gráfico ter se deslocado três unidades para a esquerda e duas unidades para cima, se comparado ao da função $f(x) = ax^2$.

Por essa construção passo a passo da representação gráfica da função quadrática, utilizando a representação algébrica na forma canônica percebe-se as alterações em uma representação quando se altera a outra, dessa maneira, o estudante conseguirá identificar as unidades significativas na representação algébrica, assim como as variáveis visuais na representação gráfica, e conseguirá, com mais facilidade, converter no sentido oposto: registro gráfico para registro algébrico.

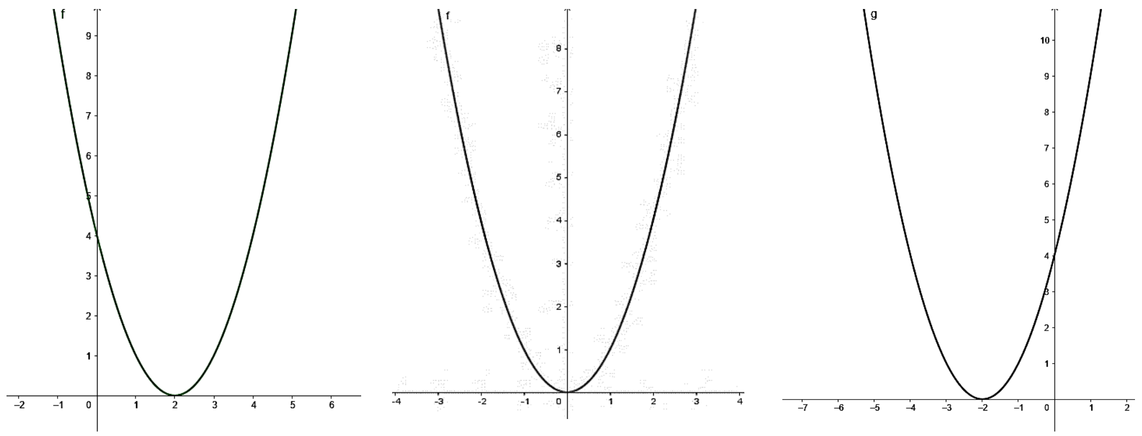
Além da representação algébrica na forma canônica, temos também a forma desenvolvida e fatorada, como já supracitado, em que podemos encontrar outras unidades significativas que refletirão em variáveis visuais na representação gráfica.

Observemos as unidades significativas da representação algébrica desenvolvida[5], $f(x) = ax^2 + bx + c$, e o que estas implicam na representação gráfica:

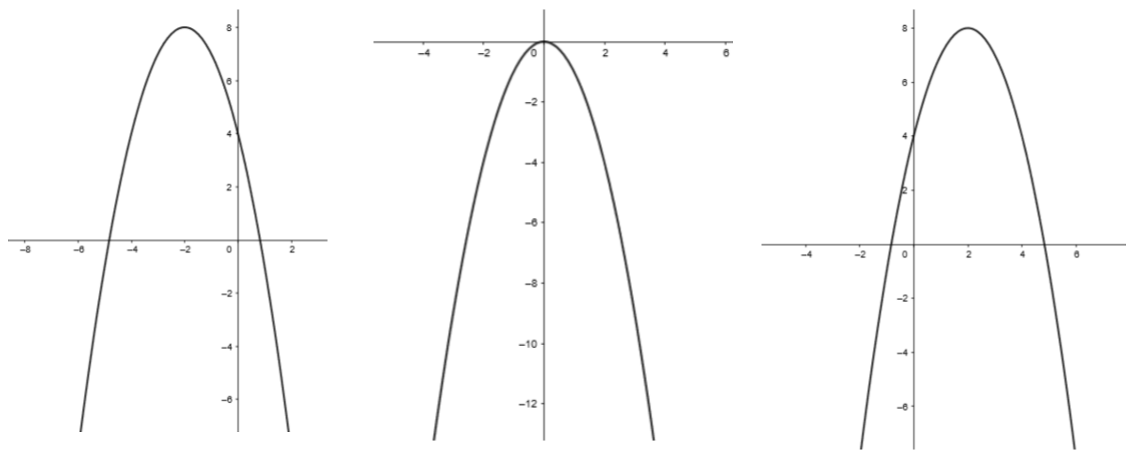
- O sinal do coeficiente $b$ possui relação com a parábola no seu cruzamento com o eixo das ordenadas. Assim, se $b > 0$ então a parábola irá interceptar o eixo das ordenadas no ramo crescente[6], se $b < 0$ a parábola tocará o eixo das ordenadas no ramo decrescente, se o vértice da parábola está no eixo das ordenadas, de acordo com a Figura 16.

**Figura 16 -** Variação do coeficiente b no gráfico da função quadrática

$b < 0\ e\ a > 0$ $\quad$ $b = 0\ e\ a > 0$ $\quad$ $b > 0\ e\ a > 0$



$b < 0\ e\ a < 0$ $\quad$ $b = 0\ e\ a < 0$ $\quad$ $b > 0\ e\ a < 0$



**Fonte:** Elaborado pela autora

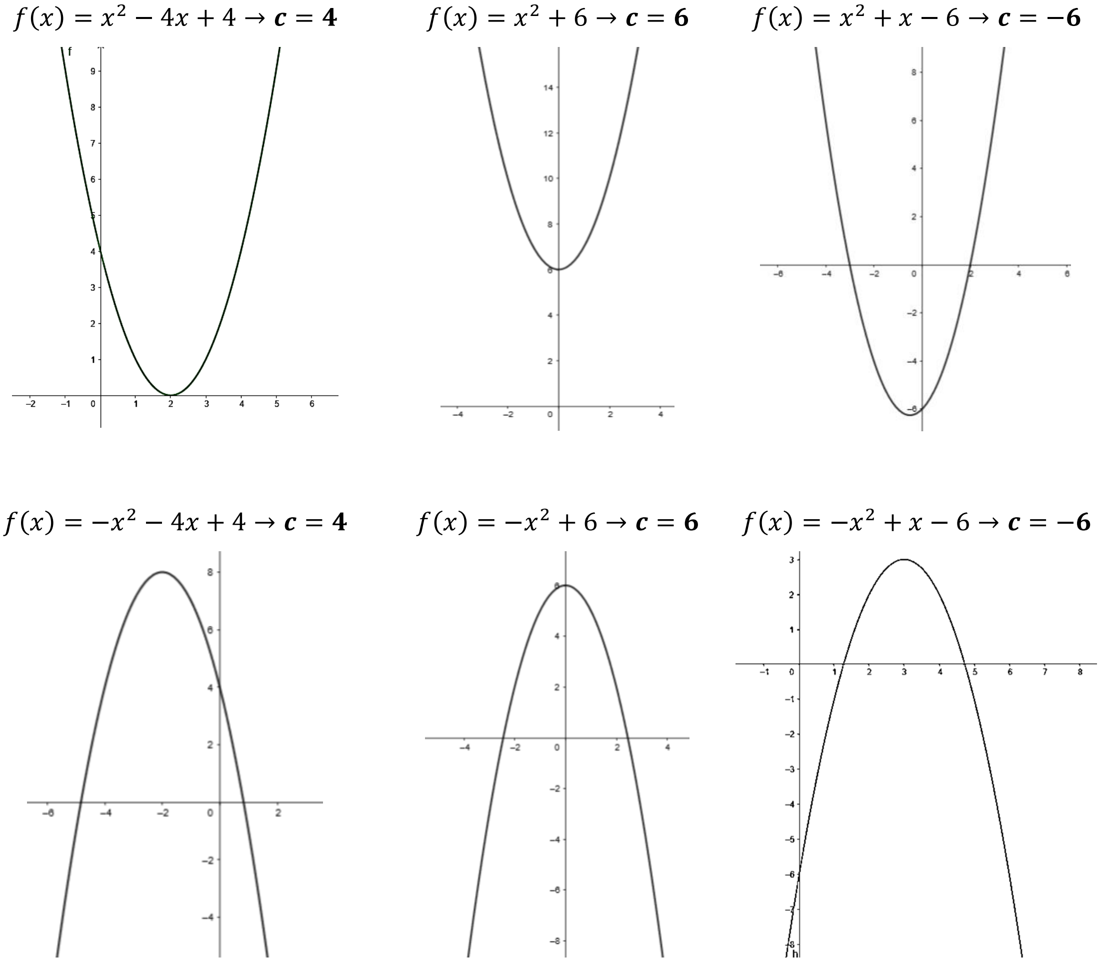
[5] Como o coeficiente a está presente nas três representações algébricas da função quadrática e já foi mencionado e relacionado a sua variável visual no gráfico (figuras 7, 8, 9 e 10) no início desse subtópico, ele não foi reapresentado aqui.

[6] Destacamos como ramo crescente a parte da parábola que cresce, e como ramo decrescente a parte que está decrescendo, e essa leitura é realizada, sempre, da esquerda para a direita.

O gráfico representado a esquerda na parte superior da Figura 16 corresponde a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 4$, que ainda pode ser escrito na forma canônica como $f(x) = (x - 2)^2$ . O gráfico representado a direita na parte superior tem como representações algébricas $g(x) = x^2 + 4x + 4$ (forma desenvolvida) e $g(x) = (x + 2)^2$ (forma canônica). O gráfico do centro na parte superior tem como representação algébrica $f(x) = x^2$ (forma desenvolvida) e $f(x) = (x + 0)^2$ (forma canônica). Os gráficos da parte inferior correspondem basicamente as mesmas funções exemplificadas acima, apenas é alterado o sinal do valor de *a*, que está negativo, implicando na concavidade da parábola voltada para baixo.

- O coeficiente *c* está representado na parábola exatamente onde ela cortar o eixo das ordenadas, ou seja, o coeficiente *c* será sempre um par ordenado (0, *c*), como na Figura 17.

**Figura 17 -** Variação do coeficiente c no gráfico da função quadrática



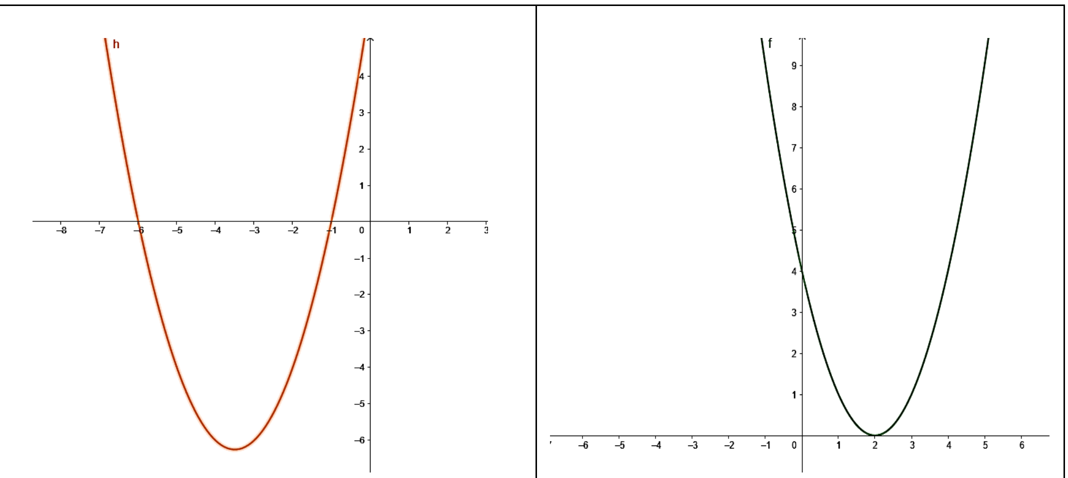

**Fonte:** Elaborado pela autora

Nesse caso, os gráficos apresentados na Figura 17 correspondem as funções enunciadas acima deles, em que evidenciamos o valor do coeficiente *c*, que no gráfico corresponderá a intercepção da parábola com o eixo das ordenadas. Nos gráficos do centro, percebe-se que o ponto *c* coincidirá com a ordenada no vértice, isto se deve ao fato do $b$ ser igual a zero. Consequentemente, a abscissa do vértice, nesse caso, será zero. Assim, sempre que $b = 0$, temos como vértice o par ordenado $V = (0, c)$.

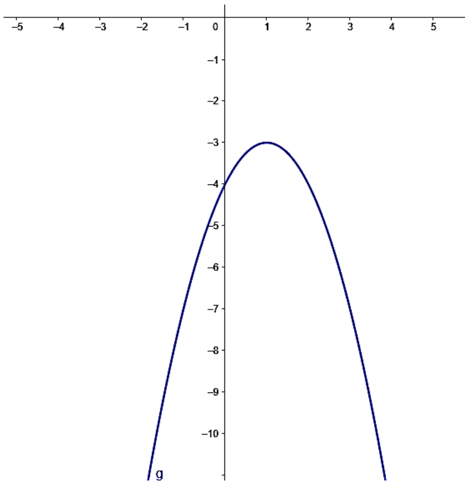
Em síntese, para as unidades significativas do registro algébrico na forma desenvolvida, tem-se os coeficientes *a*, $b$ e *c*, que correspondem as seguintes variáveis visuais do gráfico, respectivamente, a *concavidade* da parábola ser voltada para cima ou para baixo, a depender do sina de *a*; a intercepção da parábola no eixo das ordenadas ser no ramo crescente ou decrescente de acordo com o sinal de *b*; e o ponto em que intercepta o eixo das ordenadas coincidirá com o valor de *c*.

No que concerne à forma fatorada $f(x) = a(x - x').(x - x'')$, os valores visuais do gráfico definidos por ela serão as raízes ou zeros da função quadrática, que serão os pontos em que a parábola intercepta o eixo das abcissas. Se a parábola interceptar dois pontos existirá duas raízes reais distintas ($x' \neq x''$), se interceptarem apenas um ponto as raízes serão iguais ($x' = x''$) e se a parábola não interceptar o eixo das abscissas em nenhum ponto não existirão raízes reais, logo não será possível escrever sua representação algébrica na forma fatorada, conforme mostra a Figura 18.

**Figura 18 -** Representação algébrica fatorada e seus valores visuais no gráfico da função quadrática




| | |
|---|---|
| $h(x) = 1(x+6)(x+1)$<br>$x' = -6 \; e \; x'' = -1$<br>$a = 1 > 0$ | $f(x) = 1(x-2)(x-2)$<br>$x' = x'' = 2$<br>$a = 1 > 0$ |




$$g(x) = -x^2 + 2x - 4$$
$$\nexists\ x\ real$$
$$a = -1 < 0$$

**Fonte:** Elaborada pela autora

Diante disso, cada uma das formas da representação algébrica indicam conteúdos diferentes da função quadrática, e embora seja apenas uma, a representação gráfica compõe todos os valores visuais dispostos na forma desenvolvida, canônica e fatorada.

Para que os estudantes possam perceber isso, o ensino deve estabelecer conversões entre as representações algébricas e gráfica nos dois sentidos, por meio da interpretação global das propriedades figurais.

## 2.4 O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA E O USO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO NOS DOCUMENTOS DE ORIENTAÇÕES CURRICULARES

As discussões pautadas aqui viabilizam refletir sobre como os documentos de orientações curriculares nacionais – Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) – e estadual – Parâmetros de Formação Docente de Ciências da Natureza e Matemática do estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2014) – orientam sobre o ensino de função quadrática e quais desses pressupostos se relacionam com a TRRS.

O conceito de função é considerado um dos mais importantes na matemática, haja vista que possui conexões com temas dentro e fora dela. Para tanto, os documentos oficiais subsidiam o ensino desse conceito muito associado com o uso dos diferentes registros de representações. O documento nacional que orienta sobre o ensino de matemática no Ensino Médio, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM, promulgado em 2006, expõe que para a abordagem de função quadrática é necessário:

> O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga **estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica**, evitando-se a memorização de regras. O trabalho com a forma fatorada[7] $(f(x) = a.(x-m)^2 + n)$ pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática (a fórmula de Baskara) e a identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola, entendida esta como o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz). (BRASIL, 2006, p. 73). [grifo nosso]

Este documento corrobora com o que Duval concebe por coordenação entre os registros de representação, não basta apenas memorizar regras, mas compreender os significados que estão presentes na conversão entre as representações algébricas e gráficas de uma função, por exemplo, e isso só é possível realizando a associação das variáveis visuais do gráfico com as unidades de significado da expressão algébrica.

Ainda enfatiza, de forma geral, que o esboço dos gráficos de uma função deve ser traçado a partir de um entendimento global, concebendo, portanto, a compreensão das unidades de significado de uma representação em detrimento a outra, ou seja, entendendo que a maneira que se altera um registro algébrico, essa mudança também apresenta uma alteração no gráfico. Dessa forma, "A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções" (BRASIL, 2006, p. 72).

Esse documento expõe com bastante ênfase a coordenação entre os registros gráficos e algébricos, levando em consideração que a alteração de um implica na alteração do outro e que isso deve ser observado e compreendido pelo estudante.

Porém, o aspecto de realizar a coordenação entre os registros algébrico e gráfico não é enfatizado pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018, p. 533-541), que é um documento de orientação curricular nacional obrigatório, desenvolvido mais recentemente, quando propõe que os discentes sejam capazes de desenvolver as habilidades de:

> (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (p.533)
> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (p. 536)
> **(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra,**

[7] Existe um equívoco nesse documento de orientação curricular ao denominar $f(x) = a.(x-m)^2 + n$ como forma fatorada, quando esta é a forma canônica, pois se retornarmos às páginas 41 e 42 desta dissertação poderemos constatar.

> **recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (p.539)** [grifo nosso]
> **(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (p.539)** [grifo nosso]
> (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. (p. 541)
> (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. (p. 541)

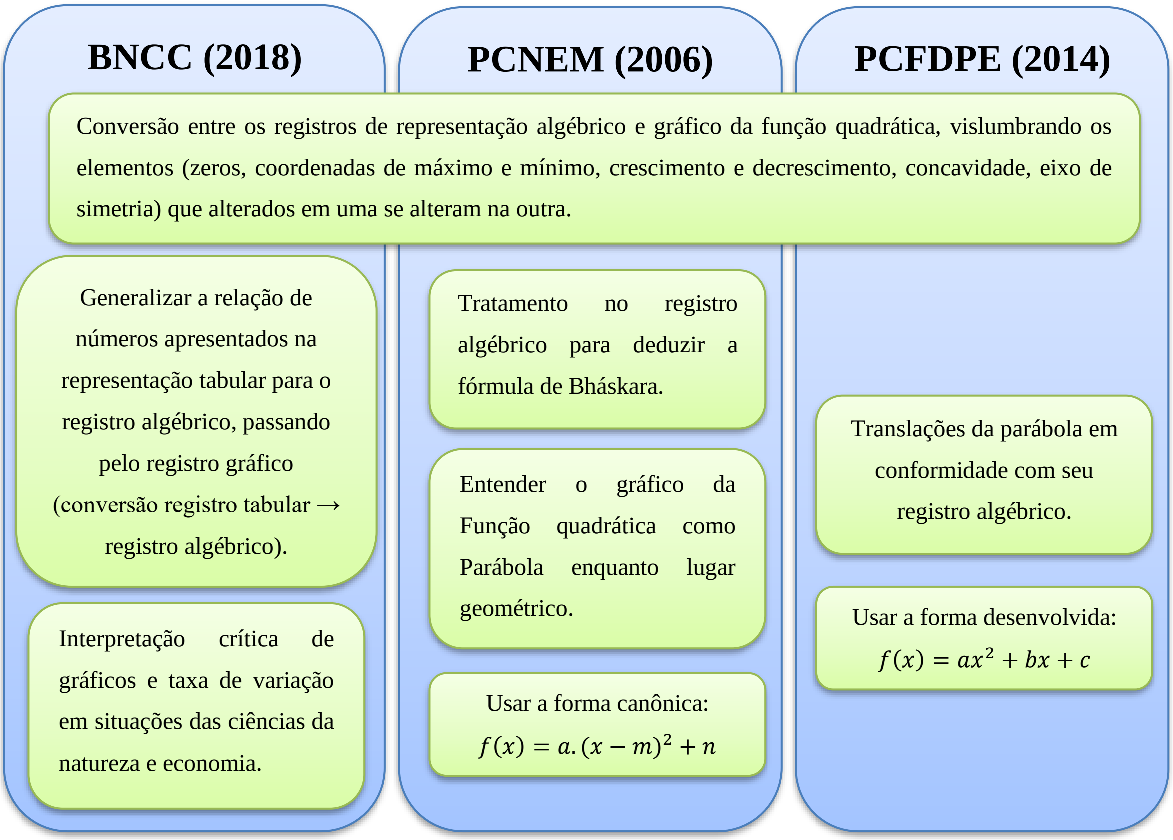
O que a proposta da BNCC (2018) privilegia é a utilização de problemas de situações cotidianas, em que por alguns momentos pede-se para converter da representação algébrica para gráfica. No que tange o esboço do gráfico, é enfatizado uma investigação sobre uma tabela de pontos a serem representados em um plano cartesiano, até se chegar a generalização de uma função polinomial de 2º grau, mas não salienta para outro tipo de procedimento, que seria o mais adequado quando se quer associar o gráfico a sua representação algébrica, que é o procedimento de interpretação global das propriedades figurais.

Os Parâmetros de Formação Docente de Ciências da Natureza e Matemática do estado de Pernambuco - PCFDPE (PERNAMBUCO, 2014) corroboram com as orientações propostas pelo PCNEM (BRASIL, 2006) já que ambos afirmam que devem-se levar em consideração que os estudantes precisam desenvolver as habilidades coordenar os registros algébrico e gráficos, ressaltando a utilização de softwares nesse processo:

> Compreender o significado dos principais elementos do gráfico, como zeros, intersecção com o eixo das ordenadas, eixo de simetria, concavidade e pontos de máximo/mínimo. Perceber as transformações ocorridas na análise e construção de gráficos ao variar os valores dos coeficientes, preferencialmente com a utilização de softwares. Concluir que, ao variar o valor do coeficiente c na representação algébrica $y = ax^2 + bx + c$, a parábola sofre translações ou, ainda, que a concavidade da parábola está relacionada com o "sinal" de a. O vértice da parábola é um ponto importante e merece uma atenção especial para sua determinação ou identificação. Determinar as coordenadas do ponto de máximo ou mínimo (a abscissa desse ponto é a média aritmética das raízes), sem o uso de fórmula. (PERNAMBUCO, 2014, p.222)

Dessa maneira, os documentos preconizam a utilização de variadas representações para o ensino de função quadrática, no entanto, alguns aspectos se aproximam do que a TRRS propõe e outros não. A Figura 19 mostra uma síntese do que os documentos orientam para o ensino de função quadrática e sua relação com a TRRS.

**Figura 19 -** Quadro síntese dos documentos de orientações curriculares




**Fonte:** Elaborado pela autora

Como supracitado, e exposto no quadro síntese, os documentos elucidam para a atividade de conversão entre os registros algébrico e gráfico, no entanto, apenas a BNCC coloca esse procedimento usado a partir da generalização de tabelas, ou com uso de softwares, mas não explicita que essa conversão deve se dar de forma que os alunos consigam realizar a coordenação entre os registros algébricos e gráficos, reconhecendo que a alteração nas unidades de sentido de um implicam em alterações nas variáveis visuais de outro, assim como preconizam os PCNEM e PCFDPE.

O fato de a BNCC ser um documento de orientação curricular obrigatório pode desencadear em lacunas na aprendizagem, embora o foco com situações cotidianas seja de extrema importância, a orientação para o trato com os registros algébrico e gráfico não possibilitam compreensão e avanço na aprendizagem de função.

Tomando como referência os estudos anteriores sobre função quadrática, assim como, os elementos da TRRS discutidos neste estudo concomitantemente relacionado com o objeto matemático supracitado, propõe-se os objetivos de pesquisa dispostos no próximo tópico.

## 2.5 OBJETIVOS

### 2.5.1 Objetivo Geral

Analisar sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica a abordagem num livro didático e a relação com o ensino de função quadrática por um professor de matemática da 1ª Série do Ensino Médio.

### 2.5.2 Objetivos Específicos

- Analisar, sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica a abordagem de função quadrática num livro didático para a 1ª Série do Ensino Médio.
- Identificar sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica, as representações propostas pelo professor ao abordar função quadrática no 1ª Série do Ensino Médio.
- Investigar a relação entre a abordagem do livro didático e a prática do professor quanto ao ensino de função quadrática na 1ª Série do Ensino Médio sob o olhar da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

# 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo são apresentados os procedimentos metodológicos que conduzirão o desenvolvimento dessa pesquisa. Caracteriza-se o participante da pesquisa e o livro didático usado por ele. Assim, está sendo situado o campo, os critérios para análise e as respectivas etapas de categorização de dados.

## 3.1 CAMPO DE PESQUISA

Para a realização da pesquisa optou-se por escolher uma escola da rede pública estadual de ensino[8], haja vista que o intuito é estudar como acontece o ensino de função quadrática na 1ª série do Ensino Médio (EM), e por consequência do uso do livro didático pelo professor, analisa-se também, como este propõe as diferentes representações de função para o ensino. Esta série é responsável pelo ensino desse conceito de acordo com as orientações curriculares de Pernambuco (2012, 2014) e nacional (2018).

A escola situa-se no município de Surubim localizado no agreste de Pernambuco, que dista 118 quilômetros da capital Recife. Ela é a única que oferece ensino técnico simultaneamente com o ensino médio em tempo integral, naquele município. Tal escolha deve-se ao intuito de contribuir com a pesquisa para a região agreste, tendo em vista que a maioria das pesquisas em Educação Matemática tem como foco a capital do estado.

## 3.2 SITUANDO E CARACTERIZANDO O PROFESSOR PARTICIPANTE

Na busca de encontrar um professor de matemática que atendesse aos critérios: atuar na 1ª série do EM; utilizar o LD adotado pela escola e que tivesse interesse em fazer parte da pesquisa, foram realizadas visitas nas cinco escolas estaduais do município de Surubim/PE.

Dois professores de escolas diferentes demonstraram interesse em ser participantes do estudo, porém, apenas um deles disse utilizar o livro didático adotado pela escola em suas aulas.

O participante, leciona nesta escola a cerca de três anos, assim como em escola municipal, nos anos finais do ensino fundamental. Possui formação em Licenciatura em Matemática e especialização também na área.

Ao realizar o estudo com apenas um participante destaca-se a possibilidade de um maior aprofundamento nas análises baseadas na teoria que norteia esta pesquisa, a TRRS. Sendo assim, o rigor metodológico segue da TRRS que conduz a análise dos dados obtidos, respaldando a análise do ensino sob esse par de lentes.

---

[8] No município, Surubim, onde foi desenvolvida a pesquisa, apenas as escolas de rede estadual ofertam o ensino médio. As escolas municipais são responsáveis pela educação infantil e ensino fundamental.

### 3.3 SITUANDO E CARACTERIZANDO O LIVRO DIDÁTICO

A análise foi realizada em um capítulo do LD, que foi o mesmo utilizado pelo professor (participante da pesquisa), e aprovado pela escola com base no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2018 que permanece em vigência até 2020: volume 1 (referente a 1ª série do EM) da coleção MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de almeida. Publicado pela editora Saraiva, 9ª edição no ano de 2016 e o capítulo analisado foi o quinto, pois é neste que é abordado a função quadrática.

Dos capítulos que antecedem o estudo de função quadrática, os dois primeiros versam sobre os conjuntos numéricos, o terceiro aborda as noções iniciais de função enquanto uma relação entre grandezas, assim enfatiza a construção dos gráficos, a taxa de crescimento e decrescimento e a taxa de variação. No capítulo quatro é abordada a função afim, e seguidamente, a função quadrática no capítulo cinco.

Este capítulo é composto por 21 páginas nas quais são distribuídas definições dos elementos referentes a função quadrática, bem como exemplos e exercícios e outras atividades, dos quais contabilizou-se 184 itens em 74 questões. Chamamos itens cada uma das solicitações das questões, exemplos, a, b, c etc). No entanto, desse total, retiraram-se 7 questões que contemplam 26 itens, pois se referem ao conteúdo de inequação do segundo grau (último tópico do capítulo), que estão agrupados de acordo com a Tabela 1. Vale salientar que as divisões expostas na Tabela 1 são identificados de acordo com subtítulos expostos no LD.

**Tabela 1 -** Distribuição de atividades no LD

| | **Exemplos** | **Exercícios resolvidos** | **Troque ideias** | **Exercícios (para responder)** | **Desafio** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Questões** | 16 | 2 | 1 | 47 | 1 |
| **Itens** | 16 | 4 | 3 | 134 | 1 |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Alguns desses itens não estão diretamente ligados a função quadrática, estando relacionados com função afim, equação (estes estão conectados a função quadrática quando estabelecidos nas atividades), mas todos foram analisados. Alguns itens se tornam repetitivos já que são aplicações da técnica abordada anteriormente, como é o caso de exercícios que pedem a construção do gráfico ou para encontrar as raízes da função, mas existem variadas propostas de resolução de problemas no decorrer do capítulo.

Tanto as explanações das definições, como os exemplos e os exercícios, são divididos em tópicos no decorrer do capítulo: Introdução, gráfico, raízes de uma equação do 2º grau (que tem como subtópicos: quantidade de raízes, soma e produto das raízes e forma fatorada), coordenadas do vértice da parábola, o conjunto imagem, esboço da parábola, sinal ($\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$) e inequações (este último tópico não foi analisado).

Após a explanação de cada um desses tópicos, são apresentados exemplos e/ou exercícios resolvidos, assim como uma seção de exercícios a resolver, além desses, tem a seção troque ideias (questão contextualizada, que modela uma situação cotidiana ao conceito matemático) e o desafio (questão do ENEM). Dessa forma analisamos todo o capítulo, assim como as resoluções apresentadas pelo livro ao professor.

## 3.4 CATEGORIAS E CRITÉRIOS DE ANÁLISE PARA O LIVRO DIDÁTICO

A análise do capítulo do LD que aborda o tema função quadrática apoiou-se na interligação do objeto matemático com a TRRS. Assim, a partir dos elementos discutidos na fundamentação teórica elencou-se as seguintes categorias de análise que geraram critérios para análise do livro.

**Quadro 5 –** Categorias e critérios de análise para o LD

| Categorias (Elementos da TRRS) | Critérios de análise (questionamentos) |
|---|---|
| Representações da função quadrática | Quais os tipos (algébrica, tabular, gráfica, linguagem natural) de representações o LD apresenta? Como essas representações são abordadas? Qual(is) a(s) representação(ões) mais priorizadas? |
| Tratamento | O LD enfatiza a transformação de tratamento? Com que frequência? Em quais representações existem maior índice de tratamentos? |
| Conversão | São exploradas transformações de conversão no LD? Com quais representações são realizadas esse tipo de transformação? Quais os sentidos de conversão (RA→RG, RG→RA, RLN→RA, RLN→RG, RA→RT, entre outros) estabelecidos pelo LD? Existe heterogeneidade nos dois sentidos das representações? Qual a frequência de conversões e em qual sentido é dado maior ênfase pelo LD? |
| Procedimentos de construção do gráfico | Para o procedimento de construção do gráfico o livro adota a abordagem ponto a ponto, de extensão do traçado ou de interpretação global das propriedades figurais? |
| Fenômeno de congruência semântica | Os três critérios estabelecidos por Duval (2009): Correspondência semântica entre os elementos significantes, univocidade semântica terminal e ordem dentro da organização das unidades são estabelecidas ou não na conversão entre duas representações, no livro didático? Existem ou não correspondência semântica nas atividades de conversão que o LD estabelece? O que se pode verificar quanto aos níveis de não congruência nas atividades apresentadas pelo LD? |

**Fonte:** Elaborado pela autora

## 3.5 CATEGORIAS E CRITÉRIOS DE ANÁLISE DAS AULAS DO PROFESSOR

Assim como para a análise do LD, a análise das aulas do professor apoiou-se na interligação do objeto matemático com a TRRS. Portanto, os elementos discutidos na fundamentação teórica subsidiaram as seguintes categorias de análise que geraram critérios para análise das aulas.

**Quadro 6 -** Categorias e critérios de análise para as aulas do professor

| **Categorias (Elementos da TRRS)** | **Critérios de análise (questionamentos)** |
|---|---|
| Representações da função quadrática | O professor apresenta quais tipos (algébrica, tabular, gráfica, linguagem natural) de representações? Como as representações apresentadas são abordadas? Qual(is) a(s) representação(ões) mais priorizadas pelo professor? |
| Tratamento | O professor aborda a transformação de tratamento? Como acontece essa abordagem? Com que frequência? E em quais representações ele evidencia maior índice de tratamentos? |
| Conversão | São exploradas transformações de conversão pelo professor? Com quais representações são realizadas esse tipo de transformação? Quais os sentidos de conversão (RA→RG, RG→RA, RLN→RA, RLN→RG, RA→RT, entre outros) que o professor estabelece em suas aulas? Existe heterogeneidade nos dois sentidos das representações? Qual a frequência de conversões e em qual sentido é dado maior ênfase pelo professor? |
| Procedimentos de construção do gráfico | Para o procedimento de construção do gráfico o professor adota a abordagem ponto a ponto, de extensão do traçado ou de interpretação global das propriedades figurais? |
| Fenômeno de congruência semântica | Os três critérios estabelecidos por Duval (2009): Correspondência semântica entre os elementos significantes, univocidade semântica terminal e ordem dentro da organização das unidades são estabelecidas ou não na conversão entre duas representações, sejam elas as atividades utilizadas do LD ou alguma atividade trazida pelo professor? As atividades selecionadas pelo professor possuem ou não congruência semântica? O que se pode dizer quanto aos níveis de não congruência nas atividades escolhidas pelo professor para serem abordadas nas aulas? |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Durante a observação das aulas verificou-se, também, se o professor utilizava do livro didático em suas aulas e quais as atividades eram mais privilegiadas por ele.

## 3.6 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS DA OBSERVAÇÃO DAS AULAS

Para a observação das aulas utilizou-se a vídeo gravação, áudio gravação, assim como foram anotados, em um caderno, os registros realizados pelo professor na lousa, no intuito de não perder nenhum detalhe para subsidiar a análise das representações abordadas, a partir da ótica da TRRS.

Foram observadas quinze aulas, com duração de 50 minutos cada, no período de 27 de agosto a 20 de setembro do ano de 2019. Foram realizadas transcrições de cenas que evidenciaram as representações que o professor utilizou na abordagem de função quadrática. Foram excluídos os episódios que elencavam dúvidas recorrentes a assuntos anteriores, como, multiplicação de potências, operações com números fracionários entre outros, assim como conversas sobre outros assuntos.

A ênfase desse estudo está nas representações escritas, portanto, o foco da transcrição também aconteceu sobre elas.

Os símbolos realizados na transcrição estão descritos no Quadro 7:

**Quadro 7 -** Símbolos e legendas utilizadas na transcrição da aula

| | |
|---|---|
| **P** | Indica que a fala é do professor. |
| **Al** | Apenas um aluno fala. |
| **Als** | Vários ou mais de um aluno falam. |
| **Reticências [...]** | Quando a fala é interrompida por outros interlocutores, ou ainda, quando não é concluída. |
| **(escrito entre parênteses)** | Complementação de explicação do pesquisador sobre alguma ação, gesto realizado pelo professor em sala. |

**Fonte:** Elaborado pela autora

As cenas de transcrição foram escritas tal como foram faladas pelos interlocutores, respeitando a linguagem de cada um.

# 4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nessa seção, são apresentados os resultados relativos à análise do único capítulo de função quadrática no LD, utilizado pelo professor participante, assim como sua prática em sala de aula, sob a lente da TRRS: as representações abordadas e priorizadas, transformações de tratamento e conversão, fenômeno de congruência semântica e procedimentos de construção do gráfico.

## 4.1 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

Este tópico apresenta a análise e discussão dos elementos expostos no LD em sua completude, articulando-o com os pressupostos teóricos da TRRS, tanto quando o livro expõe suas definições e explicações ao conteúdo de função quadrática, como nas atividades propostas por este, sendo elas resolvidas no capítulo ou colocada para a resolução. Vale salientar que o LD analisado encontra-se na versão para o professor, assim foi possível vislumbrar outros elementos, tais como, resoluções de exercícios e o manual do professor.

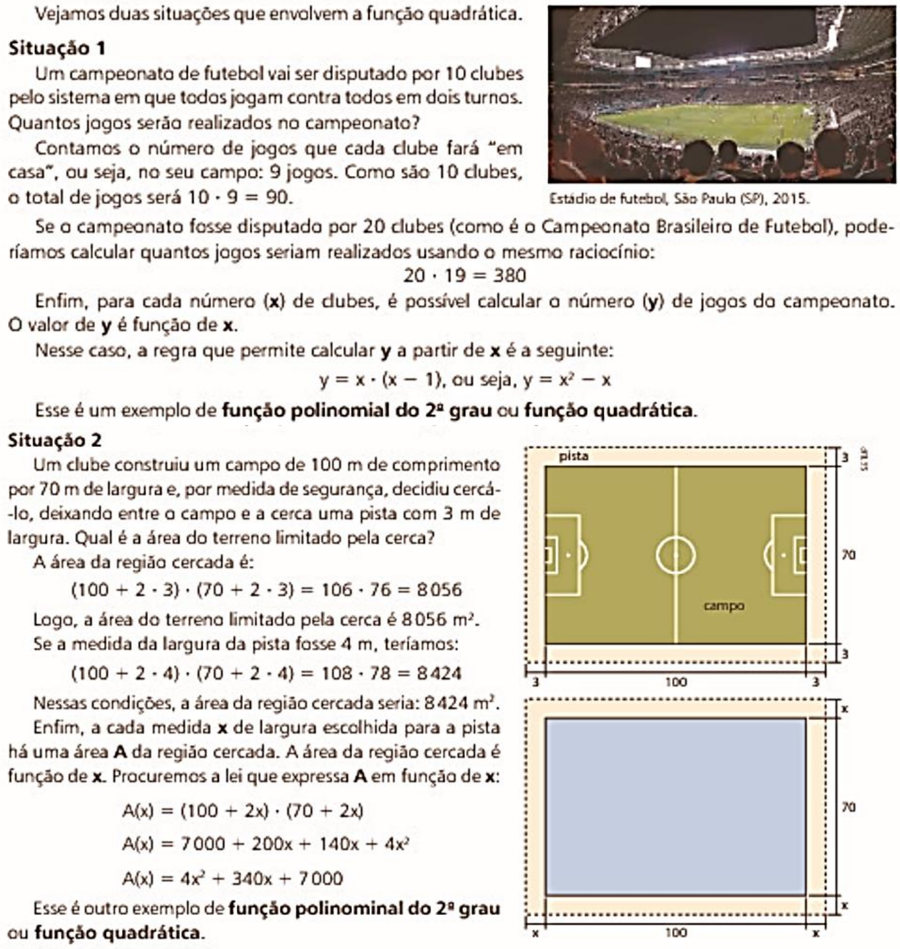
### 4.1.1 Abordagem e explicação de função quadrática no livro didático

A análise está norteada pelas questões mencionadas nos procedimentos metodológicos, com a preocupação de, nesse tópico, observar como acontecem a abordagem da definição e das atividades de função quadrática, com base nos elementos da TRRS.

O capítulo do LD que aborda função quadrática, inicia com a proposição de duas situações relacionadas a vida cotidiana (cálculo de possibilidades e cálculo de área – Figura 20) antes de defini-la. Opção interessante, pois a difusão da lei de formação da função quadrática com base em uma situação social, possibilita aos estudantes aplicarem esse tipo de conhecimento em sua vida cotidiana, o que torna a aprendizagem com significado.

Esta opção dos autores do LD corrobora com uma das habilidades propostas pela BNCC que é “Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas [...]” (BRASIL, 2018, p.533).

**Figura 20 –** Situações apresentadas no LD



Vejamos duas situações que envolvem a função quadrática.

**Situação 1**

Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Quantos jogos serão realizados no campeonato?

Contamos o número de jogos que cada clube fará "em casa", ou seja, no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será $10 \cdot 9 = 90$.

Estádio de futebol, São Paulo (SP), 2015.

Se o campeonato fosse disputado por 20 clubes (como é o Campeonato Brasileiro de Futebol), poderíamos calcular quantos jogos seriam realizados usando o mesmo raciocínio:

$$20 \cdot 19 = 380$$

Enfim, para cada número (**x**) de clubes, é possível calcular o número (**y**) de jogos do campeonato. O valor de **y** é função de **x**.

Nesse caso, a regra que permite calcular **y** a partir de **x** é a seguinte:

$$y = x \cdot (x - 1), \text{ ou seja, } y = x^2 - x$$

Esse é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**.

**Situação 2**

Um clube construiu um campo de 100 m de comprimento por 70 m de largura e, por medida de segurança, decidiu cercá-lo, deixando entre o campo e a cerca uma pista com 3 m de largura. Qual é a área do terreno limitado pela cerca?

A área da região cercada é:

$$(100 + 2 \cdot 3) \cdot (70 + 2 \cdot 3) = 106 \cdot 76 = 8056$$

Logo, a área do terreno limitado pela cerca é 8 056 m².

Se a medida da largura da pista fosse 4 m, teríamos:

$$(100 + 2 \cdot 4) \cdot (70 + 2 \cdot 4) = 108 \cdot 78 = 8424$$

Nessas condições, a área da região cercada seria: 8 424 m².

Enfim, a cada medida **x** de largura escolhida para a pista há uma área **A** da região cercada. A área da região cercada é função de **x**. Procuremos a lei que expressa **A** em função de **x**:

$$A(x) = (100 + 2x) \cdot (70 + 2x)$$

$$A(x) = 7000 + 200x + 140x + 4x^2$$

$$A(x) = 4x^2 + 340x + 7000$$

Esse é outro exemplo de **função polinominal do 2º grau** ou **função quadrática**.



**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 94)

Em ambas situações apresentadas na figura 20, faz-se uma generalização de uma situação aritmética para algébrica, mostrando, portanto, como se resolveria utilizando apenas números, ou seja, em casos particulares e depois realizando o mesmo procedimento com as variáveis, isto é, um procedimento válido para qualquer valor, aspecto que caracteriza a generalização presente no aspecto funcional.

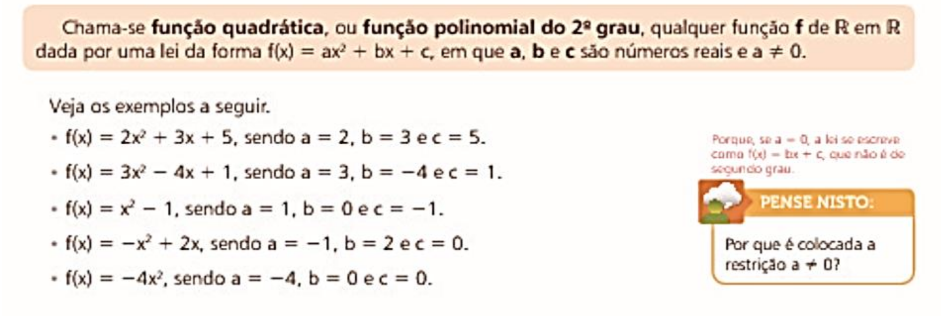
Vale salientar que as situações têm aplicabilidade no cotidiano, assim como tem conexões com outros conteúdos da própria matemática (na situação 2, por exemplo, estabelece-se área de um retângulo).

Tomando o olhar com foco na TRRS, a situação 1 trata-se de uma conversão, já que o registro de chegada (registro algébrico – RA) não é o mesmo do registro de partida (registro em linguagem natural – RLN). A situação 2, também é uma conversão, mas indireta, pois concebe duas conversões para a resolução da atividade, já que, partindo do RLN para o RA é utilizada outra representação que Duval (2009) denomina por representação intermediária (registro figural – RF). Assim, tem-se as conversões RLN→RF e RF→RA.

A representação intermediária ou auxiliar tende a ajudar o estudante a resolver com mais facilidade a situação, é essa foi a intenção do registro figural, ou seja, da representação do campo na situação exposta, na Figura 20. No entanto, esse tipo de representação não colabora para a realização da coordenação entre os RLN→RA.

Após chegar as funções quadráticas específicas por intermédio das situações 1 e 2, os autores do LD apresentam a lei de formação de uma função quadrática (Figura 21).

**Figura 21 -** Definição de função quadrática no LD



Chama-se **função quadrática**, ou **função polinomial do 2º grau**, qualquer função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais e $a \neq 0$.

Veja os exemplos a seguir.

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, sendo $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$.
- $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, sendo $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$.
- $f(x) = x^2 - 1$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$.
- $f(x) = -x^2 + 2x$, sendo $a = -1$, $b = 2$ e $c = 0$.
- $f(x) = -4x^2$, sendo $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$.

Porque, se $a = 0$, a lei se escreve como $f(x) = bx + c$, que não é do segundo grau.

PENSE NISTO:

Por que é colocada a restrição $a \neq 0$?

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 95)

O LD define função quadrática, inicialmente, no conjunto dos números reais por meio da representação algébrica na forma desenvolvida, $f(x) = ax^2 + bx + c$, que é a mais utilizada, e expõe como condição $a \neq 0$, no entanto, coloca essa condição para que o aluno possa pensar, como podemos ver o quadro “PENSE NISTO” na Figura 21.

O estudante precisa identificar sozinho ou juntamente com o professor, que se $a = 0$ a função deixará de ser quadrática e passará a ser uma função polinomial de primeiro grau, já que o termo que tem expoente igual a dois não existirá.

Essa definição de função quadrática é usual, no entanto, os livros didáticos deveriam evidenciar também, na definição, as outras formas de representações algébricas: canônica e fatorada, para que os estudantes pudessem viabilizar os tratamentos que podem ser realizados na lei de formação da função quadrática. Ainda, assim, em outros momentos do capítulo, o LD aborda a forma fatorada (IEZZI *et* al, 2016, p. 101) e a forma canônica (IEZZI *et* al, 2016, p. 103), para explicitar, respectivamente, as raízes e o vértice, que são aspectos visíveis nas unidades significativas dessas duas representações semióticas distintas do RA. Vale salientar que nos dois casos, o LD faz o tratamento partindo da forma desenvolvida para a forma fatorada e canônica.

A partir da Figura 21 é perceptível exemplos de funções quadráticas completas (composta pelos valores de *a*, *b* e *c*) e incompletas (faltam os valores de *b* e/ou *c*), embora o LD não denomine dessa maneira, cita apenas os exemplos.

Seguidamente, encontra-se o tópico gráfico em que o LD mostra como construir o gráfico da função quadrática, assim como seus elementos. Este tópico é iniciado com três exemplos de construção de gráficos, em que é dada a lei de formação da função quadrática (registro algébrico na forma desenvolvida), e o procedimento utilizado para realizar esse esboço é a abordagem ponto a ponto (DUVAL, 1988b).

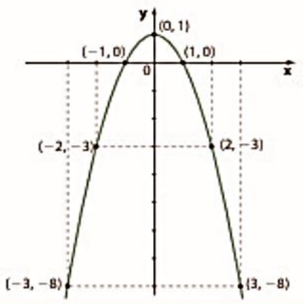
Para esse procedimento são atribuídos alguns valores reais a ***x*** a fim de substituir esse valor na lei de formação da função quadrática e encontrar os valores correspondentes a ***y***. Os valores, atribuídos e encontrados, são distribuídos em uma tabela (registro auxiliar), pontuados no plano cartesiano e ligados para obter o gráfico (parábola). Assim, pode-se perceber que tem-se uma conversão indireta, composta por duas conversões, RA→RT e RT→RG, de acordo com o excerto retirado do LD na Figura 22.

**Figura 22 -** Exemplo de construção do gráfico da função quadrática no LD

EXEMPLO 2

Consideremos f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = -x^2 + 1$.
Repetindo o procedimento usado no exemplo anterior, temos:

| $x$ | $y = -x^2 + 1$ |
|---|---|
| $-3$ | $-8$ |
| $-2$ | $-3$ |
| $-1$ | $0$ |
| $0$ | $1$ |
| $1$ | $0$ |
| $2$ | $-3$ |
| $3$ | $-8$ |



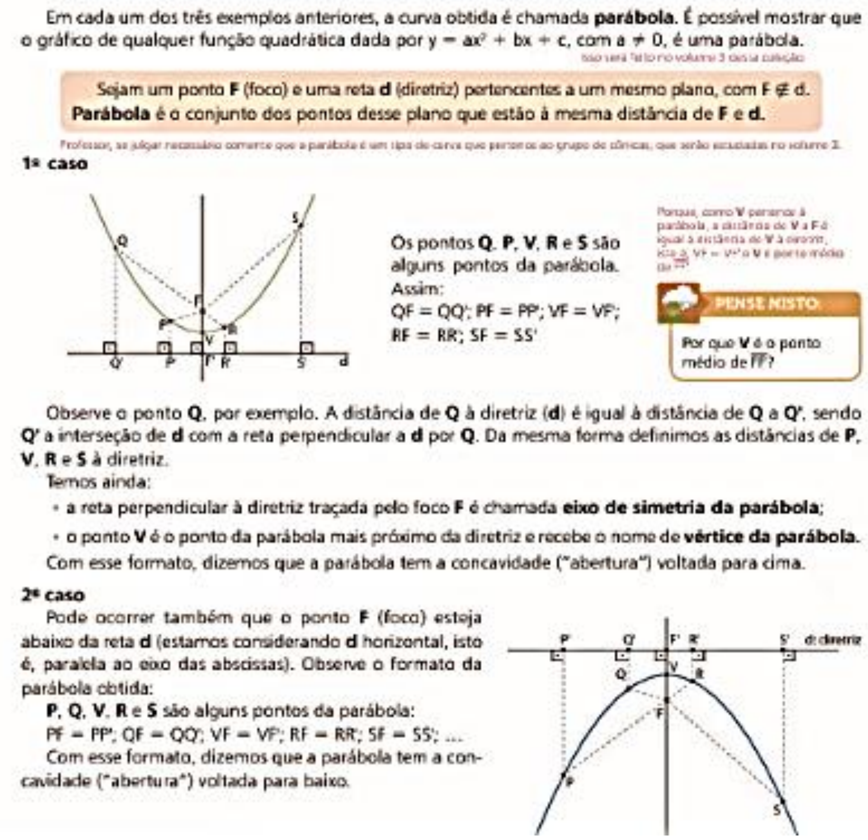

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 95)

Após os exemplos, o LD define qual o gráfico da função quadrática e suas respectivas propriedades como apresenta a Figura 23.

A definição exposta pelos autores do LD, sobre parábola, como ilustrada na Figura 23, dá-se pelos registros em linguagem natural e gráfica. O registro em linguagem natural tem por intuito tornar compreensível o que se explicita no registro gráfico, além de enunciar as propriedades referentes a parábola em seu aspecto geométrico. Essas propriedades são demonstradas em dois casos: quando a parábola tem concavidade voltada para cima ou com concavidade voltada para baixo.

Dessa forma, os autores apresentam-na partindo de um ponto e uma reta, que são respectivamente, o **foco (F)** e a **diretriz (d)** dispostos num mesmo plano em que **F** não pode pertencer a **d**. Todos os pontos pertencentes a esse mesmo plano que possuam a mesma distância entre **F** e **d** formam a parábola (gráfico da função quadrática), o LD ainda enfatiza que a reta d é paralela ao eixo das abscissas e que determina a distância na parábola. No entanto, no registro gráfico, não temos a representação do eixo das ordenadas e das abscissas, o que pode trazer uma confusão com as retas d (diretriz) como eixo das abscissas, e a reta que contém o F (foco) como eixo das ordenadas.

**Figura 23 -** Definição e propriedades do gráfico da função quadrática



Em cada um dos três exemplos anteriores, a curva obtida é chamada **parábola**. É possível mostrar que o gráfico de qualquer função quadrática dada por y = ax² + bx + c, com a ≠ 0, é uma parábola.

Sejam um ponto **F** (foco) e uma reta **d** (diretriz) pertencentes a um mesmo plano, com F ∉ d. **Parábola** é o conjunto dos pontos desse plano que estão à mesma distância de **F** e **d**.

**1º caso**

Os pontos **Q**, **P**, **V**, **R** e **S** são alguns pontos da parábola. Assim:
QF = QQ'; PF = PP'; VF = VF'; RF = RR'; SF = SS'

PENSE NISTO:
Por que **V** é o ponto médio de $\overline{FF'}$?

Observe o ponto **Q**, por exemplo. A distância de **Q** à diretriz (**d**) é igual à distância de **Q** a **Q'**, sendo **Q'** a interseção de **d** com a reta perpendicular a **d** por **Q**. Da mesma forma definimos as distâncias de **P**, **V**, **R** e **S** à diretriz.

Temos ainda:

- a reta perpendicular à diretriz traçada pelo foco **F** é chamada **eixo de simetria da parábola**;
- o ponto **V** é o ponto da parábola mais próximo da diretriz e recebe o nome de **vértice da parábola**.

Com esse formato, dizemos que a parábola tem a concavidade ("abertura") voltada para cima.

**2º caso**

Pode ocorrer também que o ponto **F** (foco) esteja abaixo da reta **d** (estamos considerando **d** horizontal, isto é, paralela ao eixo das abscissas). Observe o formato da parábola obtida:

**P**, **Q**, **V**, **R** e **S** são alguns pontos da parábola:
PF = PP'; QF = QQ'; VF = VF'; RF = RR'; SF = SS'; ...

Com esse formato, dizemos que a parábola tem a concavidade ("abertura") voltada para baixo.

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 96)

Pela Figura 23, ainda são definidos o eixo de simetria e o vértice da parábola, ambos nos registros em linguagem natural e gráfica. Por conseguinte, mais um questionamento é deixado para que os estudantes possam pensar e descobrir por que o vértice da parábola é o ponto médio entre o foco e a diretriz.

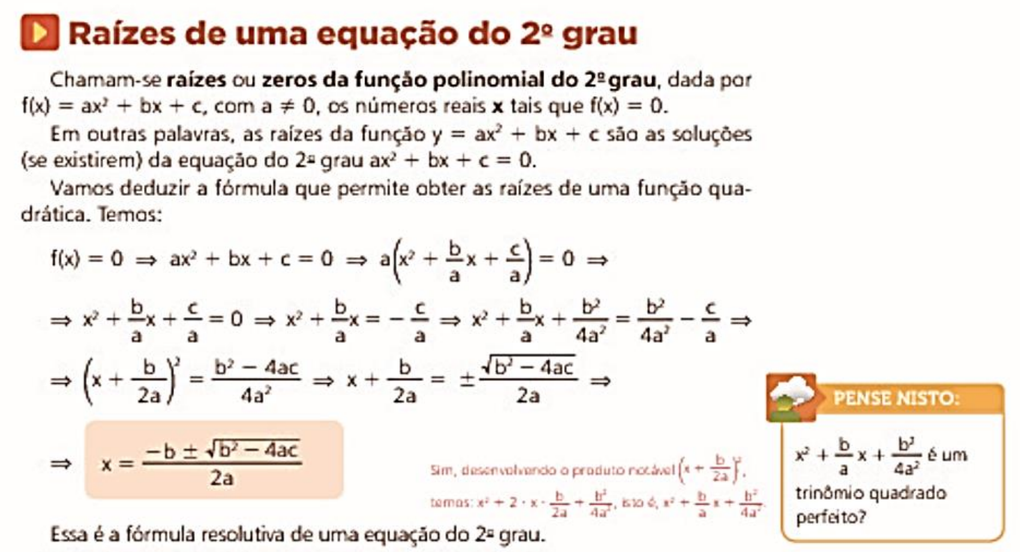
Sobre esse questionamento, podemos verificar que existe um parâmetro que é identificado pela distância entre o foco e a diretriz. Assim como uma propriedade ao fazer o estudo da parábola como um lugar geométrico, em que a distância entre o vértice a o foco será sempre igual a metade do parâmetro, por esse motivo que o vértice é o ponto médio do parâmetro.

No entanto, existe uma lacuna na explicação da parábola no que se refere a diretriz, pois o LD deixa de explicitar que a diretriz não coincidirá sempre com o eixo das abscissas, nem no registro gráfico e nem em linguagem natural. Como isso não fica explícito, os estudantes podem compreender que a diretriz será o eixo das abscissas, provocando uma compreensão errônea.

O tópico raízes de uma equação do 2º grau inicia explicando em linguagem natural o que são as raízes de uma função, e a nomeia também como "zero da função", já que $f(x) = 0$.

Após, apresenta a forma resolutiva da equação de segundo grau, mais conhecida como fórmula de Bháskara, usando a lei geral de formação da função quadrática, nesse caso, utiliza uma transformação, o tratamento, haja vista que faz uma manipulação no registro algébrico.

**Figura 24 -** Raízes de da função quadrática no LD



## Raízes de uma equação do 2º grau

Chamam-se **raízes** ou **zeros da função polinomial do 2º grau**, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais **x** tais que $f(x) = 0$.

Em outras palavras, as raízes da função $y = ax^2 + bx + c$ são as soluções (se existirem) da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos deduzir a fórmula que permite obter as raízes de uma função quadrática. Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Essa é a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau.

**PENSE NISTO:**

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ é um trinômio quadrado perfeito?

Sim, desenvolvendo o produto notável $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, temos: $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$, isto é, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.

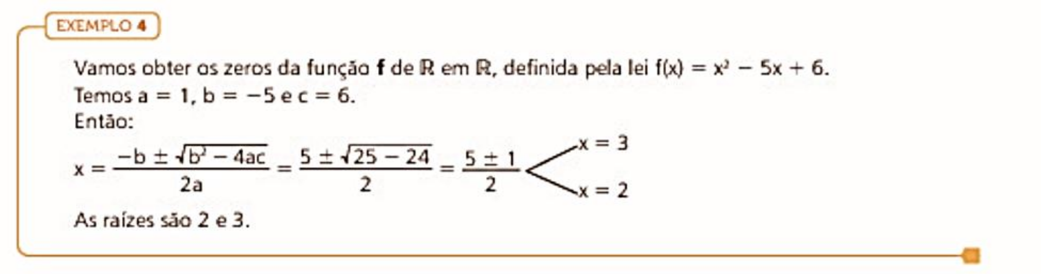
**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 97)

Ao olhar para o título desse tópico, percebe-se que em vez de função quadrática ou polinomial do 2º grau é descrito raízes de uma equação do 2º grau, no entanto, não está explícita a relação existente entre a equação e a função, o porquê utiliza-se da mesma fórmula nos dois casos para encontrar as raízes.

Deveria ser enfatizado que a função se apoia nas equações, e um dos casos é no momento de encontrar as raízes, pois ao tomar $f(x) = 0$, o $x$ da função não irá variar, assumirá um valor para as duas raízes (se o valor de delta for igual a zero), dois valores distintos (se o valor de delta for maior que zero) ou nenhum valor (se o valor de delta for menor que zero), ou seja, ela passa a assumir valores invariáveis dependendo do delta. Ainda assim, continua sendo uma função quadrática já que expressa uma relação entre elementos de dois conjuntos ($x$, $y$), no qual o $y$ assume o valor de zero em um momento.

Depois da exposição explicativa, o LD retoma com exemplos em que se aplicam a fórmula de Bhaskara para a resolução, logo, são tratamentos já que não existe a mudança de registro (Figura 25).

**Figura 25 -** Exemplo do cálculo das raízes de uma função quadrática


EXEMPLO 4

Vamos obter os zeros da função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
Temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.
Então:

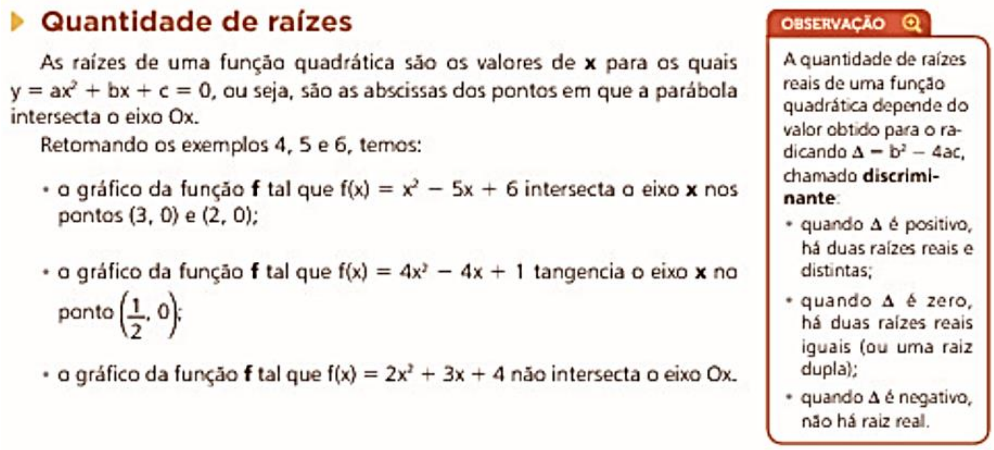
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

As raízes são 2 e 3.

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 98)

Esse tópico se divide em outras três partes: quantidade de raízes, soma e produto das raízes e forma fatorada. Quanto a apresentação, é seguido o padrão de explicação e exemplo.

**Figura 26 -** Definição de quantidade de raízes no LD


**Quantidade de raízes**

As raízes de uma função quadrática são os valores de **x** para os quais $y = ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, são as abscissas dos pontos em que a parábola intersecta o eixo Ox.

Retomando os exemplos 4, 5 e 6, temos:

- o gráfico da função **f** tal que $f(x) = x^2 - 5x + 6$ intersecta o eixo **x** nos pontos (3, 0) e (2, 0);
- o gráfico da função **f** tal que $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ tangencia o eixo **x** no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$;
- o gráfico da função **f** tal que $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ não intersecta o eixo Ox.

OBSERVAÇÃO

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado **discriminante**:

- quando $\Delta$ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando $\Delta$ é zero, há duas raízes reais iguais (ou uma raiz dupla);
- quando $\Delta$ é negativo, não há raiz real.

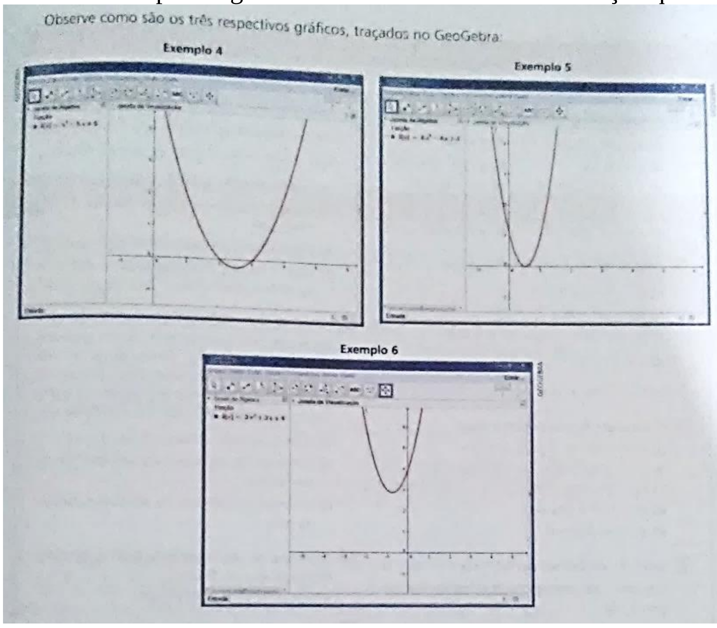
**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 98)

No LD é evidenciada a quantidade de raízes da função quadrática relacionando ao seu gráfico, a parábola. Portanto, inicia explicitando em linguagem natural que as raízes estão representadas na intersecção da parábola com o eixo das abscissas, e usando a resposta dos exemplos anteriores comunica os pares ordenados em que a parábola toca o eixo *x*. Do lado direito, na Figura 26, existe uma observação[9] que relaciona a quantidade de raízes ao valor de delta ($\Delta$), no entanto, é como se fosse algo a margem ou pouco importante, já que não é enfatizado normalmente.

Vale salientar que nos exemplos apresentados pelo LD, o valor de *a* é sempre maior que ou igual a 1. Além disso, representa também o registro gráfico traçado no GeoGebra (Figura 27).

[9] Quadros com pequenas explicações, sugestões ou questionamentos, geralmente passam despercebidos pelos estudantes, se o professor não mostrar ou não enfatizar em aula.

**Figura 27 -** Exemplo do gráfico enfatizando as raízes da função quadrática




**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 99)

A parte que retrata a soma e produto das raízes e a forma fatorada retratam a transformação de tratamento ao realizar manipulações algébricas para mostrar como chegar às fórmulas (Figura 28).

**Figura 28 -** Definição de soma e produto e forma fatorada da função quadrática no LD

### Soma e produto das raízes

Sendo $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

### Forma fatorada

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial do 2º grau dada por $y = ax^2 + bx + c$, com raízes $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, então **f** pode ser escrita na forma $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, que é a chamada **forma fatorada** da função do 2º grau (lembre-se de que fatorar uma expressão algébrica significa escrevê-la sob a forma de multiplicação).

Vamos mostrar esta propriedade:

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Lembrando que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, podemos escrever:

$$y = a \cdot [x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2]$$
$$y = a \cdot [\underbrace{x^2 - x_1x} - \underbrace{x_2x + x_1x_2}]$$
$$y = a \cdot [x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)]$$
$$y = a \cdot [(x - x_1) \cdot (x - x_2)] = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 100-101)

No enunciado que define a forma fatorada está explícita que ela é outra maneira de escrever a função quadrática, e que facilita o encontro das raízes, basta fatorar a função dada na sua forma desenvolvida, ou seja, realizar um tratamento no mesmo registro, o registro algébrico.

O tópico coordenadas do vértice da parábola ressalta nos registros gráfico, algébrico e em linguagem natural o par ordenado que representa o vértice da função quadrática. Em ambos registros, são explicitados quando a parábola (registro gráfico) possui ponto de máximo ou de mínimo. O LD para expor em registro algébrico o par ordenado que representa o vértice da função (a fórmula para encontrar o $x_v$ e o $y_v$), apresenta a forma canônica da função quadrática, que é encontrada (transformação de tratamento) usando a forma desenvolvida (Figura 29).

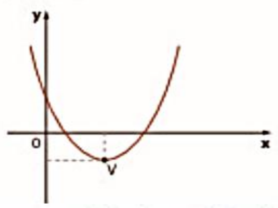
**Figura 29 -** Definição da coordenada do vértice da parábola no LD

## Coordenadas do vértice da parábola

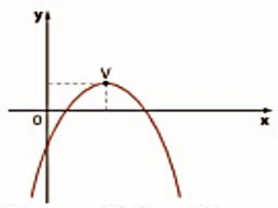
Vamos obter as coordenadas do ponto **V**, chamado **vértice da parábola**.

Se a > 0, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo **V**; se a < 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo **V**.

- Se a > 0




- Se a < 0




Vamos retomar a fórmula que define a função quadrática e escrevê-la de outra forma:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Essa última forma é denominada **forma canônica** da função quadrática.

Observando a forma canônica, podemos notar que **a**, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes. Apenas **x** é variável. Daí:

- se a > 0, então o valor mínimo de **y** é estabelecido quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$; como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre se $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, se $x = -\frac{b}{2a}$; nessa situação, o valor mínimo de **y** é:

$$y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$$

- se a < 0, por meio de raciocínio semelhante, concluímos que o valor máximo de **y** ocorre se $x = -\frac{b}{2a}$; nessa situação, o valor máximo de **y** é:

$$y = a\left(0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

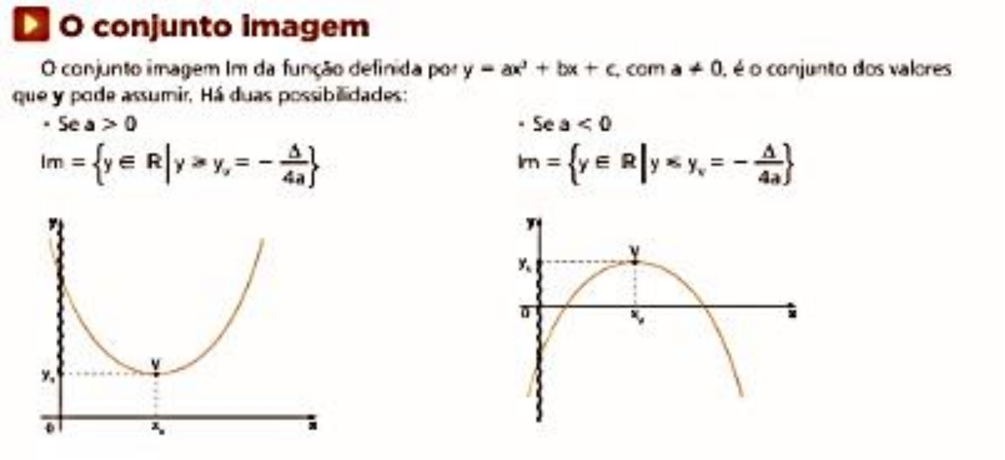
Concluindo, em ambos os casos as coordenadas de **V** são:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 102-103)

Assim como no último tópico mencionado, o próximo, intitulado de o conjunto imagem, define-o por meio dos registros algébrico e gráfico, usando a linguagem natural como apoio.

**Figura 30 -** Definição do conjunto imagem no LD



**O conjunto imagem**

O conjunto imagem Im da função definida por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que **y** pode assumir. Há duas possibilidades:

- Se $a > 0$

$$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq y_v = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

- Se $a < 0$

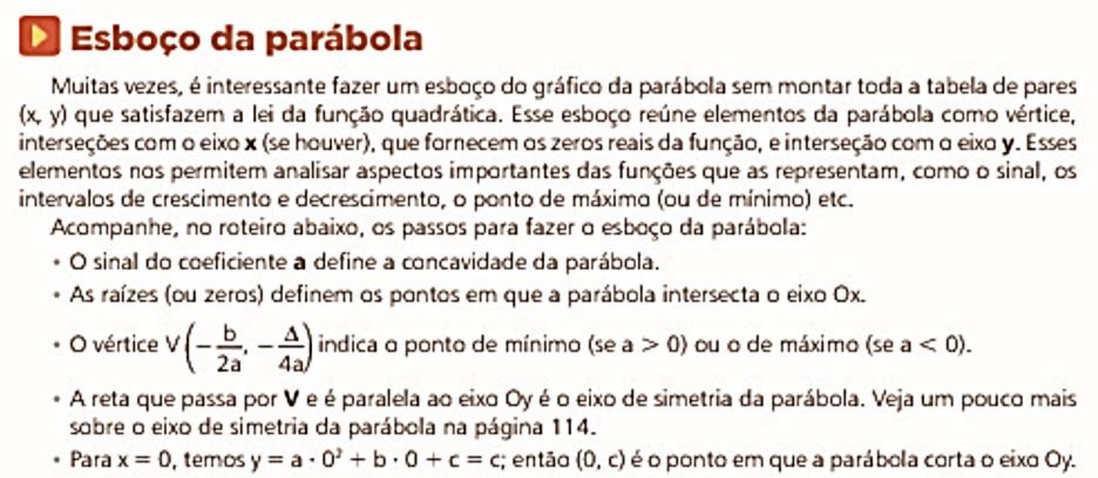
$$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \leq y_v = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$



**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 104)

Embora o LD tenha apresentado o gráfico da função quadrática no início do capítulo, como supracitado nessa análise, existe outro tópico para se tratar do gráfico, o esboço da parábola. Nesse tópico, são expostas e retomadas (algumas já foram enunciadas ao longo do capítulo) as variáveis visuais da parábola em coordenação com as unidades significativas na lei de formação da função (Figura 31).

**Figura 31 -** Tópico esboço da parábola no LD



**Esboço da parábola**

Muitas vezes, é interessante fazer um esboço do gráfico da parábola sem montar toda a tabela de pares (x, y) que satisfazem a lei da função quadrática. Esse esboço reúne elementos da parábola como vértice, interseções com o eixo **x** (se houver), que fornecem os zeros reais da função, e interseção com o eixo **y**. Esses elementos nos permitem analisar aspectos importantes das funções que as representam, como o sinal, os intervalos de crescimento e decrescimento, o ponto de máximo (ou de mínimo) etc.

Acompanhe, no roteiro abaixo, os passos para fazer o esboço da parábola:

- O sinal do coeficiente **a** define a concavidade da parábola.
- As raízes (ou zeros) definem os pontos em que a parábola intersecta o eixo Ox.
- O vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou o de máximo (se $a < 0$).
- A reta que passa por **V** e é paralela ao eixo Oy é o eixo de simetria da parábola. Veja um pouco mais sobre o eixo de simetria da parábola na página 114.
- Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então $(0, c)$ é o ponto em que a parábola corta o eixo Oy.

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 106)

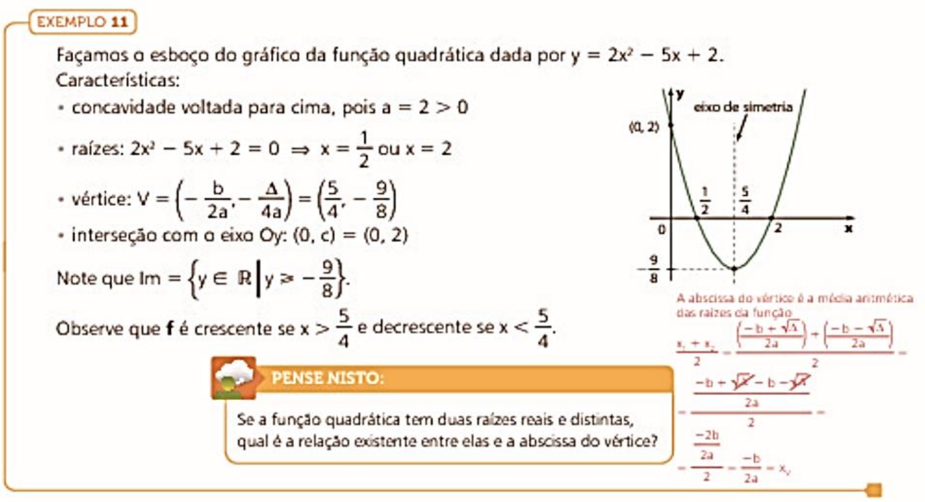
Da Figura 31, destacamos a discriminação de quatro unidades significantes: o sinal de **a**; as raízes; o vértice; e o coeficiente **c**, que na parábola possuem, respectivamente, como variáveis visuais: a concavidade; os pontos que intersectam o eixo das abscissas; o ponto de máximo ou mínimo da parábola; e a intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

Existem outras unidades de sentido a serem pontuadas que o LD não aborda, como o sinal de **b** nos casos em que a parábola cresce ou decresce após tangenciar o eixo das ordenadas.

Assim como, unidades significativas apontadas na Figura 31 – as raízes e o vértice – são tomados a partir de manipulação no registro algébrico em sua forma desenvolvida (exemplo na Figura 28), onde poderia ser expressa na forma fatorada ou canônica, o que implicaria na coordenação entre os registros, por parte dos alunos. Pois, na forma como foi mencionada (Figura 28) trata-se apenas de um tratamento incluso no processo de conversão, que não possibilita a coordenação entre os RA e RG.

Por conseguinte, Duval (2009) aponta que a interpretação de um gráfico não é o mesmo que realizar a sua leitura. Na leitura, são discriminados os valores visuais do gráfico, a interpretação que ele fala, é a abordagem de interpretação global das propriedades figurais, e isso não é simplesmente reconhecer alguns valores visuais, mas discriminar todos e que o sujeito possa realizar a coordenação entre os registros gráfico e algébrico, assim como no movimento de translação do gráfico.

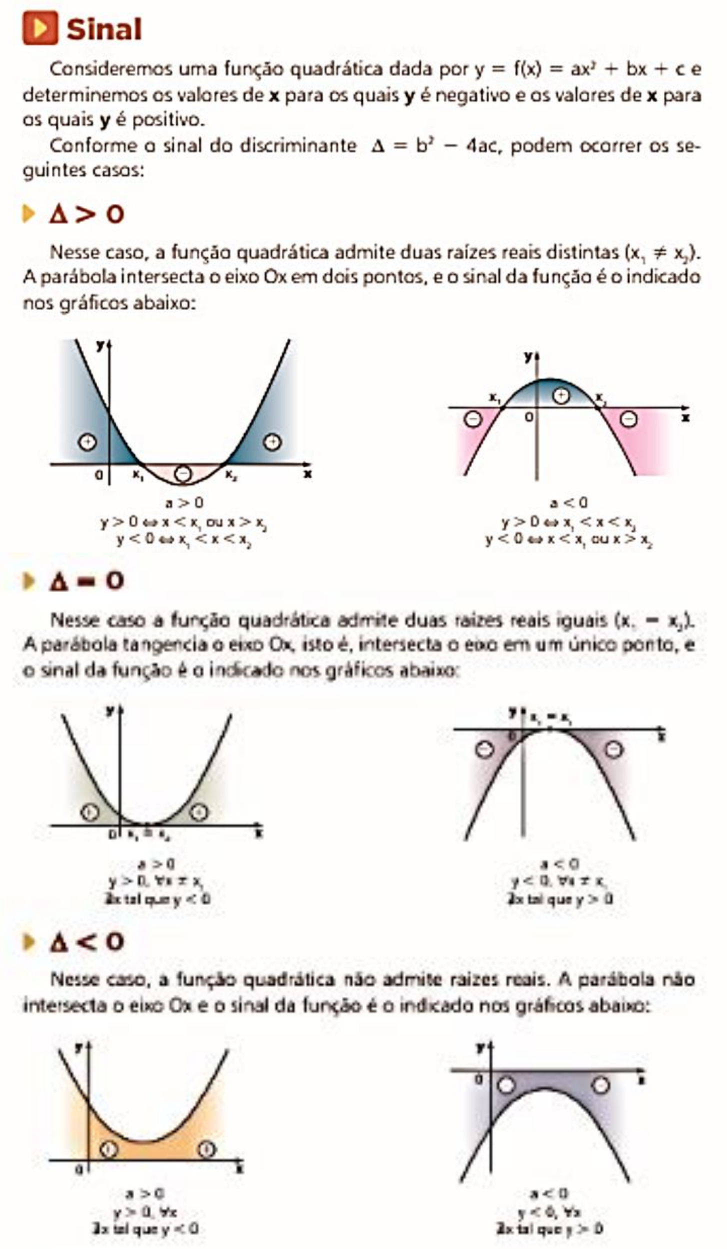
**Figura 32 -** Exemplo do esboço da parábola no LD




**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 107)

O penúltimo tópico, **sinal**, traz o estudo do sinal da função quadrática nos registros gráfico, algébrico e em linguagem natural (Figura 33), seguido de exemplos que acentuam os mesmos registros, realizando a articulação entre eles. Tem-se, portanto, uma conversão em dois sentidos (heterogeneidade em dois sentidos), onde evidencia-se a conversão RA→RG, assim como RG→RA.

**Figura 33 -** Tópico de estudo do sinal da função quadrática no LD



**Sinal**

Consideremos uma função quadrática dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ e determinemos os valores de **x** para os quais **y** é negativo e os valores de **x** para os quais **y** é positivo.

Conforme o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, podem ocorrer os seguintes casos:

**$\Delta > 0$**

Nesse caso, a função quadrática admite duas raízes reais distintas ($x_1 \neq x_2$). A parábola intersecta o eixo Ox em dois pontos, e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



**$\Delta = 0$**

Nesse caso a função quadrática admite duas raízes reais iguais ($x_1 = x_2$). A parábola tangencia o eixo Ox, isto é, intersecta o eixo em um único ponto, e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



**$\Delta < 0$**

Nesse caso, a função quadrática não admite raízes reais. A parábola não intersecta o eixo Ox e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 109-110)

Portanto, no que tange a parte de abordagem e explicação da função quadrática no LD analisado, existe a variedade de registros de representação semiótica para o estudo desta, e na maioria dos casos há articulação entre os registros, principalmente quando se articula os registros algébricos ao gráfico denotando que as modificações nas unidades de sentido de um resultam em alteração no outro registro, como nos exemplos do tópico raízes de uma equação do 2º grau (Figura 26 e 27), coordenadas do vértice da parábola (Figura 28) e esboço da parábola (Figura 32).

Algo a ser destacado é que não houve o procedimento de interpretação global das propriedades figurais ao realizar o estudo entre os registros algébrico e gráfico, no entanto, foram explicitados alguns valores visuais (no registro gráfico) em correspondência de unidades significativas (registro algébrico) que auxiliam os estudantes na leitura dos gráficos, pois, Duval (2009) salienta que “o aluno que não as discrimine é como cego para conversão inversa[10] da que é classicamente ensinada” (p. 79).

Além disso, embora o LD apresente as representações algébricas: canônica e fatorada, estas não são trabalhadas nas atividades e no restante dos tópicos que são abordados, dando ênfase a forma desenvolvida da função quadrática.

### 4.1.2 Atividades

A análise destinada a esse tópico se refere a expor sob a ótica da TRRS as atividades dispostas pelos autores no LD. Para isso, adotou-se as categorias de análise descritas nos procedimentos metodológicos. Os subtópicos apresentados nessa seção seguem a partir de como o próprio LD classificou as atividades:  exemplos, exercícios resolvidos, troque ideias, exercícios e desafio.

#### 4.1.2.1 Exemplos

Nesse item, abordaremos a análise e discussão dos exemplos propostos no LD.

**I. Quantidade de Tratamento e Conversões nos exemplos**

O LD apresenta um total de 20 exemplos que são dispostos nos tópicos supracitados na seção anterior, no entanto, desconsiderando o tópico de inequações que contém 4 exemplos, denotamos 16 exemplos que abordam e explanam da função quadrática no LD. Nesses exemplos são encontradas algumas transformações de tratamento e conversão, em que as quantidades estão representadas na Tabela 2.

**Tabela 2 -** Quantidade de tratamentos e conversões nos exemplos do LD

| | **Tratamento** | **Conversão** | | **Conversão (RA→RG e vice-versa) e tratamento** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **RA→RG (usando RT)** | **RG→RA** | | |
| | 4 | 3 | 1 | 8 | |
| **Total** | 4 | 4 | | 8 | 16 |

**Fonte:** Elaborado pela autora

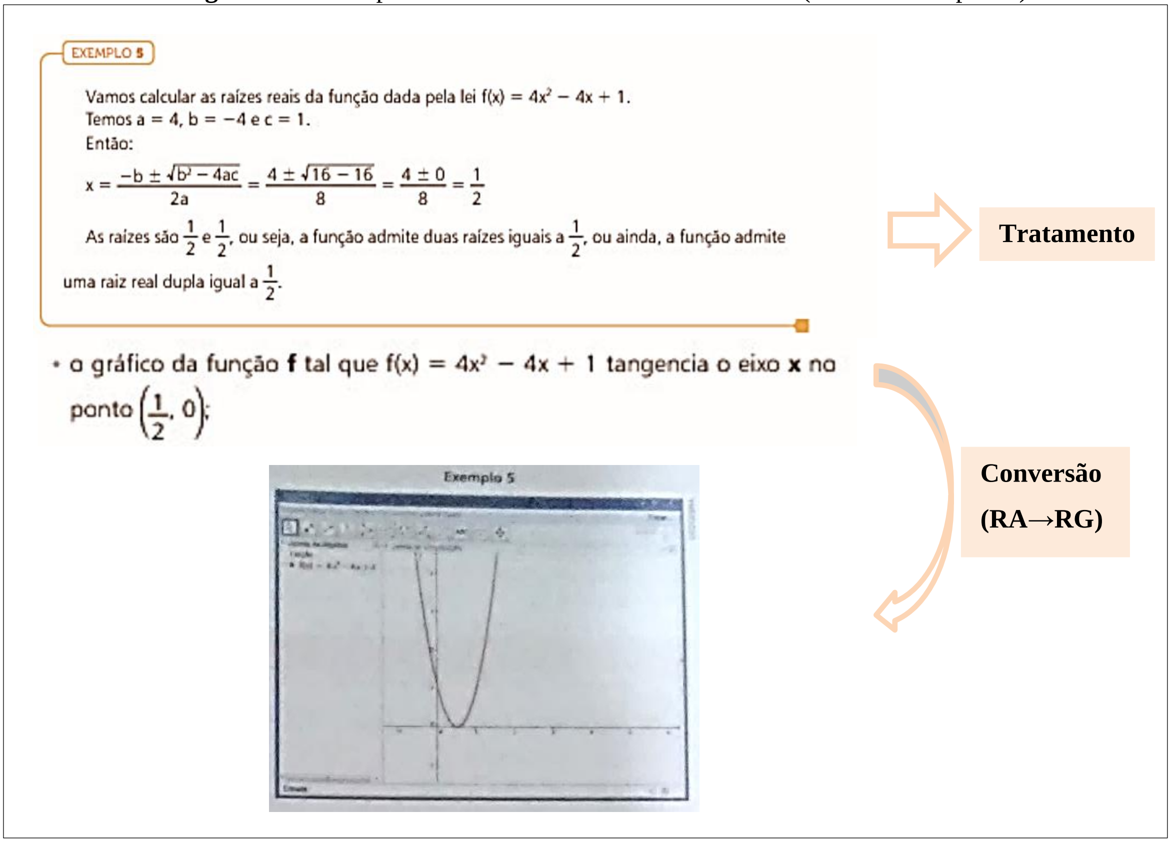
[10] Conversão partindo do registro gráfico para o registro algébrico.

A Tabela 2 indica que existe maior número de exemplos que enfatizam conversões e tratamentos concomitantemente. A conversão evidenciada nos exemplos são os registros algébrico (RA) e gráfico (RG), e esta é realizada nos dois sentidos.

Contudo, existe uma diferença em exemplos que abordam essa mesma conversão, três deles fazem uso de um registro auxiliar (o registro tabular – RT), e os outros três relacionam algumas variáveis visuais do gráfico as unidades significantes no registro algébrico por meio de tratamentos algébricos no tópico esboço do gráfico, em ambos os casos é realizado o procedimento ponto a ponto para construir o gráfico.

Os demais exemplos apresentam uma parte envolvendo tratamento e outra conversão, por estarem divididos (raízes de uma equação do 2º grau e quantidade de raízes), como o exemplo exposto na Figura 34.

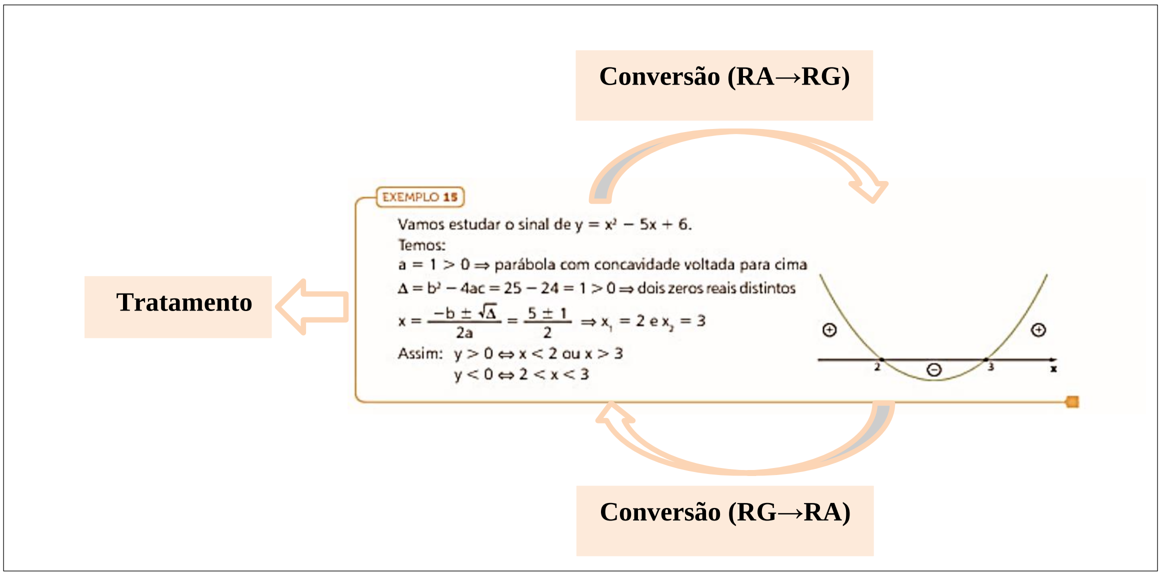
**Figura 34 -** Exemplo envolvendo tratamento e conversão (divididos em partes)




**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 98-99)

Com essa característica identificou-se 3 exemplos, mas não foram os únicos que apresentaram concomitantemente as transformações de tratamento e conversão, outra característica para esse fato acontece pelos exemplos não deixaram claro em que registro deve ser resolvida a questão, utilizando assim o registro algébrico e gráfico em conversões nos dois sentidos (RA→RG e RG→RA), como no caso do estudo do sinal (Figura 35).

**Figura 35 -** Exemplo com tratamento e conversão concomitantemente




**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 110)

Nessa questão, o LD não deixa claro se o estudo do sinal deve ser realizado fazendo as operações (tratamento) partindo do registro algébrico ou realizando o estudo no registro gráfico (conversão). Com essa característica, foram identificados 2 exemplos.

Vale salientar, que ao destacarem-se as duas transformações em um único exemplo, enfatiza-se que esse exemplo não está explícito o uso de um ou mais registros, ou ainda, que um mesmo exemplo serviu de base para prosseguir com a explicação do conceito no LD, utilizando mais de um registro e que implicou em uma conversão em alguma parte. Pois, existem questões que embora se evidencie um processo de conversão, faz-se necessário realizar um tratamento no registro algébrico dado, a fim de convertê-lo, como é o caso das questões em que faz-se o tratamento para encontrar as raízes e o vértice no registro algébrico, para poder converter o RA para o RG (foram 3 exemplos com essa característica).

## II. Variação de Congruência e não congruência semântica nos exemplos

Nessa parte, investigaram-se os exemplos possuem congruência semântica ou não, de acordo com os critérios estipulados por Duval (2009):

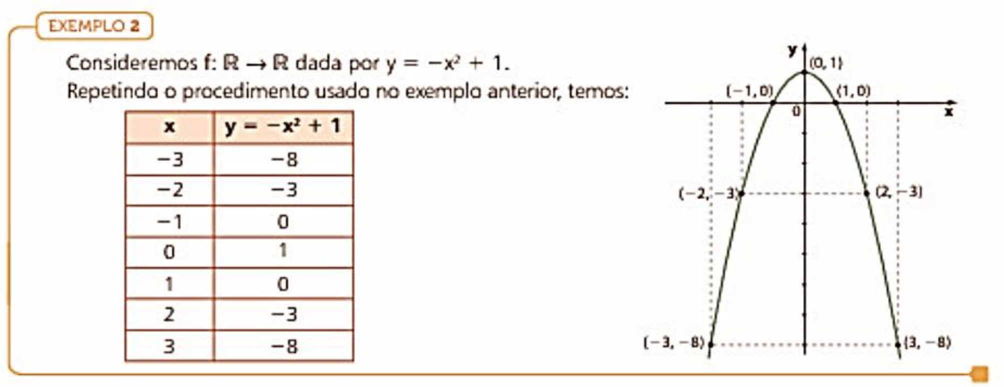
> Duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações. Naturalmente, pode não haver correspondência para nenhum desses três critérios, para dois ou somente para um. A não-congruência entre duas representações pode então ser maior ou menor (p. 69).

A classificação em termos da variação de não congruência foi construída a partir desses critérios. Quando há correspondência para dois dos critérios, há um grau de não congruência semântica baixo; quando existe correspondência para somente um critério, há um grau de não congruência semântica médio; quando não há correspondência em nenhum dos critérios, existe um grau de não congruência semântica alto.

Assim, “a dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não-congruência entre a representação de partida e a representação de chegada” (DUVAL, 2009, p. 69).

Vale salientar que o olhar sobre esses critérios serão apenas vislumbrados nos exemplos em que existe a atividade de conversão. Para isso, vejamos um exemplo em que a conversão acontece no sentido registro algébrico (RA) → registro gráfico (RG) usando o registro tabular (RT) como registro auxiliar (Figura 36).

**Figura 36 -** Exemplo de conversão no RA→RG usando o RT



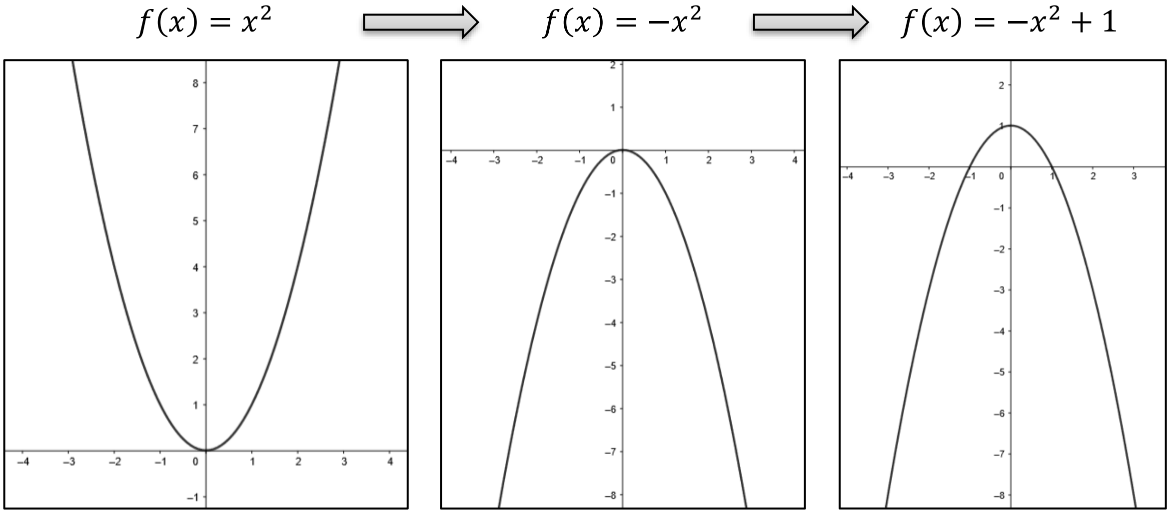

| x | $y = -x^2 + 1$ |
|---|---|
| −3 | −8 |
| −2 | −3 |
| −1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | −3 |
| 3 | −8 |

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 95)

O procedimento estabelecido nessa resolução é a abordagem ponto a ponto, em que são selecionados alguns valores para a variável *x*, substituídos na lei de formação da função quadrática dada e encontrados valores para *y*. Desse modo, são formados pares ordenados, organizados numa tabela, que são dispostos no plano cartesiano e ligados a fim de construir o gráfico (a parábola). Isso resulta em uma conversão indireta, já que converte-se RA→RT e depois RT→RG, onde o RT é o registro auxiliar que não ajuda na coordenação entre os registros.

No entanto, se o LD ousasse apresentar a construção do gráfico fazendo uso da translação – uma das formas mais próximas de se chegar ao procedimento de interpretação global das propriedades figurais, de acordo com Moretti (2003) – os estudantes poderiam perceber que as mudanças ocorridas no registro algébrico ocasionam determinadas mudanças no registro gráfico, como mostra a construção do gráfico para esta mesma função, na Figura 37.

**Figura 37 -** Esboço do gráfico da função do exemplo 2 usando a translação




**Fonte:** Elaborado pela autora

Com relação a resolução apresentada pelo LD, ao que concerne à variação de congruência ou não congruência semântica, já é estabelecido que a **ordem de organização entre duas representações (C)** não é satisfeita na conversão do RA→RG já que o registro de partida tem dimensão 1D e o registro de chegada 2D, pois a “ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão” (DUVAL, 2009, p. 69).

Há **correspondência semântica entre os elementos significantes (A)**, neste caso específico, já que os elementos significativos do RA possuem relação um a um com as variáveis visuais do RG:

- Sinal de $a$ é negativo ($a = -1$) a concavidade da parábola está voltada para baixo;
- O sinal de $b$ é nulo ($b = 0$) então a parábola corta o eixo das ordenadas no ponto de máximo (0,1);
- O valor de $c$ ($c = 1$) é o ponto onde a parábola toca o eixo das ordenadas.

Portanto, as unidades significantes do RA possuem correspondência semântica com as variáveis visuais do RG. No entanto, se o registro algébrico (de partida) fosse escrito e sua forma canônica $y = -1(x-0)^2 + 1$ (como apresentado pelo movimento e translação na Figura 37) esse critério seria ainda mais visível, pois, já que as unidades significantes (RA) associadas aos valores visuais (RG) corresponderiam:

- A concavidade da parábola é voltada para baixo, devido o sinal do valor que corresponde ao coeficiente $a$, em que $a = -1$;
- Como $m = 0$ então a parábola não terá deslocamento horizontal para esquerda ou direita;

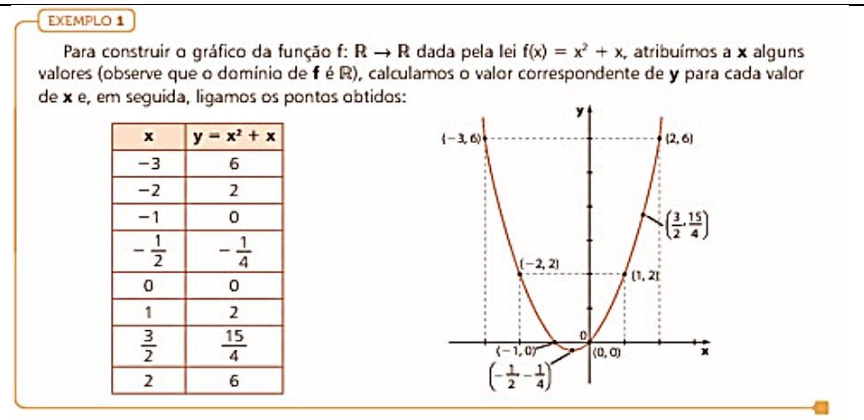
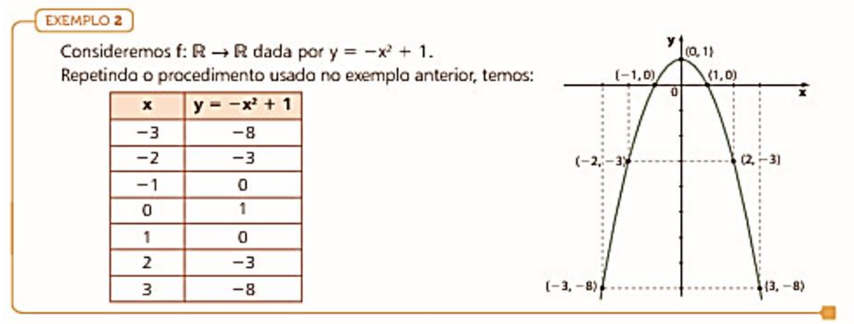
- Como $k = 1$ a parábola se deslocará uma unidade para cima.

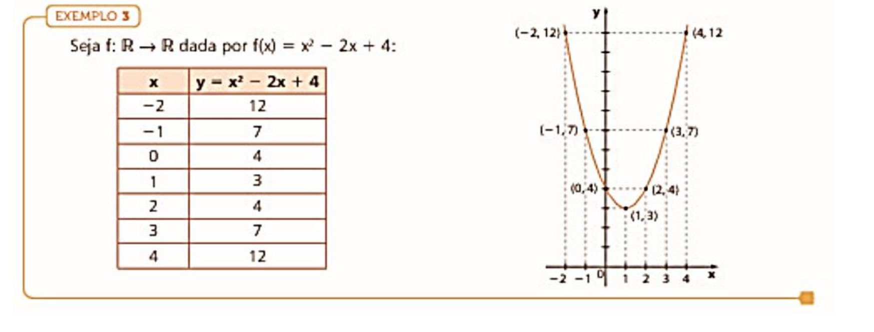
Logo, usando a forma canônica $y = -1(x-0)^2 + 1$, existiria a correspondência semântica entre cada elemento significante das duas representações.

A **univocidade semântica terminal (B)** não é satisfeita, pois a cada unidade significante da representação de saída não existe apenas um significado no registro de chegada, como é o caso do valor do coeficiente *c*, já que no gráfico ele possui duas interpretações: o ponto que corta o eixo das ordenadas e a ordenada do vértice.

Assim, esse exemplo possui um nível de não congruência médio, em que o critério (B e C) não é correspondido. Os dois exemplos, seguintes, que se referem à conversão RA→RG usando o RT, possuem também nível de não congruência médio, e nesses casos, o critério não estabelecido é o critério (A e C) como mostra o Quadro 8, em que se destaca as simbologias que representam que os critérios A, B ou C, que são, respectivamente, correspondência semântica, univocidade semântica terminal e ordem nas unidades significativas de cada uma das representações, são satisfeitos ou não. Se o critério foi correspondido a simbologia é ©, quando ele não for correspondido, o símbolo será (**X**).

**Quadro 8 -** Exemplos de conversões RA→RG (RT) com análise de conservação dos critérios de congruência

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Critérios</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exemplo 1</td><td rowspan="3"><br>EXEMPLO 1<br>Para construir o gráfico da função f: R → R dada pela lei f(x) = x² + x, atribuímos a x alguns valores (observe que o domínio de f é R), calculamos o valor correspondente de y para cada valor de x e, em seguida, ligamos os pontos obtidos:<br><table><tr><th>x</th><th>y = x² + x</th></tr><tr><td>−3</td><td>6</td></tr><tr><td>−2</td><td>2</td></tr><tr><td>−1</td><td>0</td></tr><tr><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{4}$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{15}{4}$</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr></table></td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exemplo 2</td><td rowspan="3"><br>EXEMPLO 2<br>Consideremos f: R → R dada por y = −x² + 1.<br>Repetindo o procedimento usado no exemplo anterior, temos:<br><table><tr><th>x</th><th>y = −x² + 1</th></tr><tr><td>−3</td><td>−8</td></tr><tr><td>−2</td><td>−3</td></tr><tr><td>−1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>−3</td></tr><tr><td>3</td><td>−8</td></tr></table></td><td>A</td><td>©</td></tr>
<tr><td>B</td><td>X</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Exemplo 3</td><td rowspan="3">

<table>
<tr><th>x</th><th>$y = x^2 - 2x + 4$</th></tr>
<tr><td>−2</td><td>12</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>7</td></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>12</td></tr>
</table></td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
</table>

**Fonte:** Elaborado pela autora

Nos exemplos no Quadro 8, entre o registro tabular e o registro gráfico existe congruência, já que os critérios A, B e C são satisfeitos, ou seja, há correspondência semântica nas unidades significantes (A) pois, só há um ponto no plano cartesiano para cada par ordenado; a univocidade semântica terminal (B) é correspondida, haja vista que para cada par ordenado da tabela existe um único ponto no gráfico; e existe ordem nas unidades significantes (C), os valores dispostos na tabela lidos de cima para baixo (como se lê uma tabela) seguem a mesma ordem dos pontos dispostos na parábola que foi ligada por eles, ao lê-la da esquerda para a direita (como deve ser lida). Mas, no que tange ao posicionamento da conversão direta RA→RG, ela possui alto nível de não congruência (com exceção do exemplo 2) pois as unidades significantes do RA não transparecem diretamente no RG.

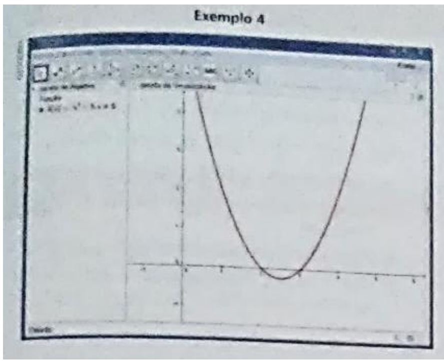
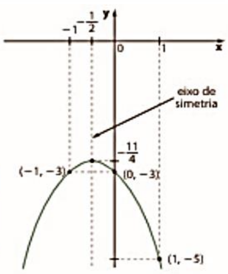
Nesse caso, "o registro de chegada é uma descrição da situação apresentada pela representação intermediária e não pela representação de saída" (DUVAL, 2009, p. 109-110), isto é, o registro gráfico é uma descrição do registro tabular, isto significa, que acontecem duas conversões: RA→RT e RT→RG. Quando os estudantes aprendem a construir gráficos apenas dessa maneira, encontram muitas dificuldades em realizarem a conversão inversa (RG→RA), já que as unidades significantes do gráfico não são estabelecidas por um conjunto de pontos encontrados, mesmo que estes sejam em grande número.

Além desses exemplos não fazerem a coordenação entre as unidades significantes do registro algébrico para o gráfico, outro fator que tende a dificultar ainda mais a compreensão é que existem duas conversões ao invés de uma.

Todavia, o LD traz exemplos que mostram outra maneira de esboçar o gráfico relacionando algumas unidades significantes aos valores visuais do gráfico, porém não o faz uma conversão direta, e continua utilizando a abordagem ponto a ponto, já que realiza tratamentos no registro algébrico que se encontra na forma desenvolvida para chegar a pontos precisos no registro gráfico.

Por esse motivo, os exemplos continuam sendo não congruentes com um grau médio, como revela o Quadro 9 (enfatizamos que o livro didático apresenta exemplos semelhantes, e assim, por obterem o mesmo resultado na análise, consideramos apenas um deles para exemplifica-la, como é o caso dos exemplos 4, 5 e 6, assim apresentou-se apenas o exemplo 4, e nos casos dos exemplos 11, 12 e 13, e apresentou-se os exemplos 11 e 13, haja vista a diferença na concavidade da parábola, mesmo havendo igualdade na análise).

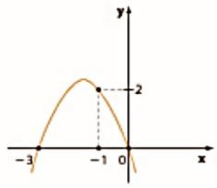
**Quadro 9 –** Exemplos de congruência RA→RG com análise de conservação dos critérios de congruência

| | | Critérios | |
|---|---|---|---|
| **Exemplo 4** | • o gráfico da função **f** tal que $f(x) = x^2 - 5x + 6$ intersecta o eixo **x** nos pontos (3, 0) e (2, 0);<br><br> | **A** | **X** |
| | | **B** | © |
| | | **C** | **X** |
| **Exemplo 11** | EXEMPLO 11<br>Façamos o esboço do gráfico da função quadrática dada por $y = 2x^2 - 5x + 2$.<br>Características:<br>• concavidade voltada para cima, pois $a = 2 > 0$<br>• raízes: $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$<br>• vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$<br>• interseção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, 2)$<br>Note que $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{8}\right\}$.<br>Observe que **f** é crescente se $x > \frac{5}{4}$ e decrescente se $x < \frac{5}{4}$.<br><br> | **A** | **X** |
| | | **B** | © |
| | | **C** | **X** |
| **Exemplo 13** | EXEMPLO 13<br>Vamos fazer o esboço do gráfico da função quadrática dada por $y = -x^2 - x - 3$.<br>Características:<br>• concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$<br>• zeros: $-x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \nexists x$ real, pois $\Delta < 0$<br>• vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$<br>• interseção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, -3)$<br>Como temos apenas dois pontos, é recomendável obter mais alguns, por exemplo:<br>$x = 1 \Rightarrow y = -5$; $(1, -5)$<br>$x = -1 \Rightarrow y = -3$; $(-1, -3)$ etc.<br>Note que $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{11}{4}\right\}$.<br>$x = -2$<br>Não é necessário substituir **y** por −5 para resolver a equação e encontrar outro valor.<br>Considerando a simetria da parábola e a abscissa do vértice $x_v = -\frac{1}{2}$, temos que:<br>$f\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$<br>isto é, $f(1) = f(-2) = -5$.<br>PENSE NISTO:<br>Na parábola desse exemplo, qual é o outro valor de **x** correspondente a $y = -5$?<br><br> | **A** | **X** |
| | | **B** | © |
| | | **C** | **X** |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Ainda nessa seção de esboço de gráfico, o LD expõe um único exemplo no sentido inverso (RG→RA), em que é dado um gráfico e pede-se para determinar a lei de formação da função quadrática. E nesse caso, usando a conversão inversa, o LD não realiza a conversão para o registro algébrico na forma desenvolvida, que já vinha trabalhando em todos os outros exemplos, nesse caso específico, é usada a forma fatorada do RA e depois realizado um tratamento para chegar na forma desenvolvida.

**Quadro 10 -** Exemplo de conversão RG→RA com análise de conservação dos critérios de congruência

<table>
<tr><th></th><th></th><th colspan="2">Critérios</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Exemplo 14</td><td rowspan="3">EXEMPLO 14<br>Vamos determinar a lei da função quadrática cujo esboço do gráfico está representado ao lado.<br>As raízes da função quadrática são −3 e 0; então sua lei, na forma fatorada, é:<br>$y = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 0)$<br>Para $x = -1$, temos $y = 2$, então:<br>$2 = a(-1 + 3) \cdot (-1 - 0) \Rightarrow 2 = -2a \Rightarrow a = -1$<br>Daí:<br>$y = -1(x + 3) \cdot x \Rightarrow y = -x^2 - 3x$<br><br></td><td>A</td><td>©</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
</table>

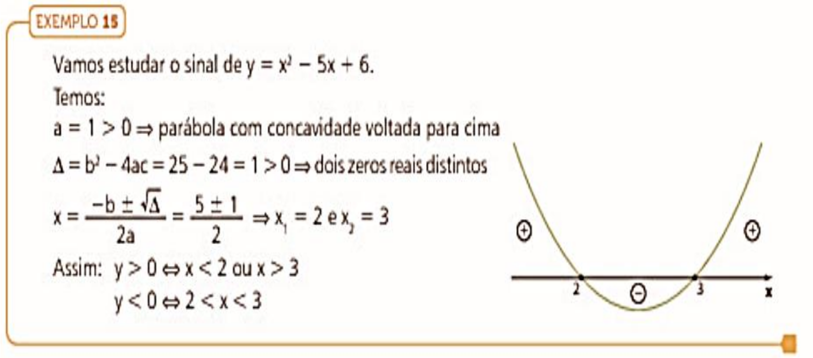
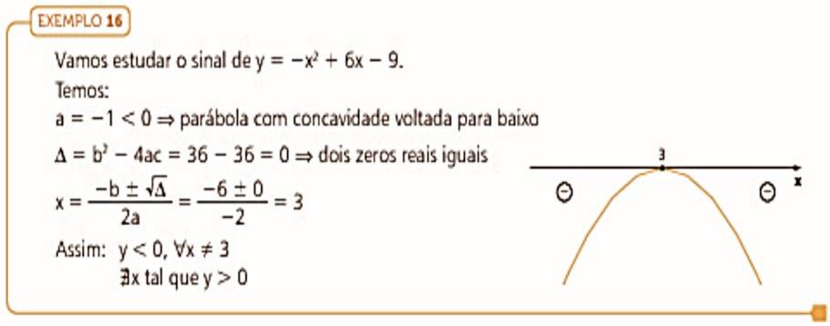
**Fonte:** Elaborado pela autora

Pelo Quadro 10, o grau de não congruência entre as duas representações é baixo, porque além da univocidade semântica terminal (B) que já era conservada nas outras representações, é satisfeito, nesse exemplo, a correspondência semântica das unidades significantes, já que pela forma fatorada do registro algébrico é possível visualizar as raízes da função quadrática que também estão dispostas no gráfico (são os pontos de intersecção com o eixo *x*), e usando um dos pontos, distintos das raízes, que é dado é possível encontrar a lei de formação da função realizando uma transformação de tratamento.

Nos 2 exemplos que permitem fazer o estudo do sinal, a conversão partindo do registro de saída (RA) para o registro de chegada (RG) antes de efetuar os tratamentos (ao qual estudou-se o sinal) é caracterizada como uma não congruência de grau alto, pois pelas mesmas justificativas apresentadas a partir dos Quadros 8 e 9, não são conservados os critérios de correspondência semântica das unidade significantes (A) e nem a ordem de organização nas unidades significantes (C) das duas representações. Além disso, não é satisfeita a univocidade semântica terminal (B), haja vista que cada unidade significante do registro algébrico não expressa o mesmo sentido no registro gráfico, já que no gráfico tem-se os sinais de + e -, e no registro algébrico < e > (Quadro 11).

Também, acontece a conversão do RG para o RA que também compõe um nível alto de não congruência semântica, pois, os critérios de correspondência semântica das unidade significantes (A) não é estabelecida já que o eixo das abscissas não está presente no RG, mas está no RA, o da ordem de organização nas unidades significantes (C) também não é obedecido pois as dimensões são diferentes entre os dois registros e a univocidade semântica terminal (B) não é satisfeita já que os sentidos dos sinais +, -, <, > possuem significados distintos. Vale salientar que a não representação do eixo y e a não distinção dos valores positivos e negativos com cores (como foi feito na explanação no LD) pode ocasionar em maiores dificuldades nessa conversão.

**Quadro 11 -** Exemplos de congruência RA→RG (articulado a tratamento) com análise de conservação dos critérios de congruência

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Critérios</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exemplo 15</td><td rowspan="3"><br>EXEMPLO 15<br>Vamos estudar o sinal de $y = x^2 - 5x + 6$.<br>Temos:<br>$a = 1 > 0 \Rightarrow$ parábola com concavidade voltada para cima<br>$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow$ dois zeros reais distintos<br>$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = 3$<br>Assim: $y > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$<br>$y < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$<br></td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>X</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exemplo 16</td><td rowspan="3"><br>EXEMPLO 16<br>Vamos estudar o sinal de $y = -x^2 + 6x - 9$.<br>Temos:<br>$a = -1 < 0 \Rightarrow$ parábola com concavidade voltada para baixo<br>$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0 \Rightarrow$ dois zeros reais iguais<br>$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{-2} = 3$<br>Assim: $y < 0, \forall x \neq 3$<br>$\nexists x$ tal que $y > 0$<br></td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>X</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
</table>

**Fonte:** Elaborado pela autora

Para o Quadro 11, apresentou-se apenas os exemplos 15 e 16, mas os exemplos do 17 ao 19 corroboram para esta mesma análise. Consideramos, pois, que estes exemplos não favorecem a coordenação entre os registros por parte dos alunos, o que podemos identificar é que em algumas conversões são articuladas algumas unidades significativas do Registro Algébrico a variáveis visuais no Registro Gráfico, mas não é realizado com todas as unidades de sentido, o que pode ocasionar algumas lacunas no ensino e aprendizagem de função quadrática.

**III. Heterogeneidade nos dois sentidos nos exemplos**

A heterogeneidade nos dois sentidos se reporta a conversão não apenas em um único sentido, mas realizá-la também no sentido inverso. No que concerne aos exemplos, a heterogeneidade acontece em grande parte destes, mesmo que inicialmente se faça RA→RG, em 4 também se faz a conversão no sentido inverso concomitantemente. Assim como, em uma das conversões segue apenas no sentido RG→RA.

#### 4.1.2.2 Exercícios Resolvidos

Nesse item, abordaremos a análise e discussão dos exercícios resolvidos no LD.

**I. Quantidade de tratamentos e conversões nos exercícios resolvidos**

O LD apresenta dois exercícios resolvidos e um deles tem três itens. A Tabela 3 mostra a discriminação de tratamentos e conversões dos exercícios resolvidos com base nos itens.

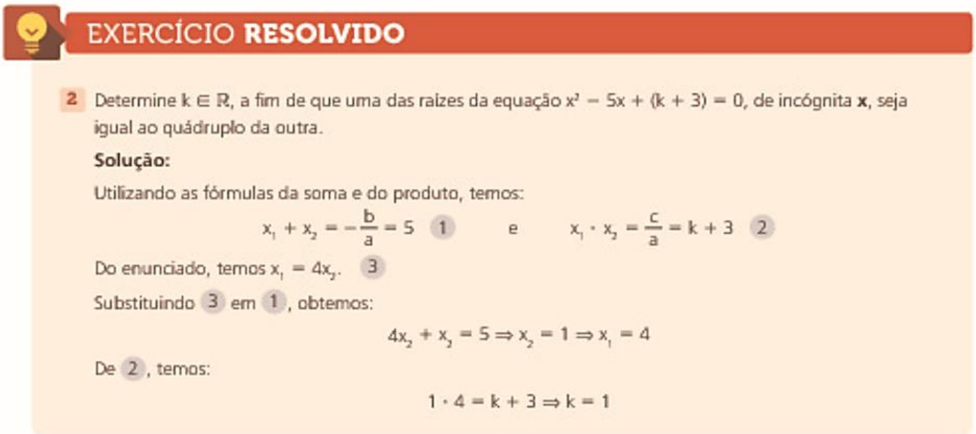
**Tabela 3 -** Quantidade de tratamentos e conversões nos exercícios resolvidos do LD

| | **Tratamento** | **Conversão RLN→RA com tratamento no RA** | **Total** |
|---|---|---|---|
| | 0 | 4 | |
| **Total** | | | 4 |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Pela Tabela 3, verifica-se que não existem apenas tratamentos, e as conversões em um único sentido, ao qual parte do registro em linguagem natural (RLN) para o registro algébrico (RA) em que se faz necessário o tratamento no RA. A Figura 38 evidencia um exemplo dessa conversão.

**Figura 38 -** Conversão RLN→RA no exercício resolvido no LD



EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

**2** Determine $k \in \mathbb{R}$, a fim de que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$, de incógnita **x**, seja igual ao quádruplo da outra.

**Solução:**

Utilizando as fórmulas da soma e do produto, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = k + 3 \quad (2)$$

Do enunciado, temos $x_1 = 4x_2$. (3)

Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 4$$

De (2), temos:

$$1 \cdot 4 = k + 3 \Rightarrow k = 1$$

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 101)

Esse é o segundo exercício resolvido, ao qual o enunciado o propõe como uma equação e não como uma função, devido ao uso da fórmula resolutiva (fórmula de Bhaskara) da equação para encontrar as raízes da função quadrática.

Pela Figura 38, o enunciado é dado em linguagem natural com a “equação” no registro algébrico que dá suporte a resolução, em que o registro de chegada é algébrico.

Os dois exercícios resolvidos estão relacionados com as raízes da função quadrática, este, fazendo uso da fórmula de soma e produto das raízes e ou outro, a quantidade de raízes relacionadas ao valor de delta.

## II. Variação de congruência e não congruência semântica nos exercícios resolvidos

Essa parte tem por intuito verificar se as conversões nos exercícios resolvidos possuem ou não congruência semântica. Os critérios e a organização dessa análise são os mesmos que foram abordados na seção da análise dos exemplos.

**Quadro 12 -** Exercícios resolvidos de conversão RLN→RA com análise da conservação dos critérios de congruência

<table>
<tr><th></th><th></th><th colspan="2">Critérios</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício resolvido 1</td><td rowspan="3">EXERCÍCIO RESOLVIDO<br>1 Determine as condições sobre o parâmetro real m na função dada por $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$ a fim de que:<br>a) não existam raízes reais;<br>b) haja uma raiz dupla;<br>c) existam duas raízes reais e distintas.<br>Solução:<br>Na lei $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$ as variáveis x e y se relacionam, e m é um parâmetro que pode assumir qualquer valor real.<br>Calculando o discriminante ($\Delta$), temos:<br>$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m - 1) = 4 - 12m + 12 = 16 - 12m$<br>Devemos ter:<br>a) $\Delta < 0 \Rightarrow 16 - 12m < 0 \Rightarrow m > \frac{4}{3}$<br>b) $\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 12m = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$<br>c) $\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 12m > 0 \Rightarrow m < \frac{4}{3}$</td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>X</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício resolvido 2</td><td rowspan="3">EXERCÍCIO RESOLVIDO<br>2 Determine $k \in \mathbb{R}$, a fim de que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$, de incógnita x, seja igual ao quádruplo da outra.<br>Solução:<br>Utilizando as fórmulas da soma e do produto, temos:<br>$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5$ (1) e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = k + 3$ (2)<br>Do enunciado, temos $x_1 = 4x_2$. (3)<br>Substituindo (3) em (1), obtemos:<br>$4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 4$<br>De (2), temos:<br>$1 \cdot 4 = k + 3 \Rightarrow k = 1$</td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>©</td></tr>
</table>

**Fonte:** Elaborado pela autora

O exercício resolvido 1, disposto no Quadro 12, possui três itens (a, b e c) que precisam ser convertidos da linguagem natural para algébrica, a fim de resolver a questão. No enunciado, além do registro em linguagem natural tem o registro algébrico de uma função, contudo, este registro não implicará na facilidade em resolver o exercício.

Pelo Quadro 12, o exercício resolvido 1 tem um grau de não congruência alto, em seus três itens:

**a) Não existem raízes reais**

Esse item corresponde a $\Delta < 0$ em linguagem algébrica, assim a coordenação entre as unidades de sentido no RLN é **raízes reais** implicando em **Δ**, no RA, e **não existem** $\rightarrow < 0$ levando em consideração a associação entre o valor de delta e as raízes da função quadrática. Só que **raízes reais** têm duas unidades significantes para apenas uma, o **Δ**. Logo, não existe correspondência semântica nas unidades significativas (A) e nem univocidade semântica terminal (B).

A ordem na ordem na organização das unidades significantes (C) em cada uma das representações também não é conservada. Como nenhum dos critérios foram satisfeitos, então o grau de não congruência é alto.

**b) Haja uma raiz dupla**

A expressão algébrica correspondente ao registro em linguagem natural é $\Delta = 0$. Porém o aluno pode escrever outra expressão: $x_1 = x_2$, em que $x_1$ e $x_2$ sejam raízes da função quadrática, já que a unidade significante no RLN é **uma raiz dupla**. Os três critérios seguem o mesmo padrão do item anterior.

**c) Existem duas raízes reais e distintas**

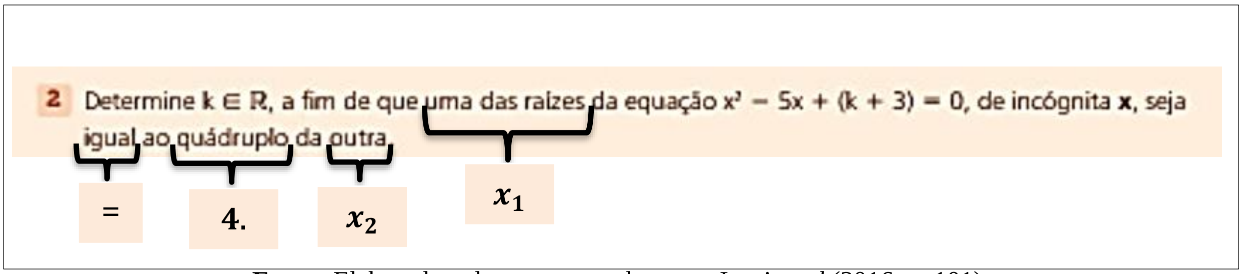
A expressão que representa esse item é $\Delta > 0$, todavia os estudantes poderiam escrever como $x_1 \neq x_2$, já que são duas raízes e distintas.

Se ao invés de **existam duas raízes reais e distintas**, estivesse escrito que o valor de Δ **é positivo**, o grau de não congruência semântica seria baixo, já que os critérios de univocidade semântica terminal (B) e ordem nas unidades significantes (C) seriam estabelecidos.

Por isso, existe um grau de não congruência alto nos três itens, pois nenhum critério é conservado, deixando a margem uma grande dificuldade para os alunos, a não ser que eles memorizem a regra, o que não é compreender o conceito.

Já no segundo exercício resolvido são conservadas a ordem das unidades significantes (C) e a univocidade semântica terminal (B). No entanto, a correspondência semântica das unidades significantes não é estabelecida, haja vista que existe mais de uma palavra em linguagem natural que ao ser convertida resulta em apenas um símbolo no registro algébrico (Figura 39).

**Figura 39 -** A correspondência semântica no exercício resolvido 2




**Fonte:** Elaborado pela autora com base em Iezzi *et al* (2016, p. 101)

Portanto, não há correspondência semântica, pois **quádruplo** (apenas uma palavra) refere-se a dois símbolos o **4** e o sinal de multiplicação (**.**).

**III. Heterogeneidade nos dois sentidos nos exercícios resolvidos**

Nos exercícios resolvidos os dois exemplos são de conversões no sentido RLN→RA, portanto, não houve a conversão no sentido inverso, o que implica em uma não heterogeneidade nos dois sentidos das representações convertidas.

### 4.1.2.3 Troque ideias

Nesse item, abordaremos a análise e discussão da seção troque ideias no LD, composta por apenas uma questão com três itens (a, b e c). De acordo com o manual do professor no LD, esse tipo de atividade "possibilita ao estudante compreender a matemática como uma ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de interpretar o mundo" (IEZZI *et al*, 2016, p. 328).

A atividade presente no capítulo de função quadrática, apresenta uma situação de modelagem (IEZZI *et al*, 2016) para o estudo do ponto máximo, que tem início com uma função linear.

Os autores do LD, no manual do professor, salientam que:

> A maior dificuldade para resolver esse problema é encontrar a lei da função que relaciona a receita e o número de unidades vendidas. Para isso a atividade foi organizada em três etapas. Espera-se que os estudantes, após a realização das duas primeiras etapas, saibam relacioná-las a fim de obter a lei da função receita (que, nas condições dadas, é uma função quadrática) para, a partir daí, determinar o seu ponto de máximo (IEZZI *et al*, 2016, p. 328).

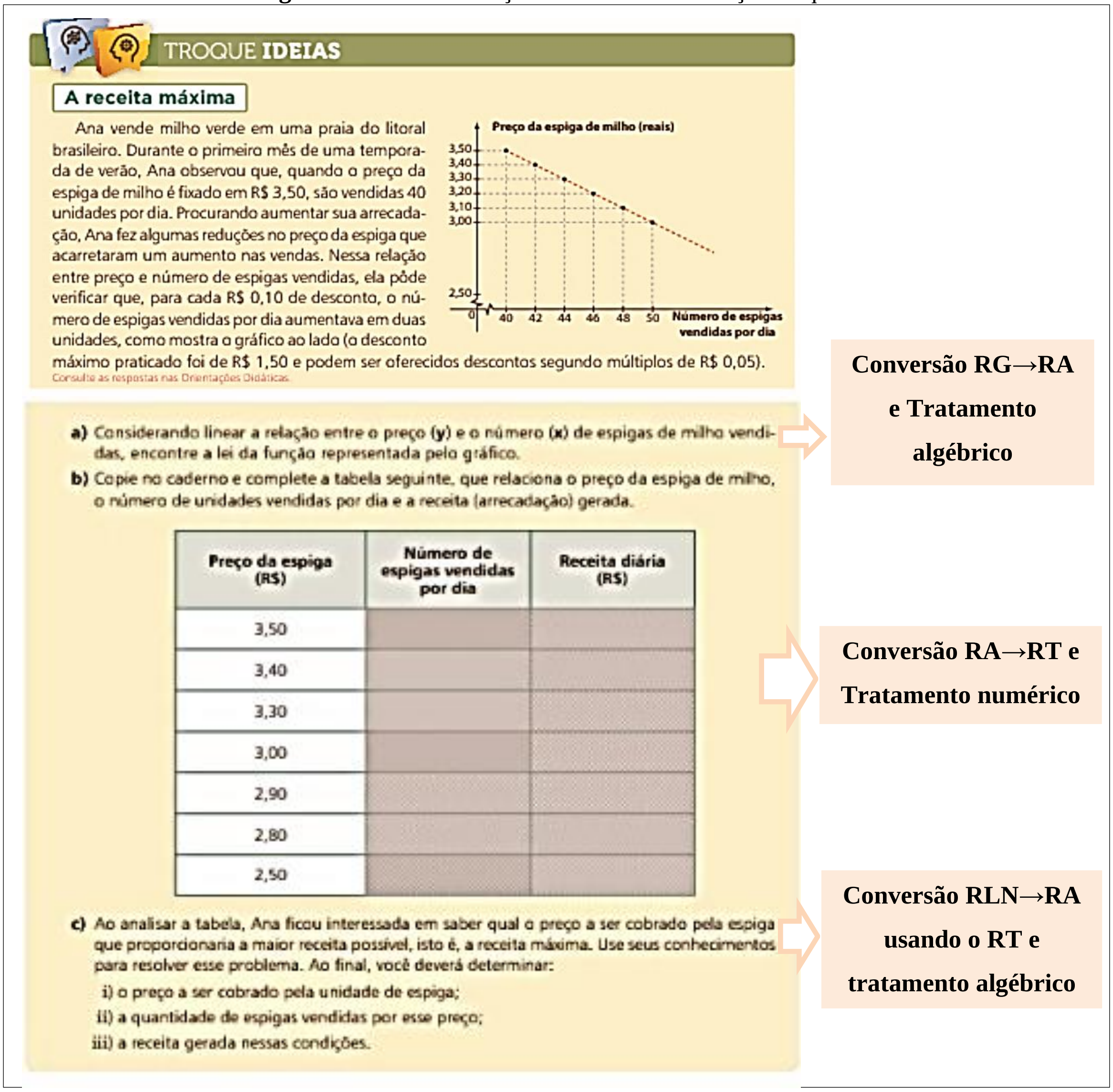
Embora, essa seção esteja localizada entre os tópicos o conjunto imagem e o esboço da parábola, o manual do professor enfatiza que pode ser trabalhado antes de introduzir os estudos de máximo e mínimo da função quadrática, assim como no início do capítulo.

Assim, analisou-se essa atividade sob o olhar da TRRS, quanto às atividades de tratamento e conversão (com ou sem coordenação entre os registros), a variação de congruência e não congruência semântica e a heterogeneidade de sentidos.

## I. Quantidade de tratamentos e conversões no troque ideias

A atividade proposta na seção troque ideias, é composta por três itens cujas atividades de transformações são conversões seguidas de tratamento, pois não são conversões diretas (Figura 40).

**Figura 40 -** Transformação de conversão na seção troque ideias



TROQUE IDEIAS

A receita máxima

Ana vende milho verde em uma praia do litoral brasileiro. Durante o primeiro mês de uma temporada de verão, Ana observou que, quando o preço da espiga de milho é fixado em R$ 3,50, são vendidas 40 unidades por dia. Procurando aumentar sua arrecadação, Ana fez algumas reduções no preço da espiga que acarretaram um aumento nas vendas. Nessa relação entre preço e número de espigas vendidas, ela pôde verificar que, para cada R$ 0,10 de desconto, o número de espigas vendidas por dia aumentava em duas unidades, como mostra o gráfico ao lado (o desconto máximo praticado foi de R$ 1,50 e podem ser oferecidos descontos segundo múltiplos de R$ 0,05).



Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Considerando linear a relação entre o preço (y) e o número (x) de espigas de milho vendidas, encontre a lei da função representada pelo gráfico.

b) Copie no caderno e complete a tabela seguinte, que relaciona o preço da espiga de milho, o número de unidades vendidas por dia e a receita (arrecadação) gerada.

| Preço da espiga (R$) | Número de espigas vendidas por dia | Receita diária (R$) |
|---|---|---|
| 3,50 | | |
| 3,40 | | |
| 3,30 | | |
| 3,00 | | |
| 2,90 | | |
| 2,80 | | |
| 2,50 | | |

c) Ao analisar a tabela, Ana ficou interessada em saber qual o preço a ser cobrado pela espiga que proporcionaria a maior receita possível, isto é, a receita máxima. Use seus conhecimentos para resolver esse problema. Ao final, você deverá determinar:

i) o preço a ser cobrado pela unidade de espiga;

ii) a quantidade de espigas vendidas por esse preço;

iii) a receita gerada nessas condições.



**Fonte:** Elaborado pela autora com base em Iezzi *et al* (2016, p. 105-106)

Da Figura 40, tem-se que o item **a** estabelece uma conversão partindo do registro gráfico para o registro algébrico de uma função afim, mas fazendo um tratamento algébrico, mas antes que essa conversão seja realizada é necessário que se faça a conversão do RG para o RN afim de encontrar a taxa de variação e para isso faz-se também um tratamento numérico (Figura 41). O item **b** é uma conversão do registro algébrico para o registro tabular já formado e preenchido com alguns dados. Vale salientar que, mesmo não sendo citado na questão, induz-se que usando a lei de formação encontrada no item **a** possa-se preencher a coluna “número de espigas vendidas por dia", após isso, o estudante precisa perceber que para preencher a receita diária, é necessário realizar a multiplicação dos valores descritos nas duas primeiras colunas, ou seja, realizar um tratamento numérico.

E o item **c** revela uma conversão do registro em linguagem natural (do próprio item) para o registro algébrico, usando o registro tabular como auxiliar para construir a lei de formação da função quadrática (necessária, nesse caso, para encontrar o ponto máximo) assim como o tratamento algébrico.

Para verificar se é possível que o sujeito realize a coordenação entre os registros de representação, analisou-se o registro de partida e de chegada (a resposta encontra-se no manual do professor – Figura 41).

**Figura 41 -** Resolução dos itens na seção troque ideias

a) Usando os pontos (40; 3,50) e (50; 3,00), temos que a taxa de variação é:

$$\frac{3,00-3,50}{50-40}=\frac{-0,50}{10}=\frac{-1}{20}=-0,05$$

Assim, $y=\frac{-1}{20}x+b \Rightarrow 3,5=\frac{-1}{20}\cdot 40+b \Rightarrow$ $\Rightarrow b=5,5$ e a lei é $y=-0,05x+5,5$. Poderíamos também ter considerado 2 pontos quaisquer da reta e montado o sistema substituindo cada ponto $(x, y)$ na lei $y=ax+b$.

b)

| Preço da espiga (R$) | Número de espigas vendidas por dia | Receita diária (R$) |
|---|---|---|
| 3,50 | 40 | 140,00 |
| 3,40 | 42 | 142,80 |
| 3,30 | 44 | 145,20 |
| 3,00 | 50 | 150,00 |
| 2,90 | 52 | 150,80 |
| 2,80 | 54 | 151,20 |
| 2,50 | 60 | 150,00 |

c) Vamos encontrar a lei da função que relaciona a receita (**R**) e o número (**x**) de espigas vendidas:

R = (preço da espiga) · (número de espigas vendidas)

$$R(x)=(-0,05\cdot x+5,5)\cdot x=-0,05x^2+5,5x=$$
$$=\frac{-1}{20}x^2+\frac{11}{2}x$$

Observe que a função receita é do 2ª grau com $a<0$ e, deste modo, essa função admite um **ponto de máximo**, dado pelas coordenadas do vértice da parábola:

$$x_v=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{11}{2}}{2\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)}=\frac{\frac{11}{2}}{\frac{1}{10}}=55$$

$$y_v=-\frac{1}{20}\cdot 55^2+\frac{11}{2}\cdot 55=-151,25+302,50=$$
$$=151,25$$

Assim, quando são vendidas 55 espigas, a receita se maximiza, atingindo o valor de R$ 151,25, o que nos permite concluir que o preço unitário a ser cobrado é:

$$\frac{R\$\ 151,25}{55}=R\$\ 2,75$$

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 330)

No item **a** percebe-se que os registros não favorecem uma possível coordenação para os estudantes, já que o gráfico não se encontra completo, faltando a intersecção da reta com o eixo das ordenadas. Embora ele possa ser completado, pelo próprio aluno ou com o auxílio do professor, e assim ser realizada a coordenação entre os registros gráficos e algébricos.

No entanto, para resolvê-lo, o LD usou abordagens que não realizam a articulação entre os registros (Figura 41): o encontro da função pela taxa de variação e em seguida, usando dois pontos (pares ordenados) dispostos no gráfico, solucionou o sistema para encontrar a lei de formação da função afim.

No item **b** a articulação entre os registros encontra-se em relacionar as variáveis *x* e *y*, as unidades significativas na tabela, de maneira que seu preenchimento seja efetuado corretamente. Já no item **c**, é realizada a articulação do que se exige no enunciado do item (a receita diária máxima que será o cálculo do $y_v$), mas também do registro auxiliar, para conseguir escrever a lei de formação da função quadrática.

## II. Variação de congruência e não congruência semântica no troque ideias

Quanto à variação de congruência e não congruência semântica estabelecidas nas atividades de conversão no troque ideias, o Quadro 13 sintetiza a análise de conservação dos critérios estabelecidos por Duval (2009).

**Quadro 13 -** Conversões no troque ideias com análise de conservação dos critérios de congruência

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Critérios</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Item a</td><td rowspan="3">a) Considerando linear a relação entre o preço (y) e o número (x) de espigas de milho vendidas, encontre a lei da função representada pelo gráfico.<br><br></td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Item b</td><td rowspan="3">b) Copie no caderno e complete a tabela seguinte, que relaciona o preço da espiga de milho, o número de unidades vendidas por dia e a receita (arrecadação) gerada.<br><table><tr><th>Preço da espiga (R$)</th><th>Número de espigas vendidas por dia</th><th>Receita diária (R$)</th></tr><tr><td>3,50</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3,40</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3,30</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3,00</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2,90</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2,80</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2,50</td><td></td><td></td></tr></table></td><td>A</td><td>©</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>©</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Item c</td><td rowspan="3">c) Ao analisar a tabela, Ana ficou interessada em saber qual o preço a ser cobrado pela espiga que proporcionaria a maior receita possível, isto é, a receita máxima. Use seus conhecimentos para resolver esse problema. Ao final, você deverá determinar:<br>i) o preço a ser cobrado pela unidade de espiga;<br>ii) a quantidade de espigas vendidas por esse preço;<br>iii) a receita gerada nessas condições.</td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
</table>

**Fonte:** Elaborado pela autora

Pelo Quadro 13, o item a possui um médio grau de não congruência semântica, já que a ordem (C) entre as duas representações não é estabelecida, haja vista que ao “ler” o gráfico da maneira que ele se encontra, o primeiro ponto a ser encontrado seria o coeficiente *b*, que no registro gráfico é o ponto de intersecção da reta com o eixo *y*, mas no registro algébrico essa é a última unidade significante. Isso acontece pela diferença nas dimensões das representações.

Também não é conservada a correspondência semântica dos elementos significantes (A), já que o gráfico da função linear não está completo (a reta não toca o eixo das ordenadas), assim não é possível encontrar o valor do coeficiente *b*, pela leitura do gráfico.

A univocidade semântica terminal (B) é satisfeita já que a cada unidade significante do registro de partida existe apenas um significado para a unidade de sentido no registro de chegada.

O item **c** também se estabelece um grau de não congruência médio, pois a univocidade semântica terminal (B) é conservada, mas a ordem na organização das unidades significantes (C) e a correspondência semântica (A) não são estabelecidas.

Ao converter os enunciados, sabendo que Ana quer descobrir a receita máxima, temos:

i. O **preço** a ser cobrado pela **unidade de espiga** → $\frac{y_v}{x_v}$;
ii. A **quantidade de espigas** vendidas por esse preço → $x_v$;
iii. A **receita gerada** nessas condições → $y_v$.

Comparando um registro a outro, as unidades significantes de um, não estão associados a apenas uma unidade significantes do outro, por isso não é conservada a correspondência semântica (A), embora existe os itens ii e iii possibilitam maior correspondência que o item i, já que nesse o RA corresponde a uma razão.

No critério C, a ordem que se encontra no enunciado (registro de partida), não é a mesma no registro de chegada. Pois, são realizados alguns procedimentos: escrever a lei de formação da função quadrática que permitirá encontrar a receita máxima, daí encontra-se o ii., o iii. e por fim o i.

O item **b** é congruente, haja vista que são conservados os critérios A, B e C partindo do registro algébrico para a tabular, trata-se de uma conversão muito simples, basta resolver a função atribuindo em $y$ o valor do preço da espiga, a fim de encontrar $x$ (número de espigas vendidas), transpô-las para a tabela, assim como realizar o tratamento numérico (multiplicar o preço da espiga pela quantidade vendida) para encontrar a receita diária e preencher sua última coluna.

## III. Heterogeneidade nos dois sentidos no troque ideias

Nessa seção não houve a heterogeneidade nos dois sentidos, pois, nos três itens são encontradas conversões diferentes, o que implica a não conversão em sentidos opostos.

#### 4.1.2.4 Exercícios

A análise e discussão dos exercícios propostos no LD são apresentadas nessa seção. Destaca-se que foi realizada item a item, e não apenas pelas questões, assim, contabilizam-se 134 itens em 44 exercícios.

## I. Quantidade de tratamentos e conversões nos exercícios

Nos exercícios propostos para serem resolvidos pelos estudantes, o LD apresenta um grande número de conversões (Tabela 4).

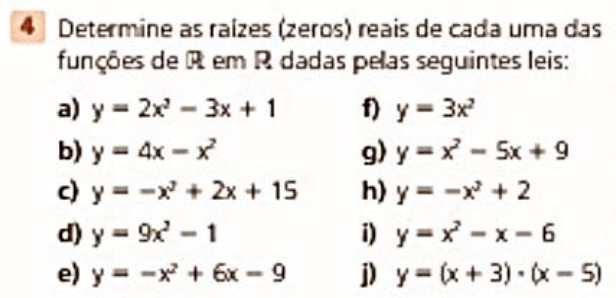
**Tabela 4 -** Quantidade de tratamentos e conversões nos exercícios propostos pelo LD

| | **Tratamento** | **Conversão** | | | | | | **Tratamento e conversão (RA→RG)** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **RA→RG (Usando RT)** | **RA→RG (tratamento RA)** | **RG→RA (Usando RLN)** | **RLN→RA (Usando alguma representação algébrica)** | **RLN→RA (Usando RF)** | **RLN→RA** | | |
| # | 51 | 9 | 11 | 15 | 29 | 2 | 9 | 8 | 134 |
| % | 38,1 | 6,7 | 8,2 | 11,2 | 21,6 | 1,5 | 6,7 | 6 | 100 |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Pela Tabela 4, a transformação de conversão ultrapassa 50% dos exercícios propostos para resolver, isso sem contabilizar com os que envolvem tratamento e conversão.  Esse é de extrema relevância, já que para se aprender um conceito matemático é necessário transitar em ao menos dois registros de representação (DUVAL, 2009), isto é, a conversão é a atividade que pode permitir ao estudante coordenar dois registros diferentes.

**Figura 42 -** Exemplo de exercício envolvendo tratamento



4 Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas seguintes leis:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$
b) $y = 4x - x^2$
c) $y = -x^2 + 2x + 15$
d) $y = 9x^2 - 1$
e) $y = -x^2 + 6x - 9$
f) $y = 3x^2$
g) $y = x^2 - 5x + 9$
h) $y = -x^2 + 2$
i) $y = x^2 - x - 6$
j) $y = (x + 3) \cdot (x - 5)$

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 100)

Para a resolução dos itens apresentados na questão 4 (Figura 42), o estudante não sairá do registro algébrico, dessa forma, o mesmo registro de chegada é o de saída.

Na Figura 43, é apresentado um exemplo de conversão indireta no sentido RA→RG usando o RT (RA→RT; RT→RG), no entanto, esse registro auxiliar não é enfatizado na questão.

**Figura 43 -** Exemplo de conversão RA→RG usando o RT

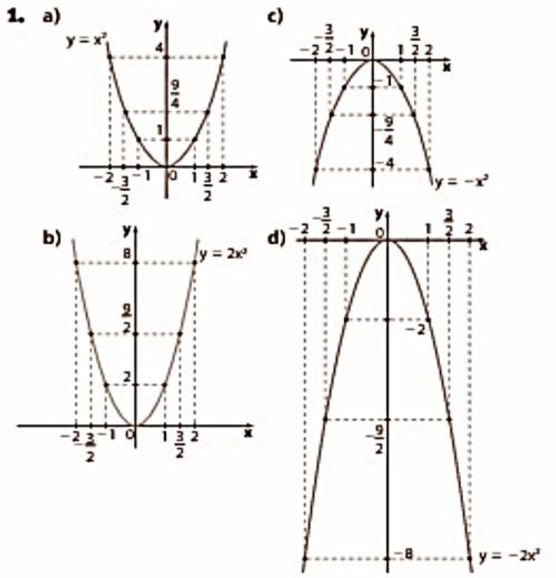
**1** Esboce o gráfico de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas leis seguintes:

**a)** $y = x^2$ **b)** $y = 2x^2$ **c)** $y = -x^2$ **d)** $y = -2x^2$

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 97)

Inferiu-se esse tipo de conversão por meio da resolução apresentada no manual do LD (IEZZI *et al*, 2016), em que existe no gráfico construído uma ligação de pontos (Figura 44). Além disso, esses exercícios foram exibidos após a seção: gráfico, em que é explicada a construção do gráfico usando a tabela (como mostra a Figura 22).

**Figura 44 -** Resolução dos itens da figura 43




**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 364)

Esse tipo de conversão em que a abordagem de construção é o ponto a ponto não realiza a articulação entre as unidades significantes das representações convertidas. No entanto, assim como nos exemplos, o LD também expõe exercícios em que faz-se uma "leitura" de algumas unidades significantes no registro algébrico para convertê-lo no registro gráfico, mesmo assim não chega a utilizar a abordagem de interpretação das propriedades figurais (Figuras 45 e 46).

**Figura 45 -** Exemplo de conversão RA→RG correspondendo algumas unidades significantes

**35** Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis seguintes, com domínio em $\mathbb{R}$, destacando o conjunto imagem.

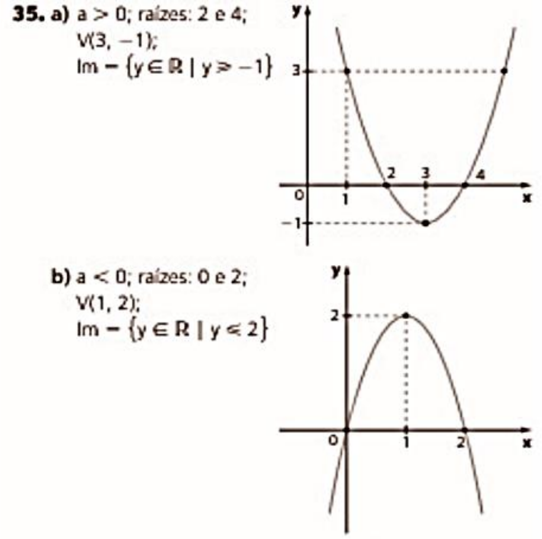
**a)** $y = x^2 - 6x + 8$

**b)** $y = -2x^2 + 4x$

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 108)

Para essa questão, o manual do professor disponibiliza a resolução (Figura 46) em que se estabelece um tratamento algébrico antes de realizar a conversão do RA para o RG.

**Figura 46 -** Resolução do exercício apresentado na figura 45



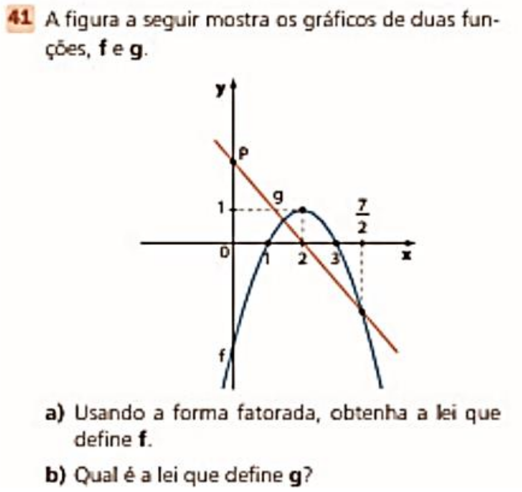

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 368)

Se compararmos a Figura 44 a 46, é perceptível a diferença entre a quantidade de pontos e a localização deles. Enquanto na Figura 44 existe a marcação de muitos pontos aleatórios, na Figura 46, poucos pontos são marcados no plano cartesiano e são apenas os que foram estudados a partir do registro algébrico.

Ainda pode-se considerar uma conversão ao se estabelecer o conjunto imagem do gráfico construído, se esse estudo for externado do registro gráfico. No entanto, não é possível afirmar, pois, o conjunto imagem também pode ser definido pelo sinal de a e o $y_v$, que também são destacados na resolução, nesse caso seria apenas um tratamento.

A Figura 47 mostra um exemplo de conversão do registro gráfico para algébrico que usa o registro em linguagem natural como registro auxiliar.

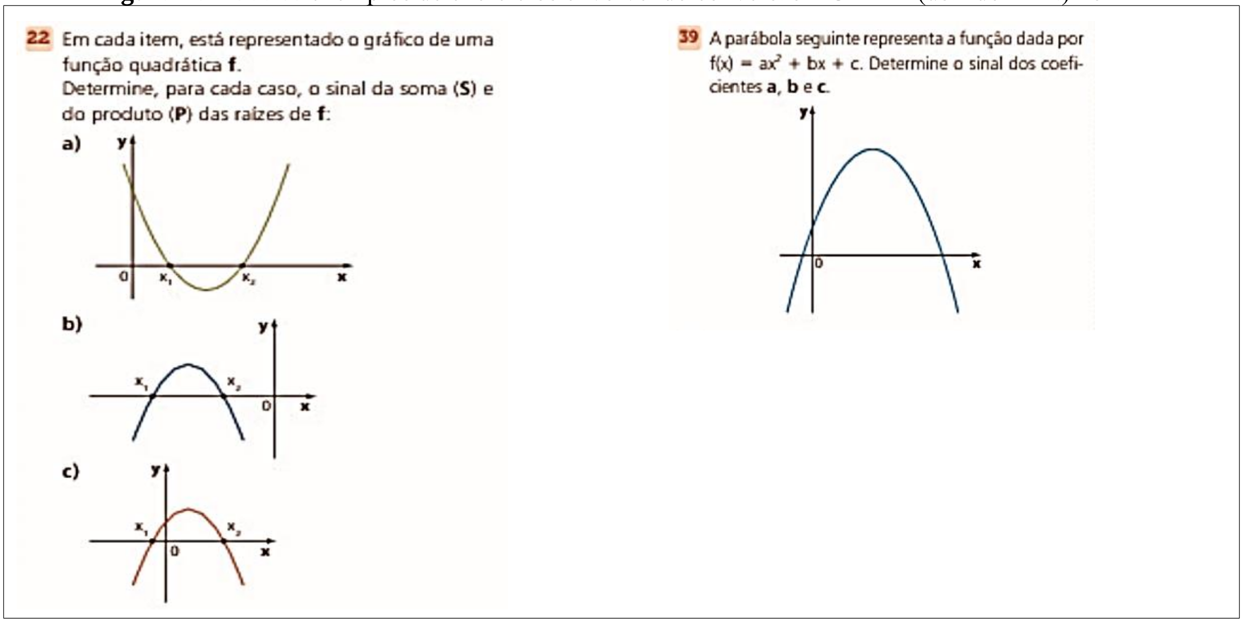
**Figura 47 -** Exemplo de exercício envolvendo conversão RG→RA (usando RLN) no LD




**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 109)

Esse exemplo evidencia não apenas a função quadrática, mas também a função afim (item a). Vale salientar que todos os exemplos de conversão RG→RA usando o RLN não se detêm apenas em transformar a lei de formação do registro gráfico para o algébrico, compreendem-se nesse sentido de conversão questões que envolvem o sinal dos coeficientes (RA) após verificar a parábola (RG) e o sinal de soma e produto das raízes no gráfico (Figura 48).

**Figura 48 -** Outros exemplos de exercícios envolvendo conversão RG→RA (usando RLN) no LD




**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 102;109)

Essas questões necessitam da articulação entre as unidades significantes nos dois registros, para que o estudante possa realizar a “leitura” correta do gráfico e transformá-la no registro algébrico solicitado.

Nas conversões RLN→RA em que existem representação algébrica no registro de partida, são questões que não envolvem apenas a compreensão do registro algébrico (como um registro auxiliar para a resolução em que se faz necessário o tratamento no RA), mas principalmente no que as unidades significantes do registro em linguagem natural implicam no registro de chegada (Figura 49).

**Figura 49 -** Exemplo de exercício de conversão RLN→RA (usando algum RA)

**18** A diferença entre as raízes da equação $x^2 + 11x + p = 0$ (com $p \in \mathbb{R}$) é igual a 5. Com base nesse dado:

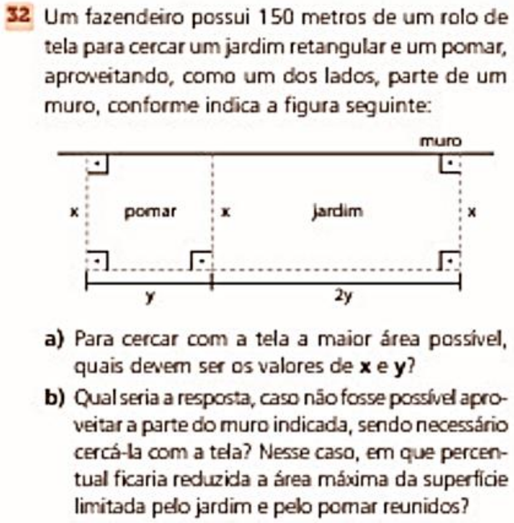
**a)** determine as raízes;

**b)** encontre o valor de **p**.

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 102)

Na Figura 50 destaca-se um exemplo de conversão RLN→RA usando o registro figural (RF) que auxiliará na compreensão do registro de partida a ser convertido e resolvido.

**Figura 50 -** Exemplo de exercício envolvendo conversão RLN→RA (usando RF)



**32** Um fazendeiro possui 150 metros de um rolo de tela para cercar um jardim retangular e um pomar, aproveitando, como um dos lados, parte de um muro, conforme indica a figura seguinte:



**a)** Para cercar com a tela a maior área possível, quais devem ser os valores de **x** e **y**?

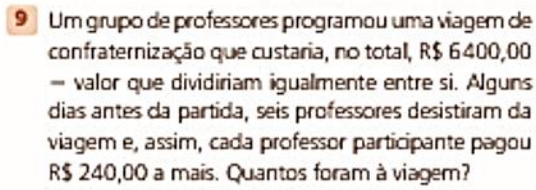
**b)** Qual seria a resposta, caso não fosse possível aproveitar a parte do muro indicada, sendo necessário cercá-la com a tela? Nesse caso, em que percentual ficaria reduzida a área máxima da superfície limitada pelo jardim e pelo pomar reunidos?

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 105)

Nesse caso, o registro figural é a representação de um jardim no formato retangular, que explicita as dimensões para intermediar a transformação do registro de partida (RLN) para o de chegada (RA), mas ainda, faz-se necessário o tratamento no RA.

Tendo em consideração a conversão RLN→RA sem o auxílio de outro registro que possa interferir na compreensão da passagem entre os dois registros, fazendo uso apenas do tratamento no RA, a Figura 51 traz um exemplo em que necessita-se reconhecer as unidades significantes no RLN e convertê-lo no RA, isto é, uma coordenação entre as unidades significantes nas duas representações.

**Figura 51 -** Exemplo de exercício envolvendo conversão RLN→RA



**9** Um grupo de professores programou uma viagem de confraternização que custaria, no total, R$ 6400,00 – valor que dividiriam igualmente entre si. Alguns dias antes da partida, seis professores desistiram da viagem e, assim, cada professor participante pagou R$ 240,00 a mais. Quantos foram à viagem?

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 100)

A Figura 52 revela um exemplo envolvendo tratamento e conversão RA→RG, isso não quer dizer que outros exemplos classificados como um dos tipos de conversões anteriores não exijam alguma transformação no registro de partida para alcançar o registro de chegada. Os exercícios classificados dessa forma não destacam qual o registro de saída, se algébrico ou gráfico, ao qual destacam-se como resolução os dois registros (Figura 52).

**Figura 52 –** Exemplo de exercício envolvendo tratamento e conversão RA→RG

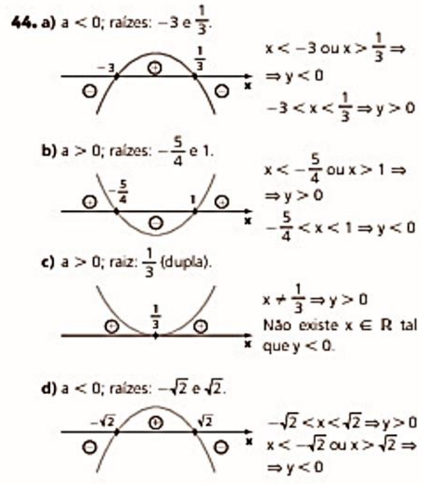
**44** Faça o estudo de sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas pelas seguintes leis:

**a)** $y = -3x^2 - 8x + 3$
**b)** $y = 4x^2 + x - 5$
**c)** $y = 9x^2 - 6x + 1$
**d)** $y = 2 - x^2$
**e)** $y = -x^2 + 2x - 1$
**f)** $y = 3x^2 - x + 4$
**g)** $y = 3x^2$
**h)** $y = 4x^2 + 8x$

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 111)

A Figura 53 mostra a resolução dos itens de **a** a **d**, em que podem ser identificados o tratamento no registro algébrico e a conversão para o registro gráfico.

**Figura 53 -** Resolução dos itens (a, b, c, d) do exemplo de exercício envolvendo tratamento e conversão RA→RG na figura 52




**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 370)

Além da conversão RA→RG também constata-se na resolução exposta na Figura 53 a conversão no sentido inverso RG→RA depois que são demarcadas as raízes da função no gráfico.

## II. Variação de congruência e não congruência semântica nos exercícios

O intuito neste tópico é investigar a congruência ou não congruência semântica nos exercícios propostos no LD, que foram classificados de acordo com o que propõe Duval (2009) a partir dos três critérios estabelecidos: Correspondência semântica nas unidades significantes (A), univocidade semântica terminal (B) e ordem na organização das unidades significantes de cada uma das representações (C).

O Quadro 14 expressa a análise das questões e/ou itens relativos a conversão RA→RG usando o registro tabular (RT) como registro auxiliar ou realizando o tratamento no RA, haja vista que o uso do registro intermediário implica apenas na não articulação entre os registros, mas, no que se refere a congruência entre o registro de saída (RA) e o registro de chegada (RG), a congruência não é alterada por esse motivo, já que o procedimento de construção do gráfico é o mesmo. Vale salientar que as questões são exercícios: 1, 2, 3, 35, 36 e 37, por não haver diferença no resultado da análise e semelhança nas três primeiras, assim como nas três últimas, expomos apenas o exercício 3 e o 35.

Porém, se focarmos a análise sobre o registro auxiliar (RT) e o registro gráfico (RG) obtemos uma congruência, pois os três critérios seriam conservados, como já justificados na análise dos exemplos[11]. Mas isso não interfere na variação de congruência e não congruência semântica na conversão RA→RT em que se realizam os tratamentos no RA.

**Quadro 14 -** Análise da conservação dos critérios de congruência nos exercícios com conversões RA→RG

| | | **Critérios** | |
|---|---|---|---|
| **Exercício 3** | **3** Faça o gráfico de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas leis seguintes:<br>**a)** $y = x^2 - 4x + 5$ **b)** $y = -x^2 + 2x - 1$ **c)** $y = x^2 - 2x + 1$ | **A** | **X** |
| | | **B** | © |
| | | **C** | **X** |
| **Exercício 35** | **35** Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis seguintes, com domínio em $\mathbb{R}$, destacando o conjunto imagem.<br>**a)** $y = x^2 - 6x + 8$<br>**b)** $y = -2x^2 + 4x$<br>**c)** $y = x^2 - 4x + 4$<br>**d)** $y = (x - 3) \cdot (x + 2)$ | **A** | **X** |
| | | **B** | © |
| | | **C** | **X** |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Os 20 itens que compõem os exercícios 1, 2, 3, 35, 36 e 37, dos quais 7 estão dispostos no Quadro 14 são classificados com um grau médio de não congruência semântica já que conservam, apenas, a univocidade semântica terminal (B). O critério de correspondência semântica nas unidades significantes (A) não é estabelecido, pois não é possível associar em nenhum dos itens as unidades de sentido de cada um dos registros (saída e chegada). O que seria diferente se o registro algébrico fosse representado na forma canônica e a conversão fosse realizada por meio da abordagem de interpretação global das propriedades figurais.

E a ordem na organização das unidades significantes (C) não é conservada, haja vista que os registros possuem dimensões diferentes.

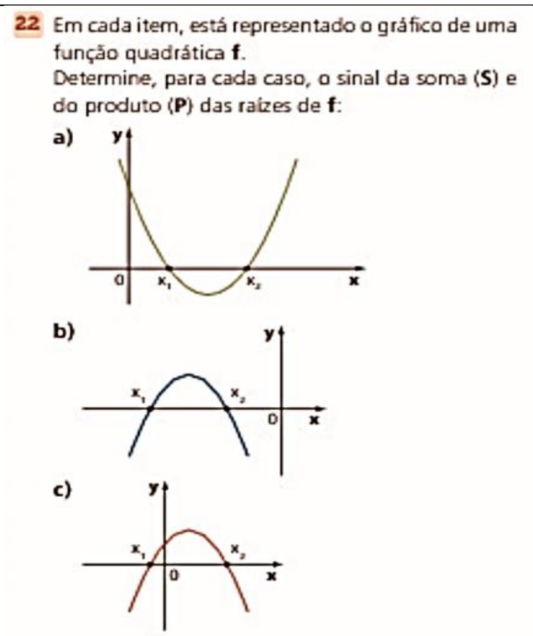
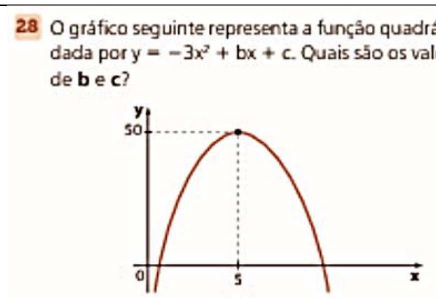
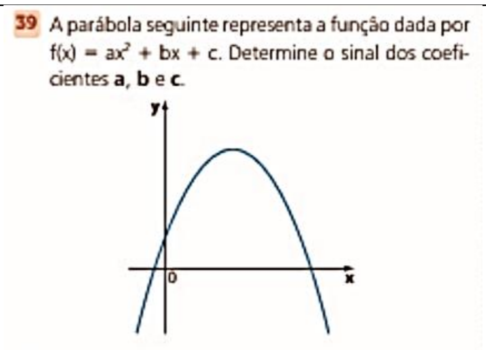
Os itens da questão 1 (Figura 43 e 44) e o item c da questão 36, conservariam o critério da correspondência das unidades significantes (A) se a resolução adotada pelo LD não fosse a abordagem ponto a ponto. Pois, tomando os itens $a)y = x^2$ e $c)y = -x^2$, o aluno precisaria relacionar que o sinal do coeficiente *a* corresponde a concavidade voltada para cima (+) ou para baixo (-). Quanto aos itens $b)y = 2x^2$, $d)y = -2x^2$ e 36) $c)y = -3x^2$, além de relacionar a

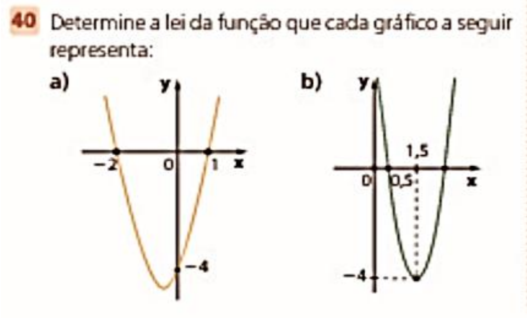
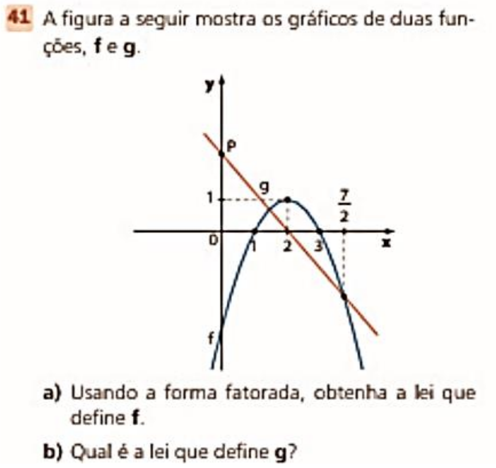
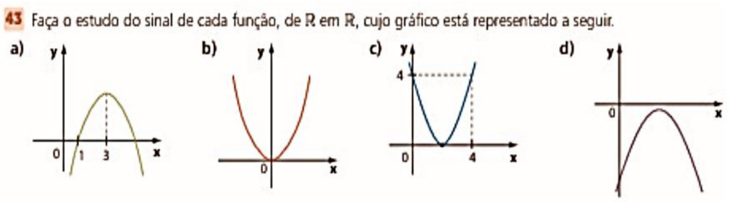
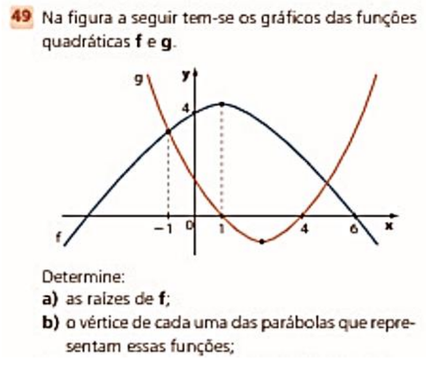
[11] Ver página 79 a 82.

concavidade com o sinal de $a$, também é necessário verificar que os valores do $|a|$ implicam em aberturas diferentes para a parábola no registro gráfico, e nesses três casos, o $|a| > 0$, ou seja, a parábola possui menor abertura.

O Quadro 15 apresenta a conservação dos critérios de congruência nas conversões RG→RA usando o RLN.

**Quadro 15 -** Análise de conservação dos critérios de congruência nos exercícios com conversões RG→RA usando o RLN

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Critérios</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 22</td><td rowspan="3">
</td><td>A</td><td>©</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>©</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 28</td><td rowspan="3">
</td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 39</td><td rowspan="3">
</td><td>A</td><td>©</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercício 40</td><td rowspan="3"><br>40 Determine a lei da função que cada gráfico a seguir representa:<br>a) b)</td><td colspan="2">A</td><td>©</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>©</td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Exercício 41</td><td rowspan="6"><br>41 A figura a seguir mostra os gráficos de duas funções, f e g.<br>a) Usando a forma fatorada, obtenha a lei que define f.<br>b) Qual é a lei que define g?</td><td rowspan="3">Item a</td><td>A</td><td>©</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Item b</td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 43</td><td rowspan="3"><br>43 Faça o estudo do sinal de cada função, de ℝ em ℝ, cujo gráfico está representado a seguir.<br>a) b) c) d)</td><td colspan="2">A</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 49</td><td rowspan="3"><br>49 Na figura a seguir tem-se os gráficos das funções quadráticas f e g.<br>Determine:<br>a) as raízes de f;<br>b) o vértice de cada uma das parábolas que representam essas funções;</td><td colspan="2">A</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>©</td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td>X</td></tr>
</table>

**Fonte:** Elaborado pela autora

Pelo Quadro 15, apenas a conversão nos itens do exercício 22 são congruentes, ou seja, conservam os três critérios de congruência. Isso se justifica pela existência da correspondência biunívoca dos elementos significantes de cada uma das representações (A), não existe ambiguidade no significado assumido no registro de chegada (B) e a ordem em que se estabelecem as duas representações são as mesmas, levando em consideração apenas as raízes ($x_1$ e $x_2$) nas posições do gráfico e do registro algébrico (C).

Vale salientar que esse último critério foi considerado como satisfeito, apenas pelas posições das raízes e não sobre o olhar de uma função quadrática completa, e mesmo sendo de dimensões diferentes foi possível observar essa ordem nas posições das duas representações.

Nesse tipo de conversão pode se observar os três graus de não congruência semântica. Em não congruência semântica de grau médio, os critérios (A) e (C) não foram conservados, respectivamente, porque todos os elementos significantes do registro de partida não estão presentes no registro de chegada, ou vice versa (poderia ser diferente se a representação algébrica fosse utilizada em outra forma) e ao olhar a função quadrática por completa em representações de dimensões diferentes (RG e RA) não tem como se atribuir uma ordem.

A não congruência de grau baixo não conserva apenas a ordem na organização dos elementos significantes, que segue as mesmas justificativas das anteriores.

A conversão em que nos dois registros não são conservados nenhum critério foi classificada como não congruência de grau alto, e seguida das justificativas anteriores para a não conservação dos critérios (A) e (C), o critério (B) não se satisfez porque pode existir uma ambiguidade nas unidades de sentido no registro de chegada (+ para > e – para <, por exemplo).

O Quadro 16 exibe a conservação dos critérios de congruência nas conversões RLN→RA com aspectos em RA nos enunciados dos exercícios.

**Quadro 16 -** Análise da conservação de congruência nos exercícios com conversões RLN→RA que possuem aspectos em RA nos enunciados

<table>
<tr><th></th><th></th><th colspan="3">Critérios</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 7</td><td rowspan="3">7 Seja f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = (2x + 1) \cdot (x - 3)$. Determine o(s) elemento(s) do domínio cuja imagem é $-5$.</td><td colspan="2">A</td><td>©</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>©</td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 10</td><td rowspan="3">10 Economistas estimam que os valores médios, em reais, das ações de duas empresas A e B sejam dados, respectivamente, por $v_A(t) = 4,20 + \frac{1}{4}t$ e $v_B(t) = \frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{8}t + 3,20$, em que t é o tempo, em anos, contado a partir da data desta previsão.<br>a) Qual é o valor atual das ações de cada uma das empresas?</td><td rowspan="3">Item a</td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>X</td></tr>
<tr><td>C</td><td>©</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 10</td><td rowspan="3">b) Daqui a 4 anos qual ação estará mais valorizada?</td><td rowspan="3">Item b</td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>©</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **c)** Daqui a quantos anos as ações das duas empresas terão o mesmo valor? Qual será esse valor? | **Item c** | **A** | **X** |
| | | | **B** | © |
| | | | **C** | **X** |
| **Exercício 12** | **12** Determine os valores reais de **p** a fim de que a função quadrática **f** dada por $f(x) = x^2 - 2x + p$ admita duas raízes reais e iguais. | | **A** | **X** |
| | | | **B** | **X** |
| | | | **C** | **X** |
| **Exercício 13** | **13** Estabeleça os valores reais de **m** para os quais a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x^2 - 4x + m$, admita duas raízes reais e distintas. | | **A** | **X** |
| | | | **B** | **X** |
| | | | **C** | **X** |
| **Exercício 14** | **14** Encontre, em função de **m**, $m \in \mathbb{R}$, a quantidade de raízes da função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pela lei $y = x^2 - 4x + (m + 3)$. | | **A** | **X** |
| | | | **B** | **X** |
| | | | **C** | © |
| **Exercício 15** | **15** Qual é o menor número inteiro **p** para o qual a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 4x^2 + 3x + (p + 2)$, não admite raízes reais? | | **A** | **X** |
| | | | **B** | **X** |
| | | | **C** | **X** |
| **Exercício 18** | **18** A diferença entre as raízes da equação $x^2 + 11x + p = 0$ (com $p \in \mathbb{R}$) é igual a 5. Com base nesse dado:<br>**a)** determine as raízes;<br>**b)** encontre o valor de **p**. | **Item a** | **A** | **X** |
| | | | **B** | © |
| | | | **C** | **X** |
| | | **Item b** | **A** | **X** |
| | | | **B** | **X** |
| | | | **C** | **X** |
| **Exercício 19** | **19** Uma das raízes da equação $x^2 - 25x + 2p = 0$ (com $p \in \mathbb{R}$) excede a outra em 3 unidades. Encontre as raízes da equação e o valor de **p**. | | **A** | **X** |
| | | | **B** | **X** |
| | | | **C** | **X** |

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercício 20</td><td rowspan="3">20 As raízes reais da equação $x^2 + 2mx + 48 = 0$ (com $m \in \mathbb{R}$) são negativas e uma é o triplo da outra. Qual é o valor de m?</td><td colspan="2">A</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 23</td><td rowspan="3">23 Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a equação $x^2 + mx + (m^2 - m - 12) = 0$ tenha uma raiz nula e a outra positiva.</td><td colspan="2">A</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>©</td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td>©</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Exercício 29</td><td rowspan="9">29 Uma bola, lançada verticalmente para cima, a partir do solo, tem sua altura h (em metros) expressa em função do tempo t (em segundos), decorrido após o lançamento, pela lei:<br>$$h(t) = 40t - 5t^2$$<br>Determine:<br>a) a altura em que a bola se encontra 1 s após o lançamento;<br>b) o(s) instante(s) em que a bola se encontra a 75 m do solo;<br>c) a altura máxima atingida pela bola;<br>d) o instante em que a bola retorna ao solo.</td><td rowspan="3">Item a</td><td>A</td><td>©</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>©</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Item b e d</td><td>A</td><td>©</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Item c</td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>X</td></tr>
<tr><td>C</td><td>©</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 30</td><td rowspan="3">30 Estima-se que, para um exportador, o valor $v(x)$, em milhares de reais, do quilograma de certo minério seja dado pela lei: $v(x) = 0,6x^2 - 2,4x + 6$, sendo x o número de anos contados a partir de 2010 ($x = 0$), com $0 \leqslant x \leqslant 10$.<br>a) Entre que anos o valor do quilograma desse produto diminuiu?<br>b) Qual é o valor mínimo atingido pelo quilograma do produto?<br>c) Em que ano o preço do quilograma do produto será máximo? Qual será esse valor?</td><td colspan="2">A</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>©</td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td>©</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Exercício 31** | **31** A lei que expressa o número (**y**) de milhares de *downloads* de um aplicativo baixado em *smartphones*, em função do número (**x**) de semanas transcorridas desde o instante em que esse aplicativo ficou disponível para ser baixado, é: $y = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + c \cdot x$, em que **c** é uma constante real.<br>Sabendo que, ao completar uma semana do início da contagem, já haviam sido registrados 700 *downloads*, determine:<br>**a)** após quantas semanas, no mínimo não foram registrados mais *downloads* desse aplicativo;<br>**b)** após quantas semanas do início o número de *downloads* foi máximo e qual foi esse número. | | **A** | **X** |
| | | | **B** | © |
| | | | **C** | **X** |
| **Exercício 34** | **34** Considere todos os pares ordenados (x, y), com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, tais que $x - y = 2$.<br>Quais os valores de **x** e **y** de modo que a soma dos quadrados de **x** e de **y** seja a menor possível? Qual é o valor encontrado para essa soma? | | **A** | **X** |
| | | | **B** | © |
| | | | **C** | **X** |
| **Exercício 38** | **38** Um biólogo desejava comparar a ação de dois fertilizantes. Para isso, duas plantas **A** e **B** da mesma espécie, que nasceram no mesmo dia, foram desde o início tratadas com fertilizantes diferentes.<br>Durante vários dias ele acompanhou o crescimento dessas plantas, medindo, dia a dia, suas alturas. Ele observou que a planta **A** cresceu linearmente, à taxa de 2,5 cm por dia; e a altura da planta **B** pode ser modelada pela função dada por $y = \frac{20x - x^2}{6}$, em que **y** é a altura medida em centímetros e **x** o tempo medido em dias.<br>**a)** Obtenha a diferença entre as alturas dessas plantas com 2 dias de vida.<br>**b)** Qual é a lei da função que representa a altura (**y**) da planta **A** em função de **x** (número de dias)?<br>**c)** Determine o dia em que as duas plantas atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.<br>**d)** Calcule a taxa média de variação do crescimento das plantas **A** e **B** do 1º ao 4º dia. | **Item a e c** | **A** | **X** |
| | | | **B** | © |
| | | | **C** | **X** |
| | | **Item b** | **A** | © |
| | | | **B** | © |
| | | | **C** | © |
| | | **Item d** | **A** | **X** |
| | | | **B** | © |
| | | | **C** | © |
| **Exercício 48** | **48** Na fabricação de certo produto, o lucro mensal de uma empresa, em milhares de reais, é dado por $L(x) = -\frac{3x^2}{4} + 90x - 1\,500$, sendo **x** o número de milhares de peças vendidas no mês. Determine:<br>**a)** o lucro mensal máximo na venda dessas peças; | | **A** | © |
| | | | **B** | © |
| | | | **C** | © |
| **Exercício 50** | **50** Todos os pontos do gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx^2 - 2x + m$ estão localizados abaixo do eixo das abscissas. Determine os possíveis valores reais de **m**. | | **A** | **X** |
| | | | **B** | © |
| | | | **C** | © |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Os exercícios dispostos no Quadro 16 contabilizam 29 itens. Alguns deles, mesmo estando numa mesma questão, foram classificados como congruente ou em diferentes graus de não congruência o que exigiu que fossem destacados por item. Já os que possuíam a mesma variação de congruência ou não congruência semântica não foram separados por item.

Dessa forma, justifica-se a não conservação dos critérios de congruência em cada um dos exercícios apresentados no Quadro 16:

O exercício 7 conservou a correspondência semântica (A) e a univocidade semântica terminal (B), porém, não conservou a ordem na organização das unidades significantes pois, no enunciado pede o domínio e depois relata que a imagem é 5 e no RA a imagem $[f(x)]$ vem primeiro que o domínio, podendo confundir o estudante.

É importante ressaltar que embora os estudantes tenham estudado domínio e imagem em capítulos anteriores do LD, no capítulo de função quadrática não se abordou esses conceitos até a apresentação desse exercício.

No exercício 10 são apresentados três itens e cada um possui um grau de não congruência distinto (médio e baixo) e com critérios de conservação diferentes. O item a tem um grau médio de não congruência já que não conserva o critério (A) – em que a unidade significante "valor atual das ações" implica em $v(0)$ no RA, ou seja, não existe uma relação biunívoca desses elementos; e nem o critério (B), pois, "valor atual" e "data desta previsão" podem ter outros sentidos para o aluno, na leitura, que não seja o zero.

O item b do décimo não conserva o critério (A) por não estabelecer uma relação biunívoca entre os elementos significantes nos dois registros (ação mais valorizada → >), e conservam os dois critérios restantes, isto significa que possui grau baixo de não congruência semântica.

O mesmo acontece com o item c, já que o "mesmo valor" é composto por duas palavras que correspondem a apenas um símbolo no RA, =, portanto, não satisfaz (A). No entanto, este item tem um grau de não congruência médio, pois não conserva a ordem entre os elementos significantes também.

Os exercícios 12, 13, 15, 18 item b, 19 e 20 possuem grau de não congruência semântica alto, haja vista que não conservam nenhum dos critérios estabelecidos por Duval (2009). No que concerne ao critério (C), todos apresentam ordem de organização entre os elementos significantes no RLN distintos dos elementos significantes no RA. Quanto aos outros critérios, segue-se a justificativa nos tópicos abaixo:

- **12** – (A) não faz a correspondência biunívoca entre "duas raízes reais iguais" (RLN) e $\Delta = 0$; e (B) não é conservada, pois "duas raízes reais iguais", também pode ser representada algebricamente como $x_1 = x_2$, logo não existe apenas um sentido na conversão.

- **13** – (A) “duas raízes reais distintas” possuem quatro palavras enquanto que $\Delta > 0$ possui três símbolos, não houve correspondência semântica nas unidades significantes; Em (B) “duas raízes reais distintas” pode assumir dois significados no RA: $\Delta > 0$ ou $x_1 \neq x_2$.
- **15** – (A) pela mesma justificativa dos últimos, “não admite raízes reais” não faz correspondência semântica com $\Delta < 0$; E (B) não é conservado porque “não admite raízes reais” pode admitir dois sentidos no RA ($\Delta < 0$ e $x_1\ e\ x_2 \nexists R$).
- **18 item b** – (A) o “p” com um elemento significantes é convertido em três: $x_1 . x_2$, no entanto, esse elemento significante não tem necessariamente esse significado, isso não fica claro no exercício, por isso não é conservado o critério (B).
- **19** – A conversão das unidades significantes: “uma raiz excede a outra em 3 unidades” $\rightarrow$ $x_1 = x_2 + 3$ ou $x_2 = x_1 + 3$ não é biunívoca, dessa forma (A) não é conservado. E por esses elementos significantes poderem assumir duas representações em RA não é satisfeito (B).
- **20** – “As raízes da equação são negativas e uma é o triplo da outra” são os elementos significantes no RLN[12], porém a palavra: negativas, por exemplo, tem relação com dois sinais de subtração (-) um na frente de cada raiz da equação, logo (A) não é conservado. Além disso, essas unidades de sentido podem ser apresentadas invertendo as raízes, já que não está explícito, por isso (B) não é satisfeito.

Além dos justificados inicialmente, oito itens foram classificados com grau médio de não congruência semântica, sendo seis em que os critérios (A) e (C) não foram conservados: **18 item a**, **31 itens a e b**, **34** e **38 itens a e c**; e dois que não conservam os critérios (A) e (B): **14** e **29 item c**.

A justificativa para a não conservação desses critérios nos itens expostos segue o mesmo raciocínio dos explanados anteriormente: (C) o fato de não dispor da mesma ordem de elementos significantes em cada um dos dois registros (RLN e RG), (A) não existe uma correspondência biunívoca entre as unidades de sentido das duas representações convertidas e (B) houve mais de um sentido ao converter uma representação em outra.

[12] Está escrito com as preposições, numerais para dar sentido as palavras que realmente podem ser convertidas

Dessa forma, destacaremos apenas as unidades significantes convertidas em cada um dos itens, que não satisfizeram os critérios (A) e (B), ao qual compõem as justificativas supracitadas:

- **14** – “quantidade de raízes da função” → $\Delta > 0$; $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.
- **18 item a** – “diferença entre as raízes da equação é 5” → $x_1 - x_2 = 5$.
- **29 item c** – “altura máxima” → $y_v$.
- **31 item a** – “não foram registrados mais *downloads* ” → $y = 0$.
- **31 item b** – “número de *downloads* foi máximo” → $y_v$.
- **34** – “soma dos quadrados de *x* e *y* seja menor possível” → $x^2 + y^2 = x_v$.
- **38 item a** – “2 dias” → $y = 2$.
- **38 item c** – “as duas plantas atingem mesma altura” → $2{,}5.x = \frac{20x - x^2}{6}$.

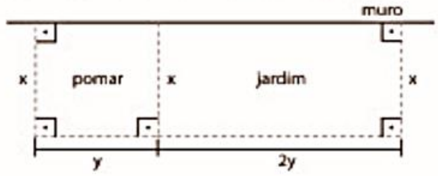
Os itens que foram classificados com baixo grau de não congruência, menos o item 7 que já foi justificado, são um total de oito. Sendo dois deles: **29 itens b** e **d** – por apresentarem ordem de organização (C) diferente entre os elementos significantes dos dois registros, e os itens **23, 30 (a,b,c), 38 (d)** e **50** por não conservarem a correspondência semântica dos elementos significantes (A), isto é, não existe uma relação biunívoca. Sendo assim, as unidades significantes referente a esses itens são:

- **23** – “positivo” → $> 0$ e “raiz nula” → $0^2 + m.0 + (m^2 - m - 12) = 0$ (de acordo com a resolução no manual do professor no LD (IEZII *et al*, 2016).
- **30 item a** – “quantos anos o valor do produto diminuiu” → $x_v$.
- **30 item b** – “valor mínimo” → $y_v$.
- **30 item c** – “ano do preço do quilograma será máximo” →$v(10)$.
- **38 item d** – “taxa média de variação” → $\frac{y(4) - y(1)}{4 - 1}$.
- **50** – “todos os pontos do gráfico da função quadrática estão localizados abaixo do eixo das abscissas” → $a < 0$ e $\Delta < 0$ conforme a resolução no manual do professor no LD (IEZII *et al*, 2016).

No que concerne aos itens que foram categorizados como congruentes, em razão de terem conservado os três critérios propostos por Duval (2009) estão **29 item a, 38 item b** e **48 itens a**.

No Quadro 17 são apresentados a conservação dos critérios de congruência semântica nos dois itens em que a conversão é do RLN→RA usando o registro figural (RF).

**Quadro 17 -** Análise da conservação dos critérios de congruência semântica no exercício com conversão RLN→RA usando o registro figural (RF)

| | | **Critérios** | |
|---|---|---|---|
| **Exercício 32** | **32** Um fazendeiro possui 150 metros de um rolo de tela para cercar um jardim retangular e um pomar, aproveitando, como um dos lados, parte de um muro, conforme indica a figura seguinte:<br><br>**a)** Para cercar com a tela a maior área possível, quais devem ser os valores de **x** e **y**?<br>**b)** Qual seria a resposta, caso não fosse possível aproveitar a parte do muro indicada, sendo necessário cercá-la com a tela? Nesse caso, em que percentual ficaria reduzida a área máxima da superfície limitada pelo jardim e pelo pomar reunidos? | **A** | © |
| | | **B** | © |
| | | **C** | **X** |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Os itens apresentados no Quadro 16 possuem grau baixo de não congruência semântica, deixando de conservar apenas a ordem na organização das unidades significantes de cada uma das representações (C), já que todas essas unidades não estão presentes no RLN, parte delas estão no registro auxiliar (RF) que possui dimensão 2D, diferente do RA que possui dimensão 1D. Como as dimensões são diferentes, normalmente, a ordem não é estabelecida.

O Quadro 18 evidencia a classificação da conservação dos critérios de congruência nas conversões do RLN→RA, sem a interferência de nenhum registro auxiliar.

**Quadro 18 -** Análise da conservação dos critérios de congruência semântica nos exercícios com conversão RLN→RA

| | | **Critérios** | |
|---|---|---|---|
| **Exercício 8** | **8** Em um retângulo, a medida de um dos lados excede a medida do outro em 4 cm. Sabendo que a área desse retângulo é 621 $cm^2$, determine seu perímetro. | **A** | **X** |
| | | **B** | © |
| | | **C** | **X** |
| **Exercício 9** | **9** Um grupo de professores programou uma viagem de confraternização que custaria, no total, R$ 6400,00 – valor que dividiriam igualmente entre si. Alguns dias antes da partida, seis professores desistiram da viagem e, assim, cada professor participante pagou R$ 240,00 a mais. Quantos foram à viagem? | **A** | **X** |
| | | **B** | © |
| | | **C** | **X** |

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercício 11</td><td rowspan="3">11 Certo mês, um vendedor de sucos naturais arrecadou uma média diária de R$ 180,00, vendendo cada copo de suco pelo mesmo preço. No mês seguinte, aumentou o preço em R$ 0,50 e vendeu uma média de 18 unidades a menos por dia, mas a arrecadação média diária foi a mesma. Determine:<br>a) o preço do copo de suco no primeiro mês;<br>b) o número de copos por dia vendidos no primeiro mês;<br>c) o número de copos por dia vendidos no segundo mês.</td><td colspan="2">A</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>©</td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Exercício 33</td><td rowspan="3">33 Entre todos os retângulos de perímetro 20 cm, determine aquele cuja área é máxima. Qual é essa área?</td><td colspan="2">A</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>©</td></tr>
<tr><td colspan="2">C</td><td>©</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Exercício 42</td><td rowspan="6">42 Determine, em cada caso, a lei que define a função quadrática:<br>a) de raízes 4 e $-2$ e cujo vértice da parábola correspondente é o ponto (1, 9);<br>b) de raiz dupla igual a $\sqrt{3}$ e cujo gráfico intersecta o eixo Oy em (0, 3);<br>c) cujo gráfico contém os pontos $(-1, -4)$, $(1, 2)$ e $(2, -1)$.</td><td rowspan="3">Item a e b</td><td>A</td><td>©</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>©</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Item c</td><td>A</td><td>X</td></tr>
<tr><td>B</td><td>©</td></tr>
<tr><td>C</td><td>©</td></tr>
</table>

**Fonte:** Elaborado pela autora

Pelo Quadro 18, os itens 8, 9 e 11(a, b, c) se caracterizam como grau médio de não congruência semântica, por não conservarem dois dos três critérios: (A) e (C). De (C) a ordem dos elementos significantes entre as representações convertidas não são as mesmas. E de (A) não existe correspondência biunívoca entre as unidades de sentido de cada uma das representações, o que pode ser observado na conversão (RLN→RA) das unidades significantes de cada uma delas nos tópicos abaixo:

- **8** – “a medida de um dos lados excede a medida do outro em 4 cm” “área desse retângulo é $621cm^2$” → $x.(x+4) = 621$.
- **9** – “R$6400,00 – valor que dividiriam igualmente entre si” “seis professores desistiram da viagem” “cada professor pagou R$240,00 a mais” → $\frac{6400}{n}$ e $\frac{6400}{n-6} + 240$.
- **11 itens a, b** e **c** – “arrecadou uma média diária de R$180, vendendo cada copo de suco pelo mesmo preço” → $n\,.\,p = 180$; “aumentou o preço em R$0,50 e vendeu uma média de 18 unidades a menos por dia, mas a arrecadação média diária foi a mesma” → $(p + 0{,}50)\,.\,(n - 18) = 180$.

Nesse caso, o enunciado se encarrega por denotar todas as unidades significantes, do qual resolvendo através de um sistema, respondem-se todos os itens com alguns tratamentos a partir do que é pedido.

Os itens que se revelam com baixo grau de não congruência semântica são os 33, 42 (c). Eles, apenas, não conservam o critério (A) já que as unidades de sentido de uma representação não se relacionam biunivocamente. Observemos as conversões (RLN→RA) pelas unidades significantes:

- **33** – "retângulos de perímetro 20 cm" → $2x + 2y = 20$.
- **42 item c** – "os pontos $(-1, -4), (1, 2)$ e $(2, -1)$" não estão presentes no registro final, logo não há correspondência semântica.

Quanto aos itens *a* e *b* do exercício 42 que são categorizados como congruentes, pois conservam os três critérios de congruência, destaca-se que o critério (A) foi conservado devido o uso da representação algébrica na forma fatorada, que evidencia as raízes.

Os itens 44 (a, b, c, d, e, f, g, h) que contabilizam 8 no total, são os que envolvem tratamento e conversão (RA→RG e RG→RA), caracterizados dessa forma, por não estabelecerem a forma de resolução, o que dá margem para as duas transformações.

Estes itens, seguem o mesmo raciocínio e análise dos seis exemplos apresentados no Quadro 9, em que são feitos o estudo do sinal. Considerou-se, portanto, que todos os 8 itens são de alto grau de não congruência semântica, já que os critérios (A), (B) e (C) não são conservados, de acordo com o Quadro 19.

**Quadro 19 -** Análise da conservação dos critérios de congruência nos exercícios que compõem tratamento e conversão (RA→RG e RG→RA) concomitantemente

| | | Critérios | |
|---|---|---|---|
| **Exercício 44** | **44** Faça o estudo de sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas pelas seguintes leis:<br>**a)** $y = -3x^2 - 8x + 3$<br>**b)** $y = 4x^2 + x - 5$<br>**c)** $y = 9x^2 - 6x + 1$<br>**d)** $y = 2 - x^2$<br>**e)** $y = -x^2 + 2x - 1$<br>**f)** $y = 3x^2 - x + 4$<br>**g)** $y = 3x^2$<br>**h)** $y = 4x^2 + 8x$ | **A** | **X** |
| | | **B** | **X** |
| | | **C** | **X** |

**Fonte:** Elaborado pela autora

O critério (A) não é conservado já que não existe correspondência semântica entre as unidades significantes da representação algébrica para a gráfica. A univocidade semântica terminal (B) não é estabelecida, haja vista que cada unidade significante do registro algébrico não expressa o mesmo sentido no registro gráfico, já que no gráfico tem-se os sinais de + e -, e no registrob algébrico < e >, por exemplo. E a ordem nas unidades significantes (C) não é conservada já que não é a mesma nos dois registros (saída e chegada).

**III. Heterogeneidade nos dois sentidos nos exercícios**

No que concerne a heterogeneidade, o que se pode viabilizar é que houve a conversão nos dois sentidos quando estes eram registro algébrico e registro gráfico, mas com relação as outras conversões a heterogeneidade não foi estabelecida.

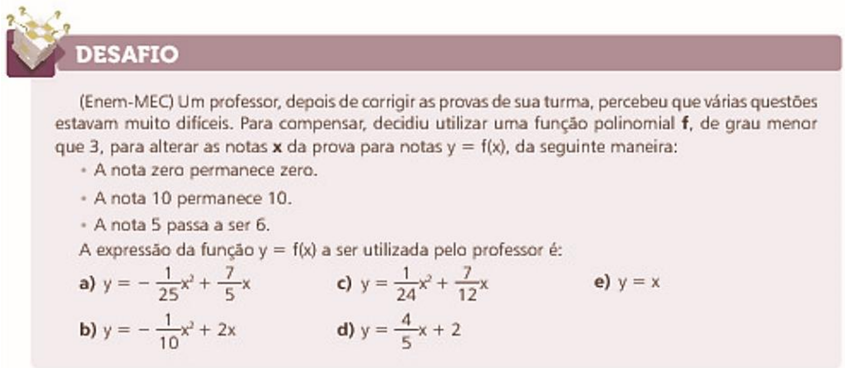
#### 4.1.2.5 Desafio

Nesse item, abordaremos a análise e discussão do desafio disposto no LD.

**I. Tratamento ou conversão no desafio?**

O desafio (Figura 54) proposto no LD é a última atividade do capítulo de função quadrática. E trata-se de uma conversão do registro em linguagem natural (RLN) para o registro algébrico (RA).

**Figura 54 -** Desafio proposto no LD



**DESAFIO**

(Enem-MEC) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial **f**, de grau menor que 3, para alterar as notas **x** da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é:

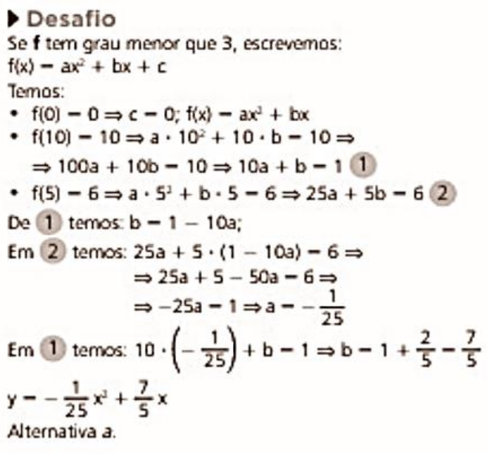
**a)** $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$ **c)** $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$ **e)** $y = x$

**b)** $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$ **d)** $y = \frac{4}{5}x + 2$

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p. 114)

A articulação nas unidades significantes entre os registros de partida e de chegada acontece, como mostra a Figura 55, favorecendo a coordenação dos registros pelos estudantes.

**Figura 55 -** Resolução do desafio com a articulação entre suas unidades significantes



**Desafio**

Se **f** tem grau menor que 3, escrevemos:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Temos:

- $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$; $f(x) = ax^2 + bx$
- $f(10) = 10 \Rightarrow a \cdot 10^2 + 10 \cdot b = 10 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 100a + 10b = 10 \Rightarrow 10a + b = 1$ (1)
- $f(5) = 6 \Rightarrow a \cdot 5^2 + b \cdot 5 = 6 \Rightarrow 25a + 5b = 6$ (2)

De (1) temos: $b = 1 - 10a$;

Em (2) temos: $25a + 5 \cdot (1 - 10a) = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25a + 5 - 50a = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -25a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{25}$

Em (1) temos: $10 \cdot \left(-\frac{1}{25}\right) + b = 1 \Rightarrow b = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$

$y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

Alternativa a.

**Fonte:** Iezzi *et al* (2016, p.372)

A unidade significante **função polinomial f, de grau menor que 3** foi associado a $f(x) = ax^2 + bx + c$. E as notas da prova a serem alteradas de (**x**) para **f(x)=y**:

- A nota zero permanece zero → $0 = f(0)$
- A nota 10 permanece 10 → $10 = f(10)$
- A nota 5 passa a ser 6 → 6= $f(5)$

**II. Variação de congruência e não congruência semântica no desafio**

No que concerne a variação de congruência e não congruência semântica no desafio, a análise acentua que se trata de um grau de não congruência médio, pois, não conserva dois dos critérios estabelecidos por Duval (2009).

**Quadro 20 -** Desafio com análise da conservação dos critérios de congruência

| | | **Critérios** | |
|---|---|---|---|
| **Desafio** | **DESAFIO**<br>(Enem-MEC) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial **f**, de grau menor que 3, para alterar as notas **x** da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:<br>• A nota zero permanece zero.<br>• A nota 10 permanece 10.<br>• A nota 5 passa a ser 6.<br>A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é:<br>**a)** $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$ **c)** $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$ **e)** $y = x$<br>**b)** $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$ **d)** $y = \frac{4}{5}x + 2$ | **A** | **X** |
| | | **B** | **X** |
| | | **C** | © |

**Fonte:** Elaborado pela autora

O critério da univocidade semântica terminal (B) não é conservado, pois **“função polinomial f, de grau menor que 3”** pode ser compreendida de duas formas no registro em linguagem natural: $f(x) = ax + b$ ou $f(x) = ax^2 + bx + c$, ambas leis de formação possuem grau menor que 3.

A correspondência semântica terminal (A) não é conservada, pois, a cada termo significante do registro de partida, não é correspondido somente um no registro de chegada. E a ordem na organização das unidades significantes (C) é estabelecida, haja vista, que se segue em ambos os registros, de chegada e de partida.

### 4.1.2.6 Conclusões da análise no LD

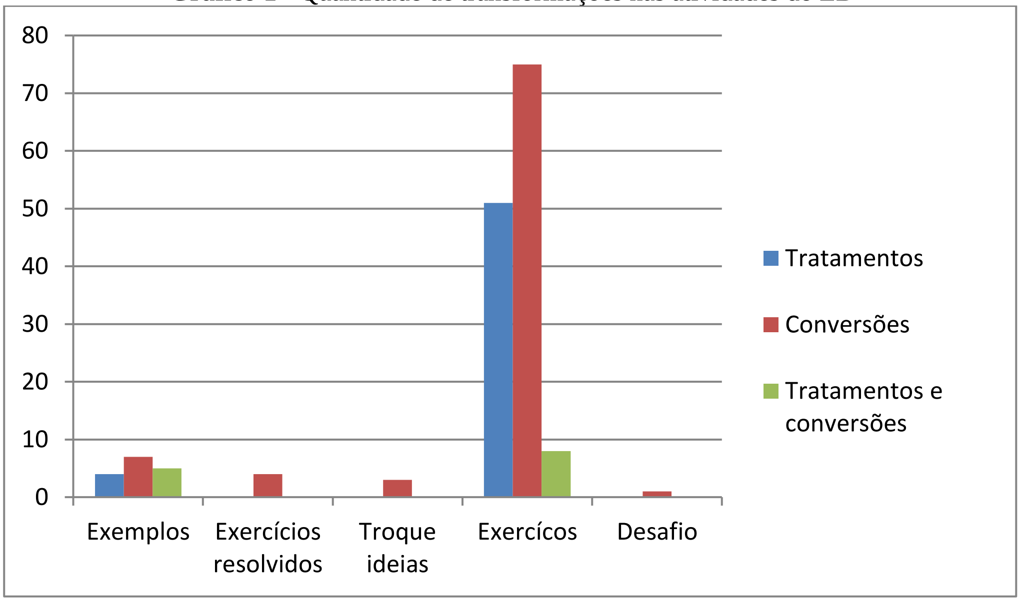
Nessa seção, destacam-se as conclusões que a análise do LD permitiu verificar a partir das categorias de análise estabelecidos no capítulo 3 (página 60): Representações da função quadrática; Tratamento; Conversão; Procedimento de construção do gráfico e fenômeno de congruência semântica, elementos estes, pertencentes a TRRS.

Assim, retomamos aos critérios de análise referentes a categoria representações da função quadrática. O livro didático apresenta diversas representações, no entanto, as mais priorizadas por ele são: algébrica (principalmente na forma desenvolvida), gráfica e em linguagem natural. Esses registros de representação semiótica são essenciais para a aprendizagem de função quadrática, mas o LD deixa lacunas por não trabalhar igualmente as três formas de representação de função quadrática no RA, além disso, faz uso do RT de maneira que não possibilita a articulação entre os RA e RG. O LD poderia utilizar o RT para generalização e construção da lei de formação da função quadrática.

Ao abordar a representação algébrica pode-se mensurar que o LD expõe em duas formas que não são divididas e às vezes acontecem concomitantemente, ora ela está numa transformação de tratamento, ora em conversões. No primeiro caso a ênfase é na manipulação algébrica, como exemplo tem-se o encontro das raízes usando a fórmula resolutiva. Já nas conversões, a sua abordagem versava entre as representações em linguagem natural, gráfica, tabular e figural, mas, ainda assim, eram usados procedimentos de tratamento dentro dessas conversões, em boa parte dos casos.

No que concerne as transformações (categorias: tratamento e conversão) abordadas nas atividades do LD, o Gráfico 1 evidencia o quantitativo de tratamentos, conversões e ambos concomitantemente (os itens não especificavam qual registro seria o de chegada, o que permitia ser tratamento e/ou conversão).

**Gráfico 1 -** Quantidade de transformações nas atividades do LD



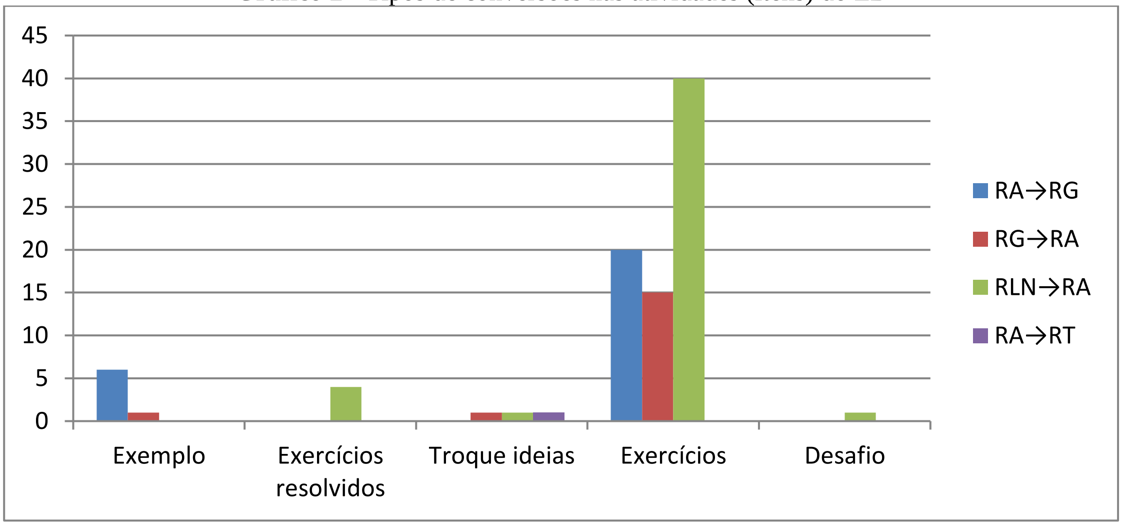

**Fonte:** Elaborado pela autora

Pelo Gráfico 1, percebe-se que o número de conversões é maior que o de tratamentos, mas, parte das conversões, principalmente entre os RA e RG, são conversões indiretas, isto é, tem-se duas conversões (RA→RG; RG→RA) até obter a resolução que é solicitada na questão, ou mesmo um tratamento no RA. Em outras conversões também pode ser visto o tratamento numérico, como nas atividades do troque ideias.

Embora pelos pressupostos da TRRS se justifique que é por meio das atividades de conversões que os estudantes podem coordenar dois registros diferentes, assim como, é por meio do uso de pelo menos dois registros que acontece a compreensão do conceito matemático estudado, haja vista que cada representação dispõe de parte de conteúdos diferentes, em casos onde a conversão é indireta, ela não permite uma coordenação entre os registros de partida e o de chegada (final da resolução) podendo gerar dificuldades na aprendizagem. O tratamento ocorre com destaque na representação algébrica.

Em termos dos tipos de conversões, os mais enfatizados no LD foram RLN→RA e RA→RG (conversões indiretas, seja usando o RT ou mesmo o tratamento no RA), como revela o Gráfico 2. Houve heterogeneidade nos dois sentidos apenas entre os registros algébrico e gráfico.

**Gráfico 2 -** Tipos de conversões nas atividades (itens) do LD

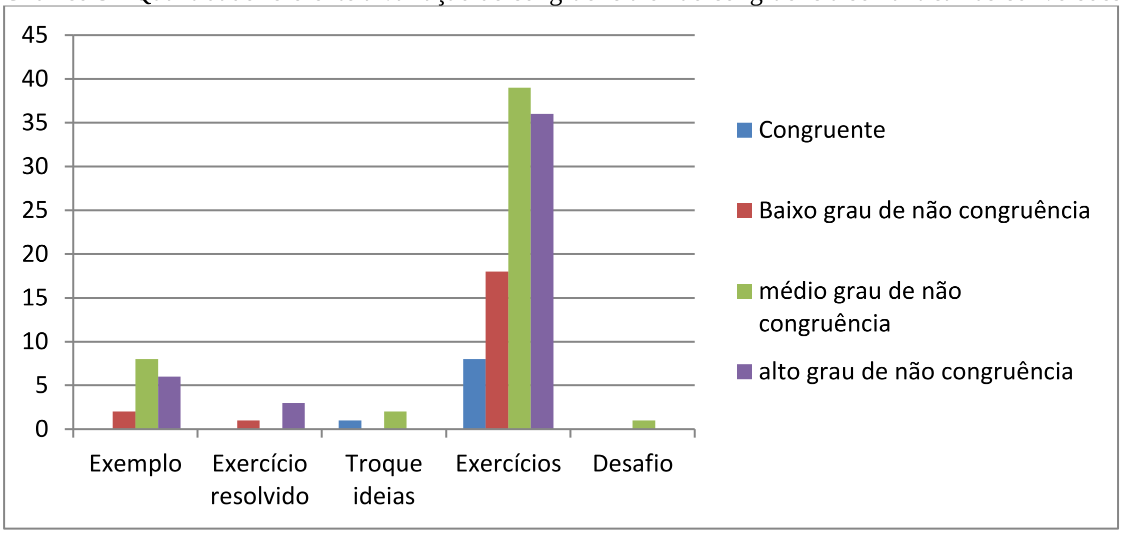



**Fonte:** Elaborado pela autora

Nesse Gráfico 2, não são explicitadas as representações auxiliares e os tratamentos que se fizeram presentes em várias conversões no LD. O registro tabular foi o que mais teve destaque enquanto representação auxiliar, além dele também tiveram representações figurais. Esse destaque prevalece por causa do procedimento de construção do gráfico adotado pelo LD, o ponto a ponto.

O Gráfico 3 enfatiza a quantidade referente a variação de congruência e não congruência semântica nas conversões que o LD abordou de maneira geral.

**Gráfico 3 -** Quantidade referente a variação de congruência e não congruência semântica nas conversões

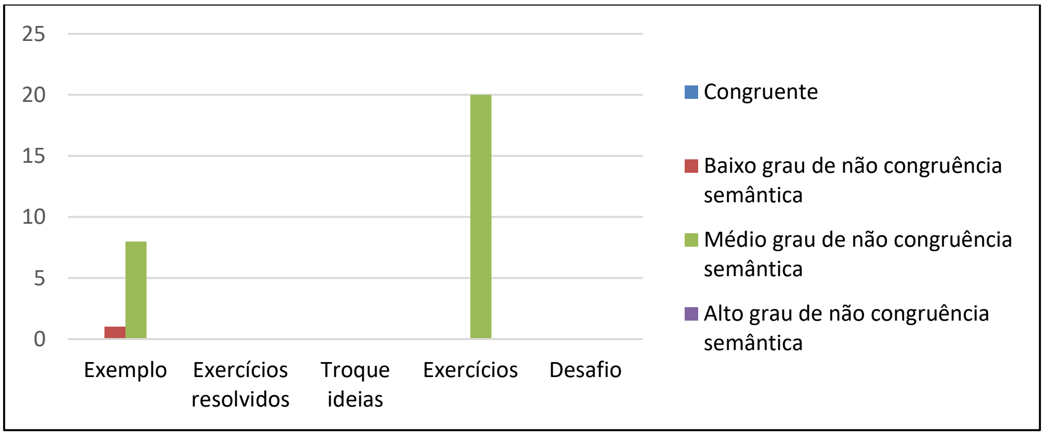



**Fonte:** Elaborado pela autora

O número de itens que possuem congruência na conversão de duas representações é inferior aos demais. A maioria são de médio e alto grau de não congruência devido ao grande número de conversões indiretas que não auxiliam na articulação entre os registros, o que implica no aumento da dificuldade em resolver essas questões, pois Duval (2009) enfatiza que quanto maior o grau de não congruência entre duas representações, maior serão as dificuldades em se realizar a atividade de conversão.

Do ponto de vista do fenômeno de congruência semântica, ainda é possível verificar como se comporta esse fenômeno em cada tipo de conversão.

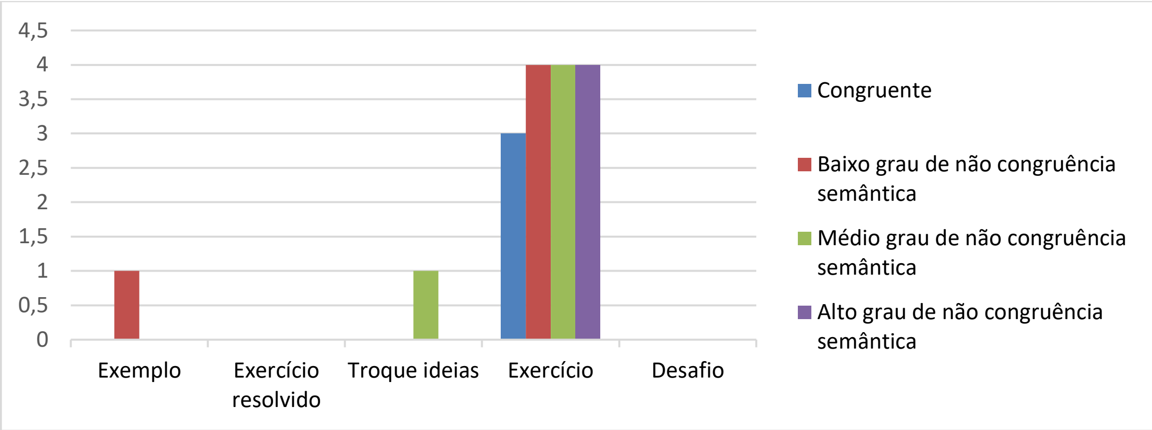
**Gráfico 4 -** Quantidade referente a variação de congruência e não congruência semântica nas conversões RA para RG




**Fonte:** Elaborada pela autora

Pelo Gráfico 4, percebemos que nas conversões indiretas do RA→RG, seja usando o RT como registro auxiliar (RA→RT; RT→RG) ou o tratamento no RA, possuem grau médio de não congruência semântica com maior frequência, em apenas um dos exemplos o grau de não congruência semântica é baixo.

**Gráfico 5 -** Quantidade referente a variação de congruência e não congruência semântica nas conversões RG para RA

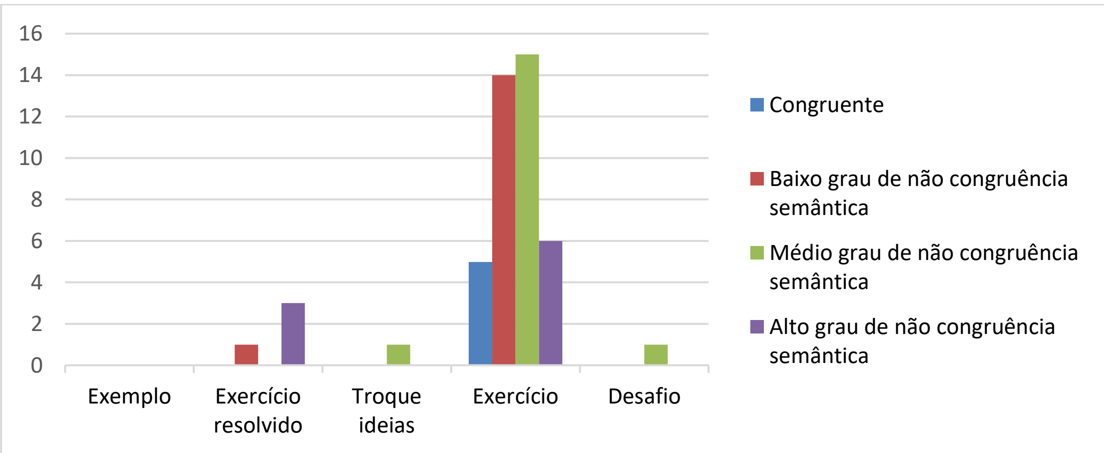



**Fonte:** Elaborada pela autora

A partir do Gráfico 5, pode-se observar no único exemplo tem-se baixo grau de não congruência semântica, enquanto no troque ideias o grau de não congruência semântica já é médio. Nos exercícios existe uma variação quanto ao fenômeno de congruência semântica, considerando que vai do congruente até o grau de não congruência semântica alto. Vale salientar que nos exercícios essa conversão se apoia no RLN.

O que podemos considerar se compararmos os Gráficos 4 e 5, é que na conversão inversa (RG→RA) tem-se também conversão que foram consideradas congruentes, principalmente, porque o LD ao fazê-la utiliza do RA na forma fatorada, em que é possível coordenar as unidades significativas do RA com as variáveis visuais do RG.

**Gráfico 6 -** Quantidade referente a variação de congruência e não congruência semântica nas conversões RLN para RA




**Fonte:** Elaborada pela autora

No que concerne a conversão do RLN para o RA, os exemplos não apresentam nenhum, só os exercícios resolvidos que trazem 4 itens, onde uma é de baixo grau de não congruência semântica e 3 com alto grau de não congruência semântica. Sendo esse tipo de conversão mais enfatizado no LD, se faz necessário mais exercícios resolvidos ou exemplos que a enfatizassem levando em consideração as diferentes variações para o fenômeno de congruência semântica, que é o que pode-se perceber nos exercícios que devem ser resolvidos pelos estudantes, embora a ênfase maior se dê nos níveis de baixo e médio grau de não congruência semântica (Gráfico 6). É importante relembrar que nos exercícios, esse tipo de conversão acontece usando os RA e RF em alguns itens.

Apenas um item (troque ideias) faz a conversão em que o registro de partida é o RA e o de chegada é o RT, e este foi categorizado como congruente, embora nesse procedimento foi realizado o tratamento numérico. E com relação aos itens (exemplos: 4; exercícios: 8) que podiam ser respondidos tanto por tratamento, como por conversões nos dois sentidos (RA→RG; RG→RA) todas possuem grau de não congruência semântica alto, pelo fato de não existir articulação entre as unidades significantes e as variáveis visuais nos dois registros, de forma que transpareça claramente a conversão.

Dos Gráficos (4, 5 e 6) é perceptível que o médio grau de não congruência semântica prevalece em todas as conversões, quanto ao alto grau de não congruência, estas são enfatizadas nas conversões que acontecem concomitantemente com os tratamentos no RA (12) e na conversão (RG→RA = 4).

Embora os itens apresentados no LD terem como maior frequência o médio e alto grau de não congruência semântica, como supracitado. Constata-se dos últimos três gráficos e das análises anteriores, que  isso não se deve somente a complexidade para a resolução, mas principalmente, pelo fato de a maioria serem conversões indiretas que impossibilitam a articulação e coordenação entre os registros de partida e de chegada das extremidades, como é o caso das conversões do RA→RG, onde ora se usava o RT como auxiliar, ora usava-se tratamento no RA.

No que concerne a parte explicativa do LD, algumas lacunas podem ser percebidas, como no tópico de gráfico presente na Figura 23[13], pois quando se refere a diretriz, o LD não explicita que esta pode não coincidir com o eixo das abscissas, e pela representação exposta no RG, o aluno pode confundir a diretriz com o eixo das abscissas, ou pensar que a diretriz sempre estará coincidindo com ela. Além disso, pela Figura 24[14] o LD traz como título “raízes de uma equação do 2º grau”, e não traz a explicação de porque equação ao invés de função quadrática, sem falar que o termo equação continua sendo usado nos exercícios.

[13] Na página 68.
[14] Na página 70.

Quanto a abordagem para construção do gráfico, o LD usa a abordagem ponto a ponto, e esta não possibilita aos alunos a compreensão por meio da coordenação entre as unidades significantes e as variáveis visuais entre os dois registros.

Dessa maneira, mesmo o LD apresentando variabilidade de registros de representações semióticas e variadas conversões elas não são trabalhadas para que se possa realizar a coordenação entre os registros, o que pode causar maiores dificuldades tanto para o ensino, quando subsidiado pelo LD como para a aprendizagem.

## 4.2 O ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA CONDUZIDA POR UM PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Neste tópico será descrita a análise das aulas a partir das transcrições da filmagem e áudio gravação, assim como das anotações da observadora, apoiadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Diante do que foi mencionado pelo participante da pesquisa, notou-se que suas aulas foram sempre embasadas no que o LD abordava, seja na explanação e exposição do conteúdo ou mesmo na utilização de exemplos e exercícios.

Como mencionado no tópico 3.6, foram observadas quinze aulas, cujo foco era o ensino e aprendizagem da função quadrática, com duração de 50 minutos cada, no período de 27 de agosto a 20 de setembro do ano de 2019. As aulas aconteciam em dias de terças, quartas e sextas-feiras.

### 4.2.1 Análise da abordagem e explanação de função quadrática nas aulas observadas

O alicerce para esta análise foram as categorias apresentadas no capítulo 3: Representações da função quadrática, tratamento, conversão, procedimento de construção do gráfico e fenômeno de congruência semântica, as quais serão discutidas nos subtópicos a seguir:

**I. Representações da função quadrática**

No que concerne aos registros de representações (algébrico, gráfico, linguagem natural, tabular, figural) apresentados durante as aulas sobre função quadrática pelo professor de matemática, houve variabilidade delas. Nas suas explicações, o professor utilizou os registros algébrico, gráfico e em linguagem natural com maior frequência, e assim como no LD, na maioria das vezes que trabalhou com o registro gráfico, ou seja, sua construção, apresentou também o registro tabular.

Com o trecho a seguir, no qual consta os registros em linguagem natural e algébrico, ilustramos um exemplo que o professor escreveu no quadro, no sexto dia de observação, para a exploração dos valores de máximo e mínimo da função quadrática.

**Figura 56 -** Exemplo de conversão RLN para RA escrito no quadro pelo professor

3º) Um goleiro chutou uma bola que descreveu a trajetória parabólica, definida pela lei $h(x) = -10x^2 + 40x + 1$. Na função dada $\underline{x}$ representa o tempo em segundos e $\underline{h(x)}$ representa a altura atingida pela bola em metros. Qual é a altura máxima atingida por essa bola e em quanto tempo isso ocorreu?

a) Altura de 41m no tempo de 2s.
b) Altura de 40m no tempo de 4s.
c) Altura de 80m no tempo de 4s.
d) Altura de 80m no tempo de 2s.
e) Altura de 160m no tempo de 2s.

$$a = -10 \quad b = 40 \quad c = 1$$
$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = 40^2 - 4.(-10).1$$
$$\Delta = 1600 + 40$$
$$\Delta = 1640$$

$$x_v = \frac{-b}{2.a} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$
$$x_v = \frac{-40}{2.(-10)} \qquad y_v = \frac{-1640}{4.(-10)}$$
$$x_v = \frac{-40}{-20} \qquad y_v = \frac{-164\cancel{0}}{-4\cancel{0}}$$
$$x_v = 2s \qquad y_v = 41m$$

**Fonte:** Transcrição (286 a 302 Cf. apêndice)

E em aulas anteriores (1º dia de observação) foi abordado a construção do gráfico da função quadrática, e como mencionado anteriormente, para isto, o professor fez uso do registro tabular, como mostra o trecho da transcrição (133 a 145 Cf. apêndice).

**Registro do professor:**

$$b)\ y = -x^2 + 1$$

**P:** [...] Então, como sempre, a gente faz uma tabelinha, onde de um lado é atribuído os valores a *x* e buscamos os valores correspondentes a cada *x* dado, para *y*. Colocamos *x* de menos três até o mais três (professor constrói a tabela calculando os valores com os alunos).

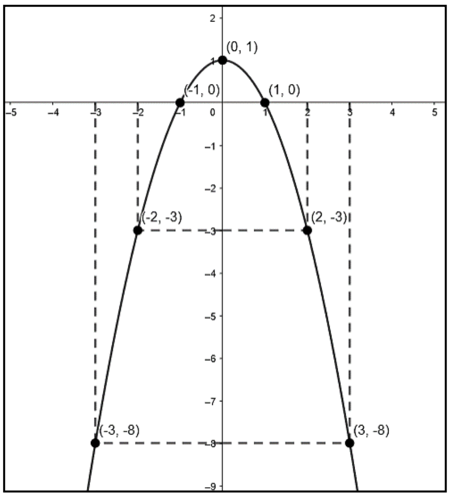
**Registro do professor:**

| ***X*** | ***Y*** |
|---|---|
| -3 | $-(-3)^2 + 1 = -9 + 1 = -8$ |
| -2 | $-(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3$ |
| -1 | $-(-1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ |

| | |
|---|---|
| 0 | $-(0)^2 + 1 = -0 + 1 = 1$ |
| 1 | $-1^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ |
| 2 | $-2^2 + 1 = -4 + 1 = -3$ |
| 3 | $-3^2 + 1 = -9 + 1 = -8$ |

**P:** Uma vez determinado a tabela, os valores de *y* para *x* de menos três a três, a gente agora vai fazer a ligação dos pontos.

**Registro do professor:**




Estas representações foram as mais apresentadas pelo professor, no entanto, outras representações também foram utilizadas. Por ser algo natural, quando o professor apresenta os registros, concomitantemente, ele realiza transformações com eles ou a partir deles. Isto é, ao propor as representações, o professor realiza ou tratamentos ou conversões.

Portanto, a segunda categoria é um tipo de transformação denotada pela TRRS, o tratamento, como ver-se seguidamente.

## II. Tratamento

A transformação de tratamento não foi a prioridade do professor em suas aulas, logicamente ela era sempre usada mediante a necessidade, mas a maioria das questões não tinha apenas a finalidade de tratamento em um registro. Sendo assim, o professor explorou apenas dois exemplos que necessitavam apenas de tratamento e pediu para que os alunos realizassem vinte e três itens similares como exercícios.

O registro com mais ênfase nos tratamentos foi o algébrico, principalmente, quando se tratava de encontrar as raízes da função quadrática, como mostra o trecho da transcrição retirado da gravação da aula:

**Figura 57 -** Resolução escrito no quadro de um exemplo que enfatiza o tratamento no RA

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, as raízes são 3 e 2.

**Fonte: Transcrição (193 Cf. apêndice)**

Nesse trecho, apenas houve a manipulação algébrica a partir da fórmula resolutiva, e essa manipulação não foi apenas utilizada no estudo das raízes, mas em outros momentos como o encontro das coordenadas do vértice, ou até mesmo na substituição de valores para *x* na função, a fim de encontrar valores para *y* e organizar os pares ordenados na tabela.

Outro tipo de transformação é a conversão, e sua análise a partir das aulas segue abaixo.

## III. Conversão

Durante as aulas foram apresentados ou deixados para serem resolvidos pelos alunos 14 exemplos com um total de 16 itens. Destes, 2 exemplos foram trazidos pelo professor (outra fonte diferente do LD utilizado nas aulas), e o restante (14 itens) estava no LD: 11 com o título de exemplos e 1 questão (3 itens) com o título de exercício resolvido. Vale salientar que um dos exemplos do LD foi modificado para a conversão inversa, do registro gráfico (RG) para o registro algébrico (RA).

Além disso, foram deixados 20 exercícios (total de 60 itens) do LD, para que os estudantes pudessem resolver e praticar os conhecimentos aprendidos. Assim, destacamos na Tabela 5 a quantidade total de itens (exemplos e exercícios) que envolvem tratamento, conversão e conversão e tratamento, concomitantemente.

**Tabela 5 -** Quantidade de tratamentos e conversões nas atividades (itens) vivenciados nas aulas

| | Tratamento | Conversão | | | | | Tratamento e conversão (RA→RG) | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | RA→RG (usando RT) | RG→RA | RG→RA (Usando RLN) | RLN→RA (Usando alguma representação algébrica) | RLN→RA | | |
| **Exemplos** | 2 | 2 | 2 | | 5 | | 5 | **16** |
| **Exercícios** | 23 | 5 | | 10 | 12 | 2 | 8 | **60** |
| **Total** | **25** | **7** | **2** | **10** | **17** | **2** | **13** | **76** |

**Fonte:** Elaborada pela autora

Como percebe-se na Tabela 5 o número de conversão é maior que o de tratamento, isso possibilita aos estudantes maior apropriação dos conteúdos, visto que de acordo com Duval (2009) para que aconteça a apreensão de um objeto matemático é necessário coordenar ao menos dois registros de representação desse objeto, sendo a conversão mais enfatizada RLN→RA (usando RA).

No entanto, a partir de algumas escolhas de atividades pelo professor e da forma como é evidenciada a resolução alguns dos registros não é possível aos estudantes coordenar dois registros, como é o caso das conversões do RA→RG em que se tem uma conversão indireta, já que se faz uso do RT. Essa forma de abordagem foi muito enfatizada no LD que o professor utilizou no decorrer das aulas.

Ainda é perceptível que existem conversões apresentadas pelo professor nos exemplos utilizados em suas explicações que não foram adotados nos exercícios deixados aos alunos, como é o caso da conversão no sentido RG→RA. Assim como existem exercícios com conversões que não foram desenvolvidos nos exemplos da explicação (RG→RA usando o RLN e no sentido RLN→RA).

As conversões mais enfatizadas pelo professor foram registro em linguagem natural para o registro algébrico, seguidamente de registro gráfico para o algébrico, assim como, no sentido oposto, alguns trechos da gravação demonstra esses tipos de conversões (TRANSCRIÇÃO, 82 a 100 Cf. apêndice):

**Registro do professor:**

→ Gráfico

Exemplos:
1º) Construa o gráfico de cada uma das funções de R em R dadas pelas seguintes leis:
a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

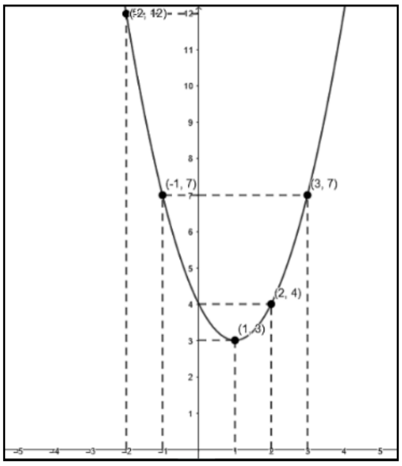
**P:** [...] A primeira coisa a ser feita quando a gente quiser construir um gráfico de uma função do segundo grau será atribuir valor pra x, e a partir dos valores atribuídos a x a gente buscar valores que correspondem a cada valor determinado por x em y. Então fazemos uma tabelinha, de um lado colocamos o valor de x e do outro lado vamos buscar a substituição que vai ser o valor de y. Geralmente, quanto mais pontos a gente coloca na tabela, melhor fica o desenho gráfico da função, geralmente, eu gosto de atribuir valores de menos três até três, mas, às vezes nessa atribuição de menos três até três, não nos dá condições de ver o gráfico de forma perfeita, aí então, a gente vai atribuindo outros valores que pudesse.

**Registro do professor:**

| ***X*** | ***y*** |
|---|---|
| $-3$ | $(-3)^2 - 2.(-3) + 4 = 9 + 6 + 4 = 19$ |
| $-2$ | $(-2)^2 - 2.(-2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$ |
| $-1$ | $(-1)^2 - 2.(-1) + 4 = 1 + 2 + 4 = 7$ |
| 0 | $0^2 - 2.0 + 4 = 0 - 0 + 4 = 4$ |
| 1 | $1^2 - 2.1 + 4 = 1 - 2 + 4 = 3$ |
| 2 | $2^2 - 2.2 + 4 = 4 - 4 + 4 = 4$ |
| 3 | $3^2 - 2.3 + 4 = 9 - 6 + 4 = 7$ |

**P:** Sim, sim! Está ótimo! Agora a gente faz a ligação dos pontos, observe que quando a gente vai ligando os pontos, a gente forma essa curva. Uma curva na matemática, chamada de curva cônica, que tem um nome próprio chamado de parábola.

**Registro do professor:**




Nessa conversão, em que o registro inicial é o algébrico (RA) e o final é registro gráfico (RG), para que o professor realizasse a transformação ele utilizou o registro tabular (RT) a fim de encontrar pares ordenados a serem substituídos no plano cartesiano e ligados para a formação do gráfico. Consideramos o registro tabular como um registro auxiliar, mas ao mesmo tempo que ele toma esse papel, em vez de apenas uma conversão tem-se duas: RA→RT e RT→RG.

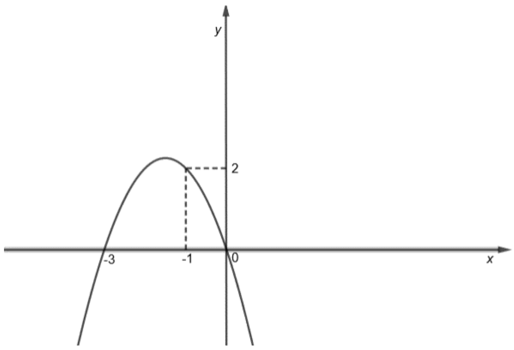
Nas conversões no sentido inverso, o professor optou por selecionar pontos relevantes no gráfico, tais como vértice, sinal do coeficiente *a*, raízes da função. A partir disto, ele traçava juntamente com os alunos o esboço do gráfico para a função dada, como segue o trecho abaixo (TRANSCRIÇÃO, 375 a 400 Cf. apêndice):

**Registro do professor:**

→ Determinação da lei da função a partir de um gráfico

Exemplos:

1º) Determine a lei da função que cada gráfico a seguir representa:




**P:** A partir de um gráfico a gente consegue determinar a lei da função, para que isso aconteça é necessário que a gente tenha conhecimento no gráfico, de quem são as raízes e também um ponto qualquer do gráfico. Assim, para que eu consiga montar a lei da função eu tenho que ter conhecimento dessas duas coisas. Assim, a gente tá apto a encontrar a lei, porque toda lei da função ela pode ser escrita na forma (e escreve lendo $y = a.(x - r_1).(x - r_2)$) aí alguém pode dizer assim, professor, o que seria esse $r_1$ e $r_2$ aí? Seriam as raízes da função. [...] Então, todas as vezes que eu quiser montar a função de um gráfico, conhecida as suas raízes e um ponto qualquer dela, eu vou ter que escrever essa função nesse formato (aponta para a forma fatorada do registro algébrico), essa é a fórmula fatorada de uma função quadrática. [...] Outra coisa é que toda vez que eu tiver raízes negativas, com o menos da fórmula, na fórmula vai ficar positivo, e quando for positivo, escrito na fórmula vai ficar negativa.

**Registro do professor:**

$y = a.(x - r_1).(x - r_2)$

$y = a.[x - (-3)].(x - 0)$

$* \, y = a.(x + 3).x$

$2 = a.(-1 + 3).(-1)$

$2 = a.2.(-1)$

$2 = -2a$

$a = \dfrac{2}{-2}$

$\underline{a = -1}$

$* \, y = -1.(x + 3).x$

$y = -1.(x^2 + 3x)$

$\underline{y = -x^2 - 3x}$

Essa é a lei da função do item "a".

Esse tipo de conversão, é considerado um dos mais difíceis pelos alunos, justamente por não ser tão explorado, já que nesse sentido, a conversão não dá para ser feita utilizando uma tabela em que se possa distribuir valores, o que usualmente é feito tanto em livros didáticos (MAIA, 2007) como em aulas de matemática em que se estuda função, o que não foi diferente neste estudo se observarmos as análises anteriores.

Com relação a conversão RLN→RA, tem-se o seguinte trecho:

**Registro do professor:**

Exemplos:

1º) A quantidade q(x) de peças produzidas em um ateliê feminino variou nos primeiros 14 dias após a reinauguração, de acordo com a função $q(x) = -x^2 + 14x$. Sabendo que x representa o número de dias após a reinauguração, qual foi a quantidade máxima diária de peças produzidas nesse período?

a) 14
b) 49
c) 13
d) 7
e) 48

**P:** Observe que o que ele quer a quantidade máxima de peças, que nada mais é do que o q(x), ou seja, ele quer o y do vértice, tá? Porque o q(x) aqui na função representa o $y$. Assim, observe que essa parábola, pelo valor de $a$, $a$ é negativo, então a parábola tem concavidade voltada para onde? Para baixo, se ela tá com concavidade voltada para baixo, então, ele tem um dia que faz com produza a maior quantidade de peças, mas como eu não quero saber o dia e sim o maior número de peças produzidas, então nesse caso a gente vai fazer uso da fórmula.

**Registro do professor:**

$$a = -1 \quad b = 14 \quad c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 14^2 - 4.(-1).0$$

$$\Delta = 196 - 0$$

$$\Delta = 196$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4.a}$$

$$y_v = \frac{-196}{4.(-1)}$$

$$y_v = \frac{-196}{-4}$$

$$\underline{y_v = 49}$$

$$-x^2 + 14x = 0$$

$$x.(-x + 14) = 0$$

$$x = 0 \quad ou \quad -x + 14 = 0$$

$$-x = -14 \quad .(-1)$$

$$x = 14$$

$$\underline{x_v = 7}$$

$$y_v = -x_v^2 + 14x_v$$

$$y_v = -7^2 + 14.7$$

$$y_v = -49 + 98$$

$$\underline{y_v = 49}$$

**P:** Automaticamente, se $x$ igual a zero e igual a quatorze, o $x_v$ é quanto? Se é zero, as raízes é zero e quatorze, quem é o valor de [...]
**Al:** Sete.
**P:** Sete, aí alguém pode dizer assim, oxente, como é que ela sabe disso? É porque o $x_v$ ele é o ponto médio das raízes, então, se perguntasse em que dia houve maior produção de peças femininas, a resposta seria sete. (TRANSCRIÇÃO, 266 a 284 Cf. apêndice).

Para essa questão, o professor precisou realizar uma conversão do registro em linguagem natural para algébrica, no entanto, a função já foi dada. Logo, necessitaria converter apenas alguns trechos, tais como: "quantidade máxima diária" que corresponde ao $y_v$, e isso já mostraria como proceder com a questão, necessitando apenas do tratamento no registro algébrico. Foi feita uma interpretação quanto ao valor do coeficiente $a$ e a concavidade da parábola, o que determinava o valor de máximo, já que a concavidade é voltada para baixo, assim como o valor de $x_v$ considerando a simetria entre as raízes da função. Vale ressaltar que o professor realizou dois tipos de tratamentos diferentes na função para que a resolução pudesse ser feita de duas formas, dando aos alunos a opção de escolha.

No que se refere ao fenômeno da heterogeneidade nos dois sentidos, o professor explora apenas usando os RA e RG, os outros tipos de conversões são abordados em apenas um sentido, o que pode impossibilitar a viabilização de propriedades diferentes, já que o próprio Duval (2009) afirma que ao realizar-se as conversões em sentidos opostos com os mesmos registros, notam-se propriedades distintas entre eles.

**IV. Procedimento de construção do gráfico**

Duval (1988) expõe três diferentes formas de construir o gráfico de uma função: Ponto a ponto, traçado do gráfico e interpretação global das propriedades figurais. O procedimento que foi adotado pelo professor, seguido pelo livro didático, foi apenas o ponto a ponto. Esse tipo de procedimento consiste em substituir valores para *x* na função dada a fim de encontrar os valores de $y$ e formar os pares ordenados no registro tabular. A partir disto, marcam-se os pares ordenados no plano cartesiano e liga-os para que se chegue ao esboço gráfico da função, como é possível perceber no trecho (TRANSCRIÇÃO, 133 a 153 Cf. apêndice):

**Registro do professor:**

$$b)\ y = -x^2 + 1$$

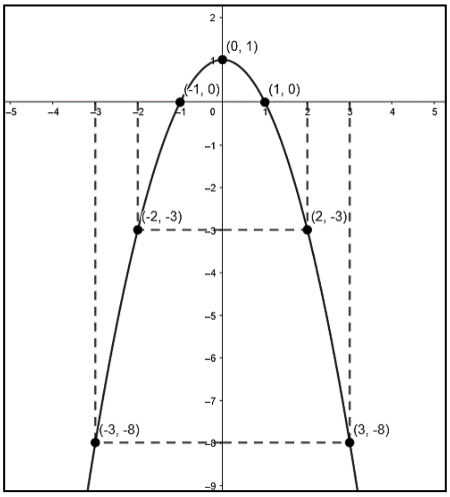
**P:** [...] Então, como sempre, a gente faz uma tabelinha, onde de um lado é atribuído os valores a *x* e buscamos os valores correspondentes a cada *x* dado, para *y*. Colocamos *x* de menos três até o mais três (professor constrói a tabela calculando os valores com os alunos).

**Registro do professor:**

| *x* | *y* |
|---|---|
| -3 | $-(-3)^2 + 1 = -9 + 1 = -8$ |
| -2 | $-(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3$ |
| -1 | $-(-1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ |
| 0 | $-(0)^2 + 1 = -0 + 1 = 1$ |
| 1 | $-1^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ |
| 2 | $-2^2 + 1 = -4 + 1 = -3$ |
| 3 | $-3^2 + 1 = -9 + 1 = -8$ |

**P:** Uma vez determinado a tabela, os valores de *y* para *x* de menos três a três, a gente agora vai fazer a ligação dos pontos.

**Registro do professor:**




**P:** Observe que o valor de $a$ como é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Quando a concavidade está voltada para cima, a gente tinha um valor mínimo da função, quando a concavidade está voltada para baixo, a gente tem o valor máximo da função, que nesse caso seria o um, tá certo. O eixo de simetria aqui, corresponde ao eixo das ordenadas. Observe também que o valor $c$ diz onde a parábola vai tocar o eixo $y$, observe que a parábola tocou o eixo $y$ no ponto um. Observe também agora, que nessa função ela tem dois toques no eixo $x$, então, se eu calcular o delta dessa função aqui, ele vai ser um número maior que zero. A gente pode fazer esse cálculo aqui.

**Registro do professor:**

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 0^2 - 4.(-1).1$$

$$\Delta = 0 + 4$$

$$\Delta = 4$$

É considerável que mesmo usando o procedimento ponto a ponto, o professor faz a leitura de pontos importantes e notórios do gráfico, fazendo sua relação com o registro algébrico, no entanto, o professor não fez a relação existente entre os coeficientes $b$ e $c$, pois o fato de $b = 0$ implica que ele será a ordenada do vértice, ao mesmo tempo que é o valor do ponto $c$, ou seja, o par ordenado (0,$c$) corresponde ao vértice da parábola, justamente por $b = 0$. Ainda assim, a leitura de pontos não se trata da abordagem de interpretação global das propriedades figurais, visto que esta é realizada a partir da visualização na alteração de valores visuais em cada um dos registros.

Esse tipo de procedimento, tanto na visão de Duval (1988) como por outros pesquisadores, assim como Moretti (2003) não permite que a o estudante consiga fazer a coordenação entre os registros de representação algébrica e gráfica.

E ainda, pode ocorrer obstáculos na aprendizagem, se não for evidenciado que a parábola é uma curva formada por um conjunto de pontos, e não apenas os que foram apontados na tabela e transcritos no plano.

**V. Fenômeno de Congruência Semântica**

Nesse tópico, destaca-se o fenômeno da congruência semântica nos itens abordados pelo professor em suas aulas, considerando tanto os que estão presentes no LD como os que ele traz ou modifica. O fenômeno, assim como já foi verificado no LD, segue os critérios estabelecidos por Duval (2009): Correspondência semântica das unidades significantes (A), univocidade semântica terminal (B) e ordem na organização das unidades significantes em cada uma das representações (C).

Baseado nestes, definiu-se os diferentes graus de não congruência semântica, variando se nas conversões são estabelecidos nenhum, um ou dois critérios de congruência, que respectivamente correspondem a alto, médio e baixo grau de não congruência semântica. Se os três critérios forem estabelecidos então a conversão é congruente.

Dessa forma, a Tabela 6 expõe o percentual de conversões destacando o fenômeno de congruência presente nelas, de acordo com o grau.

**Tabela 6 -** Percentual de conversões e seus respectivos fenômenos de congruência

| | **Conversão** | | | | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **RA→RG (usando RT)** | | **RG→RA** | **RG→RA (Usando RLN)** | **RLN→RA (Usando alguma representação algébrica)** | | **RLN→RA** | |
| | **Exp** | **Exc.** | **Exp** | **Exc.** | **Exp** | **Exc.** | **Exc.** | |
| **Congruente** | | | | | | 2 | | **2** |
| **Baixo grau de não congruência** | | | 2 | 4 | 5 | 5 | | **16** |
| **Médio grau de não congruência** | 2 | 5 | | 2 | | 3 | 2 | **14** |
| **Alto grau de não congruência** | | | | 4 | | 2 | | **6** |

**Fonte:** Elaborado pela autora

Com base na Tabela 6, os itens mais trabalhados foram os que envolviam baixo grau de não congruência semântica, ou seja, os que apenas um dos critérios apontados por Duval (2009) não era estabelecido. E foi seguido por itens com médio grau de não congruência semântica, dos quais em cada um, dois dos critérios não foram estabelecidos.

A maioria dos itens foram extraídos do livro, dessa forma, os itens correspondentes a congruência e a cada um dos graus de não congruência estão no Quadro 21.

**Quadro 21 -** Itens correspondentes a sua respectiva congruência ou grau de não congruência semântica

| | Exemplos | Exercícios |
|---|---|---|
| **Congruente** | | 29 (a); 48 (a). |
| **Baixo grau de não congruência** | Exercício resolvido 2 (a, b, c); Duas questões propostas pelo professor; 12 (conversão inversa) e 14. | 29 (b, d); 30 (a, b, c); 39; 40 (a, b); 41 (a). |
| **Médio grau de não congruência** | 2 e 3. | 2 (a, b); 3 (a, b, c); 8; 9; 28; 29 (c); 31 (a, b); 41 (b). |
| **Alto grau de não congruência** | | 12; 13; 43 (a, b, c, d). |

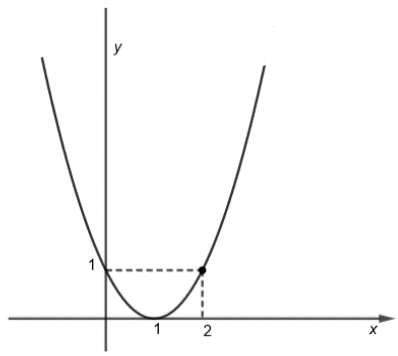
**Fonte:** Elaborado pela autora

Como os itens do LD já foram analisados item a item sobre o fenômeno de congruência semântica, destacamos a análise, neste momento, para os itens propostos pelo professor e modificados por ele (Quadro 22).

Assim, destacamos que o exemplo 12, em que houve a inversão no sentido da conversão de RA→RG para RG→RA, é caracterizado com baixo grau de não congruência semântica por não conservar o critério de **ordem entre duas representações**, visto que, o próprio Duval (2009) comenta que este critério só é pertinente quando o mesmo número de dimensão existir, logo, como o registro de partida está em 2D e o registro de chegada em 1D, não se estabelece o critério **C**.

Já nos exemplos dispostos pelo professor, o critério não conservado é o da **correspondência semântica entre os elementos significantes (A)**, haja vista que, ao pedir "altura máxima" no registro de partida, que compõem dois elementos, a correspondência não é biunívoca para o registro de chegada que é $y_v$. E ainda no exemplo 2, os termos "quanto tempo" está associada ao registro de chegada $x_v$, continuando por não satisfazer o critério **A**.

**Quadro 22 -** Análise da conservação dos critérios de congruência semântica nos itens diferentes do LD

| | | **Critérios** | |
|---|---|---|---|
| **Exemplo 12 (conversão inversa)** | Determine a lei da função que cada gráfico a seguir representa:<br><br> | **A** | © |
| | | **B** | © |
| | | **C** | **X** |
| **Exemplo 1 (proposto pelo professor)** | A quantidade q(x) de peças produzidas em um ateliê feminino variou nos primeiros 14 dias após a reinauguração, de acordo com a função $q(x) = -x^2 + 14x$. Sabendo que $\underline{x}$ representa o número de dias após a reinauguração, qual foi a quantidade máxima diária de peças produzidas nesse período?<br>a) 14<br>b) 49<br>c) 13<br>d) 7<br>e) 48 | **A** | **X** |
| | | **B** | © |
| | | **C** | © |
| **Exemplo 2 (proposto pelo professor)** | Um goleiro chutou uma bola que descreveu a trajetória parabólica, definida pela lei $h(x) = -10x^2 + 40x + 1$. Na função dada $\underline{x}$ representa o tempo em segundos e $\underline{h(x)}$ representa a altura atingida pela bola em metros. Qual é a altura máxima atingida por essa bola e em quanto tempo isso ocorreu?<br>a) Altura de 41m no tempo de 2s.<br>b) Altura de 40m no tempo de 4s.<br>c) Altura de 80m no tempo de 4s.<br>d) Altura de 80m no tempo de 2s.<br>e) Altura de 160m no tempo de 2s. | **A** | **X** |
| | | **B** | © |
| | | **C** | © |

**Fonte:** Elaborado pela autora

## 4.3 ANÁLISE RELACIONAL ENTRE A PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA NO LIVRO DIDÁTICO E NA PRÁTICA DO PROFESSOR

Neste tópico consideram-se convergências e divergências, sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica, de como o objeto matemático, função quadrática, é apresentado no livro didático e como este é conduzido pelo professor de matemática em suas aulas.

A partir das análises já desenvolvidas pode-se constatar que o professor em suas aulas, usa quase que exclusivamente o livro didático seja para expor as definições e explicá-las, ou nas escolhas dos exemplos e atividades, esse dado reforça o ponto de vista defendido por Bittar (2017, p. 364) "o livro didático utilizado por um professor pode fornecer uma boa aproximação com a sua prática em sala de aula, especialmente no que diz respeito ao conteúdo apresentado e às metodologias utilizadas".

Neste âmbito, destaca-se que as conversões do registro algébrico para o registro gráfico, tanto no livro didático como nas aulas do professor foi realizada fazendo uso do registro tabular, ou seja, pelo procedimento ponto a ponto (DUVAL, 1988). O que já era esperado, visto que, pesquisas como as de Maia (2007) e Salin (204) apontam que este tipo de procedimento é enfatizado nos livros didáticos, e por estes serem um dos recursos mais utilizados pelo professor, é também o procedimento ponto a ponto que ele enfatiza em suas aulas.

No entanto, como já foi mencionado, tanto o professor como o LD fazem as leituras do gráfico, mas isso não basta para que haja a interpretação das propriedades figurais do gráfico, e para isso necessitaria esboçar o gráfico por outro meio, pelo movimento de translação, como aborda Moretti (2003).

Algo relevante que foi evidenciado nas aulas do professor foi a conversão do RG para o RA, que é pouco trabalhado nas salas de aula, e que para Duval (1988) é o tipo de conversão que os alunos têm grande dificuldade exatamente pelo frequente uso do procedimento ponto a ponto para o esboço do gráfico na conversão inversa. E embora, essa conversão tenha sido realizada para a forma fatorada da função quadrática, em um dos exemplos poderia ser usada também a forma canônica para encontrar o registro de chegada.

O uso predominante do RA em sua forma desenvolvida foi vislumbrado tanto no LD como nas aulas, raro o uso da forma fatorada do LD, mais vezes mencionada nas aulas. No entanto, a representação algébrica na forma canônica não foi utilizada em nenhuma atividade, seja no LD ou pelo professor. E seria essa forma de registro algébrico que possibilitaria o movimento de translação do gráfico, enfatizando assim o procedimento de interpretação global das propriedades figurais.

Embora com algumas lacunas relativas às conversões, mencionadas acima, o estudo da função quadrática (no LD e pelo professor) foi rico em representações diversas, as transformações priorizadas foram as conversões, e com oscilações nas atividades que possibilitaram perceber variações no fenômeno de congruência semântica. Isso é relativamente satisfatório, principalmente, nos casos de heterogeneidade (RA→RG e RG→RA) e pelo trabalho com questões que envolvem conversões que possuem custos cognitivos em diferentes graus, pela análise realizada a partir dos critérios de congruência semântica (DUVAL, 2009).

Quanto ao uso da representação tabular, não é que esta seja ruim, até porque como o próprio Duval (2009) menciona, cada representação possui propriedades próprias que compõem o conceito do objeto matemático estudado, mas a partir da finalidade usada para a construção do gráfico, esta representação pode causar lacunas na aprendizagem, e uma das razões é por ela limitar o número de pares ordenados de um gráfico que possui infinitos pontos. No entanto, com outro propósito, o RT tem um papel primordial, ele deve ser utilizado no ensino de função para generalizar e formalizar a lei da função como proposto na BNCC (BRASIL, 2018). Ou seja, dado um registro tabular com valores para $x$ e para $y$, deve-se buscar um termo comum que coincida em cada $x$ para $y$ de forma a conseguir generalizar a lei de formação da função.

Portanto, mesmo seguindo o LD o professor apresenta melhorias quanto a exposição no estudo da função quadrática, e nos casos de suas limitações, entendemos que estes sejam por fatores de tempo didático, tempo de trabalho e pela influência do próprio LD.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo objetivou analisar sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, como o ensino de Função Quadrática é abordado num livro didático e por um professor de matemática da 1ª Série do Ensino Médio, e como sua prática se relaciona com a abordagem daquele livro didático.

Assim, foram analisados os documentos de orientações curriculares nacionais (PCNEM e BNCC) e estadual (Parâmetros de formação docente em ciências e matemática) em relação ao que estes abordam sobre o ensino de função quadrática e se fazem alusão a TRRS. Bem como, a análise do LD adotado pelo professor.

A partir dos estudos de Duval (1988b) num contexto francês, Maia (2007) e Salin (2014) percebe-se a grande dificuldade no estudo da função quadrática, principalmente no que concerne a conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Isso pode ser desencadeado pelo uso do registro tabular para auxiliar na construção do registro gráfico, isto é, no uso do procedimento ponto a ponto para o esboço do gráfico.

Esse tipo de procedimento não permite a compreensão das unidades significantes de cada uma das representações, pois não existe a coordenação entre os registros de saída e de chegada. Para que aconteça essa coordenação, Duval (1988b) explica que o esboço do gráfico deve ser feito pela abordagem de interpretação global das propriedades figurais que coordena as unidades significantes do RA com os valores visuais do RG. Desse modo, as dificuldades existentes na conversão inversa, RG→RA, serão menores se comparada ao uso do procedimento ponto a ponto.

Nem todos os documentos de orientações curriculares apontam para o uso do procedimento de interpretação global das propriedades figurais. O PCNEM (BRASIL, 2006) e o Parâmetros de formação docente (PERNAMBUCO, 2014) demonstram certa preocupação para esse tipo de abordagem, mas em nosso contexto de análise, essa prática não é vista na íntegra, nem o LD analisado e nem a aula do professor, seguem essas orientações curriculares para o Ensino Médio.

Nos questionamos se isso não seria reflexo de lacunas na formação dos professores, pois não basta que existam os documentos, mas que estes sejam trabalhados com os profissionais da educação, evidenciando cada habilidade ou competência que é necessário construir com os estudantes, assim como formas e meios de se fazer.

Quanto a BNCC (BRASIL, 2018) dá-se ênfase na utilização de problemas de situações cotidianas. No que tange o esboço do gráfico, é enfatizado uma investigação sobre uma tabela de pontos a serem representados em um plano cartesiano, até se chegar a generalização de uma função polinomial de 2º grau, mas não é evidenciada essa preocupação com a coordenação entre esses registros, ou seja, através do procedimento de interpretação global das propriedades figurais.

Para alcançar os objetivos traçados para esse estudo, ao qual busca investigar o ensino de função quadrática, analisou-se o LD que o professor de matemática da 1ª série utiliza em suas aulas juntamente com seus alunos, para viabilizar os aspectos da TRRS que fundamenta este trabalho.

Os aspectos analisados no LD foram os mesmos utilizados para as aulas, todos sob a ótica da TRRS foram: se existe diversidade de representações para o objeto função quadrática, qual a transformação (tratamento e conversão) mais abordada, os tipos de conversão, se existia a heterogeneidade nos dois sentidos, a possibilidade de coordenação entre as representações para os estudantes e a variação de congruência e não congruência semântica com a equivalência referencial, baseado nos três critérios propostos por Duval (2009).

No que tange as representações apresentadas, o LD transita entre as representações algébrica, gráfica, figural (fazendo relação com conhecimentos dentro da matemática, como área), tabular e em linguagem natural. A ênfase maior foi nos registros algébrico, gráfico, em linguagem natural e tabular.

Em referência às transformações, existem mais conversões que tratamentos nos 158 itens (exemplos, exercícios resolvidos, troque ideias, exercícios e desafio) retratados no LD. As conversões mais enfatizadas foram RLN→RA e RA→RG, sendo esse último uma conversão indireta, pois, ora é feita usando o RT como registro auxiliar, ora é realizada pelo tratamento no RA. A conversão no RA→RG foi realizada também no sentido oposto, o que revela que apenas nas conversões que envolviam as representações algébrica e gráfica houveram a heterogeneidade nos dois sentidos.

No tocante a variação de congruência e não congruência semântica nas conversões abordadas no LD, a maioria foram categorizadas por médio e alto grau de não congruência semântica, por não conservarem dois ou três dos critérios de congruência apontados por Duval (2009), o que desencadeia maiores dificuldades nas conversões, principalmente, porque essas conversões foram indiretas, não possibilitando coordenação entre os registros de chegada e partida das extremidades, por exemplo, ao invés de realizar-se diretamente a conversão RA→RG, o LD faz RA→RT seguido de RT→RG.

Com foco na análise das aulas do professor, temos representações algébrica, gráfica, figural, tabular e em linguagem natural. A transformação priorizada foram as conversões e principalmente, nos registros RLN→RA (usando a representação algébrica) e RG→RA (usando o RLN). A heterogeneidade nos dois sentidos foi priorizada apenas nas conversões que envolviam as representações algébrica e gráfica.

Relativo ao fenômeno de congruência semântica nas conversões abordadas pelo professor e que, majoritariamente, foram retiradas do LD, a maioria foi categorizada por baixo e médio grau de não congruência semântica, por não conservarem um ou dois dos critérios de congruência apontados por Duval (2009), apenas seis itens trabalhados possuem o alto grau de não congruência semântica o que desencadeou maiores dificuldades nas conversões, principalmente nas indiretas. No entanto, se observarmos as questões que necessitaram ser revistas com o professor em sala, a maioria delas foram de baixo e médio grau de não congruência, mas isso se deve ao fato de dificuldades em conteúdos matemáticos anteriormente estudados, como frações, números decimais e radiciação.

Com base nas análises, consideramos que o ensino de função quadrática foi rico em representações e conversões com diferentes graus de dificuldades, que desencadeiam custos cognitivos distintos para resolução. No que tange ao procedimento de esboço do gráfico, não se tem subjeção ao procedimento ponto a ponto, mas juntamente com as pesquisas relatadas neste estudo e com os documentos de orientação curriculares, outro procedimento, o de interpretação global das propriedades figurais, deve ser desempenhado tanto nos LD como em aulas. E o uso do registro tabular deve ser enfatizado com outra finalidade, para generalizar e formalizar leis de formação para as funções e não com a função pela qual foi trabalhado.

Ainda, uma lacuna presente tanto no LD como nas aulas, foi o uso quase que exclusivo do registro algébrico na forma desenvolvida, deixando de lado as outras formas: fatorada e canônica, e esta última não foi trabalhada em nenhuma atividade. Diante dessas conclusões é perceptível convergências em como o LD e o professor abordam e ensina, respectivamente, função quadrática, já que professor usa o LD em suas aulas.

Entendemos, assim, que para o estudo de função quadrática é necessário articular os mais variados registros para este objeto matemático (RA – nas formas desenvolvida, fatorada e canônica; RG, RT, RLN, RF) assim como realizar as conversões em sentidos opostos, trabalhar os diferentes tipos de procedimento para o esboço do gráfico enfatizando o que melhor pode se adequar a determinadas questões, assim como enfatizar limitações e facilidades existentes em cada um. Enfim, selecionar e pensar em questões que envolvam mais e diferentes conversões, assim como em diferentes sentidos e que envolvam variados graus de dificuldade, partindo do mais simples ao mais complexo.

Por conseguinte, esse estudo tende a enfatizar elementos importantes, sob o olhar da teoria dos registros de representação semiótica, para o estudo de função quadrática no intuito de favorecer novas pesquisas e principalmente subsidiar professores de matemática do ensino básico.

Deixamos para estudos posteriores, uma análise mais aprofundada de elementos significantes que possam gerar distinções com relação ao fenômeno de congruência semântica, visto que olhando apenas os critérios (DUVAL, 2009) perde-se alguns componentes que podem ser fatores essenciais na análise. Assim como, estudos que analisem a relação existente no ensino e aprendizagem, entre professores e alunos, também sob a ótica da TRRS.

**REFERÊNCIAS**


ALCALÁ, M**. La construcción del lenguaje matemático**. Barcelona: Editorial GRAÓ, 2002.

BITTAR, M. **A teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos.** Zetetiké, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez.2017, p.364-387.

BOYER, C. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher. EDUSP, 1974.

BRAGA, E. R. **A compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática no Ensino Fundamental com o recurso da planilha.** 128 f. Dissertação – Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

BRANDT, C, F; MORETTI, M, T. **O cenário da pesquisa no campo da Educação Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Mato Grosso do Sul: Revista EDUMAT, v.7, n. 13, 2014.

BRASIL. Ministério de Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, v.2, 2006.

BRASIL. Ministério de Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. Brasília, 2018.

D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da matemática.** Coleção: Ensaios transversais. Editora: escrituras. Edição : 01 / 2005. 128 f. V. 31.

DUVAL, R. **Graphiques et equations: L'articulation de deux registres.** Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n. 1, p. 235-261, 1988.

**_________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**, 1993. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

**_________**. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus Editora, 2003, p.11-33.

**__________. Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.** Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

___________. **Semiósis e pensamento humano.** Editora: Livraria da Física. C. contextos da ciência. Edição: 1/2009. Tradução: Lênio Abreu Farias e Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

**____________. Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.** In: Tânia M. M. Campos (org). Tradução: Marlene Alves Dias. – 1. ed. – São Paulo: PROEM, 2011.

FLORES, C.; MORETTI, M. **O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: Ponto de análise para aprendizagem Matemática.** In: REUNIÃO ANUAL DA

ANPED, GT19: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 28., 2005, Caxambu. **Anais**... Caxambu: ANPED. p. 1-13. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/funcionamento.pdf>, Acesso: 11/12/2019.

GARBI, G. G. GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 4. ed. rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

KLEINER, I. **Evolution of the Function Concept: A Brief Survey**. The College Mathematics Journal, v.20, n. 4, p. 282-300, set. 1989.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna: Análise de uma impregnação mútua.** 2. ed. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1991.

MAIA, D. **Função quadrática: Um estudo didático de uma abordagem computacional.** 141 f. Dissertação – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

MORETTI, M, T. A Translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global das propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus Editora, 2003, p. 149-160.

NASCIMENTO, J. G. C. **Investigando a utilização de uma sequência didática para o ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus.** 147 f. Dissertação – Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2009.

PEIXOTO, L. S. **Aproximações e distanciamentos entre as pesquisas em educação matemática e as concepções dos professores sobre o ensino de funções.** 232 f. Dissertação – Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2011.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco: Parâmetros de formação docente**. Secretaria de Educação, 2014.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de matemática**. Educação e Matemática. Lisboa, n. 15, p. 3-9, 1990.

ROSA, C. R; ALMEIDA, L. M, W. **O fenômeno de congruência em registros de representação semiótica: análise de uma atividade de modelagem matemática.** In: VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática – CNMEM, 6, 2009, Londrina – Paraná, ISSN 2176-0489. Disponível em < http://www.uel.br/grupo-pesquisa/grupemat/docs/CC24_cnmem2009.pdf> Acesso em: 16 de setembro de 2018.

SALIN, E. B. **Matemática Dinâmica: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas.** 206 f. Dissertação – Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2014.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo**. 1. ed., São Paulo: Saraiva, 2016.

SANCHEZ, J. N. G. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica.** Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTOS, V. D. G. **Esboço de gráficos nos ambientes papel e lápis e geogebra: funções afins e funções quadráticas.** 126 f. Dissertação – Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Alagoas. Maceió/AL, 2012.

SIQUEIRA, J. E. M. **Equações quadráticas: articulando suas formas algébricas e geométrica via um aplicativo ad hoc.** 173 f. Dissertação – Ensino de Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife/PE, 2009.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática.** 3ª ed. São Paulo: FTD, 2015.

ZUFFI, E. M. **Uma Sequência Didática sobre "Funções" para a Formação de Professores do Ensino Médio.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife-PE.

ZUFFI, E. M. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função.** Campos do Jordão (SP): Hipátia, v. 1, n. 1, p. 1-10, 2016.

## APÊNDICE – Trechos da transcrição das vídeo e áudio gravação das aulas do professor[15]

**Registro do professor:**

<u>Função Quadrática</u>

<u>Definição</u>

Chama-se <u>função quadrática</u>, ou <u>função polinomial do 2º grau</u> qualquer função $f$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que <u>$a$</u>, <u>$b$</u> e <u>$c$</u> são números reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

$f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f(x) = x^2 - 1$

$f(x) = -x^2 + 2x$

$f(x) = -4x^2$

**P:** Segundo a definição, traga pelo autor do livro, ele diz que uma função ela é quadrática ou também conhecida como polinomial do segundo grau desde que tenha esse formato de escrita (aponta no quadro a lei de formação $f(x) = ax^2 + bx + c$), $ax^2 + bx + c$, onde $a$, $b$, e $c$ são números reais, com a restrição de que o $a$, ele não pode ser zero (aponta para o quadro na expressão $a \neq 0$) tá? [...] Aí alguém pode dizer assim: o motivo pelo qual, professor, o $a$ não pode ser o zero? Porque se o $a$ for zero, essa parte aqui (apontando para o $ax^2$) ela vai ser amortecida, né? Ela vai sumir! Consequentemente, a função, ela deixará de ser uma função do segundo grau e vai passar a ser uma função [...]

**Als:** [...] Do primeiro grau.

**P:** [...] do primeiro grau, tá? Lembre-se que aqui a função é chamada do segundo grau, porque a variável *x*, que tem o seu maior expoente, ela tá no expoente 2.

**P:** Abaixo eu estou dando alguns exemplos da função do segundo grau, observe o primeiro exemplo (apontando para, $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, escrito no quadro), nesse primeiro exemplo quem são os coeficientes $a$, $b$ e $c$?

**Al:** $a$ é dois *x* a segunda.

**P:** Opa! $a$ é apenas o dois.

**Al:** Ah, tá!

**P:** Por quê observe que o $a$ é o número que acompanha o *x* elevado a segunda, então nesse caso o $a$ é apenas o dois (registra no quadro $a = 2$), $b$?

**Als:** Três.

**P:** Três (registra no quadro $b = 3$) e $c$?

Als: Cinco.

**P:** Cinco (registra no quadro $c = 5$).

**Al:** Professor, não entendi porque o $a$ é menos um aí (apontando para o quarto exemplo)?

**P:** Aqui (apontando para o quarto exemplo), você fala?

**Al:** É.

**P:** Pelo seguinte fato, toda vez que você olhar para uma letra, tá certo? E a letra não tiver número, então entende-se que o número que acompanha ela é o um, porque o um é elemento neutro da multiplicação, tá?, ou seja, um quando multiplicado por qualquer número vai dar o próprio número, então, se eu pegar um e multiplicar por *x* a segunda, vai dar o próprio *x* a segunda, entendeu?

(Aluno faz sinal de positivo, balançando a cabeça).

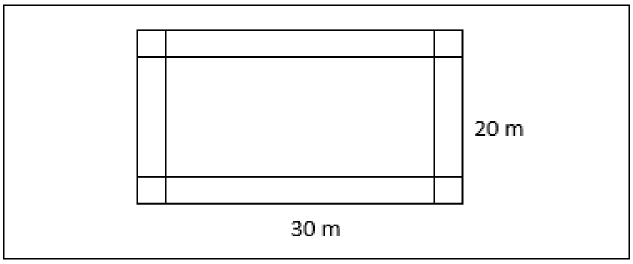
**P:** Aí, o autor do livro, ele traz duas situações interessantes, sobre a compreensão da aplicabilidade para o assunto de função quadrática. Um dos exemplos seria, em um certo campeonato, geralmente campeonato de futebol, né? Quando você está diante de um campeonato de futebol, vamos dá uma ideia, com 20 equipes, como é o campeonato brasileiro, sempre se tem aquela pergunta de saber ao certo, tendo vinte equipes sabendo que os times jogam em turno e contra turnos, certo. Quantas são as partidas nesse campeonato? Qual a quantidade de partidas desse campeonato? Observe, são vinte equipes, eles jogam entre si em turno e contra turno, ou seja, ele vai jogar em casa e fora de casa, duas vezes, joga em casa e fora de casa com cada uma das equipes, e a pergunta é: Qual o número de partidas que se tem nesse campeonato?

[15] A transcrição se deteve a selecionar, principalmente, os registros escritos pelo professor na lousa. Alguns por serem o mesmo procedimento não foram transcritos, e nem a maioria das falas, já que elas não foram analisadas por necessitar de uma análise discursiva que não foi o foco deste trabalho.

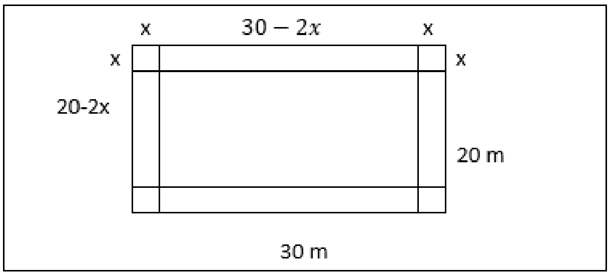
**Al:** Quarenta.
**P:** Quantas?
**Al:** Trinta e oito.
**P:** Não!
**Al:** Vinte e quatro.
**P:** Não!
**Al:** Muito mais, faz aí a conta!
**P:** [...] Observe que o $y$, que é o famoso $f(x)$, ele vai significar exatamente o que a gente quer, que é o número de partidas. Só que, se eu estou com 20 equipes... vamos supor que eu não soubesse o número de equipes, então, eu chamaria o número de equipes de quem? De $x$ (escreve no quadro: $f(x) = y = x$). Agora observe que esse $x$ vai jogar com quantas equipes? Estou supondo agora que não tenha equipes, que o número de equipes seja $x$, esse número de equipes sendo $x$, ele joga com quantas equipes?
**Al:** xis menos um.
**P:** (Completa no quadro: $f(x) = y = x.(x-1)$). Porque jamais você vai jogar, por exemplo, se eu tenho vinte equipes, eu não vou jogar vinte vezes, não é? Eu jogo vinte vezes dezenove. Assim, fazendo essa ideia no campeonato com vinte equipes, a gente teria vinte vezes dezenove, nesse caso daria quanto?
**Registro do professor:**

$$f(x) = y = x.(x-1)$$
$$= 20.19$$
$$= 380$$

**Al:** trezentos e oitenta.
**P:** [...] Geralmente, quando a gente aborda questões problemas relativos a área de figuras, nós temos que uma determinada área (desenha a figura de um retângulo no quadro), e sobre essa área eu tiro de cada um dos cantos dois metros. Então eu vou formar uma nova área.
**Registro do professor:**




**P:** Então se eu quiser saber a área total dessa figura maior aqui (apontando para o quadro), seria trinta vezes vinte. Agora, se eu tirar $x$ de cada um dos cantos dessa área, qual é a área que eu vou obter? Assim, ficaria $30 - 2x$, aqui né? Porque vai tirar $x$ daqui e daqui (apontando para os cantos do quadro), concorda? Então, como a parte total é trinta, de trinta eu vou tirar dois x, então essa parte aqui, que é a parte do novo terreno seria $30 - 2x$ da mesma forma que nessa parte daqui de cima, então se essa parte total é vinte, então essa parte daqui é quanto? Vinte menos dois x.
**Registro do professor:**




**P:** E aí eu monto a função que me dar condições de saber, se eu tirar determinado comprimento de uma área total, ou seja, determinado comprimento dos cantos, eu consigo obter uma nova área, a partir da função que a gente vai formar, que é uma função quadrática. E aí ficaria assim: (Registro do professor: $f(x) = (30-2x).(20-2x)$) então, fazendo a distributiva eu vou obter uma função do segundo grau.

**Registro do professor:**

→ <u>Gráfico</u>

Exemplos:

1º) Construa o gráfico de cada uma das funções de R em R dadas pelas seguintes leis:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

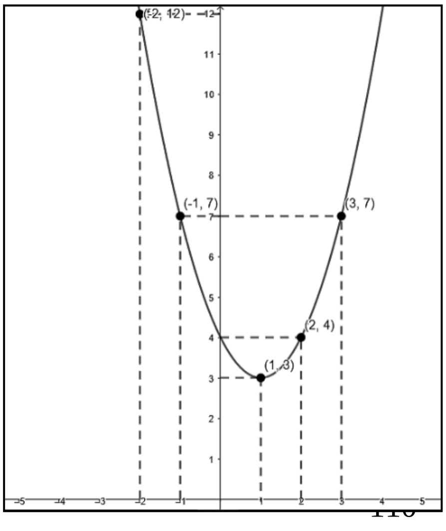
**P:** [...] A primeira coisa a ser feita quando a gente quiser construir um gráfico de uma função do segundo grau será atribuir valor pra x, e a partir dos valores atribuídos a x a gente buscar valores que correspondem a cada valor determinado por x em y. Então fazemos uma tabelinha, de um lado colocamos o valor de x e do outro lado vamos buscar a substituição que vai ser o valor de y. Geralmente, quanto mais pontos a gente coloca na tabela, melhor fica o desenho gráfico da função, geralmente, eu gosto de atribuir valores de menos três até três, mas, às vezes nessa atribuição de menos três até três, não nos dá condições de ver o gráfico de forma perfeita, aí então, a gente vai atribuindo outros valores que pudesse.

**Registro do professor:**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | $(-3)^2 - 2.(-3) + 4 = 9 + 6 + 4 = 19$ |
| $-2$ | $(-2)^2 - 2.(-2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$ |
| $-1$ | $(-1)^2 - 2.(-1) + 4 = 1 + 2 + 4 = 7$ |
| 0 | $0^2 - 2.0 + 4 = 0 - 0 + 4 = 4$ |
| 1 | $1^2 - 2.1 + 4 = 1 - 2 + 4 = 3$ |
| 2 | $2^2 - 2.2 + 4 = 4 - 4 + 4 = 4$ |
| 3 | $3^2 - 2.3 + 4 = 9 - 6 + 4 = 7$ |

**P:** Sim, sim! Está ótimo! Agora a gente faz a ligação dos pontos, observe que quando a gente vai ligando os pontos, a gente forma essa curva. Uma curva na matemática, chamada de curva cônica, que tem um nome próprio chamado de parábola.

**Registro do professor:**




**Al:** Professor, veja só, como o senhor não vai colocar o dezenove, não vai alterar nada no gráfico não?
**P:** Não. Não vai alterar não.
**P:** Observe que essa parábola está com a concavidade voltada para cima, o motivo pelo qual ela tem concavidade voltada para cima é porque o valor do *a* é positivo. Se o valor do *a* fosse negativo, a parábola teria concavidade voltada para baixo. Outra questão aqui, o ponto *c* no desenho gráfico, ele sempre corresponde ao toque do gráfico com o eixo y, observe que o ponto *c* aqui é quem?
**Als:** Quatro.
**P:** Outra situação, agora, importante, esse ponto aqui (aponta para a coordenada (1, 3)) será o vértice da parábola. Como a concavidade está voltada para cima, esse ponto dá o menor valor que a função assume. Então, o menor valor que a função assume, nessa função dada, é quem? Três. Então, aqui é o vértice da parábola, só que a partir do vértice da parábola, muita coisa pode ser verificada. Por exemplo, a partir do vértice eu tenho aqui ó, o eixo de

simetria, e esse eixo de simetria ele funciona como se fosse um espelho, essa parte aqui olha (aponta para o lado esquerdo do gráfico) ela reflete de forma equivalente do outro lado.

**P:** Um detalhe também importante, um aluno da outra turma perguntou: professor, eu me recordo bem que este gráfico tocava o eixo *x*, por que que agora não toca? Aí vem um detalhe importantíssimo pra gente compreender melhor a equação do segundo grau. Lembra lá, que a gente falava de um delta negativo? O que é que a gente falava? Delta negativo não existe solução real, então, quando delta é negativo, ele jamais terá um zero na função, porque se o gráfico toca o eixo *x* é lá onde está o zero da função, é lá onde está as raízes da equação.

**Registro do professor:**

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.4$$

$$\Delta = 4 - 16$$

$$\Delta = -12$$

**P:** Então, como o delta é negativo, ele não tem zero de função. Então aqui está o motivo de o gráfico não tocar no eixo *x*. Detalhe, se o delta fosse igual a zero, o gráfico só tocaria em um ponto do eixo *x*. Quando delta for maior do que zero, ele vai tocar em dois pontos do eixo *x*.

**Registro do professor:**

$$b)\ y = -x^2 + 1$$

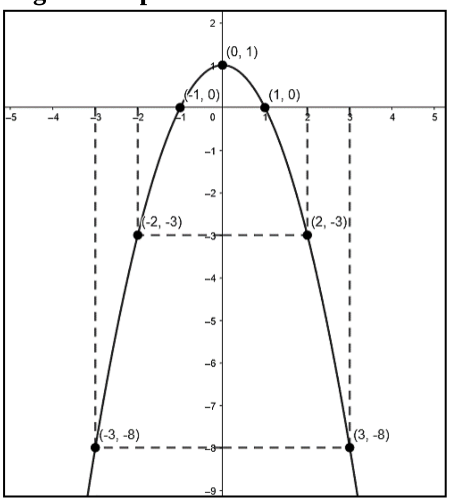
**P:** [...] Então, como sempre, a gente faz uma tabelinha, onde de um lado é atribuído os valores a *x* e buscamos os valores correspondentes a cada *x* dado, para *y*. Colocamos *x* de menos três até o mais três (professor constrói a tabela calculando os valores com os alunos).

**Registro do professor:**

| *x* | *y* |
|---|---|
| -3 | $-(-3)^2 + 1 = -9 + 1 = -8$ |
| -2 | $-(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3$ |
| -1 | $-(-1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ |
| 0 | $-(0)^2 + 1 = -0 + 1 = 1$ |
| 1 | $-1^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ |
| 2 | $-2^2 + 1 = -4 + 1 = -3$ |
| 3 | $-3^2 + 1 = -9 + 1 = -8$ |

**P:** Uma vez determinado a tabela, os valores de *y* para *x* de menos três a três, a gente agora vai fazer a ligação dos pontos.

**Registro do professor:**



**P:** Observe que o valor de *a* como é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Quando a concavidade está voltada para cima, a gente tinha um valor mínimo da função, quando a concavidade está voltada para baixo, a gente tem o valor máximo da função, que nesse caso seria o um, tá certo. O eixo de simetria aqui, corresponde ao eixo das ordenadas. Observe também que o valor *c* diz onde a parábola vai tocar o eixo *y*, observe que a parábola tocou o eixo *y* no ponto um. Observe também agora, que nessa função ela tem dois toques no eixo *x*, então, se eu calcular o delta dessa função aqui, ele vai ser um número maior que zero. A gente pode fazer esse cálculo aqui.

**Registro do professor:**

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 0^2 - 4.(-1).1$$

$$\Delta = 0 + 4$$

$$\Delta = 4$$

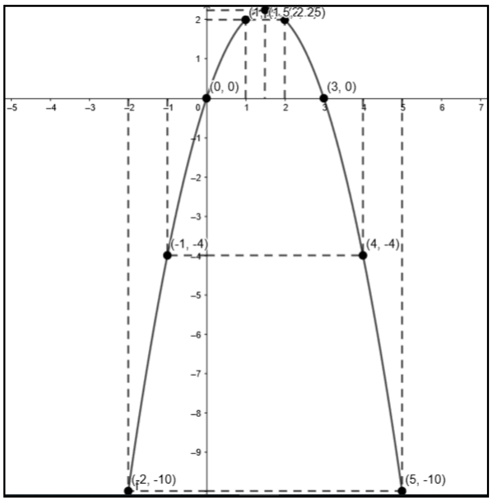
**Registro do professor:**

$2^{\underline{o}})\ b)\ y = -x^2 + 3x$

| ***x*** | ***y*** |
|---|---|
| -3 | $-(-3)^2 + 3.(-3) = -9 - 9 = -18$ |
| -2 | $-(-2)^2 + 3.(-2) = -4 - 6 = -10$ |
| -1 | $-(-1)^2 + 3.(-1) = -1 - 3 = -4$ |
| 0 | $-0^2 + 3.0 = 0$ |
| 1 | $-1^2 + 3.1 = -1 + 3 = 2$ |
| 2 | $-2^2 + 3.2 = -4 + 6 = 2$ |
| 3 | $-3^2 + 3.3 = -9 + 9 = 0$ |

**Registro do professor, depois de completar a tabela no quadro:**

| ***x*** | ***y*** |
|---|---|
| -3 | $-(-3)^2 + 3.(-3) = -9 - 9 = -18$ |
| -2 | $-(-2)^2 + 3.(-2) = -4 - 6 = -10$ |
| -1 | $-(-1)^2 + 3.(-1) = -1 - 3 = -4$ |
| 0 | $-0^2 + 3.0 = 0$ |
| 1 | $-1^2 + 3.1 = -1 + 3 = 2$ |
| 2 | $-2^2 + 3.2 = -4 + 6 = 2$ |
| 3 | $-3^2 + 3.3 = -9 + 9 = 0$ |
| 1,5 | $-(1,5)^2 + 3.(1,5) = -2,25 + 4,5 = 2,25$ |

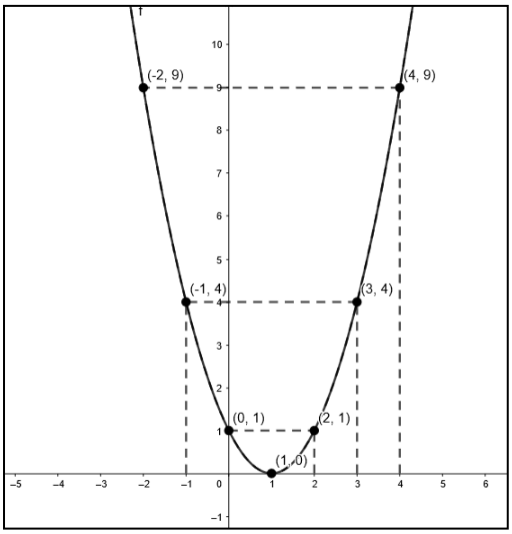



**Al:** Professor, porque o eixo *x* está em cima?
**P:** Não compreendi sua pergunta! É porque o eixo *x* é o eixo das abscissas e o *y* é o eixo das ordenadas, sempre.
**Al:** É porque você sempre faz o eixo *x* embaixo, ou no meio.
**P:** Eu coloquei ele mais em cima para aproveitar a parte de baixo porque tenho números negativos grandes [...].
**Registro do professor:**

3º)

c) $y = x^2 - 2x + 1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -3 | $(-3)^2 - 2.(-3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$ |
| -2 | $(-2)^2 - 2.(-2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$ |
| -1 | $(-1)^2 - 2.(-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$ |
| 0 | $0^2 - 2.0 + 1 = 1$ |
| 1 | $1^2 - 2.1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ |
| 2 | $2^2 - 2.2 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$ |
| 3 | $3^2 - 2.3 + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$ |



**Registro do professor, para o cálculo do valor de delta para a terceira questão, letra c:**

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$= (-2)^2 - 4.1.1$$
$$= 4 - 4$$
$$= 0$$

**Registro do professor, para o cálculo do valor de delta para a segunda questão, letra b:**

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$= 3^2 - 4.(-1).0$$
$$= 9 + 0$$
$$= 9$$

**Registro do professor:**

→ Raízes de uma equação do 2º grau

Chamam-se raízes ou zeros da função polinomial do 2º grau, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais $x$ tais que $f(x) = 0$.

Para obter as raízes de uma função quadrática, utilizamos a fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}} \quad \text{onde} \quad \boxed{\Delta = b^2 - 4.a.c}$$

Exemplos:

1º) Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das funções de R em R dadas pelas seguintes leis:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

**P:** [...] Detalhe importante tá, toda vez que eu quero descobrir os zeros da função do segundo grau, a gente pega o f(x) e iguala ele a zero, ou seja, por isso que o tema colocado é raízes de uma equação do segundo grau, é porque na hora que a gente pega o f(x) e faz ele ser igual a zero, o que era função vai passar a ser uma equação do segundo grau, certo? [...].

**P:** [...] Detalhe também, importante, quando eu faço o f(x) ser igual a zero o valor de *x* no gráfico seria o toque onde ele vai bater no eixo *x*, né? Os toques ou o toque onde ele bate no eixo *x* é lá onde está as raízes ou os zeros da função polinomial do segundo grau [...].

**Registro do professor (resolução do item a do primeiro exemplo):**

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$$
$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$$
$$\Delta = 25 - 24$$
$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, as raízes <u>são 3 e 2.</u>

* <u>Observação:</u>

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4.a.c$, chamado <u>discriminante</u>:

- $\Delta > 0$, há duas raízes reais e distintas;
- $\Delta = 0$, há duas raízes reais iguais (ou uma raiz dupla);
- $\Delta < 0$, não há raiz real.

Exemplos:

1º) Determine as condições sobre o parâmetro real <u>m</u> na função dada por $y = 3x^2 - 2x + (m-1)$ a fim de que:

a) Não existam raízes reais;

$$a = 3 \qquad b = -2 \qquad c = (m-1)$$

$$\Delta < 0$$

$$b^2 - 4.a.c < 0$$

$$(-2)^2 - 4.3.(m-1) < 0$$

$$4 - 12.(m-1) < 0$$

$$4 - 12m + 12 < 0$$

$$-12m + 16 < 0$$

$$-12m < -16 \quad .(-1)$$

$$12m > 16$$

$$m > \frac{16 \quad \div 4}{12 \quad \div 4}$$

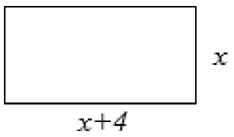
$$m > \frac{4}{3}$$

**Registro do professor:**

| $4^{\underline{o}}$) $h)\ y = -x^2 + 2$ | $4^{\underline{o}}$) $j)\ y = (x+3).(x-5)$ |
|---|---|
| $-x^2 + 2 = 0$<br>$-x^2 = -2 \quad .(-1)$<br>$x^2 = 2$<br>$x = \pm\sqrt{2}$ | $0 = (x+3).(x-5)$<br>$x + 3 = 0 \quad ou \quad x - 5 = 0$<br>$x = -3 \qquad\qquad x = 5$ |

**Registro do professor:**

8ª)




$A_{\blacksquare} = 621cm^2$

$2P = ?$

**Al:** Ô professor, porque dois p, não é só um não?

**P:** O P só é o semiperímetro.

$A_{\blacksquare} = b.h$

$621 = (x+4).x$

$621 = x^2 + 4x$

$x^2 + 4x - 621 = 0$

$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -621$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 4^2 - 4.1.(-621)$

$\Delta = 16 + 2484$

$\Delta = 2500$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{2500}}{2.1}$

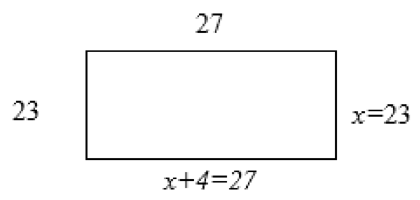
$x = \dfrac{-4 \pm 50}{2}$

$x_1 = \dfrac{-4+50}{2} = \dfrac{46}{2} = 23$

$x_2 = \dfrac{-4-50}{2} = \dfrac{-54}{2} = -27$

**P:** Diante de uma situação problema, o resultado precisa satisfazer o problema. Nesse problema pede-se para calcular a medida, mas se para calcular a medida eu preciso saber dos lados. Na matemática, não pode, a medida dos lados de uma figura geométrica ser negativa, né? Jamais! Então, a solução menos vinte sete não satisfaz ao problema.

199 **Registro do professor complementando os dados do registro figural:**




$2P = 27 + 23 + 27 + 23$

$= 100cm$

200 **Registro do professor:**

201 $12º)\ f(x) = x^2 - 2x + p$

202 $\Delta = 0$

203 $b^2 - 4.a.c = 0$

204 $a = 1 \quad b = -2 \quad c = p$

205 $(-2)^2 - 4.1.p = 0$

206 $4 - 4p = 0$

207 $-4p = -4$

208 $p = \frac{-4}{-4}$

209 $p = 1$

**Registro do professor:**

$x \rightarrow n^{o}\ de\ professores\ que\ iriam\ a\ viagem$

$\frac{6400}{x} \rightarrow o\ valor\ pago\ por\ cada\ um\ que\ iriam\ a\ viagem$

$\frac{6400}{x-6} \rightarrow o\ valor\ pago\ por\ cada\ professor.$

$$\frac{6400}{x-6} = \frac{6400}{x} + 240$$

$$\frac{6400x = (x-6).6400 + (x-6).x.240}{\cancel{(x-6).x}}$$

$$6400x = 6400x - 38400 + 240x^2 - 1440x$$

$$\cancel{6400x} - 38400 + 240x^2 - 1440x - \cancel{6400x} = 0$$

$$240x^2 - 1440x - 38400 = 0 \qquad \div 240$$

$$x^2 - 6x - 160 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = -160$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4.1.(-160)$$

$$\Delta = 36 + 640$$

$$\Delta = 676$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{676}}{2.1}$$

$$x = \frac{6 \pm 26}{2}$$

$$x = \frac{6+26}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$x = \frac{6-26}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

(não convém)

Logo, o número de professores que viajaram corresponde a: $x - 6 = 16 - 6 = 10\ pessoas.$

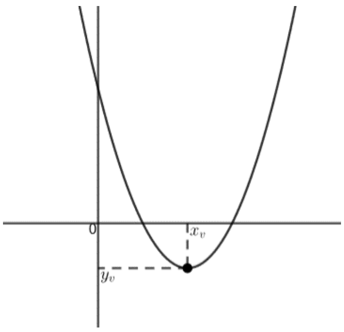
**Registro do professor:**

→ <u>Coordenadas do vértice de uma parábola</u>

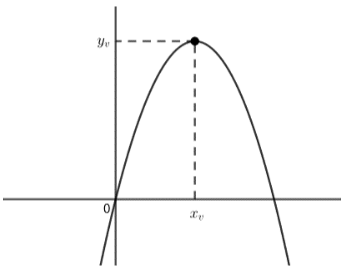
Vamos obter as coordenadas do ponto <u>V</u>, chamado <u>vértice da parábola</u>.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo <u>V</u>; Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo <u>V</u>.

* Se $a > 0$:




* Se $a < 0$:




Para determinarmos as coordenadas do vértice da parábola, utilizamos as fórmulas:

$$V(x_v, y_v) = V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$$

**Registro do professor:**

Exemplos:

1º) A quantidade q(x) de peças produzidas em um ateliê feminino variou nos primeiros 14 dias após a reinauguração, de acordo com a função $q(x) = -x^2 + 14x$. Sabendo que <u>*x*</u> representa o número de dias após a reinauguração, qual foi a quantidade máxima diária de peças produzidas nesse período?

a) 14
b) 49
c) 13
d) 7
e) 48

**P:** Observe que o que ele quer a quantidade máxima de peças, que nada mais é do que o q(x), ou seja, ele quer o y do vértice, tá? Porque o q(x) aqui na função representa o $y$. Assim, observe que essa parábola, pelo valor de $a$, $a$ é negativo, então a parábola tem concavidade voltada para onde? Para baixo, se ela tá com concavidade voltada para baixo, então, ele tem um dia que faz com produza a maior quantidade de peças, mas como eu não quero saber o dia e sim o maior número de peças produzidas, então nesse caso a gente vai fazer uso da fórmula.

**Registro do professor:**

$a = -1 \quad b = 14 \quad c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 14^2 - 4.(-1).0$$

$$\Delta = 196 - 0$$

$$\Delta = 196$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4.a}$$

$$y_v = \frac{-196}{4.(-1)}$$

$$y_v = \frac{-196}{-4}$$

$$\underline{y_v = 49}$$

$$-x^2 + 14x = 0$$

$$x.(-x + 14) = 0$$

$$x = 0 \quad ou \quad -x + 14 = 0$$

$$-x = -14 \quad .(-1)$$

$$x = 14$$

$$\underline{x_v = 7}$$

$$y_v = -x_v^2 + 14x_v$$

$$y_v = -7^2 + 14.7$$

$$y_v = -49 + 98$$

$$\underline{y_v = 49}$$

**P:** Automaticamente, se $x$ igual a zero e igual a quatorze, o $x_v$ é quanto? Se é zero, as raízes é zero e quatorze, quem é o valor de [...]

**Al:** Sete.

**P:** Sete, aí alguém pode dizer assim, oxente, como é que ela sabe disso? É porque o $x_v$ ele é o ponto médio das raízes, então, se perguntasse em que dia houve maior produção de peças femininas, a resposta seria sete.

**Registro do professor:**

3º) Um goleiro chutou uma bola que descreveu a trajetória parabólica, definida pela lei $h(x) = -10x^2 + 40x + 1$. Na função dada $\underline{x}$ representa o tempo em segundos e $\underline{h(x)}$ representa a altura atingida pela bola em metros. Qual é a altura máxima atingida por essa bola e em quanto tempo isso ocorreu?

f) Altura de 41m no tempo de 2s.
g) Altura de 40m no tempo de 4s.
h) Altura de 80m no tempo de 4s.
i) Altura de 80m no tempo de 2s.
j) Altura de 160m no tempo de 2s.

$$a = -10 \quad b = 40 \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 40^2 - 4.(-10).1$$

$$\Delta = 1600 + 40$$

$$\Delta = 1640$$

$$x_v = \frac{-b}{2.a} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$x_v = \frac{-40}{2.(-10)} \qquad y_v = \frac{-1640}{4.(-10)}$$

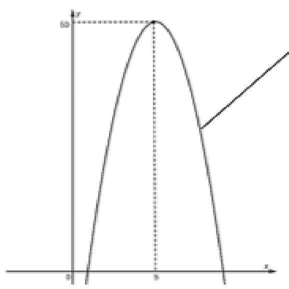
$$x_v = \frac{-40}{-20} \qquad y_v = \frac{-164\cancel{0}}{-4\cancel{0}}$$

$$x_v = 2s \qquad y_v = 41m$$

**P:** Observe que essa lei parabólica ela tem concavidade voltada para baixo, por isso que ela vai ter um maior valor da altura a ser atingida pela bola.

**Registro do professor:**

28º)



$y = -3x^2 + bx + c$
$b = ?$
$c = ?$

$$x_v = \frac{-b}{2.a}$$

$$\frac{5}{1} \times \frac{-b}{2.(-3)}$$

$$1.(-b) = 5.2.(-3)$$

$$-b = -30 \quad .(-1)$$

$$\underline{b = 30}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4.a}$$

$$50 = \frac{-(30^2 - 4.(-3).c)}{4.(-3)}$$

$$50 = \frac{-(900 + 12c)}{-12}$$

$$\frac{50}{1} = \frac{900 + 12c}{12}$$

$$900 + 12c = 600$$

$$12c = 600 - 900$$

$$12c = -300$$

$$c = \frac{-300}{12}$$

$$\underline{c = -25}$$

**P:** Esse coeficiente *c* ser negativo, ele já era esperado né? Pelo gráfico, observe que o gráfico em nenhum momento toca o eixo *y* quando o *y* é positivo, se ele não toca, ele vai tocar aqui embaixo né? Onde o coeficiente *c* vai ser negativo.

**Registro do professor:**

29º) $h(t) = 40t - 5t^2$

$a)\ h(1) = 40.1 - 5.1^2$

$h(1) = 40 - 5$

$\underline{h(1) = 35m}$

$b)\ 75 = 40t - 5t^2$

$40t - 5t^2 - 75 = 0$

$a = -5 \quad b = 40 \quad c = -75$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 40^2 - 4.(-5).(-75)$

$\Delta = 1600 - 1500$

$\underline{\Delta = 100}$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$t = \frac{-40 \pm \sqrt{100}}{2.(-5)}$$

$$t = \frac{-40 \pm 10}{-10}$$

$$t = \frac{-40 + 10}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3s$$

$$t = \frac{-40 - 10}{-10} = \frac{-50}{-10} = 5s$$

**P:** Utilizando a fórmula resolutiva, cuidado aqui com a fórmula resolutiva viu, porque se você colocar *x* aqui você erra, lembre-se que a escrita dela é em função de quem?
**Al:** De t.
**P:** Cuidado, porque se eu colocar [...] tô resolvendo uma função na variável *x*, e eu coloco uma outra variável, eu tô errando. Então se ela tá escrita na variável *t* a solução tem que ser dada em *t*.
**Registro do professor:**

$c)\ h(t) = 40t - 5t^2$

$a = -5 \quad b = 40 \quad c = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 40^2 - \cancel{4.(-5).0}$

$\underline{\Delta = 1600}$

$$h_{máx} = y_v = \frac{-\Delta}{4.a}$$

$$= \frac{-1600}{4.(-5)}$$

$$= \frac{-1600}{-20}$$

$\underline{= 80m}$

$d)\ h(t) = 40t - 5t^2$

$40t - 5t^2 = 0$

$t.(40 - 5t) = 0$

$t = 0s \qquad ou \qquad 40 - 5t = 0$

$-5t = -40$

$$t = \frac{-40}{-5}$$

$\underline{t = 8s}$ → Ela retornará ao solo.

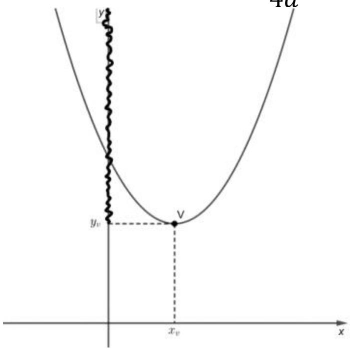
**Registro do professor:**

→ <u>O conjunto imagem da função quadrática</u>

Há duas possibilidades para determinarmos o conjunto imagem da função quadrática:

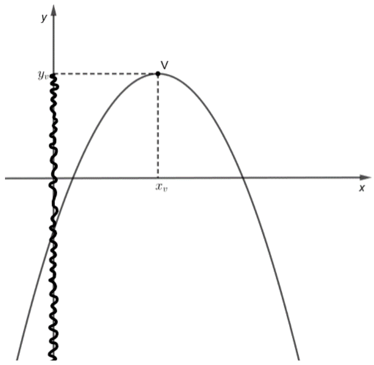
- Se $a > 0$

$Im = \{y \in \mathbb{R} | y \geq y_v = \frac{-\Delta}{4a}\}$




- Se $a < 0$

$Im = \{y \in \mathbb{R} | y \leq y_v = \frac{-\Delta}{4a}\}$




Exemplo:
1) Determine o conjunto imagem da função quadrática dada por $y = -3x^2 + 5x - 2$.

$a = -3 \quad b = 5 \quad c = -2$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 5^2 - 4.(-3).(-2)$

$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

$y_v = \frac{-1}{4(-3)}$

$y_v = \frac{-1}{-12}$

$y_v = \frac{1}{12}$

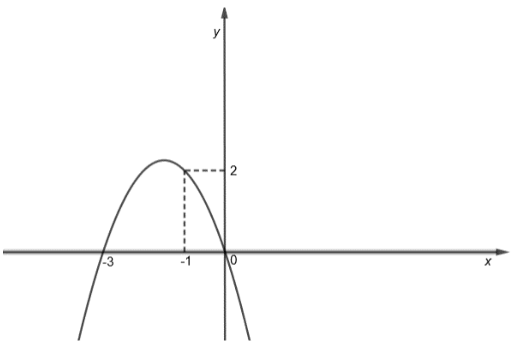
$Im = \{y \in \mathbb{R} | y \leq \frac{1}{12}\}$

**Registro do professor:**

→ <u>Determinação da lei da função a partir de um gráfico</u>

Exemplos:

1º) Determine a lei da função que cada gráfico a seguir representa:



**P:** A partir de um gráfico a gente consegue determinar a lei da função, para que isso aconteça é necessário que a gente tenha conhecimento no gráfico, de quem são as raízes e também um ponto qualquer do gráfico. Assim, para que eu consiga montar a lei da função eu tenho que ter conhecimento dessas duas coisas. Assim, a gente tá apto a encontrar a lei, porque toda lei da função ela pode ser escrita na forma (e escreve lendo $y = a.(x - r_1).(x - r_2)$) aí alguém pode dizer assim, professor, o que seria esse $r_1$ e $r_2$ aí? Seriam as raízes da função. [...] Então, todas as vezes que eu quiser montar a função de um gráfico, conhecida as suas raízes e um ponto qualquer dela, eu vou ter que escrever essa função nesse formato (aponta para a forma fatorada do registro algébrico), essa é a fórmula fatorada de uma função quadrática. [...] Outra coisa é que toda vez que eu tiver raízes negativas, com o menos da fórmula, na fórmula vai ficar positivo, e quando for positivo, escrito na fórmula vai ficar negativa.

**Registro do professor:**

$y = a.(x - r_1).(x - r_2)$

$y = a.[x - (-3)].(x - 0)$

$* \; y = a.(x + 3).x$

$2 = a.(-1 + 3).(-1)$

$2 = a.2.(-1)$

$2 = -2a$

$a = \dfrac{2}{-2}$

$\underline{a = -1}$

$* \; y = -1.(x + 3).x$

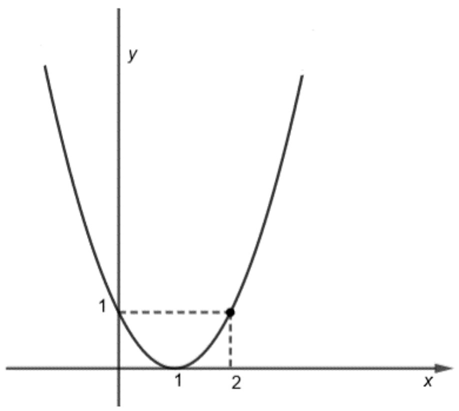
$y = -1.(x^2 + 3x)$

$\underline{y = -x^2 - 3x}$

Essa é a lei da função do item

**Registro do professor:**

b)




$y = a.(x - r_1).(x - r_2)$

$y = a.(x - 1).(x - 1)$

$1 = a.(2 - 1).(2 - 1)$

$1 = a.1.1$

$\underline{a = 1}$

$y = 1.(x - 1).(x - 1)$

$y = 1.(x^2 - x - x + 1)$

$y = 1.(x^2 - 2x + 1)$

$\underline{y = x^2 - 2x + 1}$

Essa é a lei da função do item “b”.

**Registro do Professor**

→ <u>Sinal</u>

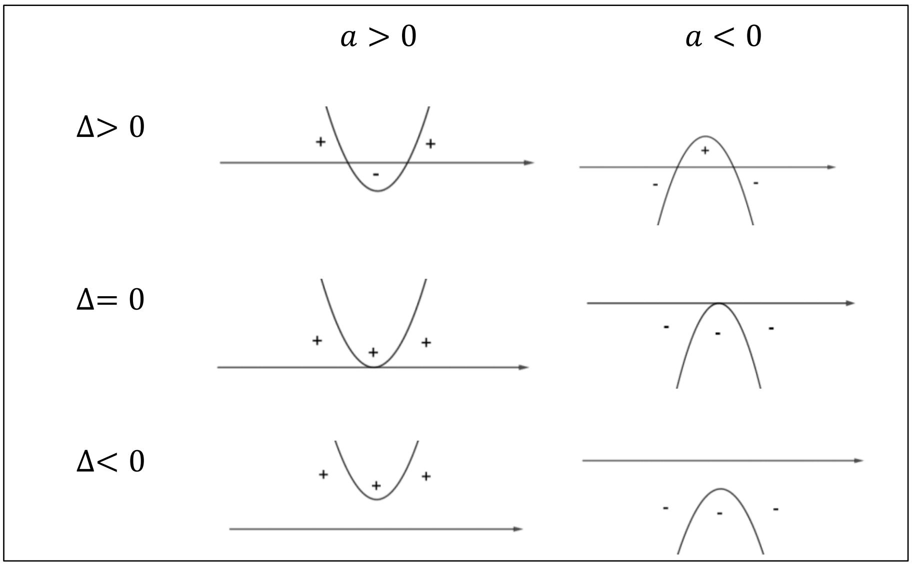
Exemplos:

1º) Faça o estudo de sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pelas seguintes leis:

a) $y = x^2 - 5x + 6$

**P:** [...] Então, o sinal da função é dizer para que valores de *x*, eu tenho um *y* que seja maior do que zero, menor do que zero ou igual a zero. [...].

**Registro do professor:**




**Registro do professor:**

$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$

$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1$

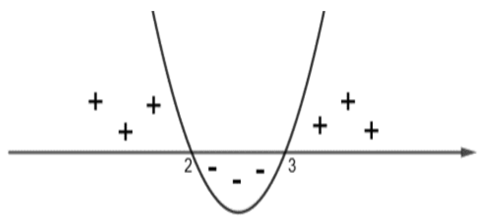
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$




Estudo do sinal:

$y > 0 \leftrightarrow x < 2 \; ou \; x > 3$

$y < 0 \leftrightarrow 2 < x < 3$

451 **Registro do professor:**

b) $y = -x^2 + 6x - 9$

$a = -1 \quad b = 6 \quad c = -9$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 6^2 - 4.(-1).(-9)$

$\Delta = 36 - 36$

$\Delta = 0$

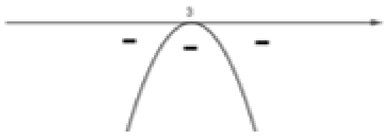
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2.(-1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm 0}{-2}$$

$$x = \frac{-6+0}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x = \frac{-6-0}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$



Estudo do sinal:

$y < 0, \forall x \neq 3$

$y > 0, \nexists x$