



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

RUBENS SILVA CORREIA

**AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE DE VIGAS OTIMIZADAS DE CONCRETO
ARMADO**

Caruaru
2020

RUBENS SILVA CORREIA

**AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE DE VIGAS OTIMIZADAS DE CONCRETO
ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Área de concentração: Estruturas e Materiais.

Orientador: Profa. Dra. Giuliana Furtado Franca Bono.

Coorientador: Prof. Dr. Charlei Marcelo Paliga.

Caruaru

2020

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Paula Silva - CRB/4 - 1223

C824a Correia, Rubens Silva.
Avaliação da confiabilidade de vigas otimizadas de concreto armado. / Rubens Silva
Correia. – 2020.
132 f.; il.: 30 cm.

Orientadora: Giuliana Furtado Franca Bono.
Coorientador: Charlei Marcelo Paliga.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Engenharia
Civil e Ambiental, 2020.
Inclui Referências.

1. Vigas. 2. Concreto armado. 3. Otimização estrutural. 4. Confiabilidade
(Engenharia). 5. Projeto estrutural. 6. Avaliação. Bono, Giuliana Furtado Franca
(Orientadora). II. Paliga, Charlei Marcelo (Coorientador). III. Título.

CDD 620 (23. ed.)

UFPE (CAA 2020-186)

RUBENS SILVA CORREIA

**AVALIAÇÃO DA CONFIABILIDADE DE VIGAS OTIMIZADAS DE CONCRETO
ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Aprovada em: 13/08/2020.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Giuliana Furtado Franca Bono (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Américo Campos Filho (Examinador externo)
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real (Examinador externo)
Universidade Federal do Rio Grande

Prof. Dr. Gustavo Bono (Examinador interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho ao pequeno João Hugo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todo cuidado e proteção.

Aos meus pais, Luiz Carlos e Maria José, por todo amor e incentivo transmitidos, apesar da distância. E também a minha querida irmã, Raquel Correia, com quem compartilhei bons momentos nesse período de pós-graduação. Sempre terei na memória a alegria de encontrá-la nos corredores do CAA.

Aos meus orientadores, Giuliana Bono e Charlei Paliga, pela paciência e compreensão durante a pesquisa, e principalmente por todo o conhecimento transmitido. Em especial, agradeço a Profa. Giuliana por todos os conselhos e incentivos dados a minha carreira docente. E ao Prof. Charlei, agradeço em particular por me introduzir a confiabilidade estrutural. Tenho os dois como exemplos a serem seguidos, e diversas vezes os tomei como referência na prática docente.

Aos meus amigos, Priscila Santos e Hermínio Torres, pela amizade durante esse período de pós-graduação. Sou imensamente grato por todos os bons momentos vivenciados. E também, por sempre fornecerem otimismo nas situações difíceis.

Ao amigo Mateus Calebe, pelos momentos divertidos no LECOM.

A todos os professores do PPGECAAM, em especial, aos professores Gustavo Bono e Alessandro Antunes, pela excelência no ensino da simulação numérica.

Aos secretários do PPGECAAM, Marcelo e Euclécia, por toda a disponibilidade e eficiência. Para mim, sempre foi um prazer encontrá-los no CAA.

A CAPES, pelo apoio financeiro que possibilitou esta pesquisa.

Attraversiamo. Quer dizer: ‘Vamos atravessar’. Os amigos dizem isso uns para os outros sem parar quando estão andando pela calçada e decidem que chegou a hora de passar para o outro lado da rua. Ou seja, é literalmente uma palavra pedestre. Ela não tem nada de mais. Mesmo assim, por algum motivo, causa-me um efeito poderoso (GILBERT, 2008, p. 80).

RESUMO

No projeto de vigas de concreto armado, o procedimento padrão constitui em estimar as dimensões da seção transversal, determinar as armaduras através das equações de equilíbrio estático e realizar as verificações de segurança e utilização. Caso os critérios sejam atendidos, o dimensionamento é adotado no projeto. Porém, podem existir diversas configurações para a seção que também atendam os critérios de projeto. Para encontrar a solução mais econômica, o projeto da viga pode ser transformado em um problema de otimização que objetiva encontrar as dimensões e armaduras da seção que minimizem os custos, atendendo aos critérios das normas técnicas. Para resolver o problema de otimização, métodos numéricos podem ser utilizados, tais como os Algoritmos Genéticos (AG). Existem também procedimentos numéricos que permitem avaliar a confiabilidade estrutural da viga projetada, por meio de uma medida chamada de índice de confiabilidade. Como existem incertezas na resistência e na solicitação da viga, existe então uma probabilidade de falha associada. Assim, o objetivo desse estudo foi otimizar vigas de concreto armado em diferentes situações de projeto, variando o vão, o carregamento, a relação entre as cargas e a resistência do concreto, e determinar os seus respectivos índices de confiabilidade. Foram encontradas as dimensões e armaduras da seção transversal das vigas que minimizam os custos, atendendo aos critérios da ABNT NBR 6118:2014, utilizando os AG. Em seguida, foram determinados os índices de confiabilidade das vigas, em relação ao estado-limite último de flexão, utilizando o algoritmo iHLRF. Através do estudo paramétrico corroborado por meio de uma análise de variância (ANOVA) dos resultados, foi possível identificar diversas tendências das vigas otimizadas. Foi observado que existe uma relação bem definida entre a altura ótima, o vão, o carregamento e a relação entre as cargas, e que a relação altura ótima por vão apresenta valores próximos de 10%. Os índices de confiabilidade das vigas otimizadas, de modo geral, foram maiores que o valor mínimo de 3,8, recomendado por códigos normativos, nas situações de projeto com pouca carga variável.

Palavras-chave: Vigas. Concreto armado. Otimização estrutural. Confiabilidade estrutural.

ABSTRACT

When designing reinforced concrete beams, the standard procedure is to estimate the dimensions of the cross-section, determine the reinforcement using static equilibrium equations and perform verifications on safety and utilization. If the criteria are met, the design is included in the project. However, there are several different section configurations that also meet the design criteria. To find the most economical solution, the beam design can be transformed into an optimization problem that aims to find the dimensions and reinforcement of the section that minimizes costs, and still meet the criteria of technical standards. To solve the optimization problem, numerical methods can be used, such as Genetic Algorithms (GA). There are also numerical procedures that allow analyzing the structural reliability of the designed beam through a measure called the reliability index. As there is uncertainty about the strength and loading supported by the beam, there is, therefore, an associated probability of failure. Thus, the objective of this study was to optimize reinforced concrete beams in different design situations, varying the span, the loading, the relationship between loads and the concrete strength, and to determine their respective reliability indexes. The dimensions and reinforcement of the beam cross-sections that minimize costs and still meet the criteria of ABNT NBR 6118: 2014 were found through the application of GA. Following, the iHLRF algorithm was applied to determine the beam reliability indexes with regard to the ultimate limit state of bending. Then, through a parametric study corroborated by an analysis of variance (ANOVA) on the results, it was possible to identify several trends on the optimized beams. It was observed that there is a well-defined relationship among the optimal height, span, loading, and the relationship between loads, and that the optimal span-to-depth ratio values are close to 10%. In general, the reliability indexes of the optimized beams were higher than the minimum value of 3.8 recommended by normative codes, in design situations with little variable load.

Keywords: Beams. Reinforced concrete. Structural optimization. Structural reliability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Domínios de deformação.	20
Figura 2 –	Seção transversal com armadura simples.....	21
Figura 3 –	Seção transversal com armadura dupla.	22
Figura 4 –	Visualização gráfica de um problema de otimização.....	29
Figura 5 –	Problemas de otimização estrutural.	30
Fluxograma 1 –	Projeto convencional <i>versus</i> Projeto ótimo.....	31
Fluxograma 2 –	Algoritmo genético.....	34
Figura 6 –	Densidade de probabilidade para o estado-limite g	37
Figura 7 –	Espaço X.	40
Figura 8 –	Espaço U.	40
Figura 9 –	Distribuição normal equivalente.	43
Fluxograma 3 –	Algoritmo HLRF.	44
Gráfico 1 –	Resultado do HLRF.....	47
Gráfico 2 –	Resultado do iHLRF.....	48
Figura 10 –	Viga de concreto armado considerada.	52
Figura 11 –	Esquematização do <i>script</i> da otimização.	59
Figura 12 –	Tipo de detalhamento considerado na otimização.	60
Gráfico 3 –	Gráfico de efeitos principais para o COV.	63
Gráfico 4 –	Gráfico de interação para o COV.	63
Gráfico 5 –	Testes de verificação para a calibração.	65
Figura 13 –	Viga otimizada por Oliveira (2014).	66
Figura 14 –	Viga otimizada de Oliveira (2014) <i>versus</i> Autor (2020).	67
Figura 15 –	Viga otimizada por Bezerra (2017).....	68
Figura 16 –	Viga otimizada por Bezerra (2017) <i>versus</i> Autor (2020).....	69
Figura 17 –	Esquematização do <i>script</i> da confiabilidade.	72
Figura 18 –	Esquematização do <i>script</i> da função <i>ihlrf</i>	73
Figura 19 –	Viga de Scherer (2018).	75
Figura 20 –	Viga de Nogueira e Pinto (2016).	76
Figura 21 –	(a) Viga V-4-10-0,2-25 otimizada, (b) Convergência dos AG.	79
Figura 22 –	(a) Projeto ótimo <i>versus</i> Projeto convencional para V-4-10-0,2-25, (b) Comparação dos custos.	79
Figura 23 –	(a) Viga V-5-20-0,4-30 otimizada, (b) Convergência dos AG.	80

Figura 24 –	(a) Projeto ótimo <i>versus</i> Projeto convencional para V-5-20-0,4-30, (b) Comparação dos custos.....	80
Figura 25 –	(a) Viga V-6-30-0,6-35 otimizada, (b) Convergência dos AG.	81
Figura 26 –	(a) Projeto ótimo <i>versus</i> Projeto convencional para V-6-30-0,6-35, (b) Comparação dos custos.....	81
Gráfico 6 –	Gráfico de efeitos principais para a largura.....	82
Gráfico 7 –	Gráfico de interação para a largura.	83
Gráfico 8 –	Relação entre largura e parâmetros de projeto.	85
Gráfico 9 –	Gráfico de efeitos principais para a altura.....	85
Gráfico 10 –	Gráfico de interação para a altura.....	86
Gráfico 11 –	Relação entre altura e parâmetros de projeto.	87
Gráfico 12 –	Histogramas para nt e ϕt	88
Gráfico 13 –	Histogramas para nc e ϕc	88
Gráfico 14 –	Relação entre taxas de armadura.	88
Gráfico 15 –	Relação entre h/L e b/h	89
Gráfico 16 –	Variação de h/L e b/h	90
Gráfico 17 –	<i>Boxplot</i> para as restrições.	91
Gráfico 18 –	Gráfico de coordenadas para as restrições em função de r	92
Gráfico 19 –	Relação entre as restrições de ductilidade e áreas de aço.....	92
Gráfico 20 –	Índice de confiabilidade pelo iHLRF para a viga V-4-30-0,6-25.	97
Gráfico 21 –	Índice de confiabilidade por Simulação de Monte Carlo para a viga V-4-30-0,6-25.	97
Gráfico 22 –	Índice de confiabilidade pelo iHLRF para a viga V-5-20-0,6-30.	97
Gráfico 23 –	Índice de confiabilidade por Simulação de Monte Carlo para a viga V-5-20-0,6-30.	98
Gráfico 24 –	Índice de confiabilidade pelo iHLRF para a viga V-6-10-0,8-35.	98
Gráfico 25 –	Índice de confiabilidade por Simulação de Monte Carlo para a viga V-6-10-0,8-35.	98
Gráfico 26 –	Gráfico de efeitos principais para o índice de confiabilidade.	99
Gráfico 27 –	Gráfico de interação para o índice de confiabilidade.	100
Gráfico 28 –	Relação entre o índice de confiabilidade e parâmetros de projeto.	101
Gráfico 29 –	Relação entre o índice de confiabilidade e parâmetros da viga.	102
Gráfico 30 –	Relação entre o índice de confiabilidade, h/L e $(g + q)$	103
Gráfico 31 –	Relação entre o índice de confiabilidade, h/L e MR/MS	104

Gráfico 32 –	Variação do índice de confiabilidade.	104
Gráfico 33 –	<i>Boxplot</i> para os coeficientes de sensibilidade.	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Custos unitários do concreto, aço e fôrmas.	54
Tabela 2 –	Parâmetros do σ_a na calibração.	62
Tabela 3 –	Parâmetros do σ_a calibrados.	64
Tabela 4 –	Custos unitários de Oliveira (2014).	66
Tabela 5 –	Custos unitários de Bezerra (2017).	68
Tabela 6 –	Características estatísticas de X	70
Tabela 7 –	Índice de confiabilidade de Scherer (2018) versus Autor (2020).	76
Tabela 8 –	Índice de confiabilidade de Nogueira e Pinto (2016) versus Autor (2020).	77
Tabela 9 –	Análise de Variância (ANOVA) para a largura.	84
Tabela 10 –	Análise de Variância (ANOVA) para a altura.	87
Tabela 11 –	Análise de Variância (ANOVA) para o índice de confiabilidade.	101
Tabela 12 –	Coeficientes de sensibilidade.	105

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
1.1	Justificativa e Motivação.....	16
1.2	Objetivos.....	17
1.2.1	Objetivo Geral	17
1.2.2	Objetivos Específicos	17
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	18
2.1	Dimensionamento de vigas de concreto armado.....	18
2.1.1	Dimensionamento à flexão	19
2.1.2	Dimensionamento ao esforço cortante.....	23
2.1.3	Estados-limites de serviço	24
2.1.4	Detalhamento	25
2.2	Verificação da capacidade resistente de vigas de concreto armado.....	27
2.3	Otimização estrutural.....	28
2.3.1	Métodos de otimização	32
2.3.2	Algoritmos Genéticos	33
2.4	Confiabilidade estrutural.....	34
2.4.1	Simulação de Monte Carlo	38
2.4.2	Algoritmo HLRF	39
2.4.3	Algoritmo iHLRF	44
2.5	Estado da Arte.....	48
3	OTIMIZAÇÃO DAS VIGAS DE CONCRETO ARMADO	52
3.1	Caracterização das vigas de concreto armado	52
3.2	Formulação do problema de otimização.....	53
3.3	Implementação do problema de otimização no MATLAB	58
3.4	Calibração dos AG para a otimização	61
3.5	Validação da implementação do problema de otimização	65
3.5.1	Viga de Oliveira (2014)	65
3.5.2	Viga de Bezerra (2017).....	67
4	CONFIABILIDADE DAS VIGAS OTIMIZADAS.....	70
4.1	Formulação do problema de confiabilidade.....	70
4.2	Implementação do problema de confiabilidade no MATLAB	71
4.3	Validação da implementação do problema de confiabilidade	74

4.3.1	Viga de Scherer (2018).....	75
4.3.2	Viga de Nogueira e Pinto (2016)	76
5	RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO	78
5.1	Vigas de concreto armado otimizadas: exemplos	78
5.2	Tendências das variáveis de projeto	82
5.3	Tendências das restrições.....	90
5.4	Conclusões sobre a otimização	93
6	RESULTADOS DA CONFIABILIDADE.....	96
6.1	Índice de confiabilidade de vigas de concreto armado otimizadas: exemplos	96
6.2	Tendências do índice de confiabilidade	99
6.3	Análise dos coeficientes de sensibilidade	105
6.4	Conclusões sobre a confiabilidade.....	106
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	108
	REFERÊNCIAS	111
	APÊNDICE A – RESULTADOS	116

1 INTRODUÇÃO

Os grandes avanços na computação possibilitaram o desenvolvimento de softwares de análise e dimensionamento das estruturas. Atualmente, existem diversos programas computacionais para conceber projetos estruturais, simulando estruturas com alto grau de complexidade e de forma bastante realista, com sistemas integrados que abrangem todas as etapas do projeto (KIMURA, 2018).

Apesar das facilidades e dos diversos avanços que já existem na engenharia estrutural, o procedimento para projetar estruturas em engenharia ainda é um processo de tentativa e erro. No procedimento convencional, a estrutura é pré-dimensionada, onde são definidas as dimensões dos elementos estruturais. É feita, então, a análise estrutural e o dimensionamento da estrutura. Se os critérios de segurança, utilização e construção não forem atendidos, um novo pré-dimensionamento é realizado e os critérios são novamente verificados. O procedimento continua até que uma solução viável seja encontrada. A solução final adotada não necessariamente será a melhor solução, dentre todas as possíveis.

O procedimento convencional, por ser um processo de tentativa e erro, não é adequado para determinar a melhor solução, conforme algum critério especificado. Para determinar a melhor solução, técnicas de otimização podem ser incorporadas ao projeto estrutural. Matematicamente, um problema de otimização consiste em encontrar as variáveis que minimizam uma função, atendendo as restrições impostas ao problema. As variáveis ótimas procuradas são chamadas de variáveis de projeto, e a função a ser minimizada de função objetivo (ARORA, 2012).

No projeto estrutural, as variáveis de projeto podem ser as dimensões dos elementos estruturais, e a função objetivo pode ser a minimização do custo, por exemplo. Dessa forma, ao transformar o projeto estrutural convencional em um problema de otimização, é possível encontrar a melhor solução possível (solução ótima) para minimizar (ou maximizar) algum objetivo específico.

O projeto otimizado possibilita a concepção de estruturas mais econômicas (GAN *et al.*, 2019), o que é de grande interesse aos projetistas em tempos de grande competitividade e busca por espaço no mercado da construção. Apesar das grandes vantagens do projeto otimizado, não é comum ter tal procedimento em softwares de análise e dimensionamento estrutural. Existem várias dificuldades para acoplar técnicas de otimização em programas de projeto estrutural. No entanto, esforços nesse sentido estão sendo realizados (PAULISTA, 2017), e continuamente pesquisas e estudos investigam aspectos da otimização estrutural.

O procedimento convencional para projetar estruturas, além de ser um processo de tentativa e erro, é também um procedimento determinístico. O projeto de estruturas envolve incertezas associadas aos modelos de análise, solicitações (carregamentos) e propriedades dos materiais (MELCHERS; BECK, 2018). Para cobrir essas incertezas, uma resposta determinística da estrutura é obtida utilizando coeficientes de segurança. Assim, ao final do projeto, é provável que se tenha uma estrutura superdimensionada ou subdimensionada, frente às incertezas (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007).

A abordagem ideal para tratar projetos em engenharia que envolvem incertezas é a abordagem estocástica. Nessa abordagem, as características estatísticas das variáveis que possuem incertezas são levadas em consideração no procedimento de análise do sistema. Dessa forma, obtém-se uma resposta do sistema em análise com propriedades estatísticas. No final do projeto, tem-se um sistema robusto, ou seja, um sistema que é seguro frente as incertezas (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007).

Para avaliar a confiabilidade das estruturas, a abordagem estocástica é utilizada para “quantificar” uma medida de segurança, ou seja, “quão” seguras as mesmas estarão. Esta medida é conhecida como índice de confiabilidade. Através de procedimentos numéricos, é possível determinar esse índice.

Assim, nesse contexto, a proposta desta pesquisa foi otimizar vigas de concreto armado em diferentes situações de projeto, e avaliar sua confiabilidade estrutural por meio do índice de confiabilidade.

1.1 Justificativa e Motivação

Apesar da praticidade e utilidade do procedimento convencional de projeto de vigas de concreto armado, é importante que um engenheiro estrutural busque projetar da melhor forma possível. Com essa intenção, as ferramentas de otimização e avaliação da confiabilidade permitem projetar de forma otimizada e quantificar o nível de segurança da estrutura. Dessa forma, é possível, por exemplo, minimizar os custos e tratar o problema estrutural de forma probabilística e não determinística, fornecendo uma melhor resposta.

Com os desenvolvimentos que vem acontecendo na área da computação, é provável que no futuro, os softwares de projeto estrutural passem a incorporar técnicas de otimização e confiabilidade estrutural. De fato, avanços nesse sentido já estão sendo feitos. Recentemente, o software de projeto estrutural Eberick apresentou um módulo de otimização de seções de vigas e pilares de concreto armado, que possibilita uma aplicação prática da otimização estrutural no

dia a dia do projetista (PAULISTA, 2017). Assim, é pertinente que se investigue tais temas, devido suas potencialidades e atualidade.

Além disso, esta pesquisa representa uma continuidade dos estudos do Laboratório de Engenharia Computacional (LECOM), do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco. No LECOM, foram realizados estudos sobre otimização de vigas (BEZERRA, 2017; MONTEIRO, 2019), pilares (NASCIMENTO, 2017) e lajes de concreto armado (NUNES, 2018), e também sobre otimização topológica (PEREIRA, 2018; SALVADOR, 2018). A proposta deste trabalho, além da otimização, é também avaliar a confiabilidade estrutural da viga otimizada. Dessa forma, esta pesquisa trará avanços aos temas estudados, e poderá servir de base para futuros trabalhos, tais como o estudo do procedimento de projeto que leva em consideração a otimização e ao mesmo tempo a confiabilidade, chamado de *Reliability Based Optimal Design* (Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é otimizar vigas de concreto armado em diferentes situações de projeto, e avaliar o índice de confiabilidade das vigas otimizadas.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Determinar a largura, a altura, a quantidade e o diâmetro das barras tracionadas, e a quantidade e o diâmetro das barras comprimidas da seção transversal que minimizem os custos da viga, atendendo as restrições impostas relativas a NBR 6118 (ABNT, 2014);
- Identificar as tendências da otimização e também avaliar quais restrições são determinantes no problema;
- Determinar o índice de confiabilidade das vigas otimizadas em relação ao estado-limite de flexão;
- Identificar as tendências do índice de confiabilidade nas diferentes situações de projeto, e avaliar se os mesmos são aceitáveis de acordo com códigos normativos de concreto armado.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir são apresentados alguns fundamentos teóricos relacionados ao tema deste estudo. No item 2.1 são apresentados os procedimentos e critérios para o dimensionamento de vigas de concreto armado. No item 2.2 é apresentado um procedimento para verificação da capacidade resistente de vigas de concreto armado, por meio da determinação do momento resistente da seção transversal da viga. No item 2.3 são introduzidos os conceitos relacionados a otimização estrutural, e no item 2.4 são apresentadas ideias gerais sobre a avaliação da confiabilidade estrutural. E no item 2.5 apresentam-se alguns estudos relacionados a temática deste trabalho: otimização e confiabilidade de vigas de concreto armado. Com a teoria dos itens 2.1 a 2.3 é possível formular o problema de otimização da viga, e as ideias dos itens 2.2 e 2.4 fornecem o embasamento necessário para formular o problema de confiabilidade da viga otimizada. Estas formulações serão apresentadas nos itens 3 e 4.

2.1 Dimensionamento de vigas de concreto armado

O projeto estrutural de vigas de concreto armado, bem como de outros elementos estruturais em concreto, segue as seguintes etapas: concepção estrutural, análise estrutural, dimensionamento, detalhamento, e desenhos técnicos (plantas). Na concepção estrutural, as dimensões das seções transversais do elemento são pré-dimensionadas (estimadas) com base na experiência do projetista ou em recomendações técnicas. Na análise estrutural são calculados os esforços e deslocamentos na estrutura, através de um modelo de cálculo que represente adequadamente a estrutura real. No dimensionamento e detalhamento são especificadas as armaduras de aço, atendendo aos critérios das normas técnicas e de execução. E por fim, são confeccionados os desenhos técnicos que possibilitarão a construção da estrutura.

No pré-dimensionamento de vigas de concreto armado, é comum limitar a largura da seção transversal em função da espessura da alvenaria, de modo a ocultar a viga, ou então adotar um valor que atenda as especificações do projeto arquitetônico. A NBR 6118 (ABNT, 2014), no item 13.2.2, estabelece que a largura mínima da seção transversal de vigas é igual a 12 cm, sendo que este valor pode ser reduzido até 10 cm, caso sejam atendidas as condições apresentadas no mesmo item. Na estimativa da altura da seção, geralmente adotam-se os seguintes valores, em função do tipo de viga:

- Em tramos internos: 1/12 vezes o vão livre;

- Em tramos externos e vigas biapoiadas: 1/10 vezes o vão livre;
- Em balanços: 1/5 vezes o vão livre.

2.1.1 Dimensionamento à flexão

Geralmente, as vigas de concreto armado estão sujeitas ao esforço de flexão simples. O dimensionamento à flexão é feito no estado-limite último de ruína, impondo que na seção transversal mais solicitada da viga, sejam alcançadas as deformações limites dos materiais (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2014).

Para determinar os esforços resistentes de uma seção transversal de viga de concreto armado, o item 17.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece as seguintes hipóteses básicas:

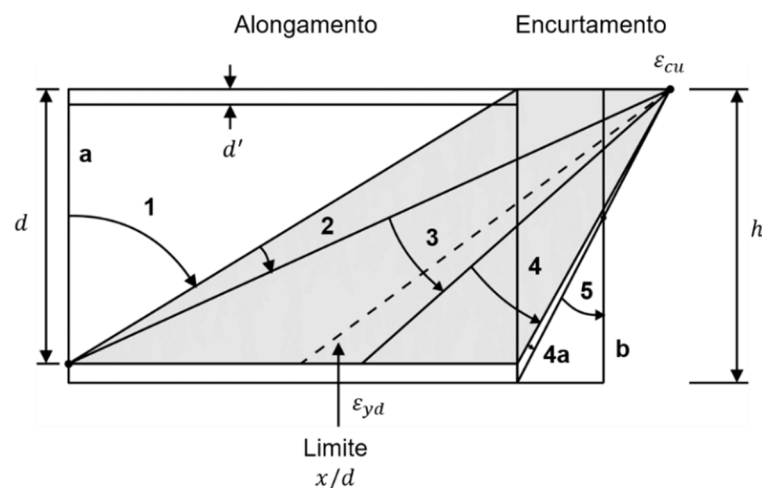
- A seção transversal se mantém plana após a deformação;
- A deformação das barras passivas aderentes deve ser a mesma do concreto em seu entorno;
- As tensões de tração no concreto (normais a seção transversal) devem ser desprezadas no estado-limite último (ELU);
- No item 8.2.10.1 da norma é apresentado o diagrama parábola-retângulo da distribuição de tensões do concreto. Esse diagrama pode ser substituído por um diagrama de tensões retangular com profundidade $y = \lambda x$, onde x é a posição da linha neutra e λ é igual a 0,8 para concretos com f_{ck} menor ou igual a 50 MPa. A tensão constante atuante até a profundidade y , no caso da largura da seção, medida paralelamente a linha neutra, não diminuir a partir desta para borda comprimida, pode ser considerada igual a $\alpha_{cd} f_{cd}$, onde α_{cd} é igual a 0,85 para concretos com resistência característica à compressão f_{ck} menor ou igual a 50 MPa, e f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto comprimido (item 12.3.3 da norma);
- A tensão nas armaduras deve ser obtida pelo diagrama tensão-deformação do aço, definido no item 8.3.6 da norma;
- O estado-limite último (ELU) é caracterizado pelos domínios de deformação na seção, quando a distribuição de deformações pertencer a um dos domínios.

Os domínios de deformação caracterizam as diversas possibilidades de ruína na seção transversal, definidos no item 17.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014). Esses domínios estão

esquematisados na Figura 1. Os domínios 2, 3 e 4 (regiões sombreadas da Figura 1) correspondem as situações de flexão simples ou composta. No domínio 2, o concreto não alcança a ruptura ($\varepsilon_c < \varepsilon_{cu}=3,5\%$, para concretos do grupo I) e a deformação no aço é a máxima permitida (10%). No domínio 3 a ruptura se dá pelo encurtamento-limite do concreto ($\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$) com o aço tracionado com escoamento ($\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$). No domínio 4 a seção também é caracterizada pelo encurtamento-limite do concreto ($\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$), porém o aço tracionado não atinge o escoamento ($\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$). O domínio 3 representa a melhor situação, pois tanto o aço quanto o concreto são aproveitados na resistência da seção. Já o domínio 4 representa uma situação indesejável, pois no final do domínio o aço não é aproveitado. Desta forma, procura-se trabalhar no domínio 3, sendo o domínio 2 aceitável e o domínio 4 evitado.

Conforme o item 17.2.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014), para se garantir boas condições de ductilidade em vigas, é necessário limitar a posição da linha neutra, conforme o item 14.6.3 da norma. No caso de concretos com f_{ck} menor ou igual a 50 MPa, a linha neutra é limitada pela relação (x/d) menor ou igual a 0,45. Conforme Carvalho e Figueiredo Filho (2014), esta limitação da linha neutra elimina parte do domínio 3 e o domínio 4, como ilustrado na Figura 1. Assim, atendendo ao item 17.2.3 da norma, a flexão simples fica caracterizada apenas pelos domínios 2 e parte do 3.

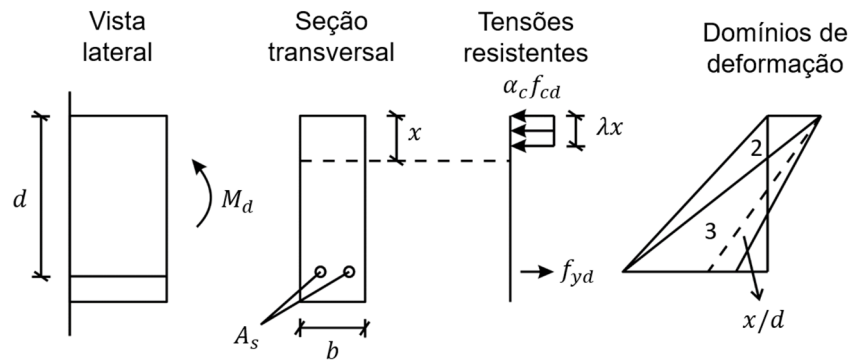
Figura 1 – Domínios de deformação.



Fonte: O Autor (2020). Nota: Adaptado de NBR 6118 (ABNT, 2014).

O dimensionamento à flexão simples consiste basicamente em calcular as áreas de aço na seção transversal, necessárias para resistir ao esforço de flexão. Uma seção transversal de viga com armadura simples é esquematizada na Figura 2.

Figura 2 – Seção transversal com armadura simples.



Fonte: O Autor (2020). Nota: Adaptado de Carvalho e Figueiredo Filho (2014).

Para a seção esquematizada na Figura 2, considerando as equações de equilíbrio estático das forças e dos momentos, é possível calcular a área de armadura longitudinal tracionada. O dimensionamento da armadura é feito considerando o ELU, adotando as hipóteses para os esforços resistentes, abordadas anteriormente. Como visto na Figura 2, o diagrama de tensões retangular para o concreto é utilizado, e os domínios de deformação possíveis, com a limitação da linha neutra, são 2 e parte do 3. Assim, a linha neutra (x) e a área de armadura longitudinal da seção (A_s) são dadas por:

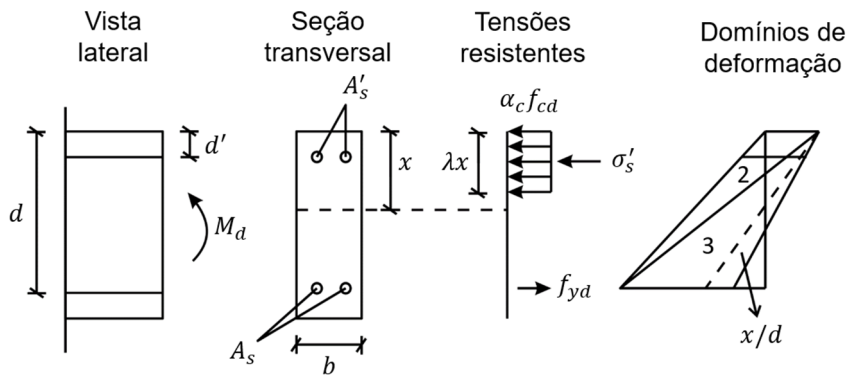
$$x = \frac{d}{\lambda} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2M_d}{\alpha_c f_{cd} b d^2} \right)} \right] \quad (1)$$

$$A_s = \frac{\alpha_c f_{cd} \lambda x b}{f_{yd}} \quad (2)$$

onde d é a altura útil da seção, λ é o parâmetro da profundidade do diagrama retangular de tensões resistentes do concreto, M_d é o momento fletor solicitante de cálculo, α_c é o parâmetro da tensão constante do diagrama de tensões do concreto, f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto comprimido, b é a largura da seção e f_{yd} é a tensão de escoamento de cálculo do aço.

Em situações onde o limite (x/d) não é atendido, é possível adotar uma armadura de compressão na seção, como indicado no item 17.2.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014). Neste caso, a seção é duplamente armada: possui armaduras longitudinais tracionadas e comprimidas. O cálculo das áreas de aço pode ser feito fixando a linha neutra no limite (x/d), e considerando a armadura longitudinal de compressão, como ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Seção transversal com armadura dupla.



Fonte: O Autor (2020). Nota: Adaptado de Carvalho e Figueiredo Filho (2014).

Utilizando as equações de equilíbrio e considerando a seção da Figura 3, as áreas de armadura longitudinal comprimida (A'_s) e tracionada (A_s) são dadas por:

$$A'_s = \frac{M_d - M_{dlim}}{\sigma'_s(d - d')} \quad (3)$$

$$A_s = \frac{\sigma'_s A'_s + \alpha_c f_{cd} \lambda x_{lim} b}{f_{yd}} \quad (4)$$

onde σ'_s é a tensão na armadura de compressão, M_{dlim} é o máximo momento que a seção consegue resistir para a situação de armadura simples, d' é a distância da borda comprimida até o centro da armadura comprimida, e x_{lim} a posição limite da linha neutra ($0,45 d$).

As áreas de aço calculadas pelas Equações 2, 3 e 4 devem respeitar os valores mínimos e máximos de armadura na seção, definidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014). De acordo com o item 17.3.5.2.1 da norma, a armadura mínima de tração deve ser determinada pelo dimensionamento da seção para um momento fletor mínimo (Equação 5), e deve ser respeitada a taxa mínima absoluta de 0,15%.

$$M_{d,min} = 0,8 W_0 f_{ctk,sup} \quad (5)$$

onde W_0 é o módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto em relação a fibra mais tracionada, e $f_{ctk,sup}$ é a resistência característica superior do concreto à tração.

No item 17.3.5.2.4 da norma é especificado que a soma das armaduras de tração e compressão ($A'_s + A_s$) não pode ser maior que 4% da área de concreto (A_c) da seção.

2.1.2 Dimensionamento ao esforço cortante

As vigas de concreto armado com carregamentos verticais, além da flexão, também estão sujeitas aos esforços cortantes. Assim, no dimensionamento de vigas de concreto armado é necessário dimensionar as armaduras transversais e verificar o estado-limite último relativo ao esforço cortante.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) admite dois modelos de cálculo para elementos lineares na verificação do estado-limite último do esforço cortante. Esses modelos pressupõem “a analogia de treliça, de banzos paralelos, associados a mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural” (item 17.4.1). Tais modelos são o Modelo de cálculo I (item 17.4.2.2) e o de cálculo II (item 17.4.2.3).

Conforme o item 17.4.2.1, a verificação do esforço cortante em uma determinada seção transversal é feita através das Equações 6 e 7:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (6)$$

$$V_{sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (7)$$

onde V_{sd} é a força cortante solicitante de cálculo na seção; V_{Rd2} é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, conforme o modelo de cálculo adotado; V_{Rd3} é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal; V_c é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça e V_{sw} é a parcela resistida pela armadura transversal, conforme o modelo de cálculo adotado.

Para calcular a armadura transversal necessária na seção considera-se o sinal de igualdade na Equação 7. Assim, determina-se a armadura necessária para satisfazer a verificação do estado-limite último do esforço cortante. A Equação 6 é referente a verificação da compressão diagonal do concreto, e a verificação da Equação 7 pode ser utilizada no cálculo da armadura transversal.

Assim como no cálculo da armadura longitudinal de flexão, a armadura transversal calculada pela Equação 7 deve atender a um valor mínimo, conforme o item 17.4.1.1.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014). A taxa de armadura transversal mínima é dada por:

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \sin \alpha} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad (8)$$

onde A_{sw} é a área da seção transversal dos estribos; s é o espaçamento dos estribos, medido segundo o eixo longitudinal do elemento estrutural; α é a inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural (90° para estribos verticais); b_w é a largura média da alma, medida ao longo da altura útil da seção; f_{ywk} é a resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal e $f_{ct,m}$ é a resistência média à tração do concreto (item 8.2.5).

2.1.3 Estados-limites de serviço

No projeto das estruturas de concreto armado, além de garantir a segurança ao colapso, é necessário garantir que a estrutura apresente um comportamento adequado durante seu uso, de maneira a evitar deslocamentos, fissuras, vibrações, etc., que possam comprometer sua utilização. Estas situações indesejáveis são os estados-limites de serviço (ELS), que são “aqueles relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas, seja em relação aos usuários, seja em relação às máquinas e aos equipamentos suportados pelas estruturas” (item 10.4 da NBR 6118 (ABNT, 2014)).

O estado-limite de deformação é referente a situação onde os deslocamentos atingem os valores limites estabelecidos no item 13.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014). Na avaliação desse estado-limite, é necessário considerar a combinação de ações em serviço (item 11 da norma), a rigidez efetiva da seção (levando em consideração a armadura), a existência de fissuras no concreto e também a deformação diferida no tempo (devido ao efeito de fluência). No cálculo da flecha imediata em vigas de concreto armado pode ser utilizada uma rigidez equivalente (item 17.3.2.1.1) que representa um valor intermediário ao valor no estágio I e no estágio II (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2014). A flecha diferida no tempo para vigas é calculada de forma simplificada pela multiplicação da flecha imediata pelo fator α_f , conforme o item 17.3.2.1.2 da norma. Assim, a flecha total (a_t) das vigas de concreto armado, para a verificação do estado-limite de deformação excessiva, é dada por:

$$a_t = a_i + \alpha_f a_i \quad (9)$$

onde a_i é a flecha imediata, calculada considerando a rigidez equivalente do item 17.3.2.1.1.

A fissuração excessiva pode comprometer a durabilidade das estruturas de concreto, possibilitando a degradação das armaduras. A verificação do estado-limite de fissuração pode ser feita através de uma estimativa da abertura das fissuras, que deve respeitar os valores

máximos definidos no item 13.4 da NBR 6118 (ABNT, 2014). O valor característico da abertura de fissuras (w_k), calculado para cada elemento ou grupo de elementos das armaduras, é o menor valor entre:

$$w_k = \frac{\phi_i}{12,5\eta_1} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \frac{3\sigma_{si}}{f_{ctm}} \quad (10)$$

$$w_k = \frac{\phi_i}{12,5\eta_1} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \left(\frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right) \quad (11)$$

onde ϕ_i é o diâmetro da barra considerada; η_1 é o coeficiente de conformação superficial (dado no item 19.3.2.1 para armadura passiva); σ_{si} é a tensão de tração no centro da armadura, calculada no estágio II; E_{si} é o módulo de elasticidade do aço, para a barra considerada; f_{ctm} é a resistência média a tração do concreto (item 8.2.5); e ρ_{ri} é a taxa de armadura em relação à área de envolvimento da barra, determinada conforme o item 17.3.3.2 da norma.

2.1.4 Detalhamento

Além das verificações dos estados-limites último e de serviço, o projeto de vigas de concreto armado deve atender a critérios construtivos. Com o cálculo das armaduras longitudinais e transversais realizado, é necessário detalhar tais armaduras nas vigas para possibilitar sua execução. Os critérios de detalhamento de vigas se encontram no item 18 da NBR 6118 (ABNT, 2014).

O detalhamento das armaduras longitudinais admite várias possibilidades de diâmetro e número de barras que atendam a área de aço calculada. É comum escolher diâmetros próximos entre si. Conforme o item 18.3.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), no detalhamento das armaduras longitudinais de vigas, deve-se seguir os seguintes critérios:

- A armadura deve atender ao valor mínimo, conforme estabelecido na norma;
- No detalhamento das barras na seção, o espaçamento horizontal entre as faces das barras deve ser igual ou superior ao maior dos valores: 20 mm, diâmetro da barra e 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo. Na direção vertical, o espaçamento entre as faces das barras deve ser igual ou superior ao maior dos valores: 20 mm, diâmetro da barra e 0,5 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo. Além disso, deve-se espaçar as barras de modo a possibilitar a

introdução do vibrador, durante o adensamento do concreto. É conveniente adotar duas barras superiores na seção, que servem de “porta-estribo”, facilitando o processo construtivo;

- O dimensionamento das armaduras é feito para a seção mais solicitada. Para evitar prolongar todas as barras até os apoios, é possível obter o desenvolvimento longitudinal das armaduras, conforme as diretrizes da norma. Nas interrupções de barras, deve-se definir a ancoragem corretamente, atendendo aos critérios do item 18.3.2.3 da norma;

As armaduras transversais para resistir ao esforço cortante em vigas de concreto armado são estribos verticais. O detalhamento dos estribos deve seguir os critérios do item 18.3.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014). Tais critérios são:

- Os estribos devem ser fechados através de um ramo horizontal, envolvendo as barras, e ancoradas na face oposta;
- O diâmetro das barras dos estribos deve ser no mínimo de 5 mm, e não pode ultrapassar 1/10 da largura da seção transversal da viga;
- O espaçamento entre os estribos (no sentido longitudinal da viga) deve permitir a introdução do vibrador, de modo a garantir um adensamento adequado. Esse espaçamento, assim como o espaçamento entre ramos sucessivos, não pode ultrapassar os valores definidos no item 18.3.3.2;
- Os estribos também devem ser ancorados, o que geralmente é feito com ganchos, conforme as especificações do item 9.4.6 da norma.

Além das armaduras longitudinais de tração e transversais, em vigas com altura da seção superior a 60 cm, é necessário adotar uma armadura lateral, chamada de armadura de pele. Esta armadura serve principalmente para combater os efeitos da fissuração (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2014). De acordo com o item 17.3.5.2.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014), a armadura mínima de pele deve ser 0,10% da área da seção da viga em cada face da alma, composta de barras de aço CA-50 ou CA-60. Não é necessária uma armadura superior a 5 cm²/m por face, para evitar que vigas de maior largura tenham uma grande quantidade de armadura de pele desnecessariamente (BUENO; KIMURA, 2015). O espaçamento entre as barras não deve superar $d/3$ e 20 cm (item 18.3.5 da norma), onde d é a altura útil.

2.2 Verificação da capacidade resistente de vigas de concreto armado

Podem ocorrer situações onde seja necessário verificar a capacidade resistente de vigas de concreto armado já dimensionadas. Conforme Araújo (2014), o problema da verificação da capacidade resistente na flexão normal simples pode ser colocado da seguinte forma: “dada uma seção transversal de concreto armado com todas as dimensões e as armaduras conhecidas, procura-se o momento fletor que leva a seção à ruína”. As equações para a verificação da capacidade resistente podem ser úteis para formular equações de estado-limite último de flexão, utilizadas na avaliação da confiabilidade estrutural.

As equações para a verificação da capacidade resistente de vigas na flexão simples dependem da situação analisada: armadura simples ou dupla.

Considerando uma seção transversal de viga simplesmente armada, com as características da Figura 2 para concretos de classe menor ou igual a C50, e supondo que a viga está no domínio 2 ou 3 (aço tracionado com escoamento), a linha neutra (x) é dada pela Equação 12. Se x for menor ou igual ao limite x_{34} entre os domínios 3 e 4 (Equação 13), a viga de fato está no domínio 2 ou 3. Caso contrário, a viga está no domínio 4 (aço sem escoamento), e a linha neutra é definida pela Equação 14:

$$x = \frac{f_y A_s}{0,68 f_c b} \quad (12)$$

$$x_{34} = \left(\frac{3,5\%}{3,5\% + \varepsilon_y} \right) d \quad (13)$$

$$x = \frac{-3,5\% E_s A_s + \sqrt{3,5\% E_s A_s (3,5\% E_s A_s + 2,72 f_c b d)}}{1,36 f_c b} \quad (14)$$

onde f_y é a resistência do aço; A_s é a área de aço tracionado; f_c é a resistência do concreto; b é a largura da seção transversal; ε_y é a deformação de escoamento do aço; d é a altura útil da seção; e E_s é o módulo de elasticidade do aço.

Com a linha neutra definida, o momento de ruína (M_u) para a viga com armadura simples é:

$$M_u = 0,68 f_c x b (d - 0,4x) \quad (15)$$

Considerando uma seção transversal de viga duplamente armada, com as características da Figura 3 para concretos de classe menor ou igual a C50, assim como no caso da viga

simplesmente armada, os domínios possíveis são 2, 3 e 4. Se a linha neutra (x) for menor ou igual ao limite x_{23} entre os domínios 2 e 3 (Equação 16), a deformação em uma camada genérica de barras é dada pela Equação 17. Caso contrário, a viga está no domínio 3 ou 4, e a deformação do aço é dada pela Equação 18:

$$x_{23} = \left(\frac{3,5\%}{3,5\% + 10\%} \right) d \quad (16)$$

$$\varepsilon_{si} = 10\% \left(\frac{x - d_i}{d - x} \right) \quad (17)$$

$$\varepsilon_{si} = 3,5\% \left(\frac{x - d_i}{x} \right) \quad (18)$$

onde d_i é a distância da borda comprimida do concreto até o centro das barras da camada i .

Empregando as equações de equilíbrio na seção, obtém-se:

$$0,68f_cxb + \sum_{i=1}^n A_{si}\sigma_{si} = 0 \quad (19)$$

$$M_u = 0,68f_cxb(d - 0,4x) + \sum_{i=1}^n A_{si}\sigma_{si}(d - d_i) \quad (20)$$

onde n é o número de camadas de barras na seção; A_{si} é a área de aço na camada i ; e σ_{si} é a tensão nas armaduras da camada (igual a $\varepsilon_{si}E_s$).

Para calcular o momento de ruína (Equação 20), é necessário determinar a posição da linha neutra. A Equação 19 pode ser resolvida por algum método iterativo, para encontrar a posição da linha neutra x . O processo da bissecante pode ser utilizado, conforme apresentado em Araújo (2014).

2.3 Otimização estrutural

A otimização, em um sentido matemático, pode ser definida como a busca por variáveis que minimizam ou maximizam uma função, atendendo a funções de restrição dessas variáveis. As variáveis são chamadas de variáveis de projeto, e a função a ser otimizada de função objetivo. Em otimização estrutural, as variáveis de projeto descrevem características da

estrutura, a função objetivo é o critério de projeto, e as restrições podem ser imposições relativas à segurança, limitações, utilização, etc.

Um problema de otimização pode ser enunciado da seguinte forma (ARORA, 2012):

Encontrar o vetor $\mathbf{x}$, com n variáveis de projeto, para minimizar a função objetivo:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (21)$$

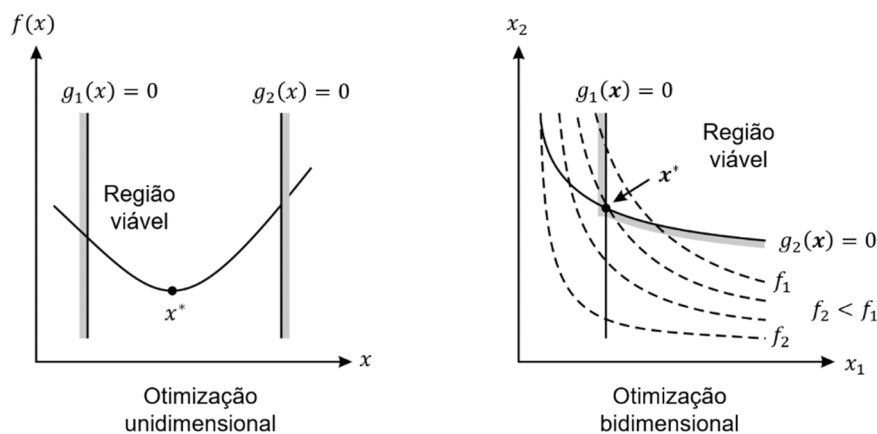
Sujeito a p restrições de igualdade e m de desigualdade:

$$h_j(\mathbf{x}) = h_j(x_1, \dots, x_n) = 0; \quad j = 1 \text{ até } p \quad (22)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0; \quad i = 1 \text{ até } m \quad (23)$$

A função objetivo $f(\mathbf{x})$ e as restrições $h_j(\mathbf{x})$ e $g_i(\mathbf{x})$ são funções das variáveis de projeto $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}^T$, e podem ser lineares ou não-lineares. Devem ser funções dependentes de $\mathbf{x}$, explicitamente ou implicitamente. A otimização pode ter mais de um critério, ou seja, mais de uma função objetivo, denominada de otimização multiobjetivo. Problemas de otimização comumente são restritos, porém, podem existir problemas irrestritos, onde não há restrições. Na Figura 4, é ilustrado graficamente um problema de otimização unidimensional e bidimensional.

Figura 4 – Visualização gráfica de um problema de otimização.



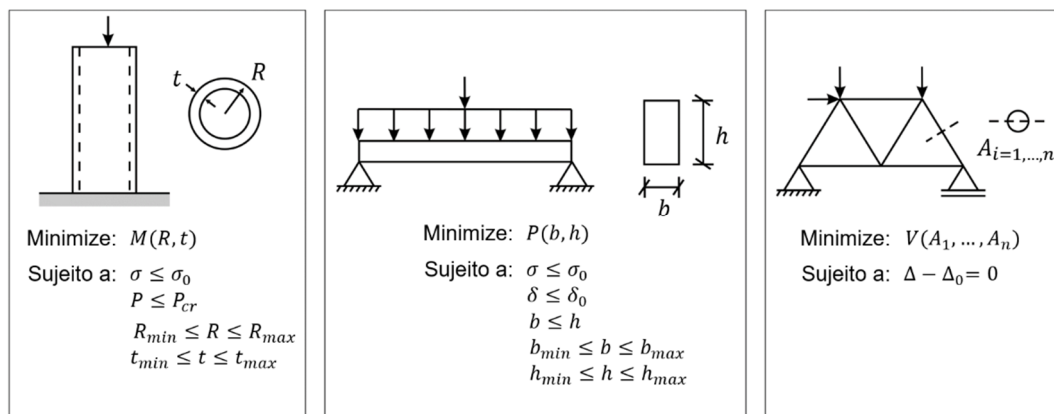
Fonte: O Autor (2020).

Como observado na Figura 4, as restrições limitam o espaço de busca da otimização, denominado de região viável, que contém as soluções que satisfazem as restrições. Qualquer ponto fora desta região não pode ser uma solução da otimização, pois viola as restrições do problema. A solução ótima x^* é o ponto de mínimo da função objetivo, que se encontra na

região viável (atende às restrições). Quando uma restrição é satisfeita na igualdade diz-se que a restrição está ativa, como exemplificado no problema bidimensional da Figura 4. Caso contrário, a restrição está inativa (problema unidimensional).

Existem diversos problemas em engenharia estrutural que são passíveis de otimização. Vigas, pilares, lajes e treliças são exemplos de estruturas que podem ser otimizadas. As variáveis de projeto podem ser as dimensões da seção transversal dos elementos, e a função objetivo pode ser a minimização dos custos, do peso, massa, volume, etc. Para que o projeto seja satisfatório, a otimização deve atender as restrições de segurança, utilização, limitações, dependendo das exigências do projeto. Alguns exemplos de otimização estrutural são encontrados na Figura 5: minimização da massa de uma coluna (ARORA, 2012), minimização do peso de uma viga (RAO, 2009) e minimização do volume de uma treliça (HAFTKA; GURDAL, 1992), respectivamente.

Figura 5 – Problemas de otimização estrutural.

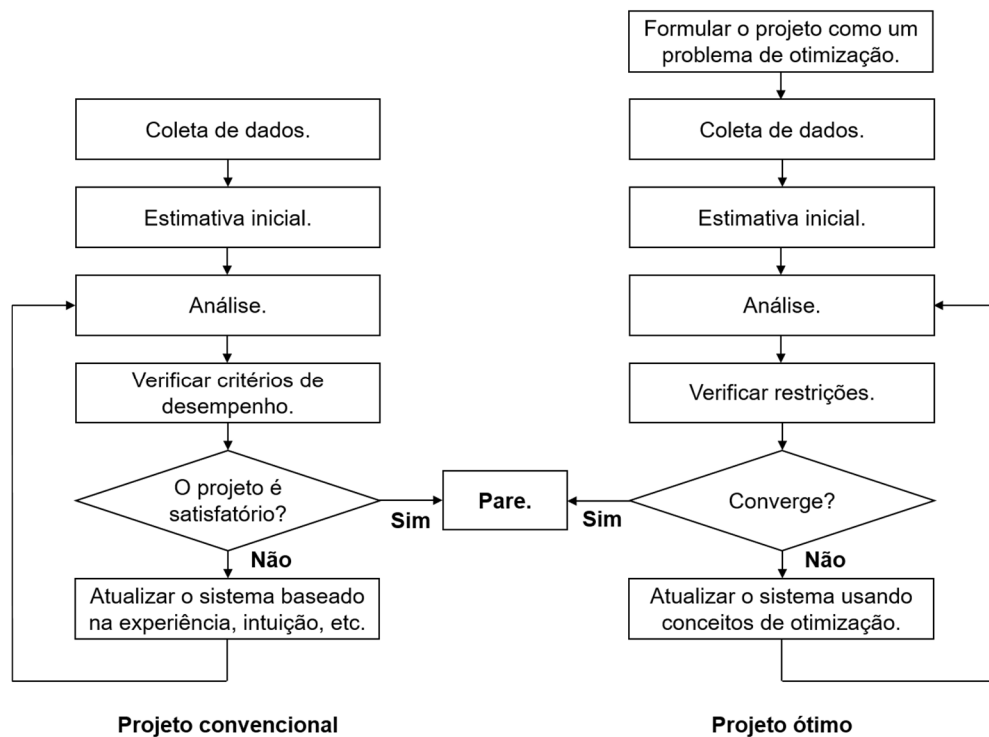


Fonte: O Autor (2020).

O problema da coluna com seção tubular consiste em encontrar a espessura t e o raio médio da seção R , para minimizar a massa da coluna $M(R, t)$, de modo a atender às restrições de segurança (limitação da tensão e carga) e limitações das variáveis de projeto. No problema da viga com seção retangular, as variáveis são a largura b e altura h da seção, que devem ser determinadas para minimizar o peso da viga $P(b, h)$, respeitando as limitações de tensão, flecha e valores mínimos e máximos para as dimensões b e h . O problema da treliça consiste em encontrar as áreas das barras A_i para minimizar o volume total de material $V(A_1, \dots, A_n)$, respeitando uma imposição de deslocamento. Assim, fica evidente que o projeto de diversas estruturas pode ser transformado em um problema de otimização.

Nos exemplos apresentados anteriormente, é perceptível que a otimização possibilita projetar uma estrutura de maneira a minimizar ou maximizar algum critério, diferentemente do procedimento convencional de projeto, onde é possível determinar apenas uma solução que atenda as restrições. No Fluxograma 1 são comparados os procedimentos de projeto convencional e de projeto ótimo.

Fluxograma 1 – Projeto convencional *versus* Projeto ótimo.



Fonte: O Autor (2020). Nota: Adaptado de Arora (2012).

No projeto convencional, após a coleta de dados, é necessário realizar uma estimativa do sistema que está sendo projetado. Em estruturas, é comum estimar as dimensões das seções transversais dos elementos estruturais. Em seguida, com o sistema definido, são realizadas as análises para verificar se os critérios de desempenho são satisfeitos. Caso o projeto estimado seja satisfatório, o procedimento finaliza. Caso contrário, uma nova estimativa é realizada com base na experiência, intuição ou recomendações técnicas, e são feitas novamente as análises para saber se o novo projeto é satisfatório. Este procedimento resulta em um projeto viável, que não necessariamente será o projeto de menor custo, peso, volume, ou qualquer outro critério especificado. Já no projeto ótimo, o projeto é formulado como um problema matemático de otimização, definindo quais serão as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições. A partir de uma estimativa inicial, o processo de otimização continua até convergir para o projeto

que minimiza a função objetivo. Em cada iteração, um novo projeto é definido utilizando conceitos de otimização, para encontrar o projeto ótimo. Dessa forma, ao final da otimização, o projeto encontrado, além de viável, será o que minimiza a função objetivo. Assim, a aplicação de técnicas de otimização em projetos estruturais é vantajosa e permite projetar peças de forma otimizada.

2.3.1 Métodos de otimização

Existem vários tipos de problemas de otimização. Como introduzido anteriormente, a otimização pode ser linear, não-linear, multiobjetivo, restrita ou irrestrita, entre outras. Além desses, os problemas de otimização podem envolver variáveis contínuas e/ou discretas, com funções contínuas e diferenciáveis, ou podem ter funções não contínuas e não diferenciáveis. Cada tipo de otimização apresenta características que exigem diferentes métodos de resolução. Dessa forma, os métodos de resolução empregados em um determinado problema devem ser escolhidos em função do tipo de otimização.

Os métodos numéricos de otimização podem receber diversas classificações (RAO, 2009). Uma classificação comum em otimização global é a divisão entre métodos determinísticos e estocásticos. Os métodos determinísticos encontram o mínimo global por meio de uma pesquisa exaustiva no conjunto da região viável. O sucesso desses métodos pode ser garantido apenas para as funções que satisfazem certas condições. Já os métodos estocásticos envolvem elementos aleatórios para determinar o mínimo global (ARORA, 2012). Neste caso, as funções não precisam satisfazer condições específicas: podem ser não contínuas e não diferenciáveis, porém, geralmente exigem um alto custo computacional, devido ao grande número de soluções que são avaliadas nas iterações do algoritmo. Como exemplo desses métodos, tem-se as técnicas de otimização baseadas em comportamentos da natureza: Algoritmos Genéticos (SIVANANDAM; DEEPA, 2008), Otimização por Enxame de Partículas (KENNEDY; EBERHART, 2001), Otimização por Colônia de Formigas (DORIGO; STÜTZLE, 2004), Algoritmos de Libélulas (MIRJALILI, 2016), entre outros.

Os Algoritmos Genéticos são fundamentados nas ideias de evolução das espécies, sendo aplicados em muitos problemas de otimização de engenharia (RAO, 2009). A Otimização por Enxame de Partículas imita o comportamento de enxame de animais, tais como aves e peixes. A Otimização por Colônia de Formigas se baseia no comportamento das formigas, que ao saírem da colônia para procurar comida, encontram o caminho mais curto até a fonte de alimentos (DORIGO; STÜTZLE, 2004). Recentemente, Mirjalili (2016) apresentou o

Algoritmo de Libélulas, baseada no comportamento dinâmico e estático de enxames de libélulas. Neste trabalho, foi utilizado o método dos Algoritmos Genéticos, sendo descrito a seguir.

2.3.2 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AG) são baseados no princípio da genética e evolução. Foram introduzidos em 1975 por Holland, que descreveu como aplicar os princípios da evolução natural em problemas de otimização e construiu os primeiros algoritmos genéticos (SIVANANDAM; DEEPA, 2008).

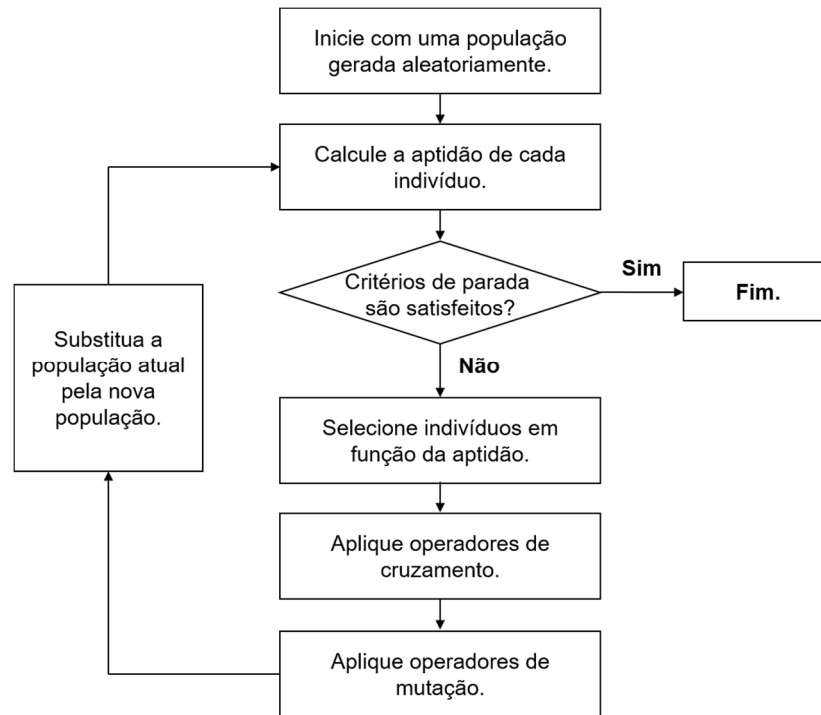
A ideia básica dos AG é começar com um conjunto de possíveis soluções, geradas aleatoriamente. Cada solução recebe um valor de aptidão, que geralmente é a função objetivo para problemas irrestritos, ou uma função de penalidade para problemas restritos. A partir do conjunto atual de soluções, um subconjunto é selecionado, com base nas melhores soluções. Dessa forma, os conjuntos sucessivos têm maior probabilidade de ter soluções melhores que o conjunto anterior. O processo continua até que um critério de parada seja atendido (ARORA, 2012).

Nos AG, a nomenclatura dos componentes do método está associada a genética e evolução. O conjunto de possíveis soluções é chamado de população. Cada iteração do algoritmo é denominada de geração. Um cromossomo representa uma solução, que pode ser viável ou inviável, e contém valores para todas as variáveis de projeto. Cada componente escalar do vetor das variáveis de projeto é chamado de gene. A aptidão é uma medida de avaliação das soluções, que está relacionada com a função objetivo e funções de penalidade (quando existem restrições). As soluções são representadas por codificação binária ou real.

Na ilustração a seguir (Fluxograma 2) um fluxograma de um AG simples é apresentado. Primeiramente, uma população de indivíduos é gerada aleatoriamente. Para cada membro da população, calcula-se a aptidão. Caso os critérios de parada sejam satisfeitos, o processo finaliza, e o melhor indivíduo é selecionado como a solução ótima. Esses critérios podem ser o número máximo de gerações e o tempo limite de execução. Caso contrário, as iterações continuam. Para formar uma nova população, indivíduos são selecionados em função de sua aptidão, por procedimentos como o de seleção de roleta. Para os indivíduos selecionados, são aplicados os operadores de cruzamento, que combinam as características genéticas dos indivíduos, gerando novos indivíduos. Aplica-se em seguida os operadores de mutação, que modificam os novos indivíduos, diversificando a população. A nova população passa a ser a

nova geração, e são calculadas a aptidão dos membros. Se os critérios de parada não forem satisfeitos, o processo continua. Assim, ao final do algoritmo, é encontrado o melhor indivíduo.

Fluxograma 2 – Algoritmo genético.



Fonte: O Autor (2020).

2.4 Confiabilidade estrutural

No projeto de sistemas em engenharia, inicialmente é desenvolvido um modelo matemático do sistema. Em seguida, é feita a implementação de um modelo computacional para obter a solução do problema. Em cada uma dessas etapas existem incertezas, pois as informações sobre o sistema são incompletas ou insuficientes, contêm variabilidade, e os modelos são idealizados.

As incertezas são encontradas em diversas áreas da engenharia: parâmetros e características dos solos, dados e informações pluviométricos, resistência dos materiais, carregamentos e solicitações, imprecisões na construção civil, entre outros (ANG; TANG, 2007). Um exemplo de incerteza na engenharia estrutural é a variabilidade da resistência à compressão do concreto. A variabilidade na resistência do concreto tem origem na não-homogeneidade do material, na variabilidade das propriedades dos materiais do concreto e em imprecisões da mistura (BECK, 2014).

Geralmente, as incertezas são classificadas em aleatórias e epistêmicas. As incertezas aleatórias são incertezas intrínsecas ao sistema que está sendo considerado, sendo comumente associadas aos dados. Já as incertezas epistêmicas são decorrentes da falta ou lacunas no conhecimento do sistema, geralmente associados ao modelo (MELCHERS; BECK, 2018). Elas podem ser representadas por funções de distribuição de probabilidade ou por intervalos (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007).

Os projetos de engenharia com incertezas envolvem riscos, ou seja, possuem uma probabilidade de falha. Assim, o sistema deve ser projetado para que seja confiável e tenha uma probabilidade de segurança adequada. Nessas situações, em projetos com incertezas, dois tipos de abordagem são utilizados: abordagem determinística e abordagem estocástica.

Na abordagem determinística, encontra-se uma resposta determinística do sistema, por meio de coeficientes de segurança, de modo a cobrir as incertezas minorando ou majorando os valores incertos. Nessa abordagem, o projeto final pode ser subdimensionado ou superdimensionado, podendo “não” ser seguro, ou estar seguro “demais”.

Na abordagem estocástica encontra-se uma resposta em termos estatísticos do sistema. As incertezas são levadas em consideração nos modelos de análise, através dos conceitos estatísticos e probabilísticos. Dessa forma, obtém-se um sistema robusto, ou seja, um sistema que será confiável frente as incertezas. Na abordagem estocástica, as incertezas podem ser analisadas por procedimentos probabilísticos e não-probabilísticos. Dentre os métodos probabilísticos estão: métodos dos elementos finitos estocásticos, métodos de primeira e segunda ordem (FORM e SORM), métodos de amostragem (Monte Carlo, amostragem por importância, entre outros) e campos aleatórios. As abordagens não-probabilísticas utilizam conceitos e teorias modernas equivalentes a probabilidade: análise de intervalos, teoria “fuzzy”, teoria das possibilidades, etc. (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007).

Em projetos onde as incertezas são pequenas, geralmente utiliza-se um modelo determinístico em vez de um modelo estocástico. Porém, quando o grau de incerteza é alto, é necessário considerar as incertezas por meio de uma abordagem estocástica. Mesmo que em muitas situações a abordagem determinística forneça bons resultados, a abordagem estocástica é mais adequada por considerar as características probabilísticas do projeto.

Na abordagem estocástica do projeto de estruturas, a confiabilidade estrutural é avaliada utilizando funções de estado-limite. Quando uma estrutura excede um limite específico, resultando em um desempenho inadequado, o limite é chamado de “estado-limite”. A estrutura não será confiável se a probabilidade de falha do estado-limite for superior a um valor requerido (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007). Nas estruturas em geral, o estado-limite pode ser

último, relacionado ao colapso da estrutura, ou de serviço, referente a impossibilidade de utilização normal da mesma. O estado-limite indica a margem de segurança entre a resistência e a solicitação das estruturas. De modo geral, uma função de estado-limite $g(X)$ pode ser expressa como:

$$g(X) = R(X) - S(X) \quad (24)$$

onde X é a variável aleatória (variável que possui incertezas); $R(X)$ é a resistência; e $S(X)$ é a solicitação. Tanto a resistência como a solicitação são funções da variável aleatória.

A probabilidade de falha P_f do estado-limite $g(X)$ é definida como:

$$P_f = P[g(X) < 0] \quad (25)$$

onde a notação $g(X) < 0$ indica o domínio de falha da estrutura. Assim, $g(X) = 0$ e $g(X) > 0$ indicam a superfície de falha e o domínio de segurança, respectivamente.

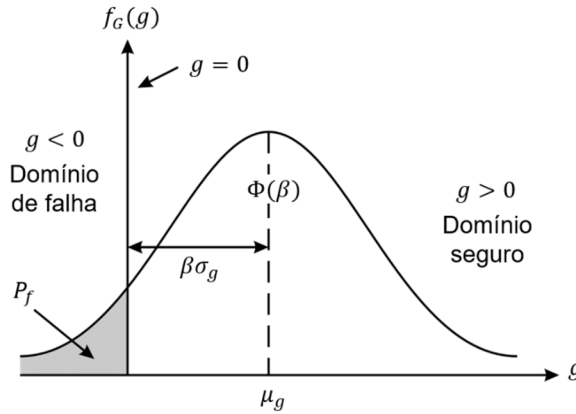
Em uma situação onde a resistência e a solicitação possuem distribuição de probabilidade normal, e são estatisticamente independentes, o índice de confiabilidade β da estrutura é dado por:

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (26)$$

onde μ_g , μ_R e μ_S são as médias da função de estado-limite, da resistência e da solicitação, respectivamente; σ_g , σ_R e σ_S são os desvios-padrões da função de estado-limite, da resistência e da solicitação, respectivamente.

Na Figura 6 é apresentada uma visualização gráfica do índice de confiabilidade na função densidade de probabilidade do estado-limite. O índice de confiabilidade indica a distância de $g = 0$ até a média μ_g , conforme visto na Figura 6. Assim, é intuitivo associar o índice de confiabilidade a uma medida da segurança, que quanto mais afastada estiver a média de g da superfície de falha $g = 0$, mais segura estará a estrutura.

Figura 6 – Densidade de probabilidade para o estado-limite g .



Fonte: O Autor (2020). Nota: Adaptado de Choi, Grandhi e Canfield (2007).

Na Figura 6, a área sombreada indica a probabilidade de falha P_f . Essa área compreende o domínio de falha, quando $g < 0$. Assim, a probabilidade de falha é igual a:

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_G(g) dg \quad (27)$$

onde $f_G(g)$ é a função de distribuição de probabilidade de $g(X)$.

Como a resistência e a solicitação possuem distribuição de probabilidade normal, e não são correlacionadas, a função de estado-limite também é normalmente distribuída. Dessa forma, escrevendo $f_G(g)$ como uma função de distribuição normal, a probabilidade de falha da Equação 27 fica dada por:

$$P_f = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \right) e^{\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{g - \mu_g}{\sigma_g} \right)^2 \right]} dg \quad (28)$$

Para $g = 0$ e substituindo β (Equação 26) na Equação 28, a probabilidade de falha é calculada em termos do índice de confiabilidade:

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \quad (29)$$

onde Φ é a função de distribuição acumulada normal padrão.

Para calcular a probabilidade de falha (Equação 29), diferentes métodos numéricos são utilizados para encontrar um resultado aproximado, devido as dificuldades de uma resolução

analítica. Em confiabilidade estrutural, é comum a utilização dos métodos de primeira e segunda ordem e dos métodos de amostragem.

Nos métodos de primeira e segunda ordem, o cálculo do índice de confiabilidade é na verdade a resolução de um problema matemático de otimização, para encontrar o ponto da superfície de estado-limite que tem a menor distância até a origem, no espaço normal padrão. Nesta abordagem, a função de estado-limite é aproximada. Se a superfície é aproximada em primeira ordem, o método é chamado de “Método de Confiabilidade de Primeira Ordem”, ou “First Order Reliability Method” (FORM) em inglês. Se a aproximação for de segunda ordem, o método é chamado de “Método de Confiabilidade de Segunda Ordem”, ou “Second Order Reliability Method” (SORM) em inglês.

Os métodos de amostragem utilizam simulações diretas para obter soluções matemáticas ou informações probabilísticas sobre problemas com equações que não podem ser resolvidas facilmente por procedimentos conhecidos (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007). São exemplos de métodos de amostragem: simulação de Monte Carlo, amostragem por importância e amostragem por Hipercubo Latino.

2.4.1 Simulação de Monte Carlo

Simulação de Monte Carlo (SMC) é o nome dado a simulação que envolve a utilização de números aleatórios, sendo uma referência a cidade de Monte Carlo, conhecida por seus cassinos (BECK, 2019). A SMC faz simulações baseadas em conjuntos de amostragem gerados aleatoriamente para as variáveis aleatórias. Basicamente, o procedimento de SMC é:

1. Selecionar os tipos de distribuição para as variáveis aleatórias;
2. Gerar um conjunto de amostragem das variáveis aleatórias, de acordo com suas respectivas funções de densidade de probabilidade;
3. Realizar simulações utilizando o conjunto de amostragem gerado, a partir da função de estado-limite, que irá determinar para cada simulação se houve falha. Com os resultados das simulações, é possível obter características probabilísticas da resposta da estrutura.

A probabilidade de falha estimada pela SMC, $\hat{P}_f$, fica dada por:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} I[X_i] = \frac{n_f}{n_s} \quad (30)$$

onde n_s é número de elementos da amostra e n_f é o número de pontos no domínio de falha. $I[X]$ é uma função indicadora, sendo igual a 1 quando o ponto simulado estiver no domínio de falha ($g(X) < 0$), e igual a 0 quando o ponto estiver no domínio de segurança ($g(X) > 0$).

Como fica evidente pela Equação 30, na SMC é necessário um grande número de simulações para obter uma aproximação adequada da probabilidade de falha, aumentando o custo computacional. Porém, com o aumento da capacidade dos computadores e com o processamento em paralelo, a SMC tem conquistado cada vez mais espaço. Além disso, a SMC é de fácil implementação e pode ser aplicada em diferentes problemas de confiabilidade (BECK, 2019).

Para avaliar uma probabilidade de falha na ordem de 10^{-p} , com precisão de 0,1 e um intervalo de confiança de 95%, o número mínimo de elementos da amostra na SMC é de $4 \times 10^{(p+2)}$ (BECK, 2019).

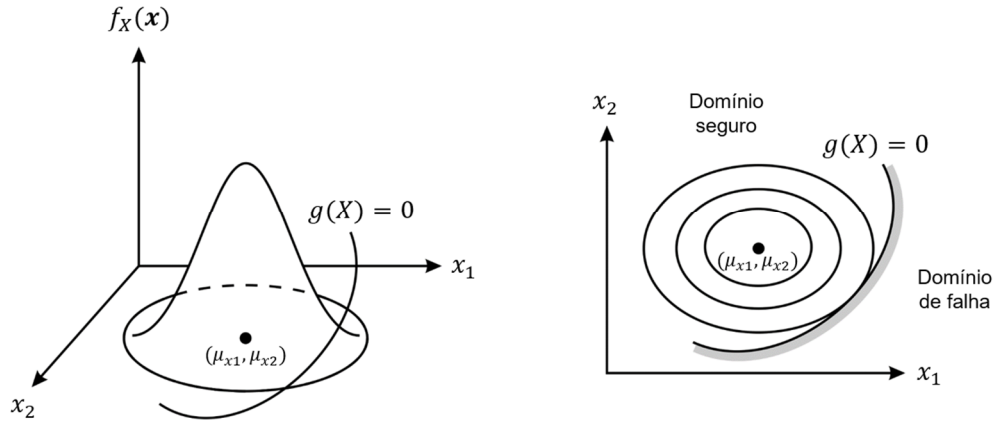
2.4.2 Algoritmo HLRF

A abordagem do índice de confiabilidade nos métodos de primeira e segunda ordem é na verdade um problema de otimização, como introduzido na seção anterior.

Na Figura 7 é apresentada a função de distribuição de probabilidade $f_X(\mathbf{x})$ da variável aleatória $X = \{x_1, x_2\}^T$, em um caso bidimensional no espaço X , juntamente com a superfície de estado limite $g(X) = 0$ que divide os domínios de segurança e falha. O vetor das variáveis aleatórias X pode ser transformado em um vetor de variáveis gaussianas padronizadas $U = \{u_1, u_2\}^T$. Essa transformação é ilustrada na Figura 8, e neste caso, no espaço normal padrão U , o centro da função de distribuição de probabilidade $f_U(\mathbf{u})$ coincide com a origem.

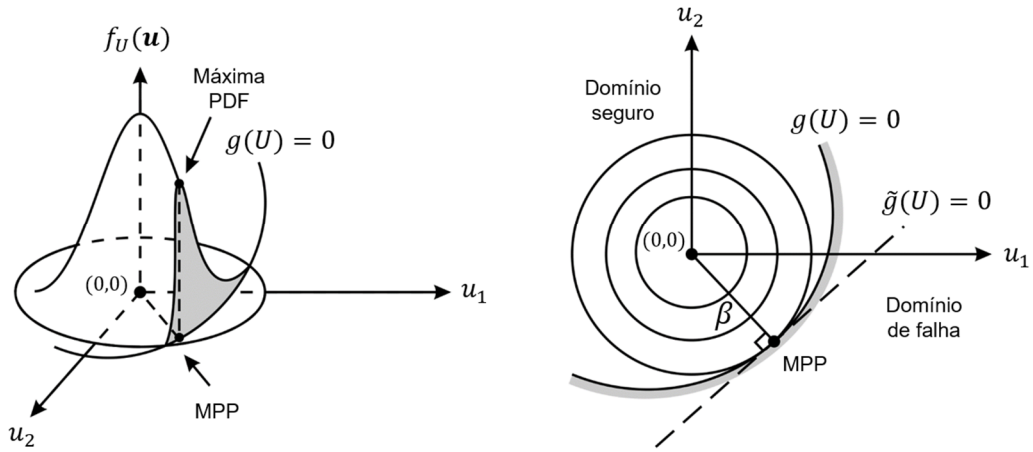
Como verificado na Figura 8, devido a simetria rotacional de $f_U(\mathbf{u})$ no espaço U , o ponto da superfície do estado-limite $g(U) = 0$ que possui o maior valor de densidade de probabilidade (máxima *Probability Density Function* - PDF), é o ponto de menor distância entre a origem e a superfície de falha. Este ponto é chamado de ponto de falha mais provável (*Most Probable Point* - MPP), já que é o ponto da superfície de falha com maior probabilidade de ocorrência. Assim, o índice de confiabilidade é a distância da origem até o MPP na superfície de falha. Essa é a menor distância entre a origem e $g(U) = 0$.

Figura 7 – Espaço X.



Fonte: O Autor (2020). Nota: Adaptado de Choi, Grandhi e Canfield (2007).

Figura 8 – Espaço U.



Fonte: O Autor (2020). Nota: Adaptado de Choi, Grandhi e Canfield (2007).

Dessa forma, o cálculo do índice de confiabilidade pode ser enunciado como o seguinte problema de otimização restrita no espaço normal padrão:

Encontrar U , para minimizar a função objetivo:

$$\beta(U) = (U^T U)^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

Sujeito a restrição:

$$g(U) = 0 \quad (32)$$

Para resolver o problema de otimização das Equações 31 e 32 existem vários métodos disponíveis, como apresentado no item 2.4.1 deste trabalho. Em análises de confiabilidade, um

dos métodos mais utilizados é o de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler, conhecido como algoritmo HLRF (BECK, 2019), que será descrito a seguir.

Seja uma superfície de estado-limite $g(X) = 0$, que pode ser linear ou não-linear, com n variáveis aleatórias normalmente distribuídas:

$$g(X) = g(\{x_1, \dots, x_n\}^T) = 0 \quad (33)$$

A transformação do espaço X para o espaço normal padrão U é:

$$u_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (34)$$

onde μ_{x_i} e σ_{x_i} são a média e o desvio-padrão da variável aleatória x_i , respectivamente.

Assim, transformando as variáveis aleatórias em variáveis gaussianas padronizadas, a superfície de estado-limite $g(U) = 0$ no espaço U é:

$$g(U) = g(\{\sigma_{x_1}u_1 + \mu_{x_1}, \dots, \sigma_{x_n}u_n + \mu_{x_n}\}^T) = 0 \quad (35)$$

Nos métodos de primeira ordem, a superfície de estado-limite é aproximada pela expansão da série de Taylor de primeira ordem no MPP U^* , como indicado na Figura 8 ($\tilde{g}(U) = 0$), sendo igual a:

$$\tilde{g}(U) \approx g(U^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(U^*)}{\partial U_i} (u_i - u_i^*) \quad (36)$$

Da transformação da Equação 34, tem-se que:

$$\frac{\partial \tilde{g}(U)}{\partial u_i} = \frac{\partial g(X)}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \quad (37)$$

Em termos de X , a menor distância da origem até a superfície de falha aproximada (Equação 35) fica dada por:

$$\beta = \frac{g(X^*) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(X^*)}{\partial x_i} \sigma_{x_i} u_i^*}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g(X^*)}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (38)$$

O cosseno diretor do vetor normal da superfície de estado-limite em U^* , é dado pela Equação 39 (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007). Esse cosseno diretor α_i indica a importância relativa da variável aleatória i na probabilidade de falha. Os cossenos diretores são chamados de coeficientes de sensibilidade.

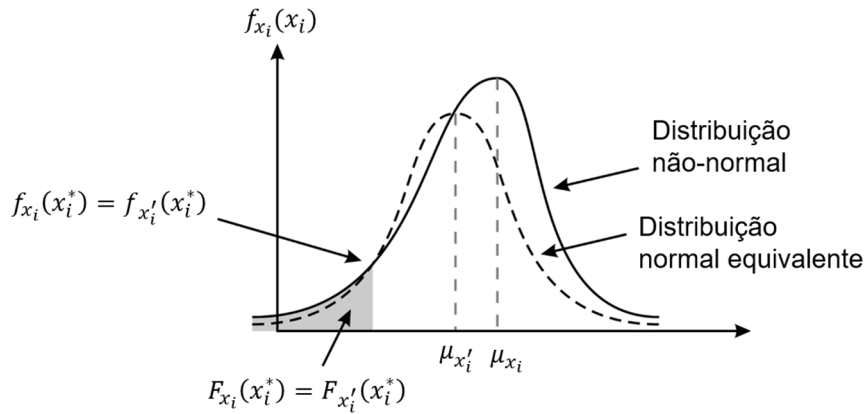
$$\alpha_i = \frac{-\frac{\partial g(X^*)}{\partial x_i} \sigma_{x_i}}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g(X^*)}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (39)$$

As coordenadas de X^* correspondentes de U^* no espaço X , em função de β e α , são dadas por:

$$x_i^* = \mu_{x_i} + \beta \sigma_{x_i} \alpha_i \quad (40)$$

Inicialmente, foi considerado que as variáveis aleatórias são normalmente distribuídas, o que possibilita a transformação para o espaço normal padrão. Em casos onde existem variáveis aleatórias com distribuição não-normal, é necessário determinar uma distribuição normal equivalente para essas variáveis. Na Figura 9 é apresentada graficamente a transformação de uma distribuição não-normal em uma normal equivalente, no ponto x_i^* . No ponto da aproximação, as funções de densidade de probabilidade e de distribuição acumulada são iguais para as duas distribuições. Esta aproximação é conhecida como aproximação de “cauda normal” (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007).

Figura 9 – Distribuição normal equivalente.



Fonte: O Autor (2020). Nota: Adaptado de Choi, Grandhi e Canfield (2007).

O desvio-padrão $\sigma_{x'_i}$ e a média $\mu_{x'_i}$ da distribuição normal equivalente são:

$$\sigma_{x'_i} = \frac{\phi(\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)])}{f_{x_i}(x_i^*)} \quad (41)$$

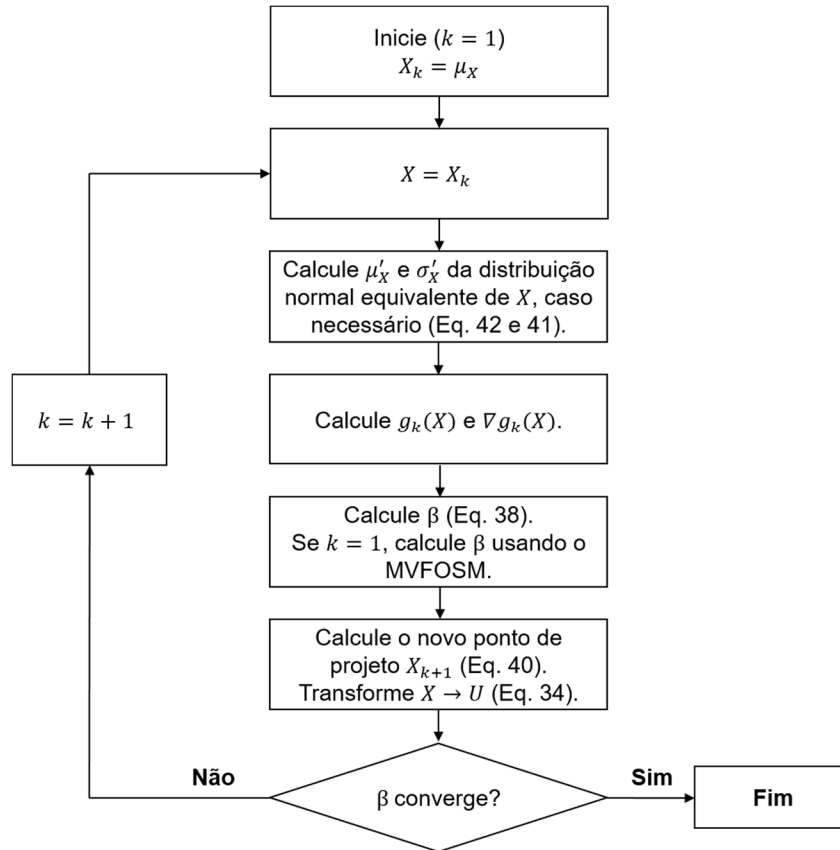
$$\mu_{x'_i} = x_i^* - \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)]\sigma_{x'_i} \quad (42)$$

onde $\phi(\cdot)$ é a função de densidade de probabilidade normal padrão; $\Phi^{-1}[\cdot]$ é a inversa da função de distribuição acumulada normal padrão; $f_{x_i}(x_i^*)$ e $F_{x_i}(x_i^*)$ são as funções de densidade de probabilidade e de distribuição acumulada da distribuição não-normal, respectivamente.

Na ilustração a seguir (Fluxograma 3) apresenta-se um fluxograma do algoritmo HLRF. Inicialmente, na iteração $k = 1$, o ponto de partida considerado são as médias μ_X da variável aleatória X . Caso existam variáveis com distribuição não-normal, calculam-se as médias μ'_X e os desvios-padrões σ'_X das distribuições normais equivalentes, através das Equações 42 e 41. Em seguida, calculam-se os valores da função de estado limite $g_k(X)$ e do gradiente $\nabla g_k(X)$ no ponto da iteração (X_k). Com a Equação 38, determina-se o índice de confiabilidade. Na primeira iteração, o índice de confiabilidade é calculado pelo MVFOSM (*Mean Value First Order Second Moment method*), que aproxima a função de estado-limite no valor médio. Nas demais iterações, utiliza-se a Equação 38. Com o índice de confiabilidade e os cossenos diretores calculados, determina-se o novo ponto de projeto X_{k+1} , através da Equação 40. Em seguida, o novo ponto de projeto é transformado para o espaço normal padrão, utilizando a Equação 34. Se o índice de confiabilidade converge, o algoritmo finaliza. Caso contrário, as iterações continuam até que a convergência seja alcançada. Assim, pode-se dizer que o

algoritmo HLRF é baseado na aproximação da equação de estado-limite por um hiperplano e na busca desta aproximação que resulta em zero (BECK, 2019).

Fluxograma 3 – Algoritmo HLRF.



Fonte: O Autor (2020).

Em situações onde a função de estado-limite é altamente não-linear, devido a abordagem do algoritmo HLRF que utiliza uma aproximação linear da função de estado-limite no MPP, o algoritmo pode não convergir. Uma das desvantagens do método é justamente não ter a garantia de convergência. Podem ocorrer situações onde o índice de confiabilidade converge, porém o MPP não se encontra na superfície de estado-limite. Sendo assim, é interessante verificar se de fato o MPP encontrado resulta em um valor de $g(X)$ próximo de zero.

2.4.3 Algoritmo iHLRF

Zhang e Der Kiureghian (1995) propuseram uma melhoria no algoritmo HLRF, sendo o algoritmo melhorado chamado de iHLRF (*improved* HLRF). No iHLRF, o passo no algoritmo é ajustado de modo que a convergência é assegurada.

No algoritmo HLRF, a direção de busca é dada pela diferença entre o novo ponto de projeto e o ponto da iteração. Das Equações 38, 39 e 40, em termos de U , a direção de busca $\mathbf{d}_k$ fica dada por:

$$\mathbf{d}_k = U_{k+1} - U_k = \frac{\nabla g(U_k)^t U_k - g(U_k)}{\|\nabla g(U_k)\|^2} \nabla g(U_k) - U_k \quad (43)$$

No HLRF, o novo ponto de projeto U_{k+1} é calculado através de um passo unitário $\lambda_k = 1$, conforme a Equação 44:

$$U_{k+1} = U_k + \lambda_k \mathbf{d}_k \quad (44)$$

No iHLRF, o passo λ_k é calculado a cada iteração. Uma busca linear é realizada para encontrar λ_k que minimiza uma função mérito $m(U)$:

$$\lambda_k = \arg \min [m(U_k + \lambda \mathbf{d}_k)] \quad (45)$$

De acordo com Zhang e Der Kiureghian (1995), uma função mérito simples pode ser escrita como:

$$m(U) = \frac{1}{2} \|U\|^2 + c |g(U)| \quad (46)$$

onde $c > 0$ é um fator de penalidade da função mérito.

As seguintes propriedades da função mérito são suficientes para garantir a convergência do algoritmo (SUDRET; DER KIUREGHIAN, 2000):

- A direção de busca $\mathbf{d}_k$ é uma direção de descida da função mérito, desde que:

$$c > \frac{\|U\|}{\|\nabla g(U)\|} \quad (47)$$

- Se a mesma restrição em c é observada, a convergência ao ponto de projeto é garantida.

O algoritmo iHLRF pode ser resumido nos seguintes passos (BECK, 2019):

1. Selecione os parâmetros $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma > 1$. Os parâmetros ε e δ correspondem à tolerância nas condições de otimalidade, e o parâmetro γ serve para atender à condição de convergência (Equação 47). Valores típicos são $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-3}|g(U_0)|$ e $\gamma = 2$;
2. Escolha um ponto inicial U_0 para $k = 0$;
3. Calcule $g(U_k)$ e $\nabla g(U_k)$, e verifique a condição de otimalidade.

Se:

$$\begin{cases} 1 - \frac{|\nabla g(U_k)^t U_k|}{\|\nabla g(U_k)\| \|U_k\|} < \varepsilon \\ |g(U_k)| < \delta \end{cases} \quad (48)$$

Pare. Caso contrário, prossiga.

4. Calcule a direção de busca:

$$\mathbf{d}_k = \frac{\nabla g(U_k)^t U_k - g(U_k)}{\|\nabla g(U_k)\|^2} \nabla g(U_k) - U_k \quad (49)$$

5. Determine o fator de penalidade da função mérito.

Se $|g(U_k)| \geq \delta$:

$$c_k = \gamma \max \left[\frac{\|U_k\|}{\|\nabla g(U_k)\|}, \frac{1}{2} \frac{\|U_k + \mathbf{d}_k\|^2}{|g(U_k)|} \right] \quad (50)$$

Caso contrário:

$$c_k = \gamma \frac{\|U_k\|}{\|\nabla g(U_k)\|} \quad (51)$$

6. Calcule o passo λ_k :

$$\lambda_k = \arg \min [m(U_k + \lambda \mathbf{d}_k)] \quad (52)$$

7. Atualize o ponto U :

$$U_{k+1} = U_k + \lambda_k \mathbf{d}_k \quad (53)$$

8. Incremente $k = k + 1$ e retorne para o passo 3.

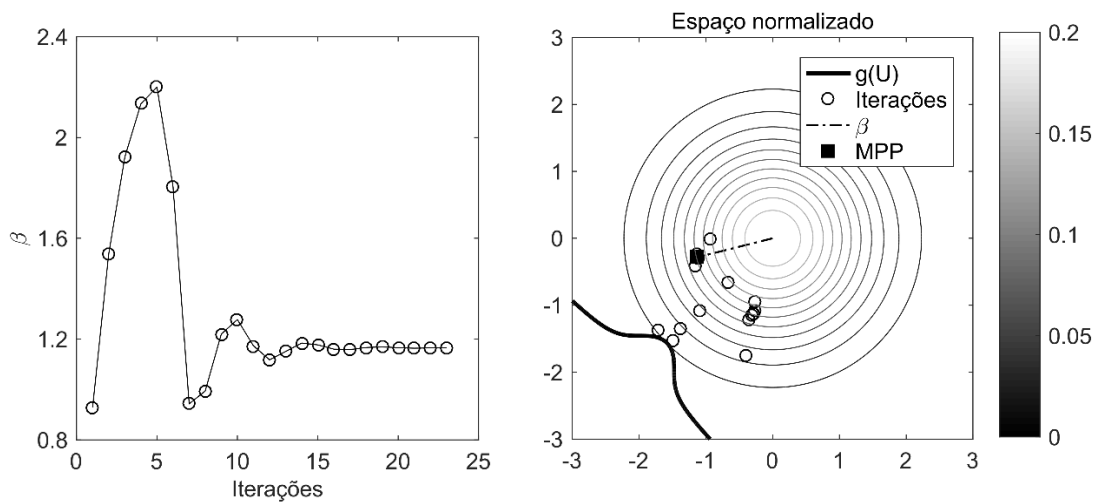
Conforme Beck (2019), no passo 5, c_k é ajustado de modo a equilibrar a eficiência e convergência do algoritmo. No caso de $g(U)$ aproximadamente linear, a Equação 50 impõe c_k suficientemente grande para que um passo inteiro $\lambda_k = 1$ seja dado. Neste caso, esta alteração pode levar a uma perda da garantia da convergência incondicional (Equação 47).

Para exemplificar a eficiência do iHLRF em relação ao HLRF, seja a função $g(x_1, x_2)$ da Equação 54. As variáveis aleatórias x_1 e x_2 tem distribuição normal com média e desvio-padrão iguais a $\mu_{x_1} = 10$, $\mu_{x_2} = 9,9$, $\sigma_{x_1} = 5$ e $\sigma_{x_2} = 5$, respectivamente.

$$g(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 18 \quad (54)$$

No Gráfico 1 é apresentado o resultado do HLRF na busca do índice de confiabilidade para a função $g(x_1, x_2)$. O HLRF converge após 23 iterações, resultando em β igual a 1,17. No gráfico, verifica-se que, de fato, o algoritmo converge para o índice de confiabilidade igual a 1,17. Porém, ao analisar o espaço normalizado, verifica-se que o ponto de projeto da última iteração (MPP) não se encontra na superfície $g(U) = 0$.

Gráfico 1 – Resultado do HLRF.

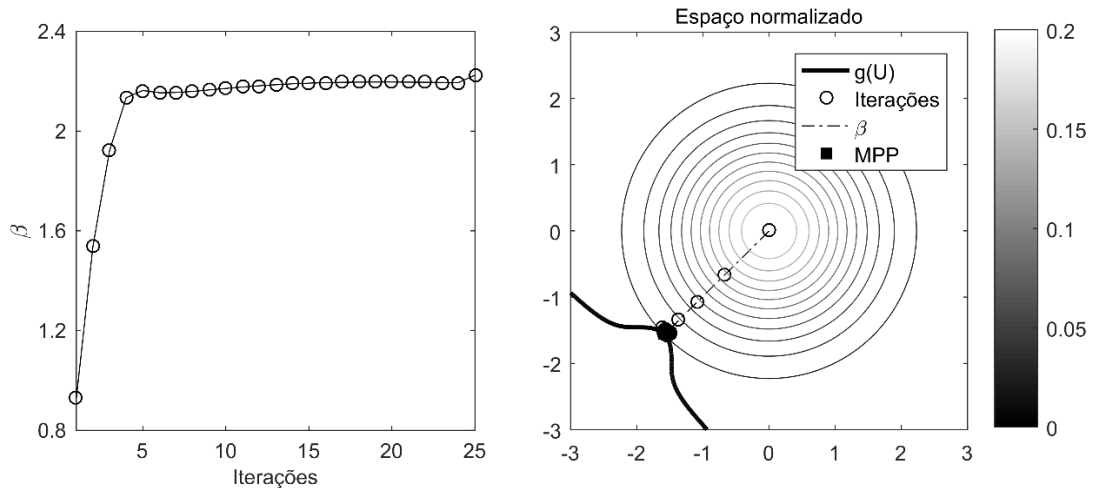


Fonte: O Autor (2020).

No Gráfico 2 é apresentado o resultado do iHLRF na busca do índice de confiabilidade para a função $g(x_1, x_2)$. O iHLRF converge após 25 iterações, resultando em β igual a 2,22. Ao contrário do HLRF, no iHLRF o MPP calculado se encontra na superfície $g(U) = 0$, como

observado no gráfico. Assim, o índice de confiabilidade determinado é a menor distância entre a origem do espaço normalizado e $g(U) = 0$.

Gráfico 2 – Resultado do iHLRF.



Fonte: O Autor (2020).

Por meio do exemplo apresentado anteriormente, fica evidente a eficiência do iHLRF. Porém, uma desvantagem do iHLRF é o fato de a função mérito (Equação 46) ser não diferenciável (SANTOS; MATIOLI; BECK, 2012). O problema de otimização para encontrar o passo (Equação 45) não é simples. Neste caso, a busca linear por um passo ótimo pode ser feita de forma aproximada pela regra de Armijo (SUDRET; DER KIUREGHIAN, 2000).

Além do iHLRF, existem também outras melhorias para o HLRF. Uma delas é a utilização de outros tipos de funções para aproximar a função de estado-limite, como as aproximações TANA (*Two-point Adaptive Nonlinear Approximations*). Nessa abordagem, as aproximações da função de estado-limite são construídas utilizando a expansão de série de Taylor em termos de variáveis adaptativas. Em cada iteração do algoritmo, a não-linearidade das aproximações adaptativas é alterada utilizando informações geradas durante o processo de iteração (CHOI; GRANDHI; CANFIELD, 2007).

2.5 Estado da Arte

Os constantes desenvolvimentos relacionados as técnicas de otimização possibilitaram um avanço nas pesquisas em otimização estrutural, que passaram a explorar mais as aplicações práticas da otimização no projeto de estruturas com diversos materiais. Existem vários estudos

de otimização de vigas de concreto armado, com diferentes formulações, considerações e métodos. São apresentadas a seguir algumas dessas pesquisas que são relacionadas com o tema deste trabalho.

Kanagasundaram e Karihaloo (1991) otimizaram vigas e pilares de concreto armado para minimizar os custos, utilizando programação linear sequencial e convexa. Na otimização das vigas, as variáveis de projeto consideradas foram a largura e a altura da seção, a resistência do concreto e a relação entre as áreas de aço e concreto. Foram consideradas restrições relacionadas à segurança, utilização, durabilidade e geometria da seção. Os autores concluíram que, ao considerar a resistência do concreto como variável de projeto, a otimização resultou em seções com altura pequena e alta resistência do concreto.

Govindaraj e Ramasamy (2005) apresentaram um procedimento de otimização de vigas contínuas de concreto armado, utilizando Algoritmos Genéticos. No problema de otimização formulado, as variáveis de projeto foram a largura e a altura de cada trecho da viga contínua, tendo como função objetivo a minimização do custo total da viga. As restrições impostas ao problema estão relacionadas à segurança, utilização e aspectos construtivos. Ao contrário da maioria dos estudos de otimização de vigas, os autores formularam o problema de modo a se obter uma solução viável do ponto de vista construtivo. Assim, no processo de otimização, para cada solução viável foi gerado um detalhamento das armaduras, resultando em uma solução ótima possível de ser construída. Os autores concluíram que com a metodologia proposta, considerando aspectos construtivos, é possível obter projetos econômicos e práticos.

Diferentemente dos estudos apresentados anteriormente, Camp e Huq (2013) otimizaram vigas e pilares de concreto armado para minimizar os custos monetários e as emissões de CO₂, causadas pelos materiais que compõe as estruturas, levando em consideração diferentes etapas que vão desde a produção à utilização. Em relação às vigas, o problema de otimização foi encontrar os valores ótimos de largura, altura e área de aço para minimizar os custos financeiros e a emissão de CO₂, atendendo aos critérios das normas técnicas americanas. Com os resultados da otimização para cada função objetivo, foi constatado que projetos com o objetivo de minimizar as emissões de CO₂ podem ser obtidos com um aumento relativamente pequeno no custo.

Alexandre (2014) otimizou vigas de concreto armado de seção retangular, utilizando Algoritmos Genéticos. O problema de otimização formulado foi encontrar a altura, resistência à compressão do concreto, ângulo de inclinação da biela e o detalhamento da viga que minimizassem os custos, atendendo aos critérios da NBR 6118 (ABNT, 2007). O autor realizou

uma análise de sensibilidade dos custos, verificando que o custo da fôrma foi o mais representativo.

Bezerra (2017) aplicou Algoritmos Genéticos para otimizar vigas de concreto armado biapoiadas e engastadas. As variáveis de projeto consideradas foram a altura útil, largura, áreas de aço e quantidade de estribos para minimizar os custos, respeitando os critérios da NBR 6118 (ABNT, 2014). Dentre os resultados obtidos, foi verificado que as variáveis de projeto altura útil e área de aço tracionado tem maior influência na otimização.

Atualmente, as principais normas técnicas de projeto de estruturas utilizam o procedimento de estados-limites. Nesse procedimento, um coeficiente parcial de segurança é utilizado para cada uma das ações, e outros são utilizados para a resistência de cada material. Esses coeficientes têm sido calibrados para atingir índices de confiabilidade alvo, de forma a obter uma maior uniformidade nas diversas estruturas que a norma técnica abrange. O problema de calibração de normas consiste em um problema inverso do índice de confiabilidade: encontrar os coeficientes parciais de segurança que resultem no índice de confiabilidade desejado, chamado de índice de confiabilidade alvo. As normas americanas e europeias passaram por processos de calibração. As normas brasileiras, porém, nunca passaram por este procedimento (BECK, 2019). Alguns estudos investigaram o índice de confiabilidade de estruturas projetadas de acordo com as normas brasileiras. A seguir, são apresentados alguns desses estudos relacionados a confiabilidade de vigas de concreto armado.

Coelho (2011) determinou a probabilidade de falha de vigas de concreto armado em relação ao estado-limite de serviço, utilizando simulação de Monte Carlo. Os resultados obtidos demonstraram uma grande variabilidade dos valores de flecha, sendo constatado que o procedimento de dimensionamento da norma brasileira resulta em índices de confiabilidade não uniformes.

Santos, Stucchi e Beck (2014) investigaram a confiabilidade de elementos estruturais, submetidos à flexão simples, de concreto armado, aço e material misto, dimensionados conforme as normas técnicas brasileiras. Na avaliação das vigas de concreto armado dimensionadas conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014), o índice de confiabilidade foi obtido pelo método FORM (*First Order Reliability Method*) para diferentes razões entre as cargas variáveis e permanentes e taxas de armadura. Para as vigas, foi verificado que o índice de confiabilidade diminui à medida que a razão entre os carregamentos aumenta. Considerando a avaliação de todos os elementos, os autores observaram uma grande variação do índice de confiabilidade para as diversas situações simuladas, evidenciando a necessidade de uma calibração baseada em confiabilidade dos coeficientes parciais de segurança.

Nogueira e Pinto (2016) avaliaram a uniformidade do índice de confiabilidade de vigas de concreto armado projetadas conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014). O índice de confiabilidade foi determinado pelo método FORM para o estado-limite relacionado ao momento fletor, considerando como variáveis aleatórias a resistência do concreto e do aço, e os momentos fletores devido a carga permanente e variável. O índice de confiabilidade foi obtido para diferentes posições de linha neutra e relação entre as cargas. Foi constatado uma falta de uniformidade do índice de confiabilidade das vigas quando são dimensionadas com os mesmos coeficientes de segurança para diferentes situações de projeto. Os autores apresentaram um procedimento de calibração dos coeficientes de segurança, possibilitando a obtenção de índices mais uniformes.

Scherer (2018) avaliou a confiabilidade de vigas de concreto armado dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), em relação ao estado-limite último de flexão. A resistência das vigas foi obtida pelo método dos elementos finitos, utilizando os métodos de simulação de Monte Carlo e de Superfície de Resposta para definir as características estatísticas devido as variáveis aleatórias. O índice de confiabilidade foi obtido pelo método FORM para diferentes configurações de vigas. Dentre as conclusões obtidas, o autor verificou uma grande influência da razão entre os carregamentos no índice de confiabilidade, o que sugere uma falta de uniformidade dos índices obtidos com os coeficientes de ponderação da carga acidental da NBR 6118 (ABNT, 2014).

Além da investigação do índice de confiabilidade de vigas de concreto armado projetadas de acordo com as normas técnicas, outras aplicações da confiabilidade estrutural de vigas foram exploradas por diversos pesquisadores. Paliga (2008) apresentou um modelo de análise de confiabilidade de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, utilizando simulação de Monte Carlo. Com a metodologia proposta, o autor verificou que é possível atingir bons níveis de segurança para as vigas recuperadas. Já Kioumarsi *et al.* (2016) realizaram um estudo de caso da influência da corrosão por pite na probabilidade de falha de uma viga de concreto armado. A probabilidade de falha foi determinada utilizando simulação de Monte Carlo, considerando as incertezas das resistências do concreto e do aço, da geometria da viga, das cargas e dos danos por corrosão. Os resultados indicaram que a consideração dos danos por corrosão aumenta consideravelmente a probabilidade de falha da viga.

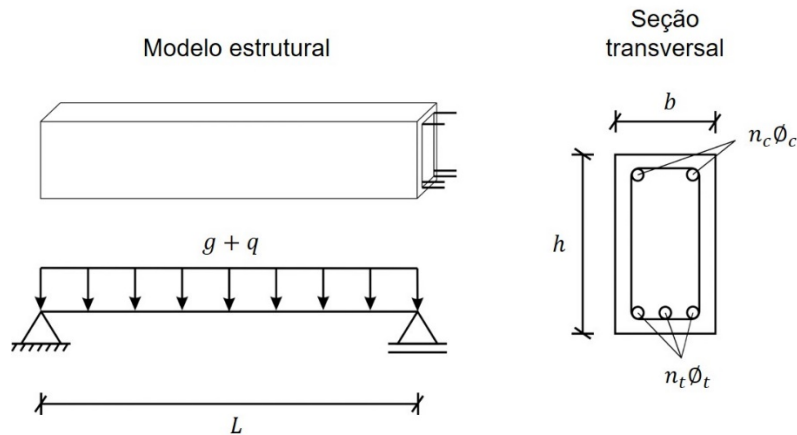
3 OTIMIZAÇÃO DAS VIGAS DE CONCRETO ARMADO

3.1 Caracterização das vigas de concreto armado

Neste trabalho foi realizada a otimização de vigas de concreto armado e a avaliação da confiabilidade, conforme apresentado no item 1.2.

A viga de concreto armado considerada está esquematizada na Figura 10. Trata-se de uma viga típica biapoiada, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído formado pela carga permanente g e variável q , e com vão L . A seção transversal da viga é retangular de largura b e altura h , com n_t barras tracionadas de diâmetro ϕ_t e n_c barras comprimidas de diâmetro ϕ_c . O aço das armaduras é CA-50; a Classe de Agressividade Ambiental (CAA) é igual a II, com cobrimento de 30 mm; e os diâmetros do vibrador e do agregado graúdo são iguais a 25 mm e 19 mm, respectivamente.

Figura 10 – Viga de concreto armado considerada.



Fonte: O Autor (2020).

Para obter resultados em diferentes situações de projeto, foram variados os valores do vão (L), do carregamento total ($g + q$), da relação entre o carregamento variável e o total ($r = \frac{q}{g+q}$), e da resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}). O vão foi variado de 3 a 7 m, em incrementos de 0,5 m. O carregamento total foi variado de 10 a 40 kN/m, em incrementos de 5 kN/m. A relação r foi variada de 0,2 a 0,8, em incrementos de 0,2. O f_{ck} foi variado de 25 a 35 MPa, em incrementos de 5 MPa. Assim, combinando os valores de L , ($g + q$), r , e f_{ck} , a viga de concreto armado foi otimizada para 756 situações de projeto. A seguinte terminologia será utilizada para identificar as vigas: V - L - ($g + q$) - r - f_{ck} .

3.2 Formulação do problema de otimização

Na otimização da viga de concreto armado da Figura 10 foram consideradas como variáveis de projeto a largura (b), a altura (h), a quantidade (n_t) e o diâmetro das barras tracionadas ($\emptyset_t$), e a quantidade (n_c) e o diâmetro das barras comprimidas ($\emptyset_c$) da seção transversal.

A função objetivo é a minimização dos custos da viga (Equação 55), considerando os custos do concreto (C_C), aço (C_A) e fôrmas (C_F):

$$C = C_C + C_A + C_F \quad (55)$$

No custo do concreto (Equação 56), c_c é o custo unitário do concreto em R\$/m³. No custo do aço (Equação 57), são considerados os custos das armaduras tracionadas, comprimidas, estribos e armadura de pele, onde $c_{\emptyset_t}$, $c_{\emptyset_c}$, $c_{\emptyset_e}$ e $c_{\emptyset_p}$ são os custos unitários das barras tracionadas, das barras comprimidas, dos estribos e das barras de pele, respectivamente, em R\$/kg. Na Equação 57, ρ , c e n_e são a massa específica do aço (7850 kg/m³), o cobrimento e a quantidade de estribos na viga, respectivamente. No custo das fôrmas (Equação 58), c_f é o custo unitário da fôrma em R\$/m².

$$C_C = bhLc_c \quad (56)$$

$$C_A = \left(\frac{\pi \emptyset_t^2}{4} L \rho c_{\emptyset_t} \right) + \left(\frac{\pi \emptyset_c^2}{4} L \rho c_{\emptyset_c} \right) + \left\{ \frac{\pi \emptyset_e^2}{4} [2(h + b) - 8c] n_e \rho c_{\emptyset_e} \right\} + \left(\frac{\pi \emptyset_p^2}{4} L \rho c_{\emptyset_p} \right) \quad (57)$$

$$C_F = (b + 2h)Lc_f \quad (58)$$

Os custos unitários do concreto, aço e fôrmas foram extraídos do Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil (SINAPI), referentes a setembro de 2019 e ao estado de Pernambuco. Na Tabela 1 estão listados os custos do concreto para os tipos C25 a C35, os custos das barras de aço para diâmetros comerciais de 5 mm a 25 mm e o custo das fôrmas. Esses custos unitários consideram, além do material, custos associados a mão de obra em sua composição.

Tabela 1 – Custos unitários do concreto, aço e fôrmas.

Concreto (c/ bombeamento)		
Fonte	Tipo	Custo (R\$/m³)
94965 - SINAPI PE 09/2019	C25	327,94
94966 - SINAPI PE 09/2019	C30	336,69
(interpolação entre C30 e C40)	C35	353,99
Aço CA-50		
Fonte	Diâmetro (mm)	Custo (R\$/kg)
-	5	8,20
92760 - SINAPI PE 09/2019	6,3	8,20
92761 - SINAPI PE 09/2019	8	8,16
92762 - SINAPI PE 09/2019	10	6,67
92763 - SINAPI PE 09/2019	12,5	6,01
92764 - SINAPI PE 09/2019	16	5,68
92765 - SINAPI PE 09/2019	20	5,25
92766 - SINAPI PE 09/2019	25	5,82
Fôrmas (considerando a reutilização)		
Fonte		Custo (R\$/m²)
92448 - SINAPI PE 09/2019		78,07

Fonte: SINAPI (2019).

As restrições do problema de otimização da viga são critérios relativos aos estados-limites último e de serviço, detalhamento e também limitações para as variáveis de projeto, de acordo com as especificações da NBR 6118 (ABNT, 2014). Essa restrições são apresentadas a seguir:

- A largura da seção transversal (b) deve ser maior ou igual a 12 cm, conforme o item 13.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), e menor ou igual a 25 cm (Equação 59). Para a altura (h), foi adotado um intervalo de valores entre 25 cm e 100 cm (Equação 60). Para n_t e n_c , um intervalo entre 2 e 20 barras (Equação 61). E para os diâmetros ϕ_t e ϕ_c das barras, valores comerciais de 5, 6,3, 8, 10, 12,5 16, 20 ou 25 mm (Equação 62). Para as variáveis b , h , n_t e n_c , foram considerados apenas números inteiros.

$$12 \text{ cm} \leq b \leq 25 \text{ cm} \quad (59)$$

$$25 \text{ cm} \leq h \leq 100 \text{ cm} \quad (60)$$

$$2 \leq n_t, n_c \leq 20 \quad (61)$$

$$\phi_t, \phi_c = \{5, 6.3, 8, 10, 12.5, 16, 20, 25\} \text{ mm} \quad (62)$$

- De acordo com o item 14.4.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), para que a viga seja considerada um elemento linear, o seu comprimento longitudinal deve ser maior ou igual a três vezes a maior dimensão da seção transversal. Assim, tem-se que $3h$ deve ser menor ou igual a L :

$$3h \leq L \quad (63)$$

- A segurança ao ELU relacionado a flexão, conforme o item 16.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), deve ser garantida de modo que o esforço normal solicitante seja menor ou igual ao esforço resistente na seção da viga. Assim, o momento fletor de cálculo (M_{sd}) deve ser menor ou igual ao momento resistente de cálculo (M_{Rd}) na seção (Equação 64). M_{Rd} pode ser calculado através do procedimento apresentado no item 2.2 deste trabalho.

$$M_{sd} \leq M_{Rd} \quad (64)$$

- De acordo com o item 17.2.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014), é necessário garantir boas condições de ductilidade nas vigas, respeitando os limites da posição da linha neutra apresentados no item 14.6.4.3. A relação da linha neutra por altura útil da seção (x/d), para concretos com f_{ck} menor ou igual a 50 MPa, deve respeitar o limite:

$$\frac{x}{d} \leq 0,45 \quad (65)$$

- Na segurança ao estado-limite último relacionado ao esforço cortante, conforme o item 14.2.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), a compressão diagonal do concreto deve ser verificada através da Equação 66, onde V_{sd} é a força cortante solicitante de cálculo e V_{Rd2} é a força cortante resistente de cálculo na seção, relacionada à ruína das diagonais comprimidas de concreto:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (66)$$

- Além das verificações de estado-limite último, devem ser verificados os estados-limites de serviço na viga. Na verificação do estado-limite de deformação, a flecha total (a_t) deve ser menor ou igual a flecha limite (a_{tlim}), de acordo com a Equação 67, onde foi considerado o deslocamento limite para o efeito de aceitabilidade sensorial. Na verificação do estado-limite de fissuração, a abertura de fissuras (w) deve ser menor ou igual ao valor limite (w_{lim}), de acordo com a Equação 68. Como a CAA considerada na otimização é igual a II, w_{lim} é igual a 0,3 mm. Para a definição dos coeficientes de ponderação das ações nestas verificações, foi considerado que a viga faz parte de um edificação residencial.

$$a_t \leq a_{tlim} = \frac{L}{250} \quad (67)$$

$$w \leq w_{lim} = 0,3 \text{ mm} \quad (68)$$

- As áreas de aço tracionado (A_s) e comprimido (A'_s) devem atender aos valores máximo e mínimo da norma. A_s deve ser maior ou igual a área de aço mínima de tração (A_{smin}), definida no item 17.3.5.2.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), conforme a Equação 69. A soma de A_s e A'_s , de acordo com o item 17.3.5.2.4, não deve ter valor maior que 4% da área de concreto A_c da seção (Equação 70).

$$A_s \geq A_{smin} \quad (69)$$

$$(A_s + A'_s) \leq 0,04A_c \quad (70)$$

- No detalhamento das barras na seção transversal da viga, a distância do centro de gravidade das barras ao centro da barra mais afastada (a), medida normalmente à linha neutra, deve ser menor que 10% da altura, conforme o item 17.2.4.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014):

$$a \leq 0,1h \quad (71)$$

- O espaçamento entre os estribos (s), de acordo com o item 18.3.3.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador. Foi adotado como espaçamento mínimo entre os estribos (s_{min}) o diâmetro do vibrador (25 mm) somado a 1 cm de folga:

$$s \geq s_{min} \quad (72)$$

- Em relação a quantidade e o diâmetro das barras, foi adotado que a quantidade de barras tracionadas deve ser maior ou igual a quantidade de barras comprimidas (Equação 73), e que o diâmetro das barras tracionadas deve ser maior ou igual que o diâmetro das barras comprimidas (Equação 74):

$$n_t \geq n_c \quad (73)$$

$$\phi_t \geq \phi_c \quad (74)$$

Assim, o problema de otimização é encontrar os valores de b , h , n_t , ϕ_t , n_c , e ϕ_c da seção transversal (Figura 10) para minimizar os custos da viga (Equação 55), atendendo as restrições impostas (Equações 59 a 74). Seguindo a formulação das Equações 21 a 23, o problema de otimização é escrito como:

Encontrar o vetor $\mathbf{x} = \{b, h, n_t, \phi_t, n_c, \phi_c\}^T$, para minimizar o custo:

$$C(\mathbf{x}) = C_C + C_A + C_F \quad (75)$$

Sujeito as restrições:

$$12 \text{ cm} \leq b \leq 25 \text{ cm} \quad (76)$$

$$25 \text{ cm} \leq h \leq 100 \text{ cm} \quad (77)$$

$$2 \leq n_t, n_c \leq 20 \quad (78)$$

$$\phi_t, \phi_c = \{5, 6.3, 8, 10, 12.5, 16, 20, 25\} \text{ mm} \quad (79)$$

$$3h \leq L \quad (80)$$

$$M_{sd} \leq M_{Rd} \quad (81)$$

$$\frac{x}{d} \leq 0,45 \quad (82)$$

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (83)$$

$$a_t \leq a_{tlim} = \frac{L}{250} \quad (84)$$

$$w \leq w_{lim} = 0,3 \text{ mm} \quad (85)$$

$$A_s \geq A_{smin} \quad (86)$$

$$(A_s + A'_s) \leq 0,04A_c \quad (87)$$

$$a \leq 0,1h \quad (88)$$

$$s \geq s_{min} \quad (89)$$

$$n_t \geq n_c \quad (90)$$

$$\emptyset_t \geq \emptyset_c \quad (91)$$

No item 2.5 deste trabalho foram apresentadas algumas pesquisas sobre otimização de vigas de concreto armado, com diferentes formulações de otimização. Verifica-se que, geralmente, a função objetivo é a minimização dos custos, e que as formulações se diferenciam na escolha das variáveis de projeto e na adoção das restrições. Rahmanian, Lucet e Tesfamariam (2014) realizaram um levantamento de estudos de otimização de vigas de concreto armado, constatando a consideração de diferentes variáveis de projeto nas formulações, onde é perceptível a predominância da altura, área de aço tracionado e largura. Bezerra (2017) verificou que as variáveis altura e área de aço tracionado tem grande influência na otimização.

Na formulação de um problema de otimização, as variáveis de projeto devem ser independentes uma das outras, na medida do possível. O número de variáveis de projeto independentes fornece o grau de liberdade do problema (ARORA, 2012). Dessa forma, quanto maior o número de variáveis de projeto independentes, maior serão as vantagens do projeto ótimo se comparado ao convencional (Fluxograma 1).

Assim, seguindo a tendência de outras pesquisas, neste trabalho foram consideradas como variáveis de projeto as dimensões da seção transversal, o número e o diâmetro das barras, por serem variáveis independentes.

3.3 Implementação do problema de otimização no MATLAB

O problema de otimização de vigas de concreto armado (Equações 75 a 91) foi implementado no MATLAB (versão R2016a). O MATLAB possui diversos algoritmos de otimização no *Optimization Toolbox* e *Global Optimization Toolbox*. A escolha do algoritmo depende do tipo de problema de otimização.

Na otimização da viga, foram consideradas variáveis de número inteiro (b , h , n_t , e n_c) e discretas ($\emptyset_t$ e $\emptyset_c$). A função objetivo (Equação 55) envolve o cálculo da quantidade dos estribos, que por sua vez é um parâmetro que depende implicitamente de $\mathbf{x}$. As restrições das Equações 64 a 69, 71 e 72 também são funções que dependem implicitamente de $\mathbf{x}$. Na verdade, a forma exata da função objetivo e de algumas restrições é desconhecida. Assim, tem-se um problema de otimização restrita que envolve variáveis discretas e funções não diferenciáveis. Neste caso, é possível utilizar os Algoritmos Genéticos (AG) para resolver o problema de otimização (Equação 75 a 91), por ser um método adequado para essas situações

(SIVANANDAM; DEEPA, 2008). Os AG, de fato, são comumente utilizados em otimização de vigas de concreto armado, como verificado em Govindaraj e Ramasamy (2005), Alexandre (2014), Oliveira (2014) e Bezerra (2017).

O *ga* é o *solver* da *Global Optimization Toolbox* do MATLAB que utiliza os AG. Neste trabalho, a função *ga* foi utilizada para resolver o problema de otimização. Um esquema da implementação da otimização no MATLAB é apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Esquematização do *script* da otimização.



Fonte: O Autor (2020).

Na seção **%PARÂMETROS** do *script*, todos os parâmetros do problema de otimização são definidos. Os parâmetros L , $(g + q)$, r e f_{ck} , que são variáveis neste estudo, são lidos de um arquivo de texto. Em todos os casos de otimização, foram considerados 5 mm e 6,3 mm como diâmetro dos estribos (ϕ_e) e da armadura de pele (ϕ_p), respectivamente.

Após a definição dos parâmetros, na seção **%VARIÁVEIS DE PROJETO** são identificadas as variáveis de projeto no vetor **x** e o número de variáveis (**nx**).

Na seção **%FUNÇÃO OBJETIVO** é identificada a função objetivo da otimização (*custo(x,dados)*). No cálculo do custo da viga, na função *custo(x,dados)*, inicialmente é feito o detalhamento das barras na seção para determinar a altura útil. Esse procedimento é realizado em uma outra função (*detalhamento(x)*). Com a altura útil

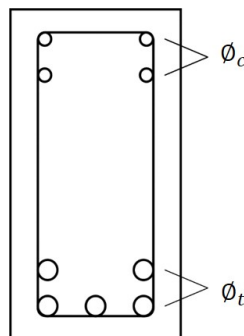
calculada, os estribos são determinados por meio da função `estribos(x, dados, d)`. Com a quantidade de estribos determinada, o custo da viga (Equação 55) é calculado.

Na seção **%RESTRIÇÕES**, todas as restrições do problema de otimização são identificadas. Em `xint`, são identificadas as variáveis de projeto que devem ser números inteiros. Neste caso, as variáveis discretas (ϕ_t e ϕ_c) podem ser consideradas como variáveis com restrição de número inteiro, e seus valores reais (Equação 62) são mapeados nos cálculos que as envolvem (MATHWORKS, 2020). Em `xi` e `xs` são identificados os limites laterais de $\mathbf{x}$ (Equações 59 a 61). Em `Ad` e `bd` são construídas a matriz A_d e o vetor b_d , que formam a equação $A_d \mathbf{x} \leq b_d$ das restrições lineares (Equações 63, 73 e 74). As restrições não-lineares (Equações 64 a 72) são determinadas na função `restrições(x, dados)`. No cálculo das restrições não-lineares, também é necessário detalhar as barras na seção e determinar os estribos, através das funções `detalhamento(x)` e `estribos(x, dados, d)`.

Na seção **%OTIMIZAÇÃO**, a função `ga` é adicionada para resolver o problema de otimização. Em `ga`, todas as informações definidas anteriormente, relacionadas as variáveis de projeto, função objetivo e restrições, são inseridas (MATHWORKS, 2020). Com a otimização realizada, a seção e o custo otimizados são exibidos em **%RESULTADOS**.

Na função `detalhamento(x)`, o tipo de detalhamento considerado na seção transversal da viga é apresentado na Figura 12. Com os valores de $\mathbf{x}$, as barras são dispostas em camadas na seção, respeitando os valores mínimos de espaçamento horizontal e vertical da NBR 6118 (ABNT, 2014), conforme o exposto no item 2.1.4 deste trabalho. No espaçamento horizontal das barras comprimidas (ϕ_c) também foi considerada a passagem do vibrador (acrescentando 1 cm de folga ao diâmetro do vibrador). Ressalta-se que a otimização é realizada para a seção transversal mais solicitada da viga, e que as barras dessa seção são prolongadas ao longo do comprimento L , por simplificação.

Figura 12 – Tipo de detalhamento considerado na otimização.



Fonte: O Autor (2020).

Na função `estribos(x, dados, d)`, os estribos são determinados de acordo com o Modelo de cálculo I da NBR 6118 (ABNT, 2014). Assim como na disposição das armaduras longitudinais, por simplificação, os estribos são calculados para a seção mais solicitada e dispostos uniformemente ao longo do comprimento L .

3.4 Calibração dos AG para a otimização

O desempenho dos AG depende principalmente dos seus parâmetros, tais como tamanho da população e taxas de cruzamento e mutação (MITCHELL, 1996). Os valores desses parâmetros devem ser determinados com cuidado, pois, caso contrário, a solução ótima encontrada pode ser um mínimo local. Assim, após a implementação do problema de otimização no MATLAB, foi realizada a calibração de alguns parâmetros da função `ga`.

A função `ga` possui diversos parâmetros que podem ser alterados, dependendo do tipo de problema de otimização. Uma lista completa de todas as opções pode ser consultada em MathWorks (2020). Neste trabalho, foram calibrados os parâmetros relacionados a população (`PopulationSize`), reprodução (`CrossoverFraction` e `EliteCount`) e resolução das restrições não-lineares (`NonlinearConstraintAlgorithm`, abreviado por `NCAgorithm`).

`PopulationSize` especifica o tamanho da população em cada geração. `CrossoverFraction` especifica a fração de indivíduos da próxima geração, que é produzida pelos operadores de cruzamento. `EliteCount` especifica a fração de indivíduos que sobreviverão para a próxima geração. `NCAgorithm` especifica o algoritmo para a resolução das restrições não-lineares. O `ga` dispõe de dois métodos para tratar restrições não-lineares: o *Augmented Lagrangian Genetic Algorithm* (ALGA) e o *Penalty Algorithm*. No ALGA, os limites das variáveis e as restrições lineares são tratados separadamente das restrições não-lineares. Uma sequência de subproblemas de otimização, formulados com a função de aptidão e restrições não-lineares, é aproximadamente resolvida, de modo a atender os limites e as restrições lineares. No *Penalty Algorithm*, é utilizada uma função de penalidade para avaliar os indivíduos (MATHWORKS, 2020).

Existem algumas estratégias de calibração para algoritmos evolucionários, que podem ser classificadas em estratégias de ajuste e controle de parâmetros, como apresentado em Montero e Riff (2011). Neste trabalho, foi utilizada uma estratégia de ajuste baseada em projeto de experimentos fatoriais completo (*full factorial design of experiment*). Essa estratégia foi

escolhida por sua simplicidade e por ter sido aplicada na calibração de parâmetros dos AG (MATAMOROS; KUMRAL, 2019) e de outros algoritmos evolucionários (MOBIN *et al.*, 2018).

No projeto de experimentos fatoriais completo para a calibração dos parâmetros de ga , os fatores (parâmetros do ga) e níveis (valores analisados) considerados se encontram na Tabela 2. Em todos os experimentos foi considerada uma viga V-7-35-0,2-25. Para cada experimento, a viga considerada foi otimizada 10 vezes e foi calculado o coeficiente de variação (COV) da função objetivo otimizada na simulação. Assim, a variável de resposta é o COV do custo otimizado. Essa variável de resposta foi considerada pois indica a eficiência da função ga : se o COV é baixo, então o algoritmo apresenta pouca variação no mínimo valor da função objetivo, quando executado várias vezes para o mesmo caso, o que possivelmente indica a convergência para o mínimo global.

Tabela 2 – Parâmetros do ga na calibração.

Parâmetro do ga	<i>default</i>	Valores analisados
PopulationSize	200	{200; 400; 600; 800; 1000}
CrossoverFraction	0,8	{0,7; 0,8; 0,9}
EliteCount	0,05	{0,025; 0,05; 0,075}
NCAAlgorithm	auglag	{auglag; penalty}

Fonte: O Autor (2020).

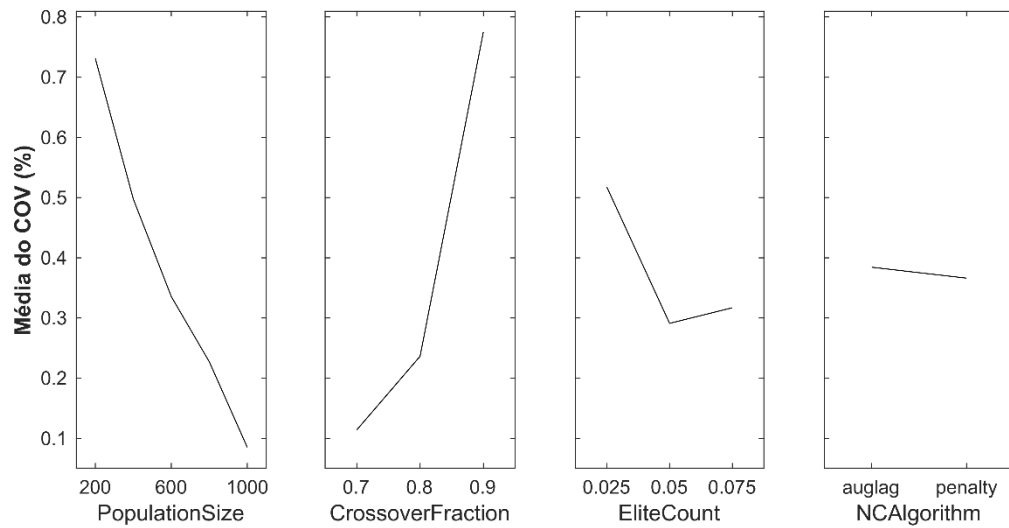
Após a realização de todos os experimentos, foram construídos gráficos de efeitos principais e interação para o COV.

No Gráfico 3 é apresentado o gráfico de efeitos principais para o COV. No gráfico de efeitos principais, para cada fator, são apresentadas as médias da variável de resposta em cada nível. Assim, é possível examinar as diferenças entre as médias da variável de resposta em cada fator. Para PopulationSize, é verificado que o COV muda com a variação da população, ou seja, existe um efeito principal. Da mesma forma, para CrossoverFraction, é observado que o COV muda com a variação na fração de indivíduos de cruzamento. Para EliteCount, também é verificada uma mudança no COV. Já no NCAAlgorithm, não existe uma mudança expressiva do COV com a mudança do algoritmo utilizado.

No Gráfico 4 é apresentado o gráfico de interação para o COV. No gráfico de interação é possível visualizar a interação entre os fatores, através das médias da variável de resposta em cada nível. Quanto mais paralelas forem as linhas do gráfico, menor será a interação entre os fatores. Ao analisar o Gráfico 4, é perceptível que existe uma interação entre

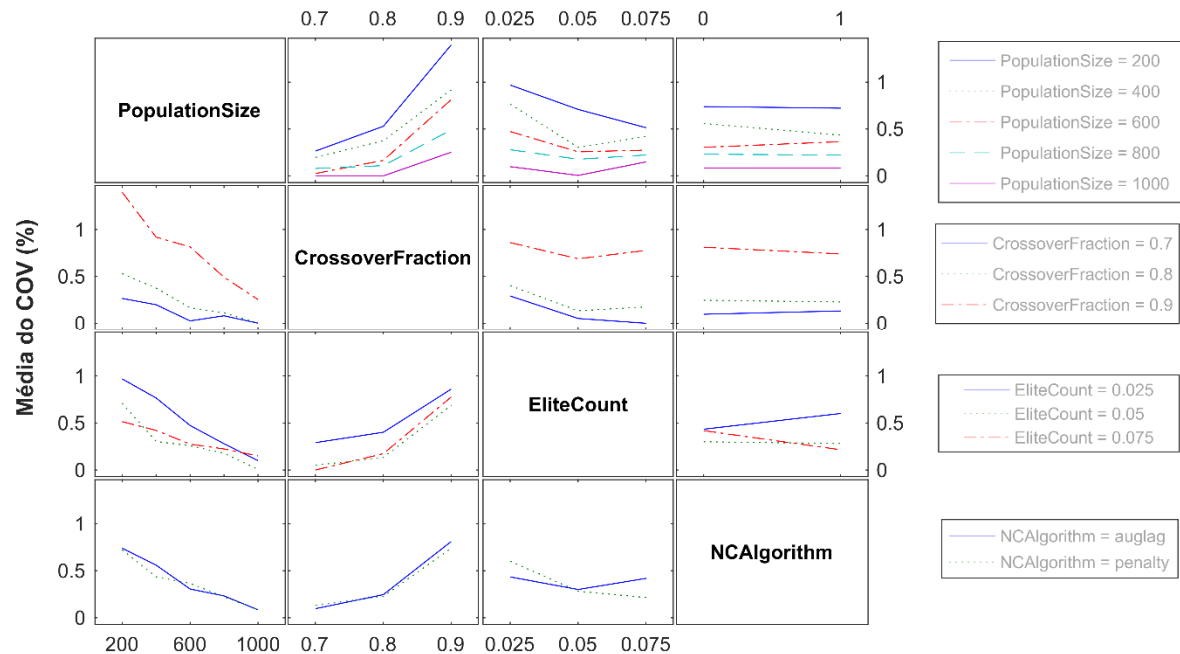
PopulationSize, CrossoverFraction e EliteCount. Para NCAAlgorithm, existe pouca interação com os demais parâmetros.

Gráfico 3 – Gráfico de efeitos principais para o COV.



Fonte: O Autor (2020).

Gráfico 4 – Gráfico de interação para o COV.



Fonte: O Autor (2020).

Através da análise dos Gráficos 3 e 4, conclui-se que, de modo geral, os menores valores de COV são alcançados com PopulationSize igual a 1000, CrossoverFraction igual a 0,7, e EliteCount igual a 0,05 (valor *default*). O NCAAlgorithm não apresenta

efeito principal e interações significativos, se comparado aos demais parâmetros. Assim, foi decidido manter a opção *default* ALGA. Na Tabela 3 se encontram os valores *default* e calibrados para os parâmetros do *ga*.

Tabela 3 – Parâmetros do *ga* calibrados.

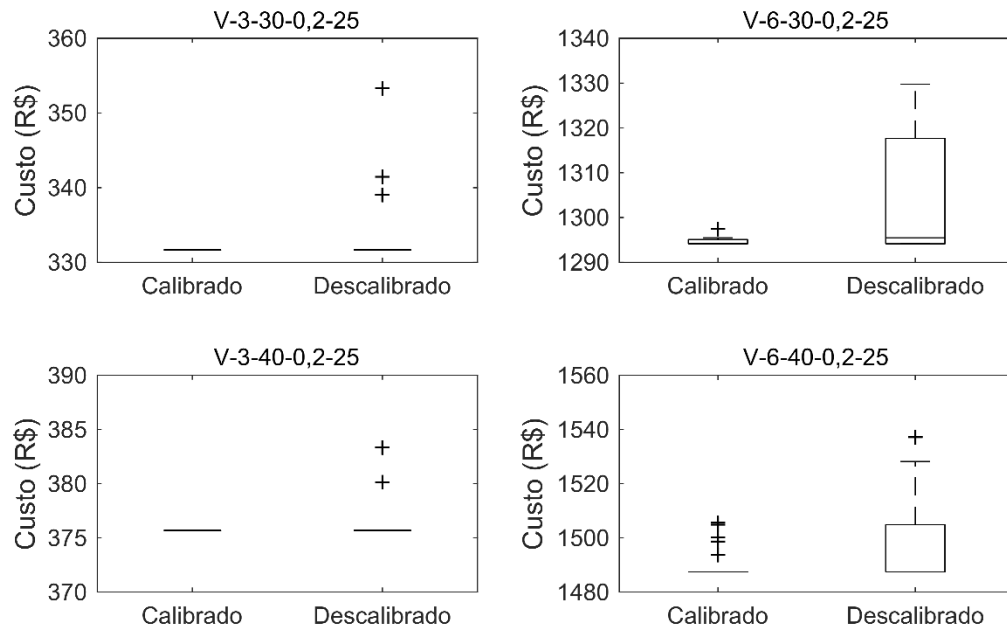
Parâmetro do <i>ga</i>	<i>default</i>	Calibração
PopulationSize	200	1000
CrossoverFraction	0,8	0,7
EliteCount	0,05	0,05
NCAAlgorithm	auglag	auglag

Fonte: O Autor (2020).

A opção *default* para PopulationSize é 200, e com a calibração, seu valor foi de 1000. A princípio, essa discrepância no tamanho da população implica em dois questionamentos: se tal número é realmente necessário, e se o tempo de processamento aumentará consideravelmente com o valor de 1000. Durante o processo de calibração, foi verificado que o tempo de processamento aumentou, ficando em torno de 30 segundos, o que não representa dificuldades para este trabalho. Em relação ao tamanho da população, em outros estudos de otimização de vigas de concreto armado com AG, diferentes valores foram utilizados, o que evidencia a ausência de uma padronização. Lima (2011) utilizou uma população com 1000 indivíduos, Oliveira (2014) com 750 e Bezerra (2017) com 50. Além disso, Gibbs, Maier e Dandy (2015) demonstram que o tamanho adequado da população nos AG depende das características da função objetivo. Então, o tamanho da população precisa ser analisado para cada formulação de otimização da viga.

Para verificar se os parâmetros calibrados são eficientes na otimização das vigas, foram otimizadas as vigas V-3-30-0,2-25; V-6-30-0,2-25; V-3-40-0,2-25 e V-6-40-0,2-25 com os parâmetros calibrados na função *ga*. Para cada viga, a função *ga* foi executada 50 vezes. Os resultados do custo otimizado nas simulações se encontram no Gráfico 5 em gráficos *boxplot*. Como observado no Gráfico 5, com os parâmetros calibrados em *ga*, o custo otimizado apresentou uma menor variação nas simulações, quando comparado a variação com os parâmetros descalibrados (valores *default*). Portanto, a ausência de variação no custo otimizado da viga indica que o algoritmo encontra o mesmo valor na maior parte das simulações, sendo provavelmente o mínimo global.

Gráfico 5 – Testes de verificação para a calibração.



Fonte: O Autor (2020).

3.5 Validação da implementação do problema de otimização

Após a calibração dos parâmetros da função ga , foi realizada a validação da implementação da otimização das vigas de concreto armado (Figura 11). Para tanto, foram otimizadas vigas de outras pesquisas no programa desenvolvido, e comparados os resultados a fim de verificar a eficiência da implementação.

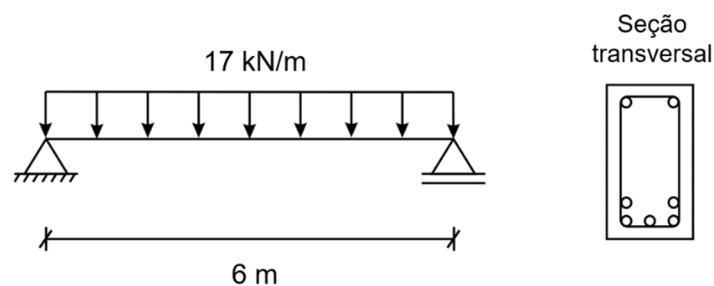
Como observado nos itens 2.5 e 3.2 deste trabalho, nos diversos estudos sobre otimização de vigas de concreto armado, diferentes formulações e considerações sobre a otimização das vigas foram propostas. Dessa forma, dificilmente são encontradas pesquisas com formulações e considerações idênticas. Portanto, no processo de validação, não se pode esperar que os resultados de duas implementações distintas sejam iguais, mas que apresentem uma proximidade ou coerência.

3.5.1 Viga de Oliveira (2014)

Oliveira (2014) otimizou uma viga biapoiada de concreto armado, com vão de 6 m e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído de 17 kN/m (Figura 13). O f_{ck} , o cobrimento e o diâmetro dos estribos considerados na viga, foram de 20 MPa, 2,5 cm e 5 mm, respectivamente.

Na otimização de Oliveira (2014) foram consideradas como variáveis de projeto a largura, altura, taxas de armaduras, posição relativa da linha neutra e variável de ativação de armadura dupla, relativas a seção transversal. A função objetivo é o custo da viga, considerando os custos do concreto, do aço e das fôrmas, com os custos unitários da Tabela 4. As restrições do problema são relativas a resistência e ao equilíbrio, ao estado-limite de deformação excessiva, ao detalhamento e a limites laterais, seguindo diretrizes da NBR 6118 (ABNT, 2007). Ao final da otimização, Oliveira (2014) propôs um detalhamento para a viga.

Figura 13 – Viga otimizada por Oliveira (2014).



Fonte: O Autor (2020).

Tabela 4 – Custos unitários de Oliveira (2014).

Custos unitários	Valor
Custo do concreto (R\$/m ³)	415,81
Custo do aço (R\$/kg)	3,72
Custo das fôrmas (R\$/m ²)	82,08

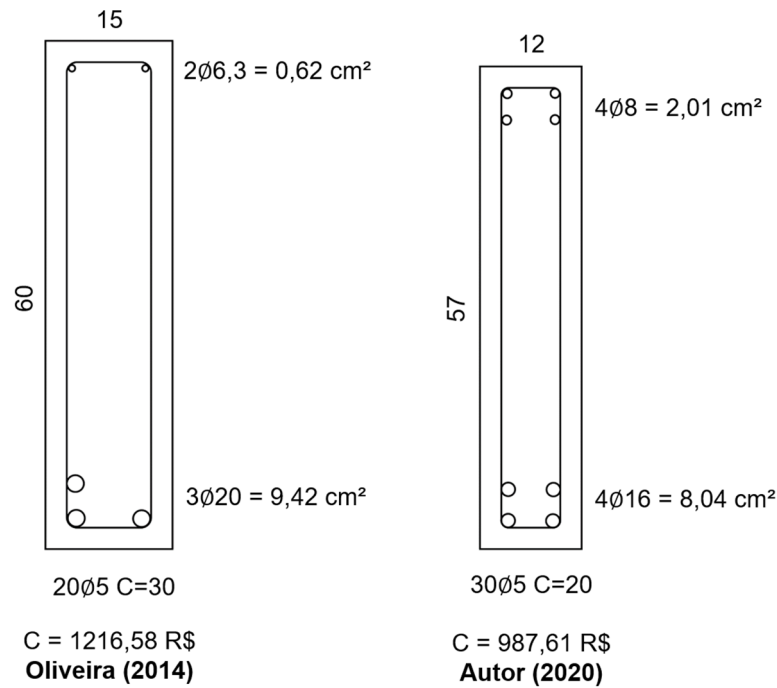
Fonte: Oliveira (2014).

Para otimizar a viga de Oliveira (2014), os parâmetros da viga foram inseridos na implementação deste trabalho (Figura 11). Ressalta-se que a formulação da implementação (Equações 75 a 91) não foi alterada, apenas os parâmetros do problema foram mudados. Os resultados se encontram na Figura 14.

Como observado na Figura 14, existe uma proximidade entre a viga otimizada de Oliveira (2014) e deste trabalho. A seção obtida neste trabalho foi de 12x57 cm, enquanto que Oliveira (2014) obteve uma seção com dimensões maiores de 15x60 cm. As áreas de aço tracionado e comprimido obtidas neste trabalho foram de 8,04 cm² e 2,01 cm², e para Oliveira (2014), foram de 9,42 cm² e 0,62 cm². Em relação aos estribos, ocorreu uma diferença devido aos espaçamentos longitudinais máximos definidos na NBR 6118 (ABNT, 2014). O custo da viga otimizada de Oliveira (2014) resultou maior, devido às diferenças nas formulações, tais como a consideração dos comprimentos de ancoragem.

Assim, devido à proximidade da solução otimizada para a viga, em Oliveira (2014) e neste trabalho, pode-se afirmar que o programa implementado (Figura 11) funciona corretamente. As diferenças nos resultados são decorrentes das diferenças na formulação do problema de otimização.

Figura 14 – Viga otimizada de Oliveira (2014) *versus* Autor (2020).



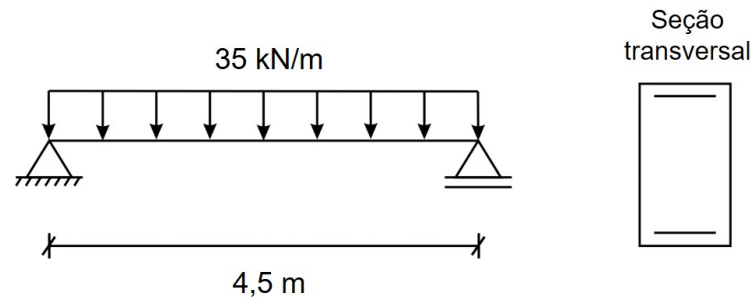
Fonte: O Autor (2020).

3.5.2 Viga de Bezerra (2017)

Bezerra (2017) otimizou uma viga biapoiada de concreto armado, com vão de 4,5 m e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído de 35 kN/m (Figura 15). O f_{ck} , o cobrimento e o diâmetro dos estribos considerados na viga foram de 40 MPa, 3 cm e 5 mm, respectivamente. Foi considerado também aço CA-50 e diâmetro do vibrador igual a 30 mm.

Na otimização de Bezerra (2017) foram consideradas como variáveis de projeto a altura útil, áreas de aço tracionado e comprimido e número de estribos. A função objetivo é o custo da viga, considerando os custos do concreto, do aço e das fôrmas, com os custos unitários da Tabela 5. As restrições do problema são relativas aos critérios da NBR 6118 (ABNT, 2014): resistência e ao equilíbrio, estado-limite de deformação excessiva, detalhamento e limites laterais. Na otimização foram consideradas apenas as áreas de aço, sem diâmetros comerciais para as armaduras.

Figura 15 – Viga otimizada por Bezerra (2017).



Fonte: O Autor (2020).

Tabela 5 – Custos unitários de Bezerra (2017).

Custos unitários	Valor
Custo do concreto (R\$/m³)	343,35
Custo do aço (R\$/kg)	13,64
Custo das fôrmas (R\$/m²)	150,79

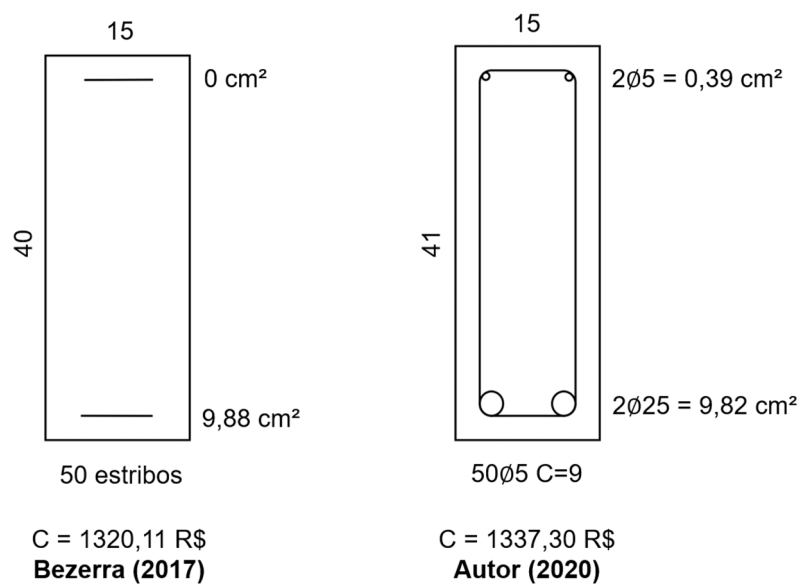
Fonte: Bezerra (2017).

Para otimizar a viga de Bezerra (2017), os parâmetros da viga foram inseridos na implementação deste trabalho (Figura 11). Novamente, ressalta-se que a formulação da implementação (Equações 75 a 91) não foi alterada. A única alteração realizada foi a consideração de contraflecha, adotada em Bezerra (2017). Os resultados se encontram na Figura 16.

Como observado na Figura 16, existe uma grande semelhança entre a viga otimizada de Bezerra (2017) e deste trabalho. As seções obtidas são praticamente as mesmas, sendo a deste trabalho com uma altura maior de 41 cm. A área de aço tracionada também foi praticamente a mesma. Já a área de aço comprimido foi nula em Bezerra (2017). O custo da viga otimizada neste trabalho resultou maior que o de Bezerra (2017), devido ao tamanho da seção e a presença de armadura comprimida.

Portanto, devido à proximidade da solução otimizada para a viga, em Bezerra (2017) e neste trabalho, pode-se dizer que o programa implementado (Figura 11) é válido. As diferenças nos resultados, assim como no caso anterior, são decorrentes das diferenças na formulação do problema de otimização.

Figura 16 – Viga otimizada por Bezerra (2017) *versus* Autor (2020).



Fonte: O Autor (2020).

4 CONFIABILIDADE DAS VIGAS OTIMIZADAS

A seguir são apresentadas a formulação e implementação do problema de confiabilidade das vigas de concreto armado otimizadas.

4.1 Formulação do problema de confiabilidade

Na avaliação da confiabilidade das vigas de concreto armado otimizadas, foram consideradas as seguintes variáveis como aleatórias:

$$X = \{\theta_R, \theta_S, g, q, f_c, f_y\}^T \quad (92)$$

onde θ_R é o erro de modelo da resistência; θ_S é o erro de modelo da solicitação; g é a carga permanente; q é a carga variável; f_c é a resistência à compressão do concreto e f_y é a resistência ao escoamento do aço. As características estatísticas das variáveis aleatórias (distribuição de probabilidade, média e desvio-padrão) se encontram na Tabela 6 e foram extraídas de Scherer (2018).

Tabela 6 – Características estatísticas de X .

Variável	Distribuição	Média (μ)	Desvio-padrão (σ)
θ_R	Log-Normal	1	0,05
θ_S	Log-Normal	1	0,05
g	Normal	$1,05g$	$0,10\mu$
q	Gumbel	$\frac{q}{(1 + 0,35 \times 0,25)}$	$0,25\mu$
f_c	Normal	$\frac{f_{ck}}{(1 - 1,645 \times 0,10)}$	$0,10\mu$
f_y	Normal	$\frac{f_{yk}}{(1 - 1,645 \times 0,05)}$	$0,05\mu$

Fonte: Scherer (2018).

O estado-limite último considerado é relativo à flexão, sendo calculado conforme a Equação 93, pela diferença entre a resistência e a solicitação. Na parcela da solicitação,

consideram-se os momentos fletores devido ao carregamento total $(g + q)$ e ao peso próprio da viga $(\rho_c bh)$, onde ρ_c é o peso específico do concreto armado igual a 25 kN/m³. Na Equação 93, M é o momento resistente da seção, calculado de acordo com o exposto no item 2.2 deste trabalho.

$$g(X) = \theta_R M - \theta_S \left[\frac{(g + q)L^2}{8} + \frac{(\rho_c bh)L^2}{8} \right] \quad (93)$$

As variáveis aleatórias θ_R , θ_S , g , q , f_c e f_y são parâmetros que possuem incertezas, e foram consideradas em outras pesquisas de confiabilidade de vigas de concreto armado (SANTOS, STUCCHI, BECK, 2014; NOGUEIRA, PINTO, 2016; SCHERER, 2018). A variabilidade de θ_R é decorrente das aproximações do modelo de cálculo da resistência, sendo neste caso o modelo da NBR 6118 (ABNT, 2014). A variável θ_S está relacionada as imprecisões do modelo de ações. O carregamento g é um valor incerto e q varia no espaço e no tempo. A variabilidade da resistência do concreto f_c é decorrente da não homogeneidade microestrutural do material, formada por pasta cimentícia e agregado, e da não homogeneidade da mistura. E a variabilidade na resistência do aço f_y é consequência do processo produtivo do aço e das barras (BECK, 2019).

Assim, o problema de confiabilidade consiste em encontrar o índice de confiabilidade da viga otimizada, associado a probabilidade de falha quando a resistência é menor que a solicitação ($g(X) < 0$) na flexão, frente as incertezas de X .

4.2 Implementação do problema de confiabilidade no MATLAB

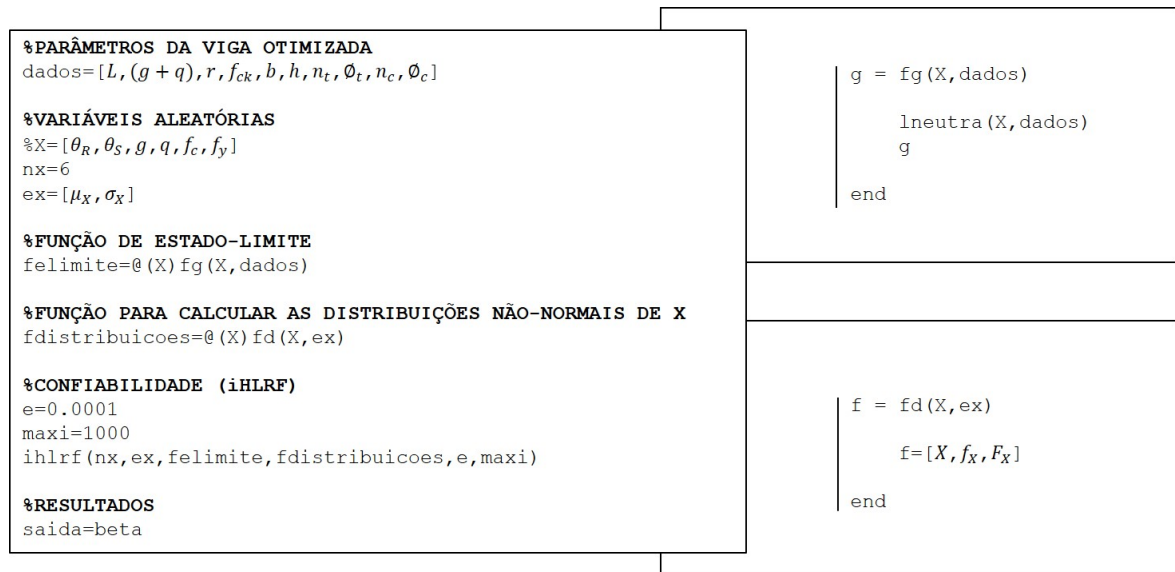
O problema de confiabilidade das vigas de concreto armado otimizadas também foi implementado no MATLAB (versão R2016a).

Em problemas de confiabilidade estrutural, existem diferentes métodos numéricos de resolução que podem ser utilizados, conforme apresentado no item 2.4 deste trabalho. Para encontrar o índice de confiabilidade das vigas otimizadas, foi utilizado o algoritmo melhorado de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler, o iHLRF, que apresenta melhorias em relação ao HLRF. Esse algoritmo foi selecionado por ser um dos métodos mais utilizados em análises de confiabilidade estrutural (BECK, 2019). Além disso, métodos de primeira ordem (FORM)

foram utilizados em outras pesquisas de confiabilidade de vigas de concreto armado (SANTOS, STUCCHI, BECK, 2014; NOGUEIRA, PINTO, 2016; SCHERER, 2018).

O MATLAB não possui uma função do iHLRF para análise de confiabilidade. Assim, o iHLRF foi implementado. Um esquema da implementação do problema de confiabilidade no MATLAB é apresentado na Figura 17.

Figura 17 – Esquemática da *script* da confiabilidade.



Fonte: O Autor (2020).

Na seção **%PARÂMETROS** do *script*, todos os parâmetros da viga otimizada são definidos. Os parâmetros incluem as informações de projeto (L , $(g + q)$, r e f_{ck}) e da otimização (b , h , n_t , ϕ_t , n_c , e ϕ_c).

Após a definição dos parâmetros, na seção **%VARIÁVEIS ALEATÓRIAS** são identificadas as variáveis aleatórias do problema (X), o número de variáveis (nx) e as características estatísticas (ex). As características estatísticas são definidas em uma matriz ex com a média e o desvio-padrão de cada variável (Tabela 6).

Na seção **%FUNÇÃO DE ESTADO-LIMITE** é identificada a função de estado-limite do problema de confiabilidade ($fg(X, dados)$). No cálculo da Equação 93, na função $fg(X, dados)$, é necessário determinar o momento resistente da viga. Para tanto, uma função $lneutra(X, dados)$ foi implementada para calcular a linha neutra da seção pelo processo da bissecante, como apresentado na Figura 17.

Na seção **%FUNÇÃO PARA CALCULAR AS DISTRIBUIÇÕES NÃO-NORMAIS DE X** são identificadas as funções de distribuição de probabilidade de X (Tabela 6). Uma função

`fd(X, dados)` foi implementada, que retorna uma matriz com as funções de distribuição f_X e F_X das variáveis não-normais de X .

Na seção **%CONFIABILIDADE (iHLRF)** são definidos os parâmetros de convergência da tolerância e número máximo de iterações (`e` e `maxi`). Em seguida, o iHLRF é executado por meio de uma função implementada `ihlrf`, onde todas as informações do problema são inseridas. Com o algoritmo executado, o índice de confiabilidade da viga otimizada é exibido em **%RESULTADOS**.

Na figura 18 é apresentado um esquema da implementação da função `ihlrf`:

Figura 18 – Esquematização do *script* da função `ihlrf`.

```

beta = ihlrf(nx,ex,felimit,fdistribuicoes,e,maxi)

%ponto de partida (médias)
k=1
Xk=μX; Uk=0
gk
ex=atualizarex(Xk,ex,fdistribuicoes)
∇gk=J(ex)*gradientes(Xk,nx,felimit)

%iHLRF
while ek>e && k<maxi
    %cálculo da direção de busca e fator c (Equações 49, 50 e 51)
    dk
    ck
    %cálculo do passo (Equação 52)
    λk=passo(Uk,ex,ck,dk,felimit)
    %cálculo de Uk+1, gk+1 e ∇gk+1
    Uk+1; Xk+1
    gk+1
    ex=atualizarex(Xk+1,ex,fdistribuicoes)
    ∇gk+1=J(ex)*gradientes(Xk+1,nx,felimit)
    %cálculo do índice de confiabilidade
    beta=||Uk+1||
    %cálculo dos critérios de parada (Equação 48)
    ek
    %incremento
    k=k+1
end
end

```

Fonte: O Autor (2020).

Na primeira iteração, $k=1$, o ponto de partida considerado são as médias μ_X de X . Com X_k definido, é calculada a função de estado-limite g_k e atualizada a matriz `ex`. A matriz `ex` deve ser atualizada pois existem variáveis aleatórias com distribuições não-normais. Para tanto, uma função `atualizarex` foi implementada para calcular a média e o desvio-padrão das distribuições normais equivalentes (Equações 41 e 42). Em seguida, é calculado o gradiente ∇g_k no ponto U_k , através da multiplicação da matriz jacobiana $J(ex)$ pelo gradiente no espaço

X , conforme a Equação 37. Para calcular o gradiente no espaço X , uma função `gradients` foi implementada para determinar o vetor gradiente através do método das diferenças finitas centrada, já que $g(X)$ é uma função implícita de X .

Após a definição do ponto de partida, um laço é iniciado e executado até que os critérios de parada sejam atendidos. Inicialmente são calculadas a direção de busca $\mathbf{d}_k$ (Equação 49) e o fator de penalidade c_k (Equações 50 e 51). Em seguida, o tamanho do passo λ_k (Equação 52) é calculado através de uma função implementada `passo`. Calculam-se então o novo ponto U_{k+1} (Equação 53), a função g_{k+1} e o gradiente ∇g_{k+1} . O índice de confiabilidade `beta` é determinado como $\|U_{k+1}\|$. Por fim, calculam-se os critérios de parada `ek` (Equação 48).

Na função `passo`, o cálculo do passo λ_k é a resolução de um problema de otimização irrestrita (Equação 52). A regra de Armijo pode ser utilizada para obter um valor aproximado (ZHANG, DER KIUREGHIAN, 1995; SUDRET, DER KIUREGHIAN; 2000). Assim, foi utilizada a regra de Armijo como definida em Zhang e Der Kiureghian (1995), para encontrar λ_k de modo que a função mérito seja suficientemente reduzida.

Como observado na Figura 18, a função `ihlrf` pode ser utilizada em qualquer problema de confiabilidade, implementado no MATLAB, para determinar o índice de confiabilidade. Os parâmetros de entrada da função podem ser alterados para qualquer problema: número de variáveis aleatórias (`nx`), matriz da média e desvio-padrão das variáveis (`ex`), função de estado-limite (`felimite`), distribuições de probabilidade não-normais das variáveis (`fdistribuicoes`), valor de tolerância (`e`) e número máximo de iterações (`maxi`).

Além do iHLRF, também foi implementado no MATLAB uma função para calcular o índice de confiabilidade por simulação de Monte Carlo. Neste caso, foi implementada a simulação de Monte Carlo Direto, apresentada no item 2.4.1 deste trabalho.

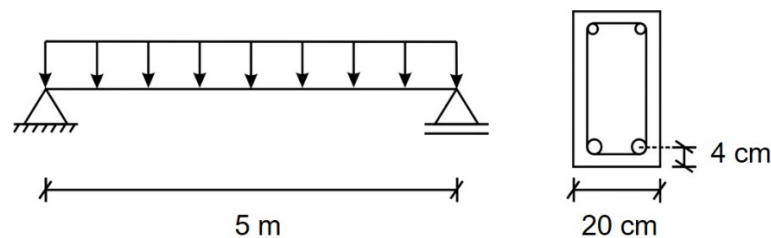
4.3 Validação da implementação do problema de confiabilidade

Após a formulação e implementação do problema de confiabilidade das vigas otimizadas, foi realizada a validação dessas implementações. Para tanto, foram obtidos os índices de confiabilidade de vigas de concreto armado de outras pesquisas no programa desenvolvido, e comparados os resultados a fim de verificar a eficiência das implementações.

4.3.1 Viga de Scherer (2018)

Scherer (2018) determinou o índice de confiabilidade de uma viga biapoiada de concreto armado, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, com vão de 5 m, largura de 20 cm e distância do centro da armadura tracionada até a borda tracionada igual a 4 cm (Figura 19). O índice de confiabilidade foi obtido para a viga com diferentes valores de f_{ck} , h , $\frac{q}{g}$, $(g + q)$ e área de aço (A_s), sendo utilizada a terminologia V - f_{ck} - h - $\frac{q}{g}$ - $(g + q)$ - A_s para identificar as vigas.

Figura 19 – Viga de Scherer (2018).



Fonte: O Autor (2020).

O problema de confiabilidade de Scherer (2018) é encontrar o índice de confiabilidade da viga, considerando o estado-limite de flexão e as seguintes variáveis aleatórias: resistência à compressão e à tração do concreto, módulo de elasticidade do concreto, tensão de escoamento da armadura, altura da seção, distância da armadura tracionada até a borda tracionada, carga permanente, carga variável e os erros de modelo da resistência e solicitação.

Para determinar o índice de confiabilidade da viga de Scherer (2018) foram inseridos os parâmetros da viga na implementação deste trabalho (Figura 17). A formulação da implementação (Equações 92 e 93) não foi alterada, apenas os parâmetros do problema foram mudados. Os resultados para algumas vigas se encontram na Tabela 7.

Ao comparar os índices de confiabilidade da Tabela 7, é perceptível uma grande proximidade entre os valores encontrados por Scherer (2018) e pela implementação deste trabalho. As diferenças nos índices de confiabilidade foram de 0,25% a 1,27%, e são decorrentes das diferenças existentes nas duas formulações. Portanto, a proximidade dos resultados indica que a implementação deste trabalho é válida.

Tabela 7 – Índice de confiabilidade de Scherer (2018) *versus* Autor (2020).

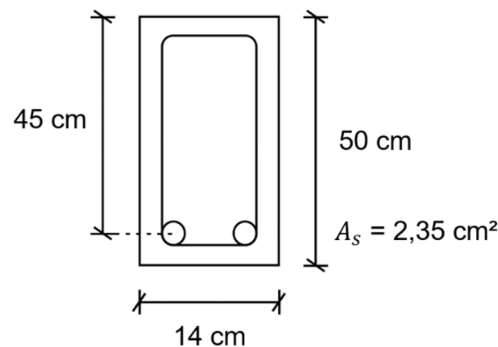
Viga	β		Diferença (%)
	Scherer (2018)	Autor (2020)	
V-25-40-0,5-15-4,62	4,09	4,06	-0,73
V-25-60-0,5-25-4,78	4,00	3,99	-0,25
V-35-40-0,5-15-4,48	3,99	4,00	0,25
V-35-60-0,5-25-4,69	3,97	3,96	-0,25
V-45-40-0,5-15-4,41	3,93	3,98	1,27
V-45-60-0,5-25-4,65	3,98	3,95	-0,75

Fonte: O Autor (2020).

4.3.2 Viga de Nogueira e Pinto (2016)

Nogueira e Pinto (2016) determinaram o índice de confiabilidade de uma viga de concreto armado, com largura de 14 cm, altura útil de 45 cm e área de aço igual a 2,35 cm² (Figura 20). O índice de confiabilidade foi obtido para a viga com diferentes valores de razão entre carga variável e carga permanente ($\frac{q}{g}$).

Figura 20 – Viga de Nogueira e Pinto (2016).



Fonte: O Autor (2020).

O problema de confiabilidade de Nogueira e Pinto (2016) é encontrar o índice de confiabilidade da viga, considerando o estado-limite de flexão e as seguintes variáveis aleatórias: resistência à compressão do concreto, resistência à tração do aço, momento fletor devido a carga permanente e momento fletor devido a carga variável. Os momentos fletores solicitantes foram determinados em função do momento resistente da viga e da relação entre as cargas.

Para determinar o índice de confiabilidade da viga de Nogueira e Pinto (2016) foram inseridos os parâmetros da viga na implementação deste trabalho (Figura 17). A formulação da

implementação (Equações 92 e 93) foi alterada para ficar parecida com a dos autores, pois não seria possível comparar os resultados com as duas formulações distintas. Assim, neste caso, foi validada apenas a implementação do iHLRF (Figura 18). Os resultados se encontram na Tabela 8.

Ao comparar os índices de confiabilidade da Tabela 8, é perceptível a proximidade dos mesmos. As diferenças dos resultados foram entre 0,83% e 1,32% e são decorrentes das diferenças entre as implementações. A proximidade dos resultados indica que o iHLRF implementado é válido para determinar o índice de confiabilidade.

Tabela 8 – Índice de confiabilidade de Nogueira e Pinto (2016) *versus* Autor (2020).

$\frac{q}{g}$	β		Diferença (%)
	Nogueira e Pinto (2016)	Autor (2020)	
0,1	6,04	5,96	-1,32
0,3	4,98	4,93	-1,00
0,5	4,28	4,24	-0,93
0,7	3,88	3,84	-1,03
0,9	3,62	3,59	-0,83
1,1	3,44	3,41	-0,87
1,3	3,31	3,28	-0,91
1,5	3,21	3,18	-0,93

Fonte: O Autor (2020).

5 RESULTADOS DA OTIMIZAÇÃO

Após os procedimentos de formulação, implementação e validação do problema de otimização das vigas de concreto armado, apresentados no item 3 deste trabalho, foram realizadas a otimização das vigas para 756 situações de projeto, variando os parâmetros L , $(g + q)$, r e f_{ck} . Como informado no item 3.1, a seguinte terminologia será utilizada para identificar as vigas: V - L - $(g + q)$ - r - f_{ck} .

Os valores ótimos das variáveis de projeto b , h , n_t , ϕ_t , n_c , e ϕ_c , e o custo otimizado das vigas se encontram no APÊNDICE A para cada viga V - L - $(g + q)$ - r - f_{ck} .

A seguir é apresentada uma discussão dos resultados do estudo paramétrico da otimização. Antes da apresentação dos resultados gerais, no item 5.1 são apresentados alguns exemplos das vigas otimizadas. No item 5.2 são apresentadas as tendências das variáveis de projeto na otimização, e no item 5.3 são apresentadas as tendências das restrições.

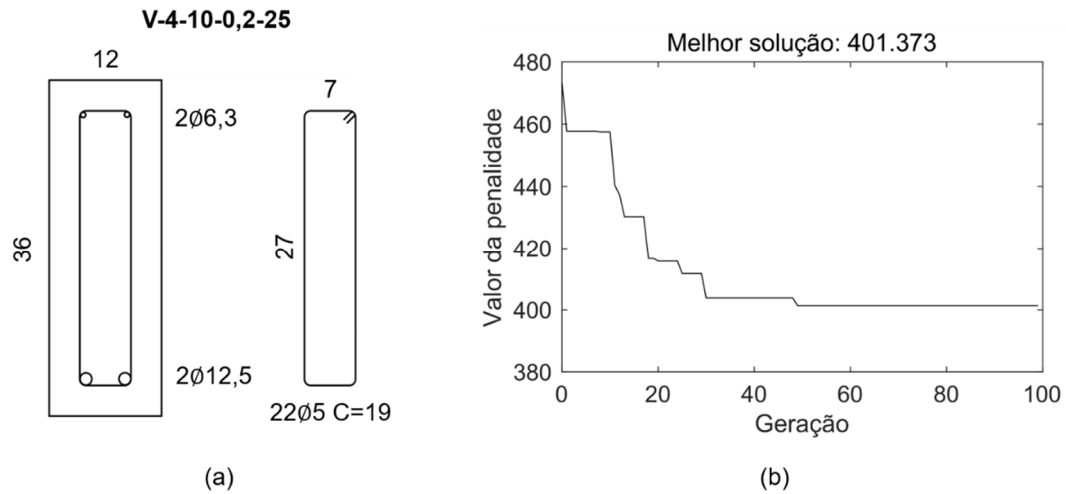
5.1 Vigas de concreto armado otimizadas: exemplos

Para exemplificar a otimização das vigas de concreto armado, neste item são apresentados os resultados para as vigas V-4-10-0,2-25, V-5-20-0,4-30 e V-6-30-0,6-35.

Na Figura 21(a) é apresentada a viga V-4-10-0,2-25 otimizada, com seção de 12x36 cm e com 2Ø12,5 barras tracionadas e 2Ø6,3 barras comprimidas. Assim, os AG encontraram o vetor $\mathbf{x}^* = \{12,36,2,12.5,2,6.3\}^T$ que minimiza o custo $C(\mathbf{x}^*)$ da viga, de valor igual a R\$ 401,37, atendendo as restrições da otimização. Na Figura 21(b) é apresentada a convergência dos AG para essa solução, após várias gerações, que possivelmente é o mínimo global.

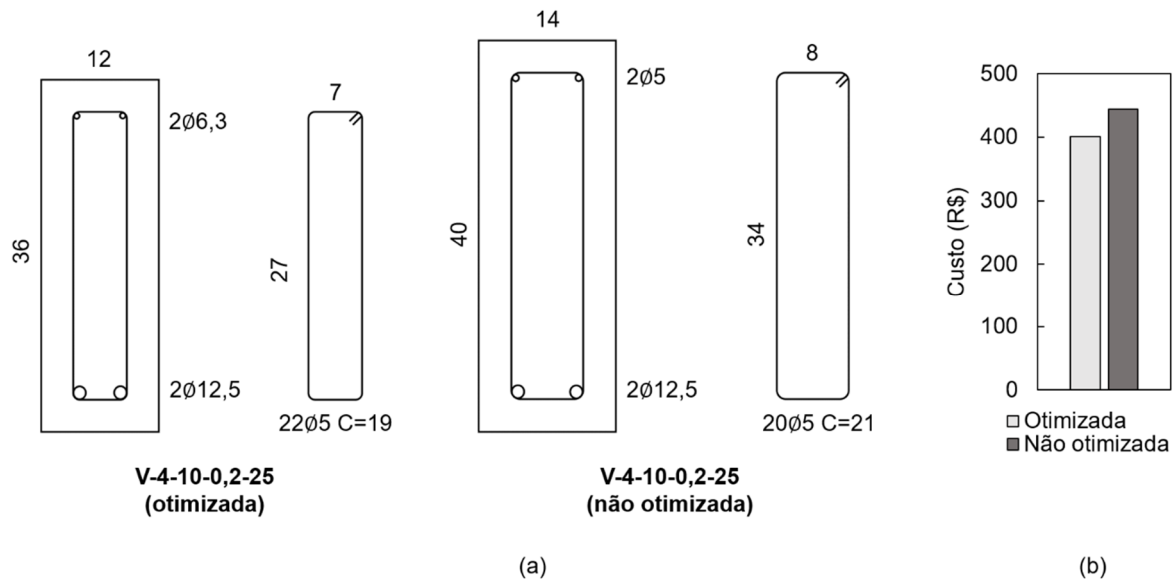
Na Figura 22(a) é apresentada uma comparação entre o projeto ótimo e o convencional para a viga V-4-10-0,2-25. No projeto convencional, a largura da viga foi adotada como 14 cm, a altura estimada em 40 cm (10% do vão), e as armaduras determinadas conforme o item 2.1 deste trabalho. Ambas as soluções, otimizada e não otimizada, atendem as restrições do problema de otimização. Porém, a viga não otimizada resulta em um custo de R\$ 444,67, maior que o custo da viga otimizada (Figura 22(b)). O projeto ótimo apresenta uma economia de 9,74% em relação ao convencional.

Figura 21 – (a) Viga V-4-10-0,2-25 otimizada, (b) Convergência dos AG.



Fonte: O Autor (2020).

Figura 22 – (a) Projeto ótimo *versus* Projeto convencional para V-4-10-0,2-25, (b) Comparação dos custos.



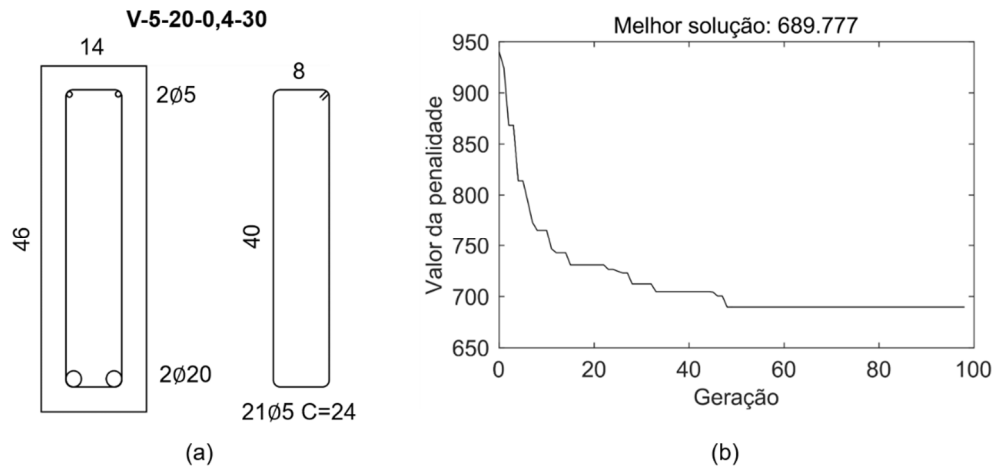
Fonte: O Autor (2020).

Na Figura 23(a) é apresentada a viga V-5-20-0,4-30 otimizada, com seção de 14x46 cm e com 2Ø20 barras tracionadas e 2Ø5 barras comprimidas. Os AG encontraram o vetor $\mathbf{x}^* = \{14,46,2,20,2,5\}^T$ que minimiza o custo $C(\mathbf{x}^*)$ da viga, de valor igual a R\$ 689,78, atendendo as restrições da otimização. Na Figura 23(b) é apresentada a convergência dos AG para essa solução de R\$ 689,78, após várias gerações, que provavelmente é o mínimo global.

Na Figura 24(a) é apresentada uma comparação entre o projeto ótimo e o convencional para a viga V-5-20-0,4-30. No projeto convencional, a largura da viga foi adotada como 14 cm,

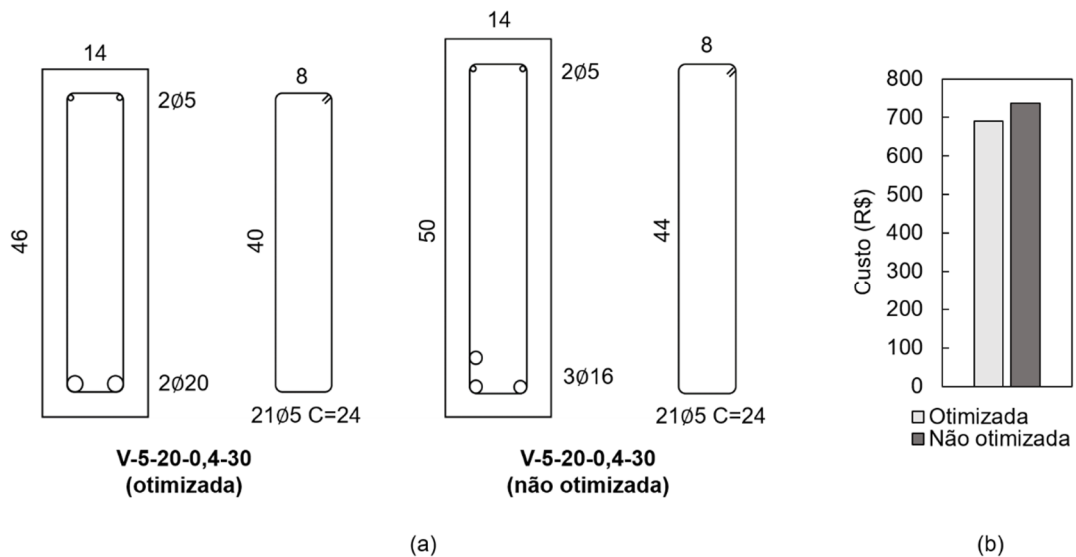
a altura estimada em 50 cm (10% do vão), e as armaduras determinadas conforme o item 2.1. As duas soluções atendem as restrições do problema de otimização. No entanto, a viga não otimizada resulta em um custo de R\$ 737,56, maior que o custo da viga otimizada (Figura 24(b)). Assim, o projeto ótimo apresenta uma economia de 6,48% em relação ao convencional.

Figura 23 – (a) Viga V-5-20-0,4-30 otimizada, (b) Convergência dos AG.



Fonte: O Autor (2020).

Figura 24 – (a) Projeto ótimo *versus* Projeto convencional para V-5-20-0,4-30, (b) Comparação dos custos.



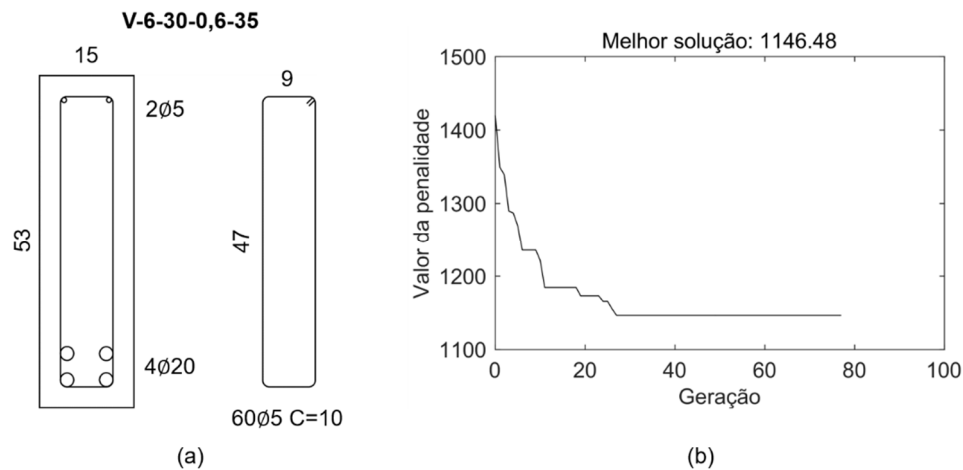
Fonte: O Autor (2020).

Na Figura 25(a) é apresentada a viga V-6-30-0,6-35 otimizada, com seção de 15x53 cm e com 4Ø20 barras tracionadas e 2Ø5 barras comprimidas. Os AG encontraram o vetor $\mathbf{x}^* = \{15,53,4,20,2,5\}^T$ que minimiza o custo $C(\mathbf{x}^*)$ da viga, de valor igual a R\$ 1146,48, atendendo

as restrições da otimização. Na Figura 25(b) é apresentada a convergência dos AG para essa solução, após várias gerações, sendo possivelmente o mínimo global.

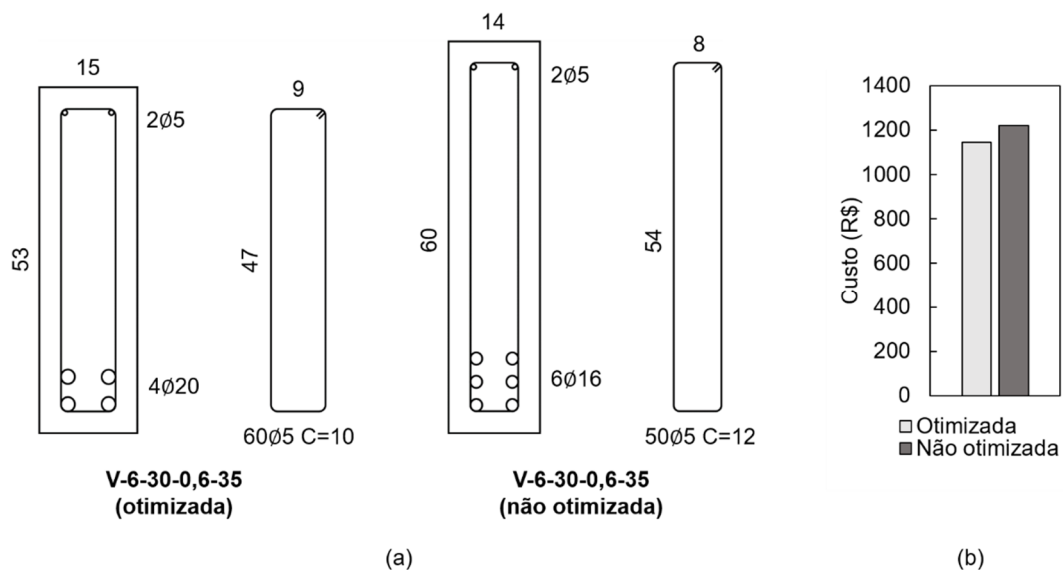
Na Figura 26(a) é apresentada uma comparação entre o projeto ótimo e o convencional para a viga V-6-30-0,6-35. No projeto convencional, a largura da viga foi adotada como 14 cm, a altura estimada em 60 cm (10% do vão), e as armaduras determinadas de acordo com o item 2.1. As duas soluções atendem as restrições do problema de otimização. Porém, a viga não otimizada resulta em um custo de R\$ 1222,36, maior que o custo da viga otimizada (Figura 26(b)). O projeto ótimo apresenta uma economia de 6,21% em relação ao convencional.

Figura 25 – (a) Viga V-6-30-0,6-35 otimizada, (b) Convergência dos AG.



Fonte: O Autor (2020).

Figura 26 – (a) Projeto ótimo *versus* Projeto convencional para V-6-30-0,6-35, (b) Comparação dos custos.



Fonte: O Autor (2020).

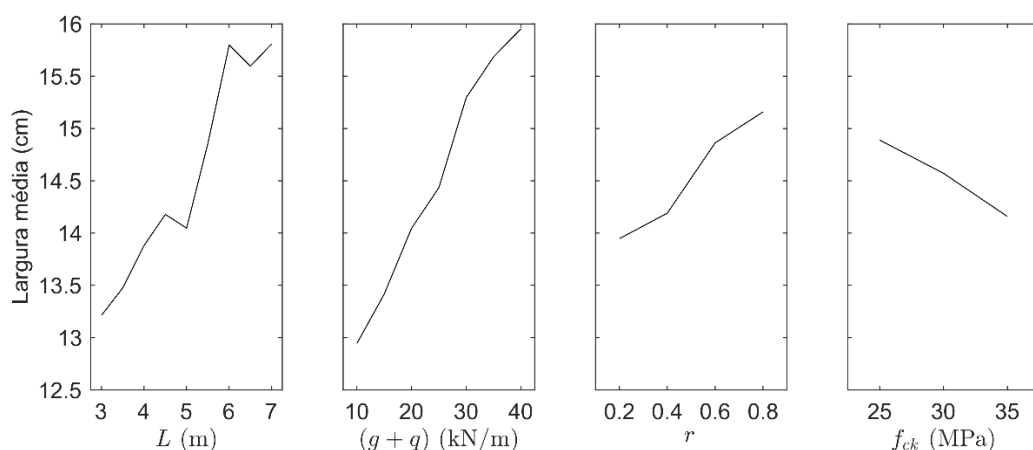
Através dos exemplos apresentados, fica evidente que o projeto ótimo é vantajoso por determinar a solução ótima para a viga, e não apenas uma solução viável. A vantagem do projeto ótimo está justamente no fato de determinar as variáveis de projeto através de conceitos de otimização, e não por estimativas baseadas em experiência, intuição, etc., como mostrado no Fluxograma 1. A economia possibilitada pelo projeto ótimo também foi constatada por Alexandre (2014).

5.2 Tendências das variáveis de projeto

Para identificar tendências das variáveis de projeto (b , h , n_t , ϕ_t , n_c , e ϕ_c) na otimização, foram realizadas análises dos resultados do APÊNCIDE B.

No Gráfico 6 é apresentado o gráfico de efeitos principais para os valores ótimos da largura (b). No gráfico de efeitos principais, para cada parâmetro L , $(g + q)$, r e f_{ck} , são apresentadas as médias da largura em cada valor do parâmetro. Para L , é verificado que a largura muda com a variação do vão, então existe um efeito principal: diferentes valores de vão resultam em diferentes valores de largura. Para $(g + q)$, é verificado que a largura também muda com a variação do carregamento, e existe então um efeito principal. Para r e f_{ck} , é observado que existe uma mudança da largura com a variação dos valores desses parâmetros, porém, essa mudança é menos expressiva se comparada a L e $(g + q)$.

Gráfico 6 – Gráfico de efeitos principais para a largura.



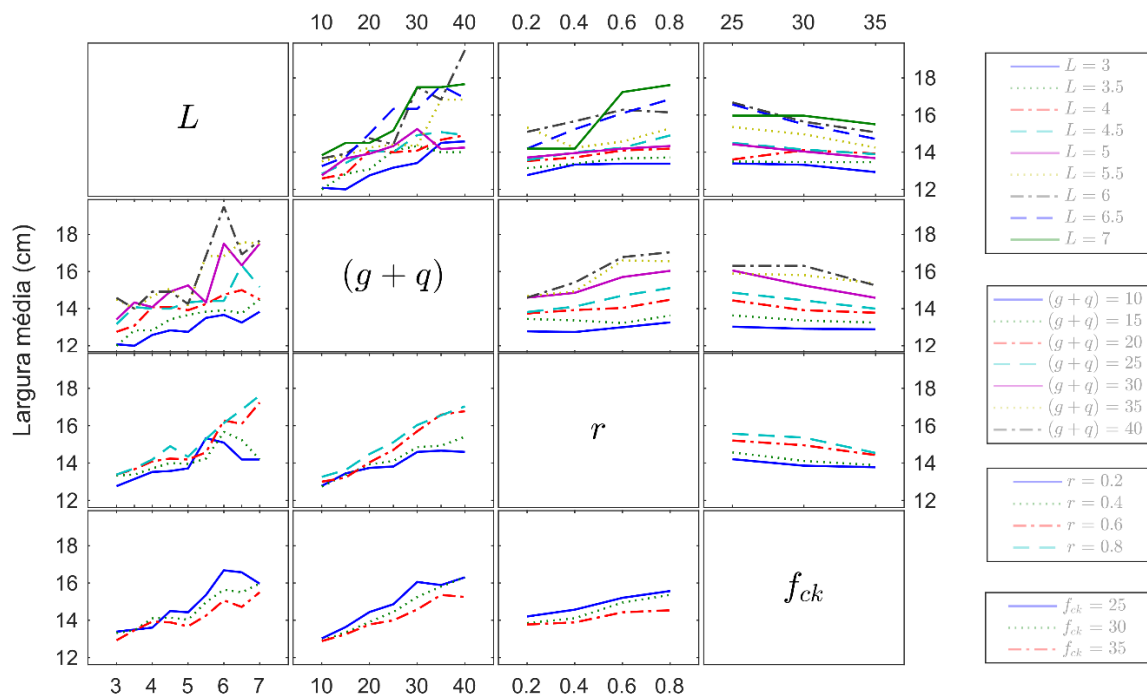
Fonte: O Autor (2020).

No Gráfico 7 é apresentado o gráfico de interação para os valores ótimos da largura. No gráfico de interação, é apresentada a interação entre os parâmetros L , $(g + q)$, r e f_{ck} , através das médias da largura em cada valor do parâmetro. Na análise do gráfico de interação, quanto

mais paralelas forem as linhas do gráfico, menor será a interação entre os parâmetros. Dessa forma, é observado que existe uma interação entre L e $(g + q)$ que influencia os valores da largura. Já para r e f_{ck} , é verificada uma interação menos expressiva com os demais parâmetros. Porém, verifica-se que existe uma interação entre r e L , e r e $(g + q)$, se comparada as interações do f_{ck} .

Os resultados dos Gráficos 6 e 7 indicam que existe um efeito principal na largura devido a variação dos parâmetros L , $(g + q)$, r e f_{ck} , e que as interações do f_{ck} com os demais parâmetros são menos expressivas na largura, se comparada as outras interações.

Gráfico 7 – Gráfico de interação para a largura.



Para verificar se as observações apresentadas anteriormente são válidas, uma análise de variância (ANOVA) para a largura foi realizada. A ANOVA é uma metodologia que permite comparar as médias de vários grupos, e determinar se essas médias são diferentes. Essa análise pode ser feita através de um indicador chamado de valor- p . Um valor- p suficientemente pequeno indica que pelo menos uma média do grupo é significativamente diferente das outras médias. É comum considerar o valor- p suficientemente pequeno se ele for menor que 0,05 (MARTINEZ; CHO, 2014). Neste trabalho foi utilizada a função `anovan` do *Statistics and*

Machine Learning Toolbox do MATLAB. Mais informações sobre a ANOVA com MATLAB podem ser encontradas em Martinez e Cho (2014).

Na Tabela 9 se encontram os resultados da ANOVA para a largura. Através dos valores- p , é verificado que de fato existe um efeito principal na largura devido a variação dos parâmetros L , $(g + q)$, r e f_{ck} . Todas as interações com o f_{ck} apresentaram valores- p maiores que 0,05, indicando que essas interações não são estatisticamente significativas na largura, corroborando com a análise do Gráfico 7.

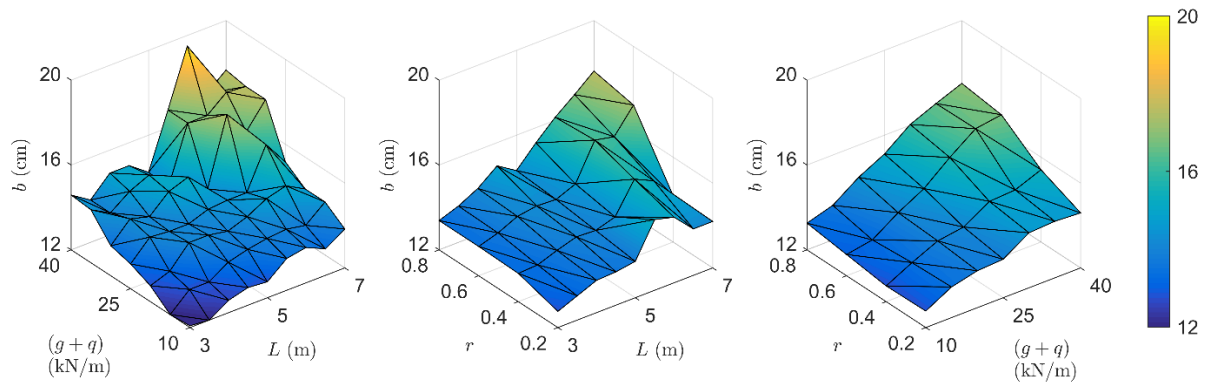
Tabela 9 – Análise de Variância (ANOVA) para a largura.

Parâmetros	Valor- p
L	0
$(g + q)$	0
r	0
f_{ck}	0
$L - (g + q)$	0
$L - r$	0
$L - f_{ck}$	0,1075
$(g + q) - r$	0,0076
$(g + q) - f_{ck}$	0,4846
$r - f_{ck}$	0,6056

Fonte: O Autor (2020).

Assim, para uma melhor visualização do comportamento da largura ótima em função dos parâmetros de projeto, foram construídas apenas superfícies das relações $L - (g + q)$, $L - r$, e $(g + q) - r$, devido as conclusões anteriores. No Gráfico 8 é observado que, de modo geral, a largura ótima aumenta devido ao aumento de L e $(g + q)$, L e r , e $(g + q)$ e r . Porém, essa é apenas uma tendência geral, pois as superfícies mostram um comportamento pouco uniforme, e que esse aumento na largura acontece de forma mais acentuada nas situações de projeto com valores altos para os parâmetros. Bezerra (2017) também verificou essa ausência de uma tendência bem definida para a largura ótima de vigas de concreto armado. No Gráfico 8 também se verifica a predominância de valores menores para a largura ótima, na faixa de 12 a 16 cm. É importante ressaltar que, apesar das interações do f_{ck} não serem estatisticamente significativas, existe uma influência do f_{ck} na largura ótima, onde a tendência geral é a diminuição da largura com o aumento do f_{ck} (Gráfico 6). Bezerra (2017) também verificou essa tendência na largura em relação a variação do f_{ck} .

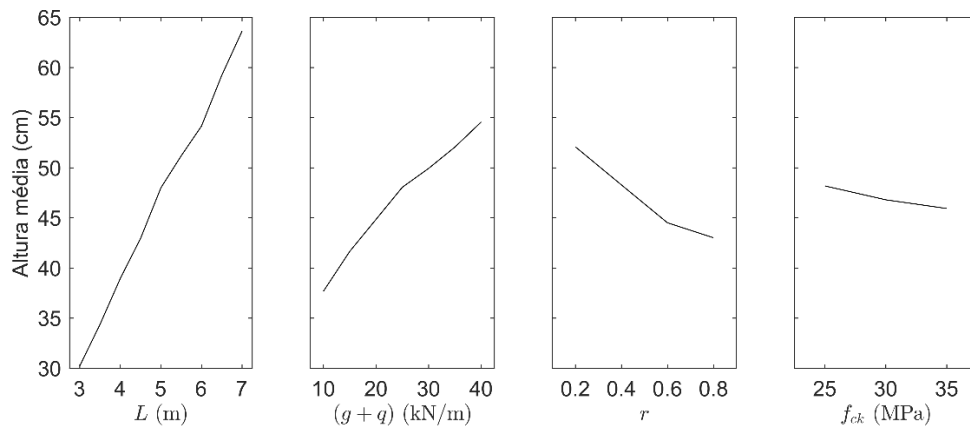
Gráfico 8 – Relação entre largura e parâmetros de projeto.



Fonte: O Autor (2020).

No Gráfico 9 é apresentado o gráfico de efeitos principais para os valores ótimos da altura (h). É verificado que a altura muda com a variação de L , $(g+q)$ e r , então existe um efeito principal. Uma variação no f_{ck} , porém, causa uma mudança menos expressiva na altura. O maior efeito principal na altura ótima ocorre devido as variações do vão.

Gráfico 9 – Gráfico de efeitos principais para a altura.

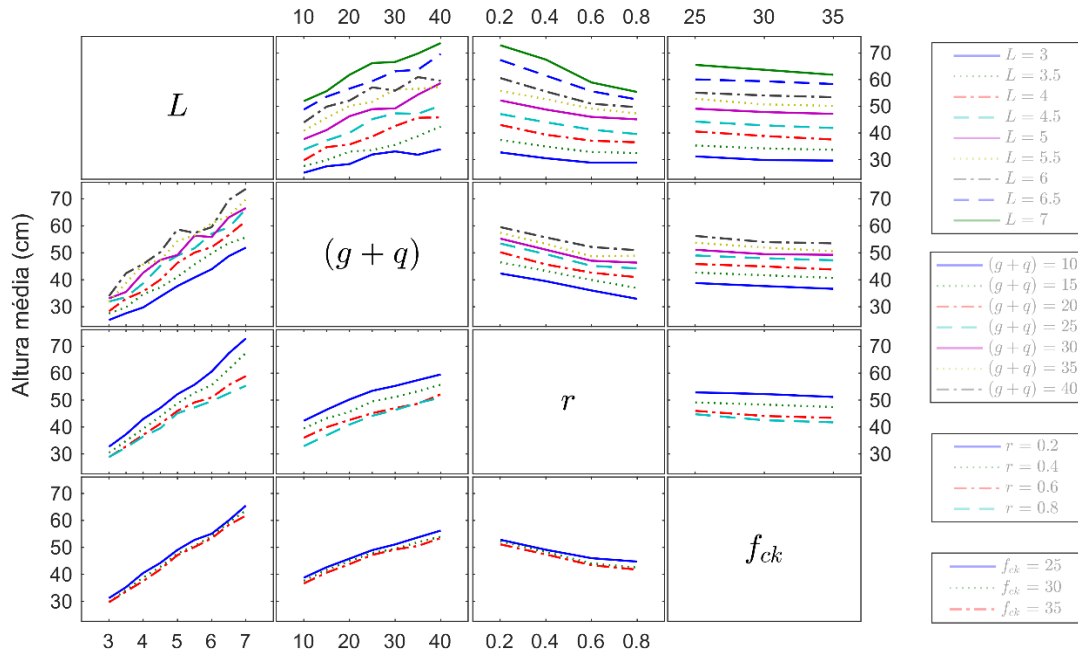


Fonte: O Autor (2020).

No Gráfico 10 é apresentado o gráfico de interação para os valores ótimos da altura. É observado que existe uma interação entre L e $(g+q)$ que influencia os valores da altura. Existe também uma interação entre L e r . Já as interações do f_{ck} com os demais parâmetros não causam mudanças expressivas na altura ótima.

Os resultados dos Gráficos 9 e 10 indicam que existe um efeito principal na altura ótima devido a variação dos parâmetros L , $(g+q)$, r e f_{ck} , sendo maior para as variações de L e menor para as do f_{ck} , e que as interações de L com $(g+q)$ e r influenciam os valores da altura ótima.

Gráfico 10 – Gráfico de interação para a altura.



Fonte: O Autor (2020).

Para verificar se as conclusões anteriores são válidas, foi realizada uma análise ANOVA, assim como foi feito para a largura. Na Tabela 10 se encontram os resultados da ANOVA para a altura. Através dos valores- p , é verificado que existe um efeito principal na altura devido a variação dos parâmetros L , $(g+q)$, r e f_{ck} , já que todos valores- p são menores que 0,05. Porém, a análise do gráfico de efeitos principais do Gráfico 9 indica que o efeito principal do f_{ck} na altura é menor se comparado a dos outros parâmetros. Em relação as interações, apenas $L - (g+q)$ e $L - r$ apresentaram valores- p menores que 0,05, indicando que essas interações são estatisticamente significativas na altura, confirmando a análise do Gráfico 10.

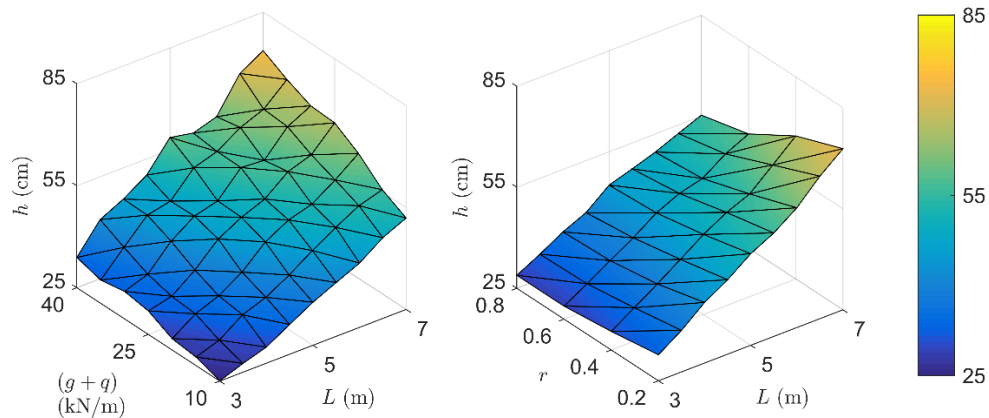
Para uma melhor visualização do comportamento da altura ótima em função dos parâmetros de projeto, foram construídas superfícies apenas das relações $L - (g+q)$ e $L - r$, devido as observações anteriores. No Gráfico 11 é observado que existe uma tendência bem definida para a altura ótima, ao contrário da largura. A altura aumenta com o aumento de L e $(g+q)$. A medida que L aumenta e r diminui, os valores da altura aumentam, sendo que a relação r tem uma influência menor nesse aumento. Bezerra (2017) também verificou que existe um aumento da altura ótima a medida que o vão aumenta.

Tabela 10 – Análise de Variância (ANOVA) para a altura.

Parâmetros	Valor- <i>p</i>
L	0
$(g + q)$	0
r	0
f_{ck}	0
$L - (g + q)$	0
$L - r$	0
$L - f_{ck}$	0,8730
$(g + q) - r$	0,2831
$(g + q) - f_{ck}$	0,8909
$r - f_{ck}$	0,1771

Fonte: O Autor (2020).

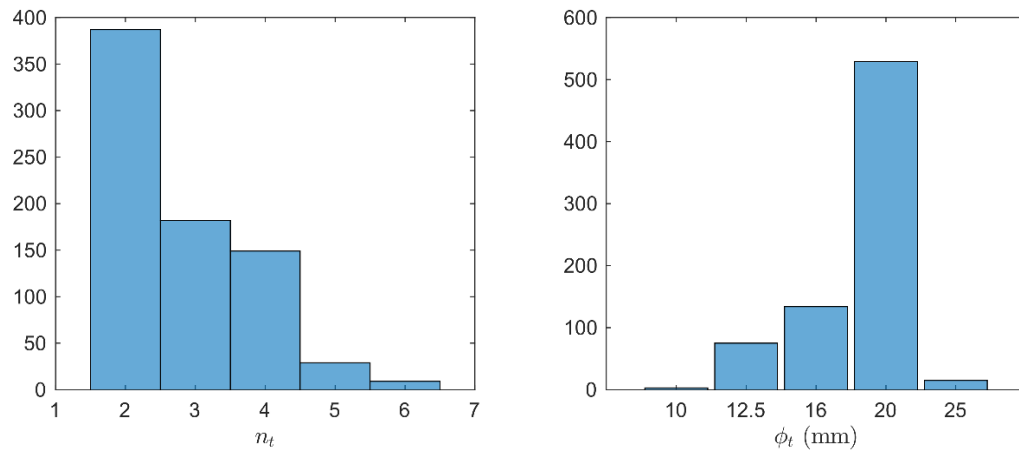
Gráfico 11 – Relação entre altura e parâmetros de projeto.



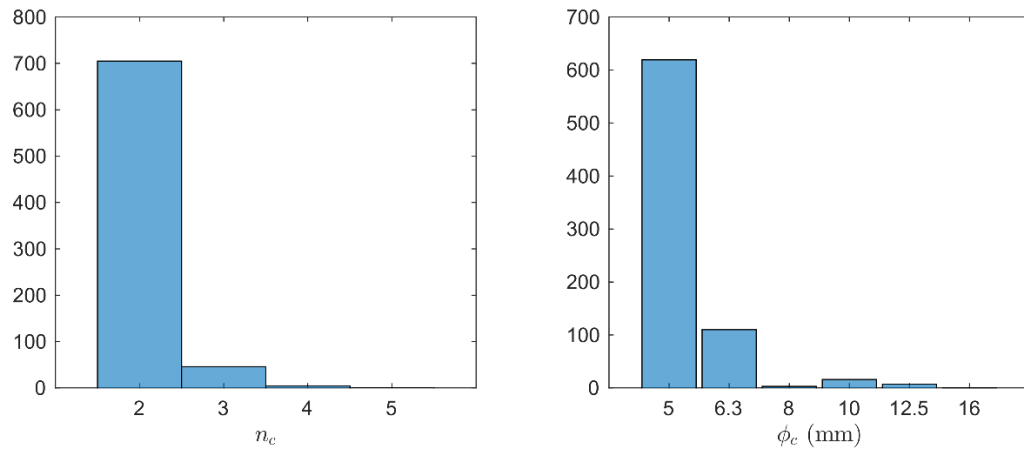
Fonte: O Autor (2020).

Nos Gráficos 12 e 13 são apresentados histogramas para os valores ótimos da quantidade (n_t) e o diâmetro das barras tracionadas (ϕ_t), e da quantidade (n_c) e o diâmetro das barras comprimidas (ϕ_c). No Gráfico 12 é observada a predominância de n_t igual a 2, e que a ocorrência de valores maiores é pequena. Para ϕ_t é verificada a predominância do diâmetro de 20 mm, seguida de 16 mm. No Gráfico 13 é observado que na otimização, n_c resultou igual a 2 em quase todas as situações de projeto, e que ϕ_c foi igual a 5 mm na maioria dos casos. Assim, existe uma tendência de quantidades menores de barras nas vigas otimizadas, e a predominância de barras tracionadas com 20 mm e comprimidas com 5 mm.

No Gráfico 14 é apresentada a relação entre as taxas de armadura tracionada (ρ_{A_s}) e comprimida ($\rho_{A'_s}$). É observado que existe uma tendência geral de um pequeno aumento em $\rho_{A'_s}$ com o aumento de ρ_{A_s} .

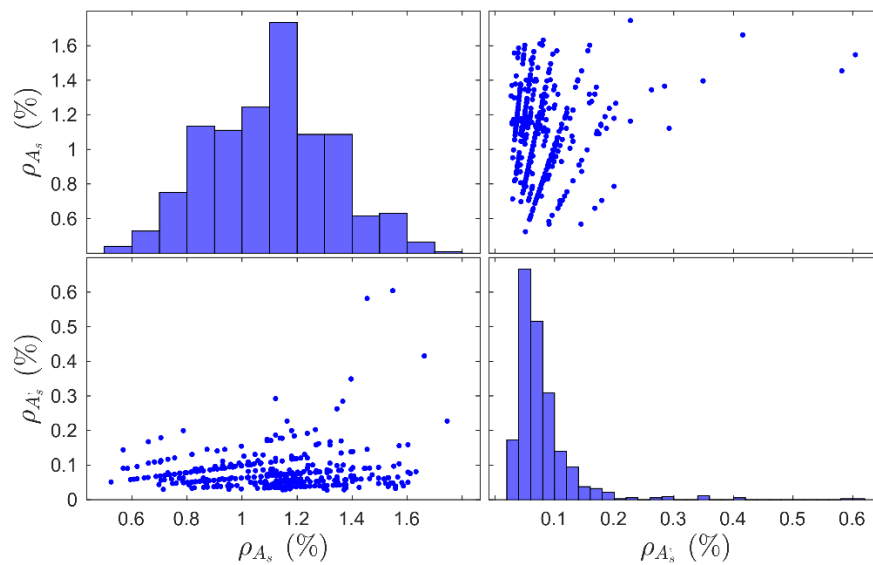
Gráfico 12 – Histogramas para n_t e ϕ_t .

Fonte: O Autor (2020).

Gráfico 13 – Histogramas para n_c e ϕ_c .

Fonte: O Autor (2020).

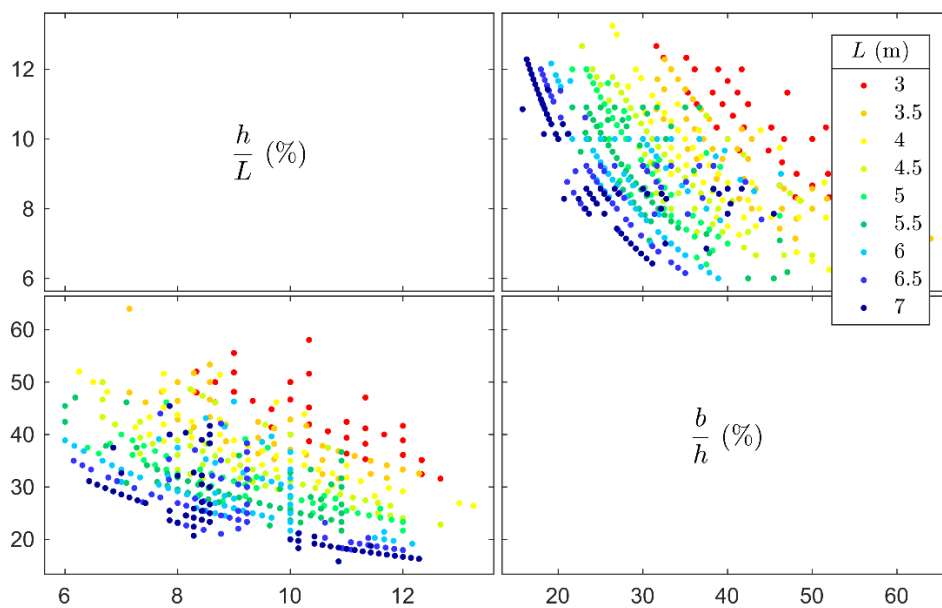
Gráfico 14 – Relação entre taxas de armadura.



Fonte: O Autor (2020).

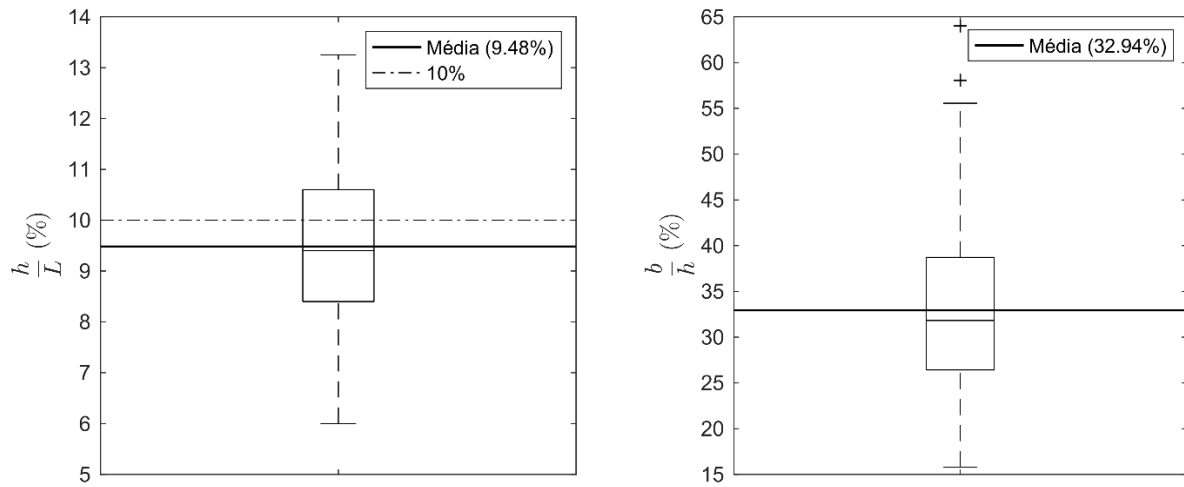
A partir das análises anteriores, fica evidente que o vão tem grande influência nos valores ótimos da largura e da altura da seção transversal da viga. Para investigar possíveis relações entre h , b e L , foram plotadas as relações $\frac{h}{L}$ e $\frac{b}{h}$ para os valores de L (Gráfico 15). É verificado que existe uma tendência geral, onde para cada valor de L , a medida que $\frac{b}{h}$ aumenta, $\frac{h}{L}$ diminui. Observa-se também que os menores valores de $\frac{b}{h}$ acontecem nas situações de grandes vãos.

Gráfico 15 – Relação entre $\frac{h}{L}$ e $\frac{b}{h}$.



Fonte: O Autor (2020).

No Gráfico 16 são apresentados gráficos *boxplot* para as relações $\frac{h}{L}$ e $\frac{b}{h}$. O resumo estatístico do *boxplot* indica que a relação $\frac{h}{L}$ se encontra em torno de 10%, sendo a média das relações igual a 9,48%. Verifica-se então que os valores ótimos de $\frac{h}{L}$ são próximos da estimativa usualmente empregada no projeto de vigas de concreto armado, de que a altura pode ser considerada como 10% do vão. Para a relação $\frac{b}{h}$, verifica-se que existe uma variação maior nos valores, se comparada a $\frac{h}{L}$, sendo o valor médio igual a 32,94%.

Gráfico 16 – Variação de $\frac{h}{L}$ e $\frac{b}{h}$.

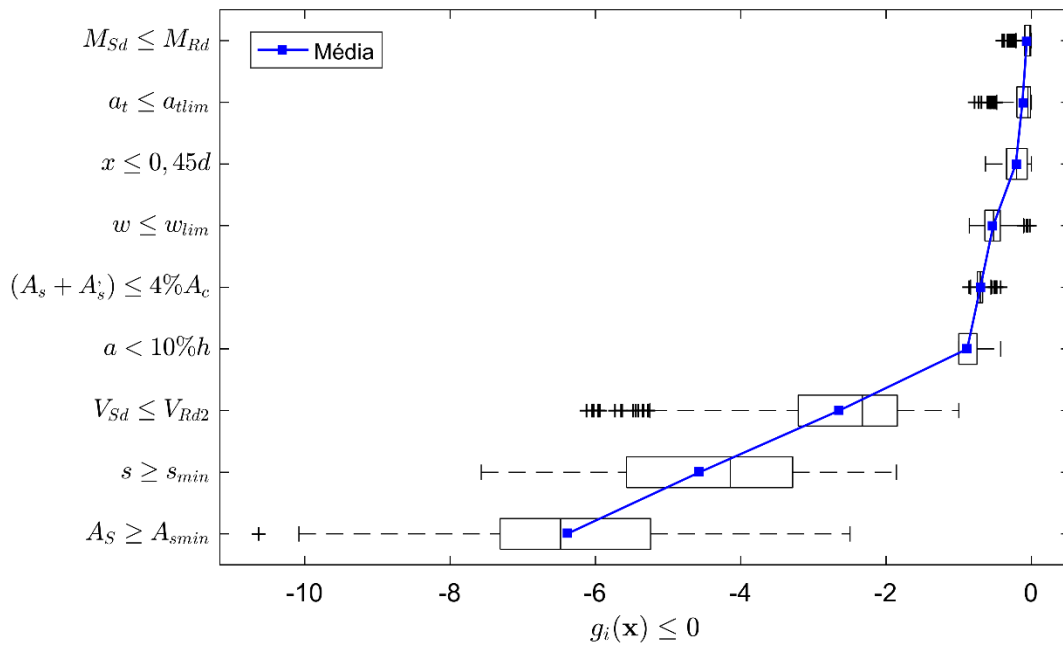
Fonte: O Autor (2020).

5.3 Tendências das restrições

Além da investigação das tendências das variáveis de projeto, também foram investigadas as tendências das restrições do problema de otimização. Neste caso, foram avaliadas apenas as restrições das Equações 81 a 89, relacionadas aos critérios de estados-limites último, estados-limites de serviço e detalhamento.

Conforme as exposições do item 2.3 deste trabalho, se as restrições de desigualdade de um problema de otimização ($g(\mathbf{x}) \leq 0$) forem satisfeitas na igualdade, então as restrições estão ativas na otimização. Dessa forma, quanto mais próximo $g(\mathbf{x})$ for de zero, maior será a sua importância na otimização. Aqui, a terminologia “mais ativa” é utilizada para indicar esse grau de importância. No Gráfico 17 é apresentado um gráfico *boxplot* dos valores $g(\mathbf{x})$ das restrições das Equações 81 a 89, sendo esses valores normalizados. A ordem das restrições no gráfico é referente aos seus valores médios: $M_{sd} \leq M_{Rd}$ é a restrição com valor médio mais próximo de zero, enquanto que $A_s \geq A_{smin}$ é a restrição com valor médio mais distante de zero.

Como observado no Gráfico 17, a restrição mais ativa na otimização das vigas foi a restrição de momento $M_{sd} \leq M_{Rd}$, com pouca variabilidade em seus valores. A segunda restrição mais ativa foi a flecha $a_t \leq a_{tlim}$, também com pouca variabilidade. Em seguida, estão as restrições $x \leq 0,45d$, $w \leq w_{lim}$, $(A_s + A'_s) \leq 4\%A_c$ e $a \leq 10\%h$, que também não apresentam grande variabilidade. Já as restrições $V_{sd} \leq V_{Rd2}$, $s \geq s_{min}$, e $A_s \geq A_{smin}$ possuem uma variação maior em seus valores e são menos ativas, se comparadas as demais restrições. A restrição $A_s \geq A_{smin}$ foi a que apresentou uma maior variação em seus valores na otimização.

Gráfico 17 – *Boxplot* para as restrições.

Fonte: O Autor (2020).

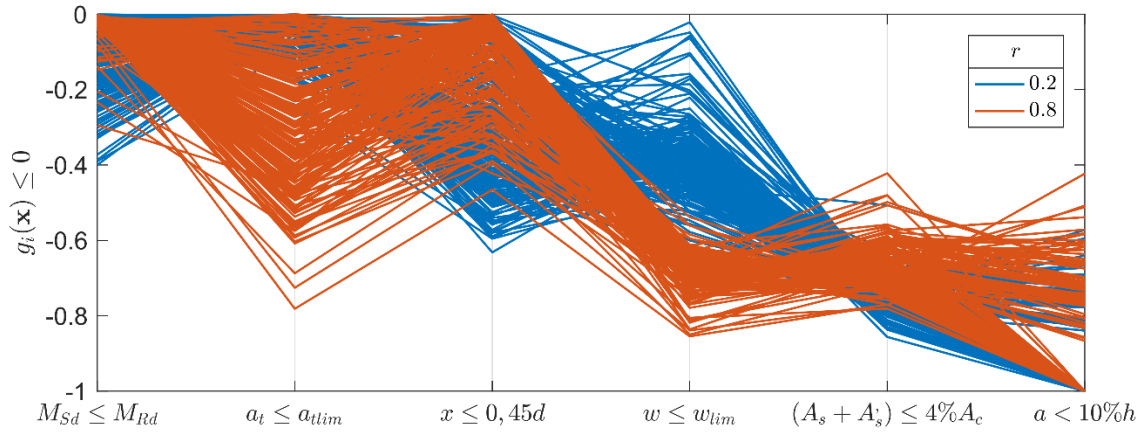
Para identificar as tendências das restrições em função dos parâmetros L , $(g + q)$, r e f_{ck} , foram utilizados gráficos de coordenadas paralelas para as restrições com maior importância ($M_{sd} \leq M_{Rd}$ até $a \leq 10\%h$). Em um gráfico de coordenadas paralelas, os eixos das coordenadas são paralelos e igualmente espaçados, onde as linhas do gráfico representam a conexão entre os valores das coordenadas em cada observação, possibilitando uma visualização de dados multivariados (MARTINEZ; CHO, 2014).

No Gráfico 18, é apresentado o gráfico de coordenadas para as restrições em função do menor (0,2) e do maior (0,8) valor da relação r . É observado que existe uma tendência das restrições em função de r . As restrições de flecha ($a_t \leq a_{tlim}$) e fissura ($w \leq w_{lim}$) são mais ativas com r igual a 0,2, enquanto que as restrições de momento ($M_{sd} \leq M_{Rd}$) e ductilidade ($x \leq 0,45d$) são mais ativas com r igual a 0,8. Os demais gráficos de coordenadas das restrições, em função de L , $(g + q)$ e f_{ck} não foram apresentados pois nenhuma tendência foi verificada nos mesmos.

No Gráfico 19, são apresentadas as relações entre as restrições de ductilidade ($x \leq 0,45d$), área de aço máxima ($(A_s + A'_s) \leq 4\%A_c$) e área de aço mínima ($A_s \geq A_{smin}$). Verifica-se que existe uma tendência em função do f_{ck} . A medida que a restrição $x \leq 0,45d$ se torna mais ativa, $A_s \geq A_{smin}$ é menos ativa e $(A_s + A'_s) \leq 4\%A_c$ é mais ativa. Nesse caso, $A_s \geq A_{smin}$ é mais ativa para valores menores de f_{ck} e $(A_s + A'_s) \leq 4\%A_c$ para valores maiores

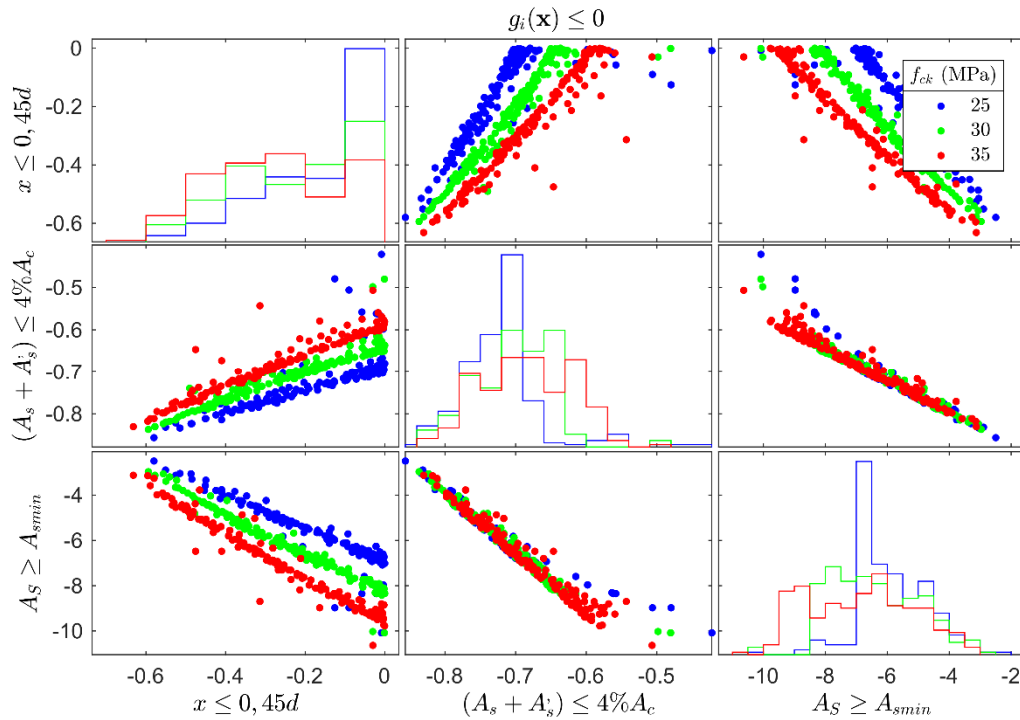
de f_{ck} . Na relação entre as restrições de área de aço, à medida que $(A_s + A'_s) \leq 4\%A_c$ é mais ativa, $A_s \geq A_{smin}$ é menos ativa.

Gráfico 18 – Gráfico de coordenadas para as restrições em função de r .



Fonte: O Autor (2020).

Gráfico 19 – Relação entre as restrições de ductilidade e áreas de aço.



Fonte: O Autor (2020).

5.4 Conclusões sobre a otimização

Por meio dos exemplos de vigas otimizadas, apresentadas no item 5.1, é possível constatar as vantagens do projeto ótimo em relação ao convencional. As vigas projetadas através da otimização resultam em custos menores se comparadas as vigas projetadas pelo procedimento convencional, onde o projeto da viga não é realizado com a utilização de conceitos de otimização. Essa economia pode ser maior ou menor, dependendo da situação de projeto. Sabendo que as construções de concreto armado normalmente possuem um grande número de vigas, então, a aplicação da otimização nas mesmas pode resultar em uma economia significativa no custo total da estrutura. Além da economia nos custos, o projeto ótimo também dispensa a utilização de estimativas para as variáveis de projeto. No projeto ótimo das vigas de concreto armado, a largura e a altura da seção transversal, por exemplo, são determinadas através dos procedimentos de otimização, e não por estimativas.

Considerando as diversas situações de projeto analisadas, foi observado que não existe uma tendência bem definida para a largura ótima da seção transversal das vigas. Dessa forma, a largura ótima pode apresentar diferentes valores nas situações de projeto. Apesar de uma tendência bem definida não ser observada, existe, de modo geral, um aumento na largura ótima a medida que L e $(g + q)$ aumentam. Esse aumento acontece devido à grande solicitação na viga nas situações de projeto com maiores vãos e carregamentos. Esse aumento também é verificado à medida que L e r aumentam, e também quando $(g + q)$ e r aumentam. O crescimento da largura ótima em função do aumento de r , acontece, possivelmente, devido a diminuição da altura ótima com o aumento de r (Gráfico 11). Porém, esse aumento observado em todas as situações é pequeno, e a predominância é de valores baixos de largura ótima.

Para as situações de projeto analisadas, foi observado que existe uma tendência bem definida para a altura ótima da viga. A medida que L e $(g + q)$ aumentam, os valores ótimos da altura também crescem. Assim como para a largura, esse aumento acontece devido à grande solicitação na viga com maiores vãos e carregamentos, sendo necessária uma altura maior para atender às restrições da otimização. A medida que L aumenta e r diminui, os valores da altura aumentam. Esse aumento da altura com a diminuição de r ocorre, provavelmente, devido ao aumento no carregamento com combinação quase permanente, utilizado para calcular a flecha, onde a carga variável é minorada pelo coeficiente Ψ_2 igual a 0,3. Assim, com valores menores de r , pode ser necessária uma altura maior para atender a restrição de flecha. Além disso, na análise das restrições, de fato, foi verificado que a restrição de flecha é importante na

otimização. Os resultados indicam que, dentre os parâmetros de projeto variados, o vão apresenta maior influência na altura ótima.

Existe também uma tendência entre as relações ótimas da altura/vão e largura/altura, para cada valor do vão. A medida que a largura/altura aumenta, a altura/vão diminui. A relação ótima altura/vão apresentou valores próximos a 10%. Portanto, a estimativa usual de que a altura das vigas deve ser 10% do vão pode ser considerada adequada, já que é próxima das relações ótimas de altura/vão. No entanto, mesmo que essa estimativa seja próxima dos valores ótimos, o projeto ótimo continua sendo mais vantajoso pois sempre encontrará a solução ótima para a viga.

Em relação aos valores ótimos das armaduras, existe a tendência de poucas barras na seção transversal. A taxa de armadura comprimida é pequena, se comparada a taxa de armadura tracionada.

Dentre as restrições do problema de otimização das vigas de concreto armado, as mais importantes na otimização foram as restrições de momento ($M_{sd} \leq M_{Rd}$), flecha ($a_t \leq a_{tlim}$), ductilidade ($x \leq 0,45d$), abertura de fissuras ($w \leq w_{lim}$), área de aço máxima ($(A_s + A'_s) \leq 4\%A_c$) e de detalhamento das armaduras tracionadas ($a \leq 10\%h$). Essa importância está associada ao grau de inatividade dessas restrições na otimização: quanto menor esse grau, maior será a importância da restrição. É interessante observar que a restrição de abertura de fissuras tem sua importância como as demais, então ela deve ser considerada nos problemas de otimização de vigas de concreto armado. Da mesma forma, a restrição do detalhamento das armaduras tracionadas, onde a distância do centro de gravidade das barras ao centro da barra mais afastada deve ser menor que 10% da altura, também tem sua importância. Isso indica que existe uma influência dos critérios de detalhamento na otimização, e assim, esses critérios não podem ser negligenciados na formulação do problema de otimização.

Em vista das análises apresentadas, é pertinente comentar a influência dos parâmetros de projeto f_{ck} e r . Na análise dos valores ótimos da largura e altura, foi verificado que o f_{ck} não possui uma grande influência, quando comparado aos demais parâmetros. Porém, as análises ANOVA indicam que existe um efeito do f_{ck} na largura e altura das vigas. Além disso, foi observado que o f_{ck} tem influência no comportamento das restrições de áreas de aço e ductilidade. Portanto, o f_{ck} deve ser considerado em análises paramétricas de otimização de vigas de concreto armado. Na análise da largura, altura e das restrições, foi verificado que a relação r tem influência na otimização. Esse resultado é particularmente interessante, pois nos estudos de otimização de vigas de concreto armado, não são consideradas variações na relação

entre as cargas. A variação de r é comumente considerada em estudos de confiabilidade de vigas de concreto armado.

6 RESULTADOS DA CONFIABILIDADE

Após a otimização das vigas de concreto armado para as 756 situações de projeto, variando os parâmetros L , $(g + q)$, r e f_{ck} , foi determinado o índice de confiabilidade de cada viga otimizada. Os índices de confiabilidade β , para cada viga $V - L - (g + q) - r - f_{ck}$, se encontram no APÊNDICE A.

Nos próximos itens é apresentada uma discussão dos resultados da confiabilidade das vigas otimizadas de concreto armado. Assim como nos resultados da otimização, inicialmente, no item 6.1, são apresentados alguns exemplos do índice de confiabilidade das vigas otimizadas. No item 6.2 são apresentadas as tendências do índice de confiabilidade e no item 6.3 são apresentados os coeficientes de sensibilidade.

6.1 Índice de confiabilidade de vigas de concreto armado otimizadas: exemplos

Antes do estudo paramétrico, é apresentado o índice de confiabilidade para as vigas V-4-30-0,6-25, V-5-20-0,6-30 e V-6-10-0,8-35, como exemplos da confiabilidade de vigas de concreto armado otimizadas. Nesses exemplos, também é apresentado o índice de confiabilidade obtido por simulação de Monte Carlo Direto, como uma validação do índice de confiabilidade obtido pelo iHLRF.

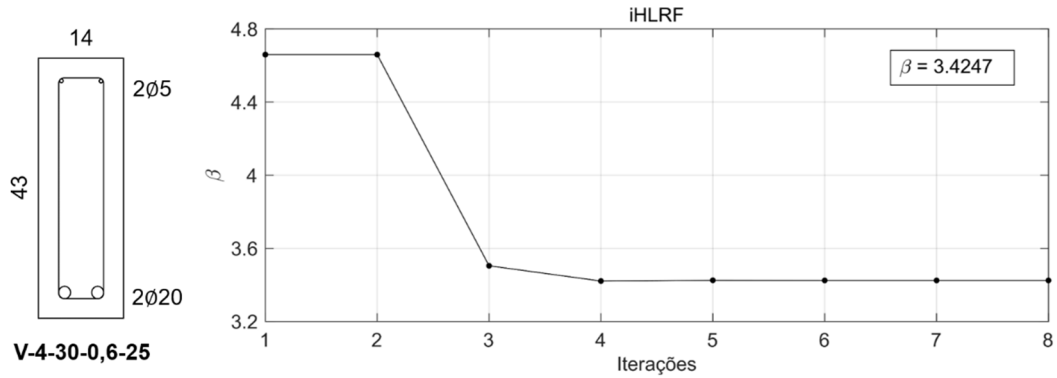
No Gráfico 20 é ilustrada a convergência de β obtido pelo iHLRF para a viga otimizada V-4-30-0,6-25. O índice de confiabilidade é igual a 3,42, resultando em uma probabilidade de falha de $3,08 \times 10^{-4}$. O índice de confiabilidade obtido por simulação de Monte Carlo, apresentado no Gráfico 21, é igual a 3,40, extremamente próximo do valor obtido pelo iHLRF. O valor de $3,08 \times 10^{-4}$ representa a probabilidade da resistência da viga ser inferior a solicitação de flexão, quando consideradas as incertezas em $X = \{\theta_R, \theta_S, g, q, f_c, f_y\}^T$. Os valores mais prováveis de X para que a falha ocorra são $X = \{0.96, 1.04, 13.05, 37.77, 29.38, 52.65\}^T$.

No Gráfico 22 é apresentada a convergência de β pelo iHLRF para a viga otimizada V-5-20-0,6-30. O índice de confiabilidade é igual a 3,39, resultando em uma probabilidade de falha de $3,54 \times 10^{-4}$. O índice de confiabilidade obtido por simulação de Monte Carlo, apresentado no Gráfico 23, é igual a 3,37, sendo bastante próximo de β pelo iHLRF. Os valores mais prováveis de X para que a falha ocorra são $X = \{0.96, 1.04, 8.70, 24.83, 35.41, 52.57\}^T$.

No Gráfico 24 é apresentada a convergência de β pelo iHLRF para a viga otimizada V-6-10-0,8-35. O índice de confiabilidade é igual a 3,23, associado a probabilidade de falha de

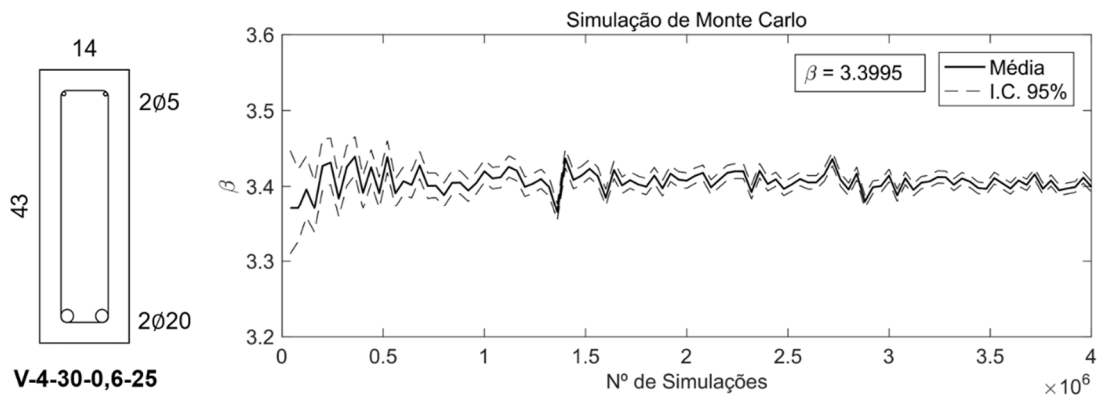
$6,22 \times 10^{-4}$. O índice de confiabilidade obtido por simulação de Monte Carlo, apresentado no Gráfico 25, é igual a 3,21, sendo extremamente próximo de β pelo iHLRF. Os valores mais prováveis de X para que a falha ocorra são $X = \{0.96, 1.03, 2.13, 16.22, 41.36, 52.91\}^T$.

Gráfico 20 – Índice de confiabilidade pelo iHLRF para a viga V-4-30-0,6-25.



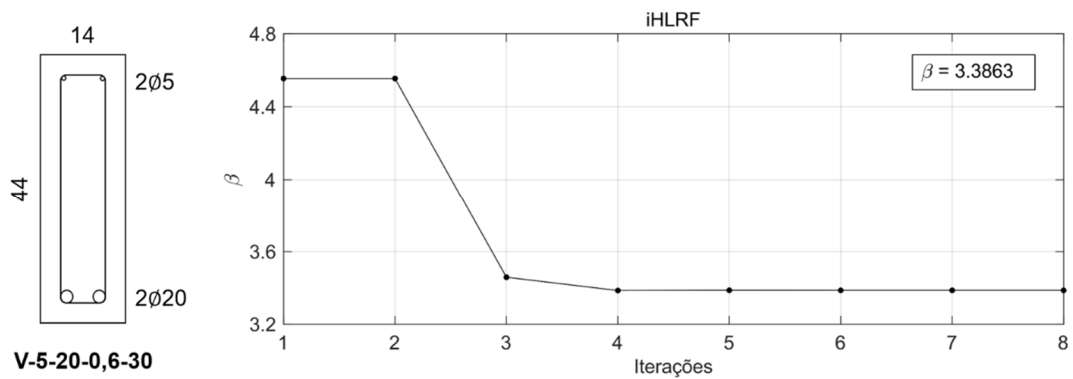
Fonte: O Autor (2020).

Gráfico 21 – Índice de confiabilidade por Simulação de Monte Carlo para a viga V-4-30-0,6-25.



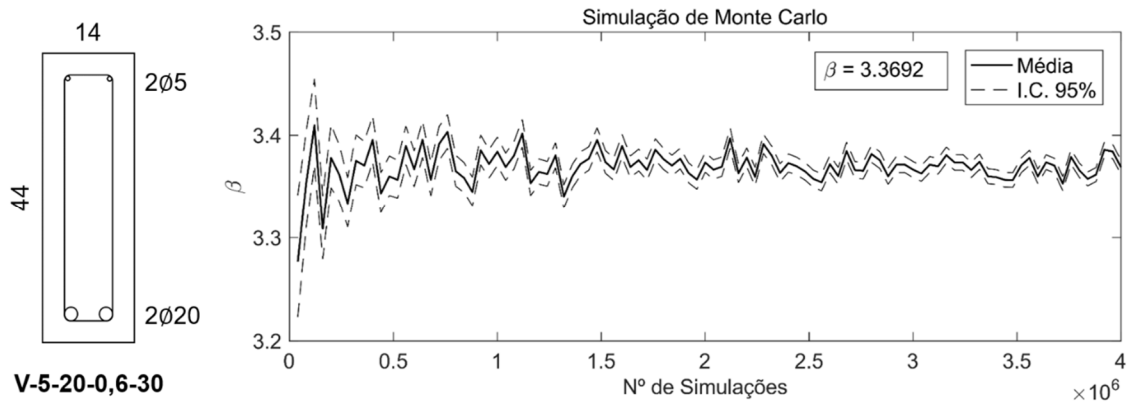
Fonte: O Autor (2020).

Gráfico 22 – Índice de confiabilidade pelo iHLRF para a viga V-5-20-0,6-30.



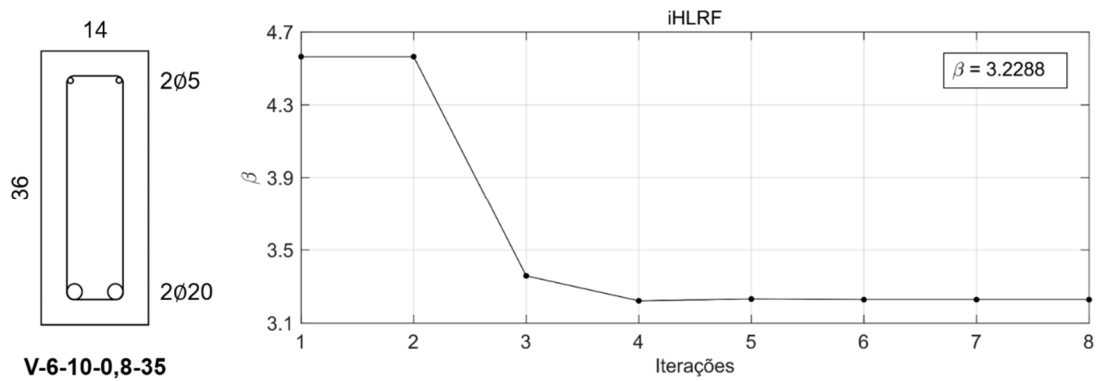
Fonte: O Autor (2020).

Gráfico 23 – Índice de confiabilidade por Simulação de Monte Carlo para a viga V-5-20-0,6-30.



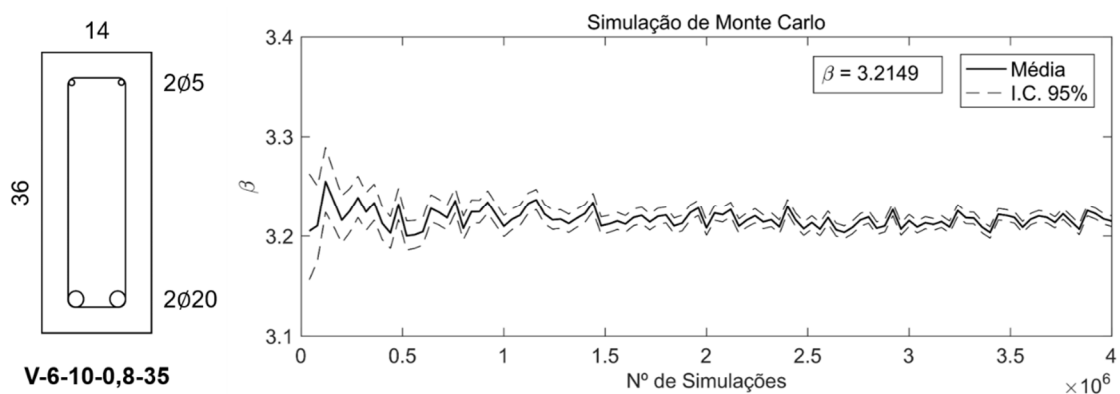
Fonte: O Autor (2020).

Gráfico 24 – Índice de confiabilidade pelo iHLRF para a viga V-6-10-0,8-35.



Fonte: O Autor (2020).

Gráfico 25 – Índice de confiabilidade por Simulação de Monte Carlo para a viga V-6-10-0,8-35.



Fonte: O Autor (2020).

Por meio dos exemplos anteriores, é apresentada a metodologia para avaliar a confiabilidade de vigas de concreto armado otimizadas. A abordagem estocástica, através do

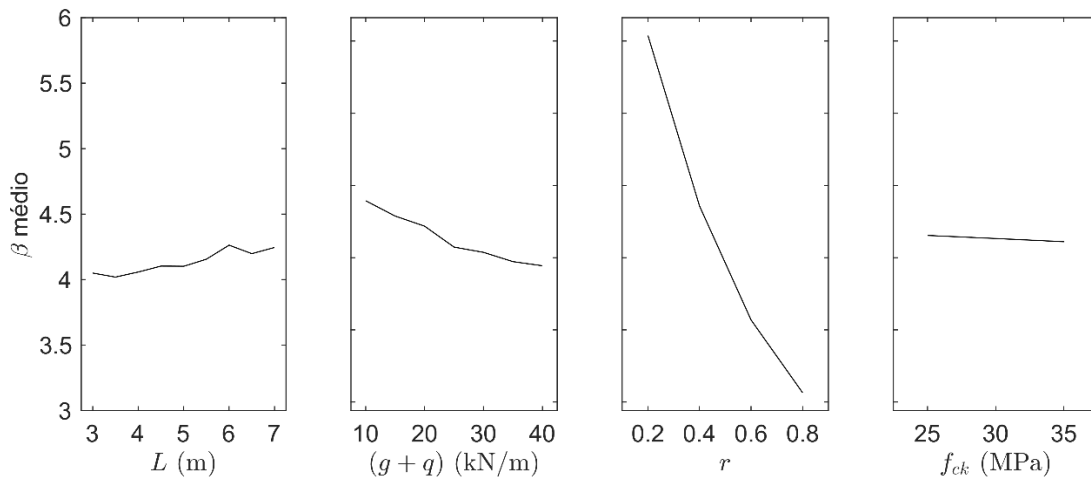
iHLRF, possibilita quantificar a confiabilidade das vigas em relação ao estado-limite de flexão, considerando as incertezas de alguns parâmetros de projeto. O iHLRF, como observado nos exemplos, converge para o índice de confiabilidade em poucas iterações, e sua validade pode ser comprovada através da simulação de Monte Carlo.

6.2 Tendências do índice de confiabilidade

Para identificar tendências do índice de confiabilidade nas diversas situações de projeto das vigas otimizadas, foram realizadas análises dos resultados do APÊNCIDE B.

No Gráfico 26 é apresentado o gráfico de efeitos principais para o índice de confiabilidade. No gráfico, para cada parâmetro L , $(g + q)$, r e f_{ck} , são apresentadas as médias de β em cada valor do parâmetro. É verificado que existe uma mudança nos valores de β a medida que L é variado. Da mesma forma, os valores de β mudam com a variação de $(g + q)$. Com a variação da relação r , também é observada uma mudança em β . O gráfico de r , quando comparado aos de L e $(g + q)$, apresenta uma grande inclinação, o que indica um grande efeito desse parâmetro em β . Já as variações do f_{ck} não apresentam mudanças significativas em β , quando comparadas as mudanças devido as variações dos outros parâmetros.

Gráfico 26 – Gráfico de efeitos principais para o índice de confiabilidade.

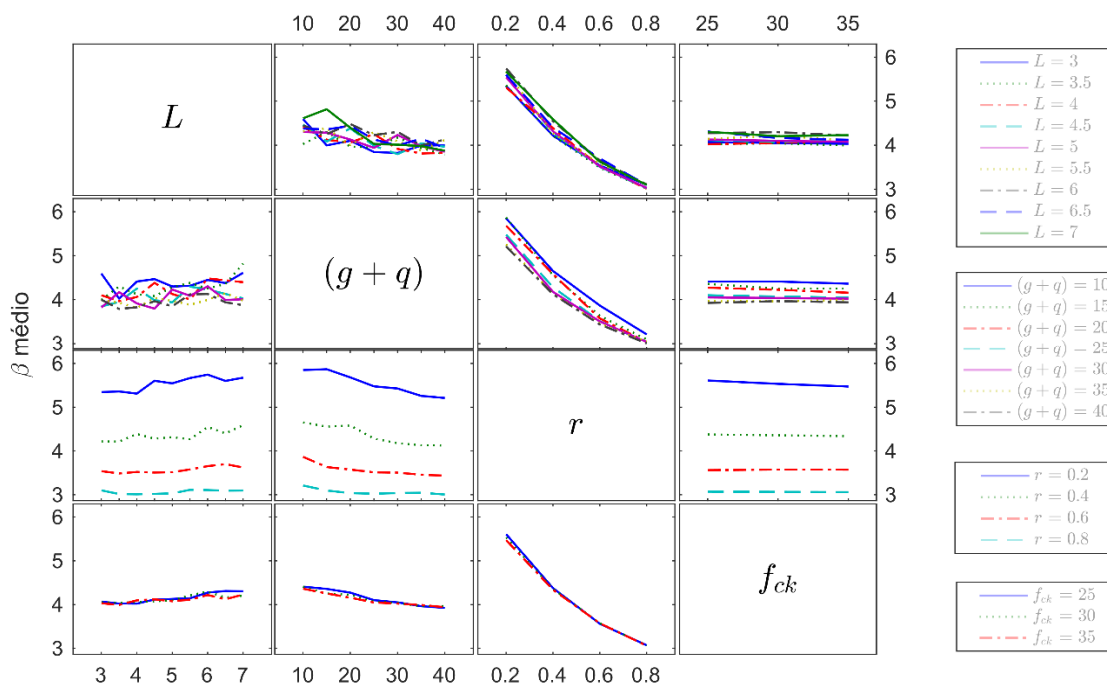


Fonte: O Autor (2020).

No Gráfico 27 é apresentado o gráfico de interação para o índice de confiabilidade. No gráfico, é possível observar a interação entre os parâmetros L , $(g + q)$, r e f_{ck} , através das médias do índice de confiabilidade em cada valor do parâmetro. É verificado que existe uma interação entre $L - (g + q)$, $L - r$ e $(g + q) - r$, pois as linhas dos gráficos não são paralelas.

Essa interação entre os parâmetros afeta os valores de β , como observado no Gráfico 27. A interação do f_{ck} com os demais parâmetros é menos expressiva, pois as linhas dos gráficos são quase paralelas.

Gráfico 27 – Gráfico de interação para o índice de confiabilidade.



Fonte: O Autor (2020).

Os gráficos de efeitos principais e de interação indicam que existe um efeito principal no índice de confiabilidade devido a variação dos parâmetros L , $(g + q)$ e r , onde o efeito mais significativo em β ocorre devido as variações de r , e que as interações do f_{ck} com os demais parâmetros não tem influência significativa nos valores de β . A grande influência de r no índice de confiabilidade de vigas de concreto armado também foi observada por Santos, Stucchi e Beck (2014); Nogueira e Pinto (2016) e Scherer (2018).

Para verificar se as observações anteriores são válidas, foi realizada uma análise ANOVA para o índice de confiabilidade. Os resultados da ANOVA se encontram na Tabela 11. Como os valores- p de L , $(g + q)$ e r são menores que 0,05, existem valores médios de β significativamente diferentes nas variações dos parâmetros. O valor- p do f_{ck} foi maior que 0,05, indicando que os valores médios de β nas variações do f_{ck} não são significativamente diferentes. Os valores- p das interações do f_{ck} com os demais parâmetros foram maiores que 0,05, indicando que essas interações não são estatisticamente significativas em β . A interação entre L - r também não é significativa, já que apresentou valor- p maior que 0,05. Ao analisar

novamente o Gráfico 27, verifica-se que, de fato, a interação entre $L - r$ não é significativa, já que as linhas do gráfico apresentam certo grau de paralelismo.

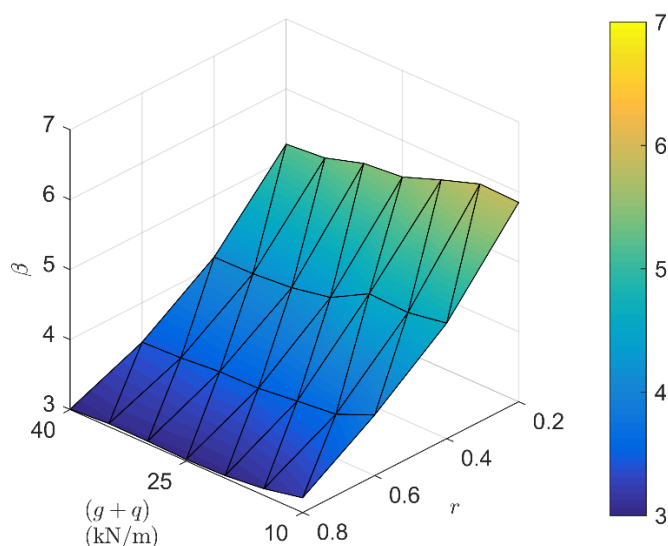
Tabela 11 – Análise de Variância (ANOVA) para o índice de confiabilidade.

Parâmetros	Valor- p
L	0
$(g + q)$	0
r	0
f_{ck}	0,3390
$L - (g + q)$	0
$L - r$	0,1411
$L - f_{ck}$	0,9431
$(g + q) - r$	0,0001
$(g + q) - f_{ck}$	0,9837
$r - f_{ck}$	0,7228

Fonte: O Autor (2020).

No Gráfico 28 é apresentada a superfície de β em função de $(g + q)$ e r . Além da interação $(g + q) - r$, a interação $L - (g + q)$ também resultou estatisticamente significativa conforme a ANOVA. Porém, essa interação não aparenta resultar em uma tendência para β , como observado no Gráfico 27. Além disso, o efeito dessa interação é menor, quando comparado ao de $(g + q) - r$. Existe uma tendência bem definida do aumento do índice de confiabilidade à medida que r e $(g + q)$ diminuem. A influência de r no aumento de β é mais significativa do que a influência de $(g + q)$.

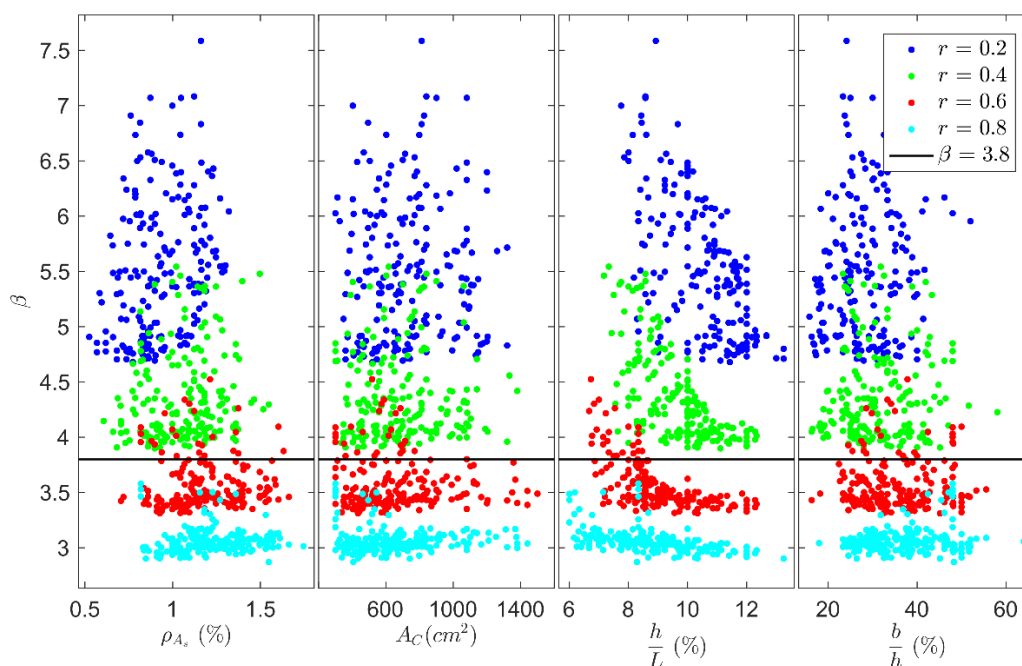
Gráfico 28 – Relação entre o índice de confiabilidade e parâmetros de projeto.



Fonte: O Autor (2020).

Além das tendências de β em função dos parâmetros de projeto, também foram investigadas as tendências em função das características das vigas otimizadas. No Gráfico 29 são apresentadas as relações de β com a taxa de armadura tracionada (ρ_{As}), área de concreto (A_C), e com as relações $\frac{h}{L}$ e $\frac{b}{h}$. O comportamento de β é claramente definido pela relação r , como observado nos resultados anteriores. Verifica-se que não existe uma tendência de β em função de ρ_{As} , A_C e $\frac{b}{h}$. Para a relação $\frac{h}{L}$, no entanto, existe a tendência de diminuição do índice de confiabilidade com o aumento de $\frac{h}{L}$. Essa tendência é mais evidente para valores baixos de r .

Gráfico 29 – Relação entre o índice de confiabilidade e parâmetros da viga.

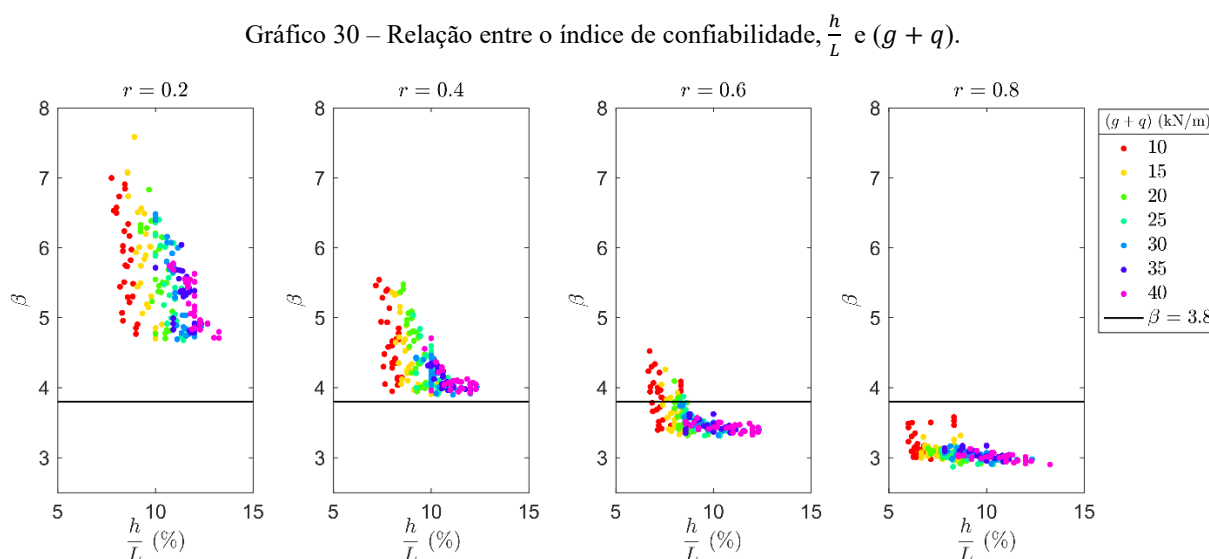


Fonte: O Autor (2020).

No Gráfico 29, o índice de confiabilidade igual a 3,8 representa um valor mínimo de confiabilidade sugerido pelo código modelo *fib* 2010 (FIB, 2013) para estados-limites últimos, considerando um período representativo de 50 anos e falhas com consequências médias. Esse índice de confiabilidade alvo também foi considerado nas avaliações de Santos, Stucchi e Beck (2014); Nogueira e Pinto (2016) e Scherer (2018). É observado que, de modo geral, independente das características das vigas otimizadas, o índice de confiabilidade resultou menor que 3,8 para valores maiores de r (0,6 e 0,8). Dessa forma, nessas situações, as vigas

otimizadas não possuem um índice de confiabilidade mínimo, seguindo o critério do código *fib* 2010 (FIB, 2013).

No Gráfico 30 são apresentados os índices de confiabilidade em função da relação $\frac{h}{L}$ e do carregamento $(g + q)$. Os índices de confiabilidade foram separados pelos valores de r , para se ter uma melhor visualização das possíveis tendências. Os resultados no gráfico indicam que a tendência de β diminuir com o aumento de $\frac{h}{L}$, está relacionada com $(g + q)$. A medida que a relação $\frac{h}{L}$ se torna maior, juntamente com $(g + q)$, o índice de confiabilidade tende a diminuir. Dessa forma, as vigas otimizadas com valores elevados de $\frac{h}{L}$ e sujeitas a um grande carregamento, tendem a ter índices de confiabilidade menores.

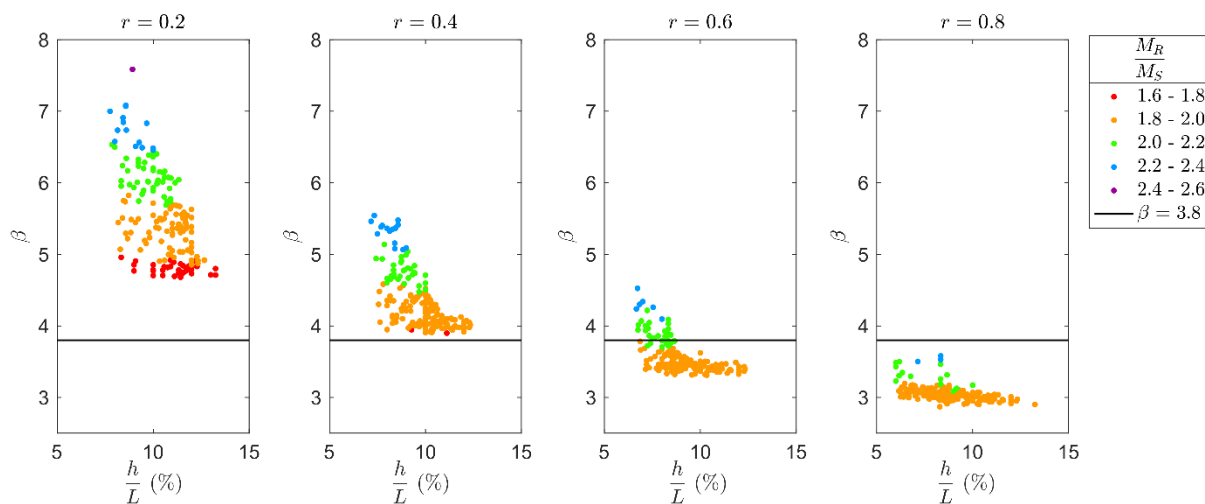


Fonte: O Autor (2020).

Para encontrar uma justificativa da tendência de diminuição do índice de confiabilidade com o aumento de $\frac{h}{L}$ e $(g + q)$, foram calculados o momento resistente (M_R) e o momento solicitante (M_S) das vigas otimizadas, considerando os valores médios das variáveis aleatórias X (Tabela 6). Através da relação $\frac{M_R}{M_S}$, é possível inferir sobre a resistência e a solicitação da viga. No Gráfico 31 são apresentados os índices de confiabilidade em função de $\frac{h}{L}$ e $\frac{M_R}{M_S}$. É observada uma tendência geral da diminuição da relação $\frac{M_R}{M_S}$ com o aumento de $\frac{h}{L}$, indicando uma maior solicitação nas vigas nessas situações. Assim, as vigas otimizadas com valores elevados de $\frac{h}{L}$ e

carregamento, tendem a apresentar uma maior solicitação e, conseqüentemente, índices de confiabilidade menores.

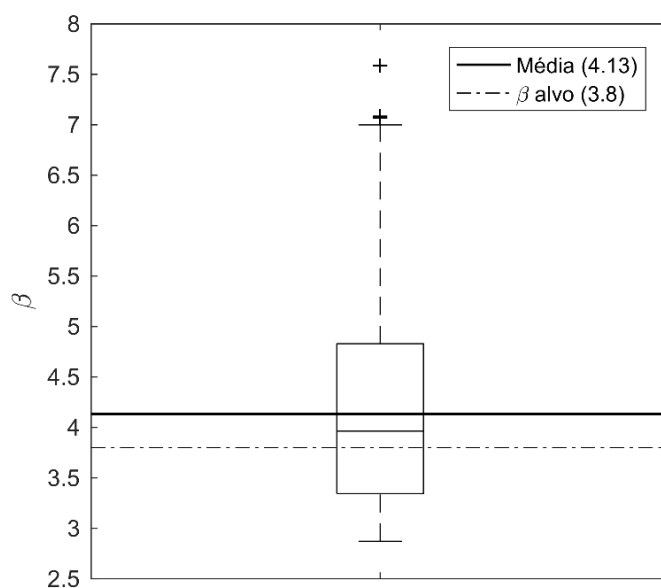
Gráfico 31 – Relação entre o índice de confiabilidade, $\frac{h}{L}$ e $\frac{M_R}{M_S}$.



Fonte: O Autor (2020).

Um resumo estatístico do índice de confiabilidade das vigas otimizadas é apresentado no *boxplot* do Gráfico 32. A média dos índices de confiabilidade foi igual a 4,13. Tanto a média quanto a mediana são maiores que o índice mínimo de 3,8. Dos 756 índices obtidos, 404 foram maiores que 3,8, o que representa 53,44% dos casos.

Gráfico 32 – Variação do índice de confiabilidade.



Fonte: O Autor (2020).

6.3 Análise dos coeficientes de sensibilidade

No item 2.4.2 deste trabalho foi exposto que os cossenos diretores (Equação 39) indicam a importância relativa das variáveis aleatórias na probabilidade de falha, sendo denominados de coeficientes de sensibilidade. O valor de α_i^2 indica a contribuição relativa da variável aleatória x_i na composição da probabilidade de falha: quanto maior for α_i^2 , maior será a contribuição de x_i na probabilidade de falha (BECK, 2019).

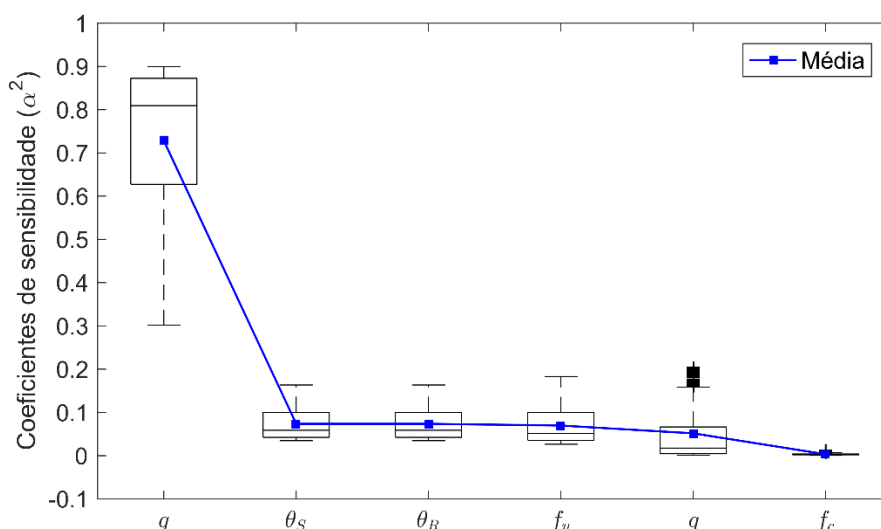
Na Tabela 12 são apresentados os valores médios dos coeficientes de sensibilidade, obtidos na determinação dos índices de confiabilidade das vigas otimizadas, para cada variável aleatória x_i . O sinal dos coeficientes indica se a variável aleatória é de “resistência” ou de “solicitação”.

Tabela 12 – Coeficientes de sensibilidade.

x_i	α_i^2 (valor médio)
q	-0,7277
θ_S	-0,0737
θ_R	0,0737
f_y	0,0697
g	-0,0521
f_c	0,0032

Fonte: O Autor (2020).

No Gráfico 33 são apresentados os *boxplot* dos coeficientes de sensibilidade, para cada variável aleatória. Para possibilitar uma comparação entre os coeficientes, no gráfico se encontram os valores absolutos de α_i^2 . A ordem dos coeficientes no gráfico é referente aos seus valores médios: a variável q tem o maior coeficiente, enquanto que f_c tem o de menor valor. Assim, as variáveis aleatórias têm maior influência na probabilidade de falha na seguinte ordem: q , θ_S , θ_R , f_y , g e f_c . Verifica-se que o coeficiente de sensibilidade com maior variação nas vigas otimizadas foi o da carga variável q . Apesar dessa variação, o *boxplot* indica que o coeficiente mínimo de q ainda é maior que os coeficientes das outras variáveis. É interessante observar que as variáveis aleatórias relacionadas aos erros de modelo também têm influência na probabilidade de falha. Scherer (2018) também observou a grande influência da carga variável e das variáveis de erro de modelo nos índices de confiabilidade de vigas de concreto armado.

Gráfico 33 – *Boxplot* para os coeficientes de sensibilidade.

Fonte: O Autor (2020).

6.4 Conclusões sobre a confiabilidade

Através da abordagem estocástica, foi possível determinar o índice de confiabilidade das vigas de concreto armado otimizadas. O índice de confiabilidade está associado a probabilidade de falha das vigas em relação ao estado-limite de flexão, quando são consideradas as incertezas nos modelos de resistência e solicitação, nas cargas e na resistência dos materiais. Por meio dos exemplos apresentados no item 6.1, foi verificado que o índice de confiabilidade das vigas otimizadas pode ser determinado pelo algoritmo iHLRF em poucas iterações.

Para as diversas situações de projeto analisadas, foi observado que existe uma tendência bem definida do índice de confiabilidade das vigas otimizadas, à medida que o carregamento e a relação entre as cargas são alterados. A medida que r e $(g + q)$ diminuem, o índice de confiabilidade aumenta, sendo que esse aumento é causado majoritariamente pela relação r . No projeto das vigas otimizadas, um valor pequeno de r ($r = \frac{q}{g+q}$) representa uma parcela pequena de carga variável no carregamento total. Assim, a tendência observada indica que o índice de confiabilidade das vigas otimizadas é maior nas situações de projeto com pouca carga variável. Essa grande influência de r no índice de confiabilidade se justifica uma vez que, dentre as variáveis aleatórias consideradas, a carga variável é a que possui uma maior variabilidade no espaço e no tempo. Além disso, a análise dos coeficientes de sensibilidade resultou que, de fato, a carga variável é a variável aleatória de maior influência na probabilidade de falha das vigas.

Em relação à variação do vão no projeto das vigas otimizadas, foi verificado que existe um efeito no índice de confiabilidade das vigas devido a essa variação. Porém, não existe uma

tendência ou interação bem definida com os demais parâmetros de projeto. Já as variações no f_{ck} não resultaram em mudanças significativas no índice de confiabilidade. As análises dos gráficos de efeitos principais, de interações e da ANOVA indicaram a ausência de influência do f_{ck} . De fato, os coeficientes de sensibilidade indicam que a variável aleatória f_c tem a menor influência na probabilidade de falha das vigas otimizadas. Além disso, f_c praticamente não apresentou variabilidade dos coeficientes de sensibilidade nas diversas situações de projeto, o que significa que f_c tem uma influência muito pequena na probabilidade de falha, independente da situação de projeto ou das características da viga.

Os resultados indicam que não existe uma tendência para o índice de confiabilidade em função da taxa de armadura tracionada, área de concreto e da relação largura/altura das vigas otimizadas. Porém, existe a tendência de diminuição do índice de confiabilidade com o aumento da relação altura/vão, em função da relação r . Essa tendência também está relacionada ao carregamento, pois as relações altura/vão com maiores valores ocorrem nas situações de carregamento elevado (Gráfico 30). Esse comportamento é justificado pelo aumento da solicitação nas vigas nessas situações de altura/vão e carregamento elevados (Gráfico 31). Então, é possível afirmar que as vigas otimizadas para carregamentos elevados, e que apresentam uma relação altura/vão elevada, tendem a apresentar menores índices de confiabilidade.

A média dos índices de confiabilidade das vigas otimizadas foi igual a 4,13, sendo superior ao valor mínimo de 3,8 recomendado pelo código modelo *fib* 2010 (FIB, 2013). Apesar das variações do índice de confiabilidade entre, aproximadamente, 3 e 7 (Gráfico 32), mais da metade dos índices obtidos (53,44%) foram maiores que 3,8, indicando uma confiabilidade aceitável para as vigas otimizadas nesses casos. As vigas que apresentaram um índice de confiabilidade menor que 3,8, de modo geral, são as que foram projetadas com carga variável elevada. Nesses casos, como observado no Gráfico 30, as vigas apresentam índices de confiabilidade menores que o aceitável, independentemente de suas características (taxa de armadura, área de concreto, etc.).

A análise dos coeficientes de sensibilidade comprovou que, dentre as variáveis aleatórias consideradas, a mais influente na probabilidade de falha é a carga variável. Também foi observado que as variáveis relacionadas ao erro de modelo da resistência e da solicitação possuem uma certa influência na confiabilidade das vigas. Assim, devem ser consideradas na avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado otimizadas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi realizada a otimização e avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado, em diferentes situações de projeto. No projeto ótimo, as dimensões e armaduras da seção transversal foram determinadas para minimizar o custo das vigas, atendendo as restrições impostas. Na avaliação da confiabilidade das vigas otimizadas, o índice de confiabilidade, associado a probabilidade de falha da viga em relação ao estado-limite de flexão, foi determinado considerando as incertezas nos modelos de cálculo, nos carregamentos e na resistência dos materiais.

A metodologia proposta para a otimização das vigas de concreto armado possibilitou um projeto ótimo de custo mínimo. As dimensões e armaduras da seção transversal das vigas foram determinados através de conceitos de otimização, utilizando Algoritmos Genéticos, e não por procedimentos convencionais de projeto, onde se tem apenas uma solução viável que não necessariamente é a solução ótima. Dessa forma, a metodologia empregada permitiu encontrar a solução mais econômica para as vigas, respeitando os critérios de projeto. Esse procedimento se torna atrativo à medida que conduz a uma economia em relação a soluções obtidas por procedimentos convencionais.

Através dos resultados da otimização das vigas em diversas situações de projeto, foi possível identificar tendências relacionadas as características das vigas otimizadas. Foram encontradas tendências para as dimensões e armaduras da seção transversal em função dos parâmetros de projeto, e também para as restrições do processo de otimização das vigas. Foi observado que não existe uma tendência bem definida para a largura ótima das vigas. Já para a altura ótima, existe uma tendência marcante, principalmente em função do vão. Os valores de altura/vão e largura/altura também apresentam tendências na otimização. Em relação as armaduras, as vigas otimizadas tendem a ter poucas barras na seção transversal.

A metodologia proposta para a avaliação da confiabilidade das vigas de concreto armado otimizadas possibilitou quantificar a confiabilidade das vigas por meio do índice de confiabilidade. Através dessa abordagem estocástica foram consideradas as incertezas no projeto das vigas, e determinados os índices de confiabilidade através do algoritmo iHLRF. As vigas otimizadas, na maior parte das situações de projeto consideradas, apresentaram índices de confiabilidade acima do valor mínimo recomendado por códigos normativos. Nesses casos, pode-se afirmar que as vigas otimizadas são seguras em relação ao estado-limite de flexão, frente as incertezas no projeto. A ocorrência dos índices de confiabilidade abaixo do valor mínimo se deu nas situações de projeto com carga variável considerável.

Através dos resultados obtidos para as diversas situações de projeto, também foi possível identificar tendências para o índice de confiabilidade, em função dos parâmetros de projeto e das características das vigas otimizadas. Foi observada uma tendência bem definida para o índice de confiabilidade em função da relação entre as cargas. Foi verificada, também, a existência de uma relação entre o índice de confiabilidade e a altura/vão das vigas otimizadas.

Em um sentido amplo, a grande contribuição desta pesquisa foi fornecer um conjunto de informações sobre vigas otimizadas de concreto armado. As metodologias empregadas podem servir de base para outras pesquisas de otimização de vigas. As tendências observadas, tanto na otimização quanto na confiabilidade, fornecem uma série de informações sobre o comportamento das vigas otimizadas. O conhecimento desse comportamento pode ser útil na melhoria da formulação do problema de otimização, ou mesmo na busca por estimativas de projeto mais econômicas e seguras. Particularmente, essas informações podem fornecer o embasamento para a formulação de um problema de otimização que leva em consideração a confiabilidade, chamado de *Reliability Based Optimal Design* (Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade).

A seguir, são feitas as seguintes sugestões de pesquisas futuras, como continuidade deste trabalho:

- Considerar na formulação do problema de otimização das vigas de concreto outros critérios de projeto, como a possibilidade do desenvolvimento longitudinal das armaduras, evitando o prolongamento de todas as barras até os apoios;
- Melhorar a formulação do problema de otimização, com base nas conclusões apresentadas nesta pesquisa;
- Variar os custos unitários do concreto, do aço e das fôrmas, e investigar as tendências da otimização, frente a essas variações;
- Ampliar a investigação das tendências da otimização, considerando outras relações e coletando informações estatísticas, tais como distribuições de probabilidade das variáveis de projeto;
- Considerar, na avaliação da confiabilidade das vigas otimizadas, outras variáveis aleatórias, como as dimensões da seção transversal da viga e sua altura útil, por exemplo.

Por fim, é importante ressaltar que todos os resultados e conclusões obtidos nesta pesquisa são referentes aos casos considerados. Em outras situações, com considerações diferentes, resultados divergentes podem ser encontrados.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, L. J. **Otimização do Pré-Projeto de Vigas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos**. 2014. 152 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

ANG, A.H-S; TANG, W.H. **Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**. 2ª ed, John Wiley & Sons, 2007.

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. v. 1, 4ª ed, Rio Grande: Dunas, 2014.

ARORA, J.S. **Introduction to Optimum Design**. 3ª ed, Elsevier Academic press, 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, NBR 6118**. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

BECK, A. T. **Quantificação de incertezas em engenharia de estruturas**. In: VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, 2014, Rio de Janeiro.

BECK, A. T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**. 1ª ed, Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

BEZERRA, L. A. **Emprego de Algoritmos Genéticos para Otimização de Vigas de Concreto Armado**. 2017. 121 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) – PPGECA, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.

BUNEO, S.; KIMURA, A. **ABNT NBR 6118:2014 Comentários e Exemplos de Aplicação**. 1ª ed, São Paulo: IBRACON, 2015.

CAMP, C.V.; HUQ, F. CO2 and cost optimization of reinforced concrete frames using a big bang-crunch algorithm. **Engineering Structures**, n. 48, p. 363-372, 2013.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. 4ª ed, São Carlos: EdUFScar, 2014.

CHOI, S. K.; GRANDHI, R. V.; CANFIELD, R. A. **Reliability-based structural design**. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

COELHO, J. D. **Confiabilidade de vigas de concreto armado no estado limite de serviço**. 2011. 272 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

DORIGO, M.; STÜTZLE, T. **Ant Colony Optimization**. Massachusetts: MIT Press, 2004.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. **fib Model Code for Concrete Structures 2010**. Ernst & Son, 2013.

GAN, V. J. L. *et al.* Parametric modelling and evolutionary optimization for cost-optimal and low-carbon design of high-rise reinforced concrete buildings. **Advanced Engineering Informatics**, v. 42, artigo 100962, 2019.

GIBBS, M. S.; MAIER, H. R.; DANDY, G. C. Using characteristics of the optimisation problem to determine the Genetic Algorithm population size when the number of evaluations is limited. **Environmental Modelling & Software**, v. 69, p. 226-239, 2015.

GILBERT, E. **Comer, rezar, amar**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2008.

GOVINDARAJ, V.; RAMASAMY, J. V. Optimum Detailed Design of Reinforced Concrete Continuous Beams Using Genetic Algorithms. **Computers & Structures**, v. 84, p. 34-48, 2005.

HAFTKA, R. T.; GURDAL, Z. **Elements of structural optimization**. 3^a ed, Kluwer Academic Publishers, 1992.

KANAGASUNDARAM, S.; KARIHALOO, B. L. Minimum-cost Reinforced Concrete Beams and Columns. **Computers & Structures**, v. 41, n. 3, p. 509-518, 1991.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. C. **Swarm intelligence**. São Francisco: Morgan Kaufmann, 2001.

KIMURA, A. **Informática aplicada a estruturas de concreto armado**. 2^a ed, São Paulo: Oficina de Textos, 2018.

KIOUMARSI, M. M. *et al.* The effect of interference of corrosion pits on the failure probability of a reinforced concrete beam. **Engineering Structures**, v. 114, p. 113-121, 2016.

LIMA, M. L. R. **Otimização topológica e paramétrica de vigas de concreto armado utilizando Algoritmos Genéticos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

MARTINEZ, W. L.; CHO, M. **STATISTICS IN MATLAB®: A PRIMER**. CRC Press, 2014.

MATAMOROS, M. E. V.; KUMRAL, M. Calibration of Genetic Algorithm Parameters for Mining-Related Optimization Problems. **Natural Resources Research**, v. 28, p. 443-456, 2019.

MATHWORKS Inc. **Global Optimization Toolbox User's Guide**. Release 2020a (Versão 4.3), 2020.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. **Structural reliability analysis and prediction**. 3^a ed, Hoboken: Wiley, 2018.

MIRJALILI, S. Dragonfly algorithm: a new meta-heuristic optimization technique for solving single-objective, discrete, and multi-objective problems. **Neural Comput & Applications**, v. 27, p. 1053–1073, 2016.

MITCHELL, M. **An Introduction to Genetic Algorithms**. Cambridge: MIT Press, 1996.

MOBIN, M. *et al.* A hybrid desirability function approach for tuning parameters in evolutionary optimization algorithms. **Measurement**, v. 114, p. 417-427, 2018.

MONTEIRO, J. M. A. **Dimensionamento otimizado de vigas em pórticos planos de concreto armado utilizando Algoritmos Genéticos**. 2019. 105 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) – PPGECA, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

MONTERO, E.; RIFF, M-C. On-the-fly calibrating strategies for evolutionary algorithms. **Information Sciences**, v. 181, n. 3, p. 552-556, 2011.

NASCIMENTO, K. M. B. **Dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado utilizando Algoritmos Genéticos**. 2017. 98 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) – PPGECA, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.

NOGUEIRA, C. G.; PINTO, M D. T. Avaliação da variabilidade da segurança de vigas em concreto armado submetidas ao momento fletor considerando os coeficientes parciais de segurança da NBR 6118:2014. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 9, n. 5, p. 682-709, 2016.

NUNES, J. P. A. **Otimização de lajes nervuradas de concreto armado, utilizando Algoritmo Genético**. 2018. 131 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) – PPGECA, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2018.

OLIVEIRA, L. F. **Otimização multinível de vigas de concreto armado via Algoritmos Genéticos**. 2014. 114 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – PEC, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

PALIGA, C. M. **Análise Probabilística de Vigas de Concreto Armado recuperadas à flexão, através do método de Monte Carlo utilizando um modelo de elementos finitos**.

2008. 248 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

PAULISTA, A. M. **Como utilizar o recurso de Otimização da seção das vigas?** AltoQi, 2017. Disponível em: <<http://faq.altoqi.com.br/content/269/1802/pt-br/como-utilizar-o-recurso-de-otimiza%C3%A7%C3%A3o-da-se%C3%A7%C3%A3o-das-vigas.html>>. Acesso em: 07 de mai. de 2019.

PEREIRA, R. E. L. **Otimização topológica de sistema de contraventamento em edificações, considerando os efeitos do vento.** 2018. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) – PPGECA, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2018.

RAHMANIAN, I.; LUCET, Y.; TEFAMARIAM, S. Optimal design of reinforced concrete beams: A review. **Computers and Concrete**, v. 13, n. 4, p. 457-482, 2014.

RAO, S. **Engineering Optimization. Theory and Practice**, 4^a ed, John Wiley & Sons, 2009.

SANTOS, S. R.; MATIOLI, L. C.; BECK, A. T. New Optimization Algorithms for Structural Reliability Analysis. **Computer Modeling in Engineering and Sciences - CMES**, v. 83, n. 1, p. 23-55, 2012.

SANTOS, D. M.; STUCCHI, F. R.; BECK, A. T. Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com as normas brasileiras. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 7, n. 5, p. 723-746, 2014.

SALVADOR, S. M. B. **Estudo do efeito dos parâmetros algorítmicos nos critérios de resolução OC, SAO e MMA em problemas tridimensionais com o método de otimização SIMP.** 2018. 93 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) – PPGECA, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2018.

SCHERER, M. **Avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos.** 2018. 179 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

SINAPI - SISTEMA NACIONAL DE PESQUISA DE CUSTOS E ÍNDICES DA CONSTRUÇÃO CIVIL. Disponível em: <<http://www.caixa.gov.br/poder-publico/apoio-poder-publico/sinapi/Paginas/default.aspx>>. Acesso em: 14 de out. de 2019.

SIVANANDAM S.N.; DEEPA, S.N. **Introduction to Genetic Algorithms.** Springer-Verlag, 2008.

SUDRET, B.; DER KIUREGHIAN, A. **Stochastic Finite Element Methods and Reliability: A State-of-the-Art Report.** Research report No. UCB/SEM M-2000/08, Dep. of Civil & Env. Eng., University of California, Berkeley, 2000.

ZHANG, Y.; DER KIUREGHIAN, A. Two improved algorithms for reliability analysis. In: Proc. 6th IFIP WG7.5 conference on reliability and optimization of structural systems, 1994, Assisi. **Reliability and optimization of structural systems**. Springer-Science+Business Media Dordrecht, 1995.

APÊNDICE A – RESULTADOS

Tabela A.1 – Variáveis de projeto, custo e índice de confiabilidade das vigas otimizadas.

Viga				b	h	n_t	$\varnothing_t$	n_c	$\varnothing_c$	Custo	β
$V - L - (g + q) - r - f_{ck}$				(cm)	(cm)		(mm)		(mm)	(R\$)	
V - 3	10	0,2	25	12	26	2	12,5	2	6,3	243,14	6,17
V - 3,5	10	0,2	25	12	31	2	12,5	2	6,3	316,71	5,49
V - 4	10	0,2	25	12	36	2	12,5	2	6,3	401,37	4,77
V - 4,5	10	0,2	25	13	38	2	16	2	5	500,31	6,85
V - 5	10	0,2	25	13	43	2	16	2	5	604,86	6,34
V - 5,5	10	0,2	25	13	48	2	16	2	5	720,35	5,82
V - 6	10	0,2	25	13	53	2	16	2	6,3	853,31	5,30
V - 6,5	10	0,2	25	13	59	2	16	2	5	996,12	4,91
V - 7	10	0,2	25	14	59	2	20	2	5	1150,03	6,91
V - 3	10	0,2	30	13	25	2	12,5	2	5	239,13	5,95
V - 3,5	10	0,2	30	12	30	2	12,5	2	5	306,73	5,29
V - 4	10	0,2	30	12	36	2	12,5	2	5	396,94	4,85
V - 4,5	10	0,2	30	14	36	2	16	2	5	493,61	6,50
V - 5	10	0,2	30	13	42	2	16	2	5	597,84	6,24
V - 5,5	10	0,2	30	13	47	2	16	2	5	711,80	5,74
V - 6	10	0,2	30	13	52	2	16	2	5	839,51	5,22
V - 6,5	10	0,2	30	12	57	4	12,5	2	5	990,63	5,98
V - 7	10	0,2	30	14	57	2	20	2	5	1131,28	6,73
V - 3	10	0,2	35	12	25	2	12,5	2	5	235,19	6,03
V - 3,5	10	0,2	35	12	29	2	12,5	2	6,3	307,29	5,07
V - 4	10	0,2	35	13	31	2	16	2	6,3	399,27	7,00
V - 4,5	10	0,2	35	13	36	2	16	2	5	487,67	6,58
V - 5	10	0,2	35	12	42	3	12,5	2	5	587,84	5,51
V - 5,5	10	0,2	35	13	45	2	16	2	5	696,59	5,44
V - 6	10	0,2	35	13	50	2	16	2	5	824,92	4,96
V - 6,5	10	0,2	35	12	55	4	12,5	2	5	974,07	5,75
V - 7	10	0,2	35	14	55	2	20	2	6,3	1126,79	6,53
V - 3	15	0,2	25	12	31	2	12,5	2	5	267,12	4,91
V - 3,5	15	0,2	25	13	33	2	16	2	5	354,75	6,49
V - 4	15	0,2	25	13	39	2	16	2	5	452,73	6,01
V - 4,5	15	0,2	25	13	44	2	16	2	6,3	560,73	5,31
V - 5	15	0,2	25	13	50	2	16	2	6,3	681,89	4,78
V - 5,5	15	0,2	25	14	51	2	20	2	5	811,33	6,56
V - 6	15	0,2	25	14	57	2	20	2	5	961,43	6,20
V - 6,5	15	0,2	25	14	58	3	20	2	5	1139,60	7,59
V - 7	15	0,2	25	18	60	3	20	2	6,3	1358,79	7,07
V - 3	15	0,2	30	12	30	2	12,5	2	5	262,48	4,70
V - 3,5	15	0,2	30	12	34	3	12,5	2	5	354,36	6,02
V - 4	15	0,2	30	13	38	2	16	2	5	446,01	5,89
V - 4,5	15	0,2	30	13	43	2	16	2	5	546,80	5,19

V - 5	15	0,2	30	13	50	2	16	2	5	678,59	4,85
V - 5,5	15	0,2	30	14	50	2	20	2	5	805,68	6,51
V - 6	15	0,2	30	14	55	2	20	2	5	942,95	6,01
V - 6,5	15	0,2	30	15	60	2	20	2	5	1114,55	5,50
V - 7	15	0,2	30	14	60	3	20	2	12,5	1330,24	7,08
V - 3	15	0,2	35	12	30	2	12,5	2	5	264,35	4,78
V - 3,5	15	0,2	35	12	33	3	12,5	2	5	350,18	5,84
V - 4	15	0,2	35	13	37	2	16	2	5	442,75	5,74
V - 4,5	15	0,2	35	13	42	2	16	2	5	542,64	5,06
V - 5	15	0,2	35	14	43	2	20	2	6,3	673,74	6,74
V - 5,5	15	0,2	35	12	53	4	12,5	2	5	801,25	5,15
V - 6	15	0,2	35	14	54	2	20	2	5	943,63	5,93
V - 6,5	15	0,2	35	14	59	2	20	2	5	1092,44	5,45
V - 7	15	0,2	35	15	60	3	20	2	5	1306,10	7,07
V - 3	20	0,2	25	13	31	2	16	2	5	292,05	6,15
V - 3,5	20	0,2	25	13	37	2	16	2	5	382,78	5,50
V - 4	20	0,2	25	13	43	2	16	2	5	484,34	4,82
V - 4,5	20	0,2	25	14	45	2	20	2	5	608,81	6,46
V - 5	20	0,2	25	14	51	2	20	2	5	737,45	5,99
V - 5,5	20	0,2	25	14	57	2	20	2	5	881,19	5,50
V - 6	20	0,2	25	14	58	3	20	3	5	1066,99	6,83
V - 6,5	20	0,2	25	20	60	3	20	2	6,3	1304,95	6,23
V - 7	20	0,2	25	14	70	3	20	2	6,3	1533,52	6,21
V - 3	20	0,2	30	12	32	3	12,5	2	5	291,85	5,69
V - 3,5	20	0,2	30	13	36	2	16	2	5	376,78	5,36
V - 4	20	0,2	30	13	42	2	16	2	5	478,93	4,71
V - 4,5	20	0,2	30	14	44	2	20	2	5	602,83	6,39
V - 5	20	0,2	30	14	50	2	20	2	5	732,56	5,93
V - 5,5	20	0,2	30	14	56	2	20	2	5	876,25	5,46
V - 6	20	0,2	30	13	60	4	16	2	5	1047,90	6,17
V - 6,5	20	0,2	30	18	60	3	20	2	5	1267,28	6,33
V - 7	20	0,2	30	12	76	6	12,5	2	5	1504,35	5,09
V - 3	20	0,2	35	12	31	3	12,5	2	5	288,18	5,49
V - 3,5	20	0,2	35	12	37	3	12,5	2	5	377,41	4,83
V - 4	20	0,2	35	13	42	2	16	2	5	482,71	4,78
V - 4,5	20	0,2	35	14	43	2	20	2	5	600,14	6,28
V - 5	20	0,2	35	13	50	3	16	2	5	731,62	5,55
V - 5,5	20	0,2	35	14	54	2	20	2	6,3	873,75	5,23
V - 6	20	0,2	35	14	60	2	20	2	5	1022,08	4,77
V - 6,5	20	0,2	35	14	60	3	20	2	12,5	1249,59	6,28
V - 7	20	0,2	35	13	71	4	16	2	5	1485,18	5,38
V - 3	25	0,2	25	13	34	2	16	2	5	310,49	5,42
V - 3,5	25	0,2	25	13	41	2	16	2	5	411,47	4,80
V - 4	25	0,2	25	14	42	2	20	2	5	523,55	6,01
V - 4,5	25	0,2	25	14	49	2	20	2	5	654,84	5,64
V - 5	25	0,2	25	14	55	2	20	2	5	791,31	5,05

V - 5,5	25	0,2	25	13	60	4	16	2	5	976,87	5,76
V - 6	25	0,2	25	18	60	3	20	3	5	1163,11	5,89
V - 6,5	25	0,2	25	13	71	5	16	2	5	1443,97	6,07
V - 7	25	0,2	25	14	77	3	20	2	5	1645,40	5,43
V - 3	25	0,2	30	13	33	2	16	2	5	305,20	5,27
V - 3,5	25	0,2	30	13	40	2	16	2	5	404,62	4,68
V - 4	25	0,2	30	14	42	2	20	2	5	521,16	6,15
V - 4,5	25	0,2	30	14	48	2	20	2	5	643,97	5,57
V - 5	25	0,2	30	14	54	2	20	2	5	778,17	5,00
V - 5,5	25	0,2	30	14	56	3	20	2	5	959,19	6,40
V - 6	25	0,2	30	15	60	2	25	2	5	1146,24	6,19
V - 6,5	25	0,2	30	13	72	4	16	3	5	1424,52	4,96
V - 7	25	0,2	30	14	75	3	20	2	5	1613,79	5,32
V - 3	25	0,2	35	12	34	3	12,5	2	5	305,86	4,74
V - 3,5	25	0,2	35	13	40	2	16	2	5	407,76	4,76
V - 4	25	0,2	35	14	41	2	20	2	5	516,49	6,03
V - 4,5	25	0,2	35	14	47	2	20	2	5	639,39	5,48
V - 5	25	0,2	35	14	53	2	20	2	5	775,23	4,92
V - 5,5	25	0,2	35	14	55	3	20	2	5	950,23	6,36
V - 6	25	0,2	35	14	60	3	20	2	10	1135,51	5,89
V - 6,5	25	0,2	35	13	71	4	16	2	5	1379,49	4,92
V - 7	25	0,2	35	15	73	3	20	2	5	1620,38	5,18
V - 3	30	0,2	25	13	37	2	16	2	5	331,67	4,87
V - 3,5	30	0,2	25	14	39	2	20	2	5	441,52	6,00
V - 4	30	0,2	25	14	45	2	20	2	6,3	563,87	5,37
V - 4,5	30	0,2	25	14	52	2	20	2	5	694,93	4,84
V - 5	30	0,2	25	15	54	3	20	2	5	875,99	6,07
V - 5,5	30	0,2	25	16	60	3	20	2	5	1049,36	5,65
V - 6	30	0,2	25	20	60	4	20	3	5	1294,15	6,40
V - 6,5	30	0,2	25	14	75	3	20	2	5	1520,77	5,03
V - 7	30	0,2	25	15	80	2	25	2	5	1774,47	4,87
V - 3	30	0,2	30	13	36	2	16	2	5	325,49	4,73
V - 3,5	30	0,2	30	14	38	2	20	2	5	433,37	5,92
V - 4	30	0,2	30	15	44	2	20	2	5	553,93	5,29
V - 4,5	30	0,2	30	14	51	2	20	2	5	682,46	4,78
V - 5	30	0,2	30	15	53	3	20	2	5	863,97	6,08
V - 5,5	30	0,2	30	14	60	3	20	2	5	1021,15	5,74
V - 6	30	0,2	30	18	60	4	20	2	5	1253,89	6,48
V - 6,5	30	0,2	30	14	74	3	20	2	5	1500,82	5,04
V - 7	30	0,2	30	14	82	3	20	3	5	1743,30	4,77
V - 3	30	0,2	35	13	36	2	16	2	5	326,05	4,82
V - 3,5	30	0,2	35	14	37	2	20	2	6,3	432,97	5,80
V - 4	30	0,2	35	14	44	2	20	2	5	547,35	5,36
V - 4,5	30	0,2	35	14	50	2	20	2	5	672,77	4,69
V - 5	30	0,2	35	14	53	3	20	2	5	853,87	6,16
V - 5,5	30	0,2	35	14	59	3	20	2	5	1012,19	5,70

V - 6	30	0,2	35	17	60	4	20	2	5	1246,72	6,43
V - 6,5	30	0,2	35	14	72	3	20	3	5	1488,13	4,89
V - 7	30	0,2	35	14	81	3	20	3	5	1731,25	4,74
V - 3	35	0,2	25	12	38	4	12,5	3	5	360,64	4,92
V - 3,5	35	0,2	25	14	41	2	20	2	5	462,46	5,36
V - 4	35	0,2	25	14	48	2	20	2	5	592,11	4,79
V - 4,5	35	0,2	25	13	54	4	16	2	5	763,99	5,39
V - 5	35	0,2	25	14	58	3	20	2	5	923,28	5,59
V - 5,5	35	0,2	25	22	60	3	20	2	5	1140,81	4,83
V - 6	35	0,2	25	14	73	3	20	2	5	1389,89	4,91
V - 6,5	35	0,2	25	15	74	4	20	2	5	1637,95	5,67
V - 7	35	0,2	25	14	82	4	20	2	5	1864,77	5,43
V - 3	35	0,2	30	14	34	2	20	2	5	350,88	6,04
V - 3,5	35	0,2	30	14	40	2	20	2	6,3	461,49	5,30
V - 4	35	0,2	30	14	48	2	20	2	5	586,88	4,91
V - 4,5	35	0,2	30	13	53	4	16	2	5	751,17	5,38
V - 5	35	0,2	30	13	60	4	16	2	5	907,17	4,92
V - 5,5	35	0,2	30	19	60	3	20	2	5	1098,15	4,92
V - 6	35	0,2	30	14	71	3	20	2	5	1368,34	4,79
V - 6,5	35	0,2	30	14	73	4	20	2	5	1606,74	5,68
V - 7	35	0,2	30	14	80	4	20	2	5	1840,10	5,38
V - 3	35	0,2	35	12	37	4	12,5	2	5	349,01	4,91
V - 3,5	35	0,2	35	14	40	2	20	2	5	454,38	5,39
V - 4	35	0,2	35	14	47	2	20	2	5	580,04	4,82
V - 4,5	35	0,2	35	13	52	4	16	2	5	742,38	5,32
V - 5	35	0,2	35	14	56	3	20	2	5	899,03	5,56
V - 5,5	35	0,2	35	18	60	3	20	2	5	1088,75	4,99
V - 6	35	0,2	35	22	60	4	20	2	5	1354,58	5,72
V - 6,5	35	0,2	35	14	72	4	20	2	5	1594,00	5,69
V - 7	35	0,2	35	14	79	4	20	2	5	1827,41	5,38
V - 3	40	0,2	25	15	36	2	20	2	5	375,67	5,51
V - 3,5	40	0,2	25	14	43	2	20	2	5	486,18	4,83
V - 4	40	0,2	25	14	53	2	20	2	6,3	643,14	4,71
V - 4,5	40	0,2	25	13	57	4	16	2	5	801,57	4,92
V - 5	40	0,2	25	14	60	3	20	2	8	974,98	5,03
V - 5,5	40	0,2	25	21	60	4	20	2	5	1227,37	5,68
V - 6	40	0,2	25	15	70	4	20	2	6,3	1487,42	5,44
V - 6,5	40	0,2	25	14	78	4	20	3	5	1708,69	5,16
V - 7	40	0,2	25	14	86	4	20	3	5	1967,80	4,91
V - 3	40	0,2	30	14	36	2	20	2	5	366,41	5,63
V - 3,5	40	0,2	30	14	43	2	20	2	5	483,48	4,97
V - 4	40	0,2	30	14	53	2	20	2	5	635,63	4,80
V - 4,5	40	0,2	30	14	53	3	20	2	5	789,68	5,55
V - 5	40	0,2	30	14	60	3	20	2	5	949,69	5,10
V - 5,5	40	0,2	30	18	60	4	20	3	5	1190,00	5,78
V - 6	40	0,2	30	14	70	4	20	2	5	1463,50	5,55

V - 6,5	40	0,2	30	14	78	4	20	2	5	1690,50	5,31
V - 7	40	0,2	30	14	84	4	20	3	5	1925,38	4,85
V - 3	40	0,2	35	14	35	2	20	2	5	362,10	5,49
V - 3,5	40	0,2	35	14	42	2	20	2	5	475,70	4,85
V - 4	40	0,2	35	14	52	2	20	2	5	627,58	4,71
V - 4,5	40	0,2	35	14	52	3	20	2	5	778,11	5,50
V - 5	40	0,2	35	14	59	3	20	2	5	945,41	5,06
V - 5,5	40	0,2	35	18	59	4	20	3	5	1178,58	5,74
V - 6	40	0,2	35	14	69	4	20	2	5	1447,07	5,55
V - 6,5	40	0,2	35	14	76	4	20	2	5	1672,76	5,20
V - 7	40	0,2	35	14	83	4	20	2	5	1914,61	4,84
V - 3	10	0,4	25	12	25	2	12,5	2	5	232,85	4,69
V - 3,5	10	0,4	25	12	29	2	12,5	2	5	298,92	4,04
V - 4	10	0,4	25	13	31	2	16	2	5	389,13	5,40
V - 4,5	10	0,4	25	12	37	3	12,5	2	5	479,64	4,70
V - 5	10	0,4	25	13	40	2	16	2	5	575,45	4,66
V - 5,5	10	0,4	25	13	45	2	16	2	5	687,04	4,35
V - 6	10	0,4	25	13	51	2	16	2	5	820,80	4,15
V - 6,5	10	0,4	25	14	50	2	20	2	6,3	954,97	5,38
V - 7	10	0,4	25	14	55	2	20	2	5	1090,83	5,14
V - 3	10	0,4	30	12	25	2	12,5	2	5	233,63	4,78
V - 3,5	10	0,4	30	12	29	2	12,5	2	5	299,98	4,12
V - 4	10	0,4	30	13	30	2	16	2	5	383,48	5,29
V - 4,5	10	0,4	30	12	36	3	12,5	2	5	472,84	4,60
V - 5	10	0,4	30	13	39	2	16	2	5	568,14	4,58
V - 5,5	10	0,4	30	13	44	2	16	2	5	679,42	4,28
V - 6	10	0,4	30	14	44	2	20	2	6,3	813,07	5,54
V - 6,5	10	0,4	30	12	53	4	12,5	2	5	937,10	4,42
V - 7	10	0,4	30	12	58	4	12,5	2	5	1080,00	4,15
V - 3	10	0,4	35	12	25	2	12,5	2	5	235,19	4,85
V - 3,5	10	0,4	35	12	28	2	12,5	2	5	294,51	3,95
V - 4	10	0,4	35	12	31	3	12,5	2	5	384,51	4,94
V - 4,5	10	0,4	35	13	34	3	12,5	2	5	468,40	4,30
V - 5	10	0,4	35	13	38	2	16	2	5	561,78	4,48
V - 5,5	10	0,4	35	13	42	2	16	2	5	662,50	4,05
V - 6	10	0,4	35	14	43	2	20	2	5	799,80	5,46
V - 6,5	10	0,4	35	12	52	4	12,5	2	5	933,36	4,36
V - 7	10	0,4	35	14	52	2	20	2	5	1070,62	4,94
V - 3	15	0,4	25	12	31	2	12,5	2	5	267,12	4,05
V - 3,5	15	0,4	25	13	31	2	16	2	5	340,59	4,77
V - 4	15	0,4	25	13	36	2	16	2	5	429,24	4,34
V - 4,5	15	0,4	25	13	42	2	16	2	5	536,24	4,05
V - 5	15	0,4	25	14	42	2	20	2	6,3	654,08	5,08
V - 5,5	15	0,4	25	14	48	2	20	2	5	777,66	4,89
V - 6	15	0,4	25	14	53	2	20	2	5	910,61	4,56
V - 6,5	15	0,4	25	14	58	2	20	2	6,3	1065,10	4,25

V - 7	15	0,4	25	14	59	3	20	2	6,3	1251,06	5,36
V - 3	15	0,4	30	12	30	2	12,5	2	5	262,48	3,91
V - 3,5	15	0,4	30	13	30	2	16	2	5	335,84	4,65
V - 4	15	0,4	30	13	35	2	16	2	5	423,23	4,24
V - 4,5	15	0,4	30	13	41	2	16	2	5	528,86	3,97
V - 5	15	0,4	30	14	42	2	20	2	5	649,22	5,16
V - 5,5	15	0,4	30	14	46	2	20	2	6,3	766,80	4,72
V - 6	15	0,4	30	14	52	2	20	2	5	904,46	4,53
V - 6,5	15	0,4	30	14	57	2	20	2	5	1050,69	4,21
V - 7	15	0,4	30	14	58	3	20	2	5	1236,90	5,35
V - 3	15	0,4	35	12	26	3	12,5	2	5	259,15	4,69
V - 3,5	15	0,4	35	12	31	3	12,5	2	5	336,74	4,30
V - 4	15	0,4	35	13	34	2	16	2	5	418,60	4,12
V - 4,5	15	0,4	35	14	36	2	20	2	5	534,33	5,36
V - 5	15	0,4	35	12	44	4	12,5	3	5	644,14	4,10
V - 5,5	15	0,4	35	14	45	2	20	2	6,3	765,79	4,65
V - 6	15	0,4	35	14	50	2	20	2	5	891,33	4,35
V - 6,5	15	0,4	35	14	55	2	20	2	6,3	1045,48	4,05
V - 7	15	0,4	35	14	57	3	20	2	5	1237,54	5,32
V - 3	20	0,4	25	13	29	2	16	2	5	281,44	4,47
V - 3,5	20	0,4	25	13	35	2	16	2	5	368,82	4,11
V - 4	20	0,4	25	12	40	4	12,5	2	5	476,26	4,23
V - 4,5	20	0,4	25	14	42	2	20	2	5	583,43	4,72
V - 5	20	0,4	25	14	47	2	20	2	6,3	708,74	4,34
V - 5,5	20	0,4	25	14	53	2	20	2	5	838,78	4,04
V - 6	20	0,4	25	15	54	3	20	2	5	1026,98	4,99
V - 6,5	20	0,4	25	14	60	3	20	2	5	1182,80	4,80
V - 7	20	0,4	25	18	59	4	20	2	6,3	1433,50	5,37
V - 3	20	0,4	30	13	28	2	16	2	6,3	280,33	4,35
V - 3,5	20	0,4	30	13	34	2	16	2	5	363,60	4,00
V - 4	20	0,4	30	15	35	2	20	2	5	471,93	4,91
V - 4,5	20	0,4	30	14	41	2	20	2	5	576,04	4,67
V - 5	20	0,4	30	14	46	2	20	2	5	689,78	4,27
V - 5,5	20	0,4	30	14	52	2	20	2	5	829,20	4,00
V - 6	20	0,4	30	14	54	3	20	2	5	1012,05	5,09
V - 6,5	20	0,4	30	14	59	3	20	2	5	1165,77	4,81
V - 7	20	0,4	30	15	60	4	20	3	5	1394,68	5,41
V - 3	20	0,4	35	12	29	3	12,5	2	5	276,72	3,99
V - 3,5	20	0,4	35	13	34	2	16	2	5	366,27	4,07
V - 4	20	0,4	35	14	35	2	20	2	5	466,90	4,97
V - 4,5	20	0,4	35	14	40	2	20	2	5	570,70	4,59
V - 5	20	0,4	35	14	45	2	20	2	6,3	695,52	4,21
V - 5,5	20	0,4	35	14	51	2	20	2	5	829,59	3,95
V - 6	20	0,4	35	14	53	3	20	2	5	1008,24	5,07
V - 6,5	20	0,4	35	14	58	3	20	2	5	1162,45	4,78
V - 7	20	0,4	35	14	60	4	20	2	5	1373,95	5,48

V - 3	25	0,4	25	13	32	2	16	2	5	299,33	4,00
V - 3,5	25	0,4	25	12	38	4	12,5	2	5	406,71	4,14
V - 4	25	0,4	25	14	40	2	20	2	5	509,36	4,51
V - 4,5	25	0,4	25	14	45	2	20	2	6,3	628,57	4,05
V - 5	25	0,4	25	14	54	2	20	2	5	781,94	4,04
V - 5,5	25	0,4	25	13	56	4	16	2	6,3	944,97	4,24
V - 6	25	0,4	25	14	60	3	20	2	5	1103,87	4,52
V - 6,5	25	0,4	25	18	59	4	20	3	5	1350,09	5,04
V - 7	25	0,4	25	14	73	3	20	2	5	1594,37	4,11
V - 3	25	0,4	30	14	31	2	16	2	5	299,06	3,91
V - 3,5	25	0,4	30	14	33	2	20	2	5	394,64	4,74
V - 4	25	0,4	30	14	39	2	20	2	5	500,43	4,46
V - 4,5	25	0,4	30	14	45	2	20	2	5	618,42	4,12
V - 5	25	0,4	30	13	50	4	16	2	5	786,29	4,60
V - 5,5	25	0,4	30	13	55	4	16	3	5	931,01	4,21
V - 6	25	0,4	30	14	58	3	20	2	5	1078,83	4,43
V - 6,5	25	0,4	30	18	60	3	20	2	10	1304,31	4,00
V - 7	25	0,4	30	14	71	3	20	2	5	1560,72	4,03
V - 3	25	0,4	35	13	31	2	16	2	5	295,20	3,95
V - 3,5	25	0,4	35	14	33	2	20	2	5	393,89	4,84
V - 4	25	0,4	35	14	38	2	20	2	5	493,33	4,37
V - 4,5	25	0,4	35	14	44	2	20	2	5	611,11	4,05
V - 5	25	0,4	35	14	52	2	20	2	5	764,34	3,95
V - 5,5	25	0,4	35	14	52	3	20	2	5	920,99	4,74
V - 6	25	0,4	35	14	57	3	20	2	5	1070,98	4,40
V - 6,5	25	0,4	35	16	60	2	25	2	6,3	1285,28	4,21
V - 7	25	0,4	35	14	70	3	20	2	5	1550,09	4,01
V - 3	30	0,4	25	13	37	2	16	2	5	331,67	4,01
V - 3,5	30	0,4	25	15	36	2	20	2	5	430,73	4,31
V - 4	30	0,4	25	14	43	2	20	2	5	543,61	4,05
V - 4,5	30	0,4	25	14	52	2	20	2	5	694,93	4,00
V - 5	30	0,4	25	18	48	3	20	2	6,3	858,27	4,40
V - 5,5	30	0,4	25	14	57	3	20	2	6,3	1003,82	4,21
V - 6	30	0,4	25	15	60	2	25	2	10	1215,51	4,04
V - 6,5	30	0,4	25	23	60	4	20	3	5	1460,07	4,42
V - 7	30	0,4	25	15	71	4	20	3	5	1723,62	4,33
V - 3	30	0,4	30	13	36	2	16	2	5	325,49	3,92
V - 3,5	30	0,4	30	15	35	2	20	2	5	422,42	4,25
V - 4	30	0,4	30	14	42	2	20	2	5	533,39	4,00
V - 4,5	30	0,4	30	14	51	2	20	2	5	682,46	3,96
V - 5	30	0,4	30	14	50	3	20	2	5	830,15	4,46
V - 5,5	30	0,4	30	14	56	3	20	2	5	981,18	4,20
V - 6	30	0,4	30	15	60	2	25	2	6,3	1182,23	4,06
V - 6,5	30	0,4	30	18	60	4	20	2	12,5	1431,96	4,43
V - 7	30	0,4	30	14	71	4	20	2	5	1688,25	4,41
V - 3	30	0,4	35	12	33	4	12,5	2	5	322,65	4,05

V - 3,5	30	0,4	35	14	35	2	20	2	5	414,97	4,31
V - 4	30	0,4	35	14	41	2	20	2	5	526,28	3,92
V - 4,5	30	0,4	35	14	50	2	20	2	5	672,77	3,90
V - 5	30	0,4	35	13	52	4	16	2	5	820,55	4,01
V - 5,5	30	0,4	35	14	55	3	20	2	6,3	980,01	4,18
V - 6	30	0,4	35	15	60	2	25	2	5	1171,51	4,12
V - 6,5	30	0,4	35	19	60	4	20	2	5	1390,17	4,43
V - 7	30	0,4	35	14	70	4	20	2	5	1675,30	4,42
V - 3	35	0,4	25	18	31	2	20	2	5	355,59	4,23
V - 3,5	35	0,4	25	14	39	2	20	2	5	449,81	4,02
V - 4	35	0,4	25	14	48	2	20	2	5	592,11	3,96
V - 4,5	35	0,4	25	18	45	3	20	3	5	748,82	4,31
V - 5	35	0,4	25	15	54	3	20	2	5	891,84	4,09
V - 5,5	35	0,4	25	15	60	2	25	2	5	1090,18	4,07
V - 6	35	0,4	25	18	60	4	20	4	5	1300,09	4,31
V - 6,5	35	0,4	25	16	69	4	20	2	5	1594,16	4,17
V - 7	35	0,4	25	14	78	4	20	2	5	1813,85	4,10
V - 3	35	0,4	30	16	31	2	20	2	5	344,59	4,29
V - 3,5	35	0,4	30	14	38	2	20	2	5	443,48	3,97
V - 4	35	0,4	30	14	48	2	20	2	5	586,88	4,05
V - 4,5	35	0,4	30	13	50	4	16	3	5	731,91	4,00
V - 5	35	0,4	30	14	53	3	20	2	5	869,69	4,06
V - 5,5	35	0,4	30	15	58	2	25	2	6,3	1069,46	3,99
V - 6	35	0,4	30	18	59	4	20	2	6,3	1276,77	4,32
V - 6,5	35	0,4	30	14	69	4	20	2	5	1556,80	4,23
V - 7	35	0,4	30	14	76	4	20	2	5	1788,54	4,06
V - 3	35	0,4	35	14	31	2	20	2	5	334,38	4,31
V - 3,5	35	0,4	35	14	38	2	20	2	5	443,67	4,05
V - 4	35	0,4	35	14	47	2	20	2	5	580,04	3,98
V - 4,5	35	0,4	35	14	46	3	20	3	5	721,43	4,34
V - 5	35	0,4	35	14	53	3	20	2	5	870,55	4,15
V - 5,5	35	0,4	35	15	58	2	25	2	5	1063,40	4,05
V - 6	35	0,4	35	16	60	4	20	2	5	1255,83	4,35
V - 6,5	35	0,4	35	14	66	4	20	2	10	1533,57	4,12
V - 7	35	0,4	35	14	74	4	20	2	6,3	1767,96	3,99
V - 3	40	0,4	25	16	34	2	20	2	5	372,02	4,11
V - 3,5	40	0,4	25	14	43	2	20	2	5	486,18	3,98
V - 4	40	0,4	25	13	46	4	16	2	10	642,08	3,99
V - 4,5	40	0,4	25	18	48	3	20	3	5	788,10	4,04
V - 5	40	0,4	25	14	60	3	20	2	5	955,42	4,06
V - 5,5	40	0,4	25	19	57	4	20	2	5	1176,79	4,22
V - 6	40	0,4	25	23	58	5	20	3	5	1441,62	4,56
V - 6,5	40	0,4	25	14	77	4	20	2	5	1685,49	4,12
V - 7	40	0,4	25	14	86	4	20	3	5	1967,80	4,05
V - 3	40	0,4	30	14	33	2	20	2	6,3	357,38	3,97
V - 3,5	40	0,4	30	14	42	2	20	2	5	475,48	3,93

V - 4	40	0,4	30	18	41	3	20	2	5	630,61	4,37
V - 4,5	40	0,4	30	14	50	3	20	2	5	767,64	4,10
V - 5	40	0,4	30	15	58	3	20	2	5	941,77	3,99
V - 5,5	40	0,4	30	16	58	4	20	2	5	1145,52	4,26
V - 6	40	0,4	30	19	60	5	20	2	5	1398,46	4,71
V - 6,5	40	0,4	30	14	75	4	20	2	5	1661,51	4,08
V - 7	40	0,4	30	14	85	4	20	2	5	1932,53	4,07
V - 3	40	0,4	35	14	33	2	20	2	5	351,78	4,05
V - 3,5	40	0,4	35	14	42	2	20	2	5	475,70	4,00
V - 4	40	0,4	35	13	46	4	16	2	5	619,58	4,09
V - 4,5	40	0,4	35	14	49	3	20	2	5	753,37	4,07
V - 5	40	0,4	35	14	57	3	20	2	6,3	929,74	3,94
V - 5,5	40	0,4	35	14	58	4	20	2	5	1119,69	4,30
V - 6	40	0,4	35	22	60	4	20	3	5	1362,17	3,96
V - 6,5	40	0,4	35	14	74	4	20	2	5	1642,73	4,09
V - 7	40	0,4	35	14	74	5	20	2	6,3	1904,70	4,25
V - 3	10	0,6	25	12	25	2	12,5	2	5	232,85	3,96
V - 3,5	10	0,6	25	12	29	2	12,5	2	5	298,92	3,42
V - 4	10	0,6	25	12	30	3	12,5	2	5	373,64	3,83
V - 4,5	10	0,6	25	13	33	2	16	2	5	456,11	3,86
V - 5	10	0,6	25	13	37	2	16	2	5	546,70	3,54
V - 5,5	10	0,6	25	13	43	2	16	2	5	665,13	3,46
V - 6	10	0,6	25	14	42	2	20	2	5	776,43	4,34
V - 6,5	10	0,6	25	14	47	2	20	2	5	905,26	4,22
V - 7	10	0,6	25	14	51	2	20	2	5	1031,62	3,97
V - 3	10	0,6	30	12	25	2	12,5	2	5	233,63	4,03
V - 3,5	10	0,6	30	12	25	3	12,5	2	5	294,63	4,00
V - 4	10	0,6	30	12	29	3	12,5	2	5	366,31	3,72
V - 4,5	10	0,6	30	12	33	3	12,5	2	5	447,75	3,41
V - 5	10	0,6	30	13	36	2	16	2	5	538,12	3,46
V - 5,5	10	0,6	30	14	37	2	20	2	5	658,69	4,52
V - 6	10	0,6	30	14	41	2	20	2	5	767,70	4,30
V - 6,5	10	0,6	30	14	45	2	20	2	5	883,64	4,07
V - 7	10	0,6	30	14	50	2	20	2	5	1026,37	3,94
V - 3	10	0,6	35	12	25	2	12,5	2	5	235,19	4,09
V - 3,5	10	0,6	35	12	25	4	10	2	5	293,22	3,40
V - 4	10	0,6	35	13	27	2	16	2	5	362,70	3,94
V - 4,5	10	0,6	35	13	31	2	16	2	5	443,20	3,66
V - 5	10	0,6	35	13	36	2	16	2	5	542,17	3,51
V - 5,5	10	0,6	35	12	39	4	12,5	2	5	647,43	3,69
V - 6	10	0,6	35	14	40	2	20	2	5	760,58	4,24
V - 6,5	10	0,6	35	14	44	2	20	2	5	880,13	4,01
V - 7	10	0,6	35	14	48	2	20	2	5	1009,59	3,78
V - 3	15	0,6	25	12	26	3	12,5	2	6,3	261,17	3,79
V - 3,5	15	0,6	25	14	28	2	16	2	5	326,83	3,48
V - 4	15	0,6	25	13	34	2	16	2	6,3	419,93	3,37

V - 4,5	15	0,6	25	12	38	4	12,5	2	5	515,09	3,46
V - 5	15	0,6	25	14	39	2	20	2	5	616,67	3,86
V - 5,5	15	0,6	25	14	44	2	20	2	5	733,31	3,67
V - 6	15	0,6	25	14	49	2	20	2	5	861,09	3,46
V - 6,5	15	0,6	25	13	53	4	16	2	5	1038,48	3,93
V - 7	15	0,6	25	13	58	4	16	2	5	1188,53	3,76
V - 3	15	0,6	30	12	25	3	12,5	2	5	252,90	3,64
V - 3,5	15	0,6	30	13	28	2	16	2	5	321,36	3,54
V - 4	15	0,6	30	13	34	2	16	2	5	415,54	3,44
V - 4,5	15	0,6	30	12	37	4	12,5	2	5	508,37	3,40
V - 5	15	0,6	30	14	38	2	20	2	6,3	615,69	3,83
V - 5,5	15	0,6	30	14	43	2	20	2	5	724,49	3,63
V - 6	15	0,6	30	14	48	2	20	2	5	853,15	3,43
V - 6,5	15	0,6	30	14	49	3	20	2	5	1023,48	4,26
V - 7	15	0,6	30	13	56	4	16	3	5	1171,15	3,67
V - 3	15	0,6	35	12	25	3	12,5	2	5	254,45	3,72
V - 3,5	15	0,6	35	13	27	2	16	2	5	317,27	3,41
V - 4	15	0,6	35	13	33	2	16	2	6,3	415,84	3,33
V - 4,5	15	0,6	35	14	33	2	20	2	5	506,43	4,05
V - 5	15	0,6	35	14	37	2	20	2	6,3	611,35	3,75
V - 5,5	15	0,6	35	14	42	2	20	2	5	721,63	3,57
V - 6	15	0,6	35	14	47	2	20	2	6,3	861,02	3,38
V - 6,5	15	0,6	35	12	53	6	12,5	2	5	1022,20	3,60
V - 7	15	0,6	35	13	55	4	16	2	5	1161,95	3,64
V - 3	20	0,6	25	13	27	2	16	2	6,3	274,27	3,38
V - 3,5	20	0,6	25	13	34	2	16	2	6,3	367,44	3,33
V - 4	20	0,6	25	16	33	2	20	2	6,3	467,41	3,75
V - 4,5	20	0,6	25	14	39	2	20	2	5	559,67	3,58
V - 5	20	0,6	25	14	45	2	20	2	5	683,45	3,42
V - 5,5	20	0,6	25	14	53	2	20	2	5	838,78	3,43
V - 6	20	0,6	25	18	48	3	20	2	5	993,17	3,80
V - 6,5	20	0,6	25	15	55	3	20	2	5	1136,26	3,61
V - 7	20	0,6	25	15	59	2	25	2	5	1322,78	3,58
V - 3	20	0,6	30	13	27	2	16	2	5	270,73	3,46
V - 3,5	20	0,6	30	12	31	4	12,5	2	6,3	359,95	3,37
V - 4	20	0,6	30	14	33	2	20	2	5	446,97	3,78
V - 4,5	20	0,6	30	15	37	2	20	2	5	548,93	3,41
V - 5	20	0,6	30	14	44	2	20	2	5	670,71	3,39
V - 5,5	20	0,6	30	13	47	4	16	2	5	823,76	3,64
V - 6	20	0,6	30	14	50	3	20	2	5	968,32	3,88
V - 6,5	20	0,6	30	14	55	3	20	2	5	1119,97	3,69
V - 7	20	0,6	30	14	60	3	20	2	5	1277,85	3,49
V - 3	20	0,6	35	13	26	2	16	2	6,3	270,34	3,32
V - 3,5	20	0,6	35	14	28	2	20	2	6,3	363,47	4,10
V - 4	20	0,6	35	14	32	2	20	2	6,3	448,13	3,70
V - 4,5	20	0,6	35	14	37	2	20	2	5	543,23	3,46

V - 5	20	0,6	35	14	44	2	20	2	5	677,20	3,44
V - 5,5	20	0,6	35	13	46	4	16	2	5	815,24	3,61
V - 6	20	0,6	35	14	49	3	20	2	5	957,23	3,85
V - 6,5	20	0,6	35	14	53	3	20	2	6,3	1104,11	3,58
V - 7	20	0,6	35	14	59	3	20	2	5	1268,06	3,47
V - 3	25	0,6	25	13	32	2	16	2	5	299,33	3,38
V - 3,5	25	0,6	25	15	30	2	20	2	10	402,70	3,46
V - 4	25	0,6	25	14	38	2	20	2	5	495,87	3,52
V - 4,5	25	0,6	25	14	45	2	20	2	5	621,88	3,41
V - 5	25	0,6	25	15	47	4	16	2	5	782,31	3,49
V - 5,5	25	0,6	25	18	47	3	20	2	5	914,62	3,52
V - 6	25	0,6	25	14	56	3	20	2	6,3	1070,51	3,47
V - 6,5	25	0,6	25	20	54	4	20	2	5	1306,48	3,80
V - 7	25	0,6	25	19	59	4	20	2	5	1469,66	3,60
V - 3	25	0,6	30	14	31	2	16	2	5	299,06	3,31
V - 3,5	25	0,6	30	16	30	2	20	2	5	386,91	3,52
V - 4	25	0,6	30	14	37	2	20	2	5	486,85	3,48
V - 4,5	25	0,6	30	14	44	2	20	2	5	610,97	3,37
V - 5	25	0,6	30	13	46	4	16	3	5	758,69	3,42
V - 5,5	25	0,6	30	14	49	3	20	2	5	890,91	3,59
V - 6	25	0,6	30	14	55	3	20	2	5	1046,57	3,46
V - 6,5	25	0,6	30	15	59	2	25	2	6,3	1255,19	3,41
V - 7	25	0,6	30	16	60	4	20	2	5	1437,06	3,64
V - 3	25	0,6	35	13	31	2	16	2	5	295,20	3,35
V - 3,5	25	0,6	35	14	30	2	20	2	5	375,56	3,54
V - 4	25	0,6	35	14	36	2	20	2	5	479,55	3,40
V - 4,5	25	0,6	35	14	43	2	20	2	6,3	610,23	3,32
V - 5	25	0,6	35	14	43	3	20	2	5	748,11	3,79
V - 5,5	25	0,6	35	14	48	3	20	2	5	881,25	3,57
V - 6	25	0,6	35	14	54	3	20	2	5	1036,88	3,44
V - 6,5	25	0,6	35	14	55	4	20	2	6,3	1241,17	3,88
V - 7	25	0,6	35	14	60	4	20	2	5	1405,29	3,69
V - 3	30	0,6	25	13	37	2	16	2	5	331,67	3,40
V - 3,5	30	0,6	25	15	35	2	20	2	6,3	427,93	3,50
V - 4	30	0,6	25	14	43	2	20	2	5	543,61	3,42
V - 4,5	30	0,6	25	14	52	2	20	2	5	694,93	3,39
V - 5	30	0,6	25	18	46	3	20	2	5	832,47	3,47
V - 5,5	30	0,6	25	14	56	3	20	2	6,3	991,44	3,46
V - 6	30	0,6	25	22	51	4	20	2	5	1204,61	3,58
V - 6,5	30	0,6	25	18	59	4	20	3	5	1376,38	3,49
V - 7	30	0,6	25	23	59	5	20	2	5	1657,31	3,77
V - 3	30	0,6	30	14	27	2	20	2	10	324,73	3,46
V - 3,5	30	0,6	30	14	34	2	20	2	5	408,75	3,40
V - 4	30	0,6	30	14	42	2	20	2	5	533,39	3,38
V - 4,5	30	0,6	30	18	39	3	20	2	5	676,42	3,60
V - 5	30	0,6	30	15	47	3	20	2	5	814,21	3,46

V - 5,5	30	0,6	30	14	55	3	20	2	5	974,60	3,45
V - 6	30	0,6	30	18	52	4	20	2	5	1167,10	3,61
V - 6,5	30	0,6	30	15	60	4	20	2	6,3	1348,26	3,52
V - 7	30	0,6	30	19	59	5	20	3	5	1599,36	3,75
V - 3	30	0,6	35	15	27	2	20	2	5	312,63	3,53
V - 3,5	30	0,6	35	14	34	2	20	2	5	409,81	3,48
V - 4	30	0,6	35	14	41	2	20	2	5	526,28	3,32
V - 4,5	30	0,6	35	13	44	4	16	2	5	665,33	3,40
V - 5	30	0,6	35	14	47	3	20	2	5	801,87	3,52
V - 5,5	30	0,6	35	14	54	3	20	2	5	963,69	3,43
V - 6	30	0,6	35	15	53	4	20	2	5	1146,48	3,62
V - 6,5	30	0,6	35	14	59	4	20	2	5	1313,19	3,48
V - 7	30	0,6	35	19	58	5	20	2	5	1578,62	3,74
V - 3	35	0,6	25	15	30	2	20	2	10	353,99	3,37
V - 3,5	35	0,6	25	14	39	2	20	2	5	449,81	3,40
V - 4	35	0,6	25	14	48	2	20	2	5	592,11	3,35
V - 4,5	35	0,6	25	18	45	3	20	2	5	743,13	3,62
V - 5	35	0,6	25	15	54	3	20	2	5	891,84	3,46
V - 5,5	35	0,6	25	15	60	2	25	2	5	1090,18	3,45
V - 6	35	0,6	25	18	58	4	20	4	5	1282,57	3,46
V - 6,5	35	0,6	25	24	57	5	20	2	5	1542,48	3,62
V - 7	35	0,6	25	18	60	5	20	2	20	1803,33	3,35
V - 3	35	0,6	30	15	30	2	20	2	6,3	339,20	3,41
V - 3,5	35	0,6	30	14	38	2	20	2	5	443,48	3,36
V - 4	35	0,6	30	14	48	2	20	2	5	586,88	3,42
V - 4,5	35	0,6	30	15	45	3	20	3	5	723,67	3,49
V - 5	35	0,6	30	14	53	3	20	2	5	869,69	3,43
V - 5,5	35	0,6	30	18	50	4	20	2	6,3	1068,01	3,52
V - 6	35	0,6	30	18	57	4	20	2	5	1247,03	3,45
V - 6,5	35	0,6	30	20	57	5	20	2	5	1486,64	3,58
V - 7	35	0,6	30	24	60	5	20	2	12,5	1777,02	3,39
V - 3	35	0,6	35	14	30	2	20	2	5	330,69	3,45
V - 3,5	35	0,6	35	14	38	2	20	2	5	443,67	3,43
V - 4	35	0,6	35	18	35	3	20	2	5	576,13	3,47
V - 4,5	35	0,6	35	14	44	3	20	2	5	700,77	3,41
V - 5	35	0,6	35	14	52	3	20	2	5	864,56	3,41
V - 5,5	35	0,6	35	16	51	4	20	2	5	1050,49	3,55
V - 6	35	0,6	35	14	58	4	20	2	5	1208,93	3,43
V - 6,5	35	0,6	35	18	57	5	20	2	5	1459,39	3,63
V - 7	35	0,6	35	23	60	5	20	3	6,3	1724,62	3,40
V - 3	40	0,6	25	16	34	2	20	2	5	372,02	3,47
V - 3,5	40	0,6	25	14	43	2	20	2	5	486,18	3,37
V - 4	40	0,6	25	13	46	4	16	2	10	642,08	3,38
V - 4,5	40	0,6	25	18	48	3	20	2	6,3	789,10	3,42
V - 5	40	0,6	25	14	60	3	20	2	5	955,42	3,43
V - 5,5	40	0,6	25	18	55	4	20	2	10	1164,65	3,44

V - 6	40	0,6	25	25	54	5	20	3	5	1426,82	3,50
V - 6,5	40	0,6	25	14	77	4	20	2	5	1685,49	3,49
V - 7	40	0,6	25	14	86	4	20	3	5	1967,80	3,43
V - 3	40	0,6	30	14	33	2	20	2	6,3	357,38	3,36
V - 3,5	40	0,6	30	14	42	2	20	2	5	475,48	3,33
V - 4	40	0,6	30	18	39	3	20	2	5	616,69	3,41
V - 4,5	40	0,6	30	14	50	3	20	2	5	767,64	3,47
V - 5	40	0,6	30	15	58	3	20	2	5	941,77	3,38
V - 5,5	40	0,6	30	16	57	4	20	2	5	1132,22	3,50
V - 6	40	0,6	30	22	53	5	20	3	5	1365,73	3,46
V - 6,5	40	0,6	30	22	60	5	20	3	6,3	1598,55	3,43
V - 7	40	0,6	30	25	60	6	20	3	8	1919,72	3,49
V - 3	40	0,6	35	14	33	2	20	2	5	351,78	3,43
V - 3,5	40	0,6	35	14	42	2	20	2	5	475,70	3,39
V - 4	40	0,6	35	15	41	3	20	2	5	611,08	3,50
V - 4,5	40	0,6	35	14	49	3	20	2	5	753,37	3,44
V - 5	40	0,6	35	14	57	3	20	2	6,3	929,74	3,34
V - 5,5	40	0,6	35	14	56	4	20	2	5	1093,57	3,44
V - 6	40	0,6	35	18	55	5	20	2	5	1329,08	3,57
V - 6,5	40	0,6	35	20	60	5	20	3	6,3	1571,94	3,40
V - 7	40	0,6	35	24	60	6	20	2	5	1847,21	3,51
V - 3	10	0,8	25	12	25	2	12,5	2	5	232,85	3,46
V - 3,5	10	0,8	25	12	26	4	10	2	5	296,82	3,04
V - 4	10	0,8	25	13	26	2	16	2	6,3	356,25	3,12
V - 4,5	10	0,8	25	13	31	2	16	2	5	438,48	3,09
V - 5	10	0,8	25	13	34	4	12,5	2	5	545,40	3,17
V - 5,5	10	0,8	25	16	34	2	20	2	5	646,82	3,50
V - 6	10	0,8	25	14	38	2	20	2	6,3	736,04	3,35
V - 6,5	10	0,8	25	14	42	2	20	2	6,3	850,41	3,20
V - 7	10	0,8	25	14	47	2	20	2	5	974,90	3,11
V - 3	10	0,8	30	12	25	2	12,5	2	5	233,63	3,53
V - 3,5	10	0,8	30	12	25	3	12,5	2	5	294,63	3,50
V - 4	10	0,8	30	13	25	2	16	2	6,3	350,62	3,01
V - 4,5	10	0,8	30	13	30	2	16	2	5	431,12	3,00
V - 5	10	0,8	30	12	33	4	12,5	2	5	526,26	3,08
V - 5,5	10	0,8	30	15	33	2	20	2	5	625,82	3,43
V - 6	10	0,8	30	14	37	2	20	2	6,3	727,85	3,30
V - 6,5	10	0,8	30	14	41	2	20	2	5	831,22	3,15
V - 7	10	0,8	30	14	46	2	20	2	5	966,42	3,08
V - 3	10	0,8	35	12	25	2	12,5	2	5	235,19	3,58
V - 3,5	10	0,8	35	12	25	4	10	2	5	293,22	2,98
V - 4	10	0,8	35	13	25	2	16	2	5	346,93	3,07
V - 4,5	10	0,8	35	13	30	2	16	2	5	434,15	3,06
V - 5	10	0,8	35	12	32	4	12,5	2	6,3	527,99	3,01
V - 5,5	10	0,8	35	14	33	2	20	2	5	618,98	3,49
V - 6	10	0,8	35	14	36	2	20	2	5	713,08	3,23

V - 6,5	10	0,8	35	14	40	2	20	2	5	823,52	3,09
V - 7	10	0,8	35	14	45	2	20	2	6,3	974,21	3,04
V - 3	15	0,8	25	12	26	3	12,5	2	6,3	261,17	3,32
V - 3,5	15	0,8	25	13	28	2	16	2	5	320,25	3,02
V - 4	15	0,8	25	13	34	2	16	2	6,3	419,93	2,96
V - 4,5	15	0,8	25	15	30	2	20	2	10	508,46	3,00
V - 5	15	0,8	25	14	37	2	20	2	6,3	604,60	3,15
V - 5,5	15	0,8	25	14	43	2	20	2	5	721,59	3,11
V - 6	15	0,8	25	14	49	2	20	2	5	861,09	3,04
V - 6,5	15	0,8	25	14	49	4	16	3	5	1010,99	3,10
V - 7	15	0,8	25	18	48	3	20	2	5	1157,33	3,17
V - 3	15	0,8	30	12	25	3	12,5	2	5	252,90	3,19
V - 3,5	15	0,8	30	13	28	2	16	2	5	321,36	3,10
V - 4	15	0,8	30	12	31	4	12,5	3	5	410,15	2,98
V - 4,5	15	0,8	30	15	30	2	20	2	6,3	491,28	3,04
V - 5	15	0,8	30	14	36	2	20	2	5	589,55	3,09
V - 5,5	15	0,8	30	14	42	2	20	2	5	713,81	3,08
V - 6	15	0,8	30	14	42	4	16	3	5	848,00	3,05
V - 6,5	15	0,8	30	13	48	4	16	2	5	976,37	3,06
V - 7	15	0,8	30	14	49	3	20	2	5	1104,59	3,16
V - 3	15	0,8	35	12	25	3	12,5	2	5	254,45	3,26
V - 3,5	15	0,8	35	13	27	2	16	2	5	317,27	2,99
V - 4	15	0,8	35	12	31	4	12,5	2	5	407,66	3,06
V - 4,5	15	0,8	35	14	30	2	20	2	5	479,04	3,08
V - 5	15	0,8	35	14	35	2	20	2	5	582,92	3,02
V - 5,5	15	0,8	35	14	41	2	20	2	5	709,64	3,02
V - 6	15	0,8	35	13	42	4	16	2	5	832,18	3,11
V - 6,5	15	0,8	35	14	44	3	20	2	5	964,29	3,30
V - 7	15	0,8	35	14	48	3	20	2	5	1100,22	3,14
V - 3	20	0,8	25	13	27	2	16	2	6,3	274,27	2,96
V - 3,5	20	0,8	25	13	34	2	16	2	6,3	367,44	2,92
V - 4	20	0,8	25	16	31	2	20	2	8	461,87	3,00
V - 4,5	20	0,8	25	14	38	2	20	2	6,3	558,60	3,03
V - 5	20	0,8	25	14	45	2	20	2	5	683,45	3,00
V - 5,5	20	0,8	25	14	53	2	20	2	5	838,78	3,01
V - 6	20	0,8	25	18	46	3	20	2	5	971,09	3,13
V - 6,5	20	0,8	25	15	54	3	20	2	5	1124,81	3,07
V - 7	20	0,8	25	15	58	2	25	2	6,3	1322,44	3,08
V - 3	20	0,8	30	13	27	2	16	2	5	270,73	3,03
V - 3,5	20	0,8	30	12	31	4	12,5	2	6,3	359,95	2,95
V - 4	20	0,8	30	15	31	2	20	2	5	439,97	3,03
V - 4,5	20	0,8	30	14	37	2	20	2	6,3	546,87	2,98
V - 5	20	0,8	30	14	44	2	20	2	5	670,71	2,97
V - 5,5	20	0,8	30	18	39	3	20	2	5	807,28	3,11
V - 6	20	0,8	30	15	47	3	20	2	5	949,24	3,12
V - 6,5	20	0,8	30	14	53	3	20	2	5	1094,46	3,06

V - 7	20	0,8	30	14	60	3	20	2	6,3	1288,24	3,08
V - 3	20	0,8	35	13	26	2	16	2	6,3	270,34	2,91
V - 3,5	20	0,8	35	16	25	2	20	2	6,3	356,57	3,06
V - 4	20	0,8	35	14	31	2	20	2	5	435,00	3,08
V - 4,5	20	0,8	35	14	37	2	20	2	5	543,23	3,03
V - 5	20	0,8	35	14	44	2	20	2	5	677,20	3,02
V - 5,5	20	0,8	35	15	40	3	20	2	6,3	800,65	3,09
V - 6	20	0,8	35	14	46	3	20	2	5	927,63	3,08
V - 6,5	20	0,8	35	14	52	3	20	2	5	1082,98	3,04
V - 7	20	0,8	35	16	49	4	20	2	6,3	1270,85	3,13
V - 3	25	0,8	25	13	32	2	16	2	5	299,33	2,97
V - 3,5	25	0,8	25	14	29	2	20	2	12,5	401,92	2,87
V - 4	25	0,8	25	14	38	2	20	2	5	495,87	3,08
V - 4,5	25	0,8	25	14	45	2	20	2	5	621,88	2,99
V - 5	25	0,8	25	14	54	2	20	2	5	781,94	3,00
V - 5,5	25	0,8	25	18	47	3	20	2	5	914,62	3,08
V - 6	25	0,8	25	14	56	3	20	2	6,3	1070,51	3,04
V - 6,5	25	0,8	25	22	50	4	20	2	5	1277,92	3,10
V - 7	25	0,8	25	18	59	4	20	2	6,3	1466,36	3,15
V - 3	25	0,8	30	14	31	2	16	2	5	299,06	2,90
V - 3,5	25	0,8	30	16	30	2	20	2	5	386,91	3,08
V - 4	25	0,8	30	14	37	2	20	2	5	486,85	3,05
V - 4,5	25	0,8	30	14	44	2	20	2	5	610,97	2,96
V - 5	25	0,8	30	18	39	3	20	2	5	744,13	3,02
V - 5,5	25	0,8	30	14	48	3	20	2	6,3	890,61	3,07
V - 6	25	0,8	30	14	55	3	20	2	5	1046,57	3,03
V - 6,5	25	0,8	30	18	51	4	20	2	5	1234,95	3,12
V - 7	25	0,8	30	16	59	4	20	2	5	1421,00	3,11
V - 3	25	0,8	35	13	31	2	16	2	5	295,20	2,94
V - 3,5	25	0,8	35	15	29	2	20	2	5	374,68	2,96
V - 4	25	0,8	35	14	36	2	20	2	5	479,55	2,98
V - 4,5	25	0,8	35	14	43	2	20	2	6,3	610,23	2,91
V - 5	25	0,8	35	15	40	3	20	2	6,3	736,96	3,00
V - 5,5	25	0,8	35	14	47	3	20	2	5	872,64	3,03
V - 6	25	0,8	35	14	54	3	20	2	5	1036,88	3,01
V - 6,5	25	0,8	35	16	51	4	20	2	5	1216,08	3,07
V - 7	25	0,8	35	14	58	4	20	2	5	1381,35	3,07
V - 3	30	0,8	25	13	37	2	16	2	5	331,67	2,98
V - 3,5	30	0,8	25	15	35	2	20	2	6,3	427,93	3,07
V - 4	30	0,8	25	14	43	2	20	2	5	543,61	3,00
V - 4,5	30	0,8	25	14	52	2	20	2	5	694,93	2,97
V - 5	30	0,8	25	18	46	3	20	2	5	832,47	3,04
V - 5,5	30	0,8	25	14	56	3	20	2	6,3	991,44	3,04
V - 6	30	0,8	25	22	51	4	20	2	5	1204,61	3,14
V - 6,5	30	0,8	25	18	59	4	20	3	5	1376,38	3,06
V - 7	30	0,8	25	23	57	5	20	4	5	1648,20	3,17

V - 3	30	0,8	30	14	27	2	20	2	10	324,73	3,03
V - 3,5	30	0,8	30	14	34	2	20	2	5	408,75	2,97
V - 4	30	0,8	30	14	42	2	20	2	5	533,39	2,97
V - 4,5	30	0,8	30	18	38	3	20	2	5	670,08	3,03
V - 5	30	0,8	30	15	47	3	20	2	5	814,21	3,03
V - 5,5	30	0,8	30	16	54	3	20	2	5	983,01	2,98
V - 6	30	0,8	30	18	51	4	20	2	5	1159,91	3,07
V - 6,5	30	0,8	30	15	60	4	20	2	6,3	1348,26	3,09
V - 7	30	0,8	30	22	55	5	20	2	5	1582,55	3,06
V - 3	30	0,8	35	15	27	2	20	2	5	312,63	3,09
V - 3,5	30	0,8	35	14	34	2	20	2	5	409,81	3,05
V - 4	30	0,8	35	14	41	2	20	2	5	526,28	2,91
V - 4,5	30	0,8	35	18	37	3	20	2	5	660,03	2,98
V - 5	30	0,8	35	14	47	3	20	2	5	801,87	3,08
V - 5,5	30	0,8	35	14	54	3	20	2	5	963,69	3,01
V - 6	30	0,8	35	15	52	4	20	3	5	1139,99	3,09
V - 6,5	30	0,8	35	14	59	4	20	2	5	1313,19	3,05
V - 7	30	0,8	35	18	56	5	20	2	5	1540,77	3,09
V - 3	35	0,8	25	15	30	2	20	2	10	353,99	2,95
V - 3,5	35	0,8	25	14	39	2	20	2	5	449,81	2,98
V - 4	35	0,8	25	14	48	2	20	2	5	592,11	2,94
V - 4,5	35	0,8	25	18	45	3	20	2	5	743,13	3,17
V - 5	35	0,8	25	15	54	3	20	2	5	891,84	3,03
V - 5,5	35	0,8	25	15	60	2	25	2	5	1090,18	3,02
V - 6	35	0,8	25	18	60	4	20	2	5	1284,93	3,17
V - 6,5	35	0,8	25	24	57	5	20	2	5	1542,48	3,17
V - 7	35	0,8	25	14	78	4	20	2	5	1813,85	3,04
V - 3	35	0,8	30	15	30	2	20	2	6,3	339,20	2,99
V - 3,5	35	0,8	30	14	38	2	20	2	5	443,48	2,94
V - 4	35	0,8	30	14	48	2	20	2	5	586,88	3,00
V - 4,5	35	0,8	30	18	43	3	20	2	5	724,54	3,05
V - 5	35	0,8	30	14	53	3	20	2	5	869,69	3,01
V - 5,5	35	0,8	30	18	50	4	20	3	5	1066,80	3,09
V - 6	35	0,8	30	18	57	4	20	2	5	1247,03	3,03
V - 6,5	35	0,8	30	20	57	5	20	2	5	1486,64	3,13
V - 7	35	0,8	30	25	55	6	20	2	5	1757,38	3,10
V - 3	35	0,8	35	14	30	2	20	2	5	330,69	3,02
V - 3,5	35	0,8	35	14	38	2	20	2	5	443,67	3,00
V - 4	35	0,8	35	18	35	3	20	2	5	576,13	3,04
V - 4,5	35	0,8	35	14	44	3	20	2	5	700,77	2,99
V - 5	35	0,8	35	14	52	3	20	2	5	864,56	2,99
V - 5,5	35	0,8	35	16	51	4	20	2	5	1050,49	3,11
V - 6	35	0,8	35	14	58	4	20	2	5	1208,93	3,01
V - 6,5	35	0,8	35	18	56	5	20	2	5	1443,25	3,09
V - 7	35	0,8	35	22	55	6	20	2	5	1710,84	3,14
V - 3	40	0,8	25	16	34	2	20	2	5	372,02	3,04

V - 3,5	40	0,8	25	14	43	2	20	2	5	486,18	2,95
V - 4	40	0,8	25	14	53	2	20	2	6,3	643,14	2,90
V - 4,5	40	0,8	25	18	48	3	20	2	6,3	789,10	3,00
V - 5	40	0,8	25	14	60	3	20	2	5	955,42	3,01
V - 5,5	40	0,8	25	18	55	4	20	2	10	1164,65	3,01
V - 6	40	0,8	25	22	57	3	25	2	5	1429,66	3,10
V - 6,5	40	0,8	25	23	60	5	20	2	12,5	1663,04	3,00
V - 7	40	0,8	25	23	60	6	20	5	10	1965,46	3,04
V - 3	40	0,8	30	14	33	2	20	2	6,3	357,38	2,94
V - 3,5	40	0,8	30	14	42	2	20	2	5	475,48	2,92
V - 4	40	0,8	30	18	39	3	20	2	5	616,69	2,99
V - 4,5	40	0,8	30	14	50	3	20	2	5	767,64	3,04
V - 5	40	0,8	30	15	58	3	20	2	5	941,77	2,96
V - 5,5	40	0,8	30	16	57	4	20	2	5	1132,22	3,07
V - 6	40	0,8	30	22	53	5	20	3	5	1365,73	3,03
V - 6,5	40	0,8	30	22	60	5	20	3	6,3	1598,55	3,01
V - 7	40	0,8	30	24	60	6	20	4	6,3	1886,46	3,04
V - 3	40	0,8	35	14	33	2	20	2	5	351,78	3,00
V - 3,5	40	0,8	35	14	42	2	20	2	5	475,70	2,97
V - 4	40	0,8	35	15	41	3	20	2	5	611,08	3,07
V - 4,5	40	0,8	35	14	49	3	20	2	5	753,37	3,02
V - 5	40	0,8	35	14	57	3	20	2	6,3	929,74	2,93
V - 5,5	40	0,8	35	14	56	4	20	2	5	1093,57	3,01
V - 6	40	0,8	35	18	55	5	20	2	5	1329,08	3,13
V - 6,5	40	0,8	35	18	60	5	20	2	10	1559,84	2,98
V - 7	40	0,8	35	18	60	6	20	2	12,5	1813,45	3,01